# SOPHUS LIE
# GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

AUF GRUND EINER BEWILLIGUNG AUS DEM NORWEGISCHEN FORSCHUNGSFONDS VON 1919 UND MIT UNTERSTÜTZUNG DER VIDENSKAPSAKADEMI ZU OSLO UND DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG · HERAUSGEGEBEN VON DEM NORWEGISCHEN MATHEMATISCHEN VEREIN DURCH

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT OSLO

## ZWEITER BAND

# GEOMETRISCHE ABHANDLUNGEN

## ZWEITE ABTEILUNG

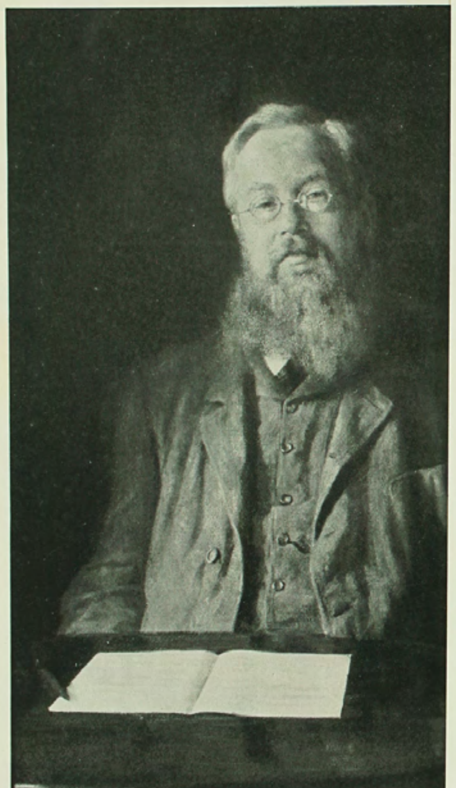
## II. TEIL

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL UND POUL HEEGAARD

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1937

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1937



SOPHUS LIE

Nach einem Ölgemälde von Erik Werenskiold

# SOPHUS LIE

# SOPHUS LIE

# SAMLEDE AVHANDLINGER

VED BEVILGNING FRA
STATENS FORSKNINGSFOND AV 1919
OG MED UNDERSTØTTELSE AV
VIDENSKAPSAKADEMIET I OSLO
OG
VIDENSKAPERNES AKADEMI I LEIPZIG
UTGITT AV
NORSK MATEMATISK FORENING

VED

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR VED UNIVERSITETET
I GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR VED UNIVERSITETET
I OSLO

## ANNET BINDS

ANNEN DEL
MED ET BILLEDE

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1937

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1937

# SOPHUS LIE

# GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

AUF GRUND EINER BEWILLIGUNG AUS DEM
NORWEGISCHEN FORSCHUNGSFONDS VON 1919
MIT UNTERSTÜTZUNG DER
VIDENSKAPSAKADEMI ZU OSLO
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG
HERAUSGEGEBEN VON DEM
NORWEGISCHEN MATHEMATISCHEN VEREIN

DURCH

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
OSLO

## ZWEITEN BANDES

ZWEITER TEIL
MIT EINEM BILDNISSE

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1937

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1937

# GEOMETRISCHE ABHANDLUNGEN

ZWEITE ABTEILUNG

ZWEITER TEIL

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL UND POUL HEEGAARD



# GEOMETRISKE AVHANDLINGER

ANNEN AVDELING

ANNEN DEL

UTGITT AV

FRIEDRICH ENGEL OG POUL HEEGAARD

PRINTED IN GERMANY

## Vorwort der Herausgeber

Die beiden Bände I und II zusammengenommen gewähren einen Überblick über Lies Leistungen auf dem Gebiete der Geometrie. Diese sind ihm, wie sein ganzes mathematisches Lebenswerk, aus einer Reihe fruchtbarer Gedanken erwachsen, die im wesentlichen bis in die Jahre 1869 und 1870 zurückgehen, und die er mit einer bewunderungswürdigen Folgerichtigkeit in langjähriger nie erlahmender Arbeit weiterentwickelt und ausgebaut hat.

Die geometrischen Aufgaben, die er sich schon in dieser Zeit gestellt hatte, führten ihn dazu, die Differentialgleichungen im weitesten Umfange in Angriff zu nehmen, und dadurch sah er sich veranlaßt, die Theorie der Transformationsgruppen nicht bloß zu begründen, sondern zu einem abgeschlossenen Lehrgebäude zu machen. In dem Vorworte zu Bd. VI ist das in großen Zügen geschildert. Wenn er auch auf diese Weise von der eigentlichen Geometrie abgezogen wurde, so besaß er doch in jenen Aufgaben eine geradezu unerschöpfliche Vorratskammer an weittragenden Problemen, auf die er jederzeit zurückgreifen konnte, wenn es ihm beliebte, sei es, daß er Erholung suchte von der unendlichen ermüdenden Rechenarbeit, zu der er durch die Gruppentheorie genötigt wurde, sei es, daß andre Gründe ihn veranlaßten, Aufgaben aus seiner Jugendzeit wieder aufzunehmen. Das zweite war zum Beispiel der Fall, als er den Zusammenhang bemerkte, der zwischen seinen Translationsflächen und dem Abelschen Theoreme besteht.

Wir verzichten darauf, Einzelheiten zu besprechen. Dagegen können wir nicht umhin, auf die überragende Stellung hinzuweisen, welche Lies Dissertation mit ihrer Fortsetzung (Abh. XI und XII von Bd. I) in seinem Lebenswerke einnimmt, namentlich in der neuen Fassung, die er beiden in der großen Abhandlung „Über Komplexe" (Math. Ann. Bd. V, Abh. I in Bd. II dieser Ausgabe) gegeben hat. Je länger und je genauer man sich mit diesen Abhandlungen beschäftigt, um so größer wird die Bewunderung für das darin Geleistete. Es wird noch vieler Arbeit bedürfen, sollen die Gedanken, die Lie darin in verschwenderischer Fülle ausgestreut hat, auch nur einigermaßen ausgeschöpft werden. Bei keiner anderen Abhandlung waren so zahlreiche und so ausgedehnte Erläuterungen nötig, wie hier. Deshalb schien auch das in den Anmerkungen zu Abh. XI und XII von Bd. I Gesagte bei weitem noch nicht genügend, und Abh. I von Bd. II wurde mit neuen umfangreichen Erläuterungen versehen. Trotzdem kann nicht behauptet werden, daß alles, was in jenen Lieschen Abhandlungen steht, vollständig aufgeklärt sei. Wenn nur die Mathematiker finden, daß das Eindringen in die Abhandlungen erleichtert und deren vollständiges Verständnis angebahnt ist, so hat die vorliegende Ausgabe ihren Zweck erfüllt.

Bei der Korrektur des ganzen zweiten Bandes hat wiederum Professor E. A. Weiß in Bonn mitgewirkt, wofür ihm hier öffentlich unser Dank ausgesprochen sei.

Im Juli 1936 wurde in Oslo ein internationaler Mathematikerkongreß abgehalten. Dabei sollte eine von dem Bildhauer Dyre Vaa stammende Marmorbüste von Sophus Lie enthüllt werden, die norwegische Verehrer Lies und Freunde der Wissenschaft für die Universität Oslo gestiftet hatten. Gern hätten wir gleichzeitig den zweiten Teil des zweiten Bandes dem Kongresse vorgelegt, doch war das leider nicht möglich, denn damals lagen nur die in diesem zweiten Teile vereinigten Abhandlungen Lies im Reindrucke vor, und die Erläuterungen fehlten noch. Als nun die Enthüllung der Büste in der Sitzung des Kongresses vom 16. 7. 1936 stattfand, hatte der eine von uns, Heegaard, als Stellvertreter des Rektors die Büste für die Universität Oslo zu übernehmen. Er benutzte diese Gelegenheit, dem Kongresse wenigstens jenen Reindruck der Abhandlungen zu überreichen und so die anwesenden Mathematiker davon in Kenntnis zu setzen, daß der wesentlichste Teil der Ausgabe in absehbarer Zeit fertig vorliegen würde.

Außer der erst vor kurzem geschaffenen Büste gibt es noch eine ältere künstlerische Darstellung von Lies äußerer Erscheinung, nämlich das bald nach Lies Tode entstandene Ölgemälde von der Meisterhand Erik Werenskiolds, eine Zierde der Sammlung von Bildnissen berühmter Lehrer der Universität Oslo. Wir freuen uns, dem vorliegenden Teilbande eine Wiedergabe dieses Ölgemäldes beigeben zu können.

Mit dem nunmehr vollständigen zweiten Bande ist die Herausgabe der von Lie selbst veröffentlichten Abhandlungen abgeschlossen. Ursprünglich war ja noch ein siebenter Band geplant, in dem aus dem außerordentlich umfangreichen handschriftlichen Nachlasse Lies eine größere Anzahl solcher Stücke abgedruckt werden sollte, die sich zur Veröffentlichung eigneten. Der eine von uns, Engel, hat bereits eine ganze Reihe von Abhandlungen für diesen Zweck druckfertig gemacht, doch läßt sich zur Zeit nicht übersehen, ob und wann der Band wird erscheinen können.

Welches nun aber auch das Schicksal dieses siebenten Bandes sein mag, der größte und zugleich wichtigste Teil der Aufgabe, die den unterzeichneten Herausgebern gestellt war, ist nunmehr erledigt. Es ist daher jetzt der geeignete Zeitpunkt und hier der geeignete Ort, allen den Stellen und den Männern, die das Zustandekommen der Ausgabe ermöglicht haben, noch einmal ausdrücklich zu danken.



Daß die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner im November 1912 die erste Zeichnung auf die geplante Ausgabe der Abhandlungen von Sophus Lie zu eröffnen wagen konnte, das hatte sie der Sächsischen Akademie der Wissenschaften in Leipzig zu danken, die auf Grund einer Anregung von K. Rohn einen namhaften Zuschuß zugesichert hatte. Die Videnskapsakademi in Oslo bestritt die Kosten einer für die Ausgabe unentbehrlichen Vorarbeit, indem sie durch C. Størmer und A. Guldberg eine Übersicht über die ungeheure Masse von Lies handschriftlichem Nachlasse herstellen ließ. Als die erste Zeichnung keinen genügenden Erfolg brachte, bewilligte das norwegische Storting am 15. 4. 1913 die nötigen Mittel, um vierzig Exemplare der Ausgabe zu zeichnen. Der nunmehr begonnene Druck erlitt durch den Ausbruch des Weltkrieges eine verhängnisvolle Unterbrechung, die das ganze Unternehmen in Gefahr brachte. Da war es C. Størmer, auf dessen Anregung der Norsk Matematisk Forening an die Verwaltung des 1919 vom Storting bewilligten Forskningsfonds herantrat mit der Bitte, die nötigen Mittel zu bewilligen, aus denen die gesamten Kosten der Fortführung und Vollendung der Ausgabe gedeckt werden könnten. Die jährlichen Bewilligungen aus dem Forskningsfond haben es dann dem Norsk Matematisk Forening ermöglicht, die Herausgabe der Lieschen Abhandlungen als ein rein norwegisches Unternehmen durchzuführen, bei dem die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner nur als Drucker und, im Vereine mit H. Aschehoug & Co. in Oslo, als Kommissionär beteiligt war. Den Unterzeichneten, die mit der eigentlichen Herausgabe betraut wurden, hat man dabei in der Ausgestaltung der Ausgabe, namentlich in bezug auf die Hinzufügung der nötigen Erläuterungen, vollständig freie Hand gelassen, wofür sie gar nicht genug dankbar sein können.

Endlich gebührt auch der Universität Oslo ein ganz besonderer Dank. Als die Ausgabe der Abhandlungen schon im Gange war, stellte es sich heraus, daß Lies dreibändiges Werk „Die Theorie der Transformationsgruppen" vergriffen war, ein unerträglicher Zustand. Auf Betreiben ihres damaligen Rektors, des Professors Sem Sæland, ermöglichte 1930 die Universität Oslo die Herstellung eines Neudrucks, der das Werk zu einem erschwinglichen Preise wieder zugänglich gemacht hat.

Daß die stattlichen sechs Bände, zu denen die Ausgabe gediehen ist, der Druckerei von B. G. Teubner zur höchsten Ehre gereichen, wird jeder Mathematiker anerkennen. Es sei aber auch hier noch einmal mit Dank hervorgehoben.

Im Mai 1937. **F. Engel** und **P. Heegaard.**

## Inhaltsverzeichnis zum zweiten Teile des zweiten Bandes



## X.

## Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel. [277

Comptes Rendus, Bd. 114, S. 277—280, Paris 1892; vorgelegt von E. Picard in der Sitzung vom 8. 2. 1892.

**1.** Si l'on soumet une courbe dans l'espace à un mouvement de translation, tous les points de cette courbe décrivent des courbes congruentes, ayant des tangentes parallèles. Ensuite, si une surface peut être engendrée d'une manière par la translation d'une courbe, elle admet encore une autre génération pareille. J'appelle de telles surfaces, dont je m'occupe depuis longtemps, des *surfaces de translation*.

Les surfaces de translation sont représentées par des équations de la forme:

$$x = A_1(t_1) + B_1(t_2), \quad y = A_2(t_1) + B_2(t_2), \quad z = A_3(t_1) + B_3(t_2),$$

les $A$ et les $B$ désignant des fonctions quelconques de l'argument $t_1$ ou $t_2$.

**2.** Si les fonctions $A$, $B$, $C$ et $D$ satisfont à trois équations fonctionnelles de la forme: [278

$$A_k(t_1) + B_k(t_2) = C_k(t_3) + D_k(t_4),$$

et si, de plus, les arguments $t_1, t_2, t_3, t_4$ sont liés par deux équations seulement, dont chacune contient trois arguments au moins, notre surface, qui sera aussi représentée par les équations:

$$x = C_1(t_3) + D_1(t_4), \quad y = C_2(t_3) + D_2(t_4), \quad z = C_3(t_3) + D_3(t_4),$$

peut être engendrée de quatre manières différentes par un mouvement de translation de certaines courbes.

**3.** Je me suis proposé le problème général de *trouver toutes les surfaces courbes qui peuvent être engendrées de quatre manières différentes par la translation de certaines courbes.*

En termes plus précis, je cherche à déterminer les fonctions $A, B, C$ et $D$ de telle sorte que les équations:

$$A_k(t_1) + B_k(t_2) = C_k(t_3) + D_k(t_4) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3)}$$

donnent entre les arguments $t_1, t_2, t_3, t_4$ deux relations seulement, chacune d'elles contenant au moins trois arguments. J'exclus le cas trivial où la dernière des équations fonctionnelles dépend linéairement des deux premières.

**4.** On trouve toutes les solutions de ce problème en prenant une équation $F(\alpha, \beta) = 0$ du quatrième ordre irréductible ou réductible, formant ensuite les expressions:

$$\int^{\alpha} \frac{\alpha\, d\alpha}{F'_\beta} = \varphi_1(\alpha), \quad \int^{\alpha} \frac{\beta\, d\alpha}{F'_\beta} = \varphi_2(\alpha), \quad \int^{\alpha} \frac{d\alpha}{F'_\beta} = \varphi_3(\alpha),$$

et posant enfin:

$$A_k(\alpha) = B_k(\alpha) = -C_k(\alpha) = -D_k(\alpha) = \varphi_k(\alpha).$$

Qu'on obtienne de cette manière des solutions, c'est une conséquence à peu près immédiate du théorème d'Abel appliqué aux points d'intersection d'une courbe du quatrième ordre avec une droite. Au contraire, qu'on obtienne de cette manière toutes les solutions de mon problème, c'est une vérité assez cachée dont je dois la découverte à un heureux hasard.

**5.** Je suis parvenu à démontrer pour $n$ dimensions un théorème analogue que voici:

Les $p$ équations fonctionnelles: [279

$$A_{k,1}(t_1) + \cdots + A_{k,p-1}(t_{p-1}) = -A_{k,p}(t_p) - \cdots - A_{k,2p-2}(t_{2p-2}) \\ {\scriptstyle (k=1,\ldots,p)}$$

sont satisfaites, quand on demande que les arguments $t_1, \ldots, t_{2p-2}$ soient liés seulement par $p-1$ équations, dont chacune contienne au moins $p$ arguments, de la manière la plus générale par des expressions de la forme:

$$A_{k,i}(t) = \varphi_k(t),$$

$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)$ désignant $p$ intégrales abéliennes de la première espèce et de genre $p$.[1]) Il existe des solutions spéciales qui sont toutes des intégrales abéliennes dont le genre est moindre que $p$.

1) Le théorème ci-dessus a une certaine analogie avec un théorème important de M. Koenigsberger; néanmoins il existe une différence essentielle, car, d'une part, mes équations contiennent un nombre beaucoup plus grand de fonctions inconnues; d'autre part, M. Koenigsberger suppose d'avance que les arguments sont liés par des relations algébriques.



Je fais abstraction des solutions triviales qu'on obtient en posant:

$$A_{p,i}(t_i) = d_1 A_{1,i}(t_i) + \cdots + d_{p-1} A_{p-1,i}(t_i),$$

les $d_k$ désignant des constantes.

**6.** On peut supposer que le système des fonctions:

$$(1) \qquad A_{k,p}, \ldots, A_{k,2p-2} \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,p)}$$

n'est pas complètement déterminé quand le système des fonctions:

$$(2) \qquad A_{k,1}, \ldots, A_{k,p-1} \qquad {\scriptstyle (k=1,\ldots,p)}$$

est donné. Dans ces cas, il existe précisément $\infty^{p-2}$ systèmes (1) correspondants au système (2) donné.

**7.** La solution complète de ce problème accessoire découle d'un théorème auxiliaire bien intéressant, qu'on pourra, pour le cas de $p=4$, formuler de la manière suivante:

Il existe dans l'espace $\infty^2$ courbes gauches du troisième ordre, passant par cinq points donnés. Chacune de ces courbes détermine dans un plan quelconque les sommets d'un triangle, et tous ces triangles sont autopolaires par rapport à une certaine conique.

**8.** Il est digne de remarque que la démonstration de mon théo- [280 rème général devienne assez facile aussitôt que $p$ surpasse quatre. En effet, en utilisant avec M. Weber sa courbe normale de genre $p$ qui s'introduit au reste forcément dans mon analyse, et en profitant de la détermination exacte de M. Noether du nombre des surfaces du second ordre contenant une telle courbe normale, le seul point un peu difficile dans mes développements consiste dans la découverte d'un théorème général, qu'on pourra, pour le cas de $p=5$, formuler de la manière suivante:

Si, dans un espace à quatre dimensions, huit courbes données coupent chaque plan à trois dimensions en huit points situés sur trois surfaces à deux dimensions du second ordre, linéairement indépendantes, les courbes données dans l'espace à quatre dimensions sont des branches de la courbe d'intersection de trois surfaces à trois dimensions du second ordre.

# XI.

## Untersuchungen über Translationsflächen. [447

### Abhandlung I.

Leipz. Ber. 1892, Heft V, abgeliefert 9. 2. 1893, S. 447—472.
Vorgelegt in der Sitzung vom 17. 10. 1892.

**1.** Durch meine Untersuchungen über den tetraedralen Komplex sowie über die Abbildung des linearen Linienkomplexes auf den Punktraum wurde ich schon im Jahre 1870 zur eingehenden Betrachtung derjenigen Flächen geführt, die durch Translation einer Kurve erzeugt werden. Ich erkannte unter anderm, daß Monges allgemeine Gleichung der Minimalflächen nur aussagt, daß jede derartige Fläche in zweifacher Weise durch Translation einer Minimalkurve erzeugt werden kann. Auf diese Bemerkung, die merkwürdigerweise von älteren Mathematikern gar nicht berücksichtigt worden war, habe ich später eine bemerkenswerte Theorie der Minimalflächen begründet.[1])

Die Theorie der tetraedralsymmetrischen Flächen gab mir im Jahre 1871 gewisse Flächen, die in unendlich vielen Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden können.

Eine besondere Stellung nehmen diejenigen Flächen ein, welche die Gleichung:

$$s = 0$$

erfüllen, welche somit in zweifacher Weise durch Translation einer ebenen Kurve erzeugt worden sind. Ich veröffentlichte in den Jahren 1872—1879 bemerkenswerte Untersuchungen über die Integralflächen [448
der Gleichung $s = 0$, sowie über alle partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche durch Berührungstransformation auf die Form $s = 0$ reduzibel sind.

---

1) Ich zeigte unter anderm, daß für jede reelle Minimalfläche die Summe der Ordnung und der Klasse mindestens gleich 15 ist. Auf Veranlassung von mir hat Herr Rohn neuerdings gezeigt, daß die von mir besprochene Minimalfläche sechster Ordnung nie reell ist. Die Ordnung einer reellen Minimalfläche ist infolgedessen, wie meine älteren Untersuchungen zeigen, mindestens gleich neun.



Es gelang mir ferner im Jahre 1879, alle Flächen zu bestimmen, welche in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefaßt werden können. Im Laufe des letzten Jahres ist es mir gelungen, dieses Problem auf $n$ Dimensionen auszudehnen und gleichzeitig außerordentlich schöne Beziehungen zum Abelschen Theoreme zu finden.

Endlich gelang es mir im Jahre 1878, eine merkwürdige und schöne Ausdehnung meiner Theorie der Minimalflächen auf beliebige Translationsflächen zu finden.

Es ist jetzt meine Absicht, meine sämtlichen noch nicht veröffentlichten Untersuchungen über Translationsflächen in einer Reihe von Noten in den hiesigen Berichten [darzustellen].

In dieser ersten Note entwickele ich die soeben besprochene Ausdehnung meiner Theorie der Minimalflächen.

### § 1. Allgemeines über Translationsflächen.

**2.** Nimmt man zwei Raumkurven $c_0$ und $k_0$ an, die einen Punkt $p_0$ gemein haben, und verschiebt man $c_0$ parallel mit sich selbst derart, daß ihr Punkt $p_0$ auf $k_0$ entlang läuft, so beschreibt $c_0$ eine Translationsfläche. Ein beliebiger auf $c_0$ gelegener Punkt beschreibt dabei eine Kurve $k$, die mit $k_0$ kongruent und gleichgestellt ist. Folglich kann die Fläche auch durch Verschiebung der Kurve $k_0$ an $c_0$ entlang erzeugt werden:

**Satz 1.** Kann eine Fläche in einer Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden, so gestattet sie noch eine solche Erzeugung.

Sind:

$$x = A_1(t), \quad y = B_1(t), \quad z = C_1(t)$$

die Gleichungen der Kurve $c_0$ und:

$$x = A_2(\tau), \quad y = B_2(\tau), \quad z = C_2(\tau)$$

die der Kurve $k_0$, und nehmen wir der Einfachheit wegen an, daß der Koordinatenanfang der gemeinsame Punkt $p_0$ beider Kurven ist, so stellen die Gleichungen: [449

$$(1) \qquad \begin{cases} x = A_1(t) + A_2(\tau), \\ y = B_1(t) + B_2(\tau), \\ z = C_1(t) + C_2(\tau) \end{cases}$$

die betrachtete Fläche dar. Hält man $\tau$ fest, so geben sie eine Kurve $c$, hält man $t$ fest, eine Kurve $k$.

**3.** Die Fläche läßt sich auch so erzeugen:

Man verbinde einen beliebigen Punkt der Kurve:

$$x = 2A_1(t), \quad y = 2B_1(t), \quad z = 2C_1(t)$$

mit einem beliebigen Punkte der Kurve:

$$x = 2A_2(\tau), \quad y = 2B_2(\tau), \quad z = 2C_2(\tau)$$

durch eine Strecke, deren Mitte alsdann die Koordinaten (1) hat. Also:

**Satz 2.** Jede Translationsfläche kann auch als der Ort der Mitten aller Strecken betrachtet werden, welche je zwei Punkte zweier bestimmter Kurven mit einander verbinden.

**4.** Betrachten wir zwei unendlich nahe Kurven $c$ und ebenso zwei unendlich nahe Kurven $k$. Diese bestimmen ein infinitesimales Parallelogramm, also eine ebene Figur in einer Tangentenebene der Fläche. Die Tangentenebenen in benachbarten Punkten der Kurve $k$ schneiden einander also in der Richtung der hindurchgehenden Kurve $c$, und umgekehrt. Die Richtungen der durch einen beliebigen Punkt der Fläche hindurchgehenden Kurven $c$ und $k$ sind demnach konjugiert. Hieraus folgt:

**Satz 3.** In jedem Punkte der Fläche bestimmen die hindurchgehenden Kurven $c$ und $k$ Richtungen, die zu den zugehörigen Haupttangenten harmonisch liegen.

**5.** Analytisch und streng läßt sich dies so darstellen:

In einem Flächenpunkte $(x, y, z)$ ist:

$$(2) \qquad \begin{cases} dx = A_1'(t)dt + A_2'(\tau)d\tau, \\ dy = B_1'(t)dt + B_2'(\tau)d\tau, \\ dz = C_1'(t)dt + C_2'(\tau)d\tau. \end{cases}$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

ein, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} C_1'(t) - pA_1'(t) - qB_1'(t) = 0, \\ C_2'(\tau) - pA_2'(\tau) - qB_2'(\tau) = 0, \end{cases}$$ [450

woraus durch Differentiation der ersten nach $\tau$:

$$A_1'\left(r\frac{dx}{d\tau} + s\frac{dy}{d\tau}\right) + B_1'\left(s\frac{dx}{d\tau} + t\frac{dy}{d\tau}\right) = 0,$$

oder:

$$A_1'A_2'r + (A_1'B_2' + A_2'B_1')s + B_1'B_2't = 0.$$



Halten wir diese Gleichung mit der bekannten Differentialgleichung der Haupttangentenkurven:

$$(4) \qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

zusammen, so erkennen wir, daß in jedem Punkte unserer Fläche die Tangenten der hindurchgehenden Kurven $c$ und $k$ hinsichtlich der beiden Haupttangenten harmonisch gelegen sind.

Sofort leuchtet ein:

**Satz 4.** Die Developpable, die unsere Fläche längs einer Kurve der Schar $c$ oder $k$ berührt, ist eine Zylinderfläche.

**6.** Die Tangenten längs aller Kurven $c$ sind parallel den Geraden eines gewissen Kegels, der eine homogene Gleichung von der Form:

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

erfüllen wird. Ebenso sind die Tangenten längs aller Kurven $k$ parallel den Tangenten eines der Kegel:

$$\varphi(dx, dy, dz) = 0.$$

Alle Kegel $f = 0$ schneiden die unendlich ferne Ebene in ein und derselben Kurve, die sich auch definieren läßt als Durchschnitt der unendlich fernen Ebene mit der Developpabeln einer Kurve $c$. Ebenso bestimmen alle Kegel $\varphi = 0$ eine unendlich ferne Kurve. Der Tangentenkegel von einem Punkte einer dieser unendlich fernen Kurven an die Fläche berührt also die Fläche längs einer Kurve $k$, beziehungsweise $c$.

**7.** Nimmt man insbesondere an, daß die Kegel $f = 0$ mit den Kegeln $\varphi = 0$ identisch sind, anders ausgesprochen, daß die beiden Kurven $c_0$ und $k_0$ — und mit ihnen alle Kurven $c$ und $k$ — eine gemeinsame Differentialgleichung von der Form:

$$f(dx, dy, dz) = 0$$ [451

befriedigen, die irreduzibel sein soll, so kann man beweisen, daß sowohl die Kurven $c$, wie die Kurven $k$ eine Umhüllungskurve, und zwar eine gemeinsame Umhüllungskurve, besitzen.

Denn alsdann ist zu jeder Tangente einer Kurve $c$ eine parallele Tangente an jede Kurve $k$ vorhanden. Da nun alle Kurven $k$ längs einer Kurve $c$ parallele Tangenten haben, so ist auf dieser $c$ ein Punkt $p$ vorhanden, in dem die Kurve von der hindurchgehenden Kurve $k$ berührt wird. Erinnert man sich daran, daß $c$ in die benachbarte Kurve $c'$ durch eine Translationsbewegung übergeht, deren Richtung die besprochene gemeinsame Tangentenrichtung ist, so sieht man, daß $c$ und $c'$ einander in dem Punkte schneiden, sodaß alle $c$ eine Umhüllungskurve $\Sigma$, den Ort des Punktes $p$, besitzen, die von $c$ in $p$ berührt wird. Da $c$ in $p$ von der hindurchgehenden Kurve $k$ berührt wird, so folgt, daß die Umhüllungskurve $\Sigma$ auch von allen $k$ berührt wird. Also:

**Satz 5.** Wenn die auf unserer Fläche gelegenen Kurven $c$ und $k$ eine irreduzible Relation von der Form:

$$f(dx,\, dy,\, dz) = 0$$

befriedigen, so haben die Kurven $c$ und $k$ eine, und zwar eine gemeinsame Umhüllungskurve $\Sigma$.

Man kann hinzufügen, daß die Kurven $c$ keine krumme Umhüllungskurve besitzen, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

**8.** Hieran schließt sich noch an:

**Satz 6.** Gleitet eine Kurve $c$ in Translationsbewegung längs einer Kurve $\Sigma$, deren Tangenten paarweise mit denen von $c$ parallel sind, so kann die erzeugte Fläche auch dadurch beschrieben werden, daß eine gewisse andere Kurve $k$ in Translationsbewegung längs $\Sigma$ gleitet.

Es ist insbesondere denkbar, daß die Kurven $c$ und $k$ eine irreduzible Schar bilden. Dies tritt ein dann, aber auch nur dann, wenn die Kurve $\Sigma$ mit jeder Kurve $c$ nach dem Verhältnisse $2:1$ ähnlich ist.

## § 2. Beziehungen zwischen zwei Translationsflächen.

**9.** Wir wollen nunmehr die beiden Translationsflächen betrachten, welche durch die Gleichungen: [452

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} 2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau), \\ 2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau), \\ 2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau) \end{cases}$$

und:

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} 2x = \xi_1(t) - \xi_2(\tau), \\ 2y = \eta_1(t) - \eta_2(\tau), \\ 2z = \zeta_1(t) - \zeta_2(\tau) \end{cases}$$

dargestellt werden. Dabei wollen wir annehmen, daß die Gleichungen:

$$(1)\qquad x = \xi_1(t), \quad y = \eta_1(t), \quad z = \zeta_1(t)$$

und:

$$(2)\qquad x = \xi_2(\tau), \quad y = \eta_2(\tau), \quad z = \zeta_2(\tau)$$

zwei Kurven in solcher Form darstellen, daß die Tangenten in den Punkten $t = a$ und $\tau = a$, also in Punkten mit gleichen Parametern $t$ und $\tau$,



einander immer schneiden. Es leuchtet ein, daß zwei beliebige Kurven immer durch Gleichungen darstellbar sind, die diese Eigenschaft haben.

**10.** Unter der gemachten Voraussetzung liegen die Tangenten zweier Punkte mit gleichen Parametern $t = \tau$ und die Verbindende dieser Punkte in einer Ebene. Sind $X, Y, Z$ die Richtungskosinus der Normalen der Ebene, so bestehen die Gleichungen:

$$X(\xi_1(t) - \xi_2(t)) + Y(\eta_1(t) - \eta_2(t)) + Z(\zeta_1(t) - \zeta_2(t)) = 0,$$
$$X\frac{d\xi_1(t)}{dt} + Y\frac{d\eta_1(t)}{dt} + Z\frac{d\zeta_1(t)}{dt} = 0,$$
$$X\frac{d\xi_2(t)}{dt} + Y\frac{d\eta_2(t)}{dt} + Z\frac{d\zeta_2(t)}{dt} = 0$$

und also auch die im folgenden mehrfach benutzte Gleichung:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1(t) - \xi_2(t) & \eta_1(t) - \eta_2(t) & \zeta_1(t) - \zeta_2(t) \\ \frac{d\xi_1(t)}{dt} & \frac{d\eta_1(t)}{dt} & \frac{d\zeta_1(t)}{dt} \\ \frac{d\xi_2(t)}{dt} & \frac{d\eta_2(t)}{dt} & \frac{d\zeta_2(t)}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir solche Punkte der beiden Flächen (I) und (II) als einander entsprechend, welche zu demselben Wertsysteme $t, \tau$ gehören, so ist klar, daß die Tangentenebenen der beiden Flächen in entsprechenden Punkten parallel sind. Denn die beiden Flächen enthalten, wie aus ihren Gleichungen hervorgeht, in ihren entsprechenden Punkten $(t, \tau)$ zwei Paare paralleler Tangenten, weil die Richtungskosinus des einen Paares proportional: [453

$$\frac{d\xi_1(t)}{dt}, \quad \frac{d\eta_1(t)}{dt}, \quad \frac{d\zeta_1(t)}{dt},$$

die des anderen Paares proportional:

$$\frac{d\xi_2(\tau)}{d\tau}, \quad \frac{d\eta_2(\tau)}{d\tau}, \quad \frac{d\zeta_2(\tau)}{d\tau}$$

sind, und die beiden Tangenten in jedem der Punkte $(t, \tau)$ im allgemeinen nicht zusammenfallen. Die Flächen (I) und (II) enthalten also in jedem ihrer Punkte $(t, \tau)$ Tangenten parallel den Tangenten der Kurven (1) und (2) in den Punkten $(t)$ und $(\tau)$.

**11.** Jede Relation zwischen $t$ und $\tau$ bestimmt eine Kurve auf den beiden Flächen (I) und (II). Es werden also auch die Kurven der Flächen einander als entsprechend zugeordnet. Die abwickelbaren Flächen, die unsere beiden Flächen nach zusammengehörenden Kurven berühren, haben offenbar paarweise parallele Tangentenebenen.

Insbesondere richten wir unser Augenmerk auf die beiden Kurven unserer Flächen, die durch die Relation $t = \tau$ bestimmt werden. Die Developpabeln längs derselben haben paarweise parallele Ebenen, und wir werden sehen, daß die Developpable, die die Fläche (II) längs der Kurve $t = \tau$ berührt, ein Kegel ist, dessen Spitze im Anfangspunkte liegt.

Die Tangentenebene dieser Fläche in einem Punkte $t = \tau$ ist nämlich bestimmt durch die Gleichung:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2}(\xi_1(t) - \xi_2(t)) & y - \frac{1}{2}(\eta_1(t) - \eta_2(t)) & z - \frac{1}{2}(\zeta_1(t) - \zeta_2(t)) \\ \frac{d\xi_1(t)}{dt} & \frac{d\eta_1(t)}{dt} & \frac{d\zeta_1(t)}{dt} \\ \frac{d\xi_2(t)}{dt} & \frac{d\eta_2(t)}{dt} & \frac{d\zeta_2(t)}{dt} \end{vmatrix} = 0,$$

die wegen der faktisch bestehenden Gleichung (3) durch die Annahme $x = y = z = 0$ erfüllt wird. [454

**12.** Auch die andere Developpable, die, welche die Fläche (I) längs der Kurve $t = \tau$ berührt, hat eine besondere Eigenschaft: Sie enthält die Kurven (1) und (2).

Die Tangentenebene von (I) in einem Punkte $t = \tau$ enthält nämlich Tangenten parallel den Tangenten der Kurven (1) und (2) in den Punkten ($t$), und diese letzteren Geraden liegen nach Voraussetzung in einer Ebene. Da ihre Ebene den Punkt $t = \tau$ der Fläche (I) enthält — denn er ist die Mitte der Strecke, die unsere beiden Punkte auf den Kurven (1) und (2) verbindet — so muß also diese Ebene mit der Tangentenebene der Fläche (I) im Punkte $t = \tau$ zusammenfallen. Die in Rede stehende Developpable wird also umhüllt von allen Ebenen, die die Kurven (1) und (2) in Punkten mit gleichen Parametern berühren, und enthält demnach diese Kurven selbst.

**13.** Dies Ergebnis kann übrigens auch so analytisch abgeleitet werden: Die Tangentenebene der Fläche (I) im Punkte $t = \tau$ hat die Gleichung (4) mit dem einzigen Unterschiede, daß darin in der ersten Zeile statt der halben Differenzen halbe Summen stehen müssen. Die dadurch hervorgehende Gleichung wird aber wegen (3) sowohl von den Punkten (1) als auch von den Punkten (2) erfüllt. Also gilt der

**Satz 7.** Sind die analytischen Gleichungen zweier Kurven:

$$x = \xi_1(t), \quad y = \eta_1(t), \quad z = \zeta_1(t)$$

und:

$$x = \xi_2(\tau), \quad y = \eta_2(\tau), \quad z = \zeta_2(\tau)$$



so gewählt, daß die Annahme $t = \tau$ jedesmal Punkte gibt, deren Tangenten einander schneiden, so ist die Translationsfläche:

$$x = \tfrac{1}{2}(\xi_1(t) + \xi_2(\tau)), \quad y = \tfrac{1}{2}(\eta_1(t) + \eta_2(\tau)), \quad z = \tfrac{1}{2}(\zeta_1(t) + \zeta_2(\tau))$$

in eine Developpable eingeschrieben, die beide Kurven enthält. Die Ebenen dieser Developpabeln sind parallel mit denjenigen Tangentenebenen der Translationsfläche:

$$x = \tfrac{1}{2}(\xi_1(t) - \xi_2(\tau)), \quad y = \tfrac{1}{2}(\eta_1(t) - \eta_2(\tau)), \quad z = \tfrac{1}{2}(\zeta_1(t) - \zeta_2(\tau)),$$

die durch den Koordinatenanfang gehen.

## § 3. Definition einer Klasse von partiellen Differentialgleichungen. [455

**14.** Fassen wir wieder — wie zum Schlusse des § 1 — solche Translationsflächen:

$$(1) \quad \begin{cases} x = A_1(t) + A_2(\tau), \\ y = B_1(t) + B_2(\tau), \\ z = C_1(t) + C_2(\tau) \end{cases}$$

ins Auge, deren erzeugende Kurven:

$$x = A_1(t), \quad y = B_1(t), \quad z = C_1(t)$$

und:

$$x = A_2(t), \quad y = B_2(t), \quad z = C_2(t)$$

gemeinsam eine irreduzible Differentialgleichung von der Form:

$$(2) \qquad f(dx, dy, dz) = 0$$

erfüllen, sodaß also sein soll:

$$(3) \qquad f(dA_1, dB_1, dC_1) = 0, \quad f(dA_2, dB_2, dC_2) = 0.$$

**15.** Wie in § 1 (Satz 3) bewiesen wurde, liegen die beiden Haupttangenten in jedem Punkte der Fläche (1) harmonisch zu den beiden hindurchgehenden Kurven $t =$ Const. und $\tau =$ Const. Hieraus folgt, wie wir früher erkannt haben und jetzt nochmals beweisen wollen, daß alle Flächen (1), welche die Bedingungen (3) erfüllen, das heißt, alle Translationsflächen, deren erzeugende Kurven Tangenten parallel den Geraden des Kegels (2) haben, eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$R(p, q)r + S(p, q)s + T(p, q)t = 0$$

erfüllen. Hier bedeuten $p, q$ die ersten, $r, s, t$ die zweiten Differentialquotienten von $z$ nach $x, y$.

Die Gleichung (2) bestimmt, wie wir auch schon in § 1 bemerkten, eine gewisse unendlich ferne Kurve $k_\infty$. Diese Kurve spielt im folgenden dieselbe Rolle, wie der imaginäre Kugelkreis in der Theorie der *Minimalflächen*, die ja unter den *Translationsflächen* enthalten sind. Wenn wir nun in einem Punkte $(t, \tau)$ der Fläche (1) die Tangenten an die hindurchgehenden Kurven $t =$ Const. und $\tau =$ Const. ziehen, so schneiden [456 diese die unendlich ferne Ebene in zwei Punkten der Kurve $k_\infty$, wie die Gleichungen (3) aussagen. Es leuchtet ein, *daß die Flächen* (1), *die den Bedingungen* (3) *genügen, die Eigenschaft besitzen, daß ihre Haupttangenten in jedem Punkte zu zwei Tangenten harmonisch liegen, deren Fortschreitungsrichtungen* $dx$, $dy$, $dz$ *die Gleichung* (2) *erfüllen.*

Zwei Fortschreitungsrichtungen $d_1x, d_1y, d_1z$ und $d_2x, d_2y, d_2z$ sind aber harmonisch zu den Haupttangentenkurven, wenn sie die Gleichung:

(4) $$r\,d_1x\,d_2x + s(d_1x\,d_2y + d_2x\,d_1y) + t\,d_1y\,d_2y = 0$$

erfüllen. Andererseits liefern die Gleichungen:

$$f(d_1x,\, d_1y,\, d_1z) = 0, \quad f(d_2x,\, d_2y,\, d_2z) = 0,$$
$$d_1z = p\,d_1x + q\,d_1y, \quad d_2z = p\,d_2x + q\,d_2y,$$

wenn aus ihnen $d_1z$ und $d_2z$ eliminiert werden, für $d_1y : d_1x$ und $d_2y : d_2x$ gewisse Funktionen von $p$ und $q$. Setzt man diese Werte in die Gleichung (4) ein, so ergibt sich in der Tat eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

(5) $$R(p,q)r + S(p,q)s + T(p,q)t = 0.$$

**Satz 8.** *Alle Flächen:*

$$x = A_1(t) + A_2(\tau),$$
$$y = B_1(t) + B_2(\tau),$$
$$z = C_1(t) + C_2(\tau),$$

*welche den Bedingungen:*

$$f(dA_1, dB_1, dC_1) = 0, \quad f(dA_2, dB_2, dC_2) = 0$$

*genügen, erfüllen eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:*

(5) $$R(p,q)r + S(p,q)s + T(p,q)t = 0.$$

**16.** Man erkennt sehr leicht, daß diese Differentialgleichung (5) neben einem singulären Integrale erster Ordnung — nämlich der analytischen Darstellung aller Kegel $f(dx, dy, dz) = 0$ in Ebenenkoordinaten $p, q$ — *nur* solche Integralflächen besitzt, welche durch Gleichungen von der [457 Form (1), (3) bestimmt sind.

Ist die Gleichung:

(2) $$f(dx, dy, dz) = 0$$



vorgelegt, so können wir in der angegebenen Weise die zugehörige partielle Differentialgleichung:

(5) $$R(p,q)r + S(p,q)s + T(p,q)t = 0$$

aufstellen. Ihre Integralflächen (1) finden wir dann folgendermaßen:

Wir wählen zwei *beliebige* Kurven:

$$x = A_1(t), \quad y = B_1(t), \quad z = C_1(t)$$

und:

$$x = A_2(\tau), \quad y = B_2(\tau), \quad z = C_2(\tau),$$

für die:

$$f(dA_1, dB_1, dC_1) = 0$$

und:

$$f(dA_2, dB_2, dC_2) = 0$$

ist, und bilden dann die Gleichungen (1) der Fläche. Dieselben erfüllen sicher nach unseren Entwickelungen die Differentialgleichung (5), von der sie — wie soeben bemerkt wurde — sogar die allgemeinsten Integralflächen darstellen.

**17.** Wir machen schließlich noch darauf aufmerksam, daß keineswegs jede partielle Differentialgleichung von der Form (5), also keineswegs jede in $r, s, t$ lineare und homogene, sowie von $x, y, z$ freie Differentialgleichung ein allgemeines Integral von der Form (1) besitzt.

Eine Gleichung:

(5) $$R(p,q)r + S(p,q)s + T(p,q)t = 0$$

sagt nämlich aus, daß in jedem Punkte einer Integralfläche die hindurchgehenden Haupttangenten hinsichtlich der beiden Tangenten harmonisch liegen, deren Fortschreitungsrichtungen die Gleichung

(6) $$R\,dy^2 - S\,dy\,dx + T\,dx^2 = 0$$

erfüllen. Denn die Fortschreitungsrichtungen $dy : dx$, welche dieser Gleichung genügen, haben zur Summe $S : R$ und zum Produkte $T : R$ und erfüllen folglich die Gleichung (4) für konjugierte Richtungen. Die Gleichung (6) ordnet nun jedem Flächenelemente $(x, y, z, p, q)$ zwei [458 Richtungen zu. Aber diese beiden Richtungen erfüllen, wenn $R, S, T$ beliebige Funktionen von $p, q$ sind, keineswegs eine Gleichung von der Form $f(dx, dy, dz) = 0$. Denn dazu wäre notwendig und hinreichend, daß die einem beliebig gewählten Flächenelemente $(x, y, z, p, q)$ zugeordneten Richtungen $d_1x, d_1y, d_1z$ und $d_2x, d_2y, d_2z$ die Eigenschaft haben, daß etwa die Richtung $d_1x, d_1y, d_1z$ einem jeden durch sie gehenden Flächenelemente zugeordnet ist, weil die Gleichung $f = 0$ jedem Punkte einen Kegel von Richtungen zuordnet. Drücken wir diese Bedingung analytisch aus.

**18.** Wir variieren $p, q$, ohne die Fortschreitungsrichtung $dx, dy, dz$ zu ändern, und erhalten dadurch aus:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

die Gleichung:

$$\delta p\,dx + \delta q\,dy = 0.$$

Ersetzen wir also in (6) $dy : dx$ durch $-\delta p : \delta q$, so kommt:

$$R\,\delta p^2 + S\,\delta p\,\delta q + T\,\delta q^2 = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung definiert den Übergang von einem Elemente $(x, y, z, p, q)$, dem die Richtung $dx, dy, dz$ zugeordnet ist, zu einem benachbarten Elemente $(x, y, z, p + \delta p, q + \delta q)$, das ebenfalls diese Richtung enthält, und dem diese selbe Richtung zugeordnet ist. Diese Relation (7) kann nun als Differentialgleichung erster Ordnung in den Veränderlichen $p, q$ aufgefaßt werden und besitzt als solche ein Integral:

$$\Omega(p, q) = \text{Const.},$$

das in jedem Punkte $(x, y, z)$ $\infty^1$ Kegel darstellt. Die charakteristische Eigenschaft dieser Kegel ist, daß jedes einen solchen Kegel berührende Flächenelement diesen längs einer dem Elemente zugeordneten Richtung berührt. Soll nun die partielle Differentialgleichung (5) ein allgemeines Integral von der Form (1) haben, so müssen alle diese Flächenelemente eine Richtung enthalten, die nach irgend einem Punkte einer gewissen unendlich fernen Kurve $k_\infty$ geht. Die $\infty^1$ Kegel müssen daher zu $\infty^1$ Ebenenbüscheln degenerieren, das heißt, die Gleichung $\Omega(p, q) = \text{Const.}$ muß die Form:

$$q = a p + \omega(a) \tag{8}$$

besitzen. Hier bedeutet $a$ die willkürliche Konstante.

Wenn umgekehrt die Gleichung (7) ein solches Integral (8) besitzt, und zwar für beide Wurzeln der Gleichung, so hat auch die partielle Differentialgleichung (5) ein allgemeines Integral von der Form (1).

## § 4. Integralflächen, [459
## welche eine gegebene Developpable nach einer gegebenen Kurve berühren.

**19.** Wir nehmen jetzt an, die irreduzible Gleichung:

$$f(dx, dy, dz) = 0 \tag{1}$$

sei vorgelegt. Zu ihr gehört, wie wir sahen, eine gewisse partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integralflächen Translationsflächen sind. Diese Flächen werden erzeugt von irgend welchen Kurven, deren Tangenten die unendlich ferne durch $f = 0$ bestimmte Kurve $k_\infty$ treffen.



Außerdem sei nun noch irgend eine abwickelbare Fläche und auf ihr eine Kurve $C$ gegeben. Wir werden zeigen, daß es im allgemeinen nur eine Translationsfläche, präziser gesagt, nur eine diskrete Anzahl von Translationsflächen von der obigen Art gibt, die jener Developpabeln längs der Kurve $C$ eingeschrieben sind.

**20.** Es mögen zu dem Zwecke $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ laufende Koordinaten eines Punktes der Kurve $C$, und $X, Y, Z$ die Richtungskosinus der zugehörigen Normalen der developpabeln Fläche sein. Sie sind bekannt; wir denken uns etwa $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, X, Y, Z$ als Funktionen eines Parameters $\sigma$ gegeben.

Nun suchen wir eine Fläche:

$$2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau),$$
$$2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau),$$
$$2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau),$$

die die Developpable längs der Kurve $C$ berührt, und für die außerdem, wie bei (1):

$$f(d\xi_1, d\eta_1, d\zeta_1) = 0, \quad f(d\xi_2, d\eta_2, d\zeta_2) = 0 \tag{2}$$

ist. Es sollen also für eine gewisse Relation zwischen $t$ und $\tau$, die die Kurve $C$ auf der gesuchten Fläche definiert, außer (2) die Gleichungen bestehen:

$$2\mathfrak{x} = \xi_1(t) + \xi_2(\tau),$$
$$2\mathfrak{y} = \eta_1(t) + \eta_2(\tau),$$
$$2\mathfrak{z} = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau),$$
$$X\,d\xi_1 + Y\,d\eta_1 + Z\,d\zeta_1 = 0,$$
$$X\,d\xi_2 + Y\,d\eta_2 + Z\,d\zeta_2 = 0.$$

Die zweite Gleichung (2) läßt sich hiernach so schreiben: [460

$$f(2\,d\mathfrak{x} - d\xi_1,\ 2\,d\mathfrak{y} - d\eta_1,\ 2\,d\mathfrak{z} - d\zeta_1) = 0.$$

Aus dieser, der ersten Gleichung (2) und der Gleichung:

$$X\,d\xi_1 + Y\,d\eta_1 + Z\,d\zeta_1 = 0$$

lassen sich nun die $d\xi_1, d\eta_1, d\zeta_1$ als Differentiale durch $d\sigma$ ausdrücken:

$$d\xi_1 = U_1(\sigma)\,d\sigma, \quad d\eta_1 = V_1(\sigma)\,d\sigma, \quad d\zeta_1 = W_1(\sigma)\,d\sigma,$$

woraus durch Integration folgt, daß längs der Kurve $C$:

$$\xi_1 = \int U_1\,d\sigma, \quad \eta_1 = \int V_1\,d\sigma, \quad \zeta_1 = \int W_1\,d\sigma$$

ist. Sodann folgt sofort, da $\xi_2 = 2\mathfrak{x} - \xi_1$ und so weiter ist:

$$\xi_2 = 2\mathfrak{x} - \int U_1\,d\sigma = \int U_2(\sigma)\,d\sigma,$$
$$\eta_2 = 2\mathfrak{y} - \int V_1\,d\sigma = \int V_2(\sigma)\,d\sigma,$$
$$\zeta_2 = 2\mathfrak{z} - \int W_1\,d\sigma = \int W_2(\sigma)\,d\sigma,$$

wenn wir $2(d\mathfrak{x} : d\sigma) - U_1$ mit $U_2$ und so weiter bezeichnen. Hiermit sind auch $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ längs der Kurve $C$ bestimmt.

Da $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ nur von einem Parameter abhängen, und andererseits $\sigma$ längs der Kurve $C$ alle möglichen Werte annimmt, so folgt, daß hiermit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ überhaupt für die ganze gesuchte Fläche vollständig bestimmt sind. Dasselbe gilt von $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$.

**21.** Nunmehr geben wir in den erhaltenen Formeln dem Parameter $\sigma$ verschiedene Bezeichnungen $\sigma_1$ und $\sigma_2$ und stellen die Gleichungen auf:

$$(3)\qquad \begin{cases} 2x = \int U_1(\sigma_1)\,d\sigma_1 + \int U_2(\sigma_2)\,d\sigma_2, \\ 2y = \int V_1(\sigma_1)\,d\sigma_1 + \int V_2(\sigma_2)\,d\sigma_2, \\ 2z = \int W_1(\sigma_1)\,d\sigma_1 + \int W_2(\sigma_2)\,d\sigma_2. \end{cases}$$

Sie stellen eine Translationsfläche dar, die zu denen gehört, welche durch (1) definiert werden. Diese Fläche berührt ferner die gegebene Deve- [461 loppable in der gegebenen Kurve $C$, wie aus der Annahme $\sigma_1 = \sigma_2$, die die Kurve $C$ auf der gefundenen Fläche definiert, hervorgeht.

Es gilt somit der

**Satz 9.** Unter allen Translationsflächen:

$$2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau),$$
$$2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau),$$
$$2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau),$$

deren erzeugende Kurven eine gegebene Relation:

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

erfüllen:

$$f(d\xi_1, d\eta_1, d\zeta_1) = 0, \quad f(d\xi_2, d\eta_2, d\zeta_2) = 0,$$

gibt es im allgemeinen eine ganz bestimmte, die eine gegebene Kurve $C$ enthält und dabei längs derselben bestimmte Normalen besitzt. Diese Translationsfläche wird durch Quadratur gefunden.

**22.** Ist insbesondere eine algebraische Developpable und auf ihr eine algebraische Kurve $C$ gegeben, so kann man immer annehmen, daß $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, X, Y, Z$ algebraische Funktionen des Parameters $\sigma$ sind. Alsdann sind auch $U_1, V_1, W_1$ und $U_2, V_2, W_2$ algebraische Funktionen von $\sigma$. Dagegen werden die in die Gleichungen (3) eingehenden Integrale im allgemeinen transzendente Funktionen sein. Die Translationsfläche, die eine gegebene algebraische Developpable längs einer algebraischen Kurve berührt, ist also im allgemeinen transzendent.



Es ist daher ein Problem, alle auf einer vorgelegten [algebraischen] Developpabeln gelegenen algebraischen Kurven $C$ zu finden, längs deren die Fläche von einer algebraischen Translationsfläche, deren Erzeugende die Gleichung (1) erfüllen, berührt wird.

Mit diesem Probleme werden wir uns von nun an beschäftigen.

## § 5. Algebraische Integralflächen, die einem vorgelegten algebraischen Kegel eingeschrieben sind.

**23.** Eine Integralfläche ist offenbar algebraisch, wenn ihre beiden erzeugenden Kurven algebraisch sind. Ist andererseits eine Integralfläche algebraisch, so ist jeder Tangentenkegel, dessen Spitze auf der Kurve $k_\infty$ [462 liegt, algebraisch. Da er nach Satz 4 des § 1 die Fläche längs einer erzeugenden Kurve berührt, so ist folglich auch diese Kurve algebraisch. Dabei ist allerdings nicht ausgeschlossen, daß der Tangentenkegel und gleichzeitig die zugehörige Berührungskurve in mehrere Teile zerfällt; das hat aber keinen Einfluß auf die Schlußfolgerung.

**Satz 10.** Eine Integralfläche ist dann und nur dann algebraisch, wenn ihre erzeugenden Kurven algebraisch sind.

Die Tangenten längs einer erzeugenden Kurve schneiden die unendlich ferne Ebene in der Kurve $k_\infty$. Ist die erzeugende Kurve algebraisch, so ist mithin auch $k_\infty$ algebraisch. Daher:

**Satz 11.** Ist eine der zu:

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

gehörigen Integralflächen algebraisch, so ist auch diese Gleichung algebraisch.

**24.** Es ist leicht, alle möglichen algebraischen Erzeugenden, das heißt, alle algebraischen Kurven, welche die Gleichung $f = 0$ erfüllen, zu bestimmen. Man kann nämlich alle algebraischen Developpabeln konstruieren, die die algebraische Kurve $k_\infty$ enthalten. Ihre Rückkehrkurven sind die gewünschten.

Man kann daher auch leicht alle algebraischen Integralflächen bei vorgelegter Gleichung $f = 0$ konstruieren. Es ist dagegen im allgemeinen schwierig, alle algebraischen Integralflächen zu finden, die gewissen geometrischen Bedingungen genügen.

Im Anschlusse an den vorigen Paragraphen stellen wir uns ein solches Problem, indem wir alle algebraischen Kurven $C$ auf einer vorgelegten algebraischen Developpabeln suchen, längs deren diese Developpable von einer algebraischen Integralfläche berührt wird. Dies Problem kann auch so ausgesprochen werden: Alle algebraischen Integralflächen zu bestimmen, die einer vorgelegten algebraischen Developpabeln eingeschrieben sind.

Wir werden diese Aufgabe vollständig erledigen, wenn die gegebene Developpable ein Kegel ist, und werden im allgemeinen Falle zeigen, daß man alle gesuchten Flächen bestimmen kann, sobald man nur eine einzige derselben kennt.

**25.** Ehe wir hierzu übergehen, schicken wir einige Bemerkungen über die Terminologie voraus.

Wie gesagt, spielt die Kurve $k_\infty$ im folgenden dieselbe Rolle wie [463 der imaginäre Kugelkreis in der Theorie der Minimalflächen. Daher bezeichnen wir die $k_\infty$ als Pseudokugelkreis und übertragen die gewöhnliche metrische Terminologie auf diesen. Die Begriffe Tangente und Oskulationsebene werden im alten Sinne gebraucht. Dagegen sagen wir, daß eine Gerade zu einer Ebene pseudosenkrecht ist, wenn die Ebene die Kurve $k_\infty$ in zwei Punkten — außer anderen — trifft, deren Tangenten einander im Schnittpunkte jener Geraden mit der unendlich fernen Ebene treffen. Die Gerade soll dann Pseudonormale der Ebene, und die Ebene Pseudonormalebene der Geraden heißen.

**26.** Wir gehen nun in unserer Betrachtung zunächst aus von einer irgendwie vorgelegten Raumkurve. Alle Pseudonormalebenen dieser Raumkurve umhüllen eine abwickelbare Fläche, die wir die Pseudoevolute der betreffenden Raumkurve nennen.

Es besteht dann der

**Satz 12.** Die Pseudoevolute einer Raumkurve enthält diejenige Kurve, deren Developpable gleichzeitig der Raumkurve und dem Pseudokugelkreise $k_\infty$ umgeschrieben ist.

Ist nämlich $p$ ein Punkt der Raumkurve, und $P$ der unendlich ferne Punkt der zugehörigen Tangente, sind überdies $\lambda$ und $\mu$ die Berührungspunkte zweier Tangenten von $P$ an die $k_\infty$, so ist $p\lambda\mu$ die Pseudonormalebene der Tangente $pP$ im Punkte $p$, also eine Ebene der Pseudoevolute der Raumkurve. Es sind aber $p\lambda$ und $p\mu$ zwei Erzeugende der Developpabeln, die um die Raumkurve und die Kurve $k_\infty$ umgeschrieben ist. Ist $p'$ ein $p$ benachbarter Punkt der Raumkurve, und sind $P', \lambda', \mu'$ die zugehörigen zu $P, \lambda, \mu$ benachbarten Punkte der unendlich fernen Ebene, so ist $p'\lambda'\mu'$ eine benachbarte Pseudonormalebene, während $pP\lambda$ und $p'P'\lambda'$, sowie $pP\mu$ und $p'P'\mu'$ je zwei benachbarte Ebenen der abwickelbaren Fläche darstellen, die um die Raumkurve und die Kurve $k_\infty$ umgeschrieben ist. $p\lambda$ und $p'\lambda'$ mögen einander in $L$, $p\mu$ und $p'\mu'$ in $M$ treffen. Dann sind $L$ und $M$ Punkte der Rückkehrkurve der soeben genannten Developpabeln. Gleichzeitig ist $LM$ eine Gerade der Pseudoevolute der Raumkurve. Hiermit ist Satz 12 bewiesen.



**27.** Die Tangenten der Rückkehrkurve der Developpabeln in den Punkten $L$ und $M$ sind $p\lambda$ und $p\mu$. Daher schneiden die Tangenten der Rückkehrkurve die unendlich ferne Ebene im Pseudokugelkreise $k_\infty$. Also:

**Satz 13.** Die Rückkehrkurve der Developpabeln, die [464 einer Raumkurve und der unendlich fernen Kurve:

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

umgeschrieben ist, erfüllt die Gleichung $f = 0$.

Jedem Punkte $p$ der ursprünglichen Raumkurve sind durch unsere Betrachtung zwei Punkte $L$ und $M$ der Rückkehrkurve zugeordnet (wir könnten sagen: mindestens zwei, da von $P$ aus im allgemeinen mehr als zwei Tangenten an $k_\infty$ möglich sein werden). Es ist denkbar, daß die Rückkehrkurve in zwei Kurven zerfällt, deren eine der Ort der $L$, deren andere der Ort der $M$ ist. Wir wollen den Ort der Punkte $L$ durch die Gleichungen:

$$x = \xi_1(t), \quad y = \eta_1(t), \quad z = \zeta_1(t),$$

den Ort der Punkte $M$ durch die Gleichungen:

$$x = \xi_2(\tau), \quad y = \eta_2(\tau), \quad z = \zeta_2(\tau)$$

darstellen. Beide Kurven sind eben dann dieselben, wenn die Rückkehrkurve nicht zerfällt.

Nach Satz 13 ist nun:

$$f(d\xi_1, d\eta_1, d\zeta_1) = 0, \quad f(d\xi_2, d\eta_2, d\zeta_2) = 0.$$

Mithin ist die Fläche:

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau), \\ 2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau), \\ 2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau) \end{cases}$$

eine Integralfläche unserer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Offenbar hat sie mit der Pseudoevolute der Raumkurve eine Kurve gemein, nämlich den Ort der Mittelpunkte $K$ der Strecken $LM$. Diese Punkte $K$ liegen ja auf der Pseudoevolute, weil diese die Gerade $LM$ ganz enthält. Die Pseudoevolute hat in einem solchen Punkte $K$ die Tangentenebene $pLM$. Da nun die Fläche (1) in $K$ Tangenten parallel denen der Kurven $(L)$ und $(M)$ besitzt, also Tangenten parallel $pL$ und $pM$, so ist klar, daß die Fläche (1) und die Pseudoevolute einander in $K$ berühren. Die Integralfläche (1) ist mithin der Pseudoevolute der Raumkurve längs der Kurve der Punkte $K$ eingeschrieben.

**Satz 14.** *Wählt man irgend eine Raumkurve, so ist es immer möglich, eine Integralfläche unserer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung anzugeben, die in die Pseudoevolute der Raumkurve eingeschrieben ist.*

**28.** Die Mitten $K$ der Strecken $LM$ nennen wir die Pseudo- [465
krümmungsmittelpunkte der Raumkurve in ihren Punkten $p$, da sie die Krümmungsmittelpunkte im gewöhnlichen Sinne vorstellen, sobald $k_\infty$ der imaginäre Kugelkreis ist. Entsprechend nennen wir die Gerade $LM$ die Pseudokrümmungsachse der Raumkurve im Punkte $p$.

Die Pseudokrümmungsachsen sind dann die Erzeugenden der Developpabeln, der unsere Integralfläche (1) längs des Ortes der Pseudokrümmungsmittelpunkte eingeschrieben ist, also längs der Kurve:

$$x = \tfrac{1}{2}(\xi_1(t) + \xi_2(t)), \quad y = \tfrac{1}{2}(\eta_1(t) + \eta_2(t)), \quad z = \tfrac{1}{2}(\zeta_1(t) + \zeta_2(t)).$$

Ist die Raumkurve und die Kurve $k_\infty$ algebraisch, so ist auch die besprochene Developpable algebraisch. Ebenso ist alsdann die Kurve der Punkte $L$, wie die der Punkte $M$ algebraisch. Auch die Kurve der $K$ ist dann algebraisch. Daher:

**Satz 15.** *Diejenige Integralfläche, welche die Pseudoevolute einer algebraischen Raumkurve nach dem Orte der Pseudokrümmungsmittelpunkte berührt, ist algebraisch, vorausgesetzt, daß der Pseudokugelkreis algebraisch ist.*

**29.** Betrachten wir jetzt statt der Fläche (1) diese:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \xi_1(t) - \xi_2(\tau), \\ y = \eta_1(t) - \eta_2(\tau), \\ z = \zeta_1(t) - \zeta_2(\tau). \end{cases}$$

Sie ist natürlich auch Integralfläche. Wir nennen sie eine *Pseudobiegungsfläche.*

Nach Satz 7 des § 2 sind die durch den Anfangspunkt gehenden Tangentenebenen dieser Fläche parallel den Ebenen der Developpabeln, der die Fläche (1) eingeschrieben ist, also parallel den Ebenen der Pseudoevolute, oder, was dasselbe ist, parallel den Pseudonormalebenen der Raumkurve. Die Punkte, in welchen der Tangentenkegel vom Anfangspunkte aus die Fläche (2) berührt, liegen auf der Kurve:

$$x = \xi_1(t) - \xi_2(t), \quad y = \eta_1(t) - \eta_2(t), \quad z = \zeta_1(t) - \zeta_2(t).$$



Die Entfernungen der Berührungspunkte vom Anfangspunkte, also die Strecken:

$$\sqrt{[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2 + [\eta_1(t) - \eta_2(t)]^2 + [\zeta_1(t) - \zeta_2(t)]^2}$$

sind gleich den zugehörigen Strecken $LM$ auf den zu ihnen paral- [466
lelen Pseudokrümmungsachsen der Raumkurve.

Wir sagen:

**Satz 16.** *Die Pseudobiegungsfläche derjenigen Integralfläche, welche die Pseudoevolute einer Raumkurve nach dem Orte der Pseudokrümmungsmittelpunkte berührt, berührt selbst einen Kegel, dessen Erzeugende mit den Erzeugenden der Pseudoevolute der Raumkurve parallel sind.*

Überdies:

**Satz 17.** *Diese Pseudobiegungsfläche ist ebenfalls algebraisch, sobald die Raumkurve und der Pseudokugelkreis algebraisch sind.*

**30.** Es ist jetzt nicht mehr schwer, in einen gegebenen algebraischen Kegel algebraische Integralflächen einzuschreiben. Wir verfahren folgendermaßen:

Zunächst suchen wir die Schnittkurve $k'$ des Kegels mit der unendlich fernen Ebene. Jede Tangente von $k'$ trifft die algebraische Kurve $k_\infty$ in gewissen Punkten, unter denen wir zwei, $\lambda$ und $\mu$, auswählen. Alsdann bringen wir die Tangenten dieser beiden Punkte $\lambda, \mu$ zum Schnitte in $P$. Rollt nun die Tangente von $k'$ auf $k'$ entlang, so beschreibt der Punkt $P$ eine gewisse Kurve $k''$. Sodann wählen wir eine beliebige algebraische Raumkurve und konstruieren diejenige Developpable, welche diese Raumkurve und $k''$ enthält. Die Rückkehrkurve dieser Developpabeln möge $C'$ heißen. Sie ist ebenfalls algebraisch. Die Tangenten von $C'$ treffen die unendlich ferne Ebene in der Kurve $k''$. Die Pseudonormalebenen von $C'$ schneiden daher die unendlich ferne Ebene in den zu $\lambda$, $\mu$ gehörigen Tangenten der Kurve $k'$. Die Pseudoevolute von $C'$ schneidet mithin die unendlich ferne Ebene nach der Kurve $k'$.

Wenn wir nun $C'$ als die Raumkurve betrachten, die in unserer vorigen Überlegung zum Ausgang diente, so sehen wir, daß die nach Satz 15 vorhandene algebraische Integralfläche die Developpable, auf der $C$ und $k_\infty$ liegen, längs der Kurve der Pseudokrümmungsmittelpunkte $K$ von $C'$ berührt. Ist:

$$2x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau),$$
$$2y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau),$$
$$2z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau)$$

diese Integralfläche, so ist auch:

$$\begin{aligned} x &= \xi_1(t) - \xi_2(\tau), \\ y &= \eta_1(t) - \eta_2(\tau), \\ z &= \zeta_1(t) - \zeta_2(\tau) \end{aligned}$$ [467

eine algebraische Integralfläche, und zwar ist sie die in Satz 16 erwähnte Pseudobiegungsfläche. Nach jenem Satze ist sie einem Kegel eingeschrieben, dessen Tangentenebenen den Ebenen der Developpabeln parallel sind, also ebenfalls die unendlich ferne Ebene in den zu $\lambda$, $\mu$ gehörigen Tangenten von $k'$ schneiden. Dieser Kegel ist demnach mit dem gegebenen Kegel kongruent und gleichgestellt. Ob wir also in ihn, oder in den gegebenen Kegel die Integralfläche eingeschrieben [haben], ist gleichgiltig.

Indem wir die algebraische Raumkurve $C$ beliebig wählen, erhalten wir beliebig viele algebraische Integralflächen der gesuchten Art.

**Satz 18.** *Man kann in einen vorgelegten algebraischen Kegel beliebig viele algebraische Integralflächen einschreiben.*

**31.** Es fragt sich, ob in dieser Weise alle in den vorgelegten Kegel einzuschreibenden algebraischen Integralflächen gefunden werden.

Es sei daher:

$$\begin{aligned} x &= \xi_1(t) - \xi_2(\tau), \\ y &= \eta_1(t) - \eta_2(\tau), \\ z &= \zeta_1(t) - \zeta_2(\tau) \end{aligned}$$

irgend eine algebraische Integralfläche, die sich in den Kegel einschreiben läßt. Alsdann ist auch:

$$\begin{aligned} 2x &= \xi_1(t) + \xi_2(\tau), \\ 2y &= \eta_1(t) + \eta_2(\tau), \\ 2z &= \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau) \end{aligned}$$

eine algebraische Integralfläche. Sie ist (nach Satz 7, § 2) in die Developpable $D$ eingeschrieben, welche die beiden Kurven:

(3) $$x = \xi_1(t), \quad y = \eta_1(t), \quad z = \zeta_1(t)$$

und:

(4) $$x = \xi_2(\tau), \quad y = \eta_2(\tau), \quad z = \zeta_2(\tau)$$

enthält. Konstruieren wir nun die zu diesen beiden Kurven gehörigen Developpabeln und die Schnittlinie $c''$ dieser beiden Flächen, so ist die Fläche $D$ die Pseudoevolute von $c''$. Denn die Ebenen von $D$ sind [468
parallel den Tangentenebenen des Kegels, sie schneiden also die unendlich ferne Ebene in den Tangenten $\lambda$, $\mu$ von $k''$, während die Tangenten von $c''$



die Schnittlinien der Oskulationsebenen der beiden Kurven (3) und (4) sind. Diese Oskulationsebenen aber berühren den Pseudokugelkreis in den Punkten $\lambda, \mu$, sodaß die Tangenten von $c''$ wirklich zu den Ebenen von $D$ pseudosenkrecht sind, und mithin $D$ die Pseudoevolute von $c''$ ist. Diese Pseudoevolute wird von der Integralfläche:

$$\begin{aligned} 2x &= \xi_1(t) + \xi_2(\tau), \\ 2y &= \eta_1(t) + \eta_2(\tau), \\ 2z &= \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau) \end{aligned}$$

nach dem Orte der Pseudokrümmungsmittelpunkte von $c''$ berührt. Wir kommen also zu unserer früheren Erzeugung der Integralflächen zurück. Daher sagen wir:

**Satz 19.** *Die angegebenen Operationen liefern alle in einen vorgelegten algebraischen Kegel eingeschriebenen algebraischen Integralflächen.*

**32.** Die vorangehenden Entwickelungen gelten nicht mehr, wenn die Spitze des betreffenden Kegels unendlich fern liegt. Doch gibt es Zylinderflächen, welche die Pseudoevoluten von Raumkurven sind, und in eine solche Zylinderfläche läßt sich ohne weiteres eine algebraische Integralfläche einschreiben.

Wir gehen übrigens an dieser Stelle auf die Frage nach den in eine algebraische Zylinderfläche eingeschriebenen algebraischen Integralflächen nicht ein.

## § 6. Algebraische Integralflächen, die in eine vorgelegte algebraische Developpable eingeschrieben sind.

**33.** Wir kommen in diesem Paragraphen zur Erledigung des zweiten angekündigten Problems. Wir werden nämlich zunächst annehmen, daß in eine vorgelegte algebraische Developpable schon zwei algebraische Integralflächen eingeschrieben seien, und zeigen, daß man daraus eine algebraische Integralfläche ableiten kann, die einem Kegel eingeschrieben ist, dessen Erzeugende denen der Developpabeln parallel sind. Darauf werden wir beweisen, daß, sobald *nur eine* algebraische Integralfläche der [469
vorgegebenen Developpabeln eingeschrieben ist, $\infty^\infty$ solche Integralflächen vorhanden sind, und zeigen, wie man sie sämtlich angeben kann.

**34.** Es sei eine algebraische Developpable vorgelegt. $X, Y, Z$ sollen die Richtungskosinus ihrer Ebenen bedeuten, ausgedrückt in einem Parameter $\sigma$. Ferner seien zwei der Developpabeln eingeschriebene algebraische Integralflächen gegeben, und es seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die laufenden Koordinaten der Berührungslinie der einen, $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ die der Berührungslinie der andern Integralfläche. Sie können ebenfalls als bekannte Funktionen des Parameters $\sigma$ betrachtet werden, so zwar, daß die zu einem Parameter $\sigma$ gehörenden Werte $X, Y, Z; \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}; \mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ zusammengehören, das heißt, daß dann die Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$ auf einer Erzeugenden der Developpabeln liegen, und $X, Y, Z$ die Richtungskosinus der zugehörigen Normalen vorstellen.

**35.** Sind nun:

$$x = \xi_1(t) + \xi_2(\tau),$$
$$y = \eta_1(t) + \eta_2(\tau),$$
$$z = \zeta_1(t) + \zeta_2(\tau)$$

die Gleichungen der ersten Integralfläche, so ist:

$$X d\xi_1 + Y d\eta_1 + Z d\zeta_1 = 0, \quad f(d\xi_1, d\eta_1, d\zeta_1) = 0,$$

und aus diesen beiden Relationen bestimmen sich die Verhältnisse der $d\xi_1, d\eta_1, d\zeta_1$ als Funktionen von $\sigma$:

$$\frac{d\xi_1}{\varphi_1(\sigma)} = \frac{d\eta_1}{\psi_1(\sigma)} = \frac{d\zeta_1}{\chi_1(\sigma)}.$$

Entsprechend bestimmen sich die Verhältnisse der $d\xi_2, d\eta_2, d\zeta_2$:

$$\frac{d\xi_2}{\varphi_2(\sigma)} = \frac{d\eta_2}{\psi_2(\sigma)} = \frac{d\zeta_2}{\chi_2(\sigma)}.$$

Weil nun für gewisse Funktionen $t$ und $\tau$ von $\sigma$, welche die Berührungslinie der Integralfläche definieren:

$$\mathfrak{x} = \xi_1 + \xi_2, \quad \mathfrak{y} = \eta_1 + \eta_2, \quad \mathfrak{z} = \zeta_1 + \zeta_2$$

ist, so kommt für diese Funktionen:

$$d\mathfrak{x} = d\xi_1 + d\xi_2, \quad d\mathfrak{y} = d\eta_1 + d\eta_2, \quad d\mathfrak{z} = d\zeta_1 + d\zeta_2.$$

Diese Gleichungen geben zusammen mit: [470

$$\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = \frac{\psi_1}{\varphi_1}, \quad \frac{d\eta_2}{d\xi_2} = \frac{\psi_2}{\varphi_2}$$

eine Bestimmung von $d\xi_1$ und $d\xi_2$ in der Form:

$$d\xi_1 = \frac{\varphi_1\psi_2\, d\mathfrak{x} - \varphi_1\varphi_2\, d\mathfrak{y}}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1},$$
$$d\xi_2 = \frac{-\varphi_2\psi_1\, d\mathfrak{x} + \varphi_1\varphi_2\, d\mathfrak{y}}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}.$$

Ähnlich können wir $d\eta_1, d\eta_2$ und $d\zeta_1, d\zeta_2$ durch $d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}, d\mathfrak{z}$ ausdrücken.

Nehmen wir an, daß wir etwa erhalten:

$$(1)\quad \begin{cases} d\xi_1 = A_1 d\mathfrak{x} + B_1 d\mathfrak{y} + C_1 d\mathfrak{z},\; d\xi_2 = \bar{A}_1 d\mathfrak{x} + \bar{B}_1 d\mathfrak{y} + \bar{C}_1 d\mathfrak{z}, \\ d\eta_1 = A_2 d\mathfrak{x} + B_2 d\mathfrak{y} + C_2 d\mathfrak{z},\; d\eta_2 = \bar{A}_2 d\mathfrak{x} + \bar{B}_2 d\mathfrak{y} + \bar{C}_2 d\mathfrak{z}, \\ d\zeta_1 = A_3 d\mathfrak{x} + B_3 d\mathfrak{y} + C_3 d\mathfrak{z},\; d\zeta_2 = \bar{A}_3 d\mathfrak{x} + \bar{B}_3 d\mathfrak{y} + \bar{C}_3 d\mathfrak{z}. \end{cases}$$



Hierin sind dann die $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ gewisse Funktionen von $\sigma$, ebenso wie $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Da $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ nur einen Parameter $t$ enthalten, so sind sie also durch die drei ersten Gleichungen nicht nur für die Punkte der Berührungskurve, sondern überhaupt bestimmt, nur statt durch den Parameter $t$, durch den Parameter $\sigma$, von dem $t$ eine gewisse Funktion ist, auf die es uns nicht mehr ankommt. Analoges gilt von $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$.

**36.** Jetzt erinnern wir uns daran, daß wir zwei algebraische Integralflächen kennen, welche die vorgelegte Developpable berühren. Wir wollen die entsprechenden Größen, die sich auf die zweite Fläche beziehen, durch Akzente von den obigen unterscheiden. Alsdann können wir für die zweite Fläche ganz analoge Rechnungen wie eben anstellen. Offenbar ergeben sich bei der zweiten Fläche genau dieselben Funktionen $A, B, C; \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$.

Nach Voraussetzung sind $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ und $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ algebraische Funktionen von $t$, respektive $\tau$, und so leuchtet ein, daß wir immer einen solchen Parameter $\sigma$ von vornherein hätten wählen können, daß sie auch, ausgedrückt in $\sigma$, algebraisch sind. Demnach gibt die Integration von (1) algebraische Funktionen von $\sigma$. Ähnliches gilt von den entsprechenden, sich auf die zweite Integralfläche beziehenden Formeln.

Also sind auch die Differenzen: [471

$$(2)\quad \begin{cases} \xi_1 - \xi_1' = \int A_1 d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int B_1 d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int C_1 d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'), \\ \eta_1 - \eta_1' = \int A_2 d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int B_2 d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int C_2 d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'), \\ \zeta_1 - \zeta_1' = \int A_3 d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int B_3 d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int C_3 d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'), \end{cases}$$

sowie:

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_2 - \xi_2' = \int \bar{A}_1 d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int \bar{B}_1 d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int \bar{C}_1 d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'), \\ \eta_2 - \eta_2' = \int \bar{A}_2 d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int \bar{B}_2 d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int \bar{C}_2 d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}'), \\ \zeta_2 - \zeta_2' = \int \bar{A}_3 d(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}') + \int \bar{B}_3 d(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') + \int \bar{C}_3 d(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}') \end{cases}$$

algebraische Funktionen von $\sigma$.

Wenn wir nun im Anfangspunkte einen Kegel herstellen, dessen Erzeugende den Erzeugenden der gegebenen Developpabeln parallel sind, und auf diesem die Kurve:

$$x = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}', \quad y = \mathfrak{y} - \mathfrak{y}', \quad z = \mathfrak{z} - \mathfrak{z}'$$

(die offenbar auf ihm liegt) ziehen, so existiert, wie wir in § 4 nachgewiesen haben, eine bestimmte Integralfläche, die den Kegel längs dieser Kurve berührt. Wollen wir sie nach der damals gegebenen Methode bestimmen, so haben wir, wie man sofort übersieht, gerade die Funktionen (2) und (3) zu bilden. Da diese algebraisch sind, folgt:

**Satz 20.** Kennt man zwei algebraische Integralflächen, die in eine algebraische Developpable eingeschrieben sind, so kann man immer auch in einen Kegel, dessen Erzeugende denen der Developpabeln parallel sind, eine algebraische Integralfläche einschreiben. Die dazu erforderlichen Rechnungen kommen nur auf einige Subtraktionen hinaus.

**37.** Schließlich kehren wir diese Betrachtung um: Liegt eine algebraische Developpable und ein Kegel vor, und sind die Erzeugenden der einen Fläche denen der andern parallel, und ist ferner in jede dieser Flächen eine bekannte algebraische Integralfläche eingeschrieben, so können wir sofort mit Hilfe der Formeln (2) und (3) eine zweite algebraische, in die Developpable eingeschriebene Integralfläche angeben. Wir haben dann [472
nur etwa die $\xi', \eta', \zeta'$ als die Unbekannten aufzufassen. Weil wir aber schon im vorigen Paragraphen alle einem algebraischen Kegel eingeschriebenen algebraischen Integralflächen zu bestimmen gelernt haben, so folgt:

**Satz 21.** Kennt man nur eine einzige einer vorgelegten algebraischen Developpabeln eingeschriebene algebraische Integralfläche unserer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, so kann man alle und zwar $\infty^\infty$ algebraische Integralflächen angeben, die derselben Developpabeln eingeschrieben sind. Man hat zu dem Zwecke nur alle algebraischen Integralflächen zu bestimmen, die einem Kegel eingeschrieben sind, dessen Erzeugende denen der Developpabeln parallel sind. Diese aber lassen sich ohne weiteres finden.

Man kann infolgedessen beliebig viele algebraische Developpable finden, deren eingeschriebene algebraische Integralflächen sich angeben lassen.

Hat unsere partielle Differentialgleichung die spezielle Form: $s = 0$, so läßt sich für jede algebraische Developpable eine eingeschriebene algebraische Integralfläche angeben, wie ich schon im Jahre 1879 gezeigt habe.

Die Bestimmung aller algebraischen Integralflächen einer beliebigen Gleichung (5), [S. 491—494], veröffentlichte ich im norwegischen Archive Bd. II (1877). [Diese Ausg. Bd. I, Abh. XVII, S. 288—291.]

# XII.

## Untersuchungen über Translationsflächen. [559

### Abhandlung II.

Leipz. Ber. 1892, Heft 6; abgeliefert 3. 3. 1893, S. 559—579.
Vorgelegt in der Sitzung vom 5. 12. 1892.

**1.** Die nachstehende Arbeit zerfällt in drei Teile, unter denen sich der erste mit einer speziellen Klasse von Translationsflächen beschäftigt; die beiden andern Teile behandeln verwandte, wenn auch allgemeinere Probleme.

Unter den Ergebnissen dieser Arbeit sind mehrere schon früher in norwegischen Arbeiten veröffentlicht worden. Diese meine älteren Untersuchungen, die in schwer zugänglichen Zeitschriften, größtenteils in sehr knapper Form dargestellt sind, haben bis jetzt nicht die Beachtung gefunden, die sie verdienen. Indem ich sie im folgenden in etwas ausführlicherer Redaktion zusammenstelle, füge ich viele neue Bemerkungen hinzu.

### Erster Teil.

**2.** Wir beschäftigen uns hier mit der Gleichung:

$$s = 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \tag{1}$$

und ihren Integralflächen:

$$z = F(x) + \Phi(y), \tag{2}$$

deren jede in zwei Weisen durch Translationsbewegung einer **ebenen** Kurve erzeugt werden kann.

Unter diesen Translationsflächen gibt es unbegrenzt viele algebraische. Sind nämlich $F(x)$ und $\Phi(y)$ beliebige algebraische Funktionen ihrer Argumente, so stellt $z = F(x) + \Phi(y)$ immer eine algebraische [560
Fläche dar, und in dieser Weise erhält man alle algebraischen Integralflächen von $s = 0$; denn eine solche Fläche schneidet jede Ebene $x =$ Const., oder $y =$ Const. nach einer algebraischen Kurve.

Die Frage nach allen algebraischen Integralflächen der Gleichung $s = 0$ ist somit ein triviales Problem.

**3.** Ist eine gewundene Kurve vorgelegt und in jedem Punkte derselben eine berührende Ebene, so gibt es immer eine ganz bestimmte Integralfläche, welche die von den vorgelegten Ebenen erzeugte Developpable längs der Kurve berührt.

Um diese zu finden, denkt man sich am besten die laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ eines Punktes unserer Kurve als gegebene Funktionen eines Parameters $t$ und dementsprechend die Richtungskosinus $X, Y, Z$ der betreffenden Ebenen ebenfalls als bekannte Funktionen von $t$. Ist nun $z = F(x) + \Phi(y)$ die gesuchte Fläche, und sind dementsprechend $F'(x)$, $\Phi'(y)$ und $-1$ Richtungskoeffizienten der zugehörigen Normalen, so bestehen längs der Kurve $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$\frac{F'(\mathfrak{x})}{X} = \frac{\Phi'(\mathfrak{y})}{Y} = \frac{-1}{Z},$$

woraus folgt:

$$-F'(\mathfrak{x}) = \frac{X}{Z}, \quad -\Phi'(\mathfrak{y}) = \frac{Y}{Z}.$$

Diese beiden letzten Gleichungen bestimmen die unbekannten Größen $F'(\mathfrak{x})$ und $\Phi'(\mathfrak{y})$ als Funktionen von $\mathfrak{x}$, beziehungsweise $\mathfrak{y}$.

Zwei Quadraturen:

$$-F(\mathfrak{x}) = \int \frac{X}{Z}\, d\mathfrak{x}, \quad -\Phi(\mathfrak{y}) = \int \frac{Y}{Z}\, d\mathfrak{y}$$

liefern uns sodann die Werte von $F(x)$ und $\Phi(y)$ längs der gegebenen Kurve $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, und da sowohl $F$ wie $\Phi$ nur von einem Argumente abhängen, sind diese Funktionen jetzt als bekannt zu betrachten.

Wünscht man daher die Integralfläche der Gleichung $s = 0$ zu finden, die eine gegebene Kurve:

$$x = \mathfrak{x}(t), \quad y = \mathfrak{y}(t), \quad z = \mathfrak{z}(t)$$

enthält und längs dieser diejenigen Ebenen berührt, deren Richtungskosinus die Werte:

$$\cos\alpha = X(t), \quad \cos\beta = Y(t), \quad \cos\gamma = Z(t)$$ [561

besitzen, so berechnet man zuerst die Integrale:

$$\int \frac{X(t)}{Z(t)}\, d\mathfrak{x}(t), \quad \int \frac{Y(t)}{Z(t)}\, d\mathfrak{y}(t)$$

und drückt sodann das erste Integral mit Benutzung der Gleichung $x = \mathfrak{x}(t)$ als Funktion von $x$ aus:

$$\int \frac{X(t)}{Z(t)}\, d\mathfrak{x}(t) = F(x),$$



und dementsprechend das zweite Integral mit Benutzung der Gleichung $y = \mathfrak{y}(t)$ als Funktion von $y$:

$$\int \frac{Y(t)}{Z(t)}\, d\mathfrak{y}(t) = \Phi(y).$$

Alsdann ist:

$$-z = F(x) + \Phi(y)$$

die gesuchte Fläche.[1])

Das Problem, diejenige Integralfläche zu finden, die eine gegebene Developpable längs einer gegebenen Kurve berührt, bietet somit gar keine Schwierigkeit.

**4.** Sind insbesondere sowohl die vorgelegte Developpable wie die gegebene Kurve algebraisch, so sind die Größen $F(x)$ und $\Phi(y)$ Abelsche Integrale und somit im allgemeinen transzendent.

Es stellt sich daher naturgemäß die Aufgabe:

Alle algebraischen Integralflächen von $s = 0$ zu finden, die in eine vorgelegte [algebraische] Developpable eingeschrieben sind.

Die allgemeine Erledigung dieses schwierigen Problems gab ich [562 im norwegischen Archiv, Bd. IV, 1879. [Diese Ausg. Bd. III, Abh. XXIII.] Ich erlaube mir, im folgenden meine elegante Lösung, die bis jetzt, als erschienen in einer wenig verbreiteten Zeitschrift, den Mathematikern schwer zugänglich war, zu reproduzieren.

## § 1.

**5.** Ich werde zunächst zeigen, daß sich das Problem, alle in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Flächen:

$$z = F(x) + \Phi(y)$$

zu finden, sobald eine derartige Fläche gefunden ist, unmittelbar auf das einfachere Problem reduziert, alle algebraischen Flächen:

$$z = F(x) + \Phi(y)$$

1) Setzen wir:

$$x = u + iv, \quad y = u - iv,$$

so geht die Gleichung $s = 0$ über in die Gleichung der Funktionentheorie:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0. \tag{3}$$

Die von Cauchy geschaffene und von Riemann und dessen Nachfolgern, insbesondere C. Neumann und Schwarz, ausgebildete Funktionentheorie behandelt Fragen, die von den im folgenden erledigten Problemen grundverschieden sind, wenn sie auch für eine oberflächliche Betrachtung mit diesen verwandt scheinen. In der Funktionentheorie handelt es sich um die Auffindung einer Funktion $U + iV$ des imaginären Argumentes $u + iv$, deren reelle Teile $U, V$ eo ipso die Gleichung (3) erfüllen und dabei längs einer Kurve der $u, v$-Ebene gegebene Werte haben.

zu finden, welche in einen vorgelegten algebraischen *Kegel* eingeschrieben sind. Die Tangentenebenen dieses Kegels sind dabei parallel mit den Ebenen der gegebenen Developpabeln.

Die Richtigkeit dieser Behauptung erkennt man am schnellsten durch die folgende Betrachtung, die allerdings die ersten Elemente meiner Theorie der Berührungstransformationen als bekannt voraussetzt.

Es gibt eine ganz bestimmte Berührungstransformation, welche die Gleichung $s = 0$ invariant läßt, die Form:

$$p' = p, \quad q' = q, \quad z' - p'x' - q'y' = F(p, q, z - px - qy)$$

besitzt und überdies eine beliebige gegebene Integralfläche von $s = 0$ in einen gegebenen Punkt des Raumes transformiert.

Wenden wir nun eine solche Berührungstransformation auf eine vorgelegte algebraische Developpable und eine eingeschriebene *algebraische* Integralfläche an, so verwandelt sich diese Integralfläche in einen Punkt, die algebraische Developpable in einen algebraischen Kegel und alle anderen eingeschriebenen algebraischen Integralflächen in algebraische Integralflächen, welche in den besprochenen Kegel eingeschrieben sind.

**6.** In mehr elementarer Weise erkennt man die Richtigkeit meiner Behauptung folgendermaßen:

Es möge eine algebraische Developpable vorgelegt sein und die Richtungskosinus $X, Y, Z$ ihrer Ebenen als algebraische Funktionen eines Parameters dargestellt sein. Es seien ferner $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Koordinaten der Punkte auf der Berührungskurve einer vorgelegten eingeschriebenen Integralfläche, und dementsprechend $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$, die entsprechenden Größen für irgend eine andere eingeschriebene algebraische Integralfläche. Wir [563 betrachten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ als Funktionen von $t$.

Die bekannte algebraische Integralfläche wird dargestellt durch:

$$-z = \int \frac{X}{Z} d\mathfrak{x} + \int \frac{Y}{Z} d\mathfrak{y},$$

und dementsprechend die gesuchte Fläche durch:

$$-z = \int \frac{X}{Z} d\mathfrak{x}_1 + \int \frac{Y}{Z} d\mathfrak{y}_1.$$

Unsere Annahme, daß die erste Fläche algebraisch ist, kommt darauf hinaus, daß die beiden Integrale:

$$\int \frac{X}{Z} d\mathfrak{x}, \quad \int \frac{Y}{Z} d\mathfrak{y}$$

algebraische Funktionen von $t$ sind. Unsere Forderung, daß auch die neue



Integralfläche algebraisch sein soll, läuft darauf hinaus, daß auch die beiden Integrale:

$$\int \frac{X}{Z} d\mathfrak{x}_1, \quad \int \frac{Y}{Z} d\mathfrak{y}_1$$

algebraische Funktionen von $t$ sein sollen.

Setzen wir:

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1 = \xi, \quad \mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1 = \eta, \quad \mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1 = \zeta,$$

so deckt sich diese Forderung damit, daß die Integrale:

$$\int \frac{X}{Z} d\xi, \quad \int \frac{Y}{Z} d\eta$$

algebraische Funktionen von $t$ sein sollen.

Nun ist:

$$X d\mathfrak{x}_1 + Y d\mathfrak{y}_1 + Z d\mathfrak{z}_1 = 0,$$
$$X d\mathfrak{x} + Y d\mathfrak{y} + Z d\mathfrak{z} = 0,$$

und infolgedessen:

$$X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta = 0.$$

Ferner ist:

$$X(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1) + Y(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1) + Z(\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1) = 0 = X\xi + Y\eta + Z\zeta,$$

weil jede Tangentenebene unserer Developpabeln die zugehörige Gerade derselben enthält. [564

Endlich erfüllen die Richtungskoeffizienten:

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1 = \xi, \quad \mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1 = \eta, \quad \mathfrak{z} - \mathfrak{z}_1 = \zeta$$

der Geraden unserer Developpabeln eine gewisse Relation:

$$0 = \Omega(\xi : \zeta, \eta : \zeta).$$

Berücksichtigen wir daher, daß die Gleichungen:

$$\frac{X}{\eta d\zeta - \zeta d\eta} = \frac{Y}{\zeta d\xi - \xi d\zeta} = \frac{Z}{\xi d\eta - \eta d\xi}$$

bestehen, so können wir unserem Probleme die folgende Gestalt geben:

*Man soll drei Größen $\xi, \eta, \zeta$, welche eine gegebene homogene algebraische Relation erfüllen, in allgemeinster Weise als solche Funktionen des Parameters $t$ bestimmen, daß die beiden Integrale:*

$$\int \frac{\eta d\zeta - \zeta d\eta}{\xi d\eta - \eta d\xi} d\xi, \quad \int \frac{\zeta d\xi - \xi d\zeta}{\xi d\eta - \eta d\xi} d\eta$$

*algebraische Funktionen von $t$ werden.*

Unsere früheren Entwickelungen zeigen, daß dieses Problem darauf hinauskommt, *alle algebraischen Flächen:* $z = F(x) + \Phi(y)$ *zu finden, welche in einen vorgelegten algebraischen Kegel:*

$$\Omega(x : z, y : z) = 0$$

*eingeschrieben sind.*

## § 2.

**7.** Wir zeigen jetzt, daß, sobald *eine* algebraische Developpable vorgelegt ist, sich sogleich mindestens eine (beziehungsweise $\infty^3$) eingeschriebene algebraische Integralflächen angeben lassen. Gleichzeitig erkennen wir mit Berücksichtigung der Entwickelungen des vorhergehenden Paragraphen, daß sich unser ursprüngliches Problem erledigen läßt, sobald es für einen Kegel gelöst ist, dessen Tangentenebenen mit den Ebenen der gegebenen Developpabeln parallel sind.

Die gegebene Developpable schneidet eine Ebene $y = b = \text{Const.}$ [565
nach einer [algebraischen] Kurve, deren Gleichungen wir uns auf die Form:

$$x = A_1(t), \quad y = B_1(t) = b, \quad z = C_1(t) \tag{4}$$

gebracht denken. Unsere Developpable schneidet dementsprechend eine Ebene $x = a$ nach einer [algebraischen] Kurve, deren Gleichungen sein mögen:

$$x_2 = A_2(\tau) = a, \quad y = B_2(\tau), \quad z = C_2(\tau). \tag{5}$$

Wir können dabei ohne Beschränkung annehmen, daß die Tangente im Punkte $t$ der ersten Kurve die Tangente im Punkte $\tau = t$ der zweiten Kurve schneidet. Dieser Schnittpunkt liegt selbstverständlich auf der Schnittlinie der beiden Ebenen $x = a$ und $y = b$. Die hier eingeführte Annahme kommt darauf hinaus, daß die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A_1(t) - A_2(t) & B_1(t) - B_2(t) & C_1(t) - C_2(t) \\ dA_1(t) & dB_1(t) & dC_1(t) \\ dA_2(t) & dB_2(t) & dC_2(t) \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

für jeden Wert von $t$ identisch besteht. Der Leser übersieht, daß die Ebenen unserer Developpabeln die beiden ebenen Kurven (4) und (5) jedesmal in Punkten berühren, für welche $t = \tau$ ist. Jede Verbindungsgerade von zwei solchen zusammengehörenden Berührungspunkten ist daher eine geradlinige Erzeugende unserer Developpabeln.

**8.** Ich behaupte nun, daß die Gleichungen:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(A_1(t) + A_2(\tau)) = \frac{1}{2}(A_1(t) + a), \\ y = \frac{1}{2}(B_1(t) + B_2(\tau)) = \frac{1}{2}(B_2(\tau) + b), \\ z = \frac{1}{2}(C_1(t) + C_2(\tau)) \end{cases} \tag{7}$$

eine algebraische Integralfläche darstellen, welche in unsre Developpable eingeschrieben ist.

Da die beiden ersten Gleichungen $t$ als algebraische Funktion von $x$, $\tau$ als algebraische Funktion von $y$ bestimmen, so leuchtet unmittelbar ein, daß unsre Gleichungen eine algebraische Integralfläche von $s = 0$



darstellen. Nun aber wird die Tangentenebene dieser Fläche in einem Punkte $t = \tau$ dargestellt durch die Gleichung: [566

$$\begin{vmatrix} x - \frac{1}{2}(A_1(t) + A_2(t)) & y - \frac{1}{2}(B_1(t) + B_2(t)) & z - \frac{1}{2}(C_1(t) + C_2(t)) \\ dA_1(t) & dB_1(t) & dC_1(t) \\ dA_2(t) & dB_2(t) & dC_2(t) \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

die wegen der Gleichung (6) sowohl durch die Substitution:

$$x = A_1(t), \quad y = B_1(t), \quad z = C_1(t),$$

wie durch die Substitution:

$$x = A_2(t), \quad y = B_2(t), \quad z = C_2(t)$$

identisch befriedigt wird.

Diese Tangentenebene enthält somit diejenige Gerade unsrer Developpabeln, welche dem Parameter $t$ entspricht. Unsere Tangentenebene trifft andrerseits die beiden ebenen Kurven (4) und (5) in zwei Punkten, deren Parameter $t$, $\tau$ jedesmal denselben Zahlenwert haben. Da nun aber die zugehörige Tangente der ersten Kurve die Richtungskoeffizienten:

$$dA_1(t), \quad dB_1(t), \quad dC_1(t),$$

und die Tangente der zweiten Kurve im Punkte $\tau = t$ die Richtungskoeffizienten:

$$dA_2(t), \quad dB_2(t), \quad dC_2(t)$$

besitzt, so leuchtet ein, daß diese beiden Tangenten mit der Tangentenebene (8) parallel, ja sogar in ihr enthalten sind.

Unsere Tangentenebene (8) der Integralfläche (7) berührt somit die beiden Kurven (4) und (5) und fällt deshalb zusammen mit der Ebene $t$ der gegebenen Developpabeln.

*Hiermit ist eine in die vorgelegte Developpable eingeschriebene algebraische Integralfläche gefunden.*

Da diese Fläche von den beiden Parametern $a$ und $b$ abhängt, so liefern die vorhergehenden Betrachtungen im allgemeinen $\infty^2$ verschiedene Flächen.

Es ist überdies leicht, noch weitere eingeschriebene algebraische Integralflächen zu finden. Durch eine selbstverständliche Verallgemeinerung der vorangehenden Betrachtungen ergibt sich nämlich, daß die Formeln:

$$(m + n)x = mA_1(t) + nA_2(\tau),$$
$$(m + n)y = mB_1(t) + nB_2(\tau),$$
$$(m + n)z = mC_1(t) + nC_2(\tau)$$

jedenfalls im allgemeinen $\infty^3$ verschiedene eingeschriebene algebraische [567
Integralflächen darstellen, welche von den drei Parametern $a, b, m:n$ abhängen.

## § 3.

**9.** Unser allgemeines Problem führten wir darauf zurück, alle algebraischen Integralflächen zu bestimmen, die in einen vorgelegten algebraischen Kegel eingeschrieben sind. Es ist nun sehr merkwürdig, daß es uns, sogar durch sehr durchsichtige Betrachtungen, gelingen wird, dieses reduzierte Problem vollständig zu erledigen.

Wir denken uns also jetzt einen algebraischen Kegel $K$ vorgelegt, dessen Ebenen mit den Ebenen der vorgelegten Developpabeln $D$ parallel sind. Um nun algebraische Integralflächen zu finden, welche in $K$ eingeschrieben sind, benutze ich eine andere algebraische Developpable $D'$, deren Ebenen ebenfalls mit den Ebenen von $D$ parallel sind. Sodann konstruiere ich nach den Regeln von § 2 eine in $D'$ eingeschriebene algebraische Integralfläche:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(A_1'(t) + A_2'(\tau)) = \tfrac{1}{2}(A_1'(t) + a), \\ y &= \tfrac{1}{2}(B_1'(t) + B_2'(\tau)) = \tfrac{1}{2}(B_2'(\tau) + b), \\ z &= \tfrac{1}{2}(C_1'(t) + C_2'(\tau)). \end{aligned}$$

Sodann betrachte ich die Fläche:

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= A_1'(t) - A_2'(\tau) = A_1'(t) - a, \\ y &= B_1'(t) - B_2'(\tau) = b - B_2'(\tau), \\ z &= C_1'(t) - C_2'(\tau), \end{aligned} \right.$$

die offenbar wiederum eine algebraische Integralfläche ist. Die Tangentenebenen dieser Fläche längs der Kurve $t = \tau$:

$$0 = \begin{vmatrix} x - (A_1'(t) - A_2'(t)) & y - (B_1'(t) - B_2'(t)) & z - (C_1'(t) - C_2'(t)) \\ dA_1'(t) & dB_1'(t) & dC_1'(t) \\ dA_2'(t) & dB_2'(t) & dC_2'(t) \end{vmatrix}$$

gehen offenbar sämtlich durch den Koordinatenanfang, denn durch die Substitution $x = y = z = 0$ in die vorangehende Gleichung kommt die Relation:

$$0 = \begin{vmatrix} A_1'(t) - A_2'(t) & B_1'(t) - B_2'(t) & C_1'(t) - C_2'(t) \\ dA_1'(t) & dB_1'(t) & dC_1'(t) \\ dA_2'(t) & dB_2'(t) & dC_2'(t) \end{vmatrix}, \qquad [568$$

die (vgl. (6)) identisch besteht. Überdies leuchtet ein, daß unsere $\infty^1$ Tangentenebenen mit den $\infty^1$ Tangentenebenen:

$$0 = \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2}(A_1'(t) + A_2'(t)) & y - \frac{1}{2}(B_1'(t) + B_2'(t)) & z - \frac{1}{2}(C_1'(t) + C_2'(t)) \\ dA_1'(t) & dB_1'(t) & dC_1'(t) \\ dA_2'(t) & dB_2'(t) & dC_2'(t) \end{vmatrix}$$



der Fläche (7) längs ihrer Kurve $t = \tau$ parallel sind. Also sind sie auch parallel mit den Ebenen der Developpabeln $D'$ (oder $D$).

Es liefern daher die Gleichungen (9) eine algebraische Integralfläche, welche eingeschrieben ist in den Kegel $K$. Und, indem man alle algebraischen Developpabeln $D'$ nimmt, deren Ebenen mit den Ebenen von $D$ parallel sind, erhält man jedenfalls $\infty^\infty$ algebraische Integralflächen, welche in den Kegel $K$ eingeschrieben sind.

**10.** Es stellt sich jetzt mit Notwendigkeit die Frage, ob wir in dieser Weise alle in $K$ eingeschriebenen algebraischen Integralflächen erhalten.

Diese Frage beantworten wir folgendermaßen. Seien:

$$\begin{aligned} x &= \mathbf{A}_1(t) - \mathbf{A}_2(\tau), \\ y &= \mathbf{B}_1(t) - \mathbf{B}_2(\tau), \\ z &= \boldsymbol{\Gamma}_1(t) - \boldsymbol{\Gamma}_2(\tau) \end{aligned}$$

die Gleichungen einer ganz beliebigen algebraischen in $K$ längs der Kurve $\tau = t$ eingeschriebenen Integralfläche. Dann stellen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{A}_1(t) + \mathbf{A}_2(\tau)), \\ y &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{B}_1(t) + \mathbf{B}_2(\tau)), \\ z &= \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}_1(t) + \boldsymbol{\Gamma}_2(\tau)) \end{aligned}$$

eine Integralfläche dar, welche algebraisch ist und längs ihrer Kurve $t = \tau$ eine algebraische Developpable berührt, deren Ebenen mit den Ebenen unseres Kegels parallel sind.

Die Operationen dieses Paragraphen geben daher alle in einen algebraischen Kegel eingeschriebenen algebraischen Integralflächen.

**11.** Durch Verbindung der Ergebnisse der Paragraphen 1, 2 [569 und 3 erhalten wir das folgende merkwürdige

**Theorem.** Ist eine beliebige algebraische Developpable $D$ vorgelegt, so kann man **alle** in sie eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Gleichung $s = 0$ finden. Zu diesem Zwecke konstruiert man zuerst nach den Regeln von § 2 eine in $D$ eingeschriebene algebraische Integralfläche, sodann eine algebraische Integralfläche $F'$, welche in einen algebraischen Kegel $K'$ mit parallelen Ebenen eingeschrieben ist. Indem man nunmehr die Flächen $F$ und $F'$ nach den früher angegebenen Regeln verbindet, erhält man eine und zwar die allgemeinste Integralfläche, welche die gestellten Forderungen erfüllt.

## § 4.

**12.** Die vorhergehenden Entwickelungen beruhen im Grunde auf meinen Untersuchungen über Berührungstransformationen.

Da ich gefunden habe, daß jede Monge-Ampèresche Gleichung, mit zwei intermediären Integralen für jede Charakteristik, durch Berührungstransformation die Form $s = 0$ erhalten kann, so dehnt sich die vorhergehende Theorie ohne weiteres auf eine große Kategorie von partiellen Differentialgleichungen aus.

Hierauf gehe ich bei dieser Gelegenheit nicht näher ein. Dagegen dürfte es notwendig sein, ausdrücklich hervorzuheben, daß meine Theorie der Funktionengruppen wirklich alle Berührungstransformationen liefert, welche eine vorgelegte Monge-Ampèresche Gleichung mit vollständigen intermediären Integralen invariant lassen.

**13.** Liegt insbesondere die Gleichung $s = 0$ vor, so sind:

$$p - f(x) = 0 \quad \text{und:} \quad q - \varphi(y) = 0$$

die zugehörigen intermediären Integrale. Setzen wir nun:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3,$$

$$p = -\frac{p_1}{p_3}, \; q = -\frac{p_2}{p_3},$$

so gehören unsere intermediären Integrale zu den Funktionengruppen:

$$p_1, \, x_1, \, p_3 \quad \text{und:} \quad p_2, \, x_2, \, p_3.$$

Die gesuchten Berührungstransformationen bilden eine unend- [570
liche Gruppe, welche alle Berührungstransformationen umfaßt, die entweder unsre beiden Funktionengruppen invariant lassen, oder diese Gruppen vertauschen.

Diese unendliche Gruppe enthält eine kontinuierliche Untergruppe, die man findet, indem man kanonische Formen:

$$X_1, \, P_1, \, X_3, \quad X_2, \, P_2, \, X_3$$

unsrer reziproken Gruppen sucht und sodann:

$$x_k' = X_k, \quad p_k' = P_k$$

setzt. Hierzu kommt:

$$x_1 = x_2', \quad x_2 = x_1', \quad x_3 = x_3',$$

$$p_1 = p_2', \quad p_2 = p_1', \quad p_3 = p_3'.$$

**14.** Besitzt eine Monge-Ampèresche Gleichung zwei intermediäre Integrale $X_1$, $X_2$, die in Involution liegen und zu derselben Charakteristik



gehören, so gibt es ein drittes derartiges Integral $X_3$. Dann bestimmen Gleichungen von der Form:

$$X_k' = F_k(X_1, X_2, X_3)$$

die allgemeinste Berührungstransformation, welche unsere Gleichung invariant läßt.

Die von Herrn Vivanti in neuerer Zeit angestellten Untersuchungen über Berührungstransformationen subsumieren sich als ganz spezielle Fälle unter meine älteren allgemeinen Theorien.

## Zweiter Teil.

**15.** Unter den partiellen Differentialgleichungen gibt es gewiß keine, die ein größeres Interesse darbietet, als die Gleichung der Funktionentheorie:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

Es ist längst bemerkt worden, daß diese Gleichung durch Einführung der unabhängigen Veränderlichen:

$$x = u + iv, \quad y = u - iv$$

die Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 = s$$

erhält und somit die Integralgleichung: [571

$$z = F(x) + \Phi(y) = F(u + iv) + \Phi(u - iv)$$

besitzt.

Die vielseitigen Untersuchungen der Funktionentheoretiker über diese Gleichung sind jetzt allgemein bekannt und haben in neuerer Zeit merkwürdige Untersuchungsrichtungen geschaffen, die sich überhaupt auf Laplaces lineare Differentialgleichungen beziehen: ich denke hier einerseits an Darbouxs, andrerseits an Picards schöne Untersuchungen.

**16.** In norwegischen Zeitschriften habe ich selbst im Laufe der Jahre einige originale Untersuchungen über lineare partielle Differentialgleichungen veröffentlicht, welche gewiß mehr Aufmerksamkeit verdienen, als sie bis jetzt gefunden haben.

So veröffentlichte ich zum Beispiel im Jahre 1881 im sechsten Bande des norwegischen Archivs [diese Ausg. Bd. III, Abh. XXXV] eine Transformationstheorie der linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$A(x, y)r + B(x, y)s + Ct + Dp + Eq + Fz = 0,$$

präziser gesagt, ich bestimmte alle derartigen Gleichungen, die eine kontinuierliche Gruppe gestatten, und reduzierte gleichzeitig alle diese Gleichungen auf kanonische Formen.[1]) Diese meine Arbeiten lieferten unter anderm den Ausgangspunkt für Darbouxs und Appells bemerkenswerte Untersuchungen über die beiden Gleichungen:

$$s + \frac{A}{x-y} \cdot q + \frac{B}{(x-y)^2} \cdot z = 0$$

und:

$$r + q = 0.$$

Darbouxs und Appells Arbeiten über diese Gleichungen erschienen in den Jahren 1882, 1883 und 1892.[2])

**17.** Meine Theorie der Funktionengruppen gab mir ferner eine [572 ganz neue und vollständige Klassifikation aller partiellen Differentialgleichungen:

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

die ein oder mehrere intermediäre Integrale erster Ordnung besitzen. Hierdurch wurden einerseits bekannte Untersuchungen von Ampère und Imschenetsky nicht allein vereinfacht, sondern auch vervollständigt und verallgemeinert. Auf diese meine Klassifikation, die sich übrigens auf $n$ Dimensionen ausdehnt, begründete ich bemerkenswerte neue Integrationsmethoden für partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die intermediäre Integrale erster Ordnung besitzen.[3])

Besonders wichtig ist meine Theorie derjenigen Monge-Ampèreschen Gleichungen zweiter Ordnung mit zwei verschiedenen Charakteristiken, welche für jede Charakteristik zwei intermediäre Integrale besitzen. Es ergab sich, daß es zur Integration einer solchen Gleichung zweiter Ordnung hinreicht, für jede Charakteristik ein intermediäres Integral

1) Meine Arbeit aus dem Jahre 1881 gibt, vereinigt mit meinen Untersuchungen über Differentialinvarianten die Grundlage für eine vollständige Transformationstheorie der linearen partiellen Differentialgleichungen. Beiträge zu dieser Theorie hat besonders Darboux geliefert. Mit einigen hierher gehörigen Fragen beschäftigte sich Pfannenstiel im Jahre 1882.

2) Herr Appell hat neuerdings darauf hingewiesen, daß lineare Differentialgleichungen:

$$y^{(r)} + X_{r-1}(x) y^{(r-1)} + \cdots + Xy = 0,$$

die eine infinitesimale Transformation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}$$

gestatten, in lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten transformiert werden können. Ich erlaube mir, hervorzuheben, daß diese interessante Bemerkung von mir herrührt.

