V. [337

Bemerkungen zu v. Helmholtzs Arbeit: Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.

Leipz. Ber. 1886, Supplement, abgeliefert 21. 2. 1887, S. 337—342. Vorgelegt in der Sitzung vom 25. 10. 1886.

1. Helmholtzs berühmte Arbeit „Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen", behandelt ein Problem, welches mit der neueren Theorie der Transformationsgruppen im engsten Zusammenhange steht. Von Klein aufgefordert, habe ich daher versucht, auf dieses wichtige, wenn auch spezielle Problem die Methoden meiner Transformationstheorie anzuwenden. Dabei bin ich zu der Überzeugung gekommen, daß die bahnbrechenden Untersuchungen von v. Helmholtz doch noch nicht als das letzte Wort über diesen Gegenstand zu betrachten sind.

Einmal nämlich enthält die Helmholtzsche Deduktion eine Lücke, welche allerdings, jedenfalls für drei Dimensionen, auf das Endergebnis keinen Einfluß ausübt; es hat mir jedoch nicht gelingen wollen, diese Lücke mit denselben einfachen analytischen Mitteln auszufüllen, mit denen v. Helmholtz in seiner Arbeit auskommt.

Andererseits glaube ich, bewiesen zu haben, daß in Räumen von drei Dimensionen das Monodromieaxiom, welches bei v. Helmholtz eine so große Rolle spielt, entbehrlich ist, wenn man sein Axiom der freien Beweglichkeit in naturgemäßer Weise deutet.

Endlich halte ich es für zweckmäßig, die Helmholtzschen Axiome durch andere zu ersetzen, welche mir einfacher erscheinen.

Allerdings sind die Untersuchungen, die mich zu diesen Resultaten geführt haben, im Vergleich mit den v. Helmholtzschen weitläufig und erfordern längere Rechnungen. Ich werde mich daher hier darauf beschränken, meine vorhin angedeuteten Resultate etwas ausführlicher auseinanderzusetzen, um deren Sinn möglichst klarzustellen. Dabei halte ich mich ebenfalls im Raume von drei Dimensionen.

2. Alle Bewegungen des dreifach ausgedehnten euklidischen oder nichteuklidischen Raumes werden dargestellt durch drei Transfor- [338
mationsgleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = f\,(x, y, z, a_1, a_2, \ldots), \\ y_1 = \varphi(. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \ldots), \\ z_1 = \psi(. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \ldots), \end{cases}$$

in denen $a_1, a_2, \ldots$ Parameter sind. Gibt man diesen Parametern bestimmte Werte, so erhält man eine bestimmte Bewegung, bei welcher jeder Punkt x, y, z die neue Lage x_1, y_1, z_1 annimmt. Befinden wir uns zum Beispiel im euklidischen Raume, und betrachten x, y, z als Cartesische Koordinaten, so sind die drei Funktionen f, φ und ψ linear in x, y, z. Bedient man sich dagegen anderer Koordinatensysteme, so erhält der analytische Ausdruck für die Bewegungen des euklidischen Raumes im allgemeinen eine nichtlineare Form.

3. Das Problem, welches sich v. Helmholtz in der zitierten Arbeit gestellt hat, ist nun im wesentlichen folgendes. Er sucht solche Eigenschaften des analytischen Ausdruckes der Bewegungen, welche von der Koordinatenwahl unabhängig sind und welche diese Schar von Transformationen des Raumes in möglichst einfacher Weise charakterisieren. Die von v. Helmholtz gewählten Eigenschaften, welche sowohl den euklidischen wie den nichteuklidischen Bewegungen zukommen, lassen sich, soviel ich sehe, folgendermaßen resumieren.

Erstens: Die Funktionen f, φ und ψ, welche in den betreffenden Transformationsgleichungen auftreten, sind analytische Funktionen ihrer Argumente.

Zweitens: Zwei Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 haben jeder Bewegung gegenüber eine Invariante:

$$\Omega\,(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2),$$

ihre Entfernung in der gewöhnlichen Sprechweise. Im euklidischen Raume, bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten, hat diese Invariante bekanntlich die Form:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Als dritte Eigenschaft wählt v. Helmholtz die freie Beweglichkeit des betreffenden Raumes, welche er folgendermaßen definiert:

Ein jeder Punkt des Raumes kann in jeden anderen übergehen.

Wird ein Punkt x_1, y_1, z_1 festgehalten, so kann jeder andere [339
Punkt x_2, y_2, z_2 noch alle Lagen x, y, z annehmen, welche eine Gleichung befriedigen, nämlich die Gleichung:

$$\Omega\,(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = \Omega\,(x_2, y_2, z_2, x_1, y_1, z_1).$$

Werden zwei Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 festgehalten, so kann jeder dritte Punkt x_3, y_3, z_3 noch alle Lagen annehmen, welche durch die beiden Gleichungen:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = \Omega(x_3, y_3, z_3, x_1, y_1, z_1),$$
$$\Omega(x, y, z, x_2, y_2, z_2) = \Omega(x_3, y_3, z_3, x_2, y_2, z_2)$$

definiert werden.

Werden drei Punkte festgehalten, so sind die möglichen Lagen eines vierten Punktes durch drei analoge Gleichungen bestimmt. In diesem Falle bleiben alle Punkte des Raumes fest, ausgenommen, wenn der Punkt x_3, y_3, z_3 den beiden ersten Punkten gegenüber eine spezielle Lage hat.

Endlich viertens legt v. Helmholtz dem Raume noch die folgende Eigenschaft ausdrücklich bei: Wenn sich ein fester Körper ohne Umkehr um zwei in Ruhe befindliche Punkte dreht, so führt diese Drehung schließlich in die Anfangslage zurück.

v. Helmholtz behauptet ausdrücklich, daß die letzte Eigenschaft — die Monodromie des n-fach ausgedehnten Raumes — keine Konsequenz der drei zuerst genannten ist; doch bringt er, ausgenommen für $n = 2$, keinen Beweis für die Richtigkeit seiner Behauptung.

4. Um nun nachzuweisen, daß die vier von ihm aufgestellten Eigenschaften für die euklidischen und nichteuklidischen Bewegungen charakteristisch sind, sucht v. Helmholtz überhaupt alle Systeme von Transformationsgleichungen zu bestimmen, welche diese Eigenschaften besitzen. Wie ich schon oben gesagt habe, scheint mir, daß seine Durchführung dieser Bestimmung eine Lücke enthält.

Wird nämlich ein Punkt von allgemeiner Lage festgehalten, so sind, wie v. Helmholtz zeigt, noch unendlich viele unendlich kleine Bewegungen, das heißt Transformationen, möglich. Jede solche Bewegung läßt sich, wenn man den festen Punkt zum Koordinatenanfange wählt, durch Gleichungen von der folgenden Form definieren:

$$\frac{dx}{d\eta} = a_0 x + b_0 y + c_0 z + \cdots,$$
$$\frac{dy}{d\eta} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots,$$
$$\frac{dz}{d\eta} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots.$$

Die rechten Seiten sind dabei unendliche Potenzreihen nach x, y, z. [340

5. Es ist nun a priori sehr gut denkbar, daß es unter den hierdurch dargestellten unendlich kleinen Bewegungen solche gibt, in deren Reihenentwickelungen die Glieder erster Ordnung sämtlich fehlen, und insbesondere ist es denkbar, daß dies bei allen Bewegungen um den festen Punkt eintritt, die auch noch einen benachbarten Punkt invariant lassen. Bei solchen unendlich kleinen Bewegungen würden dann alle dem Koordinatenanfange unendlich benachbarten Punkte in Ruhe bleiben, wenn man von infinitesimalen Größen zweiter Ordnung absieht. Diese Möglichkeit wird, soviel ich sehe, von v. Helmholtz jedenfalls nicht hinlänglich berücksichtigt.

Ich möchte daher fragen: Ist es wirklich so selbstverständlich, daß die Koeffizienten a_i, b_i, c_i nicht gleichzeitig verschwinden können, wenn unsere Transformationsgleichungen die betreffenden oben verlangten Eigenschaften besitzen?

6. Meine zweite Bemerkung bezieht sich auf das Axiom der Monodromie. Hier muß ich vor allen Dingen hervorheben, daß solche Transformationsgleichungen, welche v. Helmholtzs drei erste Axiome befriedigen, notwendig eine kontinuierliche Gruppe bilden. Der Begriff Gruppe kommt aber bei v. Helmholtz nicht explizite vor, und doch ist gerade die Gruppeneigenschaft der Transformationsgleichungen von der größten Tragweite; sie ist an und für sich schon eine gewaltige Beschränkung der möglichen Fälle.

Um nun zu entscheiden, ob die Monodromie eine Konsequenz von den drei ersten Eigenschaften ist, muß man zunächst die Eigenschaft der freien Beweglichkeit genauer präzisieren. Man kann sich nämlich entweder damit begnügen, zu verlangen, daß die freie Beweglichkeit für Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage bestehen soll; man kann dagegen auch die weitergehende Forderung stellen, daß die freie Beweglichkeit innerhalb eines gewissen Bereiches ausnahmelos gilt.

v. Helmholtz hat nun zwar, nach dem Wortlaute seiner Auseinandersetzungen zu urteilen, wahrscheinlich gewollt, daß seine Forderung der freien Beweglichkeit innerhalb eines gewissen Bereiches ausnahmelos erfüllt sein sollte. Gleichwohl schien es mir zweckmäßig, auch einmal die Voraussetzung zu Grunde zu legen, daß die freie Beweglichkeit nur für Punkte von allgemeiner gegenseitiger Lage stattfindet. Unter dieser Annahme habe ich daher alle Gruppen von Transformationsgleichungen [341 bestimmt, welche die drei ersten der früher aufgestellten Forderungen befriedigen.

7. Außer den Gruppen der euklidischen und der nichteuklidischen Bewegungen ergaben sich da noch mehrere verschiedene Gruppen, unter denen zwei[1]) sogar je einen wesentlichen Parameter enthalten. Diese hinzutretenden Gruppen genügen aber der Forderung freier Beweglichkeit nicht, wenn man diese Forderung auf alle Punkte eines beliebig kleinen Bereiches erstreckt. Bei jeder dieser Gruppen wird nämlich der Raum in eine Schar von ∞^2 Kurven zerlegt, deren Inbegriff jedesmal bei der Gruppe invariant bleibt, während die einzelnen Kurven der Schar unter einander vertauscht werden. Aber noch mehr. *Hält man einen Punkt des Raumes fest, so bleibt nicht allein die hindurchgehende Kurve dieser Schar, sondern auch jeder einzelne Punkt der betreffenden Kurve bleibt in Ruhe.* An einer anderen Stelle werde ich hierauf genauer eingehen.

Man kann vielleicht darüber streiten, ob die Monodromie eine Konsequenz der drei ersten Axiome ist oder nicht. Sie ist jedenfalls eine Konsequenz, wenn man in das Axiom der freien Beweglichkeit ausdrücklich hineinlegt, daß sich die ∞^3 Punkte des Raumes nicht derart in ∞^2 Scharen verteilen lassen, daß alle ∞^1 Punkte einer solchen Schar stets gleichzeitig in Ruhe bleiben.

8. Ich komme jetzt zu meiner *dritten Bemerkung, auf welche ich das Hauptgewicht legen möchte.* Es ist mir gelungen, und zwar durch ziemlich einfache Betrachtungen, zu beweisen, daß sich die Transformationsgleichungen der euklidischen und der nichteuklidischen Bewegungen des dreifach ausgedehnten Raumes in der folgenden einfachen Weise charakterisieren lassen:

Erstens. Sie bestimmen eine kontinuierliche Transformationsgruppe eines dreifach ausgedehnten Raumes.

Zweitens. Bei dieser Gruppe findet freie Beweglichkeit in dem folgenden Sinne statt: Hält man innerhalb eines gewissen Bereiches einen beliebigen Punkt und gleichzeitig ein beliebiges hindurchgehendes Linienelement fest, so ist immer noch kontinuierliche Bewegung möglich. Hält man dagegen nicht allein einen Punkt und ein hindurchgehendes Linienelement, sondern zugleich ein Flächenelement fest, welches sowohl [342
durch den Punkt als durch das Linienelement geht, so ist keine kontinuierliche Bewegung mehr möglich.

Es ist mir ferner durch, soviel ich sehe, strenge, wenn auch nicht gerade kurze Entwickelungen gelungen, auch für Räume von mehr als drei Dimensionen zu beweisen, daß sich die Schar der euklidischen und

1) Die beiden im Texte besprochenen Gruppen sind übrigens mit einander durch eine imaginäre Transformation ähnlich.

die der nichteuklidischen Bewegungen in ganz analoger Weise charakterisieren läßt.

9. Bei den vorhergehenden Entwickelungen habe ich angenommen, daß die Transformationsgleichungen (1) in den vorkommenden Variabeln *analytisch* sind. Läßt man diese Voraussetzung fallen und setzt nur voraus, daß die betreffenden Funktionen kontinuierlich sind und eine gewisse endliche Anzahl Differentialquotienten besitzen, so bleibt die Methode, welche ich bei meiner Diskussion der v. Helmholtzschen Axiome angewandt habe, nicht mehr gültig. In diesem Falle wage ich daher nicht zu behaupten, daß die besprochene Lücke in v. Helmholtzs Deduktion ohne Einfluß auf das Resultat ist, noch weniger, daß sein Monodromieaxiom eine Konsequenz seiner anderen Axiome ist.

Lege ich meine beiden Axiome zu Grunde, so kann ich, wie ich glaube, streng beweisen, daß die betreffende Gruppe auch in diesem Falle einen quadratischen Ausdruck:

$$\sum_{i,k}^{1\ldots3} f_{ik}\,dx_i\,dx_k$$

invariant läßt, daß also fortwährend ein Bogenelement im Riemannschen Sinne existiert.

VI. Über die Grundlagen der Geometrie. I. Abhandlung. [284

Leipz. Ber. 1890, Heft II, abgeliefert 5. 11. 1890, S. 284—321.
Vorgelegt in der Sitzung vom 7. 7. 1890.

1. Definiert man den Inbegriff aller Bewegungen des Raumes durch analytische Gleichungen, so erhält man die Gleichungen einer Transformationsgruppe, welche sich von allen anderen Gruppen durch gewisse charakteristische Eigenschaften unterscheidet. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, solche möglichst einfache Eigenschaften der besprochenen Gruppe zu finden, welche für sie charakteristisch sind. An und für sich ist dies allerdings ein unbestimmtes Problem; doch wage ich zu glauben, daß es unmöglich ist, die Gruppe der Bewegungen in einfacherer Weise zu charakterisieren als im Folgenden geschehen.

Wenn wir hier von der Gruppe der Bewegungen reden, so denken wir nicht allein an die Gruppe der *euklidischen*, sondern auch an die Gruppe der *nichteuklidischen* Bewegungen. Wir wollen in der Tat möglichst einfache Eigenschaften angeben, welche sowohl der Gruppe der *euklidischen*, als auch der Gruppe der *nichteuklidischen* Bewegungen, sonst aber keiner anderen Gruppe zukommen.

Auch in einem Raume mit mehr als drei, etwa mit n Dimensionen kann man von einer Gruppe euklidischer, sowie von einer Gruppe nichteuklidischer Bewegungen reden. Wir wollen überhaupt für jedes $n \geqq 3$ alle diese Gruppen ins Auge fassen und sie in sehr einfacher Weise charakterisieren.

2. Die nachstehende Arbeit hat mehrere Berührungspunkte mit der bekannten Arbeit des Herrn v. *Helmholtz*: *Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.* Was diese Arbeit anlangt, so ist zu bemerken, daß sie einerseits den Begriff *Gruppe* gar nicht [285 enthält, und daß andererseits die in ihr abgeleiteten Resultate kaum als erwiesen zu betrachten sind. Mir scheint nämlich, daß die v. *Helmholtz*schen Sätze eine tiefere Behandlung erfordern; sie lassen sich kaum mit den von dem berühmten Verfasser angewandten einfachen Hilfsmitteln erhärten. Bei einer früheren Gelegenheit habe ich mich schon in diesen Berichten über die v. *Helmholtz*sche Arbeit ausgesprochen, und ich

werde bald auf dieselbe ausführlicher eingehen. Hier möchte ich nur hervorheben, daß die in der nachstehenden Arbeit angegebenen charakteristischen Eigenschaften der Gruppe der Bewegungen nicht allein einfacher, sondern zugleich schärfer formuliert sind, als die von Herrn v. *Helmholtz* angegebenen.

3. Für den dreifach ausgedehnten Raum können die betreffenden Eigenschaften folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Die Bewegungen des dreifach ausgedehnten Raumes bilden eine Gruppe von reellen Transformationen, welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

Wird ein reeller Punkt und ein reelles hindurchgehendes Linienelement festgehalten, so ist immer noch kontinuierliche Bewegung möglich; wird jedoch außerdem ein durch das Linienelement gehendes reelles Flächenelement festgehalten, so bleiben alle Punkte des Raumes in Ruhe.

Diese Eigenschaften kommen der *Gruppe der euklidischen und der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen, aber keiner anderen Gruppe zu.* Der hiermit aufgestellte allgemeine Satz hat ein bedeutendes Interesse, da er *auf die Grundlagen der Geometrie Licht wirft.*

In einem Raume mit mehr als drei Dimensionen lassen sich die beiden betreffenden Gruppen in ganz entsprechender Weise charakterisieren. Dagegen stellt sich die Sache wesentlich anders in einem *zweifach* ausgedehnten Raume; in der *Ebene* gibt es noch weitere Gruppen, welche die genannten Eigenschaften besitzen.

4. Die nachstehende Arbeit zerfällt in mehrere Paragraphen, deren jeder die Erledigung eines speziellen Problems bringt. Indem ich diese verschiedenen Resultate mit einem allerdings ziemlich tief liegenden Satze, den ich an einer anderen Stelle erwiesen habe, verbinde, erhalte ich ohne Schwierigkeit das früher angekündigte Hauptergebnis dieser Arbeit.

Die ganze Untersuchung soll in den dritten Abschnitt meiner Theorie der Transformationsgruppen aufgenommen werden, den ich mit dem [286 tätigen Beistand des Herrn Professor Dr. *Engel* bald veröffentlichen werde.

§ 1.

5. Zunächst entwickele ich einen einfachen aber wichtigen Satz über dreigliedrige projektive Gruppen einer Ebene.

Hat man eine beliebige dreigliedrige Gruppe der Ebene und hält man irgend einen Punkt fest, so werden die ∞^1 Linienelemente durch diesen Punkt bei den noch übrig bleibenden Transformationen der Gruppe durch eine *projektive* Gruppe mit höchstens zwei Parametern transformiert. Unter diesen Linienelementen gibt es daher mindestens eines, das in Ruhe bleibt und demnach mit dem Punkte invariant verknüpft ist. Daraus folgt, daß eine dreigliedrige Gruppe von Punkttransformationen der x, y-Ebene mindestens eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

invariant läßt[1]). Eine solche Differentialgleichung hat ∞^1 Integralkurven, deren Inbegriff natürlich bei der dreigliedrigen Gruppe invariant bleibt. Daher gestattet jede Integralkurve mindestens zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe.

6. Ist nun insbesondere die dreigliedrige Gruppe *projektiv*, so gestattet jede Integralkurve zwei unabhängige infinitesimale projektive Transformationen und ist daher nach einem bekannten Satze entweder eine Gerade oder ein Kegelschnitt. Die Schar der Integralkurven hat eine Umhüllungsfigur: Kurve oder Punkt, welche natürlich bei der dreigliedrigen Gruppe invariant bleibt und infolgedessen entweder eine Gerade oder ein Kegelschnitt oder ein Punkt ist.

Wir wollen zeigen, daß bei einer dreigliedrigen projektiven Gruppe der Ebene immer entweder ein Kegelschnitt oder ein Punkt invariant bleibt. Um diesen Nachweis zu führen, genügt es, zu zeigen, daß eine einzelne Gerade nie als einzige Umhüllungsfigur auftritt.

Wäre nämlich etwa die Gerade $y = 0$ die einzige auftretende [287 Umhüllungsfigur, so müßten die ∞^1 Integralkurven Kegelschnitte sein, welche die x-Achse berührten. In der allgemeinen Gleichung:

$$U = 0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y + \varepsilon x^2 + \xi y^2$$

dieser Kegelschnitte müßten die Koeffizienten $\alpha, \beta, \ldots, \xi$ von einem Parameter λ abhängen, und zwar wäre $\alpha + \beta x + \varepsilon x^2$ ein vollständiges Quadrat.

Nach einer bekannten Regel findet man die Umhüllungsfigur unserer ∞^1 Kegelschnitte dadurch, daß man den Parameter λ aus den Gleichungen $U = 0$ und:

$$\frac{dU}{d\lambda} = 0 = \frac{d\alpha}{d\lambda} + \frac{d\beta}{d\lambda}x + \frac{d\gamma}{d\lambda}y + \frac{d\delta}{d\lambda}xy + \frac{d\varepsilon}{d\lambda}x^2 + \frac{d\xi}{d\lambda}y^2$$

fortschafft. Da nun jeder Kegelschnitt der Schar die eingehüllte Gerade $y = 0$ nur in einem Punkte berührt, und da es außer dieser Geraden keine andere Umhüllungsfigur gibt, so müssen die beiden Gleichungen:

$$U = 0, \quad \frac{dU}{d\lambda} = 0$$

---

1) Math. Annalen Bd. XVI. [1880, diese Ausg. Bd. VI, Abh. I, S. 39, Satz 14.]

für jeden Wert von λ nur ein einziges Wertsystem x, y liefern. Da aber unsere beiden Gleichungen vom zweiten Grade in x und y sind, so ist hierzu notwendig und hinreichend, daß eine Gleichung von der Form:

$$\frac{dU}{d\lambda} = mU + ny^2$$

besteht, in welcher m und n Funktionen von λ sind. Es ergeben sich somit die Relationen:

$$\frac{\frac{d\alpha}{d\lambda}}{\alpha} = \frac{\frac{d\beta}{d\lambda}}{\beta} = \frac{\frac{d\gamma}{d\lambda}}{\gamma} = \frac{\frac{d\delta}{d\lambda}}{\delta} = \frac{\frac{d\varepsilon}{d\lambda}}{\varepsilon} = m,$$

welche zeigen, daß das Verhältnis je zweier unter den fünf Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ von λ unabhängig ist. Wir können daher ohne Beschränkung annehmen, daß $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ Konstanten sind, während ξ von λ ab- [288 hängt. Unsere ∞^1 Kegelschnitte werden also durch eine Gleichung von der Form:

$$\alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y + \varepsilon x^2 + f(\lambda) y^2 = 0$$

dargestellt, das heißt, sie berühren alle die Gerade $y = 0$ in demselben Punkte. Dieser gemeinsame Berührungspunkt bleibt natürlich bei der dreigliedrigen Gruppe invariant.

Hiermit haben wir den

Satz 1. *Jede dreigliedrige projektive Gruppe der Ebene, welche nicht aus allen projektiven Transformationen eines Kegelschnittes besteht, läßt einen Punkt in Ruhe.*

Wir bemerken beiläufig, daß eine dualistische Betrachtung zeigt, daß eine dreigliedrige projektive Gruppe einer Ebene, welche keinen Kegelschnitt invariant läßt, immer eine Gerade festhält. Diese Gerade braucht aber nicht durch den immer vorhandenen invarianten Punkt zu gehen.

7. Jetzt können wir leicht ein allgemeineres Resultat von Interesse ableiten.

Wir suchen in der Ebene alle reellen projektiven Gruppen, bei denen *freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* in folgendem Sinne stattfindet:

Wird ein reeller Punkt festgehalten, so soll stets noch kontinuierliche Bewegung möglich sein; werden dagegen zu gleicher Zeit ein reeller Punkt und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement festgehalten, so sollen alle Punkte der Ebene in Ruhe bleiben.

Es gibt Gruppen, welche die gestellte Forderung zwar nicht ausnahmelos, jedoch innerhalb eines gewissen Bereiches erfüllen. Zunächst suchen wir aber nur solche Gruppen, bei denen die *freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* innerhalb der ganzen Ebene **ausnahmelos** stattfindet.

Wenn ein reeller Punkt festgehalten wird, so muß sich jedes hindurchgehende reelle Linienelement um ihn drehen lassen; sonst blieben ja mit dem einen Punkte zunächst ein Linienelement und sodann alle Punkte der Ebene in Ruhe.

Hieraus folgt, daß die gesuchte Gruppe *transitiv* sein muß; blieben nämlich ∞^1 reelle Kurven: $\varphi(x, y) = \text{const.}$ in Ruhe, so wäre mit jedem Punkte der Ebene eine Richtung invariant verknüpft, nämlich die Tangente an die hindurchgehende Kurve der Schar: $\varphi(x, y) = \text{const.}$

Ferner ergibt sich, daß unsere Gruppe *dreigliedrig* ist; denn [289
einen Punkt und ein hindurchgehendes Linienelement festzuhalten, kommt nach dem Obenstehenden auf *drei* Bedingungen hinaus.

8. Unsere Gruppe läßt also entweder einen Kegelschnitt oder einen Punkt in Ruhe.

Ein *reeller* Punkt kann nicht in Ruhe bleiben; denn dann gehörte zu *jedem* Punkte der Ebene eine mit ihm invariant verbundene reelle Richtung. Bliebe andererseits ein imaginärer Punkt in Ruhe, so müßte, da unsere Gruppe aus reellen projektiven Transformationen besteht, zugleich der konjugiertimaginäre Punkt in Ruhe bleiben, und außerdem auch noch die reelle Verbindungslinie beider Punkte. Dann aber könnte sich offenbar jedes reelle Linienelement dieser Geraden nicht um seinen Punkt drehen.

Es muß daher bei unserer Gruppe ein Kegelschnitt invariant bleiben, und dieser Kegelschnitt muß augenscheinlich imaginär sein, aber durch eine reelle Gleichung dargestellt werden. Also gilt der

Satz 2. *Besitzt eine reelle projektive Gruppe der Ebene die Eigenschaft, daß alle Punkte in Ruhe bleiben, wenn man einen beliebigen reellen Punkt und ein beliebiges, durch ihn gehendes reelles Linienelement festhält, daß dagegen stets noch kontinuierliche Bewegung möglich ist, wenn man nur einen reellen Punkt festhält, so besteht die Gruppe aus allen projektiven Transformationen, welche einen durch eine reelle Gleichung dargestellten imaginären Kegelschnitt in Ruhe lassen.*

9. Verlangt man von einer reellen projektiven Gruppe nur, daß *innerhalb eines gewissen Bereiches* freie Beweglichkeit im Infinitesimalen stattfinden soll, so erhält man noch weitere Gruppen. In

diesem Falle ist es nämlich denkbar, daß zwei konjugiertimaginäre Punkte in Ruhe bleiben. Werden diese konjugiertimaginären Punkte nach den imaginären Kreispunkten verlegt, so ist die Gruppe eine Untergruppe der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen, deren infinitesimale Transformationen bei Anwendung meiner gewöhnlichen Bezeichnungsweise die Form:

$$p, q, xq - yp, xp + yq$$

haben. Enthielte nun unsere dreigliedrige Gruppe nur *eine* infinitesimale Translation:

$$\alpha p + \beta q,$$

so müßte sie eine infinitesimale Rotation:

$$xq - yp + \mu p + \nu q$$

und also auch die Transformation: [290

$$(\alpha p + \beta q, xq - yp + \mu p + \nu q) = \alpha q - \beta p$$

umfassen; diese neue Transformation ist aber eine Translation und müßte daher nach unserer früheren Annahme mit der Translation $\alpha p + \beta q$ zusammenfallen. Es ergäbe sich also:

$$\frac{\alpha}{-\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$$

oder:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0, \quad \beta = i\alpha.$$

Die einzige infinitesimale Translation:

$$\alpha p + \beta q = \alpha(p + iq)$$

unserer Gruppe wäre somit imaginär, und demnach wäre die Gruppe selbst gegen unsere Voraussetzung imaginär.

Hieraus ergibt sich, daß die gesuchte Gruppe die beiden infinitesimalen Translationen p und q, und eine Transformation von der Form:

$$\alpha(xq - yp) + \beta(xp + yq)$$

enthalten muß. Die Konstante α darf hier nicht verschwinden; denn sonst wäre mit jedem Punkte jedes durch ihn gehende Linienelement invariant verknüpft.

Hiermit erhalten wir den

Satz 3. *Besitzt eine reelle projektive Gruppe von Transformationen einer Ebene nicht ausnahmelos, sondern nur innerhalb eines gewissen Bereiches die Eigenschaft, daß* alle Punkte in Ruhe bleiben, wenn man einen ganz beliebigen reellen Punkt und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement festhält, daß dagegen, wenn bloß ein Punkt festgehalten wird, immer noch kontinuierliche Bewegung möglich ist, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder besteht die Gruppe aus allen projektiven Transformationen, welche einen reellen Kegelschnitt in sich überführen, oder sie hat die Form:

$$p, q, xq - yp + c(xp + yq),$$

wo c eine reelle Konstante bedeutet. Ist c verschieden von Null, so besteht die Gruppe aus Ähnlichkeitstransformationen; die Bahnkurven ihrer infinitesimalen Transformationen sind dann Spiralen.

Die Gruppe der euklidischen und die Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen sind also, wie bereits v. Helmholtz bemerkt hat, nicht die einzigen Gruppen, welche unsere Forderung erfüllen; dies ist auch der Fall mit jeder Gruppe:

$$p, q, xq - yp + c(xp + yq),$$

welche reelle, von Null verschiedene Konstante das c auch sein möge.

§ 2.

10. Wir suchen jetzt im dreifach ausgedehnten Raume eine reelle Transformationsgruppe, welche innerhalb eines gewissen Bereiches [291 freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in folgendem Sinne des Wortes besitzt:

Werden ein beliebiger reeller Punkt und ein hindurchgehendes reelles Linienelement festgehalten, so soll immer noch kontinuierliche Bewegung möglich sein. Wird aber außerdem ein beliebiges Flächenelement festgehalten, das durch den Punkt und das Linienelement geht, so sollen alle Punkte des Raumes in Ruhe bleiben.

11. Es ist zunächst leicht einzusehen, daß sich um ein beliebiges reelles Linienelement, das man festhält, jedes hindurchgehende reelle Flächenelement drehen kann; sonst blieben ja zugleich mit dem Linienelemente alle Punkte des Raumes in Ruhe.

Hieraus läßt sich schließen, daß unsere Gruppe transitiv sein muß; blieben nämlich ∞^1 reelle Flächen $\varphi = a$ invariant, so bestimmte jeder Punkt mit der Tangentialebene der durch ihn gehenden Fläche $\varphi = a$

ein Flächenelement, das sich nicht um seine Linienelemente drehen könnte. Blieben andererseits ∞^2 reelle Kurven invariant, so ließen sich diese sogar auf unbegrenzt viele Weisen zu ∞^1 invarianten Flächen vereinigen; man käme also auf den eben als unmöglich nachgewiesenen Fall.

Wir erkannten, daß sich jedes Flächenelement um jedes in ihm gelegene Linienelement drehen kann. Hieraus folgt, daß die durch einen festgehaltenen Punkt gehenden Linienelemente transitiv transformiert werden und zwar derart, daß jedes reelle Linienelement ohne Ausnahme in jedes andere übergehen kann. Wäre nämlich mit jedem reellen Punkte auch nur ein einziger reeller Kegel invariant verknüpft, so könnte sich ein Flächenelement, dessen Ebene diesen Kegel berührt, nicht um jedes in ihm liegende Linienelement drehen.

Fassen wir alle durch einen festgehaltenen Punkt gehenden Linienelemente als eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit auf, so leuchtet ein, daß diese zweidimensionale Mannigfaltigkeit durch eine projektive Gruppe transformiert wird, welche ausnahmelos die im ersten Paragraphen vorausgesetzten Eigenschaften besitzt. Wird nämlich ein reelles Linienelement festgehalten, so können die durch dasselbe gehenden reellen Flächenelemente sich noch bewegen; hält man aber sowohl ein reelles Linienelement, als ein hindurchgehendes reelles Flächenelement fest, so bleiben alle ∞^2 Linienelemente in Ruhe.

12. Die Linienelemente, welche durch einen festgehaltenen Punkt [292 gehen, werden daher durch eine projektive Gruppe transformiert, und diese Gruppe besteht aus allen projektiven Transformationen, die einen gewissen, durch eine reelle Gleichung dargestellten imaginären Kegel zweiten Grades invariant lassen. Hieraus folgt, wie wir beiläufig bemerken, daß unsere Gruppe von Transformationen des Raumes primitiv ist; denn es ist unmöglich, jedem Punkte des Raumes ein mit ihm invariant verknüpftes Linien- oder Flächenelement zuzuordnen.

13. Wir haben gefunden, daß mit jedem Punkte des Raumes ein gewisser Kegel zweiten Grades invariant verknüpft ist. Anders ausgesprochen: es läßt jede Gruppe des Raumes x_1, x_2, x_3, welche die verlangten Eigenschaften besitzt, eine Differentialgleichung zweiten Grades:

$$\sum_{i,k}^{1,2,3} f_{ik}(x_1, x_2, x_3)\, dx_i\, dx_k = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante:

$$\sum \pm f_{11} f_{22} f_{33}$$

und mit reellen Koeffizienten f_{ik} invariant.

In einer älteren Arbeit, die im zehnten Bande des norwegischen Archivs für Mathematik gedruckt ist [1885, d. Ausg. Bd. V, Abh. XIX, S. 493 bis 497], habe ich nun alle primitiven Gruppen des Raumes bestimmt, welche diese Eigenschaften besitzen.[1]) Es ergab sich, daß nur vier verschiedene Fälle möglich sind. Alle derartigen Gruppen sind ähnlich

1) Ich halte es nicht für notwendig, hier die Rechnungen zu wiederholen, welche mich zu den im Texte angeführten Resultaten geführt haben. Ich werde aber kurz andeuten, wie man diese Resultate in der Ausdehnung, in welcher sie für das Folgende notwendig sind, ableiten kann.

Ist der Koordinatenanfang $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage, und ist, wie wir immer annehmen können:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0$$

die Gleichung des diesem Punkte zugeordneten Kegels, so leuchtet ein, daß unsere Gruppe sechs infinitesimale Transformationen enthält, deren Reihenentwickelungen nach x_1, x_2, x_3 die Form:

$$\begin{gathered} p_1 + \cdots,\ p_2 + \cdots,\ p_3 + \cdots, \\ x_1 p_2 - x_2 p_1 + \alpha_{12}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + \cdots, \\ x_2 p_3 - x_3 p_2 + \alpha_{23}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + \cdots, \\ x_3 p_1 - x_1 p_3 + \alpha_{31}(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) + \cdots \end{gathered}$$

besitzen. Da nur sechsgliedrige Gruppen in Betracht kommen, so ergibt sich durch paarweise Kombination der drei letzten infinitesimalen Transformationen, daß die Konstanten α_{ik} gleich Null sind. Führen wir aber auf $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ etwa die infinitesimale Transformation:

$$A(f) = x_1 p_2 - x_2 p_1 + \cdots$$

aus, so verschwindet in der Reihenentwickelung des Ausdrucks:

$$A(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

das Glied niedrigster Ordnung. Hieraus läßt sich durch Betrachtungen, auf die ich nicht eingehe, der Schluß ziehen, daß die invariante Gleichung:

$$\sum \pm f_{ik}(x_1, x_2, x_3)\, dx_i\, dx_k = 0$$

eine solche Form erhalten kann, daß der Ausdruck $\sum f_{ik}\, dx_i\, dx_k$ bei allen infinitesimalen und auch bei allen endlichen Transformationen unserer Gruppe invariant bleibt.

Nachdem hiermit die Existenz eines bei unserer Gruppe invarianten Bogenelementes erkannt ist, beweist man, daß jede reelle Gruppe von dieser Beschaffenheit entweder mit der Gruppe der euklidischen, oder mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen ähnlich ist und zwar durch eine reelle Transformation.

In meiner früher zitierten Abhandlung habe ich übrigens den Begriff Bogenelement gar nicht benutzt. Ich stützte mich darauf, daß die Bestimmung aller in dx_1, dx_2, dx_3 homogenen Gleichungen:

$$f(x_1, x_2, x_3, dx_1, dx_2, dx_3) = 0,$$

entweder mit der sechsgliedrigen Gruppe der euklidischen Be- [293
wegungen,

oder mit der sechsgliedrigen Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen, das heißt, mit der Gruppe einer durch eine reelle Gleichung dargestellten reellen oder imaginären Fläche zweiten Grades,

oder mit der siebengliedrigen Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen,

oder mit der zehngliedrigen Gruppe der reziproken Radien.

14. Es ist leicht zu erkennen, daß eine Gruppe, welche die von [294
uns im Anfange dieses Paragraphen gestellten Forderungen erfüllt, sechsgliedrig sein muß.

In der Tat, da unsere Gruppe transitiv ist, da ferner die durch einen festgehaltenen Punkt gehenden Linienelemente transitiv transformiert werden, da sich endlich jedes Flächenelement um ein beliebiges, in ihm gelegenes Linienelement drehen kann, so entspricht das Festhalten eines Punktes, eines hindurchgehenden Linienelementes und eines durch beide gehenden Flächenelementes genau sechs Bedingungen.

Unter den vier soeben angegebenen primitiven Gruppen, welche eine Differentialgleichung:

$$\sum_{i,k}^{1,2,3} f_{ik}(x_1, x_2, x_3)\, dx_i\, dx_k = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante:

$$\sum \pm f_{11} f_{22} f_{33}$$

invariant lassen, kommen daher nur diejenigen in Betracht, welche sechs Parameter enthalten. Das ist der Fall mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen, sowie mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen, wobei nicht zu vergessen ist, daß es zweierlei Gruppen von nichteuklidischen Bewegungen gibt, je nachdem die invariante Fläche zweiten Grades reell oder imaginär ist.

die eine kontinuierliche Gruppe in x_1, x_2, x_3 gestatten, unmittelbar hervorgeht aus meiner Bestimmung aller Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$F(x, y, y', y'', y''') = 0,$$

die eine kontinuierliche Berührungstransformationsgruppe der Ebene x, y zulassen.

Im zehnten Bande des norwegischen Archivs [1886, d. Ausg. Bd. V, Abh. XXII, S. 533—550] habe ich das entsprechende Problem für einen Raum mit mehr als drei Dimensionen behandelt und bin durch eine rationelle Methode, die allerdings ziemlich ausführliche Rechnungen verlangt, zu ganz entsprechenden Resultaten gekommen.

Wir erhalten somit das folgende besonders wichtige Resultat:

Theorem I. *Wenn eine reelle Transformationsgruppe des dreifach ausgedehnten Raumes innerhalb eines gewissen Bereiches so beschaffen ist, daß noch kontinuierliche Bewegung möglich ist, sobald ein beliebiger reeller Punkt und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement festgehalten werden, während dagegen alle Punkte des Raumes in Ruhe bleiben, sobald außerdem noch ein durch das besprochene Linienelement gehendes reelles Flächenelement festgehalten wird, so ist die Gruppe durch eine reelle Transformation ähnlich entweder mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen, oder mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen, das heißt, mit der projektiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades, deren Gleichung eine der beiden Formen:*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm 1 = 0 \qquad [295$$

besitzt.

15. Man kann sich von vornherein auf *projektive* Gruppen beschränken und nach allen projektiven Gruppen fragen, welche entweder *innerhalb eines gewissen Bereiches oder ausnahmelos* die früher gestellten Forderungen erfüllen.

Auf diese Fragestellung kommen wir erst in einem späteren Paragraphen zurück. Es ist nämlich notwendig, zuerst eine allgemeine Untersuchung über gewisse projektive Gruppen durchzuführen.

§ 3.

16. Ehe wir weiter gehen, müssen wir, wie soeben gesagt, eine für das Folgende notwendige Hilfstheorie entwickeln.

Wir stellen die Frage nach allen reellen projektiven Gruppen des n fach ausgedehnten Raumes $x_1, \dots, x_n$, welche mit der projektiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \pm 1 = 0$$

durch eine reelle Transformation ähnlich sind.

Indem wir annehmen, daß der Koordinatenanfang $x_k = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist, können wir ohne Beschränkung annehmen, daß jede der gesuchten projektiven Gruppen:

$$n + \tfrac{1}{2} n(n-1)$$

infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p_k + \sum_{i,j} \alpha_{kij} x_i p_j + \sum_j \beta_{kj} x_j \sum_i x_i p_i \qquad (k = 1, \dots, n),$$

$$x_i p_k - x_k p_i + \sum_j \gamma_{ikj} x_j \sum_\alpha \pi_\alpha p_\alpha \qquad (i, k = 1, \dots, n)$$

enthält. Setzen wir zur Abkürzung:

$$x_j(x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n) = S_j,$$

so können die $\frac{1}{2} n(n-1)$ letzten infinitesimalen Transformationen [296 folgendermaßen geschrieben werden:

$$x_i p_k - x_k p_i + \sum_j \gamma_{ikj} S_j.$$

17. Wir kombinieren die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$x_i p_k - x_k p_i + \sum_j \gamma_{ikj} S_j,$$

$$x_i p_\nu - x_\nu p_i + \sum_\varrho \gamma_{i\nu\varrho} S_\varrho$$

und erhalten so die infinitesimale Transformation:

$$x_\nu p_k - x_k p_\nu + \gamma_{i\nu k} S_i - \gamma_{i\nu i} S_k - \gamma_{ik\nu} S_i + \gamma_{iki} S_\nu.$$

Ist nun, wie wir vorläufig annehmen wollen, $n > 3$, so ist den beiden Zahlen ν und k gegenüber keine dritte Zahl i ausgezeichnet; also muß in diesem Falle:

$$(\gamma_{i\nu k} - \gamma_{ik\nu}) S_i = 0$$

sein. Die durch Kombination gefundene infinitesimale Transformation hat daher die Gestalt:

$$x_\nu p_k - x_k p_\nu + \gamma_{iki} S_\nu - \gamma_{i\nu i} S_k,$$

und da die Form dieser infinitesimalen Transformation von der Zahl i unabhängig sein muß, können wir:

$$\gamma_{i\nu i} = \gamma_{j\nu j} = \gamma_\nu$$

setzen.

Die $\frac{1}{2} n(n-1)$ infinitesimalen Transformationen unsrer reellen Gruppe, welche in der Umgebung des Punktes $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ von der ersten Ordnung sind, besitzen somit die Form:

$$x_i p_k - x_k p_i + \gamma_k S_i - \gamma_i S_k = A_{ik} f.$$

18. Diese Transformationen lassen, wie wir jetzt zeigen werden, eine gewisse Ebene:

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1 = 0 \qquad [297$$

invariant.

Es ist nämlich:

$$A_{ik}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_k x_i - \lambda_i x_k + \gamma_k x_i \sum_j \lambda_j x_j - \gamma_i x_k \sum_j \lambda_j x_j;$$

mit Benutzung der Gleichung der betreffenden Ebene wird also:

$$A_{ik}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1) = (\lambda_k - \gamma_k) x_i - (\lambda_i - \gamma_i) x_k.$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\lambda_k = \gamma_k$ gesetzt wird. Da nun unsere infinitesimalen Transformationen $A_{ik}f$, solange eines der γ_k von Null verschieden ist, die unendlich ferne Ebene nicht in Ruhe lassen, erkennen wir, daß die $A_{ik}f$ unter allen Umständen eine und nur eine Ebene in Ruhe lassen.

19. Es liegt nahe, diese Ebene ins Unendliche zu verlegen. Denken wir uns das von vornherein gemacht, so müssen alle γ_k verschwinden, und unsere infinitesimalen Transformationen erster Ordnung dementsprechend die einfache Form $x_i p_k - x_k p_i$ besitzen.

Wir wollen dieses, allerdings ziemlich selbstverständliche, Resultat durch Rechnung bestätigen. Wir wollen also zeigen, daß die infinitesimalen Transformationen:

$$x_i p_k - x_k p_i - \gamma_i S_k + \gamma_k S_i$$

in den Veränderlichen:

$$x_j' = \frac{x_j}{\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n + 1}$$

die Form $x_i' p_k' - x_k' p_i'$ annehmen.

Diesen Nachweis führen wir dadurch, daß wir in:

$$Af = x_i' p_k' - x_k' p_i'$$

die Veränderlichen x_j durch die inverse Substitution:

$$x_j = \frac{x_j'}{1 - \gamma_1 x_1' - \cdots - \gamma_n x_n'}$$

einführen. [298

Es ist:

$$A x_j = \varepsilon_{kj} x_i - \varepsilon_{ij} x_k + \gamma_k x_j x_i - \gamma_i x_j x_k$$

und demzufolge:

$$Af = \sum_j^{1\ldots n} A x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = x_i p_k - x_k p_i + \gamma_k S_i - \gamma_i S_k,$$

oder:

$$x_i' p_k' - x_k' p_i' = x_i p_k - x_k p_i + \gamma_k S_i - \gamma_i S_k.$$

Wir können daher ohne Beschränkung annehmen, daß alle γ_k gleich Null sind, sodaß unsere infinitesimalen Transformationen erster Ordnung die Form:

$$x_i p_k - x_k p_i$$

besitzen.

20. Es bleibt noch übrig, die Transformationen nullter Ordnung genauer zu bestimmen. Zu diesem Zwecke kombinieren wir die infinitesimale Transformation:

$$p_i + \sum_{kj}^{1\ldots n} \lambda_{ikj} x_k p_j + \sum_j^{1\ldots n} \mu_{ij} S_j$$

mit $x_i p_k - x_k p_i$ und erhalten hierdurch eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$p_k + \sum_\mu^{1\ldots n} \alpha_{\mu k} x_\mu p_k + \sum_\mu^{1\ldots n} \beta_{\mu i} x_\mu p_i + \sum_\mu^{1\ldots n} \gamma_{k\mu} x_k p_\mu + \sum_\mu^{1\ldots n} \delta_{i\mu} x_i p_\mu + \sum_j^{1\ldots n} \varphi_{kj} S_j.$$

Da aber gegenüber der Zahl k keine andere Zahl i ausgezeichnet ist, folgt, daß die $\beta_{\mu i}$ und $\delta_{i\mu}$ gleich Null sein müssen. Unsere infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung haben somit die Form:

$$p_k + \sum_\mu^{1\ldots n} \alpha_{\mu k} x_\mu p_k + \sum_\mu^{1\ldots n} \gamma_{k\mu} x_k p_\mu + \sum_j^{1\ldots n} \varphi_{kj} S_j.$$

Kombinieren wir nun diese infinitesimale Transformation mit: [299

$$x_\mu p_i - x_i p_\mu \qquad (k \neq i, k \neq \mu),$$

so kommt:

$$\gamma_{k\mu} x_k p_i - \gamma_{ki} x_k p_\mu - \alpha_{ik} x_\mu p_k + \alpha_{\mu k} x_i p_k - \varphi_{ki} S_\mu + \varphi_{k\mu} S_i.$$

Diese Transformation muß unserer Gruppe angehören; daher ist:

$$\gamma_{k\mu} + \alpha_{\mu k} = 0, \quad \gamma_{ki} + \alpha_{ik} = 0, \quad \varphi_{ki} = \varphi_{k\mu} = 0.$$

21. Unsere infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung haben somit die Form:

$$p_\mu + \sum_\nu^{1\ldots n} \alpha_{\mu\nu}(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu) + \alpha_\mu x_\mu p_\mu + \beta_\mu S_\mu,$$

oder, wenn alle $\alpha_{\mu\nu}$ mit zwei verschiedenen Indizes, wie offenbar erlaubt, gleich Null gesetzt werden, die noch einfachere Form:

$$p_\mu + \alpha_\mu x_\mu p_\mu + \beta_\mu S_\mu.$$

Mit $x_\mu p_i - x_i p_\mu$ kombiniert gibt diese Transformation:

$$p_i + \alpha_\mu (x_\mu p_i + x_i p_\mu) + \beta_\mu S_i.$$

Man erkennt somit, daß alle α_μ gleich Null sind, und daß der Koeffizient β_μ vom Index μ unabhängig ist.

Wäre nun dieser Koeffizient β gleich Null, so erhielten unsere infinitesimalen Transformationen die Form:

$$p_i, \; x_\nu p_k - x_k p_\nu \qquad (i, \nu, k = 1, \ldots, n);$$

dann aber bildeten die Translationen $p_1, \ldots, p_n$ eine invariante Untergruppe, und das ist von vornherein ausgeschlossen, da nach meinen Untersuchungen für $n \gtrless 3$ die kontinuierliche Gruppe einer Fläche zweiten [300 Grades mit nicht verschwindender Determinante einfach ist.[1])

Es ist daher β eine von Null verschiedene positive oder negative Größe.

22. Wir wollen nun unter $\sqrt{\pm \beta}$ eine reelle Größe verstehen und führen die n reellen Größen:

$$x_k' = x_k \sqrt{\pm \beta} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

als neue unabhängige Veränderliche ein. Dann wird:

$$p_k + \beta S_k = \sqrt{\pm \beta} \cdot p_k' + \frac{\beta}{\sqrt{\pm \beta}} x_k' \sum_j^{1 \ldots n} x_j' p_j',$$

oder:

$$p_k + \beta S_k = \sqrt{\pm \beta} \left(p_k' \pm x_k' \sum_j^{1 \ldots n} x_j' p_j' \right).$$

Es ist daher gestattet, die Konstante β gleich ± 1 zu setzen. Im ersten Falle erhalten wir die infinitesimalen Transformationen:

$$p_k + S_k, \; x_i p_\mu - x_\mu p_i \qquad (k, i, \mu = 1, \ldots, n),$$

1) Im zehnten Bande des norwegischen Archivs (1885) habe ich gezeigt, daß die kontinuierliche Gruppe einer Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante, solange n von 3 verschieden ist, einfach ist. [D. Ausg. Bd. V, Abh. XXII, S. 550 f.] Hieraus geht unmittelbar hervor, daß sich die Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen dadurch von der Gruppe der euklidischen Bewegungen unterscheidet, daß die erste Gruppe einfach, die zweite zusammengesetzt ist.

Unabhängig von mir ist der dänische Geometer Petersen zu demselben Resultate gekommen. Soweit mir bekannt, hat sich jedoch Herr Petersen, dessen Arbeit mir leider im Augenblicke nicht zugänglich ist, auf die Ebene beschränkt.

Im dreifach ausgedehnten Raume ist die kontinuierliche Gruppe einer Fläche zweiten Grades zusammengesetzt. Sie hat zwei invariante dreigliedrige Untergruppen, deren Transformationen nicht paarweise vertauschbar sind. Dagegen hat die Gruppe der euklidischen Bewegungen nur eine invariante Untergruppe, deren Transformationen sämtlich vertauschbar sind.

das heißt, alle infinitesimalen projektiven Transformationen, welche die imaginäre Fläche zweiten Grades:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1 = 0$$

in sich überführen; im zweiten Falle erhalten wir die infinitesi- [301 malen Transformationen:

$$p_k - S_k, \; x_i p_\mu - x_\mu p_i \qquad (k, i, \mu = 1, \ldots, n),$$

das heißt, die allgemeinsten infinitesimalen projektiven Transformationen, welche die reelle Fläche zweiten Grades:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

in sich transformieren.

23. Die vorausgehenden Entwickelungen liefern uns somit den folgenden allgemeinen Satz:

Satz 4. Ist eine reelle projektive Gruppe des Raumes $x_1, \ldots, x_n$ durch eine reelle Transformation ähnlich mit der (kontinuierlichen) projektiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades mit der Gleichungsform:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \pm 1 = 0,$$

so kann sie durch eine reelle **projektive** Transformation der Veränderlichen entweder in die projektive Gruppe der imaginären Fläche:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1 = 0,$$

oder in die projektive Gruppe der reellen Fläche:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

übergeführt werden.

Dieser Satz bleibt natürlich noch gültig, wenn das eingeklammerte Wort „kontinuierlichen" gestrichen wird.

Die vorangehenden Entwickelungen liefern uns auch den folgenden Satz:

Satz 5. Ist eine reelle projektive Gruppe des Raumes $x_1, \ldots, x_n$ mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen dieses Raumes durch eine reelle Transformation ähnlich, so ist sie mit ihr innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe des Raumes $x_1, \ldots, x_n$ durch eine reelle projektive Transformation gleichberechtigt.

Es darf nicht vergessen werden, daß in den vorausgehenden Entwickelungen die Annahme $n > 3$ gemacht wurde. Wir wollen daher jetzt zeigen, daß die abgeleiteten Sätze auch noch gültig bleiben, wenn $n = 3$ ist.

24. In diesem Falle haben wir die drei infinitesimalen Transformationen erster Ordnung: [302

$$x_1 p_2 - x_2 p_1 + \alpha_{121} S_1 + \alpha_{122} S_2 + \alpha_{123} S_3,$$
$$x_1 p_3 - x_3 p_1 + \alpha_{131} S_1 + \alpha_{132} S_2 + \alpha_{133} S_3,$$
$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + \alpha_{231} S_1 + \alpha_{232} S_2 + \alpha_{233} S_3.$$

Kombinieren wir nun die beiden ersten infinitesimalen Transformationen, so erhalten wir die Transformation:

$$x_3 p_2 - x_2 p_3 + \alpha_{132} S_1 - \alpha_{131} S_2 - \alpha_{123} S_1 + \alpha_{121} S_3;$$

also ist:

$$\alpha_{132} - \alpha_{123} = \alpha_{321},$$
$$\alpha_{131} = - \alpha_{322}, \quad \alpha_{121} = \alpha_{323}.$$

Unsere drei infinitesimalen Transformationen haben somit die Form:

$$x_1 p_2 - x_2 p_1 + \alpha_2 S_1 - \alpha_1 S_2 + \alpha_{123} S_3,$$
$$x_3 p_1 - x_1 p_3 - \alpha_3 S_1 + \alpha_{312} S_2 + \alpha_1 S_3,$$
$$x_2 p_3 - x_3 p_2 + \alpha_{231} S_1 + \alpha_3 S_2 - \alpha_2 S_3.$$

Wird die letzte unter diesen Transformationen mit:

$$p_1 + \sum_{kj}^{1\ldots 3} \lambda_{kj} x_k p_j + \sum_{k}^{1\ldots 3} \mu_k S_k$$

kombiniert, so enthält die hervorgehende infinitesimale Transformation erster Ordnung das Glied $x_1 p_1$ mit dem Faktor $-\alpha_{231}$, der somit verschwindet. Es ist daher:

$$\alpha_{231} = \alpha_{312} = \alpha_{123} = 0,$$

und unsere infinitesimalen Transformationen erster Ordnung besitzen die Form:

$$x_i p_k - x_k p_i + \alpha_k S_i - \alpha_i S_k,$$

genau wie wenn n größer als 3 ist. Wir kommen daher im Falle $n = 3$ genau zu demselben Resultate, wie im Falle $n > 3$.

25. Auch wenn $n = 2$ ist, bleiben die aufgestellten Sätze gültig. [303
Dies folgt unmittelbar daraus, daß die einzige infinitesimale Transforma-

tion erster Ordnung, welche in diesem Falle auftritt, von vornherein die Form:

$$x_1 p_2 - x_2 p_1 + c_1 S_1 + c_2 S_2$$

besitzt. Die Erledigung dieses Falles liegt übrigens implizite in der von mir längst durchgeführten Bestimmung aller projektiven Gruppen einer Ebene.

Ich darf wohl hinzufügen, daß auch der Fall $n = 3$ von mir schon in einer älteren Arbeit erledigt worden ist.

§ 4.

26. Auf S. 295 [hier S. 390] fragten wir nach allen reellen *projektiven* Gruppen des dreifach ausgedehnten Raumes, welche ausnahmelos oder innerhalb eines gewissen Bereiches *freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* besitzen. Wir können jetzt diese Frage sehr leicht beantworten.

Jede Gruppe von der verlangten Beschaffenheit ist nach den Entwickelungen des zweiten Paragraphen durch eine reelle Transformation ähnlich entweder mit der Gruppe der euklidischen oder mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen des dreifach ausgedehnten Raumes.

Nun aber suchen wir nur *projektive* Gruppen mit den betreffenden Eigenschaften. Es zeigen also die Entwickelungen des vorigen Paragraphen, daß jede Gruppe von der verlangten Beschaffenheit mit einer der genannten projektiven Gruppen innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe durch eine reelle Transformation gleichberechtigt sein muß.

Wollen wir, daß die gesuchte Gruppe *ausnahmelos* für alle Punkte des Raumes freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen soll, so muß die Gruppe der euklidischen Bewegungen ausgeschlossen werden, da sie die unendlich ferne Ebene in Ruhe läßt, und sich die Elemente dieser Ebene infolgedessen nicht um ihre Linienelemente drehen können. Gleichzeitig müssen alle mit dieser Gruppe innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe gleichberechtigten Gruppen ausgeschlossen werden.

Unser Resultat ist also das folgende:

Satz 6. *Besitzt eine reelle kontinuierliche projektive Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes ausnahmelos freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so besteht sie aus allen reellen projektiven Transformationen, welche eine durch eine reelle Gleichung dargestellte imaginäre Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich überführen.* [304

Satz 7. Besitzt eine reelle projektive Gruppe des dreifach ausgedehnten Raumes zwar nicht ausnahmelos, jedoch innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder besteht die Gruppe aus allen projektiven Transformationen, welche eine geschlossene reelle Fläche zweiten Grades (Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid, elliptisches Paraboloid) in sich überführen; oder die Gruppe ist innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen durch eine reelle Transformation gleichberechtigt.

§ 5.

27. Jetzt können wir unsere allgemeinen Probleme ohne Schwierigkeit für einen vierfach ausgedehnten Raum R_4 erledigen.

Wir suchen zunächst im vierfach ausgedehnten Raume x_1, x_2, x_3, x_4 alle reellen Transformationsgruppen, bei denen innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in dem folgenden Sinne stattfindet:

Wird ein beliebiger reeller Punkt, ein beliebiges hindurchgehendes reelles M_1-Element und ein beliebiges durch beide gehendes reelles M_2-Element festgehalten, so ist noch kontinuierliche Bewegung des Raumes R_4 möglich; wird jedoch außerdem noch ein durch das M_2-Element gehendes reelles M_3-Element festgehalten, so bleiben alle Punkte des Raumes in Ruhe.

Um dieses Problem zu erledigen, betrachten wir die durch einen festgehaltenen Punkt P gehenden ∞^3 reellen M_1-Elemente als Punkte eines dreifachen Raumes R_3', welcher von einer projektiven Gruppe transformiert wird. Diese projektive Gruppe hat nun, wie wir jetzt zeigen werden, die in § 4 vorausgesetzten Eigenschaften.

Wird im Raume R_4 der reelle Punkt P, ein hindurchgehendes reelles M_1-Element, sowie ein durch dasselbe gehendes reelles M_2-Element festgehalten, so heißt dies, daß im Raume R_3' ein reeller Punkt und ein hindurchgehendes reelles Linienelement festgehalten werden. Gäbe es nun [305
unter den durch dieses Linienelement gehenden reellen Flächenelementen auch nur ein einziges, welches sich unter den gemachten Voraussetzungen nicht um das Linienelement drehen könnte, so existierte im Raume R_4 ein durch den Punkt P, durch das festgehaltene Linienelement, sowie durch das festgehaltene M_2-Element gehendes reelles M_3-Element, welches sich nicht um dieses M_2-Element drehen könnte. Dann blieben aber alle

Punkte des Raumes R_4 in Ruhe, was unserer Voraussetzung der freien Beweglichkeit im Infinitesimalen widersprechen würde.

Die reelle projektive Gruppe unseres dreifachen Raumes R_3' besitzt daher in dem bekannten Sinne des Wortes freie Beweglichkeit im Infinitesimalen und zwar ausnahmelos. Sie besteht infolgedessen aus allen reellen projektiven Transformationen, welche eine durch eine reelle Gleichung dargestellte imaginäre Mannigfaltigkeit zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich überführen.

28. Hieraus folgt, daß die vorgelegte Gruppe des vierfachen Raumes R_4 eine reelle Gleichung zweiten Grades:

$$\sum_{i,k}^{1\dots4} f_{ik}(x_1, \dots, x_4)\, dx_i\, dx_k = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante:

$$\sum \pm f_{11} \cdots f_{44}$$

invariant läßt.