3) Diese Untersuchungen sind bis jetzt nur teilweise veröffentlicht.



erster Ordnung zu finden; sind solche Integrale gefunden, so genügt es, eine Anzahl Quadraturen auszuführen.

**18.** Ich habe dieses Beispiel herangezogen, um die Unrichtigkeit einer Ansicht zu illustrieren, die neuerdings in einer Schrift eines sehr hervorragenden Mathematikers hervorgetreten ist. In dieser Schrift wird unter anderem etwa gesagt, daß sich auf Transformationstheorien keine wesentlich neuen Integrationsmethoden gründen lassen. Ich habe eine entgegengesetzte Ansicht. Meine Integrationstheorie der Monge-Ampèreschen Gleichung mit zwei intermediären Integralen für jede Charakteristik beruht auf meiner Theorie der Berührungstransformationen, und niemand wird leugnen, daß diese meine Integrationstheorie neu ist und wesentlich mehr leistet, als die älteren Theorien leisten konnten.

Ich behalte mir vor, auf diesen Punkt bei einer anderen Gelegenheit tiefer einzugehen. Nach meiner Ansicht liegt die fundamentale [573 Bedeutung meiner Gruppentheorie in erster Linie darin, daß sich auf sie neue Integrationstheorien gründen lassen. Nicht allein meine eigenen Untersuchungen, sondern auch die schönen Arbeiten von Halphen, Picard und Vessiot geben Beispiele für die Richtigkeit meiner Auffassung.

Hoffentlich wird es mir einmal gelingen, eine vollständige Klassifikation aller Monge-Ampèreschen Gleichungen durchzuführen, welche eine endliche oder unendliche Gruppe von Berührungstransformationen gestatten. Dieses Problem ist schwer; ich glaube indes, Methoden zu besitzen, die mir gestatten werden, es vollständig zu erledigen. Eine Reihe spezieller Untersuchungen in dieser Richtung habe ich schon längst durchgeführt und auch teilweise veröffentlicht. Ist dieses Problem erledigt, so wird es möglich sein, eine vollständige Invariantentheorie der Monge-Ampèreschen Gleichungen gegenüber allen Berührungstransformationen zu entwickeln.

Selbstverständlich dehnen sich diese Gesichtspunkte auf andere Klassen von partiellen Differentialgleichungen aus.[1])

**19.** Ribaucour und Bianchi gaben seinerzeit eine bemerkenswerte Methode zur Ableitung neuer Flächen konstanter Krümmung aus einer gegebenen derartigen Fläche. Ich habe später durch schwierige Untersuchungen streng bewiesen, daß man in dieser Weise durch fortgesetzte Operationen $\infty^\infty$ Flächen konstanter Krümmung erhält. Merk-

1) Gibt es partielle Differentialgleichungen $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, welche eine unendliche Gruppe gestatten und die Monge-Ampèresche Form nicht besitzen?

würdigerweise ist es der Aufmerksamkeit der Herren Bianchi, Darboux und Bäcklund vollständig entgangen, daß ich hiermit einen außerordentlich wichtigen Beitrag zu dieser Theorie geliefert habe. Die Bemerkung, daß die Anwendung dieser Methode auf die Rotationsflächen konstanter Krümmung eine Reihe Flächen konstanter Krümmung mit algebraischen Krümmungslinien liefert, gehört ebenfalls mir.

Im übrigen bemerke ich, daß man die Bemerkung, daß man Orthogonalsysteme mit $\infty^1$ Flächen konstanter Krümmung finden kann, die von einer arbiträren Funktion abhängen, mit einem Federstrich aus meinen Sätzen ableiten kann.

## Dritter Teil. [574

**20.** Das Problem, alle Minimalflächen zu bestimmen, kommt, wie bekannt, darauf hinaus, alle Flächen zu finden, deren Haupttangenten in jedem Punkte harmonisch hinsichtlich der beiden Tangenten liegen, die den Kugelkreis treffen.

Indem ich nun bemerkte, daß alle Geraden, die den Kugelkreis treffen, einen Linienkomplex bilden, sah ich mich schon längst[1]) dazu veranlaßt, das folgende allgemeine Problem zu stellen:

Gegeben ist ein irreduzibler oder zerfallender Linienkomplex. Es werden alle Flächen gesucht, welche in dem Sinne hinsichtlich des Komplexes konjugiert sind, daß für jeden Punkt die Haupttangenten hinsichtlich zweier Komplextangenten konjugiert sind.

Jedes derartige Problem findet seinen analytischen Ausdruck in einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$Rr + Ss + Tt = 0.$$

**21.** Dieses allgemeine und hervorragend wichtige Problem ist in neuerer Zeit von mehreren Geometern aufs neue formuliert worden. Demgegenüber erlaube ich mir festzustellen, daß es zuerst von mir aufgestellt worden ist. Soweit mir bekannt, bin ich der einzige, der dieses Problem sogar für eine Reihe spezieller Fälle gelöst hat.

Ich bemerke zunächst, daß mein Problem, sobald der betreffende Linienkomplex aus allen Treffgeraden einer ebenen Kurve $C$ besteht, dadurch gelöst wird, daß man die Kurve $C$ ins Unendliche verlegt und sodann alle Translationsflächen konstruiert, deren erzeugende Kurven dem besprochenen Linienkomplexe angehören.

---

1) Synthetisch analytische Untersuchungen über Minimalflächen. Archiv for Math. Christiania 1877. Vergleiche auch Kurzes Résumé . . . Ges. d. W. zu Christiania 1872. [Diese Ausg. Bd. I, Abh. XVII; Bd. III, Abh. I.]



Ich löste ferner mein allgemeines Problem für den tetraedralen Linienkomplex. Zu diesem Zwecke brachte ich die Gleichung des Kugelkreises auf die Form:

$$(a-b)\,d\xi\,d\eta + (b-c)\,d\eta\,d\zeta + (c-a)\,d\zeta\,d\xi = 0,$$

setzte sodann:

$$\text{(A)} \qquad \xi = \log x, \quad \eta = \log y, \quad \zeta = \log z$$

und erhielt so die Differentialgleichung: [575

$$(a-b)\,z\,dx\,dy + (b-c)\,x\,dy\,dz + (c-a)\,y\,dz\,dx = 0,$$

welche mit der Gleichung:

$$b\,dy(x\,dz - z\,dx) + c\,dz(y\,dx - x\,dy) + a\,dx(z\,dy - y\,dz) = 0$$

äquivalent ist und somit einen Linienkomplex zweiten Grades, und zwar einen tetraedralen Komplex darstellt. Ich fand nun, daß die Gleichung jeder Minimalfläche:

$$\Omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

durch die Substitution (A) eine Fläche:

$$\Omega(\log x, \log y, \log z) = 0$$

liefert, welche hinsichtlich des betreffenden tetraedralen Komplexes konjugiert ist. In dieser Weise fand ich alle Integralflächen der betreffenden partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche nicht gleichzeitig dem singulären intermediären Integrale genügen.

Diese Flächen gestatten eine schöne geometrische Erzeugung, wie ich schon im Januar 1870 in den Göttinger Nachrichten [diese Ausg. Bd. I, Abh. V] angedeutet habe. Nimmt man nämlich zwei sich schneidende Kurven $c$ und $k$, deren Tangenten dem tetraedralen Komplexe angehören, und führt sodann auf $c$ alle $\infty^1$ projektiven Transformationen aus, welche das Fundamentaltetraeder invariant lassen und dabei den Schnittpunkt der Kurven $c$ und $k$ in irgend einen anderen auf $k$ gelegenen Punkt überführen, so erzeugen die erhaltenen Kurven eine Fläche, welche hinsichtlich unsres tetraedralen Komplexes konjugiert ist. Diese Fläche enthält überdies $\infty^1$ Kurven, welche mit $k$ hinsichtlich des Fundamentaltetraeders projektiv sind.

Die hier gegebene geometrische Integration unsrer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung bleibt noch gültig, wenn das Fundamentaltetraeder ein ausgeartetes ist.

Diese Flächenkategorien haben viele schöne geometrische Eigenschaften, die ich früher nur flüchtig angedeutet habe. Doch habe ich wiederholt hervorgehoben, daß die Haupttangentenkurven dieser Flächen immer bestimmt werden können. Dies beruht darauf, daß auf jeder derartigen Fläche die beiden Scharen Haupttangentenkurven, sowie die beiden Scharen Kurven, welche unsrem tetraedralen Komplexe angehören, sogar drei gemeinsame infinitesimale Transformationen gestatten. Liegt [576 eine solche Fläche vor, so fallen überdies die beiden Quadraturen, welche zunächst zur Bestimmung der beiden zuletzt besprochenen Kurvenscharen erforderlich sind, einfach weg.

**22.** Indem wir uns nun wieder zu meinem allgemeinen Probleme wenden, bemerke ich, daß ich dasselbe auch für den Fall gelöst habe, daß der Linienkomplex in einen allgemeinen linearen Komplex und in einen speziellen linearen zerfällt, dabei vorausgesetzt, daß die Achse des speziellen Komplexes dem allgemeinen linearen Komplexe angehört. Ich erhielt[1]) die Lösung dieses Problems, indem ich auf alle Minimalflächen meine schöne Berührungstransformation anwandte, welche die Minimalgeraden und die Punkte des Raumes in die Punkte und die Geraden eines linearen Komplexes eines zweiten Raumes überführt. Bei dieser Berührungstransformation gehen die Minimalflächen über in Flächen, welche zu zwei linearen Komplexen in der besprochenen Beziehung stehen.

Da ein tetraedraler Komplex zerfallen kann in den Inbegriff aller Geraden, welche wenigstens eine unter zwei windschiefen Geraden schneiden, so konnte ich ebenfalls alle Flächen angeben, welche hinsichtlich eines Komplexes konjugiert sind, der aus zwei speziellen linearen Komplexen besteht. Wenn die Achsen dieser beiden speziellen linearen Komplexe einander schneiden, so erhält man die Integralflächen der Gleichung $s = 0$, welche übrigens direkt aus den Minimalflächen hervorgehen, wenn der Kugelkreis in ein Geradenpaar zerfällt.

Für alle hier betrachteten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gilt das allgemeine Gesetz, daß auf jeder Integralfläche die beiden Scharen von Haupttangentenkurven und die beiden Scharen von Komplexkurven drei gemeinsame infinitesimale Transformationen gestatten.

**23.** Wendet man meine Berührungstransformation, welche Gerade in Kugeln umwandelt, auf mein früher besprochenes allgemeines Problem an, so erhält man ein äquivalentes, ebenfalls wichtiges Problem, das ich folgendermaßen formuliere:

1) Vergleiche meine Arbeit: Synthetischanalytische Untersuchungen über Minimalflächen. Archiv for Math. Bd. II, 1877, § 1. [Diese Ausg. Bd. I, Abh. XVII, S. 288, Z. 9—11.]



Ist ein Kugelkomplex vorgelegt, so wird eine vorgelegte Fläche in jedem Punkte von gewissen, etwa $m$ Kugeln des Komplexes berührt. Liegen unter diesen $m$ Kugeln jedesmal zwei harmonisch zu den [577 beiden zugehörigen Krümmungskugeln der Fläche, so erfüllt diese Fläche eine gewisse partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integralflächen durch diese Eigenschaft definiert sind.

Meine obenstehenden Betrachtungen gestatten nun ohne weiteres, dieses allgemeine Problem für eine Reihe spezieller Fälle zu erledigen.

Besteht der Komplex aus lauter kongruenten Kugeln, also aus Kugeln, deren Radius $r$ durch die Gleichung:

$$r^2 = a^2 = \text{Const.}$$

gegeben ist, so erhält man die partielle Differentialgleichung der Flächen konstanter Krümmung.

Betrachtet man dagegen den zerfallenden Kugelkomplex, der aus allen Punkten und Ebenen des Raumes besteht, so erhält man die partielle Differentialgleichung der Minimalflächen.

**24.** Ich habe gezeigt, daß jede kontinuierliche Gruppe mehrere Reihen von Differentialinvarianten liefert.

Betrachtet man zum Beispiel die endliche kontinuierliche Gruppe aller Bewegungen des euklidischen Raumes:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \quad z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x},$$

so kann man die zugehörigen Differentialinvarianten von Kurven suchen. Bezeichnet man nun mit $\varrho$ und $\tau$ den Krümmungsradius und Torsionsradius, sowie mit $s$ die Bogenlänge, so sind:

$$\varrho, \tau, \frac{d\varrho}{ds}, \frac{d\tau}{ds}, \frac{d^2\varrho}{ds^2}, \cdots$$

die gesuchten Differentialinvarianten.

Meine allgemeine Integrationstheorie[1]) eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen erklärt die von [578 Hoppe und mir erhaltenen Resultate hinsichtlich der Bestimmung aller Kurven, deren Krümmung, Torsion und Bogenlänge durch eine oder zwei gegebene Relationen gebunden sind.

1) Herrn Goursats Resultate hinsichtlich der Kurven des vierfach ausgedehnten Raumes, deren drei Krümmungen gegebene Funktionen der Bogenlänge sind, waren früher von mir angegeben worden (vgl. Ges. d. W. zu Christiania, 1882). [Diese Ausg. Bd. III, Abh. XXXVII, S. 535.]

**25.** Sucht man andererseits die Differentialinvarianten der Flächen gegenüber der euklidischen Bewegungsgruppe, so erhält man zunächst die beiden Hauptkrümmungsradien:

$$R_1 \text{ und } R_2,$$

sodann, wie ich in meinen Vorlesungen immer hervorhebe, vier Größen dritter Ordnung:

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1}, \frac{\partial R_1}{\partial s_2}, \frac{\partial R_2}{\partial s_1}, \frac{\partial R_2}{\partial s_2};$$

in den soeben geschriebenen Formeln bedeuten $s_1$ und $s_2$ die Bogenlängen der Krümmungslinien.

Die einzigen, nicht singulären invarianten Differentialgleichungen [zweiter Ordnung] sind die von Weingarten betrachteten Gleichungen:

$$R_2 - \varphi(R_1) = 0.$$

**26.** Es hat ein gewisses Interesse, diese Betrachtungen auf die Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen auszudehnen.

Wir denken uns also gegeben eine Fläche zweiten Grades im dreifachen Raume und deren sechs projektive infinitesimale Transformationen aufgestellt.

Diese Gruppe liefert für Flächen zwei unabhängige Differentialinvarianten $J$, $\mathfrak{J}$ zweiter Ordnung, vier von dritter Ordnung, fünf von vierter Ordnung, und so weiter.

Es ist nun leicht, diese Differentialinvarianten zu bestimmen, oder jedenfalls begrifflich zu deuten.

Unsere Fläche zweiten Grades bestimmt eine nichteuklidische Geometrie in dem von Riemann, Beltrami und Klein angegebenen Sinne. Dehnt man nun den Begriff Krümmungskugel auf diese Geometrie aus, wie Darboux näher ausgeführt hat, so hat jede Fläche in jedem Punkte zwei Krümmungskugeln. Andererseits haben die Kugeln eine Invariante. Es lassen sich die Invarianten $J$ und $\mathfrak{J}$ wählen als die Krümmungsradien der betrachteten Fläche.

Die allgemeinste invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung, die nicht etwa singulär ist, hat daher die Form:

$$\Omega(J, \mathfrak{J}) = 0.$$

Hierher gehört die Differentialgleichung aller Flächen, deren [579 Haupttangenten hinsichtlich der Fläche zweiten Grades ein konstantes Doppelverhältnis haben.

Hierher gehört andererseits eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integralflächen dadurch charakterisiert sind, daß ihre sämtlichen Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören.



**27.** Die Entwickelungen des ersten Teiles dieser Abhandlung geben, mit dem Prinzipe der Dualität verbunden, ein neues Resultat, das ein hervorragendes selbständiges Interesse darbietet:

**Satz.** Ist eine beliebige algebraische Raumkurve vorgelegt, so gibt es $\infty^\infty$ hindurchgehende Integralflächen der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

welche **algebraisch** sind. Es ist immer möglich, alle diese Flächen zu finden.

Der Beweis beruht darauf, daß die Gleichung $s = 0$ die dualistische Transformation gestattet.

## XIII.

## Die Theorie der Translationsflächen und das Abelsche Theorem. [141

Leipz. Ber. 1896, Heft II, III, abgeliefert 31. 8. 1896, S. 141—198. Angekündigt durch A. Mayer in der Sitzung vom 21. 10. 1895, eingeliefert in der vom 3. 2. 1896.

**1.** In den Jahren 1869—1871 wurde ich dazu veranlaßt, mich eingehend mit denjenigen Flächen zu beschäftigen, die durch drei Gleichungen von der Form:

$$x = A_1(t_1) + A_2(t_2),$$
$$y = B_1(t_1) + B_2(t_2),$$
$$z = C_1(t_1) + C_2(t_2)$$

dargestellt werden.

Diese Flächen, die naturgemäß als Translationsflächen bezeichnet werden können, enthalten zwei ausgezeichnete Kurvenscharen, nämlich die Scharen $t_1 = \text{Const.}$ und $t_2 = \text{Const.}$, deren jede aus $\infty^1$ kongruenten und gleichgestellten Kurven besteht. Eine Translationsfläche läßt sich daher als eine Fläche definieren, die in zwei Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden kann. Hierbei ist aber zu bemerken, daß, sobald eine Fläche in einer Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden kann, immer noch eine zweite derartige Erzeugung möglich ist; bei der ersten Erzeugung beschreiben ja alle Punkte der bewegten Kurve kongruente und gleichgestellte Bahnkurven.

Eine Fläche heißt daher eine Translationsfläche, [142
wenn sie eine Schar kongruenter und gleichgestellter Kurven enthält. Dann enthält sie aber immer noch eine zweite derartige Kurvenschar. Diese beiden Kurvenscharen können allerdings in besonderen Fällen eine irreduzible Schar bilden; dann aber gehen durch jeden Punkt der Fläche **zwei** Kurven dieser irreduzibeln Schar, die überdies innerhalb eines passend gewählten Bereiches in zwei getrennte Scharen zerfällt.



**2.** Es gibt nun aber Flächen, die in mehr als zwei Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden können. Für derartige Flächen gilt offenbar der Satz, daß die betreffenden Erzeugungen paarweise zusammengehören, sodaß ihre Anzahl grade, oder unendlich ist. Wenn insbesondere vier solche Erzeugungen möglich sind, wollen wir sagen, daß die betreffende Fläche in **zwei** Weisen als Translationsfläche aufgefaßt werden kann.

Dem entsprechend sagen wir zuweilen, daß eine Fläche, die in unendlich vielen Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden kann, in unendlich vielen Weisen als Translationsfläche aufgefaßt werden kann.

**3.** Im Laufe der fünfundzwanzig letzten Jahre beschäftigte ich mich bei vielen Gelegenheiten eingehend mit der Theorie der Translationsflächen, und ich glaube in dieser Weise Resultate von großer, teilweise sogar von hervorragender Wichtigkeit erhalten zu haben. Unter diesen meinen Arbeiten sind wohl nur diejenigen, die sich auf Minimalflächen beziehen, allgemein bekannt geworden. Meine übrigen Untersuchungen über Translationsflächen sind, wahrscheinlich, weil sie größtenteils in norwegischen Zeitschriften, wenn auch in deutscher Sprache, veröffentlicht wurden, lange wenig beachtet worden. In neuerer Zeit fangen aber verschiedene Mathematiker an, sich auch mit diesen meinen Arbeiten zu beschäftigen.

Unter diesen Umständen sah ich mich neuerdings[1]) dazu veranlaßt, diesen Gegenstand wieder aufzunehmen, und zwar werde ich jetzt versuchen, in zwei Abhandlungen den **von mir entdeckten** fundamentalen Zusammenhang zwischen der Theorie der **Translationsflächen** und dem **Abelschen Theoreme** ausführlicher als in meinen [143
bisherigen Publikationen darzustellen und zu begründen.

Neuerdings hat sich auch Herr Poincaré in einer Note, die in der ersten Hälfte des Jahres 1895 in den Comptes Rendus erschien, mit dieser von mir begründeten Theorie beschäftigt. Leider hatte der ausgezeichnete Verfasser, dessen Leistungen auf anderen Gebieten niemand mehr anerkennt als ich, versäumt, sich hinlänglich mit meinen Untersuchungen bekannt zu machen. Jedenfalls kann ich mir nicht in anderer Weise erklären, daß er sich in seinen Untersuchungen über Translationsflächen und Translationsmannigfaltigkeiten mit Resultaten begnügt, die sich als ganz spezielle Fälle unter meine allgemeinen Sätze unterordnen.

**4.** Da es sich nun auch bei anderen Gelegenheiten gezeigt hat, daß meine Untersuchungen über Translationsgebilde nicht hinlänglich bekannt

1) Diese Berichte 1892, S. 447 und 559. [Hier Abh. XI und XII.]

sind, so erlaube ich mir, zunächst ein vollständiges Verzeichnis meiner ausführlicheren oder wichtigeren Publikationen auf diesem Gebiete einzuschalten.

1. Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien. Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania, 1872, S. 27, Z. 1—4. [Diese Ausg. Bd. III, Abh. I, S. 3, Z. 16—13 v. u. Vgl. auch Z. 7—5 v. u.]

In dieser Note wurde angedeutet, daß es mir gelungen war, alle Flächen zu bestimmen, die unendlich viele Scharen kongruenter und gleichgestellter Kurven enthalten.

2. Synthetischanalytische Untersuchungen über Minimalflächen. Archiv for Math. og Naturv., Bd. II, Christiania 1877. [Diese Ausg. Bd. I, Abh. XVII.]

Diese ziemlich ausführliche Arbeit enthält allgemeine Untersuchungen über Translationsflächen, über die Bestimmung der Ordnung und Klasse derartiger Flächen, über ihre unendlich fernen Punkte, und so weiter, die in den nachstehenden Arbeiten teilweise weitergeführt sind.

3. Weitere Untersuchungen über Minimalflächen, Archiv for Math. og Naturv., Bd. IV, Christiania 1880. [Diese Ausg. Bd. I, Abh. XXV.]

Diese Abhandlung liefert eine eingehende Bestimmung und Diskussion aller Minimalflächen, die unendlich viele Translationserzeugungen gestatten.

4. 5. Beiträge zur Theorie der Minimalflächen I, II, Math. Annalen, Bd. XIV und XV. [1879. Hier Abh. II und III.]

Diese Abhandlungen nehmen ihren Ausgangspunkt in allgemeinen Sätzen über Translationsflächen.

6. Bestimmung aller in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Integralflächen der Differentialgleichung $s = 0$; Archiv for Math. og Naturv., Bd. IV, Christiania 1879. [Diese Ausg. Bd. III, Abh. XXIII.]

7. Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translation einer Kurve erzeugt werden, Archiv for Math. og Naturv., Bd. VII. [1882. Diese Ausg. Bd. I, Abh. XXVII.]

Diese wichtige Arbeit leistet durch große Rechnungen die vollständige Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefaßt werden können. Der Zusammenhang dieses Problems mit dem Abelschen Theoreme war mir damals unbekannt, während ich allerdings einen bekannten Satz über die Schnittpunkte einer Ge- [144
raden und einer Kurve vierter Ordnung benutzte.



8. Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel, Comptes Rendus 1892, S. 277. [Hier Abh. X.]

Diese wichtige Note enthält einerseits eine merkwürdige neue Deutung des Abelschen Theorems, andererseits eine noch wichtigere Umkehrung des Abelschen Theorems. Es werden zum ersten Male allgemeine analytische Eigenschaften der Abelschen Integrale angegeben, die keinen anderen analytischen Funktionen zukommen.

9. Sur une application de la théorie des groupes continus à la théorie des fonctions, Comptes Rendus 1892, S. 334. [Diese Ausg. Bd. VI, Abh. XIII.]

10. 11. Untersuchungen über Translationsflächen I, II; Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. W., Leipzig 1892. [Hier Abh. XI und XII.]

Die erste unter diesen Abhandlungen entwickelt eine sehr merkwürdige pseudometrische Theorie der Translationsflächen, die damit anfängt, den Ponceletschen Kugelkreis durch eine beliebige ebene Kurve zu ersetzen. In der zweiten Arbeit werden unter anderm alle algebraischen Integralflächen der Gleichung $s = 0$ bestimmt, die durch eine beliebige algebraische Kurve hindurchgehen.

## Kapitel I.

### Flächen, die in unendlich vielen Weisen als Translationsflächen aufgefaßt werden können.

**5.** Im Winter 1869—1870 bemerkte ich zufällig, daß die Ebenen und die Zylinderflächen keineswegs die einzigen Flächen sind, die in unendlich vielen Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden können. In diesem Kapitel reproduziere ich die an sich sehr lehrreichen Betrachtungen, die mich ursprünglich zu dieser Entdeckung führten.

Ich stellte eine Beziehung zwischen den Punkten $x, y, z$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ zweier dreidimensionaler Räume fest, indem ich dem Punkte $x, y, z$ denjenigen Punkt $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ zuordnete, dessen Koordinaten die Werte:

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

besaßen. Die hierdurch bestimmte transzendente Punkttransformation wandte ich auf die Ebenen:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

des Raumes $x, y, z$ an und erhielt so die transzendenten Flächen:

$$Ae^{\mathfrak{x}} + Be^{\mathfrak{y}} + Ce^{\mathfrak{z}} + D = 0.$$

Dabei konnte ich aus den mir schon damals bekannten Eigenschaften der logarithmischen Punkttransformation (A) den Schluß ziehen, daß die gefundenen transzendenten Flächen unendlich viele kongruente und [145 gleichgestellte Kurven enthalten.

Wir werden auf diesen Schluß, der auch im folgenden Kapitel eine Rolle spielt, sogleich ausführlich eingehen.

**6.** Alle krummen Kurven des Raumes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ lassen sich derart in Scharen anordnen, daß jede Schar aus $\infty^3$ kongruenten und gleichgestellten Kurven besteht.

Denken wir uns nun eine Kurve einer solchen Schar durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = \alpha(t), \quad \mathfrak{y} = \beta(t), \quad \mathfrak{z} = \gamma(t)$$

dargestellt, so bestimmen die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = \alpha(t) + a, \quad \mathfrak{y} = \beta(t) + b, \quad \mathfrak{z} = \gamma(t) + c$$

mit den drei Parametern $a, b, c$ eine Kurvenschar, bestehend aus $\infty^3$ Kurven, die mit der vorgelegten kongruent und gleichgestellt sind; hiermit haben wir eine analytische Darstellung der betrachteten Kurvenschar.

Unsere Punkttransformation (A) ordnet diesen $\infty^3$ Kurven $\infty^3$ Bildkurven im Raume $x, y, z$ zu, deren Gleichungen:

$$\log x = \alpha(t) + a, \quad \log y = \beta(t) + b, \quad \log z = \gamma(t) + c$$

auf die Form:

$$(1) \qquad x = e^a \cdot e^{\alpha(t)}, \quad y = e^b \cdot e^{\beta(t)}, \quad z = e^c \cdot e^{\gamma(t)}$$

gebracht werden können. Die hiermit erhaltene Schar von $\infty^3$ Kurven des Raumes $x, y, z$ besitzt daher die folgende charakteristische Eigenschaft:

Jede Kurve der Schar (1) geht aus einer bestimmten Kurve der Schar, etwa aus der Kurve:

$$x = e^{\alpha(t)}, \quad y = e^{\beta(t)}, \quad z = e^{\gamma(t)},$$

durch eine *projektive* Transformation von der Form:

$$x_1 = Ax, \quad y_1 = By, \quad z_1 = Cz$$

hervor.

*Zwei Kurven $c_1, c_2$ des Raumes $x, y, z$ bilden sich daher dann und nur dann als kongruente und gleichgestellte Kurven des Raumes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ab, wenn $c_1$ und $c_2$ mit einander* **projektiv** *sind, und zwar vermöge einer linearen Transformation:*

$$x_1 = Ax, \quad y_1 = By, \quad z_1 = Cz,$$

*die die Koordinatenebenen $x = 0, y = 0, z = 0$ und die unendlich ferne Ebene in Ruhe läßt.*



**7.** Soll sich daher eine Fläche $\Omega(x, y, z) = 0$ im Raume $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ [146 als eine Translationsfläche abbilden, so ist hierzu notwendig und hinreichend, daß die Fläche $\Omega(x, y, z) = 0$ unendlich viele Kurven enthält, die unter einander projektiv sind, und zwar vermöge projektiver Transformationen, die die spezielle Form: $x_1 = Ax, y_1 = By, z_1 = Cz$ besitzen.

Um die Sprache zu erleichtern, wollen wir, wie gelegentlich in älteren Arbeiten (Gött. Nachr., Januar 1870 [Diese Ausg. Bd. I, Abh. V]), sagen, daß $\infty^3$ Kurven des Raumes $x, y, z$ eine *Gattung* bilden, wenn sie unter einander vermöge Transformationen von der speziellen Form: $x_1 = Ax$, $y_1 = By$, $z_1 = Cz$ projektiv sind.

Alsdann können wir uns kürzer so ausdrücken:

*Bei der logarithmischen Abbildung:*

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

*gehen Kurven derselben Gattung des Raumes $x, y, z$ in kongruente und gleichgestellte Kurven des Raumes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ über.*

*Die Fläche $W(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$ ist dann und nur dann eine Translationsfläche, wenn die Gleichung:*

$$W(\log x, \log y, \log z) = 0$$

*im Raume $x, y, z$ eine Fläche darstellt, die $\infty^1$ Kurven derselben Gattung enthält.*

**8.** Als Korollar erhalten wir überdies unmittelbar den Satz:

*Eine Fläche $\Omega(e^{\mathfrak{x}}, e^{\mathfrak{y}}, e^{\mathfrak{z}}) = 0$ läßt sich dann und nur dann in* **unendlich vielen Weisen** *durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugen, wenn die entsprechende Fläche $\Omega(x, y, z) = 0$ im Raume $x, y, z$ $\infty^1$ Kurvenscharen enthält, deren jede aus $\infty^1$ Kurven derselben Gattung besteht.*

In dieser Lage befindet sich nun aber jede Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

des Raumes $x, y, z$; denn die $\infty^2$ Geraden, die in einer Ebene enthalten sind, ordnen sich, wie wir jetzt zeigen, in $\infty^1$ Scharen, deren jede aus $\infty^1$ Geraden derselben Gattung besteht.

Sollen nämlich zwei Gerade des Raumes $x, y, z$ derselben Gattung angehören, anders ausgesprochen, soll es möglich sein, die eine Gerade in die andere durch eine projektive Transformation:

$$x_1 = Ax, \quad y_1 = By, \quad z_1 = Cz$$

überzuführen, die die Koordinatenebenen $x = 0, y = 0, z = 0$ und [147 die unendlich ferne Ebene $\infty = 0$ in Ruhe läßt, so ist dazu erforderlich, daß diese beiden Geraden jene vier Ebenen in vier Punkten treffen, die in beiden Fällen dasselbe Doppelverhältnis bestimmen. Und diese notwendige Bedingung ist auch, wie man leicht verifiziert, hinreichend.

Hieraus folgt unmittelbar, daß sich die $\infty^2$ Geraden, die in einer beliebig gewählten Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

liegen, wirklich in $\infty^1$ Scharen anordnen, deren jede aus $\infty^1$ Geraden derselben Gattung besteht. Die Geraden jeder einzelnen Gattung, die offenbar mit vier festen Geraden der Ebene (2) dasselbe Doppelverhältnis bestimmen, umhüllen einen Kegelschnitt, der die vier Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\infty = 0$ berührt.

**9.** Hiermit ist nun das angekündigte Resultat abgeleitet, sodaß wir den folgenden Satz aufstellen können:

**Theorem I. Die Fläche:**

$$\boldsymbol{A e^{\mathfrak{x}} + B e^{\mathfrak{y}} + C e^{\mathfrak{z}} + D = 0}$$

**enthält, welche Werte auch die Konstanten $A$, $B$, $C$, $D$ haben mögen, immer $\infty^1$ Kurvenscharen, deren jede aus $\infty^1$ kongruenten und gleichgestellten Kurven besteht. Die Fläche läßt sich daher in unendlich vielen Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugen. Bei jeder derartigen Erzeugung beschreiben die Punkte der bewegten Kurve Bahnkurven, die nicht allein unter einander, sondern auch mit der bewegten Kurve kongruent und gleichgestellt sind.**

**10.** Die vier Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\infty = 0$ bestimmen, können wir sagen, ein Tetraeder, und jede Gerade des Raumes $x, y, z$ schneidet die vier Flächen dieses Tetraeders in vier Punkten, deren Doppelverhältnis $\varkappa$ offenbar von der gegenseitigen Lage des Tetraeders und der betreffenden Geraden abhängt. Alle $\infty^3$ Geraden, die in dem angegebenen Sinne unser Tetraeder nach einem gegebenen Doppelverhältnisse $\varkappa$ schneiden, bilden einen Linienkomplex, einen sogenannten tetraedralen Linienkomplex. Zu unserem Tetraeder gehören offenbar $\infty^1$ verschiedene tetrae- [148
drale Linienkomplexe, und diese Komplexe sind sämtlich vom zweiten Grade, da alle Geraden eines [solchen] Komplexes, die in einer beliebig gewählten Ebene liegen, einen Kegelschnitt umhüllen, der die vier Tetraederflächen berührt.

**11.** Bringt man nach Plücker die Gleichungen einer Geraden von allgemeiner Lage auf die Form:

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma$$



und betrachtet dementsprechend $r, \varrho, s, \sigma$ als Linienkoordinaten, so erkennt man durch einfache Rechnungen, die wir hier nicht zu wiederholen brauchen, daß die besprochenen tetraedralen Linienkomplexe durch die Gleichung:

$$r\sigma - \varkappa \,.\, \varrho s = 0$$

dargestellt werden.

Alle $\infty^1$ Geraden eines tetraedralen Linienkomplexes:

$$r\sigma - \varkappa \,.\, \varrho s = 0,$$

die in einer Ebene liegen und dabei einen Komplexkegelschnitt umhüllen, gehören — so können wir jetzt sagen — derselben Gattung an. Diese $\infty^1$ Geraden bilden sich daher bei der logarithmischen Abbildung $\mathfrak{x} = \log x$, $\mathfrak{y} = \log y$, $\mathfrak{z} = \log z$ im Raume $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ als kongruente und gleichgestellte Kurven ab.

Es ist dieser Satz nur eine andere Fassung unserer früheren Ergebnisse.

**12.** Die in diesem Kapitel dargestellten Entwickelungen stammen aus dem Winter 1869—1870 (vgl. Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien, Verh. der Ges. d. W. zu Christiania, 30. April 1872. [Diese Ausg. Bd. III, Abh. I]). Eine ausführliche Darstellung dieser Betrachtungen findet sich in der Abhandlung: Weitere Untersuchungen über Minimalflächen, im norwegischen Archive, Bd. IV, 1880 [diese Ausg. Bd. I, Abh. XXV]. In dieser letzten Arbeit werden unter anderm auch die Ausartungen der Flächen:

$$Ae^{\mathfrak{x}} + Be^{\mathfrak{y}} + Ce^{\mathfrak{z}} + D = 0$$

sorgfältig diskutiert; hiermit waren, abgesehen von den Zylinderflächen und Ebenen, alle Flächen gefunden, die in unendlich vielen Weisen als Translationsflächen aufgefaßt werden können.

Hier können wir uns auf die folgende Andeutung beschränken: Liegt irgend eine transitive Gruppe von vertauschbaren und projektiven Transformationen vor, etwa die Gruppe:

$$x_1 = Ax, \quad y_1 = By, \quad z_1 = z + C,$$ [149

so gibt es immer eine Transformation, in casu die Transformation:

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = z,$$

die die vorgelegte Gruppe in die Gruppe aller Translationen des Raumes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ verwandelt. Alsdann bilden sich immer die Ebenen des Raumes $x, y, z$:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

im Raume $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ als Flächen ab, die in unendlich vielen Weisen durch

Translation einer Kurve erzeugt werden können. Dies ist also insbesondere der Fall mit den Flächen:

$$Ae^{\mathfrak{x}} + Be^{\mathfrak{y}} + C\mathfrak{z} + D = 0.$$

Unter den hierdurch bestimmten Flächen befinden sich unter andern die geradlinigen Minimalflächen, sowie die Cayleysche Regelfläche dritten Grades.

## Kapitel II.

## Flächen, die in vier Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden.

**13.** Wir sahen im vorigen Kapitel, daß die logarithmische Abbildung: $\mathfrak{x} = \log x$, $\mathfrak{y} = \log y$, $\mathfrak{z} = \log z$, angewandt auf Ebenen des Raumes $x, y, z$, im Raume $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ Flächen liefert, die in unendlich vielen Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden können. In diesem Kapitel zeigen wir, daß eben diese Abbildung die $\infty^5$ Flächen zweiten Grades:

$$Axy + Byz + Czx + Dz + Ex + Fy = 0 \tag{1}$$

$$(A, B, C, D, E, F \neq 0),$$

die die Ecken des Tetraeders: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\infty = 0$ enthalten, in Flächen:

$$Ae^{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}} + Be^{\mathfrak{y}+\mathfrak{z}} + Ce^{\mathfrak{z}+\mathfrak{x}} + De^{\mathfrak{z}} + Ee^{\mathfrak{x}} + Fe^{\mathfrak{y}} = 0 \tag{2}$$

überführt, die in vier Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden.

**14.** Zum Beweise dieses merkwürdigen Satzes erinnern wir zunächst an die längst bekannte Bemerkung, daß alle die $\infty^1$ Geraden einer Erzeugung einer Fläche zweiten Grades jedes Tetraeder, dessen vier Ecken auf der Fläche liegen, nach demselben Doppelverhältnisse schneiden.

Hieraus folgt, daß eine jede unter den beiden Geradenscharen der Fläche zweiten Grades (1) aus Geraden derselben Gattung besteht. Dementsprechend enthält die transzendente Bildfläche (2) jedenfalls zwei [150
Scharen kongruenter und gleichgestellter Kurven.

Um nun nachzuweisen, daß die Fläche zweiten Grades (1) vier Kurvenscharen enthält, die aus Kurven derselben Gattung bestehen, führen wir auf diese Fläche eine involutorische Transformation von der Form:

$$x_1 = \frac{\lambda}{x}, \quad y_1 = \frac{\mu}{y}, \quad z_1 = \frac{\nu}{z} \tag{J}$$

aus und erhalten hierdurch wiederum eine Fläche zweiten Grades:

$$D\nu xy + E\lambda yz + F\mu zx + A\lambda\mu z + B\mu\nu x + C\nu\lambda y = 0,$$



die um unser Tetraeder umgeschrieben ist. Setzen wir insbesondere voraus, daß alle sechs Koeffizienten $A, B, \ldots, F$ von Null verschieden sind, so können die Parameter $\lambda, \mu, \nu$ immer derart gewählt werden, daß die neue Fläche zweiten Grades mit der ursprünglichen Fläche (1) identisch ist; dies tritt nämlich ein dann und nur dann, wenn:

$$\lambda = \frac{FD}{CA}, \quad \mu = \frac{DE}{AB}, \quad \nu = \frac{EF}{BC}$$

gesetzt wird.

Nun aber ist die involutorische Transformation $J$, wie man leicht verifiziert, mit allen projektiven Transformationen:

$$x_1 = mx, \quad y_1 = py, \quad z_1 = nz$$

vertauschbar, die unser Tetraeder invariant lassen. Infolgedessen verwandelt die Transformation $J$ alle $\infty^3$ Kurven einer beliebigen Gattung in $\infty^3$ Kurven einer gewissen anderen Gattung. Insbesondere gehen alle $\infty^3$ Geraden eines tetraedralen Linienkomplexes $r\sigma - \varkappa . \varrho s = 0$ in $\infty^3$ Kurven dritter Ordnung über, die einer Gattung angehören.

**15.** Durch Zusammenfassung der hiermit erhaltenen Ergebnisse können wir nun den folgenden Satz aufstellen:

**Theorem II. Jede Fläche zweiten Grades:**

$$\boldsymbol{Axy + Byz + Czx + Dz + Ex + Fy = 0}$$

$$\boldsymbol{(A, B, C, D, E, F \neq 0)},$$

**die um das Tetraeder $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\infty = 0$ umgeschrieben ist, enthält vier ausgezeichnete Kurvenscharen, deren jede aus** [151
**$\infty^1$ Kurven derselben Gattung besteht. Zwei unter diesen Kurvenscharen bestehen aus lauter Geraden, nämlich den geradlinigen Erzeugenden der Fläche. Die beiden andern Kurvenscharen bestehen aus Kurven dritter Ordnung, denjenigen Kurven dritter Ordnung nämlich, die auf unserer Fläche liegen und durch die vier Tetraederecken gehen.**[1])

**16.** Wenden wir nun die logarithmische Transformation:

$$\mathfrak{x} = \log x, \quad \mathfrak{y} = \log y, \quad \mathfrak{z} = \log z$$

1) Schon in meiner ersten mathematischen Arbeit (Repräsentation der Imaginären der Plangeometrie, Verh. d. G. d. W. zu Christiania, 1869, S. 122—130 [diese Ausg. Bd. I, Abh. IV, S. 46—53]) beschäftigte ich mich zufälligerweise recht eingehend mit den vier im Texte besprochenen Kurvenscharen; den Satz des Textes entwickelte ich im Laufe des Winters 1869—1870 in einem Seminarvortrage bei Professor Kummer.

auf die Fläche zweiten Grades:

$$Axy + Byz + Czx + Dz + Ex + Fy = 0$$

und die vier eben besprochenen auf ihr liegenden Kurvenscharen an, so erkennen wir unmittelbar, daß die hervorgehende transzendente Fläche wirklich, wie früher angekündigt, vier Scharen kongruenter und gleichgestellter Kurven enthält, und somit in vier Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden kann. In dieser Weise erhalten wir den folgenden merkwürdigen Satz:

**Theorem III. Jede Fläche, deren Gleichung die Form:**

$$Ae^{\mathfrak{x}+\mathfrak{y}} + Be^{\mathfrak{y}+\mathfrak{z}} + Ce^{\mathfrak{z}+\mathfrak{x}} + De^{\mathfrak{z}} + Ee^{\mathfrak{x}} + Fe^{\mathfrak{y}} = 0$$
$$(A, B, C, D, E, F \neq 0)$$

**besitzt, enthält vier Scharen kongruenter und gleichgestellter Kurven, deren jede durch eine hinzutretende lineare Gleichung in den Größen:**

$$e^{\mathfrak{x}},\ e^{\mathfrak{y}},\ e^{\mathfrak{z}},$$

**oder durch eine ebensolche Gleichung in den inversen Größen:**

$$e^{-\mathfrak{x}},\ e^{-\mathfrak{y}},\ e^{-\mathfrak{z}}$$

**ausgeschieden wird. Diese Flächen können daher in vier verschiedenen Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden.**[1])

**17.** Es ist nun leicht, weitere Flächen zu finden, die in vier [152 Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden können. Zu diesem Zwecke verfahren wir etwa wie im Schlusse des vorigen Kapitels.

Wir denken uns, daß das vorgelegte Tetraeder ausartet, was bekanntlich in mehreren Weisen geschehen kann. Dann artet die projektive Gruppe: $x_1 = Ax$, $y_1 = By$, $z = Cz$ in eine andere projektive Gruppe aus, die immer durch eine zweckmäßige transzendente oder algebraische Transformation $T$ in die Gruppe der Translationen übergeführt werden kann. Wenden wir nun diese Transformation $T$ auf diejenigen Flächen zweiten Grades an, die um das ausgeartete Tetraeder umgeschrieben sind, so erhalten wir jedesmal Flächen, die in vier Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden können.

Es ist aber nicht notwendig, diese Andeutung hier weiter auszuführen; später geben wir nämlich, wie in früheren Arbeiten, eine direkte und

1) Das Theorem fand ich, wenn ich nicht irre, schon im Winter 1869—1870; jedenfalls besaß ich schon damals zwei Sätze, von denen es ein unmittelbares Korollar ist. In meiner früher zitierten Arbeit aus dem Jahre 1882 [diese Ausg. Bd. I, Abh. XXVII], die alle Flächen mit mehrfacher Translationserzeugung bestimmt, ist das Theorem nicht erwähnt.



allgemeine Bestimmung aller Flächen, die in vier Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden.

**18.** Der Begriff Translationsfläche dehnt sich, wie ich längst und bei vielen Gelegenheiten hervorgehoben habe, sogar in mehreren Weisen auf $n$ Dimensionen aus.[1]) Die nächstliegende Verallgemeinerung dieses Begriffes ist die folgende:

Eine $q$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit des $n$-fachen Raumes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißt eine Translationsmannigfaltigkeit, wenn die Koordinaten ihrer Punkte durch Gleichungen von der Form:

$$x_\varkappa = \varphi_{\varkappa 1}(t_1) + \varphi_{\varkappa 2}(t_2) + \cdots + \varphi_{\varkappa q}(t_q) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n)$$

als Funktionen von $q$ Parametern ausgedrückt werden können.

In dieser und meiner folgenden Arbeit legen wir diese Definition zu Grunde und beschäftigen uns ganz besonders mit dem wichtigen Falle $q = n - 1$. Wir stellen uns die Aufgabe, im $n$-fachen Raume alle $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu finden, die in mehrfacher Weise als Translationsmannigfaltigkeiten aufgefaßt werden können.[2]) Dieses außerordentlich [153 schwierige Problem, das in den beiden soeben zitierten Arbeiten zum ersten Male gestellt und vollständig erledigt wurde, bildet den Gegenstand für diese und unsere nächste Arbeit. An dieser Stelle beschränken wir uns auf die vorläufige Bemerkung, daß die Gleichung:

$$A_1 e^{\mathfrak{x}_1} + A_2 e^{\mathfrak{x}_2} + \cdots + A_n e^{\mathfrak{x}_n} + A = 0,$$

welche Werte auch die Parameter $A, A_1, \ldots, A_n$ haben mögen, immer eine Mannigfaltigkeit darstellt, die in $\infty^{n-2}$ Weisen als Translationsmannigfaltigkeit aufgefaßt werden kann.

1) Vgl. insbesondere die beiden oben zitierten Arbeiten: „Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translation einer Kurve erzeugt werden können" (1882) und „Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel", 1892. [Diese Ausg. Bd. I, Abh. XXVII, S. 465 f. und hier Abh. X].

2) Es ist mir übrigens auch gelungen, alle $(n-q)$-fachen Mannigfaltigkeiten des $n$-fachen Raumes zu finden, die sich in mehrfacher Weise als Translationsmannigfaltigkeiten auffassen lassen.

Die weitergehende Frage nach allen Mannigfaltigkeiten, die in mehrfacher Weise die Darstellung:

$$x_\varkappa = \sum_i^{1\ldots\nu} \varphi_{\varkappa i}(t_1^{(i)}, \ldots, t_{\mu_i}^{(i)}) \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n)$$
$$(\mu_1 + \cdots + \mu_\nu < n)$$

gestatten, habe ich ebenfalls mit Erfolg in Angriff genommen, wenn auch ihre allgemeine Erledigung meine Kräfte übersteigt.

**19.** In dieser ersten Abhandlung geben wir für den Fall $n = 3$ eine allgemeine Erledigung unseres Problems, die wesentlich einfachere Rechnungen verlangt als unsere ursprüngliche im Jahre 1882 veröffentlichte Behandlung desselben Problems. In unserer nächsten Abhandlung geben wir eine ausgeführte Darstellung der früher (1892) von uns nur skizzierten Erledigung des allgemeinen Problems für beliebiges $n$.

Da es meinen Nachfolgern, wie es scheint, nicht gelungen ist, die von mir skizzierte Methode zu rekonstruieren, will ich die vollständige Darstellung meiner Theorie nicht länger zurückhalten. Ich kann hinzufügen, daß ich diese Theorie in meinen Vorlesungen an der Universität Leipzig wiederholt ausführlich dargestellt habe, sowie daß ich schon im Anfange des Jahres 1892 mehreren Mathematikern ausführliche Mitteilungen über diese meine Untersuchungen gemacht habe.

## Kapitel III. [154

### Durch zweckmäßige Verwertung des Abelschen Theorems findet man Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefaßt werden können.

**20.** Durch die im vorhergehenden dargestellen Entdeckungen[1]) wurde ich in den siebziger Jahren dazu veranlaßt, mir das allgemeine Problem zu stellen: alle Flächen zu finden, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefaßt werden können.

Ich sah bald, daß dieses Problem außerordentliche Schwierigkeiten darbietet. Die direkte Behandlung desselben führte auf sehr ausgedehnte Rechnungen, die jedenfalls bei dem ersten Anblicke vollständig undurchsichtig waren. Zufällige Umstände kamen mir indes zu Hilfe, und es gelang mir, zu beweisen, daß es $\infty^{18}$ nicht developpable Flächen gibt, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefaßt werden können, ferner, daß es möglich ist, alle diese Flächen durch Ausführung gewisser Quadraturen zu finden.

1) Meine im Jahre 1872 angedeutete Bestimmung aller Flächen, die sich in unendlich vielen Weisen als Translationsflächen auffassen lassen, nahm ihren Ausgangspunkt in einem beachtenswerten Hilfssatze, dessen Beweis von mir nie veröffentlicht worden ist. Dieser Hilfssatz besteht darin, daß ein Büschel von Kegelschnitten die einzige Schar von $\infty^1$ Kurven in der Ebene liefert, die auf jeder Geraden dieser Ebene eine Involution bestimmt. Mein Beweis dieses Hilfssatzes beruhte auf der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und deckte sich wohl so ziemlich mit den Betrachtungen, durch welche Herr Scheffers später die Richtigkeit meines Satzes bestätigt hat.



Diese Flächen waren im allgemeinen transzendent. Es ergab sich aber merkwürdigerweise, daß jede derartige Fläche zu einer gewissen ebenen algebraischen Kurve in einer eigentümlichen Beziehung steht. Zu jeder irreduzibeln Kurve vierter Ordnung gehören nämlich $\infty^4$ ähnliche und gleichgestellte Flächen von der verlangten Eigenschaft. Ebenso gehören zu jeder Kurve vierter Ordnung, die in eine irreduzible Kurve dritter Ordnung und eine Gerade zerfallen ist, $\infty^4$ ähnliche und gleichgestellte Flächen von der verlangten Beschaffenheit. Dagegen gehören zu jeder aus zwei irreduzibeln Kegelschnitten (oder aus einem irreduzibeln und einem zerfallenden Kegelschnitte) bestehenden Kurve [155 vierter Ordnung zwei ganz verschiedene Flächenscharen mit den verlangten Eigenschaften; jede Schar besteht, wie in den früheren Fällen, aus $\infty^4$ ähnlichen und gleichgestellten Flächen. Endlich gehören zu jeder aus vier Geraden bestehenden Kurve vierter Ordnung drei getrennte Flächenscharen, unter denen jede aus $\infty^4$ ähnlichen und gleichgestellten Flächen mit unendlich vielen Erzeugungen besteht.

**21.** Der hiermit aufgedeckte Zusammenhang zwischen einer hochinteressanten Kategorie transzendenter Flächen und allen ebenen algebraischen Kurven vierter Ordnung interessierte mich lebhaft (vergleiche meine mehrmals zitierte Arbeit im norwegischen Archive 1882 [diese Ausg. Bd. I, Abh. XXVII]). Da ich aber selbst den inneren Grund dieses merkwürdigen Zusammenhanges nicht übersah, versuchte ich in den Jahren 1881—1889 wiederholt in schriftlichen oder mündlichen Mitteilungen die Aufmerksamkeit hervorragender Geometer (unter andern der Herren Klein, Schwarz, Voss, Rohn) auf meine Publikationen über diesen Gegenstand zu lenken. Gegenüber einigen unter diesen Herren (insbesondere gegenüber Herrn Rohn) bemerkte ich sogar ausdrücklich, daß das von mir gelöste Problem gewiß „mit dem Abelschen Theoreme“ in Verbindung stehen müßte. Niemand unter den genannten Mathematikern, die doch alle sowohl in der Geometrie, wie in der Theorie der Abelschen Integrale vollständig zu Hause sind, bemerkte mir gegenüber, daß es möglich ist, durch zweckmäßige Verwertung des Abelschen Theorems, angewandt auf die Integrale erster Gattung einer algebraischen Kurve vierter Ordnung, Translationsflächen mit vier Erzeugungen zu konstruieren.

Es war auch keineswegs leicht, aus meinen analytischen Entwickelungen den Zusammenhang des erledigten Problems mit dem Abelschen Theoreme herauszulesen; denn meine Entwickelungen zeigten nur, daß die gesuchten Flächen dadurch gefunden werden können, daß man zuerst ein vollständiges Differential integriert, das die Irrationalität einer Kurve vierter Ordnung enthält, und sodann ein neues Differential integriert, das von dem gefundenen Integrale abhängt. Daß aber diese sukzessiven Quadraturen durch eine einzige Quadratur (richtiger gesagt, durch unabhängige Quadraturen) ersetzt werden können, entging damals meiner Aufmerksamkeit; dies rechnerisch zu konstatieren, dürfte wohl auch kein Kinderspiel sein.

**22.** Ich sehe mich dazu veranlaßt, auf diesen Punkt ausführlich [156 einzugehen.

Meine Untersuchungen aus dem Jahre 1882 zeigten, daß es, sobald eine beliebige algebraische Kurve vierter Ordnung vorliegt, immer möglich ist, durch rein algebraische Operationen zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} R_1(p,q)r + S_1(p,q)s + T_1(p,q)t = 0, \\ R_2(p,q)r + S_2(p,q)s + T_2(p,q)t = 0 \end{cases}$$

aufzustellen, die $\infty^4$ gemeinsame und nicht zylindrische Integralflächen mit den verlangten Eigenschaften besitzen. Alle diese Integralflächen sind eo ipso ähnlich und gleichgestellt, weil das Gleichungssystem (1) bei allen Ähnlichkeitstransformationen von der Form:

$$x_1 = mx + a, \quad y_1 = my + b, \quad z_1 = mz + c$$

invariant bleibt. Diese Gruppe mit den vier Parametern $m, a, b$ und $c$ ist integrabel. Sie enthält überdies eine invariante Untergruppe, nämlich die Gruppe aller Translationen, die aus vertauschbaren Transformationen besteht.

Hieraus läßt sich nach meinen allgemeinen Theorien schließen, daß die Bestimmung der gesuchten $\infty^4$ Flächen auf Quadraturen zurückgeführt werden kann; aus der Zusammensetzung der viergliedrigen Gruppe läßt sich aber keineswegs schließen, daß die betreffenden Quadraturen von einander unabhängig sind. Daß im vorliegenden Falle eine solche Unabhängigkeit in gewissem Sinne faktisch stattfindet, beruht auf der besonderen Form der Koeffizienten $R_\varkappa$, $S_\varkappa$, $T_\varkappa$. Diese Unabhängigkeit der Quadraturen aus meinen alten Formeln herauszulesen, würde wahrscheinlich auch zur Zeit ausgedehnte Rechnungen verlangen. Für mich liegt aber kein Grund vor, auf diese Rechnungen einzugehen.

**23.** Erst im Winter 1891—1892 bemerkte ich, daß das Abelsche Theorem, angewandt auf Kurven vierter Ordnung, bei zweckmäßiger Deutung $\infty^{18}$ im allgemeinen transzendente Flächen liefert, die in zweifacher Weise als Translationsflächen aufgefaßt werden können. Da nun



meine Untersuchungen aus dem Jahre 1882 mir gezeigt hatten, daß es gerade $\infty^{18}$ Flächen gibt, die diese Eigenschaft besitzen, so lag es nahe, zu vermuten, daß das Abelsche Theorem bei der besprochenen Deutung alle Flächen liefert, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefaßt werden können. Eine relativ einfache Diskussion der Integrabilitätsbedingungen der beiden in Betracht kommenden partiellen Differentialgleichungen zeigte, daß diese Vermutung richtig war.

Das hiermit gefundene Resultat hat sowohl für die Geometrie wie für die Funktionentheorie ein hervorragendes Interesse. Durch seine Ausdehnung auf $n$ Dimensionen, die durch sehr beachtenswerte Betrachtungen durchgeführt wurde, gelang es mir faktisch zum ersten Male, die Abelschen Integrale durch allgemeine analytische Eigenschaften zu charakteri- [157 sieren, die mit dem Begriffe algebraisch gar nichts zu tun haben.

Dieses Ergebnis muß gewiß für die Theorie der Abelschen Integrale und der Abelschen Funktionen eine hervorragende Wichtigkeit besitzen. Haben sich auch fast alle meine mathematischen Untersuchungen auf ganz anderen Gebieten als der Funktionentheorie bewegt, so glaube ich doch, diese meine Auffassung aussprechen zu dürfen.

**24.** Wir wählen eine beliebige irreduzible oder reduzible Gleichung vierten Grades:

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

in den Veränderlichen $\alpha$ und $\beta$. Deuten wir sodann diese Größen als Cartesische Koordinaten in einer Ebene, so stellt $F = 0$ eine irreduzible oder zerfallende Kurve vierter Ordnung dar.

Setzen wir sodann:

$$\int^{\alpha} \frac{\alpha\, d\alpha}{F_\beta} = \varphi(\alpha), \quad \int^{\alpha} \frac{\beta\, d\alpha}{F_\beta} = \psi(\alpha), \quad \int^{\alpha} \frac{d\alpha}{F_\beta} = \chi(\alpha)$$

und bezeichnen die Koordinaten der vier Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden von allgemeiner Lage durch:

$$\alpha_1, \beta_1; \ \alpha_2, \beta_2; \ \alpha_3, \beta_3; \ \alpha_4, \beta_4,$$

so nimmt das Abelsche Theorem, angewandt auf den vorliegenden Fall, die Form an:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \varphi(\alpha_3) + \varphi(\alpha_4) &= \text{Const.}, \\ \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2) + \psi(\alpha_3) + \psi(\alpha_4) &= \text{Const.}, \\ \chi(\alpha_1) + \chi(\alpha_2) + \chi(\alpha_3) + \chi(\alpha_4) &= \text{Const.} \end{aligned}$$

Hier können wir sogar bei passender Wahl der unteren Grenzen erreichen, daß die drei rechtsstehenden Konstanten verschwinden, sodaß uns das Abelsche Theorem die noch einfacheren Gleichungen:

$$\varphi(\alpha_1) + \cdots + \varphi(\alpha_4) = 0,$$
$$\psi(\alpha_1) + \cdots + \psi(\alpha_4) = 0,$$
$$\chi(\alpha_1) + \cdots + \chi(\alpha_4) = 0$$

liefert.

**25.** Bilden wir nun die drei Gleichungen: [158

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2), \\ y = \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2), \\ z = \chi(\alpha_1) + \chi(\alpha_2) \end{cases}$$

und deuten dabei $x, y, z$ als Cartesische Koordinaten eines Raumpunktes, $\alpha_1$ und $\alpha_2$ als unabhängige Parameter, so bestimmen diese Gleichungen eine Translationsfläche, und diese Translationsfläche wird gleichzeitig durch die Gleichungen:

$$(2')\qquad \begin{cases} -x = \varphi(\alpha_3) + \varphi(\alpha_4), \\ -y = \psi(\alpha_3) + \psi(\alpha_4), \\ -z = \chi(\alpha_3) + \chi(\alpha_4) \end{cases}$$

dargestellt, dabei vorausgesetzt, daß jetzt $\alpha_3$ und $\alpha_4$ als unabhängige Parameter gedacht werden.

**26.** Es ist dabei unmittelbar klar, daß eine jede unter den vier Gleichungen:

$$\alpha_\varkappa = \text{Const.} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

eine Schar kongruenter und gleichgestellter Kurven auf unserer Fläche liefert. Es läßt sich aber überdies nachweisen, daß diese vier Kurvenscharen paarweise von einander verschieden sind.

Wären nämlich zum Beispiel die beiden Kurvenscharen $\alpha_1 = \text{Const.}$ und $\alpha_3 = \text{Const.}$ identisch, so müßten $\alpha_3$ und $\alpha_1$ offenbar durch eine Relation verknüpft sein, was aber nicht der Fall ist. Bestände in der Tat eine Relation $\alpha_3 = \omega(\alpha_1)$, so bestimmte sie in der $\alpha, \beta$-Ebene $\infty^1$ Gerade, und dann wären auch $\alpha_1$ und $\alpha_2$ durch eine Relation verbunden, während doch $\alpha_1$ und $\alpha_2$ unabhängige Parameter darstellen sollen.

Hiermit ist in definitiver Weise erwiesen, daß die beiden Kurvenscharen $\alpha_1 = \text{Const.}$ und $\alpha_3 = \text{Const.}$ immer verschieden sind, und zwar bleibt dies wahr sowohl, wenn wir unsere Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung betrachten, als, wenn wir uns innerhalb eines bestimmten Bereiches halten.



**27.** Wesentlich anders steht die Sache, wenn wir die beiden Kurvenscharen $\alpha_1 = \text{Const.}$ und $\alpha_2 = \text{Const.}$ in Betracht ziehen. Nach meiner allgemeinen Theorie der Translationsflächen, auf die ich hier verweise[1]), bilden nämlich diese beiden Kurvenscharen eine irreduzible Schar, [159 die jedoch unsere Fläche doppelt bedeckt. Wenn wir uns aber innerhalb eines passenden Bereiches halten, so zerfällt diese irreduzible Schar in dem Sinne in zwei verschiedene Scharen, daß ein kontinuierlicher Übergang von einer Kurve der Schar $\alpha_1 = \text{Const.}$ zu einer Kurve der Schar $\alpha_2 = \text{Const.}$ innerhalb des betreffenden Bereiches nicht möglich ist.

**28.** Um jeden Zweifel auszuschließen, wollen wir den Beweis des Satzes, daß eine jede unter den beiden Kurvenscharen $\alpha_1 = \text{Const.}$ und $\alpha_2 = \text{Const.}$ von einer jeden unter den beiden Scharen $\alpha_3 = \text{Const.}$ und $\alpha_4 = \text{Const.}$ verschieden ist, rein analytisch führen.

Wir haben zwei verschiedene Parameterdarstellungen (2) und (2′) für die Punkte unserer Fläche. Es liegt dann in der Natur der Sache, daß die beiden Parameter $\alpha_1$ und $\alpha_2$, die in die erste Darstellung eingehen, mit den beiden Parametern $\alpha_3$ und $\alpha_4$ der zweiten Darstellung durch zwei unabhängige Relationen verknüpft sein müssen. Unter den drei Relationen:

$$\varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) + \varphi(\alpha_3) + \varphi(\alpha_4) = 0,$$
$$\psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2) + \psi(\alpha_3) + \psi(\alpha_4) = 0,$$
$$\chi(\alpha_1) + \chi(\alpha_2) + \chi(\alpha_3) + \chi(\alpha_4) = 0$$

können daher nur zwei unabhängig sein. Und durch Auflösung ergeben sich einerseits für $\alpha_3$ und $\alpha_4$ Ausdrücke:

$$\alpha_3 = A_3(\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_4 = A_4(\alpha_1, \alpha_2)$$

als Funktionen von $\alpha_1$ und $\alpha_2$, andererseits für $\alpha_1$ und $\alpha_2$ Ausdrücke:

$$\alpha_1 = B_1(\alpha_3, \alpha_4), \quad \alpha_2 = B_2(\alpha_3, \alpha_4).$$

Unsere Behauptung kommt nun darauf hinaus, daß ein jeder unter den Ausdrücken:

$$A_3(\alpha_1, \alpha_2), \quad A_4(\alpha_1, \alpha_2), \quad B_1(\alpha_3, \alpha_4), \quad B_2(\alpha_3, \alpha_4)$$

wirklich von zwei Argumenten abhängt, sodaß die acht Differentialquotienten:

$$\frac{\partial A_3}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial A_3}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial A_4}{\partial \alpha_2},$$
$$\frac{\partial B_1}{\partial \alpha_3}, \quad \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_4}, \quad \frac{\partial B_2}{\partial \alpha_3}, \quad \frac{\partial B_2}{\partial \alpha_4}$$

sämtlich von Null verschieden sind. [160

1) Vergleiche zum Beispiel Math. Ann. Bd. XIV, S. 345—346 [hier Abh. II, S. 137—139].

Daß dies wirklich der Fall ist, folgt unmittelbar daraus, daß unter den vier Schnittpunkten einer Kurve vierter Ordnung und einer Geraden zwei ganz beliebig auf der Kurve gewählt werden können.

**29.** Bei der vorangehenden Diskussion betrachteten wir es als selbstverständlich, daß die Gleichungen (2) eine Fläche und nicht etwa eine Kurve darstellen. Um die Richtigkeit dieser Voraussetzung wirklich zu beweisen, betrachten wir ganz allgemein drei Gleichungen von der Form:

$$(3) \qquad \begin{cases} x = u + v, \\ y = \alpha(u) + \beta(v), \\ z = \gamma(u) + \delta(v). \end{cases}$$

Wären nun etwa $x$ und $y$ durch eine Relation verbunden, so bestände eine Funktionalgleichung von der Form:

$$\alpha(u) + \beta(v) = \Omega(u + v),$$

und diese Gleichung gäbe durch Differentiation nach $u$, wenn $u + v$ als Konstante betrachtet wird:

$$\alpha'(u) - \beta'(v) = 0.$$

Dann aber wären $\alpha'(u)$ und $\beta'(v)$ gleich derselben Konstanten $k$ und:

$$\alpha(u) = ku + k_1, \quad \beta(v) = kv + k_2.$$

Stellten daher die Gleichungen (3) keine Fläche, sondern eine Kurve dar, so wäre diese Kurve eine Gerade.

Da nun aber die drei Integrale:

$$\int \frac{d\alpha}{F_\beta}, \int \frac{\alpha\, d\alpha}{F_\beta}, \int \frac{\beta\, d\alpha}{F_\beta},$$

die zu der Kurve vierter Ordnung $F(\alpha, \beta) = 0$ gehören, keine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten und noch weniger zwei solche Relationen erfüllen, so sehen wir, daß sich unsere frühere Annahme, daß die drei Gleichungen (2) eine Fläche und keine Kurve darstellen, als richtig bewährt.

Unsere Fläche (2) läßt sich infolgedessen in zweifacher Weise als Translationsfläche auffassen.

Die hiermit gefundene Fläche, deren $\infty^2$ Punkte als Repräsentanten der $\infty^2$ Geraden der $\alpha$, $\beta$-Ebene auftreten, besitzt merkwürdige Eigenschaften. Hier beschränken wir uns auf die evidente Bemerkung, daß [161 sie hinsichtlich des Koordinatenanfanges symmetrisch ist, sowie, daß sie im allgemeinen sechsfach periodisch ist.1)

1) Die Gleichungen des Umkehrproblems:

$$\mathfrak{x} = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z), \quad \mathfrak{y} = \psi(x) + \psi(y) + \psi(z), \quad \mathfrak{z} = \chi(x) + \chi(y) + \chi(z)$$

bestimmen eine Punkttransformation zwischen den Räumen $x, y, z$ und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, bei der die Ebenen $x = \text{Const.}$, $y = \text{Const.}$, $z = \text{Const.}$ in die Translationsflächen des Textes übergehen. Diese Bemerkung, die sich auf $n$ Dimensionen ausdehnt, zeigt schon, wie die Entwickelungen des Textes zur Illustration der von Abel und Riemann geschaffenen Theorien dienen können.



**30.** Hiermit sind $\infty^{18}$ Flächen gefunden, die in zweifacher Weise als Translationsflächen aufgefaßt werden können. Wir werden später sehen, daß zwei mit einander projektive Kurven vierter Ordnung Flächen geben, die mit einander affin sind.

Es wird sich andererseits später zeigen, daß wir die in Kap. I betrachteten Flächen mit $\infty^1$ Translationserzeugungen dann erhalten, wenn die Kurve vierter Ordnung in zwei Kegelschnitte zerfällt, und dabei die beiden Punkte $\alpha_1, \beta_1$ und $\alpha_2, \beta_2$ auf demselben Kegelschnitte liegen. Dagegen finden wir die Flächen des Kap. II, wenn die Kurve vierter Ordnung in zwei Kegelschnitte zerfällt, und dabei die Punkte $\alpha_1, \beta_1$ und $\alpha_2, \beta_2$ nicht auf demselben Kegelschnitte liegen.

Die beiden soeben angekündigten Sätze lassen sich leicht verifizieren; dagegen liegt nach meiner Ansicht die von mir erst mit großer Mühe gemachte Entdeckung, daß die Formeln (2) alle nicht developpabeln Flächen mit vier oder noch mehr Translationserzeugungen liefern, tief genug.

**31.** Hierauf gehen wir in den folgenden Kapiteln dieser Abhandlung ausführlich ein. Vorläufig begnügen wir uns mit der Formulierung derjenigen Ergebnisse, die im vorangehenden wirklich bewiesen sind.

**Theorem IV. Bildet man eine irreduzible oder reduzible Gleichung vierten Grades:**

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

**zwischen $\alpha$ und $\beta$ und setzt sodann:**

$$\int^{\alpha} \frac{\alpha\, d\alpha}{F_\beta} = \varphi(\alpha), \quad \int^{\alpha} \frac{\beta\, d\alpha}{F_\beta} = \psi(\alpha), \quad \int^{\alpha} \frac{d\alpha}{F_\beta} = \chi(\alpha),$$

**so liefern die Formeln:**

$$x = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2), \qquad [162$$
$$y = \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2),$$
$$z = \chi(\alpha_1) + \chi(\alpha_2),$$

**sobald $x, y, z$ als Cartesische Koordinaten gedeutet werden, immer eine Fläche, die in vier Weisen, oder sogar in $\infty^1$ Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden kann.**

## Kapitel IV.

### Analytische Formulierung des allgemeinen Problems.

**32.** Translationsfläche nenne ich, wie schon gesagt, jede Fläche, deren Punkte $x, y, z$ durch drei Gleichungen von der Form:

$$x = A_1(t_1) + A_2(t_2),$$
$$y = B_1(t_1) + B_2(t_2),$$
$$z = C_1(t_1) + C_2(t_2)$$

definiert werden. Erteilt man dem Parameter $t_2$ nach und nach alle möglichen konstanten Werte, so erhält man eine Schar kongruenter und gleichgestellter Kurven:

$$x = A_1(t_1) + a_1, \quad y = B_1(t_1) + b_1, \quad z = C_1(t_1) + d_1,$$

die auf der Fläche gelegen sind und im folgenden mit dem gemeinsamen Symbole $c_1$ bezeichnet werden. Erteilt man andererseits dem Parameter $t_1$ konstante Werte, so erhält man eine andere Schar kongruenter und gleichgestellter Kurven:

$$x = A_2(t_2) + a_2, \quad y = B_2(t_2) + b_2, \quad z = C_2(t_2) + d_2,$$

die ebenfalls auf der Fläche liegen und im folgenden als Kurven $c_2$ bezeichnet werden.

Fassen wir die $\infty^1$ Kurven $c_1$ als Rückkehrkurven von $\infty^1$ abwickelbaren Flächen auf, so sehen wir, daß alle diese Abwickelbaren die unendlich ferne Ebene nach einer gemeinsamen Kurve $C_1$ schneiden. Ebenso sind die $\infty^1$ Kurven $c_2$ Rückkehrkurven von $\infty^1$ Abwickelbaren, die die unendlich ferne Ebene nach einer gewissen anderen Kurve $C_2$ schneiden. Diese beiden unendlich fernen Kurven spielen in den folgenden Untersuchungen eine fundamentale Rolle.

**33.** Liegt eine bestimmte Translationsfläche vor, so sind die beiden zugehörigen Kurvenscharen $c_1$ und $c_2$, sowie die beiden unendlich fernen Kurven $C_1$ und $C_2$ im allgemeinen vollständig bestimmt; eine Unbestimmtheit tritt selbstverständlich nur dann ein, wenn die betreffende Fläche in mehrfacher Weise als Translationsfläche aufgefaßt werden kann. [163

Denkt man sich dagegen, daß die beiden Kurven $C_1$ und $C_2$ der unendlich fernen Ebene von vornherein gegeben sind, so ist die zugehörige Translationsfläche keineswegs bestimmt; es gibt ja nämlich $\infty^\infty$ viele Developpable, die die Kurve $C_1$ enthalten, und ebenso $\infty^\infty$ Developpable, die die Kurve $C_2$ enthalten; wählen wir eine beliebige Developpable aus jeder Schar und bezeichnen deren Rückkehrkurven mit $k_1$ und $k_2$, so gibt es $\infty^3$ kongruente und gleichgestellte Translationsflächen, deren erzeugende



Kurven mit $k_1$, beziehungsweise $k_2$ kongruent und gleichgestellt sind; und alle diese Flächen stehen eo ipso in der verlangten Beziehung zu den Kurven $C_1$ und $C_2$.

**34.** Wir behaupten, daß alle Translationsflächen, die zu zwei gegebenen unendlich fernen Kurven $C_1$ und $C_2$ in der angegebenen Beziehung stehen, als die Integralflächen einer gewissen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung definiert werden können.

Differentiieren wir die drei Gleichungen:

$$x = A_1(t_1) + A_2(t_2), \quad y = B_1(t_1) + B_2(t_2), \quad z = C_1(t_1) + C_2(t_2)$$

einer Translationsfläche nach $t_1$, so sind die drei hervorgehenden Ausdrücke:

$$\frac{dx}{dt_1} = A_1'(t_1), \quad \frac{dy}{dt_1} = B_1'(t_1), \quad \frac{dz}{dt_1} = C_1'(t_1) \tag{1}$$

die gemeinsamen Richtungskoeffizienten der Tangenten aller Kurven $c_1$ im Punkte $t_1$. Diese drei Größen erfüllen eine homogene Relation:

$$F_1\left(\frac{dx}{dt_1}, \frac{dy}{dt_1}, \frac{dz}{dt_1}\right) = 0,$$

die durch Elimination von $t_1$ gefunden wird. Fassen wir, wie wir offenbar können, diese drei Richtungskoeffizienten als homogene Koordinaten eines unendlich fernen Punktes auf, so ist $F_1 = 0$ geradezu die Gleichung der Kurve $C_1$.

Ganz analoge Betrachtungen geben eine homogene Gleichung:

$$F_2\left(\frac{dx}{dt_2}, \frac{dy}{dt_2}, \frac{dz}{dt_2}\right) = 0,$$

die die Kurve $C_2$ darstellt.

**35.** In den folgenden Rechnungen ist es im allgemeinen zweckmäßig, die homogenen Punktkoordinaten $dx$, $dy$, $dz$ eines unendlich fernen Punktes durch ihre Verhältnisse: [164

$$\frac{dx}{dz} = \xi, \quad \frac{dy}{dz} = \eta$$

zu ersetzen; wir setzen daher:

$$\frac{dx}{dt_1} : \frac{dz}{dt_1} = A_1'(t_1) : C_1'(t_1) = \xi_1,$$
$$\frac{dy}{dt_1} : \frac{dz}{dt_1} = B_1'(t_1) : C_1'(t_1) = \eta_1,$$

und dementsprechend:

$$\frac{dx}{dt_2} : \frac{dz}{dt_2} = A_2'(t_2) : C_2'(t_2) = \xi_2,$$
$$\frac{dy}{dt_2} : \frac{dz}{dt_2} = B_2'(t_2) : C_2'(t_2) = \eta_2.$$

Alsdann erfüllen die Punkte der Kurve $C_1$ eine Gleichung von der Form:

$$\eta_1 = \varphi_1(\xi_1),$$

und dementsprechend erhält die Gleichung der Kurve $C_2$ die Form:

$$\eta_2 = \varphi_2(\xi_2).$$

**36.** Wählen wir nun auf unserer Translationsfläche:

$$x = A_1(t_1) + A_2(t_2), \quad y = B_1(t_1) + B_2(t_2), \quad z = C_1(t_1) + C_2(t_2)$$

einen Punkt von allgemeiner Lage, so erfüllen alle $\infty^1$ von diesem Punkte ausgehenden Fortschreitungsrichtungen $dx : dy : dz$ der Fläche die bekannte Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Insbesondere besteht diese Gleichung für die Fortschreitungsrichtung:

$$\frac{dx}{dt_1} = A_1'(t_1), \quad \frac{dy}{dt_1} = B_1'(t_1), \quad \frac{dz}{dt_1} = C_1'(t_1)$$

längs der durch den gewählten Punkt gehenden Kurve $c_1$. In dieser Weise erhalten wir die Gleichung:

$$C_1'(t_1) - p A_1'(t_1) - q B_1'(t_1) = 0,$$

die wir jetzt nach $t_2$ differentiieren.

Nun ist:

$$\frac{\partial p}{\partial t_2} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2} = r A_2'(t_2) + s B_2'(t_2),$$ [165

$$\frac{\partial q}{\partial t_2} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2} = s A_2'(t_2) + t B_2'(t_2),$$

und also wird:

$$0 = (r A_2'(t_2) + s B_2'(t_2)) A_1'(t_1) + (s A_2'(t_2) + t B_2'(t_2)) B_1'(t_1),$$

oder:

$$0 = r A_1'(t_1) \,.\, A_2'(t_2) + s(B_2'(t_2) \,.\, A_1'(t_1) + A_2'(t_2) \,.\, B_1'(t_1)) + t B_1'(t_1) \,.\, B_2'(t_2),$$

oder endlich nach Einführung der Größen $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$:

$$0 = r\xi_1\xi_2 + s(\eta_2\xi_1 + \eta_1\xi_2) + t\eta_1\eta_2.$$

Diese Gleichung läßt sich unmittelbar geometrisch deuten. Sie sagt aus, daß die beiden Kurvenscharen $c_1$ und $c_2$ im **Dupin**schen Sinne **konjugierte** Kurvenscharen auf unserer Translationsfläche sind.[1])

1) Nichts ist leichter, als durch direkte geometrische Betrachtungen zu beweisen, daß die Gleichungen $t_1 =$ Const. und $t_2 =$ Const. konjugierte Kurvenscharen liefern. Vergleiche zum Beispiel Math. Ann. Bd. XIV, S. 334 [hier Abh. II, S. 125 f.].

Die Entwickelungen des Textes haben indes einen selbständigen formellen Wert.



**37.** Es bestimmen nun die Gleichungen:

$$1 - p\xi_1 - q\eta_1 = 0, \quad \eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0$$

die Größen $\xi_1$ und $\eta_1$ als Funktionen von $p$ und $q$; und dementsprechend bestimmen die Gleichungen:

$$1 - p\xi_2 - q\eta_2 = 0, \quad \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0$$

die Größen $\xi_2$ und $\eta_2$ als Funktionen von $p$ und $q$. Wir können daher die Gleichung:

(2) $$\xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0$$

als eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung auffassen.

Hiermit ist bewiesen, daß jede Translationsfläche, deren erzeugende Kurven $c_1$, beziehungsweise $c_2$ die Mongesche Gleichung:

(3) $$\frac{dy}{dz} - \varphi_1\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0,$$

beziehungsweise:

(4) $$\frac{dy}{dz} - \varphi_2\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0$$

befriedigen, die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (2) [166 erfüllt.

**38.** Wir wollen beweisen, daß umgekehrt jede nicht developpable Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (2) eine Translationsfläche ist, deren erzeugende Kurven je eine unter den beiden Mongeschen Gleichungen (3), (4) erfüllen.

Bezeichnen wir nämlich die auf unserer Integralfläche gelegenen Integralkurven der Mongeschen Gleichung:

$$\frac{dy}{dz} - \varphi_1\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0$$

mit $k_1$, und die von diesen verschiedenen, auf der Fläche gelegenen Integralkurven der Gleichung:

$$\frac{dy}{dz} - \varphi_2\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0$$

mit $k_2$, so müssen auf jeder Developpabeln, die unsere Fläche längs einer beliebigen Kurve $k_2$ berührt, die geraden Linien dieser Developpabeln die Kurve $C_1$ treffen; und zwar treffen diese Geraden die Kurve $C_1$ jedesmal in demselben Punkte, weil die betreffende Developpable, die ja mit der Kurve $k_2$ variiert, $C_1$ nicht enthalten kann.

Die längs einer Kurve $k_2$ umgeschriebene Developpable ist also jedesmal eine Zylinderfläche, deren unendlich ferne Spitze auf $C_1$ gelegen ist. Wählen wir nun auf unserer Integralfläche die Kurven $k_1$ und $k_2$ zu Gaußischen Koordinatenlinien, deren zugeordnete Parameter etwa $\tau_1$ und $\tau_2$ heißen, so bestehen eo ipso Gleichungen von der Form:

$$\frac{dx}{d\tau_1} : \frac{dy}{d\tau_1} : \frac{dz}{d\tau_1} = \alpha_1(\tau_1) : \beta_1(\tau_1) : \gamma_1(\tau_1),$$

$$\frac{dx}{d\tau_2} : \frac{dy}{d\tau_2} : \frac{dz}{d\tau_2} = \alpha_2(\tau_2) : \beta_2(\tau_2) : \gamma_2(\tau_2),$$

sodaß die Fläche durch drei Gleichungen von der Form:

$$x = \int \{\varrho_1 . \alpha_1(\tau_1)\,d\tau_1 + \varrho_2 . \alpha_2(\tau_2)\,d\tau_2\},$$

$$y = \int \{\varrho_1 . \beta_1(\tau_1)\,d\tau_1 + \varrho_2 . \beta_2(\tau_2)\,d\tau_2\},$$

$$z = \int \{\varrho_1 . \gamma_1(\tau_1)\,d\tau_1 + \varrho_2 . \gamma_2(\tau_2)\,d\tau_2\}$$

dargestellt wird. Dabei zeigen die Integrabilitätsbedingungen, daß $\varrho_1$ [167
nur von $\tau_1$, $\varrho_2$ nur von $\tau_2$ abhängt.

*Alle nicht developpabeln Integralflächen der partiellen Differentialgleichung (2) sind daher Translationsflächen.*

**39.** Wollen wir nun alle Flächen finden, die sich in mehrfacher Weise als Translationsflächen auffassen lassen, so können wir diesem Probleme die folgende Form geben:

*Es sollen in der unendlich fernen Ebene vier solche Kurven:*

$$0 = \eta_1 - \varphi_1(\xi_1), \quad 0 = \eta_2 - \varphi_2(\xi_2), \quad 0 = \eta_3 - \varphi_3(\xi_3), \quad 0 = \eta_4 - \varphi_4(\xi_4)$$

*gefunden werden, daß die beiden partiellen Differentialgleichungen, die man erhält, wenn man in den Gleichungen:*

$$\xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0,$$

$$\xi_3\xi_4 r + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)s + \eta_3\eta_4 t = 0$$

*die Größen $\xi_\varkappa$, $\eta_\varkappa$ vermöge der Relationen:*

$$\eta_\varkappa - \varphi_\varkappa(\xi_\varkappa) = 0, \quad p\xi_\varkappa + q\eta_\varkappa - 1 = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

*als Funktionen von $p$ und $q$ ausdrückt, gemeinsame, nicht developpable Integralflächen besitzen.*

In dieser Abhandlung erledigen wir das hiermit gestellte Problem vollständig. Wir zeigen, daß es *notwendig und hinreichend* ist, *daß die vier Kurven: $\eta_\varkappa - \varphi_\varkappa(\xi_\varkappa) = 0$ vier Zweige einer irreduzibeln oder zerfallenden algebraischen Kurve vierter Ordnung sind.*



**40.** Daß unsere beiden partiellen Differentialgleichungen wirklich gemeinsame Integralflächen haben, wenn die vier Kurven: $\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$ Zweige einer unendlich fernen Kurve vierter Ordnung sind, geht aus dem im vorigen Kapitel abgeleiteten Theoreme unmittelbar hervor.

Denn die damals gefundenen Formeln:

$$x = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2), \quad y = \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2), \quad z = \chi(\alpha_1) + \chi(\alpha_2),$$

in denen die Symbole $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$, $\chi(\alpha)$ die Funktionen:

$$\varphi(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{\alpha\,d\alpha}{F_\beta}, \quad \psi(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{\beta\,d\alpha}{F_\beta}, \quad \chi(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{d\alpha}{F_\beta}$$

bezeichnen, während $F(\alpha, \beta) = 0$ eine beliebige Gleichung vierten Grades darstellt, geben unmittelbar:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial y}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial z}{\partial \alpha_1} = \alpha_1 : \beta_1 : 1,$$ [168

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} : \frac{\partial y}{\partial \alpha_2} : \frac{\partial z}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 : \beta_2 : 1.$$

Setzen wir daher, in Übereinstimmung mit dem Früheren:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_\varkappa} : \frac{\partial y}{\partial \alpha_\varkappa} : \frac{\partial z}{\partial \alpha_\varkappa} = \xi_\varkappa : \eta_\varkappa : 1,$$

so sehen wir, daß sowohl $\xi_1$, $\eta_1$ wie $\xi_2$, $\eta_2$ die Gleichung vierten Grades:

$$F(\xi, \eta) = 0$$

erfüllen.

In ganz entsprechender Weise ergibt sich auch, daß $\xi_3$ und $\eta_3$, sowie $\xi_4$ und $\eta_4$ diese Gleichung vierten Grades erfüllen.

## Kapitel V.

### Vorläufige Diskussion des Problems.

**41.** Führt man auf die Punkte $x, y, z$ des Raumes irgend eine lineare Transformation:

$$x_1 = ax + by + cz + d,$$

$$y_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1,$$

$$z_1 = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$$

aus, so gehen parallele Gerade offenbar in parallele Gerade über, weil ja die unendlich ferne Ebene in Ruhe bleibt. Eine solche Transformation führt also auch jedes Parallelogramm in ein Parallelogramm über. Wendet man daher eine lineare Transformation auf zwei kongruente und gleichgestellte *Polygone* an, so erhält man wiederum zwei kongruente und gleichgestellte Polygone. Ein Grenzübergang zeigt sodann, daß eine lineare Transformation kongruente und gleichgestellte *Kurven* in ebensolche überführt.

Hieraus folgt nun unmittelbar der folgende Satz:

**Satz.** *Alle mit einer Translationsfläche affinen Flächen sind selbst Translationsflächen.*[1])

Nichts ist leichter, als diesen Satz analytisch zu verifizieren; man [169 braucht nur rechts in den Gleichungen die Werte:

$$x = A_1(t_1) + A_2(t_2), \quad y = B_1(t_1) + B_2(t_2), \quad z = C_1(t_1) + C_2(t_2)$$

einzuführen.

**42.** Der aufgestellte Satz kann übrigens auch folgendermaßen formuliert werden:

**Satz.** *Die partielle Differentialgleichung* **vierter** *Ordnung, die* **alle** *Translationsflächen definiert, gestattet alle linearen Transformationen des Raumes.*

Dieser letzte Satz zeigt, wie ich an anderer Stelle ausgeführt habe, daß zu jeder infinitesimalen linearen Transformation $\infty^4$ Translationsflächen gehören, die sämtlich diese infinitesimale Transformation gestatten.

**43.** Die obenstehenden Betrachtungen geben endlich noch den Satz:

**Satz.** *Kann eine vorgelegte Fläche in* **zweifacher** *Weise als Translationsfläche aufgefaßt werden, so besitzen alle affinen Flächen dieselbe Eigenschaft.*

**44.** Wir haben schon in der Einleitung darauf hingewiesen, daß die Anzahl der Erzeugungen einer Fläche durch Translationsbewegung einer

1) Wir sahen früher, daß jede irreduzible *Kurve* vierter Ordnung $F(\alpha, \beta) = 0$ $\infty^4$ unter einander ähnliche *Flächen* bestimmt, deren jede in zwei Weisen als Translationsfläche aufgefaßt werden kann.

Setzen wir nun zum Beispiel voraus, daß die Kurve $F = 0$ eine infinitesimale projektive Transformation der unendlich fernen *Ebene* gestattet, so folgt aus dem Satze des Textes, daß jede unter den zugehörigen Flächen eine infinitesimale *lineare* Transformation des Raumes gestattet.

Besteht andererseits die Kurve $F = 0$ aus vier getrennten Geraden, so lassen sich diese Geraden in drei Weisen in Paare zusammenordnen, und dementsprechend gehören zu einer solchen zerfallenden Kurve *drei* verschiedene Flächenscharen, deren jede $\infty^4$ ähnliche Flächen umfaßt. Da nun *jede* Permutation von vier Geraden einer Ebene durch eine *projektive* Transformation dieser Ebene geleistet werden kann, so schließen wir, daß jene drei Flächenscharen nicht wesentlich verschieden sind, weil die Flächen, die zu zwei verschiedenen Scharen gehören, unter einander *affin* sind.



Kurve immer eine *gerade* Zahl ist. Dagegen darf man *nicht ohne weiteres* behaupten, daß die auf einer Translationsfläche gelegenen Scharen kongruenter und gleichgestellter Kurven immer in grader Anzahl auftreten. Wir wollen auf diesen nicht unwichtigen Punkt ausführlich eingehen.

Wir betrachten eine Fläche, die dadurch erzeugt werden kann, daß die Kurve $c_1$ in Translationsbewegung längs der Kurve $c_2$ geführt wird, ferner dadurch, daß die Kurve $c_3$ längs der Kurve $c_4$ geführt wird. Es [170 ist dann selbstverständlich, daß unsere Fläche auch dadurch erzeugt werden kann, daß die Kurve $c_2$ längs $c_1$, oder $c_4$ längs $c_3$ geführt wird. In den früher von uns betrachteten Fällen gehen durch jeden Punkt der Fläche *vier* verschiedene derartige Kurven, unter denen eine mit $c_1$, eine mit $c_2$, eine mit $c_3$ und endlich eine mit $c_4$ kongruent und gleichgestellt ist.

Es liegt nun in der Natur der Sache, daß die beiden durch einen allgemein gelegenen Punkt der Fläche gehenden Kurven $c_1$ und $c_2$ *verschiedene* Kurven sein müssen.[1]) Ebenso liegt es in der Natur der Sache, daß die durch einen Punkt der Fläche gehenden Kurven $c_3$ und $c_4$ verschieden sein müssen. Dagegen ist es keineswegs ausgeschlossen, daß etwa die beiden durch einen Punkt gehenden Kurven $c_1$ und $c_3$ identisch sind.

Betrachten wir zum Beispiel eine Zylinderfläche und bezeichnen wir zwei auf ihr gelegene krumme, nicht aber kongruente Kurven mit $c_2$ und $c_4$, ferner eine beliebige Gerade der Fläche mit $c_1$, so läßt sich die Fläche durch Translationsbewegung der Geraden $c_1$ längs $c_2$ erzeugen, gleichzeitig aber durch Translationsbewegung der Geraden $c_1$ längs $c_4$. In diesem Beispiele fungieren daher die Geraden der Zylinderfläche nicht allein als Kurven $c_1$, sondern zugleich als Kurven $c_3$.

**45.** Wir behaupten nun, daß die Zylinderflächen (und die Ebenen) die einzigen Flächen sind, die durch *zwei verschiedene Translationsbewegungen derselben Kurve* $c_1$ erzeugt werden können.

Wir denken uns eine derartige Fläche vorgelegt und ziehen durch einen beliebig gewählten Punkt Tangenten an die hindurchgehenden Kurven $c_1 \equiv c_3$, $c_2$ und $c_4$. Diese Tangenten bezeichnen wir mit $t_1, t_2, t_3, t_4$; dabei sind nach unserer Annahme die beiden Geraden $t_1$ und $t_3$ identisch, während $t_2$ und $t_4$ verschiedene Gerade sein sollen.

Nun aber sind $t_1$ und $t_2$ konjugierte Tangenten im *Dupinschen*

1) Im Texte müssen wir uns vorsichtig ausdrücken, da es nicht ausgeschlossen ist, daß die Kurven $c_1$ und $c_2$ kongruent und gleichgestellt sind; dies tritt ja auf den Flächen ein, die ich als Doppelflächen bezeichnet habe.

Sinne; und ebenso sind $t_3$ und $t_4$ konjugierte Tangenten. In unserem Falle sind aber $t_1$ und $t_3$ dieselbe Gerade; diese Gerade ist somit eine Haupttangente.

Unter den gemachten Voraussetzungen müssen daher die Kur- [171 ven $c_1$ Haupttangentenkurven sein.

Da aber unsere Fläche in zwei Weisen durch Translationsbewegung der Kurve $c_1$ erzeugt werden kann, nämlich sowohl durch eine Translationsbewegung längs $c_2$, wie durch eine Translationsbewegung längs der Kurve $c_4$, so erkennen wir, daß nur zwei Möglichkeiten vorliegen: entweder enthält unsere Fläche $\infty^2$ verschiedene Haupttangentenkurven, die mit $c_1$ kongruent und gleichgestellt sind, oder die Kurve $c_1$ gestattet unendlich viele Translationen und ist somit eine Gerade. Da aber die Ebene die einzige Fläche ist, die mehr als $\infty^1$ Haupttangentenkurven enthält, und andererseits jede andere Fläche, die durch Translationsbewegung einer Geraden erzeugt wird, eine Zylinderfläche sein muß, so sehen wir, daß die gesuchten Flächen entweder Ebenen oder Zylinder sind. Dieses Resultat formulieren wir folgendermaßen:

**Satz.** Kann eine Fläche dadurch erzeugt werden, daß eine gewisse Kurve $c_1$ in zwei verschiedenen Translationsbewegungen, einmal längs einer Kurve $c_2$, ein andermal längs einer Kurve $c_4$, fortgeführt wird, so sind zwei Fälle möglich: entweder ist $c_1$ eine Gerade und die Fläche eine **Zylinderfläche**, oder es ist $c_1$ eine ebene Kurve und die Fläche eine **Ebene**.

**46.** Um die vorhergehenden Entwickelungen zu vervollständigen, stellen wir die Frage nach allen developpabeln Translationsflächen.

Wird eine developpable Fläche durch Translationsbewegung einer Kurve $c_1$ längs einer Kurve $c_2$ erzeugt, so enthält die Fläche nach den vorhergehenden Betrachtungen zwei konjugierte Kurvenscharen, deren Kurven mit $c_1$, beziehungsweise $c_2$ kongruent und gleichgestellt sind. Wenn aber auf einer developpabeln und krummen Fläche zwei Kurvenscharen konjugiert sind, so besteht die eine Schar aus den Geraden der Fläche. Diese wird somit durch Translationsbewegung einer Geraden erzeugt. Also:

**Satz.** Ist eine Translationsfläche developpabel, so ist sie eine Zylinderfläche.

Da alle Translationsflächen, wie schon beiläufig bemerkt, als Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung $D_4 = 0$ definiert werden können, während die developpabeln Flächen bekanntlich



die Integralflächen der Gleichung $rt - s^2 = 0$ sind, so liefern die soeben durchgeführten Betrachtungen faktisch die Bestimmung der gemeinsamen Integralflächen der beiden partiellen Differentialgleichungen $D_4 = 0$ [172 und $rt - s^2 = 0$.

**47.** Man kann sich die Aufgabe stellen, alle intermediären Integralgleichungen der partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung $D_4 = 0$ zu finden. Indem ich mir vorbehalte, an anderer Stelle dieses besonders interessante Problem eingehend zu behandeln, erlaube ich mir, hier die folgenden einfachen Bemerkungen einzuschalten.

Nimmt man eine beliebige Kurvenschar, die aus $\infty^2$ kongruenten und gleichgestellten Kurven besteht, so ist diejenige lineare partielle Differentialgleichung, deren Charakteristiken diese Kurven sind, immer eine intermediäre Integralgleichung von $D_4 = 0$.

Nimmt man andererseits eine Schar bestehend aus $\infty^3$ kongruenten und gleichgestellten Kurven, so gibt es immer eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$r + 2N(p, q)s + N^2 t + U(p, q) = 0,$$

deren Integralflächen von den genannten Kurven erzeugt sind. Hier hat man also eine ausgedehnte Kategorie von intermediären Integralgleichungen zweiter Ordnung.

Es gibt aber, wie wir früher sahen, noch eine andere Kategorie von intermediären Integralgleichungen zweiter Ordnung, die die Form besitzen:

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1)s + \eta_1 \eta_2 t = 0,$$

dabei vorausgesetzt, daß $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ als Funktionen von $p, q$ etwa durch die Gleichungen:

$$\xi_1 p + \eta_1 q - 1 = 0, \quad \eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0,$$
$$\xi_2 p + \eta_2 q - 1 = 0, \quad \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0$$

bestimmt sind.

**48.** Es ist nun aber auch möglich, beliebig viele intermediäre Integralgleichungen dritter Ordnung aufzustellen.

Wählen wir nämlich eine ganz beliebige Mongesche Gleichung von der Form:

$$\frac{dy}{dz} - \varphi_1\left(\frac{dx}{dz}\right) = 0,$$

so gibt es $\infty^\infty$ viele Translationsflächen, deren erzeugende Kurven der einen Schar diese Mongesche Gleichung erfüllen, und diese Translationsflächen lassen sich definieren als die Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung, die wir aufstellen wollen.

Wir bilden die beiden Gleichungen:

$$\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0, \quad \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0,$$

in denen $\varphi_1$ eine bestimmte, $\varphi_2$ eine willkürliche Funktion des betreffenden Argumentes bezeichnen soll. Drücken wir sodann in der Gleichung:

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t = 0$$

die Größen $\xi_k$, $\eta_k$ in bekannter Weise als Funktionen von $p$ und $q$ aus, so erhalten wir $\infty^\infty$ viele partielle Differentialgleichungen, deren Integralflächen Translationsflächen sind und dabei jedesmal $\infty^1$ kongruente und gleichgestellte Kurven enthalten, die die Mongesche Gleichung:

$$\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0$$

erfüllen. Wir wollen zeigen, daß alle diese Flächen eine partielle [173 Differentialgleichung dritter Ordnung erfüllen, deren allgemeines Integral sie bilden.

Aus der Gleichung:

$$\xi_1 p + \eta_1 q - 1 = 0$$

folgt durch Differentiation und durch Berücksichtigung der Relation $\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0$:

$$\xi_1 r + \eta_1 s + \frac{\partial \xi_1}{\partial x}(p + q \varphi_1'(\xi_1)) = 0$$

und:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = - \frac{\xi_1 r + \varphi_1(\xi_1) s}{p + q \varphi_1'(\xi_1)},$$

ferner in entsprechender Weise:

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} = - \frac{\xi_2 r + \eta_2 s}{p + q \eta_2'}.$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial y} = - \frac{\xi_1 s + \varphi_1(\xi_1) t}{p + q \varphi_1'(\xi_1)},$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial y} = - \frac{\xi_2 s + \eta_2 t}{p + q \eta_2'}.$$

Differentiieren wir daher die Gleichung:

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t = 0$$

nach $x$, beziehungsweise $y$ und setzen sodann die eben gefundenen Werte ein, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi_1 \xi_2 \alpha + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) \beta + \eta_1 \eta_2 \gamma - & \\ - \{\xi_2 r + \eta_2 s + \varphi'(\xi_1)(\xi_2 s + \eta_2 t)\} & \frac{\xi_1 r + \varphi_1(\xi_1) s}{p + q \varphi_1'(\xi_1)} - \\ - \{\xi_1 r + \eta_1 s + \eta_2'(\xi_1 s + \eta_1 t)\} & \frac{\xi_2 r + \eta_2 s}{p + q \eta_2'} = 0, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \xi_1 \xi_2 \beta + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) \gamma + \eta_1 \eta_2 \delta - & \\ - \{\xi_2 r + \eta_2 s + \varphi'(\xi_1)(\xi_2 s + \eta_2 t)\} & \frac{\xi_1 s + \varphi_1(\xi_1) t}{p + q \varphi_1'(\xi_1)} - \\ - \{\xi_1 r + \eta_1 s + \eta_2'(\xi_1 s + \eta_1 t)\} & \frac{\xi_2 s + \eta_2 t}{p + q \eta_2'} = 0, \end{aligned}$$

in denen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Differentialquotienten dritter Ordnung von $z$ bezeichnen.

Zwischen diesen beiden Gleichungen und den früher aufgestellten Gleichungen:

$$\xi_1 \xi_2 r + (\varphi_1(\xi_1) \xi_2 + \eta_2 \xi_1) s + \varphi_1(\xi_1) \eta_2 t = 0,$$

$$p \xi_1 + q \varphi_1(\xi_1) = 1,$$

$$p \xi_2 + q \eta_2 = 1$$

eliminieren wir die vier Größen:

$$\xi_1, \; \xi_2, \; \eta_2, \; \eta_2'$$

und erhalten hierdurch eine partielle Differentialgleichung dritter [174 Ordnung:

$$\Omega(x, y, z, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0,$$

deren Integralflächen Translationsflächen sind, die zu der vorgelegten Mongeschen Gleichung in der verlangten Beziehung stehen.

Wie schon gesagt, wollen wir an anderer Stelle versuchen, alle intermediären Integralgleichungen der Gleichung $D_4 = 0$ zu finden. Das hiermit formulierte Problem deckt sich mit der Bestimmung aller partiellen Differentialgleichungen, deren nicht singuläre Integralflächen Translationsflächen sind.

## Kapitel VI.

### Flächen, die in drei Weisen durch Translation von ebenen Kurven erzeugt werden.

**49.** In den vorangehenden Kapiteln führten wir unser allgemeines Problem darauf zurück, alle integrabeln Systeme von zwei partiellen Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t = 0, \\ \xi_3 \xi_4 r + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) s + \eta_3 \eta_4 t = 0 \end{cases}$$

zu finden, in denen die $\xi_k$ und $\eta_k$ als Funktionen von $p$ und $q$ durch Relationen bestimmt sind, die die Form:

$$\eta_k - \varphi_k(\xi_k) = 0, \quad p \xi_k + q \eta_k - 1 = 0$$

besitzen.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß, sobald zwei solche partielle Differentialgleichungen eine gemeinsame nicht zylindrische Integralfläche besitzen, sie dann immer gerade $\infty^4$ gemeinsame Integralflächen haben, die unter einander ähnlich und gleichgestellt sind.

**50.** Sind nun die vier Relationen: $\eta_k - \varphi_k(\xi_k) = 0$ ganz beliebig gewählt, sind also die vier entsprechenden unendlich fernen Kurven $C_1, C_2, C_3, C_4$ ganz beliebige Kurven, so läßt sich voraussehen, daß die beiden partiellen Differentialgleichungen (1) keine gemeinsamen Integralflächen besitzen. Um dies wirklich zu beweisen, wollen wir in diesem Kapitel annehmen, daß die drei Kurven $C_1$, $C_2$ und $C_3$ gerade Linien sind. Da wir finden werden, daß in diesem Falle auch die vierte Kurve $C_4$ eine Gerade sein muß, so dürfen wir mit voller Sicherheit behaupten, daß das Gleichungssystem (1) nur dann integrabel ist, wenn die vier unendlich fernen Kurven $C_1, \ldots, C_4$ gewisse Bedingungen erfüllen. [175

Es wird sich ferner ergeben, daß diejenigen Integralflächen, die der Annahme entsprechen, daß die vier Kurven $C_k$ gerade Linien sind, mit den früher besprochenen Flächen:

$$A e^{\mathfrak{x}} + B e^{\mathfrak{y}} + C e^{\mathfrak{z}} + D = 0$$

identisch, oder, richtiger gesagt, affin sind.

**51.** Wir wollen also annehmen, daß die drei Kurven $C_1, C_2, C_3$ drei gerade Linien sind, die ein wirkliches Dreieck bilden. Da wir wissen, daß die mit einer Translationsfläche affinen Flächen selbst Translationsflächen sind, so können wir ohne Beschränkung annehmen, daß die drei besprochenen Geraden die Achsen der drei Ebenenbüschel $x =$ Const., $y =$ Const. und $z =$ Const. sind.

Ist insbesondere die Kurve $C_1$ identisch mit der Achse des Ebenenbüschels $x =$ Const., so besitzt die entsprechende Relation zwischen $\xi_1$ und $\eta_1$ die einfache Form:

$$\xi_1 = 0.$$

Ist andererseits die Kurve $C_2$ identisch mit der Achse des Ebenenbüschels $y =$ Const., so erfüllen $\xi_2$ und $\eta_2$ die Gleichung:

$$\eta_2 = 0.$$

Ist endlich die Kurve $C_3$ identisch mit der Achse des Büschels $z =$ Const., so ergibt sich aus den beiden Gleichungen:

$$dz = 0, \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

daß für $C_3$ die Gleichung:

$$p\,\xi_3 + q\,\eta_3 = 0$$

besteht.



Die beiden partiellen Differentialgleichungen (1) zweiter Ordnung besitzen also unter den gemachten Voraussetzungen die Form:

$$s = 0,$$

$$q\,\xi_4 r + (q\,\eta_4 - p\,\xi_4)s - p\,\eta_4 t = 0$$

und können daher durch die noch einfacheren Gleichungen:

$$s = 0, \quad q\,\xi_4 r - p\,\eta_4 t = 0$$

ersetzt werden.

**52.** Nun aber ist die Gleichung $s = 0$ unmittelbar integrabel; [176 die zugehörigen Integralflächen besitzen die allgemeine Gleichung:

$$z = X(x) - Y(y),$$

und durch Substitution dieses Wertes von $z$ in die zweite partielle Differentialgleichung ergibt sich die Funktionalgleichung:

$$Y' X'' \xi_4 - X' Y'' \eta_4 = 0.$$

Auf der gesuchten Fläche liegen $\infty^1$ kongruente und gleichgestellte Kurven $c_4$. Schneiden wir alle diese Kurven mit einer beliebigen Ebene des Büschels $z =$ Const. und ziehen die zugehörigen Tangenten in den Schnittpunkten mit der gewählten Ebene des Büschels, so sind diese $\infty^1$ Tangenten jedesmal parallel. Wir können daher die Größen $\xi_4$ und $\eta_4$, sowie ihr Verhältnis als Funktionen von $z = X - Y$ auffassen und dementsprechend:

$$\frac{Y' X''}{X' Y''} = Z(X - Y),$$

oder:

$$\frac{X''}{X'} : \frac{Y''}{Y'} = Z(X - Y)$$

setzen.

Die unbekannte Funktion $Z$ von $X - Y$ ist daher gleich einem Produkte von zwei Faktoren, unter denen der eine, nämlich $X'' : X'$, nur von $x$, oder, was auf dasselbe herauskommt, nur von $X$ abhängt, während der andere Faktor nur von $Y$ abhängt.

Wir können daher:

$$\frac{X''}{X'} = \Phi(X), \quad \frac{Y''}{Y'} = \Psi(Y)$$

und dementsprechend:

$$Z(X - Y) = \Phi(X) : \Psi(Y)$$

setzen, und finden sodann durch Differentiation nach $X$ und $Y$ die Gleichung:

$$\Phi' : \Phi = \Psi' : \Psi,$$

die uns zeigt, daß sowohl die linke wie die rechte Seite konstant sein muß. [177

**53.** In dieser Weise erhalten wir für $\Phi$, $\Psi$ und $Z$ Ausdrücke von der Form:

$$\Phi = \alpha e^{kX}, \quad \Psi = \beta e^{kY}, \quad Z = \frac{\alpha}{\beta} e^{k(X-Y)},$$

in denen $\alpha$, $\beta$ und $k$ Konstanten bezeichnen. Also sind $X$ und $Y$ bestimmt als Funktionen von $x$, beziehungsweise $y$ durch die Gleichungen:

$$\frac{X''}{X'} = \alpha e^{kX}, \quad \frac{Y''}{Y'} = \beta e^{kY},$$

oder durch die äquivalenten:

$$\frac{dX'}{dX} = \alpha e^{kX}, \quad \frac{dY'}{dY} = \beta e^{kY},$$

die durch einmalige Integration[1]) geben:

$$X' = \frac{\alpha}{k} e^{kX} + \alpha_1, \quad Y' = \frac{\beta}{k} e^{kY} + \beta_1.$$

Diese Integralgleichungen können aber folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{d(e^{-kX})}{dx} = -\alpha_1 k e^{-kX} - \alpha,$$

$$\frac{d(e^{-kY})}{dy} = -\beta_1 k e^{-kY} - \beta,$$

und dementsprechend finden wir durch nochmalige Integration:

$$e^{-kX} + \frac{\alpha}{\alpha_1 k} = A e^{-\alpha_1 k x},$$ [178

$$e^{-kY} + \frac{\beta}{\beta_1 k} = B e^{-\beta_1 k y}.$$

---

1) Im Texte wird von dem Falle $k = 0$ abgesehen. Alsdann ist:

$$\Phi = m, \quad \Psi = n, \quad Z = \frac{m}{n},$$

ferner:

$$X' = A e^{mx}, \quad Y' = B e^{ny}$$

und, wenn $m$ und $n$ beide von Null verschieden sind:

$$X = \frac{A}{m} e^{mx} + A_1, \quad Y = \frac{B}{n} e^{ny} + B_1.$$

Die Gleichung der betreffenden Flächen besitzt dann die Form:

$$z = \frac{A}{m} e^{mx} - \frac{B}{n} e^{ny} + C.$$

Von diesen speziellen Fällen können wir in diesem Kapitel absehen. Wäre eine unter den Konstanten $m$, $n$ gleich Null, so wären die zugehörigen Integralflächen Zylinderflächen.



Tragen wir diese Werte in die Gleichung $z = X - Y$, oder in die äquivalente Gleichung:

$$e^{kz} = \frac{e^{-kY}}{e^{-kX}}$$

ein, so erhalten wir als Gleichung der gesuchten Flächen:

$$e^{kz} = \frac{B e^{-\beta_1 k y} - \frac{\beta}{\beta_1 k}}{A e^{-\alpha_1 k x} - \frac{\alpha}{\alpha_1 k}},$$

oder:

$$A e^{k(z - \alpha_1 x)} - \frac{\alpha}{\alpha_1 k} e^{kz} - B e^{-\beta_1 k y} + \frac{\beta}{\beta_1 k} = 0.$$

**54.** Es ist leicht, diese Flächen durch die lineare Transformation:

$$x_1 = z - \alpha_1 x, \quad y_1 = -\beta_1 y, \quad z_1 = z$$

auf die Form:

(2) $$L e^{kx_1} + M e^{ky_1} + N e^{kz_1} + P = 0$$

zu bringen; und diese letzteren Flächen können nach den Ergebnissen des ersten Kapitels sogar in unendlich vielen Weisen als Translationsflächen aufgefaßt werden.

Es ist nun eine direkte Folge aus den früheren Entwickelungen, daß die gefundenen Flächen jedenfalls in drei Weisen durch Translation einer ebenen Kurve erzeugt werden können. Wir haben ja nämlich ursprünglich an unsere Flächen grade die Forderung gestellt, daß ihre Schnittkurven mit den Ebenen $x = \text{Const.}$ kongruente und gleichgestellte Kurven sein sollen, ferner, daß auch die Schnittkurven mit den Ebenen $y = \text{Const.}$ (sowie mit den Ebenen $z = \text{Const.}$) kongruente und gleichgestellte Kurven sein sollen.

Hieraus ergibt sich zunächst, daß die Fläche:

$$L e^{kx_1} + M e^{ky_1} + N e^{kz_1} + P = 0$$

von den Ebenen eines jeden unter den drei Büscheln:

$$x_1 - z_1 = \text{Const.}, \quad y_1 = \text{Const.}, \quad z_1 = \text{Const.}$$ [179

nach kongruenten und gleichgestellten Kurven geschnitten wird. Und da die Gleichung unserer Fläche hinsichtlich $x_1$, $y_1$ und $z_1$ symmetrisch ist, so sehen wir gleichzeitig, daß sie auch von den Ebenen eines jeden unter den drei Büscheln:

$$y_1 - x_1 = \text{Const.}, \quad z_1 - y_1 = \text{Const.}, \quad x_1 = \text{Const.}$$

nach kongruenten und gleichgestellten Kurven geschnitten wird.

Die Fläche:

$$Le^{kx_1} + Me^{ky_1} + Ne^{kz_1} + P = 0 \tag{2}$$

gestattet somit **sechs** verschiedene Erzeugungen durch Translation einer **ebenen** Kurve.

**55.** Es läßt sich voraussehen, daß diese sechs Erzeugungen paarweise zusammengehören. Daß dem so ist, werden wir jetzt sogar in zwei verschiedenen Weisen konstatieren.

Kehren wir für einen Augenblick zu den ursprünglichen Koordinaten $x, y, z$ zurück, so wissen wir, daß unsere Fläche die partielle Differentialgleichung $s = 0$ erfüllt und somit durch eine Gleichung von der Form $z = X(x) - Y(y)$ dargestellt wird. Daher läßt sich unsere Fläche dadurch erzeugen, daß eine in einer Ebene $x = \text{Const.}$ gelegene Kurve in Translation längs einer anderen ebenen Kurve geführt wird, die in einer Ebene $y = \text{Const.}$ gelegen ist. Kehren wir daher zu den Koordinaten $x_1, y_1, z_1$ zurück, so sehen wir, daß die beiden Scharen kongruenter Kurven, die durch die Ebenen:

$$x_1 - z_1 = \text{Const.}, \quad y_1 = \text{Const.}$$

ausgeschnitten werden, im Dupinschen Sinne konjugierte Kurvenscharen sind.

Dementsprechend schneiden auch die Ebenen der beiden Büschel:

$$y_1 - x_1 = \text{Const.}, \quad z_1 = \text{Const.}$$

unsere Fläche nach zwei konjugierten Scharen kongruenter Kurven. Und ebenso schneiden die Ebenen der beiden Büschel:

$$z_1 - y_1 = \text{Const.}, \quad x_1 = \text{Const.}$$

unsere Fläche nach zwei konjugierten Scharen kongruenter Kurven.

**56.** Ehe wir nun in der Diskussion unserer Flächen weiter- [180 gehen, wollen wir ein Resultat notieren, das für uns ein besonderes Interesse besitzt. Faktisch zeigen nämlich die früheren Entwickelungen, daß sobald die drei unendlich fernen Kurven $C_1$, $C_2$ und $C_3$ gerade Linien sind, auch die vierte Kurve $C_4$ eine Gerade sein muß.[1])

Das System der beiden partiellen Differentialgleichungen (1) ist somit nur dann integrabel, wenn die vier Kurven $C_k$ in zweckmäßiger Weise gewählt werden.

Zum Überfluß wollen wir auch rechnerisch konstatieren, daß die

1) Dies bleibt auch dann wahr, wenn die früher aufgetretene Konstante $k$ verschwindet. Der Leser kann es leicht verifizieren.



Gleichung zwischen den Größen $\xi_4$ und $\eta_4$, die die Kurve $C_4$ darstellt, linear ist. Früher (S. 176 [hier S. 559]) fanden wir ja die Gleichung:

$$Y'X''\xi_4 - X'Y''\eta_4 = 0.$$

Andererseits erhalten wir aber durch Substitution des Wertes $z = X - Y$ in die Gleichung $p\xi_4 + q\,\eta_4 = 1$ die Relation:

$$X'\xi_4 - Y'\eta_4 = 1;$$

daher erhalten wir für $\xi_4$ und $\eta_4$ die Ausdrücke:

$$\xi_4 = \frac{X'Y''}{X'^2Y'' - Y'^2X''}, \quad \eta_4 = \frac{Y'X''}{X'^2Y'' - Y'^2X''},$$

und durch Substitution der früher gefundenen Werte:

$$X' = \frac{\alpha}{k}e^{kX} + \alpha_1, \quad Y' = \frac{\beta}{k}e^{kY} + \beta_1$$

kommt:

$$\xi_4 = \frac{\beta e^{kY}}{\alpha_1\beta e^{kY} - \beta_1\alpha e^{kX}}, \quad \eta_4 = \frac{\alpha e^{kX}}{\alpha_1\beta e^{kY} - \beta_1\alpha e^{kX}}$$

und:

$$\alpha_1\xi_4 - \beta_1\eta_4 - 1 = 0,$$

womit auch analytisch konstatiert ist, daß auch $C_4$ eine gerade Linie sein muß, wenn alle drei Kurven $C_1$, $C_2$, $C_3$ gerade Linien sind.

**57.** Wir wollen nun die bis jetzt erhaltenen Resultate zusammenfassen:

**Satz.** Wird eine Fläche einerseits durch Verschieben einer ebenen Kurve längs einer andern ebenen Kurve, andererseits durch Verschieben einer dritten ebenen [181 Kurve längs einer vierten Kurve erzeugt, so ist auch diese vierte Kurve eben. Dann läßt sich unsere Fläche auch durch Verschieben einer fünften ebenen Kurve längs einer sechsten ebenen Kurve erzeugen.

Immerhin ist zu beachten, daß der letzte Teil dieses Satzes nur dann gültig bleibt, wenn die Ebenen der vier ersten Kurven die unendlich ferne Ebene nach vier Geraden schneiden, unter denen nicht drei einen Punkt gemein haben.

Im vorliegenden Falle gehören also zur Fläche nicht nur vier, sondern sechs Kurven $C$ in der unendlich fernen Ebene, die sämtlich Gerade sind. Die Entwickelungen des ersten Kapitels haben uns überdies gezeigt, daß die betreffenden Flächen (2) in unendlich vielen Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden können, und daß somit die unendlich ferne Ebene unendlich viele Kurven $C$ enthält. Wir wollen jetzt den inneren Zusammenhang zwischen diesen verschiedenen Ergebnissen aufdecken.

**58.** Jene sechs Geraden werden als Achsen der sechs Ebenenbüschel:

$$x_1 = \text{Const.},\quad y_1 = \text{Const.},\quad z_1 = \text{Const.},$$
$$y_1 - z_1 = \text{Const.},\quad z_1 - x_1 = \text{Const.},\quad x_1 - y_1 = \text{Const.}$$

durch die Gleichungen:

$$dx_1 = 0,\quad dy_1 = 0,\quad dz_1 = 0,$$
$$dy_1 - dz_1 = 0,\quad dz_1 - dx_1 = 0,\quad dx_1 - dy_1 = 0$$

dargestellt, wenn wir die drei Differentiale $dx, dy, dz$ als homogene Punktkoordinaten in der unendlich fernen Ebene deuten. Diese sechs Geraden gehen zu je dreien durch einen gemeinsamen Punkt und bestimmen dadurch vier Punkte:

$$dx_1 = 0,\ dy_1 = 0;\quad dy_1 = 0,\ dz_1 = 0;\quad dz_1 = 0,\ dx_1 = 0;$$
$$dx_1 = dy_1 = dz_1,$$

die Ecken eines unendlich fernen Vierecks sind.

Es gibt nun $\infty^1$ Kegelschnitte, die durch diese vier Punkte gehen und dementsprechend durch die Gleichung:

$$(b-c)\,dy_1 dz_1 + (c-a)\,dz_1 dx_1 + (a-b)\,dx_1 dy_1 = 0$$

dargestellt werden. In diesem Büschel von Kegelschnitten befinden sich drei Geradenpaare, die hervorgehen, sobald zwei unter den Konstanten [182
$a$, $b$ und $c$ einander gleich gesetzt werden. Ist zum Beispiel $a = b$, so erhalten wir das Geradenpaar:

$$dz_1(dy_1 - dx_1) = 0.$$

Denken wir uns nun in einem allgemein gelegenen Punkte $p$ unserer Fläche die Tangentenebene konstruiert. Sie schneidet die unendlich ferne Ebene nach einer Geraden $G$. Die beiden Haupttangenten im Punkte $p$ mögen $G$ in $H_1$ und $H_2$ treffen. Alsdann liegen $H_1$ und $H_2$ nach dem Früheren harmonisch zu dem Punktepaare, in dem $G$ ein Geradenpaar $C_1 C_2$ unseres Kegelschnittbüschels schneidet, und ebenso zu dem Punktepaare, in dem $G$ ein Geradenpaar $C_3 C_4$ unseres Büschels trifft. Hieraus folgt nun nach dem Satze von Desargues, daß $H_1$ und $H_2$ zu jedem Punktepaare harmonisch liegen, in dem $G$ irgend einen Kegelschnitt unseres Büschels schneidet.

Hieraus ergibt sich, daß unsere Fläche zu jedem Kegelschnitte dieses Büschels konjugiert[1]) ist, und daß sie sich infolgedessen jedesmal durch

1) Um die Sprache abzukürzen, sage ich, wie in meinen älteren Arbeiten, daß eine Fläche zu einem Kegelschnitte konjugiert ist, wenn die beiden auf ihr gelegenen Kurvenscharen, deren Tangenten den Kegelschnitt treffen, im



Translation einer Kurve erzeugen läßt, deren Tangenten einen beliebigen Kegelschnitt unseres Büschels treffen.

Hieraus ergibt sich ferner, daß es $\infty^8$ projektive Transformationen gibt, die unsere Fläche in eine Minimalfläche umwandeln. Es genügt ja, irgend einen irreduzibeln Kegelschnitt unseres Büschels durch eine projektive Transformation in den Ponceletschen Kugelkreis überzuführen.

**59.** Die Entwickelungen dieses Kapitels zeigen, daß das System der beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1)s + \eta_1 \eta_2 t = 0,$$
$$\xi_3 \xi_4 r + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3)s + \eta_3 \eta_4 t = 0$$

integrabel wird, sobald die vier Kurven $\eta_k - \varphi_k(\xi_k) = 0$ vier Gerade von allgemeiner gegenseitiger Lage sind. Wir werden später sehen, daß dies noch wahr bleibt, wenn drei unter diesen vier Geraden durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Hierauf brauchen wir aber vorläufig nicht einzugehen.

Dagegen wollen wir schon jetzt beweisen, daß unser System von [183
partiellen Differentialgleichungen auch dann integrabel ist, wenn $C_1$ und $C_2$ Zweige eines Kegelschnittes, $C_3$ und $C_4$ Zweige eines andern Kegelschnittes sind. Dabei können wir ohne Beschränkung annehmen, daß diese beiden Kegelschnitte vier getrennte Schnittpunkte haben.

Ist eine Fläche konjugiert zu zwei Kegelschnitten, so ist sie, wie wir früher zeigten, auch zu allen $\infty^1$ Kegelschnitten desjenigen Büschels konjugiert, das jene beiden Kegelschnitte enthält.

Wenn aber zwei Kegelschnitte vier getrennte Schnittpunkte haben, so enthält das zugehörige Kegelschnittbüschel drei Geradenpaare, deren jedes aus zwei getrennten Geraden besteht.

Es gibt aber immer $\infty^4$ Flächen, die zu zwei in derselben Ebene gelegenen Geradenpaaren konjugiert sind, und diese Flächen sind überdies zu allen $\infty^1$ Kegelschnitten desjenigen Büschels konjugiert, das die beiden Geradenpaare enthält.

Die beiden partiellen Differentialgleichungen (1) zweiter Ordnung haben daher gemeinsame Integralflächen, wenn die beiden Gleichungen:

$$(\eta - \varphi_1(\xi))(\eta - \varphi_2(\xi)) = 0,$$
$$(\eta - \varphi_3(\xi))(\eta - \varphi_4(\xi)) = 0$$

zwei Kegelschnitte darstellen.

Dupinschen Sinne konjugierte Kurvenscharen sind. Alsdann ist die Fläche eine Translationsfläche. Jede Fläche, die zu dem Kugelkreise konjugiert ist, stellt eine Minimalfläche dar.

## Kapitel VII.

## Die Integrabilitätsbedingungen der beiden partiellen Differentialgleichungen.

**60.** Wir wählen in der unendlich fernen Ebene vier Kurven, deren Gleichungen sind:

$$\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0 \qquad (i=1,2,3,4),$$

und bilden die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0, \\ \xi_3\xi_4 r + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)s + \eta_3\eta_4 t = 0, \end{cases}$$

die nach den Ergebnissen des vorigen Kapitels im allgemeinen keine gemeinsame, nicht zylindrische Integralfläche besitzen.

Sollen also diese beiden Differentialgleichungen gemeinsame nicht zylindrische Integralflächen haben, so müssen gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein. Und es liegt in der Natur der Sache, daß [184 diese Integrabilitätsbedingungen nur in Beziehungen zwischen den vier unendlich fernen Kurven:

$$\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$$

bestehen können.

Wir wollen in diesem Kapitel diese Integrabilitätsbedingungen ableiten und deuten. Zunächst aber schicken wir einige einfache Bemerkungen voraus.

**61.** Wir bemerken zunächst, daß unsere Differentialgleichungen (1) identisch erfüllt werden, sobald $z$ eine beliebige lineare Funktion von $x$ und $y$ ist. Es sind daher alle $\infty^3$ Ebenen immer gemeinsame Integralflächen, die aber als trivial kein Interesse darbieten.

Es ist andrerseits auch leicht zu erkennen, daß unter Umständen auch gemeinsame developpable Integralflächen vorhanden sind, die nach den früheren (S. 171 [hier S. 554]) Entwickelungen sicher Zylinderflächen sind.

Auch von derartigen Flächen können wir ohne weiteres absehen; denn jede nicht ebene Zylinderfläche gestattet $\infty^\infty$ viele Translationserzeugungen; wählt man eine beliebige auf der Fläche gelegene krumme Kurve $c$ und eine Gerade $g$ der Fläche, so sind jedesmal zwei zusammengehörende Translationserzeugungen der Fläche bestimmt, und andere derartige Erzeugungen gibt es nicht. Liegt andererseits eine Ebene vor, so ist die Zahl der möglichen Translationserzeugungen noch größer, weil zwei ganz beliebig gewählte Kurven der Ebene immer zwei zusammengehörende Erzeugungen definieren.



Da wir von allen developpabeln Integralflächen des Gleichungssystems (1) absehen, so sind in einem Punkte $p$ von allgemeiner Lage einer nicht trivialen Integralfläche die vier Tangenten $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ der vier hindurchgehenden Kurven $c_1$, $c_2$, $c_3$ und $c_4$ sicher unter einander verschieden. Anders ausgesprochen: in einem Punkte von allgemeiner Lage unserer Fläche sind die vier Verhältnisse:

$$\frac{\eta_1}{\xi_1},\ \frac{\eta_2}{\xi_2},\ \frac{\eta_3}{\xi_3},\ \frac{\eta_4}{\xi_4}$$

sicher paarweise verschieden.

Konstruiert man daher in einem Punkte von allgemeiner Lage einer Integralfläche des Gleichungssystems (1) die Tangentenebene, so trifft diese Ebene die vier Kurven: $\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$ in vier getrennten [185 Punkten. Diese vier Kurven sind daher unter einander verschieden, wenn es auch keineswegs ausgeschlossen ist, daß einige unter ihnen Zweige derselben analytischen Kurve sind.

**62.** Differentiieren wir die beiden Gleichungen (1) nach $x$ und $y$ und setzen dabei:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \alpha, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \beta, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \gamma, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \delta,$$

so erhalten wir zur Bestimmung der vier Ableitungen dritter Ordnung von $z$ die vier linearen Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi_1\xi_2\alpha + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\beta + \eta_1\eta_2\gamma = \\ \qquad = -r\dfrac{\partial(\xi_1\xi_2)}{\partial x} - s\dfrac{\partial(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)}{\partial x} - t\dfrac{\partial(\eta_1\eta_2)}{\partial x}, \\ \xi_1\xi_2\beta + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\gamma + \eta_1\eta_2\delta = \\ \qquad = -r\dfrac{\partial(\xi_1\xi_2)}{\partial y} - s\dfrac{\partial(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)}{\partial y} - t\dfrac{\partial(\eta_1\eta_2)}{\partial y}, \\ \xi_3\xi_4\alpha + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)\beta + \eta_3\eta_4\gamma = \\ \qquad = -r\dfrac{\partial(\xi_3\xi_4)}{\partial x} - s\dfrac{\partial(\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)}{\partial x} - t\dfrac{\partial(\eta_3\eta_4)}{\partial x}, \\ \xi_3\xi_4\beta + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)\gamma + \eta_3\eta_4\delta = \\ \qquad = -r\dfrac{\partial(\xi_3\xi_4)}{\partial y} - s\dfrac{\partial(\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)}{\partial y} - t\dfrac{\partial(\eta_3\eta_4)}{\partial y}, \end{cases}$$

deren Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1\xi_2 & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 & \eta_1\eta_2 & 0 \\ 0 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 & \eta_1\eta_2 \\ \xi_3\xi_4 & \xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3 & \eta_3\eta_4 & 0 \\ 0 & \xi_3\xi_4 & \xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3 & \eta_3\eta_4 \end{vmatrix}$$

durch Berechnung die Form:

$$(\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)(\xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3)(\xi_4\eta_1 - \xi_1\eta_4)(\xi_4\eta_2 - \xi_2\eta_4)$$

erhält.

Nun aber wissen wir, daß in einem Punkte von allgemeiner Lage einer nicht developpabeln Integralfläche die vier Verhältnisse $\eta_i : \xi_i$ paarweise verschieden sind. Daher ist auch die Determinante $\varDelta$ in Punkten von allgemeiner Lage einer nicht developpabeln Integralfläche von Null verschieden.

**63.** Wenn daher die beiden partiellen Differentialgleichungen [186 zweiter Ordnung (1) gemeinsame Integralflächen besitzen, die keine Zylinderflächen sind, so bestimmen sich für solche Flächen die Ableitungen dritter Ordnung $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von $z$, und ebenso die höheren Ableitungen als Funktionen der acht Größen $x, y, z, p, q, r, s, t$, die selbst die beiden Relationen (1) erfüllen. Die Taylorsche Reihenentwickelung:

$$z = z_0 + p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + \cdots$$

einer solchen Fläche in der Umgebung einer beliebig gewählten Stelle $x_0, y_0$ enthält daher nur *vier* wesentliche Konstanten $z_0, p_0, q_0, r_0$. Daraus schließen wir, daß die beiden Gleichungen (1) nie mehr als $\infty^4$ gemeinsame, nicht zylindrische Integralflächen besitzen. Früher (S. 174 [hier S. 558]) bemerkten wir schon, daß, sobald *eine* nicht zylindrische Integralfläche vorhanden ist, immer $\infty^4$ ähnliche und gleichgestellte Integralflächen existieren.

Hieraus schließen wir, daß *die beiden Differentialgleichungen (1), sobald sie überhaupt gemeinsame nicht zylindrische Integralflächen zulassen, grade $\infty^4$ ähnliche und ähnlich gelegene gemeinsame Integralflächen besitzen.*

Lösen wir daher die vier aus den Gleichungen (1) durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen dritter Ordnung nach den Ableitungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf:

$$\begin{aligned} \alpha &= A(p, q, r, s, t), \\ \beta &= B(\,.\;.\;.\;.\;.\,), \\ \gamma &= C(\,.\;.\;.\;.\;.\,), \\ \delta &= D(\,.\;.\;.\;.\;.\,), \end{aligned}$$

so haben die Differentialgleichungen (1) dann und nur dann gemeinsame, nicht zylindrische Integralflächen, wenn die Bedingungsgleichungen:

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x}$$

eine Folge der beiden Gleichungssysteme (1) und (2) sind.



**64.** Es liegt nun, wie wir früher sahen, in der Natur der Sache, daß diese Bedingungsgleichungen diejenigen Beziehungen definieren, die unter den vier unendlich fernen Kurven:

$$\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0, \quad \eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0,$$
$$\eta_3 - \varphi_3(\xi_3) = 0, \quad \eta_4 - \varphi_4(\xi_4) = 0$$

stattfinden müssen, wenn die beiden partiellen Differentialgleichungen [187 zweiter Ordnung (1) gemeinsame Integralflächen haben sollen. Es wird sich überdies zeigen, daß sich die drei soeben gefundenen Integrabilitätsbedingungen (3) auf eine einzige Gleichung zwischen den acht Größen $\xi_i, \eta_i$ und den acht Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung der vier $\eta_i$ nach den entsprechenden $\xi_i$ zurückführen lassen.

Um die hierzu erforderlichen, nicht ganz einfachen Rechnungen übersichtlicher zu machen, führen wir mit Legendre statt $x, y, z$ die Größen:

$$p, q, \quad \Theta = z - px - qy$$

als neue Veränderliche ein, und betrachten dabei $\Theta$ als Funktion von $p$ und $q$. Dann ist bekanntlich:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial p} = -x, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial q} = -y,$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial p^2} = \frac{-t}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial p\,\partial q} = \frac{s}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial q^2} = \frac{-r}{rt - s^2},$$

und daher erhalten die beiden Gleichungen (1) in diesen neuen Veränderlichen die Form:

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \xi_1\xi_2\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial q^2} - (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial p\,\partial q} + \eta_1\eta_2\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial p^2} = 0, \\ \xi_3\xi_4\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial q^2} - (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial p\,\partial q} + \eta_3\eta_4\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial p^2} = 0; \end{cases}$$

dabei sind die $\xi_i, \eta_i$ Funktionen von $p$ und $q$, die vermöge der Gleichungen:

$$\xi_i p + \eta_i q = 1, \quad \eta_i = \varphi_i(\xi_i)$$

berechnet werden müssen.

**65.** Setzen wir nun zur Abkürzung:

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial\xi_i} = \frac{\partial\varphi_i(\xi_i)}{\partial\xi_i} = \eta_i',$$

so finden wir durch Differentiation der Gleichungen:

$$p\xi_i + q\eta_i - 1 = 0$$

acht Gleichungen:

$$(p + q\eta_i')\frac{\partial\xi_i}{\partial p} + \xi_i = 0, \quad (p + q\eta_i')\frac{\partial\xi_i}{\partial q} + \eta_i = 0,$$

die durch Auflösung: [188

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial p} = -\frac{\xi_i}{p + q\eta_i'}, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial q} = -\frac{\eta_i}{p + q\eta_i'}$$

ergeben.

Differentiieren wir daher die erste Gleichung (4) nach $p$, so erhalten wir die Relation:

$$\begin{aligned}\xi_1\xi_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial q^2 \partial p} - (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\frac{\partial^3 \Theta}{\partial q \partial p^2} + \eta_1\eta_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial p^3} &= \\ = \left[\xi_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial q^2} - (\eta_1 + \xi_1\eta_2')\frac{\partial^2 \Theta}{\partial q \partial p} + \eta_1\eta_2' \frac{\partial^2 \Theta}{\partial p^2}\right]&\frac{\xi_2}{p + q\eta_2'} + \\ + \left[\xi_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial q^2} - (\eta_2 + \xi_2\eta_1')\frac{\partial^2 \Theta}{\partial q \partial p} + \eta_2\eta_1' \frac{\partial^2 \Theta}{\partial p^2}\right]&\frac{\xi_1}{p + q\eta_1'}.\end{aligned}$$

Hier ersetzen wir rechts die beiden Ableitungen:

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial p^2}$$

durch ihre Werte genommen aus den Gleichungen (4) und finden dadurch eine Relation von der Form:

$$\begin{aligned}\xi_1\xi_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial q^2 \partial p} - (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)\frac{\partial^3 \Theta}{\partial q \partial p^2} + \eta_1\eta_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial p^3} &= \\ = \left[\frac{\lambda_1 + \mu_1\eta_1'}{p + q\eta_1'} + \frac{\lambda_2 + \mu_2\eta_2'}{p + q\eta_2'}\right]&\frac{\partial^2 \Theta}{\partial q \partial p}.\end{aligned}$$

Hier bedeuten $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ rationale Funktionen der acht Größen $\xi, \eta$.

**66.** Durch Differentiation der beiden Gleichungen (4) nach $p$ und $q$ erhält man [noch] drei ähnliche, im ganzen also vier Gleichungen, die in den Ableitungen dritter Ordnung von $\Theta$ linear sind. Und da die zugehörige Determinante, wie wir früher (S. 185 [hier S. 567 f.]) sahen, nicht identisch verschwindet, erhalten wir für die vier Ableitungen:

$$(6) \qquad \frac{\partial^3 \Theta}{\partial q^3}, \quad \frac{\partial^3 \Theta}{\partial q^2 \partial p}, \quad \frac{\partial^3 \Theta}{\partial q \partial p^2}, \quad \frac{\partial^3 \Theta}{\partial p^3}$$

Ausdrücke von der Form:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial p \partial q} \sum_k^{1\ldots 4} \frac{\sigma_k + \tau_k\eta_k'}{p + q\eta_k'},$$

in denen die acht Größen $\sigma$ und $\tau$ rationale Funktionen von $\xi_1, \xi_2,$ [189
$\xi_3, \xi_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ darstellen.

Diese Werte setzen wir in die drei Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial q^3}\right) &= \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial q^2 \partial p}\right), \\ \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial q^2 \partial p}\right) &= \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial q \partial p^2}\right), \\ \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial q \partial p^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial p^3}\right)\end{aligned}$$



ein und finden hierdurch, indem wir die Differentiationen ausführen und sodann nochmals die früher gefundenen Werte der Differentialquotienten (5) und (6) einsetzen, drei Relationen von der Form:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial p \partial q}\{\omega_1\eta_1'' + \omega_2\eta_2'' + \omega_3\eta_3'' + \omega_4\eta_4'' + \psi\} = 0,$$

in denen $\psi$ und $\omega_k$ rationale Funktionen der zwölf Größen $\xi, \eta, \eta'$ bezeichnen, während $\eta_k''$ die zweite Ableitung von $\eta_k$ nach $\xi_k$ sein soll.

**67.** Hier können wir nun ohne weiteres annehmen, daß der links stehende Faktor von Null verschieden ist, denn sonst beständen die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial q^2} = 0,$$

und also reduzierten sich die gemeinsamen Integralflächen der ursprünglich vorgelegten partiellen Differentialgleichungen (1) oder (4) gegen unsere Voraussetzung auf die Punkte (und die Ebenen) des Raumes.

Die gesuchten Integrabilitätsbedingungen besitzen somit die Form:

$$(7) \qquad \sum_k^{1\ldots 4} \omega_k(\xi, \eta, \eta')\eta_k'' + \psi(\xi, \eta, \eta') = 0,$$

und dabei sind die $\omega$ und $\psi$, wie schon gesagt, rationale Funktionen der $\xi$, $\eta$ und $\eta'$.

Hiermit ist zunächst analytisch bestätigt, daß sich die Integrabilitätsbedingungen wirklich nur auf die vier unendlich fernen Kurven:

$$\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$$

beziehen.

**68.** Eine direkte Berechnung der Größen $\omega_i$ und $\psi$ als Funk- [190
tionen der $\xi_k$, $\eta_k$ und $\eta_k'$ würde ausgedehnte Rechnungen verlangen. Glücklicherweise können wir diese fast unausführbaren Rechnungen durch einfache begriffliche Betrachtungen ersetzen; gleichzeitig ergibt sich, daß die drei Integrabilitätsbedingungen nicht unabhängig sind, sondern sich auf eine einzige Gleichung reduzieren.

Wir erinnern da zunächst daran, daß die Integrabilitätsbedingungen nach unseren früheren Überlegungen (S. 180 [hier S. 562]) sicher erfüllt sind, wenn die vier unendlich fernen Kurven $C_k$ Gerade von allgemeiner gegenseitiger Lage sind. Setzen wir daher:

$$\eta_i = a_i\xi_i + b_i$$

und verstehen dabei unter den $a_i$ und $b_i$ acht allgemein gewählte Kon-

**stanten**, so dürfen wir sicher behaupten, daß die drei Integrabilitätsbedingungen (7) bei der Substitution:

$$\eta_i = a_i \xi_i + b_i, \quad \eta_i' = a_i, \quad \eta_i'' = 0$$

erfüllt werden, daß also die drei Ausdrücke:

$$\psi(\xi, a\xi + b, a)$$

für alle Werte der zwölf Größen $a_i$, $b_i$, $\xi_i$ identisch verschwinden. Daraus ergibt sich aber, daß auch die Ausdrücke:

$$\psi(\xi, \eta, \eta')$$

immer verschwinden, welche Zahlenwerte auch die zwölf Argumente $\xi_i$, $\eta_i$ und $\eta_i'$ besitzen mögen.

Die Integrabilitätsbedingungen (7) besitzen daher die Form:

$$\sum_k \omega_k(\xi, \eta, \eta')\eta_k'' = 0,$$

und dabei sind die $\omega_k$ **rationale** Funktionen der zwölf Argumente $\xi_i$, $\eta_i$ und $\eta_i'$.

**69.** Wir wissen ferner (S. 183 [hier S. 565]), daß die Integrabilitätsbedingungen sämtlich erfüllt sind, wenn unter den vier unendlich fernen Kurven $C_k$ zwei, zum Beispiel $C_3$ und $C_4$, gerade Linien sind, während $C_1$ und $C_2$ Zweige desselben Kegelschnittes sind.

Hieraus können wir zunächst schließen, daß die $\eta_k''$ nur durch **eine** lineare Gleichung verbunden sein können; denn existierten zwei oder noch mehr unabhängige lineare homogene Relationen zwischen den $\eta_k''$, so ließen sich immer zwei Größen, zum Beispiel $\eta_1''$ und $\eta_2''$, linear und homogen durch $\eta_3''$ und $\eta_4''$ ausdrücken; dann aber müßten, sobald die [191
Kurven $C_3$ und $C_4$ Gerade wären, auch die Kurven $C_1$ und $C_2$ Gerade sein. Da nun aber dies, wie soeben gesagt, mit unseren früheren Ergebnissen im Widerspruche steht, so sehen wir, daß **sich die Integrabilitätsbedingungen wirklich auf eine einzige in den $\eta''$ lineare und homogene Gleichung**:

$$\omega_1\eta_1'' + \cdots + \omega_4\eta_4'' = 0$$

**reduzieren**.

**70.** Unsere frühere Bemerkung, daß die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, wenn $C_3$ und $C_4$ beliebige Gerade darstellen, während $C_1$ und und $C_2$ Zweige eines ganz **beliebigen** Kegelschnittes sind, gibt uns wichtige Aufschlüsse über die Form der $\omega_k$. Obgleich die Bestimmung der Koeffizienten $\omega_k$ als Funktionen der Größen $\xi_i$, $\eta_i$ und $\eta_i'$ im Grunde keineswegs notwendig ist, weil es bei den folgenden Betrachtungen eigentlich nur darauf ankommt, daß die $\omega_k$ **rationale** Funktionen ihrer Argumente sind, wollen wir doch jedenfalls andeuten, wie man ohne größere Schwierigkeit diese Bestimmung direkt durchführen kann.



**71.** Wir müssen da an einen längst bekannten Satz erinnern, der sich auf die beiden Schnittpunkte eines beliebigen Kegelschnittes mit einer beliebig gewählten Geraden bezieht. In rein analytischer Fassung kann dieser Satz folgendermaßen formuliert werden:

Liegen in den Veränderlichen $\xi$, $\eta$ zwei algebraische Gleichungen vor, unter denen die eine vom zweiten Grade ist, während die andere die Form besitzt:

$$p\xi + q\eta - 1 = 0$$

und somit vom ersten Grade ist, so findet man durch Auflösung nach $\xi$ und $\eta$ zwei Wertsysteme:

$$\xi_1, \eta_1 \quad \text{und:} \quad \xi_2, \eta_2$$

ausgedrückt als Funktionen von $p$ und $q$. Auf der anderen Seite bestimmt die Gleichung zweiten Grades $\eta_1$ als Funktion von $\xi_1$, und ebenso $\eta_2$ als Funktion von $\xi_2$. Sind nun $\eta_1 = \varphi_1(\xi_1)$ und $\eta_2 = \varphi_2(\xi_2)$ diese Funktionen, so besteht die Gleichung:

$$\frac{\varphi_1''(\xi_1)}{(p + q\varphi_1'(\xi_1))^3} + \frac{\varphi_2''(\xi_2)}{(p + q\varphi_2'(\xi_2))^3} = 0$$ [192

identisch in $\xi_1$ und $\xi_2$, sobald $p$ und $q$ aus den Gleichungen:

$$p\xi_1 + q\eta_1 - 1 = 0, \quad p\xi_2 + q\eta_2 - 1 = 0$$

bestimmt werden.

Diese Relation können wir, wenn wir wiederum die Differentialquotienten der $\eta_k$ nach $\xi_k$ mit $\eta_k'$ und $\eta_k''$ bezeichnen, auch so schreiben:

$$(8) \qquad \frac{\eta_1''}{(p + q\eta_1')^3} + \frac{\eta_2''}{(p + q\eta_2')^3} = 0.$$

**72.** Kehren wir nun wiederum zu unserem räumlichen Probleme zurück, so wissen wir, daß die Integrabilitätsbedingung:

$$\omega_1\eta_1'' + \omega_2\eta_2'' + \omega_3\eta_3'' + \omega_4\eta_4'' = 0$$

erfüllt wird, sobald $\eta_3$ und $\eta_4$ lineare Funktionen:

$$\eta_3 = a_3\xi_3 + b_3, \quad \eta_4 = a_4\xi_4 + b_4$$

von $\xi_3$, beziehungsweise $\xi_4$ sind, während sowohl $\eta_1$ und $\xi_1$, wie $\eta_2$ und $\xi_2$ eine Gleichung zweiten Grades, und zwar dieselbe Gleichung zweiten Grades erfüllen. Bedenken wir dabei, daß die vier Konstanten $a_3$, $b_3$, $a_4$, $b_4$ ganz beliebig gewählt werden können, so dürfen wir schließen, daß die Gleichung:

$$\omega_1\eta_1'' + \omega_2\eta_2'' = 0$$

mit der früher aufgestellten Gleichung (8) identisch sein muß. Wir erkennen daher, daß das Verhältnis der Koeffizienten $\omega_1$, $\omega_2$ durch die Gleichung:

$$(p + q\eta_1')^3\omega_1 = (p + q\eta_2')^3\omega_2$$

bestimmt ist, und daß wir daher:

$$\omega_1 = \frac{\varrho}{(p + q\eta_1')^3}, \quad \omega_2 = \frac{\varrho}{(p + q\eta_2')^3}$$

setzen dürfen.

Dementsprechend können wir:

$$\omega_3 = \frac{\sigma}{(p + q\eta_3')^3}, \quad \omega_4 = \frac{\sigma}{(p + q\eta_4')^3}$$

setzen.

**73.** Unsere Integrabilitätsbedingung besitzt daher die Form: [193

$$0 = \varrho\left(\frac{\eta_1''}{(p + q\eta_1')^3} + \frac{\eta_2''}{(p + q\eta_2')^3}\right) + \sigma\left(\frac{\eta_3''}{(p + q\eta_3')^3} + \frac{\eta_4''}{(p + q\eta_4')^3}\right),$$

wo jetzt nur noch das Verhältnis $\varrho : \sigma$ unbekannt ist.

Um dieses Verhältnis zu bestimmen, schlug ich in meiner Abhandlung aus dem Jahre 1882 den folgenden Weg ein. Ich setzte voraus, daß die beiden unendlich fernen Kurven: $\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0$ und $\eta_3 - \varphi_3(\xi_3) = 0$ Gerade waren, und erkannte, daß es dann notwendig und hinreichend ist, daß die beiden Kurven: $\eta_2 - \varphi_2(\xi_2) = 0$, $\eta_4 - \varphi_4(\xi_4) = 0$ Zweige eines irreduzibeln oder zerfallenden Kegelschnittes sind. Waren nämlich die beiden Geraden: $\eta_1 - \varphi_1 = 0$ und $\eta_3 - \varphi_3 = 0$ die Achsen der beiden Ebenenbüschel $x = a$ und $y = b$, so mußten die betreffenden Flächen, wie man leicht sieht, zwei lineare partielle Differentialgleichungen von der Form:

$$p\xi_2(x) + q\eta_2(x) - 1 = 0,$$
$$p\xi_4(y) + q\eta_4(y) - 1 = 0$$

erfüllen. Indem ich nun die Integrabilitätsbedingungen dieser beiden Gleichungen suchte, fand ich durch relativ einfache Rechnungen, die allerdings nicht ganz kurz waren, daß gemeinsame Integralflächen dann und nur dann vorhanden sind, wenn die Gleichung:

$$\frac{\eta_2''}{(p + q\eta_2')^3} + \frac{\eta_4''}{(p + q\eta_4')^3} = 0$$

besteht. Und hieraus zog ich den Schluß, daß das Verhältnis der früher betrachteten Größen $\varrho$ und $\sigma$ gleich 1 ist.

**74.** In dieser Weise erkannte ich im Jahre 1882, daß unsere beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_1\xi_2 r + (\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1)s + \eta_1\eta_2 t = 0, \\ \xi_3\xi_4 r + (\xi_3\eta_4 + \xi_4\eta_3)s + \eta_3\eta_4 t = 0 \end{cases}$$



dann und nur dann gemeinsame, nicht zylindrische Integralflächen haben, wenn die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\eta_1''}{(p + q\eta_1')^3} + \frac{\eta_2''}{(p + q\eta_2')^3} + \frac{\eta_3''}{(p + q\eta_3')^3} + \frac{\eta_4''}{(p + q\eta_4')^3} = 0$$

besteht. Diese Bedingungsgleichung ist aber nach einem Satze, der zu verschiedenen Zeiten von mehreren Mathematikern, zuerst von Reiß, [194
später von Haag, Holst und anderen gefunden worden ist, dann erfüllt, wenn die vier unendlich fernen Kurven: $\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$ Zweige derselben Kurve vierter Ordnung sind.

**75.** Nachdem ich soweit gekommen war, kostete es mich keine große Mühe, zu beweisen, daß sich der Satz von Reiß folgendermaßen umkehren läßt:

Erfüllen die Schnittpunkte $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \ldots, \xi_m, \eta_m$ der Geraden: $p\xi + q\eta - 1 = 0$ und der $m$ Kurven:

$$\eta_1 - \omega_1(\xi_1) = 0, \ldots, \eta_m - \omega_m(\xi_m) = 0$$

die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\eta_1''}{(p + q\eta_1')^3} + \cdots + \frac{\eta_m''}{(p + q\eta_m')^3} = 0,$$

so sind diese $m$ Kurven Zweige einer irreduzibeln oder zerfallenden algebraischen Kurve vom Grade $m$.

Also ergab es sich, daß unsere beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (1) dann und nur dann nicht zylindrische gemeinsame Integralflächen haben, wenn die vier Kurven $\eta_i - \omega_i(\xi_i) = 0$ Zweige einer algebraischen Kurve **vierter** Ordnung sind.

**76.** Nachdem ich durch diese Digression angedeutet habe, durch welche Betrachtungen ich zum ersten Male mein allgemeines Problem erledigte, werde ich jetzt zeigen, wie man durch Verwertung und Deutung des Abelschen Theorems dasselbe Resultat leichter ableiten kann.

Wir setzen also als bekannt voraus, auf der einen Seite, daß die beiden partiellen Differentialgleichungen (1) nur die einzige Integrabilitätsbedingung:

$$\omega_1\eta_1'' + \omega_2\eta_2'' + \omega_3\eta_3'' + \omega_4\eta_4'' = 0$$

haben, deren Koeffizienten $\omega_i$ rationale Funktionen der zwölf Größen $\xi_k, \eta_k, \eta_k'$ sind; auf der andern Seite, daß vermöge des Abelschen Theorems $\infty^{18}$ verschiedene Flächen gefunden werden können, die die gestellten Forderungen erfüllen.

Die acht Größen $\eta_i$, $\xi_i$ sind verbunden durch die vier Relationen: $\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$ zusammen mit den beiden durch Elimination von $p$, $q$

zwischen den vier Gleichungen:

$$p\xi_k + q\eta_k - 1 = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

hervorgehenden Relationen:

$$(\Omega) \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_4 & \eta_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ [195

die nur aussagen, daß die vier unendlich fernen Punkte $\xi_k$, $\eta_k$ auf einer Geraden liegen.

Unter den acht Größen $\xi_k$, $\eta_k$ gibt es daher zwei unabhängige, und als solche wählen wir $\xi_1$ und $\xi_2$. Bei dieser Auffassung sind $\xi_3$, $\xi_4$, $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$, $\eta_4$ Funktionen von den beiden unabhängigen Veränderlichen $\xi_1$, $\xi_2$.

Daher erhalten wir durch Differentiation der beiden Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_i & \varphi_i(\xi_i) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 3, 4)$$

eine Bestimmung der vier Ableitungen:

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_4}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \xi_4}{\partial \xi_2}$$

als rationaler Funktionen der zwölf Größen $\xi_k$, $\eta_k$ und $\varphi_k' = \eta_k'$.

Auf der andern Seite erkennen wir durch Differentiation der vier Gleichungeu $\eta_i = \varphi_i(\xi_i)$ nach $\xi_1$ und $\xi_2$, daß auch die acht Ableitungen der $\eta_i$ nach $\xi_1$ und $\xi_2$ sich rational durch jene zwölf Größen $\xi$, $\eta$, $\eta'$ ausdrücken.

**77.** Nach diesen Vorbereitungen differentiieren wir die Integrabilitätsbedingung:

$$\omega_1 \eta_1'' + \omega_2 \eta_2'' + \omega_3 \eta_3'' + \omega_4 \eta_4'' = 0$$

zuerst nach $\xi_1$ und sodann nach $\xi_2$. Hierdurch erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$A_1 \eta_1''' + A_3 \eta_3''' + A_4 \eta_4''' + A_0 = 0,$$
$$B_2 \eta_2''' + B_3 \eta_3''' + B_4 \eta_4''' + B_0 = 0,$$

deren Koeffizienten $A_1$, $A_3$, $A_4$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ rationale Funktionen der $\xi$, $\eta$, $\eta'$ sind; während $A_0$, $B_0$ rationale Funktionen der Größen $\xi$, $\eta$, $\eta'$, $\eta''$ sind, die überdies in den $\eta''$ vom zweiten Grade sind. Diese beiden neuen Gleichungen sind offenbar unabhängig.

Durch wiederholte Differentiation nach $\xi_1$ und $\xi_2$ erhalten wir drei unabhängige lineare Relationen zwischen den vier Größen $\eta^{(IV)}$; dabei sind die Koeffizienten rationale Funktionen der $\xi$, $\eta$, $\eta'$, $\eta''$ und $\eta'''$.



Durch nochmalige Differentiation erhalten wir Gleichungen, die [196
alle $\eta^{(V)}$, $\eta^{(VI)}$ und so weiter als rationale Funktionen der $\xi$, $\eta$, $\eta'$, $\eta''$, $\eta'''$ und $\eta^{(IV)}$ bestimmen.

Die 24 Größen $\xi$, $\eta$, $\eta'$, $\eta''$, $\eta'''$, $\eta^{(IV)}$ erfüllen:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

unabhängige Differentialgleichungen, wozu noch die beiden Determinantengleichungen $(\Omega)$ kommen.

Daher enthalten die Reihenentwickelungen der Größen $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$, $\eta_4$, $\xi_3$, $\xi_4$ nach den Potenzen von $\xi_1$ und $\xi_2$ höchstens $24 - 8 = 16$ unabhängige Anfangswerte. Da nun aber die beiden Anfangswerte $\xi_1^0$, $\xi_2^0$ keine wesentliche Bedeutung haben, so schließen wir:

daß es jedenfalls nicht mehr als $\infty^{14}$ verschiedene Kurvensysteme: $\eta_1 - \varphi_1(\xi_1) = 0, \ldots, \eta_4 - \varphi_4(\xi_4) = 0$ gibt, die unsere Bedingung:

$$\omega_1 \eta_1'' + \omega_2 \eta_2'' + \omega_3 \eta_3'' + \omega_4 \eta_4'' = 0$$

erfüllen.

**78.** Auf S. 167 [hier S. 551] fanden wir aber $\infty^{14}$ Kurvensysteme:

$$\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0,$$

die alle unsere Forderungen erfüllten. Es gibt ja nämlich in der Ebene $\xi$, $\eta$ gerade $\infty^{14}$ verschiedene Kurven vierter Ordnung, und jede derartige Kurve lieferte uns vier Kurvenzweige, die unsere Forderungen erfüllten.

Da sich nun auf der anderen Seite in unseren Reihenentwickelungen alle Koeffizienten rational durch vierzehn Konstanten ausdrücken, so können wir mit voller Sicherheit schließen, daß sich unser Problem in allgemeinster Weise dadurch erledigt, daß wir als Kurven: $\eta_i - \varphi_i(\xi_i) = 0$ vier verschiedene Zweige einer Kurve vierter Ordnung wählen. Diese Kurve vierter Ordnung braucht nicht irreduzibel zu sein; sie kann gern zerfallen, und zwar auf alle möglichen Weisen. Ausgeschlossen sind nur die Fälle, bei denen die Kurve in Teile zerfällt, die **doppelt** zählen. Die Kurve vierter Ordnung darf somit nicht ein doppeltzählender Kegelschnitt, oder eine vierfache Gerade sein, auch nicht in einen Kegelschnitt und eine doppeltzählende Gerade zerfallen.

Nur solche Ausartungen der Kurve vierter Ordnung geben brauchbare Lösungen, bei denen die Summe der Ordnungen der auftretenden [von einander verschiedenen] Teilkurven wirklich gleich vier ist.

**79.** Wir fassen unsere wichtigsten Resultate folgendermaßen zu- [197
sammen:

**Theorem V. Wenn eine developpable Fläche eine Translationsfläche ist, so ist sie eine Ebene oder eine Zylinderfläche und kann daher in unendlich vielen Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden.**

**Es gibt ferner $\infty^{14}$ nicht zylindrische Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefaßt werden können. Man findet alle derartigen Flächen, indem man eine beliebige ebene algebraische Kurve vierter Ordnung:**

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

**auswählt und sodann die Integrale:**

$$\varphi(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{\alpha\, d\alpha}{F_\beta}, \quad \psi(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{\beta\, d\alpha}{F_\beta}, \quad \chi(\alpha) = \int^{\alpha} \frac{d\alpha}{F_\beta}$$

**bildet. Alsdann liefern die Formeln:**

$$x = \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2),$$
$$y = \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2),$$
$$z = \chi(\alpha_1) + \chi(\alpha_2)$$

**alle Translationsflächen, die die verlangte Eigenschaft besitzen.**

Noch schärfer tritt die analytische Bedeutung dieses Theorems in der folgenden Fassung hervor:

**Liefern drei Gleichungen von der Form:**

$$f_{k1}(t_1) + f_{k2}(t_2) + f_{k3}(t_3) + f_{k4}(t_4) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

**nur zwei unabhängige Relationen zwischen den vier Argumenten $t_1, t_2, t_3, t_4$, und gibt es dabei unter diesen Relationen keine, die nur zwei Argumente enthält, so sind nur zwei Fälle möglich:**

**Entweder geht die eine vorgelegte Gleichung dadurch aus den beiden anderen hervor, daß man diese mit Konstanten multipliziert und sodann addiert, oder die $f_{ki}$ sind Abelsche Integrale, die zu einer Kurve vierter Ordnung gehören. Die drei ursprünglichen Gleichungen sind dann die bekannten Gleichungen des Abelschen Theorems.**

**80.** In meinen Vorlesungen über Translationsflächen, die ich [198 hoffentlich ziemlich bald in extenso veröffentlichen kann, diskutiere ich eingehend alle Flächen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen betrachtet werden können, und stelle dabei unter anderm alle derartigen Flächen auf, die algebraisch sind.

Bei dieser Gelegenheit muß ich mich auf die folgenden weiteren Bemerkungen beschränken.



Die im Vorangehenden durchgeführten Betrachtungen geben sozusagen unmittelbar die Bestimmung aller geradlinigen Translationsflächen; denn auch dieses Problem findet seinen analytischen Ausdruck in zwei partiellen Differentialgleichungen von der Form:

$$\xi_1 \xi_2 r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) s + \eta_1 \eta_2 t = 0,$$
$$\xi_3 \xi_4 r + (\xi_3 \eta_4 + \xi_4 \eta_3) s + \eta_3 \eta_4 t = 0,$$

wozu aber jetzt die Gleichungen:

$$\xi_3 = \xi_4, \quad \eta_3 = \eta_4$$

hinzukommen.

Untersucht man nun die Integrabilitätsbedingungen dieser partiellen Differentialgleichungen, so muß man genau solche Betrachtungen wie früher anstellen. Dabei ist zu beachten, daß die früher betrachtete Determinante $\Delta$ auch jetzt von Null verschieden ist. Auch jetzt gibt es nur eine Integrabilitätsbedingung, die ohne weitere Rechnung aufgestellt werden kann.

# XIV.

## Das Abelsche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten. [181

Leipz. Ber. 1897, Heft I, II, abgeliefert 21. 5. 1897, S. 181—248. Vorgelegt in der Sitzung vom 1. 3. 1897.

**1.** In dieser Abhandlung stellen wir uns die Aufgabe, die vier Funktionalgleichungen:

$$A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

in allgemeinster Weise zu befriedigen. Dabei setzen wir voraus, daß die sechs Größen:

$$t_1, t_2, t_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$$

durch drei und nur durch drei Relationen gebunden sind, die sowohl nach den $t$, wie nach den $\tau$ aufgelöst werden können.

Bezeichnen wir eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit des Raumes $x_1, x_2, x_3, x_4$ als eine Translations-$M_3$, wenn sie durch vier Gleichungen von der Form:

$$x_k = B_{k1}(t_1) + B_{k2}(t_2) + B_{k3}(t_3)$$

dargestellt werden kann, so dürfen wir sagen, daß unser Problem darauf hinauskommt, im vierfachen Raume $x_1, \ldots, x_4$ alle dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten zu finden, die in zweifacher (oder mehrfacher) Weise als Translations-$M_3$ aufgefaßt werden können.

**2.** In früheren Arbeiten[1]) kündigten wir an, daß alle Lösungen unseres Problems, die nicht nur auf lineare Relationen: $c_1 x_1 + \cdots + c_4 x_4 + c = 0$ führen, durch eine gewisse Deutung, beziehungsweise Umkehrung des Abelschen Theorems gefunden werden können. Immerhin ist zu beachten, daß wir in diesen älteren Arbeiten (die sich übrigens auf $n$-fach ausgedehnte Räume bezogen) ausdrücklich die beschränkende Voraus- [182

1) Vgl. insbesondere eine im Jahre 1892 in den Comptes Rendus veröffentlichte Note: «Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel», sowie eine noch ältere Abhandlung im Norwegischen Archive Bd. VII, 1882. [Hier Abh. X und Bd. I d. Ausg., Abh. XXVII.]



setzung einführten, daß die sechs Größen $t_i$ und $\tau_i$ durch keine Relation verknüpft sein dürften, die weniger als vier unter diesen Größen enthielte.

In dieser Arbeit lassen wir diese Beschränkung fallen und geben die vollständige Lösung des oben aufgestellten Problems, das sich auf den vierfach ausgedehnten Raum bezieht. Ich behalte mir vor, später meine analogen Untersuchungen über Translationsgebilde des $n$-fachen Raumes in extenso zu veröffentlichen.

Hoffentlich wird es mir auch gelingen, meine Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten, die in mehrfacher Weise durch Gleichungen von der Form:

$$x_k = A_k(t_1, t_2, \ldots, t_q) + B_k(t_{q+1}, \ldots, t_m) + C_k(\ldots) + \cdots$$

darstellbar sind, zu einem befriedigenden Abschluß zu bringen. Vorläufig möchte ich nur bemerken, daß bei diesen schwierigen Untersuchungen die allgemeine Theorie der höheren komplexen Zahlen verwertet werden kann.

### Kapitel I.

### Erledigung eines Hilfsproblems.

**3.** Eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit des $n$-fachen Raumes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, die durch $n$ Gleichungen von der Form:

$$z_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

dargestellt wird, enthält zwei Scharen kongruenter und gleichgestellter Kurven, die wir erhalten, wenn wir entweder dem Parameter $t_1$, oder dem Parameter $t_2$ konstante Werte: $t_1 = a_1$, beziehungsweise $t_2 = a_2$ erteilen. Eine solche Mannigfaltigkeit bezeichnen wir als eine Translations-$M_2$ des $n$-fachen Raumes. Sie besitzt die charakteristische Eigenschaft, daß sie in zwei verschiedenen Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden kann.

Hierbei ist nun wohl zu beachten, daß eine $M_2$, die in einer Weise durch Translation einer Kurve $c_1$ erzeugt werden kann, immer noch eine zweite derartige Erzeugung gestattet. Wird nämlich eine $M_2$ durch Translationsbewegung einer Kurve $c_1$ beschrieben, so durchlaufen alle auf $c_1$ gelegenen Punkte Bahnkurven $c_2$, die unter einander kongruent und gleichgestellt sind; diese $M_2$ läßt sich daher auch durch Translations- [183 bewegung einer $c_2$ erzeugen.

Kann eine $M_2$ in mehreren, etwa in $q$ Weisen durch Translation von Kurven erzeugt werden, so ist $q$ entweder eine gerade Zahl oder unendlich; denn die betreffenden Erzeugungen ordnen sich offenbar paarweise zusammen.

4. Wir wollen annehmen, daß eine vorgelegte $M_2$ durch Translation einer Kurve $c_1$ erzeugt wird, und daß alle Punkte dieser Kurve die kongruenten Bahnkurven $c_2$ durchlaufen; wir nehmen ferner an, daß dieselbe $M_2$ auch durch Translationsbewegung einer Kurve $\varkappa_1$ beschrieben wird, und daß die entsprechenden Bahnkurven $\varkappa_2$ heißen.

Es ist dabei nicht ausgeschlossen, daß die Kurve $c_1$ mit der Kurve $\varkappa_1$ identisch ist, obgleich die Bahnkurven $c_2$ von den Bahnkurven $\varkappa_2$ verschieden sind. Liegt ein solcher Fall vor, so gibt es zwei verschiedene infinitesimale Translationen, die eine Kurve der Schar $c_1$ in eine benachbarte Kurve derselben Schar überführen. Dann aber gestattet $c_1$ eine infinitesimale Translation in sich und ist somit eine Gerade. Die $M_2$ enthält dementsprechend $\infty^1$ parallele Gerade und kann naturgemäß als eine zylindrische Mannigfaltigkeit bezeichnet werden.

Wir formulieren dieses Resultat als Satz:

**Satz 1.** Kann eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit des $n$-fachen Raumes in zwei Weisen als Translations-$M_2$ aufgefaßt werden, so ist sie entweder zylindrisch und kann dementsprechend in unendlich vielen Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden, oder sie enthält (mindestens) vier verschiedene Scharen kongruenter und gleichgestellter Kurven.

5. Wir richten jetzt unsere Aufmerksamkeit auf nicht zylindrische $M_2$ des $n$-fachen Raumes, die in zwei (oder noch mehr) Weisen als Translations-$M_2$ aufgefaßt werden können. Wie soeben, bezeichnen wir die vier auf dieser $M_2$ gelegenen Scharen kongruenter und gleichgestellter Kurven mit $c_1, c_2, \varkappa_1$ und $\varkappa_2$; dabei nehmen wir an, daß die beiden Kurvenscharen $c_1, c_2$ zu der einen Erzeugung, die beiden anderen Scharen $\varkappa_1, \varkappa_2$ zu der anderen Erzeugung gehören.

Durch jeden Punkt von allgemeiner Lage dieser $M_2$ geht eine Kurve aus jeder Schar; wir bezeichnen die zugehörigen Tangenten der Kurven $c_1$ und $c_2$ mit $t_1$ und $t_2$, ferner die Tangenten der Kurven $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ mit $\tau_1$ und $\tau_2$. Nach unseren Voraussetzungen sind diese vier Tangenten paarweise von einander verschieden, und daher gibt es in dem betreffenden [184 Punkte unserer $M_2$ immer zwei ganz bestimmte Tangenten $\omega_1$ und $\omega_2$, die sowohl zu dem Geradenpaare $t_1, t_2$, wie zu dem Paare $\tau_1, \tau_2$ harmonische Lage haben.

In dieser Weise ordnen wir jedem Punkte unserer $M_2$ zwei Tangenten $\omega_1$ und $\omega_2$ zu. Sodann denken wir uns die beiden Kurvenscharen:

$$\Omega_1 = \text{Const.}, \quad \Omega_2 = \text{Const.}$$



bestimmt, deren Kurven in jedem Punkte von einer Geraden $\omega_1$, beziehungsweise $\omega_2$ berührt werden. Es ist dann leicht zu sehen, daß die hiermit gefundenen Kurvenscharen: $\Omega_1 = \text{Const.}$ und $\Omega_2 = \text{Const.}$ gewisse charakteristische Eigenschaften besitzen.

Projizieren wir in der Tat unsere $M_2$ durch Orthogonalprojektion in irgend einen dreifachen Raum, so erhalten wir immer eine Fläche dieses Raumes, die in zweifacher Weise als Translationsfläche aufgefaßt werden kann, und dabei sind die Projektionen der Kurven $\Omega_1 = \text{Const.}$ und $\Omega_2 = \text{Const.}$ immer die Haupttangentenkurven dieser Fläche.

6. Unsere $M_2$ dachten wir uns im $n$-dimensionalen Raume $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gelegen, und dieser Raum möge im $(n+2)$-dimensionalen Raume $z_1, z_2, \ldots, z_n, x_1, x_2$ enthalten sein. Alsdann kann unsere $M_2$ nach Ausführung einer passenden Bewegung des $(n+2)$-fachen Raumes durch $n$ Gleichungen von der Form:

$$z_k = \varphi_k(x_1, x_2) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

dargestellt werden.

Projizieren wir nun diese $M_2$ durch Orthogonalprojektion in den dreifachen Raum $z_k, x_1, x_2$, so geht sie in die Fläche $z_k = \varphi_k(x_1, x_2)$ dieses Raumes über, und es sind die Projektionen der beiden Kurvenscharen: $\Omega_1 = \text{Const.}$, $\Omega_2 = \text{Const.}$ für jedes $k$ die Integralkurven der Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_2^2} dx_2^2 = 0.$$

Hieraus folgt nun, daß die beiden Gleichungen:

$$(2) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 z_k}{\partial x_1^2}}{\dfrac{\partial^2 z_i}{\partial x_1^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z_k}{\partial x_1 \partial x_2}}{\dfrac{\partial^2 z_i}{\partial x_1 \partial x_2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 z_k}{\partial x_2^2}}{\dfrac{\partial^2 z_i}{\partial x_2^2}}$$

immer bestehen, welche unter den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ auch $k$ und $i$ sein [185 mögen.

Es sind daher $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gemeinsame partikuläre Lösungen zweier linearer partieller Differentialgleichungen, die immer auf die Form:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \alpha(x_1, x_2) \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \beta(x_1, x_2) \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}$$

gebracht werden können. Und da die quadratische Gleichung (1) zwei verschiedene Wurzeln hat, so muß auch die äquivalente Gleichung:

$$\alpha\, dx_1^2 + 2\beta\, dx_1 dx_2 + dx_2^2 = 0$$

zwei verschiedene Wurzeln haben, was wieder heißt, daß die Größe $\alpha - \beta^2$ nicht identisch verschwindet.

7. Nun aber finden wir durch Differentiation von (3) vier Gleichungen dritter Ordnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 z}{\partial x_1^3} - \alpha \frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \\
\frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \alpha \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \\
\frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \beta \frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \\
\frac{\partial^3 z}{\partial x_1 \partial x_2^2} - \beta \frac{\partial^3 z}{\partial x_2^3} &= \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2},
\end{aligned}$$

deren Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta \end{vmatrix} = \beta^2 - \alpha$$

nicht identisch verschwindet. Hieraus können wir schließen, daß die allgemeinste gemeinsame Lösung der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen (3) von vier willkürlichen Konstanten abhängt, und daß daher fünf beliebige partikuläre Lösungen, zum Beispiel $z_1, z_2, \ldots, z_5$, immer durch eine lineare und homogene Relation:

$$k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_5 z_5 = 0 \quad (k_i = \text{Const.})$$

verbunden sind.

Also ist unsere $M_2$ immer in einer sechsdimensionalen [186
ebenen Mannigfaltigkeit des Raumes: $x_1, x_2, z_1, z_2, \ldots, z_n$ enthalten, und diese sechsdimensionale Ebene enthält überdies die ebene Mannigfaltigkeit:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \ldots, z_n = 0.$$

Nun aber liegt es in der Natur der Sache, daß die ebene Mannigfaltigkeit: $z_1 = 0, \ldots, z_n = 0$ keine besondere Stellung einnimmt, und also dürfen wir schließen, daß unsre $M_2$ in einem dreidimensionalen ebenen Raume enthalten ist.

8. Hiermit ist das folgende beachtenswerte Theorem gefunden:

**Theorem I. Kann eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit des $n$-fachen Raumes in zwei oder noch mehr Weisen als Translations-$M_2$ aufgefaßt werden, so ist sie entweder zylindrisch, das heißt, von $\infty^1$ parallelen Geraden erzeugt, oder sie liegt in einem dreifachen ebenen Raume, und in diesem Raume ist sie dann eine Fläche, die in mehrfacher Weise als Translationsfläche aufgefaßt werden kann.**



Hiermit ist die Bestimmung aller zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, die in zweifacher Weise als Translations-$M_2$ aufgefaßt werden können, geleistet.

Ich behalte mir vor, in späteren Publikationen diesen schönen Satz nach mehreren Richtungen hin zu verallgemeinern. (Vgl. Norw. Archiv 1882, Bd. VII, S. 176 [d. Ausg. Bd. I, Abh. XXVII, S. 465 f.])

## Kapitel II.

## Formulierung eines allgemeinen Problems.

**9.** Wie in früheren Arbeiten bezeichnen wir eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit des vierdimensionalen Raumes $x_1, x_2, x_3, x_4$ als eine Translationsmannigfaltigkeit, präziser als eine Translations-$M_3$, wenn sie durch vier Gleichungen von der Form:

$$(1) \qquad x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3,4)}$$

dargestellt werden kann. Die Größen $t_1$, $t_2$ und $t_3$ sind Parameter, deren Elimination eine und nur eine Gleichung zwischen den $x$:

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$ [187

liefert, und diese Gleichung gibt, dürfen wir sagen, die Cartesische Darstellung unsrer $M_3$.

Erteilen wir den beiden Parametern $t_2$ und $t_3$ konstante Werte $a_2$ und $a_3$, fassen dagegen $t_1$ als einen veränderlichen Parameter auf, so bestimmen die hervorgehenden Gleichungen:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(a_2) + A_{k3}(a_3) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3,4)}$$

eine eindimensionale Mannigfaltigkeit, oder, wie wir sagen wollen, eine Kurve, die auf unsrer $M_3$ gelegen ist und mit dem Symbole $c_{t_1, a_2, a_3}$ bezeichnet werden möge. Und da $a_2$ und $a_3$ beliebige Konstanten darstellen können, so erhalten wir zweifach unendlich viele Kurven $c_{t_1, a_2, a_3}$; alle diese Kurven sind unter einander kongruent und gleichgestellt. Wir drücken dies kürzer aus, indem wir sagen, daß unsere $M_3$ durch Translationsbewegung einer Kurve $c_{t_1, a_2, a_3}$ erzeugt werden kann.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß unsere $M_3$ in drei verschiedenen Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt wird, und wir wählen:

$$c_{t_1, a_2, a_3}; \quad c_{a_1, t_2, a_3}; \quad c_{a_1, a_2, t_3}$$

als Symbole dieser drei Kurvenscharen. Durch jeden Punkt der $M_3$ geht eine (und im allgemeinen nur eine) Kurve aus jeder Schar.

**10.** Unsere $M_3$ kann aber noch in anderer Weise in kongruente und gleichgestellte Mannigfaltigkeiten zerlegt werden. Erteilen wir nämlich einem einzelnen unter den drei Parametern $t_k$, etwa $t_3$, einen konstanten Wert $a_3$, so bestimmen die hervorgehenden Gleichungen:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(a_3)$$

für jeden Wert der Größe $a_3$ eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit:

$$m_{t_1, t_2, a_3},$$

und die hiermit definierten $\infty^1$ zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten $m_{t_1, t_2, a_3}$ sind unter einander kongruent und gleichgestellt. Ähnliche Zerlegungen unserer $M_3$ erhalten wir, wenn wir dem Parameter $t_1$ (oder dem Parameter $t_2$) nach und nach verschiedene konstante Werte erteilen. Wir finden also drei Mannigfaltigkeitsscharen, deren jede aus $\infty^1$ kon- [188
gruenten und gleichgestellten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten besteht; diese Mannigfaltigkeiten, die sämtlich auf unserer $M_3$ liegen, bezeichnen wir mit den Symbolen:

$$m_{a_1, t_2, t_3}; \quad m_{t_1, a_2, t_3}; \quad m_{t_1, t_2, a_3};$$

durch jeden Punkt der $M_3$ geht eine Mannigfaltigkeit aus jeder Schar.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen, indem wir sagen, daß unsre $M_3$ in **drei** Weisen durch Translationsbewegung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit erzeugt werden kann.

**11.** Erteilen wir in den Gleichungen:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(a_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

einer solchen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $m_{t_1, t_2, a_3}$ dem einen Parameter, etwa $t_2$, nach und nach verschiedene feste Werte $a_2$, so sehen wir, daß diese Mannigfaltigkeit einfach unendlich viele kongruente und gleichgestellte Kurven $c_{t_1, a_2, a_3}$ enthält; sie enthält aber offenbar auch $\infty^1$ kongruente und gleichgestellte Kurven $c_{a_1, t_2, a_3}$.

Um die Sprache zu erleichtern, werden wir von jetzt ab die Kurven der Schar $c_{t_1, a_2, a_3}$ kurz mit $c_1$, und dementsprechend die Kurven der Scharen $c_{a_1, t_2, a_3}$ und $c_{a_1, a_2, t_3}$ mit $c_2$, beziehungsweise $c_3$ bezeichnen. Wir bezeichnen andererseits die Mannigfaltigkeiten $m_{t_1, t_2, a_3}$ mit $m_3$, und dementsprechend die Mannigfaltigkeiten $m_{t_1, a_2, t_3}$, und $m_{a_1, t_2, t_3}$ mit $m_2$, beziehungsweise $m_1$.

Jede auf unserer $M_3$ gelegene $m_1$ enthält $\infty^1$ Kurven $c_2$, sowie $\infty^1$ Kurven $c_3$. Ist überhaupt $i, k, j$ eine beliebige Permutation der Zahlen 1, 2, 3, so enthält jede $m_i$ einfach unendlich viele Kurven $c_k$, und ebenso $\infty^1$ Kurven $c_j$.



**12.** Führt man in die Gleichungen:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

statt der Parameter $t_k$ neue Parameter $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ durch die Substitution:

$$t_i = \varphi_i(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ein, so werden die neuen Gleichungen:

$$x_k = B_k(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

im allgemeinen nicht die Form: [189

$$(2) \qquad x_k = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, \ldots, 4)$$

besitzen. Ausnahmeweise kann dies jedoch eintreten, und wir stellen uns in dieser Abhandlung grade die Aufgabe, alle Translations-$M_3$ zu finden, deren Gleichungen in mehreren Weisen auf die Form:

$$(1) \qquad x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

gebracht werden können.

Dabei setzen wir von vornherein ausdrücklich voraus, daß der Übergang von einer bestimmten Darstellung (1) einer $M_3$ zu einer anderen derartigen Darstellung:

$$x_k = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

derselben $M_3$ nicht durch drei Gleichungen: $t_i = \varphi_i(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ vermittelt wird, deren jede nur eine Größe $\tau$ enthält.

**13.** Die eben vorgetragene Fassung unseres allgemeinen Problems müssen wir als eine analytischsynthetische bezeichnen. Unter Umständen kann aber eine rein analytische Fassung vorteilhafter sein, und wir heben daher ausdrücklich hervor, daß unser Problem auch in der folgenden Weise formuliert werden kann:

Wie findet man alle Lösungen der vier Funktionalgleichungen:

$$A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

zwischen den vierundzwanzig Funktionen:

$$A_{ki}(t_i), \quad \mathsf{A}_{kj}(\tau_j) \qquad (k = 1, \ldots, 4;\ i, j = 1, 2, 3),$$

deren jede nur von **einem** Argumente abhängt?

Es wird vorausgesetzt, erstens, daß die sechs Argumente $t_1, t_2, t_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ durch drei und nur durch drei Relationen verknüpft sind, zweitens, daß diese Relationen sowohl nach $t_1, t_2, t_3$, wie nach $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ auflösbar sind, drittens, daß nicht jedes $t_k$ nur von **einem** $\tau_i$ abhängt.

Daß wir den Fall, daß jedes $t_k$ nur von einem $\tau_i$ abhängt, von vornherein ausschließen, beruht darauf, daß unser Problem in diesem Falle keine Schwierigkeit und auch kein Interesse darbietet. Setzten wir nämlich zum Beispiel:

$$t_k = \varphi_k(\tau_k) \qquad (k = 1, 2, 3),$$

so erhielten wir, welche auch die Funktionen $\varphi_i(\tau_i)$, sowie die Funk- [190 tionen $A_{ki}(t_i)$ wären, immer eine Lösung, und zwar in der Regel die allgemeinste zugehörige Lösung unseres Problems, indem wir den $\mathsf{A}_{ki}(\tau_i)$ die Formen:

$$\mathsf{A}_{ki}(\tau_i) \equiv A_{ki}(\varphi_i(\tau_i)) \qquad (k = 1, \ldots, 4;\ i = 1, 2, 3)$$

erteilten.

**14.** Wenn wir später unser allgemeines Problem ernstlich in Angriff nehmen, werden wir sehen, daß noch weitere Lösungen als selbstverständlich, oder jedenfalls relativ uninteressant abgetrennt werden können. So zum Beispiel erhalten wir eine selbstverständliche und triviale Lösung, wenn wir den achzehn Funktionen:

$$A_{1i}(t_i),\ \ A_{2i}(t_i),\ \ A_{3i}(t_i),\ \ \mathsf{A}_{1i}(\tau_i),\ \ \mathsf{A}_{2i}(\tau_i),\ \ \mathsf{A}_{3i}(\tau_i)$$

arbiträre Formen erteilen — die nur der Beschränkung unterworfen sind, daß die drei Gleichungen:

$$A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

sowohl nach den $t$ wie nach den $\tau$ auflösbar sein sollen —, und sodann die $A_{4i}$ und $\mathsf{A}_{4i}$ durch die beiden Gleichungen:

$$A_{4i}(t_i) = c_1 A_{1i}(t_i) + c_2 A_{2i}(t_i) + c_3 A_{3i}(t_i),$$
$$\mathsf{A}_{4j}(\tau_j) = c_1 \mathsf{A}_{1j}(\tau_j) + c_2 \mathsf{A}_{2j}(\tau_j) + c_3 \mathsf{A}_{3j}(\tau_j)$$

mit denselben konstanten Koeffizienten $c_1, c_2, c_3$ bestimmen.

In diesem Falle stellen die Gleichungen (1) eine ebene Mannigfaltigkeit dar; denn die durch Elimination der Parameter $t_1, t_2, t_3$ hervorgehende Gleichung:

$$x_4 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

ist in den $x$ linear. Diese Betrachtungen zeigen, daß jede dreidimensionale Ebene des vierfachen Raumes in unendlich vielen Weisen durch vier Gleichungen von der Form:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, \ldots, 4)$$

dargestellt werden kann; sie zeigen überdies, wie man alle derartigen Darstellungen einer bestimmten dreidimensionalen Ebene findet.

Wir können und wollen daher in den folgenden Entwickelungen von den ebenen Translations-$M_3$ absehen.



## Kapitel III. [191

### Partielle Differentialgleichungen, deren Integralgebilde Translations-$M_3$ sind.

**15.** Wir werden jetzt gewisse partielle Differentialgleichungen ableiten, deren Integralgebilde Translations-$M_3$ des vierdimensionalen Raumes $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ darstellen. Um uns der gewöhnlichen Formelsprache möglichst genau anzuschließen, ersetzen wir $x_4$ durch $z$ und betrachten dementsprechend $x_1$, $x_2$, $x_3$, $z$ als Cartesische Punktkoordinaten des vierdimensionalen Raumes.

Wird nun eine $M_3$ durch eine Gleichung von der Form: $z = f(x_1, x_2, x_3)$ definiert, so ist es im allgemeinen zweckmäßig, für die partiellen Ableitungen von $z$ nach den $x$ abgekürzte Bezeichnungen einzuführen, und wir setzen daher, wie bei früheren Gelegenheiten:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} = r_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

später werden wir für die höheren Ableitungen ähnliche Abkürzungen einführen.

**16.** Bestimmen die vier Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_i = A_{i1}(t_1) + A_{i2}(t_2) + A_{i3}(t_3) & (i = 1, 2, 3), \\ z \; = \; C_1(t_1) + \; C_2(t_2) + \; C_3(t_3) \end{cases}$$

eine Translations-$M_3$ des Raumes $z, x_1, x_2, x_3$, so liefert jedes Wertsystem $t_1, t_2, t_3$ einen Punkt dieser Translations-$M_3$, und dementsprechend definiert jedes benachbarte Wertsystem $t_1 + dt_1$, $t_2 + dt_2$, $t_3 + dt_3$ einen benachbarten Punkt der $M_3$. Zu jedem Punkte $t_1, t_2, t_3$ gehören somit $\infty^2$ Fortschreitungsrichtungen, die auf der $M_3$ liegen, und als Bestimmungsstücke dieser $\infty^2$ Richtungen $dx_1 : dx_2 : dx_3 : dz$ können wir die Verhältnisse $dt_1 : dt_2 : dt_3$ anwenden. Der Inbegriff dieser Fortschreitungsrichtungen bildet ein zweidimensionales ebenes Gebiet, das in den folgenden Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen wird; die Differentiale $dt_1$, $dt_2$, $dt_3$ können wir gradezu als homogene Koordinaten der betreffenden Fortschreitungsrichtungen auffassen.

Der analytische Zusammenhang zwischen den Differentialen: $dz$, [192 $dx_1$, $dx_2$, $dx_3$ und den Ableitungen erster Ordnung $p_1, p_2, p_3$ wird durch die bekannte Gleichung:

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - p_3 dx_3 = 0$$

gegeben, die wir auf die Form:

$$\sum_k^{1,2,3} \left( \frac{\partial z}{\partial t_k} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial t_k} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial t_k} - p_3 \frac{\partial x_3}{\partial t_k} \right) dt_k = 0,$$

oder auf die äquivalente Form:

$$\sum_k^{1,2,3} \{ C_k'(t_k) - p_1 A_{1k}'(t_k) - p_2 A_{2k}'(t_k) - p_3 A_{3k}'(t_k) \} dt_k = 0$$

bringen können. Diese letzte Gleichung zerlegt sich, da die Differentiale $dt_1$, $dt_2$, $dt_3$ von einander unabhängig sind, in die drei Gleichungen:

$$C_k'(t_k) - p_1 A_{1k}'(t_k) - p_2 A_{2k}'(t_k) - p_3 A_{3k}'(t_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

**17.** Aus diesen Relationen leiten wir neue ab, indem wir nach $t_i$ differentiieren. Setzen wir dabei voraus, daß die Indizes $i$ und $k$ von einander verschieden sind, so erhalten wir die drei Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial p_1}{\partial t_i} A_{1k}'(t_k) + \frac{\partial p_2}{\partial t_i} A_{2k}'(t_k) + \frac{\partial p_3}{\partial t_i} A_{3k}'(t_k),$$

die durch Substitution der Werte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_j}{\partial t_i} &= r_{j1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + r_{j2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + r_{j3} \frac{\partial x_3}{\partial t_i} \\ &= r_{j1} A_{1i}'(t_i) + r_{j2} A_{2i}'(t_i) + r_{j3} A_{3i}'(t_i) \end{aligned}$$

die Gestalt:

$$(3) \begin{cases} 0 = r_{11} A_{1i}'(t_i) A_{1k}'(t_k) + r_{22} A_{2i}'(t_i) A_{2k}'(t_k) + r_{33} A_{3i}'(t_i) A_{3k}'(t_k) + \\ \quad + r_{12}(A_{1i}'(t_i) A_{2k}'(t_k) + A_{2i}'(t_i) A_{1k}'(t_k)) + r_{23}(A_{2i}' A_{3k}' + A_{3i}' A_{2k}') + \\ \quad + r_{13}(A_{1i}' A_{3k}' + A_{3i}' A_{1k}') \\ \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k) \end{cases}$$

annehmen. Denken wir uns hier die Parameter $t_1$, $t_2$ und $t_3$ als Funktionen von $p_1$, $p_2$ und $p_3$ vermöge der Gleichungen:

$$C_k'(t_k) - p_1 A_{1k}'(t_k) - p_2 A_{2k}'(t_k) - p_3 A_{3k}'(t_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

ausgedrückt, so erhalten wir die angekündigten partiellen Differen- [193 tialgleichungen zweiter Ordnung, die wir jetzt deuten wollen.

Wir werden sehen, daß sie zunächst aussagen, daß zwischen den drei früher besprochenen Kurvenscharen $c_1$, $c_2$ und $c_3$ charakteristische Beziehungen stattfinden.

**18.** Durch jeden Punkt einer $M_3$ gehen zweifach unendlich viele Gerade, die unsere $M_3$ berühren und als Tangenten bezeichnet werden. Unter diesen $\infty^2$ Tangenten, die sämtlich in der dreidimensionalen Tangentialebene liegen, gibt es einfach unendlich viele, die unsere $M_3$ oskulieren und dementsprechend als Haupttangenten[1]) bezeichnet werden

1) Die Ausdehnung der Begriffe Haupttangente und Haupttangentenkurve auf $n$ Dimensionen deutete ich im Jahre 1872 in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania, S. 133, an [d. Ausg. Bd. III, Abh. V, S. 28].



können. Diese Haupttangenten, oder, präziser gesagt, die $\infty^1$ Fortschreitungsrichtungen längs einer Haupttangente werden durch die Gleichung:

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = r_{11} dx_1^2 + r_{22} dx_2^2 + r_{33} dx_3^2 + \\ \qquad + 2 r_{12} dx_1 dx_2 + 2 r_{23} dx_2 dx_3 + 2 r_{13} dx_1 dx_3 \end{cases}$$

zusammen mit:

$$0 = dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - p_3 dx_3$$

bestimmt.

Diese Formeln zeigen, daß die $\infty^1$ durch einen Punkt einer $M_3$ gehenden Haupttangenten im allgemeinen einen Kegel zweiten Grades bilden, der in der dreidimensionalen Tangentialebene enthalten ist. Die $\infty^2$ Tangenten im betreffenden Punkte bilden ja ein zweidimensionales ebenes Gebiet, und als homogene Koordinaten der einzelnen Tangenten können wir anstatt der drei Differentiale $dt_1$, $dt_2$, $dt_3$ ebensogut die drei Differentiale $dx_1$, $dx_2$, $dx_3$ anwenden; den Zusammenhang zwischen diesen beiden Koordinatensystemen liefern eben die linearen Gleichungen:

$$dx_k = A_{k1}'(t_1) dt_1 + A_{k2}'(t_2) dt_2 + A_{k3}'(t_3) dt_3 \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Es ergibt sich daher, daß die obenstehende Gleichung (2) der Haupttangenten, die in den $dx_k$ homogen und vom zweiten Grade ist, wirklich einen Kegel zweiten Grades darstellt.

**19.** Aus der projektiven Geometrie ist nun bekannt, daß in dem [194 zweidimensionalen ebenen Gebiete: $dx_1 : dx_2 : dx_3$ aller Tangenten einer $M_3$ in einem beliebigen Punkte die beiden Tangenten $dx_1 : dx_2 : dx_3$ und $\delta x_1 : \delta x_2 : \delta x_3$ dann und nur dann hinsichtlich des Kegels der Haupttangenten:

$$0 = r_{11} dx_1^2 + r_{22} dx_2^2 + r_{33} dx_3^2 + 2 r_{12} dx_1 dx_2 + 2 r_{13} dx_1 dx_3 + 2 r_{23} dx_2 dx_3$$

konjugiert sind, wenn die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = r_{11} dx_1 \delta x_1 + r_{22} dx_2 \delta x_2 + r_{33} dx_3 \delta x_3 + r_{12}(dx_1 \delta x_2 + \delta x_1 dx_2) + \\ + r_{13}(dx_1 \delta x_3 + \delta x_1 dx_3) + r_{23}(dx_2 \delta x_3 + \delta x_2 dx_3) \end{aligned}$$

besteht. Beachten wir andererseits, daß die früher besprochenen Kurven $c_1$ der Translations-$M_3$ (1) durch Gleichungen von der Form:

$$x_k = A_{k1}(t_1) + \text{Const.}$$

definiert werden, und daß somit im Punkte $t_1$, $t_2$, $t_3$ die Tangentialrichtung der hindurchgehenden Kurve $c_1$ durch die Gleichungen:

$$dx_k = A_{k1}'(t_1) dt_1, \quad dz = C_1'(t_1) dt_1$$

bestimmt wird, so sehen wir, daß die früher gefundenen Differentialgleichungen:

$$(3) \begin{cases} 0 = r_{11} A_{1i}' A_{1k}' + r_{22} A_{2i}' A_{2k}' + r_{33} A_{3i}' A_{3k}' + r_{12}(A_{1i}' A_{2k}' + A_{2i}' A_{1k}') + \\ \qquad + r_{13}(A_{1i}' A_{3k}' + A_{3i}' A_{1k}') + r_{23}(A_{2i}' A_{3k}' + A_{3i}' A_{2k}'), \end{cases}$$

die jede Translations-$M_3$ (1) befriedigt, direkt aussagen, daß in jedem Punkte einer solchen $M_3$ die Tangenten der drei hindurchgehenden Kurven $c_1, c_2, c_3$ paarweise hinsichtlich des Kegels der $\infty^1$ Haupttangenten in diesem Punkte konjugiert sind.

**20.** Wir fassen die hiermit gefundenen Ergebnisse zu einem Theoreme zusammen.

**Theorem II. Erteilt man in den Gleichungen:**

$$(1)\quad \begin{cases} x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) & (k=1,2,3), \\ z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3) \end{cases}$$

**einer Translations-$M_3$ den beiden Parametern $t_2$ und $t_3$ konstante Werte, so bestimmen die hervorgehenden Gleichungen $\infty^2$ auf der $M_3$ gelegene Kurven $c_1$, die unter einander kongruent und gleichgestellt sind. Eine Translations-$M_3$ enthält drei solche Kurven-** [195 **scharen: $c_1$, $c_2$ und $c_3$, deren jede aus $\infty^2$ kongruenten und gleichgestellten Kurven besteht. Durch jeden Punkt von allgemeiner Lage der $M_3$ geht eine Kurve aus jeder Schar, und die Tangenten dieser drei Kurven im betreffenden Punkte sind paarweise zu dem Kegel der Haupttangenten konjugiert. Diese Beziehungen finden ihren analytischen Ausdruck in den Differentialgleichungen:**

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = r_{11} A'_{1i} A'_{1k} + r_{22} A'_{2i} A'_{2k} + r_{33} A'_{3i} A'_{3k} + \\ \qquad + r_{12}(A'_{1i} A'_{2k} + A'_{2i} A'_{1k}) + r_{13}(A'_{1i} A'_{3k} + A'_{3i} A'_{1k}) + \\ \qquad + r_{23}(A'_{2i} A'_{3k} + A'_{3i} A'_{2k}) \\ \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3;\; i \neq k), \end{cases}$$

**und diese Gleichungen verwandeln sich in drei lineare partielle Differentialgleichungen, die $z$ als Funktion von $x_1, x_2, x_3$ definieren, sobald jedes $t_k$ durch Auflösung der Gleichung:**

$$C'_k(t_k) - p_1 A'_{1k}(t_k) - p_2 A'_{2k}(t_k) - p_3 A'_{3k}(t_k) = 0$$

**als Funktion von $p_1, p_2, p_3$ ausgedrückt wird.**

**21.** Jede Translations-$M_3$, deren Gleichungen in der Form:

$$(1)\quad \begin{cases} x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) & (k=1,2,3), \\ z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3) \end{cases}$$

vorliegen, bestimmt somit drei lineare partielle Differentialgleichungen, in denen $z$ als Funktion von $x_1, x_2, x_3$ auftritt.

Unter den gemeinsamen Lösungen dieser drei partiellen Differentialgleichungen ist uns eine bekannt; richtiger gesagt, wir finden eine solche Lösung, wenn wir zwischen den Gleichungen (1) die Parameter $t_1, t_2$ und $t_3$ eliminieren und die hervorgehende Relation nach $z$ auflösen.



Es ist aber leicht, zu sehen, daß unsere drei simultanen partiellen Differentialgleichungen (3) noch weitere gemeinsame Lösungen besitzen. Dies folgt schon daraus, daß diese drei Gleichungen in den $r_{ik}$ linear und homogen sind, während die Koeffizienten der $r_{ik}$ nur von $p_1, p_2, p_3$ abhängen. Ist in der Tat $z = f(x_1, x_2, x_3)$ eine Lösung einer oder mehrerer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\sum_{i,k}^{1,2,3} \varphi_{ik}(p_1, p_2, p_3) r_{ik} = 0,$$

die in den $r_{ik}$ (linear und) homogen sind, während die Koeffizienten [196 $\varphi_{ik}$ nur von $p_1, p_2, p_3$ abhängen, so liefert die Gleichung:

$$z = m \cdot f(x_1 + n_1,\, x_2 + n_2,\, x_3 + n_3) + k$$

immer eine allgemeinere Lösung mit *fünf* willkürlichen Konstanten.

In der Sprache der Mannigfaltigkeitslehre drücken wir dieses Ergebnis in der folgenden Weise aus:

*Die drei linearen partiellen Differentialgleichungen (3), die wir aus den Gleichungen (1) einer vorgelegten Translations-$M_3$ ableiteten, werden nicht allein von dieser $M_3$, sondern zugleich von allen ähnlichen und gleichgestellten $M_3$, die offenbar selbst Translations-$M_3$ sind, befriedigt.*

**22.** Unsere drei linearen partiellen Differentialgleichungen (3) besitzen aber noch weitere gemeinsame Lösungen. Das werden wir jetzt nachweisen und gleichzeitig alle diese gemeinsamen Lösungen bestimmen. Wir werden finden, daß sie von drei arbiträren Funktionen abhängen und daß sie lauter Translations-$M_3$ darstellen. Um dies zu beweisen, erscheint es zweckmäßig, zunächst einige begriffliche Betrachtungen vorauszuschicken.

Auf der Translations-$M_3$:

$$(1)\quad \begin{cases} x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) & (k=1,2,3), \\ z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3) \end{cases}$$

nehmen wir eine Kurve der Schar $c_1$, die etwa durch die Gleichungen: $t_2 = a_2$, $t_3 = a_3$ definiert wird. In jedem Punkte dieser Kurve ziehen wir die Tangente, deren Richtung durch die drei Gleichungen:

$$(4)\quad \frac{dx_k}{dz} = \frac{A'_{k1}(t_1)}{C'_1(t_1)} \qquad (k=1,2,3)$$

bestimmt wird. Der Inbegriff dieser $\infty^1$ Tangenten bildet eine zweidimensionale *developpable* Mannigfaltigkeit $d_1$, und wir werden unsere Aufmerksamkeit auf die *unendlich fernen* Punkte dieser Mannigfaltigkeit $d_1$ richten.

**23.** Indem wir die Begriffe der projektiven Geometrie auf den vierdimensionalen Raum ausgedehnt voraussetzen, können wir sagen, daß der Raum $z, x_1, x_2, x_3$ *dreifach unendlich viele unendlich ferne Punkte* besitzt, die ihrerseits einen dreidimensionalen *ebenen* [197 *Raum* $U_3$ bilden. Wir benutzen $dx_1, dx_2, dx_3, dz$ als homogene Punktkoordinaten im $U_3$; dies ist gestattet, weil die Differentiale $dx_1, dx_2, dx_3, dz$ eine Fortschreitung im vierdimensionalen Raume bestimmen, während andererseits parallele Gerade des vierfachen Raumes ihren unendlich fernen Punkt gemein haben.

Wenn wir die hier vorgetragene Auffassung und Terminologie zu Grunde legen, können wir sagen, daß die drei Gleichungen:

$$(4) \qquad dx_1 : dx_2 : dx_3 : dz = A'_{11}(t_1) : A'_{21}(t_1) : A'_{31}(t_1) : C_1'(t_1)$$

einen unendlich fernen Punkt bestimmen, nämlich den unendlich fernen Punkt auf der Tangente, die wir an die Kurve $c_1$ im Punkte $t_1$ gezogen haben. Eliminieren wir $t_1$ zwischen diesen drei Gleichungen, so finden wir zwei homogene Gleichungen:

$$f_1\left(\frac{dx_1}{dz}, \frac{dx_2}{dz}, \frac{dx_3}{dz}\right) = 0, \quad \varphi_1\left(\frac{dx_1}{dz}, \frac{dx_2}{dz}, \frac{dx_3}{dz}\right) = 0,$$

die eine unendlich ferne Kurve in $U_3$ bestimmen. Diese unendlich ferne Kurve, die wir $K_1$ nennen, ist offenbar die Schnittkurve der oben betrachteten Developpabeln $d_1$ mit der unendlich fernen Mannigfaltigkeit $U_3$.

Es leuchtet nun ein, daß diese Kurve $K_1$, die in den folgenden Entwickelungen eine wichtige Rolle spielen wird, immer dieselbe bleibt, welche Kurve der Schar $c_1$ wir auch wählen. Dies ist analytisch evident; es ist aber auch begrifflich klar; denn, wenn auf eine Kurve $c_1$ und auf die Developpable $d_1$, die von allen Tangenten dieser Kurve erzeugt wird, irgend eine Translationsbewegung ausgeführt wird, so bleiben die unendlich fernen Punkte dieser Developpabeln in Ruhe.

In entsprechender Weise erkennen wir, daß die Developpabeln $d_2$ aller Kurven $c_2$ die unendlich ferne Mannigfaltigkeit $U_3$ nach einer gemeinsamen Kurve $K_2$ schneiden, sowie, daß die Developpabeln $d_3$ aller Kurven $c_3$ eine unendlich ferne Kurve $K_3$ gemein haben.

**24.** Es ist jetzt nicht schwer, zu sehen, daß die drei oben aufgestellten linearen partiellen Differentialgleichungen (3) aussagen, daß zwischen ihren Integral-$M_3$ und je zwei unter den unendlich fernen Kurven $K_1$, $K_2$ und $K_3$ eine gewisse Beziehung stattfindet.

Aus den Gleichungen der Kurve $K_i$: [198

$$\frac{dx_k}{dz} = \frac{A'_{ki}(t_i)}{C_i'(t_i)} \equiv \xi_{ki}(t_i) \qquad (k = 1, 2, 3)$$



können wir durch Elimination des Parameters $t_i$ zwei Relationen: $f_i = 0$, $\varphi_i = 0$ herleiten, die in den Differentialen $dx_1, dx_2, dx_3, dz$ homogen sind und sich somit durch Auflösung auf die Form:

$$(5) \qquad \xi_{2i} - \omega_{2i}(\xi_{1i}) = 0, \quad \xi_{3i} - \omega_{3i}(\xi_{1i}) = 0$$

bringen lassen. Von jetzt ab wollen wir diese beiden letzten Gleichungen als *analytische Definition der unendlich fernen Kurve* $K_i$ betrachten.

Tragen wir andererseits in eine unter den Gleichungen (3) statt der Größen $A'_{ki}$ die proportionalen Größen $\xi_{ki}$ ein, und ersetzen sodann in der neuen Gleichung:

$$(3') \quad \begin{cases} 0 = r_{11}\xi_{1i}\xi_{1k} + r_{22}\xi_{2i}\xi_{2k} + r_{33}\xi_{3i}\xi_{3k} + r_{12}(\xi_{1i}\xi_{2k} + \xi_{2i}\xi_{1k}) + \\ \qquad + r_{13}(\xi_{1i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{1k}) + r_{23}(\xi_{2i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{2k}) \end{cases}$$

die $\xi_{j\nu}$ durch diejenigen Funktionen von $p_1, p_2, p_3$, die sich durch Auflösung des Gleichungssystems:

$$1 - p_1\xi_{1\nu} - p_2\xi_{2\nu} - p_3\xi_{3\nu} = 0, \quad \xi_{2\nu} = \omega_{2\nu}(\xi_{1\nu}), \quad \xi_{3\nu} = \omega_{3\nu}(\xi_{1\nu})$$

ergeben, so übersehen wir unmittelbar, daß die Form der hiermit abgeleiteten linearen partiellen Differentialgleichung durch die Form der beiden Gleichungssysteme:

$$\xi_{2j} = \omega_{2j}(\xi_{1j}), \quad \xi_{3j} = \omega_{3j}(\xi_{1j}) \qquad (j = i, k)$$

vollständig bestimmt ist.

**25.** Hieraus folgt, daß jede einzelne Differentialgleichung (3') wirklich nur aussagt, daß zwischen ihren Integral-$M_3$ und den beiden Kurven $K_i$ und $K_k$ eine gewisse Beziehung stattfindet. Nichts ist leichter, als zu erkennen, worin diese Beziehung besteht.

Die Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{\xi_{1i}} = \frac{dx_2}{\xi_{2i}} = \frac{dx_3}{\xi_{3i}} = dz$$

bestimmen ja im Punkte $x_1, x_2, x_3, z$ einer Integral-$M_3$ eine Tangente, die dadurch definiert ist, daß sie die unendlich ferne Kurve $K_i$ schneidet; und dementsprechend bestimmen die Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{\xi_{1k}} = \frac{dx_2}{\xi_{2k}} = \frac{dx_3}{\xi_{3k}} = dz$$ [199

diejenige Tangente im selben Punkte, deren unendlich ferner Punkt auf der Kurve $K_k$ gelegen ist. Eine Integral-$M_3$ der partiellen Differentialgleichung (3') ist daher dadurch charakterisiert, daß sie in jedem Punkte zwei hinsichtlich des Haupttangentenkegels konjugierte Tangenten besitzt, unter denen die eine die Kurve $K_i$, die andere die Kurve $K_k$ schneidet.

Hiermit ist der folgende Satz gefunden:

**Satz 2.** Bestimmt man in der Gleichung:

$$(3')\quad \begin{cases} \xi_{1i}\xi_{1k}r_{11} + \xi_{2i}\xi_{2k}r_{22} + \xi_{3i}\xi_{3k}r_{33} + (\xi_{1i}\xi_{2k} + \xi_{2i}\xi_{1k})r_{12} + \\ \qquad + (\xi_{1i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{1k})r_{13} + (\xi_{2i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{2k})r_{23} = 0 \end{cases}$$

die Größen $\xi$ aus den Gleichungen:

$$1 - p_1\xi_{1j} - p_2\xi_{2j} - p_3\xi_{3j} = 0,\ \xi_{2j} = \omega_{2j}(\xi_{1j}),\ \xi_{3j} = \omega_{3j}(\xi_{1j}) \qquad (j = i, k)$$

als Funktionen von $p_1, p_2, p_3$, so lassen sich die Integral-$M_3$ der hervorgehenden linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung dadurch charakterisieren, daß sie in jedem Punkte zwei hinsichtlich des Kegels der Haupttangenten konjugierte Tangenten besitzen, deren unendlich ferne Punkte auf zwei gegebenen Kurven, nämlich auf den Kurven:

$$\xi_{2j} - \omega_{2j}(\xi_{1j}) = 0,\quad \xi_{3j} - \omega_{3j}(\xi_{1j}) = 0 \qquad (j = i, k)$$

gelegen sind.

**26.** Sind die beiden Kurven $K_i$ und $K_k$ gegeben, so ist die partielle Differentialgleichung (3′) vollständig bestimmt. Sie hat eo ipso Integral-$M_3$ in unendlicher Anzahl. Diese $M_3$ (die wir gelegentlich bestimmen werden) lassen sich keineswegs immer durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugen.

Wir werden sehen, daß die Sache anders steht, wenn wir die gemeinsamen Integral-$M_3$ von drei solchen Gleichungen suchen, die sich auf je zwei unter drei gegebenen unendlich fernen Kurven $K_1$, $K_2$ und $K_3$ beziehen. Dann sind die gemeinsamen Integral-$M_3$, wie schon früher angekündigt, immer Translations-$M_3$. Vorläufig begnügen wir uns aber mit der Aufstellung des folgenden wichtigen Satzes, der unmittelbar als Korollar aus unseren früheren Entwickelungen hervorgeht:

**Satz 3.** Ersetzt man in den drei Gleichungen: [200

$$(3')\quad \begin{cases} \xi_{1i}\xi_{1k}r_{11} + \xi_{2i}\xi_{2k}r_{22} + \xi_{3i}\xi_{3k}r_{33} + (\xi_{1i}\xi_{2k} + \xi_{2i}\xi_{1k})r_{12} + \\ \qquad + (\xi_{1i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{1k})r_{13} + (\xi_{2i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{2k})r_{23} = 0 \\ \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k) \end{cases}$$

die Größen $\xi_{\alpha\beta}$ durch diejenigen Funktionen von $p_1, p_2, p_3$, die sich durch Auflösung der Gleichungen:

$$1 - p_1\xi_{1i} - p_2\xi_{2i} - p_3\xi_{3i} = 0,$$
$$\xi_{2i} - \omega_{2i}(\xi_{1i}) = 0,\quad \xi_{3i} = \omega_{3i}(\xi_{1i}) = 0$$

ergeben, so erhält man ein System von **drei** linearen partiellen Differentialgleichungen, die ein sogenanntes Involutionssystem bilden. Diese Gleichungen haben $\infty^\infty$ viele



gemeinsame Integral-$M_3$, die lauter Translations-$M_3$ darstellen.

Bestimmen die Gleichungen:

$$x_1 = B_{1i}(\tau_i),\ \ x_2 = B_{2i}(\tau_i),\ \ x_3 = B_{3i}(\tau_i),\ \ z = C_i(\tau_i),$$

in denen $i$ nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 bezeichnet, jedesmal eine Kurve, deren Tangenten die unendlich ferne Kurve:

$$(5)\qquad \xi_{2i} - \omega_{2i}(\xi_{1i}) = 0,\ \ \xi_{3i} - \omega_{3i}(\xi_{1i}) = 0$$

treffen, so ist die Translations-$M_3$:

$$x_k = B_{k1}(\tau_1) + B_{k2}(\tau_2) + B_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$z = C_1(\tau_1) + C_2(\tau_2) + C_3(\tau_3)$$

immer eine gemeinsame Integral-$M_3$ der drei eben besprochenen partiellen Differentialgleichungen. Die drei auf dieser $M_3$ gelegenen Scharen kongruenter und gleichgestellter Kurven besitzen die charakteristische Eigenschaft, daß die Tangenten jeder Kurve dieser Scharen eine unter den drei unendlich fernen Kurven (5) treffen.

**27.** Durch die Fassung dieses Satzes haben wir schon angedeutet, wenn auch nicht ausdrücklich gesagt, daß alle gemeinsamen Integral-$M_3$ unserer drei partiellen Differentialgleichungen (3′) Translations-$M_3$ sind. Bewiesen ist das aber noch nicht; unsere Entwickelungen zeigen ja nur, daß $\infty^\infty$ viele gemeinsame Integral-$M_3$ vorhanden sind, die Translations-$M_3$ darstellen; wir werden zeigen, daß keine weiteren gemeinsamen Integral-$M_3$ existieren.

Unter den gemeinsamen Integral-$M_3$ der drei partiellen Differentialgleichungen (3′) greifen wir eine heraus, die keiner weiteren Beschränkung unterworfen sein soll als der, daß sie keine Developpable sein darf, anders ausgesprochen, wir nehmen an, daß die betreffende Integral-$M_3$ dreifach unendlich viele dreidimensionale Tangentialebenen besitzt. Konstruieren [201 wir nun in irgend einem Punkte $p$ dieser $M_3$ die berührende dreidimensionale Ebene, so schneidet diese Ebene jede unter den drei unendlich fernen Kurven $K_i$ in einem Punkte, dem der Parameterwert $t_i$ zugeordnet ist. In dieser Weise ordnen wir jedem Punkte unserer Integral-$M_3$ drei Zahlen $t_1, t_2, t_3$ zu, und diese drei Zahlen wollen wir als Punktkoordinaten auf der $M_3$ benutzen.

Erteilen wir zum Beispiel dem Parameter $t_1$ einen bestimmten Wert $a_1$, so scheiden wir auf unserer $M_3$ zweifach unendlich viele Punkte aus, die dadurch charakterisiert sind, daß die dreidimensionalen Tangentialebenen der $M_3$ in diesen Punkten sämtlich die Kurve $K_1$ in dem Punkte $t_1 = a_1$ schneiden.

Auf unserer $M_3$ werden hiermit drei Scharen zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten bestimmt, deren jede durch eine Gleichung von der Form $t_i = a_i$ definiert wird. Greifen wir nun zum Beispiel auf der Mannigfaltigkeit: $t_1 = a_1$ drei unendlich benachbarte Punkte heraus und konstruieren in jedem die zugehörige dreidimensionale Tangentialebene, so schneiden diese drei Ebenen einander nach einer Geraden, die $K_1$ trifft. Unsere Deutung der Gleichungen (3′) zeigt also, daß die Mannigfaltigkeit: $t_1 = a_1$ in jedem Punkte zwei Tangenten enthält, die $K_2$, beziehungsweise $K_3$ treffen. Hieraus folgt, daß zwei Gleichungen $t_i = a_i$, $t_k = a_k$ immer eine Kurve definieren, deren Tangenten eine Kurve $K_j$ treffen, und dabei ist $i, k, j$ jedesmal eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3.

**28.** Die Koordinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $z$ der Punkte unserer $M_3$ lassen sich als Funktionen von $t_1$, $t_2$ und $t_3$ ausdrücken. Dementsprechend bestehen Gleichungen von der Form:

$$(6)\qquad \begin{cases} dx_k = \alpha_{k1}(t_1, t_2, t_3)\,dt_1 + \alpha_{k2}(\ldots)\,dt_2 + \alpha_{k3}(\ldots)\,dt_3, \\ dz = \gamma_1(t_1, t_2, t_3)\,dt_1 + \gamma_2(\ldots)\,dt_2 + \gamma_3(\ldots)\,dt_3. \end{cases}$$

Setzen wir hier $dt_2 = 0$, $dt_3 = 0$, so müssen die hervorgehenden Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_1}{\alpha_{11}} = \frac{dx_2}{\alpha_{21}} = \frac{dx_2}{\alpha_{31}} = \frac{dz}{\gamma_1}$$

Kurven bestimmen, deren Tangenten die Kurve $K_1$ treffen. Daher erfüllen die Verhältnisse der Koeffizienten $\alpha_{11}$, $\alpha_{21}$, $\alpha_{31}$ und $\gamma_1$ die Relationen:

$$\frac{\alpha_{11}}{\xi_{11}(t_1)} = \frac{\alpha_{21}}{\xi_{21}(t_1)} = \frac{\alpha_{31}}{\xi_{31}(t_1)} = \frac{\gamma_1}{1},$$

und dementsprechend können wir: [202

$$\alpha_{11} = \varrho_1 \xi_{11}(t_1), \quad \alpha_{21} = \varrho_1 \xi_{21}(t_1), \quad \alpha_{31} = \varrho_1 \xi_{31}(t_1), \quad \gamma_1 = \varrho_1$$

setzen. Eine ganz analoge Betrachtung gibt uns die allgemeinen Formeln:

$$\alpha_{ki} = \varrho_i \cdot \xi_{ki}(t_i), \quad \gamma_i = \varrho_i \qquad (k = 1, 2, 3),$$

und also erhalten die totalen Differentialgleichungen (6) die Gestalt:

$$\begin{aligned} dx_k &= \varrho_1 \xi_{k1}(t_1)\,dt_1 + \varrho_2 \xi_{k2}(t_2)\,dt_2 + \varrho_3 \xi_{k3}(t_3)\,dt_3 \qquad (k = 1, 2, 3), \\ dz &= \varrho_1\,dt_1 + \varrho_2\,dt_2 + \varrho_3\,dt_3. \end{aligned}$$

Hier müssen die Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial\{\varrho_i \xi_{ki}(t_i)\}}{\partial t_j} = \frac{\partial\{\varrho_j \cdot \xi_{kj}(t_j)\}}{\partial t_i}, \quad \frac{\partial \varrho_i}{\partial t_j} = \frac{\partial \varrho_j}{\partial t_i} \qquad (k, i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

erfüllt sein. Diese Bedingungen lassen sich aber auf die Form:

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t_j}\{\xi_{ki}(t_i) - \xi_{kj}(t_j)\} = 0, \quad \frac{\partial \varrho_i}{\partial t_j} = \frac{\partial \varrho_j}{\partial t_i}$$



bringen, und da die Differenzen:

$$\xi_{ki}(t_i) - \xi_{kj}(t_j) \qquad (i \neq j)$$

im allgemeinen von Null verschieden sind, sehen wir, daß jedes $\varrho_i$ nur von dem entsprechenden Parameter $t_i$ abhängen darf.

Die Differentialgleichungen jeder einzelnen nicht developpabeln, gemeinsamen Integral-$M_3$ der drei partiellen Differentialgleichungen (3′) besitzen daher die Form:

$$\begin{aligned} dx_k &= \varrho_1(t_1) \cdot \xi_{k1}(t_1)\,dt_1 + \varrho_2(t_2) \cdot \xi_{k2}(t_2)\,dt_2 + \varrho_3(t_3) \cdot \xi_{k3}(t_3)\,dt_3, \\ dz &= \varrho_1(t_1) \cdot dt_1 + \varrho_2(t_2) \cdot dt_2 + \varrho_3(t_3) \cdot dt_3, \end{aligned}$$

und die entsprechenden endlichen Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_i^{1,2,3} \int \varrho_i(t_i) \cdot \xi_{ki}(t_i)\,dt_i \qquad (k = 1, 2, 3), \\ z &= \sum_i^{1,2,3} \int \varrho_i(t_i) \cdot dt_i \end{aligned}$$

stellen offenbar, wie früher angekündigt, eine Translations-$M_3$ dar.

**29.** Hiermit ist es uns gelungen, das folgende beachtenswerte [203 Theorem zu beweisen:

**Theorem III. Sind im vierdimensionalen Raume: $z, x_1, x_2, x_3$ drei unendlich ferne Kurven durch die Gleichungen:**

$$\frac{dx_2}{dz} = \omega_{2i}\left(\frac{dx_1}{dz}\right), \quad \frac{dx_3}{dz} = \omega_{3i}\left(\frac{dx_1}{dz}\right) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

**definiert, und schneidet jede dreidimensionale Tangentialebene einer nicht developpabeln Mannigfaltigkeit: $z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ jene unendlich fernen Kurven in drei Punkten, die paarweise zu dem zugehörigen Haupttangentenkegel konjugiert sind, so kann diese Mannigfaltigkeit: $z - \varphi = 0$ immer durch Gleichungen von der Form:**

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_i^{1,2,3} \int \varrho_i(t_i) \cdot \xi_{ki}(t_i) \cdot dt_i \qquad (k = 1, 2, 3), \\ z &= \sum_i^{1,2,3} \int \varrho_i(t_i) \cdot dt_i \end{aligned}$$

**dargestellt werden und ist daher eine Translations-$M_3$. Die drei Größen $\varrho_i(t_i)$ sind ganz beliebige Funktionen ihres Argumentes, dagegen sind die Funktionen $\xi_{ki}(t_i)$ durch die Relationen:**

$$\xi_{2i} = \omega_{2i}(\xi_{1i}), \quad \xi_{3i} = \omega_{3i}(\xi_{1i}) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

**gebunden.**

**Sind die drei unendlich fernen Kurven, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die sechs Funktionen $\omega_{2i}$, $\omega_{3i}$ gegeben, so lassen sich**

**alle $M_3$, die zu diesen drei Kurven in der betreffenden Beziehung stehen, als die gemeinsamen Integral-$M_3$ der drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:**

$$(3') \quad \begin{cases} \xi_{1i}\xi_{1k}r_{11} + \xi_{2i}\xi_{2k}r_{22} + \xi_{3i}\xi_{3k}r_{33} + (\xi_{1i}\xi_{2k} + \xi_{2i}\xi_{1k})r_{12} + \\ \qquad + (\xi_{1i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{1k})r_{13} + (\xi_{2i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{2k})r_{23} = 0 \\ \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k) \end{cases}$$

**definieren, wobei vorausgesetzt wird, daß für die $\xi_{ki}$ diejenigen Funktionen von $p_1, p_2, p_3$ gesetzt werden, die sich durch Auflösung der drei Gleichungen:**

$$1 - p_1\xi_{1i} - p_2\xi_{2i} - p_3\xi_{3i} = 0, \quad \xi_{2i} = \omega_{2i}(\xi_{1i}), \quad \xi_{3i} = \omega_{3i}(\xi_{1i})$$

**ergeben.**

Auch die Entwickelungen dieses Kapitels können nach mehreren [204
Richtungen hin wesentlich verallgemeinert werden.

## Kapitel IV.

### Ausscheidung der trivialen Lösungen unseres Problems.

**30.** Eine krumme Fläche des Raumes: $x, y, z$ hat im allgemeinen $\infty^2$ Tangentialebenen. Hat sie eine geringere Anzahl Tangentialebenen, so ist sie developpabel, das heißt, sie ist von $\infty^1$ Ebenen umhüllt und von $\infty^1$ Geraden erzeugt, unter denen zwei konsekutive einander immer schneiden.

Eine Fläche: $z - f(x, y) = 0$ ist dann und nur dann developpabel, wenn die partiellen Ableitungen erster Ordnung $p$ und $q$ durch eine Relation: $\Phi(p, q) = 0$ gebunden sind, anders ausgesprochen, wenn $z = f$ die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial q}{\partial x} & \dfrac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = rt - s^2$$

erfüllt. Sind $p$ und $q$ insbesondere durch eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten:

$$ap + bq + c = 0$$

verknüpft, so ist die Fläche zylindrisch; sie wird von $\infty^1$ parallelen Geraden erzeugt und von $\infty^1$ Ebenen umhüllt, die einen unendlich fernen Punkt gemein haben.

In einer früheren Arbeit (diese Berichte, 1896, S. 171 [hier Abh. XIII, S. 554]) haben wir gezeigt, daß eine Translationsfläche nur dann



developpabel sein kann, wenn sie eine Zylinderfläche oder eine Ebene ist. In beiden Fällen kann die betreffende Fläche in unendlich vielen Weisen durch Gleichungen von der Form:

$$x = A_1(t_1) + A_2(t_2), \quad y = B_1(t_1) + B_2(t_2), \quad z = C_1(t_1) + C_2(t_2)$$

dargestellt werden.

**31.** Wir wollen nun diese Betrachtungen auf den vierdimensionalen Raum ausdehnen.

Eine $M_3$ des Raumes $z, x_1, x_2, x_3$ hat in jedem Punkte eine dreidimensionale Tangentialebene, deren Gleichung:

$$Z - z - p_1(X_1 - x_1) - p_2(X_2 - x_2) - p_3(X_3 - x_3) = 0$$ [205

wir auf die Form:

$$Z - p_1X_1 - p_2X_2 - p_3X_3 - (z - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3) = 0$$

bringen können. Daher ist es gestattet, die vier Größen:

$$(1) \qquad p_1, p_2, p_3, z - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3$$

als Koordinaten der Tangentialebene aufzufassen.