Die Gruppe des Raumes R_4 ist transitiv. Existierten nämlich ∞^1 (oder noch mehr) invariante reelle Mannigfaltigkeiten M_3, so würde in jedem Punkte des Raumes die ebene Tangential-E_3 an die durch den Punkt gehende M_3 ein M_3-Element bestimmen, das sich nicht um jedes in ihm enthaltene M_2-Element drehen könnte. Das aber würde unserer Voraussetzung widersprechen; also leuchtet ein, daß die Gruppe unseres vierfach ausgedehnten Raumes transitiv ist.

29. Nunmehr ist es leicht, die Zahl der Parameter unserer Gruppe zu bestimmen.

Einen Punkt P des vierfachen Raumes R_4 festhalten kommt auf vier Bedingungen hinaus. Da andererseits die durch P gehenden Linien- [306
elemente durch eine sechsgliedrige Gruppe transformiert werden, und da es sicher ist, daß alle Punkte des Raumes R_4 in Ruhe bleiben, sobald alle durch P gehenden Linienelemente festgehalten werden, so leuchtet ein, daß gerade zehn Bedingungen erforderlich sind, um alle Punkte des Raumes R_4 in Ruhe zu halten. Dieser Raum wird somit durch eine zehngliedrige Gruppe transformiert.

30. Wir setzen voraus, daß der Koordinatenanfang $x_k = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dann enthält unsere Gruppe vier infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p_k + \cdots \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Setzen wir nun ferner voraus, daß die bei der zehngliedrigen Gruppe invariante Differentialgleichung:

$$\sum_{ik}^{1\ldots 4} f_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k = 0$$

bei der Substitution $x_k = 0$ die Form:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = 0$$

annimmt, so muß unsere Gruppe sechs infinitesimale Transformationen von der Form:

$$x_i p_k - x_k p_i + \alpha_{ik} \sum_j^{1\ldots 4} x_j p_j + \cdots \qquad (i, k = 1, \ldots, 4)$$

enthalten; dieselben zeigen, wie die durch den Koordinatenanfang gehenden Linienelemente transformiert werden, wenn dieser Punkt festgehalten wird.

Da unsere Gruppe des Raumes R_4 zehngliedrig ist, so enthält sie keine anderen infinitesimalen Transformationen als die vier von nullter Ordnung $p_k + \cdots$ und die sechs soeben besprochenen von erster Ordnung. Es ist dabei leicht zu erkennen, daß die Konstanten α_{ik} alle gleich Null sind. Das ergibt sich nämlich sogleich, wenn man die beiden infinitesimalen Transformationen:

$$x_i p_\nu - x_\nu p_i + \alpha_{i\nu} \sum_j x_j p_j + \cdots,$$

$$x_\nu p_k - x_k p_\nu + \alpha_{\nu k} \sum_j x_j p_j + \cdots$$

kombiniert.

31. Es stellt sich also die Aufgabe, im Raume $x_1, \ldots, x_4$ alle [307 zehngliedrigen Gruppen zu finden, welche zehn infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad p_4 + \cdots,$$

$$x_i p_k - x_k p_i + \cdots \qquad (i, k = 1, \ldots, 4)$$

enthalten.

Dieses Problem habe ich eingehend im zehnten Bande des norwegischen „Archivs for Mathematik" behandelt. [1886, d. Ausg. Bd. V, Abh. XXII, S. 533—550.] Es ergab sich, daß die betreffende Gruppe entweder mit der Gruppe aller euklidischen, oder mit einer der beiden Gruppen von nichteuklidischen Bewegungen des Raumes R_4 ähnlich sein muß, und zwar durch eine reelle Transformation, was allerdings a. a. O. nicht hervorgehoben ist, aber sehr leicht eingesehen werden kann.

Hiermit erhalten wir das folgende Theorem:

Theorem 2. Besitzt eine Gruppe von reellen Punkttransformationen des vierfach ausgedehnten Raumes $x_1, \ldots, x_4$ im früher erklärten Sinne des Wortes innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so sind zwei Fälle möglich. Die Gruppe ist durch eine reelle Transformation ähnlich entweder mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen, oder mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen des vierfachen Raumes. Im letzten Falle kann die invariante Fläche zweiten Grades, die immer durch eine reelle Gleichung dargestellt wird, reell oder imaginär sein.

§ 6.

32. Wir stellen nun die Frage nach allen reellen projektiven Gruppen des vierfach ausgedehnten Raumes, welche entweder ausnahmelos, oder jedenfalls innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in dem früher angegebenen Sinne besitzen.

Die betreffenden Gruppen sind nach den Entwickelungen des vorigen Paragraphen durch eine reelle Transformation ähnlich entweder mit der Gruppe aller euklidischen Bewegungen, oder mit der Gruppe aller nichteuklidischen Bewegungen des Raumes R_4.

Da aber die gesuchten Gruppen projektiv sein sollen, so müssen sie nach den Ergebnissen des § 3 innerhalb der allgemeinen projek- [308 tiven Gruppe mit einer unter den genannten Gruppen durch eine reelle Transformation gleichberechtigt sein.

Wollen wir, daß die verlangten Eigenschaften ausnahmelos für alle Punkte des Raumes gelten sollen, so müssen die Gruppe der euklidischen Bewegungen, sowie alle mit ihr innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe gleichberechtigten reellen Gruppen ausgeschlossen werden. Denn bei einer solchen Gruppe bleibt eine dreifach ausgedehnte reelle ebene Mannigfaltigkeit invariant, und also können sich die in derselben gelegenen M_3-Elemente nicht frei um jedes in ihnen enthaltene M_2-Element drehen. Es muß also die gesuchte Gruppe aus allen reellen Transformationen bestehen, welche eine gewisse Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich überführen. Dabei leuchtet ein, daß die Fläche, die natürlich durch eine reelle Gleichung dargestellt wird, imaginär sein muß.

33. Unser Resultat ist also das folgende:

Satz 8. *Besitzt eine reelle kontinuierliche projektive Gruppe des Raumes $x_1, \dots, x_4$ freie Beweglichkeit im Infinitesimalen im bekannten Sinne des Wortes, und zwar nicht bloß innerhalb eines gewissen Bereiches, sondern ausnahmelos, so besteht diese Gruppe aus allen reellen projektiven Transformationen, welche eine durch eine reelle Gleichung dargestellte imaginäre dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich überführen.*

Satz 9. *Besitzt eine reelle projektive Gruppe des Raumes $x_1, \dots, x_4$ zwar nicht ausnahmelos, aber doch innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder besteht die Gruppe aus allen reellen projektiven Transformationen, welche eine geschlossene reelle Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich überführen; oder sie ist durch eine reelle projektive Transformation ähnlich mit der Gruppe:*

$$p_1, \dots, p_4, \quad x_i p_k - x_k p_i \qquad (i, k = 1, \dots, 4)$$

aller euklidischen Bewegungen des Raumes $x_1, \dots, x_4$.

§ 7.

34. Jetzt übersieht man leicht, wie man die für den drei- und vierfach ausgedehnten Raum abgeleiteten Sätze auf den n-fach ausge- [309 dehnten Raum übertragen kann. Man zeigt allgemein, daß, wenn sie für einen $(n-1)$-fach ausgedehnten Raum R_{n-1} gelten, sie dann auch für den n-fach ausgedehnten Raum Gültigkeit haben.

Wir setzen demnach als bewiesen voraus, daß unsere Sätze für den $(n-1)$-fach ausgedehnten Raum R_{n-1} gelten, und suchen im Raume R_n alle reellen Transformationsgruppen, bei denen *innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* stattfindet.

Wird ein reeller Punkt $x_1, \dots, x_n$ festgehalten, so bilden die durch diesen Punkt gehenden M_1-Elemente $dx_1, \dots, dx_n$ einen $(n-1)$-fach ausgedehnten Raum R'_{n-1}, welcher durch eine projektive Gruppe transformiert wird. Halten wir nun in diesem Raume R'_{n-1} einen Punkt dx_k fest, ein hindurchgehendes M_1-Element, ein durch dasselbe gehendes M_2-Element, und so weiter, endlich ein reelles M_{n-3}-Element, so müssen sich alle durch dieses letzte Element gehenden reellen M_{n-2}-Elemente noch drehen können. Sonst bliebe nämlich im Raume R_n, nachdem ein Punkt x_k, ein M_1-Element $dx_k, \dots$, ein M_{n-2}-Element festgehalten worden sind, gleichzeitig ein durch dieses M_{n-2}-Element gehendes M_{n-1}-Element und damit überhaupt jeder Punkt des Raumes R_n in Ruhe. Das ist aber von vornherein ausgeschlossen.

Unsere projektive Gruppe des Raumes R'_{n-1} besitzt also ausnahmelos freie Beweglichkeit im Infinitesimalen. Daher besteht diese projektive Gruppe aus allen reellen projektiven Transformationen, welche eine durch eine reelle Gleichung:

$$\sum_{i,k}^{1\dots n} f_{ik}(x_1, \dots, x_n)\, dx_i\, dx_k = 0$$

dargestellte imaginäre Mannigfaltigkeit mit nicht verschwindender Determinante invariant lassen.

Die gesuchte Gruppe des Raumes R_n läßt infolgedessen eine Differentialgleichung zweiten Grades:

$$\sum_{i,k}^{1\dots n} f_{ik}(x)\, dx_i\, dx_k = 0$$

mit nicht identisch verschwindender Determinante invariant.

35. Wir nehmen nun an, daß der Koordinatenanfang:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$ [310

ein Punkt von allgemeiner Lage ist, und daß die invariante Differentialgleichung bei der Substitution $x_k = 0$ die Form:

$$dx_1^2 + \dots + dx_n^2 = 0$$

annimmt. Die durch den Koordinatenanfang gehenden M_1-Elemente dx_k werden dann durch die allgemeinste kontinuierliche projektive Gruppe transformiert, welche die Mannigfaltigkeit $\sum dx_k^2 = 0$ invariant läßt. Andererseits muß die gesuchte Gruppe des Raumes R_n transitiv sein, denn sonst wäre es möglich, ein M_{n-1}-Element anzugeben, das sich nicht um jedes in ihm enthaltene M_{n-2}-Element drehen könnte. Hieraus ergibt sich, daß die gesuchte Gruppe $n + \frac{1}{2} n(n-1)$ infinitesimale Transformationen von der Form:

$$p_1 + \cdots, \quad \cdots, \quad p_n + \cdots,$$

$$x_i p_k - x_k p_i + \alpha_{ik} \sum_j^{1\dots n} x_j p_j + \cdots,$$

aber keine von diesen unabhängige enthält.

In der früher besprochenen Arbeit im zehnten Bande des norwegischen Archivs habe ich nun alle Gruppen bestimmt, deren infinitesimale Transformationen diese Form besitzen. Ich fand, daß jede derartige Gruppe entweder mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen, oder mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen ähnlich ist. Ich kann noch hinzufügen, daß diese Ähnlichkeit durch eine reelle Transformation vermittelt wird; man muß nur beachten, daß vom reellen Standpunkte aus zwei verschiedene Gruppen von nichteuklidischen Bewegungen zu unterscheiden sind.

36. Es ist daher das gestellte Problem vollständig erledigt; unsere Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Theorem 3. *Die Gruppe der euklidischen Bewegungen:*

$$p_1, \dots, p_n, \quad x_i p_k - x_k p_i \qquad (i, k = 1, \dots, n),$$

die Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen:

$$p_k + x_k \sum_j^{1\dots n} x_j p_j, \; x_i p_k - x_k p_i \qquad (i, k = 1, \dots, n),$$ [311

welche die Fläche:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1 = 0$$

invariant lassen, und endlich die Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen:

$$p_k - x_k \sum_j^{1\dots n} x_j p_j, \quad x_i p_k - x_k p_i \qquad (i, k = 1, \dots, n),$$

welche die Fläche:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

in sich überführen, und die mit ihnen durch eine **reelle** *Transformation ähnlichen Gruppen sind die einzigen* **reellen** *Transformationsgruppen des Raumes $x_1, \dots, x_n$, welche innerhalb eines Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in folgendem Sinne des Wortes besitzen: Wird innerhalb dieses Bereiches ein beliebiger reeller Punkt, ein beliebiges hindurchgehendes reelles M_1-Element $dx_1, \dots, dx_n$, ein beliebiges durch das letztere gehendes reelles M_2-Element, ..., endlich ein beliebiges reelles M_q-Element festgehalten, so ist kontinuierliche Bewegung möglich so lange und nur so lange, als q kleiner als $n-1$ ist.*

37. Wir stellen andererseits die Frage nach allen reellen *projektiven* Gruppen des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1, \dots, x_n$, welche entweder ausnahmelos oder innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in dem angegebenen Sinne besitzen.

Jede derartige Gruppe ist nach den vorangehenden Entwickelungen ähnlich entweder mit der Gruppe der euklidischen oder mit einer der Gruppen von nichteuklidischen Bewegungen des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1, \dots, x_n$.

Da aber die gesuchte Gruppe projektiv sein soll, so muß sie nach den Ergebnissen des § 3 durch eine reelle projektive Transformation mit einer unter den drei betreffenden Gruppen ähnlich sein.

Sollen die verlangten Eigenschaften ausnahmelos für alle Punkte [312 des Raumes $x_1, \dots, x_n$ gelten, so müssen die Gruppe der euklidischen Bewegungen und die mit ihr innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe gleichberechtigten reellen Gruppen ausgeschlossen werden. Denn bei einer solchen Gruppe bleibt eine $(n-1)$-fach ausgedehnte reelle ebene Mannigfaltigkeit invariant, und daher können sich die M_{n-1}-Elemente dieser Mannigfaltigkeit nicht drehen. Ebenso muß natürlich die projektive Gruppe der reellen Mannigfaltigkeit:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

ausgeschlossen werden; denn die M_{n-1}-Elemente dieser Mannigfaltigkeit können sich ja nicht frei drehen.

38. Unsere Ergebnisse lassen sich in die beiden folgenden Sätze zusammenfassen:

Satz 10. *Besitzt eine reelle kontinuierliche, projektive Gruppe des Raumes $x_1, \dots, x_n$ freie Beweglichkeit im Infinitesimalen in dem bekannten Sinne, und zwar nicht bloß innerhalb eines gewissen Bereiches, sondern ausnahmelos für alle Punkte des Raumes, so besteht die Gruppe aus allen reellen projektiven Transformationen, welche eine durch eine reelle Gleichung zweiten Grades:*

$$\sum b_{ik} x_i x_k + \sum c_k x_k + d = 0$$

dargestellte imaginäre Fläche zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante in sich transformieren.

Satz 11. *Besitzt eine reelle, kontinuierliche, projektive Gruppe des Raumes $x_1, \dots, x_n$ nicht ausnahmelos, aber doch innerhalb eines gewissen Bereiches freie Beweglichkeit im Infinitesimalen, so ist die Gruppe durch eine reelle* *projektive Transformation ähnlich entweder mit der Gruppe der euklidischen Bewegungen:*

$$p_k,\ x_i p_k - x_k p_i \qquad (i, k = 1, \ldots, n),$$

oder mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen, welche die Fläche:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$$

invariant lassen.

39. Indem wir diese Untersuchung abschließen, haben wir noch [313 eine allgemeine Bemerkung hinzuzufügen.

Im Vorangehenden betrachten wir nur solche Transformationsgruppen, welche durch *analytische* Gleichungen bestimmt sind. Diese Beschränkung ist nicht notwendig. Man kann überhaupt Gruppen betrachten, welche durch kontinuierliche Gleichungen bestimmt sind, die eine gewisse Anzahl von Malen differentiiert werden können. Die vorangehenden Theorien bleiben auch für derartige Gruppen noch gültig. Das beruht darauf, daß jede *transitive* Gruppe, welche durch solche kontinuierliche Gleichungen bestimmt ist, die eine gewisse Anzahl Differentiationen gestatten, mit einer durch analytische Gleichungen darstellbaren Gruppe ähnlich ist. Es ist aber hier nicht der Ort, diese Andeutung weiter auszuführen.

§ 8.

40. Wir werden bei dieser Gelegenheit noch einige Sätze aufstellen, die oft Anwendung finden und welche mit den vorangehenden Theorien in einem gewissen Zusammenhange stehen.

Satz 12. *Die Gruppe der reziproken Radien des n-fach ausgedehnten Raumes ist mit keiner projektiven Gruppe dieses Raumes ähnlich.*

Beweis. Die Gruppe der reziproken Radien des n-fach ausgedehnten Raumes enthält:

$$n + \tfrac{1}{2} n(n-1) + 1 + n$$

unabhängige infinitesimale Transformationen, als welche wir am besten die nachstehenden wählen:

$$p_k,\ x_i p_j - x_j p_i,\ \sum_k^{1\ldots n} x_k p_k,$$

$$\sum_k^{1\ldots n} x_k^2 \cdot p_j - 2 x_j \sum_k^{1\ldots n} x_k p_k.$$

Wäre diese Gruppe mit einer projektiven Gruppe des Raumes R_n ähnlich, so enthielte diese projektive Gruppe n unabhängige infinitesi- [314 male Transformationen zweiter Ordnung, und zwar die Transformationen:

$$x_j \sum_k^{1\ldots n} x_k p_k = S_j$$

und n Transformationen nullter Ordnung, welche wir etwa auf die Form:

$$p_k + \sum \alpha_{kij} x_i p_j = P_k$$

bringen könnten.

Kombinieren wir P_k mit S_j, so kommt:

$$(P_k S_j) = \varepsilon_{kj} \sum_\nu^{1\ldots n} x_\nu p_\nu + x_j p_k + \sum_i^{1\ldots n} \beta_{kij} S_i.$$

Unsere projektive Gruppe enthielte also die infinitesimalen Transformationen:

$$\varepsilon_{kj} \sum_\nu^{1\ldots n} x_\nu p_\nu + x_j p_k.$$

Setzen wir nun zunächst $k = j$, so finden wir die n Transformationen:

$$\sum_j^{1\ldots n} x_j p_j + x_k p_k$$

und durch deren Addition die Transformation:

$$\sum_k^{1\ldots n} x_k p_k$$

und gleichzeitig die n Transformationen $x_k p_k$; folglich wären alle n^2 Transformationen $x_j p_k$ vorhanden, und es kämen auch die n Translationen $p_1, \ldots, p_n$ vor. Kurz, unsere projektive Gruppe enthielte alle projektiven infinitesimalen Transformationen, und das ist natürlich ausgeschlossen.

41. Satz 13. *Ist im n-fach ausgedehnten Raume R_n eine projektive Gruppe mit der speziellen linearen Gruppe dieses Raumes ähnlich, so ist sie mit ihr innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe gleichberechtigt.*

Beweis. Eine projektive Gruppe, welche mit der speziellen [315 linearen Gruppe ähnlich ist, enthält $n-1$ unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$x_i p_i - x_n p_n + \sum_j \alpha_{ij} S_j,$$

wo S_j in derselben Bedeutung wie vorhin benutzt ist.

Kombinieren wir nun die beiden Transformationen:

$$x_1p_1 - x_np_n + \sum_j^{1\ldots n} \alpha_{1j}S_j,$$

$$x_2p_2 - x_np_n + \sum_j^{1\ldots n} a_{2j}S_j,$$

so erhalten wir die Transformation:

$$\alpha_{21}S_1 - \alpha_{2n}S_n - \alpha_{12}S_2 + \alpha_{1n}S_n;$$

da aber keine Transformation zweiter Ordnung vorkommen darf, folgt:

$$\alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{2n} = \alpha_{1n}.$$

Es verschwinden also für $i, k \leqq n-1$ alle α_{ik} mit zwei verschiedenen Indizes. Unsere infinitesimalen Transformationen erster Ordnung haben somit die Form:

$$x_ip_i - x_kp_k + \alpha_iS_i - \alpha_kS_k.$$

Kombinieren wir diese Transformation mit der Transformation:

$$x_ip_k + \sum_j^{1\ldots n} \beta_{ikj}S_j,$$

die sicher in unserer Gruppe vorkommt, so ergibt sich:

$$2x_ip_k + \beta_{iki}S_i - \beta_{ikk}S_k + \alpha_kS_i.$$

Es ist daher:

$$\beta_{ikk} = 0, \quad \beta_{iki} = \alpha_k,$$

und wir erhalten die infinitesimale Transformation:

$$x_ip_k + \alpha_kS_i.$$

Die infinitesimalen Transformationen erster Ordnung unserer Gruppe [316
besitzen somit die Form:

$$x_ip_i - x_kp_k + \alpha_iS_i - \alpha_kS_k = A_{ik}f,$$

$$x_ip_k + \alpha_kS_i = B_{ik}f.$$

42. Es ist nun leicht zu erkennen, daß diese Transformationen eine Ebene:

$$\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n + 1 = 0$$

invariant lassen. Es ist ja:

$$A_{ik}(\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n + 1) = \lambda_ix_i - \lambda_kx_k + \alpha_ix_i\sum\lambda x - \alpha_kx_k\sum\lambda x =$$
$$= x_i(\lambda_i + \alpha_i\sum\lambda x) - x_k(\lambda_k + \alpha_k\sum\lambda x).$$

Mit Benutzung der Gleichung der Ebene kommt daher:

$$A_{ik}(\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n + 1) = x_i(\lambda_i - \alpha_i) - x_k(\lambda_k - \alpha_k),$$

und dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\lambda_k - \alpha_k = 0$ ist.

Andererseits ist:

$$B_{ik}(\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n + 1) = \lambda_kx_i + \alpha_kx_i\sum\lambda x = x_i(\lambda_k - \alpha_k),$$

sodaß auch dieser Ausdruck bei der Annahme $\lambda_k = \alpha_k$ verschwindet.

Verlegt man daher die betreffende Ebene ins Unendliche, so nehmen die infinitesimalen Transformationen erster Ordnung unserer Gruppe die Form an:

$$x_ip_i - x_kp_k, \quad x_ip_k.$$

43. Sind nun:

$$P_k = p_k + \varepsilon_k\sum_j x_jp_j + \sum_j \alpha_{kj}S_j$$

die n infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung unserer Gruppe, so ist leicht zu erkennen, daß die α_{kj} gleich Null sind. Durch Kombination von $x_ip_i - x_kp_k$ mit P_k kommt nämlich:

$$P_k' = p_k + \alpha_{ki}S_i - \alpha_{kk}S_k,$$

und durch Kombination von x_ip_k mit P_k' kommt: [317

$$-\alpha_{kk}S_i,$$

sodaß α_{kk} gleich Null sein muß, da ja unsere Gruppe keine infinitesimale Transformation zweiter Ordnung enthält. Unsere infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung haben somit die Form:

$$p_k + \alpha_{ki}S_i.$$

Ferner kommt durch Kombination von $p_k + \alpha_{ki}S_i$ mit x_kp_i:

$$p_i - \alpha_{ki}S_k,$$

sodaß: $\alpha_{ki} = -\alpha_{ik}$ ist.

44. Ist nun $n > 2$, so können wir ohne weiteres α_{ki} gleich Null setzen, weil dann der Zahl k gegenüber keine andere Zahl i ausgezeichnet ist. Ist andererseits $n = 2$, so haben wir nur die fünf infinitesimalen Transformationen:

$$p_1 + \alpha_{12}S_2, \quad p_2 + \alpha_{21}S_1, \quad x_1p_1 - x_2p_2, \quad x_1p_2, \quad x_2p_1;$$

durch Kombination der beiden ersten kommt:

$$\alpha_{21}(2x_1p_1 + x_2p_2) - \alpha_{12}(x_1p_1 + 2x_2p_2),$$

oder, da $\alpha_{12} = -\alpha_{21}$ ist:

$$\alpha_{21}\{3x_1p_1 + 3x_2p_2\}.$$

Da aber die infinitesimale Transformation $x_1 p_1 + x_2 p_2$ nicht vorkommen darf, ist $\alpha_{21} = 0$. Es ergibt sich somit unter allen Umständen, daß unsere infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung die Form p_k besitzen.

Unser Satz ist somit erwiesen.

45. Satz 14. Ist eine (reelle) projektive Gruppe des n-fachen Raumes $x_1, \dots, x_n$ mit der allgemeinen (reellen) linearen Gruppe dieses Raumes (durch eine reelle Transformation) ähnlich, so ist sie mit ihr innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe (durch eine reelle Transformation) gleichberechtigt.

Ist [nämlich] eine projektive Gruppe mit der allgemeinen linearen [318 ähnlich, so enthält sie $n.n$ infinitesimale Transformationen von der Form:

$$x_i p_i - x_k p_k + \sum_j^{1\dots n} \alpha_{ikj} S_j,$$

$$x_i p_k + \sum_j^{1\dots n} \beta_{ikj} S_j,$$

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + c_1 S_1 + \cdots + c_n S_n = Uf.$$

Es ist leicht, zu erkennen, daß die letzte Transformation, wenn die c_k nicht alle verschwinden, eine ganz bestimmte im Endlichen gelegene Ebene:

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1 = 0$$

invariant läßt. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} U(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 1) &= \sum_j \lambda_j x_j + c_1 x_1 \sum \lambda_j x_j + \cdots + c_n x_n \sum \lambda_j x_j \\ &= \sum_j \lambda_j x_j (1 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet vermöge der Gleichung der Ebene dann und nur dann, wenn:

$$\lambda_1 = c_1, \dots, \lambda_n = c_n$$

ist. Denken wir uns diese bei Uf invariante Ebene ins Unendliche verlegt, so erhält Uf die Form:

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n;$$

das folgt ohne weiteres daraus, daß die Transformation Uf die durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden alle in Ruhe läßt; man kann es übrigens leicht durch Rechnung bestätigen.

46. In den jetzt eingeführten neuen Veränderlichen bleibt die Form der übrigen infinitesimalen Transformationen im wesentlichen ungeändert. Die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe haben somit jetzt die Form:

$$x_i p_i - x_k p_k + \sum_j^{1\dots n} \alpha_{ikj} S_j, \qquad [319$$

$$x_i p_k + \sum_j^{1\dots n} \beta_{ikj} S_j,$$

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n = U.$$

Kombiniert man aber U mit den übrigen infinitesimalen Transformationen erster Ordnung, und beachtet man, daß infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung nicht vorkommen dürfen, so übersieht man ohne weiteres, daß:

$$\alpha_{ikj} = \beta_{ikj} = 0$$

ist.

47. Es bleibt noch übrig, die infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung zu bestimmen. Ist:

$$p_k + \sum_{ij}^{1\dots n} \alpha_{kij} x_i p_j + \sum_j^{1\dots n} \beta_{kj} S_j$$

eine solche, so kann man zunächst ohne Beschränkung alle α_{kij} gleich Null setzen. Nun aber ist:

$$\Big(p_k + \sum_j^{1\dots n} \beta_{kj} S_j, \quad U\Big) = p_k - \sum_j^{1\dots n} \beta_{kj} S_j,$$

und also müssen auch alle β_{kj} gleich Null sein.

Hiermit haben unsere infinitesimalen Transformationen die Form:

$$p_k, \quad x_i p_k$$

erhalten, und es ist daher unser Satz bewiesen.

48. Satz 15. Ist eine projektive Gruppe mit der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen ähnlich, so ist sie mit dieser innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe gleichberechtigt.

Ist eine projektive Gruppe mit der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen ähnlich, so erhält sie, wenn wir wiederum die Bezeichnung:

$$x_j \sum_i^{1\dots n} x_i p_i = S_j$$

benutzen: [320

$$n + \tfrac{1}{2}n(n-1) + 1$$

infinitesimale Transformationen, welche die Form:

$$p_k + \sum_j^{1\ldots n} \alpha_{kj} S_j,$$

$$x_i p_k - x_k p_i + \sum_j^{1\ldots n} \beta_{ikj} S_j,$$

$$x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n + \sum_k^{1\ldots n} c_k S_k = U$$

besitzen. Dabei können wir, wie wir schon früher gesehen haben, ohne Beschränkung annehmen, daß alle $c_k = 0$ sind.

Sodann ergibt sich durch Kombination:

$$\left(x_i p_k - x_k p_i + \sum_j^{1\ldots n} \beta_{ikj} S_j,\ \ \sum x_k p_k\right) = -\sum_j^{1\ldots n} \beta_{ikj} S_j,$$

$$\left(p_k + \sum_j^{1\ldots n} \alpha_{kj} S_j,\ \ \sum x_k p_k\right) = p_k - \sum_j^{1\ldots n} \alpha_{kj} S_j,$$

sodaß alle α_{kj} und alle β_{ikj} gleich Null sind.

Unser Satz ist hiermit erwiesen.

49. Satz 16. Die kontinuierliche projektive Gruppe einer Fläche zweiten Grades mit nicht identisch verschwindender Determinante ist in keiner größeren **kontinuierlichen** Untergruppe der allgemeinen projektiven Gruppe enthalten.

Wir zeigen, daß, wenn dieser Satz für den R_{n-1} gilt, er auch für den n-fach ausgedehnten Raum R_n gültig ist.

Gesetzt, daß unser Satz für den R_{n-1} erwiesen ist.

Wir betrachten im R_n die Gruppe G einer F_2, und setzen voraus, daß dieselbe in einer größeren Untergruppe Γ der allgemeinen projektiven Gruppe enthalten ist.

Halten wir nun einen Punkt von allgemeiner Lage fest, so werden die Transformationen der Gruppe G, welche diesen Punkt in Ruhe lassen, den Raum der hindurchgehenden ∞^{n-1} Richtungen durch eine projektive Gruppe g transformieren. Ebenso transformiert die Gruppe Γ die be- [321
sprochenen Richtungen durch eine projektive Gruppe γ. Dabei ist klar, daß die Gruppe g entweder in der Gruppe γ enthalten oder mit dieser identisch ist.

Wäre g als Untergruppe in γ enthalten, so wäre γ nach unserer Voraussetzung die allgemeine projektive Gruppe des $(n-1)$-fach ausgedehnten Raumes der besprochenen Richtungen; und dann wäre nach einem bekannten Satze von mir die Gruppe Γ entweder die allgemeine projektive Gruppe, oder sie wäre mit der allgemeinen linearen oder der speziellen linearen Gruppe des n-fach ausgedehnten Raumes $x_1, \ldots, x_n$ ähnlich, und das sogar durch eine projektive Transformation. Nun aber läßt die allgemeine Gruppe G einer Fläche zweiten Grades keine Ebene invariant; daher ist sie weder in der speziellen noch in der allgemeinen linearen Gruppe enthalten. Die Annahme, daß g als Untergruppe in γ enthalten ist, führt also dazu, daß Γ die allgemeine projektive Gruppe des Raumes $x_1, \ldots, x_n$ ist.

Betrachten wir jetzt die Annahme, daß g und γ identisch sind. Alsdann ist die Gruppe Γ ähnlich entweder mit der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen, oder mit der Gruppe der reziproken Radien. Das letzte ist ausgeschlossen durch den Satz 12, S. 313 [hier S. 406].

Es bleibt also nur die Frage übrig, ob Γ mit der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen ähnlich sein kann. Daß dies unmöglich ist, folgt leicht daraus, daß jede mit der Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen ähnliche projektive Gruppe mit ihr innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe gleichberechtigt ist. In der Tat, die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen, sowie jede mit ihr innerhalb der allgemeinen projektiven Gruppe gleichberechtigte Gruppe läßt eine ebene Mannigfaltigkeit:

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n + c = 0$$

invariant; die Gruppe einer Fläche zweiten Grades dagegen läßt keine solche ebene Mannigfaltigkeit invariant; die letztere Gruppe kann daher in keiner Gruppe enthalten sein, welche eine ebene Mannigfaltigkeit invariant läßt.

VII.

Über die Grundlagen der Geometrie. II. Abhandlung. [355

Leipz. Ber. 1890; Heft III, abgeliefert 26. 2. 1891, S. 355—418. Vorgelegt in der Sitzung vom 20. 10. 1890.

1. Nach dem Vorgange von Riemann und Herrn v. Helmholtz habe ich versucht, die Axiome, welche der Geometrie zu Grunde liegen, auf ein Minimum zurückzuführen. Ich habe mich dabei auf die Seiten dieses allgemeinen Problems beschränkt, welche, wie mir scheint, bisher nur unvollkommen behandelt worden sind. Eine kurze Zusammenfassung meiner wichtigsten Resultate gab ich schon im Jahre 1886 in diesen Berichten in der Note: Bemerkungen zu v. Helmholtzs Arbeit: Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. [Hier Abh. V.]

In einer Abhandlung, die vor kurzem in diesen Berichten erschienen ist, entwickelte ich sodann eine ausführliche Begründung einiger neuer Resultate, die sich durch besondere Einfachheit und Schönheit auszeichnen. In der nachstehenden Arbeit gebe ich nunmehr eine vollständige Darstellung meiner übrigen Untersuchungen auf diesem Gebiete. Ich glaube durch dieselben die älteren Untersuchungen von Herrn v. Helmholtz und von Riemann wesentlich vervollständigt und verbessert zu haben.

Zu bemerken ist hierbei, daß ich mich in der vorliegenden Arbeit, im Gegensatze zu der vorigen, auf den dreifach ausgedehnten Raum beschränke. Ich bezweifle nicht, daß sich die hier abgeleiteten Resultate auf n-dimensionale Räume übertragen lassen. Es ist mir aber nicht gelungen, die Übertragung durchzuführen. Diese verlangt, wie es scheint, wesentlich andere Methoden, als von mir im folgenden benutzt worden sind.

2. In neuerer Zeit hat sich Herr Poincaré mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt, leider ohne die einschlagende Literatur vollkommen zu kennen. [356 Es ist mir aber eine Befriedigung gewesen, daß auch dieser große Mathematiker in seiner interessanten Note meine Theorie der Transformationsgruppen zum Ausgangspunkte genommen hat. Unter diesen Umständen ist zu hoffen, daß die Bedeutung der Gruppentheorie für die

Grundlagen der Geometrie in künftigen Untersuchungen gebührend berücksichtigt werden wird.

Herr Poincaré hat in anderen Arbeiten die Bedeutung der Gruppentheorie für die Theorie der komplexen Zahlen klargestellt. Diese seine Bemerkung hat in neuerer Zeit die Herren Schur, Study und Scheffers zu einer Reihe von interessanten Untersuchungen über komplexe Zahlen vom gruppentheoretischen Standpunkte aus veranlaßt. In dieser Richtung ist offenbar noch viel zu tun.

Andere Verfasser, insbesondere die Herren Picard, Study und Engel haben in neuerer Zeit, wesentlich im Anschluß an meine Arbeiten, die Gruppentheorie auf die Theorie der Differentialgleichungen angewendet und mit der Invariantentheorie in Verbindung gebracht.

Endlich haben die Herren Engel, Killing[1]) und Schur sowie einige unter meinen jüngeren Schülern mit großem Erfolge in der abstrakten Theorie der Transformationsgruppen gearbeitet.

Unter diesen Umständen darf ich hoffen, daß die Entwickelung dieser wichtigen Theorie, die ich als meine wesentlichste Lebensaufgabe betrachtet habe, auch zukünftig rasch vorwärts schreiten wird. Insbesondere wünsche ich, daß die Bedeutung dieser Theorie für die Differentialgleichungen durch neue Untersuchungen klarer gestellt werde.

Es dürfte für jüngere Mathematiker eine dankbare Aufgabe sein, alle von mir skizzierten Integrationstheorien im einzelnen auszuführen und deren Zusammenhang mit anderen Untersuchungen auf diesem Gebiete klarzustellen. Ich denke hier in erster Linie an Halphens bekannte [357 Untersuchungen über Differentialinvarianten. Ich denke ferner an neuere Untersuchungen von jüngeren französischen Mathematikern, die tatsächlich mit meinen allgemeinen Theorien im genauesten Zusammenhange stehen.

Auch bei der Behandlung von rein geometrischen Problemen gewährt die Gruppentheorie oft mächtige Unterstützung.

Schließlich glaube ich, daß auch die Mechanik dadurch gewinnen wird, wenn sie die Prinzipien der Gruppentheorie verwertet.

Ich habe geglaubt, daß es nützlich sein könnte, wenn ich einmal auf die Aufgaben hinwiese, deren Erledigung mir zur Förderung der Theorie der Transformationsgruppen zunächst wünschenswert erscheint.

Ich hoffe, bald dieser Gesellschaft eine Reihe Untersuchungen über unendliche Gruppen vorlegen zu können. Die Theorie der unendlichen

1) Die Untersuchungen des Herrn Professor Killing über die Zusammensetzung der Gruppen gehen wesentlich weiter als meine älteren Arbeiten auf diesem Gebiete. Verbunden mit meinen älteren Integrationstheorien geben sie Resultate von der höchsten Bedeutung für die Integralrechnung.

Gruppen, die bis jetzt von mir nur unvollkommen skizziert worden ist, eröffnet den Mathematikern ein noch größeres und noch dankbareres Gebiet der Forschung, als die Theorie der endlichen Gruppen.

3. Ich habe es für richtig erachtet, der nachstehenden Arbeit eine möglichst e l e m e n t a r e F o r m zu geben; aus der allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen habe ich daher verhältnismäßig wenig und jedenfalls nur ganz einfache Sätze entlehnt.

§ 1. Vorbereitende Entwickelungen.

4. Es sei:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y, z, a_1, a_2, \ldots), \\ y_1 = \varphi(x, y, z, a_1, a_2, \ldots), \\ z_1 = \psi(x, y, z, a_1, a_2, \ldots), \end{cases}$$

eine Schar von unendlich vielen r e e l l e n Transformationen des Raumes x, y, z, über welche wir die folgenden Annahmen machen:

A. Die Funktionen f, φ, ψ mögen a n a l y t i s c h e Funktionen der Koordinaten x, y, z und der Parameter $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sein.

B. Zwei Punkte x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 sollen gegenüber jeder Trans- [358
formation unserer Schar eine Invariante:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

haben.

Gibt es also eine Transformation der Schar, welche diesen beiden Punkten die neuen Lagen:

$$x_1', y_1', z_1'; \quad x_2', y_2', z_2'$$

erteilt, so soll die Gleichung:

$$\Omega(x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z_2') = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

bestehen.

C. Es findet im R i e m a n n - H e l m h o l t z schen Sinne freie Beweglichkeit des Raumes statt.

Das heißt, der Punkt x_1, y_1, z_1 kann in jeden anderen Punkt übergeführt werden; wird der Punkt x_1, y_1, z_1 festgehalten, so kann jeder andere Punkt x_2, y_2, z_2 (v o n a l l g e m e i n e r L a g e) gerade ∞^2 Lagen x_2', y_2', z_2' annehmen, welche durch die Gleichung:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2', y_2', z_2') = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

bestimmt sind. Werden die beiden Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 festgehalten, so kann ein dritter Punkt x_3, y_3, z_3 (v o n a l l g e m e i n e r L a g e) gerade ∞^1 Lagen x_3', y_3', z_3' annehmen, welche durch die beiden Gleichungen:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_3', y_3', z_3') = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3),$$
$$\Omega(x_2, y_2, z_2, x_3', y_3', z_3') = \Omega(x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3)$$

bestimmt sind. Werden endlich drei Punkte x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 festgehalten, so bleiben alle Punkte des Raumes in Ruhe, es sollen also die drei Gleichungen:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_4', y_4', z_4') = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_4, y_4, z_4),$$
$$\Omega(x_2, y_2, z_2, x_4', y_4', z_4') = \Omega(x_2, y_2, z_2, x_4, y_4, z_4),$$
$$\Omega(x_3, y_3, z_3, x_4', y_4', z_4') = \Omega(x_3, y_3, z_3, x_4, y_4, z_4)$$

nur für $x_4' = x_4$, $y_4' = y_4$, $z_4' = z_4$ erfüllt sein.

5. Herr v. H e l m h o l t z betrachtet ebenfalls Transformations- [359
gleichungen, an die er, wenn ich ihn richtig verstanden habe, die drei Forderungen **A**, **B** und **C** stellt. Überdies stellt er noch eine vierte Forderung (sein Axiom der Monodromie), die in seinen Untersuchungen eine ganz besondere Rolle spielt. Dieses vierte Axiom wird in meiner Arbeit gar nicht benutzt.[1])

Ich will hervorheben, daß es mir keineswegs klar ist, ob ich Herrn v. H e l m h o l t z s Axiome ganz korrekt wiedergegeben habe. Besonders an einer Stelle habe ich Zweifel gehegt, denen ich hier dadurch Ausdruck gegeben habe, daß ich die Worte „von allgemeiner Lage" eingeklammert habe. Ich komme auf diese für das Folgende besonders wichtige Bemerkung später zurück. Werden die eingeklammerten Worte, welche bei Herrn v. H e l m h o l t z jedenfalls nicht ausdrücklich vorkommen, gestrichen, so ergibt es sich, daß die drei Axiome **A**, **B**, **C**, von denen sogar das erste, **A**, nicht wesentlich ist, vollkommen genügen, um die Bewegungen des euklidischen [und die des nichteuklidischen] Raumes vollständig zu charakterisieren.[2])

---

1) In meiner Theorie der Transformationsgruppen habe ich den Begriff I n v a r i a n t e v o n q P u n k t e n eingeführt. Mit Benutzung dieses allgemeinen Begriffes kommen die Forderungen **B** und **C** darauf hinaus, daß jede Invariante von q Punkten sich auf Invarianten je zweier Punkte zurückführen lassen soll.

2) Ich will hier hervorheben, daß mein Freund Professor K l e i n mich zuerst auf den Zusammenhang zwischen der mir damals unbekannten H e l m h o l t z schen Arbeit und meiner Theorie der Transformationsgruppen aufmerksam gemacht hat. Nach wiederholten Aufforderungen von seiner Seite unternahm ich es, eine sorgfältige gruppentheoretische Untersuchung des R i e m a n n - H e l m h o l t z schen Problems über die Grundlagen der Geometrie durchzuführen. Herr K l e i n machte mich darauf aufmerksam, daß die H e l m h o l t z schen Resultate nicht von allen Seiten als endgültig betrachtet würden.

6. Erfüllt ein System von Transformationsgleichungen (1) die Forderungen **A**, **B** und **C**, so leuchtet unmittelbar ein:

a) erstens, daß die Aufeinanderfolge von zwei solchen Transformationen stets wieder mit einer Transformation des Systems äquivalent ist;

b) zweitens, daß die zu einer Transformation der Schar gehörige inverse Transformation ebenfalls der Schar angehört.

Herr v. Helmholtz gibt diese beiden Schlüsse nicht ausdrück- [360
lich [an], sie sind jedoch implizite in seiner Arbeit enthalten.

Nun aber definiere ich eine kontinuierliche Transformationsgruppe als eine Schar von Transformationen, welche die Eigenschaften a) und b) besitzt. Dabei betrachte ich allerdings im allgemeinen die in den Transformationsgleichungen auftretenden Größen als komplexe Veränderliche und nehme an, daß die Eigenschaften a) und b) für beliebige komplexe Werte der betreffenden Größen bestehen. Das macht indes keinen wesentlichen Unterschied, weil reelle analytische Gleichungen von der Form (1), welche die Forderungen a) und b) für alle reellen Wertsysteme erfüllen, dies auch für komplexe Wertsysteme tun; das werden wir bald erkennen.

Ein System Transformationsgleichungen (1), welches Herr v. Helmholtzs drei erste Forderungen **A**, **B** und **C** erfüllt, bestimmt unter allen Umständen eine kontinuierliche Transformationsgruppe mit drei Veränderlichen und sechs Parametern. Es sind ja drei Bedingungen erforderlich, um einen ersten Punkt x_1, y_1, z_1 festzuhalten; sodann kann sich ein zweiter Punkt x_2, y_2, z_2 nur auf einer Fläche bewegen, und es sind somit zwei Bedingungen erforderlich, um auch diesen zweiten Punkt festzuhalten; darnach kann ein dritter Punkt x_3, y_3, z_3 nur eine Kurve beschreiben; zum Festhalten desselben genügt somit eine einzige Bedingung.

Da es aus Herrn v. Helmholtzs Forderungen unmittelbar hervorgeht, daß die Transformationsgleichungen (1) sowohl die Eigenschaft a) wie die Eigenschaft b) besitzen, ist es überflüssig, hier auf die an sich wichtige Frage einzugehen, ob die Eigenschaft b) eine Konsequenz der Eigenschaft a) ist. An einer anderen Stelle habe ich versucht, diese Frage eingehend zu erörtern.

7. Wird zuerst eine beliebige Transformation der Schar (1) und darnach die inverse Transformation, welche ebenfalls der Schar angehört, ausgeführt, so entsteht eine Transformation der Schar. Unsere Gruppe enthält somit die identische Transformation. Es ist daher möglich, den Parametern $a_1, a_2, \ldots$ solche Werte $a_1^0, a_2^0, \ldots$ zu erteilen, daß

die Gleichungen:

$$f(x, y, z, a_1^0, a_2^0, \ldots) = x,$$
$$\varphi(x, y, z, a_1^0, a_2^0, \ldots) = y,$$
$$\psi(x, y, z, a_1^0, a_2^0, \ldots) = z$$

bestehen. Gibt man den Parametern Werte $a_k^0 + d a_k$, die von den a_k^0 [361
unendlich wenig verschieden sind, so erhält man jedesmal eine infinitesimale Transformation der Gruppe.

Ich gebe jetzt eine kurze Zusammenstellung meiner für das Folgende notwendigen Sätze über die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe. Dabei muß ich hervorheben, daß meine Beweise für diese Sätze noch gültig bleiben, wenn die Gruppeneigenschaft nur für reelle Wertsysteme als gegeben betrachtet wird.

8. Erteilt eine infinitesimale Transformation den Größen x, y, z die Zuwachse:

$$\delta x = \xi(x, y, z)\,\delta t, \quad \delta y = \eta\,\delta t, \quad \delta z = \zeta\,\delta t,$$

so erteilt sie einer beliebigen Funktion $f(x, y, z)$ den Zuwachs:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial z}\zeta\right)\delta t.$$

Kennt man die Form dieses Zuwachses für ein unbestimmtes f, so kennt man gleichzeitig die drei Funktionen ξ, η, ζ. Daher kann ich den Ausdruck:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} = Xf$$

als Symbol meiner infinitesimalen Transformation benutzen.

Sind mehrere, etwa r infinitesimale Transformationen:

$$X_k f = \xi_k\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

vorgelegt, so bezeichne ich sie als von einander unabhängig, wenn sie keine lineare Relation:

$$c_1 X_1 f + \cdots + c_r X_r f = 0$$

mit konstanten [nicht sämtlich verschwindenden] Koeffizienten identisch erfüllen.

9. Dies vorausgesetzt, lauten die betreffenden Fundamentalsätze folgendermaßen:

I. Eine kontinuierliche Transformationsgruppe mit r wesentlichen [362
Parameterns (deren Transformationen sich paarweise als inverse zusammen-

ordnen lassen) enthält r unabhängige Transformationen $X_1 f, \ldots, X_r f$, und die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe hat die Form:

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f,$$

wo $e_1, \ldots, e_r$ willkürliche Konstanten bezeichnen.

II. Die ∞^r endlichen Transformationen der Gruppe ordnen sich in ∞^{r-1} verschiedene Untergruppen, deren jede nur einen Parameter und eine infinitesimale Transformation:

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$$

enthält.

III. Sind $X_1 f, \ldots, X_r f$ irgend r unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, so erfüllen sie paarweise Relationen von der Form:

$$X_i X_k f - X_k X_i f = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} X_s f,$$

in denen die c_{iks} Konstanten bezeichnen.

IV. Sind umgekehrt r unabhängige infinitesimale Transformationen: $X_1 f, \ldots, X_r f$ gegeben, welche Relationen von der Form:

$$X_i X_k f - X_k X_i f = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} X_s f$$

erfüllen, so gibt es eine Gruppe mit r Parametern, deren infinitesimale Transformationen die Form: $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$ haben.

Aus diesen Sätzen können wir nun sogleich einen wichtigen Schluß ziehen.

Satz I. Erfüllen die Transformationsgleichungen (1) die Forderungen **B**, **C**, wenn die auftretenden Größen als reelle Veränderliche betrachtet werden, so bestimmen diese Gleichungen auch dann eine Gruppe, wenn die Größen $x, y, z, a_1, a_2, \ldots$ als komplexe Veränderliche aufgefaßt werden.

In der Tat, die Sätze I, II, III, IV behalten ihre Geltung. Unsere [363 Gruppe von reellen Transformationen (1) enthält r reelle unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f, \ldots, X_r f$, welche Relationen von der Form:

$$X_i X_k f - X_k X_i f = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} X_s f$$

mit reellen Konstanten c_{iks} erfüllen. Daher erzeugen die infinitesimalen Transformationen:

$$e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f,$$

auch wenn $e_1, \ldots, e_r$ als komplexe Konstanten aufgefaßt werden, eine Gruppe von komplexen Transformationen, unter denen sich die reellen Transformationen (1) befinden.

§ 2. Ableitung mehrerer Hilfssätze.

10. In dieser Arbeit stellen wir uns die Aufgabe, alle sechsgliedrigen Transformationsgruppen:

$$X_k f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (k = 1, \ldots, 6)$$

des Raumes x, y, z zu finden, welche durch reelle analytische Gleichungen definiert sind und für reelle Punkte die Forderungen **B** und **C** erfüllen.

Wir wollen zunächst mehrere Eigenschaften der gesuchten Gruppen ableiten; dadurch wird uns die wirkliche Bestimmung aller dieser Gruppen, die wir in den folgenden Paragraphen durchführen, wesentlich erleichtert.

11. Wir stellen die Forderung **B**, daß alle Transformationen der gesuchten Gruppe eine gewisse Funktion der Koordinaten zweier Punkte:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$$

invariant lassen sollen. Alsdann verhält sich natürlich auch jede Funktion von Ω als absolute Invariante. Die Forderung **C** lehrt uns überdies, [364 daß zwei Punkte außer Ω (und allen Funktionen von Ω) keine absolute Invariante haben.

Da alle endlichen Transformationen unserer Gruppe durch unendlich oft wiederholte Ausführung von infinitesimalen Transformationen erzeugt werden, so deckt sich die Forderung, daß Ω alle endlichen Transformationen unserer Gruppe gestatten soll, damit, daß Ω alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß es sechs unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe:

$$X_1 f, \ldots, X_6 f$$

gestatten soll.

Erhalten nun $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ bei einer infinitesimalen Transformation der Gruppe die Inkremente $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$, so erhält eine Funktion $f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ das Inkrement:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \delta z_2.$$

Unsere Forderung, daß unsere Gruppe eine und nur eine Invariante zweier Punkte besitzen soll, kommt hiernach darauf hinaus, daß die sechs linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$W_k f = 0 = \xi_k(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_k(\cdots)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + \zeta_k(x_2, y_2, z_2)\frac{\partial f}{\partial z_2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6)$$

eine und nur eine gemeinsame Lösung:

$$f = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

besitzen sollen.

Nun leuchtet ein, daß die $W_k f$ wie die $X_k f$ paarweise Relationen von der Form:

$$W_i W_k f - W_k W_i f = \sum_s^{1\ldots 6} c_{iks} W_s f$$

erfüllen. *Sollen daher die Gleichungen $W_k f = 0$ ein vollständiges System mit nur einer Lösung bestimmen, so ist dazu nur erforderlich, daß die Determinante:*

$$\Delta = \sum \pm \xi_1(x_1, y_1, z_1)\,\eta_2(x_1, y_1, z_1)\ldots\zeta_6(x_2, y_2, z_2)$$ [365

identisch verschwindet, während ihre fünfreihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind. Also:

Satz 2. *Bei einer sechsgliedrigen Gruppe $X_1 f, \ldots, X_6 f$ haben zwei Punkte eine und nur eine Invariante, sobald die Determinante Δ identisch verschwindet, während ihre fünfreihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind.*

12. Für die Anwendungen ist es nützlich, dieses Kriterium auf eine andere Form zu bringen. Das erreichen wir folgendermaßen:

Wir multiplizieren die $W_k f$ mit solchen Funktionen ψ_k von x_1, y_1, z_1, daß in dem Ausdrucke:

$$\psi_1 W_1 f + \cdots + \psi_6 W_6 f$$

die Koeffizienten von $\partial f : \partial x_1$, $\partial f : \partial y_1$, $\partial f : \partial z_1$ alle gleich Null werden. Diese Forderung genügt natürlich nicht zur Bestimmung der ψ_k; die Gleichungen:

$$\psi_1\xi_1(x_1, y_1, z_1) + \cdots + \psi_6\xi_6(x_1, y_1, z_1) = 0,$$
$$\psi_1\eta_1(\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;) + \cdots + \psi_6\eta_6(\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;) = 0,$$
$$\psi_1\zeta_1(\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;) + \cdots + \psi_6\zeta_6(x_1, y_1, z_1) = 0$$

lassen sich nämlich, da die Gruppe $X_1 f, \ldots, X_6 f$ transitiv ist, nach drei von den ψ_k auflösen, und es können daher die drei übrigen ψ_k willkürlich gewählt werden.

Unter allen möglichen in dieser Weise hervorgehenden Ausdrücken $\Sigma\psi_k W_k f$ können wir drei wählen, etwa:

$$\overline{W}_i f = \sum \psi_{ik}(x_1, y_1, z_1) W_k f \qquad (i = 1, 2, 3),$$

welche keine Relation:

$$w_1(x_1, y_1, z_1)\overline{W}_1 f + w_2 \overline{W}_2 f + w_3 \overline{W}_3 f = 0$$

erfüllen. Setzen wir dann:

$$\overline{W}_i f = \bar{\xi}_i \frac{\partial f}{\partial x_2} + \bar{\eta}_i \frac{\partial f}{\partial y_2} + \bar{\zeta}_i \frac{\partial f}{\partial z_2} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

so verschwindet die Determinante: [366

$$\sum \pm \bar{\xi}_1 \bar{\eta}_2 \bar{\zeta}_3 = \bar{\Delta}$$

gleichzeitig mit Δ, da sich Δ und $\bar{\Delta}$ nur um einen nicht verschwindenden Faktor:

$$\sum \pm \xi_a(x_1, y_1, z_1)\,\eta_b(x_1 \ldots)\,\zeta_c(x_1 \cdots)$$

unterscheiden. Es leuchtet andererseits ein, daß alle zweireihigen Unterdeterminanten von $\bar{\Delta}$ [stets dann aber auch] nur dann verschwinden, wenn alle fünfreihigen Determinanten von Δ gleich Null sind.

Bei einer sechsgliedrigen Gruppe $X_1 f, \ldots, X_6 f$ haben daher zwei Punkte eine und nur eine Invariante, sobald die dreireihige Determinante $\bar{\Delta}$ identisch verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind.

13. Es ist nützlich, den begrifflichen Sinn dieses neuen Kriteriums näher zu erörtern.

Daß alle Transformationen unserer sechsgliedrigen Gruppe eine und nur eine Funktion der Koordinaten zweier Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 invariant lassen, kommt darauf hinaus, daß ein beliebig gewähltes Punktepaar durch die Transformationen der Gruppe nicht in alle anderen Punktepaare, sondern nur in ∞^5 verschiedene Punktepaare übergeführt werden kann. Das ist offenbar dann und nur dann der Fall, wenn erstens ein beliebig gewählter Punkt x_1, y_1, z_1 in jeden andern Punkt x_1', y_1', z_1' übergeführt werden kann, und wenn zweitens die Transformationen der Gruppe, welche den Punkt x_1', y_1', z_1' invariant lassen, einem beliebig gewählten Punkte x_2, y_2, z_2 noch gerade ∞^2 verschiedene Lagen erteilen können.

Bei einer sechsgliedrigen Gruppe haben daher zwei Punkte eine und nur eine Invariante, sobald erstens die Gruppe transitiv ist, und sobald zweitens die Transformationen der Gruppe, die einen beliebig gewählten Punkt x_1', y_1', z_1' festhalten, jeden anderen Punkt von allgemeiner Lage in [gerade] ∞^2 verschiedene andere Punkte überführen können.

Hiermit ist die begriffliche Deutung des früher abgeleiteten analytischen Kriteriums gefunden. In der Tat, die infinitesimalen Transformationen: $\overline{W}_i f = \Sigma \psi_{ik}(x_1, y_1, z_1) W_k f$ lassen den Punkt x_1, y_1, z_1 [367 in Ruhe und sind die allgemeinsten Transformationen der Gruppe $X_k f$, welche diesen Punkt invariant lassen. Daß die Determinante $\overline{\Delta}$ verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind, bedeutet, daß die Transformationen $\overline{W}_i f$ den Punkt x_2, y_2, z_2 in gerade ∞^2 verschiedene andere Punkte überführen können.

14. Betrachten wir für einen Augenblick die Gruppe der euklidischen Bewegungen. Alle Transformationen dieser Gruppe, die einen Punkt x_1, y_1, z_1 in Ruhe halten, erteilen einem anderen Punkte x_2, y_2, z_2 ∞^2 verschiedene Lagen, deren Inbegriff eine Kugel mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 bildet. Die ∞^3 Punkte des Raumes verteilen sich auf ∞^1 Kugeln mit demselben Mittelpunkte x_1, y_1, z_1.

In dem allgemeinen von uns betrachteten Falle ist es zweckmäßig, eine entsprechende Ausdrucksweise anzuwenden. Die Transformationen unserer Gruppe, welche den Punkt x_1, y_1, z_1 in Ruhe halten, erteilen einem anderen Punkte x_2, y_2, z_2 ∞^2 verschiedene Lagen, deren Inbegriff eine Fläche bildet; wir nennen diese Fläche eine Pseudokugel und betrachten x_1, y_1, z_1 als deren Mittelpunkt.

Jeder Punkt x_1, y_1, z_1 ist auf diese Weise der Mittelpunkt von ∞^1 Pseudokugeln. Jede Pseudokugel mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 wird dargestellt durch die Gleichung:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x_2^0, y_2^0, z_2^0) = \Omega(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2),$$

wenn wir darin x_2^0, y_2^0, z_2^0 als einen gegebenen, x_2, y_2, z_2 als einen veränderlichen Punkt [der Pseudokugel] betrachten.

Alle Transformationen $\overline{W}_i f$ unserer Gruppe, welche den Punkt x_1, y_1, z_1 in Ruhe lassen, führen jeden [andern] Punkt in die ∞^2 Punkte der hindurchgehenden Pseudokugel mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 über.

15. Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch das früher abgeleitete analytische Kriterium in der folgenden Form aussprechen:

Satz 3. Bei der sechsgliedrigen Gruppe:

$$X_k f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6)$$

besitzen zwei Punkte eine und nur eine Invariante, wenn [368 erstens die dreireihigen Determinanten $\Sigma \pm \xi_i \eta_k \zeta_j$ nicht alle verschwinden, und wenn zweitens die Determinante $\overline{\Delta}$ von drei unabhängigen infinitesimalen Transformationen $c_1 X_1 f + \cdots + c_6 X_6 f$, welche einen Punkt von allgemeiner Lage x_1, y_1, z_1 invariant lassen, selbst verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind.

16. Alle Pseudokugeln mit dem gemeinsamen Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 erfüllen nach dem Vorangehenden drei lineare partielle Differentialgleichungen:

$$\overline{W}_1 f = 0, \quad \overline{W}_2 f = 0, \quad \overline{W}_3 f = 0,$$

unter denen jedoch nur je zwei von einander unabhängig sind.

Es seien demnach:

$$\alpha_k \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_k \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

zwei unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen, welche von allen Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 erfüllt werden.

Nach ihrer Ableitung hängen die Koeffizienten $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ nicht nur von x, y, z, sondern auch von x_1, y_1, z_1 ab, und wir werden zeigen, daß sie von x_1, y_1, z_1 nicht bloß formal abhängen.

Unsere Behauptung kommt darauf hinaus, daß die Schar:

$$\Omega(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = a = \text{Const.}$$

der Pseudokugeln mit demselben Mittelpunkte nicht von diesem Mittelpunkte unabhängig sein kann; anders ausgesprochen: wir behaupten, daß es im Raume mehr als ∞^1 verschiedene Pseudokugeln gibt.

Setzen wir in der Tat voraus, daß es nur ∞^1 Pseudokugeln gibt, daß also durch jeden Punkt des Raumes nur eine Pseudokugel hindurchgeht. Halten wir nun mit Herrn v. Helmholtz zwei reelle Punkte P_1 und P_2 von allgemeiner Lage fest, so kann sich nach seinem Prinzipe der freien Beweglichkeit ein beliebiger dritter Punkt P nur auf einer Kurve bewegen, und zwar auf der Schnittkurve der beiden durch P gehenden Pseudo- [369 kugeln, deren Mittelpunkte eben P_1 und P_2 sind. Das Prinzip der freien Beweglichkeit schließt also die Annahme, daß durch P nur eine Pseudokugel hindurchgeht, ohne weiteres aus.