Hat die $M_3$ dreifach unendlich viele verschiedene Tangentialebenen, so sind die Ebenenkoordinaten (1) nur durch eine Relation gebunden, und diese Gleichung enthält immer die Größe $z - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3$; denn eine Gleichung von der Form:

$$\Omega(p_1, p_2, p_3) = 0$$

definiert wohl $\infty^3$ Ebenen; diese Ebenen umhüllen aber keine $M_3$, sondern eine unendlich ferne, im allgemeinen zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Erfüllt daher eine Mannigfaltigkeit: $z - f(x_1, x_2, x_3) = 0$ eine und nur eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$\Omega(p_1, p_2, p_3) = 0,$$

so besitzt sie nie dreifach unendlich viele, sondern nur zweifach unendlich viele Tangentialebenen; sie läßt sich dementsprechend als Umhüllungsgebilde von zweifach unendlich vielen Ebenen:

$$z - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - b = 0$$

auffassen, deren Parameter durch zwei Relationen von der Form:

$$\Omega(a_1, a_2, a_3) = 0, \quad b - \Phi(a_1, a_2, a_3) = 0$$

gebunden sind. Bestimmt man aber nach den gewöhnlichen Regeln die Umhüllungsfigur dieser $\infty^2$ Ebenen, so sieht man, daß die hervorgehende $M_3$ zweifach unendlich viele Gerade enthält, und daß sie längs jeder Geraden von derselben Tangentialebene berührt wird.

**32.** Es ist leicht, alle diese $M_3$ als Integral-$M_3$ einer gewissen partiellen Differentialgleichung zu definieren. Differentiiert man nämlich die vorgelegte Gleichung: $\Omega(p_1, p_2, p_3) = 0$ nach den $x$, so erhält man durch Elimination die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(2) \qquad 0 = \sum \pm \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} \frac{\partial p_3}{\partial x_3} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = |r_{ik}|, \qquad [206$$

die somit von den besprochenen $M_3$ mit zweifach unendlich vielen Tangentialebenen erfüllt wird.

Stellt man die Frage, ob diese partielle Differentialgleichung noch weitere Integral-$M_3$ besitzt, so ist die Antwort leicht zu geben. Die Theorie der Funktionaldeterminanten zeigt ja, daß die Gleichung (2) in allgemeinster Weise befriedigt wird, wenn $p_1, p_2, p_3$ durch eine oder mehrere endliche Relationen verknüpft sind. Werden die $p$ nur durch eine Relation gebunden, so erhält man die eben besprochenen $M_3$ mit zweifach unendlich vielen Tangentialebenen; sind sie dagegen durch zwei Relationen gebunden, so erhält man alle $M_3$, die nur $\infty^1$ Tangentialebenen besitzen. Erfüllen endlich die $p$ drei unabhängige Relationen, so ist die $M_3$ eben.

Wir fassen alle Integral-$M_3$ der partiellen Differentialgleichung:

$$|r_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

unter der Bezeichnung **developpable** $M_3$ zusammen. Eine developpable $M_3$ hat im allgemeinen $\infty^2$ verschiedene Tangentialebenen. Sie hat nur $\infty^1$ Tangentialebenen, wenn alle zweireihigen Determinanten der Matrix $|r_{ik}|$ verschwinden; sie ist eine Ebene, wenn alle $r_{ik}$ gleich Null sind.

**33.** Wir wollen uns jetzt mit den Haupttangenten einer developpabeln $M_3$ beschäftigen.

Der Haupttangentenkegel einer $M_3$ im Punkte $z, x_1, x_2, x_3$ wird, wie wir schon früher bemerkten, durch die Gleichung:

$$0 = r_{11}dx_1^2 + r_{22}dx_2^2 + r_{33}dx_3^2 + 2r_{12}dx_1dx_2 + 2r_{13}dx_1dx_3 + 2r_{23}dx_2dx_3$$

bestimmt, die in $dx_1, dx_2, dx_3$ homogen und vom zweiten Grade ist. Daher bilden die durch einen Punkt gehenden Haupttangenten, die in der dreidimensionalen Tangentialebene unsrer $M_3$ gelegen sind, im allgemeinen einen irreduzibeln Kegel zweiten Grades. Dieser Kegel artet in ein Ebenenpaar aus, sobald die Determinante $|r_{ik}|$ gleich Null ist, während einige zweireihige Unterdeterminanten von Null verschieden sind. Verschwinden ferner alle zweireihigen Unterdeterminanten, während die [207



$r_{ik}$ selbst nicht sämtlich gleich Null sind, so artet der Kegel in eine doppeltzählende Ebene aus. Sind endlich alle $r_{ik}$ gleich Null, so ist der Kegel der Haupttangenten unbestimmt, und alle Tangenten in dem betreffenden Punkte sind Haupttangenten.

Verbinden wir diese Bemerkungen mit den vorhergehenden Entwickelungen, so erhalten wir den

**Satz 4.** Die Haupttangenten einer Mannigfaltigkeit:

$$z - f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

in einem Punkte von allgemeiner Lage bilden einen irreduzibeln Kegel zweiten Grades, wenn die $M_3$ dreifach unendlich viele verschiedene Tangentialebenen besitzt. Auf einer developpabeln $M_3$ mit $\infty^2$ verschiedenen Tangentialebenen besteht der Haupttangentenkegel aus zwei Ebenen, die nur in Punkten von spezieller Lage zusammenfallen können. Auf einer developpabeln $M_3$ mit nur $\infty^1$ verschiedenen Tangentialebenen artet der Haupttangentenkegel in eine doppeltzählende Ebene aus. Die ebenen $M_3$ sind die einzigen $M_3$, deren sämtliche Tangenten Haupttangenten sind.

**34.** Jetzt können wir alle developpabeln Translations-$M_3$ bestimmen.

Setzen wir zunächst voraus, daß die betreffende $M_3$ zweifach unendlich viele verschiedene Tangentialebenen besitzt. Wählen wir auf einer solchen $M_3$ einen Punkt von allgemeiner Lage, so zerfällt, wie wir eben sahen, der Kegel der Haupttangenten in zwei Ebenen, die $e$ und $\varepsilon$ heißen mögen. Wir wissen andererseits, daß durch den gewählten Punkt eine Kurve aus der Schar $c_1$, eine Kurve $c_2$ und eine Kurve $c_3$ hindurchgehen, sowie, daß die drei Tangenten dieser Kurven paarweise zu dem Kegel der Haupttangenten, das heißt, zu dem Ebenenpaare $e, \varepsilon$ konjugiert sind. Hieraus schließen wir, daß die Schnittlinie der Ebenen $e$ und $\varepsilon$ eine unter den drei besprochenen Kurven: $c_1$, $c_2$ und $c_3$, zum Beispiel die Kurve $c_1$ berührt. Wenn aber der Kegel der Haupttangenten:

$$r_{11}dx_1^2 + r_{22}dx_2^2 + r_{33}dx_3^2 + 2r_{12}dx_1dx_2 + 2r_{13}dx_1dx_3 + 2r_{23}dx_2dx_3 = 0$$

in zwei Ebenen $e$ und $\varepsilon$ zerfällt, dann wird die Richtung der Schnittlinie dieser Ebenen nach den Regeln der projektiven Geometrie durch die Gleichungen:

$$r_{k1}dx_1 + r_{k2}dx_2 + r_{k3}dx_3 = 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \qquad [208$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die unmittelbar integrabeln Gleichungen:

$$dp_1 = 0, \quad dp_2 = 0, \quad dp_3 = 0$$

bestimmt. In dieser Weise ergibt sich, daß die drei Ebenenkoordinaten $p_1, p_2, p_3$, also auch die vierte Ebenenkoordinate $z - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3$ längs jeder $c_1$ konstante Werte haben, daß also unsere Translations-$M_3$ von jeder dreidimensionalen Tangentialebene längs einer $c_1$ berührt wird; die $\infty^2$ Kurven $c_1$ sind somit Gerade und offenbar parallele Gerade, da jede $c_1$ durch eine Translationsbewegung in jede andere $c_1$ übergeführt werden kann.

Besitzt daher eine developpable Translations-$M_3$ zweifach unendlich viele dreidimensionale Tangentialebenen, so sind die $\infty^2$ Geraden, nach denen die Tangentialebenen diese $M_3$ berühren, unter einander parallel.

Bezeichnen wir jede $M_3$, die $\infty^2$ parallele Gerade enthält, als eine zylindrische $M_3$, so können wir unser Ergebnis auch folgendermaßen aussprechen:

**Satz 5.** Besitzt eine developpable Translations-$M_3$ zweifach unendlich viele dreidimensionale Tangentialebenen, so ist sie zylindrisch und wird dementsprechend von $\infty^2$ parallelen Geraden erzeugt.

**35.** Die Gleichungen einer solchen $M_3$ können, wie man leicht einsieht, auf die Form:

$$x_k = b_k t_1 + B_{k2}(t_2) + B_{k3}(t_3), \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$z = c t_1 + C_2(t_2) + C_3(t_3)$$

gebracht werden, wobei $b_1$, $b_2$, $b_3$ und $c$ Konstanten, $t_1$ einen Parameter darstellen. Führt man hier die Größen:

$$\mathfrak{x}_k = x_k - \frac{b_k}{c} z \qquad (k = 1, 2, 3)$$

mit $z$ zusammen als neue Cartesische Koordinaten ein, so nehmen unsere Gleichungen die Gestalt an:

$$\mathfrak{x}_k = \qquad B_{k2}(t_2) + B_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$z = c t_1 + C_2(t_2) + C_3(t_3),$$

es ergibt sich somit, daß unsere $M_3$ durch eine einzige Gleichung [209 von der Form:

$$\Phi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = 0$$

dargestellt wird, und daß diese Gleichung eine Translationsfläche des dreidimensionalen Raumes $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ definiert.

Ist andererseits irgend eine Translationsfläche des dreidimensionalen Raumes $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ vorgelegt, so leuchtet unmittelbar ein, daß sie sich als zylindrische Translations-$M_3$ des vierdimensionalen Raumes $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, z$



auffassen läßt. Ja man kann sogar einen Schritt weiter gehen und nachweisen, daß eine solche Mannigfaltigkeit in unendlich vielen Weisen als Translations-$M_3$ des vierdimensionalen Raumes aufgefaßt werden kann. Sind nämlich:

$$\mathfrak{x}_k = A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

die Gleichungen einer beliebigen Translationsfläche des dreifachen Raumes $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$, so stellen die Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_k = \qquad A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3),$$

welche auch die Funktionen $C_1$, $C_2$ und $C_3$ sein mögen, immer dieselbe zylindrische Translations-$M_3$ des Raumes $z, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ dar.

Hiermit haben wir den Satz:

**Satz 6.** Besitzt eine Translations-$M_3$ des vierfachen Raumes $\infty^2$ und nur $\infty^2$ dreidimensionale Tangentialebenen, so kann sie **in unendlich vielen Weisen** als Translations-$M_3$ aufgefaßt werden.

**36.** Wir werden jetzt alle Translations-$M_3$ des Raumes $x_1, x_2, x_3, z$ bestimmen, die nur einfach unendlich viele Tangentialebenen besitzen.

Eine solche $M_3$ befriedigt die partielle Differentialgleichung:

$$|r_{ik}| = 0,$$

und noch mehr: sie befriedigt alle Gleichungen, die man erhält, wenn man alle zweireihigen Unterdeterminanten von $|r_{ik}|$ gleich Null setzt. Eine solche $M_3$ berührt jede dreidimensionale Tangentialebene in $\infty^2$ Punkten, die jedesmal eine zweidimensionale Ebene $E_2$ bilden, und offenbar enthält die $M_3$ $\infty^1$ solche Ebenen $E_2$.

Der Kegel der Haupttangenten zerfällt andererseits in eine dop- [210 peltzählende zweidimensionale Ebene $e_2$, die nach den Regeln der projektiven Geometrie durch eine beliebige unter den drei äquivalenten Gleichungen:

$$0 = r_{k1}dx_1 + r_{k2}dx_2 + r_{k3}dx_3 = dp_k$$

dargestellt wird. Diese drei Gleichungen sind unmittelbar integrabel; sie zeigen, daß sich die dreidimensionale Tangentialebene unserer $M_3$ gar nicht ändert, wenn sich der Berührungspunkt nach der Richtung einer beliebigen Haupttangente verschiebt. Jede Haupttangente ist somit in ihrer ganzen Ausdehnung in einer unter den $\infty^1$ zweidimensionalen Ebenen $E_2$ gelegen, nach denen die dreidimensionalen Tangentialebenen unsere $M_3$ berühren.

Durch jeden Punkt der $M_3$ geht eine Kurve aus der Schar $c_1$, ferner eine Kurve $c_2$, sowie eine Kurve $c_3$. Die drei Tangenten dieser Kurven müssen dabei ein Polartrieder hinsichtlich des Kegels der Haupttangenten bilden, und da dieser Kegel in eine doppeltzählende Ebene $e_2$ ausartet, die mit einer unter den eben besprochenen $E_2$ identisch ist, sehen wir, daß in jedem Punkte unserer Translations-$M_3$ die hindurchgehende ebene $E_2$ zwei unter den Kurven $c_1$, $c_2$ und $c_3$, zum Beispiel die beiden Kurven $c_1$ und $c_2$ berührt. Hieraus folgt unmittelbar, daß jede $E_2$ einfach unendlich viele Kurven $c_1$ und ebenso $\infty^1$ Kurven $c_2$ enthält. Unsere $M_3$ wird somit durch Translationsbewegung einer $E_2$ erzeugt, und es sind alle $\infty^1$ $E_2$ unter einander parallel.

**37.** Unsere $M_3$ wird also von $\infty^1$ zweidimensionalen ebenen Mannigfaltigkeiten $E_2$ erzeugt, die unter einander parallel sind. Wird eine unter diesen $E_2$ durch die beiden linearen Gleichungen:

$$0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a z + \alpha = A,$$
$$0 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b z + \beta = B$$

bestimmt, so leuchtet unmittelbar ein, daß jede unter den $\infty^1$ dreidimensionalen Tangentialebenen unserer $M_3$ durch eine Gleichung von der Form:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a z + \alpha + \lambda (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b z + \beta) + \mu = 0$$

dargestellt wird, und daß dabei die beiden Parameter $\lambda$ und $\mu$ durch eine Relation:

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0$$ [211

gebunden sind.

Sind andererseits $A = 0$, $B = 0$ zwei ganz beliebige lineare Gleichungen in den Veränderlichen $x_1, x_2, x_3, z$, so ist:

$$A + \lambda B + \mu = 0$$

die analytische Darstellung eines Bündels von $\infty^2$ dreidimensionalen Ebenen, deren gemeinsame Gerade unendlich fern gelegen ist. Stellt man hier zwischen $\lambda$ und $\mu$ eine ganz beliebige Relation: $\Phi(\lambda, \mu) = 0$ fest, so umhüllen die $\infty^1$ hiermit bestimmten dreidimensionalen Ebenen im allgemeinen eine $M_3$.

Diese $M_3$ ist, behaupten wir, immer eine developpable Translations-$M_3$, die nur $\infty^1$ Tangentialebenen besitzt.

**38.** Zum Beweise bemerken wir, daß die von uns konstruierte $M_3$ offenbar immer $\infty^1$ zweidimensionale und parallele Ebenen $E_2$ enthält, und daß sie somit sicher zwei von einander unabhängige infinitesimale Translationen gestattet. Es kann daher die Cartesische Gleichung dieser $M_3$ sicher bei passender Koordinatenwahl auf die Form:

$$\Phi(x_1, x_2) = 0$$



gebracht werden. Diese Gleichung läßt sich aber immer durch zwei Gleichungen:

$$x_1 = B_1(t_1), \quad x_2 = B_2(t_1)$$

ersetzen, die $x_1$ und $x_2$ als Funktionen eines Parameters ausdrücken.

Es liefern daher die Gleichungen:

$$x_1 = B_1(t_1), \qquad x_2 = B_2(t_1),$$
$$x_3 = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3),$$
$$z = D_1(t_1) + D_2(t_2) + D_3(t_3),$$

welche Form auch die Funktionen $C_k(t_k)$ und $D_i(t_i)$ haben mögen, immer eine analytische Darstellung unserer $M_3$, die somit in unendlich vielen Weisen als Translations-$M_3$ aufgefaßt werden kann.

**39.** Die hiermit erhaltenen Ergebnisse über developpable Translations-$M_3$ fassen wir zu dem folgenden Theoreme zusammen:

**Theorem IV. Ist eine Translations-$M_3$ des Raumes $z, x_1, x_2, x_3$ developpabel, so kann sie immer auf unendlich viele Weisen als Translations-$M_3$ aufgefaßt werden.**

**Hat sie zweifach unendlich viele dreidimensionale Tangential-** [212 **ebenen, so enthält sie $\infty^2$ parallele Gerade; sie wird daher nach passender Koordinatenwahl durch eine Gleichung:**

$$\Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = 0$$

**in drei Veränderlichen dargestellt, und diese Gleichung definiert immer eine Translationsfläche des dreifachen Raumes $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$.**

**Hat dagegen eine vorgelegte developpable Translations-$M_3$ nur einfach unendlich viele dreidimensionale Tangentialebenen, so kann sie nach einer passenden orthogonalen Transformation durch eine Gleichung:**

$$W(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = 0$$

**dargestellt werden, die nur zwei Koordinaten enthält.**

Die hier vorgetragenen Entwickelungen über developpable Translations-$M_3$ werden uns jetzt gestatten, nachzuweisen, daß mehrere Fälle, die sich bei der Erledigung unseres allgemeinen Problems darbieten, in dem Sinne trivial sind, daß sie nur auf developpable Translations-$M_3$ führen, die wir unmittelbar angeben können.

Mit den Entwickelungen dieses Kapitels ist es eben unsere Absicht, triviale Lösungen unseres Problems auszuscheiden.

**40.** Wir wollen annehmen, daß eine $M_3$ sowohl durch die Gleichungen:

$$x_k = \sum_i^{1,2,3} A_{ki}(t_i), \quad z = \sum_i^{1,2,3} C_i(t_i),$$

wie durch die Gleichungen:

$$x_k = \sum_i^{1,2,3} \mathsf{A}_{ki}(\tau_i), \quad z = \sum_i^{1,2,3} \Gamma_i(\tau_i)$$

dargestellt werden kann, und daß nicht jedes $\tau_i$ nur von einem $t$ abhängt.

Es liegt in der Natur der Sache, daß zwischen den drei ersten Parametern $t_1, t_2, t_3$ und den drei letzten Parametern $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ drei Relationen bestehen, die sowohl nach den $t$ wie nach den $\tau$ auflösbar sind.

Wie früher bezeichnen wir die Kurven: $t_i = a_i$, $t_k = a_k$ mit $c_j$, [213
dabei vorausgesetzt, daß $i, k, j$ eine beliebige Permutation der Zahlen $1, 2, 3$ darstellt. Dementsprechend bezeichnen wir die Kurven:

$$\tau_2 = b_2, \quad \tau_3 = b_3$$

mit $\varkappa_1$, die Kurven:

$$\tau_3 = b_3, \quad \tau_1 = b_1$$

mit $\varkappa_2$, und endlich die Kurven:

$$\tau_1 = b_1, \quad \tau_2 = b_2$$

mit $\varkappa_3$.

Auf unserer $M_3$ liegen somit sechs ausgezeichnete Kurvenscharen, nämlich die Kurven: $c_1, c_2, c_3, \varkappa_1, \varkappa_2$ und $\varkappa_3$. Jede Schar besteht aus $\infty^2$ kongruenten und gleichgestellten Kurven, und durch jeden nichtsingulären Punkt der $M_3$ geht eine Kurve aus jeder Schar. Ziehen wir nun in einem Punkte der $M_3$ die sechs hindurchgehenden Kurven, so bilden die Tangenten der drei Kurven $c_1, c_2, c_3$ nach einer früheren Bemerkung ein Polartriëder des Haupttangentenkegels; dementsprechend bilden auch die drei Tangenten der Kurven $\varkappa_1, \varkappa_2$ und $\varkappa_3$ ein Polartriëder desselben Kegels.

Die verschiedenen Fälle, die sich bei der Behandlung unseres Problems darbieten, lassen sich am besten durch die gegenseitige Lage dieser beiden Polartriëder charakterisieren. Daß diese Polartriëder verschieden sind, ist sicher, denn sonst würde jeder Parameter $\tau_i$ nur von einem $t_\varkappa$ abhängen, und dieser triviale Fall wurde von vornherein ausgeschlossen.

**41.** Jedes unter den beiden Polartriëdern hat drei Kanten und drei Ebenen. Es ist nun denkbar, daß diese Triëder eine allgemeine gegenseitige Lage haben, das heißt, daß keine Kante (beziehungsweise Ebene) des einen Triëders mit einer Kante (beziehungsweise einer Ebene) des



andern Triëders identisch ist, und daß andererseits keine Kante des einen Triëders in eine Ebene des andern Triëders hineinfällt. Die beiden Polartriëder können aber auch eine spezielle gegenseitige Lage haben, indem Kanten (beziehungsweise Ebenen) des einen Triëders mit Kanten (beziehungsweise Ebenen) des andern Triëders zusammenfallen, oder eine Kante des einen Triëders in eine Ebene des andern hineinfällt. Wir werden der Reihe nach alle speziellen gegenseitigen Lagen der beiden Triëder betrachten und die zugehörigen Translations-$M_3$ suchen.

Indem wir uns auf unsere Bestimmung derjenigen Flächen [214
des dreifachen Raumes stützen, die in mehrfacher Weise als Translationsflächen aufgefaßt werden können, gelingt es uns, ohne weiteres alle Translations-$M_3$ zu bestimmen, auf denen die beiden Polartriëder eine spezielle gegenseitige Lage haben.

Sodann nehmen wir in den folgenden Kapiteln den allgemeinen Fall unseres Problems in Angriff, das heißt, wir setzen voraus, daß die beiden oben besprochenen Polartriëder eine allgemeine gegenseitige Lage haben.

Es ist nicht schwer zu sehen, daß das Abelsche Theorem, angewandt auf die allgemeine Schnittkurve einer Fläche zweiten Grades mit einer Fläche dritten Grades, uns Lösungen unseres Problems liefert, die dieser Hypothese entsprechen. Durch Betrachtungen und Rechnungen, die recht ausführlich sind, aber doch ein bedeutendes Interesse darbieten, gelingt es uns, nachzuweisen, daß wir in dieser Weise alle fehlenden Lösungen unseres Problems erhalten.

Dabei ist es allerdings notwendig, ebensowohl die reduzibeln, wie die irreduzibeln Schnittkurven zwischen Flächen zweiten und dritten Grades zu berücksichtigen. Wir können das tun, denn bei seinem Beweise des Abelschen Theorems setzte der große Bahnbrecher keineswegs voraus, daß die betreffenden algebraischen Relationen irreduzibel sind. Wir heben das hervor, da sich Abels Nachfolger wohl kaum mit dem Abelschen Theoreme, angewandt auf reduzible algebraische Relationen, näher beschäftigt haben.

**42.** Setzen wir zunächst voraus, daß die Kante $dt_2 = 0$, $dt_3 = 0$ mit der Kante $d\tau_2 = 0$, $d\tau_3 = 0$ zusammenfällt, während die vier anderen Kanten der beiden Polartriëder unter einander verschieden sind. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn $\tau_2$ und $\tau_3$ nur von $t_2$ und $t_3$ abhängen:

$$\tau_2 = \varphi_2(t_2, t_3), \quad \tau_3 = \varphi_3(t_2, t_3),$$

während $\tau_1$ selbstverständlich nicht von $t_1$ unabhängig sein kann. Dieser Fall läßt sich auch dadurch charakterisieren, daß für jeden Punkt der $M_3$ die hindurchgehende Kurve $c_1$ mit der hindurchgehenden Kurve $\varkappa_1$ identisch ist.

Bei der Diskussion dieses Falles können wir von den developpabeln $M_3$ absehen; denn wir kennen ja alle developpabeln Translations-$M_3$ und wissen überdies, daß jede derartige $M_3$ in unendlich vielen [215
Weisen als Translations-$M_3$ aufgefaßt werden kann.

Wenn aber der Haupttangentenkegel irreduzibel ist, und die Kante: $dt_2 = 0$, $dt_3 = 0$ des einen Polartriëders mit einer Kante: $d\tau_2 = 0$, $d\tau_3 = 0$ des zweiten Triëders zusammenfällt, so fallen auch die beiden entgegenstehenden Ebenen unserer Polartriëder, also die Ebenen: $dt_1 = 0$ und $d\tau_1 = 0$ zusammen; dann aber ist die Schar der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten $t_1 = \text{Const.}$ mit der Schar der Mannigfaltigkeiten $\tau_1 = \text{Const.}$ identisch, und eine jede unter diesen $\infty^1$ Mannigfaltigkeiten enthält nicht allein $\infty^1$ Kurven $c_2$ und $\infty^1$ Kurven $c_3$, sondern auch $\infty^1$ Kurven $\varkappa_2$, sowie $\infty^1$ Kurven $\varkappa_3$. Unsere $M_3$ zerfällt somit in $\infty^1$ zweidimensionale $M_2$, die unter einander kongruent und gleichgestellt sind, und deren jede in vier verschiedenen Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden kann.

Nach den Entwickelungen des ersten Kapitels ist aber jede derartige $M_2$ in einem ebenen dreidimensionalen Raume enthalten; und wir finden daher die allgemeinste $M_3$ mit den verlangten Eigenschaften, wenn wir im dreifachen Raume: $x_1, x_2, x_3, z = 0$ irgend eine nicht developpable Fläche nehmen, die in zweifacher Weise als Translationsfläche aufgefaßt werden kann und etwa die beiden Darstellungen:

$$x_k = A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{3}$$

und:

$$x_k = \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{4}$$

zuläßt. Betrachten wir diese Translationsfläche als eine Mannigfaltigkeit des vierfachen Raumes $x_1, x_2, x_3, z$ — was wir dadurch zum Ausdruck bringen können, daß wir sowohl zu dem Gleichungssysteme (3), wie zu dem Systeme (4) die Gleichung: $z = 0$ hinzufügen —, so können wir dieser $M_2$ dadurch $\infty^1$ verschiedene Lagen im vierfachen Raume erteilen, daß wir auf sie nach und nach einfach unendlich viele Translationsbewegungen des vierfachen Raumes ausüben. Die hiermit erhaltenen einfach unendlich vielen Mannigfaltigkeiten $M_2$ erzeugen eo ipso im vierfachen Raume eine $M_3$, die sowohl die Darstellung:

$$z = C_1(t_1), \quad x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k - 1, 2, 3),$$

wie die Darstellung:

$$z = C_1(\tau_1), \quad x_k = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3)$$ [216

zuläßt.



Die hiermit gefundene $M_3$ besitzt die verlangten Eigenschaften, und sie ist zugleich die allgemeinste $M_3$, die unsere speziellen Forderungen erfüllt. Es ist dabei wohl zu beachten, daß die vier Funktionen $C_1(t_1)$, $A_{k1}(t_1)$ gar keiner Beschränkung unterworfen sind, während die zwölf Funktionen $A_{k2}$, $A_{k3}$, $\mathsf{A}_{k2}$ und $\mathsf{A}_{k3}$ Abelsche Integrale sind, deren Klassenzahl $p$ gleich oder kleiner als drei ist.

**43.** Fallen die beiden Kanten $dt_1 = dt_2 = 0$ und $dt_1 = dt_3 = 0$ des einen Polartriëders mit den beiden Kanten $d\tau_1 = d\tau_2 = 0$ und $d\tau_1 = d\tau_3 = 0$ des andern Triëders zusammen, so besteht der Haupttangentenkegel entweder aus einem Ebenenpaare, oder aus einer doppeltzählenden Ebene. In beiden Fällen ist die $M_3$ developpabel und infolgedessen zylindrisch; sie kann überdies nach unseren früheren Untersuchungen in unendlich vielen Weisen als Translations-$M_3$ des vierfachen Raumes aufgefaßt werden.

**44.** Sodann nehmen wir an, daß unsere beiden Polartriëder keine gemeinsame Kante haben, während sie eine, und dann auch nur eine gemeinsame Ebene besitzen, die etwa durch: $dt_1 = 0$ und gleichzeitig durch: $d\tau_1 = 0$ dargestellt werden möge. In diesem Falle artet der Haupttangentenkegel in eine doppeltzählende Ebene aus, und die Gleichung der $M_3$ kann daher die Form:

$$\Phi(x_1, x_2) = 0$$

erhalten. Derartige $M_3$ können immer in unendlich vielen Weisen als Translations-$M_3$ aufgefaßt werden, wie früher gezeigt wurde.

**45.** Endlich wollen wir annehmen, daß die beiden Polartriëder verschiedene Kanten und Ebenen haben, daß aber eine Kante des einen Triëders in eine Ebene des andern Polartriëders hineinfällt.

Ist zum Beispiel die Kante: $dt_1 = 0$, $dt_2 = 0$ in der Ebene: $d\tau_1 = 0$ gelegen, so enthält jede Mannigfaltigkeit: $\tau_1 = \text{Const.}$ nicht allein $\infty^1$ Kurven $\varkappa_2$ und $\infty^1$ Kurven $\varkappa_3$, sondern zugleich $\infty^1$ Kurven $c_3$; das heißt aber, daß jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\tau_1 = \text{Const.}$ in **drei** verschiedenen Weisen durch Translationsbewegung einer Kurve er- [217
zeugt werden kann. Nach den Entwickelungen des ersten Kapitels sind daher zwei Fälle möglich.

Es ist denkbar, daß jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit: $\tau_1 = \text{Const.}$ in einer dreidimensionalen Ebene enthalten ist, und überdies in vier verschiedenen Weisen durch Translation einer Kurve erzeugt werden kann; diese Hypothese gibt uns offenbar nur solche $M_3$, die wir schon früher gefunden haben.

Die andere Möglichkeit, die wir berücksichtigen müssen, besteht darin, daß jede Mannigfaltigkeit: $\tau_1 = \text{Const.}$ einfach unendlich viele parallele

Gerade enthält. Die $M_3$ wird also dadurch erzeugt, daß eine zylindrische, zweidimensionale Mannigfaltigkeit des Raumes $z, x_1, x_2, x_3$ in Translationsbewegung geführt wird. Eine in dieser Weise erzeugte Translations-$M_3$ ist offenbar selbst zylindrisch und kann daher in unendlich vielen Weisen als Translations-$M_3$ aufgefaßt werden. Alle derartigen $M_3$ sind aber schon früher (Theorem IV) bestimmt.

**46.** Wir wollen nun unsere bisherigen Resultate zusammenfassen. Um das in übersichtlicher Weise machen zu können, erscheint es zweckmäßig, zunächst die verschiedenen Hypothesen, die wir nach und nach betrachtet und erledigt haben, analytisch zu formulieren.

Eine Kante des ersten Polartriëders fällt mit einer Kante des zweiten Polartriëders zusammen, wenn zwei unter den Größen $\tau$, etwa $\tau_1$ und $\tau_2$, nur von zwei Größen $t$, etwa $t_1$ und $t_2$, abhängen. Bestehen zum Beispiel Gleichungen von der Form:

$$\tau_1 = \Theta_1(t_1, t_2), \quad \tau_2 = \Theta_2(t_1, t_2),$$

so ist jede Kurve $t_1 = a$, $t_2 = b$ identisch mit der Kurve: $\tau_1 = \Theta_1(a, b)$, $\tau_2 = \Theta_2(a, b)$, das heißt, jede Kurve $c_3$ ist gleichzeitig eine Kurve $\varkappa_3$. Ist andererseits eine Ebene des ersten Polartriëders, etwa die Ebene $dt_1 = 0$, mit einer Ebene des zweiten Polartriëders, etwa der Ebene $d\tau_1 = 0$, identisch, so ist $\tau_1$ eine Funktion von $t_1$ allein. Fällt endlich die Kante $dt_1 = 0$, $dt_2 = 0$ des ersten Triëders in die Ebene $d\tau_1 = 0$ des zweiten Triëders hinein, so hängt $\tau_1$, wie wir früher sahen, nur von $t_1$ und $t_2$ ab.

Alle unsere speziellen Voraussetzungen kommen somit darauf hinaus, daß jedenfalls eines unter den drei $\tau$ nur von zwei $t$, oder gar von einem einzigen $t$ abhängt. Und umgekehrt ist leicht zu sehen, daß wir jedesmal, wenn ein $\tau$ nur von einem $t$, oder nur von zwei $t$ abhängt, auf [218
einen Fall geführt werden, den wir schon erledigt haben. Ist nämlich zum Beispiel:

$$\tau_1 = \Theta(t_1, t_2),$$

so fällt die Kante $dt_1 = 0$, $dt_2 = 0$ des einen Polartriëders in die Ebene $d\tau_1 = 0$ des anderen Polartriëders hinein, und dieser Schluß bleibt auch dann gültig, wenn $\Theta$ nur eine Größe $t_k$ enthält.

**47.** Wir können daher unsere Ergebnisse in der folgenden übersichtlichen Weise zusammenfassen:

**Theorem V. Erhalten die Gleichungen:**

$$\begin{aligned} x_k &= A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3), \\ z &= C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3) \end{aligned}$$



**einer Translations-$M_3$ durch Einführung neuer Parameter:**

$$\tau_i = \psi_i(t_1, t_2, t_3) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

**wiederum die charakteristische Form:**

$$\begin{aligned} x_k &= \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3), \\ z &= \Gamma_1(\tau_1) + \Gamma_2(\tau_2) + \Gamma_3(\tau_3), \end{aligned}$$

**so sind drei wesentlich verschiedene Fälle möglich.**

**Der erste Fall, der dadurch charakterisiert wird, daß jedes $\tau_i$ nur von einem $t$ abhängt, ist, wie früher hervorgehoben, insofern trivial, als die Funktionen $A_{ki}(t_i)$ und $C_j(t_j)$ in diesem Falle gar keiner Beschränkung unterworfen sind.**

**Der zweite Fall wird dadurch charakterisiert, daß die neun Ableitungen $\partial\tau_i : \partial t_k$ nicht sämtlich von Null verschieden sind. Sehen wir von den früher bestimmten zylindrischen $M_3$ ab, die jedesmal in unendlich vielen Weisen als Translations-$M_3$ aufgefaßt werden können, so erhalten wir alle hierher gehörigen Translations-$M_3$ in der folgenden Weise:**

**Wir nehmen im dreifachen Raume $x_1, x_2, x_3, z = 0$ eine Fläche, die in mehrfacher Weise als Translationsfläche aufgefaßt werden kann, und erteilen sodann dieser Fläche, die wir als eine Mannigfaltigkeit des vierfachen Raumes $z, x_1, x_2, x_3$ auffassen, einfach unendlich viele Lagen im vierfachen Raume, die unter einander [219
kongruent und gleichgestellt sind. Diese $\infty^1$ zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten erzeugen die allgemeinste Translations-$M_3$, die unsere Forderungen erfüllt.**

**Der dritte und interessanteste Fall, der allerdings ungleich weniger $M_3$ liefert, wird dadurch charakterisiert, daß die neun Ableitungen $\partial\tau_i : \partial t_k$ sämtlich von Null verschieden sind. Die hierher gehörigen $M_3$ werden, wie wir später zeigen, sämtlich durch eine passende Deutung des Abelschen Theorems gefunden.**

## Kapitel V.

### Analytische Formulierung des reduzierten Problems.

**48.** In den vorhergehenden Kapiteln fanden wir gewisse Translations-$M_3$, die in mehreren Weisen durch Gleichungen von der kanonischen Form:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) & (k = 1, 2, 3), \\ z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3) \end{cases}$$

definiert werden können; in jedem einzelnen Falle war es also möglich, statt der ursprünglichen Parameter $t_1, t_2, t_3$ solche neue Parameter:

$$\tau_i = \varphi_i(t_1, t_2, t_3) \qquad (i=1,2,3)$$

einzuführen, daß die neue Darstellung der betreffenden $M_3$:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_k = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) & (k=1,2,3), \\ z = \Gamma_1(\tau_1) + \Gamma_2(\tau_2) + \Gamma_3(\tau_3) \end{cases}$$

wiederum die kanonische Form besaß. Charakteristisch für diese von uns schon gefundenen Translations-$M_3$, deren Gleichungen in mehreren Weisen die betreffende kanonische Form erhalten können, war es, daß sich jedesmal unter den drei Gleichungen $\tau_i = \varphi_i(t_1, t_2, t_3)$ mindestens eine vorfand, die nicht alle drei Parameter $t_1$, $t_2$ und $t_3$ enthielt.

Wollen wir daher das in dieser Abhandlung gestellte allgemeine Problem vollständig erledigen, und wünschen wir insbesondere, die noch fehlenden Lösungen direkt und für sich zu finden, so müssen wir [220 von vornherein festsetzen, daß jede Gleichung: $\tau_i = \varphi_i(t_1, t_2, t_3)$ alle drei Parameter $t_1$, $t_2$ und $t_3$ enthalten soll.

Von jetzt ab wollen wir daher an dieser Annahme festhalten, die sich nach unseren früheren Auseinandersetzungen damit deckt, daß die beiden Polartriëder des Haupttangentenkegels, die durch die beiden Gleichungssysteme:

$$dt_1 = 0, \quad dt_2 = 0, \quad dt_3 = 0$$

und:

$$d\tau_1 = 0, \quad d\tau_2 = 0, \quad d\tau_3 = 0$$

definiert werden, eine allgemeine gegenseitige Lage haben sollen.

**49.** Setzen wir nun wie früher:

$$\frac{\partial x_k}{\partial t_i} : \frac{\partial z}{\partial t_i} = \xi_{ki} \qquad (k=1,2,3;\ i=1,2,3)$$

und definieren wir dementsprechend durch die beiden Gleichungen:

$$\xi_{2i} = \omega_{2i}(\xi_{1i}), \quad \xi_{3i} = \omega_{3i}(\xi_{1i}) \qquad (i=1,2,3)$$

die gemeinsame unendlich ferne Kurve $K_i$ der Developpabeln aller Kurven $c_i$, so befriedigt die gesuchte $M_3$, wie wir früher sahen, die drei linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi_{1i}\xi_{1k}r_{11} + \xi_{2i}\xi_{2k}r_{22} + \xi_{3i}\xi_{3k}r_{33} + (\xi_{1i}\xi_{2k} + \xi_{2i}\xi_{1k})r_{12} + \\ \qquad + (\xi_{1i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{1k})r_{13} + (\xi_{2i}\xi_{3k} + \xi_{3i}\xi_{2k})r_{23} = 0 \\ \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k), \end{cases}$$



in denen die $\xi$ durch diejenigen Funktionen von $p_1, p_2, p_3$ zu ersetzen sind, die durch Auflösung der Gleichungen:

$$1 - p_1\xi_{1i} - p_2\xi_{2i} - p_3\xi_{3i} = 0,$$
$$\xi_{2i} - \omega_{2i}(\xi_{1i}) = 0, \quad \xi_{3i} - \omega_{3i}(\xi_{1i}) = 0$$

gefunden werden.

Setzen wir andererseits:

$$\frac{\partial x_k}{\partial \tau_i} : \frac{\partial z}{\partial \tau_i} = \xi_{k,\,i+3} \qquad (k, i = 1, 2, 3)$$

und betrachten dementsprechend das Gleichungssystem:

$$\xi_{2,\,i+3} = \omega_{2,\,i+3}(\xi_{1,\,i+3}), \quad \xi_{3,\,i+3} = \omega_{3,\,i+3}(\xi_{1,\,i+3}) \qquad (i=1,2,3)$$

als analytische Definition der unendlich fernen Kurve $\mathsf{K}_i$, die auf allen Developpabeln der Kurven $\varkappa_i$ gelegen ist, so erhalten wir zur Bestimmung der gesuchten $M_3$ drei neue lineare partielle Differentialgleichungen, [221 wenn wir in die Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi_{1\alpha}\xi_{1\beta}r_{11} + \xi_{2\alpha}\xi_{2\beta}r_{22} + \xi_{3\alpha}\xi_{3\beta}r_{33} + (\xi_{1\alpha}\xi_{2\beta} + \xi_{2\alpha}\xi_{1\beta})r_{12} + \\ \qquad + (\xi_{1\alpha}\xi_{3\beta} + \xi_{3\alpha}\xi_{1\beta})r_{13} + (\xi_{2\alpha}\xi_{3\beta} + \xi_{3\alpha}\xi_{2\beta})r_{23} = 0 \\ \qquad\qquad (\alpha, \beta = 4, 5, 6;\ \alpha \neq \beta) \end{cases}$$

für die $\xi$ diejenigen Funktionen von $p_1, p_2, p_3$ eintragen, die sich durch Auflösung der Gleichungen:

$$1 - p_1\xi_{1j} - p_2\xi_{2j} - p_3\xi_{3j} = 0,$$
$$\xi_{2j} - \omega_{2j}(\xi_{1j}) = 0, \quad \xi_{3j} - \omega_{3j}(\xi_{1j}) = 0$$
$$(j = 4, 5, 6)$$

ergeben.

**50.** Wir sehen also, daß die gesuchten $M_3$ sechs partielle Differentialgleichungen befriedigen, die wir allerdings erst dann aufstellen können, wenn wir die sechs unendlich fernen Kurven:

$$K_1, K_2, K_3, \mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3$$

schon kennen. Diese sechs Differentialgleichungen sind linear und homogen in den sechs Ableitungen zweiter Ordnung:

$$r_{11}, r_{22}, r_{33}, r_{12}, r_{13}, r_{23}.$$

Sehen wir daher von den ebenen $M_3$ ab, für welche alle $r_{ik}$ verschwinden, so dürfen wir behaupten, daß die Determinante, die von den Koeffizienten der $r_{ik}$ gebildet wird, gleich Null sein muß.

Die hiermit gefundene Bedingungsgleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} \xi_{11}\xi_{12} & \xi_{21}\xi_{22} & \xi_{31}\xi_{32} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{11}\xi_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{12}\xi_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{15}\xi_{16} & \xi_{25}\xi_{26} & \xi_{35}\xi_{36} & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \equiv D(\xi),$$

die zwischen den achzehn Größen $\xi_{i\nu}$ stattfindet, kann leicht gedeutet werden, und das sogar in zwei Weisen, die allerdings nur formal verschieden sind.

**51.** Deuten wir die Größen: [222

$$\xi_{1i},\ \xi_{2i},\ \xi_{3i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

als Bestimmungsstücke der Tangente, die wir in einem Punkte unsrer $M_3$ an die hindurchgehende Kurve $c_i$ gezogen haben, und betrachten wir dementsprechend die Größen:

$$\xi_{1,\,j+3},\ \xi_{2,\,j+3},\ \xi_{3,\,j+3} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

als Bestimmungsstücke der Tangente in demselben Punkte an die hindurchgehende Kurve $\varkappa_j$, so besagt die gefundene Gleichung: $D(\xi) = 0$, daß unsere sechs Tangenten der Kurven $c_i$ und $\varkappa_j$ auf einem Kegel zweiten Grades liegen. Und nach einem bekannten Satze der projektiven Geometrie folgt dies in der Tat unmittelbar daraus, daß sich diese sechs Tangenten als die Kanten zweier Polartrieder des Haupttangentenkegels auffassen lassen.

**52.** Deuten wir andererseits die Größen $\xi_{1i}$, $\xi_{2i}$, $\xi_{3i}$ als Koordinaten des unendlich fernen Punktes auf der oben besprochenen Tangente unserer Kurve $c_i$, und betrachten wir dementsprechend die Größen $\xi_{1,\,j+3}$, $\xi_{2,\,j+3}$, $\xi_{3,\,j+3}$ als Koordinaten des unendlich fernen Punktes auf der Tangente der Kurve $\varkappa_j$, so besagt die Gleichung: $D(\xi) = 0$, daß die sechs Tangenten, die wir in einem Punkte unserer $M_3$ an die hindurchgehenden Kurven $c_1, c_2, c_3, \varkappa_1, \varkappa_2$ und $\varkappa_3$ gezogen haben, die unendlich ferne Mannigfaltigkeit $U_3$ in sechs Punkten treffen, die auf einem Kegelschnitte gelegen sind. Beachten wir dabei, daß diese sechs Punkte auf je einer unter den sechs unendlich fernen Kurven $K_1$, $K_2$, $K_3$, $\mathsf{K}_1$, $\mathsf{K}_2$ und $\mathsf{K}_3$ liegen, und daß sie andererseits in einer dreidimensionalen Tangentialebene unserer $M_3$ enthalten sind, so sehen wir, daß jede dreidimensionale Tangentialebene unserer $M_3$ die sechs unendlich fernen Kurven $K_i$ und $\mathsf{K}_j$ in sechs Punkten schneidet, die auf einem Kegelschnitte liegen. Und da durch jede zweidimensionale Ebene der unendlich fernen Mannigfaltigkeit $U_3$ eine dreidimensionale Tangentialebene an unsere (nicht developpable) $M_3$ gelegt werden kann, zeigt das Verschwinden der Determinante $D(\xi)$, daß die sechs Kurven $K_i$ und $\mathsf{K}_j$ des dreifachen ebenen Raumes $U_3$ jede Ebene dieses Raumes in sechs Punkten treffen, die auf einem Kegelschnitte liegen.



**53.** Die hiermit gefundene Deutung der Gleichung: $D(\xi) = 0$ soll uns zunächst zu einem schönen geometrischen Satze führen.

Wir wollen annehmen, daß im gewöhnlichen dreifachen Raume [223 $x, y, z$ sechs Kurven $C_1$, $C_2$, ..., $C_6$ vorliegen, die jede Ebene dieses Raumes in sechs Punkten treffen, die auf einem Kegelschnitte liegen. Wir behaupten und werden beweisen, daß dann unsere sechs Kurven $C_1$, $C_2$, ..., $C_6$ auf einer Fläche zweiten Grades gelegen sind.

Bezeichnen wir die Koordinaten eines laufenden Punktes der Kurve $C_1$ mit $x_1, y_1, z_1$, und überhaupt die Koordinaten eines laufenden Punktes der Kurve $C_i$ mit $x_i$, $y_i$, $z_i$, so sind die achzehn Größen:

$$x_i,\ y_i,\ z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

durch vier Gleichungen verbunden, unter denen drei die Form:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_k & y_k & z_k & 1 \end{vmatrix} \equiv \varDelta_k \qquad (k = 4, 5, 6)$$

besitzen und nur aussagen, daß die sechs Punkte in einer Ebene enthalten sind, während die vierte Gleichung etwa auf die Form:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 y_1 & x_1 z_1 & y_1 z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6 y_6 & x_6 z_6 & y_6 z_6 \end{vmatrix} \equiv D(x)$$

gebracht werden kann. Diese letzte Gleichung besagt, daß unsere sechs Punkte auf einem Kegel zweiten Grades liegen und daß sie somit auf der Schnittkurve dieses Kegels mit einer Ebene, das heißt, auf einem Kegelschnitte gelegen sind.

**54.** Aus den vier hiermit gefundenen Gleichungen leiten wir jetzt durch Differentiation neue Relationen ab, in die neben den achzehn Größen $x_i$, $y_i$, $z_i$ noch die Ableitungen:

$$\frac{dy_i}{dx_i} = y_i', \quad \frac{dz_i}{dx_i} = z_i', \quad \frac{d^2 y_i}{dx_i^2} = y_i'', \ldots$$

eingehen.

Denken wir uns, daß die sechs Kurven $C_1, \ldots, C_6$ schon vorliegen, daß also $y_i$ und $z_i$ gegebene Funktionen von $x_i$ sind, so erkennen wir leicht, daß wir $x_1, x_2$ und $x_3$ als unabhängige Veränderliche und alle [224
übrigen Größen als Funktionen dieser unabhängigen Veränderlichen betrachten können.

Wenn wir nämlich $x_1$ einen bestimmten Wert erteilen, so werden auch $y_1$ und $z_1$ und gleichzeitig ein gewisser Punkt der Kurve $K_1$ bestimmt. Erteilen wir daher sowohl $x_1$, wie $x_2$ und $x_3$ bestimmte Werte, so greifen wir faktisch auf jeder unter den drei Kurven $C_1$, $C_2$ und $C_3$ einen Punkt heraus. Legen wir aber durch die drei hiermit gefundenen Punkte eine Ebene, so schneidet diese jede unter den drei übrigen Kurven: $C_4$, $C_5$ und $C_6$ in einem bestimmten Punkte, dessen Koordinaten somit als Funktionen von $x_1$, $x_2$, $x_3$ aufgefaßt werden können.

**55.** Differentiieren wir zunächst die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \varDelta_4$$

nach $x_1$ und betrachten dabei $x_1$, $x_2$, $x_3$ als unabhängige Veränderliche, so bestimmt die hervorgehende Gleichung:

$$0 = \frac{\partial \varDelta_4}{\partial x_1} + \frac{\partial \varDelta_4}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \varDelta_4}{\partial z_1} z_1' + \left\{ \frac{\partial \varDelta_4}{\partial x_4} + \frac{\partial \varDelta_4}{\partial y_4} y_4' + \frac{\partial \varDelta_4}{\partial z_4} z_4' \right\} \frac{\partial x_4}{\partial x_1}$$

die partielle Ableitung der Größe $x_4$ nach $x_1$ als Funktion der Größen:

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\ y_1',\ z_1',\ y_4',\ z_4' \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

In entsprechender Weise gelingt es uns, alle neun Ableitungen der Größen $x_4$, $x_5$ und $x_6$ nach $x_1$, $x_2$ und $x_3$ zu bestimmen.

Differentiieren wir sodann die Gleichung $D(x) = 0$ sukzessive nach $x_1$, $x_2$ und $x_3$, so erhalten wir drei Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial D}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial D}{\partial z_i} z_i' + \sum_j^{4,5,6} \left( \frac{\partial D}{\partial x_j} + \frac{\partial D}{\partial y_j} y_j' + \frac{\partial D}{\partial z_j} z_j' \right) \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

die, mit den neun vorhergehenden Gleichungen verbunden, drei Relationen liefern, die zwischen den achzehn Größen $x_i, y_i, z_i$ und den zwölf Größen $y_i', z_i'$ stattfinden.

**56.** Es ist nicht schwer, sich den begrifflichen Sinn dieser drei [225
Gleichungen klar zu machen.

Wählen wir im Raume $x, y, z$ eine beliebige Ebene und in dieser Ebene sechs Punkte: $x_i, y_i, z_i$, die auf einem Kegelschnitte liegen, und



ziehen wir überdies in jedem unter den drei Punkten: $x_4, y_4, z_4$; $x_5, y_5, z_5$; $x_6, y_6, z_6$ eine Gerade mit den Richtungskoeffizienten:

$$1,\ y_i',\ z_i' \qquad (i = 4, 5, 6),$$

so gibt es nach den Theorien der projektiven Geometrie einfach unendlich viele Flächen zweiten Grades, die unseren Kegelschnitt enthalten und überdies jene drei Geraden, jede in deren Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte, berühren.

Diese $\infty^1$ Flächen zweiten Grades enthalten einen gemeinsamen Kegelschnitt und berühren einander in drei verschiedenen Punkten dieser Kurve. Dann aber können wir schließen, daß diese Flächen ein Büschel bilden, daß sie einander längs des gemeinsamen Kegelschnittes berühren und daß sie daher [auch] in jedem unter den drei Punkten:

$$x_j,\ y_j,\ z_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

dieselbe Tangentialebene haben.

Es erfüllen also die Größen:

$$y_j' \text{ und } z_i' \qquad (j = 1, 2, 3)$$

für jedes $j$ eine lineare Relation:

$$(4') \qquad 0 = \lambda_j y_j' + \mu_j z_j' + \nu_j \equiv W_j \qquad (j = 1, 2, 3),$$

deren Koeffizienten $\lambda_j$, $\mu_j$ und $\nu_j$ nur von den $x_i, y_i, z_i$ und den sechs Ableitungen $y_4', z_4', y_5', z_5', y_6', z_6'$ abhängen.

Die zwölf Ableitungen erster Ordnung $y_i', z_i'$ sind daher wirklich durch drei **unabhängige** Gleichungen gebunden.

**57.** Wir wollen nun weiter gehen und Relationen zwischen den zwölf Differentialquotienten zweiter Ordnung $y_i''$, $z_i''$ ableiten.

Wenn wir, wie oben, die Größen $x_1$, $x_2$ und $x_3$ als unabhängige Veränderliche betrachten und unter dieser Voraussetzung die vier Gleichungen:

$$\frac{d\varDelta_4}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\varDelta_5}{dx_1} = 0, \quad \frac{d\varDelta_6}{dx_1} = 0, \quad \frac{dD}{dx_1} = 0$$

bilden und sodann zwischen diesen die drei Ableitungen:

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x_5}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial x_6}{\partial x_1}$$ [226

eliminieren, so erhalten wir, wie wir sahen, eine Relation zwischen den achzehn Größen $x_i$, $y_i$, $z_i$ und den acht Ableitungen $y_1', z_1', y_4', z_4', y_5', z_5', y_6', z_6'$:

$$W_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_6, y_6, z_6, y_1', z_1', y_4', z_4', y_5', z_5', y_6', z_6') = 0.$$

Wir fügen hinzu, obgleich das für die folgenden Betrachtungen unwesentlich ist, daß unsere analytischen wie geometrischen Überlegungen überdies gezeigt haben, daß die Gleichung: $W_1 = 0$ in den beiden Größen: $y_1'$, $z_1'$ (und dementsprechend in zwei beliebigen Größen $y_i'$, $z_i'$) linear ist.

**58.** Um nun Relationen zwischen den Differentialquotienten zweiter Ordnung $y''$, $z''$ zu finden, könnten wir die Gleichung $W_1 = 0$, sowie die beiden analogen Gleichungen $W_2 = 0$ und $W_3 = 0$ sukzessive nach $x_1$, $x_2$ und $x_3$, die fortwährend als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, differentiieren. Gingen wir aber in dieser Weise vor, so könnten wir nicht unmittelbar übersehen, wie viele unabhängige Relationen zwischen den $y''$, $z''$ wirklich vorhanden sind. Wir finden es daher zweckmäßig, neue unabhängige Veränderliche einzuführen, und zwar wollen wir bis auf weiteres die drei Größen $x_1$, $x_4$ und $x_5$ als solche auffassen, was offenbar gestattet ist. [Die Relationen zwischen den $y'$, $z'$, $y''$, $z''$ sind nämlich unabhängig von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen $x$.]

Differentiieren wir bei Zugrundelegung dieser Auffassung die Gleichung $W_1 = 0$ nach $x_1$, so erhalten wir eine Relation von der Form:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial W_1}{\partial y_1} y_1' + \dfrac{\partial W_1}{\partial z_1} z_1' + \displaystyle\sum_k^{2,3,6} \left(\dfrac{\partial W_1}{\partial x_k} + \dfrac{\partial W_1}{\partial y_k} y_k' + \dfrac{\partial W_1}{\partial z_k} z_k'\right) \dfrac{\partial x_k}{\partial x_1} + \\ \qquad + \dfrac{\partial W_1}{\partial y_1'} y_1'' + \dfrac{\partial W_1}{\partial z_1'} z_1'' + \left(\dfrac{\partial W_1}{\partial y_6'} y_6'' + \dfrac{\partial W_1}{\partial z_6'} z_6''\right) \dfrac{\partial x_6}{\partial x_1} = 0, \end{cases}$$

und aus dieser schaffen wir die Ableitungen:

$$(6)\qquad \frac{\partial x_k}{\partial x_1} \qquad\qquad (k = 2, 3, 6)$$

weg, indem wir die drei Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad (i = 2, 3, 6)$$

nach $x_1$ differentiieren, und die hervorgehenden Werte der Ableitungen (6) [227 in die Gleichung (5) eintragen.

Es ergibt sich hierbei, daß die vier Differentialquotienten zweiter Ordnung $y_1''$, $z_1''$, $y_6''$, $z_6''$ durch eine lineare Relation:

$$\lambda_1 y_1'' + \mu_1 z_1'' + \lambda_6 y_6'' + \mu_6 z_6'' + \sigma = 0$$

gebunden sind, deren Koeffizienten nur von den $x_i$, $y_i$, $z_i$, $y_j'$, $z_j'$ abhängen.

In entsprechender Weise erkennen wir, daß die zwölf Differentialquotienten zweiter Ordnung $y_j''$, $z_j''$ durch fünf lineare Gleichungen:

$$(7)\qquad 0 = \alpha_k y_k'' + \beta_k z_k'' + \gamma_k y_6'' + \delta_k z_6'' + \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 5)$$

gebunden sind, deren Koeffizienten nur von den $x_i$, $y_i$, $z_i$, $y_j'$, $z_j'$ abhängen.



**59.** Hiermit sind fünf lineare und unabhängige Relationen zwischen den zwölf Differentialquotienten zweiter Ordnung $y_i''$, $z_i''$ gefunden; wir können nachweisen, daß hiermit alle derartigen Relationen abgeleitet sind.

Nehmen wir nämlich im Raume $x$, $y$, $z$ irgend eine Fläche zweiten Grades und greifen wir unter allen auf ihr gelegenen Kurven sechs beliebige heraus, so leuchtet unmittelbar ein, daß diese sechs Kurven jede Ebene des Raumes in sechs Punkten treffen, die auf einem Kegelschnitte liegen.

Wählen wir andererseits sechs beliebige Punkte $x_i$, $y_i$, $z_i$, die auf irgend einem Kegelschnitte gelegen sind, erteilen wir ferner den sechs Größen: $y_4'$, $z_4'$, $y_5'$, $z_5'$, $y_6'$, $z_6'$, sowie den beiden Größen: $y_6''$, $z_6''$ beliebige Zahlenwerte, so gibt es immer eine ganz bestimmte Fläche zweiten Grades, die unseren Kegelschnitt enthält, die ferner in jedem unter den drei Punkten $x_4, y_4, z_4$; $x_5, y_5, z_5$; $x_6, y_6, z_6$ diejenige hindurchgehende Gerade berührt, deren Richtungskosinus mit den drei entsprechenden Zahlen:

$$1,\ y_j',\ z_j' \qquad\qquad (j = 4, 5, 6)$$

proportional sind, die endlich im Punkte $x_6$, $y_6$, $z_6$ denjenigen Kreis oskuliert, der durch die vier Zahlen: $y_6'$, $z_6'$, $y_6''$, $z_6''$ bestimmt wird.

Liegen daher im Raume $x$, $y$, $z$ sechs Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_6$ vor, [228 die jede Ebene in sechs Punkten eines Kegelschnittes schneiden, so gibt es immer eine und nur eine Fläche zweiten Grades, die erstens die sechs Schnittpunkte der Kurven $C_1, \ldots, C_6$ mit einer bestimmten Ebene enthält, die ferner $C_6$ oskuliert und überdies $C_4$ und $C_5$ berührt; wir behaupten, daß diese Fläche zweiten Grades alle sechs Kurven $C_i$ oskuliert.

Daß die von uns konstruierte Fläche zweiten Grades alle Kurven $C_i$ berührt, ist eine direkte Folge der drei früher abgeleiteten Gleichungen:

$$(4')\qquad \lambda_j y_j' + \mu_j' z_j' + \nu_j = 0 \qquad\qquad (j = 1, 2, 3),$$

deren Koeffizienten $\lambda_j$, $\mu_j$, $\nu_j$ nur von den Größen $x_i$, $y_i$, $z_i$; $y_4'$, $z_4'$; $y_5'$, $z_5'$; $y_6'$, $z_6'$ abhängen. Setzen wir zum Beispiel $j = 1$, so gibt es $\infty^1$ Wertsysteme $y_1'$, $z_1'$, die unsere letzte Gleichung erfüllen, und jedes derartige Wertsystem bestimmt eine durch den Punkt $x_1$, $y_1$, $z_1$ gehende Gerade, die unsere Fläche zweiten Grades berührt.

Eine ganz analoge Überlegung zeigt, daß die früher (S. 227 [hier S. 620]) abgeleitete Gleichung:

$$(7)\qquad \alpha_k y_k'' + \beta_k z_k'' + \gamma_k y_6'' + \delta_k z_6'' + \varepsilon_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 5)$$

nach sich zieht, daß unsere Fläche zweiten Grades eben, weil sie $C_6$ oskuliert, zugleich jede Kurve $C_k$ oskulieren muß.

**60.** Nun können wir leicht weiter gehen. Fassen wir zum Beispiel in der Gleichung:

$$\alpha_3 y_3'' + \beta_3 z_3'' + \gamma_3 y_6'' + \delta_3 z_6'' + \varepsilon_3 = 0$$

die Größen $x_1$, $x_2$, $x_3$ als unabhängige Veränderliche auf, so erhalten wir durch Differentiation nach $x_1$ eine Gleichung:

$$\gamma_3 y_6''' + \delta_3 z_6''' + \omega_3 = 0,$$

die in $y_6'''$ und $z_6'''$ linear ist, während die drei Koeffizienten nur von den $x_i, y_i, z_i, y_i', z_i', y_i'', z_i''$ abhängen. Diese Gleichung zeigt, daß die Kurve $C_6$ mit der von uns konstruierten Fläche zweiten Grades eine Berührung dritter Ordnung besitzt. Und in entsprechender Weise ergibt sich zunächst, daß jede Kurve $C_i$ mit der Fläche zweiten Grades eine Berührung dritter Ordnung hat, sodann daß jede $C_i$ mit der Fläche eine Berührung von vierter, ja von beliebig hoher Ordnung haben muß.

**61.** Hiermit ist das folgende Theorem bewiesen: [229

**Theorem VI. Wenn im Raume $x, y, z$ sechs Kurven vorliegen, die jede Ebene von allgemeiner Lage in sechs Punkten treffen, die einem irreduzibeln Kegelschnitte angehören, dann liegen diese sechs Kurven immer auf einer gewissen Fläche zweiten Grades.**

Es läßt sich beweisen, daß dieses Theorem nur ein ganz spezieller Fall eines viel allgemeineren Theorems ist, das sich auf $q$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten des $n$-fachen Raumes bezieht. Hier begnügen wir uns mit dieser Andeutung, indem wir zur Illustration nur noch das folgende Beispiel formulieren:

Liegen im Raume $x, y, z$ zehn Kurven vor, die jede Ebene in zehn Punkten treffen, die auf einer und nur auf einer irreduzibeln Kurve dritter Ordnung liegen, dann gibt es immer eine Fläche dritter Ordnung, die unsere zehn Kurven enthält.

**62.** Jetzt kehren wir zu unserem allgemeinen Probleme zurück. Die sechs Kurven $K_1, K_2, K_3$, $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3$ der dreidimensionalen unendlichfernen Mannigfaltigkeit $U_3$ schneiden nach unseren früheren Ergebnissen jede zweidimensionale Ebene des Raumes $U_3$ in sechs Punkten eines Kegelschnittes; nach dem eben abgeleiteten Theoreme VI sind daher unsere Kurven $K_i$ und $\mathsf{K}_j$ sämtlich auf einer gewissen Fläche zweiten Grades des Raumes $U_3$ gelegen, und diese Fläche zweiten Grades kann zwar in einen Kegel, nicht aber in ein Ebenenpaar ausarten.



Wir können daher das folgende Theorem aufstellen:

**Theorem VII. Können die Gleichungen einer nichtdeveloppabeln $M_3$ des Raumes $z, x_1, x_2, x_3$ sowohl die Form:**

$$x_k = A_{k1}(t_1) + A_{k2}(t_2) + A_{k3}(t_3) \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$z = C_1(t_1) + C_2(t_2) + C_3(t_3),$$

**wie die Form:**

$$x_k = \mathsf{A}_{k1}(\tau_1) + \mathsf{A}_{k2}(\tau_2) + \mathsf{A}_{k3}(\tau_3) \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$z = \Gamma_1(\tau_1) + \Gamma_2(\tau_2) + \Gamma_3(\tau_3)$$

**erhalten, und läßt sich dabei aus den Gleichungen:**

$$\tau_i = \varphi_i(t_1, t_2, t_3) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

**die den Übergang von den alten zu den neuen Parametern vermitteln, keine Relation herleiten, die weniger als vier unter den sechs Parametern $t$ und $\tau$ enthält, dann gibt es immer eine gewisse irreduzible, quadratische und homogene Relation in drei Veränderlichen $y_1$,** [230 **$y_2, y_3$:**

$$0 = a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 + 2 a_{13} y_1 y_3 + 2 a_{23} y_2 y_3$$
$$(a_{ik} = \text{Const.}),$$

**die bei jeder einzelnen unter den drei Substitutionen:**

$$y_1 = A_{1i}'(t_i),\ y_2 = A_{2i}'(t_i),\ y_3 = A_{3i}'(t_i) \qquad (i = 1, 2, 3$$

**und zugleich bei jeder einzelnen unter den drei Substitutionen:**

$$y_1 = \mathsf{A}_{1j}'(\tau_j),\ y_2 = \mathsf{A}_{2j}'(\tau_j),\ y_3 = \mathsf{A}_{3j}'(\tau_j) \qquad (j = 1, 2, 3)$$

**identisch befriedigt wird.**

**63.** Wir können diesen Satz als eine Integrabilitätsbedingung betrachten, die unsere sechs linearen partiellen Differentialgleichungen (3) und (4) erfüllen müssen. Dabei ist nun zunächst zu bemerken, daß wir keineswegs wissen, ob diese notwendige Integrabilitätsbedingung auch hinreichend ist, und es stellt sich daher die Frage, ob noch weitere Integrabilitätsbedingungen vorhanden sind. Zu bemerken ist ferner, daß sich unsere sechs partiellen Differentialgleichungen (3) und (4) (S. 220 f. [hier S. 614 f.]), sobald die gefundene Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, auf fünf Gleichungen reduzieren.

Es ist nun leicht zu beweisen, daß diese fünf partiellen Differentialgleichungen, die in den sechs Differentialquotienten $r_{ik}$ linear und homogen sind, unter den von uns gemachten Voraussetzungen immer von einander unabhängig sind, und daß sie daher die Verhältnisse der $r_{ik}$ vollständig bestimmen. Unsere partiellen Differentialgleichungen besagen ja eben, daß zu dem Haupttangentenkegel der gesuchten $M_3$ zwei gegebene Triëder (deren sechs Kanten auf einem Kegel zweiten Grades liegen) konjugiert sein sollen. Und da diese beiden Triëder eine allgemeine gegenseitige Lage haben sollen, gibt es, sobald die Größen $z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3$ gegeben sind, einen und nur einen Kegel, zu dem diese beiden Triëder konjugiert sind. Die Gleichung der Haupttangenten:

$$0 = r_{11}dx_1^2 + r_{22}dx_2^2 + r_{33}dx_3^2 + 2r_{12}dx_1dx_2 + 2r_{13}dx_1dx_3 + 2r_{23}dx_2dx_3$$

ist also durch die partiellen Differentialgleichungen vollständig be- [231 stimmt, und somit gibt es unter unseren sechs partiellen Differentialgleichungen fünf unabhängige, aus denen sich die Verhältnisse der $r_{ik}$ bestimmen lassen.

**64.** Wir behaupten, daß wir immer annehmen können, daß nicht drei unter diesen partiellen Differentialgleichungen die Form:

$$r_{11} = 0, \; r_{22} = 0, \; r_{33} = 0$$

besitzen. Wäre das nämlich der Fall, so besäßen die Gleichungen der zugehörigen Integral-$M_3$ jedenfalls die Form:

$$z = c_{123}x_1x_2x_3 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{23}x_2x_3 + d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + e,$$

und da wir von den ebenen $M_3$ absehen, müßte jedenfalls einer unter den vier Koeffizienten $c_{123}, c_{12}, c_{13}, c_{23}$ von Null verschieden sein. Daher können wir immer, jedenfalls durch eine passende Vertauschung der vier gleichberechtigten Größen $z, x_1, x_2, x_3$, erreichen, daß mindestens eine unter den drei Ableitungen $r_{11}, r_{22}, r_{33}$ von Null verschieden wird.

Wir können daher annehmen, daß unsere partiellen Differentialgleichungen von vornherein in einer solchen Form vorliegen, daß sie nicht die Gleichung $r_{33} = 0$ nach sich ziehen, und daß sie somit durch Auflösung auf die Form:

$$(8) \qquad r_{11} = ar_{33}, \; r_{12} = br_{33}, \; r_{22} = cr_{33}, \; r_{13} = dr_{33}, \; r_{23} = er_{33}$$

gebracht werden können. Und in diesen Gleichungen sind die Koeffizienten $a, b, \ldots, e$ Funktionen von $p_1, p_2, p_3$.

**65.** Indem wir jetzt die Aufgabe in Angriff nehmen, die Integrabilitätsbedingungen eines solchen Systems von Differentialgleichungen abzuleiten, können und wollen wir davon absehen, daß die Form der Koeffizienten $a, b, \ldots$ als Funktionen von $p_1, p_2, p_3$ durch die Beschaffenheit unseres allgemeinen Problems von vornherein in hohem Maße partikularisiert ist. Wir wollen uns vielmehr die ungleich allgemeinere und unter mehreren Gesichtspunkten wichtige Aufgabe stellen:



Ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$r_{11} = ar_{33}, \; r_{12} = br_{33}, \; r_{22} = cr_{33}, \; r_{13} = dr_{33}, \; r_{23} = er_{33}$$

ist vorgelegt, dessen Koeffizienten $a, b, \ldots$ beliebige gegebene Funktionen von $p_1, p_2$ und $p_3$ darstellen. Es sollen die [232 Integrabilitätsbedingungen dieses Gleichungssystems abgeleitet werden.

Wir differentiieren unsere fünf Gleichungen zunächst nach $x_3$ und erhalten so, wenn wir zur Abkürzung:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} = r_{ikj}$$

setzen, und überdies in den hervorgehenden Relationen nur die Glieder mitnehmen, die eine Ableitung dritter Ordnung enthalten, die fünf folgenden Gleichungen:

$$r_{113} = ar_{333} + \cdots, \; r_{123} = br_{333} + \cdots, \; r_{223} = cr_{333} + \cdots,$$
$$r_{133} = dr_{333} + \cdots, \; r_{233} = er_{333} + \cdots.$$

Wir finden ferner durch Differentiation nach $x_1$, beziehungsweise $x_2$ und durch Verwertung der soeben erhaltenen Gleichungen dritter Ordnung die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
r_{111} &= ar_{331} + \cdots = adr_{333} + \cdots, \\
r_{112} &= ar_{332} + \cdots = aer_{333} + \cdots, \\
r_{121} &= br_{331} + \cdots = bdr_{333} + \cdots, \\
r_{122} &= br_{332} + \cdots = ber_{333} + \cdots, \\
r_{221} &= cr_{331} + \cdots = cdr_{333} + \cdots, \\
r_{222} &= cr_{332} + \cdots = cer_{333} + \cdots, \\
r_{131} &= dr_{331} + \cdots = ddr_{333} + \cdots, \\
r_{132} &= dr_{332} + \cdots = der_{333} + \cdots, \\
r_{231} &= er_{331} + \cdots = der_{333} + \cdots, \\
r_{232} &= er_{332} + \cdots = eer_{333} + \cdots.
\end{aligned}$$

Hiermit sind nun alle Ableitungen dritter Ordnung $r_{ikj}$ ausgedrückt durch $r_{333}$ und die Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Im allgemeinen gelingt es auch, $r_{333}$ durch Ableitungen erster und zweiter Ordnung auszudrücken. Eine solche Bestimmung geben zum Beispiel die beiden Gleichungen:

$$r_{112} = aer_{333} + \cdots, \; r_{121} = bdr_{333} + \cdots,$$

wenn nicht zufälligerweise die Relation besteht:

$$ae - bd = 0.$$

**66.** Durch Betrachtungen von dieser Art erkennt man, daß sich alle $r_{iks}$ als Funktionen der $p_i$ und $r_{33}$ ausdrücken lassen, wenn nicht zufälligerweise die fünf Koeffizienten $a, b, \dots, e$ durch die drei Rela- [233
tionen:

$$a = dd, \quad b = de, \quad c = ee$$

gebunden sind. In diesem Falle zeigt aber die Differentialgleichung der Haupttangenten:

$$0 = r_{11}dx_1^2 + r_{22}dx_2^2 + r_{33}dx_3^2 + \\ + 2r_{12}dx_1dx_2 + 2r_{13}dx_1dx_3 + 2r_{23}dx_2dx_3,$$

die jetzt die Form:

$$0 = dd\,.\,dx_1^2 + ee\,.\,dx_2^2 + dx_3^2 + \\ + 2de\,.\,dx_1dx_2 + 2d\,.\,dx_1dx_3 + 2e\,.\,dx_2dx_3,$$

oder die Form:

$$0 = (d\,.\,dx_1 + e\,.\,dx_2 + dx_3)^2$$

annimmt, daß der Haupttangentenkegel aus einer doppeltzählenden Ebene besteht.

**67.** Das hiermit gefundene Resultat kann nach mehreren Richtungen verallgemeinert werden. Hier beschränken wir uns auf die Bemerkung, daß unsere Betrachtungen auch dann gültig bleiben, wenn die Koeffizienten $a, b, \dots$ nicht allein von den $p$, sondern auch von $z, x_1, x_2, x_3$ abhängen. Wir können daher den folgenden Satz aufstellen:

**Satz 7.** Liegen in den Veränderlichen $z, x_1, x_2, x_3$ fünf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vor, aus denen sich die Verhältnisse der $r_{ik}$ bestimmen lassen, so hängt die Gleichung: $z - \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ der allgemeinsten gemeinsamen Integral-$M_3$, die sich nicht als Umhüllungsfigur von $\infty^1$ dreidimensionalen Ebenen auffassen läßt, höchstens von fünf willkürlichen Konstanten ab. Enthalten die vorgelegten Differentialgleichungen die Veränderlichen $z, x_1, x_2, x_3$ nicht, sondern nur die Ableitungen erster und zweiter Ordnung, so läßt sich aus jeder Lösung $z - \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ eine allgemeinere:

$$z + k - \varphi(mx_1 + a_1,\ mx_2 + a_2,\ mx_3 + a_3) = 0$$

herleiten, die fünf, im allgemeinen wesentliche, Konstanten enthält.

Definieren unsere fünf partiellen Differentialgleichungen insbesondere nichtzylindrische $M_3$, die in zwei verschiedenen Weisen als Translations-$M_3$ aufgefaßt werden können, so gibt es immer $\infty^5$ und auch nicht mehr gemeinsame, nicht developpable Integral-$M_3$.



**68.** Wir wenden uns nun wieder zur Betrachtung eines belie- [234
bigen integrabeln Systems von fünf partiellen Differentialgleichungen:

$$r_{11} = ar_{33}, \quad r_{12} = br_{33}, \quad r_{22} = cr_{33}, \quad r_{13} = dr_{33}, \quad r_{23} = er_{33},$$

dessen Koeffizienten $a, b, \dots, e$ nur von $p_1$, $p_2$ und $p_3$ abhängen.

Ehe wir in der Diskussion der Integrabilitätsbedingungen weiter gehen, finden wir es zweckmäßig, auf unser Gleichungssystem die Berührungstransformation:

$$z' = z - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3, \quad x_k' = p_k, \quad p_k' = -x_k \tag{9}$$

auszuführen, deren Ursprung bis auf Lagrange, Euler und Legendre zurückgeführt werden kann. Daß diese Transformation wirklich eine Berührungstransformation ist, folgt, nach meiner allgemeinen Theorie, unmittelbar daraus, daß die Gleichung:

$$d(z - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3) + x_1dp_1 + x_2dp_2 + x_3dp_3 = \\ = dz - p_1dx_1 - p_2dx_2 - p_3dx_3$$

identisch besteht.

Die entsprechenden Werte der $r_{ik}'$ werden aus den Gleichungen:

$$dp_k' - r_{k1}'dx_1' - r_{k2}'dx_2' - r_{k3}'dx_3' = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

gefunden, die durch die Substitution: $p_k' = -x_k$, $x_k' = p_k$ die Form:

$$dx_k + r_{k1}'dp_1 + r_{k2}'dp_2 + r_{k3}'dp_3 = 0,$$

oder, durch Ausführung, die Form:

$$0 = dx_k + r_{k1}'(r_{11}dx_1 + r_{12}dx_2 + r_{13}dx_3) + \\ + r_{k2}'(r_{21}dx_1 + r_{22}dx_2 + r_{23}dx_3) + \\ + r_{k3}'(r_{31}dx_1 + r_{32}dx_2 + r_{33}dx_3) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

annehmen. In dieser Weise findet man neun Gleichungen, unter denen die drei ersten:

$$0 = 1 + r_{11}'r_{11} + r_{12}'r_{21} + r_{13}'r_{31},$$
$$0 = r_{11}'r_{12} + r_{12}'r_{22} + r_{13}'r_{32},$$
$$0 = r_{11}'r_{13} + r_{12}'r_{23} + r_{13}'r_{33}$$

durch Auflösung die Werte von $r_{11}'$, $r_{12}'$ und $r_{13}'$ liefern. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = \Delta(r)$$ [235

und bezeichnen die Unterdeterminanten nach den $r_{ik}$ mit $\varDelta_{ik}(r)$, so erhalten wir die Formeln:

$$r'_{11} = -\frac{\varDelta_{11}(r)}{\varDelta(r)}, \quad r'_{12} = -\frac{\varDelta_{12}(r)}{\varDelta(r)}, \quad r'_{13} = -\frac{\varDelta_{13}(r)}{\varDelta(r)},$$

und dementsprechend die allgemeine Formel:

$$r'_{ik} = -\frac{\varDelta_{ik}(r)}{\varDelta(r)}. \tag{10}$$

**69.** Wollen wir nun diese Berührungstransformation auf das vorliegende System (8) partieller Differentialgleichungen anwenden, so haben wir zu berücksichtigen, daß die Verhältnisse der $r_{ik}$ und gleichzeitig auch die Verhältnisse der $\varDelta_{ik}(r)$ gegebene Funktionen von $p_1$, $p_2$ und $p_3$ sind. Da nun andererseits die Determinante $\varDelta(r)$ von Null verschieden ist, erkennen wir, daß sich auch die Verhältnisse der $r'_{ik}$ als bekannte Funktionen von $p_1, p_2, p_3$, und gleichzeitig als bekannte Funktionen von $x_1', x_2', x_3'$ ausdrücken lassen.

Wir können hinzufügen, daß die Determinante $|r'_{ik}|$ von Null verschieden sein muß, weil die gemeinsamen Integral-$M_3$ der gegebenen Gleichungen (8) dreidimensionale Mannigfaltigkeiten des Raumes $z, x_1, x_2, x_3$ sind; hieraus folgt ja, daß die transformierten Gebilde des Raumes $z', x_1', x_2', x_3'$ je $\infty^3$ verschiedene dreidimensionale Tangentialebenen besitzen, und das heißt ja eben, daß die Determinante $|r'_{ik}|$ von Null verschieden ist.

Wir erkennen ferner durch Betrachtungen, die mit früher (S. 231 [hier S. 624]) angestellten Überlegungen identisch sind, daß wir annehmen können, daß $r'_{33}$ von Null verschieden ist, und daß somit alle $r'_{ik}$ Gleichungen von der Form $r'_{ik} = \alpha_{ik}(x_1', x_2', x_3') r'_{33}$ erfüllen. Da die Determinante der $r'_{ik}$ nicht identisch verschwindet, können wir nach der Theorie der quadratischen Formen durch passende Koordinatenwahl erreichen, daß in der quadratischen Form:

$$\Sigma \alpha_{ik}(x_1', x_2', x_3') \, dx_i' \, dx_k'$$

die Koeffizienten $\alpha_{ik}$ für allgemeine Werte der $x'$ keine speziellen endlichen Relationen erfüllen.

Wir können also annehmen, daß unser System partieller Diffe- [236 rentialgleichungen auf die Form:

$$r_{11} = \alpha r_{33}, \quad r_{12} = \beta r_{33}, \quad r_{22} = \gamma r_{33}, \quad r_{23} = \delta r_{33}, \quad r_{13} = \varepsilon r_{33}$$

gebracht ist, und daß die Koeffizienten $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ gegebene Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, x_3$ darstellen. Wir wollen die Integrabilitätsbedingungen dieses Gleichungssystems aufsuchen.



**70.** Wir wissen, daß wir durch einmalige Differentiation fünfzehn Differentialgleichungen dritter Ordnung erhalten, aus denen sich die zehn Ableitungen dritter Ordnung $r_{ikj}$ als Funktionen von $x_1, x_2, x_3$ und $r_{33}$ berechnen lassen, die in $r_{33}$ linear und homogen sind:

$$r_{ikj} = \lambda_{ikj} \,.\, r_{33}.$$

Eliminiert man daher die $r_{ikj}$ und die fünf Ableitungen $r_{11}, r_{12}, r_{22}, r_{23}$ und $r_{13}$ zwischen diesen fünfzehn Differentialgleichungen dritter Ordnung, so findet man fünf Gleichungen von der Form:

$$W_k(\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \varepsilon_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \varepsilon_2, \alpha_3, \beta_3, \ldots, \varepsilon_3) = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, 5),$$

die als Integrabilitätsbedingungen aufzufassen sind.

Wir wollen jetzt zeigen, daß diese fünf Gleichungen, die wir sogleich aufstellen werden, die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Gleichungssystems: $r_{11} = \alpha r_{33}, \ldots, r_{13} = \varepsilon r_{33}$ liefern. Von vornherein ist das keineswegs evident; denn nach der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen wäre es eigentlich notwendig, die Gleichungen dritter Ordnung:

$$r_{ikj} = \lambda_{ikj}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \,.\, r_{33}$$

einmal nach $x_1$, $x_2$ und $x_3$ zu differentiieren und zu konstatieren, daß sich in dieser Weise kein Widerspruch ergibt; daß also die Gleichung:

$$\frac{\partial \lambda_{112}}{\partial x_2} = \frac{\partial \lambda_{122}}{\partial x_1}$$

und alle damit analogen Gleichungen identisch erfüllt sind.

**71.** Wir führen den angekündigten Nachweis, indem wir die folgenden Betrachtungen anstellen.

Differentiieren wir eine jede unter den fünf Gleichungen:

$$r_{11} = \alpha r_{33}, \ldots, r_{13} = \varepsilon r_{33}$$

einmal nach $x_1$, $x_2$ oder $x_3$, so erhalten wir, wie schon bemerkt, fünfzehn Differentialgleichungen dritter Ordnung. Differentiieren wir noch [237 einmal, so finden wir dreißig Differentialgleichungen vierter Ordnung, die wir wiederum auf die Form:

$$r_{ikj\nu} = \mu_{ikj\nu} \,.\, r_{33}$$

bringen können.

Nun aber gibt es zehn Ableitungen $r_{ikj}$ und fünfzehn Ableitungen $r_{ikj\nu}$. Durch Elimination finden wir daher:

$$15 + 30 - (10 + 15) = 20$$

unabhängige Relationen zwischen den Koeffizienten: $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, deren zehn Ableitungen erster Ordnung: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ und den Ableitungen zweiter Ordnung $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$. Unter diesen zwanzig Gleichungen, die uns die vollständigen Integrabilitätsbedingungen liefern, gibt es fünf von erster Ordnung, nämlich die früher besprochenen Gleichungen:

$$W_1 = 0, \ldots, W_5 = 0;$$

hierzu kommen fünfzehn Gleichungen zweiter Ordnung:

$$\Phi_k(\alpha, \ldots, \varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \varepsilon_3, \alpha_{11}, \ldots, \varepsilon_{33}) = 0.$$

Wollen wir nun beweisen, daß die Gleichungen $W_1 = 0, \ldots, W_5 = 0$ die vollständigen Integrabilitätsbedingungen liefern, daß also die fünfzehn Gleichungen $\Phi_k = 0$ nichts weiteres aussagen, als die vereinigten Gleichungen:

$$W_k = 0, \quad \frac{\partial W_k}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, 5;\ i = 1, 2, 3), \tag{11}$$

so brauchen wir nur nachzuweisen, daß die zwanzig Gleichungen (11) von einander unabhängig sind.

Diesen Nachweis, der ziemlich weitläufige Rechnungen verlangt, wollen wir jetzt führen.

**72.** Um die fünf Gleichungen: $W_k = 0$ in einfachster Weise zu finden, nehmen wir unseren Ausgangspunkt in den Gleichungen:

$$dp_k = r_{k1}\,dx_1 + r_{k2}\,dx_2 + r_{k3}\,dx_3,$$

die uns zeigen, daß die drei Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha\,dx_1 + \beta\,dx_2 + \varepsilon\,dx_3 &= 0,\\ \beta\,dx_1 + \gamma\,dx_2 + \delta\,dx_3 &= 0,\\ \varepsilon\,dx_1 + \delta\,dx_2 + \phantom{\varepsilon}\,dx_3 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{12}$$

integrabel sind, und überdies einen gemeinsamen Integrabilitätsfaktor: [238

$$M = r_{33}$$

besitzen. In dieser Weise erhalten wir zunächst drei Relationen:

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon(\beta_1 - \alpha_2) + \beta(\alpha_3 - \varepsilon_1) + \alpha(\varepsilon_2 - \beta_3) &= 0,\\ \delta(\gamma_1 - \beta_2) + \gamma(\beta_3 - \delta_1) + \beta(\delta_2 - \gamma_3) &= 0,\\ \delta_1 - \varepsilon_2 + \delta\varepsilon_3 - \varepsilon\delta_3 &= 0, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

die nur aussagen, daß die drei Differentialgleichungen (12) integrabel sind. Wir finden ferner die beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &(\gamma\varepsilon - \beta\delta)(\beta_1 - \alpha_2) + (\alpha\delta - \beta\varepsilon)(\gamma_1 - \beta_2) + (\beta\beta - \alpha\gamma)(\delta_1 - \varepsilon_2) = 0,\\ &(\delta\varepsilon - \beta)(\varepsilon_1 - \alpha_3) + (\alpha - \varepsilon\varepsilon)(\delta_1 - \beta_3) + (\alpha\delta - \varepsilon\beta)\varepsilon_3 \qquad = 0, \end{aligned}\right. \tag{14}$$



die daher stammen, daß die drei Differentialgleichungen denselben Integrabilitätsfaktor besitzen.

Hiermit sind, wie man leicht verifiziert, fünf unabhängige Gleichungen zwischen den Koeffizienten $\alpha, \ldots, \varepsilon$ und deren Ableitungen erster Ordnung gefunden. Daher können wir die vereinigten Gleichungen (13) und (14) als eine Form des Gleichungssystems $W_k = 0$ auffassen.

**73.** Unter den fünf Gleichungen (13) und (14) gibt es eine, nämlich:

$$(\gamma\varepsilon - \beta\delta)(\beta_1 - \alpha_2) + (\alpha\delta - \beta\varepsilon)(\gamma_1 - \beta_2) + (\beta\beta - \alpha\gamma)(\delta_1 - \varepsilon_2) = 0, \tag{15}$$

die nur Differentialquotienten nach $x_1$ und $x_2$ enthält. Die vier übrigen können, da wir annehmen dürfen, daß $\beta\beta - \alpha\gamma$ von Null verschieden ist, nach $\beta_3, \gamma_3, \delta_3$ und $\varepsilon_3$ aufgelößt werden, und wir ersetzen sie daher durch die äquivalenten Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &(\beta\beta - \alpha\gamma)\{\alpha(\beta_3 - \delta_1) + \beta(\varepsilon_1 - \alpha_3)\} + \beta(\alpha\delta - \varepsilon\beta)(\beta_1 - \alpha_2) +\\ &\qquad\qquad + \alpha(\varepsilon\beta - \alpha\delta)(\gamma_1 - \beta_2) = 0,\\ &(\beta\beta - \alpha\gamma)\{\alpha\varepsilon_3 + \varepsilon(\varepsilon_1 - \alpha_3)\} + \beta(\alpha - \varepsilon\varepsilon)(\beta_1 - \alpha_2) +\\ &\qquad\qquad + \alpha(\varepsilon\varepsilon - \alpha)(\gamma_1 - \beta_2) = 0,\\ &(\beta\beta - \alpha\gamma)\{\alpha(\gamma_3 - \delta_2) + \gamma(\varepsilon_1 - \alpha_3)\} + \gamma(\alpha\delta - \beta\varepsilon)(\beta_1 - \alpha_2) +\\ &\qquad\qquad + \alpha(\gamma\varepsilon - \beta\delta)(\gamma_1 - \beta_2) = 0,\\ &(\beta\beta - \alpha\gamma)\{\alpha\delta_3 + \delta(\varepsilon_1 - \alpha_3)\} + (\alpha\gamma - \beta\varepsilon\delta)(\beta_1 - \alpha_2) +\\ &\qquad\qquad + \alpha(\varepsilon\delta - \beta)(\gamma_1 - \beta_2) = 0. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

**74.** Differentiiert man nun die Gleichung (15) nach $x_1$ und $x_2$, ferner die zuletzt geschriebenen Gleichungen nach $x_1$, $x_2$ und $x_3$, so übersieht man leicht, daß die vierzehn in dieser Weise gefundenen Gleichungen unabhängig sind, weil sie nach den Größen: [239

$$\delta_{11}, \varepsilon_{22};\quad \beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{33};\quad \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33};\quad \gamma_{13}, \gamma_{23}, \gamma_{33};\quad \delta_{13}, \delta_{23}, \delta_{33}$$

aufgelöst werden können. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß die Differentiation der Gleichung (15) nach $x_3$ eine Relation liefert, die hinsichtlich der Ableitungen zweiter Ordnung von den soeben besprochenen vierzehn Gleichungen unabhängig ist.

Durch Differentiation von (15) nach $x_3$ und Multiplikation mit $\alpha(\alpha\gamma - \beta\beta)$ erhalten wir, wenn wir nur solche Glieder mitnehmen, die eine Ableitung zweiter Ordnung enthalten, die Gleichung:

$$\alpha(\alpha\gamma - \beta\beta)\{(\gamma\varepsilon - \beta\delta)(\beta_{13} - \alpha_{23}) + (\alpha\delta - \beta\varepsilon)(\gamma_{13} - \beta_{23}) + (\beta\beta - \alpha\gamma)(\delta_{13} - \varepsilon_{23}) + \cdots\} = 0.$$

Aus dieser Gleichung können wir die Ableitungen:

$$\beta_{13},\ \gamma_{13},\ \beta_{23},\ \delta_{13},\ \varepsilon_{23}$$

wegschaffen, indem wir die vier Gleichungen (16) nach $x_1$ und $x_2$ differentiieren, und sodann ihre linken Seiten mit passenden Faktoren multiplizieren:

$$
\begin{aligned}
&(\gamma\varepsilon-\beta\delta)\{(\beta\beta-\alpha\gamma)\,\alpha(\beta_{13}-\delta_{11})+\beta(\beta\beta-\alpha\gamma)(\varepsilon_{11}-\alpha_{13})+\\
&\qquad+\beta(\alpha\delta-\varepsilon\beta)(\beta_{11}-\alpha_{12})+\alpha(\varepsilon\beta-\alpha\delta)(\gamma_{11}-\beta_{12})+\cdots\}=0,\\
&(\alpha\delta-\beta\varepsilon)\{(\beta\beta-\alpha\gamma)\,\alpha(\gamma_{13}-\delta_{12})+\gamma(\beta\beta-\alpha\gamma)(\varepsilon_{11}-\alpha_{13})+\\
&\qquad+\gamma(\alpha\delta-\beta\varepsilon)(\beta_{11}-\alpha_{12})+\alpha(\gamma\varepsilon-\beta\delta)(\gamma_{11}-\beta_{12})+\cdots\}=0,\\
&(\beta\varepsilon-\alpha\delta)\{(\beta\beta-\alpha\gamma)\,\alpha(\beta_{23}-\delta_{12})+\beta(\beta\beta-\alpha\gamma)(\varepsilon_{12}-\alpha_{23})+\\
&\qquad+\beta(\alpha\delta-\varepsilon\beta)(\beta_{12}-\alpha_{22})+\alpha(\varepsilon\beta-\alpha\delta)(\gamma_{12}-\beta_{22})+\cdots\}=0,\\
&(\beta\beta-\alpha\gamma)\{\alpha(\beta\beta-\alpha\gamma)\delta_{13}+\delta(\beta\beta-\alpha\gamma)(\varepsilon_{11}-\alpha_{13})+\\
&\qquad+(\alpha\gamma-\beta\varepsilon\delta)(\beta_{11}-\alpha_{12})+\alpha(\varepsilon\delta-\beta)(\gamma_{11}-\beta_{12})+\cdots\}=0,\\
&(\alpha\gamma-\beta\beta)\{\alpha(\beta\beta-\alpha\gamma)\varepsilon_{23}+\varepsilon(\beta\beta-\alpha\gamma)(\varepsilon_{12}-\alpha_{23})+\\
&\qquad+\beta(\alpha-\varepsilon\varepsilon)(\beta_{12}-\alpha_{22})+\alpha(\varepsilon\varepsilon-\alpha)(\gamma_{12}-\beta_{22})+\cdots\}=0
\end{aligned}
$$

zu der vorhergehenden Gleichung addieren. Gleichzeitig fallen $\alpha_{13}$ und $\alpha_{23}$ weg, und die resultierende Gleichung enthält daher keine anderen Ableitungen zweiter Ordnung, als solche, die nach $x_1$ und $x_2$ genommen [240 sind. Durch Ausführung gelingt es, diese Gleichung auf die Form:

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\beta\beta-\alpha\gamma)\cdot\{(\gamma-\delta\delta)(\beta_{11}-\alpha_{12})+(\varepsilon\delta-\beta)(\gamma_{11}-\beta_{12})+(\beta\delta-\gamma\varepsilon)(\delta_{11}-\varepsilon_{12})\}-\\
&\qquad-\alpha\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \varepsilon\\ \beta & \gamma & \delta\\ \varepsilon & \delta & 1\end{vmatrix}\cdot\{\beta(\alpha_{22}-\beta_{12})+\alpha(\gamma_{12}-\beta_{22})\}+\cdots=0
\end{aligned}
$$

zu bringen.

**75.** Wäre nun diese Gleichung eine Folge der früher aufgestellten Gleichungen, oder reduzierte sie sich vermöge dieser älteren Gleichungen auf eine Differentialgleichung erster Ordnung, so könnte eine solche Reduktion jedenfalls nur von den beiden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
0&=(\gamma\varepsilon-\beta\delta)(\beta_{11}-\alpha_{12})+(\alpha\delta-\beta\varepsilon)(\gamma_{11}-\beta_{12})+(\beta\beta-\alpha\gamma)(\delta_{11}-\varepsilon_{12})+\cdots,\\
0&=(\gamma\varepsilon-\beta\delta)(\beta_{12}-\alpha_{22})+(\alpha\delta-\beta\varepsilon)(\gamma_{12}-\beta_{22})+(\beta\beta-\alpha\gamma)(\delta_{12}-\varepsilon_{22})+\cdots
\end{aligned}
$$

herrühren, die sich durch Differentiation von (15) nach $x_1$ und $x_2$ ergeben. Es ist aber nicht schwer, zu erkennen, daß eine solche Reduktion nicht eintreten kann.

**76.** Also ist es uns gelungen, aus den fünf Integrabilitätsbedingungen, die durch die fünf Differentialgleichungen erster Ordnung (13), (14) repräsentiert werden, durch Differentiation fünfzehn Differentialgleichungen zweiter Ordnung abzuleiten, die unter einander und von den fünf Gleichungen erster Ordnung unabhängig sind.



Hiermit ist es uns gelungen, zu beweisen, daß die vollständigen Integrabilitätsbedingungen der fünf partiellen Differentialgleichungen:

$$r_{11}=\alpha r_{33},\quad r_{12}=\beta r_{33},\quad r_{22}=\gamma r_{33},\quad r_{23}=\delta r_{33},\quad r_{13}=\varepsilon r_{33},$$

deren Koeffizienten $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ gegebene Funktionen von $x_1, x_2, x_3$ bezeichnen, durch fünf Relationen zwischen diesen Koeffizienten und deren Ableitungen erster Ordnung nach $x_1$, $x_2$ und $x_3$ dargestellt werden.

**77.** Um diesem an sich wichtigen Resultate eine präzise Form [241 zu geben, stellen wir das folgende Theorem auf:

**Theorem VIII. Besitzt ein System von fünf partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:**

$$\Omega_k(x_1, x_2, x_3, r_{11}, r_{12}, r_{22}, r_{13}, r_{23}, r_{33})=0 \quad (k=1,2,\ldots,5),$$

**in denen die unbekannte Funktion $z$ und ihre Ableitungen erster Ordnung nicht explizite vorkommen, während die Ableitungen zweiter Ordnung homogen auftreten, auch nur eine einzige nicht developpable Integral-$M_3$, so ist das System: $\Phi_k=0$ unbeschränkt integrabel, und es existieren $\infty^5$ nicht developpable Integral-$M_3$.**

**Bringt man das Gleichungssystem $\Phi_k=0$ durch passende Koordinatenwahl, wie immer möglich ist, auf die Form:**

$$r_{11}=\alpha r_{33},\quad r_{12}=\beta r_{33},\quad r_{22}=\gamma r_{33},\quad r_{23}=\delta r_{33},\quad r_{13}=\varepsilon r_{33},$$

**so werden die vollständigen Integrabilitätsbedingungen durch fünf Gleichungen geliefert, die neben den Koeffizienten $\alpha, \ldots, \varepsilon$ nur deren Ableitungen erster Ordnung nach $x_1$, $x_2$ und $x_3$ enthalten.**

**78.** Wenden wir auf dieses Theorem das Prinzip der Dualität (anders ausgesprochen, die Berührungstransformation (9)) an, und beachten wir dabei, daß developpable $M_3$ den Punkten, Kurven und zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten dualistisch gegenüberstehen, so erhalten wir unmittelbar das folgende Theorem, das für unsere Untersuchungen eine hervorragende Wichtigkeit besitzt:

**Theorem IX. Besitzt ein System von fünf Differentialgleichungen zweiter Ordnung:**

$$\Psi_k(p_1, p_2, p_3, r_{11}, r_{12}, r_{22}, r_{23}, r_{13}, r_{33})=0 \quad (k=1,\ldots,5),$$

**die in den $r_{ik}$ unabhängig und homogen sind, während die Veränderlichen $z, x_1, x_2, x_3$ nicht explizite vorkommen, auch nur eine einzige nicht developpable Integral-$M_3$, so ist das System unbeschränkt integrabel und besitzt $\infty^5$ ähnliche, gleichgestellte und nicht developpable Integral-$M_3$. Bei passender Koordinatenwahl läßt sich das**

**System: $\Psi = 0$ auf die Form:**

$$r_{11} = a r_{33},\ r_{12} = b r_{33},\ r_{22} = c r_{33},\ r_{23} = d r_{33},\ r_{13} = e r_{33}$$

**bringen, und die vollständigen Integrabilitätsbedingungen finden [242 ihren Ausdruck in fünf Gleichungen zwischen den Koeffizienten $a$, $b, \ldots, e$ und deren Ableitungen erster Ordnung nach $p_1$, $p_2$ und $p_3$.**

## Kapitel VI.

### Erledigung des reduzierten Problems.

**79.** Wir zeigen jetzt, daß wir durch passende Verwertung des Abelschen Theorems Lösungen unseres reduzierten Problems finden. Indem wir sodann die Entwickelungen des vorigen Kapitels weiter fortführen, gelingt es uns, nachzuweisen, daß wir durch diese Deutung des Abelschen Theorems alle Lösungen des reduzierten Problems gefunden haben.

Im folgenden knüpfen wir direkt an Abels berühmte Abhandlung: »Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes« an.[1])

Nach Clebschs Beispiel werden wir die Sprache der Geometrie benutzen, und dementsprechend die in Abels Abhandlung auftretenden Größen $x$ und $y$ als Cartesische Koordinaten eines Punktes in der Ebene auffassen. Nach unserer Ansicht deutet vielleicht Abels Wahl dieser Buchstaben darauf, daß ihm die geometrische Deutung nicht fern lag. Daß diese, jedenfalls so naheliegende und so außerordentlich fruchtbare Deutung erst so spät explizite gegeben und verwertet wurde, kann gewiß nur darin [243 seine Erklärung finden, daß sich die älteren Geometer unseres Jahrhunderts größtenteils wenig mit der Analysis beschäftigt haben. In dieser

1) Daß sich die Académie des Sciences seinerzeit gegenüber Galois bahnbrechenden Ideen ablehnend verhielt, findet seine Erklärung und Entschuldigung in vielen Umständen. Dagegen ist es mir immer ein Rätsel geblieben, wie die Académie des Sciences die bahnbrechende Arbeit des schon hochberühmten, verstorbenen Abel trotz Jacobis ernsten und hochberechtigten Mahnungen so lange zurückhalten konnte. In dieser Verbindung erlaube ich mir, als meine Auffassung geltend zu machen, daß Abels epochemachende Arbeiten für die Ideen von Galois in mehr als einem Sinne des Wortes die Bahn gebrochen haben. Sehen wir auch davon ab, daß Galois von Abel inspiriert war, so dürfte es doch am Platze sein, einmal daran zu erinnern, daß die Mathematiker unserer Zeit erst durch das Studium von Abels durchsichtigen und tiefen Untersuchungen dazu in den Stand gesetzt wurden, die ebenso schwer zugänglichen wie tiefen Ideen von Galois zu verstehen.

Nach meiner Ansicht kann man den Mathematikern noch heute keinen besseren Rat geben, als Abels Werke im Original zu lesen.



Verbindung kann ich nicht unterlassen, nochmals zu beklagen, daß der größte analytische Geometer jener Zeit: Julius Plücker, so früh von der Geometrie abgezogen wurde.

**80.** In der $x, y$-Ebene nehmen wir eine algebraische Kurve fünfter Ordnung:

$$\chi(x, y) = 0,$$

die zwei Doppelpunkte erster Ordnung $d$ und $\delta$ besitzt. Dabei wollen wir keineswegs die Möglichkeit ausschließen, daß diese Kurve noch weitere singuläre Punkte enthält, oder daß sie sogar in einfachere Kurven zerfällt.

Die Kurve $\chi(x, y) = 0$, die gegeben sein soll, schneiden wir mit einem veränderlichen Kegelschnitte:

(1) $$a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 = 0,$$

der durch die Doppelpunkte $d$ und $\delta$ hindurchgeht und somit die Kurve $\chi = 0$ in sechs veränderlichen Punkten:

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots;\ x_6, y_6$$

trifft. Bilden wir dann nach Abels Vorschrift (vgl. die von Sylow und mir besorgte neue Ausgabe von Abels Werken, Bd. I, S. 167) das Integral:

$$\int \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y + \bar{a}_3 x^2 + \bar{a}_4 xy + \bar{a}_5 y^2}{\chi_y'}\, dx$$

für jeden unter den sechs veränderlichen Schnittpunkten $x_1, y_1; \ldots; x_6, y_6$, so hat die Summe dieser sechs Integrale:

$$\sum_k^{12\ldots 6} \int \frac{\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x_k + \bar{a}_2 y_k + \bar{a}_3 x_k^2 + \bar{a}_4 x_k y_k + \bar{a}_5 y_k^2}{\chi'_{y_k}}\, dx_k$$

immer einen konstanten Wert.

Es ist hierbei unsere Voraussetzung, daß auch der Ausdruck:

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 y + \bar{a}_3 x^2 + \bar{a}_4 xy + \bar{a}_5 y^2,$$

dessen Koeffizienten $\bar{a}_0, \ldots, \bar{a}_5$ gegebene Konstanten bezeichnen, in [244 den beiden Doppelpunkten $d$ und $\delta$ verschwindet.

**81.** Die sechs veränderlichen Parameter $a_0, \ldots, a_5$ sind durch zwei lineare und homogene Relationen gebunden, die davon herrühren, daß der veränderliche Kegelschnitt durch die beiden Doppelpunkte $d$ und $\delta$ gehen soll. Greifen wir daher unter allen Kegelschnitten (1), die unsere Bedingung erfüllen, vier heraus:

$$f_1(x, y) = 0,\quad f_2 = 0,\quad f_3 = 0,\quad f_4 = 0,$$

die keine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten:

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_3 f_3 + e_4 f_4 = 0$$

befriedigen, so ist:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = 0$$

die allgemeine Gleichung aller Kegelschnitte, die durch $d$ und $\delta$ gehen.

Setzen wir nun:

$$\int \frac{f_i(x, y)\, dx}{\chi_y'} = \varphi_i(x),$$

bilden wir ferner, indem wir unter:

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots;\ x_6, y_6$$

die sechs veränderlichen Schnittpunkte der festen Kurve $\chi = 0$ mit einem veränderlichen Kegelschnitte der Schar:

$$c_1 f_1 + \cdots + c_4 f_4 = 0$$

verstehen, für jedes $i$ die Summe:

$$\sum_k^{1\ldots 6} \int \frac{f_i(x_k, y_k)\, dx_k}{\chi_{y_k}'} = \varphi_i(x_1) + \cdots + \varphi_i(x_6),$$

so ist diese Summe für jedes $i$ gleich einer Konstanten, die wir ohne Beschränkung gleich Null setzen können.

Wir erhalten also vier linear unabhängige Gleichungen von der Form:

$$\varphi_1(x_1) + \varphi_1(x_2) + \cdots + \varphi_1(x_6) = 0,$$
$$\varphi_2(x_1) + \varphi_2(x_2) + \cdots + \varphi_2(x_6) = 0,$$
$$\varphi_3(x_1) + \varphi_3(x_2) + \cdots + \varphi_3(x_6) = 0,$$
$$\varphi_4(x_1) + \varphi_4(x_2) + \cdots + \varphi_4(x_6) = 0.$$

**82.** Daß diese Gleichungen eine Lösung unseres allgemeinen Pro- [245
blems liefern, folgt daraus, daß die sechs Koordinaten $x_1, \ldots, x_6$ durch drei und nur drei Relationen gebunden sind, weil durch die beiden Doppelpunkte $d$, $\delta$ und drei auf $\chi = 0$ beliebig gewählte Punkte $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3$ immer ein ganz bestimmter Kegelschnitt hindurchgeht, der $\chi = 0$ in drei weiteren Punkten schneidet.

Wir fügen hinzu, daß die hiermit gefundene Lösung unseres allgemeinen Problems insbesondere eine Lösung des spezielleren Problems darstellt, das wir als das reduzierte Problem bezeichnet haben. Wäre nämlich zum Beispiel die Größe $x_4$ eine Funktion von $x_1$ und $x_2$ allein, so würden alle $\infty^1$ Kegelschnitte, die mit der festen Kurve $\chi = 0$ die vier Punkte:

$$d, \delta;\ x_1, y_1;\ x_2, y_2$$

gemein haben, diese Kurve in noch einem festen Punkte, nämlich $x_4$, $y_4$ schneiden.



**83.** Wir können daher das folgende Theorem aufstellen:

**Theorem X. Wir finden eine Lösung unseres reduzierten Problems in der folgenden Weise.**

**Wir nehmen eine irreduzible oder zerfallende Kurve fünfter Ordnung $\chi(x, y) = 0$ mit zwei Doppelpunkten $d$, $\delta$ und bestimmen den allgemeinen Kegelschnitt:**

$$c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = 0,$$

**der durch $d$ und $\delta$ hindurchgeht. Bezeichnen wir nun die sechs veränderlichen Schnittpunkte eines solchen Kegelschnitts mit der Kurve $\chi = 0$ durch:**

$$x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots;\ x_6, y_6$$

**und setzen:**

$$\int^{x_k} \frac{f_i(x_k, y_k)\, dx_k}{\chi_{y_k}'} = \varphi_i(x_k),$$

**(wobei zu beachten ist, daß die sechs Integrale $\varphi_i(x_1)$, $\varphi_i(x_2)$, …, $\varphi_i(x_6)$, sobald die Kurve $\chi = 0$ zerfällt, verschiedene Formen haben werden), so bestehen vier Gleichungen von der Form:**

$$0 = \varphi_i(x_1) + \varphi_i(x_2) + \varphi_i(x_3) + \varphi_i(x_4) + \varphi_i(x_5) + \varphi_i(x_6).$$

**Es stellen daher die vier Gleichungen:** [246

$$\mathfrak{x}_i = \varphi_i(t_1) + \varphi_i(t_2) + \varphi_i(t_3) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

**eine Translations-$M_3$ dar, die auch durch die Gleichungen:**

$$\mathfrak{x}_i = -\varphi_i(t_4) - \varphi_i(t_5) - \varphi_i(t_6) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

**definiert wird.**

**Die Parameter $t_4$, $t_5$ und $t_6$ drücken sich als algebraische Funktionen von $t_1$, $t_2$ und $t_3$ aus, und zwar sind die neun Ableitungen von $t_4$, $t_5$ und $t_6$ nach $t_1$, $t_2$ und $t_3$ sämtlich von Null verschieden.**

**84.** In der $x, y$-Ebene gibt es $\infty^{20}$ verschiedene Kurven fünfter Ordnung. Unter ihnen gibt es $\infty^{18}$, die zwei Doppelpunkte erster Ordnung besitzen. Jede derartige Kurve liefert eine Translations-$M_3$, die unsere Forderungen erfüllt. Das Abelsche Theorem gibt uns daher, wie eine Abzählung zeigt, $\infty^{29}$ verschiedene $M_3$, die Lösungen des reduzierten Problems darstellen.

Auf der anderen Seite erkennen wir durch Betrachtungen, die mit den in meiner Abhandlung über „Translationsflächen und das Abelsche Theorem“ [hier Abh. XIII] durchgeführten Entwickelungen große Ähnlichkeit darbieten, daß unser reduziertes Problem gerade $\infty^{29}$ Lösungen besitzt, die sich überdies durch Anfangsbedingungen eindeutig bestimmen lassen.

Wir können daher das folgende Theorem aufstellen:

**Theorem XI. Alle $M_3$ des Raumes: $x_1, x_2, x_3, x_4$, die in mehrfacher Weise als Translations-$M_3$ aufgefaßt werden können, zerfallen in drei Hauptkategorien, deren jede mehrere Unterklassen umfaßt.**

**Die $M_3$ der ersten Kategorie werden erhalten, wenn man das Abelsche Theorem in der früher angegebenen Weise auf eine ebene Kurve fünfter Ordnung mit zwei oder noch mehr Doppelpunkten anwendet; da diese Kurve irreduzibel oder reduzibel sein kann, erhält man mehrere Unterklassen, die wir hier nicht aufzählen.**

**Die $M_3$ der zweiten Kategorie werden erhalten, wenn auf eine nicht developpable Fläche des Raumes $x_1, \ldots, x_4$, die in zweifacher Weise als Translationsfläche aufgefaßt werden kann, einfach unendlich viele Translationen des Raumes $x_1, \ldots, x_4$ ausgeführt** |247 **werden, die keine kontinuierliche Gruppe bilden.**

**Die $M_3$ der dritten Kategorie sind developpabel und zwar entweder zylindrisch oder eben: in einem früheren Theoreme sind alle $M_3$ dieser dritten Kategorie aufgezählt.**

**85.** Da die letzten Entwickelungen dieser Abhandlung in sehr knapper Form dargestellt worden sind, werden wir bei einer anderen Gelegenheit diesen Gegenstand ausführlicher behandeln. Gleichzeitig werden wir die wichtigeren Unterklassen unserer drei $M_3$-Kategorien genauer diskutieren.

Zu diesem Zwecke dehnen wir unter anderm unsere alten Untersuchungen über die logarithmische Transformation und den tetraedralen Linienkomplex auf $n$ Dimensionen aus. Indem wir dabei unter anderm die Formel:

$$\log x_k = \int \frac{F_1(f_1)\,df_1}{a_k + f_1} + \int \frac{F_2(f_2)\,df_2}{a_k + f_2} + \int \frac{F_3(f_3)\,df_3}{a_k + f_3}$$

aufstellen und zunächst dem Index $k$ die Werte 1, 2, 3 erteilen, erhalten wir im Raume $x_1, x_2, x_3$ drei Flächenscharen; jede Fläche einer Schar wird von allen Flächen der beiden anderen Scharen nach Kurven geschnitten, die im Dupinschen Sinne konjugiert sind. Erteilen wir dagegen $k$ die Werte 1, 2, 3, 4, so erhalten wir im Raume $x_1, \ldots, x_4$ eine Mannigfaltigkeit: $x_4 = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, oder sagen wir: $z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, deren zugehörige Mongesche Gleichung:

$$\sum \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}\, dx_i\, dx_k = 0,$$

sowie die entsprechende partielle Differentialgleichung erster Ordnung integriert werden können.



Diese beiden Sätze werden auf $n$ Dimensionen ausgedehnt. In dieser Weise ergeben sich viele Resultate, die unter funktionentheoretischem, wie geometrischem Gesichtspunkte bedeutendes Interesse darbieten.[1]

---

1) Hier mögen noch die beiden folgenden Bemerkungen ihren Platz finden.

Das Problem, alle Transformationen einer nichtintegrabeln Pfaffschen Gleichung $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$ zu finden, die Integralkurven, die einander berühren, in ebensolche überführen, deckt sich, wie ich schon im Jahre 1871 angedeutet [248 habe, mit der Bestimmung aller Oskulationstransformationen der Ebene, die implizite in meiner Arbeit „Über Komplexe etc." geleistet wurde (Math. Ann. Bd. V [hier Abh. I]).

Enthält eine gemischte Gruppe $m$ Scharen, deren Transformationen $T_1, T_2, \ldots, T_m$ heißen, so besteht immer eine symbolische Gleichung $T_i T_k = T_\nu$. Hiermit ist eine Substitutionengruppe $S$ bestimmt.

Wird ein Integrationsproblem von dieser gemischten Gruppe beherrscht, so beruht alles auf der Zusammensetzung der Substitutionengruppe $S$ und der Zusammensetzung einer kontinuierlichen Gruppe $T_k$. Man integriert zuerst eine Differentialgleichung, oder ein System von Differentialgleichungen, dessen Beschaffenheit nur von der Zusammensetzung der betreffenden kontinuierlichen (endlichen oder unendlichen) Gruppe $T_k$ abhängt. Sodann hat man ein funktionentheoretisches Problem zu erledigen, dessen Beschaffenheit von der Zusammensetzung der diskontinuierlichen Gruppe $S$ abhängt. Diese Gruppe $S$ kann nur dann eine unendliche sein, wenn die Zahl $m$ unendlich groß ist.

## XV.

## Liniengeometrie und Berührungstransformationen. [687

Leipz. Ber. 1897, Heft V, VI, abgeliefert 11. 3. 1898, S. 687—740. Vorgelegt in der Sitzung vom 6. 12. 1897.

**1.** Es waren liniengeometrische Untersuchungen, die mich in den Jahren 1869—1872 zur Begründung der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen und der Transformationsgruppen veranlaßten. Die hervorragende Wichtigkeit und der große Umfang dieser neuen Disziplinen zogen mich bald von der Geometrie ab, wenngleich viele von mir gestellte und nur unvollständig behandelte geometrische Probleme mich fortwährend lebhaft interessierten. Einige unter diesen geometrischen Fragen habe ich im Laufe der Jahre wieder aufgenommen und jedenfalls zum Teil vollständig erledigt. In dieser Weise entstanden unter anderm meine zahlreichen Publikationen über Minimalflächen, Translationsflächen und Flächen konstanter Krümmung, sowie meine Arbeiten über das Abelsche Theorem, die noch nicht vollständig in extenso vorliegen.

**2.** In dieser Abhandlung gedenke ich, einige andere analytischgeometrische Fragestellungen, die in meinen alten liniengeometrischen Arbeiten gestreift wurden, in Angriff zu nehmen und hoffentlich in definitiver Weise zu erledigen. Dabei finde ich es zweckmäßig, gewisse Theorien, die ich früher in zu knapper Form entwickelt habe, ausführlicher darzustellen und zu begründen. In dieser Weise gewinne ich nicht allein eine feste Grundlage für die Entwickelungen dieser Abhandlung, sondern gleichzeitig auch einen zweckmäßigen Ausgangspunkt für künftige Publikationen, die sich auf semilineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Systeme Pfaffscher Gleichungen und Involutionssysteme höherer Ordnung beziehen werden.

### § 1. Bestimmung aller (algebraischen) irreduzibeln Linienkomplexe, deren Komplexkegel zerfallen. [688

**3.** Es ist wohlbekannt, daß es algebraische Flächen gibt, die jede Tangentialebene nach einer zerfallenden Kurve schneiden, obgleich die Cartesische Gleichung: $\Omega(x, y, z) = 0$ der betreffenden Fläche irreduzibel



ist; diese Eigenschaft besitzen ja nicht allein alle Regelflächen von dritter oder höherer Ordnung, sondern zugleich die Steinersche Fläche vierter Ordnung und dritter Klasse. Diese längst bekannten Tatsachen führen naturgemäß zu der Frage nach allen irreduzibeln algebraischen Flächen, die jede Tangentialebene nach einer zerfallenden Kurve schneiden.

Soweit mir bekannt, ist diese interessante Frage noch nicht erledigt worden; es liegt allerdings nahe, zu vermuten, daß die eben genannten Flächen die einzigen sind, welche die betreffende Eigenschaft besitzen.

In der Liniengeometrie kann man sich mehrere analoge Fragen vorlegen, und in der Tat ist es ein derartiges Problem, das ich in diesem ersten Paragraphen behandeln und erledigen werde. Um mich klar und scharf ausdrücken zu können, schicke ich einige einleitende Bemerkungen voraus.

**4.** Eine Gleichung von der Form:

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

die in den Differentialen $dx, dy, dz$ homogen ist, bestimmt für meine Auffassung $\infty^4$ Linienelemente des Raumes, und zwar ordnet sie jedem Raumpunkte $x, y, z$ einfach unendlich viele Linienelemente zu, die einen „Elementarkegel“ bilden. Ist $\Phi$ linear in $dx, dy, dz$:

$$\Phi = A dx + B dy + C dz,$$

so nennt man $\Phi = 0$ eine Pfaffsche Gleichung, und dann bilden alle dem Punkte $x, y, z$ zugeordneten Linienelemente ein ebenes Strahlenbüschel (oder mehrere ebene Strahlenbüschel); in diesem Falle sind also die Elementarkegel lauter Ebenen.

Ist $\Phi$ dagegen vom zweiten Grade, und besitzt somit die Mongesche Gleichung $\Phi = 0$ die Form:

$$0 = A dx^2 + B dy^2 + C dz^2 + 2 D dy dz + 2 E dz dx + 2 F dx dy,$$

so sind die Elementarkegel im allgemeinen Kegel zweiten Grades. Verschwindet aber für einen Punkt $x, y, z$ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix},$$ [689

so zerfällt der diesem Punkte zugeordnete Elementarkegel zweiten Grades in Ebenen. Verschwindet die obenstehende Determinante identisch, das heißt, für jedes Wertsystem $x, y, z$, so zerfallen alle Elementarkegel in Ebenen. In diesem letzten Falle reduziert sich die vorgelegte Mongesche Gleichung auf eine Pfaffsche Gleichung:

$$L dx + M dy + N dz = 0,$$

deren Koeffizienten $L, M, N$ allerdings im allgemeinen keine eindeutigen Funktionen von $x, y, z$ sein werden.

**5.** Im folgenden setzen wir zunächst voraus, daß $\Phi$ eine algebraische Funktion der Größen $x, y, z, dx, dy, dz$ darstellt, und können dementsprechend annehmen, daß die linke Seite der Mongeschen Gleichung: $\Phi = 0$ die Form einer ganzen Funktion ihrer Argumente besitzt. In Übereinstimmung mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauche sagen wir dann, daß die algebraische Mongesche Gleichung: $\Phi = 0$ irreduzibel ist, wenn sich die ganze und in den Differentialen homogene Funktion $\Phi$ nicht in Faktoren: $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ zerlegen läßt, die selbst ganze und [in den Größen $dx, dy, dz$] homogene Funktionen von $x, y, z, dx, dy, dz$ darstellen.

Liegt eine reduzible algebraische Gleichung: $\Phi = 0$ vor, und zerlegt sich dementsprechend $\Phi$ in Faktoren: $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, die selbst als ganze Funktionen der unabhängigen Veränderlichen auftreten, so zerfällt die Schar aller $\infty^4$ Linienelemente, die $\Phi = 0$ befriedigen, in mehrere getrennte Scharen, unter denen eine durch die Gleichung: $\Phi_1 = 0$ definiert wird, eine andere durch $\Phi_2 = 0$, und so weiter.

Liegt eine solche reduzible, algebraische Gleichung:

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

vor, so leuchtet unmittelbar ein, daß diese Gleichung auch dann reduzibel bleibt, wenn die Größen $x, y, z$ als konstante, die Differentiale $dx, dy, dz$ dagegen als veränderliche Größen betrachtet werden. Die durch einen Punkt $x, y, z$ von allgemeiner Lage gehenden Linienelemente einer reduzibeln algebraischen Mongeschen Gleichung: $\Phi = 0$ bilden daher immer einen zerfallenden algebraischen Kegel.

**6.** Es ist aber wohl zu beachten, daß man aus dem Umstande, [690
daß die Elementarkegel von allgemeiner Lage einer algebraischen Mongeschen Gleichung zerfallen, keineswegs schließen darf, daß diese Gleichung selbst reduzibel ist. Es ist eben sehr gut möglich, daß eine irreduzible Gleichung:

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

reduzibel wird, wenn die Größen $x, y, z$ beliebige konstante Werte $x_0, y_0, z_0$ erhalten, und dementsprechend in der Gleichung:

$$\Phi(x_0, y_0, z_0, dx, dy, dz) = 0$$

nur die Differentiale $dx, dy, dz$ als veränderlich betrachtet werden. In dieser Lage befindet sich zum Beispiel die irreduzible Mongesche Gleichung:

$$(ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2 = 0,$$



deren Elementarkegel jedesmal in zwei Ebenen zerfallen, die den imaginären Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ berühren.

**7.** Wenn die Elementarkegel von allgemeiner Lage einer irreduzibeln Mongeschen Gleichung: $\Phi = 0$ in mehrere Kegel zerfallen, so haben die entstehenden Teilkegel immer dieselbe Ordnung.

Um dies allgemein zu beweisen, genügt es, ein einzelnes Beispiel zu erledigen. Das hierbei angewandte Beweisverfahren führt immer zum Ziele.

Wir wollen annehmen, daß eine algebraische Mongesche Gleichung: $\Phi = 0$ vorliegt, die in den Differentialen $dx, dy, dz$ vom Grade sieben ist, und daß wir von vornherein wissen, daß ihre Elementarkegel von allgemeiner Lage in zwei Kegel zweiten Grades und drei Kegel ersten Grades zerfallen. Wir behaupten, daß sich dann beweisen läßt, daß die Gleichung: $\Phi = 0$ reduzibel ist.

Die Teilkegel zweiten Grades unserer Mongeschen Gleichung werden durch eine Gleichung:

$$0 = Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + 2Ddydz + 2Edzdx + 2Fdxdy$$

dargestellt, deren Koeffizienten allerdings keine eindeutigen Funktionen von $x, y, z$ sind. Setzen wir einen unter diesen Koeffizienten, zum Beispiel $F$ gleich 1, was immer gestattet ist, so werden die übrigen Koeffizienten zweideutige algebraische Funktionen von $x, y, z$. Sind dabei $A_1$ und $A_2$ die beiden irrationalen Funktionenwerte von $A$, ferner $B_1$ und $B_2$ [691
die beiden irrationalen Funktionenwerte von $B$, und so weiter, so drückt sich $B_1$, wenn nicht $A_1$ und $A_2$ zufälligerweise dieselbe Form haben, rational durch $A_1, x, y, z$ aus. Hieraus folgt aber in bekannter Weise, daß sich das Produkt:

$$(A_1dx^2 + B_1dy^2 + \cdots + 2dxdy)(A_2dx^2 + B_2dy^2 + \cdots + 2dxdy)$$

als eine rationale Funktion von $x, y, z, dx, dy, dz$ darstellen läßt, die in den Differentialen homogen und vom vierten Grade ist.

Im vorliegenden Falle zerlegt sich somit die ganze Funktion $\Phi(x, y, z, dx, dy, dz)$ in zwei ganze rationale Faktoren $\Phi_1$ und $\Phi_2$, unter denen $\Phi_1$ vom Grade vier, $\Phi_2$ vom Grade drei in den Differentialen sein muß. Diese Betrachtungen, die sich ohne weiteres verallgemeinern lassen, liefern uns den

**Satz 1.** Zerfallen die Elementarkegel von allgemeiner Lage einer irreduzibeln algebraischen **Monge**schen Gleichung in mehrere Kegel, so haben [alle] diese Teilkegel dieselbe Ordnung.

Dieser Satz bleibt offenbar auch dann gültig, wenn die betreffende Mongesche Gleichung die Form:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n) = 0$$

besitzt.

**8.** Setzen wir insbesondere voraus, daß sich unsere algebraische Funktion $\Phi$ der Größen $x, y, z, dx, dy, dz$ überdies als eine Funktion und zwar als eine ganze und homogene Funktion der Veränderlichen: $dx, dy, dz, zdy - ydz, xdz - zdx, ydx - xdy$:

$$\Phi = H(dx, dy, dz, zdy - ydz, xdz - zdx, ydx - xdy)$$

darstellen läßt, so besitzt die Mongesche Gleichung: $\Phi = 0$ dreifach unendlich viele geradlinige Integralkurven, die einen Plückerschen Linienkomplex bestimmen. Und es ist bekannt, daß die Gleichung: $H = 0$ unter den gemachten Voraussetzungen als die allgemeine analytische Darstellung eines algebraischen Linienkomplexes aufgefaßt werden kann.

Wir wollen zunächst beweisen, daß, wenn die Mongesche Gleichung: $\Phi = 0$ eines algebraischen Linienkomplexes $C$ reduzibel ist, und dementsprechend die ganze Funktion $\Phi(x, y, z, dx, dy, dz)$ in die irreduzibeln Faktoren: $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ zerfällt, daß dann eine jede unter den [692
Gleichungen: $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0, \ldots$ einen algebraischen Linienkomplex definiert, der in dem Komplexe $C$ enthalten ist.

Jede Integralkurve der Gleichung: $\Phi_1 = 0$ befriedigt selbstverständlich auch $\Phi = 0$, und also gehören alle Tangenten dieser Kurve dem Komplexe $C$ an. Es müssen andererseits alle Linienelemente einer solchen Tangente die Gleichung: $\Phi_1 = 0$ befriedigen, die jedoch nicht weniger als $\infty^4$ Linienelemente bestimmen darf. Also ist $\Phi_1 = 0$ die Mongesche Gleichung eines algebraischen Linienkomplexes, der eo ipso in dem vorgelegten Komplexe $C$ enthalten ist.

Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen, und es gilt daher der

**Satz 2.** Ist die **Monge**sche Gleichung:

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

eines algebraischen Linienkomplexes reduzibel, so zerfällt der Komplex selbst in mehrere algebraische Linienkomplexe.[1])

1) Die Entwickelungen des Textes können nach vielen Richtungen verallgemeinert werden. So bleibt zum Beispiel der Satz 2 des Textes noch gültig, wenn wir Mongesche Gleichungen in $n$ Veränderlichen:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, dx_1, \ldots, dx_n) = 0$$

betrachten, die $\infty^{2n-3}$ algebraische Integralkurven besitzen, die keine andere Mongesche Gleichung als $\Phi = 0$ befriedigen.



**9.** Beachten wir andererseits, daß ein algebraischer Linienkomplex, dessen Gleichung in den Plückerschen Linienkoordinaten $r, s, \varrho, \sigma$ die Form:

$$\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$

besitzt, dann und nur dann in mehrere Komplexe zerfällt, wenn die Gleichung: $\Omega = 0$ reduzibel ist, so erhalten wir den

**Satz 3.** Die **Plücker**sche Gleichung:

$$\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$

eines algebraischen Linienkomplexes ist dann und nur dann reduzibel, wenn die **Monge**sche Gleichung:

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

des Komplexes reduzibel ist.[1])

**10.** Eine dualistische Transformation des Raumes verwandelt [693
Punkt in Ebene, Ebene in Punkt, Gerade in Gerade und Linienkomplex in Linienkomplex. Diejenigen Geraden eines Komplexes, die durch einen Punkt gehen, werden dabei in solche Gerade des transformierten Linienkomplexes übergeführt, die in einer Ebene liegen. Wir drücken diese Tatsache kürzer aus, indem wir sagen, daß eine dualistische Transformation des Raumes die Komplexkegel eines Linienkomplexes in die ebenen Geradensysteme[2]) des transformierten Komplexes überführt.

Indem wir diese Betrachtungen mit den vorhergehenden Entwickelungen und insbesondere mit dem Satze 1 verbinden, erhalten wir den

**Satz 4.** Zerfallen die ebenen Geradensysteme eines irreduzibeln algebraischen Linienkomplexes: $\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$ in mehrere irreduzible Geradensysteme $G_1, G_2, \ldots$, so haben alle Systeme $G_1, G_2, \ldots$ dieselbe Klasse.

**11.** Es ist nicht schwer, irreduzible algebraische Linienkomplexe anzugeben, deren Komplexkegel oder ebene Geradensysteme in mehrere Teile

1) Der Satz 3 des Textes darf nicht mit dem liniengeometrischen Satze verwechselt werden, den Klein im Jahre 1871 in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte. Der schöne Satz von Klein besagt, daß jeder algebraische Linienkomplex durch eine einzige homogene Gleichung in den sechs Graßmann-Cayleyschen Linienkoordinaten dargestellt werden kann.

2) Wenn wir im Texte nicht von den „ebenen Komplexkurven“ sondern von den „ebenen Geradensystemen“ eines Linienkomplexes reden, so liegt das selbstverständlich daran, daß die in einer Ebene gelegenen Geraden eines Linienkomplexes unter Umständen keine Kurve umhüllen, sondern ein oder mehrere Strahlenbüschel bilden.

zerfallen. Die Tangenten einer irreduzibeln developpabeln Fläche bilden ja einen irreduzibeln algebraischen Linienkomplex, dessen Kegel in $m$ Ebenen zerfallen, dabei vorausgesetzt, daß $m$ die Klasse der betreffenden developpabeln Fläche bezeichnet. Es bilden andererseits die Treffgeraden einer irreduzibeln algebraischen Raumkurve einen irreduzibeln Linienkomplex, dessen ebene Geradensysteme in Strahlenbüschel zerfallen, deren Anzahl gleich ist der Ordnung der betreffenden algebraischen Kurve.

**12.** Jetzt stellen wir das Problem:

*Alle irreduzibeln algebraischen Linienkomplexe:*

$$\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$

*zu finden, deren Komplexkegel von allgemeiner Lage in mehrere Kegel zerfallen.*

Nach den vorhergehenden Entwickelungen kann dieses Problem auch die folgende Gestalt erhalten:

*Es sollen alle algebraischen und homogenen Gleichungen von der Form:*

$$H(dx, dy, dz, ydz - zdy, zdx - xdz, xdy - ydx) = 0$$ [694

*gefunden werden, die zwar in den Veränderlichen: $x, y, z, dx, dy, dz$ irreduzibel sind, aber reduzibel werden, sobald die Größen $x, y, z$ allgemeine konstante Werte erhalten.*

Berücksichtigen wir die früheren Bemerkungen über dualistische Transformationen eines algebraischen Linienkomplexes, so sehen wir, daß unser Problem mit dem folgenden Probleme, wenn auch nicht identisch, doch jedenfalls äquivalent ist:

*Alle irreduzibeln algebraischen Linienkomplexe:*

$$\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$

*zu finden, deren ebene Geradensysteme von allgemeiner Lage in mehrere Systeme zerfallen.*

Durch Betrachtungen, die ich jetzt auseinandersetzen werde, bin ich zu dem wichtigen, wenn auch nicht grade unerwarteten Resultate gekommen, daß jeder irreduzible algebraische Linienkomplex, dessen Komplexkegel von allgemeiner Lage zerfallen, aus den Tangenten einer developpabeln Fläche besteht, daß ferner jeder irreduzible algebraische Linienkomplex, dessen ebene Geradensysteme von allgemeiner Lage zerfallen, nur die Treffgeraden einer Raumkurve umfaßt.

**13.** Wir versuchen zunächst, alle irreduzibeln algebraischen Linienkomplexe zu bestimmen, deren Komplexkegel von allgemeiner Lage in lauter *Ebenen* zerfallen.



Besitzt ein Linienkomplex $m$-ten Grades diese Eigenschaft, so zerfällt jeder Komplexkegel in $m$ Ebenen, die durch die Gleichung:

$$uX + vY + wZ + 1 = 0$$

mit den laufenden Koordinaten $X, Y, Z$ dargestellt sein mögen. Sind $x, y, z$ die Scheitelkoordinaten des betreffenden Komplexkegels, so drücken sich die Bestimmungsstücke $u, v, w$ der dem Punkte $x, y, z$ zugeordneten Ebenen als algebraische und $m$-deutige Funktionen von $x, y, z$ aus:

$$(1) \qquad u = U(x, y, z), \quad v = V(x, y, z), \quad w = W(x, y, z).$$

Hier sind nun von vornherein drei Fälle denkbar, jenachdem die Größen $u, v, w$ durch *keine* Gleichung, oder durch *eine* Gleichung, oder sogar durch *zwei* Gleichungen verbunden sind, die $x, y, z$ nicht enthalten.

Es ist aber leicht zu sehen, daß die Annahme, daß $u, v, w$ eine [695 und nur eine Gleichung erfüllen, die von $x, y, z$ frei ist, auf Widerspruch führt und also unmöglich ist. Wären nämlich $u, v, w$ durch eine einzige Gleichung: $w = \vartheta(u, v)$ gebunden, so enthielte eine jede unter den $\infty^2$ Ebenen:

$$(2) \qquad uX + vY + \vartheta(u, v)Z + 1 = 0$$

einfach unendlich viele Strahlenbüschel des Komplexes, und es wäre dementsprechend jede Gerade einer solchen Ebene eine Komplexlinie. Und da durch jeden Punkt des Raumes einfach unendlich viele Ebenen gehen, die der Schar (2) angehören, so müßte jede Gerade des Raumes eine Komplexlinie sein. Die Annahme, daß $u, v, w$ durch eine einzige Gleichung verbunden sind, führt also wirklich auf Widerspruch.

Dagegen ist es sehr wohl denkbar, daß die Ebenenkoordinaten $u, v, w$ zwei und nur zwei Relationen erfüllen, die von $x, y, z$ frei sind. Alsdann verteilen sich alle $\infty^3$ Komplexlinien auf $\infty^1$ Scharen, deren jede alle Geraden einer Ebene umfaßt, und der Komplex besteht dementsprechend aus allen Tangenten einer algebraischen developpabeln Fläche.

Wie wir wiederholt bemerkt haben, zerfallen die Komplexkegel in diesem Falle wirklich in ebene Strahlenbüschel. Und der betreffende Linienkomplex ist offenbar irreduzibel, wenn die besprochene developpable Fläche selbst irreduzibel ist.

Es bleibt jetzt nur noch die Annahme übrig, daß sich aus den Gleichungen (1) keine von $x, y, z$ freie Relation zwischen $u, v, w$ herleiten läßt. Alsdann enthält jede Ebene des Raumes (mindestens) ein Strahlenbüschel, dessen Gerade dem vorliegenden Linienkomplexe angehören. Und da unser Komplex irreduzibel sein soll, so müssen (Satz 4) alle ebenen

Geradensysteme des Komplexes in lauter Strahlenbüschel zerfallen. Durch relativ einfache Betrachtungen ist es uns hiermit gelungen, den folgenden Satz zu beweisen:

**Satz 5.** Zerfallen die Komplexkegel von allgemeiner Lage eines irreduzibeln algebraischen Linienkomplexes in lauter Ebenen, so zerfallen [entweder] auch die ebenen Geradensysteme des Komplexes in lauter Strahlenbüschel, oder der Komplex besteht aus allen Tangenten einer [irreduzibeln] developpabeln Fläche.

**14.** Zerfällt der einem Punkte $x, y, z$ von allgemeiner Lage zugeordnete Komplexkegel in $m$ Ebenen, so schneiden diese Ebenen einander [696 (höchstens) nach $\frac{1}{2}m(m-1)$ Geraden. Unter den Linienelementen, welche die Mongesche Gleichung: $\Phi = 0$ unseres Komplexes befriedigen, gibt es daher in jedem Punkte von allgemeiner Lage höchstens $\frac{1}{2}m(m-1)$, welche gleichzeitig zwei verschiedenen Strahlenbüscheln des Komplexes angehören. Diese Linienelemente, die gewissermaßen als Doppelelemente der Mongeschen Gleichung unseres Komplexes auftreten, befriedigen eine zu $\Phi = 0$ hinzutretende Differentialgleichung:

$$M(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

die immer aufgestellt werden kann. Und da das simultane System:

$$\Phi = 0, \quad M = 0$$

nur zweifach unendlich viele Integralkurven besitzt, so enthält unser Linienkomplex jedenfalls nicht mehr als $\infty^2$ Gerade, welche die Differentialgleichung: $M = 0$ erfüllen.

**15.** Nehmen wir andererseits eine Ebene $E_0$ von allgemeiner Lage, so bilden die Komplexlinien dieser Ebene $m$ Strahlenbüschel, deren Scheitel (höchstens) $\frac{1}{2}m(m-1)$ verschiedene Verbindungslinien besitzen. Unter den Komplexlinien dieser Ebene können wir somit immer eine herausgreifen, welche nur einem Strahlenbüschel der Ebene angehört und welche überdies die Differentialgleichung: $M = 0$ nicht befriedigt. Ist $g_0$ eine Komplexlinie, welche diese beiden Forderungen erfüllt, so wollen wir alle Strahlenbüschel des Komplexes konstruieren, die $g_0$ enthalten.

Wir behaupten, daß diese $\infty^1$ Strahlenbüschel ein Strahlensystem erster Ordnung erzeugen; dies folgt unmittelbar daraus, daß in $E_0$ und also auch in jeder anderen durch $g_0$ gehenden Ebene von allgemeiner Lage nur ein Strahlenbüschel des Komplexes gelegen ist, das $g_0$ enthält. Wir können hinzufügen, obgleich dies für unsere Entwickelungen unwesentlich ist, daß unsere Betrachtungen und Konstruktionen einen dualistischen



Charakter haben, und daß daher unser Strahlensystem nicht allein von erster Ordnung, sondern zugleich von erster Klasse ist.

Es ist leicht, zu beweisen, daß nicht alle Geraden des konstruierten Strahlensystems die Differentialgleichung: $M = 0$ befriedigen können. Aus dem Umstande, daß $g_0$ diese Gleichung nicht erfüllt, folgt ja unmittelbar, daß [auch] die zu $g_0$ benachbarten Geraden des Strahlensystems $M = 0$ nicht befriedigen. [697

**16.** Durch jeden Punkt $p$ von allgemeiner Lage geht eine einzige Gerade unseres Strahlensystems, und diese Gerade gehört nur einem Strahlenbüschel des Komplexes an, dessen Scheitel in $p$ gelegen ist. Also ist es uns gelungen, jedem Punkte des Raumes ein einziges Büschel von Linienelementen der Gleichung $\Phi = 0$ zuzuordnen, und der Inbegriff dieser Linienelemente wird durch eine Pfaffsche Gleichung:

$$Ldx + Mdy + Ndz = 0$$

mit rationalen Koeffizienten definiert. Es ist daher die Mongesche Gleichung: $\Phi = 0$ des vorliegenden Linienkomplexes reduzibel, und daraus geht hervor (Satz 2), daß der Komplex ebenfalls reduzibel ist.

Hiermit ist es uns, durch allerdings recht umständliche Betrachtungen, gelungen, den folgenden Satz zu beweisen:

**Satz 6.** Zerfallen die Komplexkegel von allgemeiner Lage eines irreduzibeln algebraischen Linienkomplexes in mehrere Strahlenbüschel, so besteht der Komplex aus allen Tangenten einer irreduzibeln algebraischen Developpabeln.

Und das Prinzip der Dualität gibt sogleich den äquivalenten

**Satz 7.** Zerfallen die ebenen Geradensysteme eines irreduzibeln algebraischen Linienkomplexes in lauter Strahlenbüschel, so besteht der Komplex aus allen Treffgeraden einer irreduzibeln algebraischen Kurve.

**17.** Die hiermit erhaltenen Resultate wollen wir jetzt Schritt für Schritt verallgemeinern.

Zunächst richten wir unsere Aufmerksamkeit auf irreduzible algebraische Linienkomplexe, deren Komplexkegel von allgemeiner Lage in $m$ irreduzible Kegel zweiten Grades $K_1, K_2, \ldots, K_m$ zerfallen. Wählen wir eine Ebene von allgemeiner Lage und darin einen beliebigen Punkt, so gibt es $2m$ Komplexlinien, die in dieser Ebene liegen und durch den betreffenden Punkt hindurchgehen. Diese $2m$ Geraden ordnen sich in $m$ Paare: $g_1, \gamma_1$; $g_2, \gamma_2$; $\ldots$; $g_m, \gamma_m$, und zwar so, daß $g_i$ und $\gamma_i$ jedesmal demselben Kegel $K_i$ angehören. Greifen wir nun unter den Komplexlinien unserer

Ebene eine bestimmte heraus, etwa die Gerade $g_1^0$, so gehen durch jeden Punkt dieser Geraden $2m-1$ weitere Komplexlinien, die ebenfalls in der gewählten Ebene liegen. Diese $2m-1$ Komplexlinien nennen wir [698 naturgemäß $\gamma_1; g_2, \gamma_2; \cdots; g_m, \gamma_m$, und setzen dabei voraus, daß $\gamma_1$ und $g_1^0$ jedesmal auf einem Kegel $K_1$ gelegen sind. In dieser Weise erhalten wir einfach unendlich viele Komplexlinien $\gamma_1$, die ein Geradensystem $\Gamma_1$ bilden. Andererseits erzeugen die $2m-2$ Geraden $g_2, \gamma_2; \cdots; g_m, \gamma_m$ ein Geradensystem, das $G$ heißen möge. Das System aller Komplexlinien, die in unserer Ebene liegen, zerfällt also in zwei getrennte Geradensysteme: $\Gamma_1$ und $G$, deren Klassenzahlen wir jetzt bestimmen wollen.

Die Summe dieser beiden Zahlen ist gleich $2m$, und die Klasse des Systems $G$ ist mindestens gleich $2m-2$; also ist die Klasse des Geradensystems $\Gamma_1$ entweder gleich 2 oder 1. Wäre die Klasse des Systems $\Gamma_1$ gleich 1, so bestände unser irreduzibler Linienkomplex nach den Sätzen 4 und 7 aus allen Treffgeraden einer Raumkurve. Dies steht aber in direktem Widerspruche mit unserer Annahme, daß alle Komplexkegel in irreduzible Kegel zweiten Grades zerfallen. Also ist die Klasse des Systems $G$ gleich $2m-2$. Und da $g_1^0$ offenbar dem Systeme $\Gamma_1$ angehören muß, und diese Gerade eine beliebige Komplexlinie unserer Ebene darstellt, so erkennen wir, daß alle Komplexlinien dieser Ebene $m$ getrennte Scharen bilden, deren jede aus den Tangenten eines irreduzibeln Kegelschnittes besteht.

Es gilt also der

**Satz 8.** Zerfallen die Komplexkegel von allgemeiner Lage eines irreduzibeln algebraischen Linienkomplexes in $m$ irreduzible Kegel zweiten Grades, so zerfallen auch die ebenen Komplexkurven, und zwar in $m$ irreduzible Kegelschnitte.

**18.** In einer Ebene von allgemeiner Lage greifen wir nun eine Komplexlinie $l$ heraus, die nicht zwei verschiedene in dieser Ebene gelegene Komplexkegelschnitte berührt. Alsdann enthält jede durch $l$ gehende Ebene von allgemeiner Lage nur einen Komplexkegelschnitt, der $l$ berührt. Hiermit ist, das werden wir jetzt zeigen, jedem Punkte $p$ des Raumes ein ganz bestimmter Komplexkegel zweiten Grades zugeordnet.

Legen wir in der Tat durch die Gerade $l$ diejenige Ebene, die den Punkt $p$ enthält, und konstruieren wir sodann den in dieser Ebene gelegenen Komplexkegelschnitt, der $l$ berührt, sowie die beiden Tangenten dieses Kegelschnittes, die durch $p$ gehen, so gibt es einen und im allgemeinen nur einen Komplexkegel zweiten Grades, der diese beiden Tangenten enthält.



Die hiermit konstruierten Kegel zweiten Grades sind die Ele- [699 mentarkegel einer Mongeschen Gleichung zweiten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2 + \cdots + 2F\,dx\,dy = 0.$$

Also ist die Mongesche Gleichung: $\Phi = 0$ des ursprünglich vorgelegten Linienkomplexes reduzibel, und das steht in direktem Widerspruche mit unserer Annahme, daß der betreffende Komplex irreduzibel ist.

Wir können daher die beiden folgenden Sätze aufstellen:

**Satz 9.** Es gibt keinen irreduzibeln algebraischen Linienkomplex, dessen Komplexkegel von allgemeiner Lage in mehrere irreduzible Kegel zweiten Grades zerfallen.

**Satz 10.** Es gibt keinen irreduzibeln algebraischen Linienkomplex, dessen ebene Komplexkurven von allgemeiner Lage in mehrere irreduzible Kegelschnitte zerfallen.

**19.** Es ist nun leicht, weiter zu gehen, und zwar werden wir zunächst beweisen, daß die Komplexkegel eines irreduzibeln algebraischen Linienkomplexes nie in irreduzible Kegel dritten Grades zerfallen können.

Zerfällt in der Tat ein Komplexkegel von allgemeiner Lage in $m$ irreduzible Kegel dritten Grades $D_1, D_2, \ldots, D_m$, so ordnen sich die $3m$ Komplexlinien, die in einer beliebig gewählten Ebene liegen und durch einen bestimmten Punkt dieser Ebene hindurchgehen, in $m$ Scharen: $g_1, \mathfrak{g}_1, \gamma_1; g_2, \mathfrak{g}_2, \gamma_2; \cdots; g_m, \mathfrak{g}_m, \gamma_m$, deren jede drei Komplexlinien umfaßt. Greifen wir sodann eine bestimmte Komplexlinie dieser Ebene heraus, etwa die Gerade $g_1^0$, so können wir jedem Punkte dieser Geraden zwei ganz bestimmte Komplexlinien zuordnen, nämlich die Geraden $\mathfrak{g}_1$ und $\gamma_1$, die alle beide in der gewählten Ebene liegen. Die hiermit konstruierten einfach unendlich vielen Komplexlinien $\mathfrak{g}_1, \gamma_1$ bilden ein Geradensystem $\mathfrak{G}_1$. Ziehen wir andererseits durch jeden Punkt der Geraden $g_1^0$ die zugeordneten Geraden $g_2, \mathfrak{g}_2, \gamma_2; \cdots; g_m, \mathfrak{g}_m, \gamma_m$, so erzeugen diese $3(m-1)$ Geraden ein Geradensystem $G$. Es ist dabei nicht schwierig, die Klassenzahlen dieser beiden Geradensysteme zu bestimmen. Denn die Summe dieser Zahlen ist gleich $3m$, und die Klasse des Systems $G$ ist offenbar mindestens gleich $3m-3$, während die Klasse des Systems $\mathfrak{G}_1$ mindestens gleich 2 sein muß und höchstens gleich 3 sein kann.

Wäre nun die Klasse des Systems $\Gamma_1$ kleiner als drei, so zer- [700 fielen die ebenen Geradensysteme unseres irreduzibeln Linienkomplexes nach den vorhergehenden Entwickelungen entweder in $3m$ Strahlenbüschel, oder in $\frac{3}{2}m$ irreduzible Geradensysteme von zweiter Klasse. Die letzte Möglichkeit wird aber nach dem Satze 10 dadurch ausgeschlossen, daß unser Komplex irreduzibel ist. Und die erste Hypothese, die nach dem Satze 7 nach sich ziehen würde, daß alle Komplexlinien Treffgeraden einer Raumkurve wären, scheitert daran, daß es keine irreduzible Kurve gibt, deren Sekanten einen Linienkomplex bilden, dessen Komplexkegel in mehrere irreduzible Kegel dritten Grades zerfallen.

Die Klasse des Geradensystems $\mathfrak{G}_1$ muß daher gleich 3 sein, und infolgedessen zerfallen die ebenen Geradensysteme unseres irreduzibeln Linienkomplexes in lauter Systeme dritter Klasse.

**Satz 11.** Zerfallen die Komplexkegel von allgemeiner Lage eines irreduzibeln algebraischen Linienkomplexes in irreduzible Kegel dritten Grades, so zerfallen auch die ebenen Komplexkurven, und zwar in irreduzible Kurven dritter Klasse.

**20.** Nehmen wir nun eine Komplexlinie $l$ von allgemeiner Lage, so enthält jede durch $l$ gehende Ebene von allgemeiner Lage nur eine Komplexkurve dritter Klasse, die $l$ berührt. Wir können daher jedem Punkte des Raumes einen ganz bestimmten Kegel dritten Grades zuordnen, dessen Gerade Komplexlinien sind. Wir legen zu diesem Zwecke eine Ebene durch $l$ und den betreffenden Punkt $p$, konstruieren sodann die in dieser Ebene gelegene Komplexkurve dritter Klasse, die $l$ berührt, und ziehen endlich die drei durch $p$ gehenden Geraden, welche die Kurve dritter Klasse berühren. Diese drei durch $p$ gehenden Komplexlinien gehören einem ganz bestimmten Kegel dritter Ordnung an, der von Komplexlinien erzeugt ist.

Die hiermit konstruierten Kegel dritter Ordnung sind die Elementarkegel einer Mongeschen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, die in den Differentialen $dx$, $dy$, $dz$ von dritter Ordnung ist. Es ist also die Mongesche Gleichung des Linienkomplexes $3m$-ten Grades reduzibel, und dementsprechend muß auch der Komplex in mehrere Linienkomplexe zerfallen.

Indem wir auf das hiermit gefundene Resultat das Prinzip der Dualität anwenden, können wir unsere Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammenfassen:

**Satz 12.** Es gibt keinen irreduzibeln algebraischen [701 Linienkomplex, dessen Komplexkegel von allgemeiner Lage in irreduzible Kegel dritten Grades zerfallen.

Es ist andererseits auch nicht möglich, daß die ebenen Komplexkurven eines irreduzibeln algebraischen Linienkomplexes in mehrere irreduzible Kurven dritter Klasse zerfallen.



**21.** In genau derselben Weise erkennen wir, daß die Komplexkegel eines irreduzibeln Linienkomplexes nicht in irreduzible Kegel vierter Ordnung zerfallen können, sowie, daß die ebenen Komplexkurven eines derartigen Komplexes nicht in irreduzible Kurven vierter Klasse zerfallen können, und so weiter.

Kurz, wir erhalten das allgemeine Theorem:

**Theorem I. Zerfallen die Komplexkegel von allgemeiner Lage eines irreduzibeln algebraischen Linienkomplexes in mehrere Kegel, so besteht der Komplex aus allen Tangenten einer irreduzibeln algebraischen Developpabeln.**

**Zerfallen die ebenen Geradensysteme von allgemeiner Lage eines irreduzibeln algebraischen Linienkomplexes in mehrere Systeme, so besteht der Komplex aus allen Treffgeraden einer irreduzibeln algebraischen Raumkurve.**

**22.** Die vorhergehenden Entwickelungen können in einer Weise verallgemeinert werden, die jedenfalls im ersten Augenblicke überraschend erscheint.

Wir können nämlich beweisen, daß die Komplexkegel eines transszendenten, durch eine analytische Gleichung definierten Linienkomplexes nie algebraisch sind und auch nicht in unendlich viele algebraische Kegel zerfallen.

Zerfielen die Komplexkegel eines transzendenten Linienkomplexes in algebraische Kegel, die nicht sämtlich dieselbe Ordnung hätten, so könnte man immer unter diesen Kegeln dreifach unendlich viele herausgreifen, deren Ordnung gleich einer bestimmten Zahl $n$ wäre, und könnte sodann die Mongesche Gleichung: $\Phi = 0$ dieser Kegel bilden. Sodann ließe sich durch solche Betrachtungen, wie wir auf S. 692, Z. 4 von oben [hier S. 644, Z. 21] angestellt haben, beweisen, daß die Gleichung: $\Phi = 0$ dreifach unendlich viele geradlinige Integralkurven besitzt, die somit einen Linienkomplex bilden.

**23.** Wir brauchen also nur noch nachzuweisen, daß jeder durch eine analytische Gleichung definierte Linienkomplex, dessen Komplexkegel in lauter algebraische Kegel von derselben Ordnung $n$ zerfallen, not- [702 wendigerweise algebraisch ist.

Es sei ein derartiger Linienkomplex vorgelegt. Wir greifen eine Gerade $g$ von allgemeiner Lage des Komplexes heraus und konstruieren alle Komplexkegel, die $g$ enthalten. Die Komplexlinien dieser $\infty^1$ Kegel $n$-ter Ordnung bilden ein Strahlensystem $S$, und wir behaupten, daß dieses Strahlensystem immer algebraisch ist.

Wir entwickeln die Plückersche Gleichung unseres Linienkomplexes nach dem Taylorschen Theoreme und wählen dabei die Gerade $g$ zur Ausgangsstelle. Nehmen wir sodann die $\nu$ ersten Glieder dieser Reihenentwickelung und setzen deren Summe gleich Null, so definiert die hervorgehende Gleichung, wie groß oder klein auch die ganze Zahl $\nu$ sein mag, immer einen algebraischen Linienkomplex $L_\nu$. Und zwar können wir die Zahl $\nu$ so groß wählen, daß die $\infty^1$ Kegel von der Ordnung $n$, die $g$ enthalten, sämtlich mit dem entsprechenden Kegel des algebraischen Komplexes $L_\nu$ längs $g$ eine Berührung beliebig hoher Ordnung haben. Und da ein Kegel $n$-ter Ordnung durch eine begrenzte Anzahl gerader Erzeugender bestimmt ist, kann die Zahl $\nu$ immer so groß gewählt werden, daß die betreffenden $\infty^1$ Kegel des transzendenten Komplexes durch $L_\nu$ vollständig bestimmt sind. Der erste Komplex $L_\nu$, der diese Bedingungen erfüllt, hängt nur von Konstanten ab, deren Anzahl von vornherein als Funktion von $n$ festgestellt werden kann. Infolgedessen erzeugen die besprochenen $\infty^1$ Kegel $n$-ter Ordnung des transzendenten Linienkomplexes wirklich, wie früher behauptet, ein algebraisches Strahlensystem $S$.

Es gilt also der

**Satz 13.** Zerfallen die Komplexkegel von allgemeiner Lage eines transzendenten Linienkomplexes in algebraische Kegel, so zerfällt auch das Strahlensystem aller Komplexlinien, die eine feste Komplexlinie schneiden, in mehrere Strahlensysteme, unter denen sich jedenfalls ein **algebraisches** Strahlensystem befindet.

**24.** Wir können nun in ganz analoger Weise weiter gehen. Ist $g$ fortwährend eine Gerade von allgemeiner Lage des vorgelegten transzendenten Linienkomplexes, und bezeichnet $g'$ eine benachbarte Gerade des Komplexes, so können wir die Zahl $\nu$ immer so groß wählen, daß der algebraische Linienkomplex $L_\nu$ nicht allein das algebraische Strahlensystem $S$ der Komplexlinie $g$, sondern zugleich das benachbarte algebraische [703 Strahlensystem $S'$ der benachbarten Komplexlinie $g'$ umfaßt.

Nehmen wir nun einen Punkt $P$ von allgemeiner Lage und konstruieren den zugehörigen Komplexkegel des vorgelegten transzendenten Linienkomplexes, und ebenso den Komplexkegel $k_\nu$ des algebraischen Komplexes $L_\nu$, so dürfen wir behaupten[1]), daß diese beiden Kegel zwei unendlich benachbarte Komplexlinien gemein haben, und daß sie einander

1) Die Entwickelungen des Textes bleiben nicht mehr gültig, wenn die Ordnung des Strahlensystemes $S$ gleich Null ist. Von diesem trivialen Ausnahmefalle sehen wir vorläufig ab.



infolgedessen längs einer Komplexlinie berühren. Bezeichnen wir die Ordnung des Strahlensystems $S$ mit $o$, so gibt es höchstens $o$ verschiedene Teilkegel des transzendenten Linienkomplexes, die den Kegel $k_\nu$ nach Geraden des Strahlensystems $S$ berühren.

Lassen wir nun die ganze Zahl $\nu$ nach und nach immer größer werden, so können wir offenbar erreichen, daß die Kegel $k_\nu$ die Teilkegel $n$-ter Ordnung des transzendenten Linienkomplexes oskulieren, oder gar mit ihnen eine Berührung von beliebig hoher Ordnung haben, und dabei findet diese Berührung immer längs Geraden des Strahlensystems $S$ statt.

Nun aber ist $n$ eine bestimmte endliche Zahl, und es gehen andererseits durch jeden Punkt $P$ des Raumes $o$ ganz bestimmte Gerade des Strahlensystems $S$. Also ist es immer möglich, die Zahl $\nu$ so groß zu wählen, daß die in Betracht kommenden algebraischen Teilkegel des transzendenten Linienkomplexes durch die algebraische Gleichung des Komplexes $L_\nu$ vollständig bestimmt sind. Und da diese Gleichung nur eine begrenzte Anzahl Konstanten enthält, so erkennen wir, daß die Mongesche Gleichung, die alle in Betracht kommenden Teilkegel des transzendenten Komplexes definiert, algebraisch ist. Diese algebraische Mongesche Gleichung hat (vgl. die Ausführungen auf S. 692 [hier S. 644]) dreifach unendlich viele geradlinige Integralkurven, die einen algebraischen Linienkomplex bestimmen. Und dieser algebraische Komplex ist in dem ursprünglich vorgelegten Komplexe enthalten, der somit in algebraische Komplexe zerfällt.

**25.** Es gilt also das folgende Theorem, das die vorhergehenden Untersuchungen vervollständigt:

**Theorem II. Liegt eine transzendente analytische Gleichung:**

$$\Omega(r, s, \varrho, \sigma) = 0$$ [704

**in den Plückerschen Linienkoordinaten vor, so sind die Kegel des entsprechenden Linienkomplexes nie algebraisch; sie zerfallen auch niemals in unendlich viele algebraische Kegel, es sei denn, daß der betreffende Komplex aus allen Tangenten einer transzendenten developpabeln Fläche besteht.**

Es liegt auf der Hand, daß diese Untersuchungen ohne Schwierigkeit weiter geführt werden können. Immerhin stellen sich hier auch Fragen, deren Behandlung neue Hilfsmittel verlangt. So zum Beispiel ist es mir nicht gelungen, zu entscheiden, ob die Komplexkegel von allgemeiner Lage eines transzendenten analytischen Linienkomplexes in transzendente Kegel zerfallen können, zwischen denen im zweidimensionalen Gebiete aller Geraden durch den gemeinsamen Scheitel kein analytischer Zusammenhang besteht.

### § 2. Polare Beziehungen zwischen Mongeschen, beziehungsweise Pfaffschen Gleichungen.

**26.** Eine Punkttransformation des Raumes:

$$(1) \qquad x_1 = A(x, y, z), \quad y_1 = B(x, y, z), \quad z_1 = C(x, y, z)$$

führt Linienelement in Linienelement über; gleichzeitig geht jede Schar von $\infty^q$ Linienelementen in eine ebensolche Schar über. Da nun eine Mongesche Gleichung:

$$(2) \qquad f(x, y, z;\; dx : dy : dz) = 0$$

als analytische Definition von $\infty^4$ Linienelementen aufgefaßt werden kann, so ist es von vornherein klar, daß eine Punkttransformation (1) jede Mongesche Gleichung (2) in eine Mongesche Gleichung:

$$f_1(x_1, y_1, z_1;\; dx_1 : dy_1 : dz_1) = 0$$

überführt. Mit derartigen Transformationen haben sich schon längst, nach dem Vorgange von Gauß und Riemann, viele Mathematiker eingehend beschäftigt.

Die Theorie dieser Transformationen beruht in erster Linie auf der wohlbekannten und evidenten Tatsache, daß jede Punkttransformation im Infinitesimalen projektiv ist. Hieraus folgt ja unmittelbar, daß [705
die Cayleysche Invariantentheorie für diese höhere Invariantentheorie verwertet werden kann.

Hier begnügen wir uns mit der naheliegenden Bemerkung, daß eine Mongesche Gleichung, deren Elementarkegel algebraische Kegel $n$-ter Ordnung sind, von jeder Punkttransformation in eine Mongesche Gleichung übergeführt wird, deren Elementarkegel ebenfalls algebraisch und von der Ordnung $n$ sind.

Insbesondere ist klar, daß eine Punkttransformation (1) jede Pfaffsche Gleichung:

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0$$

in eine Pfaffsche Gleichung umwandelt.

**27.** In meinen geometrischen Arbeiten aus den Jahren 1870 und 1871 lenkte ich die Aufmerksamkeit auf eine umfassendere Kategorie von Transformationen, die ebenfalls alle Linienelemente einer Mongeschen Gleichung in die Linienelemente einer Mongeschen Gleichung und gleichzeitig alle Integralkurven der ersten Mongeschen Gleichung in Integralkurven der neuen Gleichung überführen. Diese Transformationen wurden in jedem einzelnen Falle durch zwei Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$



vermittelt, die zwei Systeme von Punktkoordinaten enthielten. Es ergab sich, daß eine Mongesche Gleichung gegenüber derartigen Transformationen eine und nur eine individuelle Eigenschaft besitzt.

Durch derartige Transformationen gelang es mir, jede nichtlineare Mongesche Gleichung in eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung überzuführen; und ich gab sogar eine allgemeine Methode zur Auffindung aller Transformationen, die eine vorgelegte Mongesche Gleichung in eine Pfaffsche Gleichung umwandeln. Ich stellte ferner die Frage nach allen derartigen Transformationen, die eine Pfaffsche Gleichung in eine Pfaffsche Gleichung überführen. Ich gab die Antwort auf diese unter vielen Gesichtspunkten wichtige Frage, behielt mir aber vor, den ausführlichen Beweis bei einer späteren Gelegenheit zu veröffentlichen. In diesem Kapitel werde ich unter anderm diesen längst angekündigten Beweis liefern. Und zwar werde ich die Über- [706
legungen in solcher Weise führen, daß sich die Ausdehnung dieser Transformationstheorie auf Systeme Pfaffscher Gleichungen von selbst darbietet.

**28.** Es ist überhaupt meine Absicht, in späteren Arbeiten diese meine alten Untersuchungen wieder aufzunehmen und neue Theorien zu schaffen, die sich auf Berührungstransformationen, auf Systeme Pfaffscher Gleichungen, auf semilineare partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung und auf Involutionssysteme höherer Ordnung beziehen. Flüchtige Andeutungen in diesen Richtungen finden sich schon an verschiedenen Stellen in meinen früheren Arbeiten.

Ganz besonders möchte ich auf eine Note in den Math. Annalen, Bd. XI, S. 547 [d. Ausg. Bd. IV, Abh. III, S. 252] hinweisen, die von meinen Nachfolgern nicht hinlänglich berücksichtigt worden ist. In dieser Note gab ich einen fundamentalen Satz, der sich auf ganz beliebige Gleichungssysteme von der Form:

$$\Omega_k(x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad {\scriptstyle (k=1, \ldots, q)}$$

bezieht. Es wurde dabei keineswegs vorausgesetzt, daß dieses Gleichungssystem wirklich alle $n$ Größen $X_i$ enthält. In meiner nächsten Arbeit werde ich auf die hiermit definierte Beziehung zwischen Räumen, die verschiedene Dimensionenzahlen haben, ausführlicher eingehen. In dieser Weise ergeben sich merkwürdige Zusammenhänge zwischen ganz verschiedenen Gebieten, deren Theorie hierdurch gefördert werden wird.

**29.** Wir denken uns, daß zwei Gleichungen von der Form:

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

vorgelegt sind, und sehen dabei zunächst von trivialen Ausnahmefällen ab. Wir deuten $x, y, z$ als Cartesische Punktkoordinaten in einem dreifachen Raume, ferner $X, Y, Z$ als ebensolche Koordinaten in einem anderen Raume.

Erteilen wir nun den Koordinaten $x, y, z$ bestimmte Werte $\alpha, \beta, \gamma$, so definieren die entsprechenden Gleichungen:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\alpha, \beta, \gamma, X, Y, Z) = 0$$

eine Kurve $K$ des Raumes $X, Y, Z$, und zwar wollen wir den Punkt: $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ als Bildpunkt dieser Kurve $K$ betrachten. Im Raume $X, Y, Z$ erhalten wir in dieser Weise $\infty^3$ Kurven $K$, die nach unserer Terminologie einen Kurvenkomplex erzeugen, und die Kurven dieses Komplexes werden durch die obenstehenden Gleichungen auf den Punktraum $x, y, z$ abgebildet.

Erteilen wir andererseits den Punktkoordinaten $X, Y, Z$ die Werte $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$, so ordnen wir dem Punkte: $X = \mathsf{A}$, $Y = \mathsf{B}$, $Z = \Gamma$ die [707 Kurve:

$$\varphi(x, y, z, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma) = 0, \quad \psi(x, y, z, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma) = 0$$

zu, die $k$ heißen möge. Im Raume $x, y, z$ tritt also ebenfalls ein Kurvenkomplex auf, dessen Kurven $k$ auf den Punktraum $X, Y, Z$ abgebildet werden.

Wir sehen, daß unsere Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0 \tag{1}$$

einen Kurvenkomplex $K$ im Raume $X, Y, Z$ und einen Kurvenkomplex $k$ im Raume $x, y, z$ definieren, und daß sie gleichzeitig die Komplexkurven jedes Raumes auf die Punkte des andern Raumes beziehen.

**30.** Die hiermit definierte Beziehung zwischen den beiden Kurvenkomplexen $k$ und $K$ und den beiden Punkträumen $X, Y, Z$ und $x, y, z$ besitzt charakteristische Eigenschaften, die wir in knapper Form resumieren werden.

Bezeichnen wir zwei Punkte $x, y, z$ und $X, Y, Z$ als konjugiert, wenn ihre Koordinaten die beiden Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ erfüllen, so können wir sagen, daß alle zu einem gegebenen Punkte $x, y, z$ konjugierten Punkte $X, Y, Z$ eine Komplexkurve $K$ erzeugen, nämlich diejenige, deren Bildpunkt der betreffende Punkt $x, y, z$ ist. Dementsprechend erzeugen alle zu einem gegebenen Punkte $X, Y, Z$ konjugierten Punkte $x, y, z$ eine Komplexkurve $k$, deren Bildpunkt der gegebene Punkt $X, Y, Z$ ist.

Durchläuft ein Punkt $x, y, z$ eine Komplexkurve $k$, so gehen die den $\infty^1$ Punkten der Kurve $k$ zugeordneten Komplexkurven $K$ durch einen



gemeinsamen Punkt $X, Y, Z$, nämlich durch den Bildpunkt der durchlaufenen Komplexkurve $k$.

Durchläuft andererseits ein Punkt $X, Y, Z$ eine Komplexkurve $K$, so gehen alle zugeordneten Komplexkurven $k$ durch einen gemeinsamen Punkt $x, y, z$, nämlich durch den Bildpunkt der durchlaufenen Komplexkurve $K$.

**31.** Unser Gleichungssystem: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ definiert zwei Mongesche Gleichungen, die wir in der folgenden Weise finden. Wir bilden die Gleichungen: [708

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi = 0, \quad \psi = 0, \\ &\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = 0, \\ &\psi_x dx + \psi_y dy + \psi_z dz = 0, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

eliminieren zwischen diesen die Größen $X, Y, Z$ und erhalten so eine Gleichung:

$$f(x, y, z;\ dx : dy : dz) = 0,$$

die offenbar von allen Komplexkurven $k$ befriedigt wird und daher als **Monge**sche Gleichung der $\infty^3$ Kurven $k$ bezeichnet werden kann.

Eliminieren wir andererseits die Größen $x, y, z$ zwischen den Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi = 0, \quad \psi = 0, \\ &\varphi_X dX + \varphi_Y dY + \varphi_Z dZ = 0, \\ &\psi_X dX + \psi_Y dY + \psi_Z dZ = 0, \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

so erhalten wir eine Gleichung:

$$F(X, Y, Z;\ dX : dY : dZ) = 0,$$

die von allen Komplexkurven $K$ befriedigt wird und daher als **Monge**sche Gleichung der $\infty^3$ Kurven $K$ bezeichnet werden muß.

Die eben angegebene Eigenschaft der Mongeschen Gleichungen: $f = 0$ und $F = 0$ läßt sich gradezu als Definition dieser Gleichungen auffassen. Dies folgt daraus, daß $\infty^3$ Kurven, die den Raum ausfüllen, nur eine Mongesche Gleichung befriedigen.

**32.** Es ist nun beachtenswert, daß unsere Mongeschen Gleichungen noch in einer ganz anderen Weise gedeutet werden können.

Stellen wir nämlich die Forderung, daß die beiden benachbarten Komplexkurven $k$, deren Bildpunkte die Koordinaten:

$$X, Y, Z \quad \text{und:} \quad X + dX,\ Y + dY,\ Z + dZ$$

besitzen, einander schneiden sollen, so haben wir die vier Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, X + dX, Y + dY, Z + dZ) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0$$

zu bilden, und unser Verlangen findet daher seinen analytischen Aus- [709 druck in den Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0,$$
$$\varphi_X dX + \varphi_Y dY + \varphi_Z dZ = 0,$$
$$\psi_X dX + \psi_Y dY + \psi_Z dZ = 0,$$

die mit den Gleichungen (2′) identisch sind. Die durch Elimination von $x, y, z$ hervorgehende Mongesche Gleichung:

$$F(X, Y, Z;\ dX : dY : dZ) = 0$$

ist also das notwendige und hinreichende Kriterium dafür, daß die beiden benachbarten Komplexkurven $k$, deren Bildpunkte die Koordinaten $X, Y, Z$ und $X + dX,\ Y + dY,\ Z + dZ$ besitzen, einander schneiden.

Dementsprechend liefert die Mongesche Gleichung:

$$f(x, y, z;\ dx : dy : dz) = 0$$

das notwendige und hinreichende Kriterium dafür, daß die beiden benachbarten Komplexkurven $K$, deren Bildpunkte die Koordinaten $x, y, z$ und $x + dx,\ y + dy,\ z + dz$ haben, einen gemeinsamen Punkt besitzen.

**33.** Eine Mongesche Gleichung besitzt immer $\infty^\infty$ viele Integralkurven. Wir wollen zeigen, daß unser Gleichungssystem: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ein Entsprechen zwischen den Integralkurven der beiden Gleichungen: $f = 0$ und $F = 0$ herstellt. Es wird sich sogar ergeben, daß dieses Entsprechen zwischen Integralkurven unserer Gleichungen in wesentlich verschiedenen Weisen definiert werden kann.

Es seien:

$$y = M(x), \quad z = N(x)$$

die Gleichungen einer ganz beliebigen Integralkurve $c$ der Mongeschen Gleichung: $f = 0$. Fassen wir sodann in:

$$\varphi(x, M(x), N(x), X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0$$

die Größe $x$ als einen Parameter auf, so stellen diese Gleichungen eo ipso $\infty^1$ Komplexkurven $K$ dar, unter denen zwei benachbarte einander immer schneiden. Diese $\infty^1$ Kurven $K$ haben daher eine Umhüllungskurve, die offenbar die Mongesche Gleichung: $F = 0$ befriedigt. Wir finden [710 diese Umhüllungskurve, die $C$ heißen möge, wenn wir zwischen den Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi(x, M(x), N(x), X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0, \\ 0 = \dfrac{d\varphi}{dx} \equiv \varphi_x + \varphi_M M' + \varphi_N N', \\ 0 = \dfrac{d\psi}{dx} \equiv \psi_x + \psi_M M' + \psi_N N' \end{cases}$$

die Größe $x$ eliminieren.



Daß diese Elimination im allgemeinen nur zwei und nicht drei endliche Relationen zwischen den Koordinaten $X, Y, Z$ liefert, beruht darauf, daß zwei benachbarte Kurven $K$ unserer Schar einander immer schneiden.

**34.** Wir wollen nun eine andere geometrische Konstruktion angeben, die, angewandt auf die Kurve $c$, wiederum auf die Kurve $C$ führen wird.

Wir betrachten alle Komplexkurven $k$, welche die gegebene Integralkurve $c$:

$$y = M(x), \quad z = N(x)$$

der Gleichung $f = 0$ berühren. Zwei benachbarte Komplexkurven $k$ der hiermit definierten Schar schneiden einander offenbar immer, und also erfüllen ihre Bildpunkte $X, Y, Z$ und $X + dX,\ Y + dY,\ Z + dZ$ die Gleichung: $F = 0$. Die Bildpunkte $X, Y, Z$ aller Kurven $k$, welche die vorgelegte Kurve $c$ berühren, bilden somit eine Integralkurve $C'$ der Mongeschen Gleichung: $F = 0$. Wir wollen zeigen, daß diese Kurve $C'$ mit der früher konstruierten Kurve $C$ identisch ist.

Die Forderung, daß die Komplexkurve $k$ die Kurve:

$$y = M(x), \quad z = N(x)$$

berühren soll, findet ihren analytischen Ausdruck in den Gleichungen:

$$(3') \quad \begin{cases} \varphi(x, M(x), N(x), X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0, \\ \varphi_x + \varphi_M M'(x) + \varphi_N N'(x) = 0, \quad \psi_x + \psi_M M' + \psi_N N' = 0, \end{cases}$$

die genau dieselbe Form wie die Gleichungen (3) haben. Durch Elimination der Größe $x$ erhalten wir daher als Definition der gesuchten Kurve $C'$ grade die beiden Gleichungen, die sich früher als Definitionsgleichungen der Kurve $C$ ergeben haben.

**35.** Die Integralkurven der beiden Mongeschen Gleichungen: [711 $f = 0$ und $F = 0$ ordnen sich, wie wir eben gesehen haben, paarweise als entsprechende Kurven $c$ und $C$ zusammen. Durchläuft ein Punkt $x, y, z$ die Kurve $c$, so umhüllt die diesem Punkte zugeordnete Komplexkurve $K$ die Kurve $C$. Beschreibt andererseits ein Punkt $X, Y, Z$ die Kurve $C$, so umhüllt die diesem Punkte zugeordnete Komplexkurve $k$ die Kurve $c$.

Das hiermit festgestellte Entsprechen zwischen den Integralkurven der beiden Mongeschen Gleichungen: $f = 0$ und $F = 0$ läßt sich als eine Transformation auffassen, welche den $\infty^4$ Linienelementen der Mongeschen Gleichung: $f = 0$ die $\infty^4$ Linienelemente der Gleichung: $F = 0$ zuordnet. Die Gleichungen (3) oder (3′), die durch die Substitution:

$$M(x) = y, \quad M'(x) = y', \quad N(x) = z, \quad N'(x) = z'$$

die Form:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0,$$
$$\varphi_x + \varphi_y y' + \varphi_z z' = 0, \quad \psi_x + \psi_y y' + \psi_z z' = 0$$

erhalten, geben nach unseren früheren Überlegungen eine und nur eine von $X, Y, Z$ freie Relation zwischen $x, y, z, y'$ und $z'$, nämlich die Mongesche Gleichung:

$$f(x, y, z, 1 : y' : z') = 0.$$

Also können die obenstehenden Gleichungen nach $X, Y, Z$ aufgelöst werden und liefern dabei für diese Größen Ausdrücke:

$$(4) \qquad \begin{cases} X = \mathfrak{X}(x, y, z, y', z'), \\ Y = \mathfrak{Y}(x, y, z, y', z'), \\ Z = \mathfrak{Z}(x, y, z, y', z'), \end{cases}$$

die uns zeigen, daß die oben angegebenen Konstruktionen jedesmal Integralkurven $c, c', c'', \ldots$ der Gleichung $f = 0$, die ein gemeinsames Linienelement $x, y, z, y', z'$ haben, in Integralkurven $C, C', C'', \ldots$ der Gleichung $F = 0$ überführen, die durch einen gemeinsamen Punkt $X, Y, Z$ gehen.

Es ist leicht, einen Schritt weiter zu gehen und zu beweisen, daß die Kurven $C, C', C'', \ldots$ einander in ihrem gemeinsamen Punkte berühren. Da nämlich in den vorhergehenden Überlegungen die kleinen und die großen Buchstaben überall vertauscht werden können, so bestehen auch Gleichungen von der Form:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0,$$ [712
$$\varphi_X + \varphi_Y Y' + \varphi_Z Z' = 0, \quad \psi_X + \psi_Y Y' + \psi_Z Z' = 0,$$

aus denen durch Auflösung drei Relationen:

$$(5) \qquad \begin{cases} x = \mathfrak{x}(X, Y, Z, Y', Z'), \\ y = \mathfrak{y}(X, Y, Z, Y', Z'), \\ z = \mathfrak{z}(X, Y, Z, Y', Z') \end{cases}$$

abgeleitet werden, die $x, y, z$ als Funktionen von $X, Y, Z, Y', Z'$ bestimmen.

Vereinigen wir nun die drei Gleichungen (5) und die drei analogen Gleichungen (4), so ist es leicht, zu erkennen, daß jedem Linienelemente $x, y, z, y', z'$ der Mongeschen Gleichung $f = 0$ ein Linienelement $X, Y, Z, Y', Z'$ der Gleichung $F = 0$ zugeordnet ist, daß also das Entsprechen zwischen den Integralkurven $c$ und $C$ unserer beiden Mongeschen Gleichungen die fundamentale Eigenschaft besitzt, Kurven $c$ mit gemeinsamem Linienelemente [solche] Kurven $C$ zuzuordnen, die ebenfalls ein gemeinsames Linienelement besitzen.



Erteilen wir nämlich den Größen $x, y, z, y', z'$ bestimmte Werte, die unsere Mongesche Gleichung $f = 0$ erfüllen, so zeigen die Gleichungen (4), daß die entsprechenden Werte von $X, Y, Z$ (innerhalb eines passenden Bereiches) eindeutig bestimmt sind. Substituieren wir sodann diese Werte in die Gleichungen (5) und $F = 0$, so erkennen wir, daß wirklich auch die Werte von $Y'$ und $Z'$ analytisch bestimmt sind.

Selbstverständlich erfüllen die gefundenen Werte von $X, Y, Z, Y', Z'$ die Mongesche Gleichung $F = 0$.

**36.** Ehe wir das hiermit gefundene wichtige Resultat formulieren, wollen wir die früheren Überlegungen in einem wesentlichen Punkte vervollständigen. Wir haben nämlich ursprünglich, wenn auch implizite, zwei Voraussetzungen gemacht, die sich faktisch auf eine einzige reduzieren.

Wir haben einerseits angenommen, daß die Gleichungen:

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(\ldots) = 0$$

den $\infty^3$ Punkten $x, y, z$ dreifach unendlich viele Kurven $K$ zuordnen, die den Raum $X, Y, Z$ ausfüllen. Wir haben andererseits vorausgesetzt, daß die Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ den $\infty^3$ Punkten $X, Y, Z$ drei- [713
fach unendlich viele Kurven $k$ zuordnen, die den Raum $x, y, z$ ausfüllen. Wir wollen zeigen, daß diese beiden Voraussetzungen nicht wesentlich verschieden sind, daß also die letzte Voraussetzung immer erfüllt ist, wenn dies mit der ersten Voraussetzung der Fall ist.

Es mögen zwei Gleichungen von der Form:

$$\Phi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \Psi(\ldots) = 0$$

vorgelegt sein, die, sobald $x, y, z$ als Parameter aufgefaßt werden, dreifach unendlich viele Kurven $K$ darstellen, die den Raum $X, Y, Z$ ausfüllen. Es gehen dann durch jeden Punkt von allgemeiner Lage:

$$X = \mathsf{A}, \quad Y = \mathsf{B}, \quad Z = \Gamma$$

einfach unendlich viele Kurven $K$:

$$\Phi(a, b, c, X, Y, Z) = 0, \quad \Psi(\ldots) = 0,$$

unter denen jede im Raume $x, y, z$ einen bestimmten Bildpunkt:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

besitzt. Der Ort dieser $\infty^1$ Bildpunkte ist diejenige Kurve $k$ des Raumes $x, y, z$, die dem Punkte: $X = \mathsf{A}$, $Y = \mathsf{B}$, $Z = \Gamma$ zugeordnet ist.

Wäre nun die Zahl der Kurven $k$ kleiner als $\infty^3$, so hätte jede Kurve $k$ unendlich viele Bildpunkte:

$$X = \mathsf{A}, \quad Y = \mathsf{B}, \quad Z = \Gamma,$$

und dann wäre jeder Punkt einer Kurve $k$ Bildpunkt von unendlich vielen Kurven $K$. Hiermit sind wir auf Widerspruch geführt worden, und also gibt es wirklich dreifach unendlich viele Kurven $k$. Und diese $\infty^3$ Kurven $k$ müssen den Raum $x, y, z$ ausfüllen; denn wären $x, y, z$ durch eine Relation:

$$\vartheta(x, y, z) = 0$$

gebunden, so bestimmten die Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ nicht dreifach unendlich viele Kurven $K$ im Raume $X, Y, Z$.

**37.** Also können wir sagen:

**Satz 1.** Ordnen zwei vorgelegte Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

den $\infty^3$ Punkten $x, y, z$ dreifach unendlich viele Kurven $K$ zu, die den Raum $X, Y, Z$ ausfüllen, so ordnen diese Gleichungen auch den $\infty^3$ Punkten $X, Y, Z$ dreifach unendlich [714 viele Kurven $k$ zu, die den Raum $x, y, z$ ausfüllen.[1])

Ist dann:

$$f(x, y, z;\ dx : dy : dz) = 0$$

die **Monge**sche Gleichung der Kurven $k$, und:

$$F(X, Y, Z;\ dX : dY : dZ) = 0$$

die **Monge**sche Gleichung der Kurven $K$, so bestimmen die sechs Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0,$$
$$0 = \varphi_x + \varphi_y y' + \varphi_z z', \quad 0 = \psi_x + \psi_y y' + \psi_z z',$$
$$0 = \varphi_X + \varphi_Y Y' + \varphi_Z Z', \quad 0 = \psi_X + \psi_Y Y' + \psi_Z Z'$$

(innerhalb passender Bereiche) ein eineindeutiges Entsprechen zwischen den $\infty^4$ Linienelementen $x, y, z, y', z'$ der Gleichung $f = 0$ und den $\infty^4$ Linienelementen $X, Y, Z, Y', Z'$ der Gleichung: $F = 0$.

Diese Transformation der Linienelemente der Gleichungen: $f = 0$ und $F = 0$ führt im allgemeinen Integralkurve der einen Gleichung in Integralkurve der anderen Gleichung über. Die einzige Ausnahme bilden die Komplex-

1) Es möge hier ausdrücklich bemerkt sein, daß aus der Voraussetzung, daß zwei Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

sowohl im Raume $x, y, z$, wie im Raume $X, Y, Z$ dreifach unendlich viele Kurven bestimmen, unmittelbar folgt, daß die Kurven jeder Schar den betreffenden Raum ausfüllen.



kurven $k$ und $K$, deren Linienelemente jedesmal in die Linienelemente eines Elementarkegels übergehen, dessen Scheitel der betreffenden Komplexkurve als Bildpunkt zugeordnet ist.

Die hiermit festgestellte Beziehung zwischen den Linienelementen zweier Mongescher Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$ bezeichnen wir aus naheliegenden Gründen als eine polare Beziehung. Wir sagen, daß die Integralkurven der beiden Mongeschen Gleichungen polar auf einander bezogen sind. Zuweilen brauchen wir auch die Ausdrucksweise, daß die beiden Mongeschen Gleichungen polar auf einander bezogen sind; oder wir sagen, daß zwischen den beiden Kurvenkomplexen $k$ und $K$ eine polare Beziehung festgestellt ist.

**38.** Wir können, wie in meinen alten Arbeiten, einen Schritt weitergehen und nachweisen, daß unsere beiden Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ [715 zwischen allen geometrischen Gebilden (Punkten, Kurven und Flächen) der beiden Räume $x, y, z$ und $X, Y, Z$ eine Beziehung feststellen, welche die fundamentale Eigenschaft besitzt, Gebilde, die einander berühren (das heißt, ein gemeinsames Flächenelement haben), in Gebilde überzuführen, die einander ebenfalls berühren.

Hier brauchen wir nicht auf alle Details dieser großen, von mir begründeten Theorie einzugehen. Wir beschränken uns vielmehr auf einige knappe Bemerkungen, die wir später verwerten.

**39.** Liegt im Raume $x, y, z$ eine Fläche:

$$\omega(x, y, z) = 0$$

vor, so gibt es unter ihren $\infty^3$ Linienelementen immer $\infty^2$, die zugleich unsere Mongesche Gleichung: $f = 0$ befriedigen. Und diese $\infty^2$ Linienelemente lassen sich immer zu $\infty^1$ Kurven $\sigma$ zusammenfassen, welche die Fläche (im allgemeinen sogar mehrfach) überdecken. Jede Kurve $\sigma$ ist aber eine Integralkurve der Gleichung: $f = 0$ und hat daher im Raume $X, Y, Z$ eine Bildkurve $\Sigma$. Und die $\infty^1$ soeben definierten Kurven $\Sigma$ erzeugen im allgemeinen eine neue Fläche $\Omega$, die wir als Bildfläche der gegebenen Fläche: $\omega = 0$ auffassen wollen.

In dieser Weise ordnen wir jeder Fläche (beziehungsweise Kurve) des Raumes $x, y, z$ ein Gebilde des Raumes $X, Y, Z$ zu. Wir behaupten, daß bei dieser Zuordnung Gebilden mit gemeinsamem Flächenelemente im anderen Raume Gebilde entsprechen, die ebenfalls ein gemeinsames Flächenelement haben.

**40.** Wünscht man den inneren Grund für diese Tatsache zu erkennen und gleichzeitig den Schlüssel zu den tiefer liegenden Phänomenen dieser ganzen Theorie zu finden, so muß man die Aufmerksamkeit auf diejenige Transformation richten, die alle $\infty^4$ Linienelemente der Mongeschen Gleichung: $f=0$ in die $\infty^4$ Linienelemente der Gleichung: $F=0$ überführt.

Wenn zwei Flächen einander berühren, so haben sie im Berührungspunkte jedenfalls ein gemeinsames Linienelement $l$, das der Mongeschen Gleichung: $f=0$ genügt. Sehen wir von unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung ab, so dürfen wir überdies behaupten, daß unsere Flächen noch weitere gemeinsame Linienelemente $l'$ enthalten, die $f=0$ befriedigen. Dies ist ja der Fall mit allen zu $l$ benachbarten Linienelementen, die [716
$f=0$ erfüllen und der einen Fläche angehören.

Es ist andererseits klar, daß zwei Flächen einander berühren müssen, sobald ein Linienelement der Gleichung: $f=0$ auf beiden Flächen gelegen ist, und überdies alle benachbarten Linienelemente der Gleichung: $f=0$, welche auf der ersten Fläche liegen, bis auf Größen zweiter Ordnung auch auf der anderen Fläche gelegen sind.

Bei der Transformation der Linienelemente unserer Mongeschen Gleichungen gehen aber unendlich benachbarte Linienelemente im allgemeinen in ebensolche Elemente über, und insbesondere werden Linienelemente, deren Koordinaten nur um infinitesimale Größen zweiter Ordnung differieren, in Linienelemente transformiert, die in derselben Beziehung zu einander stehen.

Durch Vereinigung dieser Betrachtungen ergibt sich, daß Flächen des Raumes $x, y, z$, die ein gemeinsames Flächenelement haben, im allgemeinen in Flächen transformiert werden, die in derselben gegenseitigen Beziehung stehen.

**41.** Sind die Elementarkegel der Gleichung: $f=0$ algebraische Kegel von der Ordnung $n$, so gibt es in jedem Punkte einer willkürlich gewählten Fläche: $\omega(x,y,z)=0$ $n$ verschiedene Linienelemente, welche auf der Fläche liegen und die Gleichung: $f=0$ erfüllen. Alsdann ordnen unsere Konstruktionen dem betreffenden Flächenelemente der Fläche: $\omega=0$ mehrere, und zwar $n$ verschiedene Elemente der Bildfläche: $\Omega(X,Y,Z)=0$ zu. Sind auch die Elementarkegel der Gleichung: $F=0$ algebraische Kegel, von der Ordnung $N$, so ist die Beziehung zwischen den Flächenelementen der beiden Räume, die unsere Konstruktionen definieren, $n\cdot N$-deutig. Dabei ist es selbstverständlich fortwährend unsere Voraussetzung, daß wir von vornherein in den beiden Punkträumen solche Gebiete gewählt haben, daß die Beziehung zwischen den Linienelementen der beiden Mongeschen Gleichungen innerhalb der betreffenden Bereiche als eindeutig aufgefaßt werden kann.



**42.** Ausnahmeweise kann es vorkommen, daß in einem gewissen Punkte einer Fläche: $\omega(x,y,z)=0$ alle $\infty^1$ hindurchgehenden Linienelemente der Fläche die Mongesche Gleichung: $f=0$ befriedigen. [717
Alsdann gehören zu dem betreffenden Flächenelemente $x, y, z, p, q$ einfach unendlich viele zugeordnete Flächenelemente des Raumes $X, Y, Z$. Sind:

$$\begin{aligned} X &= \mathfrak{X}(x,y,z,p,q), \\ Y &= \mathfrak{Y}(x,y,z,p,q), \\ Z &= \mathfrak{Z}(x,y,z,p,q), \\ P &= \mathfrak{P}(x,y,z,p,q), \\ Q &= \mathfrak{Q}(x,y,z,p,q) \end{aligned}$$

die Gleichungen, welche die Beziehung zwischen den Flächenelementen beider Räume definieren, so können sich die Funktionen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \ldots, \mathfrak{Q}$ nicht sämtlich in der Umgebung des betreffenden Elementes $x, y, z, p, q$ regulär verhalten, sondern einige unter diesen Funktionen müssen unbestimmt werden.

**43.** Wir wollen nun insbesondere annehmen, daß die Gleichung: $f=0$ die Form:

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

besitzt und somit eine Pfaffsche Gleichung darstellt. Daß dieser Fall eintreten kann, ist von vornherein klar. Liegt nämlich eine integrable oder nichtintegrable Pfaffsche Gleichung vor, so besitzt diese Gleichung immer $\infty^\infty$ viele Integralkurven, und unter diesen denken wir uns dreifach unendlich viele herausgegriffen, die durch die beiden Gleichungen:

$$\Phi(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)=0, \quad \Psi(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)=0$$

dargestellt sein mögen. Ist nun die betreffende Pfaffsche Gleichung nichtintegrabel, so müssen diese $\infty^3$ Integralkurven $k$ den Raum $x, y, z$ ausfüllen. Ist andrerseits die Pfaffsche Gleichung integrabel, und stellt:

$$W(x,y,z) = \text{Const.}$$

ihre Integralgleichung dar, so kann man immer auf jeder Fläche der Schar: $W=$ Const. zweifach unendlich viele Kurven herausgreifen, und man erhält also wiederum eine Schar von $\infty^3$ Integralkurven $k$ der Pfaffschen Gleichung, die den Raum ausfüllen.

**44.** Nachdem in dieser Weise eine Schar von $\infty^3$ Kurven $\Phi=0$, [718
$\Psi=0$ gefunden ist, die unsere Pfaffsche Gleichung befriedigt und den Raum $x, y, z$ ausfüllt, bilden wir die beiden Gleichungen:

$$\Phi(x,y,z,X,Y,Z)=0, \quad \Psi(x,y,z,X,Y,Z)=0$$

und betrachten diese als Definitionsgleichungen einer Berührungstransformation.

Diese Berührungstransformation bezieht die $\infty^3$ Integralkurven $k$ unserer Pfaffschen Gleichung auf die Punkte des Raumes $X, Y, Z$. Und in dem letzten Raume treten $\infty^3$ Kurven $K$ auf, die den Punkten $x, y, z$ zugeordnet sind.

Jetzt gibt es im Raume $x, y, z$ dreifach unendlich viele Flächenelemente: $x, y, z, p, q$, die jedesmal $\infty^1$ Linienelemente der Pfaffschen Gleichung: $Adx + Bdy + Cdz = 0$ enthalten. Diese Gleichung ordnet ja jedem Punkte $x, y, z$ einfach unendlich viele Linienelemente zu, die ein Büschel bilden und in dem Flächenelemente:

$$\frac{p}{A} = \frac{q}{B} = \frac{-1}{C}$$

enthalten sind.

Jedes einzelne unter diesen $\infty^3$ Flächenelementen hat $\infty^1$ entsprechende Flächenelemente $X, Y, Z, P, Q$. In dieser Weise erhalten wir im allgemeinen im Raume $X, Y, Z$ eine ausgezeichnete Schar von $\infty^4$ Flächenelementen $X, Y, Z, P, Q$, die durch eine gewisse partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$D(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

definiert wird. Wir wollen die Integrationstheorie dieser partiellen Differentialgleichung aus trivialen Eigenschaften unserer Pfaffschen Gleichung ableiten. Dabei heben wir ausdrücklich hervor, daß wir später durch ganz analoge Betrachtungen allgemeine Theorien für gewisse semilineare Gleichungen erster Ordnung und für Involutionssysteme höherer Ordnung begründen werden. Ein Hauptzweck unserer jetzigen Entwickelungen ist eben, diese neuen Theorien vorzubereiten.

**45.** Im Raume $x, y, z$ betrachten wir alle durch einen Punkt $\pi$ von allgemeiner Lage hindurchgehenden Linienelemente unserer Pfaffschen Gleichung, sowie das Flächenelement $e$, das diese Linienelemente ent- [719
hält. Die $\infty^1$ zugeordneten Linienelemente $L$ des Raumes $X, Y, Z$ erzeugen eine Kurve $K$, nämlich die Bildkurve des Punktes $\pi$. Jeder zu $\pi$ benachbarte Punkt $\pi'$ bestimmt in entsprechender Weise eine zu $K$ benachbarte Komplexkurve $K'$.

Setzen wir insbesondere voraus, daß auch das Linienelement $\pi\pi'$ die Pfaffsche Gleichung befriedigt, so schneiden die beiden Komplexkurven $K$ und $K'$ einander. Diese benachbarten Kurven haben $\infty^1$ gemeinsame Flächenelemente, deren Inbegriff wir als einen **Flächenstreifen** bezeichnen wollen. Es ist leicht, zu beweisen, daß die $\infty^1$ Flächenelemente des Streifens $KK'$ gerade diejenigen $\infty^1$ Flächen-



elemente $X, Y, Z, P, Q$ sind, die von unserer Berührungstransformation dem ausgezeichneten Flächenelemente $x, y, z, p, q$ zugeordnet sind, das wir früher mit $e$ bezeichnet haben.

**46.** Das Flächenelement $e$ enthält die beiden Punkte $\pi$ und $\pi'$, ferner alle durch $\pi$ gehenden Linienelemente $l$ der Pfaffschen Gleichung, endlich auch (wenn von infinitesimalen Größen zweiter Ordnung abgesehen wird) alle durch $\pi'$ gehenden Linienelemente $l'$ der Pfaffschen Gleichung. Nach unserer allgemeinen Theorie finden wir aber die $\infty^1$ dem Flächenelemente $e$ zugeordneten Elemente $X, Y, Z, P, Q$, indem wir zuerst unter den $\infty^1$ durch $\pi$ gehenden Linienelementen $l$ ein bestimmtes wählen, sodann ein benachbartes Element $l'$ nehmen, dessen Punkt $\pi'$ ebenfalls im Flächenelemente $e$ enthalten ist, und endlich die beiden $l$ und $l'$ zugeordneten Linienelemente $L$ und $L'$ konstruieren. Die hiermit gefundenen Linienelemente $L$ und $L'$ bestimmen ein Flächenelement $X, Y, Z, P, Q$, das durch unsere Berührungstransformation dem Flächenelemente $e$ zugeordnet ist.

Erteilen wir jetzt dem durch den Punkt $\pi$ gehenden Linienelemente $l$ der Pfaffschen Gleichung alle $\infty^1$ möglichen Lagen, so erhalten wir im Raume $X, Y, Z$ einfach unendlich viele dem Flächenelemente zugeordnete Elemente $X, Y, Z, P, Q$, und diese $\infty^1$ Flächenelemente gehören offenbar, wie früher behauptet, dem Flächenstreifen an, den wir mit $KK'$ bezeichnet haben.

**47.** Wir haben wiederholt betont, daß dem Flächenelemente $e$ einfach unendlich viele Elemente $X, Y, Z, P, Q$ zugeordnet sind. Hierzu führte uns ursprünglich die Bemerkung, daß einem Flächenelemente $x, y, z, p, q$, das $n$ Linienelemente der Gleichung $f = 0$ enthält, im anderen Raume $n$ verschiedene Flächenelemente zugeordnet sind. Und zwar [720
nahmen wir ohne weiteres an, daß dieser Schluß, der unter der Voraussetzung abgeleitet wurde, daß $n$ eine endliche Zahl bezeichnet, auch dann gültig bleibt, wenn $n$ gleich $\infty^1$ ist.

Nun ist allerdings der hiermit gemachte Schritt vollständig richtig. Wir halten es jedoch für zweckmäßig, auf diesen Punkt genauer einzugehen; denn in unseren Konstruktionen der dem Flächenelemente $e$ zugeordneten Elemente $X, Y, Z, P, Q$ traten faktisch zwei Willkürlichkeiten auf, da nicht allein das Linienelement $l$, sondern auch der zum Punkte $\pi$ benachbarte Punkt $\pi'$ unendlich viele verschiedene Lagen haben kann.

**48.** Daß nichtsdestoweniger jedem Flächenelemente $e$ nur $\infty^1$ und nicht $\infty^2$ Elemente $X, Y, Z, P, Q$ zugeordnet sind, beruht darauf, daß die Lage des Punktes $\pi'$, wie jetzt gezeigt werden soll, keinen wesentlichen Einfluß auf die Lage der transformierten Flächenelemente ausübt.

Wir nehmen wiederum einen Punkt $\pi$ von allgemeiner Lage und ein hindurchgehendes Linienelement $l$ der Pfaffschen Gleichung; wir nehmen ferner zwei zu $\pi$ benachbarte Punkte $\pi'$ und $\pi''$, die alle beide in dem Flächenelemente $e$ gelegen sind, und konstruieren sodann die beiden durch $\pi'$ und $\pi''$ gehenden Linienelemente $l'$ und $l''$, die zum Linienelemente $l$ benachbart sind.

Im Raume $X, Y, Z$ entsprechen den drei Linienelementen $l, l'$ und $l''$ drei ganz bestimmte Linienelemente, die $L, L'$ und $L''$ heißen mögen. Bezeichnen wir sodann mit $E'$ das Flächenelement, das $L$ und $L'$ enthält, ferner mit $E''$ das Flächenelement, das $L$ und $L''$ enthält, so ist unsere Behauptung, daß die beiden Flächenelemente $E'$ und $E''$ identisch sind.

Zum Beweise bemerken wir, daß es immer eine Komplexkurve $k$ gibt, die durch $\pi'$ hindurchgeht und überdies $\pi''$ enthält, wenn von infinitesimalen Größen zweiter Ordnung abgesehen wird. Hieraus folgt, daß der Punkt des Linienelementes $L'$ mit dem Punkte des Elementes $L''$ identisch ist. Und da sowohl das Flächenelement $E'$, wie das Flächenelement $E''$ durch diesen Punkt geht, und überdies alle beide das Linienelement $L$ enthalten, so fallen diese beiden Flächenelemente wirklich zusammen.

**49.** Es gilt daher der Satz:

**Satz 2.** Ordnen zwei vorgelegte Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

den $\infty^3$ Punkten $X, Y, Z$ dreifach unendlich viele Kur- [721
ven zu, die den Raum $x, y, z$ ausfüllen und überdies eine **Pfaff**sche Gleichung:

$$A dx + B dy + C dz = 0$$

befriedigen, so besitzt die durch die Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bestimmte Berührungstransformation eine charakteristische Eigenschaft: sie ordnet einem jeden unter den $\infty^3$ Flächenelementen:

$$\frac{p}{A} = \frac{q}{B} = \frac{-1}{C}$$

einfach unendlich viele Flächenelemente $X, Y, Z, P, Q$ zu.

Wenn andererseits eine Berührungstransformation, die durch zwei Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ definiert wird, eine Schar von $\infty^3$ Flächenelementen $x, y, z, p, q$ in eine Schar bestehend aus $\infty^4$ Elementen $X, Y, Z, P, Q$ umwandelt, so erfüllen die $\infty^3$ Komplexkurven:

$$\varphi(x, y, z, A, B, C) = 0, \quad \psi(x, y, z, A, B, C) = 0$$

des Raumes $x, y, z$ immer eine **Pfaff**sche Gleichung.



**50.** Setzen wir fortwährend voraus, daß die Mongesche Gleichung: $f = 0$ die Pfaffsche Form besitzt, so entsprechen also jedem Flächenelemente $e$ einfach unendlich viele Elemente $X, Y, Z, P, Q$, und diese $\infty^1$ Elemente bilden, wie wir sahen, einen Flächenstreifen, der von zwei benachbarten, einander schneidenden Komplexkurven $K$ und $K'$ begrenzt wird.

Bezeichnen wir wie früher den Bildpunkt der Kurve $K$ mit $\pi$, so ist der Bildpunkt $\pi'$ der Kurve $K'$ in dem Flächenelemente $e$ des Punktes $\pi$ gelegen. Hieraus können wir einen fundamentalen Schluß ziehen. Wenn der Punkt $\pi$ gegeben ist, so hat das zugeordnete Flächenelement $e$ eine bestimmte Lage, und dementsprechend ist auch der Flächenstreifen $KK'$, aufgefaßt als Ort von $\infty^1$ Elementen $X, Y, Z, P, Q$, vollständig bestimmt. Das Linienelement $\pi\pi'$ kann aber einfach unendlich viele verschiedene Lagen annehmen, und die $\infty^1$ verschiedenen Kurven $K'$ schneiden die feste Kurve $K$ in verschiedenen Punkten. Nichtsdestoweniger bestimmen, wie wir gesehen haben, unsere benachbarten Komplexkurven $K$ und $K'$, wenn auch nicht dieselbe geometrische Figur, doch jedenfalls dieselbe Schar von $\infty^1$ Flächenelementen.

**51.** Wir formulieren dieses wichtige Resultat folgendermaßen:

**Satz 3.** Ist die **Monge**sche Gleichung aller Komplex- [722
kurven $k$ eine **Pfaff**sche Gleichung, so ist der Flächenstreifen, den zwei benachbarte, einander schneidende Komplexkurven $K$ und $K'$ definieren, vollständig bestimmt, sobald die Kurve $K$ gegeben ist. Wenn also eine feste Komplexkurve $K$ nach und nach von verschiedenen benachbarten Komplexkurven $K'$ geschnitten wird, so enthält der Flächenstreifen $KK'$ immer dieselbe Schar von $\infty^1$ Flächenelementen.

Jede Komplexkurve $K$ gehört also einem einzigen Flächenstreifen $S$ an, dessen $\infty^1$ Flächenelemente einem bestimmten Elemente $e$ zugeordnet sind. Nehmen wir nun eine bestimmte Kurve $K$, wählen auf ihr einen Punkt $P$ und suchen das entsprechende Flächenelement des betreffenden Streifens, so müssen wir eine beliebige benachbarte Kurve $K'$ nehmen, die $K$ schneidet. Wir können insbesondere diejenige $K'$ wählen, die $K$ im Punkte $P$ schneidet. Das gesuchte Flächenelement gehört infolgedessen dem betreffenden Elementarkegel der Mongeschen Gleichung $F = 0$ an.

Der Flächenstreifen $S$ einer Komplexkurve $K$ hat daher in jedem Punkte $P$ mit dem zugeordneten Elementarkegel der Gleichung: $F = 0$ ein Flächenelement gemein.

**52.** Setzen wir ausdrücklich voraus, daß die Mongesche Gleichung: $F=0$ keine Pfaffsche Gleichung ist, so hat jeder Elementarkegel $\infty^1$ Flächenelemente, deren jedes einem Streifen $S$ angehört. Alsdann gibt es $\infty^4$ Flächenelemente, die jedesmal einem $S$ angehören, und diese $\infty^4$ Flächenelemente werden durch eine partielle Differentialgleichung:

$$\Phi(X, Y, Z, P, Q) = 0$$

bestimmt, deren Elementarkegel grade die Kegel der Mongeschen Gleichung $F=0$ sind.

Nehmen wir jetzt irgend eine Integralkurve $c$ der Pfaffschen Gleichung: $f=0$ und konstruieren wir im Raume $X, Y, Z$ die $\infty^1$ Komplexkurven $K$, deren Bildpunkte auf der gewählten Kurve $c$ liegen, so bestimmen zwei benachbarte Kurven $K$ dieser Schar immer einen Flächenstreifen $S$, und also erzeugen diese $\infty^1$ Kurven $K$ immer eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung: $\Phi=0$.

**53.** In ganz entsprechender Weise betrachten wir in einer späteren Abhandlung Systeme von $n-q$ Pfaffschen Gleichungen zwischen $n$ Veränderlichen und erhalten hierdurch in erster Linie eine allgemeine Theorie für semilineare partielle Differentialgleichungen:

$$W(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}) = 0$$ [723

mit $\infty^n$ charakteristischen Kurven, und gleichzeitig eine allgemeine Theorie der betreffenden Pfaffschen Systeme.

**54.** Setzen wir jetzt voraus, daß auch die Mongesche Gleichung: $F=0$ die Pfaffsche Form besitzt. Alsdann gibt es $\infty^3$ Flächenelemente $X, Y, Z, P, Q$, die [je] einem Streifen $S$ angehören. Und da die Zahl der Streifen $S$ gleich $\infty^3$ ist, so gehört jedes unter diesen $\infty^3$ Flächenelementen $\infty^1$ Streifen $S$ an. Jetzt bestimmt die Pfaffsche Gleichung $F=0$ dreifach unendlich viele Elemente $E$, die im Raume $X, Y, Z$ dieselbe Rolle spielen, wie im Raume $x, y, z$ die $\infty^3$ Elemente $e$. Zwischen den $\infty^3$ Elementen $e$ und den $\infty^3$ Elementen $E$ stellt unsere Berührungstransformation eine unendlichunendlichdeutige Beziehung fest. Die $\infty^3$ Elemente $E$ setzen sich zu $\infty^3$ Streifen $S$ zusammen, deren jeder das Bild eines Elementes $e$ liefert; dementsprechend bestimmen die $\infty^3$ Elemente $e$ dreifach unendlich viele Streifen $s$, deren jeder einem Elemente $E$ zugeordnet ist.

Nehmen wir im Raume $x, y, z$ eine beliebige Integralkurve $c$ der Pfaffschen Gleichung: $f=0$ und konstruieren wir alle $\infty^1$ Komplexkurven $K$, deren Bildpunkte auf der Kurve $c$ liegen, so erzeugen diese $\infty^1$ Kurven $K$ eine Fläche, deren Flächenelemente lauter Elemente $E$



sind. Die Pfaffsche Gleichung: $F=0$ hat also Integralflächen, und zwar gehört jedes Element $E$ einer und eo ipso auch nur einer Integralfläche an. Die Pfaffsche Gleichung: $F=0$ ist also integrabel, und dementsprechend ist auch die Pfaffsche Gleichung $f=0$ integrabel.

**55.** Hiermit ist der von mir in den Mathematischen Annalen, Bd. V, S. 163, Z. 6 [hier Abh. I, S. 20, Z. 24—32] aufgestellte fundamentale Satz bewiesen:

**Theorem III. Bestimmen die beiden Gleichungen:**

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

**sowohl im Raume $x, y, z$, wie im Raume $X, Y, Z$ dreifach unendlich viele Kurven, die jedesmal eine Pfaffsche Gleichung erfüllen, so sind diese Pfaffschen Gleichungen alle beide integrabel.**

Wie ich schon an der zitierten Stelle hervorgehoben habe, wirft dieser Satz Licht auf die Frage nach allen eindeutigen (Berührungs-)Transformationen des Raumes. Gleichzeitig hebe ich hervor, daß sich unser Theorem faktisch mit dem Satze deckt, daß jede Oskulationstransformation der Ebene eine Berührungstransformation ist. Ich vermute, daß es Herrn [724 Bäcklunds Aufmerksamkeit entgangen ist, daß ich schon in den Mathematischen Annalen, Bd. V das Theorem III ausdrücklich aufgestellt habe. Auch erlaube ich mir, darauf hinzuweisen, daß die Frage nach den Oskulationstransformationen des $n$-fachen Raumes zuerst von mir, und zwar im Jahre 1872 in den Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania formuliert wurde [d. Ausg. Bd. III, Abh. V, S. 27].

Ich behalte mir vor, auf Herrn Bäcklunds schöne Untersuchungen auf diesem Gebiete später zurückzukommen.

**56.** Der Vollständigkeit wegen stellen wir noch das folgende Theorem auf:

**Theorem IV. Bestimmen die Gleichungen:**

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

**im Raume $x, y, z$ dreifach unendlich viele Integralkurven $k$ einer Pfaffschen Gleichung und im Raume $X, Y, Z$ dreifach unendlich viele Kurven $K$, die eine nicht lineare Mongesche Gleichung $F=0$ erfüllen, so ist jene Pfaffsche Gleichung nicht integrabel. Die Kurven $K$ sind die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.**

Auf die Umkehrung dieses Theorems gehen wir hier nicht ein; dagegen betonen wir, daß wir später das aufgestellte Theorem, wie seine Umkehrung, verallgemeinern wollen; zu diesem Zwecke ersetzen wir zunächst die Pfaffsche Gleichung $f=0$ durch ein System Pfaffscher Gleichungen.

**57.** Endlich wollen wir annehmen, daß weder die Mongesche Gleichung $f = 0$, noch die Gleichung $F = 0$ die Pfaffsche Form besitzt.

Alsdann bestimmen wiederum zwei benachbarte einander schneidende Komplexkurven $K$ und $K'$ einen Flächenstreifen $S$; jetzt gibt es aber *vierfach* unendlich viele Streifen $S$. Dementsprechend finden wir auch im Raume $x, y, z$ *vierfach* unendlich viele Streifen $s$. Nehmen wir sodann eine beliebige Integralkurve $c$ der Mongeschen Gleichung: $f = 0$ und konstruieren alle $\infty^1$ Komplexkurven $K$, deren Bildpunkte auf $c$ liegen, so erzeugen diese $\infty^1$ Kurven $K$ jedesmal eine Fläche: $W(X, Y, Z) = 0$, die $\infty^1$ Streifen $S$ enthält. Wir erhalten in dieser Weise $\infty^\infty$ viele Flächen: $W = 0$, und diese Flächen liefern *das allgemeine Integral eines Involutionssystems, bestehend aus zwei partiellen* [725 *Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Ein derartiges Involutionssystem hat bekanntlich immer *fünffach* unendlich viele charakteristische Streifen zweiter Ordnung. Da beide Gleichungen unseres Involutionssystems die Monge-Ampèresche Form haben, so hat dieses Involutionssystem eo ipso *vierfach* unendlich viele charakteristische *Streifen erster Ordnung. Die Zahl der charakteristischen* **Kurven** *ist aber* $\infty^3$.

Soweit mir bekannt, sind derartige Involutionssysteme noch nicht betrachtet worden.

Bei unserer Berührungstransformation verhält sich unser Involutionssystem selbstverständlich nicht regulär.

Die Verallgemeinerung dieser Theorie liegt auf der Hand.

**58.** Liegt irgend eine nicht lineare Mongesche Gleichung:

$$F(X, Y, Z;\, dX : dY : dZ) = 0$$

vor, so bestimmt sie bekanntlich immer eine nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Sind:

$$\Phi(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \Psi(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma) = 0$$

die Gleichungen der $\infty^3$ Charakteristiken dieser partiellen Differentialgleichung, so bestimmen die Gleichungen:

$$\Phi(X, Y, Z, x, y, z) = 0, \quad \Psi(X, Y, Z, x, y, z) = 0$$

eine Berührungstransformation, bei welcher die $\infty^3$ Charakteristiken den $\infty^3$ Punkten $x, y, z$ zugeordnet werden. Gleichzeitig werden den $\infty^4$ Linienelementen der Gleichung: $F = 0$ die $\infty^4$ Linienelemente einer nicht integrabeln Pfaffschen Gleichung:

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

zugeordnet.



Die bekannte Transformationstheorie dieser Pfaffschen Gleichung liefert unmittelbar die vollständige Transformationstheorie der Mongeschen Gleichung: $F = 0$. Die Berührungstransformationen der Ebene geben unmittelbar alle Transformationen der $\infty^4$ Linienelemente $F = 0$, bei denen vereinigte Lage bewahrt wird. Ich bemerke ausdrücklich, daß diese Theorie *unmittelbar* aus meinen Entwickelungen im fünften Bande der Math. Annalen [hier Abh. I] hervorgeht.

**59.** Bei unseren Transformationen kann jede nicht lineare Monge- [726 sche Gleichung die Form:

$$d\mathfrak{y} - \mathfrak{p}\,d\mathfrak{x} = 0 \tag{i}$$

erhalten, ebenso jede nicht integrable Pfaffsche Gleichung. Eine integrable Pfaffsche Gleichung kann nie auf die Form (i), wohl aber auf die Form:

$$d\mathfrak{y} = 0$$

gebracht werden.

*Gegenüber den von mir eingeführten allgemeinen Transformationen hat daher eine* **Monge***sche Gleichung nur eine invariante Eigenschaft.*

**60.** Führt man das Linienelement, wie ich getan habe, als Raumelement ein, so erhält man eine Geometrie der Linienelemente des Raumes. Diese Geometrie zerfällt aber naturgemäß in zwei Teile. Die elementare Geometrie der Linienelemente betrachtet nur Punkttransformationen des Raumes; ich habe schon früher gezeigt, daß die Verwertung transzendenter Punkttransformationen zu überraschend einfachen und wichtigen Resultaten führen kann. Die höhere Geometrie der Linienelemente betrachtet solche Transformationen der Linienelemente von Mongeschen Gleichungen, die in meinen ersten geometrischen Arbeiten eingeführt wurden. Die von mir in dieser Abhandlung wiederholt angekündigten neuen Untersuchungen gehören, so kann ich sagen, zu der höheren Geometrie der Elemente des $n$-fachen Raumes.

### § 3. Bestimmung der allgemeinsten polaren Beziehung zwischen Linienkomplexen.

**61.** Im Februar 1869 teilte ich der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania eine Deutung des Imaginären der ebenen Geometrie mit, die für meine sämtlichen mathematischen Untersuchungen der Ausgangspunkt gewesen ist. In dieser Arbeit brachte ich den Grundgedanken der Plückerschen Liniengeometrie in Verbindung mit derjenigen geometrischen Deutung einer imaginären Größe, die man lange Argand und

und Gauß zugeschrieben hat, während sie faktisch schon im Jahre 1797 von Abels (und meinem) Landsmanne, dem Norweger **Caspar Wessel** der dänischen Gesellschaft der Wissenschaften mitgeteilt wurde.[1])

Descartes stellte das System zweier reeller veränderlicher [727
Größen durch einen Punkt der Ebene dar, und durch konsequente Entwickelung dieser fundamentalen Idee begründete er die analytische Geometrie der Ebene, die als eine sinnliche Darstellung der Algebra zweier reeller Größen aufgefaßt werden kann.

Will man für das System zweier imaginärer Größen:

$$A = a_1 + a_2 i, \quad C = c_1 + c_2 i$$

eine sinnliche Darstellung schaffen, so muß man als Repräsentanten dieses Größensystems eine reelle geometrische Figur einführen, die von vier reellen Parametern: $a_1, a_2, c_1, c_2$ abhängt. Den ersten Schritt in dieser Richtung machte v. Staudt, dessen Arbeiten mir damals unbekannt waren.

Für denjenigen, der sich Plückers Ideen angeeignet hatte, lag es nahe, eine reelle Raumgerade als Repräsentanten des imaginären Größensystems $A = a_1 + a_2 i$, $C = c_1 + c_2 i$ einzuführen. Zu diesem Zwecke stellte ich nach dem Vorgange Wessels die imaginäre Größe $A = a_1 + a_2 i$ durch den Punkt $a_1, a_2$ einer Ebene dar, ferner die imaginäre Größe $C = c_1 + c_2 i$ durch den Punkt $c_1, c_2$ einer parallelen Ebene; sodann faßte ich die Verbindungslinie dieser beiden Punkte als Repräsentanten des imaginären Größensystems $A = a_1 + a_2 i$, $C = c_1 + c_2 i$ auf.

Bei dieser Gelegenheit brauche ich nicht ausführlich darauf einzugehen, wie die konsequente Durchführung dieser einfachen Idee mich zu einer Reihe geometrischer und analytischer Theorien führte, die nicht allein für mich, sondern auch für die Wissenschaft neu waren.

1) Caspar Wessels schöne Arbeit lag fast hundert Jahre lang begraben in den Schriften der dänischen Ges. d. W. Nachdem der dänische Mathematiker Juel den Wert dieser Arbeit erkannt hatte, veranlaßte ich, daß Wessels ursprüngliche Abhandlung in dem norwegischen Archiv for Mathematik reproduziert wurde. Es war damals meine ausdrückliche Absicht, sobald wie möglich eine deutsche oder französische Ausgabe dieses Werkes meines Landsmannes zu veranstalten. Inzwischen ist eine solche Ausgabe von der dänischen Gesellschaft veröffentlicht worden. Gegenüber diesem Faktum erlaube ich mir folgende Data anzuführen. Im Jahre 1797 waren die beiden Königreiche Norwegen und Dänemark noch unter einem Könige vereinigt. Caspar Wessel war aber, wie Juel ausdrücklich angibt, Norweger. Die von mehreren dänischen Mathematikern besorgte Ausgabe beabsichtigt wahrscheinlich, diese Tatsache soweit wie möglich zu eliminieren.



**62.** Hier kann ich mich auf die Bemerkung beschränken, daß meine [728
geometrische Deutung der imaginären Dualität der Ebene mir ohne weiteres (Februar 1869) eine merkwürdige Kategorie von Berührungstransformationen des Raumes lieferte, die als speziellen Fall diejenige fundamentale Transformation umfaßt, die gerade Linien in Kugeln umwandelt.

Diese letztere Berührungstransformation ordnet den Punkten eines Raumes $x, y, z$ die Minimalgeraden[1]) eines anderen Raumes $X, Y, Z$ zu; gleichzeitig werden die Punkte des Raumes $X, Y, Z$ den Geraden eines linearen Linienkomplexes des Raumes $x, y, z$ zugeordnet. Und zwar liegen die Bildpunkte $x, y, z$ aller Minimalgeraden, die durch einen gemeinsamen Punkt $X, Y, Z$ gehen, auf einer Geraden, nämlich auf derjenigen Geraden des linearen Komplexes, deren Bildpunkt der betreffende Punkt $X, Y, Z$ ist. Denken wir uns andererseits, daß sich eine Gerade des linearen Komplexes um einen auf ihr gelegenen Punkt $x, y, z$ dreht, so beschreibt der Bildpunkt $X, Y, Z$ dieser Komplexlinie eine Gerade, nämlich diejenige Minimalgerade, deren Bildpunkt der besprochene Punkt $x, y, z$ ist.

**63.** Meine Deutung der imaginären Dualität gab mir drei wesentlich verschiedene Berührungstransformationen zwischen den beiden Räumen $x, y, z$ und $X, Y, Z$. Diese drei Transformationen besaßen einen gemeinsamen Charakter, so verschieden sie auch im einzelnen waren. In jedem Falle traten zwei Linienkomplexe auf, unter denen der eine im Raume $x, y, z$ gelegen war, während der andere Komplex dem Raume $X, Y, Z$ angehörte. Dabei wurden jedesmal die Punkte des einen Raumes in die Komplexlinien des anderen Raumes, und die Komplexlinien des einen Raumes in die Punkte des anderen Raumes übergeführt. Komplexlinien durch einen Punkt entsprachen jedesmal Punkte einer Komplexlinie des anderen Raumes.

In dem zuerst besprochenen Falle war der eine Komplex ein linearer, der andere Komplex dagegen ein spezieller Komplex zweiten Grades, dessen Gerade sämtlich einen Kegelschnitt trafen.

In dem zweiten Falle waren beide Linienkomplexe vom zweiten [729
Grade, und zwar solche Komplexe, die man jetzt gewöhnlich als tetraedrale Komplexe bezeichnet.

Im dritten Falle waren beide Komplexe spezielle lineare Komplexe, und die betreffende Berührungstransformation des Raumes war nicht

1) Als Minimalgerade bezeichne ich jede imaginäre Gerade des Raumes, die den Poncelet schen imaginären Kugelkreis schneidet. Vgl. Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania, 1870 und 1871, sowie Math. Ann. Bd. V [d. Ausg. Bd. I, Abh. IX, XI, XII; Bd. II, Abh. I].

wesentlich verschieden von einer Transformation, die in analytischer Form schon bei Euler, später auch bei Ampère aufgetreten war.

Allerdings ist wohl zu beachten, daß Euler und Ampère diese Operation keineswegs als eine Berührungstransformation des Raumes, sondern nur als ein Hilfsmittel zur Transformation gewisser Differentialgleichungen auffaßten.

Eine jede unter diesen drei Berührungstransformationen bietet ein besonderes Interesse dar. Ja die erstgenannte Transformation, die gerade Linien in Kugeln überführt, hat schon auf die Entwickelung der Geometrie (und der Analysis) einen so großen Einfluß ausgeübt, daß sie der Poncelet schen Transformation der reziproken Polaren an die Seite gestellt werden kann. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß die Poncelet sche Transformation bei Ausdehnung auf $n$ Dimensionen ihr Interesse bewahrt, während meine Transformation bei Ausdehnung auf $n$ Dimensionen ihre wichtigsten Eigenschaften verliert.

**64.** Durch Betrachtungen von dieser Art wurde ich schon im Jahre 1871 dazu veranlaßt, alle (algebraischen) Berührungstransformationen des dreifachen Raumes zu suchen, die alle Punkte des Raumes in die Geraden eines Linienkomplexes und alle Geraden eines Linienkomplexes in die Punkte des Raumes transformieren.

Anders ausgesprochen:

Ich suchte die allgemeinste polare Beziehung:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

zwischen zwei Linienkomplexen.

Bei meiner Behandlung dieses schwierigen und hochinteressanten Problems gelang es mir, einige Schritte vorwärts zu kommen. Durch Betrachtungen, die ich sogleich reproduzieren werde, erkannte ich nämlich, daß die Kegel der beiden Linienkomplexe vom ersten oder zweiten Grade sein müssen, oder, daß sie in Kegel zweiten, beziehungsweise ersten Grades zerfallen. Da es mir aber im Jahre 1871 noch nicht gelang, in defini- [730
tiver Weise alle Linienkomplexe zu bestimmen, deren Komplexkegel in Kegel zweiten, beziehungsweise ersten Grades zerfallen, so sah ich mich damals dazu gezwungen, meine Frage nach den Berührungstransformationen des Raumes, die alle Punkte in $\infty^3$ Gerade und $\infty^3$ Gerade in die Punkte des Raumes überführen, nur unter gewissen speziellen Voraussetzungen zu erledigen.