Betrachtet man daher jeden Punkt des Raumes als Mittelpunkt von ∞^1 Pseudokugeln, so ist die Anzahl aller dieser Pseudokugeln mindestens ∞^2.

Hiermit ist nachgewiesen, daß es unmöglich ist, in den Veränderlichen x, y, z zwei unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen:

$$\alpha_k \frac{\partial f}{\partial x} + \beta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma_k \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

aufzustellen, welche von allen Pseudokugeln des Raumes befriedigt werden, wohlbemerkt, wenn die Forderung hinzugefügt wird, daß die Koeffizienten $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ von den Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Mittelpunktes unabhängig sein sollen.

17. Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und behaupten, daß es sogar unmöglich ist, eine einzelne lineare partielle Differentialgleichung:

$$Af = 0 = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}$$

anzugeben, welche von allen Pseudokugeln des Raumes erfüllt wird und deren Koeffizienten von x_1, y_1, z_1 unabhängig sind.

Gesetzt nämlich, daß alle Pseudokugeln des Raumes eine Gleichung: $Af = 0$ erfüllten, deren Koeffizienten von x_1, y_1, z_1 unabhängig wären. Alsdann besäßen alle Pseudokugeln die gemeinsame Gleichungsform $u - f(v) = 0$, wo u und v zwei unabhängige Lösungen der Gleichung $Af = 0$ bezeichneten. Zugleich bestimmten die Gleichungen:

$$u = a = \text{Const.}, \quad v = b = \text{Const.}$$

∞^2 Kurven des Raumes: die Mongeschen Charakteristiken der Gleichung $Af = 0$, und jede Pseudokugel wäre von ∞^1 solchen Charakteristiken erzeugt.

Da nun durch jeden Punkt des Raumes nur eine Charakteristik [370 hindurchgeht, so hätten alle durch den Punkt P gehenden Pseudokugeln eine gemeinsame Schnittkurve, nämlich die durch diesen Punkt gehende Charakteristik.

Hieraus folgt sogleich, daß die Charakteristiken reelle Kurven sein müssen. Denn nach v. Helmholtzs Prinzip der freien Beweglichkeit schneiden einander zwei durch einen reellen Punkt P gehende Pseudokugeln mit den Mittelpunkten P_1 und P_2 in einer reellen Kurve, welche von dem Punkte P durchlaufen wird, wenn die beiden Punkte P_1 und P_2 festgehalten, und sodann die noch möglichen Bewegungen des Raumes ausgeführt werden. Erfüllten daher alle Pseudokugeln die lineare partielle

Differentialgleichung $Af = 0$, so müßten die Koeffizienten α, β, γ, oder jedenfalls ihre Verhältnisse reelle Funktionen von x, y, z sein.

Es ist aber leicht, zu sehen, daß dieser Fall gar nicht eintreten kann. Das Prinzip der freien Beweglichkeit verlangt ja, daß, wenn drei Punkte von allgemeiner Lage: P_1, P_2 und P_3 festgehalten werden, daß dann die durch einen vierten Punkt P von allgemeiner Lage gehenden Pseudokugeln mit den Mittelpunkten P_1, P_2, P_3 nur den einen Punkt P gemein haben.

Es gilt somit der

Satz 4. Erfüllt eine sechsgliedrige Transformationsgruppe die beiden Forderungen **B** und **C**, so gibt es keine lineare partielle Differentialgleichung:

$$Af = \alpha(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

welche von allen Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 befriedigt wird, und deren Koeffizienten von x_1, y_1, z_1 unabhängig sind.

18. Aus den beiden abgeleiteten Hilfssätzen lassen sich jetzt wichtige Schlüsse ziehen, welche die Bestimmung aller sechsgliedrigen Transformationsgruppen mit den verlangten Eigenschaften wesentlich erleichtern.

Zunächst zeigen wir, daß eine sechsgliedrige Transformationsgruppe, welche die beiden Forderungen **B** und **C** erfüllt, nie zwei infinitesimale Transformationen:

$$X_k f = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (k = 1, 2)$$ [371

enthält, welche durch eine lineare Relation:

$$\varphi_1(x, y, z)\, X_1 f + \varphi_2(x, y, z)\, X_2 f = 0$$

verknüpft sind, und somit dieselben Bahnkurven besitzen.

Enthielte nämlich die Gruppe zwei solche infinitesimale Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$, so besäße sie auch immer eine von der Form: $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$, welche einen beliebig gewählten Punkt x_1, y_1, z_1 in Ruhe ließe, nämlich die Transformation:

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1)\, X_1 f + \varphi_2(x_1, y_1, z_1)\, X_2 f.$$

Es erfüllten daher alle Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 die lineare partielle Differentialgleichung:

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1)\, X_1 f + \varphi_2(x_1, y_1, z_1)\, X_2 f = 0,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung:

$$[\varphi_1(x_1, y_1, z_1) \cdot \varphi_2(x, y, z) - \varphi_2(x_1, y_1, z_1) \cdot \varphi_1(x, y, z)]\, X_1 f = 0,$$

welche mit der Gleichung:

$$X_1 f = 0$$

äquivalent wäre, da der Faktor:

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) \cdot \varphi_2(x, y, z) - \varphi_2(x_1, y_1, z_1) \cdot \varphi_1(x, y, z)$$

nicht identisch gleich Null ist.

Hiermit sind wir indes auf einen Widerspruch geführt, weil nicht alle Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen können, deren Koeffizienten von x_1, y_1, z_1 unabhängig sind.

19. Später wird sich ergeben, daß eine sechsgliedrige Gruppe häufig eine Schar von ∞^1 Flächen invariant läßt. Es ist daher zweckmäßig, schon hier Gruppen zu betrachten, welche die beiden besprochenen Forderungen erfüllen und gleichzeitig eine Schar von ∞^1 Flächen $\varphi(x, y, z) = a = \text{Const.}$ invariant lassen.

Ist eine derartige Gruppe vorgelegt, so können wir durch Ein- [372
führung des φ als eines neuen x immer erreichen, daß die infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe sämtlich die Form:

$$\xi_k(x) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z}$$

erhalten, wo die ξ_k nur von x abhängen. Es ist dann klar, daß die verkürzten infinitesimalen Transformationen $\xi_k(x)\,(\partial f : \partial x)$ selbst eine Gruppe erzeugen. Nach meiner allgemeinen Theorie kann überdies stets eine solche Funktion von x als neues x eingeführt werden, daß alle ξ_k ganze Funktionen vom zweiten Grade in x werden:

$$\xi_k = a_k + b_k x + c_k x^2.$$

Es sind daher immer vier oder eine noch geringere Anzahl ξ_k durch eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten verknüpft. Wir wollen nun untersuchen, welche Möglichkeiten in unserem Falle wirklich eintreten können.

20. Da die sechsgliedrige Gruppe transitiv ist, können die ξ_k nicht alle gleich Null sein; daher kommen in jeder zwischen den ξ_k bestehenden linearen homogenen Relation mindestens zwei solche Größen vor.

Wären nun je zwei der ξ_k durch eine solche Relation verknüpft, so bestimmten alle $\xi_k(\partial f : \partial x) = \xi_k p$ eine eingliedrige Gruppe, welche auf

die Form p reduzibel wäre. Dann wäre $x_1 - x_2$ eine Invariante von zwei Punkten, und also würden die zu dem Mittelpunkte x_1, y_1, z_1 gehörigen ∞^1 Pseudokugeln durch die Gleichung:

$$x_1 - x = a = \text{Const.}$$

dargestellt. In diesem Falle existierten also nur ∞^1 Pseudokugeln, nämlich die Ebenen $x = \text{Const.}$; da aber die Anzahl der Pseudokugeln, wie früher nachgewiesen, immer größer als ∞^1 ist, so können die verkürzten infinitesimalen Transformationen: $\xi_k(x)p$ nicht blos eine eingliedrige Gruppe bestimmen.

21. Wir wollen jetzt untersuchen, ob es denkbar ist, daß die verkürzten infinitesimalen Transformationen $\xi_k(x)p$ eine zweigliedrige Gruppe bestimmen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ob es denkbar ist, [373
daß jedesmal drei von den Größen ξ_k durch eine lineare homogene Relation verknüpft sind.

In dem angenommenen Falle ließen sich die ξ_k nach meiner allgemeinen Theorie auf die Form:

$$a_k + b_k x$$

bringen; es enthielte also die sechsgliedrige Gruppe des Raumes sechs unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\begin{aligned} &p + \eta_1 q + \zeta_1 r, \\ &xp + \eta_2 q + \zeta_2 r, \\ &\eta_k q + \zeta_k r \qquad (k = 3, 4, 5, 6), \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = r$$

gesetzt ist. Ein Punkt x_1, y_1, z_1 von allgemeiner Lage gestattete infolgedessen drei infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\begin{aligned} \overline{X}_1 f &= (x - x_1)p + \bar{\eta}_1 q + \bar{\zeta}_1 r, \\ \overline{X}_2 f &= \qquad\qquad\quad \bar{\eta}_2 q + \bar{\zeta}_2 r, \\ \overline{X}_3 f &= \qquad\qquad\quad \bar{\eta}_3 q + \bar{\zeta}_3 r, \end{aligned}$$

deren Determinante:

$$\bar{\varDelta} = \begin{vmatrix} x - x_1 & \bar{\eta}_1 & \bar{\zeta}_1 \\ 0 & \bar{\eta}_2 & \bar{\zeta}_2 \\ 0 & \bar{\eta}_3 & \bar{\zeta}_3 \end{vmatrix} = (x - x_1) \begin{vmatrix} \bar{\eta}_2 & \bar{\zeta}_2 \\ \bar{\eta}_3 & \bar{\zeta}_3 \end{vmatrix}$$

nach dem Satze 3 sicher null wäre. Unsere Gruppe enthielte also zwei infinitesimale Transformationen $\overline{X}_2 f$ und $\overline{X}_3 f$, welche durch eine lineare Relation:

$$\varphi_2(x, y, z)\, \overline{X}_2 f + \varphi_3(x, y, z)\, \overline{X}_3 f = 0$$

verknüpft wären. Da dies indes nach einer früheren Bemerkung ausgeschlossen ist, folgt der

Satz 5. Läßt eine sechsgliedrige Transformations- [374 gruppe des Raumes x, y, z, welche die Forderungen **B** und **C** erfüllt, eine Schar von ∞^1 reellen oder imaginären Flächen invariant, so transformiert sie diese Flächenschar, die ja eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bildet, durch eine dreigliedrige Gruppe.

22. In meiner ersten Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie zeigte ich, daß eine dreigliedrige projektive Gruppe der Ebene entweder aus allen projektiven Transformationen besteht, welche einen Kegelschnitt invariant lassen, oder einen Punkt in Ruhe läßt.

Für das Folgende ist es notwendig, ähnliche Sätze für ein- und zweigliedrige projektive Gruppen aufzustellen.

Eine eingliedrige projektive Gruppe einer Ebene läßt immer mindestens einen Punkt in Ruhe.

Betrachten wir jetzt eine zweigliedrige projektive Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$ der Ebene. Eine allgemeine infinitesimale Transformation $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ läßt entweder mindestens einen isolierten Punkt, oder alle Punkte einer Geraden in Ruhe. Im ersten Falle ist es denkbar, daß alle ∞^1 infinitesimalen Transformationen $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ denselben Punkt in Ruhe lassen; tritt dieser Fall nicht ein, so bilden die ∞^1 invarianten Punkte eine Kurve, welche offenbar bei der zweigliedrigen Gruppe invariant bleibt.

Läßt andererseits eine allgemeine infinitesimale Transformation $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ alle Punkte einer Geraden in Ruhe, so ist es denkbar, daß zu allen Transformationen dieselbe Gerade gehört; es ist aber auch denkbar, daß ∞^1 solche Gerade auftreten, welche dann eine invariante Kurve oder einen invarianten Punkt umhüllen.

Bei einer zweigliedrigen projektiven Gruppe bleibt also entweder ein Punkt oder eine Gerade oder eine krumme Kurve invariant. Im zweiten dieser drei Fälle bleibt auf der Geraden notwendig ein Punkt stehen. Im dritten Falle ist die krumme Kurve nach einem bekannten Satze ein Kegelschnitt, und auf diesem Kegelschnitte bleibt ebenfalls ein Punkt invariant. Es gilt somit der allgemeine Satz:

Satz 6. Läßt eine projektive Gruppe der Ebene mit weniger als vier Parametern keinen Punkt in Ruhe, so ist sie **dreigliedrig** und besteht aus allen projektiven Transformationen, welche einen Kegelschnitt in sich überführen.

§ 3. Zerlegung des Problems. [375

23. Jetzt können wir unser allgemeines Problem in Angriff nehmen und alle sechsgliedrigen Transformationsgruppen des Raumes bestimmen, bei denen zwei Punkte eine und nur eine Invariante haben, während freie Beweglichkeit im bekannten Sinne stattfindet.

Ist eine derartige Gruppe vorgelegt, so erzeugen alle Transformationen derselben, die einen Punkt von allgemeiner Lage in Ruhe lassen, eben weil die Gruppe transitiv ist, eine dreigliedrige Untergruppe. Die durch den festgehaltenen Punkt gehenden Linienelemente bilden eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche von den Transformationen der soeben besprochenen dreigliedrigen Gruppe projektiv transformiert wird. Diese projektiven Transformationen unserer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bilden eine Gruppe mit höchstens drei Parametern.[1]) Daher zeigen die vorangehenden Entwickelungen (Satz 6), daß zwei Möglichkeiten vorhanden sind. Mit jedem Punkte von allgemeiner Lage ist entweder eine Richtung $dx : dy : dz$ oder ein Kegel zweiten Grades invariant verknüpft.

24. Im letzen Falle läßt die Gruppe eine Differentialgleichung zweiten Grades:

$$0 = \alpha\, dx^2 + \beta\, dy^2 + \gamma\, dz^2 + 2\varepsilon\, dx\, dy + 2\varphi\, dy\, dz + 2\psi\, dz\, dx$$

invariant; sie ist überdies primitiv, weil mit einem Punkte von allgemeiner Lage kein Linienelement und auch kein Flächenelement invariant verknüpft ist.

Diesen Fall habe ich in früheren Arbeiten erledigt (vgl. auch [376 meine erste Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie [hier Abh. VI]).

1) Wenn ich Herrn v. Helmholtzs Arbeit richtig verstanden habe, enthält diese den wesentlichen Fehler, daß sie es implizite als selbstverständlich betrachtet, daß die Linienelemente durch einen festgehaltenen Punkt von einer dreigliedrigen projektiven Gruppe transformiert werden. Es wäre ja möglich, daß es unter den infinitesimalen Transformationen der sechsgliedrigen Gruppe des Raumes, welche einen Punkt von allgemeiner Lage festhalten, eine gibt, die zugleich alle durch denselben gehenden Linienelemente invariant läßt.

Ich will aber auch hier hervorheben, daß der eigentliche Sinn der Auseinandersetzungen des berühmten Verfassers mir an einigen Stellen dunkel geblieben ist.

Es ergab sich, daß die gesuchte sechsgliedrige Gruppe durch eine reelle Transformation entweder mit der Gruppe der euklidischen oder mit einer der beiden Gruppen von nichteuklidischen Bewegungen ähnlich ist.

25. Es bleibt also nur noch der Fall zu erledigen, daß mit jedem Punkte ein Linienelement invariant verknüpft ist.

In diesem Falle existiert ein bei der Gruppe invariantes simultanes System:

$$\frac{dx}{\alpha} = \frac{dy}{\beta} = \frac{dz}{\gamma}.$$

Sind u, v unabhängige Integrale desselben, so bestimmen die Gleichungen:

$$u = a = \text{Const.}, \quad v = b = \text{Const.}$$

die ∞^2 Integralkurven unseres simultanen Systems, die eine bei unserer Gruppe invariante reelle oder imaginäre Kurvenschar bilden.

Führen wir daher die reellen oder imaginären Größen u und v als neues x respektive neues y ein, so erhalten unsere infinitesimalen Transformationen sämtlich die Form:

$$X_k f = \xi_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z},$$

oder:

$$X_k f = \xi_k(x, y)p + \eta_k(x, y)q + \zeta_k(x, y, z)r.$$

Es leuchtet hier ohne weiteres ein, daß die verkürzten infinitesimalen Transformationen:

$$\overline{X}_k f = \xi_k(x, y)p + \eta_k(x, y)q$$

ihrerseits eine Gruppe erzeugen, welche die Geradenschar: $x = \text{Const.}$, $y = \text{Const.}$ invariant läßt und dabei höchstens sechs Parameter enthält.

26. Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Hilfssätze lassen nun zunächst leicht erkennen, daß die Gruppe $\overline{X}_k f$ mindestens fünf Parameter enthält. Sonst enthielte nämlich die sechsgliedrige Gruppe $X_k f$ zwei [377 unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form:

$$Y_1 f = \bar{\zeta}_1 r, \quad Y_2 f = \bar{\zeta}_2 r,$$

welche durch die identische Relation:

$$\bar{\zeta}_2 Y_1 f - \bar{\zeta}_1 Y_2 f = 0$$

verknüpft wären. Da aber eine solche Relation von vornherein ausgeschlossen ist, so dürfen wir schließen, daß die Gruppe $\overline{X}_k f$ wirklich mindestens fünf wesentliche Parameter enthält.

27. Wir wollen zunächst annehmen, daß die Gruppe $\overline{X}_k f$ sechs unabhängige infinitesimale Transformationen enthält. In früheren Arbeiten von mir (vgl. insbesondere Math. Annalen Bd. XVI [1880, d. Ausg. Bd. VI, Abh. I]) sind nun alle Transformationsgruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmt. Jetzt müssen wir unter allen Transformationsgruppen der Mannigfaltigkeit x, y die sechsgliedrigen herausgreifen, sodann nach und nach jede sechsgliedrige Gruppe als eine Gruppe $\overline{X}_k f$ auffassen und endlich alle Gruppen von der Form:

$$X_k f = \overline{X}_k f + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (k = 1, \ldots, 6)$$

bestimmen, welche unsere Forderungen erfüllen.

Die im vorangehenden Paragraphen entwickelten Hilfssätze zeigen, daß man unter allen sechsgliedrigen Gruppen der Mannigfaltigkeit x, y gewisse von vornherein ausschließen kann.

Läßt eine sechsgliedrige Gruppe $Y_k f$ der Ebene x, y eine und nur eine Kurvenschar $\varphi(x, y) = a = \text{Const.}$ invariant, so läßt jede Transformationsgruppe des Raumes, welche die Form:

$$Y_k f + \zeta_k r \qquad (k = 1, \ldots, 6)$$

besitzt, die Flächenschar $\varphi(x, y) = a$ invariant. Nach Satz 5, S. 374 [hier S. 430] brauchen wir aber nur solche Gruppen: $Y_k f + \zeta_k r$ zu berücksichtigen, bei denen die Flächenschar $\varphi = a$ dreigliedrig transformiert wird. Unter den sechsgliedrigen Gruppen der Ebene x, y, welche eine einzige Kurvenschar $\varphi(x, y) = a$ invariant lassen, kommen daher nur die in Betracht, welche diese Kurvenschar dreigliedrig transformieren. [378 Es sind das nur die beiden Gruppen:

$$q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq;$$
$$q,\ xq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq.$$

Läßt eine sechsgliedrige Gruppe der Ebene x, y gar keine Kurvenschar $\varphi(x, y) = a$ invariant, so kann sie auf die kanonische Form:

$$p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,\ yp$$

gebracht werden. Läßt sie dagegen zwei Kurvenscharen invariant, so kann sie die kanonische Form:

$$p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq,\ y^2q$$

erhalten.

28. Wir wenden uns jetzt zu dem Falle, daß die verkürzte Gruppe $\overline{X}_k f$ fünfgliedrig ist. Auch hier muß jede etwa vorkommende invariante Kurvenschar $\varphi(x, y) = a$ dreigliedrig transformiert werden.

Es gibt aber in diesem Falle nur zwei Gruppen, welche berücksichtigt werden müssen; das sind die Gruppen:

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

und:

$$q,\ xq,\ p,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq.$$

Diese sechs Gruppen haben wir jetzt der Reihe nach als Gruppen $\overline{X}_k f$ zu betrachten und die zugehörigen Gruppen $X_k f$ zu berechnen.

§ 4. Bestimmung aller Gruppen, deren verkürzte Gruppen sechsgliedrig sind.

29. Wir setzen zunächst voraus, daß die verkürzte Gruppe $\overline{X}_k f$ sechsgliedrig ist und somit eine der vier folgenden Formen besitzt:

(A) $$p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,\ yp,$$

(B) $$p,\ xp,\ x^2p,\ q,\ yq,\ y^2q,$$

(C) $$q,\ xq,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq,$$ [379

(D) $$q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq.$$

Diese vier Fälle gehen wir jetzt der Reihe nach durch.

30. Wir setzen zunächst voraus, daß die Gruppe $\overline{X}_k f$ die Form:

(A) $$p,\ q,\ xq,\ xp,\ yq,\ yp$$

besitzt. Wir müssen also sechs Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_6$ von x, y, z derart bestimmen, daß die infinitesimalen Transformationen:

$$p + f_1 r,\ q + f_2 r,\ xq + f_3 r,\ xp - yq + f_4 r,\ yp + f_5 r,\ xp + yq + f_6 r$$

eine sechsgliedrige Gruppe erzeugen, welche die verlangten Eigenschaften besitzt.

Durch Klammeroperation erhalten wir eine Anzahl Differentialrelationen, welche zwischen den sechs Funktionen f_k bestehen. Wir suchen die allgemeinsten Funktionen f_k, welche diese Relationen erfüllen; außerdem versuchen wir durch passende Wahl der unabhängigen Veränderlichen z zu erreichen, daß die Form der f_k so einfach wie möglich wird.

Durch Kombination ergibt sich:

$$(p + f_1 r,\ q + f_2 r) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) r.$$

Nun aber enthält unsere Gruppe keine infinitesimale Transformation von der Form:

$$w(x, y, z)r,$$

also ist:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0.$$

Denken wir uns nun, wie offenbar möglich, die Veränderliche z von vornherein in solcher Weise gewählt, daß f_1 gleich Null ist, so erhalten wir die einfache Gleichung:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,$$

welche zeigt, daß f_2 von x frei ist.

Unsere beiden ersten infinitesimalen Transformationen haben [380 somit die Form:

$$p,\ q + f_2(y, z) r.$$

Es ist indes leicht, diese Transformationen auf eine noch einfachere Form zu bringen; wir führen:

$$z_1 = \varphi(y, z)$$

als neues z ein; dabei behält p seine Form, während:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + f_2(y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial z_1}$$

wird. Wählen wir daher φ so, daß:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

ist, so erhalten die beiden ersten infinitesimalen Transformationen die Form:

$$p,\ q.$$

Zur Bestimmung von f_3 bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ xq + f_3 r) = q + \frac{\partial f_3}{\partial x} r,$$

$$(q,\ xq + f_3 r) = \frac{\partial f_3}{\partial y} r,$$

welche zeigen, daß f_3 nur von z abhängt. Es ist dabei klar, daß f_3 von Null verschieden sein muß, weil sonst die infinitesimalen Transformationen q, xq durch eine lineare Relation verknüpft wären. Die dritte infinitesimale Transformation hat somit die Form:

$$xq + Z(z) r \qquad (Z \neq 0),$$

und man kann auch noch durch Einführung einer passenden Größe $\varphi(z)$ an Stelle von z erreichen, daß $Z = 1$ wird.

Da dies keinen Einfluß auf die Form der beiden ersten infinitesimalen Transformationen hat, so erscheinen jetzt die drei ersten in der Gestalt:

$$p, q, xq + r. \qquad [381$$

Um die Form der vierten infinitesimalen Transformation:

$$X_4 f = xp - yq + f_4 r$$

zu bestimmen, bilden wir die Gleichungen:

$$(p, xp - yq + f_4 r) = \quad p + \frac{\partial f_4}{\partial x} r,$$

$$(q, xp - yq + f_4 r) = -q + \frac{\partial f_4}{\partial y} r,$$

$$(xq + r, xp - yq + f_4 r) = -2xq + \left(x\frac{\partial f_4}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial z}\right) r,$$

von denen die beiden ersten zeigen, daß f_4 nur von z abhängt; die letzte Gleichung gibt uns sodann die Relation:

$$\frac{\partial f_4}{\partial z} = -2,$$

also:

$$f_4 = -2z + a,$$

wo aber die Integrationskonstante a ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Es ist daher:

$$X_4 f = xp - yq - 2zr.$$

Zur Bestimmung der fünften infinitesimalen Transformation:

$$X_5 f = yp + f_5 r$$

bilden wir zunächst die Gleichungen:

$$(p, yp + f_5 r) = \quad \frac{\partial f_5}{\partial x} r,$$

$$(q, yp + f_5 r) = p + \frac{\partial f_5}{\partial y} r,$$

welche zeigen, daß f_5 nur von z abhängt, daß also $X_5 f$ die Form:

$$X_5 f = yp + Z(z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

besitzt. Sodann bilden wir die Gleichung: [382

$$(xp - yq - 2zr, yp + Z(z)r) = -2yp - (2zZ' - 2Z)r,$$

welche zur Bestimmung von Z die Gleichung:

$$2zZ' - 2Z = 2Z$$

liefert; sodaß:

$$Z = kz^2 \qquad (k = \text{Const.})$$

wird. Zur Bestimmung der Konstanten k müssen wir die Gleichung:

$$(xq + r, yp + kz^2 r) = xp - yq + 2kzr$$

bilden; diese zeigt, daß $k = -1$ und:

$$X_5 f = yp - z^2 r$$

ist.

Endlich zur Bestimmung von:

$$X_6 f = xp + yq + f_6 r$$

bilden wir zunächst die Gleichungen:

$$(p, xp + yq + f_6 r) = p + \frac{\partial f_6}{\partial x} r,$$

$$(q, xp + yq + f_6 r) = q + \frac{\partial f_6}{\partial y} r,$$

welche zeigen, daß f_6 nur von z abhängt; sodann bilden wir die Gleichungen:

$$(xq + r, xp + yq + Zr) = \qquad Z' r,$$

$$(xp - yq - 2zr, xp + yq + Zr) = (-2zZ' + 2Z)r,$$

$$(yp - z^2 r, xp + yq + Zr) = (-z^2 Z' + 2zZ)r,$$

welche zeigen, daß Z gleich Null ist.

31. Hiermit sind die infinitesimalen Transformationen $X_1 f, \ldots, X_6 f$ auf die einfache Form:

$$p, q, xq + r, xp - yq - 2zr, yp - z^2 r, xp + yq$$

gebracht.[1] Diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine [383 Gruppe; es bleibt zu untersuchen, ob diese Gruppe die verlangten Eigenschaften besitzt.

---

1) Wenn man die Gruppe $p, q, xq, xp - yq, yp, xp + yq$ als eine Gruppe von Punkttransformationen der x, y-Ebene betrachtet und diese durch Hinzunahme der Größe:

$$z = \frac{dy}{dx}$$

erweitert, so erhält man grade die Gruppe des Textes.

Die drei infinitesimalen Transformationen:

$$p,\ q,\ xq + r$$

zeigen, daß der Koordinatenanfang $x = y = z = 0$ ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dieser Punkt bleibt in Ruhe bei den drei infinitesimalen Transformationen:

$$xp - yq - 2zr,\ yp - z^2 r,\ xp + yq.$$

Wir haben also die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x & -y & -2z \\ y & 0 & -z^2 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = 2xyz^2 - 2y^2 z$$

zu bilden. Diese verschwindet nicht identisch; daher schließen wir, daß die gefundene sechsgliedrige Gruppe die Forderungen **B** und **C** nicht erfüllt.

32. Jetzt setzen wir voraus, daß die verkürzte Gruppe die Form:

(B) $$p,\ q,\ xp,\ yq,\ x^2p,\ y^2q$$

besitzt. Wir suchen also die sechsgliedrigen Gruppen, welche die Form:

$$p + f_1 r,\ q + f_2 r,\ xp + f_3 r,\ yq + f_4 r,\ x^2 p + f_5 r,\ y^2 q + f_6 r$$

haben und dabei unsere Forderungen **B** und **C** erfüllen.

Wie im vorigen Falle erkennen wir, daß wir ohne Beschränkung:

$$f_1 = f_2 = 0$$ [384

und dementsprechend:

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q$$

setzen können. Sodann bilden wir die Ausdrücke:

$$(p,\ xp + f_3 r) = p + \frac{\partial f_3}{\partial x} r,$$

$$(q,\ xp + f_3 r) = \frac{\partial f_3}{\partial y} r,$$

welche zeigen, daß f_3 nur von z abhängen kann; überdies ist klar, daß f_3 von Null verschieden sein muß. Wir können daher $f_3 = 1$ und also:

$$X_3 f = xp + r$$

setzen. In entsprechender Weise erkennen wir durch Bildung der Gleichungen:

$$(p,\ yq + f_4 r) = \frac{\partial f_4}{\partial x} r,$$

$$(q,\ yq + f_4 r) = q + \frac{\partial f_4}{\partial y} r,$$

$$(xp + r,\ yq + f_4 r) = \left(x \frac{\partial f_4}{\partial x} + \frac{\partial f_4}{\partial z}\right) r,$$

daß f_4 von x, y, z frei sein muß. Da aber andererseits f_4 von Null verschieden sein muß, erkennen wir, daß $X_4 f$ die Form:

$$X_4 f = yq + kr \qquad (k = \text{Const.} \neq 0)$$

besitzt.

Zur Bestimmung von:

$$X_5 f = x^2 p + f_5 r$$

bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\ x^2 p + f_5 r) = 2xp + \frac{\partial f_5}{\partial x} r,$$

$$(q,\ x^2 p + f_5 r) = \frac{\partial f_5}{\partial y} r,$$

$$(xp + r,\ x^2 p + f_5 r) = x^2 p + \left(x \frac{\partial f_5}{\partial x} + \frac{\partial f_5}{\partial z}\right) r,$$ [385

$$(yq + kr,\ x^2 p + f_5 r) = \left(y \frac{\partial f_5}{\partial y} + k \frac{\partial f_5}{\partial z}\right) r,$$

von denen die beiden ersten zeigen, daß f_5 die Form:

$$f_5 = 2x + Z(z)$$

besitzt; die beiden letzten Gleichungen geben zur Bestimmung von Z:

$$2x + Z'(z) = 2x + Z,\ Z'(z) = 0.$$

Es ist daher $Z = 0$, $f_5 = 2x$ und:

$$X_5 f = x^2 p + 2xr.$$

Eine ganz ähnliche Rechnung liefert:

$$X_6 f = y^2 q + 2kyr.$$

Die sechs hiermit gefundenen infinitesimalen Transformationen:

$$\boxed{p,\ q,\ xp + r,\ yq + kr,\ x^2 p + 2xr,\ y^2 q + 2kyr}$$

bilden eine sechsgliedrige Gruppe. Es fragt sich, ob diese die verlangten Eigenschaften besitzt.

33. Die drei infinitesimalen Transformationen: p, q, $xp + r$ zeigen, daß der Koordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dieser Punkt bleibt in Ruhe bei den drei infinitesimalen Transformationen:

$$yq - kxp,\ x^2p + 2xr,\ y^2q + 2kyr.$$

Die zugehörige Determinante:

$$\begin{vmatrix} -kx & y & 0 \\ x^2 & 0 & 2x \\ 0 & y^2 & 2ky \end{vmatrix} = 2kx^2y^2 - 2kx^2y^2$$

verschwindet identisch, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind. Also erfüllt diese Gruppe die Forderungen **B** und **C**.

Zwei Punkte haben daher eine und nur eine Invariante, die man [386 ohne Schwierigkeit berechnen könnte, was jedoch für unsere Zwecke überflüssig ist.

Dagegen heben wir hervor, daß alle infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe mit der infinitesimalen Transformation r vertauschbar sind. Hieraus folgt, daß unsere Gruppe systatisch ist; das heißt, wenn ein Punkt P in Ruhe gehalten wird, so bleiben alle Punkte einer durch P gehenden Kurve in Ruhe.

In der Tat, halten wir den Punkt x_0, y_0, z_0 fest. Die allgemeinste Transformation unserer Gruppe, welche diese Forderung erfüllt, wird linear abgeleitet aus den drei folgenden:

$$\begin{gathered} k(x - x_0)p - (y - y_0)q, \\ (x - x_0)^2p + 2(x - x_0)r, \\ (y - y_0)^2q + 2k(y - y_0)r. \end{gathered}$$

Man übersieht ohne weiteres, daß jede infinitesimale Transformation unserer Gruppe, welche den Punkt x_0, y_0, z_0 festhält, gleichzeitig die ∞^1 Punkte x_0, y_0, z invariant läßt.

Hält man daher den Punkt x_0, y_0, z_0 fest, so kann allerdings ein Punkt von allgemeiner Lage ∞^2 verschiedene Lagen annehmen. Es gibt aber, wie wir sehen, ∞^1 Punkte, welche das nicht können.

Unsere Gruppe erfüllt die Forderung **C**, wenn man die eingeklammerten Worte mitnimmt, sie erfüllt aber diese Forderung nicht, wenn man die eingeklammerten Worte streicht.

Es ist mir nicht klar, wie Herr v. Helmholtz sein Axiom der freien Beweglichkeit versteht. Will er, daß die von ihm gestellte Forderung **C** innerhalb eines gewissen Bereiches ausnahmelos erfüllt sein soll, so muß er sagen, daß die vorliegende Gruppe die Forderung der freien Beweglichkeit nicht erfüllt. Es ist ja unmöglich, einen Bereich derart abzugrenzen, daß, wenn ein beliebiger Punkt desselben festgehalten wird, dann jeder andere Punkt des Bereiches ∞^2 verschiedene Lagen annehmen kann.

Unsere Gruppe besitzt freie Beweglichkeit, wenn man diesen Begriff im weiteren Sinne des Wortes nimmt; dagegen besitzt sie freie Beweglichkeit nicht, wenn man diesen Begriff im engeren Sinne des Wortes nimmt.

34. Ich werde jetzt annehmen, daß die verkürzte Gruppe $\overline{X}_k f$ [387 die Form:

(C) $$q,\ p,\ xq,\ yq,\ xp,\ x^2p + xyq$$

besitzt.

Wir haben also die sechs Funktionen f_k derart zu bestimmen, daß die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$\begin{gathered} X_1f = q + f_1r,\quad X_2f = p + f_2r,\quad X_3f = xq + f_3r, \\ X_4f = yq + f_4r,\quad X_5f = xp + f_5r,\quad X_6f = x^2p + xyq + f_6r \end{gathered}$$

eine Gruppe mit den verlangten Eigenschaften erzeugen.

Wie im ersten Falle erkennen wir, daß wir ohne Beschränkung:

$$X_1f = q,\quad X_2f = p,\quad X_3f = xq + r$$

setzen können.

Um nun die infinitesimale Transformation:

$$X_4f = yq + f_4r$$

zu bestimmen, bilden wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (q,\ yq + f_4r) &= q + \frac{\partial f_4}{\partial y}r, \\ (p,\ yq + f_4r) &= \frac{\partial f_4}{\partial x}r, \\ (xq + r,\ \ yq + f_4r) &= xq + \left(x\frac{\partial f_4}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial z}\right)r, \end{aligned}$$

welche zeigen, daß f_4 eine Funktion Z von z ist, welche die Gleichung:

$$\frac{dZ}{dz} = 1$$

erfüllt; also kommt $Z = z + a$, wo wir die Integrationskonstante a ohne Beschränkung gleich Null setzen können. Es wird daher:

$$X_4 f = yq + zr.$$

Zur Bestimmung von $X_5 f$ bilden wir die Gleichungen: [388

$$(p,\, xp + f_5 r) = p + \frac{\partial f_5}{\partial x} r,$$

$$(q,\, xp + f_5 r) = \frac{\partial f_5}{\partial y} r,$$

$$(xq + r,\, xp + f_5 r) = -xq + \left(x\frac{\partial f_5}{\partial y} + \frac{\partial f_5}{\partial z}\right) r,$$

$$(yq + zr,\, xp + f_5 r) = \left(y\frac{\partial f_5}{\partial y} + z\frac{\partial f_5}{\partial z} - f_5\right) r,$$

welche zeigen, daß f_5 eine Funktion von z ist, welche die Gleichungen:

$$\frac{\partial f_5}{\partial z} = -1, \quad z\frac{\partial f_5}{\partial z} - f_5 = 0$$

erfüllt, sodaß $f_5 = -z$ und:

$$X_5 f = xp - zr$$

wird.

Endlich zur Bestimmung von:

$$X_6 f = x^2 p + xyq + f_6 r$$

bilden wir zunächst die Gleichungen:

$$(p,\, x^2 p + xyq + f_6 r) = 2xp + yq + \frac{\partial f_6}{\partial x} r,$$

$$(q,\, x^2 p + xyq + f_6 r) = xq + \frac{\partial f_6}{\partial y} r,$$

$$(xq + r,\, x^2 p + xyq + f_6 r) = \left(x\frac{\partial f_6}{\partial y} + \frac{\partial f_6}{\partial z}\right) r,$$

welche zeigen, daß:

$$\frac{\partial f_6}{\partial x} = -z, \quad \frac{\partial f_6}{\partial y} = 1, \quad x\frac{\partial f_6}{\partial y} + \frac{\partial f_6}{\partial z} = 0$$

ist, und also:

$$f_6 = -xz + y + a \qquad (a = \text{Const.}).$$

Nun aber liefern die Relationen: [389

$$(yq + zr,\, x^2 p + xyq + f_6 r) = \left(y\frac{\partial f_6}{\partial y} + z\frac{\partial f_6}{\partial z} - f_6\right) r,$$

$$(xp - zr,\, x^2 p + xyq + f_6 r) = x^2 p + xyq + \left(x\frac{\partial f_6}{\partial x} - z\frac{\partial f_6}{\partial z} + f_6\right) r$$

die Gleichungen:

$$y\frac{\partial f_6}{\partial y} + z\frac{\partial f_6}{\partial z} - f_6 = 0,$$

$$x\frac{\partial f_6}{\partial x} - z\frac{\partial f_6}{\partial z} + f_6 = f_6,$$

von denen die erste bei der Substitution $f_6 = -xz + y + a$ nur für $a = 0$ erfüllt wird.

Wir erhalten in dieser Weise die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$\boxed{\begin{gathered} q,\; p,\; xq + r,\; yq + zr,\; xp - zr, \\ x^2 p + xyq + (y - xz) r \end{gathered}}$$

die eine sechsgliedrige Gruppe erzeugen.[1] Es fragt sich, ob diese Gruppe die gewünschten Eigenschaften besitzt.

35. Die drei infinitesimalen Transformationen q, p, $xq + r$ zeigen, daß der Koordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dieser Punkt bleibt in Ruhe bei den Transformationen:

$$yq + zr, \quad xp - zr, \quad x^2 p + xyq + (y - xz) r.$$

Wir bilden daher die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ x & 0 & -z \\ x^2 & xy & y - xz \end{vmatrix} = xy(xz - y).$$

Diese verschwindet nicht identisch, und also erfüllt unsere Gruppe [390
die gestellten Forderungen nicht.

36. Endlich müssen wir annehmen, daß die verkürzte Gruppe die Form:

(D) $$p,\; q,\; xq,\; x^2 q,\; xp + yq,\; x^2 p + 2xyq$$

besitzt. Wir suchen also die f_k so zu bestimmen, daß die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$X_1 f = p + f_1 r, \quad X_2 f = q + f_2 r, \quad X_3 f = xq + f_3 r,$$
$$X_4 f = x^2 q + f_4 r, \quad X_5 f = xp + yq + f_5 r, \quad X_6 f = x^2 p + 2xyq + f_6 r$$

eine Gruppe mit den gewünschten Eigenschaften erzeugen.

1) Betrachtet man die Gruppe $q,\, p,\, xq,\, yq,\, xp,\, x^2 p + xyq$ als eine Gruppe von Punkttransformationen der Ebene und erweitert diese durch Mitnahme der Größe:

$$z = \frac{dy}{dx},$$

so erhält man grade die Gruppe des Textes.

Wir erkennen wie früher, daß wir:

$$X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = xq + r$$

setzen können.

Sodann bilden wir die Gleichungen:

$$(p,\, x^2 q + f_4 r) = 2xq + \frac{\partial f_4}{\partial x} r,$$

$$(q,\, x^2 q + f_4 r) = \frac{\partial f_4}{\partial y} r,$$

$$(xq + r,\, x^2 q + f_4 r) = \left(x \frac{\partial f_4}{\partial y} + \frac{\partial f_4}{\partial z}\right) r,$$

welche zeigen, daß:

$$\frac{\partial f_4}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial f_4}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_4}{\partial z} = 0$$

und dementsprechend:

$$f_4 = 2x + a \qquad (a = \text{Const.})$$

und:

$$X_4 f = x^2 q + (2x + a) r$$

ist.

Zur Bestimmung von:

$$X_5 f = xp + yq + f_5 r$$

bilden wir die Gleichungen:

$$(q,\, xp + yq + f_5 r) = q + \frac{\partial f_5}{\partial y} r, \qquad |391$$

$$(p,\, xp + yq + f_5 r) = p + \frac{\partial f_5}{\partial x} r,$$

$$(xq + r,\, xp + yq + f_5 r) = \left(x \frac{\partial f_5}{\partial y} + \frac{\partial f_5}{\partial z}\right) r,$$

welche zeigen, daß:

$$\frac{\partial f_5}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_5}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_5}{\partial z} = 0$$

und $f_5 = A = \text{Const.}$ ist.

Nun aber ist:

$$(x^2 q + (2x + a) r,\, xp + yq + Ar) = -x^2 q - 2xr,$$

also ergibt sich $a = 0$ und:

$$X_4 f = x^2 q + 2xr, \quad X_5 f = xp + yq + Ar.$$

Übrig bleibt jetzt noch die Bestimmung der infinitesimalen Transformation:

$$X_6 f = x^2 p + 2xyq + f_6 r.$$

Es ist:

$$(p,\, x^2 p + 2xyq + f_6 r) = 2xp + 2yq + \frac{\partial f_6}{\partial x} r,$$

$$(q,\, x^2 p + 2xyq + f_6 r) = 2xq + \frac{\partial f_6}{\partial y} r,$$

$$(xq + r,\, x^2 p + 2xyq + f_6 r) = x^2 q + \left(x \frac{\partial f_6}{\partial y} + \frac{\partial f_6}{\partial z}\right) r,$$

$$(xp + yq + Ar,\, x^2 p + 2xyq + f_6 r) = x^2 p + 2xyq + \left(x \frac{\partial f_6}{\partial x} + y \frac{\partial f_6}{\partial y} + A \frac{\partial f_6}{\partial z}\right) r,$$

$$(x^2 q + 2xr,\, x^2 p + 2xyq + f_6 r) = \left(x^2 \frac{\partial f_6}{\partial y} + 2x \frac{\partial f_6}{\partial z} - 2x^2\right) r,$$

also kommt: [392

$$\frac{\partial f_6}{\partial x} = 2A, \quad \frac{\partial f_6}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial f_6}{\partial z} = 0,$$

$$x \frac{\partial f_6}{\partial x} + y \frac{\partial f_6}{\partial y} + A \frac{\partial f_6}{\partial z} = f_6,$$

$$x^2 \frac{\partial f_6}{\partial y} + 2x \frac{\partial f_6}{\partial z} - 2x^2 = 0.$$

Die drei ersten Gleichungen geben:

$$f_6 = 2Ax + 2y + B \qquad (B = \text{Const.}),$$

und wenn dieser Wert in die beiden letzten Gleichungen eingesetzt wird, ergibt sich, daß $B = 0$ und demnach:

$$X_6 f = x^2 p + 2xyq + (2Ax + 2y) r.$$

Die sechs infinitesimalen Transformationen:

$$\boxed{\begin{array}{c} q,\ p,\ xq + r,\ x^2 q + 2xr, \\ xp + yq + Ar,\ x^2 p + 2xyq + (2Ax + 2y) r \end{array}}$$

bestimmen eine Gruppe. Es fragt sich, ob diese die verlangten Eigenschaften besitzt.

37. Die drei ersten infinitesimalen Transformationen zeigen, daß der Koordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Derselbe bleibt in Ruhe bei den Transformationen:

$$xp + (y - Ax) q, \quad x^2 q + 2xr,$$

$$x^2 p + 2xyq + (2Ax + 2y) r,$$

deren Determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y - Ax & 0 \\ 0 & x^2 & 2x \\ x^2 & 2xy & 2Ax + 2y \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet, während die zugehörigen zweireihigen Unterdeterminanten nicht sämtlich null sind.

Bei unserer Gruppe findet also freie Beweglichkeit jedenfalls im weiteren Sinne des Wortes statt.

Die sechs infinitesimalen Transformationen sind sämtlich ver- [393
tauschbar mit der Transformation r; daher ist die Gruppe systatisch, das heißt, wenn ein Punkt festgehalten wird, so gibt es ∞^1 Punkte, die gleichzeitig in Ruhe bleiben.

In der Tat, der Punkt x_0, y_0, z_0 bleibt in Ruhe bei den infinitesimalen Transformationen:

$$(x - x_0)p + (y - y_0 - A(x - x_0))q,$$

$$(x - x_0)^2 q + 2(x - x_0)r,$$

$$(x^2 - x_0^2)p + (2x(y - y_0) - 2Ax_0(x - x_0))q +$$
$$+ (2A(x - x_0) + 2(y - y_0))r$$

und bei keiner davon unabhängigen. Bei diesen Transformationen bleiben aber gleichzeitig die unendlich vielen Punkte x_0, y_0, z sämtlich in Ruhe.

Bei unserer Gruppe findet also im engeren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit nicht statt.

Es ist auch jetzt unmöglich, einen Bereich des Raumes derart abzugrenzen, daß, wenn ein Punkt des Bereiches festgehalten wird, dann jeder andere Punkt des Bereiches ∞^2 verschiedene Lagen annehmen kann.

§ 5. Bestimmung aller Gruppen, deren verkürzte Gruppen fünfgliedrig sind.

38. Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung aller Gruppen von der verlangten Beschaffenheit, deren verkürzte Gruppen fünfgliedrig sind.

Wie schon früher bemerkt, muß die verkürzte Gruppe entweder die Form:

(E) $\quad q, p, xq, xp - yq, yp$

oder die Form:

(F) $\quad q, p, xq, 2xp + yq, x^2p + xyq$

besitzen. Es ist ja von vornherein klar, daß sie zum Beispiel nicht die Form:

$$q, yq, y^2q, p, xp$$

haben kann, weil bei dieser Gruppe die Geradenschar $x =$ Const. in- [394
variant bleibt, aber nur zweigliedrig transformiert wird.

39. Wir wollen zunächst alle sechsgliedrigen Gruppen von der Form:

$$fr, \; q + f_1 r, \; p + f_2 r, \; xq + f_3 r, \; xp - yq + f_4 r, \; yp + f_5 r$$

bestimmen.

Dabei können wir offenbar $f = 1$ setzen, sodaß wir zuerst die infinitesimale Transformation r erhalten.

Kombinieren wir nun r etwa mit $q + f_1 r$, so kommt:

$$(r, \; q + f_1 r) = \frac{\partial f_1}{\partial z} r$$

und also:

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = A_1 = \text{Const.}, \quad f_1 = A_1 z + \omega_1(x, y).$$

In genau derselben Weise erkennen wir, daß alle f_k die Form:

$$f_k = A_k z + \omega_k(x, y)$$

besitzen. Es ist aber leicht, einzusehen, daß alle A_k gleich Null sind. Bildet man nämlich zum Beispiel die Gleichung:

$$(q + (A_1 z + \omega_1)r, \; xp - yq + (A_4 z + \omega_4)r) =$$
$$= -q + \left(\frac{\partial \omega_4}{\partial y} + A_4 \omega_1 - x\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + y\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - A_1 \omega_4\right) r,$$

so sieht man, daß $A_1 = 0$ ist. Kombiniert man die übrigen infinitesimalen Transformationen mit:

$$xp - yq + (A_4 z + \omega_4)r,$$

so erkennt man, daß A_2, A_3 und A_5 gleich Null sind. Kombiniert man endlich $xq + (A_3 z + \omega_3)r$ mit $yp + (A_5 z + \omega_5)r$, so ergibt sich, daß auch A_4 gleich Null ist.

Wir müssen also jetzt die ω_k bestimmen und sie zugleich auf möglichst einfache Formen bringen.

40. Wählen wir einen geeigneten Ausdruck: $z + \omega(x, y)$ als [395
neues z, so erhält $q + \omega_1 r$ die Form q. Die Gleichung:

$$(q, \; p + \omega_2 r) = \frac{\partial \omega_2}{\partial y} r$$

zeigt sodann, daß:

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial y} = B = \text{Const.}$$

und also:

$$\omega_2 = By + X(x)$$

ist. Aber, indem wir einen geeigneten Ausdruck: $z+\varphi(x)$ als neues z einführen, können wir erreichen, daß X gleich Null wird. Hiermit sind die drei ersten infinitesimalen Transformationen auf die Form:

$$r,\ q,\ p+Byr$$

gebracht.

Ferner ist:

$$(q,\ xq+\omega_3 r) = \frac{\partial\omega_3}{\partial y} r,$$

und demnach wird:

$$xq+\omega_3 r = xq + (Ey+\varphi(x))r.$$

Nun aber ist:

$$(p+Byr,\ xq+(Ey+\varphi)r) = q + (\varphi' - Bx)r;$$

also wird:

$$\varphi' - Bx = C = \text{Const.}$$

und:

$$\varphi = \tfrac{1}{2} Bx^2 + Cx + D,$$

und endlich, da $D=0$ gesetzt werden kann:

$$xq+\omega_3 r = xq + (Ey + \tfrac{1}{2} Bx^2 + Cx)r.$$

Wird nun $z - Cy$ als neues z eingeführt, so behalten die drei Transformationen $r, q, p+Byr$ im wesentlichen ihre Form. Dagegen erhält $xq+\omega_3 r$ die einfachere Gestalt:

$$xq+\omega_3 r = xq+(Ey+\tfrac{1}{2} Bx^2)r.$$

Es ist weiter: [396

$$(q,\ xp-yq+\omega_4 r) = -q + \frac{\partial\omega_4}{\partial y} r$$

und also:

$$\frac{\partial\omega_4}{\partial y} = F = \text{Const.},\quad \omega_4 = F.y+\varphi(x).$$

Nun aber ist:

$$(p+Byr,\ xp-yq+(Fy+\varphi)r) = p + (\varphi'+By)r;$$

also ist $\varphi' = G =$ Const. und:

$$\varphi = Gx + G_1,$$

wo die Konstante G_1 ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Es ist daher:

$$X_5 f = xp - yq + (Fy+Gx)r.$$

Zur näheren Bestimmung der Konstanten bilden wir die Gleichung:

$$(xq+(Ey+\tfrac{1}{2} Bx^2)r,\ xp-yq+(Fy+Gx)r) =$$
$$= -2xq + (Fx+Ey-Bx^2)r,$$

welche zeigt, daß:

$$F=0,\quad E=0$$

sind, und daß unsere infinitesimalen Transformationen X_4f und X_5f die Form:

$$X_4 f = xq + \tfrac{1}{2} Bx^2 r,\quad X_5 f = xp - yq + Gxr$$

besitzen. Überdies leuchtet ein, daß die Konstante B von Null verschieden sein muß; denn sonst wären die Transformationen X_2f, X_4f durch die von vornherein ausgeschlossene Gleichung:

$$xX_2f - X_4f = 0$$

verknüpft. Führen wir daher $z:B$ als neues z ein, so erhalten die infinitesimalen Transformationen X_3f und X_4f die einfachere Form:

$$X_3f = p+yr,\quad X_4f = xq+\tfrac{1}{2} x^2 r.$$

Unsere Gruppe enthält somit die folgenden infinitesimalen Trans- [397
formationen:

$$r,\ q,\ p+yr,$$
$$xq+\tfrac{1}{2} x^2 r,\ xp-yq+Gxr,\ yp+\omega(x,y)r.$$

Hier können wir noch $z - Gx$ als neues z einführen, wir können also G ohne Beschränkung gleich Null setzen.

Es ist:

$$(q,\ yp+\omega r) = p + \frac{\partial\omega}{\partial y} r,$$
$$(p+yr,\ yp+\omega r) = \frac{\partial\omega}{\partial x} r,$$

also wird:

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = y+K,\quad \frac{\partial\omega}{\partial x} = H,$$

oder nach Wegwerfung einer unwesentlichen Integrationskonstanten:

$$\omega = \tfrac{1}{2} y^2 + Ky + Hx$$

und:

$$X_6 f = yp + (\tfrac{1}{2} y^2+Ky+Hx)r.$$

Nun aber ist:

$$(xp-yq,\ yp+(\tfrac{1}{2} y^2+Ky+Hx)r) = -2yp + (-y^2 - Ky + Hx)r,$$

also $K = 0$, $H = 0$, und mithin:

$$X_6 f = yp + \tfrac{1}{2} y^2 r.$$

Die hiermit gefundenen infinitesimalen Transformationen:

$$\boxed{\begin{array}{c} r,\ q,\ p + yr, \\ xq + \tfrac{1}{2} x^2 r,\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2} y^2 r \end{array}}$$

bilden eine Gruppe, die uns aus der Theorie der Berührungstransformationen wohlbekannt ist. Wir müssen untersuchen, ob diese die verlangten Eigenschaften besitzt.

41. Die drei Transformationen $q, r, p + yr$ zeigen, daß der [398 Koordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Dieser Punkt bleibt nun in Ruhe bei den infinitesimalen Transformationen:

$$xq + \tfrac{1}{2} x^2 r, \quad xp - yq, \quad yp + \tfrac{1}{2} y^2 r,$$

deren Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & \tfrac{1}{2} x^2 \\ x & -y & 0 \\ y & 0 & \tfrac{1}{2} y^2 \end{vmatrix}$$

identisch verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle null sind.

Bei unserer sechsgliedrigen Gruppe haben daher die beiden Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 wirklich eine und nur eine Invariante, und zwar, wie wir beiläufig bemerken, die folgende:

$$z_2 - z_1 - \tfrac{1}{2} (x_2 + x_1)(y_2 - y_1).$$

Bei unserer Gruppe findet daher freie Beweglichkeit jedenfalls in dem weiteren Sinne des Wortes statt. Wird ein Punkt x_1^0, y_1^0, z_1^0 von allgemeiner Lage festgehalten, so kann jeder andere Punkt von allgemeiner Lage ∞^2 verschiedene Lagen annehmen, und so weiter.

Aber es ist leicht, zu sehen, daß im engeren Sinne des Wortes keine freie Beweglichkeit stattfindet. Es folgt dies schon daraus, daß die infinitesimale Transformation r mit allen Transformationen unserer Gruppe vertauschbar, daß also unsere Gruppe systatisch ist.

In der Tat, der Punkt von allgemeiner Lage x_0, y_0, z_0 bleibt in Ruhe bei der dreigliedrigen Gruppe:

$$\begin{array}{l} \phantom{(x - x_0)p - {}} (x - x_0) q + \tfrac{1}{2}(x^2 - x_0^2) r, \\ (x - x_0) p - (y - y_0) q - x_0 (y - y_0) r, \\ (y - y_0) p \phantom{- (y - y_0) q -{}} + \tfrac{1}{2} (y - y_0)^2 r. \end{array}$$

Bei dieser bleiben aber offenbar ∞^1 Punkte, nämlich alle Punkte x_0, y_0, z in Ruhe.

Es ist daher unmöglich, einen Bereich derart abzugrenzen, daß, wenn ein Punkt des Bereiches festgehalten wird, dann jeder andere Punkt des Bereiches ∞^2 verschiedene Lagen annehmen kann.

Im engeren Sinne des Wortes findet somit bei un- [399 serer Gruppe keine freie Beweglichkeit statt.

42. Es bleibt jetzt nur noch übrig, anzunehmen, daß die verkürzte Gruppe $X_k f$ die Form:

(F) $$q, \ xq, \ p, \ 2xp + yq, \ x^2 p + xyq$$

besitzt.

Wir suchen daher jetzt alle Gruppen, welche die Form besitzen:

$$X_1 f = r, \quad X_2 f = q + f_2 r, \quad X_3 f = xq + f_3 r, \quad X_4 f = p + f_4 r,$$
$$X_5 f = 2xp + yq + f_5 r, \quad X_6 f = x^2 p + xyq + f_6 r.$$

Wie im vorigen Falle erkennen wir, daß alle f_k von z frei sind, und daß wir:

$$X_1 f = r, \ X_2 f = q, \quad X_4 f = p + Byr,$$
$$X_3 f = xq + (Ey + \tfrac{1}{2} Bx^2) r$$

setzen können.

Zur Bestimmung der infinitesimalen Transformation:

$$X_5 f = 2xp + yq + f_5 r$$

bilden wir die Gleichungen:

$$(q, \ 2xp + yq + f_5 r) = q + \frac{\partial f_5}{\partial y} r,$$
$$(p + Byr, \ 2xp + yq + f_5 r) = 2p + \left(\frac{\partial f_5}{\partial x} - By\right) r,$$

welche ergeben:

$$\frac{\partial f_5}{\partial y} = F = \text{Const.},$$
$$\frac{\partial f_5}{\partial x} - By = 2By + C.$$

Es leuchtet hier zunächst ein, daß $B = 0$ ist; ferner wird:

$$f_5 = Fy + Cx + D,$$

wo die Konstante D ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann.

Nun ist: [400

$$(xq + Eyr,\ 2xp + yq + (Fy + Cx)r) = -xq + (Fx - Ey)r,$$

also wird $F = 0$ und:

$$X_5 f = 2xp + yq + Cxr.$$

Zur Bestimmung der infinitesimalen Transformation:

$$X_6 f = x^2 p + xyq + \omega_6 r$$

bilden wir die Gleichungen:

$$(q,\ x^2p + xyq + \omega_6 r) = \qquad xq + \frac{\partial \omega_6}{\partial y} r,$$

$$(p,\ x^2p + xyq + \omega_6 r) = 2xp + yq + \frac{\partial \omega_6}{\partial x} r,$$

welche ergeben:

$$\frac{\partial \omega_6}{\partial y} = Ey + E_1, \quad \frac{\partial \omega_6}{\partial x} = Cx + C_1,$$

oder:

$$\omega_6 = \tfrac{1}{2} Ey^2 + \tfrac{1}{2} Cx^2 + E_1 y + C_1 x,$$

wo wir die Integrationskonstante ohne Beschränkung gleich Null gesetzt haben. Nun aber ist:

$$(xq + Eyr,\ x^2p + xyq + \omega_6 r) = \left(x \frac{\partial \omega_6}{\partial y} - Exy\right) r,$$

und demnach:

$$x \frac{\partial \omega_6}{\partial y} - Exy = K_2.$$

Wird hier der gefundene Wert von ω_6 eingesetzt, so kommt:

$$x(Ey + E_1) - Exy = K_2,$$

woraus $E_1 = K_2 = 0$ und:

$$X_6 f = x^2 p + xyq + (\tfrac{1}{2} Ey^2 + \tfrac{1}{2} Cx^2 + C_1 x) r.$$

Da die infinitesimalen Transformationen q und $xq + Eyr$ keine [401 lineare Relation erfüllen dürfen, so muß die Konstante E von Null verschieden sein. Indem wir $z : E$ als neues z einführen, erhält E den Wert 1, und unsere infinitesimalen Transformationen haben nunmehr die Form:

$$r,\ q,\ p,\ xq + yr,\ \ 2xp + yq + Cxr,$$

$$x^2p + xyq + (\tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{2} Cx^2 + C_1 x) r.$$

43. Die drei ersten zeigen, daß der Koordinatenanfang ein Punkt von allgemeiner Lage ist. Derselbe bleibt in Ruhe bei der dreigliedrigen Gruppe:

$$xq + yr,\ \ 2xp + yq + Cxr,$$

$$x^2p + xyq + (\tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{2} Cx^2 + C_1 x) r.$$

Die zugehörige Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 2x & y & Cx \\ x^2 & xy & \tfrac{1}{2} y^2 + \tfrac{1}{2} Cx^2 + C_1 x \end{vmatrix} = -2C_1 x^3$$

verschwindet bei der Substitution $C_1 = 0$, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null werden.