Jetzt steht die Sache anders. Nachdem im ersten Paragraphen dieser Abhandlung alle Linienkomplexe bestimmt worden sind, deren Komplex-



kegel zerfallen, bietet die Bestimmung aller Berührungstransformationen des Raumes, bei denen Punkte in Gerade und gewisse $\infty^3$ Gerade in Punkte übergehen, nicht [mehr] unüberwindliche Schwierigkeiten. In diesem Paragraphen führe ich diese Bestimmung vollständig durch.

**65.** Es ist nicht schwierig, spezielle Lösungen unseres Problems anzugeben.

Das System der beiden bilinearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} &(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) X + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) Y + \\ &+ (\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot) Z + (\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot) = 0, \\ &(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1) X + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2) Y + \\ &+ (\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot) Z + (\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot) = 0 \end{aligned}$$

ordnet ja offenbar jedem Punkte $x, y, z$ eine Gerade des Raumes $X, Y, Z$ zu und zugleich jedem Punkte $X, Y, Z$ eine Gerade des Raumes $x, y, z$.

Die bilinearen Gleichungssysteme liefern daher eine Kategorie von Berührungstransformationen, welche Punkte in Gerade und $\infty^3$ Gerade in die Punkte des Raumes überführen. In dieser Weise erhält man aber nur projektive Verallgemeinerungen derjenigen Berührungstransformationen, die ich ursprünglich durch meine reelle Deutung der imaginären Dualität der Ebene gefunden hatte.

Es liegt nichtsdestoweniger nahe, zu vermuten, daß ein bilineares Gleichungssystem $\varphi = 0$, $\psi = 0$ die allgemeinste polare Beziehung zwischen zwei Linienkomplexen herstellt. So steht aber die Sache nicht. Es ist in der Tat möglich (und sogar in wesentlich verschiedenen Weisen), eine polare Beziehung zwischen zwei Linienkomplexen herzustellen, die nicht durch ein bilineares Gleichungssystem definiert werden kann.

Man nehme zum Beispiel zwei beliebige (algebraische) Develop- [731
pable und ordne einer jeden unter den $\infty^1$ Tangentialebenen der einen Fläche eine Tangentialebene der zweiten zu. Bezieht man sodann die Punkte und Geraden jeder Tangentialebene der ersten Developpabeln dualistisch auf die Geraden und Punkte der entsprechenden Tangentialebene der zweiten Fläche, so erhält man eine polare Beziehung zwischen den beiden Linienkomplexen, die von den Tangenten dieser developpabeln Flächen gebildet werden. Und die Definitionsgleichungen der hiermit definierten Berührungstransformation, die unter Umständen transzendent sein kann, sind niemals bilinear.

**66.** Indem wir jetzt das aufgestellte Problem in Angriff nehmen, erinnern wir zuerst an eine schöne Bemerkung von Malus, die seinerzeit von mir verallgemeinert und vervollständigt wurde. Malus ordnet jedem

Punkte $x, y, z$ des Raumes eine hindurchgehende Gerade durch Gleichungen:

$$\mathfrak{x} - x = r(\mathfrak{z} - z), \quad \mathfrak{y} - y = s(\mathfrak{z} - z)$$

zu, in denen $r$ und $s$ gewisse Funktionen von $x, y, z$ bezeichnen. Er betrachtet sodann diejenigen Geraden dieser Schar, die den Punkten $(x + dx, y + dy, z + dz)$ in der Umgebung des Punktes $x, y, z$ zugeordnet sind, und untersucht, welche unter diesen Geraden die Gerade des Punktes $x, y, z$ schneiden.

Eine einfache Rechnung zeigt ihm, daß diese benachbarten Punkte durch die Mongesche Gleichung:

$$(r\,dz - dx)\,ds - (s\,dz - dy)\,dr = 0,$$

die vom zweiten Grade in den Differentialen $dx, dy, dz$ ist, bestimmt werden. Er zog hieraus den Schluß, daß die gesuchten, dem Punkte $x, y, z$ benachbarten Punkte auf einem Kegel zweiten Grades liegen, dessen Spitze der Punkt $x, y, z$ ist.

**67.** In meiner früher zitierten Arbeit aus dem Jahre 1871 [Bd. I, Abh. XI] verallgemeinerte und vervollständigte ich diese schöne Bemerkung von Malus in der folgenden Weise. Ich betrachtete einen beliebigen Linienkomplex, der in irgend einer Weise auf den Punktraum $x, y, z$ abgebildet war.

Es werden dann die Geraden des Komplexes durch Gleichungen von der Form:

$$r\mathfrak{z} = \mathfrak{x} - \varrho, \quad s\mathfrak{z} = \mathfrak{y} - \sigma$$

dargestellt, deren Koeffizienten: $r, \varrho, s, \sigma$ von $x, y, z$ abhängen. Ver- [732
langen wir jetzt, daß die beiden benachbarten Komplexlinien, deren Bildpunkte die Koordinaten $x, y, z$ und:

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz$$

besitzen, einander schneiden sollen, so erhalten wir die Mongesche Gleichung:

$$dr . d\sigma - d\varrho . ds = 0,$$

die in den Differentialen $dx, dy, dz$ vom zweiten Grade ist.

Es gibt indes einen Ausnahmefall, in dem sich diese **Monge**sche Gleichung auf eine **Pfaff**sche Gleichung reduziert. Dies tritt dann und nur dann ein (man vergleiche die Entwickelungen des vorigen Paragraphen), wenn die Geraden des betreffenden Linienkomplexes die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sind. Alsdann werden die charakteristischen Streifen dieser partiellen Differentialgleichung jedesmal von zwei benachbarten Komplexlinien $g$



und $g'$ gebildet, die einander schneiden. Alle Flächenelemente eines Streifens liegen somit in einer Ebene, und diese Ebene berührt alle Komplexkegel, die unsere Komplexlinie $g$ enthalten. Es sind daher alle Komplexlinien singuläre Gerade, und der Komplex selbst besteht aus allen Tangenten einer nichtdeveloppabeln Fläche, oder aus allen Treffgeraden einer krummen Kurve.

Wir formulieren zuerst das letzte Resultat als Satz:

**Satz 1.** Die Geraden eines Linienkomplexes sind dann und nur dann Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, wenn der Komplex aus allen Tangenten einer nichtabwickelbaren Fläche, oder aus den Treffgeraden einer krummen Kurve besteht.

**68.** Indem wir uns auf diesen Satz stützen, können wir meine Verallgemeinerung und Vervollständigung des Satzes von **Malus**[1]), die ich ursprünglich in anderer Weise begründet hatte, in der folgenden Weise formulieren:

**Satz 2.** Wird ein Linienkomplex des Raumes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ auf den Punktraum $x, y, z$ abgebildet, so drückt sich die Bedingung für das Schneiden zweier benachbarter Komplexlinien durch eine **Monge**sche Gleichung:

$$f(x, y, z;\ dx : dy : dz) = 0$$ [733

aus, die im allgemeinen vom zweiten Grade in den Differentialen $dx, dy, dz$ sein wird. Besteht aber der Komplex aus allen Tangenten einer nichtabwickelbaren Fläche, oder aus allen Sekanten einer krummen Kurve, so ist die Gleichung: $f = 0$ eine nicht integrable **Pfaff**sche Gleichung. Besteht endlich der Komplex aus allen Tangenten einer abwickelbaren Fläche, oder aus den Sekanten einer Geraden, so ist: $f = 0$ eine integrable **Pfaff**sche Gleichung.

Wenn wir eben gesagt haben, daß die Bedingung: $f = 0$ für das Schneiden zweier benachbarter Geraden eines Linienkomplexes im allgemeinen die Form:

$$a\,dx^2 + b\,dy^2 + c\,dz^2 + 2e\,dy\,dz + 2f\,dz\,dx + 2g\,dx\,dy = 0$$

besitzt, so ist wohl zu beachten, daß die Koeffizienten $a, b, \ldots, g$ im allgemeinen keine eindeutigen Funktionen von $x, y, z$ sind, während sie selbstverständlich innerhalb passend gewählter Bereiche eindeutig sein

1) In meinen Publikationen aus den Jahren 1870—72 wurden die mir damals unbekannten Betrachtungen von Malus nicht zitiert.

müssen. Nur wenn die Abbildung des betreffenden Komplexes auf den Punktraum $x, y, z$ so beschaffen ist, daß jeder Punkt $x, y, z$ nur einer einzigen Komplexlinie als Bildpunkt zugeordnet ist, kann man von vornherein behaupten, daß die Koeffizienten der Gleichung: $f = 0$ eindeutige Funktionen des Ortes sind.

**69.** Verbinden wir unsere letzten Ergebnisse mit den Entwickelungen des zweiten Paragraphen, so erhalten wir unmittelbar den folgenden Satz über die allgemeinste polare Beziehung zwischen zwei Linienkomplexen:

**Satz 3.** Sind zwei irreduzible Linienkomplexe polar auf einander bezogen, so sind drei Fälle möglich.

1. Sind beide Komplexe nicht speziell, sind also ihre Geraden weder Tangenten einer Fläche, noch Sekanten einer Kurve, so bilden alle Geraden jedes Komplexes, die durch einen Punkt von allgemeiner Lage gehen, einen einzigen irreduzibeln Kegel zweiten Grades. In diesem Falle sind beide Linienkomplexe **algebraisch** und vom **zweiten** Grade.

2. Ist der Linienkomplex des Raumes $x, y, z$ nicht speziell, dagegen der Komplex des Raumes $X, Y, Z$ speziell, so bilden die Komplexlinien des Raumes $x, y, z$ einen allgemeinen Linienkomplex **ersten** Grades; dagegen besteht der Komplex des Raumes $X, Y, Z$ entweder aus allen Tangenten einer nicht abwickelbaren Fläche zweiten Grades, oder [734
aus den Sekanten eines irreduzibeln Kegelschnitts.

3. Sind beide Linienkomplexe speziell, so bestehen sie alle beide aus den Tangenten einer (transzendenten oder algebraischen) developpabeln Fläche, oder aus den Sekanten einer geraden Linie.

**70.** Schon im Jahre 1871 versuchte ich, den hier streng begründeten Satz zu beweisen. So beachtenswert aber auch meine damaligen Bestrebungen waren, so fehlte mir doch damals (wie ich übrigens in den Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania, 1871, S. 87 [d. Ausg. Bd. I, Abh. XI, S. 129f.] offen zugab) noch die feste Grundlage für diese schwierige Untersuchung.

Wir wollen jetzt der Reihe nach die drei möglichen Fälle durchgehen und alle Berührungstransformationen aufstellen, die unsere Forderungen erfüllen. Dabei erscheint es zweckmäßig, zuerst den dritten Fall zu erledigen, sodann den zweiten Fall zu nehmen und endlich zum Schluß den ersten Fall zu diskutieren.

**71.** Wir nehmen zwei ganz beliebige — algebraische oder transzendente — developpable Flächen und ordnen jeder Ebene der einen Fläche



eine Ebene der zweiten zu. Selbstverständlich soll diese Zuordnung durch eine analytische Gleichung vermittelt werden. Sodann stellen wir zwischen je zwei entsprechenden Ebenen unserer Developpabeln eine dualistische Beziehung fest. In dieser Weise ordnen wir jeder Tangente der einen (wie der anderen) developpabeln Fläche einen Punkt des anderen Raumes zu, und diese Zuordnung besitzt immer die von uns verlangte charakteristische Eigenschaft: Punkt und Komplexlinie (das heißt, Tangente der developpabeln Fläche) in vereinigter Lage bilden sich als Komplexlinie und Punkt in vereinigter Lage ab.

Hiermit ist eine ausgedehnte Kategorie von Berührungstransformationen gefunden, die unsere Forderungen erfüllen, und andere Transformationen liefert der dritte Fall offenbar nicht. Wünscht man unter diesen Berührungstransformationen alle eineindeutigen herauszugreifen, so muß man die beiden developpabeln Flächen durch zwei Ebenenbüschel ersetzen. Unter diesen letzteren Transformationen gibt es einige, die durch zwei bilineare Gleichungen definiert werden können.

**72.** Jetzt nehmen wir den zweiten Fall mit seinen beiden [735
Unterfällen.

Wir setzen zuerst voraus, daß die Komplexlinien des Raumes $x, y, z$ einen allgemeinen Komplex ersten Grades $l$ bilden, und daß die Komplexlinien des Raumes $X, Y, Z$ einen irreduzibeln Kegelschnitt $K$ schneiden. Eine derartige polare Beziehung liefert meine so bekannte Berührungstransformation $\Lambda$, die gerade Linien in Kugeln überführt und von mir schon im Februar 1869 entdeckt wurde.

Ist nun $L$ irgend eine andere derartige Berührungstransformation, so können wir ohne wesentliche Beschränkung annehmen, daß $L$ und $\Lambda$ denselben linearen Komplex auf denselben Komplex zweiten Grades beziehen. Alsdann dürfen wir behaupten, daß die Berührungstransformation:

$$L\Lambda^{-1}$$

eine Punkttransformation $P$ des Raumes $x, y, z$ darstellt, welche die Pfaffsche Gleichung des linearen Linienkomplexes $l$ in sich transformiert. Es besteht daher die symbolische Gleichung:

$$L\Lambda^{-1} = P,$$

oder:

$$L = P \,.\, \Lambda;$$

und darin bezeichnet $P$ eine projektive Transformation, $\Lambda$ meine Berührungstransformation und $L$ die allgemeinste Berührungstransformation, die zwischen einem allgemeinen linearen Komplexe und dem Komplexe der Sekanten eines irreduzibeln Kegelschnitts eine polare Beziehung herstellt.

Die wichtigste Eigenschaft meiner Berührungstransformation $A$ ist, daß sie Gerade in Kugeln und Haupttangentenkurven in Krümmungslinien überführt.

**73.** Sodann wollen wir annehmen, daß der Linienkomplex des Raumes $x, y, z$ wiederum ein allgemeiner linearer Komplex $l$ ist, daß dagegen der Komplex des Raumes $X, Y, Z$ aus allen Tangenten einer nicht abwickelbaren Fläche zweiten Grades besteht.

Die betreffende Berührungstransformation $B$ führt die Geraden des linearen Komplexes $l$ in die Punkte $X, Y, Z$ über; gleichzeitig transformiert sie die Punkte $x, y, z$ in die Tangenten unserer Fläche zweiten Grades. Nun aber gibt es eine zuerst von Darboux untersuchte Punkt- [736 transformation $D$, die alle Tangenten einer Fläche zweiten Grades in die Sekanten eines Kegelschnittes überführt. Daher können wir eine Berührungstransformation:

$$BD$$

bilden, die alle Punkte des Raumes in die Sekanten eines Kegelschnittes und die Geraden eines allgemeinen linearen Linienkomplexes in die Punkte des Raumes überführt. Wir können daher die symbolische Gleichung:

$$BD = A,$$

oder:

$$B = AD^{-1}$$

bilden. Die gesuchte Berührungstransformation $B$ setzt sich also aus meiner Berührungstransformation $A$, aus Darbouxs Transformation und aus projektiven Transformationen zusammen.

In meinen Untersuchungen im Jahre 1871 (Math. Ann. Bd. V [hier Abh. I]) diskutierte ich auch die hier untersuchte Hypothese. Ich begnügte mich aber damals mit der Bemerkung, daß es keine eindeutige Berührungstransformation gibt, die dieser Annahme entspricht.

**74.** In den Math. Ann. Bd. XV betrachtete Herr Schur eine Abbildung des linearen Linienkomplexes auf den Punktraum, bei welcher sich alle Komplexlinien durch einen Punkt als Punkte einer Geraden abbilden, die eine Fläche zweiten Grades berührt. Es entging aber seiner Aufmerksamkeit, daß diese Transformation insofern nicht wesentlich neu war, weil sie sich aus meiner Transformation und aus **Darbouxs** Transformation zusammensetzt. Auf diesen Umstand lenkte ich die Aufmerksamkeit im Jahre 1882 in den Verh. d. G. d. W. zu Christiania [d. Ausg. Bd. III, Abh. XXXVIII. S. 542]. Gleichzeitig betonte ich, daß die Berührungstransformation $B$ Haupttangentenkurven einer Fläche in nichteuklidische Krümmungslinien überführt.



Mir gehört jedenfalls die wichtige Bemerkung, daß jede Berührungstransformation $B$, die zwischen einem allgemeinen linearen Komplexe und dem Tangentenkomplexe einer nicht abwickelbaren Fläche zweiten Grades eine polare Beziehung herstellt, durch die Formel:

$$B = AD^{-1}$$

dargestellt wird.

**75.** Es bleibt jetzt nur noch übrig, die allgemeinste polare Beziehung zwischen zwei Linienkomplexen zweiten Grades zu bestimmen. In meinen früher zitierten Arbeiten kam ich zu dem richtigen Resultate, daß jede [737 derartige Zuordnung durch ein bilineares Gleichungssystem definiert wird, und daß dementsprechend beide Geradensysteme tetraedrale Komplexe sind. Ich werde jetzt auf den recht schwierigen Beweis dieses fundamentalen Satzes ausführlicher eingehen.

Wir wollen annehmen, daß eine polare Beziehung zwischen zwei nicht speziellen Linienkomplexen zweiten Grades durch die beiden Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \psi(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

definiert ist. Nehmen wir sodann eine Ebene von allgemeiner Lage im Raume $x, y, z$, so sind deren Punkte Bildpunkte der Geraden eines Strahlensystems $S$, und da unsere Ebene einen irreduzibeln Komplexkegelschnitt enthält, und jeder Punkt auf zwei Tangenten dieses Kegelschnittes liegt, so schneidet jede Gerade des Strahlensystems $S$ die Brennkurve zweimal. Das Strahlensystem $S$ besteht also aus den Sehnen einer Raumkurve, und da diese Kurve auf $\infty^1$ Kegeln zweiten Grades gelegen ist, nämlich auf allen Komplexkegeln, deren Scheitel auf der Brennkurve liegt, so ist diese Kurve eine gewundene Kurve dritter Ordnung.

Die Punkte $x, y, z$ jeder Ebene sind somit Bildpunkte der Sehnen einer gewundenen Kurve dritter Ordnung. Im Raume $X, Y, Z$ treten $\infty^3$ derartige Kurven auf, die $C_3$ heißen mögen. Im Raume $x, y, z$ finden wir in entsprechender Weise $\infty^3$ Kurven dritter Ordnung $c_3$.

**76.** Nach Plücker hat jeder allgemeine Linienkomplex zweiten Grades eine algebraische Singularitätenfläche, deren Punkte dadurch charakterisiert sind, daß die zugeordneten Komplexkegel zerfallen. Nun muß jede Kurve $C_3$ die Singularitätenfläche des Raumes $X, Y, Z$ mindestens in einem Punkte schneiden, und in diesem Schnittpunkte $P_0$ müssen die hindurchgehenden Komplexlinien zwei Strahlenbüschel bilden. Es bilden aber die hindurchgehenden Sehnen der $C_3$ einen irreduzibeln Kegel zweiten Grades. Also ist $P_0$ ein Doppelpunkt des Komplexes, und alle hindurchgehenden Geraden sind Komplexlinien. Nun aber ist klar, daß unser Komplex nur eine begrenzte Anzahl Doppelpunkte (und zwar höchstens vier) haben kann. Also dürfen wir schließen, daß alle $C_3$ den Punkt $P_0$ (wie überhaupt alle Schnittpunkte mit der Singularitätenfläche) gemein haben. Dies folgt übrigens unmittelbar daraus, daß die Doppelpunkte [738 des Komplexes auf allen Komplexkegeln liegen, während jede $C_3$ auf $\infty^1$ Komplexkegeln gelegen ist.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir im Raume $x, y, z$ alle $\infty^2$ Komplexlinien, die eine feste Komplexlinie $g$ schneiden. Diese $\infty^2$ Geraden bilden ein Strahlensystem $\sigma$, dessen Gerade zu $\infty^1$ Komplexkegeln und zu $\infty^1$ Komplexkegelschnitten zusammengefaßt werden können. Die $\infty^2$ Bildpunkte aller Strahlen dieses Systems bilden eine Fläche, die von $\infty^1$ Komplexlinien erzeugt wird, und diese Komplexlinien gehen durch einen gemeinsamen Punkt $Q$. Die betreffende Fläche ist somit ein Komplexkegel $K_0$, und dieser Kegel enthält $\infty^1$ Kurven $C_3$ und gleichzeitig den gemeinsamen Punkt $P_0$ aller Kurven $C_3$.

Unsere $\infty^1$ Kurven $C_3$ haben jedenfalls zwei gemeinsame Punkte, nämlich $Q$ und $P_0$. Schneiden zwei solche $C_3$ einander in einem weiteren Punkte $\Pi$, so leuchtet unmittelbar ein, daß $\Pi$ ein Doppelpunkt des Komplexes und gleichzeitig ein gemeinsamer Punkt aller $C_3$ sein muß.

Greifen wir nun unter den $\infty^1$ $C_3$ zwei beliebige heraus, und konstruieren wir die beiden Kegel zweiten Grades mit dem Scheitel $P_0$, die unsere beiden $C_3$ enthalten, so haben diese Kegel eo ipso v i e r gemeinsame Strahlen, unter denen wir einen, nämlich $P_0 Q$, kennen. Diese Gerade kann ausnahmeweise vierfach zählen; ist dies nicht der Fall, so haben unsere Kegel jedenfalls noch einen gemeinsamen Strahl, und trifft dieser Strahl den Komplexkegel $K_0$ in $\Omega$, so ist $\Omega$ ein gemeinsamer Punkt der beiden $C_3$, gleichzeitig ein Doppelpunkt des Komplexes, und also liegt $\Omega$ auf allen $\infty^1$ $C_3$ unseres Komplexkegels $K_0$.

**77.** Hier können nun mehrere Fälle eintreten. Der allgemeine Fall ist dadurch charakterisiert, daß die $\infty^1$ $C_3$ des Komplexkegels $K_0$ fünf Punkte gemein haben, nämlich die Spitze $Q$ und vier weitere Punkte $P_0, P_1, P_2, P_3$, die wir als Ecken eines Tetraeders auffassen können. Nach längst bekannten Sätzen schneiden dann die $\infty^3$ Sehnen unserer $\infty^1$ $C_3$ das besprochene Tetraeder nach konstantem Doppelverhältnisse. Hieraus folgt, daß in diesem allgemeinen Falle der Linienkomplex des Raumes $X, Y, Z$ ein allgemeiner tetraedraler Komplex ist. Fallen einige unter den fünf Punkten $Q_0, P_1, P_2, P_3, P_4$ zusammen, so ist der Komplex des Raumes $X, Y, Z$ immer ein tetraedraler Komplex, dessen Tetraeder in irgend einer Weise ausgeartet ist.



Hieraus folgt unmittelbar, daß auch der Linienkomplex des Rau- [739 mes $x, y, z$ ein tetraedraler Komplex ist. Nun aber habe ich schon längst gezeigt, daß ein bilineares Gleichungssystem $\varphi = 0$, $\psi = 0$ im allgemeinen eine polare Beziehung zwischen zwei tetraedralen Linienkomplexen liefert, unter denen der eine Komplex ganz beliebig gewählt werden kann.

**78.** Hieraus läßt sich nun schließen, daß jede polare Beziehung zwischen zwei tetraedralen Komplexen $t$ und $T$ durch ein bilineares Gleichungssystem vermittelt wird. Den Beweis führen wir einfach in der folgenden Weise.

Zwischen dem Komplexe $t$ und einem gewissen anderen tetraedralen Komplexe $\tau$ sei durch ein bilineares Gleichungssystem eine polare Beziehung festgestellt, die in der Berührungstransformation $\mathfrak{B}$ ihren analytischen Ausdruck findet. Es sei ferner $B$ diejenige Berührungstransformation, die zwischen den Komplexen $t$ und $T$ die polare Beziehung feststellt.

Bilden wir dann die Berührungstransformation:

$$B^{-1}\mathfrak{B},$$

so leuchtet ein, daß sie eine Punkttransformation ist, und daß sie die Geraden des tetraedralen Komplexes $T$ in die Geraden des Komplexes $\tau$ überführt. Nun aber sind die Ebenen im Raume $X, Y, Z$ die einzigen Flächen, die in doppelter Weise von Geraden des Komplexes $T$ erzeugt sind. Durch derartige Betrachtungen erkennen wir, daß die Punkttransformation $B^{-1}\mathfrak{B}$ eine p r o j e k t i v e Transformation $P$ ist. Und hieraus folgt, daß die Berührungstransformation:

$$B = \mathfrak{B} P^{-1}$$

durch ein bilineares Gleichungssystem vermittelt werden kann.

**79.** Hiermit ist es uns durch Betrachtungen, die im Prinzipe streng sein dürften, gelungen, die allgemeinste polare Beziehung zwischen zwei i r r e d u z i b e l n Linienkomplexen zu bestimmen. Ehe wir unsere Resultate formulieren, wollen wir wenigstens andeuten, wie sie sich auf reduzible Komplexe ausdehnen.

Es seien zwei reduzible (algebraische) Linienkomplexe $c$ und $C$ polar auf einander durch das Gleichungssystem: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bezogen. Wir nehmen an, daß der Komplex $c$ in $m$ irreduzible Komplexe $c_1, c_2, \ldots, c_m$ zerfällt, und daß $C$ in entsprechender Weise aus $M$ irreduzibeln Komplexen $C_1, C_2, \ldots, C_M$ besteht. Alsdann leuchtet ein, daß die M o n g e sche Gleichung $f = 0$ in $m$ irreduzible Gleichungen $f_1 = 0, \ldots, f_m = 0$ zerfällt, und daß sich dementsprechend die Gleichung $F = 0$ in $M$ irreduzible Gleichungen $F_1 = 0, \ldots, F_M = 0$ zerlegt.

Jetzt können wir einfach von den Komplexen $C_2, \ldots, C_M$ absehen [740 und nur $C_1$ behalten. Die Bedingung für das Schneiden zweier benachbarter Geraden des Komplexes $C_1$ erhält dann die Form:

$$f_{k_1} \cdot f_{k_2} \cdot \cdots \cdot f_{k_\mu} = 0,$$

und dabei sind $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ einige unter den Zahlen $1, 2, \ldots, m$. Eine jede unter den Gleichungen $f_{k_i} = 0$ ist die Mongesche Gleichung eines irreduzibeln Komplexes $c_{k_i}$. Behalten wir jetzt unter den $c$ nur $c_{k_1}$, so erhalten wir eine polare Beziehung zwischen den beiden irreduzibeln Linienkomplexen $C_1$ und $c_{k_1}$.

**Theorem V. Sind zwei Linienkomplexe polar auf einander bezogen, so lassen sich alle Möglichkeiten auf die folgenden Fälle reduzieren:**

**1. Es können beide Komplexe tetraedrale Komplexe sein. Die Beziehung kann dann durch ein bilineares Gleichungssystem vermittelt werden.**

**2. Der eine Komplex ist ein allgemeiner linearer, der andere besteht aus allen Sekanten eines Kegelschnittes. Die Beziehung setzt sich aus meiner bekannten Berührungstransformation, die alle Geraden in Kugeln überführt, und aus projektiven Transformationen zusammen.**

**3. Der eine Komplex ist ein allgemeiner linearer, der andere besteht aus den Tangenten einer nicht abwickelbaren Fläche zweiten Grades.**

**4. Beide Komplexe bestehen aus den Tangenten einer abwickelbaren Fläche.**

**5. Die Geraden des einen Komplexes schneiden eine feste Gerade; diejenigen des andern Komplexes sind Tangenten einer abwickelbaren Fläche.**

**6. Beide Komplexe sind spezielle lineare Komplexe. Die Beziehung wird im einfachsten Falle durch eine Berührungstransformation vermittelt, die schon bei Euler und Lagrange auftritt.**

**Nur die drei letzten Fälle können auch transzendente Berührungstransformationen liefern.**

Ich habe versucht, auch diese Untersuchungen auf $n$ Dimensionen auszudehnen.[1])

1) Ich sehe mich dazu veranlaßt, ausdrücklich zu betonen, daß ich in meinen Vorlesungen bei vielen Gelegenheiten hervorgehoben habe, daß der Begriff: derivierte Gruppe in der Substitutionentheorie sein Analogon hat.

# XVI.

## Fortale

## til nytrykk av en avhandling av Caspar Wessel.

(Vorwort zum Wiederabdrucke einer Abhandlung von Caspar Wessel.)

(Aus dem Norwegischen übersetzt.)

(Archiv for Mathematik og Physik. Kristiania 1896. Auch besonders erschienen.)

### Vorwort. [3

Die norwegischen Mathematiker waren bis in die letzte Zeit des Glaubens, die höhere Mathematik in Norwegen beginne mit Niels Henrik Abel. Dessen unsterbliche Untersuchungen eröffneten, wie alle wissen, neue ausgedehnte Gebiete, deren Bearbeitung jahrzehntelang die ersten mathematischen Kräfte des Jahrhunderts mit Beschlag belegt hat.

Es zeigt sich indes jetzt höchst merkwürdiger Weise, daß es vor Abel einen norwegischen Mathematiker gegeben hat, der schon ein Vierteljahrhundert früher grundlegende Ideen entwickelt hat, die zweifellos bahnbrechend geworden wären, wären sie nicht unbeachtet geblieben.

Im Jahre 1796 überreichte der Norweger Caspar Wessel, ein Bruders des Dichters Johan Herman Wessel, der dänischen Gesellschaft der Wissenschaften diese Abhandlung[1]), die eine klare und vollständige Darstellung eben der geometrischen Repräsentation des Imaginären enthält, die erst später, wenn auch nur implizite, von dem großen Gauß angedeutet wurde, dessen hochberühmte Doktorabhandlung (1799) sich jedoch nur zu einem geringen Teile mit Caspar Wessels Arbeit deckt. Vollständiger eingeführt wurde die Theorie von den Franzosen Argand (1806) und Mourey (1820), von dem Engländer Warren (1821), sowie von dem Italiener Bellavitis. Diese Mathematiker scheinen, da keiner seine Vorgänger nennt, unabhängig von einander und von Caspar Wessel gearbeitet zu haben. In Cauchys und Riemanns Händen sind diese Ideen die formelle Grundlage geworden für die Funktionen-

1) Die Abhandlung liegt gedruckt vor in der „Ny Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter", Kjøbenhavn, 1799.

theorie unseres Jahrhunderts, unter deren Begründern Abel an der Seite Cauchys die erste Stelle einnimmt.

Caspar Wessels Arbeit enthält indes außer den Imaginärtheorien merkwürdige Betrachtungen, die der dänische Mathematiker Juel[1]) mit Recht als Vorläufer des berühmten Quaternionenkalküls des Engländers [4
Hamilton bezeichnet.

Wäre Caspar Wessels Arbeit zu ihrem Rechte gekommen, so würde er schon längst im Reiche der Mathematik einen ebenso großen Namen gewonnen haben, wie sein Bruder Johan Herman Wessel innerhalb der nordischen Literatur, und wie sein Oheim Petter Wessel (Tordenskjold) ihn als Krieger gewonnen hat.

Caspar Wessel ist, soviel man weiß, niemals früher erwähnt worden, weder von einem norwegischen, noch von einem dänischen oder einem fremden Mathematiker, bevor Oberlehrer Christensen in Odense in seiner Doktorabhandlung (1894) einen, wahrscheinlich sehr vollständigen, Bericht über dänische und norwegische mathematische Arbeiten im vorigen Jahrhundert gab und bei dieser Gelegenheit auch Caspar Wessels Arbeit besprach. Erst hierdurch wurde die Aufmerksamkeit des dänischen Mathematikers Juel auf diese gelenkt, und er erkannte deren Wert.

Norwegens Sache ist es jetzt, zu tun, was getan werden muß, damit das Andenken dieses merkwürdigen Mannes aus der Vergessenheit hervorgeholt werden und sein Name die ihm zukommende Stelle innerhalb der Geschichte der Mathematik erhalten kann. Vorläufig geben wir hier im Archive Caspar Wessels Originalabhandlung wieder.

Kristiania, 15. September 1895. **Sophus Lie.**

1) Dansk matematisk Tidsskrift, 1895.

# XVII.

## Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen.

Aus dem Nachlasse herausgegeben von F. Engel, Math. Ann. Bd. LIX, Heft 1, 2, S. 195—313, ausgegeben 8. 8. 1904.

### Kapitel I. [195

### Die Berührungstransformationen des Raumes und ihre Bestimmung.

**1.** Die beiden Begriffe Flächenelement und Elementverein, sowie den allgemeinen Begriff: Berührungstransformation des Raumes haben wir schon im ersten Bande dieses Werkes[1]) eingeführt. In diesem Kapitel zeigen wir nun, wie man alle Berührungstransformationen des Raumes findet. Dabei glauben wir, daß es für einige Leser nützlich sein wird, wenn wir zuerst an unsre Definitionen dieser fundamentalen Begriffe erinnern und gleichzeitig eine rein geometrische Bestimmung aller Elementvereine vorausschicken.

### § 1. Die Einteilung aller Berührungstransformationen in drei Klassen.

**2.** Ein Punkt $x, y, z$ und eine hindurchgehende Ebene:

$$\mathfrak{z} - z - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0$$

bilden eine geometrische Figur, die von fünf Bestimmungsstücken, nämlich den Größen $x, y, z, p, q$, abhängt. Diese geometrische Figur bezeichnen wir als ein Flächenelement, oder noch kürzer als ein Element. Die Bestimmungsstücke $x, y, z, p, q$ dieser Figur nennen wir die Koordinaten des Flächenelementes. Der Inbegriff aller Flächenelemente des Raumes bildet eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit, die wir zuweilen als den Raum der Flächenelemente bezeichnen.

Wir sagen, daß ein Flächenelement $x, y, z, p, q$ mit dem unendlich benachbarten Elemente $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, [196
$p + dp$, $q + dq$ vereinigt liegt, wenn die Ebene:

$$\mathfrak{z} - z - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0$$

1) Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. Leipzig 1896. Anm. d. H.

des ersten Elementes den Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ des benachbarten Elementes enthält, und somit die Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

besteht.

**3.** Eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Elementkoordinaten $x, y, z, p, q$ bestimmen eine Schar von Flächenelementen. So zum Beispiel bestimmen zwei Gleichungen von der Form:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad q - Q(x, y, z, p) = 0$$

eine Schar von $\infty^3$ Elementen, deren Punkte auf der Fläche $\varphi = 0$ liegen und diese Fläche ausfüllen. Wählen wir einen bestimmten Punkt der Fläche $\varphi = 0$ und tragen die Koordinaten $x, y, z$ dieses Punktes in die Gleichung $q - Q(x, y, z, p) = 0$ ein, so finden wir $\infty^1$ Wertsysteme $p, q$, die diese Relation erfüllen; die hiermit bestimmten $\infty^1$ Elemente umhüllen einen Elementarkegel, dessen Spitze der Punkt $x, y, z$ ist. Wir drücken dies kurz so aus:

Zwei Gleichungen von der Form:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad q - Q(x, y, z, p) = 0$$

bestimmen eine Schar von $\infty^3$ Elementen, deren Punktort die Fläche $\varphi = 0$ ist. Jeder Punkt dieser Fläche ist die Spitze eines Elementarkegels, dessen $\infty^1$ Elemente der Schar angehören.

Liegen andererseits in den Elementkoordinaten zwei Gleichungen:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

vor, die von $p$ und $q$ frei sind, so definieren diese Gleichungen wiederum eine Schar von $\infty^3$ Elementen; jetzt aber ist der Punktort dieser Elemente keine Fläche, sondern eine Kurve; die Schar besteht ja aus allen Elementen, deren Punkte auf der Kurve $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$ gelegen sind.

Liegen endlich zwei Gleichungen in $x, y, z, p, q$ vor, die nach $p$ und $q$ aufgelöst werden können, so bestimmen die aufgelösten Gleichungen:

$$p = P(x, y, z), \quad q = Q(x, y, z)$$

$\infty^3$ Elemente, deren Punktort der Raum ist. Dabei macht es übrigens einen wesentlichen Unterschied, ob die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

integrabel ist oder nicht, weil sich die $\infty^3$ Elemente nur im ersten Falle zu $\infty^1$ Flächen zusammenfassen lassen.

**4.** In entsprechender Weise gehört zu **jeder** Schar von Flächenelementen ein bestimmter **Punktort**, und dieser Punktort ist entweder ein Punkt, oder eine Kurve, oder eine Fläche, oder der Raum selbst. In jedem einzelnen Falle findet man die analytische Definition des betreffenden Punktorts, indem man zwischen den Gleichungen: [197

$$F_k(x, y, z, p, q) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

der gegebenen Elementschar die Größen $p$ und $q$ eliminiert. Die hervorgehenden Gleichungen zwischen $x, y, z$ allein bestimmen immer den gesuchten Punktort.



Benutzen wir den hiermit explizite eingeführten Begriff: Punktort einer Elementschar, so können wir sehr leicht diejenigen Elementscharen bestimmen, die wir im ersten Bande als Elementvereine bezeichnet haben. Erinnern wir uns nämlich unserer Definition, daß eine Elementschar dann und nur dann einen Elementverein bildet, wenn jedes Element der Schar mit allen benachbarten Elementen der Schar vereinigt liegt, so erkennen wir, daß die Elemente eines Vereines nie den Raum ausfüllen können; die Definition eines Vereines zeigt ja unmittelbar, daß alle Punkte $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ des zugehörigen Punktortes, die in der Umgebung eines beliebigen Punktes $x, y, z$ dieses Ortes liegen, in einer Ebene enthalten sein müssen.

Der Punktort eines Elementvereins ist daher entweder eine Fläche, oder eine Kurve, oder ein Punkt.

**5.** Ist der Punktort des vorgelegten Elementvereins eine Fläche $z = \varphi(x, y)$, so gehört jeder Punkt dieser Fläche einem und nur einem Elemente der Schar an; denn durch jeden nicht singulären Punkt einer Fläche geht eine und nur eine Ebene, die alle unendlich benachbarten Punkte der Fläche enthält. In diesem Falle besteht somit der Elementverein aus allen $\infty^2$ Elementen:

$$z = \varphi(x, y), \quad p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

der Fläche $z = \varphi$.

Ist andererseits der Punktort eines vorgelegten Elementvereins eine Kurve, deren Gleichungen etwa die Form: $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$ besitzen, so gehören zu jedem Punkte $P$ dieser Kurve jedenfalls nur solche Elemente, deren Ebenen die Kurve in $P$ berühren. Nun gibt es aber für jeden Punkt $P$ der Kurve $\infty^1$ Elemente, die diese Bedingung erfüllen, und daher enthält der gesuchte Elementverein höchstens $\infty^2$ Elemente, unter Umständen aber nur $\infty^1$ Elemente. Im ersten Falle besteht der Verein aus allen $\infty^2$ Elementen der Kurve und wird daher durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z), \quad 1 - p\varphi'(z) - q\psi'(z) = 0$$

definiert. Im zweiten Falle besteht der Verein aus $\infty^1$ Elementen der Kurve, die dann einen Elementstreifen bilden.

Liegt endlich ein Elementverein vor, dessen Punktort der Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ ist, so sind wiederum zwei Fälle möglich, jenach- [198
dem der Verein $\infty^2$, oder nur $\infty^1$ Elemente umfaßt. Im ersten Falle sind:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

die Gleichungen des Vereins; im anderen Falle bilden die $\infty^1$ Elemente des Vereins einen Elementarkegel.

Ein Elementverein enthält daher nie mehr als $\infty^2$ Elemente; ein Verein mit $\infty^2$ Elementen besteht aus den Elementen einer Fläche, oder aus den Elementen einer Kurve, oder aus den Elementen eines Punktes.

**6.** Wenden wir uns jetzt zu dem Begriffe Berührungstransformation des Raumes.

Fünf Gleichungen von der Form:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q),$$
$$p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q),$$

die auch nach $x, y, z, p, q$ auflösbar sind, bestimmen eine Elementtransformation, sie ordnen also jedem Elemente $x, y, z, p, q$ des Raumes $x, y, z$ ein Element $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ des Raumes $x_1, y_1, z_1$ zu. Eine Elementtransformation führt jede Elementschar in eine Elementschar über; dagegen ist es keineswegs sicher, daß eine vorgelegte Elementtransformation jeden Elementverein in einen Elementverein überführt. Unter den Elementtransformationen gibt es aber gewisse und zwar außerordentlich viele, die auch diese Eigenschaft besitzen, und diese Transformationen sind es, die wir als Berührungstransformationen bezeichnen.

Eine Transformation:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q), \\ \qquad p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

in den Elementkoordinaten $x, y, z, p, q$ heißt eine Berührungstransformation des Raumes $x, y, z$, wenn sie jeden Elementverein des Raumes in einen Elementverein überführt.

**7.** Eine Elementtransformation ist daher eine Berührungstransformation, wenn sie unendlich benachbarte Elemente $x, y, z, p, q$ und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $p + dp$, $q + dq$, die vereinigt liegen und somit die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$



erfüllen, in ebensolche Elemente überführt. Wir können daher unsere Definition auch rein analytisch[1]) in der folgenden Weise formulieren:

Eine Transformation: [199

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q), \\ \qquad p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

in den Veränderlichen $x, y, z, p, q$ ist dann und nur dann eine Berührungstransformation des Raumes $x, y, z$, wenn vermöge der Transformation eine Relation von der Form:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \varrho(x, y, z, p, q) \cdot (dz - p\,dx - q\,dy)$$

besteht.

Dabei leuchtet unmittelbar ein, daß die Größe $\varrho$ nicht identisch gleich Null sein kann; bestände nämlich die Relation: $dZ - P\,dX - Q\,dY = 0$ identisch in $x, y, z, p, q$, so wären die Größen $X$, $Y$, $Z$, $P$, $Q$ durch endliche Relationen verknüpft, in denen $x, y, z, p, q$ nicht explizite vorkämen.

**8.** Da eine Berührungstransformation jeden Elementverein in einen Elementverein und selbstverständlich Vereine mit $\infty^2$ Elementen in ebensolche überführt, so ergibt sich ohne weiteres, daß alle Berührungstransformationen des Raumes in drei getrennte Kategorien zerfallen, jenachdem die Punkte des Raumes in Flächen, Kurven, oder Punkte übergehen.

In diesem Kapitel nehmen wir unseren Ausgangspunkt in dieser Klassifikation aller Berührungstransformationen. Dabei sehen wir zunächst von denjenigen Berührungstransformationen ab, die Punkte in Punkte überführen und daher faktisch Punkttransformationen des Raumes darstellen.

Zuerst geben wir elementare Methoden zur Bestimmung aller Berührungstransformationen. Sodann deuten wir die gefundenen Resultate durch einfache geometrische Betrachtungen; in § 4 und 5 des Kapitels stellen wir endlich charakteristische Differentialgleichungen auf, die in den folgenden Untersuchungen eine fundamentale Rolle spielen werden.

1) Die im Texte gegebene analytische Definition des Begriffes Berührungstransformation ist die wahre Definition dieses Begriffes; die zuerst gegebene Definition ist im Grunde nur eine Deutung, nicht aber die einzig mögliche Deutung des Begriffes, wie wir im letzten Paragraphen dieses Kapitels eingehend zeigen werden.

## § 2. Bestimmung aller Berührungstransformationen, die Punkte in Flächen überführen.

**9.** Wir wenden uns jetzt zu der Bestimmung derjenigen Berührungstransformationen, die alle Elemente eines *Punktes* von allgemeiner Lage in die Elemente einer *Fläche* überführen.

Die Elemente eines Punktes werden durch drei Gleichungen von der Form:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

definiert, in denen $a$, $b$ und $c$ Konstanten bezeichnen. Die transformierten Elemente werden durch die *fünf* Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = X(a, b, c, p, q), \quad y_1 = Y(a, b, c, p, q), \quad z_1 = Z(a, b, c, p, q), \\ \qquad p_1 = P(a, b, c, p, q), \quad q_1 = Q(a, b, c, p, q) \end{cases}$$ [200

bestimmt, und wir finden dementsprechend den Punktort der $\infty^2$ transformierten Elemente, indem wir die Größen $p$ und $q$ zwischen den *drei* Gleichungen:

$$x_1 = X(a, b, c, p, q), \quad y_1 = Y(a, b, c, p, q), \quad z_1 = Z(a, b, c, p, q)$$

eliminieren. Da nun dieser Punktort eine *Fläche* sein soll, so darf diese Elimination nur *eine* Gleichung:

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen den Größen $a, b, c, x_1, y_1, z_1$ liefern.

Wenn aber der Punktort eines Elementvereins eine Fläche ist, so sind die Elemente des Vereins gerade die $\infty^2$ Elemente dieser Fläche.

Es hat sich also ergeben:

**Satz 1.** *Eine Berührungstransformation:*

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q),$$
$$p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

*führt dann und nur dann die $\infty^3$ Punkte des Raumes in $\infty^3$* **Flächen** *über, wenn sich aus den Gleichungen der Transformation nur* **eine** *Relation:*

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

*zwischen den Größen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ herleiten läßt.*

*Faßt man in der Gleichung $\Omega = 0$ die Größen $x, y, z$ als Parameter auf, so stellt $\Omega = 0$ $\infty^3$ Flächen des Raumes $x_1, y_1, z_1$ dar, und zwar werden die $\infty^3$ Punkte des Raumes $x, y, z$ von der vorgelegten Berührungstransformation in die soeben gefundenen Flächen übergeführt.*



**10.** Löst man die Gleichungen einer Berührungstransformation:

$$(1)\qquad x_1 = X, \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

nach $x, y, z, p, q$ auf, so bestimmen die aufgelösten Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} x = \overline{X}(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1), \; y = \overline{Y}(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1), \; z = \overline{Z}(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1), \\ \qquad p = \overline{P}(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1), \; q = \overline{Q}(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) \end{cases}$$

offenbar wiederum eine Berührungstransformation. Diese neue Transformation heißt die *inverse* Transformation der ersten Berührungstransformation. *Zwei inverse Berührungstransformationen* sind insofern äquivalent, als sie *dieselbe Zuordnung* zwischen den Elementen der beiden Räume definieren; aufgefaßt als *Operationen* sind sie dagegen verschieden, weil die erste Transformation jedes Element $x, y, z, p, q$ nach der Lage $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ bringt, während die inverse Transformation das Element $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ nach seiner ursprünglichen Lage $x, y, z, p, q$ zurückführt.

Gibt die Elimination der Größen $p, q, p_1, q_1$ zwischen den Glei- [201
chungen (1) einer Berührungstransformation nur *eine* Relation:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen den Punktkoordinaten beider Räume, so liefert das äquivalente Gleichungssystem (3) der *inversen* Transformation ebenfalls nur eine Gleichung, nämlich $\Omega = 0$, zwischen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$.

Es gilt daher der Satz:

**Satz 2.** *Führt eine Berührungstransformation des Raumes jeden Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ in eine Fläche, und zwar in die Fläche:*

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$$

*über, so führt auch die* **inverse** *Berührungstransformation jeden Punkt $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ in eine Fläche und zwar in die Fläche:*

$$\Omega(x, y, z, a_1, b_1, c_1) = 0$$

*über.*

**11.** Wir können aber noch weiter gehen und beweisen, daß eine Berührungstransformation, deren Gleichungen eine und nur eine Relation:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ liefern, durch die Form der Gleichung $\Omega = 0$ vollständig bestimmt ist.

Um dies nachzuweisen, nehmen wir unseren Ausgangspunkt in der evidenten Bemerkung, daß zwei Elementvereine mit einem gemeinsamen

Elemente von jeder Berührungstransformation in zwei Vereine mit einem gemeinsamen Elemente übergeführt werden müssen.

Da eine beliebige gegebene Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ mit jedem auf ihr gelegenen Punkte $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$ ein Element gemein hat, können wir schließen, daß die Fläche $\varphi = 0$ und ihr Punkt $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$ in zwei Elementvereine mit einem gemeinsamen Elemente übergehen. Da andererseits jeder auf $\varphi = 0$ gelegene Punkt in eine Fläche, nämlich in die Fläche $\Omega(a_0, b_0, c_0, x_1, y_1, z_1) = 0$ übergeht, so erkennen wir, daß die der Fläche $\varphi = 0$ entsprechende Bildfigur mit einer jeden unter den $\infty^2$ Flächen:

$$\Omega(a_0, b_0, c_0, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \varphi(a_0, b_0, c_0) = 0 \tag{4}$$

ein Element gemein hat. Die gesuchte Bildfigur der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ ist somit das Umhüllungsgebilde der $\infty^2$ Flächen (4) und wird dementsprechend nach bekannten Regeln gefunden. Man bildet die Gleichungen:

$$\Omega(a_0, b_0, c_0, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \varphi(a_0, b_0, c_0) = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_0} + \frac{\partial \Omega}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial b_0} + \frac{\partial \Omega}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial b_0} = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial b_0} = 0,$$

eliminiert zwischen diesen die Größen: [202

$$a_0, b_0, c_0, \frac{\partial c_0}{\partial a_0}, \frac{\partial c_0}{\partial b_0},$$

und findet so im allgemeinen nur eine Relation $\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0$ zwischen $x_1, y_1, z_1$, die dann die Bildfläche der ursprünglich gegebenen Fläche $\varphi = 0$ darstellt. Gibt die Elimination zwei Relationen zwischen $x_1, y_1, z_1$, so führt die vorliegende Berührungstransformation die Fläche $\varphi = 0$ nicht in eine Fläche, sondern in eine Kurve über.

Folglich hat sich ergeben:

**Satz 3.** Führt eine Berührungstransformation jeden Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ von allgemeiner Lage in eine Fläche und zwar in die Fläche:

$$\Omega(a, b, c, x, y, z) = 0$$

über, so transformiert sie eine **beliebige gegebene** Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ im allgemeinen in eine **Fläche**, ausnahmeweise aber in eine Kurve, oder gar in einen Punkt. Man findet die Gleichungen dieser Bildfigur in **Cartes**ischen Koordinaten, indem man zwischen den sechs Gleichungen:



$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \varphi(a, b, c) = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} + \frac{\partial \Omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial a} = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial b} = 0,$$

die Größen $a, b, c, \partial c : \partial a, \partial c : \partial b$ eliminiert. Die hierdurch hervorgehenden Relationen zwischen $x_1, y_1, z_1$ stellen die gesuchte Bildfigur dar.

Wünscht man andererseits die vorgelegte Berührungstransformation auf eine Kurve mit den Gleichungen: $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ auszuführen, so bemerkt man, daß diese Kurve mit jedem auf ihr gelegenen Punkte $\infty^1$ Elemente gemein hat, die ein Büschel bilden. Daher hat auch die gesuchte Bildfigur mit einer jeden unter den $\infty^1$ Flächen:

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \varphi(a, b, c) = 0, \quad \psi(a, b, c) = 0 \tag{5}$$

einfach unendlich viele Elemente gemein. Also ist die Bildfigur das Umhüllungsgebilde der $\infty^1$ Flächen (5).

**12.** Die vorstehenden Entwickelungen zeigen, daß eine Berührungstransformation, deren Gleichungen nur eine Relation $\Omega = 0$ zwischen den Größen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ liefern, durch die Form dieser Relation $\Omega = 0$ vollständig bestimmt ist, wie früher angekündigt wurde.

Wenn aber auch diese Betrachtungen dem Wesen der Sache nach als streng anerkannt werden dürfen, so müssen wir es doch als eine methodische Unvollkommenheit bezeichnen, daß der Beweisgang verschieden war, jenachdem die Transformation auf eine Fläche, eine Kurve, oder einen Punkt ausgeführt wurde. Da wir nun in der Geometrie der [203 Berührungstransformationen gerade darauf Gewicht legen, daß zwischen den Begriffen Fläche, Kurve und Punkt kein wesentlicher Unterschied besteht, wollen wir einen neuen Beweis entwickeln, der nicht an dem gerügten Mangel leidet.

**13.** Aus den endlichen Gleichungen (1) der von uns betrachteten Berührungstransformation läßt sich nach unsrer Annahme nur eine einzige endliche Relation zwischen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$, nämlich die Gleichung:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

ableiten. Daher erfüllen auch die zugehörigen Differentiale $dx$, $dy$, $dz$, $dx_1$, $dy_1$ und $dz_1$ eine und nur eine Relation, nämlich die durch Differentiation hervorgehende lineare Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy = 0.$$

Wir wissen andererseits, daß vermöge der Gleichungen der Transformation eine Relation von der Form:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(x, y, z, p, q) \cdot (dz - p\,dx - q\,dy) = 0$$

besteht. Also dürfen wir schließen, daß die Koeffizienten der sechs Differentiale in diesen beiden linearen Relationen paarweise vermöge der Gleichungen der Transformation proportional sind. Die fünf hiermit gefundenen endlichen Gleichungen:

$$\frac{\frac{\partial \Omega}{\partial z_1}}{1} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}}{-p_1} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}}{-q_1} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial z}}{-\varrho} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial x}}{\varrho p} = \frac{\frac{\partial \Omega}{\partial y}}{\varrho q}$$

müssen bei passender Wahl der Größe $\varrho$ vermöge der Gleichungen der Transformation bestehen. Also sind auch die vier Gleichungen:

$$(6) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} + q \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0,$$

die nach der Elimination von $\varrho$ übrig bleiben, eine Folge der Gleichungen unserer Transformation (1).

Da nun auch die Gleichung $\Omega = 0$ eine Folge der Gleichungen (1) ist, so liegt es auf der Hand, daß die fünf Gleichungen:

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \Omega = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} + q \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

wenn sie überhaupt von einander unabhängig sind, durch Auflösung nach $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ unsere Transformationsgleichungen (1) reproduzieren.

Daß aber die fünf Gleichungen (7) unabhängig sind, oder, was [204 im vorliegenden Falle auf dasselbe hinauskommt, daß die Gleichung $\Omega = 0$ alle sechs Größen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ wirklich enthält, können wir leicht nachweisen.

Enthielte in der Tat die Gleichung $\Omega = 0$ zum Beispiel $x_1$ nicht, so gingen alle Punkte des Raumes $x, y, z$ in Zylinderflächen mit parallelen gradlinigen Erzeugenden über. Das ist aber unmöglich, weil alle Elemente dieser Zylinder die Gleichung:

$$p_1 = 0$$

erfüllen. Eine Berührungstransformation des Raumes führt aber nie alle $\infty^5$ Elemente $x, y, z, p, q$ in Elemente $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ über, die eine Bedingungsgleichung erfüllen.

Hiermit ist bewiesen

**Satz 4.** Weiß man, daß eine gewisse Berührungstransformation des Raumes jeden Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ von



allgemeiner Lage in eine **Fläche,** und zwar in die **Fläche:**

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$$

überführt, so lassen sich die Gleichungen der Transformation auf die Form:

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} + q \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

bringen. Die Relation $\Omega = 0$ bestimmt die Form der Transformationsgleichungen vollständig.

**14.** Hierbei ist aber wohl zu beachten, daß man keineswegs sagen darf, daß die Gleichungen (7) die allgemeine Form aller Berührungstransformationen liefern, bei denen die Punkte des Raumes in Flächen übergehen. Das wäre der Fall gewesen, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ ganz beliebig gewählt werden könnte. Wir wissen aber, daß diese Gleichung $\Omega = 0$ wesentlichen Beschränkungen unterworfen ist, weil $\Omega$ zum Beispiel alle sechs Veränderlichen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ enthalten muß. Eine weitergehende Beschränkung liegt darin, daß die Gleichung $\Omega = 0$ den $\infty^3$ Punkten $x = a$, $y = b$, $z = c$ des Raumes $\infty^3$ verschiedene Flächen:

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zuordnen muß.

Es ist aber leicht zu erkennen, daß $\Omega = 0$ noch weitere Bedingungen erfüllen muß. Nehmen wir in der Tat die Gleichung:

$$\Omega \equiv (z_1 - z)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 = 0,$$

so sehen wir, daß sie den $\infty^3$ Punkten: $x = a$, $y = b$, $z = c$ des Raumes $\infty^3$ verschiedene Rotationskegel mit parallelen Rotationsachsen und derselben Öffnung:

$$(z_1 - c)^2 - (x_1 - a)^2 - (y_1 - b)^2 = 0 \qquad [205$$

zuordnet. Diese $\infty^3$ Kegel erfüllen aber die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$1 - p_1^2 - q_1^2 = 0,$$

und das ist unmöglich, weil es undenkbar ist, daß eine Berührungstransformation alle $\infty^5$ Elemente $x, y, z, p, q$ in solche Elemente $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ überführt, die eine Bedingungsgleichung erfüllen. In der Tat übersieht man auch leicht, daß sich die fünf Gleichungen:

$$\begin{array}{l} (z_1 - z)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 = 0, \\ (z_1 - z) p_1 - (x_1 - x) = 0, \quad (z_1 - z) q_1 - (y_1 - y) = 0, \\ (z_1 - z) p \;\; - (x_1 - x) = 0, \quad (z_1 - z) q \;\; - (y_1 - y) = 0 \end{array}$$

weder nach $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$, noch nach $x, y, z, p, q$ auflösen lassen.

**15.** Wir stellen uns nun die Aufgabe, genau die Bedingungen festzustellen, die eine Funktion $\Omega$ erfüllen muß, wenn die fünf Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial x} + p \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial y} + q \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

eine Berührungstransformation des Raumes bestimmen sollen.

Wir werden zuerst nachweisen, daß diese fünf Gleichungen jedenfalls dann eine Berührungstransformation liefern, wenn sie sowohl nach $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$, wie nach $x, y, z, p, q$ auflösbar sind. Dies ergibt sich, wie wir sehen werden, als Korollar eines allgemeineren Satzes.

Die Form der Gleichungen (7) zeigt unmittelbar, daß diese Gleichungen sicher in den zehn Veränderlichen $x, y, z, p, q, x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ unabhängig sind, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ alle ihre sechs Argumente enthält. Ist diese Bedingung, wie wir annehmen wollen, erfüllt, so können wir zunächst zwei Größen $\lambda$ und $\varrho$ durch die Gleichungen:

$$\lambda \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 1, \quad \lambda \frac{\partial\Omega}{\partial z} = -\varrho$$

bestimmen. Dann aber ist es gestattet, die fünf Gleichungen (7) durch das Gleichungssystem:

$$(8)\quad \begin{cases} \Omega = 0, & \lambda \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = \phantom{-}1, & \lambda \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} = -p_1, & \lambda \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} = -q_1, \\ & \lambda \frac{\partial\Omega}{\partial z} = -\varrho, & \lambda \frac{\partial\Omega}{\partial x} = \phantom{-}\varrho p, & \lambda \frac{\partial\Omega}{\partial y} = \phantom{-}\varrho q \end{cases}$$

zu ersetzen. Die sechs letztgeschriebenen Gleichungen ziehen immer die Gleichung:

$$\lambda \left( \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial z} dz + \frac{\partial\Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y} dy \right) = \quad [206$$
$$= dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(dz - p\,dx - q\,dy)$$

nach sich, welche Werte auch die sechs Differentiale haben mögen. Und da die linke Seite gleichzeitig mit $d\Omega$ verschwindet, so besteht die Gleichung:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy)$$

vermöge des Gleichungssystems (8), gleichzeitig aber vermöge des Gleichungssystems (7).

Da wir bei diesen Überlegungen nur die eine Voraussetzung gemacht haben, daß die Gleichung $\Omega = 0$ alle sechs Veränderlichen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ wirklich enthält, so gilt der

**Satz 5.** Wenn eine vorgelegte Gleichung $\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$ wirklich alle ihre sechs Argumente enthält, und dementsprechend die fünf Gleichungen:



$$(7)\quad \begin{cases} \Omega = 0, & \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0, & \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0, \\ & \frac{\partial\Omega}{\partial x} + p \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0, & \frac{\partial\Omega}{\partial y} + q \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

hinsichtlich der Größen $p_1, q_1, p, q$ und zum Beispiel $z_1$ unabhängig sind, dann besteht immer eine Differentialgleichung von der Form:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

und dabei ist $\varrho$ nicht identisch Null.

**16.** Es ist aber wohl zu beachten, daß dieser Satz keineswegs aussagt, daß die fünf Gleichungen (7) eine Berührungstransformation des Raumes bestimmen, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ wirklich alle ihre sechs Argumente enthält; denn aus dieser Voraussetzung folgt zwar, daß unsere Gleichungen (7) hinsichtlich $p, q, p_1, q_1$ und einer beliebigen unter den Größen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ unabhängig sind, keineswegs aber, daß sie eine Elementtransformation bestimmen. Da wir aber schon früher bemerkten, daß unsere fünf Gleichungen (7) jedenfalls nur dann eine Berührungstransformation bestimmen, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ wirklich alle sechs Größen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ enthält, können wir den folgenden Satz aufstellen:

**Satz 6.** Fünf Gleichungen von der Form:

$$(7)\quad \begin{cases} \Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial x} + p \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial y} + q \frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

bestimmen dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn sie sowohl nach $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$, wie nach $x, y, z,$ [207
$p, q$ aufgelöst werden können. In dieser Weise erhält man alle Berührungstransformationen, bei denen die Punkte des Raumes in Flächen übergehen.

Es ist überraschend, daß man diesem wichtigen Satze eine noch einfachere Form geben kann; es läßt sich in der Tat nachweisen, daß die Beschränkungen, denen die Gleichung $\Omega = 0$ unterworfen ist, sämtlich darauf hinauskommen, daß eine einzige Determinante nicht vermöge $\Omega = 0$ verschwinden darf.

Die beiden Forderungen, daß die Gleichungen (7) sowohl nach $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$, wie nach $x, y, z, p, q$ auflösbar sein sollen, sind nämlich keineswegs zwei verschiedene Forderungen. Ist die eine Forderung erfüllt, so auch die andere. Das werden wir jetzt zeigen.

**17.** Die Forderung, daß unsere fünf Gleichungen (7) nach $x, y, z, p, q$ auflösbar sein sollen, ist sicher erfüllt, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ ihre sechs Argumente wirklich enthält, und andererseits die sieben Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \Omega = 0, \quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial z_1} - 1 = 0, \quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 = 0, \quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1 = 0, \\ \qquad\quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} + \varrho = 0, \quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} - \varrho p = 0, \quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} - \varrho q = 0 \end{cases}$$

hinsichtlich der sieben Größen:

$$x, \; y, \; z, \; p, \; q, \; \lambda, \; \varrho$$

unabhängig sind; sie ist aber offenbar auch dann erfüllt, wenn $\Omega = 0$ seine sechs Argumente enthält, und überdies die vier Gleichungen:

$$(9)\qquad \Omega = 0, \quad \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} - 1 = 0, \quad \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 = 0, \quad \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1 = 0$$

nach den vier Größen:

$$x, \; y, \; z, \; \lambda$$

aufgelöst werden können. Ob aber diese vier Gleichungen hinsichtlich $x, y, z$ und $\lambda$ unabhängig sind, das entscheidet die Funktionaldeterminante:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} & 0 \\ \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial x} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial y} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial z_1} \\ \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial x} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial y} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial y_1} \\ \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial y} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1} \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 \Delta,$$

die offenbar von $p, q, p_1, q_1$ frei ist.

Die vier Gleichungen (9) können daher dann und nur dann nach $x, y, z$ und $\lambda$ aufgelöst werden, wenn die Determinante: [208

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial x} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial y} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial z_1} \\ \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial x} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial y} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial y} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1} \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

nicht vermöge $\Omega = 0$ verschwindet.

**18.** Bemerken wir überdies, daß $\Delta$ in $x, y, z$ und $x_1, y_1, z_1$ symmetrisch ist, sowie, daß $\Delta$ immer verschwindet, wenn in der Gleichung



$\Omega = 0$ ein beliebiges unter den Argumenten $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ nicht wirklich vorkommt, so können wir den folgenden fundamentalen Satz aufstellen.

**Theorem I.** Alle Berührungstransformationen, bei denen die Punkte des Raumes in Flächen übergehen, lassen sich durch fünf Gleichungen von der Form:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} + q \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$$

definieren. Die Funktion $\Omega$ ist der einzigen Beschränkung unterworfen, daß die Determinante:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial x} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial y} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial z_1} \\ \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial x} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial y} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial y} & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1} \end{vmatrix}$$

nicht vermöge $\Omega = 0$ verschwinden darf.

**19.** Beispiel I. Eine besonders wichtige Berührungstransformation liefern die Gleichungen:

$$z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = -y.$$

Man übersieht hier unmittelbar, daß eine Gleichung von der Form:

$$d(z - px - qy) + x\,dp + y\,dq \equiv dz - p\,dx - q\,dy$$

besteht, ferner, daß die Elimination der Größen $p, q, p_1, q_1$ nur eine Relation, und zwar die bilineare Gleichung:

$$z_1 - z + x_1 x + y_1 y = 0$$

liefert. Die Punkte und Ebenen des Raumes $x, y, z$ gehen somit bei der Transformation in die Ebenen und Punkte des Raumes $x, y, z$ über. Wir beschäftigen uns später eingehend mit dieser berühmten Transforma- [209
tion, die im vorigen Jahrhundert bei Legendre auftritt, der aber unzweifelhaft von Clairauts, Eulers und Lagranges älteren Untersuchungen beeinflußt war.

Beispiel II. Noch älter als die Legendresche Transformation ist eine Transformation, die man oft als Dilatation bezeichnet. Da diese Transformation jedenfalls implizite schon bei Huyghens auftritt, und im Grunde die Grundlage seiner berühmten Wellentheorie bildet, so werde ich mir erlauben, diese Berührungstransformation, die jeden Punkt $x=a$, $y=b$, $z=c$ in eine Kugel mit dem gegebenen Radius $r$:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

überführt, als die Huyghenssche Transformation zu bezeichnen. Man findet die Gleichungen dieser Transformation, indem man:

$$\Omega=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2-r^2$$

setzt und sodann nach den allgemeinen Regeln die Gleichungen:

$$x_1-x+(z_1-z)p=0, \quad x_1-x+(z_1-z)p_1=0,$$
$$y_1-y+(z_1-z)q=0, \quad y_1-y+(z_1-z)q_1=0$$

hinzufügt. Die gesuchten Transformationsgleichungen besitzen daher die Form:

$$z_1=z-\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad x_1=x+r\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad y_1=y+r\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$p_1=p, \quad q_1=q.$$

Man übersieht unmittelbar, daß diese Transformation involutorisch und zweizweideutig ist, sowie, daß die Gleichung:

$$(10)\left\{\begin{aligned} & d\left(z-\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)-p\,d\left(x+\frac{rp}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)-q\,d\left(y+\frac{rq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)= \\ & \qquad =dz-p\,dx-q\,dy \end{aligned}\right.$$

identisch besteht.

**20.** Die allgemeinen analytischen Entwickelungen dieses Paragraphen führen unmittelbar zu einem beachtenswerten geometrischen Satze, den wir ausdrücklich formulieren werden.

**Satz 7.** Sind die Punktkoordinaten zweier Räume durch eine Relation:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0$$

gebunden, und ordnet diese Relation den $\infty^3$ Punkten $x=a$, $y=b$, $z=c$ des einen Raumes $\infty^3$ Flächen des zweiten Raumes zu, die keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen, so ordnet $\Omega=0$ auch den Punkten [210 $x_1, y_1, z_1$ dreifach unendlich viele Flächen des ersten Raumes zu, die keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen.

Dieser Satz kann auch folgendermaßen formuliert werden.

**Satz 8.** Ordnet man den Punkten $x, y, z$ dreifach unendlich viele Flächen zu, die keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen, so gibt es immer eine und auch nur eine Berührungstransformation des Raumes, die jeden Punkt $x, y, z$ in die zugeordnete Fläche überführt.



## § 3. Bestimmung aller Berührungstransformationen, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen.

**21.** Nachdem wir im vorigen Paragraphen alle Berührungstransformationen des Raumes bestimmt haben, bei denen Punkte von allgemeiner Lage in Flächen übergehen, müssen wir jetzt alle Berührungstransformationen aufsuchen, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergeführt werden.

Eine Berührungstransformation:

$$(1)\left|\begin{aligned} & x_1=X(x,y,z,p,q), \quad y_1=Y(x,y,z,p,q), \quad z_1=Z(x,y,z,p,q), \\ & \qquad p_1=P(x,y,z,p,q), \quad q_1=Q(x,y,z,p,q) \end{aligned}\right.$$

ordnet den $\infty^2$ Elementen eines beliebig gewählten Punktes $x=a$, $y=b$, $z=c$ die Elemente eines gewissen Elementvereins zu, der durch die Gleichungen:

$$x_1=X(a,b,c,p,q), \quad y_1=Y(a,b,c,p,q), \quad z_1=Z(a,b,c,p,q),$$
$$p_1=P(a,b,c,p,q), \quad q_1=Q(a,b,c,p,q)$$

bestimmt wird. Man findet den Punktort dieses neuen Elementvereins, indem man die Größen $p$ und $q$ zwischen den drei Gleichungen:

$$x_1=X(a,b,c,p,q), \quad y_1=Y(a,b,c,p,q), \quad z_1=Z(a,b,c,p,q)$$

eliminiert.

Die Berührungstransformation (1) führt daher dann und nur dann alle Punkte des Raumes in Kurven über, wenn die Elimination von $p$ und $q$ zwischen den drei letzten Gleichungen zwei und nur zwei unabhängige Gleichungen:

$$\Omega_1(a,b,c,x_1,y_1,z_1)=0, \quad \Omega_2(a,b,c,x_1,y_1,z_1)=0$$

zwischen den Parametern $a, b, c$ und den Cartesischen Koordinaten $x_1, y_1, z_1$ liefert. Alsdann gehen die Elemente jedes Punktes $x=a$, $y=b$, $z=c$ in die Elemente derjenigen Kurve $\Omega_1=0$, $\Omega_2=0$ über, die den Parameterwerten $a, b, c$ entspricht.

Es hat sich also ergeben: [211

**Satz 9.** Eine Berührungstransformation:

$$(1)\left|\begin{aligned} & x_1=X(x,y,z,p,q), \quad y_1=Y(x,y,z,p,q), \quad z_1=Z(x,y,z,p,q), \\ & \qquad p_1=P(x,y,z,p,q), \quad q_1=Q(x,y,z,p,q) \end{aligned}\right.$$

führt dann und nur dann alle Punkte $x, y, z$ des Raumes in **Kurven** über, wenn sich aus den Transformationsgleichungen zwei und nur zwei Relationen:

$$\Omega_1(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0, \quad \Omega_2(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0$$

zwischen den Größen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ herleiten lassen.

Faßt man in den beiden Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ die Größen $x, y, z$ als Parameter auf, so bestimmen diese Gleichungen $\infty^3$ Kurven des Raumes $x_1, y_1, z_1$, und zwar grade die $\infty^3$ Bildkurven aller Punkte $x, y, z$. Deutet man dagegen $x_1, y_1, z_1$ als Pa ameter, so bestimmen die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ dreifach unendlich viele Kurven des Raumes $x, y, z$, und diese Kurven gehen bei der Transformation in die Punkte des Raumes $x_1, y_1, z_1$ über.

**22.** Wir werden jetzt durch rein analytische Betrachtungen nachweisen, daß eine Berührungstransformation (1), die alle Punkte $x, y, z$ des Raumes in Kurven überführt, durch diejenigen Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

vollständig bestimmt ist, die angeben, in welche Kurven die einzelnen Punkte $x, y, z$ übergeführt werden.

Wenn wir uns in diesem Paragraphen überhaupt darauf beschränken, die Beweise in analytischer Form zu führen, so liegt das daran, daß sich diejenigen Entwickelungen, die uns hier zunächst interessieren, besser für eine analytische als für eine synthetische Behandlung eignen. Wir behalten uns aber vor, in einem folgenden Kapitel eine rein geometrische Theorie derjenigen Berührungstransformationen zu entwickeln, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen. Wir werden sehen, daß eine geometrische Behandlung tiefer in das Wesen der Sache hineinführt, während die analytische Behandlung zur vorläufigen Orientierung die zweckmäßigere ist.

**23.** Wir denken uns also eine Berührungstransformation vorgelegt, deren Gleichungen zwei und nur zwei Relationen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

liefern, die von $p, q, p_1, q_1$ frei sind. Unter diesen Umständen dürfen wir behaupten, daß die sechs Differentiale $dx, dy, dz, dx_1, dy_1, dz_1$ durch zwei und nur durch zwei Relationen, nämlich die linearen homogenen Relationen:

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} dy = 0,$$ [212

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} dz + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} dy = 0$$

gebunden sind. Wir wissen aber andererseits, daß diese Differentiale eine Relation von der Form:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(x, y, z, p, q)\,(dz - p\,dx - q\,dy) = 0$$



erfüllen. Diese letzte Relation muß daher eine Folge der beiden vorhergehenden Gleichungen sein, und es besteht somit eine Gleichung:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(x, y, z, p, q)\,(dz - p\,dx - q\,dy) =$$
$$= \lambda_1\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} dy\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} dy\right)$$

für alle Werte der sechs Differentiale, dabei vorausgesetzt, daß die zehn Größen $x, y, z, p, q, x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ nur solche Werte erhalten, die mit den fünf Gleichungen der vorliegenden Berührungstransformation in Übereinstimmung stehen.

Die gefundene Gleichung zerlegt sich unmittelbar in die sechs folgenden:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}, \\ -p_1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \\ -q_1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}, \\ -\varrho &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}, \\ \varrho p &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}, \\ \varrho q &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

die ihrerseits vermöge der Transformationsgleichungen bestehen. Nun aber liegt es in der Natur der Sache, daß die drei Veränderlichen $x, y, z$ durch keine Relation gebunden sind, und daß dementsprechend die beiden Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ nach zwei passend gewählten unter den Größen $x_1, y_1, z_1$ aufgelöst werden können. Daher ist es immer möglich, unter den drei ersten Gleichungen (11) zwei herauszugreifen, die sich nach $\lambda_1$ und $\lambda_2$ auflösen lassen. Unter allen Umständen liefern uns daher die drei ersten Gleichungen (11) eine nicht identische Gleichung von der Form:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} \\ -p_1 & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \\ -q_1 & \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} \end{vmatrix} = 0,$$

die jedenfalls die eine unter den Größen $p_1$ und $q_1$ enthält. Setzen wir [213
die gefundenen Werte der Größen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ in die vierte Gleichung (11) ein, so erhalten wir eine Bestimmung der Größe $\varrho$, die nach einer früheren Bemerkung nicht identisch verschwinden kann. Setzen wir endlich die

gefundenen Werte von $\lambda_1$, $\lambda_2$ und $\varrho$ in die beiden letzten Gleichungen des Systems (11) ein, so erhalten wir eine Bestimmung von $p$ und $q$.

Das Gleichungssystem (11) liefert somit sicher drei Gleichungen, die hinsichtlich $p_1, q_1, p, q$ unabhängig sind. Fügen wir hierzu $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_2 = 0$, so haben wir fünf unabhängige Gleichungen, die vermöge der Transformationsgleichungen (1) bestehen, und somit diese Gleichungen ersetzen können.

Hiermit hat sich ergeben

**Satz 10.** Wenn eine Berührungstransformation jeden Punkt $x, y, z$ in eine Kurve des Raumes $x_1, y_1, z_1$, und zwar in die Kurve:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

überführt, so findet man die Gleichungen der Transformation dadurch, daß man zwischen den sechs Gleichungen:

$$\Omega_1 = 0, \quad -p_1 = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}}, \quad -q_1 = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}},$$

$$\Omega_2 = 0, \quad -p = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}}, \quad -q = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}}$$

das Verhältnis $\lambda_1 : \lambda_2$ eliminiert und die fünf übrig gebliebenen Gleichungen nach $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ auflöst. Die beiden Relationen $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_2 = 0$ bestimmen die Transformationsgleichungen vollständig.

**24.** Hiermit kennen wir eine wichtige Eigenschaft derjenigen Berührungstransformationen, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen. Um aber alle diese Berührungstransformationen wirklich zu bestimmen, ist es erforderlich, die Beschränkungen genau festzustellen, denen das Gleichungssystem $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ unterworfen ist. Daß es solche Beschränkungen gibt, ist leicht zu erkennen. Verschwänden nämlich zum Beispiel alle zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} \end{matrix}\right|,$$

so ließe sich aus den beiden Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ eine Rela- [214
tion zwischen $x, y, z$ allein ableiten, was an sich absurd ist.



Wir denken uns ein Gleichungssystem $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ vorgelegt, das vorläufig keiner anderen Beschränkung unterworfen sein soll, als daß die drei zweireihigen Determinanten jener Matrix nicht sämtlich vermöge $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ verschwinden dürfen.

Alsdann geben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}, \\ -p_1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \\ -q_1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}, \\ -\varrho &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}, \\ \varrho p &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}, \\ \varrho q &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} \end{aligned}$$

zunächst eine Bestimmung der Größen $\lambda_1$, $\lambda_2$ und $\varrho$, sie liefern ferner drei von $\lambda_1$, $\lambda_2$ und $\varrho$ freie Relationen, mit denen wir die beiden Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ verbinden.

An dieser Stelle brauchen wir nicht auf die Frage einzugehen, ob diese fünf Gleichungen immer in den zehn Veränderlichen $x, y, z, p, q, x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ unabhängig sind. Dagegen betonen wir, daß vermöge der hiermit erhaltenen endlichen Relationen zwischen den zehn Elementkoordinaten der beiden Räume immer die Gleichung:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(dz - p\,dx - q\,dy) =$$
$$= \lambda_1 \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} dx\right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} dx\right)$$

besteht, welche Werte auch den Differentialen erteilt werden.

Daher besteht immer vermöge der gefundenen endlichen Relationen, verbunden mit den zugehörigen totalen Differentialgleichungen eine Relation von der Form:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy).$$

**25.** Dieses Resultat ist davon unabhängig, ob die fünf oben abgeleiteten endlichen Gleichungen zwischen den zehn Elementkoordinaten eine Elementtransformation bestimmen, oder nicht. Uns interessiert aber hier nur der Fall, daß jene Gleichungen eine Elementtransformation bestimmen, was jedenfalls nur dann möglich ist, wenn sich aus den beiden Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ keine von $x_1, y_1, z_1$ freie Relation zwischen $x, y, z$ [215
ableiten läßt.

Es hat sich also ergeben

**Satz 11.** Wenn die Elimination der Größe $\lambda_1 : \lambda_2$ zwischen sechs Gleichungen von der Form:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$-p_1 = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}}, \quad -q_1 = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}},$$

$$-p = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}}, \quad -q = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}}$$

fünf Relationen zwischen den Elementkoordinaten $x, y, z, p, q$ und $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ liefert, die eine Elementtransformation bestimmen, dann ist diese Transformation immer eine Berührungstransformation.

In dieser Weise werden alle Berührungstransformationen gefunden, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen.

**26.** Hier läßt sich nun weiter nachweisen, daß es genügt, zu untersuchen, ob sich die fünf in unserem Satze abgeleiteten Relationen hinsichtlich $x, y, z, p, q$ auflösen lassen, da es sich herausstellt, daß diese Gleichungen, sobald sie nach $x, y, z, p, q$ auflösbar sind, auch nach $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ aufgelöst werden können.

Diesen Nachweis führen wir so:

Unsere fünf Gleichungen sind dann und nur dann nach $x, y, z, p, q$ auflösbar, wenn sich die Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad -1 + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} = 0, \\ p_1 + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} = 0, \\ q_1 + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} = 0 \end{cases}$$

nach $x, y, z, \lambda_2, \lambda_1$ auflösen lassen, und überdies die zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} \end{vmatrix}$$



nicht sämtlich vermöge des Gleichungssystems $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ verschwinden. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionaldeterminante: [216

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} & 0 & 0 \\ \lambda_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial z_1 \partial x} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial z_1 \partial x} & \lambda_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial z_1 \partial y} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial z_1 \partial y} & \lambda_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial z_1 \partial z} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial z_1 \partial z} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} \\ \lambda_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y_1 \partial x} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial y_1 \partial x} & \lambda_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y_1 \partial y} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial y_1 \partial y} & \lambda_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y_1 \partial z} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial y_1 \partial z} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} \\ \lambda_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial x} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1 \partial x} & \lambda_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial y} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1 \partial y} & \lambda_1 \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x_1 \partial z} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1 \partial z} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \end{vmatrix} = D$$

nicht vermöge der fünf Gleichungen (12) verschwindet. Diese Determinante ist, wie man durch Ausführung findet, eine lineare und homogene Funktion von $\lambda_1$ und $\lambda_2$:

$$D = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2,$$

deren Koeffizienten $W_1$ und $W_2$ nur von $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ abhängen.

Die Funktionaldeterminante $D$ verschwindet offenbar nur dann vermöge der Gleichungen (12), wenn sowohl $W_1$, wie $W_2$ vermöge des Gleichungssystems $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ gleich Null wird.

Hiermit ist die Richtigkeit des angekündigten Resultats nachgewiesen.

**Theorem II.** Alle Berührungstransformationen, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen, werden erhalten durch Elimination der Größe $\lambda_1 : \lambda_2$ zwischen sechs Gleichungen von der Form:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$-p_1 = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}}, \quad -q_1 = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}},$$

$$-p = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}}, \quad -q = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}}.$$

Die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ sind dabei einer Beschränkung unterworfen. Setzt man nämlich zur Abkürzung:

$$\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 = \Phi$$

und bringt sodann die Determinante: [217

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Omega_1}{\partial x} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial y} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial x} & \frac{\partial\Omega_2}{\partial y} & \frac{\partial\Omega_2}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1\partial x} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1\partial y} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1\partial z} & \frac{\partial\Omega_2}{\partial z_1} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1\partial x} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial y} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_1\partial z} & \frac{\partial\Omega_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial y} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial z} & \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} \end{vmatrix}$$

auf die Form:

$$\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2,$$

so dürfen die Koeffizienten $W_1$ und $W_2$ nicht alle beide vermöge des Gleichungssystems $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ verschwinden. Nur, wenn diese Bedingung erfüllt ist, liefern die angegebenen Operationen eine Berührungstransformation des Raumes.

**27.** Beispiel 1. Liegen die Gleichungen:

$$z_1 - z + x_1 x = 0, \quad y_1 - y = 0$$

vor, so ist:

$$D \equiv \begin{vmatrix} x_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \equiv \lambda_1,$$

und da der Koeffizient von $\lambda_1$ nicht gleich Null, sondern gleich der Einheit ist, können wir schließen, daß die Gleichungen $z_1 - z + x_1 x = 0$, $y_1 - y = 0$ wirklich eine Berührungstransformation liefern. Die entsprechenden Transformationsgleichungen besitzen die Form:

$$z_1 = z - px, \quad x_1 = p, \quad y_1 = y,$$
$$p_1 = -x, \quad q_1 = q.$$

Daß diese Gleichungen wirklich eine Berührungstransformation bestimmen, bestätigt man, indem man die identische Gleichung:

$$d(z - px) - (-x)\,dp - q\,dy = dz - p\,dx - q\,dy$$

bildet.

Beispiel 2. Setzen wir:

$$\Omega_1 = x_1 + iy_1 + xz_1 + z, \quad \Omega_2 = x(x_1 - iy_1) - z_1 - y,$$



so wird: [218

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 - iy_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & -1 & x \\ -\lambda_2 i & 0 & 0 & -ix & i \\ \lambda_2 & 0 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} \equiv -2i\lambda_1 x - 2i\lambda_2,$$

und dieser Ausdruck verschwindet nicht identisch. Die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ bestimmen daher eine Berührungstransformation und zwar die von mir entdeckte Berührungstransformation, die Gerade in Kugeln überführt. Mit dieser Transformation werden wir uns auch in diesem Bande eingehend beschäftigen.

Beispiel 3. Setzen wir:

$$\Omega_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad \Omega_2 = xx_1 + yy_1 + zz_1,$$

so ordnen die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ jedem Punkte $x, y, z$ einen Kreis zu, dessen Mittelpunkt der Koordinatenanfang ist, dessen Radius gleich der Entfernung des Punktes $x, y, z$ vom Koordinatenanfange ist, dessen Ebene endlich zu dem Radiusvektor des Punktes $x, y, z$ senkrecht steht. Den $\infty^3$ Punkten $x, y, z$ sind somit $\infty^3$ verschiedene Kreise zugeordnet, die den Raum ausfüllen. Unsere Gleichungen bestimmen daher eine Berührungstransformation, die wir als die Apsidaltransformation bezeichnen, weil sie jede Fläche in ihre Apsidalfläche überführt.

**28.** Die Entwickelungen dieses Paragraphen geben eine feste Grundlage für die Theorie derjenigen Berührungstransformationen, die alle Punkte in Kurven überführen. Indem wir uns vorbehalten, später diese wichtige Theorie im einzelnen auszubilden, beschränken wir uns hier darauf, einige besonders naheliegende Konsequenzen unserer Entwickelungen anzugeben.

Zwei in $x, y, z$ unabhängige Gleichungen von der Form:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

ordnen, wie wir schon so oft hervorgehoben haben, jedem Punkte des Raumes $x, y, z$ eine Kurve des Raumes $x_1, y_1, z_1$ zu. Es ist aber nicht sicher, daß man in dieser Weise $\infty^3$ verschiedene Kurven erhält, auch nicht, daß diese Kurven den Raum ausfüllen. Fassen wir nun unsere Kurven als Elementvereine auf, so leuchtet ohne weiteres ein, daß die Elemente $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ aller dieser Vereine eine Relation (oder mehrere Relationen) erfüllen, sobald die Zahl der Kurven geringer als $\infty^3$ ist; dasselbe gilt, wenn zwar $\infty^3$ verschiedene Kurven vorhanden sind, diese Kurven aber sämtlich auf einer gewissen Fläche gelegen sind.

Liegen dagegen $\infty^3$ verschiedene Kurven vor, die den Raum ausfüllen, so befriedigen ihre Elemente $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ keine Relation; denn [219
dann gehen durch einen Punkt von allgemeiner Lage $\infty^1$ verschiedene Kurven der Schar, die verschiedene Tangenten haben und daher unmöglich in diesem Punkte dieselben $\infty^1$ Elemente $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ haben können.

Mit Berücksichtigung dieser naheliegenden geometrischen Bemerkungen können wir aus unseren Entwickelungen über die Determinante $D$ (vgl. Seite 215ff. [hier Seite 712ff.]) unmittelbar den folgenden beachtenswerten Satz ableiten:

**Satz 12.** Ordnen die beiden Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

den $\infty^3$ Punkten $x, y, z$ dreifach unendlich viele verschiedene Kurven zu, die den Raum $x_1, y_1, z_1$ ausfüllen, so ordnen dieselben Gleichungen auch den Punkten $x_1, y_1, z_1$ dreifach unendlich viele Kurven zu, die den Raum $x, y, z$ ausfüllen.

Wir werden später auf diesen wichtigen Satz zurückkommen und durch rein geometrische Betrachtungen den inneren Grund des Satzes aufdecken.

**29.** Bezeichnen wir die Punkte des Raumes $x, y, z$ mit $P$ und die $\infty^3$ zugeordneten Kurven des Raumes $x_1, y_1, z_1$ mit $C_1$, ferner die Punkte des Raumes $x_1, y_1, z_1$ mit $P_1$ und die $\infty^3$ zugeordneten Kurven des Raumes $x, y, z$ mit $C$, endlich einen Elementverein des Raumes $x, y, z$ mit $F$ und den zugeordneten Verein des anderen Raumes mit $F_1$, so gilt offenbar der Satz:

Durchläuft ein Punkt $P$ eine Fläche $F$, so berührt die Bildkurve $C_1$ des Punktes $P$ immer die Bildfigur $F_1$ der vorgelegten Fläche. Die Bildkurven $C_1$ aller $\infty^2$ Punkte $P$ der vorgelegten Fläche $F$ bilden eine Kurvenschar, die aus $\infty^2$ Kurven besteht und daher ein Kurvensystem heißen soll. Diese $\infty^2$ Kurven berühren sämtlich die Fläche $F_1$, die wir dementsprechend als Brennfläche des Kurvensystems bezeichnen.

Es ist nun wohl zu beachten, daß jede Kurve $C_1$ des betrachteten Kurvensystems im allgemeinen die zugehörige Brennfläche $F_1$ an mehreren Stellen berührt. Dabei ist es auch denkbar, daß die Brennfläche $F_1$ in mehrere Flächen $F_1'$, $F_1''$, $F_1'''$ zerfällt. Alsdann transformiert die vorgelegte Berührungstransformation die Fläche $F$ nicht in eine Fläche, sondern in mehrere Flächen. Und selbst, wenn $F_1$ nicht in mehrere Flächen zerfällt, werden doch jedem Elemente der gegebenen Fläche im allgemeinen mehrere Elemente der transformierten Fläche zugeordnet.



Eine Berührungstransformation, die die Punkte in Kurven überführt, ist daher im allgemeinen mehrdeutig, während sie allerdings innerhalb passend gewählter Bereiche der Elementräume immer eineindeutig ist.

Bei tieferen Untersuchungen über Berührungstransformationen muß man oft auf die Mehrdeutigkeit dieser Transformationen Rücksicht nehmen. Um alle hier auftretenden wichtigen Vorkommnisse eingehend unter- [220
suchen zu können, werden wir in Kapitel III eine geometrische Theorie derjenigen Berührungstransformationen entwickeln, die die Punkte in Kurven überführen.

## § 4. Direkte Bestimmung aller Berührungstransformationen des Raumes.

**30.** Nachdem wir die Berührungstransformationen als Elementtransformationen definiert hatten, die jeden Elementverein in einen Elementverein überführen, lag es nahe, alle Berührungstransformationen in drei Klassen zu ordnen, jenachdem die Punkte des Raumes in Punkte, Kurven oder Flächen übergehen. Diese Klassifikation ist bei vielen Untersuchungen fundamental; es ist aber wohl zu beachten, daß sie faktisch darauf beruht, daß wir uns implizite auf den Standpunkt der Cartesischen Geometrie stellen und alle räumlichen Figuren als Punktörter auffassen.

Nun aber können wir nach dem Vorgange von Plücker, dessen allgemeine Ideen in Eulers, Lagranges, Legendres, Monges und Poncelets Arbeiten ihren Ursprung nehmen, den Raum als einen Ebenenraum und dementsprechend alle geometrischen Figuren als Ebenenörter auffassen. Schreiben wir dabei die Gleichung der Ebene in der Form:

$$z - ax - by - c = 0$$

und betrachten die Parameter $a, b, c$ als Ebenenkoordinaten, so bestimmen drei unabhängige Gleichungen zwischen $a, b, c$ eine Ebene, zwei solche Gleichungen liefern im allgemeinen eine developpable Fläche, während eine einzige Gleichung entweder alle Tangentialebenen einer nicht developpabeln Fläche, oder die Tangentialebenen einer krummen Kurve, oder endlich alle Ebenen eines Punktes analytisch definiert.

Hätten wir nicht die Cartesische Geometrie, sondern die Ebenengeometrie als Ausgangspunkt für die Geometrie der Berührungstransformationen genommen, so wäre es allerdings wiederum naturgemäß gewesen, alle Berührungstransformationen in drei Klassen einzuteilen, wir würden aber unter diesen Umständen eine andere geometrische Definition der drei Klassen zu Grunde gelegt haben; zu der ersten Klasse hätten wir alle Transformationen gerechnet, die Ebenen in Ebenen überführen;

zu der zweiten (respektive dritten) Klasse dagegen alle Transformationen, bei denen Ebenen in Gebilde übergehen, die durch zwei Gleichungen (respektive eine Gleichung) in Ebenenkoordinaten definiert werden.

Es ist daher möglich, und in der Geometrie der Berührungstransformationen im allgemeinen zweckmäßig, die in den vorhergehenden Paragraphen eingeführte Klassifikation als *unwesentlich* aufzufassen. Dementsprechend können wir es als einen Mangel der früheren Entwicke- [221
lungen betrachten, daß wir die Bestimmung aller Berührungstransformationen in drei getrennte Probleme zerlegt haben.

**31.** Wir wollen jetzt zeigen, daß es möglich ist, ausgehend von den allgemeinen Begriffen Element und Elementverein *mit einem Schlage alle Berührungstransformationen zu bestimmen*. Wenn wir aber auch in dieser Weise schneller zum Ziele gelangen, so werden wir doch in späteren Kapiteln erkennen, daß die vorhergehenden Entwickelungen keineswegs überflüssig sind, sondern im Gegenteil eine fundamentale Bedeutung besitzen, ja bei vielen Untersuchungen die unentbehrliche Grundlage liefern. Die Sache ist eben die, daß *verschiedene Standpunkte ihre Berechtigung haben*. Wenn ich auch die von mir begründete Geometrie der Berührungstransformationen als einen wichtigen Abschnitt der Geometrie betrachte, so fällt es mir doch nicht ein, diesen Abschnitt der Geometrie als die einzig wahre und fruchtbare Behandlung der Geometrie hinzustellen.

**32.** Eine vorgelegte Berührungstransformation:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

ordnet jedem Punkte $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ einen Elementverein zu, den Verein nämlich, dessen Elemente durch die Gleichungen:

$$a_1 = X, \quad b_1 = Y, \quad c_1 = Z$$

bestimmt sind. Auf der anderen Seite können wir, indem wir *frühere Ergebnisse zusammenfassen*, behaupten, daß es, *sobald jedem Punkte $x_1, y_1, z_1$ ein Elementverein zugeordnet ist, sobald ferner die Elemente aller dieser Vereine keine Relation $F(x, y, z, p, q) = 0$ erfüllen, immer eine und auch nur eine Berührungstransformation gibt, die jeden Punkt des Raumes in den zugeordneten Elementverein überführt.*

Diesen Satz werden wir jetzt durch neue und direkte Betrachtungen ableiten, bei denen es gleichgültig ist, ob die betreffenden Elementvereine Flächen, Kurven oder Punkte sind.



**33.** Wir denken uns also, daß jedem Punkte $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ ein Elementverein zugeordnet ist, dessen Gleichungen:

$$L_k(x, y, z, p, q, a_1, b_1, c_1) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

nach unseren Voraussetzungen sicher nach $a_1$, $b_1$ und $c_1$ auflösbar sind:

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1.$$

Wir haben zu beweisen, daß es dann immer eine und auch nur eine Berührungstransformation gibt, deren drei erste Gleichungen die Form:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q)$$

besitzen. Um dies nachzuweisen, stützen wir uns auf unsre Definition der beiden Begriffe Elementverein und Berührungstransformation.

Unsere Annahme, daß die drei Gleichungen $X = a_1$, $Y = b_1$, [222
$Z = c_1$ $\infty^3$ Elementvereine darstellen, deckt sich damit, daß die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

für alle Wertsysteme $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $dx$, $dy$, $dz$, $dp$, $dq$ besteht, die den Gleichungen:

$$X = a_1, \quad Y = b_1, \quad Z = c_1, \quad dX = 0, \quad dY = 0, \quad dZ = 0$$

genügen. Und da unsere *Pfaffsche* Gleichung die willkürlichen Parameter $a_1, b_1, c_1$ gar nicht enthält, muß sie, welche Werte auch $x, y, z, p, q$ erhalten, immer bestehen, sobald die fünf Differentiale die linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz + \frac{\partial X}{\partial p} dp + \frac{\partial X}{\partial q} dq \equiv dX, \\
0 &= \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \quad + \frac{\partial Y}{\partial q} dq \equiv dY, \\
0 &= \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \quad + \frac{\partial Z}{\partial q} dq \equiv dZ
\end{aligned}$$

erfüllen. Hieraus folgt, daß es möglich ist, drei solche Funktionen $L$, $M$, $N$ von $x, y, z, p, q$ zu finden, daß die Gleichung:

$$L\,dX + M\,dY + N\,dZ = dz - p\,dx - q\,dy$$

für *alle* Werte der Differentiale $dx, dy, dz, dp, dq$ stattfindet. Zur Bestimmung von $L$, $M$ und $N$ erhalten wir die fünf linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
L X_z + M Y_z + N Z_z &= 1, \\
L X_x + M Y_x + N Z_x &= -p, \\
L X_y + M Y_y + N Z_y &= -q, \\
L X_p + M Y_p + N Z_p &= 0, \\
L X_q + M Y_q + N Z_q &= 0,
\end{aligned}$$

unter denen sicher drei vorhanden sind, die nach $L, M$ und $N$ auflösbar sind; es sind ja $X, Y$ und $Z$ unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$.

Wäre nun eine unter den Größen $L, M$ und $N$ identisch gleich Null, bestände also zum Beispiel die Gleichung:

$$L\,dX + M\,dY = dz - p\,dx - q\,dy$$

identisch, so existierten $\infty^2$ dreidimensionale Elementvereine, die durch Gleichungen von der Form $X = \text{Const.}$, $Y = \text{Const.}$ definiert würden. Solche Vereine gibt es aber bekanntlich nicht, und daher sind $L, M$ und $N$ sämtlich von Null verschieden.

Unsere identische Relation kann daher die Form:

$$dZ + \frac{L}{N}\,dX + \frac{M}{N}\,dY = \frac{1}{N}(dz - p\,dx - q\,dy),$$

oder, wenn wir: [223

$$-\frac{L}{N} = P, \quad -\frac{M}{N} = Q, \quad \frac{1}{N} = \varrho$$

setzen, die Form:

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy)$$

erhalten, und dabei verschwindet $\varrho$ nicht identisch.

Diese Überlegungen geben uns den Satz:

**Satz 13.** Stellen drei Gleichungen von der Form:

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1,$$

welche Werte auch die Konstanten $a_1, b_1, c_1$ erhalten, immer einen Elementverein dar, so besteht eine und auch nur eine Relation von der Form:

$$dz - p\,dx - q\,dy = \frac{1}{\varrho}(dZ - P\,dX - Q\,dY).$$

**34.** Wir können noch einen Schritt weiter gehen und beweisen, daß die Größen $X, Y, Z, P$ und $Q$ unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$ sind, und daß dementsprechend die Gleichungen:

$$x_1 = X, \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

eine Elementtransformation, und zwar eine Berührungstransformation bestimmen.

Gesetzt, es bestände eine Relation, die etwa die Form:

$$Q - \varphi(X, Y, Z, P) = 0$$

besäße, während $X, Y, Z, P$ durch keine identische Relation gebunden wären. Dann ordneten die Gleichungen:

$$X = c_1, \quad Y = c_2, \quad Z = c_3, \quad P = c_4$$



mit den vier willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4$ alle $\infty^5$ Elemente $x, y, z, p, q$ des Raumes in $\infty^4$ Scharen, und zwar in $\infty^4$ Elementstreifen. Wählten wir zwei benachbarte Elementstreifen, die den Parameterwerten:

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \quad \text{und:} \quad c_1 + dc_1, \quad c_2 + dc_2, \quad c_3 + dc_3, \quad c_4 + dc_4$$

entsprächen, so wären von vornherein zwei und nur zwei Fälle denkbar. Entweder bestände die Gleichung:

$$dc_3 - c_4\,dc_2 - \varphi(c_1, c_2, c_3, c_4)\,dc_1 = 0,$$

und dann wäre jedes Element des Streifens $c_1, c_2, c_3, c_4$ mit allen benachbarten Elementen des Streifens $c_1 + dc_1, \ldots, c_4 + dc_4$ vereinigt; oder es wäre der Ausdruck:

$$dc_3 - c_4\,dc_2 - \varphi(c_1, c_2, c_3, c_4)\,dc_1$$

nicht gleich Null, und dann könnte kein Element des Streifens $c_1, \ldots, c_4$ mit einem Elemente des benachbarten Streifens vereinigt liegen.

Unsere Annahme, daß die Größen $X, Y, Z, P, Q$ durch eine und nur eine Relation gebunden wären, würde somit dazu führen, daß sich alle $\infty^5$ Elemente des Raumes derart in $\infty^4$ Elementstreifen $c_1, c_2, c_3, c_4$ [224 ordneten, daß alle benachbarten Elemente zweier benachbarter Streifen vereinigt lägen, sobald nur zwei Elemente der beiden Streifen in dieser Beziehung ständen. Wäre aber eine derartige Schar von $\infty^4$ Elementstreifen $c_1, \ldots, c_4$ vorhanden, so existierten dreidimensionale Elementvereine; wählte man nämlich einen zweidimensionalen Elementverein von allgemeiner Lage, so wäre dieser Verein sicher nicht von einfach unendlich vielen Elementstreifen $c_1, \ldots, c_4$ erzeugt; die $\infty^2$ Elemente des Vereins bestimmten daher $\infty^2$ hindurchgehende Streifen $c_1, \ldots, c_4$, und diese $\infty^2$ Streifen erzeugten einen dreidimensionalen Elementverein.

Unsere Annahme, daß fünf Größen $Z, X, Y, P, Q$, die eine Relation von der Form:

$$(13) \qquad dz - p\,dx - q\,dy = \frac{1}{\varrho}(dZ - P\,dX - Q\,dY)$$

erfüllen, durch eine und nur eine Relation $\Omega(X, Y, Z, P, Q) = 0$ gebunden sein können, hat sich hiermit als unmöglich gezeigt.

**35.** Ebensowenig ist es denkbar, daß fünf Größen $X, Y, Z, P, Q$, die eine solche Differentialrelation (13) erfüllen, durch zwei endliche Relationen gebunden sind. Beständen in der Tat zum Beispiel zwei Relationen von der Form:

$$P = \alpha(X, Y, Z), \quad Q = \beta(X, Y, Z),$$

so ließe sich der Pfaffsche Ausdruck:

$$dZ - P\,dX - Q\,dY \equiv dZ - \alpha(X, Y, Z)\,dX - \beta(X, Y, Z)\,dY$$

(vgl. z. B. Band I, S. 196, Z. 16 von oben) immer auf die Form:

$$\mu\, dZ + \nu\, d\Omega$$

bringen, sodaß eine Relation von der Form:

$$dz - p\,dx - q\,dy = \frac{\mu}{\varrho} dZ + \frac{\nu}{\varrho} d\Omega$$

stattfände. Dann aber lieferten die Gleichungen $Z = \text{Const.}$, $\Omega = \text{Const.}$ dreidimensionale Elementvereine, was an sich unmöglich ist.

Noch leichter erkennen wir, daß die Größen $X, Y, Z, P, Q$ nicht mehr als zwei endliche Relationen erfüllen können.

Es besteht daher der Satz:

**Satz 14.** Erfüllen fünf Funktionen $X, Y, Z, P, Q$ von $x, y, z, p, q$ eine Relation von der Form:

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

so sind diese Funktionen nur dann von einander abhängig, wenn die Größe $\varrho$ identisch gleich Null ist.[1])

**36.** Nun brauchen wir nur die beiden Sätze 14 und 13 zusammen- [225 zuhalten, um das früher angekündigte Resultat zu bekommen.

**Satz 15.** Definieren drei Gleichungen von der Form:

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1$$

mit den willkürlichen Konstanten $a_1, b_1, c_1$ eine Schar Elementvereine, so gibt es immer eine und auch nur eine Berührungstransformation des Raumes, deren drei erste Gleichungen die Form:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q)$$

besitzen.

Noch schärfer tritt der Inhalt dieses Satzes durch die folgende Fassung hervor:

**Theorem III.** Man findet alle Berührungstransformationen, indem man den $\infty^3$ Punkten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ in allgemeinster Weise $\infty^3$ zweidimensionale Elementvereine zuordnet, deren Elemente $x, y, z, p, q$ alle $\infty^5$ Elemente des Raumes umfassen. Wird diese Zuordnung, wie in vielen Weisen möglich ist, durch drei Gleichungen von der Form:

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1$$

1) Dieser Satz ist längst in der Theorie des Pfaffschen Problems aufgestellt worden.



definiert, so gibt es immer eine und auch nur eine Berührungstransformation, die jeden Elementverein $X = a_1$, $Y = b_1$, $Z = c_1$ in den zugeordneten Punkt $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ überführt.

**37.** Sollen drei Gleichungen von der Form:

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1$$

mit den drei willkürlichen Parametern $a_1, b_1, c_1$ $\infty^3$ Elementvereine darstellen, so müssen zwischen den Funktionen $X, Y, Z$ bestimmte Beziehungen bestehen. Um den zweckmäßigsten analytischen Ausdruck für diese Beziehungen zu finden, stützen wir uns auf unsere allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren erste Grundzüge schon im ersten Bande dieses Werkes (S. 521 ff.) entwickelt sind. Wie damals bezeichnen wir jede Gleichung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zwischen den Elementkoordinaten als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Integralgebilde dieser Gleichung ist für unsre Auffassung jeder zweidimensionale Elementverein, dessen Elemente der Schar $F = 0$ angehören. Wir sahen an der angegebenen Stelle, daß jede Gleichung $F = 0$ unendlich viele und zwar $\infty^\infty$ Integralgebilde besitzt, die eine gemeinsame Erzeugung haben. Es ordnen sich nämlich die $\infty^4$ Elemente jeder Gleichung $F = 0$ in $\infty^3$ Elementstreifen, die wir als charakteristische Streifen bezeichneten, und jedes Integralgebilde von $F = 0$ enthält $\infty^1$ charakteristische Streifen.

Setzen wir der Einfachheit wegen voraus, daß die vorgelegte [226 partielle Differentialgleichung eine willkürliche Konstante $a$ enthält, und dementsprechend die Form $F(x, y, z, p, q) = a$ besitzt, so finden wir nach den früher aufgestellten Sätzen die Gleichungen der $\infty^3$ charakteristischen Streifen, indem wir drei von $F$ unabhängige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \\ - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q} \equiv [Ff]$$

gleich willkürlichen Konstanten setzen.

Wir sahen andererseits, daß zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = a, \quad \Phi(x, y, z, p, q) = b$$

mit den willkürlichen Konstanten $a$ und $b$ dann und nur dann $\infty^1$ gemeinsame Integralgebilde besitzen, wenn der Poissonsche Klammerausdruck $[F\Phi]$ identisch verschwindet, und also die Gleichung:

$$[F\Phi] = 0$$

besteht. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, wenn also nach unsrer Terminologie die Funktionen $F$ und $\Phi$ in Involution liegen, so haben die beiden Gleichungen $F = a$ und $\Phi = b$ für beliebig gewählte Werte der Parameter $a$ und $b$ immer einfach unendlich viele gemeinsame Integralgebilde, die durch eine zu den Gleichungen $F = a$, $\Phi = b$ hinzutretende Gleichung:

$$\Psi(x, y, z, p, q) = c$$

mit der willkürlichen Konstanten $c$ bestimmt werden.

Liegt andererseits irgend eine Schar von $\infty^3$ Elementvereinen vor, die durch die Gleichungen:

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1$$

definiert werden, so haben zwei beliebige unter diesen drei Gleichungen, zum Beispiel $X = a_1$ und $Z = c_1$, für alle Werte der Parameter $a_1$ und $c_1$ gemeinsame Integralgebilde, und es besteht daher identisch die Gleichung $[XZ] = 0$.

Es ergibt sich also unmittelbar aus den Entwickelungen des vorigen Bandes der Satz:

**Satz 16.** Drei Gleichungen von der Form:

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1$$

mit den willkürlichen Parametern $a_1, b_1, c_1$ bestimmen dann und nur dann $\infty^3$ Elementvereine, wenn die drei Funktionen $X, Y, Z$ von einander unabhängig sind, und dabei ihre drei Klammerausdrücke verschwinden:

$$[XY] = 0, \quad [XZ] = 0, \quad [YZ] = 0.$$

**38.** Das einfachste Beispiel zu diesem Satze liefert die Annahme: [227

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z;$$

alsdann definieren die drei Gleichungen $X = a_1$, $Y = b_1$, $Z = c_1$ alle $\infty^3$ Punkte des Raumes.

Um ein anderes einfaches Beispiel zu finden, stellen wir die Schar aller Ebenen durch die Gleichung:

$$z - ax - by - c = 0$$

dar. Die Elemente jeder Ebene erfüllen überdies die Gleichungen:

$$p = a, \quad q = b,$$



und also läßt sich die Schar aller Ebenen durch die drei Gleichungen:

$$p = a, \quad q = b, \quad z - px - qy = c$$

darstellen. Hier liegen wiederum die drei Funktionen:

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = z - px - qy,$$

wie man leicht verifiziert, paarweise in Involution.

Setzen wir endlich:

$$z = ax + c, \quad y = b$$

und erteilen den Parametern $a, b, c$ bestimmte Werte, so erhalten wir eine Gerade, die mit der $z, x$-Ebene parallel ist; die Elemente dieser Geraden erfüllen überdies die Relation: $a - p = 0$. Die Schar aller mit der $z, x$-Ebene parallelen Geraden wird daher, wenn diese Geraden als Elementvereine aufgefaßt werden, durch die drei Gleichungen:

$$p = a, \quad y = b, \quad z - px = c$$

dargestellt. Hier ist es wiederum leicht, zu konstatieren, daß die drei Funktionen $p, y, z - px$ paarweise in Involution liegen.

Betrachten wir endlich die Schar aller $\infty^3$ Kugeln, deren Mittelpunkte in der Ebene $z = 0$ liegen. In Cartesischen Koordinaten ist:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 - c^2 = 0$$

die Gleichung dieser $\infty^3$ Kugeln. Die Elemente einer solchen Kugel erfüllen überdies die Gleichungen:

$$x - a + zp = 0, \quad y - b + zq = 0;$$

daher werden diese Kugeln, aufgefaßt als Elementvereine, durch die Gleichungen:

$$x + zp = a, \quad y + zq = b, \quad z\sqrt{1 + p^2 + q^2} = c$$

dargestellt.

**39.** Verbinden wir die beiden [letzten] Sätze, so erhalten wir unmittelbar das folgende Theorem:

**Theorem IV.** Drei Gleichungen von der Form:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q)$$

bestimmen dann und nur dann eine Berührungstrans- [228
formation des Raumes, wenn $X, Y, Z$ unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$ sind, die paarweise in Involution liegen. Ist diese Bedingung erfüllt, so besteht eine identische Gleichung:

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

und dann sind:

$$p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

die fehlenden Gleichungen der Berührungstransformation.

Diesen fundamentalen Satz, der für die analytische Theorie der Berührungstransformationen die naturgemäße Grundlage bildet, gab ich zum ersten Male in den Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania in der kurzgefaßten Note: Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien, 30. April 1872 [d. Ausg. Bd. III, Abh. I].

**40.** Aus den Entwickelungen dieses Paragraphen lassen sich viele wichtige Schlüsse ziehen. Hier beschränken wir uns darauf, einige besonders nahe liegende, gleichzeitig aber wichtige Folgerungen zu ziehen.

Eine Berührungstransformation: $z_1 = Z,\ x_1 = X, \ldots, q_1 = Q$ führt die Elemente $x, y, z, p, q$ jeder Gleichung $Z(x, y, z, p, q) = c$ in Elemente des Raumes $x_1, y_1, z_1$ über, deren Punktort die Ebene $z_1 = c$ ist; sagen wir einfach: die Transformation führt die partielle Differentialgleichung $Z = c$ in die partielle Differentialgleichung $z_1 = c$ über. Gleichzeitig transformieren sich die Integralgebilde der ersten Gleichung in die Integralgebilde der Gleichung $z_1 = c$, das heißt, in die Kurven und Punkte dieser Ebene. Die charakteristischen Streifen der Gleichung $Z = c$ gehen in die charakteristischen Streifen der Gleichung $z_1 = c$ über, das heißt, in Elementbüschel, deren Achsen die Linienelemente der Ebene $z_1 = c$ sind; kürzer gesagt: die charakteristischen Streifen der Gleichung $Z = c$ gehen in die Linienelemente der Ebene $z_1 = c$ über.