Die Gruppe:

$$r,\ q,\ p,\ xq + yr,\ \ 2xp + yq + Cxr,$$

$$x^2p + xyq + \tfrac{1}{2}(y^2 + Cx^2) r$$

besitzt somit jedenfalls im weiteren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit. Wird ein Punkt von allgemeiner Lage festgehalten, so kann jeder andere Punkt von allgemeiner Lage ∞^2 verschiedene Lagen annehmen, und so weiter.

Unsere Gruppe ist aber systatisch, da alle Transformationen derselben mit r vertauschbar sind. In der Tat, der Punkt von allgemeiner Lage x_0, y_0, z_0 bleibt in Ruhe bei der dreigliedrigen Gruppe:

$$(x - x_0) q + (y - y_0) r,$$

$$2(x - x_0) p + (y - y_0) q + C(x - x_0) r,$$

$$(x^2 - x_0^2) p + (xy - x_0 y_0) q + \tfrac{1}{2}(y^2 - y_0^2 + Cx^2 - Cx_0^2) r,$$

welche zu gleicher Zeit alle Punkte x_0, y_0, z invariant läßt.

Es ist daher unmöglich, im Raume einen solchen Bereich abzu- [402 grenzen, daß, wenn ein Punkt des Bereiches festgehalten wird, dann jeder andere Punkt desselben ∞^2 Lagen annehmen kann.

Im engeren Sinne des Wortes findet somit bei unserer Gruppe keine freie Beweglichkeit statt.

Die hier betrachtete Gruppe:

$$p,\ q,\ r,\ xq + yr,\ 2xp + yq + Cxr,$$

$$x^2p + xyq + \tfrac{1}{2}(y^2 + Cx^2) r$$

ist dadurch *merkwürdig, daß sie in der Umgebung des Punktes von allgemeiner Lage* $x = y = z = 0$ *eine infinitesimale Transformation enthält, die von* **zweiter** *Ordnung in* x, y, z *ist.*

Dieser Fall, den Herr v. *Helmholtz*, so viel ich sehe, unberechtigter Weise, von vornherein bei Seite läßt, kommt also wirklich vor.

§ 6. Die Gruppe der Bewegungen ist durch die freie Beweglichkeit vollständig charakterisiert.

44. Die vorangehenden Rechnungen liefern uns ein bemerkenswertes Resultat.

Die Gruppe der euklidischen Bewegungen und die Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen sind die einzigen Gruppen, bei denen im engeren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit stattfindet.

Verlangt man, daß es bei einer Gruppe des Raumes x, y, z *möglich sein soll, einen Bereich des Raumes derart abzugrenzen,*

daß, wenn ein Punkt des Bereiches festgehalten wird, dann **jeder** *andere Punkt desselben* ∞^2 *Lagen annehmen kann,*

daß ferner, wenn zwei Punkte des Bereiches festgehalten werden, dann jeder Punkt von allgemeiner Lage des Bereiches ∞^1 *verschiedene Lagen annehmen kann,*

daß endlich, wenn drei Punkte von allgemeiner Lage festgehalten werden, dann alle Punkte des Bereiches in Ruhe bleiben,

so besteht die Gruppe entweder aus allen Bewegungen des euklidischen Raumes, oder aus allen Bewegungen des nichteuklidischen Raumes.

Diese beiden Gruppen sind somit im dreifachen Raume die ein- [403
zigen, bei denen im engeren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit stattfindet.

45. In der Ebene steht die Sache anders; da gibt es (so kann eine Bemerkung des Herrn v. *Helmholtz* ausgesprochen werden) noch weitere dreigliedrige Gruppen, bei denen freie Beweglichkeit im engeren Sinne stattfindet, es sind das alle Gruppen von der Form:

$$p,\ q,\ xq - yp + c(xp + yq).$$

46. Wir haben gefunden, daß freie Beweglichkeit im *weiteren* Sinne des Wortes noch bei den folgenden Gruppen stattfindet:

$$\boxed{p,\ q,\ xp + r,\ yq + kr,\ x^2p + 2xr,\ y^2q + 2kyr}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} p,\ q,\ xq + r,\ x^2q + 2xr,\ xp + yq + Ar, \\ x^2p + 2xyq + (2Ax + 2y)r \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} r,\ q,\ p + yr,\ xq + \frac{1}{2}x^2r, \\ xp - yq,\ yp + \frac{1}{2}y^2r \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} p,\ q,\ r,\ xq + yr,\ 2xp + yq + Cxr, \\ x^2p + xyq + (\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}Cx^2)r \end{array}}$$

Wir müssen aber das erhaltene Resultat noch genauer präzisieren.

Wir haben bis jetzt nur bewiesen, daß, wenn bei einer reellen Transformationsgruppe des Raumes freie Beweglichkeit bloß im weiteren Sinne stattfindet, dann die Gruppe mit einer der vier soeben angeführten ähnlich ist. Hierbei ist aber wohl zu beachten, daß zwei reelle Gruppen durch eine *imaginäre Transformation* ähnlich sein können.

Es bleibt also noch übrig, alle reellen Gruppen des Raumes R_3 *zu finden, welche mit einer der vier gefundenen reellen Gruppen durch* **imaginäre** *Transformation ähnlich sind.*

47. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, alle *reellen Gruppen:* [404

$$Y_k f = \alpha_k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_k \frac{\partial f}{\partial y_1} + \gamma_k \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

zu finden, welche mit der reellen Gruppe:

$$p,\ q,\ xp + r,\ yq + kr,\ x^2p + 2xr,\ y^2q + 2kyr$$

durch imaginäre Transformation ähnlich sind.

Bei der vorgelegten Gruppe sind $x = \text{Const.}$ und $y = \text{Const.}$ invariante Flächenscharen. Gäbe es nun eine weitere invariante Flächenschar $\varphi(x, y, z) = a$, so müßte jede infinitesimale Transformation Xf der ursprünglichen Gruppe eine Relation von der Form:

$$X\varphi = \Omega(\varphi)$$

erfüllen. Es müßten also insbesondere Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \Omega_1(\varphi), \quad x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \Omega_2(\varphi), \quad x^2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 2x\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \Omega_3(\varphi)$$

bestehen; aus diesen folgt aber die Relation:

$$-x^2\Omega_1 + 2x\Omega_2 - \Omega_3 = 0,$$

welche zeigt, daß Ω_1, Ω_2 und Ω_3 sämtlich gleich Null sein müssen, sobald φ keine Funktion von x allein ist. Wären aber die drei Ω_k gleich Null, so käme:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

und es wäre φ eine Funktion von y allein.

Hiermit ist nachgewiesen, daß $x =$ Const. und $y =$ Const. die einzigen bei der vorgelegten Gruppe invarianten Flächenscharen $\varphi(x, y, z) = a$ sind.

Bestimmen daher die reellen infinitesimalen Transformationen $Y_k f$ eine mit der vorgelegten Gruppe (durch imaginäre Transformation) ähnliche reelle Gruppe, so müssen auch bei der Gruppe $Y_k f$ gerade zwei Flächenscharen invariant bleiben. Dieselben können aber reell oder konjugiertimaginär sein.

48. Sind die bei der Gruppe $Y_k f$ invarianten Flächenscharen [405
reell, so können wir annehmen, daß $x_1 =$ Const. und $y_1 =$ Const. die Gleichungen dieser invarianten Flächenscharen sind. Alsdann hat die imaginäre Transformation, welche die vorgelegte Gruppe auf die Form $Y_k f$ bringt, die Gestalt:

$$x_1 = X(x), \quad y_1 = Y(y), \quad z_1 = Z(x, y, z).$$

Die Gruppe $Y_k f$ besitzt somit die Form:

$$\alpha_k(x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_k(y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \gamma_k\frac{\partial f}{\partial z_1},$$

und es ist klar, daß die verkürzte Gruppe $\alpha_k(x_1)(\partial f : \partial x_1)$ bei der Transformation $x_1 = X(x)$ die Form p, xp, x^2p annimmt.

Nun aber geht aus meinen Untersuchungen über die Gruppen einer einfachen Mannigfaltigkeit ohne weiteres hervor, daß jede dreigliedrige [reelle] Gruppe $\alpha_k(x_1)p_1$ einer einfachen Mannigfaltigkeit x_1 durch eine reelle Transformation:

$$x_2 = R(x_1)$$

die Form p_2, x_2p_2, $x_2^2p_2$ erhalten kann. Entsprechendes gilt für die dreigliedrige Gruppe $\beta_k(y_1)q_1$.

Es ist daher möglich, in der reellen Gruppe:

$$\alpha_k(x_1)p_1 + \beta_k(y_1)q_1 + \gamma_k r_1 = Y_k f$$

durch reelle Substitution solche neue Veränderliche x_2, y_2 einzuführen, daß die Gruppe $Y_k f$ die Form:

$$(a_k + b_k x_2 + c_k x_2^2)p_2 + (a_k' + b_k' y_2 + c_k' y_2^2)q_2 + \omega_k' r_2$$

annimmt. Diese neue Gruppe enthält daher sechs Transformationen von der Form:

$$p_2 + f_2 r_2, \quad x_2p_2 + f_2 r_2, \quad x_2^2p_2 + f_3 r_2,$$
$$q_2 + f_4 r_2, \quad y_2q_2 + f_5 r_2, \quad y_2^2q_2 + f_6 r_2.$$

Dabei kann nach den früheren Entwickelungen (S. 383 ff. [hier S. 438 ff.]) die Veränderliche z_2 immer durch reelle Substitution derart gewählt werden, daß die sechs soeben geschriebenen Transformationen die Form:

$$q, \; p, \; yq + Cr, \; xp + r, \; x^2p + 2xr, \; y^2q + 2Cyr$$

annehmen.

Ist daher die reelle Gruppe: [406

$$q, \; p, \; xp + r, \; x^2p + 2xr, \; yq + kr, \; y^2q + 2kyr$$

durch **imaginäre** Transformation ähnlich mit einer reellen Gruppe $Y_k f$, welche zwei reelle Flächenscharen invariant läßt, so kann die Gruppe $Y_k f$ durch **reelle** Substitution die Form:

$$q_2, \; p_2, \; x_2p_2 + r_2, \; x_2^2p_2 + 2x_2r_2,$$
$$y_2q_2 + Cr_2, \; y_2^2q_2 + 2Cy_2r_2$$

erhalten.

49. Wir wenden uns jetzt zu dem Falle, daß die beiden bei der Gruppe $Y_k f$ invarianten Flächenscharen imaginär und natürlich konjugiertimaginär sind.

Wir können annehmen, daß die Flächenscharen durch die Gleichungen:

$$x_1 + iy_1 = a, \quad x_1 - iy_1 = b$$

dargestellt sind. Die Transformation, welche die vorgelegte Gruppe auf die Form $Y_k f$ bringt, hat dann die Form:

$$x = A(x_1 + iy_1), \quad y = B(x_1 - iy_1), \quad z = Z(x_1, y_1, z_1),$$

oder, wie wir ohne Beschränkung annehmen können, die Form:

$$x = x_1 + iy_1, \quad y = B(x_1 - iy_1), \quad z = Z(x_1, y_1, z_1);$$

dabei ist:

$$x_1 - iy_1 = R(y),$$

wo R eine gewisse reelle oder imaginäre Funktion von y bezeichnet. Durch Auflösung kommt also:

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + R(y)), \quad y_1 = \frac{1}{2i}(x - R(y)).$$

Ist:

$$\xi_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial z}$$

irgend eine Transformation der ursprünglichen Gruppe und:

$$\alpha_k(x_1, y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_k(x_1, y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \gamma_k(x_1, y_1, z_1)\frac{\partial f}{\partial z_1}$$ [407

die Form derselben in den Veränderlichen x_1, y_1, z_1, so ist:

$$\xi_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha_k(x_1, y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta_k(x_1, y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Insbesondere ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2i}\left(i\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\right)$$

oder, wenn wir die gewöhnliche Schreibweise anwenden:

$$p = \frac{1}{2i}(ip_1 + q_1),$$

$$xp = \frac{1}{2i}(x_1 + iy_1)(ip_1 + q_1),$$

$$x^2p = \frac{1}{2i}(x_1 + iy_1)^2(ip_1 + q_1).$$

Die verkürzte Gruppe $\alpha_k(x_1, y_1)p_1 + \beta_k(x_1, y_1)q_1$ enthält somit die Transformationen:

$$p_1 - iq_1, \quad x_1p_1 + y_1q_1 + i(y_1p_1 - x_1q_1),$$
$$(x_1^2 - y_1^2)p_1 + 2x_1y_1q_1 + i\{2x_1y_1p_1 - (x_1^2 - y_1^2)q_1\},$$

und als reelle Gruppe auch die konjugiertimaginären Transformationen; kurz die verkürzte Gruppe hat in den Veränderlichen x_1, y_1 die Form:

$$p_1, \quad q_1, \quad x_1p_1 + y_1q_1, \quad y_1p_1 - x_1q_1,$$
$$(x_1^2 - y_1^2)p_1 + 2x_1y_1q_1, \quad 2x_1y_1p_1 - (x_1^2 - y_1^2)q_1.$$

50. Um jetzt die allgemeinste Gruppe Y_kf zu finden, brauchen wir nur sechs Größen f_k derart zu bestimmen, daß die infinitesimalen Transformationen:

$$p + f_1r, \quad q + f_2r, \quad xp + yq + f_3r, \quad yp - xq + f_4r,$$
$$(x^2 - y^2)p + 2xyq + f_5r, \quad 2xyp + (y^2 - x^2)q + f_6r$$

eine Gruppe erzeugen.

Die Größen f_1 und f_2 können wie gewöhnlich ohne Beschränkung [408 gleich Null gesetzt werden. Nun ist:

$$(p,\ xp + yq + f_3r) = p + \frac{\partial f_3}{\partial x}r,$$

$$(q,\ xp + yq + f_3r) = q + \frac{\partial f_3}{\partial y}r;$$

also ist f_3 eine Funktion von z allein, die wir ohne Beschränkung gleich kz setzen können:

$$Y_3f = xp + yq + kzr.$$

Eine ganz ähnliche Rechnung zeigt, daß auch f_4 nur von z abhängt.

Wir kombinieren die beiden Transformationen:

$$yp - xq + Z(z)r, \quad xp + yq + kzr,$$

und finden so die Transformation:

$$k(Z - zZ')r,$$

welche identisch verschwinden muß.

Es ist andererseits:

$$(p,\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + f_5r) = 2xp + 2yq + \frac{\partial f_5}{\partial x}r,$$

$$(q,\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + f_5r) = -2(yp - xq) + \frac{\partial f_5}{\partial y}r$$

und also:

$$\frac{\partial f_5}{\partial x} = 2kz, \quad \frac{\partial f_5}{\partial y} = -2Z,$$

woraus:

$$f_5 = 2kxz - 2yZ + Z_1.$$

Ferner ist:

$$(xp + yq + kzr,\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + f_5r) =$$
$$= (x^2 - y^2)p + 2xyq + \left(x\frac{\partial f_5}{\partial x} + y\frac{\partial f_5}{\partial y} + kz\frac{\partial f_5}{\partial z} - kf_5\right)r,$$

woraus: [409

$$x\frac{\partial f_5}{\partial x} + y\frac{\partial f_5}{\partial y} + kz\frac{\partial f_5}{\partial z} - (k+1)f_5 = 0,$$

also:

$$x \,.\, 2kz - 2yZ + kz(2kx - 2yZ' + Z_1') -$$
$$- (k+1)\{2kxz - 2yZ + Z_1\} = 0,$$

und schließlich:

$$2k(zZ' - Z) = 0,$$
$$kzZ_1' - (k+1)Z_1 = 0.$$

Wir bilden ferner die Gleichungen:

$$(p,\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + f_6 r) = 2(yp - xq) + \frac{\partial f_6}{\partial x} r,$$
$$(q,\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + f_6 r) = 2(xp + yq) + \frac{\partial f_6}{\partial y} r,$$

welche:

$$\frac{\partial f_6}{\partial x} = 2Z,\quad \frac{\partial f_6}{\partial y} = 2kz$$

und:

$$f_6 = 2xZ + 2kzy + Z_2$$

geben. Nun ist:

$$(xp + yq + kzr,\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + f_6 r) =$$
$$= 2xyp + (y^2 - x^2)q + \left(x\frac{\partial f_6}{\partial x} + y\frac{\partial f_6}{\partial y} + kz\frac{\partial f_6}{\partial z} - kf_6\right)r;$$

also folgt:

$$x\frac{\partial f_6}{\partial x} + y\frac{\partial f_6}{\partial y} + kz\frac{\partial f_6}{\partial z} - (k+1)f_6 = 0,$$

und:

$$x \,.\, 2Z + y \,.\, 2kz + kz(2xZ' + 2ky + Z_2') -$$
$$- (k+1)\{2xZ + 2kzy + Z_2\} = 0,$$

woraus:

$$kzZ_2' - (k+1)Z_2 = 0.$$

Endlich bilden wir die Gleichung: [410

$$(yp - xq + Zr,\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + f_5 r) =$$
$$= 2xyp + (y^2 - x^2)q + \left(y\frac{\partial f_5}{\partial x} - x\frac{\partial f_5}{\partial y} + Z\frac{\partial f_5}{\partial z} - Z'f_5\right)r.$$

Durch Einsetzung des Wertes von f_5 erhalten wir hier die infinitesimale Transformation:

$$2xyp + (y^2 - x^2)q + (2kyz + 2xZ + ZZ_1' - Z_1Z')r,$$

welche zeigt, daß:

$$ZZ_1' - Z_1Z' = Z_2$$

ist. Ebenso wird: $ZZ_2' - Z_2Z' = -Z_1$.

51. Ist nun $k = 0$, so wird $Z_1 = Z_2 = 0$, und die Gruppe hat, da Z gleich 1 gesetzt werden kann, die Form:

$$q,\ p,\ xp + yq,\ yp - xq + r,$$
$$(x^2 - y^2)p + 2xyq - 2yr,$$
$$2xyp + (y^2 - x^2)q + 2xr.$$

Der Koordinatenanfang ist ein Punkt von allgemeiner Lage. Die zugehörige Determinante verschwindet, während ihre zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind. Diese Gruppe ist nur ein spezieller Fall der Gruppe, die wir nachher finden.

Ist dagegen k von Null verschieden, so ist $Z = mz$ und:

$$Z_1 = a_1 z^{\frac{k+1}{k}},\quad Z_2 = a_2 z^{\frac{k+1}{k}}.$$

Dabei sind die auftretenden Konstanten durch die Gleichungen:

$$ma_1 - ka_2 = 0,\quad ma_2 + ka_1 = 0$$

verknüpft.

Wären nun a_1 und a_2 nicht beide Null, so käme die Gleichung:

$$m^2 + k^2 = 0,$$

die sich nicht in reeller Weise befriedigen läßt.

Unsere infinitesimalen Transformationen haben daher, wenn noch z passend gewählt wird, die Form:

$$\boxed{\begin{aligned}&q,\ p,\ xp + yq + kr,\ yp - xq + mr,\\ &(x^2 - y^2)p + 2xyq + (2kx - 2my)r,\\ &2xyp + (y^2 - x^2)q + (2ky + 2mx)r.\end{aligned}}$$ [411

Der Koordinatenanfang ist ein Punkt von allgemeiner Lage. Dieser Punkt bleibt in Ruhe bei den infinitesimalen Transformationen:

$$m(xp + yq) - k(yp - xq),$$
$$(x^2 - y^2)p + 2xyq + (2kx - 2my)r,$$
$$2xyp + (y^2 - x^2)q + (2ky + 2mx)r.$$

Die zugehörige Determinante:

$$\begin{vmatrix} mx - ky & my + kx & 0 \\ x^2 - y^2 & 2xy & 2kx - 2my \\ 2xy & y^2 - x^2 & 2ky + 2mx \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, während die zweireihigen Unterdeterminanten nicht alle gleich Null sind.

Man beachte, daß die Annahme $k = 0$, $m = 1$ wieder die früher gefundene Gruppe liefert. Die Konstanten k und m dürfen nicht beide verschwinden, weil sonst die Gruppe nicht transitiv wäre: die eine von ihnen kann daher immer ohne Beschränkung gleich 1 gesetzt werden.

Es ist von vornherein klar, daß die gefundene Gruppe systatisch sein muß, und in der Tat übersieht man ohne weiteres, daß ihre Transformationen sämtlich mit r vertauschbar sind.

52. Wir suchen jetzt alle reellen Gruppen, welche durch eine imaginäre Transformation mit der Gruppe:

$$q,\ p,\ xq + r,\ x^2 q + 2xr,$$
$$xp + yq + Ar,\ x^2 p + 2xyq + (2Ax + 2y)r$$

ähnlich sind.

Bei dieser Gruppe bleibt die Flächenschar $x = \text{Const.}$ invariant. Zur Bestimmung der allgemeinsten invarianten Flächenschar $\varphi(x, y, z) = a$ bilden wir die Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \Omega_1(\varphi),$$ [412

$$x\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Omega_2(\varphi),$$

$$x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2x\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Omega_3(\varphi),$$

aus denen:

$$-x^2 \Omega_1 + 2x\Omega_2 - \Omega_3 = 0$$

hervorgeht; wäre nun φ keine Funktion von x, so käme:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0,$$

und demzufolge:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

sodaß φ doch nur von x abhinge. Es ist somit $x = \text{Const.}$ die einzige invariante Flächenschar.

Bei einer ähnlichen reellen Gruppe:

$$Y_k f = \xi_k p_1 + \eta_k q_1 + \zeta_k r_1$$

tritt ebenfalls eine einzige, offenbar reelle, Flächenschar auf; nehmen wir, wie wir können, an, daß diese durch $x_1 = \text{Const.}$ dargestellt wird, so besteht eine Gleichung $x_1 = W(x)$.

Es gibt eine und nur eine infinitesimale Transformation, nämlich r, welche mit allen Transformationen der vorgelegten Gruppe vertauschbar ist. Dementsprechend gibt es eine und nur eine, offenbar reelle, infinitesimale Transformation, welche mit allen $Y_k f$ vertauschbar ist. Wir können annehmen, daß diese infinitesimale Transformation auf die Form r_1 gebracht ist, sodaß eine Gleichung:

$$r = \text{Const.}\, r_1 = C r_1$$

besteht.

Hieraus geht nun hervor, daß der Zusammenhang zwischen den beiden Gruppen durch Gleichungen von der Form:

$$x_1 = W(x), \quad y_1 = \Psi(x, y), \quad z_1 = Cz + \Phi(x, y)$$

vermittelt wird.

53. Ist: [413

$$\xi_k(x_1)p_1 + \eta_k(x_1, y_1)q_1 + \zeta_k r_1$$

die Form der Transformationen $Y_k f$, so ist klar, einerseits, daß die verkürzte Transformation:

$$x_1 = W(x), \quad y_1 = \Psi(x, y)$$

die Gruppe $\xi_k(x_1)p_1 + \eta_k(x_1, y_1)q_1$ auf die Form:

$$q,\ xq,\ x^2 q,\ p,\ xp + yq,\ x^2 p + 2xyq$$

bringt, andererseits, daß die Transformation $x_1 = W(x)$ die Gruppe $\xi_k(x_1)p_1$ auf die Form p, xp, $x^2 p$ bringt.

Hieraus folgt nun, daß es möglich ist, eine solche reelle Funktion x_2 von x_1 einzuführen, daß die Gruppe $\xi_k(x_1)p_1$ die Form: p_2, $x_2 p_2$, $x_2^2 p_2$ annimmt.

Die verkürzte Gruppe $\xi_k(x_1)p_1 + \eta_k(x_1, y_1)q_1$ erhält hierdurch die Form:

$$\omega_1 q_1,\ \omega_2 q_1,\ \omega_3 q_1,$$
$$p_1 + \eta_1 q_1,\ x_1 p_1 + \eta_2 q_1,\ x_1^2 p_1 + \eta_3 q_1.$$

Dabei leuchtet ein, daß das Verhältnis je zweier Größen ω_k nur von x_1 abhängt.

Wir können uns nun durch reelle Substitution die Veränderliche y_1 derart gewählt denken, daß die drei ω_k nur von x_1 abhängen. Alsdann werden die η_k linear in y_1, und es ist überdies möglich, η_1 gleich Null zu setzen, während η_2 die Form:

$$\eta_2 = c_2 y_1 + \alpha_2(x_1) \qquad (c_2 = \text{Const.})$$

annimmt. Dabei ergibt es sich durch eine von mir öfter angewandte Methode, daß die Gruppe $\omega_k(x_1)q_1$ die Form:

$$q_1,\ x_1 q_1,\ x_1^2 q_1$$

besitzt. Schließlich geht in bekannter Weise hervor, daß die verkürzte Gruppe $\xi_k(x_1)p_1 + \eta_k q_1$ durch reelle Variabelnänderung die alte Form:

$$q,\ xq,\ x^2q,\ p,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq$$

annehmen kann.

Nunmehr erkennen wir, indem wir wie früher verfahren, daß es [414 möglich ist, eine solche reelle Funktion von x_1, y_1, z_1 als neues z_1 einzuführen, daß auch unsere Gruppe in x, y, z die alte Form:

$$q_1,\ p_1,\ x_1q_1 + r_1,\ x_1^2q_1 + 2x_1r_1,$$
$$x_1p_1 + y_1q_1 + A_1r_1,\ \ x_1^2p_1 + 2x_1y_1q_1 + (2A_1x_1 + 2y_1)r_1$$

annimmt. Auf die Frage, ob immer $A_1 = A$ wird, brauchen wir nicht einzugehen.

54. Wir fragen jetzt nach reellen Gruppen des Raumes, welche mit der Gruppe:

$$r,\ q,\ p + yr,\ xq + \tfrac{1}{2}x^2r,\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2}y^2r$$

durch imaginäre Transformation ähnlich sind.

Es gibt eine und nur eine infinitesimale Transformation, nämlich r, welche mit allen Transformationen der vorgelegten Gruppe vertauschbar ist.

Zu jeder ähnlichen reellen Gruppe:

$$Y_kf = \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_k \frac{\partial f}{\partial y_1} + \zeta_k \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

gehört daher ebenfalls eine und nur eine mit allen Y_kf vertauschbare infinitesimale Transformation. Da diese reell ist, können wir annehmen, daß sie die Form r_1 besitzt. Hieraus folgt, daß die Transformation, welche die Ähnlichkeit vermittelt, die Form:

$$x_1 = X(x, y),\quad y_1 = Y(x, y),\quad z_1 = Cz + \Phi(x, y),$$

und daß die Gruppe Y_kf die Form:

$$\xi_k(x_1, y_1)p_1 + \eta_k(x_1, y_1)q_1 + \zeta_k r_1$$

besitzt. Dabei bringt die verkürzte Transformation:

$$x_1 = X,\quad y_1 = Y$$

die verkürzte Gruppe:

$$\xi_k(x_1, y_1)p_1 + \eta_k(x_1, y_1)q_1$$

auf die Form: [415

$$q,\ p,\ xq,\ xp - yq,\ yp.$$

Ich habe nun gefunden, daß jede reelle Gruppe, welche überhaupt mit der Gruppe $q, p, xq, xp - yq, yp$ ähnlich ist, mit ihr durch eine reelle Transformation ähnlich ist. Es folgt dies ohne große Schwierigkeit aus der Bemerkung, daß $y'' = 0$ die einzige bei der vorgelegten Gruppe invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt.

In diesen Berichten habe ich ein Résumé meiner Reduktion aller reellen Gruppen einer Ebene auf kanonische Formen gegeben. Mein Schüler Herr Sulzberger, dem ich meine Resultate mitteilte, hat neuerdings in seiner Dissertation eine im allgemeinen befriedigende Ableitung derselben entwickelt.

Die Gruppe Y_kf kann daher durch reelle Substitution die Form annehmen:

$$r_1,\ p_1 + f_1r,\ q_1 + f_2r_1,\ x_1q_1 + f_3r_1,$$
$$x_1p_1 - y_1q_1 + f_4r_1,\ y_1p_1 + f_5r_1.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß jede reelle Gruppe des Raumes, welche mit der Gruppe:

$$r,\ q,\ p + yr,\ xq + \tfrac{1}{2}x^2r,\ xp - yq,\ yp + \tfrac{1}{2}y^2r$$

ähnlich ist, mit ihr durch reelle Substitution ähnlich ist.

Durch ganz analoge Betrachtungen erkennt man, daß jede mit der Gruppe:

$$p,\ q,\ r,\ xq + yr,\ 2xp + yq + Cxr,$$
$$x^2p + xyq + (\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}Cx^2)r$$

ähnliche **reelle** Gruppe mit ihr durch reelle Transformation ähnlich ist.

55. Hiermit sind alle reellen Gruppen des Raumes bestimmt, welche im weiteren oder engeren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit besitzen.

Während die Gruppe der euklidischen Bewegungen und die Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen des Raumes die einzigen sind, welche im engeren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit besitzen, gibt es fünf reelle Gruppen, welche im weiteren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit besitzen. Das sind die folgenden:

$$\boxed{p,\ q,\ xp + r,\ \ yq + kr,\ \ x^2p + 2xr,\ \ y^2q + 2kyr}$$ [416

$$\boxed{\begin{array}{l} q,\ p,\ xp + yq + kr,\ \ yp - xq + mr, \\ (x^2 - y^2)p + 2xyq + (2kx - 2my)r, \\ 2xyp + (y^2 - x^2)q + (2ky + 2mx)r \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} p,\ q,\ xq + r,\ x^2q + 2xr,\ xp + yq + Ar, \\ x^2p + 2xyq + (2Ax + 2y)r \end{array}}$$

$$\boxed{r,\ q,\ p + yr,\ \ xq + \tfrac{1}{2}x^2r,\ \ xp - yq,\ \ yp + \tfrac{1}{2}y^2r}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} p,\ q,\ r,\ xq + yr,\ \ 2xp + yq + Cxr, \\ x^2p + xyq + (\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}Cx^2)r. \end{array}}$$

56. Es ist mir nicht gelungen, die Untersuchungen dieser Abhandlung auf n Dimensionen zu übertragen. Ich glaube jedoch, daß diese Übertragung keine größere Schwierigkeit machen wird, wohlbemerkt, wenn man sich auf Gruppen beschränkt, bei denen im *engeren* Sinne des Wortes freie Beweglichkeit stattfindet.

Es muß möglich sein, für einen n-fach ausgedehnten Raum nachzuweisen, daß, wenn im engeren Sinne des Wortes (also ausnahmelos innerhalb eines Bereiches) freie Beweglichkeit stattfindet, daß dann auch im Infinitesimalen freie Beweglichkeit in dem Sinne meiner vorigen Abhandlung stattfindet. Daraus würde sich dann die Erledigung der gestellten Frage ohne weiteres ergeben.

Dagegen dürfte die Frage nach allen Gruppen des n-fachen Raumes, bei denen freie Beweglichkeit im weiteren Sinne des Wortes stattfindet, ziemlich schwierig zu erledigen sein. Diese Frage deckt sich mit der Frage nach allen Gruppen, bei denen q Punkte nur solche Invarianten haben, die sich aus den Invarianten [je] zweier Punkte ableiten lassen.

Ich bin im übrigen, ich wiederhole das, der Ansicht, daß die *freie Beweglichkeit im Infinitesimalen* die Gruppe der Bewegungen in der einfachsten Weise charakterisiert.

§ 7. Schlußbemerkungen. [417

57. Wir haben im vorangehenden darauf Gewicht gelegt, *alle* Gruppen des Raumes x, y, z zu bestimmen, bei denen q Punkte nur solche Invarianten besitzen, die sich aus Invarianten [je] zweier Punkte zusammensetzen lassen. Auf der anderen Seite wünschten wir möglichst wenig Sätze aus meiner allgemeinen Theorie der Transformationsgruppen als bekannt vorauszusetzen. Die natürliche Folge war, daß die vorangehende Untersuchung ziemlich weitläufig wurde.

Begnügen wir uns mit dem Hauptresultate, daß nur bei der Gruppe der Bewegungen freie Beweglichkeit *ausnahmelos* innerhalb eines Bereiches stattfindet, und benutzen wir überdies meine früheren Untersuchungen in größerer Ausdehnung, so können wir schneller zum Ziele kommen.

Wir wissen, daß, wenn eine von der Gruppe aller Bewegungen verschiedene Gruppe die verlangten Eigenschaften besitzt, daß dann mit jedem Punkte mindestens eine invariante Richtung verknüpft ist. Ist nun jedem reellen Punkte eine reelle Richtung zugeordnet, so existiert eine invariante Schar von ∞^2 reellen Kurven $u = a$, $v = b$. Wird dann ein Punkt festgehalten, so kann jeder Punkt der hindurchgehenden Kurve aus dieser Schar jedenfalls nur ∞^1 Lagen annehmen. In diesem Falle wäre es also unmöglich, einen Bereich des Raumes derart abzugrenzen, daß innerhalb desselben ausnahmelos freie Beweglichkeit stattfindet.

Wir können daher annehmen, daß mit jedem reellen Punkte eine imaginäre Richtung invariant verknüpft ist; dann bleibt auch die konjugiertimaginäre Richtung und gleichzeitig das durch beide gehende reelle Flächenelement in Ruhe; kurz, unsere Gruppe läßt eine reelle Gleichung von der Form:

$$Adx + Bdy + Cdz = 0$$

invariant.

58. Ist die soeben geschriebene Gleichung nicht integrabel, so läßt sich unsere Gruppe als eine Gruppe von Berührungstransformationen einer Ebene deuten, und zwar bleiben bei der betreffenden Gruppe von Berührungstransformationen zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung invariant. Oder noch einfacher, man kann unsere Gruppe des Raumes [418 als eine sechsgliedrige erweiterte Gruppe von Punkttransformationen einer Ebene auffassen, bei welcher eine Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant bleibt.

Nun aber gibt es nach meinen Untersuchungen über Differentialinvarianten nur eine sechsgliedrige Gruppe von Punkttransformationen der x, y-Ebene, nämlich die Gruppe:

$$p,\ q,\ xp,\ xq,\ yp,\ yq$$

(und die mit ihr dualistische Gruppe), welche eine Differentialgleichung zweiter Ordnung invariant läßt. Die zugehörige erweiterte Gruppe hat, wenn:

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = r$$

gesetzt wird, die Gestalt:

$$p,\ q,\ xq + r,\ \ xp - yq - 2zr,\ \ yp - z^2 r,\ \ xp + yq.$$

Zu dieser Gruppe gelangten wir auf S. 382 [hier S. 437]; bei ihr findet aber nicht einmal im weiteren Sinne des Wortes freie Beweglichkeit statt.

59. Die reelle invariante Gleichung:

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

ist somit sicher integrabel. Ist $\varphi(x, y, z)$ eine reelle Integralfunktion derselben, so kann φ als neues x eingeführt werden. Wird jetzt irgend ein reeller Punkt P fest gehalten, so bleibt die hindurchgehende Ebene: $x = C$ in Ruhe; diese Ebene wäre also eine der Pseudokugeln mit dem Mittelpunkte P. Nun aber liegt der Punkt P auf der betreffenden Kugel, er müßte also in jeden andern Punkt der Pseudokugel übergehen können, was nicht der Fall ist.

VIII.

Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. [106

Leipz. Ber. 1892, Heft I, abgeliefert 27. 4. 1892, S. 106–114.
Vorgelegt in der Sitzung vom 1. 2. 1892.

1. In meiner zweiten Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie (diese Berichte 1890, S. 355 ff. [hier Abh. VII]) habe ich gezeigt, daß im gewöhnlichen dreifach ausgedehnten Raume das sogenannte Monodromieaxiom des Herrn v. Helmholtz eine Folge von dessen drei ersten Axiomen ist, sobald man die Definition der freien Beweglichkeit, die Herr v. Helmholtz aufgestellt hat, in ihrem engsten Sinne faßt.[1])

Herr Veronese gibt nun in seinem neuerdings erschienenen Werke: Fondamenti di Geometria die wichtigsten Ergebnisse, zu denen ich bei meinen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie ge- [107
langt bin, ganz richtig wieder, insbesondere auch das soeben mitgeteilte Ergebnis über das Monodromieaxiom. Er fügt aber hinzu, bereits Herr de Tilly habe in seinem Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie eine ähnliche Behauptung aufgestellt, überdies habe Herr Klein später einen einfacheren Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung geliefert.

---

1) Ich hebe hier ausdrücklich hervor, daß die Definition der freien Beweglichkeit nach dem Wortlaute der Helmholtzschen Auseinandersetzungen in ihrem engsten Sinne verstanden werden muß. Herr v. Helmholtz verlangt nämlich erstens, daß zwei beliebige Punkte durch eine bei jeder Bewegung invariante Gleichung verknüpft seien, und zweitens, daß die Beweglichkeit eines jeden Punktes nur durch die Gleichungen beschränkt sei, die ihn mit den andern Punkten verknüpfen (s. Gött. Nachr. 1868, S. 198—200). Es ist daher sicher, daß Herrn v. Helmholtzs Monodromieaxiom eine Folge seiner andern Axiome ist, wenn man diese nach ihrem Wortlaute nimmt.

Es ist aber denkbar, daß seine Formulierung seine Meinung nicht ganz korrekt darstellt. An einer andern Stelle werde ich zeigen, daß nicht allein das Monodromieaxiom, sondern zugleich ein Teil des Axioms der freien Beweglichkeit überflüssig ist; es genügt anzunehmen, daß sich, nach dem Festhalten eines Punktes, jeder andere Punkt frei auf einer Fläche bewegt, welche den festen Punkt nicht enthält.

Ich werde zeigen, daß diese Darstellung des Herrn Veronese durchaus unrichtig ist.

Herr de Tilly hat gar nicht versucht, zu beweisen, daß das Monodromieaxiom eine Folge von Herrn v. Helmholtzs drei ersten Axiomen ist, er hat etwas Derartiges nicht einmal behauptet; dagegen hat er gezeigt, oder wenigstens zu zeigen versucht, daß das Monodromieaxiom überflüssig wird, wenn man jene drei ersten Axiome durch andere Axiome ersetzt.

Herr Klein seinerseits hat allerdings geglaubt, meinen Beweis durch einen ungleich einfacheren ersetzen zu können; aber sein Beweis beweist zu viel und ist infolgedessen nicht stichhaltig.

Ich werde im folgenden die eben aufgestellten Behauptungen näher begründen; außerdem werde ich noch mit ein paar Worten auf eine Stelle in Herrn Lindemanns „Vorlesungen über die Geometrie des Raumes" eingehen. Herr Lindemann erwähnt nämlich dort meine ältere Note: Bemerkungen zu v. Helmholtzs Arbeit, und so weiter (diese Berichte 1886, S. 337 ff. [hier Abh. V]), er hat aber nicht bloß diese meine Note, sondern auch die Helmholtzsche Arbeit mißverstanden.

2. Zunächst will ich zeigen, daß bei Herrn de Tilly die Helmholtzschen Axiome durch andere ersetzt sind.

Herr v. Helmholtz bestimmt ohne weiteres den Punkt des Raumes von n Dimensionen durch n Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$; sodann definiert er die Linie als den Ort aller Punkte, die $n-1$ unabhängige Gleichungen zwischen $x_1, \ldots, x_n$ erfüllen, die Fläche als den Ort aller Punkte, die $n-2$ unabhängige Gleichungen befriedigen, und so weiter. Die Bewegungen des Raumes faßt er auf als eine Schar von Transformationen der Punkte des Raumes, er denkt sie sich also bestimmt durch Glei- [108
chungen von der Form:

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r) \qquad (i=1, \ldots, n),$$

die gewisse Parameter $a_1, \ldots, a_r$ enthalten. Den Begriff der Entfernung führt er ein, indem er verlangt, daß zwischen je zwei Punkten $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ eine von der Lage der Punkte unabhängige Gleichung:

$$\Omega(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 0$$

bestehe, die bei allen Bewegungen invariant bleibt. Der Zahl n erteilt Herr v. Helmholtz später den bestimmten Wert: $n = 3$, und zwar ist diese Annahme bei ihm ein Axiom.

Ganz anders Herr de Tilly. Er definiert die Fläche als Grenze eines Raumteils, die Kurve als Grenze eines Flächenteils, den Punkt als Grenze eines Kurventeils. Er führt den Begriff „geschlossene Fläche" ein und sucht mit dessen Hilfe zu beweisen, daß der Punkt durch drei Koordinaten bestimmt ist. Er versucht also zu beweisen, was Herr v. Helmholtz als Axiom festsetzt.

3. Unter der Entfernung zweier Punkte versteht Herr de Tilly zunächst nur eine Größe, die durch die beiden Punkte bestimmt ist. Um den Begriff genauer festzustellen, denkt er sich zwei Punkte A und B durch eine Kurve verbunden und läßt sodann einen Punkt P diese Kurve von B aus in der Richtung nach A durchlaufen; er verlangt, daß sich dabei die Entfernung AP stetig ändere, immer positiv bleibe und gegen Null konvergiere.

Herr v. Helmholtz macht keine derartige Voraussetzung, daß die Entfernung zweier Punkte immer positiv bleibe und sich stetig mit den Koordinaten der beiden Punkte ändere. Diese Voraussetzung ist auch keineswegs in allen Fällen erfüllt. Zum Beispiel hat bei der Gruppe:

$$p,\ q,\ xp + r,\ yq + kr,\ x^2p + 2xr,\ y^2q + 2kyr$$

die Entfernung der beiden Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 den Wert:

$$\tfrac{1}{2}(z_1 + z_2) - l(x_2 - x_1) - k\,.\,l(y_2 - y_1),$$

und dieser Ausdruck wird stets unendlich, sobald die Verbindungs- [109
linie der Punkte mit der z-Achse parallel ist.

4. Herr v. Helmholtz setzt freie Beweglichkeit voraus, Herr de Tilly dagegen gar nicht[1]); er setzt nur Folgendes voraus: Hat man gewisse Punkte $A, B, C, D, \ldots$ und außerdem noch einen Punkt B', der so beschaffen ist, daß die Gleichung:

$$AB = AB'$$

besteht, so gibt es stets auch gewisse Punkte $C', D', \ldots$, die den Gleichungen:

$$\begin{aligned} AC &= AC', & AD &= AD', \\ BC &= B'C', & BD &= B'D', \\ CD &= C'D' & &\text{und so weiter} \end{aligned}$$

1) Allerdings könnte man aus den Anmerkungen, die Herr de Tilly unterm Texte macht, den Eindruck gewinnen, als ob auch er die freie Beweglichkeit als Axiom festsetzte; aus meinen folgenden Mitteilungen über seine Arbeit geht jedoch hervor, daß es sich anders verhält.

genügen. Von dieser Annahme aus versucht er das Vorhandensein der freien Beweglichkeit zu beweisen.

Herr de Tilly beweist, daß Kugeln mit verschiedenen Mittelpunkten verschieden sein müssen; aus dem Prinzipe der freien Beweglichkeit folgt das jedoch nicht, wie die vorhin angeführte Gruppe zeigt, bei der freie Beweglichkeit stattfindet.

Daß sich ein starrer Körper um zwei feste Punkte drehen kann, setzt Herr v. Helmholtz in seinem Axiome der freien Beweglichkeit ohne Beweis voraus. Herr de Tilly will es beweisen, was ihm allerdings nicht gelingt.

5. Augenscheinlich sind die Ausgangspunkte beider so verschieden, wie nur möglich. Es kann daher nicht überraschen, wenn Herr de Tilly beweist, daß bei der Drehung um zwei feste Punkte alle andern Punkte geschlossene Bahnkurven durchlaufen, während Herr v. Helmholtz dies als Axiom festsetzt; das eben ist ja sein Monodromieaxiom.

Alles in allem hat Herr de Tilly ganz sicher nicht bewiesen, daß das Monodromieaxiom eine Folge der drei ersten Helmholtzschen Axiome ist. Tatsache ist nur, daß Herr de Tilly, dessen Voraus- [110 setzungen von den Helmholtzschen grundverschieden sind, von seinen Voraussetzungen ausgehend die Helmholtzschen Axiome und insbesondere auch das Monodromieaxiom zu beweisen versucht. Hieran kann auch der Umstand nichts ändern, daß Herr de Tilly behauptet, er befinde sich in den meisten Punkten mit Herrn v. Helmholtz in Übereinstimmung, aber in zwei Punkten weiche er von ihm ab.[1])

Welche Axiome Herr de Tilly eigentlich zu Grunde legen will, ist aus seiner Arbeit schwer zu ersehen. Sicher ist nur, daß er von dem Prinzipe der freien Beweglichkeit bloß den ersten Teil voraussetzt, nämlich die Möglichkeit der Drehung um einen festen Punkt, während er dem Begriffe Entfernung Eigenschaften beilegt, welche Herr v. Helmholtz nicht voraussetzt.

6. Wenden wir uns jetzt zu Herrn F. Kleins Betrachtungen (s. Math. Ann. Bd. 37, S. 564 f.).

Herr Klein beginnt mit der Behauptung, das Monodromieaxiom stelle zunächst die Forderung, „daß volle Umdrehung um eine Achse möglich sei", es werde dadurch zum Beispiel der Raum mit indefinitem

1) Herr de Tilly sagt nicht, daß er nur in diesen beiden Punkten von Herrn v. Helmholtz abweiche; das würde auch den Tatsachen nicht entsprechen.

Bogenelemente ausgeschlossen. Dieser Teil des Axioms scheint Herrn Klein berechtigt.

Hiergegen muß man einwenden, daß auf dem Helmholtzschen Standpunkte der Begriff „volle Umdrehung um eine Achse" zunächst keinen bestimmten Sinn hat; einen wirklichen Sinn bekommt dieser Begriff erst dann, wenn man verlangt, daß jeder Punkt bei der Umdrehung um zwei feste Punkte eine geschlossene Kurve beschreibt, wenn man also das Helmholtzsche Monodromieaxiom in seinem vollen Umfange benutzt. Vielleicht versteht aber Herr Klein die Möglichkeit der vollen Umdrehung um eine Achse so: jedes Flächenelement kann sich um jedes in ihm enthaltene Linienelement drehen und kann durch Drehung ohne Umkehr in seine ursprüngliche Lage zurückkommen. In diesem Falle muß man Herrn Klein entgegenhalten, daß eine derartige Forderung im Monodromieaxiome keineswegs steckt; es könnte ja der Fall eintreten, daß die [111 infinitesimale Transformation, die zwei unendlich benachbarte Punkte in Ruhe läßt, von zweiter Ordnung wäre. Alsdann blieben alle Flächenelemente, welche die beiden festgehaltenen Punkte enthielten, in Ruhe. Ich habe an einem Beispiele gezeigt, daß dieser Fall wirklich eintreten kann, wenn man das Prinzip der freien Beweglichkeit in seinem weitern Sinne versteht.

7. Als zweiten Teil des Monodromieaxioms bezeichnet Herr Klein die Forderung, daß bei der Drehung um eine Achse alle Punkte geschlossene Bahnkurven beschreiben sollen. Diesen Teil des Axioms erklärt er für überflüssig, weil er beweisen zu können glaubt, daß überhaupt bei jeder Gruppe von ∞^1 Drehungen um eine Achse alle Punkte notwendig geschlossene Bahnkurven beschreiben.

Wären die Überlegungen, deren er sich hierbei bedient, richtig, so müßte zum Beispiel die eingliedrige Gruppe, die von der infinitesimalen Transformation:

$$\frac{\delta x}{y + cx} = \frac{\delta y}{-x + cy} = \frac{\delta z}{cz} = \delta t$$

erzeugt wird, geschlossene Bahnkurven haben, was augenscheinlich nicht der Fall ist. Herr Klein beweist also zuviel.

Ich kann unter diesen Umständen keineswegs zugeben, daß Herr Klein mein Ergebnis auf einfachere Weise abgeleitet habe. Es ist überhaupt sicher, daß man ganz anders tiefgehende Untersuchungen als die Herren v. Helmholtz und Klein angestellt haben, unternehmen muß, um diese Theorie zum Abschluß zu bringen.

8. Wenn übrigens Herr Klein die Ansicht ausspricht, ein Teil des Monodromieaxioms müsse aufrecht erhalten werden, um den Raum mit indefinitem Bogenelemente auszuschließen, so kann ich auch hierin ihm nicht beipflichten; die betreffenden Raumformen erfüllen nämlich das Prinzip der freien Beweglichkeit nicht. In einem Raume mit indefinitem Bogenelemente gehört ja zu jedem festgehaltenen Punkte O eine Kugel (eine reelle Kegelfläche), die durch ihren Mittelpunkt O (die Kegelspitze) hindurchgeht; ein von O verschiedener Punkt P dieser Kugel kann aber bei der Drehung um O nicht, wie es das Prinzip der freien Beweglichkeit verlangt, in alle andern Punkte der Kugel übergehen, denn er kann nicht nach O übergeführt werden. Ich muß daher auch fernerhin daran fest- [112 halten, daß das Monodromieaxiom aus den drei ersten Helmholtzschen Axiomen folgt, wohl bemerkt, wenn man diese ihrem Wortlaute nach versteht.

9. Endlich komme ich zu den Bemerkungen, die Herr Lindemann meiner ersten Note über den in Rede stehenden Gegenstand gewidmet hat.

Wenn Herr Lindemann ausführt, daß sich Herr v. Helmholtz ebenso wie Herr Lindemann selbst, auf projektive Gruppen beschränke, so tut er Herrn v. Helmholtz Unrecht. Es mag sein, daß dieser in seinen populären Vorträgen die gerade Linie als die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten bezeichnet hat — in seiner Abhandlung über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, gebraucht er jedenfalls keinen Ausdruck dieser Art; er denkt darin überhaupt gar nicht daran, zu verlangen, daß bei den Bewegungen gerade Linien in gerade Linien übergehen sollen.

Ferner irrt sich Herr Lindemann, wenn er behauptet, unter diesen Umständen werde mein Bedenken hinfällig, daß es nicht ohne weiteres erlaubt sei, die unendlich kleinen Bewegungen durch lineare Gleichungen darzustellen; denn selbst, wenn die Helmholtzsche Arbeit bloß projektive Transformationen in Betracht zöge, wäre es doch nicht von vornherein erlaubt, anzunehmen, daß unter den infinitesimalen Transformationen, die den Punkt: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ invariant lassen, keine aufträte, die bloß Glieder von zweiter Ordnung in $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ enthielte. Eine andere Sache ist es, daß infolge der von Herrn v. Helmholtz begangenen Fehler, seine Resultate faktisch nur für lineare (also nicht einmal für projektive) Gruppen erwiesen sind.

Mißverstanden hat mich Herr Lindemann endlich, wenn er mir die Äußerung zuschreibt, ich hätte es für wahrscheinlich erklärt, daß sich die Forderung, der Kreis solle eine geschlossene Kurve sein, aus den übrigen Helmholtzschen Axiomen als Folgerung ergäbe, und wenn er

hinzufügt, daß meine Vermutung für die parabolische Geometrie unzutreffend sei.

Beschränkt man sich auf die Ebene, so unterliegt es keinem Zweifel, daß man die Forderung: der Kreis soll eine geschlossene Kurve sein, als Axiom aufstellen muß. Faßt man dagegen die Ebene als einen Teil [113 des dreifach ausgedehnten Raumes auf, so liegt die Sache anders: das Monodromieaxiom ist in diesem Falle überflüssig, sobald man das Helmholtzsche Prinzip der freien Beweglichkeit nach seinem Wortlaute deutet.

10. Um nicht mißverstanden zu werden, füge ich noch das Folgende hinzu:

Meine Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie sind vielfach mißverstanden worden. Um solchen Mißverständnissen in der Zukunft zu entgehen und einmal die noch schwebenden Fragen zur Entscheidung zu bringen, habe ich in dieser Note versucht, mich möglichst präzis auszudrücken.

Wenn ich bei berühmten Verfassern wesentliche Irrtümer gefunden habe, so habe ich dies ganz offen gesagt. Dies darf nicht mißverstanden werden.

Wenn ich zum Beispiel jetzt offen sage, daß Herr v. Helmholtz in seiner viel besprochenen Note die Aufgabe, die er sich gestellt hat, nicht erledigt hat, da seine Entwickelungen keineswegs zeigen, daß seine Axiome hinreichen, während auf der anderen Seite sein Monodromieaxiom und sogar ein Teil seines Prinzips der freien Beweglichkeit eine Folge seiner anderen Axiome ist, so hege ich doch fortwährend große Bewunderung für eben diese seine Arbeit, ja ich betrachte sie gewissermaßen als bahnbrechend.

Auf der anderen Seite muß ich gestehen, daß Herrn de Tillys unzweifelhaft sehr wertvolle Untersuchungen mir nicht ganz präzis erscheinen, weil sie mit komplizierten Begriffen operieren, deren Sinn mir zuweilen unklar ist.

Bei einer neuen Redaktion meiner Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie werde ich den Nachweis, daß bei den von mir betrachteten Beispielen freie Beweglichkeit im weiteren Sinne stattfindet, wirklich durchführen.

11. Bei dieser Gelegenheit will ich noch einige Bemerkungen über Herrn Schurs Untersuchungen über Transformationsgruppen hinzufügen.

Ich habe schon mehrmals anerkannt, daß seine Arbeiten auf diesem Gebiete Wert haben; ich muß aber jetzt hervorheben, daß er die Beziehungen seiner Untersuchungen zu den meinigen nach meiner Ansicht nicht korrekt wiedergegeben hat.

Einmal kann ich nicht anerkennen, daß seine Entwickelungen [114 eine wesentliche Vereinfachung der Grundlagen meiner Theorie liefern, zumal, da alle seine Entwickelungen unter einem, seinerzeit von Herrn Prof. Engel bemerkten, an der Spitze seiner ersten Arbeit begangenen Fehler leiden.

Andererseits muß ich bemerken, daß seine Verweisungen fast ohne Ausnahme entweder unbestimmt oder unkorrekt sind. Endlich möchte ich an Herrn Schur die Bitte richten, in Zukunft nicht bloß seine eigenen Beweise meiner Sätze zu zitieren, sondern jedenfalls gleichzeitig zu bemerken, daß die Sätze von mir herrühren.

IX.

Sur les fondements de la Géométrie. [461

Comptes Rendus Bd. 114, S. 461—463, Paris 1892; vorgelegt in der Sitzung vom 29. 2. 1892.

1. Dans plusieurs Mémoires publiés dans les Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. (Leipzig, 1886, 1890 [hier Abh. V, VI, VII]), j'ai déjà montré que les recherches si remarquables de M. v. Helmholtz (Göttinger Nachrichten, 1868) sur les fondements de la Géométrie contiennent une faute essentielle et j'ai cherché, d'autre part, à substituer, au lieu des considérations incorrectes de l'illustre physicien, des développements qui sont, du moins, exacts quant au fond.

En raison de ma grande admiration pour ces recherches de M. v. Helmholtz, je n'ai pas, sans doute, insisté suffisamment sur la faute commise. En effet, des travaux récents de différents mathématiciens montrent assez clairement qu'ils n'ont pas compris la portée de mes remarques. Maintenant[1]) un grand Mémoire récent de M. Killing (Journal de Crelle) qui traite du même problème contient à peu près la même faute fondamentale que le travail de M. v. Helmholtz. Il me semble donc nécessaire d'élucider encore plus clairement les fautes commises, pour ne plus laisser place à aucun doute.

2. Je résume d'abord brièvement les axiomes II, III et IV de la [462 Note de M. v. Helmholtz.

M. v. Helmholtz cherche à déterminer tous les groupes continus en les variables x, y, z, pour lesquels deux points ont un invariant et un seul. Il suppose, de plus, la liberté du mouvement quand un ou deux points sont fixes. Enfin il demande qu'un corps tournant autour de deux points fixes puisse reprendre sa position initiale sans changement de sens du mouvement (Umkehr).

1) Parmi les travaux qui traitent du problème posé par M. v. Helmholtz, je crois que mes propres recherches et une Note de M. Poincaré, qui se borne, au reste, à l'espace à deux dimensions, sont les seules qui emploient des méthodes exactes, savoir les méthodes de la théorie des groupes continus. M. Killing emploie aussi ces méthodes, mais d'une manière inexacte.

Un tel groupe contient, d'après mes principes généraux, six transformations infinitésimales qu'on pourra supposer développables suivant les puissances de x, y, z. On peut même choisir ces transformations, de telle manière que ces développements soient de la forme:

$$(\mathrm{G})\quad \begin{cases} p+\cdots,\quad q+\cdots,\quad r+\cdots, \\ (a_k x+b_k y+c_k z)p+(d_k x+e_k y+f_k z)q+(h_k x+l_k y+m_k z)r+\cdots \\ \qquad (k=1,2,3) \end{cases}$$

aux termes d'ordre supérieur près.

3. Maintenant les transformations linéaires infinitésimales:

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} p,\quad q,\quad r, \\ (a_k x+b_k y+c_k z)p+(d_k x+e_k y+f_k z)q+(h_k x+l_k y+m_k z)r, \end{cases}$$

obtenues en supprimant les termes d'ordre supérieur, forment aussi un groupe, groupe linéaire qui joue un assez grand rôle dans mes recherches. Ce nouveau groupe Γ a certaines propriétés communes avec le groupe G, mais ces deux groupes se distinguent évidemment par d'autres propriétés non communes.

Il n'est donc nullement permis, comme le font MM. v. Helmholtz et Killing, d'admettre sans démonstration que deux points ont le même nombre d'invariants par rapport aux groupes G et Γ. Il est même facile de se convaincre que ces deux nombres ne coïncident pas toujours.

Prenons, par exemple, le groupe:

$$q,\ xq+r,\ \ x^2q+2xr,\ \ x^3q+3x^2r,\ \ p,\ xp-zr;$$

dans ce cas, deux points n'ont pas d'invariant; au contraire, pour le groupe linéaire correspondant:

$$q,\ r,\ xr,\ p,\ xp-zr,$$

deux points ont l'invariant y_2-y_1.

Considérons, d'autre part, le groupe:

$$q,\ xq+r,\ \ x^2q+2xr,\ \ x^3q+3x^2r,\ \ x^4q+4x^3r,\ p,$$

et l'invariant unique x_2-x_1 de deux points; pour le groupe linéaire correspondant, deux points ont deux invariants differents, [463
y_2-y_1 et x_2-x_1.

4. Le travail de M. v. Helmholtz contient encore deux fautes analogues.[1]) D'abord on ne peut admettre que si le groupe G comporte la

liberté du mouvement, il en soit nécessairement de même pour le groupe linéaire Γ. En effet pour le groupe:

$$q,\ p,\ xq+r,\ \ x^2q+2xr,\ \ xp+yq+Ar,\ \ x^2p+2xyq+(2Ax+2y)r,$$

il y a liberté du mouvement; or cela n'a pas lieu pour le groupe linéaire correspondant, qui ne contient que cinq transformations infinitésimales.

Enfin, M. v. Helmholtz se trompe en admettant que son axiome de monodromie est rempli en même temps pour un groupe G et pour le groupe linéaire Γ. Cela résulte bien clairement de l'exemple très instructif du groupe suivant:

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{cases} q,\ xp+yq+r,\ \ (x^2-y^2)p+2xyq+2xr, \\ \quad p,\ yp-xq,\qquad 2xyp+(y^2-x^2)q+2yr. \end{cases}$$

Pour ce groupe, l'axiome de monodromie est rempli, car un corps tournant autour de deux points fixes reprend sa position initiale sans retournement; au contraire, pour le groupe linéaire correspondant, l'axiome de monodromie n'est pas rempli. J'ajoute que pour le groupe (D) tous les axiomes de M. v. Helmholtz sont remplis pour des points qui ont l'un par rapport à l'autre une position générale.

5. Les remarques précédentes, montrent d'une manière décisive que les développements de M. v. Helmholtz, quoique très intéressants, contiennent néanmoins des fautes irréparables.

Il est possible, je m'empresse de le dire, d'interpréter ses axiomes d'une telle manière que son résultat reste juste, du moins pour l'espace ordinaire. Or cela montre seulement qu'il est quelquefois plus facile d'énoncer un théorème exact que le démontrer. La théorie des groupes continus, quoique nouvelle, en présente déjà beaucoup d'exemples.

1) Des trois fautes dont nous parlons, M. Killing ne commet que la première. Mais il me semble que cet auteur commet d'autres fautes essentielles. D'autre part, il ne remarque pas qu'un certain „Gebilde", dont il parle (p. 161), pourra se réduire à un point; d'autre part, il admet, sans démonstration exacte, que le groupe linéaire Γ contienne des transformations infinitésimales qui changent seulement deux variables.

On peut ajouter que l'auteur emploie la notion „systatique" d'une manière inexacte.