Schon im vorigen Bande (S. 536 ff.) stellten wir eine ganz analoge Beziehung zwischen den Integralgebilden, beziehungsweise charakteristischen Streifen einer Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ und den Kurven (Punkten) und Linienelementen einer Ebene her; während sich aber diese Beziehung damals als eine Abbildung darbot, wird sie hier durch eine Berührungstransformation vermittelt. Es liegt auf der Hand, daß unser jetziges Ergebnis, als das tiefergehende, die früheren Entwickelungen umfaßt, während sich das Umgekehrte nicht behaupten läßt.

**41.** Die große Bedeutung dieser Entwickelungen (die sich, beiläufig bemerkt, auf $n$ Dimensionen ausdehnen) liegt darin, daß $Z = c$ als eine ganz beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung aufgefaßt werden kann. Liegt nämlich eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer willkürlichen Konstanten, etwa in der Form $w(x, y, z, p, q) = c$ vor, so besitzt sie, wissen wir, immer für jeden [229 Wert von $c$ zweifach unendlich viele Integralgebilde, die sich durch drei Gleichungen:

$$w = c, \quad u(x, y, z, p, q) = a, \quad v(x, y, z, p, q) = b$$

darstellen lassen, zwischen denen die Beziehungen:

$$[uw] = [vw] = [uv] = 0$$



stattfinden. Dann aber gibt es immer eine (und auch nur eine) Berührungstransformation, deren drei erste Gleichungen die Form:

$$x_1 = u, \quad y_1 = v, \quad z_1 = w$$

besitzen, und diese Transformation führt die Gleichung: $w(x, y, z, p, q) = c$ in die Gleichung $z_1 = c$ über.

Durch Berührungstransformation kann somit jede vorgelegte partielle Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = c$ auf die Form $z_1 = c$ gebracht werden. Man kann daher das Integrationsproblem einer Gleichung $F = c$ als ein Transformationsproblem auffassen. Kennt man nämlich eine Berührungstransformation, die $F = c$ auf die Form $z_1 = c$ bringt, so führt die inverse Transformation die bekannten Integralgebilde der Gleichung $z_1 = c$ in die Integralgebilde der Gleichung $F = c$ über.

Da nun alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F = c$ durch Berührungstransformation die gemeinsame Form $z_1 = c$ erhalten können, und da andererseits die sukzessive Ausführung zweier Berührungstransformationen mit einer einzigen Berührungstransformation äquivalent ist, können wir schließen, daß es, sobald zwei beliebige partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = c, \quad \Phi(\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa) = k$$

vorliegen, immer eine Berührungstransformation (ja sogar unendlich viele solche Transformationen) gibt, die jede Gleichung $F = c$ auf die Form $\Phi = k$ bringt.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung besitzen daher keine individuelle Eigenschaft, die gegenüber allen Berührungstransformationen invariant bleibt.

**42.** Sobald eine Berührungstransformation:

$$(1) \qquad x_1 = X, \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

vorliegt, kann man ohne weiteres eine ausgedehnte Kategorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung angeben, deren jede integriert werden kann. Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$\Omega(X, Y, Z) = 0$$

erhält nämlich durch die Transformation (1) die Form:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

und die Integralgebilde dieser neuen Gleichung, nämlich die Punkte [230 und Kurven der Fläche $\Omega(x_1, y_1, z_1) = 0$ gehen durch die inverse Transformation in die Integralgebilde der Gleichung $\Omega(X, Y, Z) = 0$ über.

Daß alle Gleichungen von der Form $\Omega(X, Y, Z) = 0$ integriert werden können, erkennt man übrigens auch durch die folgende Betrachtung.

Die Gleichungen: $X=a$, $Y=b$, $Z=c$ liefern $\infty^3$ Elementvereine, und unter diesen befinden sich $\infty^2$ Integralgebilde der Gleichung $\Omega(X, Y, Z)=0$; solche Integralgebilde sind ja alle Elementvereine: $X=a$, $Y=b$, $Z=c$, deren Parameter $a, b, c$ die Bedingung $\Omega(a, b, c)=0$ erfüllen. Hiermit kennen wir eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\Omega(X, Y, Z)=0$, deren allgemeine Lösung somit nach Lagranges (und meinen) allgemeinen Regeln gefunden werden kann.

Setzen wir zum Beispiel:

$$X=p, \quad Y=q, \quad Z=z-px-qy,$$

so erhalten wir den schon von Lagrange aufgestellten Satz, daß jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der allgemeinen Form:

$$\Omega(p, q, z-px-qy)=0$$

eine vollständige Lösung besitzt, die aus $\infty^2$ Ebenen besteht; daher sind alle Integralflächen der allgemeinen Lösung developpable Flächen.

Lagrange bemerkt ferner, daß zwei partielle Differentialgleichungen von der Form:

$$\Omega(p, q, z-px-qy)=0, \quad W(p, q, z-px-qy)=0$$

immer $\infty^1$ gemeinsame Integralflächen haben, die sämtlich Ebenen sind. Die von diesen $\infty^1$ Ebenen umhüllte Developpable erfüllt ebenfalls sowohl $\Omega=0$, wie $W=0$. Faßt man mit Plücker die Größen $z-px-qy$, $p$ und $q$ als Ebenenkoordinaten auf (wie früher bemerkt, bezeichnet schon Lagrange diese drei Größen als éléments du plan), so werden die Lagrangeschen Betrachtungen evident, weil die Gleichung:

$$\Omega(p, q, z-px-qy)=0$$

auf der einen Seite $\infty^4$ Elemente, andererseits aber $\infty^2$ Ebenen definiert.

## § 5. Die Definitionsgleichungen aller Berührungstransformationen des Raumes.

**43.** Wir haben gesehen (S. 199 [hier S. 695]), daß fünf Gleichungen von der Form:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1=X(x,y,z,p,q), \quad y_1=Y(x,y,z,p,q), \quad z_1=Z(x,y,z,p,q), \\ p_1=P(x,y,z,p,q), \quad q_1=Q(x,y,z,p,q) \end{cases}$$

dann und nur dann eine Berührungstransformation definieren, wenn eine Relation von der Form:

$$(13)\qquad dZ-P\,dX-Q\,dY=\varrho(dz-p\,dx-q\,dy)$$

identisch besteht, und dabei die Größe $\varrho$ nicht gleich Null ist.



Wir haben ferner erkannt, daß zwischen den Funktionen $X, Y, Z$, [231 die zu einer Berührungstransformation (1) gehören, die Relationen:

$$[ZX]=0, \quad [ZY]=0, \quad [XY]=0$$

bestehen. Wir werden jetzt eine Reihe weiterer Differentialrelationen aufstellen, die zwischen den Funktionen $X, Y, Z, P, Q$ einer Berührungstransformation (1) stattfinden; wir zeigen überdies, daß diese Differentialrelationen die Gleichung (13) vollständig ersetzen und somit zur Definition der Berührungstransformationen benutzt werden können. Diese charakteristischen Differentialgleichungen, die in Untersuchungen über Berührungstransformationen eine fundamentale Rolle spielen, werden wir als Definitionsgleichungen der Berührungstransformationen bezeichnen.

**44.** Schreiben wir (vgl. S. 208 [hier S. 705]) die Identität (13) folgendermaßen:

$$d(Z-PX-QY)+X\,dP+Y\,dQ=\varrho(dz-p\,dx-q\,dy),$$

so erhalten wir (Theorem IV, S. 227 f. [hier S. 725]) unmittelbar die Relationen:

$$[Z-PX-QY, P]=0, \quad [Z-PX-QY, Q]=0, \quad [PQ]=0,$$

sowie die äquivalenten:

$$[PQ]=0, \ [ZP]-P[XP]-Q[YP]=0, \ [ZQ]-P[XQ]-Q[YQ]=0.$$

In ähnlicher Weise finden wir, indem wir die Identität (13) auf die Form:

$$d(Z-PX)+X\,dP-Q\,dY=\varrho(dz-p\,dx-q\,dy)$$

bringen, die Relationen:

$$[Z-PX, P]=0, \quad [Z-PX, Y]=0, \quad [PY]=0,$$

sowie die äquivalenten:

$$[ZP]-P[XP]=0, \quad -X[PY]=0, \quad [PY]=0.$$

Vertauschen wir hier, wie wir können, $X$ mit $Y$ und $P$ mit $Q$, so erhalten wir die analogen Gleichungen:

$$[ZQ]-Q[YQ]=0, \quad [QX]=0.$$

Hiermit sind im ganzen die folgenden Relationen abgeleitet:

$$[XY]=0, \quad [XZ]=0, \quad [YZ]=0, \quad [XQ]=0, \quad [YP]=0, \quad [PQ]=0,$$
$$[ZP]-P[XP]=0, \quad [ZQ]-Q[YQ]=0.$$

Um noch weitere Differentialgleichungen zu finden, verwerten wir die früher (S. 209 [hier S. 706]) aufgestellte Identität:

$$d\left(Z-\frac{1}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right)-P\,.\,d\left(X+\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right)-Q\,.\,d\left(Y+\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right)$$
$$\equiv dZ-P\,dX-Q\,dY=\varrho(dz-p\,dx-q\,dy),$$

die uns zeigt, daß die beiden Funktionen:

$$X+\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \quad \text{und:} \quad Y+\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}$$

in Involution liegen. Nun aber ist: [232

$$\left[X+\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}},\ Y+\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right]=-\frac{PQ}{(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}([XP]-[YQ]),$$

und also besteht auch die Gleichung:

$$[XP]=[YQ].$$

Dabei ist leicht einzusehen, daß die Klammerausdrücke $[XP]$ und $[YQ]$ von Null verschieden sein müssen; sonst lägen nämlich alle fünf Größen $X, Y, Z, P, Q$ paarweise in Involution, und dann hätte zum Beispiel die lineare partielle Differentialgleichung $[Xf]=0$ fünf unabhängige Lösungen, nämlich $X, Y, Z, P$ und $Q$.

**45.** Dies gibt den Satz:

**Satz 17.** Bestimmen die Gleichungen:

$$x_1=X(x,y,z,p,q), \quad y_1=Y, \quad z_1=Z, \quad p_1=P, \quad q_1=Q$$

*eine Berührungstransformation, so bestehen Relationen von der Form:*

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} [XY]=[XZ]=[YZ]=[PQ]=[PY]=[QX]=0, \\ [PX]=\omega, \quad [QY]=\omega, \quad [PZ]=\omega P, \quad [QZ]=\omega Q, \end{array}\right.$$

*in denen $\omega$ eine von Null verschiedene Größe bezeichnet.*

Hiermit sind eine Reihe wichtiger Kriterien gefunden, die erfüllt sein müssen, wenn fünf Gleichungen $x_1=X, \ldots, q_1=Q$ eine Berührungstransformation bestimmen sollen. Diese Kriterien sind aber nicht allein *notwendig*, sondern auch *hinreichend*; das wollen wir jetzt zeigen.

**46.** Setzen wir voraus, daß fünf Funktionen $X, Y, Z, P, Q$ von $x, y, z, p, q$ vorliegen, die unsre Kriterien erfüllen. Dann ist es zunächst leicht, zu sehen, daß diese fünf Funktionen unabhängig sein müssen. Eine Relation von der Form:

$$P=F(X, Y, Z, Q)$$



ist unmöglich, weil $[PX]$ von Null verschieden, $[FX]$ dagegen gleich Null ist. Bestände andererseits eine Relation von der Form:

$$Z=\Phi(X, Y),$$

so käme:

$$[PZ]=\frac{\partial\Phi}{\partial X}[PX],$$

und durch Division mit $\omega$:

$$P=\frac{\partial\Phi(X, Y)}{\partial X};$$

wir sahen aber eben, daß eine Relation, die $P$ enthält, nicht stattfinden kann. Endlich ergibt sich, daß auch $X$ und $Y$ unabhängig sein müssen, weil $[QX]$ gleich Null, $[QY]$ dagegen von Null verschieden ist.

*Fünf Funktionen $X, Y, Z, P, Q$ von $x, y, z, p, q$, die unsre Kriterien (14) erfüllen, sind somit sicher von einander unabhängig.*

**47.** Wenn aber drei unabhängige Funktionen $X, Y, Z$ von [233
$x, y, z, p, q$ paarweise in Involution liegen, so erfüllen sie immer eine Gleichung von der Form:

$$dZ-\Pi\,dX-K\,dY=\sigma(dz-p\,dx-q\,dy),$$

und dann bestehen unter anderm die Relationen:

$$[\Pi Y]=0, \quad [\Pi Z]-\Pi[\Pi X]=0.$$

Nun aber ist $\Pi$ eine Funktion von $X, Y, Z, P, Q$:

$$\Pi=\Omega(X, Y, Z, P, Q),$$

und diese Funktion muß wegen der Gleichung $[\Pi Y]=0$ von $Q$ frei sein:

$$\Pi=\Omega(X, Y, Z, P),$$

muß aber $P$ enthalten, da $[\Pi X]$ von Null verschieden sein soll. Setzen wir diesen Wert in die Gleichung:

$$[\Pi Z]-\Pi[\Pi X]=0$$

ein, so finden wir die Gleichung:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial P}\{[PZ]-\Pi[PX]\}=0,$$

und da der erste Faktor links von Null verschieden ist, kommt:

$$[PZ]-\Pi[PX]=0.$$

Nach unserer Annahme ist aber:

$$[PZ]-P[PX]=0$$

und $[PX]$ von Null verschieden; also ist $\Pi=P$; in entsprechender Weise ergibt sich, daß $K=Q$ ist.

**48.** Hiermit ist gezeigt, daß unsere Kriterien wirklich auch hinreichend sind.

**Theorem V.** Fünf Gleichungen von der Form:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q),$$
$$p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

bestimmen dann und nur dann eine Berührungstransformation des Raumes, wenn die Relationen:

$$[XY] = [XZ] = [YZ] = [XQ] = [YP] = [PQ] = 0,$$
$$[PX] = \omega, \quad [QY] = \omega, \quad [PZ] = \omega P, \quad [QZ] = \omega Q$$

bestehen, und die Größe $\omega$ von Null verschieden ist.

Dieser Satz, der sich ohne Mühe auf $n$ Dimensionen ausdehnen läßt, bildet die wahre Grundlage für meine Theorie der Berührungstransformationen.[1])

## § 6. Auffassung einer Berührungstransformation als Änderung der Elementkoordinaten. [234

**49.** In der Cartesischen analytischen Geometrie wird jede Figur des Raumes als ein Punktort aufgefaßt. Eine Fläche ist der Ort von $\infty^2$ Punkten, eine Kurve der Ort von $\infty^1$ Punkten. Cartesius bemerkt, daß ein Punkt des Raumes drei Bestimmungsstücke oder Koordinaten besitzt, und als solche wählt er die drei Abstände $x, y, z$ des Punktes von drei festen Ebenen. Bei diesen Festsetzungen stellt jede Gleichung zwischen $x, y, z$ eine Fläche dar, während ein System von zwei unabhängigen Gleichungen zwischen $x, y, z$ eine Kurve des Raumes definiert. Insbesondere stellen lineare Gleichungen Ebenen, beziehungsweise Gerade dar.

Die Cartesische Geometrie ist die älteste, keineswegs aber die einzige analytische Geometrie. Auf der einen Seite ist ja klar, daß man, wenn man auch fortwährend alle räumlichen Figuren als Punktörter auffaßt, keineswegs dazu gezwungen ist, als Punktkoordinaten gerade die Cartesischen $x, y, z$ zu wählen. Führt man die sogenannten Polarkoordinaten $r, \varphi, \vartheta$ als Bestimmungsstücke eines Punktes ein, so wird allerdings

1) „Kurzes Résumé mehrerer neuer Theorien" und „Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen" S. 258—259; Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania, April 1872 und Juni 1873 [d. Ausg. Bd. III, Abh. I und Abh. IX, S. 116]. Man kann den Satz des Textes vervollständigen, indem man die Bemerkung hinzufügt, daß die Größe $\omega$ gerade die früher aufgetretene Funktion $\varrho$ ist, daß also unter den angegebenen Bedingungen die Gleichung:

$$dZ - PdX - QdY = \omega(dz - pdx - qdy)$$

besteht.



eine Gleichung zwischen den drei Koordinaten fortwährend eine Fläche definieren. Während aber in der Cartesischen Geometrie jede Ebene durch eine lineare Gleichung in den Koordinaten dargestellt wird, übersieht man, daß die Gleichung einer Ebene in Polarkoordinaten eine transzendente Form besitzt.

**50.** Man kann überhaupt statt der Cartesischen Koordinaten $x, y, z$ drei beliebige unabhängige Funktionen $u, v, w$ von $x, y, z$ als Punktkoordinaten einführen. Erteilt man nämlich $u, v, w$ bestimmte Werte: $a, b, c$, so findet man durch Auflösung der Gleichungen:

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b, \quad w(x, y, z) = c$$

entsprechende Werte der Größen $x, y, z$, und damit kennt man den Punkt, oder diejenigen Punkte, in denen $u, v, w$ die Werte $a, b, c$ haben. Bezeichnet man nun diese neuen Punktkoordinaten mit $x_1, y_1, z_1$, so sieht man, daß die Gleichungen:

$$(15) \qquad x_1 = u(x, y, z), \quad y_1 = v(x, y, z), \quad z_1 = w(x, y, z),$$

die nach unserer gewöhnlichen Terminologie eine Punkttransformation bestimmen, faktisch den Zusammenhang zwischen den alten [235 Koordinaten $x, y, z$ und den neuen Koordinaten eines allgemein gewählten Punktes angeben.

In dieser Weise ergibt sich, daß man die Gleichungen einer Punkttransformation (15) in zwei ganz verschiedenen Weisen deuten kann, nämlich entweder (vgl. z. B. Band I dieses Werkes, S. 2, § 1) als eine geometrische Operation, die jeden Punkt mit den Cartesischen Koordinaten $x, y, z$ in einen neuen Punkt überführt, dessen Cartesische Koordinaten die Werte:

$$x_1 = u(x, y, z), \quad y_1 = v(x, y, z), \quad z_1 = w(x, y, z)$$

haben — oder als eine rein begriffliche Operation, die darin besteht, daß man die Koordinaten $x, y, z$ eines Punktes durch andere Koordinaten desselben Punktes ersetzt. Bei dieser letzten Auffassung geben die Transformationsgleichungen, wie wir soeben sahen, den analytischen Ausdruck für den Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den neuen Koordinaten.

**51.** Wir brauchen bei dieser Gelegenheit nicht daran zu erinnern, daß eine Punkttransformation noch in einer dritten Weise gedeutet werden kann, auch nicht daran, daß grade der Umstand, daß sich eine Punkttransformation in mehreren verschiedenen Weisen deuten läßt, in der mathematischen Entwickelung unseres Jahrhunderts eine hervorragende Rolle gespielt hat. Wir werden dagegen zeigen, daß auch jede Berührungstransformation in zwei verschiedenen Weisen gedeutet werden kann, nämlich einerseits (vgl. S. 198 f. [hier S. 694 f.]) als eine Operation, die jedes Flächenelement $x, y, z, p, q$ nach einer neuen Lage bringt, andererseits als eine rein begriffliche Operation, die darin besteht, daß man die Bestimmungsstücke $x, y, z, p, q$ eines Elementes durch andere Bestimmungsstücke $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ desselben Elementes ersetzt. Bei dieser letzten Auffassung drücken die Transformationsgleichungen den analytischen Zusammenhang zwischen den alten und den neuen Elementkoordinaten aus.

Wir glauben, daß es für viele Leser nützlich sein wird, wenn wir an die geschichtliche Entwickelung anknüpfen und zunächst die angekündigten Deutungen ausführlich an zwei wichtigen Berührungstransformationen durchführen, die schon im vorigen Jahrhundert, wenn auch unter speziellen Gesichtspunkten, von Euler, Lagrange, Monge und Legendre verwertet worden sind.

**52.** Wir betrachten zuerst nach Lagrange, Monge und Legendre die Transformationsgleichungen:

$$(16)\qquad -z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = x, \quad q_1 = y,$$

die eine Berührungstransformation bestimmen, die mit Poncelets Transformation durch reziproke Polaren identisch ist.

Die Ebene des Elementes $x, y, z, p, q$ wird durch die Gleichung: [236

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0$$

bestimmt, anders geschrieben, durch:

$$Z - pX - qY - (z - px - qy) = 0.$$

Die drei Größen: $z - px - qy$, $p$, $q$ sind daher, wie Lagrange bei verschiedenen Gelegenheiten ausdrücklich hervorhebt, die Bestimmungsstücke einer Ebene, und zwar in unsrer Terminologie die Bestimmungsstücke der Ebene des Flächenelementes $x, y, z, p, q$.

Hieraus folgt nun, daß die fünf Größen:

$$(17)\qquad z - px - qy, \; p, \; q, \; x, \; y$$

als Bestimmungsstücke des Elements $x, y, z, p, q$ betrachtet werden können; denn unter den fünf Größen (17) bestimmen die drei ersten eine Ebene, und die zwei letzten einen Punkt dieser Ebene.

Die Gleichungen:

$$-z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = x, \quad q_1 = y$$

vermitteln bei dieser Auffassung den Übergang von einer Koordinatenbestimmung zu einer anderen Koordinatenbestimmung der Flächenelemente



des Raumes. Dieser Wechsel der Elementkoordinaten ist eine Berührungstransformation, weil die Gleichung:

$$-d(z - px - qy) - x\,dp - y\,dq = -(dz - p\,dx - q\,dy)$$

besteht, und somit die Bedingung der vereinigten Lage zweier Elemente in den neuen Elementkoordinaten wiederum die Form:

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = 0$$

besitzt.

Nach den Entwickelungen des ersten Paragraphen kann man aber die Berührungstransformation (16) noch in anderer Weise deuten, und zwar als eine Operation, die jedes Element mit den Koordinaten $x, y, z, p, q$ in das Element überführt, dessen Punkt die Cartesischen Koordinaten:

$$(18)\qquad z_1 = -(z - px - qy), \quad x_1 = p, \quad y_1 = q,$$

dessen Ebene die Ebenenkoordinaten:

$$(19)\qquad z_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1 = -z, \quad p_1 = x, \quad q_1 = y$$

besitzt. Die Form dieser Gleichungen (18) und (19) zeigt unmittelbar, daß alle Elemente $x, y, z, p, q$ einer Ebene in die Elemente eines Punktes $x_1, y_1, z_1$ übergehen, während sich die Elemente jedes Punktes $x, y, z$ in die Elemente einer Ebene umwandeln. Wenn aber alle Punkte in Ebenen und alle Ebenen in Punkte übergehen, und überdies vereinigte Lage zwischen Punkt und Ebene bewahrt wird, so folgt ohne weiteres, daß die beiden Räume $x, y, z$ und $x_1, y_1, z_1$ dualistisch auf einander bezogen sind.

Die beiden hier vorgetragenen Auffassungen der Legendreschen [237 Transformationsgleichungen (16) stehen, so verschieden sie auch im ersten Augenblicke erscheinen, in genauestem Zusammenhange mit einander. Um das am einfachsten nachzuweisen, eliminieren wir die Größen $p, q, p_1, q_1$ zwischen unseren Gleichungen und bemerken, daß die hervorgehende Relation:

$$-z_1 - z + x_1 x + y_1 y = 0$$

den $\infty^3$ Punkten des Raumes $x_1, y_1, z_1$ die $\infty^3$ Ebenen des Raumes $x, y, z$ zuordnet. Wir können daher die Größen $x_1, y_1, z_1$ in doppelter Weise deuten, einerseits als Cartesische Punktkoordinaten in einem neuen Raume, andererseits als Ebenenkoordinaten in dem ursprünglichen Raume.

Deuten wir $x_1, y_1, z_1$ als Punktkoordinaten in einem neuen Raume, so werden wir naturgemäß dazu geführt, die Legendresche Transformation (16) als eine geometrische Operation aufzufassen, die jedes Flächenelement des Raumes $x, y, z$ in ein Element $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ des neuen Raumes überführt. Deuten wir dagegen die Größen $x_1, y_1, z_1$ als Ebenenkoordinaten des Raumes $x, y, z$, so müssen wir die Transformation (16) als eine rein begriffliche Operation auffassen, die darin besteht, daß die ursprünglichen Elementkoordinaten $x, y, z, p, q$ durch die neuen Elementkoordinaten:

$$x_1 = p,\quad y_1 = q,\quad z_1 = -(z - px - qy),\quad p_1 = x,\quad q_1 = y$$

ersetzt werden.

**53.** Da die Form in der Mathematik eine so außerordentlich große Rolle spielt, erlaube ich mir, hervorzuheben, daß die Auffassung der Dualität als einer Elementtransformation, die die Pfaffsche Gleichung: $dz - pdx - qdy = 0$ invariant läßt, von mir herrührt. Was dagegen die Realität betrifft, so ist darüber kein Zweifel, daß schon Mathematiker des vorigen Jahrhunderts die Legendresche Transformation für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung verwertet haben, während Poncelet zuerst die wirkliche Tragweite der Transformation klar gestellt hat. Poncelet ist es nämlich, der zuerst darauf hingewiesen hat, daß diese Transformation auf alle räumlichen Gebilde angewandt werden kann, sowie, daß sie jeden Satz der Geometrie in einen neuen Satz umwandelt.

Muß man auch in Gergonnes Übergang von der involutorischen zu der allgemeinen Dualität einen gewissen Fortschritt anerkennen, so darf man doch nicht vergessen, daß Poncelet auf diesem wie auf so vielen anderen Gebieten der wirkliche Bahnbrecher ist, auch nicht, daß Gergonnes Arbeiten nicht allein viel später erschienen sind, sondern überdies mehrere kapitale Fehler enthielten.

Die Einführung der homogenen Koordinaten und der Ebenenkoordinaten durch Möbius und Plücker gab der Theorie eine neue und vollkommenere analytische Form, während andererseits die Entdeckung der Nullsysteme durch Giorgini und Möbius den Zugang zu neuen Gebieten eröffnete. Unter denjenigen, die schöne Anwendungen der Dualität auf die Geometrie gegeben haben, nehmen Chasles und Steiner, die alle beide in „Poncelets Fußstapfen“ wandelten, einen ehrenvollen Platz ein.

**54.** Wenden wir uns jetzt zu den Eulerschen Transformationsgleichungen:

$$z_1 = z - px,\quad x_1 = p,\quad y_1 = y,\quad p_1 = -x,\quad q_1 = q, \tag{20}$$

die ebenfalls eine Berührungstransformation darstellen, da die Glei- [238
chung:

$$d(z - px) + xdp - qdy = dz - pdx - qdy$$

identisch besteht.



Erteilt man den drei Größen $z - px, p, y$ bestimmte Werte, setzt man zum Beispiel:

$$z - px = a,\quad p = b,\quad y = c,$$

so bestimmen diese drei Gleichungen einen Elementverein, und zwar eine Gerade:

$$z - bx = a,\quad y = c,$$

die in einer mit der $z, x$-Ebene parallelen Ebene $y = c$ gelegen ist, die ferner mit der Horizontalebene den Winkel $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} b$ bildet, die endlich die $z, y$-Ebene in einem Punkte trifft, dessen $z$-Koordinate gleich $a$ ist. Wenn wir daher den Größen $z - px, p, y$ bestimmte Zahlenwerte erteilen, so greifen wir gleichzeitig unter allen mit der $z, x$-Ebene parallelen Geraden eine bestimmte heraus, und wir können dementsprechend $z - px, p$ und $y$ als Linienkoordinaten auffassen, die zur Bestimmung der Geraden eines speziellen linearen Linienkomplexes dienen.

Die Eulersche[1]) Transformation (20) läßt sich daher, wie wir sogleich näher ausführen, als der analytische Ausdruck einer begrifflichen Operation auffassen, die darauf hinauskommt, daß die räumlichen Gebilde nicht als Punktörter, sondern als Brennflächen, respektive Brennkurven eines Strahlensystems aufgefaßt werden. Liegt zum Beispiel eine Fläche vor, deren Gleichung in Cartesischen Punktkoordinaten die Form $z - \Omega(x, y) = 0$ besitzt, so hat diese Fläche $\infty^2$ Tangenten, die mit der $z, x$-Ebene parallel sind. Für jede einzelne unter diesen Tangenten haben die drei Linienkoordinaten: $z_1 = z - px$, $x_1 = p$, $y_1 = y$ bestimmte Zahlenwerte, die aus den Gleichungen:

$$z_1 = \Omega(x, y) - x\Omega_x,\quad x_1 = \Omega_x,\quad y_1 = y$$

berechnet werden. Daher findet man durch Elimination von $x$ und $y$ zwischen den drei letzten Gleichungen eine Relation $z_1 - W(x_1, y_1) = 0$, die alle mit der $z, x$-Ebene parallelen Tangenten unserer Fläche bestimmt. Die hier durchgeführten Rechnungen sind eben diejenigen, die man ausführen muß, wenn man die Eulersche Transformation auf die Fläche:

$$z - \Omega(x, y) = 0$$

anwenden will.

1) In seinen berühmten Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Journal de d'École polyt., Heft 17 u. 18 (1815 u. 20)) wandte Ampère unter anderm die Eulersche Transformation auf Gleichungen von der Form:

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0$$

an. Eulers wie Ampères Untersuchungen sind aber in rein analytischer Form dargestellt; von geometrischer oder begrifflicher Deutung findet man in ihren Arbeiten, soweit mir bekannt, keine Spur.

Man kann aber die Eulersche Transformation auch in anderer [239 Weise [vgl. S. 198f. (hier S. 694f.)] auffassen, nämlich als eine geometrische Operation, die jedes Flächenelement $x, y, z, p, q$ in eine neue Lage bringt. Bei dieser Auffassung geht jeder Punkt: $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ in einen Elementverein über, dessen Punktort man dadurch findet, daß man zwischen den Transformationsgleichungen (20) die Größen $p, q, p_1, q_1$ eliminiert, und sodann in die gefundenen Gleichungen:

$$z_1 - z + x_1 x = 0, \quad y_1 - y = 0$$

die Werte: $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ einführt:

$$z_1 - \gamma + \alpha x_1 = 0, \quad y_1 - \beta = 0.$$

Es geht also jeder Punkt $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ in die Gerade:

$$z_1 + \alpha x_1 - \gamma = 0, \quad y_1 = \beta$$

über; es geht ferner jede Fläche in eine Fläche (oder Kurve) über, die man findet, indem man die Bildlinien aller Punkte der gegebenen Fläche und die im Endlichen gelegene Brennfigur des hervorgehenden Strahlensystems aufsucht.

**55.** Die hier vorgetragenen Auffassungen der Eulerschen Transformation, die alle beide von mir herrühren[1]), haben insofern eine äußere Ähnlichkeit, als in beiden Fällen die Begriffe Strahlensystem und Brennfläche eine wichtige Rolle spielen. Nichtsdestoweniger sind beide Auffassungen verschieden.

Wünschen wir die Brücke zu finden, die den Zusammenhang zwischen beiden Auffassungen der Eulerschen Transformation herstellt, so knüpfen wir am besten an die Betrachtung der beiden Gleichungen:

$$z_1 - z + x_1 x = 0, \quad y_1 - y = 0$$

an, die in knappster Form die Eulersche Transformation definieren. Diese Gleichungen ordnen jedem Punkte: $x_1 = \alpha_1$, $y_1 = \beta_1$, $z_1 = \gamma_1$ eine Gerade: $\gamma_1 - z + \alpha_1 x = 0$, $\beta_1 - y = 0$ des Raumes $x, y, z$ zu. Man kann daher die Größen $x_1, y_1, z_1$ in zwei Weisen auffassen, entweder als Cartesische Punktkoordinaten in einem neuen Raume $x_1, y_1, z_1$, oder als Linienkoordinaten im Raume $x, y, z$, die zur Bestimmung derjenigen $\infty^3$ Geraden dienen, die mit der $z, x$-Ebene parallel sind.

Faßt man $x_1, y_1, z_1$ als Cartesische Punktkoordinaten auf, so wird man dazu geführt, die Eulersche Transformation als eine geometrische

1) Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1870, S. 506; Math. Ann. Bd. V, S. 148ff. [d. Ausg. Bd. I, Abh. IX, S. 93 und hier Abh. I, S. 4ff.].



Operation aufzufassen, die alle räumlichen Gebilde in neue Gebilde überführt. Deutet man dagegen $x_1, y_1, z_1$ als Linienkoordinaten aller mit der $z, x$-Ebene parallelen Geraden, so muß man die Eulersche Transformation als eine begriffliche Operation auffassen, die darin [240 besteht, daß wir von der Cartesischen Darstellung eines räumlichen Gebildes zu einer neuen Darstellung desselben Gebildes übergehen.

**56.** Es liege nun eine beliebige Berührungstransformation:

$$(1) \qquad x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

vor, die durch eine, zwei oder drei Gleichungen von der Form:

$$\Omega_\varkappa(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

definiert wird. Man kann immer eine derartige Transformation in zwei wesentlich verschiedenen Weisen auffassen und zwar entweder als eine geometrische Operation, die alle Elemente $x, y, z, p, q$ in andere Elemente $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ überführt – oder als eine rein begriffliche Operation, die darauf hinauskommt, daß die ursprünglichen Elementkoordinaten $x, y, z, p, q$ durch neue Elementkoordinaten, nämlich die Größen $X, Y, Z, P, Q$ ersetzt werden.

Das Gleichungssystem $\Omega_\varkappa = 0$ ordnet jedem Punkte: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ ein Gebilde des Raumes $x, y, z$ zu, nämlich das Gebilde:

$$(21) \qquad \Omega_\varkappa(x, y, z, a_1, b_1, c_1) = 0.$$

Man kann daher die Größen $x_1, y_1, z_1$ in zwei verschiedenen Weisen deuten, nämlich entweder als Cartesische Punktkoordinaten des neuen Raumes $x_1, y_1, z_1$, oder als Bestimmungsstücke der $\infty^3$ Gebilde (21) des Raumes $x, y, z$.

Deutet man $x_1, y_1, z_1$ als Cartesische Punktkoordinaten in einem neuen Raume, so wird man dazu geführt, die Berührungstransformation als eine geometrische Operation aufzufassen, die jedes Element $x, y, z, p, q$ in ein neues Element $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ überführt, die ferner jeden Elementverein des Raumes $x, y, z$ in einen Elementverein des Raumes $x_1, y_1, z_1$ umwandelt.

Deutet man dagegen $x_1, y_1, z_1$ als Bestimmungsstücke der $\infty^3$ Gebilde:

$$(21) \qquad \Omega_\varkappa(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

des ursprünglichen Raumes $x, y, z$, so muß man die Berührungstransformation (1) als eine rein begriffliche Operation deuten, die darauf hinauskommt, daß man die Flächen und Kurven des Raumes $x, y, z$ nicht als Punktörter, sondern als Umhüllungsfiguren von Gebilden auffaßt, die der Schar (21) angehören.

Während die Raumfiguren bei der ersten Auffassung von einer Berührungstransformation in neue Gebilde übergeführt werden, behalten sie bei der letzten Auffassung ihre Lage im Raume, nur ihre analytische Darstellung erhält eine neue Form.

In den folgenden Entwickelungen werden wir bald die eine, bald die andere Deutung der Berührungstransformationen zu Grunde legen. Beide Auffassungen haben ihren Wert; man muß eben bei jeder Gelegenheit die zweckmäßigste Deutung wählen.

## Kapitel II. [241

## Einführung in die Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen.

**1.** Wiederholt haben wir darauf hingewiesen, daß einige spezielle Berührungstransformationen schon von Mathematikern des vorigen Jahrhunderts verwertet worden sind. In diesen älteren Arbeiten war jedoch nicht die Transformation an sich, sondern die Umformung und Erledigung bestimmter Probleme der eigentliche Untersuchungsgegenstand. Es war nie die Rede von einer Theorie der betreffenden speziellen Transformation, noch weniger von einer allgemeinen Transformationstheorie.

Legendre benutzte die Lagrangeschen Gleichungen:

$$z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = -y$$

zur Umformung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die alle Minimalflächen definiert. Es ist wohl nicht allein möglich, sondern sogar wahrscheinlich, daß es ihm bekannt war, daß diese Umformung darauf beruht, daß die Minimalflächen nicht als Punktörter, sondern als Umhüllungsgebilde eines Ebenensystems betrachtet werden. Diese Auffassung tritt aber nicht explizite, weder bei ihm, noch bei seinen Zeitgenossen hervor. Es entging, wie es scheint, zunächst der Aufmerksamkeit der Mathematiker, daß die Legendresche Transformation auf **alle** partiellen Differentialgleichungen, auf **alle geometrischen Gebilde**, ja auf **alle Sätze der Geometrie** angewandt werden kann. Die große Tragweite und hervorragende Wichtigkeit dieser Transformation wurde jedenfalls erst später in die richtige Beleuchtung gesetzt.

Im Anfange unseres Jahrhunderts benutzte Ampère sowohl die Eulersche Transformation:

$$z_1 = z - px, \quad x_1 = p, \quad p_1 = -x, \quad y_1 = y, \quad q_1 = q,$$



wie wesentlich allgemeinere Transformationen, um gewisse partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf einfachere Formen zu bringen. Andererseits verwerteten Lagrange, Poisson, Jacobi und Bour in ihren Untersuchungen über Störungstheorie und über die sogenannten kanonischen Systeme:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial \Phi(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \Phi(x_1, \ldots, p_n)}{\partial x_k}$$

gewisse Transformationen, die allerdings keine Berührungstransformationen darstellen, die aber durch Hinzufügung einer gewissen Gleichung zu Berührungstransformationen kompletiert werden können. In allen diesen berühmten Arbeiten war aber [242 nicht die Transformation an sich, sondern die Transformation der betreffenden **Differentialgleichungen** der wirkliche Untersuchungsgegenstand.

In Poncelets klassischen Arbeiten über die Theorie der reziproken Polaren wurde zum ersten Male eine Berührungstransformation eingehend untersucht, allerdings in geometrischer Einkleidung. Poncelet faßte seine Transformation der reziproken Polaren als ein allgemeines Prinzip auf, das jeden geometrischen Satz in einen neuen Satz überführt.

**2.** Ich glaube behaupten zu dürfen, daß ich für die allgemeine Theorie der Berührungstransformationen wesentlich dasselbe geleistet habe, wie Poncelet für die spezielle Legendresche Transformation. Bei meinen Vorgängern findet man ja nicht einmal eine wirkliche Definition des Begriffes Berührungstransformation, noch weniger allgemeine Sätze über Berührungstransformationen. Durch meine Arbeiten aus den Jahren 1870 und 1871 wurde zunächst eine geometrische Theorie der Berührungstransformationen geschaffen und nach vielen Richtungen für die Geometrie verwertet. Fast gleichzeitig begründete ich eine allgemeine Invariantentheorie der Berührungstransformationen, sowie eine allgemeine Theorie aller kontinuierlichen Gruppen von Berührungstransformationen. Die Tragweite und hervorragende Bedeutung dieser Theorien für die Geometrie und besonders für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen versuchte ich durch viele Anwendungen in die richtige Beleuchtung zu setzen.

Wenn ich aber besonderes Gewicht darauf lege, daß bei mir die Berührungstransformationen an sich zunächst den Untersuchungsgegenstand bilden, so glaube ich doch, und zwar nicht allein aus pädagogischen Gründen, daß es zweckmäßig sein wird, daß ich mich in diesem

Werke, soweit möglich, an die geschichtliche Entwickelung anschließe. Ich werde daher in den ersten Paragraphen dieses Kapitels unter anderm einige Transformationstheorien entwickeln, die in spezieller Form und nicht allgemeingültiger Fassung bei meinen Vorgängern auftreten, während sie in meinen älteren Arbeiten eine präzise Fassung und eine allgemeingültige Form erhalten haben. Die Theorien der letzten Paragraphen rühren in ihrer ganzen Ausdehnung von mir her.

## § 1. Verhalten der Ableitungen zweiter Ordnung bei einer Berührungstransformation.

**3.** Bei einer Punkttransformation:

$$x_1 = A(x, y, z), \quad y_1 = B(x, y, z), \quad z_1 = C(x, y, z)$$

gehen Flächen, die mit einander eine Berührung $m$-ter Ordnung haben, in Flächen über, die wiederum eine Berührung $m$-ter Ordnung haben. [243 In der Sprache der Analysis kommt dies darauf hinaus, daß sich die Ableitungen $m$-ter Ordnung von $z_1$ nach $x_1$ und $y_1$:

$$\frac{\partial^m z_1}{\partial x_1^m}, \quad \frac{\partial^m z_1}{\partial x_1^{m-1} \partial y_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^m z_1}{\partial y_1^m}$$

als Funktionen von $x, y, z$ und den Ableitungen erster, zweiter, ..., $m$-ter Ordnung von $z$ nach $x$ und $y$ ausdrücken lassen. Eine Punkttransformation führt daher jede partielle Differentialgleichung $m$-ter Ordnung in eine partielle Differentialgleichung von derselben Ordnung über.

Für Berührungstransformationen, die keine Punkttransformationen sind, gelten ganz analoge Sätze; allerdings darf nicht vergessen werden, daß jede derartige Transformation gewisse Flächen in Kurven, oder gar in Punkte umwandelt. Von Flächen, die eine solche Ausnahmestellung einnehmen, können wir aber vorläufig absehen; wir werden später erkennen, daß sich die hiermit ausgeschlossenen Flächen von vornherein dadurch definieren lassen, daß sie eine gewisse partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung befriedigen.

**4.** Führen wir eine Berührungstransformation:

$$(1) \quad x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad \ldots, \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

auf eine Fläche $z = f(x, y)$ von allgemeiner Lage aus, so ist der transformierte Elementverein wiederum eine Fläche, deren Gleichung überdies auf die Form: $z_1 - f_1(x_1, y_1) = 0$ gebracht werden kann.

Gehen wir von einem beliebig gewählten Elemente $x, y, z, p, q$ der gegebenen Fläche $z = f$ zu einem beliebigen benachbarten Elemente derselben Fläche über, so erfüllen die entsprechenden Inkremente $dx$, $dy$, $dz$, $dp$, $dq$ der Elementkoordinaten die bekannten Gleichungen:



$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

in denen $r, s$ und $t$ wie gewöhnlich die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

bezeichnen. Sind $r_1, s_1, t_1$ die Ableitungen zweiter Ordnung von $z_1$ nach $x_1$ und $y_1$, so gelten für die transformierte Fläche $z_1 = f_1(x_1, y_1)$ die analogen Gleichungen:

$$dp_1 - r_1 dx_1 - s_1 dy_1 = 0, \quad dq_1 - s_1 dx_1 - t_1 dy_1 = 0,$$

die durch Substitution der Werte $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $p_1 = P$, $q_1 = Q$ die Form:

$$(2) \qquad dP - r_1 dX - s_1 dY = 0, \quad dQ - s_1 dX - t_1 dY = 0$$

annehmen.

Hier sind nun $X, Y, P$ und $Q$ bekannte Funktionen von $x, y, z$, [244 $p, q$; da aber $z \equiv f(x, y)$ und infolgedessen $p \equiv f_x$ und $q \equiv f_y$ Funktionen von $x$ und $y$ darstellen, so lassen sich auch $X, Y, P$ und $Q$ als Funktionen von $x$ und $y$ auffassen. Bezeichnen wir daher für einen Augenblick eine beliebige unter diesen vier Funktionen mit $U$, so können wir:

$$dU = \frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy$$

und:

$$\frac{dU}{dx} = U_x + U_z p + U_p r + U_q s,$$

$$\frac{dU}{dy} = U_y + U_z q + U_p s + U_q t$$

setzen.

In dieser Weise erhält die erste unter den Gleichungen (2) die Form:

$$\left(\frac{dP}{dx} - r_1 \frac{dX}{dx} - s_1 \frac{dY}{dx}\right) dx + \left(\frac{dP}{dy} - r_1 \frac{dX}{dy} - s_1 \frac{dY}{dy}\right) dy = 0,$$

und da sich aus der Gleichung $z = f(x, y)$ der gegebenen Fläche keine Relation zwischen den Differentialen $dx$ und $dy$ ableiten läßt, so zerlegt sich die letzte Gleichung in die beiden:

$$\frac{dP}{dx} - r_1 \frac{dX}{dx} - s_1 \frac{dY}{dx} = 0,$$

$$\frac{dP}{dy} - r_1 \frac{dX}{dy} - s_1 \frac{dY}{dy} = 0,$$

aus denen durch Auflösung für $r_1$ und $s_1$ die Werte:

$$
(3)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{\dfrac{dP}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dP}{dy}\dfrac{dY}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}} = \dfrac{R}{N}, \\[2ex] s_1 = \dfrac{\dfrac{dP}{dy}\dfrac{dX}{dx} - \dfrac{dP}{dx}\dfrac{dX}{dy}}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}} = \dfrac{S}{N} \end{cases}
$$

hervorgehen.

Behandeln wir die letzte Gleichung (2) in ganz entsprechender Weise, so finden wir die analogen Formeln:

$$
(4)\qquad \begin{cases} s_1 = \dfrac{\dfrac{dQ}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dQ}{dy}\dfrac{dY}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}} = \dfrac{\Sigma}{N}, \\[2ex] t_1 = \dfrac{\dfrac{dQ}{dy}\dfrac{dX}{dx} - \dfrac{dQ}{dx}\dfrac{dX}{dy}}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}} = \dfrac{T}{N}. \end{cases}
$$

**5.** Die hiermit gefundenen Ausdrücke der Differentialquotienten [245
$r_1$, $s_1$ und $t_1$ enthalten die Ableitungen nach $x$ und $y$ der Größen $X$, $Y$, $P$ und $Q$, die als Funktionen von $x, y, z, p, q$ gegeben sind und somit die unabhängigen Veränderlichen $x$ und $y$ sowohl explizite wie implizite enthalten. Die Zähler und Nenner, die sich als Funktionaldeterminanten zweier Größen $U$ und $V$ nach $x$ und $y$ darbieten, erhalten durch Ausrechnung die folgende beachtenswerte Form:

$$
(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dU}{dx}\dfrac{dV}{dy} - \dfrac{dU}{dy}\dfrac{dV}{dx} = (U_x + U_z p + U_p r + U_q s)(V_y + V_z q + V_p s + V_q t) - \\ \qquad - (U_y + U_z q + U_p s + U_q t)(V_x + V_z p + V_p r + V_q s) = \\ \qquad = (U_p V_q - U_q V_p)(rt - s^2) + \\ \qquad + [U_p(V_y + V_z q) - (U_y + U_z q) V_p] r + \\ \qquad + [(U_x + U_z p) V_p + U_q (V_y + V_z q) - \\ \qquad\qquad - (U_y + U_z q) V_q - U_p (V_x + V_z p)] s + \\ \qquad + [(U_x + U_z p) V_q - U_q (V_x + V_z p)] t + \\ \qquad + [(U_x + U_z p)(V_y + V_z q) - (U_y + U_z q)(V_x + V_z p)]. \end{cases}
$$

Es ergibt sich in dieser Weise, daß $r_1$, $s_1$ und $t_1$ rationale Funktionen von $r$, $s$ und $t$ sind; die drei Zähler und der gemeinsame Nenner sind sämtlich linear in den vier Größen $rt - s^2$, $r$, $s$ und $t$.



Die oben gefundenen Ausdrücke für $r_1$, $s_1$ und $t_1$ können daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$
(6)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{A_1 r + B_1 s + C_1 t + D_1(rt - s^2) + E_1}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E} = \dfrac{R}{N}, \\[1ex] s_1 = \dfrac{A_2 r + B_2 s + C_2 t + D_2(rt - s^2) + E_2}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E} = \dfrac{S}{N} = \dfrac{\Sigma}{N}, \\[1ex] t_1 = \dfrac{A_3 r + B_3 s + C_3 t + D_3(rt - s^2) + E_3}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E} = \dfrac{T}{N}. \end{cases}
$$

Die Werte (3) und (4) der Größen $r_1$, $s_1$ und $t_1$ zeigen ferner, daß:

$$
r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{RT - S\Sigma}{N^2} = \frac{\dfrac{dP}{dx}\dfrac{dQ}{dy} - \dfrac{dP}{dy}\dfrac{dQ}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}}
$$

ist. Die Größe $r_1 t_1 - s_1^2$ besitzt daher die Form:

$$
r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{A_4 r + B_4 s + C_4 t + D_4(rt - s^2) + E_4}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E} = \frac{\Omega}{N},
$$

wo der Zähler $\Omega$ wiederum in den Größen $r$, $t$, $s$ und $rt - s^2$ linear ist.

Wir fassen unsere Resultate in die Formeln:

$$
(6')\qquad \frac{r_1}{R} = \frac{s_1}{S} = \frac{t_1}{T} = \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{\Omega} = \frac{1}{N}
$$

zusammen, in denen $R$, $S$, $T$, $\Omega$ und $N$ Funktionen von $x, y, z, p, q$, [246
$r, s, t$ bezeichnen, die in den vier Größen $r, s, t$ und $rt - s^2$ linear sind.

**6.** Aus dem Umstande, daß sich $r_1$, $s_1$ und $t_1$ als Funktionen von $x, y, z, p, q, r, s, t$ ausdrücken, folgt unmittelbar, daß Flächen allgemeiner Lage, die einander oskulieren, in Flächen übergehen, die einander ebenfalls oskulieren. Es ergibt sich ferner, daß alle Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung im allgemeinen in **Flächen** übergehen, die dann ebenfalls eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllen.[1])

Wünschen wir eine Berührungstransformation auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung auszuführen, so denken wir uns am besten, daß die Transformationsgleichungen:

$$
x_1 = X(x, y, z, p, q), \ldots, q_1 = Q(x, y, z, p, q)
$$

nach denjenigen Veränderlichen aufgelöst vorliegen, die wir eliminieren wollen. Ist dann:

$$
\Phi(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0
$$

1) Die wichtigen Bemerkungen des Textes, die sich ohne weiteres auf partielle Differentialgleichungen $m$-ter Ordnung in $n$ Veränderlichen ausdehnen, finden sich bei meinen Vorgängern nicht, die ja den allgemeinen Begriff der Berührungstransformationen noch nicht besaßen.

die vorgelegte partielle Differentialgleichung, so ist:

$$\Phi\left(X, Y, Z, P, Q, \frac{R}{N}, \frac{S}{N}, \frac{T}{N}\right) = 0$$

die transformierte Differentialgleichung.

Liegt insbesondere eine sogenannte Monge-Ampèresche Gleichung vor, das heißt, eine Gleichung, die in $r_1$, $s_1$, $t_1$ und $r_1 t_1 - s_1^2$ linear ist:

$$Hr_1 + 2Ks_1 + Lt_1 + M(r_1 t_1 - s_1^2) + U = 0,$$

so leuchtet unmittelbar ein, daß auch die transformierte Gleichung:

$$HR + 2KS + LT + M\Omega + UN = 0$$

in $r, s, t$ und $rt - s^2$ linear ist.

**Satz 18.** Eine Berührungstransformation führt immer jede **Monge-Ampère**sche Gleichung in eine ebensolche Gleichung über.[1])

**7.** Wir wenden uns wiederum zu der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen.

Die früher (S. 245 [hier S. 744 f.]) gefundenen Formeln: [247

$$(6') \qquad r_1 = \frac{R}{N}, \quad s_1 = \frac{S}{N} = \frac{\Sigma}{N}, \quad t_1 = \frac{T}{N}, \quad r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{\Omega}{N}$$

gelten nach den bei ihrer Ableitung gemachten Voraussetzungen für Flächen $z - f(x, y) = 0$, die sich in Flächen transformieren, deren Gleichung die allgemeine Form: $z_1 - f_1(x_1, y_1) = 0$ besitzt. Da nun die Formeln (6′) illusorisch werden, sobald der Nenner:

$$(7) \qquad N = \frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}$$

verschwindet, so liegt es nahe, zu vermuten, daß die Größe $N$, die von $x, y, z, p, q, r, s, t$ abhängt, nur für solche Flächen $z - f(x, y) = 0$ verschwindet, die entweder in Kurven (beziehungsweise Punkte) des Raumes $x, y, z$ übergehen, oder in Flächen, deren Gleichung die Form $\psi(x_1, y_1) = 0$ besitzt.

Wirklich zeigt auch die Formel (7), daß $N$ nur dann verschwindet, wenn $X$ und $Y$ durch die Substitution:

$$z = f(x, y), \quad p = f_x, \quad q = f_y$$

1) Der allgemeine Satz des Textes rührt von mir her; Verh. der Ges. d. W. zu Christiania, 1871, S. 85; Math. Ann. Bd. V, S. 163 [d. Ausg. Bd. I, Abh. XI, S. 127; hier Abh. I, S. 20f.]. Spezielle Fälle dieses Satzes finden sich schon bei Ampère (vgl. das Zitat auf S. 238 [hier S. 737]) und Imschenetsky (Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre . . . traduit du russe par J. Hoüel, Greifswald 1872).



in Funktionen von $x$ und $y$ übergehen, die durch eine Relation:

$$\omega(X, Y) = 0$$

verknüpft sind. Jede Integralfläche der partiellen Differentialgleichung $N = 0$ transformiert sich also in einen Verein, dessen Elemente $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ eine Relation von der Form $\omega(x_1, y_1) = 0$ erfüllen; der transformierte Verein ist daher entweder eine Zylinderfläche $\omega(x_1, y_1) = 0$, oder eine Kurve, oder ein Punkt, wie oben angekündigt wurde.

**8.** Die Gleichung $N = 0$ ist im allgemeinen eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, sie kann aber von $r$, $s$ und $t$ frei sein und ist dann eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung; es ist ferner denkbar, daß $N$ auch von $p$ und $q$ frei ist, ja es kann vorkommen, daß sich $N$ auf eine von Null verschiedene Konstante reduziert. Wir werden uns mit diesen verschiedenen Fällen beschäftigen und werden dabei insbesondere nachweisen, daß der Nenner $N$ nur dann von $r$, $s$ und $t$ frei ist, wenn die vorliegende Berührungstransformation eine Punkttransformation ist.

Die früher aufgestellten Formeln (5) und (7) zeigen, daß $N$ auf die Form:

$$(8)\left\{\begin{aligned} N \equiv\ & (X_p Y_q - X_q Y_p)(rt - s^2) + [X_p(Y_y + Y_z q) - (X_y + X_z q) Y_p] r \\ & + [(X_x + X_z p) Y_p + X_q(Y_y + Y_z q) - (X_y + X_z q) Y_q - X_p(Y_x + Y_z p)] s \\ & + [(X_x + X_z p) Y_q - X_q(Y_x + Y_z p)] t + \\ & + [(X_x + X_z p)(Y_y + Y_z q) - (X_y + X_z q)(Y_x + Y_z p)] \end{aligned}\right.$$

gebracht werden kann. Dieser Ausdruck ist aber nur dann von $r, s, t$ [248 frei, wenn $X$ und $Y$ die Bedingungsgleichungen:

$$X_p Y_q - X_q Y_p = 0,$$
$$(X_x + X_z p) Y_p + X_q(Y_y + Y_z q) - (X_y + X_z q) Y_q - X_p(Y_x + Y_z p) = 0,$$
$$X_p(Y_y + Y_z q) - (X_y + X_z q) Y_p = 0,$$
$$(X_x + X_z p) Y_q - X_q(Y_x + Y_z p) = 0$$

erfüllen. Bestehen diese Gleichungen, so ist $Y$ eine Funktion:

$$Y = \Omega(X, x, y, z)$$

von $X, x, y, z$ und befriedigt überdies die partiellen Differentialgleichungen:

$$-X_p(\Omega_x + \Omega_z p) + X_q(\Omega_y + \Omega_z q) = 0,$$
$$X_p(\Omega_y + \Omega_z q) = 0, \quad X_q(\Omega_x + \Omega_z p) = 0.$$

Hierzu ist aber erforderlich, daß entweder die Gleichungen:

$$\Omega_x + \Omega_z p = 0, \quad \Omega_y + \Omega_z q = 0,$$

oder die Gleichungen:

$$X_p = 0, \quad X_q = 0$$

stattfinden.

Bestehen die Gleichungen:

$$\Omega_x + \Omega_z p = 0, \quad \Omega_y + \Omega_z q = 0,$$

so muß $\Omega_z$ gleich Null sein; denn sonst bestimmten die Gleichungen:

$$p = -\frac{\Omega_x}{\Omega_z}, \quad q = -\frac{\Omega_y}{\Omega_z}$$

die Größen $p$ und $q$ als Funktionen von $X, x, y, z$, und dann käme durch Elimination von $X$ eine Relation zwischen $x, y, z, p, q$, was an sich unmöglich ist. Wäre andererseits $\Omega_z$ gleich Null, so verschwänden auch $\Omega_x$ und $\Omega_y$, und es bestände eine Relation $Y = \Omega(X)$, was ebenfalls ausgeschlossen ist.

Es müssen daher die beiden Ableitungen $X_p$ und $X_q$ verschwinden, und $X$ dementsprechend eine Funktion von $x, y, z$ sein. Dann ist aber auch $Y = \Omega(X, x, y, z)$ eine Funktion von $x, y, z$, und, da $X$ und $Y$ von einander unabhängig sind, so zeigen die beiden Relationen:

$$0 = [ZX] \equiv Z_p(X_x + X_z p) + Z_q(X_y + X_z q),$$
$$0 = [ZY] \equiv Z_p(Y_x + Y_z p) + Z_q(Y_y + Y_z q),$$

daß auch $Z_p$ und $Z_q$ gleich Null sein müssen; denn die Determinante

$$(7') \quad N \equiv \begin{vmatrix} X_x + X_z p & X_y + X_z q \\ Y_x + Y_z p & Y_y + Y_z q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} X_z & X_y \\ Y_z & Y_y \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} X_x & X_z \\ Y_x & Y_z \end{vmatrix}$$

kann nicht identisch verschwinden, weil $X$ und $Y$ unabhängige Funk- [249
tionen von $x, y, z$ sein müssen.

Der Nenner $N$ ist daher dann und nur dann von $r, s, t$ frei, wenn die vorliegende Berührungstransformation eine **Punkt**transformation ist.

**9.** Ist die vorgelegte Berührungstransformation eine Punkttransformation, so ist die Gleichung $N = 0$, wie die Formel (7′) zeigt, im allgemeinen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, und zwar in Lagranges Sinne des Worts eine lineare partielle Differentialgleichung. Die Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichung gehen bei der Transformation in Zylinderflächen $\omega(x_1, y_1) = 0$ über.

Es ist aber denkbar, daß $N$ nicht allein von $r, s, t$, sondern zugleich von $p$ und $q$ frei ist. Das tritt ein, wenn die beiden Funktionaldeterminanten:

$$\begin{vmatrix} X_z & X_y \\ Y_z & Y_y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_x & X_z \\ Y_x & Y_z \end{vmatrix}$$



verschwinden, das heißt, wenn zwei Relationen von der Form:

$$\Phi(X, Y, x) = 0, \quad \Psi(X, Y, y) = 0$$

bestehen, wenn also $X$ und $Y$ die Form:

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y)$$

haben. Die Transformation besitzt dann die Form:

$$x_1 = X(x, y), \quad y_1 = Y(x, y), \quad z_1 = Z(x, y, z),$$

und es sind die Zylinderflächen $\alpha(x, y) = 0$, die sich in die Zylinderflächen $\beta(x_1, y_1) = 0$ transformieren.

Der Vollständigkeit wegen bemerken wir noch, daß eine Punkttransformation alle Raumkurven in Raumkurven überführt.

**10.** Wir nehmen jetzt an, daß die vorliegende Berührungstransformation keine Punkttransformation ist, und daß dementsprechend die Gleichung $N = 0$ eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$0 = N \equiv Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E$$

darstellt. Die Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichung gehen, wissen wir, entweder in Kurven (beziehungsweise Punkte) des Raumes $x, y, z$ über, oder in Zylinderflächen, deren Gleichung die Form $\omega(x_1, y_1) = 0$ besitzt.

Es ist dabei nicht schwer, zu erkennen, daß die Integralflächen der Gleichung $N = 0$ im allgemeinen in Kurven, nur ausnahmeweise in Zylinderflächen $\omega(x_1, y_1) = 0$ übergehen können. Dies beruht darauf, daß die Flächenelemente aller Zylinder $\omega(x_1, y_1) = 0$ eine geometrische Bedingung erfüllen, während die Elemente aller Kurven des Raumes $x, y, z$ keiner Bedingung unterworfen sind. Hieraus folgt nämlich einerseits, daß die Integralflächen der Gleichung $N = 0$ nicht sämtlich eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung $\Phi(x, y, z, p, q) = 0$ erfüllen[1], andererseits, daß unter den Integralflächen der Gleichung $N = 0$ [250
nur diejenigen in Zylinderflächen $\omega(x_1, y_1) = 0$ übergehen können, die überdies eine gewisse partielle Differentialgleichung erster Ordnung $\Psi(x, y, z, p, q) = 0$ erfüllen.

**11.** Ehe wir unsere Ergebnisse in einem Theoreme zusammenfassen, wollen wir jedenfalls einige unter unseren Resultaten durch neue Betrachtungen ableiten, die ein selbständiges Interesse darbieten.

1) Bei der Redaktion des Textes wollen wir nicht als bekannt voraussetzen, daß es undenkbar ist, daß alle Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung eine gewisse partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen.

Wir wollen annehmen, daß $X$, $Y$ und $Z$ drei unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$ darstellen, die paarweise in Involution liegen, und daß dementsprechend die Gleichungen: $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$ zusammen mit zwei hinzutretenden Gleichungen:

$$p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

eine Berührungstransformation bestimmen. Schon im vorigen Kapitel (S. 211 f. [hier S. 708]) lernten wir die Größen $P$ und $Q$ als Funktionen von $x, y, z, p, q$ zu berechnen. Wir werden jetzt diese Berechnung in anderer Weise durchführen und erhalten dabei einige beachtenswerte Resultate.

Jede Fläche $z = f(x, y)$ des Raumes $x, y, z$ erfüllt die Pfaffsche Gleichung:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0;$$

dementsprechend befriedigt der transformierte Elementverein des Raumes $x_1, y_1, z_1$ die Gleichung:

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = 0,$$

die bei der Substitution $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$ die Form:

$$dZ - p_1 dX - q_1 dY = 0$$

annimmt. Hier können $X$, $Y$ und $Z$, die gegebene Funktionen von $x, y, z, p, q$ sind, als Funktionen von $x$ und $y$ aufgefaßt werden. Alsdann erhält die letzte Gleichung die Form:

$$\left(\frac{dZ}{dx} - p_1 \frac{dX}{dx} - q_1 \frac{dY}{dx}\right) dx + \left(\frac{dZ}{dy} - p_1 \frac{dX}{dy} - q_1 \frac{dY}{dy}\right) = 0$$

und zerlegt sich dementsprechend in die beiden Gleichungen:

$$\frac{dZ}{dx} - p_1 \frac{dX}{dx} - q_1 \frac{dY}{dx} = 0, \quad \frac{dZ}{dy} - p_1 \frac{dX}{dy} - q_1 \frac{dY}{dy} = 0,$$

aus denen für $p_1$ und $q_1$ die Werte: [251

$$p_1 = \frac{\frac{dZ}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dZ}{dy}\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}} = P, \quad q_1 = \frac{\frac{dX}{dx}\frac{dZ}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dZ}{dx}}{\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}} = Q$$

hervorgehen.

In den hiermit gefundenen Ausdrücken für $P$ und $Q$ sind die Zähler und der gemeinsame Nenner $N$ Funktionaldeterminanten, die bei Ausführung (vgl. S. 245 [hier S. 744]) in Funktionen von $x, y, z, p, q, r, s, t$ übergehen, die hinsichtlich $r, s, t$ und $rt - s^2$ linear sind. Nehmen wir nun insbesondere an, daß unsere Berührungstransformation keine Punkttransformation ist, so wissen wir, daß in dem Nenner:

$$N = Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E$$



die Koeffizienten $A, B, C$ und $D$ nicht sämtlich gleich Null sind. Und da $P$ und $Q$ nur von $x, y, z, p, q$ abhängen, so erkennen wir, daß auch die beiden Zähler jedenfalls einige unter den Ableitungen zweiter Ordnung $r, s, t$ wirklich enthalten.

Hieraus schließen wir, daß eine jede unter den drei Gleichungen:

$$\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx} = 0, \quad \frac{dZ}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dZ}{dy}\frac{dY}{dx} = 0,$$

$$\frac{dZ}{dx}\frac{dX}{dy} - \frac{dZ}{dy}\frac{dX}{dx} = 0$$

eine Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt. Wir sehen aber gleichzeitig, daß diese drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht wesentlich verschieden sind, weil sich die linksstehenden Ausdrücke nur um Faktoren unterscheiden, die von $r, s, t$ frei sind. Sehen wir von diesen, gewissermaßen unwesentlichen, Faktoren ab, so sind unsre drei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen identisch; ihre gemeinsamen Integralflächen lassen sich dadurch charakterisieren, daß sie von unsrer Berührungstransformation in die Kurven (beziehungsweise Punkte) des Raumes $x_1, y_1, z_1$ übergeführt werden.

**12.** Zu jeder Berührungstransformation:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \ldots, q_1 = Q(x, y, z, p, q),$$

die keine Punkttransformation ist, steht somit eine gewisse Monge-Ampèresche Differentialgleichung zweiter Ordnung in den Veränderlichen $x, y, z$ in einer eigentümlichen Beziehung.

Sind die $\infty^3$ Elementvereine, die durch die drei Gleichungen:

$$X(x, y, z, p, q) = a, \quad Y = b, \quad Z = c$$

dargestellt werden, dreifach unendlich viele Flächen, so findet man alle Integralflächen dieser Monge-Ampèreschen Gleichung, indem man unter den $\infty^3$ Flächen: $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ nach arbiträrem Gesetze einfach unendlich viele herausgreift und deren Umhüllungsfläche konstruiert; [252 diese Umhüllungsflächen sind es ja, die bei unserer Transformation in die Kurven des Raumes $x_1, y_1, z_1$ übergehen. In diesem Falle lassen sich die Gleichungen $X = a$, $Y = b$ nach $p$ und $q$ auflösen; dementsprechend ist die Größe $X_p Y_q - X_q Y_p$ von Null verschieden, und es ist daher im Ausdrucke der Größe $N$ der Koeffizient des Gliedes $rt - s^2$ von Null verschieden.

Bestimmen dagegen die Gleichungen $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ dreifach unendlich viele Kurven, so ist die Gleichung $N = 0$ linear in $r$, $s$ und $t$, und dann sind die Integralflächen von $N=0$ jedesmal erzeugt von $\infty^1$ Kurven aus der Schar $X=a$, $Y=b$, $Z=c$.

**13.** Wir fassen unsre wichtigsten Ergebnisse folgendermaßen zusammen:

**Theorem VI.** Eine Punkttransformation:

$$x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z)$$

führt Flächen, die einander berühren, in ebensolche über. Die Ableitungen erster Ordnung $p_1$ und $q_1$ von $z_1$ nach $x_1$ und $y_1$ sind **rationale** Funktionen von $p$ und $q$, deren Zähler und gemeinsamer Nenner **linear** in $p$ und $q$ sind. Die Ableitungen zweiter Ordnung $r_1$, $s_1$ und $t_1$ drücken sich **linear** in $r$, $s$, $t$ aus, und es gehen daher lineare partielle Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) in ebensolche Gleichungen über.

Eine Berührungstransformation:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \ \ldots, \ q_1 = Q(x, y, z, p, q),$$

die keine Punkttransformation ist, führt im allgemeinen Flächen in Flächen über. Diejenigen Flächen des Raumes $x$, $y$, $z$, die in Kurven, beziehungsweise Punkte des Raumes $x_1$, $y_1$, $z_1$ übergehen, lassen sich als die Integralflächen einer **Monge-Ampère**schen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung definieren:

$$\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx} = Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0,$$

die nur dann in $r, s, t$ **linear** ist, wenn die Gleichungen $X=a$, $Y=b$, $Z=c$ dreifach unendlich viele **Kurven** darstellen.

Stellen diese drei Gleichungen $\infty^3$ Flächen dar, so findet man alle Integralflächen der **Monge-Ampère**schen Gleichung, indem man unter diesen $\infty^3$ Flächen einfach unendlich viele herausgreift und die zugehörige Umhüllungsfläche konstruiert. Definieren dagegen die Gleichungen $X=a$, $Y=b$, $Z=c$ dreifach unendlich viele **Kurven**, so sind die Integralflächen der **Monge-Ampère**schen Gleichung jedesmal von $\infty^1$ Kurven jener Schar erzeugt.

Die Differentialquotienten zweiter Ordnung $r_1$, $s_1$, $t_1$, sowie die Größe $r_1 t_1 - s_1^2$ sind rationale Funktionen von $r$, $s$, $t$, deren Zähler und gemeinsamer Nenner in $r$, $s$, $t$ und $rt - s^2$ **linear** sind. Ist der Nenner frei von $r$, $s$, $t$, so ist die Transformation eine **Punkt**transformation.



Bei einer Berührungstransformation geht **jede Monge-Ampère**sche Gleichung zweiter Ordnung in eine ebensolche Gleichung über. [253

**14.** Die Theorie der Berührungstransformationen hat uns zu einer wichtigen Kategorie von Monge-Ampèreschen Gleichungen geführt. Wir wollen diese Differentialgleichungen in mehr direkter Weise definieren und sodann einige wichtige Eigenschaften dieser Gleichungen ableiten.

Liegen zwei unabhängige Funktionen $u$ und $v$ von $x, y, z, p, q$ mit einander in Involution:

$$[u, v] = 0,$$

so gibt es, wissen wir, immer eine dritte Funktion $w$, die von $u$ und $v$ unabhängig ist und mit beiden in Involution liegt:

$$[u, w] = 0, \quad [v, w] = 0;$$

es besteht ferner eine ganz bestimmte identische Relation von der Form:

$$dz - p\,dx - q\,dy = U\,du + V\,dv + W\,dw,$$

und es stellen dementsprechend die Gleichungen:

$$x_1 = u, \quad y_1 = v, \quad z_1 = w, \quad p_1 = -\frac{U}{W}, \quad q_1 = -\frac{V}{W}$$

eine Berührungstransformation dar. Die zugehörige Monge-Ampèresche Differentialgleichung, deren Integralflächen in die Kurven des Raumes $x_1$, $y_1$, $z_1$ übergehen, besitzt die Form:

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} = 0.$$

Es gilt daher der Satz:

**Satz 19.** Sind $u$ und $v$ unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$, die in Involutionsbeziehung stehen und nicht beide von $p$ und $q$ frei sind, so können die Integralflächen der **Monge-Ampère**schen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} = 0$$

durch eine passend gewählte Berührungstransformation in die **Kurven** des Raumes $x, y, z$ übergeführt werden.

**15.** Sind wiederum $u$, $v$, $w$ drei unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$, die paarweise in Involution liegen, so erhalten wir, wie wir sahen, immer dieselbe Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung:

$$Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0,$$

wenn wir die drei Funktionaldeterminanten:

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx},\quad \frac{du}{dx}\frac{dw}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dw}{dx},\quad \frac{dv}{dx}\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dx}$$

gleich Null setzen. Infolgedessen stellt eine jede unter den drei Gleichungen:

$$v-\varphi(u)=0,\quad w-\psi(u)=0,\quad w-\chi(v)=0$$

mit den willkürlichen Funktionen $\varphi$, $\psi$ und $\chi$ eine intermediäre [254
Integralgleichung unsrer Monge-Ampèreschen Gleichung dar.

Unsre partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung hat aber noch allgemeinere intermediäre Integralgleichungen. Es läßt sich in der Tat nachweisen, daß jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$W(u, v, w) = 0$$

eine intermediäre Integralgleichung darstellt.

Unter den Integralgebilden der Gleichung $W(u, v, w) = 0$ befinden sich $\infty^2$, die wir von vornherein angeben können. Unter den $\infty^3$ Elementvereinen:

$$u = a,\quad v = b,\quad w = c$$

sind nämlich diejenigen, deren Parameter $a, b, c$ die Bedingung $W(a, b, c) = 0$ erfüllen, Integralgebilde der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $W(u, v, w) = 0$. Man findet daher alle Integralgebilde der Gleichung $W = 0$, wenn man unter den soeben besprochenen $\infty^2$ Integralgebilden einfach unendlich viele herausgreift und deren Umhüllungsgebilde konstruiert. Es sind deshalb alle Integralflächen der Gleichung erster Ordnung:

$$W(u, v, w) = 0$$

gleichzeitig Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung zweiter Ordnung.

Dies gibt uns den Satz:

**Satz 20.** Sind $u, v, w$ drei unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$, die paarweise in Involution liegen, so ist jede partielle Differentialgleichung von der Form $W(u, v, w) = 0$ eine intermediäre Integralgleichung von einer **Monge-Ampère**schen Gleichung zweiter Ordnung, die man findet, indem man die Funktionaldeterminante von zwei unter den Größen $u, v, w$ nach $x$ und $y$ bildet und gleich Null setzt.

**16.** Sind $u, v, w$ drei unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$, die paarweise in Involution liegen, sind ferner $u_1, v_1, w_1$ drei unabhängige Funktionen von $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$, die ebenfalls paarweise in Involution liegen, so ist leicht zu erkennen, daß die beiden zugehörigen Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Beziehung zu einander stehen, daß die eine in die andere durch eine passend gewählte Berührungstransformation übergeführt werden kann. Wir können ja nämlich eine Berührungstransformation:



$$x' = u(x, y, z, p, q),\quad y' = v,\quad z' = w,\quad p' = P,\quad q' = Q$$

aufstellen, die die Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung:

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}=0 \tag{9}$$

in die Kurven (beziehungsweise Punkte) des Raumes $x', y', z'$ über- [255
führt; wir finden ferner eine Berührungstransformation:

$$x' = u_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1),\quad y' = v_1,\quad z' = w_1,\quad p' = P_1,\quad q' = Q_1,$$

die die Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung:

$$\frac{du_1}{dx_1}\frac{dv_1}{dy_1}-\frac{du_1}{dy_1}\frac{dv_1}{dx_1}=0 \tag{10}$$

in die Kurven (beziehungsweise Punkte) des Raumes $x', y', z'$ umwandelt. Hieraus schließen wir, daß die Gleichungen:

$$u(x, y, z, p, q) = u_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1),\quad v = v_1,\quad w = w_1,\quad P = P_1,\quad Q = Q_1$$

eine Berührungstransformation bestimmen, und daß diese Berührungstransformation die eine Monge-Ampèresche Gleichung (9) in die andere (10) überführt.

Hiermit erhalten wir nun das folgende Theorem:

**Theorem VII.** Besitzt eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in den Veränderlichen $x, y, z$ eine intermediäre Integralgleichung erster Ordnung:

$$v(x, y, z, p, q) - \varphi(u(x, y, z, p, q)) = 0$$

mit der willkürlichen Funktion $\varphi$, und besteht überdies die Gleichung:

$$[u, v] = 0,$$

so kann die vorgelegte Gleichung zweiter Ordnung durch Berührungstransformation auf die kanonische Form $r_1 = 0$ gebracht werden. Es gibt dann immer eine von $u$ und $v$ unabhängige Funktion $w(x, y, z, p, q)$, die mit $u$ und $v$ in Involution liegt. Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$\Omega(u, v, w) = 0$$

ist eine intermediäre Integralgleichung.[1]

1) Vgl. Neue Integrationsmethode der Monge-Ampèreschen Gleichung, Archiv for Math. og Naturv. Bd. II, S. 8f. Kristiania 1877. [Bd. III d. Ausg., Abh. XIX, S. 292f.]

**17.** Beispiel 1. Wir betrachten zuerst die Legendresche Transformation. Setzen wir in die Gleichungen:

$$dp_1 - r_1 dx_1 - s_1 dy_1 = 0, \quad dq_1 - s_1 dx_1 - t_1 dy_1 = 0$$

die Werte:

$$x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = -y$$

ein, so erhalten wir die Relationen:

$$dx + r_1 dp + s_1 dq = 0, \quad dy + s_1 dp + t_1 dq = 0,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$dx + r_1(r dx + s dy) + s_1(s dx + t dy) = 0,$$
$$dy + s_1(r dx + s dy) + t_1(s dx + t dy) = 0,$$

aus denen sich die vier Gleichungen: [256

$$r r_1 + s s_1 = -1, \quad r s_1 + s t_1 = 0,$$
$$s r_1 + t s_1 = 0, \quad s s_1 + t t_1 = -1$$

und durch Auflösung:

$$r_1 = -\frac{t}{rt - s^2}, \quad s_1 = \frac{s}{rt - s^2}, \quad t_1 = -\frac{r}{rt - s^2}, \quad r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{1}{rt - s^2}$$

ergeben. Jetzt sind es nach unserer allgemeinen Theorie die Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung:

$$rt - s^2 = 0,$$

die in Kurven des Raumes $x_1, y_1, z_1$ übergehen. Diese Integralflächen sind aber abwickelbare Flächen, und Poncelets allgemeine Theorie der Dualität sagt bekanntlich aus, daß die abwickelbaren Flächen zu den Kurven des Raumes dualistisch sind.

Nehmen wir irgend eine andere partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0$$

und führen auf sie die Legendresche Transformation aus, so erhalten wir die neue partielle Differentialgleichung:

$$F\left(p, \; q, \; z - px - qy, \; -x, \; -y, \; \frac{-t}{rt - s^2}, \; \frac{s}{rt - s^2}, \; \frac{-r}{rt - s^2}\right) = 0.$$

Alle nicht abwickelbaren Integralflächen der ursprünglichen Gleichung sind in wirkliche Integralflächen der neuen Gleichung übergegangen. Ist es aber denkbar, daß in dieser Weise einige Integralflächen verloren gegangen sind, so ist es auf der anderen Seite auch denkbar, daß die neue Gleichung developpable Integralflächen besitzt, deren Bildfiguren im Raume $x, y, z$ Kurven, also keine Integralflächen der ursprünglichen Gleichung sind.



Beispiel 2. Wenden wir uns jetzt zu den Eulerschen Transformationsgleichungen:

$$z_2 = z - px, \quad x_2 = p, \quad y_2 = y, \quad p_2 = -x, \quad q_2 = q.$$

Hier finden wir aus den Gleichungen:

$$dp_2 - r_2 dx_2 - s_2 dy_2 = 0, \quad dq_2 - s_2 dx_2 - t_2 dy_2 = 0,$$

oder:

$$dx + r_2(r dx + s dy) + s_2 dy = 0, \quad s dx + t dy - s_2(r dx + s dy) - t_2 dy = 0$$

die Relationen:

$$1 + r r_2 = 0, \quad s - r s_2 = 0,$$
$$r_2 s + s_2 = 0, \quad t - s_2 s - t_2 = 0,$$

mithin wird:

$$r_2 = -\frac{1}{r}, \quad s_2 = \frac{s}{r}, \quad t_2 = \frac{rt - s^2}{r}, \quad r_2 t_2 - s_2^2 = -\frac{t}{r},$$ [257

und:

$$r = -\frac{1}{r_2}, \quad s = -\frac{s_2}{r_2}, \quad t = \frac{r_2 t_2 - s_2^2}{r_2}, \quad rt - s^2 = -\frac{t_2}{r_2}.$$

Hier sind es nach der allgemeinen Theorie die Integralflächen der Gleichung $r = 0$, also, wenn $\varphi(y)$ und $\psi(y)$ willkürliche Funktionen bezeichnen, die Flächen:

$$z = \varphi(y) + x\psi(y),$$

die in Kurven des Raumes übergehen. Es sind das die geradlinigen Flächen, die von zur $x, z$-Ebene parallelen Geraden erzeugt werden.

## § 2. Die Integralgebilde der partiellen Differentialgleichungen und ihr Verhalten bei Berührungstransformationen.

**18.** Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gewann seinerzeit außerordentlich an Einfachheit und Allgemeingültigkeit durch meine Einführung der Begriffe Element und Elementverein, sowie durch meine Verallgemeinerung der Begriffe partielle Differentialgleichung erster Ordnung und Integralgebilde einer solchen Gleichung. Diese Begriffserweiterungen haben unter anderm die Formulierung einfacher und allgemeingültiger Sätze über das Verhalten der Integrale einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung bei Berührungstransformationen ermöglicht. In dieser Weise erhielten wir insbesondere den folgenden Satz:

Liegt eine **beliebige** partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

und eine **beliebige** Berührungstransformation:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \ldots, q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

vor, so ist es immer möglich, innerhalb des **fünf**dimensionalen Elementraumes $x, y, z, p, q$ einen Bereich derart abzugrenzen, daß **alle** in diesem Bereiche gelegenen Integralgebilde von der Transformation in Integralgebilde der transformierten Gleichung:

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$$

übergeführt werden.

Selbstverständlich machen wir hier wie immer stillschweigend die Voraussetzung, daß sich die in Betracht kommenden analytischen Funktionen innerhalb eines gemeinsamen Bereiches des Elementraumes regulär verhalten.

**19.** Auch in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter (und höherer) Ordnung mit einer abhängigen und zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen ist es zweckmäßig, statt des Lagrangeschen Begriffes Lösung $z = f(x, y)$, oder des etwas allgemeineren Monge- [258 schen Begriffes Integralfläche meinen allgemeinen Begriff Integralgebilde einzuführen. Wir definieren den Begriff Integralgebilde, der sich in die spezielleren Begriffe: Integralfläche, Integralkurve und Integralpunkt spaltet, in folgender Weise:

Ein zweidimensionaler Elementverein $e$ ist Integralgebilde einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

wenn **jede** Berührungstransformation, die den Verein $e$ in eine Fläche $f_1$ umwandelt, die vorgelegte Gleichung $F = 0$ in eine partielle Differentialgleichung:

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0$$

überführt, deren Integralfläche $f_1$ ist.

**20.** Um mit dem hiermit eingeführten Begriffe Integralgebilde operieren zu können, müssen wir Kriterien ableiten, vermöge deren wir entscheiden können, ob ein vorgelegter Elementverein $e$ ein Integralgebilde einer gegebenen partiellen Differentialgleichung $F = 0$ darstellt, oder nicht. Die Betrachtungen, die wir zu diesem Zwecke anstellen, werden überdies zeigen, daß wir beliebig viele partielle Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) konstruieren können, die Integralkurven (oder Integralpunkte) besitzen.

Wir werden annehmen, daß wir eine Berührungstransformation $B_1$ gefunden haben, die $F = 0$ in die partielle Differentialgleichung $F_1 = 0$ und den Verein $e$ in eine Integralfläche $f_1$ von $F_1 = 0$ überführt; wir



behaupten, daß dann jede andere Berührungstransformation $B_2$, die den Verein $e$ in eine Fläche $f_2$ umwandelt, die Gleichung $F = 0$ in eine solche partielle Differentialgleichung $F_2 = 0$ überführt, für welche $f_2$ eine Integralfläche darstellt. Zum Beweise bemerken wir, daß die Berührungstransformation $B_1^{-1} B_2$ die Gleichung $F_1 = 0$ und deren Integralfläche $f_1$ in die Gleichung $F_2 = 0$ und die Fläche $f_2$ überführt; wenn aber eine Berührungstransformation eine Integralfläche einer partiellen Differentialgleichung in eine Fläche umwandelt, so ist diese Fläche eo ipso eine Integralfläche der transformierten Differentialgleichung. Also ist die Fläche $f_2$ eine Integralfläche der Gleichung $F_2 = 0$.

Hiermit ist das gesuchte Kriterium gefunden:

**Satz 21.** Man entscheidet, ob ein vorgelegter Elementverein $e$ ein Integralgebilde der gegebenen partiellen Differentialgleichung (zweiter Ordnung) $F = 0$ darstellt, indem man eine einzige Berührungstransformation ausführt, die so gewählt ist, daß sich der Verein $e$ in eine Fläche umwandelt. Ist diese Fläche eine Integralfläche der transformierten partiellen Differentialgleichung $F_1 = 0$, dann, [259 aber auch nur dann, ist der Verein $e$ ein Integralgebilde der gegebenen partiellen Differentialgleichung $F = 0$.

**21.** Jetzt können wir partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung konstruieren, die Integralkurven, oder gar Integralpunkte besitzen.

Nehmen wir zum Beispiel eine Kurvenschar, bestehend aus $\infty^4$ gewundenen Kurven, die den Raum ausfüllen, so sind deren reziproke Polaren hinsichtlich einer allgemeinen Fläche zweiten Grades $\infty^4$ developpable Flächen:

$$f(x_1, y_1, z_1, a, b, c, d) = 0,$$

die keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, dagegen zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfüllen, unter denen eine die Form:

$$r_1 t_1 - s_1^2 = 0$$

besitzt. Unsre developpabeln Flächen befriedigen somit sicher eine von $r_1 t_1 - s_1^2 = 0$ verschiedene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0.$$

Kehren wir zu den ursprünglichen Veränderlichen zurück, führen wir also noch einmal die früher angewandte dualistische Transformation aus, so geht $\Phi = 0$ sicher (S. 256 [hier S. 756]) in eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

über, und die ursprünglich vorgelegten $\infty^4$ Raumkurven stellen Integralgebilde von $F = 0$ dar.

Diese Betrachtungen führen noch weiter. Die oben besprochenen $\infty^4$ Developpabeln befriedigen ja die partielle Differentialgleichung:

$$\Phi + \lambda(r_1 t_1 - s_1^2) = 0$$

mit der willkürlichen Konstanten $\lambda$. Also sind unsere $\infty^4$ Raumkurven Integralgebilde von allen partiellen Differentialgleichungen von der Form:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) + \frac{\lambda}{rt - s^2} = 0.$$

**Satz 22.** *Liegt eine beliebige Schar von $\infty^4$ Kurven vor, die den Raum ausfüllen, so ist es immer möglich, zwei unabhängige partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu konstruieren, deren gemeinsame Integralkurven diese $\infty^4$ Kurven sind.*

Noch einfacher ist es, partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu konstruieren, die $\infty^\infty$ viele Integralkurven besitzen, die sämtlich auf einer beliebigen gegebenen Fläche liegen. Wir werden uns aber hiermit nicht aufhalten.

**22.** Wir können dem im Satze 21 aufgestellten Kriterium eine präzisere Form geben.

Will man zum Beispiel untersuchen, ob ein vorgelegter Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ einen Integralpunkt der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

darstellt, so führt man die Legendresche Transformation:

$$z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = -y$$

auf den Punkt und die Gleichung $F = 0$ aus. Man bildet also die Gleichung:

$$z_1 + a x_1 + b y_1 - c = 0$$

des gegebenen Punktes in den Ebenenkoordinaten $x_1, y_1, z_1$ und unter- [260
sucht sodann, ob der entsprechende Wert von $z_1$:

$$z_1 = -a x_1 - b y_1 + c$$

eine Lösung der transformierten partiellen Differentialgleichung:

$$0 = F\begin{pmatrix} -p_1, \ -q_1, \ z_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1, \ x_1, \ y_1, \\ -\frac{t_1}{r_1 t_1 - s_1^2}, \ \frac{s_1}{r_1 t_1 - s_1^2}, \ -\frac{r_1}{r_1 t_1 - s_1^2} \end{pmatrix} \equiv F_1$$

darstellt. Ist dies der Fall, so ist der gegebene Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ ein Integralpunkt der ursprünglich vorgelegten Gleichung $F = 0$, sonst nicht.



Liegt andererseits (im endlichen Raume) eine krumme Kurve vor, so wird sie durch eine einzige Gleichung in Ebenenkoordinaten $x_1, y_1, z_1$ dargestellt. Man löst diese Gleichung nach $z_1$ auf und untersucht wiederum, ob der hervorgehende Wert $z_1 = f_1(x_1, y_1)$ eine Lösung der transformierten Gleichung $F_1 = 0$ darstellt.

**23.** Die Legendresche Transformation gestattet also, zu entscheiden, ob eine beliebige im Endlichen gelegene krumme Kurve (oder ein beliebiger im Endlichen gelegener Punkt) eine Integralkurve (beziehungsweise einen Integralpunkt) der gegebenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $F = 0$ darstellt.

Wünscht man dagegen zu wissen, ob eine vorgelegte Gerade ein Integralgebilde von $F = 0$ darstellt, so führt die Legendresche Transformation nicht zum Ziele, weil eine Gerade nicht durch eine Gleichung, sondern durch zwei Gleichungen in den Ebenenkoordinaten $x_1, y_1, z_1$ dargestellt wird. Jetzt müssen wir eine Berührungstransformation aufsuchen, die unsre Gerade in eine Fläche überführt.

Nehmen wir an, daß die vorgelegte Gerade nicht mit der $z, x$-Ebene parallel ist, und daß dementsprechend ihre Gleichungen in Cartesischen Koordinaten die Form:

$$z = ay + b, \quad x = cy + d$$

besitzen, so werden wir sehen, daß die Eulersche Transformation:

$$z_2 = z - px, \quad x_2 = p, \quad y_2 = y, \quad p_2 = -x, \quad q_2 = q$$

brauchbar ist. Aufgefaßt als Elementverein wird nämlich unsre Gerade in den ursprünglichen Elementkoordinaten $x, y, z, p, q$ durch die Gleichungen:

$$z = ay + b, \quad x = cy + d, \quad q = a - cp$$

und in den neuen Elementkoordinaten durch die Gleichungen:

$$z_2 - p_2 x_2 = a y_2 + b, \quad -p_2 = c y_2 + d, \quad q_2 = a - c x_2$$

dargestellt, und diese letzten Gleichungen liefern nur eine Relation zwischen $x_2$, $y_2$ und $z_2$, nämlich:

$$z_2 + c x_2 y_2 + d x_2 - a y_2 - b = 0.$$

Wir haben also zu untersuchen, ob die Größe: [261

$$z_2 = -c x_2 y_2 - d x_2 + a y_2 + b$$

eine Lösung der transformierten partiellen Differentialgleichung:

$$0 = F(-p_2, y_2, z_2 - p_2 x_2, x_2, q_2, -1 : r_2, \ldots) \equiv F_2$$

darstellt. Ist dies der Fall, so ist die vorgelegte Gerade ein Integralgebilde der ursprünglich vorgelegten partiellen Differentialgleichung $F = 0$.

**24.** Durch Zusammenfassung unsrer Ergebnisse erhalten wir das folgende Theorem:

**Theorem VIII.** Eine vorgelegte krumme Kurve ist Integralkurve der partiellen Differentialgleichung:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

wenn die Gleichung der Kurve in den Ebenenkoordinaten:

$$z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q$$

durch Auflösung nach $z_1$ eine Lösung $z_1 = f(x_1, y_1)$ der transformierten partiellen Differentialgleichung:

$$0 = F\begin{pmatrix} -p_1, -q_1, z_1 - p_1x_1 - q_1y_1, x_1, y_1, \\ -\frac{t_1}{r_1t_1 - s_1^2}, \frac{s_1}{r_1t_1 - s_1^2}, -\frac{r_1}{r_1t_1 - s_1^2} \end{pmatrix} = F_1$$

liefert. Dementsprechend ist der Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ ein Integralpunkt von $F = 0$, wenn die Gleichung:

$$z_1 + ax_1 + by_1 - c = 0$$

des Punktes in den Ebenenkoordinaten $z_1$, $x_1$, $y_1$ durch Auflösung nach $z_1$ eine Lösung der transformierten Gleichung $F_1 = 0$ liefert.

Wünscht man dagegen zu entscheiden, ob eine vorgelegte Gerade:

$$z = ay + b, \quad x = cy + d$$

ein Integralgebilde von $F = 0$ darstellt, so wendet man am besten die **Euler**sche Transformation:

$$z_2 = z - px, \quad x_2 = p, \quad y_2 = y, \quad p_2 = -x, \quad q_2 = q$$

an. In den Koordinaten $x_2, y_2, z_2$ wird die vorgelegte Gerade durch eine einzige Gleichung:

$$z_2 + cx_2y_2 + dx_2 - ay_2 - b = 0$$

dargestellt; man untersucht, ob diese Gleichung durch Auflösung nach $z_2$ eine Lösung der transformierten partiellen Differentialgleichung:

$$0 = F\left(-p_2, y_2, z_2 - x_2p_2, x_2, q_2, -\frac{1}{r_2}, -\frac{s_2}{r_2}, \frac{r_2t_2 - s_2^2}{r_2}\right) = F_2$$

liefert. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die vorgelegte Gerade ein Integralgebilde der Gleichung $F = 0$, sonst nicht.



**25.** Die eben vorgetragenen Theorien beruhen darauf, daß jeder [262
im Endlichen gelegene zweidimensionale Elementverein, der keine Fläche ist, von der Legendreschen, oder jedenfalls von der Eulerschen Transformation in eine Fläche übergeführt wird, deren Gleichung die Koordinate $z$ enthält. Dementsprechend gibt es unter allen möglichen analytischen Darstellungen der Elementvereine drei ausgezeichnete, und mit diesen drei Darstellungen werden wir uns hier eingehend beschäftigen.

Ein Elementverein, dessen Punktort eine im Endlichen gelegene Fläche ist, wird immer (eventuell nach passender Wahl des Cartesischen Koordinatensystems) durch drei Gleichungen von der Form:

$$(11) \qquad z - \Omega(x, y) = 0, \quad p - \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad q - \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$$

dargestellt. Denkt man sich, daß von vornherein ein bestimmtes Cartesisches Koordinatensystem zu Grunde gelegt ist, so muß beachtet werden, daß die Zylinderflächen, deren Gerade mit der $z$-Achse parallel sind, nicht durch drei Gleichungen von der Form (11) dargestellt werden können.

Es sind daher die Punkte des Raumes, die krummen und geraden Linien des Raumes, sowie die Zylinderflächen $\omega(x, y) = 0$ die einzigen zweidimensionalen Elementvereine, die nicht durch drei Gleichungen von der Form (11) dargestellt werden können.

Führen wir die Legendresche Transformation:

$$z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = -y$$

auf die Gleichungen (11) aus, so erhalten wir die Gleichungen:

$$z_1 - p_1x_1 - q_1y_1 = \Omega(-p_1, -q_1), \quad x_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial(-p_1)}, \quad y_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial(-q_1)}.$$

Es liefern daher die Gleichungen:

$$(12) \qquad z_1 - p_1x_1 - q_1y_1 = W(p_1, q_1), \quad x_1 = -\frac{\partial W}{\partial p_1}, \quad y_1 = -\frac{\partial W}{\partial q_1}$$

die allgemeine analytische Darstellung aller Elementvereine, deren Elemente in zweifach unendlich vielen Ebenen liegen. Unter den Flächen sind somit die Integralflächen der Gleichung $rt - s^2 = 0$ die einzigen, die sich nicht durch Gleichungen von der Form (12) darstellen lassen.

Durch passende Wahl der Funktion $W(p_1, q_1)$ liefern die Gleichungen (12) alle zweidimensionalen Elementvereine, ausgenommen die Ebenen, die developpabeln Flächen, die geraden Linien, sowie endlich die unendlich fernen Kurven (beziehungsweise Punkte), für die ja eine Gleichung von der Form $\omega(p_1, q_1) = 0$ aufgestellt werden kann. Die Gleichungen

(12) liefern alle krummen Kurven, beziehungsweise Punkte des Raumes, wenn $W$ nach und nach alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung $W_{p_1 p_1} W_{q_1 q_1} - (W_{p_1 q_1})^2 = 0$ darstellt.

Führen wir die Eulersche Transformation auf die Gleichungen [263
(11) aus, so erhalten wir die Gleichungen:

$$z_2 - p_2 x_2 = \Phi(p_2, y_2), \quad x_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_2}, \quad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \tag{13}$$

als allgemeine analytische Darstellung aller zweidimensionalen Elementvereine, deren Punktort zweifach unendlich viele Tangenten besitzt, die mit der $z, x$-Ebene parallel sind.

Durch passende Wahl der Funktion $\Phi(p_2, y_2)$ liefern die Gleichungen (13) alle zweidimensionalen Elementvereine, ausgenommen die Zylinderflächen $\omega(x_2, y_2) = 0$, die mit der $z, x$-Ebene parallelen Geraden, die Regelflächen, deren Gerade mit der $z, x$-Ebene parallel sind, alle in den Ebenen $y_2 =$ Const. gelegenen Kurven, alle Punkte des Raumes. Die Substitution:

$$\Phi = \varphi(y_2) - p_2 \psi(y_2)$$

gibt alle Kurven, die nicht in den Ebenen $y_2 =$ Const. gelegen sind.

Die einzigen im Endlichen gelegenen zweidimensionalen Elementvereine, die sich weder durch die Gleichungen (11), noch durch die Gleichungen (12), noch durch die Gleichungen (13) darstellen lassen, sind die Zylinderflächen $\omega(x, y) = 0$, sowie die mit der $z, x$-Ebene parallelen Geraden. Man erhält eine Darstellung dieser Geraden, wenn man in den Formeln (13) $x$ mit $y$, $p$ mit $q$ vertauscht. Dagegen entziehen sich die unendlich fernen Elementvereine, die Zylinderflächen $\omega(x, y) = 0$, sowie die Geraden $x = a$, $y = b$ unseren sämtlichen Darstellungen.

**26.** Selbstverständlich ist es mißlich, daß bei jeder einzelnen unter diesen Darstellungen eines Elementvereins Ausnahmegebilde auftreten. Es gibt aber eine fünfte Darstellung, die, wenn sie auch nicht vollkommen ist, doch jedenfalls besondere Beachtung verdient. Ein System von drei unabhängigen Gleichungen in den Veränderlichen $x, y, z, p, q$:

$$f_1(x, y, z, p, q) = 0, \quad f_2(x, y, z, p, q) = 0, \quad f_3(x, y, z, p, q) = 0$$

stellt einen Elementverein dar, wenn die drei Klammerausdrücke $[f_i f_k]$ vermöge des Gleichungssystems verschwinden. Diese Darstellung leistet ebensoviel, wie die vier ersten Darstellungen zusammen. Die einzigen zweidimensionalen Elementvereine, die sich dieser fünften Darstellung entziehen,



sind die unendlich fernen Elementvereine (das heißt, die unendlich ferne Ebene und die in ihr gelegenen Kurven und Punkte), die Zylinderflächen $\omega(x, y) = 0$, und die Geraden $x = a$, $y = b$. Es liegt aber in der Natur der Sache, daß diese Elementvereine nicht durch Gleichungen zwischen den Elementkoordinaten $x, y, z, p, q$ dargestellt werden können.

Eine wesentliche Verbesserung dieser analytischen Darstellungen der Elementvereine erreichte ich im Jahre 1873, indem ich statt der beiden Größen $p$ und $q$ die Verhältnisgrößen $p_1, p_2, p_3$ durch die Substitution:

$$p = -\frac{p_1}{p_3}, \quad q = -\frac{p_2}{p_3}$$ [264

einführte. In dieser Weise gelang es mir, eine allgemeingültige Darstellung aller Elementvereine aufzustellen, deren Elemente nicht sämtlich unendlich fern liegen. Auf diesen Gegenstand kommen wir später zurück.

**27.** Um die Tragweite des Theorems VIII zu illustrieren, werden wir zunächst eine von dem talentvollen russischen Mathematiker Imschenetsky gestreifte Frage eingehend diskutieren und vollständig erledigen.

Imschenetsky zeigt, daß eine Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung:

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0 \tag{14}$$

auf die lineare Form:

$$H_1 r_1 + 2K_1 s_1 + L_1 t_1 + M_1 = 0 \tag{15}$$

gebracht werden kann, wenn $\infty^3$ Integralflächen:

$$\Omega(x, y, z, a, b, c) = 0 \tag{16}$$

der Gleichung (14) schon bekannt sind. Dabei entgeht es allerdings seiner Aufmerksamkeit, daß dieser Satz nur dann richtig ist, wenn die $\infty^3$ Flächen $\Omega = 0$ keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen. Imschenetsky stellt ferner die unrichtige Behauptung auf, daß es unter Umständen zur Reduktion einer Monge-Ampèreschen Gleichung (14) auf die lineare Form (15) nur erforderlich ist, zweifach unendlich viele Integralflächen von (14) zu kennen.

Diese Arbeiten Imschenetskys, deren Beziehungen zu Ampères älteren Untersuchungen später erörtert werden, erschienen im Jahre 1868 in russischer Sprache; eine von Hoüel ausgeführte Übersetzung von Imschenetskys Werke erschien sodann im Jahre 1872 in Grunerts Archiv, Bd. 54. Unabhängig von Imschenetsky veröffentlichte ich im April 1872 in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania [d. Ausg. Bd. III, Abh. I] einige kurze, aber inhaltreiche Bemerkungen über die allgemeine Transformationstheorie der Monge-Ampèreschen Gleichungen und gab insbesondere eine Bestimmung **aller** Berührungstransformationen, die eine vorgelegte **Monge-Ampère**sche Gleichung (14) auf die lineare Form (15) bringen.

**28.** Wir werden annehmen, daß eine gewisse Berührungstransformation:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \ \ldots, \ q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

die vorgelegte Monge-Ampèresche Gleichung (14) in die lineare Gleichung:

$$H_1 r_1 + 2 K_1 s_1 + L_1 t_1 + M_1 = 0 \tag{15}$$

umwandelt. In den neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, die mit $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ durch die Legendresche Transformation:

$$z_1 = \mathfrak{z} - \mathfrak{p}\mathfrak{x} - \mathfrak{q}\mathfrak{y}, \quad x_1 = \mathfrak{p}, \quad y_1 = \mathfrak{q}, \quad p_1 = -\mathfrak{x}, \quad q_1 = -\mathfrak{y}$$

verbunden sind, erhält unsre partielle Differentialgleichung die Form: [265

$$-\mathfrak{H}\mathfrak{t} + 2\mathfrak{K}\mathfrak{s} - \mathfrak{L}\mathfrak{r} + \mathfrak{M}(\mathfrak{r}\mathfrak{t} - \mathfrak{s}^2) = 0,$$

und diese Gleichung wird von allen Ebenen des Raumes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ befriedigt. Also sind alle Punkte des Raumes $x_1, y_1, z_1$ Integralpunkte der linearen Gleichung (15). Hiermit ist nun zunächst der Satz erhalten:

**Satz 23.** Eine **Monge-Ampère**sche partielle Differentialgleichung ist dann und nur dann linear, wenn alle Punkte des Raumes Integralpunkte der Gleichung sind.

Da jede Berührungstransformation alle Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichungen in ebensolche Gleichungen überführt, so sehen wir, daß die Berührungstransformation:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \ \ldots, \ q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

eine vorgelegte Monge-Ampèresche Gleichung (14) dann und nur dann auf die lineare Form bringt, wenn sie $\infty^3$ Integralgebilde der Gleichung (14) in die Punkte des Raumes überführt, anders ausgesprochen, wenn die drei Gleichungen $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ mit den Parametern $a, b, c$ dreifach unendlich viele Integralgebilde der vorgelegten partiellen Differentialgleichung darstellen.

**29.** Will man die allgemeinste Berührungstransformation $B$ finden, die alle linearen Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen in lineare Gleichungen transformiert, anders ausgesprochen, will man die allgemeinste



Berührungstransformation $B$ finden, bei der die Schar aller linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$Rr + Ss + Tt + U = 0 \tag{17}$$

invariant bleibt, so muß man beachten, daß die inverse Transformation $B^{-1}$ die $\infty^3$ Punkte des Raumes in $\infty^3$ Elementvereine überführen muß, die gemeinsame Integralgebilde aller linearen Gleichungen (17) darstellen. Um unsre Frage beantworten zu können, müssen wir daher zunächst alle Elementvereine bestimmen, die gemeinsame Integralgebilde aller linearen Gleichungen (17) darstellen.

Wir wissen schon, daß die $\infty^3$ Punkte des Raumes solche gemeinsame Integralgebilde aller linearen Gleichungen (17) darstellen; daraus folgt ja grade, daß jede Punkttransformation die Schar aller linearen Gleichungen (17) invariant läßt. Besäßen nun alle linearen Gleichungen gemeinsame Integralflächen (beziehungsweise Integralkurven), so müßte jede Punkttransformation alle solchen gemeinsamen Integralflächen (beziehungsweise Integralkurven) in ebensolche gemeinsame Integralflächen (beziehungsweise Kurven) überführen. Da aber andererseits eine beliebige vorgelegte Fläche (beziehungsweise Kurve) durch eine passend gewählte Punkttransformation in jede andere Fläche (beziehungsweise Kurve) des Raumes übergeführt werden kann, so schließen wir, daß, sobald eine gemeinsame Integralfläche (beziehungsweise Integralkurve) aller linearen Gleichungen (17) vorhanden wäre, jede Fläche (beziehungs- [266 weise Kurve) des Raumes eine solche gemeinsame Integralfläche sein müßte. Daß aber nicht alle Flächen des Raumes gemeinsame Integralflächen aller linearen Gleichungen sein können, liegt auf der Hand; es gibt ja überhaupt keine partielle Differentialgleichung in den Veränderlichen $x, y, z$, die von allen Flächen des Raumes $x, y, z$ befriedigt wird.

Wären auf der anderen Seite alle Kurven des Raumes gemeinsame Integralgebilde aller linearen Gleichungen, so müßten alle developpabeln Flächen gemeinsame Integralflächen aller Monge-Ampèreschen Gleichungen von der Form:

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt = 0$$

sein und insbesondere die drei Gleichungen $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$ erfüllen. Die Gleichungen $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$ haben aber keine anderen [gemeinsamen] Integralflächen als die Ebenen des Raumes.

In dieser Weise erkennen wir, daß die $\infty^3$ Punkte des Raumes die einzigen gemeinsamen Integralgebilde **aller** linearen Gleichungen von der allgemeinen Form:

$$Rr + Ss + Tt + U = 0 \tag{17}$$

darstellen, und da jede Berührungstransformation, die alle linearen Gleichungen (17) in ebensolche überführt, gleichzeitig die gemeinsamen Integralgebilde aller linearen Gleichungen in ebensolche umwandeln muß, so erhalten wir den Satz:

**Satz 24.** Die Punkttransformationen sind die einzigen Berührungstransformationen, die jede lineare **Monge-Ampère**sche Gleichung in eine ebensolche Gleichung überführen.

**30.** Aus den vorhergehenden Entwickelungen fließt fast unmittelbar ein Satz, der nicht unwichtig ist. Nimmt man als Ausgangspunkt die auf Seite 245 [hier S. 745] aufgestellten Formeln (6):

$$(6)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{A_1 r + B_1 s + C_1 t + D_1(rt - s^2) + E_1}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E}, \\[2ex] s_1 = \dfrac{A_2 r + B_2 s + C_2 t + D_2(rt - s^2) + E_2}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E}, \\[2ex] t_1 = \dfrac{A_3 r + B_3 s + C_3 t + D_3(rt - s^2) + E_3}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E}, \end{cases}$$

die für jede Berührungstransformation gelten, so sieht man fast unmittelbar, daß sich diejenigen Berührungstransformationen, die alle linearen Gleichungen:

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0$$

in ebensolche überführen, dadurch charakterisieren lassen, daß die vier Koeffizienten $D_1$, $D_2$, $D_3$ und $D$ sämtlich identisch gleich Null sind. Das heißt, es müssen die fünf Funktionaldeterminanten:

$$P_p Y_q - P_q Y_p,\ P_p X_q - P_q X_p,\ Q_p Y_q - Q_q Y_p,\ Q_p X_q - Q_q X_p,\ X_p Y_q - X_q Y_p$$

sämtlich verschwinden. Unsere obenstehende Diskussion zeigt, daß dies nur dann eintritt, wenn die vorgelegte Berührungstransformation [267 eine Punkttransformation ist, und infolgedessen [auch] die Größen $A$, $B$, $C$ gleich Null sind. Es gilt daher der Satz:

**Satz 25.** In den Formeln:

$$(6')\qquad \frac{r_1}{R} = \frac{s_1}{S} = \frac{t_1}{T} = \frac{1}{N}$$

die für jede Berührungstransformation gelten, sind $R$, $S$, $T$ und $N$ immer linear in $r, s, t$ und $rt - s^2$. Sind sie sogar linear in $r, s, t$ allein, so ist die Transformation eine Punkttransformation, und die Größe $N$ infolgedessen frei von $r, s, t$.



**31.** Die wichtigsten unter unseren Ergebnissen lassen sich zu folgendem Satze zusammenfassen:

**Theorem IX.** Unter den **Monge-Ampère**schen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung lassen sich diejenigen, die in $r, s, t$ linear sind, dadurch charakterisieren, daß alle $\infty^3$ Punkte des Raumes ihre gemeinsamen Integralgebilde sind. Es sind daher die Punkttransformationen die einzigen Berührungstransformationen, bei denen die Schar aller Gleichungen von der Form:

$$R(x,y,z,p,q) \,.\, r + S(x,y,z,p,q) \,.\, s + T(x,y,z,p,q) \,.\, t + U(x,y,z,p,q) = 0$$

invariant bleibt.

Man findet alle Berührungstransformationen, die eine vorgelegte **Monge-Ampère**sche Gleichung auf die lineare Form bringen, indem man unter deren Integralgebilden nach willkürlichem Gesetze dreifach unendlich viele herausgreift, die keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen, und sodann diese $\infty^3$ Elementvereine durch Berührungstransformation in die Punkte des Raumes überführt.

**32.** Um einige unter den entwickelten Theorien zu illustrieren, wählen wir die lineare Monge-Ampèresche Gleichung:

$$(18)\qquad zs + \frac{z}{q^2} t + pq = 0$$

und bemerken, daß die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$zq - x = \beta$$

mit der willkürlichen Konstanten $\beta$ eine intermediäre Integralgleichung darstellt; die beiden durch Differentiation nach $x$, beziehungsweise $y$ hervorgehenden Gleichungen:

$$zs + pq - 1 = 0, \quad zt + q^2 = 0$$

reproduzieren ja durch Multiplikation mit passenden Faktoren und Addition die vorgelegte Gleichung zweiter Ordnung, die sich folgendermaßen:

$$zs + pq - 1 + \frac{1}{q^2}(zt + q^2) = 0$$

schreiben läßt.

Da die beiden Funktionen $zq - x$ und $z^2 - 2zyq$ in Involution [268 liegen:

$$[zq - x,\ z^2 - 2zyq] = 0,$$

so haben die beiden Gleichungen erster Ordnung:

$$zq - x = \beta, \quad z^2 - 2zyq = \gamma$$

für beliebig gewählte Werte der Konstanten $\beta$ und $\gamma$ jedesmal $\infty^1$ gemeinsame Integralgebilde, die nach der Natur der Sache gleichzeitig Integralgebilde der vorgelegten linearen Monge-Ampèreschen Gleichung (18) darstellen. Um diese $\infty^3$ Elementvereine zu finden, suchen wir nach unseren gewöhnlichen Regeln eine Funktion $w(x, y, z, p, q)$, die mit $zq-x$ und $z^2-2zyq$ in Involution liegt und somit die beiden Relationen:

$$[zq-x, w]=0, \quad [z^2-2zyq, w]=0$$

erfüllt. Eine solche Größe ist $x$, und daher stellen die Gleichungen:

$$x=\alpha, \quad zq-x=\beta, \quad z^2-2zyq=\gamma$$

mit den Parametern $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dreifach unendlich viele Integralgebilde und zwar $\infty^3$ ebene Integralkurven der vorgelegten linearen Monge-Ampèreschen Gleichung (18) dar.

**33.** Um nun eine Berührungstransformation zu finden, die diese $\infty^3$ Integralgebilde in die Punkte des Raumes überführt, bilden wir die Gleichung:

$$d(z^2-2zyq)-P\,.\,dx-Q\,.\,d(zq-x)=\varrho(dz-p\,dx-q\,dy),$$

die uns zeigt, daß $P$ und $Q$ die Werte:

$$P=2(pz-y), \quad Q=-2y$$

haben. Hieraus schließen wir, daß die Gleichungen: [269

$$(19) \qquad \begin{cases} x_1=x, \quad y_1=zq-x, \quad z_1=z^2-2zyq, \\ \qquad p_1=2(pz-y), \quad q_1=-2y \end{cases}$$

eine Berührungstransformation bestimmen, sowie, daß diese Transformation die vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung (18) in eine lineare Gleichung umwandelt; dies letztere folgt daraus, daß $\infty^3$ Integralkurven der Gleichung (18) in die Punkte des Raumes übergeführt werden.

Zur Durchführung dieser Transformation bilden wir die Gleichung:

$$0=dq_1-s_1\,dx_1-t_1\,dy_1\equiv-2\,dy-s_1\,dx-t_1\,d(zq-x),$$

die sich in die beiden:

$$0=-s_1-t_1(pq-1+zs),$$
$$0=-2-t_1(q^2+zt)$$

zerlegt, aus denen für $t$ und $s$ die Werte:

$$t=-\frac{2+q^2t_1}{zt_1}, \quad s=\frac{(1-pq)t_1-s_1}{zt_1}$$



hervorgehen. Die vorgelegte Gleichung (18) erhält also die Form:

$$\frac{(1-pq)t_1-s_1}{t_1}-\frac{2+q^2t_1}{q^2t_1}+pq=0,$$

oder durch Ausführung:

$$q^2s_1+2=0.$$

Setzen wir hier für $q^2$ den Wert:

$$q^2=\frac{(y_1+x_1)^2}{z_1-(x_1+y_1)q_1}$$

ein, der sich durch Auflösung der Gleichungen (19) ergibt, so erhalten wir als transformierte Gleichung die einfache Gleichung:

$$(x_1+y_1)^2s_1-2(x_1+y_1)q_1+2z_1=0.$$

Daß diese Gleichung linear ist, stimmt mit unserer allgemeinen Theorie; daß sie überdies von $r_1$ und $t_1$ frei ist, beruht auf allgemeinen Prinzipien, die uns im nächsten Paragraphen dieses Kapitels beschäftigen werden.

**34.** Unter den Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die in $r, s, t$ linear sind, nehmen diejenigen eine ausgezeichnete Stellung ein, die in $r, s, t$ linear und homogen sind. Diese Gleichungen:

$$(20) \quad R(x, y, z, p, q)r+S(x, y, z, p, q)s+T(x, y, z, p, q)t=0$$

besitzen zwei Scharen gemeinsamer Integralgebilde; man übersieht ja unmittelbar, daß die Punkte des Raumes Integralpunkte, die Ebenen des Raumes Integralflächen jeder derartigen Gleichung sind.

Wünscht man nun, alle Berührungstransformationen zu finden, die jede derartige partielle Differentialgleichung in eine ebensolche über- [270 führen, so untersucht man am besten erst, ob alle diese Differentialgleichungen weitere gemeinsame Integralgebilde haben. Es ist leicht, zu sehen, daß jede projektive Transformation des Raumes $x, y, z$ jede homogene lineare Gleichung (20) in eine ebensolche umwandelt. Eine projektive Transformation führt ja Punkt in Punkt, Ebene in Ebene und Monge-Ampèresche Gleichung in ebensolche über. Eine solche Transformation verwandelt daher jede lineare homogene Gleichung (20) in eine Monge-Ampèresche Gleichung, für welche alle Punkte des Raumes Integralpunkte, alle Ebenen des Raumes Integralflächen darstellen, das heißt, in eine lineare homogene Gleichung (20). Eine ganz analoge Überlegung zeigt, daß jede dualistische Transformation, die sich bekanntlich als eine Berührungstransformation charakterisieren läßt, die alle Punkte in Ebenen, und alle Ebenen in Punkte überführt, jede lineare homogene Gleichung (20) in eine ebensolche umwandelt.

Hieraus ziehen wir nun zunächst den Schluß, daß jedes gemeinsame Integralgebilde aller linearen homogenen Gleichungen von jeder projektiven, beziehungsweise dualistischen Transformation in ein gemeinsames Integralgebilde aller linearen homogenen Gleichungen (20) übergeführt wird. Diese Bemerkung wird uns nun ohne Schwierigkeit zur Bestimmung aller Elementvereine führen, die gemeinsame Integralgebilde aller linearen partiellen Differentialgleichungen (20) sind.

**35.** Ist nämlich eine Fläche $z = f(x, y)$ gemeinsame Integralfläche aller linearen Gleichungen (20), insbesondere also der Gleichungen $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$, so ist sie offenbar eine Ebene. Eine nicht ebene Zylinderfläche, deren Gleichung die Form $\omega(x, y) = 0$ besitzt, kann nicht eine gemeinsame Integralfläche der Gleichungen (20) sein, weil die Gleichung $\omega(x, y) = 0$ durch eine projektive, ja lineare Transformation die Form: $\omega(z, y) = 0$ erhalten kann. Eine krumme Kurve kann auch kein gemeinsames Integralgebilde darstellen, weil sie von jeder dualistischen Transformation in eine krumme abwickelbare Fläche übergeführt wird. Hiermit ist bewiesen, daß alle linearen homogenen **Monge-Ampère**schen Gleichungen keine anderen gemeinsamen Integralgebilde besitzen als die $\infty^3$ Punkte und die $\infty^3$ Ebenen des Raumes.

**36.** Hieraus ergibt sich nun unmittelbar, daß eine Berührungstransformation, die jede lineare homogene Gleichung (20) in eine ebensolche überführt, entweder Punkte in Punkte und Ebenen in Ebenen, oder Punkte in Ebenen und Ebenen in Punkte umwandeln muß. Es gilt daher der Satz:

**Satz 26.** Die projektiven und die dualistischen Transformationen sind die einzigen Berührungstransformationen des Raumes, die **jede** lineare homogene **Monge-Ampère**sche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$R(x, y, z, p, q)r + S(x, y, z, p, q)s + T(x, y, z, p, q)t = 0 \quad [271$$

in eine ebensolche Gleichung überführen.

An dieser Stelle beschäftigen wir uns nicht mit der ungleich schwierigeren Frage nach allen Berührungstransformationen, die eine vorgelegte lineare homogene Gleichung:

$$Rr + Ss + Tt = 0,$$

oder eine vorgelegte Monge-Ampèresche Gleichung in eine lineare homogene Gleichung umwandeln.



## § 3. Über Monge-Ampèresche Gleichungen mit intermediären Integralgleichungen.

**37.** Sind $u, v, w$ drei unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$, die paarweise in Involution liegen, so bestimmen die Gleichungen:

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c$$

mit den willkürlichen Parametern $a, b, c$, wie wir wiederholt hervorgehoben haben, $\infty^3$ Elementvereine, entweder Flächen, Kurven, oder Punkte, und zwar erhielten wir in dieser Weise jede Schar von $\infty^3$ Elementvereinen mit je $\infty^2$ Elementen, [die alle $\infty^5$ Elemente des Raumes umfaßt].

Eine Gleichung: $\Omega(u, v, w) = 0$

zwischen $u, v, w$ bestimmte, wenn wir $u, v, w$ als Bestimmungsstücke des Elementvereins auffaßten, $\infty^2$ Elementvereine der Schar. Dachten wir uns aber die Werte von $u, v, w$ als Funktionen von $x, y, z, p, q$ eingesetzt, so war die hervorgehende Gleichung:

$$\Omega(u(x, y, z, p, q), \quad v(x, y, z, p, q), \quad w(x, y, z, p, q)) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer bekannten vollständigen Lösung, bestehend aus $\infty^2$ Elementvereinen der gegebenen Schar. Das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung bestand daher aus den Umhüllungsflächen von je $\infty^1$ Flächen der vollständigen Lösung und gleichzeitig aus Umhüllungsflächen von je $\infty^1$ Elementvereinen des gegebenen Komplexes [von $\infty^3$ Elementvereinen].

Wir kennen hiermit eine große Kategorie von partiellen Differentialgleichungen, deren nichtsinguläre Integralgebilde eine gemeinsame Erzeugung haben.

**38.** Sind $u, v, w$ drei unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$, die paarweise in Involution liegen, und bestimmen dementsprechend die Gleichungen: $u = a$, $v = b$, $w = c$ $\infty^3$ Elementvereine, deren Inbegriff wir als einen Komplex von Elementvereinen bezeichnen, so können alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die die gemeinsame Form: $\Omega(u, v, w) = 0$ besitzen, integriert werden. Jede solche Gleichung besitzt [272 nämlich eine vollständige Lösung, bestehend aus $\infty^2$ Vereinen jenes Komplexes, und ihre nicht singulären Integrale sind Umhüllungsflächen von je $\infty^1$ Gebilden des Komplexes.

Es hat nun sein Interesse, zu bemerken, daß jedes einzelne Umhüllungsgebilde von $\infty^1$ Gebilden des gegebenen Komplexes durch zwei Gleichungen zwischen $u, v, w$ bestimmt wird.

Setzen wir in der Tat:

$$\Omega(u, v, w) = 0, \quad W(u, v, w) = 0,$$

so sind hiermit $\infty^1$ Gebilde des ursprünglichen Komplexes, und gleichzeitig ist ihre Umhüllungsfläche bestimmt. Sind: $u \equiv x$, $v \equiv y$, $w = z$, so bestimmen die Gleichungen: $\Omega(x, y, z) = 0$, $W(x, y, z) = 0$ in Cartesischen Koordinaten eine Kurve. Sind $u, v, w$ Zentrakoordinaten einer Kugel mit gegebenem Radius $K$, so bestimmen die Gleichungen $\Omega(u, v, w) = 0$, $W(u, v, w) = 0$ $\infty^1$ Kugeln mit dem Radius $K$ und zugleich deren Umhüllungsfigur.

Insbesondere kann man offenbar [im allgemeinen] alle solchen Scharen von $\infty^1$ Gebilden des Komplexes durch zwei Gleichungen von der Form:

$$v - \varphi(u) = 0, \quad w - \psi(u) = 0$$

definieren.

**39.** Betrachtet man nur eine Gleichung von der Form:

$$v - \varphi(u) = 0$$

und erteilt der Funktion $\varphi$ nach und nach alle möglichen Formen, so sind die nicht singulären Integralgebilde immer Umhüllungsgebilde von $\infty^1$ Gebilden des Komplexes, und umgekehrt, wenn irgend ein Umhüllungsgebilde von $\infty^1$ Gebilden des Komplexes vorliegt, so befriedigt es [im allgemeinen] immer eine ganz bestimmte Gleichung von dieser Form.

Hieraus folgt nun der Satz:

Sind $u$ und $v$ beliebige unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$, die in Involution liegen, so haben die beiden partiellen Differentialgleichungen: $u = a$, $v = b$ mit den Konstanten $a, b$ bekanntlich für jede $a, b$ $\infty^1$ gemeinsame Integralgebilde; diese $\infty^3$ Integralgebilde lassen sich definieren durch die Gleichungen:

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c,$$

wo $w$ dadurch bestimmt ist, daß es sowohl mit $u$, wie mit $v$ in Involution liegt. Bildet man nun eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$v - \varphi(u) = 0,$$

so sind deren nicht singuläre Integralgebilde immer Umhüllungsgebilde von $\infty^1$ Gebilden des Komplexes: $u = a$, $v = b$, $w = c$, und umgekehrt erfüllt jede Umhüllungsfigur [273 von $\infty^1$ Gebilden dieses Komplexes eine ganz bestimmte partielle Differentialgleichung $v - \varphi(u) = 0$.



Genau in derselben Lage sind die partiellen Differentialgleichungen: $\Omega(u, v, w) = 0$. Daraus folgt also, daß der Inbegriff aller Integralflächen aller partiellen Differentialgleichungen von der Form: $\Omega(u, v, w) = 0$ sich vollständig deckt mit dem Inbegriffe aller Umhüllungsgebilde von je $\infty^1$ Gebilden des Komplexes $u = a$, $v = b$, $w = c$.

**40.** Nun aber erfüllen alle Integralflächen aller partiellen Differentialgleichungen von der Form: $v - \varphi(u) = 0$, gleichgültig, ob $u$ und $v$ in Involution liegen, immer eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Diese Differentialgleichung bekommen wir, wenn wir für einen Augenblick die abgekürzte Bezeichnung:

$$\frac{dw(x, y, z, p, q)}{dx} = w_x + w_z p + w_p r + w_q s,$$

$$\frac{dw(x, y, z, p, q)}{dy} = w_y + w_z q + w_p s + w_q t$$

benutzen und die beiden Gleichungen:

$$\frac{dv}{dx} - \varphi'(u)\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} - \varphi'(u)\frac{du}{dy} = 0$$

bilden, durch Elimination von $\varphi'(u)$ in der Gestalt:

$$\frac{dv}{dx}\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{du}{dx} = 0,$$

oder ausgeführt:

$$(21) \quad \begin{cases} (u_p v_q - u_q v_p)(rt - s^2) + \{u_p(v_y + q v_z) - v_p(u_y + q v_z)\} r + \\ + \{u_q(v_y + q v_z) - u_p(v_x + p v_z) - v_q(u_y + q u_z) + v_p(u_x + p u_z)\} s + \\ + \{v_q(u_x + p u_z) - u_q(v_x + p v_z)\} t + \\ + \{(u_x + p u_z)(v_y + q v_z) - (u_y + q u_z)(v_x + p v_z)\} = 0. \end{cases}$$

Partielle Differentialgleichungen von dieser Form sind zuerst von Monge und später noch eingehender von Ampère betrachtet worden; wir bezeichnen daher alle partiellen Differentialgleichungen von der Form:

$$(22) \qquad H(x, y, z, p, q) r + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

als Monge-Ampèresche (partielle) Differentialgleichungen (zweiter Ordnung).

**41.** Wir haben hier die beiden folgenden Resultate erhalten:

Liegt irgend eine Schar von $\infty^3$ Elementvereinen vor (Flächen oder Kurven), die nicht nur aus Punkten besteht, so gibt es immer eine **Monge-Ampère**sche Differentialgleichung (22), deren allgemeines Integral aus lauter Umhüllungsflächen von $\infty^1$ Gebilden jenes Komplexes besteht.

Sind $u$ und $v$ unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$, so lassen sich die Integralflächen aller partiellen Differentialgleichungen: $v - \varphi(u) = 0$ definieren als Integral- [274
flächen einer **Monge-Ampère**schen Differentialgleichung zweiter Ordnung (21), die somit unendlich viele intermediäre Integrale von der Form: $v - \varphi(u) = 0$ besitzt.

Da sich die Gleichung (21) so schreiben läßt:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = 0,$$

so sagt sie aus, daß für jede ihrer Integralflächen $z = f(x, y)$ die beiden Größen $u$ und $v$ durch eine Relation gebunden sind; die Gleichung besitzt also keine andern Integralflächen, als die der Gleichungen: $v - \varphi(u) = 0$. Ferner sagt der Koeffizient: $u_p v_q - u_q v_p$ von $rt - s^2$ aus, daß die Gleichung (21) dann und nur dann linear ist, wenn die beiden Funktionen $u$ und $v$ in Bezug auf $p$ und $q$ nicht von einander unabhängig sind.

Liegen $u$ und $v$ insbesondere in Involution, so sind alle Integrale der Monge-Ampèreschen Gleichung Umhüllungsgebilde von $\infty^1$ unter den Elementvereinen, die durch die beiden Gleichungen: $u = a$, $v = b$ definiert sind. Ist $w$ eine von $u$ und $v$ unabhängige Funktion, die mit $u$ und $v$ in Involution liegt, so ist jede partielle Differentialgleichung von der Form: $\Omega(u, v, w) = 0$ eine intermediäre Integralgleichung der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung.

**42.** Sind insbesondere $\infty^3$ Kurven vorgelegt, die den Raum ausfüllen, so lassen sie sich definieren durch zwei in Involution liegende Gleichungen:

$$u(x, y, z, p, q) = a, \quad v(x, y, z, p, q) = b,$$

zwischen denen sich $p$ und $q$ eliminieren lassen, sodaß:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix} = 0 = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Bildet man daher die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung: $v = \varphi(u)$ mit der arbiträren Funktion $\varphi$, sowie die entsprechende **Monge-Ampère**sche Differentialgleichung, so verschwindet der Koeffizient von $rt - s^2$ identisch, und die letzte Gleichung ist demnach linear in $r, s, t$:

$$Hr + Ks + Lt + M = 0.$$

Ihre Integralflächen sind dadurch charakterisiert: sie sind sämtlich erzeugt von $\infty^1$ Kurven des besprochenen Kurvenkomplexes.



Ist nun $w$ eine von $u$ und $v$ unabhängige Lösung der beiden Gleichungen $[uf] = 0$, $[vf] = 0$, so ist jede Gleichung: $\Omega(u, v, w) = 0$ eine intermediäre Integralgleichung.

Beispiel: [Die Gleichung $r = 0$ besitzt die beiden intermediären Integralgleichungen: $p = a$, $z - xp = b$, aus denen sich $p$ und $q$ eliminieren lassen. Außerdem ist $[p, z - xp] = 0$ und beide Funktionen liegen mit $y$ in Involution, also gehört die Gleichung zu dem Komplexe der $\infty^3$ Geraden: $z - ax = b$, $y = c$ und besitzt das intermediäre Integral [275
$\Omega(p, z - xp, y) = 0$. Andererseits besitzt die Gleichung $s = 0$ die beiden intermediären Integrale $p = \varphi(x)$ und $q = \psi(y)$, deren jedes eine willkürliche Funktion enthält; aber hier liegt weder $p$ mit $x$, noch $q$ mit $y$ in Involution.]

**43.** Alle Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen, die ein intermediäres Integral von der Form: $v - \varphi(u) = 0$ besitzen, wobei $[uv] = 0$ ist, können durch Berührungstransformation auf eine gemeinsame Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke setzen wir, indem wir unter $w$ eine von $u$ und $v$ unabhängige Funktion verstehen, die mit $u$ und $v$ in Involution liegt:

$$w(x, y, z, p, q) = z_1 - p_1 x_1,$$
$$u(x, y, z, p, q) = p_1,$$
$$v(x, y, z, p, q) = y_1.$$

Hierdurch ist nun eine Berührungstransformation bestimmt. Um diese vollständig darzustellen, setzen wir:

$$dw - \alpha\, du - \beta\, dv = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} w_z - \alpha u_z - \beta v_z &= \varrho, \\ w_x - \alpha u_x - \beta v_x &= -\varrho p, \\ w_y - \alpha u_y - \beta v_y &= -\varrho q \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} w_p - \alpha u_p - \beta v_p = 0 \\ w_q - \alpha u_q - \beta v_q = 0 \end{bmatrix}$$

und hieraus bestimmen wir $\alpha$, $\beta$ und $\varrho$ (vgl. S. 222 [hier S. 719]). Dann ist:

$$z'' = w(x, y, z, p, q), \quad x'' = u, \quad y'' = v, \quad p'' = \alpha, q'' = \beta$$

eine Berührungstransformation.

Es ist aber auch:

$$z_1 - p_1 x_1 = w(x, y, z, p, q), \quad p_1 = u, \quad x_1 = -\alpha, \quad y_1 = v, \quad q_1 = \beta$$

eine Berührungstransformation. Diese führt die Flächen oder Kurven $u = a$, $v = b$, $w = c$ in Gerade über, die mit der $z, x$-Ebene parallel sind. Es gehen daher alle Integralflächen der vorgelegten Monge-Ampèreschen

Differentialgleichung in Regelflächen über, deren Gerade mit der $z, x$-Ebene parallel sind, also in Integralflächen: $z = Yx + Y_1$ der partiellen Differentialgleichung: $r = 0$.

Besitzt eine vorgelegte **Monge-Ampère**sche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung eine intermediäre Integralgleichung erster Ordnung von der Form: $v - \varphi(u) = 0$, wo $\varphi$ eine willkürliche Funktion ist, und sind dabei $u$ und $v$ unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$, die mit einander in Involution liegen, so ist es immer möglich, diese **Monge-Ampère**sche Gleichung durch Berührungstransformation auf die Form $r = 0$ zu bringen.

**44.** Aber noch mehr. Es liegt in der Natur der Sache, wie näher ausgeführt wird, daß die betreffende Kategorie von Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen bei Berührungstransformationen invariant bleibt.

Wenn in der Tat die Gleichung: $v - \varphi(u) = 0$ vorliegt, und dabei [276 $[uv] = 0$ ist, so gehen $u$ und $v$ bei irgend einer Berührungstransformation: $x_1 = X, y_1 = Y, \ldots, q_1 = Q$ in Funktionen $u_1, v_1$ über, die fortwährend in der Beziehung: $[u_1 v_1] = 0$ stehen. Die Gleichung: $v - \varphi(u) = 0$ nimmt dabei die Form: $v_1 - \varphi(u_1) = 0$ an; dementsprechend bekommt die Monge-Ampèresche Gleichung:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

die Form:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

**45.** Es ist sogar zu bemerken, daß dieses Resultat davon unabhängig ist, daß $u$ und $v$ in Involution liegen:

Wenn eine **Monge-Ampère**sche partielle Differentialgleichung ein allgemeines intermediäres Integral $v - \varphi(u) = 0$ mit der willkürlichen Funktion $\varphi$ besitzt, so geht sie bei jeder Berührungstransformation: $x_1 = X, \ldots$ in eine **Monge-Ampère**sche Gleichung über, die dann selbst eine allgemeine intermediäre Integralgleichung $v_1 - \varphi(u_1) = 0$ mit einer willkürlichen Funktion besitzt.

Es liegt nun außerordentlich nahe, zu vermuten, daß jede Monge-Ampèresche Differentialgleichung bei Berührungstransformation in eine ebensolche Gleichung übergeht. Ja man kann dies sogar direkt beweisen.

[Hier folgt im Manuskripte eine Ableitung der Formeln, durch die $r, s, t$ bei einer beliebigen Berührungstransformation transformiert werden,



und es wird ähnlich wie in § 1 auf S. 243ff. [hier S. 742ff.] gezeigt, daß $r_1, s_1, t_1, r_1 t_1 - s_1^2$ linear gebrochene Funktionen von $r, s, t, rt - s^2$ werden und zwar Funktionen mit gemeinsamem Nenner, wodurch die eben ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. Ferner folgen Betrachtungen, die in § 2 ausführlicher und vollständiger dargestellt sind.]

**46.** Bei unseren Untersuchungen über Berührungstransformationen trafen wir wiederholt partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit intermediären Integralgleichungen; diese Gleichungen zweiter Ordnung besaßen die Form:

$$H(x, y, z, p, q)r + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0 \tag{22}$$

und gehörten somit sämtlich zu der von Monge und Ampère untersuchten Kategorie. Nun gibt es allerdings noch weitere partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die intermediäre Integralgleichungen haben. Nichtsdestoweniger werden wir uns in Übereinstimmung mit der geschichtlichen Entwickelung zunächst mit den intermediären Integralgleichungen der Monge-Ampèreschen Gleichungen zweiter Ordnung beschäftigen.

Wir denken uns, daß eine bestimmte Monge-Ampèresche [277 Gleichung (22) vorliegt, und stellen uns die Aufgabe, zu untersuchen, ob sie intermediäre Integralgleichungen besitzt, sowie, die vorhandenen intermediären Integralgleichungen zu bestimmen. Indem wir dieses Problem in Angriff nehmen, wollen wir ausdrücklich hervorheben, daß wir zunächst nur intermediäre Integralgleichungen von der Form:

$$f(x, y, z, p, q) = a \tag{23}$$

suchen, die nicht von $p$ und $q$ beiden frei sind und die eine willkürliche Konstante $a$ enthalten. Später vervollständigen wir unsere Entwickelungen, indem wir insbesondere zeigen, wie man intermediäre Integralgleichungen von der speziellen Form: $f(x, y, z) = a$ finden kann.

**47.** Alle Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung (22), die gleichzeitig Integralflächen einer bestimmten intermediären Integralgleichung (23) sind, erfüllen zugleich die beiden durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen:

$$\begin{cases} f_p r + f_q s + f_x + p f_z = 0, \\ f_p s + f_q t + f_y + q f_z = 0, \end{cases} \tag{24}$$

sowie die aus diesen abgeleitete Gleichung:

$$\begin{cases} f_p f_q (rt - s^2) - \{f_q(f_y + q f_z) + f_p(f_x + p f_z)\} s - \\ \qquad - (f_x + p f_z)(f_y + q f_z) = 0, \end{cases} \tag{24'}$$

sie erfüllen also auch die durch Elimination der Größen $r, t, rt-s^2$ zwischen den Gleichungen (22), (24), (24′), hervorgehende Relation:

$$s\{N[f_q(f_y+qf_z)+f_p(f_x+pf_z)]-Hf_q^2+2Kf_pf_q-Lf_p^2\}+$$
$$+N(f_x+pf_z)(f_y+qf_z)-Hf_q(f_x+pf_z)-Lf_p(f_y+qf_z)+Mf_pf_q=0,$$

oder:

$$s\Phi+\Psi=0.$$

Hier müssen die beiden Koeffizienten $\Phi$ und $\Psi$ für die betreffenden Integralflächen verschwinden, denn sonst könnte man $s$ und mit Benutzung der Gleichungen (24) auch $r$ und $t$ als Funktionen von $x, y, z, p, q$ ausdrücken, und dann enthielte die Taylorsche Reihenentwickelung:

$$z=z_0+p_0(x-x_0)+q_0(y-y_0)+\cdots,$$

die alle $\infty^\infty$ Integralflächen der Gleichung (23) darstellt, außer $a$ nur drei wesentliche Parameter, was offenbar widersinnig ist.

Es erfüllt also jedes $f(x,y,z,p,q)$, das gleich Konstans gesetzt eine intermediäre Integralgleichung unsrer Monge-Ampèreschen Differentialgleichung darstellt, die beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(25)\quad\begin{cases}N\{f_q(f_y+qf_z)+f_p(f_x+pf_z)\}-Hf_q^2+2Kf_pf_q-Lf_p^2=0, \\ N(f_x+pf_z)(f_y+qf_z)-Hf_q(f_x+pf_z)-Lf_p(f_y+qf_z)+Mf_pf_q=0.\end{cases}$$ [278

Die erste dieser Gleichungen kann man so schreiben:

$$(N(f_y+qf_z)-Hf_q+Kf_p)f_q+(N(f_x+pf_z)-Lf_p+Kf_q)f_p=0$$

und die zweite nach Multiplikation mit $N$ unter Benutzung der ersten so:

$$\{N(f_y+qf_z)-Hf_q+Kf_p\}\{N(f_x+pf_z)-Lf_p+Kf_q\}+$$
$$+(NM-LH+K^2)f_pf_q=0.$$

Setzt man daher:

$$(26)\qquad -LH+NM+K^2=G,$$

so findet man, daß $f$ im Falle $G\neq 0$ entweder die beiden Gleichungen:

$$(27)\quad\begin{cases}A_1f=f_x+pf_z-\frac{L}{N}f_p+\frac{K+\sqrt{G}}{N}f_q=0, \\ B_1f=f_y+qf_z+\frac{K-\sqrt{G}}{N}f_p-\frac{H}{N}f_q=0,\end{cases}$$

oder die beiden Gleichungen:

$$(28)\quad\begin{cases}A_2f=f_x+pf_z-\frac{L}{N}f_p+\frac{K-\sqrt{G}}{N}f_q=0, \\ B_2f=f_y+qf_z+\frac{K+\sqrt{G}}{N}f_p-\frac{H}{N}f_q=0\end{cases}$$



befriedigen muß, während man im Falle $G=0$ für $f$ ein System von Differentialgleichungen findet, nämlich:

$$(29)\quad\begin{cases}Af=f_x+pf_z-\frac{L}{N}f_p+\frac{K}{N}f_q=0, \\ Bf=f_y+qf_z+\frac{K}{N}f_p-\frac{H}{N}f_q=0.\end{cases}$$

**48.** Hierbei ist allerdings $N$ von Null verschieden angenommen, und in der Tat brauchen wir, da der Fall $N=0$ bei Berührungstransformation nicht invariant bleibt (vgl. S. 265 [hier S. 766 f.]), diesen Fall bei Ableitung solcher Eigenschaften, die bei Berührungstransformation invariant bleiben, nicht besonders zu berücksichtigen. Dasselbe gilt von den Möglichkeiten, daß $f_p$, oder $f_q$, oder beide verschwinden können. Da jedoch der Fall $N=0$ praktisch besonders wichtig ist, so sei wenigstens bemerkt, daß sich die Gleichungen (25) für ihn auf:

$$(25')\quad\begin{cases}Hf_q^2-2Kf_pf_q+Lf_p^2=0, \\ H(f_x+pf_z)f_q+L(f_y+qf_z)f_p-Mf_pf_q=0\end{cases}$$

reduzieren, daß man zu setzen hat:

$$(26')\qquad -LH+K^2=G,$$

und daß im Falle $G\neq 0$ an Stelle der Gleichungen (27) und (28) [279 diese treten:

$$(30)\quad\begin{cases}(K\pm\sqrt{G})f_p-Hf_q=0, \\ (K\pm\sqrt{G})(f_x+pf_z)+L(f_y+qf_z)-Mf_q=0.\end{cases}$$

Auf besondre Fälle, die hier noch eintreten können, wollen wir nicht eingehen.

**49.** Fassen wir bloß den Fall $N\neq 0$ ins Auge, so finden wir also für $f$ stets zwei von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen in den fünf Veränderlichen $x, y, z, p, q$. Diese Gleichungen besitzen höchstens drei unabhängige Lösungen, oder sie besitzen zwei unabhängige Lösungen, oder eine, oder gar keine, und die allgemeinste Lösung hat die Form einer willkürlichen Funktion der vorhandenen Lösungen. Zu beachten ist allerdings, daß die beiden Gleichungen unter Umständen auch singuläre Integralgleichungen haben können, [denen dann intermediäre Integralgleichungen entsprechen, die keine willkürliche Konstante enthalten].

Sollen die beiden Gleichungen für $f$ ein zweigliedriges vollständiges System bilden, soll also zum Beispiel:

$$A_1B_1f-B_1A_1f=\varrho A_1f+\mu B_1f$$

sein, so muß $A_1 B_1 f - B_1 A_1 f$ identisch verschwinden, weil ja darin die Koeffizienten von $f_x$ und $f_y$ null sind. Da nun der Koeffizient von $f_z$ den Wert:

$$\frac{K+\sqrt{G}}{N} - \frac{K-\sqrt{G}}{N} = \frac{2\sqrt{G}}{N}$$

bekommt, so treten drei unabhängige Lösungen jedenfalls nur dann auf, wenn $G = 0$. Diese notwendige Bedingung ist aber nicht hinreichend.

Nehmen wir an, daß $G \neq 0$, und daß $u$ eine Lösung von $A_1 f = 0$, $B_1 f = 0$ ist, also:

$$u_x + p u_z = \quad \frac{L}{N} u_p - \frac{K+\sqrt{G}}{N} u_q,$$

$$u_y + q u_z = - \frac{K-\sqrt{G}}{N} u_p + \frac{H}{N} u_q,$$

und $v$ eine Lösung von $A_2 f = 0$, $B_2 f = 0$, also:

$$v_x + p v_z = \quad \frac{L}{N} v_p - \frac{K-\sqrt{G}}{N} v_q,$$

$$v_y + q v_z = - \frac{K+\sqrt{G}}{N} v_p + \frac{H}{N} v_q.$$

Setzen wir diese Werte in:

$$[uv] = u_p(v_x + p v_z) + u_q(v_y + q v_z) - v_p(u_x + p u_z) - v_q(u_y + q u_z)$$

ein, so kommt: [280

$$[uv] = - \frac{K-\sqrt{G}}{N} u_p v_q - \frac{K+\sqrt{G}}{N} u_q v_p +$$

$$+ \frac{K+\sqrt{G}}{N} v_p u_q + \frac{K-\sqrt{G}}{N} v_q u_p \equiv 0.$$

Demnach haben wir den

**Satz 27.** Ist $G \neq 0$, so besitzt jedes der beiden Systeme (27) und (28) höchstens zwei unabhängige Lösungen, und zwar liegt jede etwaige Lösung von (27) mit jeder Lösung von (28) in Involution.

**50.** Die eben durchgeführte Rechnung ist aber auch auf den Fall $G = 0$ anwendbar, nur daß dann $u$ und $v$ beide Lösungen des Systems (29) sind. Folglich gilt

**Satz 28.** Ist $G = 0$, und besitzt das System (29) zwei, oder gar drei unabhängige Lösungen, so liegen alle diese Lösungen paarweise in Involution.

Umgekehrt wissen wir, daß, wenn eine Monge-Ampèresche Gleichung zwei intermediäre Integralgleichungen $u = a$, $v = b$ besitzt, die in Involution liegen, [und wenn überdies $v - \varphi(u) = 0$ für jede Funktion $\varphi$



eine intermediäre Integralgleichung darstellt,] daß dann noch eine dritte intermediäre Integralgleichung $v = c$ existiert, die mit beiden in Involution liegt (vgl. S. 255 [hier S. 755])

Wenn daher für eine **Monge-Ampère**sche Gleichung die Größe $G = 0$ ist, so gibt es nur noch folgende Möglichkeiten:

1. Drei unabhängige intermediäre Integralgleichungen: $u = a$, $v = b$, $w = c$, die paarweise in Involution liegen. Dann stellt jede Relation $F(u, v, w) = 0$ eine intermediäre Integralgleichung dar, und die vorgelegte Gleichung zweiter Ordnung kann durch Berührungstransformation die kanonische Form: $r = 0$ erhalten.

2. Nur eine intermediäre Integralgleichung: $u = a$.

3. Gar keine intermediäre Integralgleichung mit willkürlicher Konstanten.

**51.** Wenn $G \neq 0$ ist, so sind verschiedene Fälle möglich. Hier wollen wir nur noch einige Transformationsresultate angeben, die von Ampère herrühren, aber von ihm in sehr schwerfälliger und überdies in unvollkommener Weise abgeleitet worden sind.

Liegt eine Monge-Ampèresche Gleichung:

$$rt - s^2 + Hr + 2Ks + Lt + M = 0 \tag{31}$$

vor, für die:

$$G = -HL + M + K^2 \neq 0$$

ist, und hat das System $A_1 f = 0$, $B_1 f = 0$ wenigstens eine Lösung $u$, andrerseits das System: $A_2 f = 0$, $B_2 f = 0$ wenigstens eine Lösung $v$, so gibt es, weil $[uv] \equiv 0$ ist (nach S. 254 [hier S. 754f.]), eine Berüh- [281
rungstransformation von der Gestalt:

$$p_1 = u(x, y, z, p, q),$$

$$q_1 = v(x, y, z, p, q),$$

$$z_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1 = w(x, y, z, p, q),$$

wo $w$ durch die Gleichungen: $[uf] = 0$, $[vf] = 0$ bestimmt ist.[1])

Die transformierte Monge-Ampèresche Gleichung hat also zwei intermediäre Integralgleichungen: $p_1 = a$ und $q_1 = b$. Also sind alle Ebenen des Raumes (als gemeinsame Integralflächen dieser beiden intermediären Integralgleichungen) Integralgebilde der transformierten Gleichung, die somit die Form hat:

$$H_1 r_1 + 2 K_1 r_1 + L_1 t_1 + N_1 (r_1 t_1 - s_1^2) = 0.$$

1) Am Rande bemerkt Lie: „Es wäre wünschenswert, daß die Invarianz der Bedingung $G \neq 0$ direkt nachgewiesen würde. Das läßt sich vielleicht auf diesem Standpunkte nicht leicht machen. Gewiß aber indirekt."

Es fragt sich, ob es denkbar ist, daß $G_1$ verschwindet. Wir müssen beide Möglichkeiten prüfen.

Die intermediären Integrale sind bestimmt durch:

$$N_1(f_{x_1}+p_1 f_{z_1}) - L_1 f_{p_1} + (K_1 \pm \sqrt{G_1}) f_{q_1} = 0,$$
$$N_1(f_{y_1}+q_1 f_{z_1}) + (K_1 \mp \sqrt{G_1}) f_{p_1} - H_1 f_{q_1} = 0.$$

Ist $p_1$ eine Lösung des einen Systems, etwa des mit dem oberen Vorzeichen, so ist: $L_1 = 0$, $K_1 - \sqrt{G_1} = 0$. Dann muß $q_1$ eine Lösung des andern Systems, des mit dem unteren Vorzeichen sein, also $H_1 = 0$, $K_1 - \sqrt{G_1} = 0$. Wir finden mithin: $H_1 = L_1 = 0$, $G_1 = K_1^2$, und unsre transformierte Gleichung hat die Form:

$$2 K_1 s_1 + N_1 (r_1 t_1 - s_1^2) = 0.$$

Hier sind zwei Möglichkeiten zu berücksichtigen. Der Fall $K_1 = 0$ gäbe:

$$r_1 t_1 - s_1^2 = 0.$$

Dieser Fall ist aber ausgeschlossen, denn dann wäre [wie man sich sofort überzeugt, jede Gleichung von der Form:

$$F(p_1, q_1, z_1 - x_1 p_1 - y_1 q_1) = 0$$

eine intermediäre Integralgleichung der transformierten Monge-Ampèreschen Gleichung, und es wäre also] auch in der ursprünglich vorgelegten Gleichung $G = 0$. Folglich können wir unsre transformierte Gleichung in der Form:

$$s_1 + \frac{N_1}{2 K_1}(r_1 t_1 - s_1^2) = 0$$

schreiben. Machen wir sodann eine dualistische Transformation, so [282
kommt die Form:

$$s_2 + F(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2) = 0.$$

Damit haben wir den Satz von Ampère:

**Satz 29.** Liegt eine **Monge-Ampère**sche Differentialgleichung vor, für die $G \neq 0$ ist, und ist dabei $u(x, y, z, p, q)$ eine Lösung der Gleichungen: $A_1 f = 0$, $B_1 f = 0$ und $v(x, y, z, p, q)$ eine Lösung von $A_2 f = 0$, $B_2 f = 0$, so ist es immer möglich, die vorgelegte Gleichung durch eine passende Berührungstransformation auf die Form:

$$s + F(x, y, z, p, q) = 0$$

zu bringen.

Die vorstehenden Betrachtungen sind einfacher und wohl auch allgemeingültiger als die von Ampère angestellten.



## § 4. Geometrische Deutung der linearen Monge-Ampèreschen Gleichungen.

**52.** Betrachten wir zuerst den Fall $G = 0$, also eine Gleichung von der Form:

$$r + 2 N s + N^2 t + U(x, y, z, p, q) = 0.$$

Auf irgend einer Fläche betrachten wir eine Kurve, deren Tangente im Punkte $x, y, z$ die Richtungskosinus $\alpha, \beta, \gamma$ habe. Dann ist:

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0,$$

woraus folgt:

$$p\,d\alpha + q\,d\beta - d\gamma + \alpha\,dp + \beta\,dq = 0,$$

oder, wenn $s$ die Bogenlänge der Kurve bezeichnet:

$$p\frac{d\alpha}{ds} + q\frac{d\beta}{ds} - \frac{d\gamma}{ds} + r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0.$$

Nun aber sind $d\alpha : ds$, $d\beta : ds$, $d\gamma : ds$ Richtungskoeffizienten der Hauptnormalen unsrer Kurve. Sind $\lambda, \mu, \nu$ die Richtungswinkel der Hauptnormalen, so ist:

$$\cos\lambda = \frac{\frac{d\alpha}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}}, \ \cdots,$$

und nach einer bekannten Formel für den Krümmungsradius $R$ ist:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}},$$

also: [283

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos\lambda}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\cos\mu}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\cos\nu}{R},$$

und, wenn $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$ die Winkel der Flächennormalen sind:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}\{\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1\} + r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0.$$

Bezeichnen wir noch den Winkel der Hauptnormalen mit der Flächennormalen mit $\Theta$, so ist:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}\cos\Theta + r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\gamma^2 = 0,$$

und denken wir uns endlich $\Theta = 0$, also $\cos\Theta = 1$, so wird:

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 + \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R_n} = 0,$$

wo $R_n$ den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes bezeichnet, der durch die Tangente unsrer Kurve im Punkte $x, y, z$ bestimmt ist.

**53.** Hiermit haben wir eine geometrische Deutung der allgemeinen Monge-Ampèreschen Gleichung:

$$r + 2N(x, y, z, p, q)s + N^2 t + U(x, y, z, p, q) = 0.$$

Diese sagt aus, daß jedem Flächenelemente eine Richtung, nämlich die Richtung:

$$\frac{dy}{dx} = N(x, y, z, p, q), \quad dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

zugeordnet ist, und daß auf jeder Integralfläche, die das Flächenelement enthält, der Krümmungshalbmesser des zu dieser Richtung gehörigen Normalschnittes eine gegebene Funktion $F(x, y, z, p, q)$ ist:

$$R_n = \frac{(1 + N^2 + (p + qN)^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{U(x, y, z, p, q)}.$$

Da die Gleichung:

$$r + 2Ns + N^2 t + U = 0$$

linear ist, und da $G$ für sie verschwindet, so hat sie nach den früheren Ergebnissen (S. 280 und 274 [hier S. 782 und 776]) dann und nur dann mehr als eine intermediäre Integralgleichung $u(x, y, z, p, q) = a$, wenn sie deren drei hat: $u = a$, $v = b$, $w = c$, wo $u, v, w$ paarweise in Involution liegen, und wo die $\infty^3$ Vereine: $u = a$, $v = b$, $w = c$ einen Komplex von $\infty^3$ Kurven bilden. Demnach sagt die betreffende partielle Differentialgleichung in diesem Falle aus:

Im Raume sind gegeben $\infty^3$ Kurven. Gesucht werden alle Flächen, die von den berührenden Kurven dieses [284 Kurvenkomplexes zugleich oskuliert werden.

**54.** Jetzt sei vorgelegt die allgemeine lineare und homogene Gleichung:

$$A(x, y, z, p, q)r + Bs + Ct = 0.$$

Es ist: $rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0$ die Differentialgleichung der Haupttangentenkurven. Setzen wir daher:

$$r\xi_1\xi_2 + s(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + t\eta_1\eta_2 = 0,$$

so sind die Richtungen $\xi_1 : \eta_1$ und $\xi_2 : \eta_2$ zu den Haupttangenten konjugiert. Nun können $\xi_1 : \eta_1$ und $\xi_2 : \eta_2$ immer aus den Gleichungen:

$$\frac{\xi_1\xi_2}{A} = \frac{\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1}{B} = \frac{\eta_1\eta_2}{C}$$

bestimmt werden, und zwar als Wurzeln der Gleichung:

$$Aw^2 - Bw + C = 0.$$

Jedem Flächenelemente sind somit zwei Richtungen zugeordnet, und demzufolge jeder Fläche zwei auf ihr liegende Scharen von je $\infty^1$ Kurven.



Es handelt sich darum, alle Flächen zu finden, für welche diese Kurvenscharen konjugierte Kurvenscharen sind.

**55.** Soll nun eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

ein intermediäres Integral sein, so müssen die beiden Gleichungen:

$$F_p r + F_q s + F_x + pF_z = 0,$$
$$F_p s + F_q t + F_y + qF_z = 0$$

die Gleichung: $Ar + Bs + Ct = 0$ nach sich ziehen, und es müssen auch auf den Integralflächen von $F = 0$ die beiden einem Elemente $x, y, z, p, q$ zugeordneten Richtungen konjugiert sein. Aus den beiden angegebenen Gleichungen erhält man zur Bestimmung der Haupttangentenrichtungen:

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

des Flächenelements $x, y, z, p, q$ die Gleichung:

$$s(F_q^2 dx^2 - 2F_pF_q dx\,dy + F_p^2 dy^2) +$$
$$+ F_q(F_x + pF_z)dx^2 + F_p(F_y + qF_z)dy^2 = 0,$$

und da die beiden dem Elemente $x, y, z, p, q$ zugeordneten Richtungen $\xi_1 : \eta_1$ und $\xi_2 : \eta_2$ zu den Haupttangentenrichtungen harmonisch liegen, so ist:

$$s(F_q\xi_1 - F_p\eta_1)(F_q\xi_2 - F_p\eta_2) +$$
$$+ F_q(F_x + pF_z)\xi_1\xi_2 + F_p(F_y + qF_z)\eta_1\eta_2 = 0.$$

Verschwände hier der Faktor von $s$ nicht, so wären in jedem Elemente [285 $x, y, z, p, q$ die Haupttangentenrichtungen vollständig bestimmt. Sehen wir daher von dem trivialen Falle ab, daß die gemeinsamen Integralflächen der beiden Gleichungen $F = 0$ und $Ar + Bs + Ct = 0$ sämtlich abwickelbar wären, so müßten diese gemeinsamen Integralflächen zwei Differentialgleichungen von der Form:

$$r + 2\nu_1 s + \nu_1^2 t = 0,$$
$$r + 2\nu_2 s + \nu_2^2 t = 0$$

befriedigen, wo $\nu_1$ und $\nu_2$ zwei bekannte, von einander verschiedene Funktionen von $x, y, z, p, q$ wären. Dann aber bekäme man für die vier dritten Ableitungen von $z$ nach $x$ und $y$ vier Gleichungen, deren Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\nu_1 & \nu_1^2 & 0 \\ 1 & 2\nu_2 & \nu_2^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2\nu_1 & \nu_1^2 \\ 0 & 1 & 2\nu_2 & \nu_2^2 \end{vmatrix} = -(\nu_1 - \nu_2)^4$$

nicht verschwände, die also nach den dritten Ableitungen von $z$ auflösbar wären. Es gäbe also höchstens $\infty^3$ Integralflächen von der verlangten Beschaffenheit, und $F=0$ wäre gar kein intermediäres Integral.

**56.** Damit ist bewiesen, daß der Ausdruck:

$$(F_q \xi_1 - F_p \eta_1)(F_q \xi_2 - F_p \eta_2)$$

verschwinden muß, daß also die eine der beiden dem Elemente $x, y, z, p, q$ zugeordneten Richtungen mit der charakteristischen Richtung zusammenfällt, die die Gleichung $F=0$ dem Elemente zuordnet. Man könnte sich leicht überzeugen, daß das auch noch in dem vorhin ausgeschlossenen Falle gilt, wo alle Integralflächen von $F=0$ abwickelbar sind, wo also $F=0$ die Form: $F(p,q)=0$ besitzt.

Da jetzt in jedem durch einen Punkt $x, y, z$ gehenden Elemente $x, y, z, p, q$ die charakteristische Richtung bekannt ist, die eine etwaige intermediäre Integralgleichung $F=0$ bestimmt, der das Element genügt, so werden die $\infty^1$ Elementarkegel, die ein etwaiges intermediäres Integral $F=$ const. dem Punkte $x, y, z$ zuordnet, durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung in $p, q$ gefunden. Das ist auch analytisch evident und gilt sogar, wie die Formeln (30) auf S. 279 [hier S. 781] zeigen, bei jeder Monge-Ampèreschen Gleichung (22), für die $N=0$ ist.

Dementsprechend findet man durch Integration einer zweiten gewöhnlichen Differentialgleichung die $\infty^1$ Scharen von Elementen, die ein intermediäres Integral $F=$ const. einer beliebigen Ebene zuordnet.

**57.** Wir nehmen $\infty^2$ Flächen: [286

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0$$

und ordnen jeder eine andre Fläche:

$$\Psi(x, y, z, a, b) = 0$$

zu. Sodann konstruieren wir in jedem Punkte einer Fläche $\Phi(a,b)=0$ den Elementarkegel, dessen Ebenen die entsprechende Fläche $\Psi(a,b)=0$ berühren. Auf diese Weise ordnen wir jeder Fläche $\Phi(a,b)=0$ $\infty^2$ Elementarkegel zu, deren Scheitel auf dieser Fläche liegen. Diese $\infty^2$ Kegel haben zusammen $\infty^3$ Elemente, die durch zwei Gleichungen:

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0, \quad V(x, y, z, p, q, a, b) = 0$$

bestimmt sind. Lösen wir diese Gleichungen nach $a$ und $b$ auf:

$$u(x, y, z, p, q) = a, \quad v(x, y, z, p, q) = b,$$

so besitzt die Monge-Ampèresche Gleichung:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$



die Form:
$$R(x, y, z, p, q)r + Ss + Tt = 0,$$
und zwar erhalten wir so alle Monge-Ampèreschen Gleichungen von dieser Form mit einer intermediären Integralgleichung von der Form:

$$v - \varphi(u) = 0,$$

die eine willkürliche Funktion enthält.

**58.** Ist überhaupt ein intermediäres Integral von der Form: [287 $v - \varphi(u) = 0$ vorgelegt, so hat die zugehörige Monge-Ampèresche Gleichung die Form:

$$(u_p v_q - u_q v_p)(rt - s^2) + \cdots = 0.$$

Wenn daher eine lineare Monge-Ampèresche Gleichung ein intermediäres Integral $v - \varphi(u) = 0$ besitzt, so müssen $p$ und $q$ zwischen $u=a$, $v=b$ eliminiert werden können.

Man findet daher alle linearen [homogenen] Monge-Ampèreschen Gleichungen mit einem solchen intermediären Integrale, indem man den Punkten jeder Fläche der Schar $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ nach arbiträrem Gesetze jedesmal einen Elementarkegel zuordnet.

**59.** Auch die allgemeine lineare Monge-Ampèresche Gleichung:

$$Rr + 2Ss + Tt + U = 0$$

läßt eine geometrische Deutung zu, die der im Anfange des Paragraphen für den besonderen Fall $RT - S^2 = 0$ gegebenen analog ist.

Auf irgend einer Fläche betrachten wir zwei verschiedene durch den Punkt $x, y, z$ gehende Kurven, deren Tangenten die Richtungskosinus: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ haben, sodaß also:

$$p\alpha_1 + q\beta_1 = \gamma_1, \quad p\alpha_2 + q\beta_2 = \gamma_2$$

und:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + (p\alpha_1 + q\beta_1)^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + (p\alpha_2 + q\beta_2)^2 = 1$$

ist. Sind $R_1$ und $R_2$ die Krümmungshalbmesser der durch diese Tangenten bestimmten Normalschnitte der Fläche, so haben wir:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R_1} + r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2 = 0,$$ [288

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R_2} + r\alpha_2^2 + 2s\alpha_2\beta_2 + t\beta_2^2 = 0,$$

und wir können versuchen, zwei Multiplikatoren $\lambda_1$ und $\lambda_2$ so zu bestimmen, daß:

$$\begin{aligned} \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 &= R, \\ \lambda_1\alpha_1\beta_1 + \lambda_2\alpha_2\beta_2 &= S, \\ \lambda_1\beta_1^2 + \lambda_2\beta_2^2 &= T, \\ \sqrt{1+p^2+q^2}\left(\frac{\lambda_1}{R_1} + \frac{\lambda_2}{R_2}\right) &= U \end{aligned}$$

wird. Durch Elimination der $\lambda$ ergibt sich jetzt noch eine Bedingung für $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, nämlich:

$$R\beta_1\beta_2 - S(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + T\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

und diese sagt aus, daß die beiden in der Tangentialebene des Punktes $x, y, z$ liegenden Richtungen $\alpha_1, \beta_1$ und $\alpha_2, \beta_2$ zu den beiden charakteristischen Richtungen, die die Differentialgleichung $Rr + 2Ss + Tt + U = 0$ dem Elemente $x, y, z, p, q$ zuordnet, harmonisch sein müssen; denn diese charakteristischen Richtungen sind durch die Gleichung:

$$R\,dy^2 - 2S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0$$

bestimmt.

Im ganzen müssen also $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ drei von $\lambda_1$ und $\lambda_2$ freie Relationen befriedigen, wenn es möglich sein soll, $\lambda_1$ und $\lambda_2$ in der verlangten Weise zu bestimmen; aber auch nicht mehr als drei, denn in der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & R \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & S \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & T \end{vmatrix}$$

verschwinden nicht alle zweireihigen Determinanten, wenigstens, wenn man voraussetzt, daß zwei verschiedene charakteristische Richtungen vorhanden sind, daß also $RT - S^2$ nicht verschwindet.

Wählt man nun $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ so, daß diese drei Relationen befriedigt werden, was auf $\infty^1$ verschiedene Arten möglich ist, so sind $\lambda_1$ und $\lambda_2$ vollständig bestimmt, etwa durch die Gleichungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = R(1 + p^2) + 2Spq + T(1 + q^2), \quad \alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 = R,$$

denn $\alpha_2^2$ kann als verschieden von $\alpha_1^2$ angenommen werden.

**60.** Demnach kann jede lineare Monge-Ampèresche Gleichung auf $\infty^1$ Arten so gedeutet werden, daß sie ausdrückt, daß auf jeder ihrer Integralflächen die Krümmungen zweier zu den beiden charakteristischen [289
Richtungen harmonisch liegender Normalschnitte eine lineare Relation erfüllen, deren Koeffizienten Funktionen von $x, y, z, p, q$ sind. Diese Funktionen sind bekannt, sobald man das Paar von Normalschnitten gewählt hat.

**61.** Man kann aber auch den Größen $\lambda_1$ und $\lambda_2$ von vornherein noch eine Relation vorschreiben, zum Beispiel $\lambda_1 = \lambda_2$. Dann hat man:

$$2\lambda_1 = R(1 + p^2) + 2Spq + T(1 + q^2),$$

ferner:

$$\lambda_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = R,$$

also ergibt sich:

$$\text{(I)} \qquad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\{R(1+p^2) + 2Spq + T(1+q^2)\} = 2R,$$



wozu noch kommt:

$$\text{(II)} \qquad R\beta_1\beta_2 - S(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + T\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + (p\alpha_1 + q\beta_1)^2 = 1,$$

$$\text{(IV)} \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + (p\alpha_2 + q\beta_2)^2 = 1.$$

Es ist a priori klar, daß die aus (II), (III), (IV) hervorgehende Relation zwischen $\alpha_1, \alpha_2$ nicht mit (I) zusammenfallen kann, sonst könnte man nämlich die beiden Richtungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ zu einander senkrecht wählen, und es wäre dann die mittlere Krümmung eine Funktion der Lage des Flächenelementes, was nicht der Fall ist. Folglich kann man jede lineare Monge-Ampèresche Gleichung auch so deuten:

Die Summe der Krümmungen von zwei bestimmten, nicht auf einander senkrecht stehenden Normalschnitten ist eine bestimmte Funktion von $x, y, z, p, q$.

## Kapitel III.

## Die Berührungstransformationen des Raumes, die durch zwei Gleichungen zwischen $x, y, z, x_1, y_1, z_1$ definiert werden.

### § 1. Kurvensysteme und Kurvenkomplexe.

**1.** Eine Kurvenschar, die aus $\infty^2$ den Raum ausfüllenden Kurven besteht, bezeichnen wir als ein Kurvensystem. Sind die Kurven gerade Linien, so haben wir ein Strahlensystem. Den von Plücker eingeführten Ausdruck Linienkongruenz, den ich von 1870 an benutzt habe, lasse ich fallen, da die Bezeichnung Strahlensystem nicht bloß älter, [290
sondern im Grunde auch ausdrucksvoller ist.

Die Gleichungen eines Kurvensystems haben die Form:

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0, \quad \psi(x, y, z, a, b) = 0,$$

lassen sich aber auch in der Form:

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b$$

schreiben; die Kurven des Systems lassen sich als die Integralkurven eines simultanen Systems:

$$\frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)}$$

definieren, oder als die Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0.$$

Hier wollen wir jedoch die Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zu Grunde legen.

**2.** Verlangt man, daß die Kurve $a, b$ von einer unendlich benachbarten Kurve $a + da$, $b + db$ geschnitten werden soll, so muß werden:

$$\varphi_a da + \varphi_b db = 0, \quad \psi_a da + \psi_b db = 0,$$

und eliminiert man $x, y, z$ aus diesen vier Gleichungen, so kommt im allgemeinen eine Gleichung:

$$\omega\left(a, b, \frac{da}{db}\right) = 0.$$

Nun liefert jede Gleichung $b - \chi(a) = 0$ eine Fläche, die von $\infty^1$ Kurven des Systems erzeugt ist. Wird daher die Differentialgleichung $\omega = 0$ durch die Gleichung:

$$\Omega(b, a, K) = 0$$

mit der willkürlichen Konstanten $K$ integriert, so erhält man $\infty^1$ Flächen, die von Kurven des Systems erzeugt sind, und auf deren jeder je zwei benachbarte Kurven einander schneiden und somit eine Umhüllungskurve $U$ bestimmen. Man bekommt so $\infty^1$ Kurven $U$, die eine Fläche $f$ erzeugen, und diese Fläche, die wir als die Brennfläche des Systems bezeichnen, wird von jeder Kurve des Systems berührt.

**3.** Setzen wir zum Beispiel voraus, daß die Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ in $x, y, z, a, b$ algebraisch sind, so ist die Differentialgleichung $\omega = 0$ auch algebraisch, liefert aber im allgemeinen mehrere Bestimmungen für $db : da$. Sind die Kurven insbesondere Gerade, so hat $db : da$ bekanntlich zwei Werte, und das sagt aus, daß jede Gerade eines Strahlensystems von zwei benachbarten geschnitten wird.

Im allgemeinen wird, wenn ein Kurvensystem: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ vorliegt, jede Kurve $a, b$ von mehreren, etwa von $m$ verschiedenen benachbarten Kurven des Systems geschnitten. In diesem Falle lassen sich [291 die Kurven des Systems auf $m$ Arten zu je $\infty^1$ Flächen zusammenfassen derart, daß die auf jeder derartigen Fläche gelegenen Kurven eine Umhüllungskurve haben. Dann wird also jede Kurve des Systems von $m$ verschiedenen Kurven $U$ berührt und sie wird dementsprechend die Brennfläche in $m$ Punkten berühren, wobei die Brennfläche unter Umständen in mehrere und zwar höchstens in $m$ verschiedene Flächen zerfallen kann.

Sind die Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ nicht algebraisch, so werden doch die Kurven des Systems im allgemeinen ebenfalls auf mehrere Arten zu je $\infty^1$ Flächen zusammengefaßt werden können, und jede Kurve des Systems wird die Brennfläche in mehreren Punkten berühren.

**4.** Eine Schar von $\infty^3$ geraden Linien bezeichnete Plücker als einen Linienkomplex. Dementsprechend bezeichnen wir eine Schar von $\infty^3$ Kurven,



die den Raum ausfüllen, als einen Kurvenkomplex. Die Gleichungen eines solchen Komplexes haben die Form:

$$\varphi(x, y, z, a, b, c) = 0, \quad \psi(x, y, z, a, b, c) = 0. \tag{1}$$

Wählen wir eine bestimmte Kurve des Komplexes, etwa die Kurve $a, b, c$, so können wir alle benachbarten Kurven: $a + da$, $b + db$, $c + dc$ suchen, die diese Kurve schneiden. Wir finden sie durch Bildung der Gleichungen:

$$\varphi_a da + \varphi_b db + \varphi_c dc = 0, \quad \psi_a da + \psi_b db + \psi_c dc = 0. \tag{2}$$

Indem wir sodann die Größen $x, y, z$ zwischen den vier Gleichungen (1), (2) eliminieren, erhalten wir eine Mongesche Gleichung:

$$\Omega(a, b, c, da, db, dc) = 0 \tag{3}$$

als Antwort auf unsre Frage. Wir sehen also, daß jede Kurve des Komplexes von $\infty^1$ benachbarten Kurven des Komplexes geschnitten wird.

## § 2. Ein Entsprechen zwischen zwei Kurvenkomplexen.

**5.** Wir betrachten jetzt zwei Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0 \tag{4}$$

und deuten $x, y, z$ als Koordinaten eines Punktes in einem Raume, $x_1, y_1, z_1$ als Koordinaten eines andern Punktes in einem andern Raume. Wir setzen dabei voraus, daß sich aus (4) weder die Größen $x, y, z$, noch die Größen $x_1, y_1, z_1$ eliminieren lassen.

Erteilen wir $x, y, z$ beliebige Werte $a, b, c$, so erhalten wir die Kurve:

$$\Omega_1(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \tag{5}$$

die wir mit $k_1$ bezeichnen. Im Raume $x_1, y_1, z_1$ treten somit Kurven $k_1$ auf, und zwar können wir es so auffassen, daß dem Punkte $x = a$, [292 $y = b$, $z = c$ des ersten Raumes die Kurve (5) des zweiten Raumes zugeordnet ist. Die Zahl der Kurven $k_1$ ist im allgemeinen $\infty^3$, sie kann aber auch geringer sein, indem immer unendlich vielen Punkten $x, y, z$ dieselbe Kurve $k_1$ zugeordnet ist.

Dementsprechend liefern die Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, a_1, b_1, c_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, a_1, b_1, c_1) = 0 \tag{6}$$

gewisse Kurven $k$ im Raume $x, y, z$. Jedem Punkte: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ entspricht eine Kurve $k$, und daher ist die Zahl der Kurven $k$ gleich $\infty^3$, oder kleiner.

Führen wir nun die Redeweise ein: Die Punkte $x, y, z$ und $x_1, y_1, z_1$ sind konjugiert, wenn ihre Koordinaten die Gleichungen (4) erfüllen, so sehen wir, daß jeder Punkt $x, y, z$ $\infty^1$ konjugierte Punkte besitzt, deren Ort eine Kurve $k_1$ ist. Dementsprechend hat jeder Punkt $x_1, y_1, z_1$ $\infty^1$ konjugierte Punkte, die eine Kurve $k$ bilden.

**6.** Da wir vorausgesetzt haben, daß sich aus (4) weder die $x, y, z$, noch die $x_1, y_1, z_1$ eliminieren lassen, so ist klar, daß weder die Kurven $k$ alle auf einer Fläche des Raumes $x, y, z$ liegen, noch die Kurven $k_1$ alle auf einer Fläche des Raumes $x_1, y_1, z_1$, daß also jede der beiden Kurvenscharen ihren Raum ganz ausfüllt und aus mindestens $\infty^2$ verschiedenen Kurven besteht.

Enthielte nun eine der beiden Scharen, etwa die im Raume $x, y, z$, bloß $\infty^2$ verschiedene Kurven, so würden wir, wenn wir (4) nach zwei der Größen $x, y, z$ auflösten, etwa nach $y$ und $z$, zwei Gleichungen:

$$y = w_1(x, x_1, y_1, z_1), \quad z = w_2(x, x_1, y_1, z_1)$$

erhalten, in denen die drei Parameter $x_1, y_1, z_1$ nicht wesentlich wären, die sich also auf die Form:

$$y = \overline{w}_1(x, \varphi(x_1, y_1, z_1), \chi(x_1, y_1, z_1)),$$
$$z = \overline{w}_2(x, \varphi(x_1, y_1, z_1), \chi(x_1, y_1, z_1))$$

bringen ließen. Da sich $x_1, y_1, z_1$ nicht eliminieren lassen, so müßten diese Gleichungen nach $\varphi$ und $\chi$ auflösbar sein, und es würde demnach auch die Kurvenschar im Raume $x_1, y_1, z_1$ bloß aus $\infty^2$ verschiedenen Kurven bestehen. Wir können daraus schließen, daß, sobald die eine Kurvenschar $\infty^3$ verschiedene Kurven enthält, von der andern dasselbe gelten muß. In jedem der beiden Räume gehen dann durch jeden Punkt des Raumes $\infty^1$ verschiedene Kurven der betreffenden Schar.

**7.** Wir dürfen also jetzt annehmen, daß sowohl die Kurven $k$, als die Kurven $k_1$ $\infty^3$ an der Zahl sind. Dann sind die Kurven $k$ Integralkurven einer ganz bestimmten Mongeschen Gleichung, die man findet, in- [293 dem man zwischen den Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} dz = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} dz = 0 \end{cases}$$

die Größen $x_1, y_1, z_1$ eliminiert. Diese Mongesche Gleichung:

$$(8)\qquad f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

ordnet jedem Punkte $x, y, z$ einen Elementarkegel zu, der auch als Ort der Tangenten aller hindurchgehenden Kurven $k$ definiert werden kann. Dementsprechend sind die Kurven $k_1$ die Integralkurven einer Mongeschen Gleichung:

$$(8_1)\qquad f_1(x_1, y_1, z_1, dx_1, dy_1, dz_1) = 0,$$



die man findet, wenn man zwischen den Gleichungen:

$$(7_1)\quad \begin{cases} \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} dz_1 = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} dz_1 = 0 \end{cases}$$

die Größen $x, y, z$ eliminiert. Hier ist der einem Punkte $x_1, y_1, z_1$ zugeordnete Elementarkegel der Ort der Tangenten aller durch $x_1, y_1, z_1$ gehenden Kurven $k_1$.

Nach den letzten Entwickelungen des § 1 haben aber diese Mongeschen Gleichungen noch eine andere Bedeutung. In der Tat, sucht man die Bedingung dafür, daß die dem Punkte $x_1, y_1, z_1$ zugeordnete Kurve $k$ von einer unendlich benachbarten Kurve $k$ geschnitten wird, so kommt man wieder genau zu der Mongeschen Gleichung $(8_1)$. Dementsprechend liefert die Mongesche Gleichung (8) die Bedingung dafür, daß die den beiden Punkten $x, y, z$ und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ zugeordneten Kurven $k_1$ einander schneiden.

**8.** Wenn wir daher von Ausnahmefällen absehen, die wir später besprechen werden, so können wir sagen:

Die Gleichungen:

$$(4)\qquad \Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

ordnen jedem Punkte $x, y, z$ eine Kurve $k_1$, jedem Punkte $x_1, y_1, z_1$ eine Kurve $k$ zu. Die $\infty^3$ Kurven $k_1$ erfüllen eine Mongesche Gleichung:

$$(8_1)\qquad f_1(x_1, y_1, z_1, dx_1, dy_1, dz_1) = 0,$$

und die Kurven $k$ eine Mongesche Gleichung:

$$(8)\qquad f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0.$$

Wählen wir irgend eine Integralkurve $K_1$ der Mongeschen Gleichung $(8_1)$, so sind deren $\infty^1$ Punkten $\infty^1$ Kurven $k$ zugeordnet, die eine Kurve $K$ umhüllen, und zwar ist diese Kurve $K$ ihrerseits eine Integralkurve [294 der Mongeschen Gleichung (8). Ist andererseits $K$ eine beliebige Integralkurve der Mongeschen Gleichung (8), so entsprechen ihren $\infty^1$ Punkten $\infty^1$ Kurven $k_1$ des Raumes $x_1, y_1, z_1$, die eine Kurve $K_1'$ umhüllen, und zwar ist $K_1'$ offenbar eine Integralkurve der Mongeschen Gleichung $(8_1)$.

Auf die angegebene Weise erhält man nun aus jeder Integralkurve $K_1$ von $(8_1)$ eine Integralkurve $K$ von (8), und aus dieser wieder eine Integralkurve $K_1'$ von $(8_1)$. Es läßt sich aber zeigen, daß die beiden Kurven $K_1$ und $K_1'$, die in der eben geschilderten Beziehung zu einer Integralkurve $K$ stehen, identisch sind. Versuchen wir, dies analytisch zu beweisen.

**9.** Es seien: $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, wo $X, Y, Z$ Funktionen von $t$ sind, die Gleichungen einer Integralkurve $K$ von (8). Die Kurve $K_1'$ ist die Umhüllungskurve der $\infty^1$ Kurven $k_1$:

$$\Omega_1(X, Y, Z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(X, Y, Z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

die den Punkten von $K$ entsprechen; ihre Gleichungen werden daher gefunden, wenn man $t$ aus irgend drei unter den vier Gleichungen:

$$(9) \begin{cases} \Omega_1(X, Y, Z, x_1, y_1, z_1) = 0, & \Omega_2(X, Y, Z, x_1, y_1, z_1) = 0, \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X} X' + \frac{\partial \Omega_1}{\partial Y} Y' + \frac{\partial \Omega_1}{\partial Z} Z' = 0, & \frac{\partial \Omega_2}{\partial X} X' + \frac{\partial \Omega_2}{\partial Y} Y' + \frac{\partial \Omega_2}{\partial Z} Z' = 0 \end{cases}$$

eliminiert.

Andererseits haben wir unter den Kurven $k$ alle die auszuwählen, die $K$ berühren. Nun ist die Tangente einer beliebigen Kurve $k$ in dem Punkte $x, y, z$ bestimmt durch:

$$\begin{aligned} &\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \\ &\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} dz = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} dz = 0; \end{aligned}$$

soll daher diese Kurve $k$ die Kurve $K$ oder: $x = X$, $y = Y$, $z = Z$ im Punkte $x, y, z$ berühren, so müssen wieder die Gleichungen (9) bestehen. Man erhält demnach als Ort der Punkte $x_1, y_1, z_1$, die den $K$ berührenden Kurven $k$ entsprechen, wieder die Kurve $K_1'$; das heißt, die beiden Kurven $K_1$ und $K_1'$ fallen wirklich zusammen.

**10.** Hierdurch ist gezeigt, daß zwischen den Integralkurven der beiden Mongeschen Gleichungen (8) und ($8_1$) ein Entsprechen derart stattfindet, daß jeder Integralkurve der einen Gleichung eine ganz bestimmte Integralkurve der andern zugeordnet ist, und zwar ist dieses Entsprechen reziprok, das heißt, wenn $K$ eine Integralkurve von (8) ist, und $K_1$ die ihr zugeordnete Integralkurve von ($8_1$), so ist die der Kurve $K_1$ entsprechende Integralkurve von (8) keine andere als $K$. Dieses Entsprechen zwischen den Integralkurven kann nun aber einfacher ausgedrückt werden durch ein Entsprechen zwischen den Linienelementen der beiden Mongeschen Gleichungen.

In der Tat, denken wir uns eine Integralkurve von (8) in der [295
Weise dargestellt, daß $x, y, z$ als Funktionen von $t$ gegeben sind, so können wir nach den eben durchgeführten Betrachtungen auch die entsprechende Integralkurve von ($8_1$) so darstellen, daß $x_1$, $y_1$, $z_1$ gewisse Funktionen von $t$ werden. Bezeichnen wir dann die Ableitungen nach $t$ durch Akzente,



so haben wir die Gleichungen:

$$(10) \begin{cases} \Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, & \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} x' + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} y' + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} z' = 0, & \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} x' + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} y' + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} z' = 0, \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} z_1' = 0, & \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} z_1' = 0, \end{cases}$$

also sechs Relationen zwischen den zehn Größen: $x, y, z, x_1, y_1, z_1$, $x' : y' : z'$, $x_1' : y_1' : z_1'$. Zwei unter diesen sechs Relationen können durch die beiden Mongeschen Gleichungen (8) und ($8_1$) ersetzt werden, demnach sind die $\infty^4$ Linienelemente $x, y, z, x' : y' : z'$ der Gleichung (8) mit den $\infty^4$ Linienelementen $x_1, y_1, z_1, x_1' : y_1' : z_1'$ der Gleichung ($8_1$) durch vier unabhängige Relationen verbunden, wodurch eine nach beiden Seiten auflösbare Beziehung zwischen den Linienelementen beider Gleichungen bestimmt ist.

Schreiben wir die Mongeschen Gleichungen in aufgelöster Form, etwa so:

$$(11) \qquad z' : x' = F(x, y, z, y' : x')$$

und:

$$(11_1) \qquad z_1' : x_1' = F_1(x_1, y_1, z_1, y_1' : x_1'),$$

und betrachten wir demnach $x, y, z, y' : x'$ als Bestimmungsstücke der $\infty^4$ Linienelemente von (8) und $x_1, y_1, z_1, y_1' : x_1'$ als Bestimmungsstücke der $\infty^4$ Linienelemente von ($8_1$), so finden wir durch Auflösung einerseits vier Gleichungen:

$$(12) \begin{cases} x_1 = A(x, y, z, y' : x'), \quad y_1 = B(x, y, z, y' : x'), \quad z_1 = C(x, y, z, y' : x'). \\ \qquad\qquad y_1' : x_1' = D(x, y, z, y' : x') \end{cases}$$

und andererseits vier Gleichungen:

$$(13) \quad x = \mathsf{A}(x_1, y_1, z_1, y_1' : x_1'), \; \ldots, \; y' : x' = \Delta(x_1, y_1, z_1, y_1' : x_1').$$

Damit haben wir den analytischen Ausdruck für die Beziehung zwischen den Linienelementen der beiden Mongeschen Gleichungen gefunden.

**11.** Nehmen wir jetzt eine beliebige Integralkurve der einen Mongeschen Gleichung, etwa die Kurve $K$, so wissen wir, daß ihr eine Integralkurve $K_1$ der andern Mongeschen Gleichung entspricht. Um diese [296
zu finden, bestimmen wir die $\infty^1$ Linienelemente $x, y, z, x' : y' : z'$ von $K$ und erhalten durch die Formeln (12) und ($11_1$) die $\infty^1$ Linienelemente der Bildkurve $K_1$.

Da jede Integralkurve der einen Mongeschen Gleichung durch die gefundenen Transformationsformeln in eine Integralkurve der zweiten Mongeschen Gleichung übergeführt wird, so sehen wir, daß unendlich benachbarte vereinigt liegende Linienelemente der einen Mongeschen Gleichung in solche unendlich benachbarte Linienelemente der andern übergehen, die ebenfalls vereinigt liegen.

Wir sehen ferner, daß unsere Formeln eine solche Transformation zwischen den Linienelementen der beiden Mongeschen Gleichungen bestimmen, bei der Integralkurven der einen Mongeschen Gleichung, die ein Linienelement gemein haben, das heißt, die einander berühren, in Integralkurven der andern Mongeschen Gleichung übergehen, die ihrerseits ebenfalls ein Linienelement gemein haben.

Der durch die Gleichungen (10) oder (11), $(11_1)$, (12) vermittelte Zusammenhang zwischen den Integralkurven der beiden Mongeschen Gleichungen besitzt somit die wesentliche Eigenschaft, daß Berührung eine invariante Beziehung ist.

**12.** Nehmen wir jetzt eine Fläche $\varphi$ im Raume $x, y, z$. Diese wird von Integralkurven der Mongeschen Gleichung (8) überdeckt. Ist zum Beispiel (8) in $x':y':z'$ vom zweiten Grade, sind also die Elementarkegel im Raume $x, y, z$ vom zweiten Grade, so enthält die Fläche $\varphi$ in jedem Punkte zwei Fortschreitungsrichtungen (zwei Linienelemente), die (8) erfüllen, und wird daher zweifach von Integralkurven der Gleichung (8) überdeckt. Überhaupt wird jede Fläche $\varphi$ des Raumes $x, y, z$ mehrfach von Integralkurven der Gleichung (8) überdeckt, wenn nicht (8) zufällig eine Pfaffsche Gleichung ist.

Wir wollen annehmen, daß die Fläche $\varphi$ in jedem ihrer Punkte gerade $m$ Linienelemente enthält, die der Mongeschen Gleichung (8) genügen, sodaß die $\infty^1$ auf der Fläche liegenden Integralkurven von (8) in $m$ Scharen zerfallen, die wir mit $k', k'', \ldots, k^{(m)}$ bezeichnen. Dann gehen die $\infty^1$ Kurven $k'$ in $\infty^1$ Integralkurven $k_1'$ der Mongeschen Gleichung $(8_1)$ über, und diese $\infty^1$ Kurven $k_1'$ bilden eine Fläche $\varphi_1'$ des Raumes $x_1, y_1, z_1$. Entsprechend gehen die $\infty^1$ Kurven $k''$ in $\infty^1$ Integralkurven $k_1''$ von $(8_1)$ über, die eine Fläche $\varphi_1''$ bilden, und so weiter. Auf diese Weise wird der Fläche $\varphi$ eine ganze Anzahl von Flächen des Raumes $x_1, y_1, z_1$ zugeordnet, nämlich die $m$ Flächen $\varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_1^{(m)}$.

Wir wissen andererseits, daß die Gleichungen: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ eine Berührungstransformation bestimmen, die jede Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ in eine Fläche $\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0$ überführt. Wir behaupten, daß diese Berührungstransformation die früher betrachtete Fläche $\varphi$ gerade in die [297 $m$ Flächen $\varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_1^{(m)}$ überführt, die übrigens unter Umständen Teile eines irreduzibeln Gebildes sein können.



**13.** Der Beweis ist leicht zu führen. Der Punkt: $x = a$, $y = b$, $z = c$, aufgefaßt als Elementverein, geht ja über in die Elemente der Kurve:

$$\Omega_1(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Nehmen wir nun eine Integralkurve $K$ der Mongeschen Gleichung (8), so hat diese mit jedem auf ihr gelegenen Punkte $\infty^1$ Flächenelemente gemein. Daher führt unsere Berührungstransformation die Kurve $K$ mit ihren $\infty^1$ Punkten über in einen Elementverein $U$ mit $\infty^1$ Kurven $k_1$, und zwar so, daß $U$ mit jeder dieser $\infty^1$ Kurven $\infty^1$ Flächenelemente gemein hat. Kurz die Flächenelemente der Kurve $K$ gehen über in die $\infty^2$ Elemente der Kurve, die wir früher mit $K_1$ bezeichnet haben.

Nun aber hat eine Fläche $\varphi$ mit jeder auf ihr gelegenen Integralkurve $K$ von (8) $\infty^1$ Flächenelemente gemein; da ferner $K$ von der Berührungstransformation in die Kurve $K_1$ übergeführt wird, so muß $K_1$ auf der Fläche liegen, in die $\varphi$ übergeht. Mithin geht $\varphi$ über in die $m$ Flächen $\varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_1^{(m)}$.

**14.** Man kann jedoch auch auf andere, in gewissem Sinne noch einfachere Weise eine geometrische Deutung unserer Berührungstransformation erhalten.

Die Fläche $\varphi$ hat mit jedem auf ihr gelegenen Punkte $p$ ein Flächenelement gemein. Da nun unsere Berührungstransformation den Punkt $p$ in eine Kurve $k_1$ verwandelt, so muß die Bildfläche $\varphi_1$ von $\varphi$ die Kurve $k_1$ berühren, indem sie mit ihr ein Flächenelement gemein hat.

Die $\infty^2$ Punkte einer Fläche $\varphi$ transformieren sich daher in $\infty^2$ Kurven $k_1$, deren jede die Bildfläche $\varphi_1$ von $\varphi$ berührt. Alle diese Kurven bilden ein Kurvensystem, dessen Brennfläche gerade aus den Flächen besteht, die wir früher mit $\varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_1^{(m)}$ bezeichnet haben.

**15.** Halten wir uns daher innerhalb eines passend gewählten Bereiches des Punktraumes $x, y, z$, so werden die in diesem Bereiche liegenden Linienelemente der Mongeschen Gleichung (8) eindeutig auf die Linienelemente der Mongeschen Gleichung $(8_1)$ in dem Raume $x_1, y_1, z_1$ bezogen. Dagegen werden die Flächenelemente $x, y, z, p, q$ dieses Bereiches nicht eindeutig auf die Flächenelemente des anderen Raumes bezogen. Ist die Mongesche Gleichung (8) in bezug auf $x':y':z'$ vom $m$-ten Grade, so enthält jedes Flächenelement des betreffenden Bereiches $m$ Linienelemente, die der Gleichung (8) genügen; diese $m$ Linienelemente gehen über in $m$ Linienelemente der Kurve $k_1$, in die der Punkt $x, y, z$ des Flächenelementes $x, y, z, p, q$ bei der Berührungstransformation übergeführt wird. Demnach verwandelt sich das Flächenelement $x, y, z, p, q$ in $m$ Flächen- [298 elemente der Kurve $k_1$, deren jedes eines der eben besprochenen $m$ Linienelemente von $k_1$ enthält.

Jede Fläche $\varphi$ des Raumes $x, y, z$ geht also über in $m$ Flächen $\varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_1^{(m)}$ des Raumes $x_1, y_1, z_1$. Dementsprechend wird die inverse Berührungstransformation jede Fläche $\varphi_1'$ des zweiten Raumes in $m_1$ Flächen des ersten Raumes überführen, unter denen sich selbstverständlich die Fläche $\varphi$ befindet.

Bezeichnen wir die innerhalb eines gewissen Bereiches eineindeutige Berührungstransformation, bei der $\varphi$ in $\varphi_1'$ übergeht, mit $B'$, ferner die, bei der $\varphi$ in $\varphi_1''$ übergeht, mit $B''$, und endlich mit $B'^{-1}$ die, bei der $\varphi_1'$ in $\varphi$ übergeht, so ist:

$$B'^{-1} B''$$

das Symbol einer Berührungstransformation, die $\varphi_1'$ in $\varphi_1''$ verwandelt, und so weiter.

**16.** Unter Umständen kann man sich die Sache vorteilhaft auch folgendermaßen veranschaulichen.

Die Fläche $\varphi$ enthält $\infty^2$ Linienelemente $x, y, z, x':y':z'$, die (8) erfüllen. Die Linienelementtransformation (11), $(11_1)$, (12) führt diese $\infty^2$ Linienelemente in $\infty^2$ Linienelemente $x_1, y_1, z_1, x_1':y_1':z_1'$ über, die $(8_1)$ erfüllen. Der Punktort dieser neuen Linienelemente ist das Bild der gegebenen Fläche $\varphi$.

Betrachten wir nun im Raume $x, y, z$ eine Kurve $l$, die der Mongeschen Gleichung (8) nicht genügt, und wollen wir das Bild dieser Kurve im Raume $x_1, y_1, z_1$ finden, so stehen uns mehrere Wege offen.

Die Kurve $l$ hat mit jedem auf ihr liegenden Punkte $p$ $\infty^1$ Flächenelemente gemein, folglich hat ihr Bild $l_1$ mit der Bildkurve $k_1$ des Punktes $p$ ebenfalls $\infty^1$ Flächenelemente gemein und enthält somit die Kurve $k_1$. Also führt unsere Berührungstransformation jede Kurve $l$ des Raumes $x, y, z$, die der Gleichung (8) nicht genügt, in eine Fläche über, die von $\infty^1$ Kurven $k_1$ erzeugt ist, nämlich von den Kurven $k_1$, die den Punkten von $l$ entsprechen.

### § 3. Einige Sätze über Mongesche Gleichungen.

**17.** Es sei:

$$f(x, y, z, x':y':z') = 0$$

eine Mongesche Gleichung, und zwar:

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad z' = \frac{dz}{ds},$$

wo $s$ die Bogenlänge bezeichnet. Durch Differentiation ergibt sich:

$$f_{x'} x'' + f_{y'} y'' + f_{z'} z'' + f_x x' + f_y y' + f_z z' = 0,$$



also wird:

$$\frac{f_{x'} x'' + f_{y'} y'' + f_{z'} z''}{\sqrt{f_{x'}^2 + f_{y'}^2 + f_{z'}^2}\,\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = -\frac{f_x x' + f_y y' + f_z z'}{\sqrt{f_{x'}^2 + f_{y'}^2 + f_{z'}^2}} \cdot R,$$

wo $R$ der Krümmungshalbmesser der betreffenden Integralkurve.

Die linke Seite ist gleich $\cos\Theta$, wo $\Theta$ den Winkel bedeutet, den die Hauptnormale der Integralkurve mit der Normalen des Flächenelementes bildet, das den zu $x, y, z$ gehörigen Elementarkegel längs der Tangente der Integralkurve berührt; also kommt:

$$\frac{\cos\Theta}{R} = -\frac{f_x x' + f_y y' + f_z z'}{\sqrt{f_{x'}^2 + f_{y'}^2 + f_{z'}^2}},$$

und hier hängt die rechte Seite nur von $x, y, z, x', y', z'$ ab. Damit haben wir die beiden Sätze:

*Alle Integralkurven einer **Monge**schen Gleichung, die ein Linienelement und gleichzeitig die Oskulationsebene gemein haben, besitzen in dem betreffenden Punkte dieselbe Krümmung.*

*Dreht sich eine Ebene um die Gerade eines Linienelementes der **Monge**schen Gleichung $f = 0$, und konstruiert man für jede Lage der Ebene den gemeinsamen Krümmungsmittelpunkt aller Integralkurven von $f = 0$, die dieses Linienelement enthalten und die betreffende Ebene zur Oskulationsebene haben, so liegen alle diese Krümmungsmittelpunkte auf einem Kreise.*

Hiermit ist eine Erweiterung des Meusnierschen Theorems gewonnen.

**18.** Nehmen wir nun eine beliebige Fläche und eine beliebige nicht lineare Mongesche Gleichung, so enthält die Fläche immer unendlich viele Punkte, in deren jedem sie den zugeordneten Elementarkegel der Mongeschen Gleichung berührt. In jedem solchen Punkte fallen zwei von den auf der Fläche liegenden Linienelementen der Mongeschen Gleichung zusammen, und durch dieses doppelt zählende Linienelement geht eine auf der Fläche liegende Integralkurve der Mongeschen Gleichung. Dabei ist aber wohl zu beachten, daß der betreffende Punkt im allgemeinen kein regulärer Punkt der hindurchgehenden Integralkurve ist, ausgenommen, wenn die Fläche auch in dem benachbarten Punkte der Kurve wiederum den Elementarkegel berührt.

*Berührt aber die Fläche in jedem Punkte einer auf ihr liegenden Integralkurve einer nichtlinearen **Monge**schen Gleichung den zugeordneten Elementarkegel, so oskuliert* *sie alle Integralkurven der* **Monge***schen Gleichung, die jene erste Integralkurve berühren*

Zugleich ergibt sich noch der Satz: [(300) 301

*Liegt eine Fläche vor, die in jedem ihrer Punkte den zugeordneten Elementarkegel berührt, so oskuliert sie alle sie berührenden Integralkurven der* **Monge***schen Gleichung.*

## § 4. Eine Klasse von Monge-Ampèreschen Gleichungen 2. Ordnung mit intermediären Integralen.

**19.** Liegt eine Schar von $\infty^3$ Kurven vor, die den Raum ausfüllen, so findet man alle Flächen, die in jedem ihrer Punkte von einer Kurve der Schar oskuliert werden, durch Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$r + 2Ns + N^2t + U(x, y, z, p, q) = 0. \tag{14}$$

Die Gleichung (14) hat intermediäre Integrale und deren sogar [302 drei: $u(x, y, z, p, q) = a$, $v = b$, $w = c$, sodaß also (vgl. S. 280 [hier S. 782 f.]) auch:

$$\Omega(u, v, w) = 0$$

bei beliebigem $\Omega$ stets ein intermediäres Integral ist.

Soll nun aber $F(x, y, z, p, q) = a$ ein intermediäres Integral von (14) sein, so muß (14) eine Folge der beiden Gleichungen:

$$F_p r + F_q s + F_x + pF_z = 0,$$
$$F_p s + F_q t + F_y + qF_z = 0$$

sein, es muß also:

$$F_p^2 r + 2F_p F_q s + F_q^2 t + F_p(F_x + pF_z) + F_q(F_y + qF_z) \equiv$$
$$\equiv F_p^2\{r + 2Ns + N^2t + U\}$$

sein, das heißt:

$$F_q \equiv NF_p, \quad F_p(F_x + pF_z) + F_q(F_y + qF_z) \equiv UF_p^2,$$

oder:

$$\left\{\begin{aligned} F_q - NF_p &= 0, \\ F_x + pF_z + N(F_y + qF_z) - UF_p &= 0. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Diese beiden linearen partiellen Differentialgleichungen für $F$ müssen drei unabhängige Lösungen besitzen, sie müssen also ein zweigliedriges vollständiges System bilden, und da sie nach $F_q$ und $F_x$ aufgelöst sind, so muß der aus ihnen gebildete Klammerausdruck identisch verschwinden. Für die beiden Funktionen $N$ und $U$ ergibt das die Bedingungen:

$$\left\{\begin{aligned} N_q - NN_p &= 0, \\ N_x + pN_z + N(N_y + qN_z) - UN_p - U_q + NU_p &= 0. \end{aligned}\right. \tag{17}$$



**20.** Um den begrifflichen Sinn der beiden Bedingungen (17) brauchen wir uns eigentlich nicht zu kümmern, sie sagen eben aus, daß (16) ein zweigliedriges vollständiges System ist, und daß das Problem zu einem Kurvenkomplexe gehört. Zum Beispiel bedeutet die erste der Glei- [303 chungen (16), daß die eingliedrige Gruppe, die von der infinitesimalen Transformation:

$$\delta x = \delta y = \delta z = 0, \quad \delta p = -N\delta t, \quad \delta q = \delta t$$

erzeugt wird, jedes eine intermediäre Integralgleichung erfüllende Element $x, y, z, p, q$ in ein ebensolches Element überführt. Nun aber haben die beiden unendlich benachbarten Elemente $x, y, z, p, q$ und $x + \delta x, \ldots, q + \delta q$ den Punkt $x, y, z$ gemein, und ihre Ebenen, die durch die Gleichungen:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

und:

$$dz - (p + \delta p)\,dx - (q + \delta q)\,dy = 0$$

bestimmt sind, haben die Richtung:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad \delta p\,dx + \delta q\,dy = 0$$

gemein, also ist jedem Elemente $x, y, z, p, q$, das einer intermediären Integralgleichung genügt, die in ihm enthaltene Richtung:

$$dy = N\,dx, \quad dz = (p + Nq)\,dx$$

derart zugeordnet, daß das ganze Büschel aller durch diese Richtung gehenden Flächenelemente ebenfalls der intermediären Integralgleichung genügt. Dabei ist allerdings die Voraussetzung gemacht, daß sich $N$ für das Element $x, y, z, p, q$ regulär verhält.

Hierin liegt nun, daß jede intermediäre Integralgleichung, für deren Elemente sich $N$ im allgemeinen regulär verhält, eine lineare partielle Differentialgleichung ist. Jede lineare partielle intermediäre Integralgleichung kann aber, das ist begrifflich klar, zu Charakteristiken nur Kurven des Komplexes haben, demnach sind die Integralflächen jeder solchen intermediären Integralgleichung von Kurven des Komplexes erzeugt.

**21.** Die einzigen Flächenelemente, für die sich $N$ nicht regulär [304 verhält, sind die Flächenelemente, die die ihren Punkten zugeordneten Elementarkegel der *Monge*schen Gleichung berühren, die durch unsern Kurvenkomplex bestimmt ist. Der Inbegriff dieser Flächenelemente bestimmt aber, wenn die *Monge*sche Gleichung keine *Pfaff*sche ist, stets eine nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen in jedem Punkte den zugehörigen Elementarkegel berühren und also nach dem Früheren von jeder sie berührenden Integralkurve der

Mongeschen Gleichung, mithin insbesondere von jeder sie berührenden Komplexkurve oskuliert werden. Demnach bildet in diesem Falle der besprochene Inbegriff von Flächenelementen immer eine singuläre intermediäre Integralgleichung.

Damit haben wir das

**Theorem X.** Eine **Monge-Ampère**sche Gleichung von der Form:

$$r + 2N(x, y, z, p, q)s + N^2t + U(x, y, z, p, q) = 0$$

besitzt dann und nur dann eine intermediäre Integralgleichung von der Form $\Omega(u, v, w) = 0$, wo $\Omega$ eine willkürliche Funktion von $u, v, w$ bezeichnet, und $u, v, w$ drei unabhängige Funktionen von $x, y, z, p, q$ sind, wenn das Problem in folgender Weise von einem Kurvenkomplexe abhängt: Es werden alle Flächen gesucht, die in jedem Punkte eine Kurve des Komplexes oskulieren. Werden die Kurven als Elementmannigfaltigkeiten dargestellt durch:

$$u(x, y, z, p, q) = a, \quad v(x, y, z, p, q) = b, \quad w(x, y, z, p, q) = c,$$

so ist:

$$\Omega(u, v, w) = 0$$

die allgemeine Form einer intermediären Integralgleichung. Außerdem gibt es noch eine singuläre intermediäre Integralgleichung, die gebildet wird von dem Inbegriffe aller Flächenelemente, die zu der durch den Kurvenkomplex bestimmten **Monge**schen Gleichung gehören.

## § 5. Weiteres über die in § 2 besprochene Berührungstransformation.

**22.** Es seien jetzt wieder zwei Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

vorgelegt, die eine Berührungstransformation bestimmen. In jedem der beiden Räume $x, y, z$ und $x_1, y_1, z_1$ tritt dann ein Kurvenkomplex [305
auf mit einer Mongeschen Gleichung:

$$f(x, y, z, dx : dy : dz) = 0$$

und:

$$f_1(x_1, y_1, y_1, dx_1 : dy_1 : dz_1) = 0;$$

zu jeder dieser beiden Mongeschen Gleichungen gehört eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$r + 2Ns + N^2t + U = 0$$

und:

$$r_1 + 2N_1s_1 + N_1^2t_1 + U_1 = 0,$$



und jede dieser Differentialgleichungen besitzt eine singuläre intermediäre Integralgleichung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

und:

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0,$$

die durch die zu der betreffenden Mongeschen Gleichung gehörigen Flächenelemente bestimmt ist.

Die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entsprechen nun einander nicht bei der Berührungstransformation, dagegen wollen wir beweisen, daß unsere Berührungstransformation die Gleichung erster Ordnung $F = 0$ in die Gleichung $F_1 = 0$ überführt.

**23.** Liegt nämlich im Raume $x, y, z$ eine Fläche vor, die in jedem ihrer Punkte den zugehörigen Elementarkegel berührt, also mit andern Worten eine Integralfläche von $F(x, y, z, p, q) = 0$, so gibt es auf dieser Fläche nicht wie im allgemeinen Falle $m$ Scharen von Integralkurven der Mongeschen Gleichung $f(x, y, z, dx : dy : dz) = 0$, sondern bloß $m - 1$ Scharen, unter denen aber eine doppelt zählt. Das den $\infty^2$ Punkten der Fläche entsprechende Kurvensystem im Raume $x_1, y_1, z_1$ (vgl. S. 291 ff. [hier S. 792 ff.]) besitzt daher $m - 1$ Brennflächen $\varphi_1', \varphi_1'', \ldots,$ unter denen eine doppelt zählt. Diese doppelt zählende Brennfläche wird von den $\infty^2$ Kurven des Systems oskuliert, und da die Kurven des Systems Integralkurven der Mongeschen Gleichung $f_1(x_1, y_1, z_1, dx_1 : dy_1 : dz_1) = 0$ sind, so erfüllt sie augenscheinlich die partielle Differentialgleichung: $F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$. Also:

**Theorem XI.** Unsere Berührungstransformation führt die Gleichung: $F(x, y, z, p, q) = 0$ in die Gleichung:

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$$

über.

**24.** Anmerkung. Bei einer Berührungstransformation, die nur durch eine aequatio directrix:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

bestimmt ist, gelten ähnliche Beziehungen.

Auch hier treten zwei Mongesche Gleichungen auf:

$$f(x, y, z, dx : dy : dz) = 0, \quad f_1(x_1, y_1, z_1, dx_1 : dy_1 : dz_1) = 0,$$

von denen zum Beispiel die erste die Bedingung dafür ist, daß im [306
Raume $x_1, y_1, z_1$ die beiden unendlich benachbarten Flächen:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega(x + dx, y + dy, z + dz, x_1, y_1, z_1) = 0$$

einander berühren; ferner gehören zu diesen Mongeschen Gleichungen zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0.$$

Wird nun eine beliebige Fläche von Integralkurven der Mongeschen Gleichung $f = 0$ gerade $m$-fach überdeckt, so wird eine Integralfläche der Gleichung $F = 0$ gerade $(m-1)$-fach überdeckt, und eine der $m-1$ Scharen von Integralkurven zählt doppelt. Das System der $\infty^2$ Flächen, die im Raume $x_1, y_1, z_1$ den Punkten unserer Integralfläche entsprechen, besitzt daher $m-1$ Brennflächen, unter denen eine doppelt zählt.

Die Integralflächen von $F = 0$ sind diejenigen Flächen, die von den Flächen des Flächenkomplexes $\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$ oskuliert werden. Stellt man die Flächen des Komplexes durch drei Gleichungen:

$$u(x, y, z, p, q) = a, \quad v(x, y, z, p, q) = b, \quad w(x, y, z, p, q) = c$$

dar, so sind nach dem Früheren (vgl. S. 254, 274 [hier S. 754, 776]) alle Gleichungen von der Form: $\Omega(u, v, w) = 0$ intermediäre Integralgleichungen einer Monge-Ampèreschen Gleichung:

$$rt - s^2 + Lr + 2Ms + Nt + U = 0,$$

und diese Gleichung hat eine singuläre intermediäre Integralgleichung, nämlich:

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

### § 6. Die beiden Mongeschen Gleichungen, die zu der in § 2 besprochenen Berührungstransformation gehören. [(307) 308

**25.** Ist eine Berührungstransformation durch zwei Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

definiert, so tritt, wie wir gesehen haben, in jedem der beiden Räume $x, y, z$ und $x_1, y_1, z_1$ eine Mongesche Gleichung auf. Es ist nun nicht ausgeschlossen, daß die eine dieser beiden Mongeschen Gleichungen eine Pfaffsche ist, aber es läßt sich nachweisen, daß, sobald die eine eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung ist, die andere keine Pfaffsche Gleichung sein kann.

Um das zu zeigen, denken wir uns in dem Raume $X, Y, Z$ eine Schar von $\infty^2$ Flächen:

$$\omega(x, y, X, Y, Z) = 0$$

gegeben und setzen voraus, daß vermöge $\omega = 0$ keine Relation von der Form:

$$\alpha(X, Y, Z)\frac{\partial \omega}{\partial X} + \beta(X, Y, Z)\frac{\partial \omega}{\partial Y} + \gamma(X, Y, Z)\frac{\partial \omega}{\partial Z} = 0$$



besteht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die $\infty^2$ Flächen keiner linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\alpha(X, Y, Z)\frac{\partial Z}{\partial X} + \beta(X, Y, Z)\frac{\partial Z}{\partial Y} - \gamma(X, Y, Z) = 0$$

genügen, daß sie also nicht von $\infty^2$ Kurven erzeugt sind. Die $\infty^1$ Flächen der Schar, die durch einen Punkt $X, Y, Z$ gehen, bestimmen dann einen wirklichen Elementarkegel, und alle $\infty^2$ Flächen erfüllen eine nicht lineare partielle Differentialgleichung:

$$F\left(X, Y, Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) = 0.$$

Diese Gleichung hat somit nicht bloß $\infty^3$ charakteristische Streifen, sondern auch $\infty^3$ charakteristische Kurven, die durch die beiden Gleichungen:

$$\omega(x, y, X, Y, Z) = 0, \quad \omega_x + p\omega_y = 0$$

bestimmt werden und Integralkurven einer nicht linearen Mongeschen Gleichung:

$$f(X, Y, Z, dX : dY : dZ) = 0$$

sind. Mit andern Worten:

Liegt eine Gleichung:

$$\omega(x, y, X, Y, Z) = 0$$

vor, vermöge deren keine Relation von der Form: [309

$$\alpha(X, Y, Z)\omega_X + \beta(X, Y, Z)\omega_Y + \gamma(X, Y, Z)\omega_Z = 0$$

besteht, so ergibt die Elimination von $x, y, p$ aus den beiden Gleichungen:

$$\omega(x, y, X, Y, Z) = 0, \quad \omega_x + p\omega_y \equiv \bar{\omega}(x, y, p, X, Y, Z) = 0$$

und den durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen:

$$\omega_X dX + \omega_Y dY + \omega_Z dZ = 0, \quad \bar{\omega}_X dX + \bar{\omega}_Y dY + \bar{\omega}_Z dZ = 0$$

stets eine nicht lineare Mongesche Gleichung:

$$f(X, Y, Z, dX, dY, dZ) = 0.$$

**26.** Dieses analytische Resultat läßt sich nun aber geometrisch anders deuten:

Stellt die Gleichung:

$$\omega(x, y, a, b, c) = 0$$

in der Ebene $\infty^3$ verschiedene Kurven dar, das heißt, gibt es keine drei Funktionen $\alpha, \beta, \gamma$ von $a, b, c$ allein derart, daß vermöge $\omega = 0$ die Relation:

$$\alpha(a, b, c)\omega_a + \beta(a, b, c)\omega_b + \gamma(a, b, c)\omega_c = 0$$

besteht, so findet die Bedingung für die Berührung zwischen zwei unendlich benachbarten Kurven der Schar $\omega = 0$ ihren analytischen Ausdruck durch Elimination von $x, y, p$ zwischen den vier Gleichungen:

$$\omega(x, y, a, b, c) = 0, \quad \omega_x + p\omega_y \equiv \overline{\omega}(x, y, p, a, b, c) = 0$$
$$\omega_a da + \omega_b db + \omega_c dc = 0, \quad \overline{\omega}_a da + \overline{\omega}_b db + \overline{\omega}_c dc = 0,$$

und diese Elimination führt auf eine einzige, und zwar auf eine nicht lineare Mongesche Gleichung:

$$f(a, b, c, da : db : dc) = 0.$$

Beachtet man nun, daß die Pfaffsche Gleichung: $dy - p\,dx = 0$ als Normalform für jede nicht integrable Pfaffsche Gleichung:

$$\varphi(x, y, z)dx + \chi(x, y, z)dy + \psi(x, y, z)dz = 0$$

aufgefaßt werden kann, und daß mithin jede Schar von $\infty^3$ Integralkurven einer solchen nicht integrabeln Pfaffschen Gleichung auf die Normalform:

$$\omega(x, y, a, b, c) = 0, \quad \omega_x + p\omega_y = 0$$

gebracht werden kann, so erhält man unmittelbar den

**Satz 30.** *Liegt in den Veränderlichen $x, y, z$ eine nicht integrable* **Pfaff***sche Gleichung:*

$$\varphi(x, y, z)dx + \chi(x, y, z)dy + \psi(x, y, z)dz = 0$$

*vor, und wird eine beliebige Schar von $\infty^3$ Integralkurven dieser Gleichung durch die beiden Gleichungen:*

$$\Omega_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

*mit den drei wesentlichen Parametern $X, Y, Z$ dargestellt,* [310 *so findet die Bedingung des Schneidens zweier unendlich benachbarter Kurven $X, Y, Z$ und $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ ihren Ausdruck in einer* **Monge***schen Gleichung:*

$$f(X, Y, Z, dX : dY : dZ) = 0,$$

*die* **nicht linear** *ist.*

**27.** Wird daher unter den Voraussetzungen dieses Satzes zwischen den beiden Räumen $x, y, z$ und $X, Y, Z$ eine Berührungstransformation durch die beiden Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ bestimmt, so besteht der Kurvenkomplex im Raume $X, Y, Z$ aus den $\infty^3$ Charakteristiken der nicht linearen partiellen Differentialgleichung:

$$F\left(X, Y, Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) = 0,$$

die zu der Mongeschen Gleichung $f = 0$ gehört.



In diesem Falle sind fortwährend die Linienelemente der Mongeschen Gleichung $f = 0$ innerhalb eines passend gewählten Bereiches eineindeutig auf die Linienelemente der Pfaffschen Gleichung:

$$\varphi\,dx + \chi\,dy + \psi\,dz = 0$$

bezogen. Da aber die Pfaffsche Gleichung nur $\infty^3$ Flächenelemente enthält, die Mongesche Gleichung dagegen deren $\infty^4$, so ist die Beziehung zwischen den $\infty^4$ Flächenelementen der Mongeschen Gleichung und den $\infty^3$ Flächenelementen der Pfaffschen Gleichung einunendlichdeutig. Die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ gehen bei der Berührungstransformation über in die Flächenelementstreifen der Pfaffschen Gleichung.

**28.** Sind daher zwei Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

so beschaffen, daß die zugehörigen Mongeschen Gleichungen beide linear, also beide Pfaffsche Gleichungen sind, so sind diese Pfaffschen Gleichungen beide integrabel.[1]) Dann tritt in jedem der beiden Räume ein Büschel von $\infty^1$ Flächen auf:

$$u(x, y, z) = a, \quad u_1(x_1, y_1, z_1) = a_1,$$

und die beiden Pfaffschen Gleichungen haben die Form:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_1}dz_1 = 0.$$

Es ist ferner möglich, das Gleichungssystem: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ auf die Form:

$$A(x, y, z) - B(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad W(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zu bringen. Die Flächen der beiden Büschel sind innerhalb gewisser Bereiche eineindeutig auf einander bezogen. Jede Fläche des einen [311 Büschels enthält $\infty^3$ Linienelemente, die innerhalb gewisser Bereiche eineindeutig auf die $\infty^3$ Linienelemente der zugeordneten Fläche des zweiten Büschels abgebildet werden, und zwar wird die Beziehung zwischen den Linienelementen dieser beiden zweidimensionalen Gebiete durch eine Berührungstransformation des Raumes von zwei Dimensionen vermittelt.

Als Beispiel mögen die beiden Gleichungen:

$$z_1 = z - xx_1, \quad y_1 = y$$

dienen, die zu der Berührungstransformation:

$$x_1 = p, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z - xp, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = y$$

1) In dieser Fassung habe ich den Satz ohne Beweis in den Math. Ann. Bd. V, S. 163 mitgeteilt [hier Abh. I, S. 20].

führen. Die beiden Pfaffschen Gleichungen sind hier: $dy = 0$ und $dy_1 = 0$, und die Berührungstransformation bestimmt auf jeder Ebene $y = \text{const.}$ eine gewöhnliche Dualität.

**29.** Hiermit ist übrigens ein Schritt getan zur Bestimmung der eineindeutigen algebraischen Berührungstransformationen des Raumes.

Soll eine solche Berührungstransformation durch zwei algebraische Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

bestimmt sein, so muß jede Fläche jedes der beiden Räume einfach von Integralkurven der betreffenden Mongeschen Gleichung überdeckt sein, daher müssen beide Mongesche Gleichungen Pfaffsche und deshalb beide integrabel sein. Demnach kann man eine der beiden Gleichungen: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ in der Form:

$$\varphi(x, y, z) - \psi(x_1, y_1, z_1) = 0$$

annehmen. Da jede der $\infty^1$ Flächen: $\varphi = a$ unendlich viele algebraische Kurven enthält, so muß sie wohl selbst algebraisch sein. Hiermit wird es wohl möglich sein, die Frage auf die entsprechende Frage in der Ebene zurückzuführen.

**30.** Ferner sei noch auf eine Tatsache hingewiesen, die sich aus den angestellten Betrachtungen ergibt: Ist eine nicht lineare Mongesche Gleichung vorgelegt, so bilden die $\infty^3$ charakteristischen Kurven der zugehörigen nicht linearen partiellen Differentialgleichung eine Kurvenschar, bei der die Bedingung für das Schneiden zweier unendlich benachbarter Kurven der Schar durch eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung dargestellt wird. Die Gleichungen dieser Kurvenschar bestimmen daher eine Berührungstransformation des Raumes, und es wird zugleich zwischen den Integralkurven der Mongeschen und den Integralkurven der Pfaffschen Gleichung ein Entsprechen hergestellt, bei dem zwei einander berührenden Kurven der einen Art zwei einander berührende Kurven der andern Art entsprechen, während die Beziehung des Schneidens nicht erhalten bleibt. Dagegen kann zwischen den Integralkurven von zwei nicht integra- [312
beln Pfaffschen Gleichungen ein Entsprechen dieser Art nicht hergestellt werden, sondern jedes Entsprechen zwischen den Integralkurven zweier solcher Gleichungen, bei dem Berührung erhalten bleibt, wird notwendig durch eine Punkttransformation des Raumes vermittelt.

**31.** Wir haben erkannt, daß bei einem Gleichungssysteme:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

drei Fälle wirklich eintreten können: Erstens: die zwei zugehörigen



Mongeschen Gleichungen sind beide nicht linear, zweitens: die eine ist nicht linear, die andere eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung, drittens: beide sind integrable Pfaffsche Gleichungen.

Es bleibt noch übrig, zu bemerken, daß mit diesen drei Fällen sämtliche Möglichkeiten erschöpft sind. Ist nämlich eine der beiden Mongeschen Gleichungen, etwa die in $x, y, z$, linear und integrabel — der Fall der Nichtintegrabilität ist ja schon erledigt — und ist $u(x, y, z) = \text{const.}$ ihr Integral, so kann man eine der beiden Gleichungen: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ durch eine von der Form: $u(x, y, z) - v(x_1, y_1, z_1) = 0$ ersetzen, und die zweite Mongesche Gleichung hat daher augenscheinlich die Form:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial v}{\partial z_1} dz_1 = 0,$$

ist also ebenfalls integrabel. Zu den drei angegebenen Fällen kann demnach wirklich kein anderer hinzukommen.

## § 7. Gibt es Oskulationstransformationen der Kurven einer Ebene?

**32.** Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen führen leicht zur Beantwortung einer Frage, die ich schon im Jahre 1874 aufgeworfen habe (Math. Ann. Bd. VIII, S. 223 Anm. [d. Ausg. Bd. IV, Abh. I, S. 9 Anm.]). Meine damals ausgesprochene Vermutung, daß diese Frage mit Nein zu beantworten sei, hat Bäcklund, der sich unabhängig von mir die Frage vorgelegt hatte, bald darauf bestätigt (Math. Ann. Bd. IX).

Es handelt sich um die Frage, ob es solche Transformationen der ebenen Kurven gibt, bei denen erst Berührung zweiter Ordnung eine invariante Beziehung ist. Eine solche Oskulationstransformation müßte die Form haben:

$$(18) \qquad \begin{cases} x_1 = X(x, y, y', y''), \\ y_1 = Y(x, y, y', y''), \\ y_1' = P(x, y, y', y''), \\ y_1'' = Q(x, y, y', y'') \end{cases}$$

und müßte Kurven im allgemeinen in Kurven verwandeln, präziser [313
gesagt, sie müßte das System der beiden Pfaffschen Gleichungen:

$$dy - y'dx = 0, \quad dy' - y''dx = 0$$

invariant lassen, sodaß also vermöge (18) Gleichungen von der Form:

$$dy_1 - y_1'dx_1 = \alpha(dy - y'dx) + \beta(dy' - y''dx),$$
$$dy_1' - y_1''dx_1 = \gamma(dy - y'dx) + \delta(dy' - y''dx)$$

beständen, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Funktionen von $x, y, y', y''$ sind.

**33.** Deuten wir $x, y, y'$ und $x_1, y_1, y_1'$ als Punktkoordinaten in zwei verschiedenen Räumen, so erscheinen alle Kurven der $x, y$-Ebene im Raume $x, y, y'$ als Integralkurven der Pfaffschen Gleichung: $dy - y'dx = 0$, und die Kurven der $x_1, y_1$-Ebene im Raume $x_1, y_1, y_1'$ als Integralkurven der Pfaffschen Gleichung: $dy_1 - y_1'dx_1 = 0$. Die Gleichungen (18) vermitteln daher ein Entsprechen zwischen den Integralkurven der beiden nicht integrabeln Pfaffschen Gleichungen: $dy - y'dx = 0$ und $dy_1 - y_1'dx_1 = 0$, und zwar derart, daß solchen Integralkurven, die einander berühren, wieder einander berührende Integralkurven entsprechen.

Würde nun dieses Entsprechen nicht durch eine Punkttransformation zwischen den beiden Räumen $x, y, y'$ und $x_1, y_1, y_1'$ vermittelt, so müßten jedesmal gewissen $\infty^3$ Integralkurven der einen Pfaffschen Gleichung die Punkte des andern Raumes entsprechen. Da aber unsere beiden Pfaffschen Gleichungen nicht integrabel sind, so ist das ausgeschlossen; die Gleichungen (18) definieren daher eine Punkttransformation zwischen den beiden Räumen $x, y, y'$ und $x_1, y_1, y_1'$, das heißt, $X$, $Y$, $P$ sind von $y''$ frei, und wir haben in (18) eine gewöhnliche Berührungstransformation der Ebene.

Es gibt also keine Oskulationstransformation der ebenen Kurven.