II.

Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. [331

I. Projektivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen.

Math. Ann. Bd. XIV, Heft 3, S. 331—416, ausgeg. 13. 2. 1879.

Nach den bahnbrechenden Arbeiten von Monge und Lagrange ist die Theorie der Minimalflächen bekanntlich von einer großen Anzahl von Mathematikern behandelt worden. Indem ich mir erlaube, in der nachstehenden und einigen weiteren Abhandlungen einige neue Beiträge zu dieser interessanten Theorie zu liefern, beschränke ich mich darauf, diejenigen früheren Untersuchungen zu nennen, die die nächste Veranlassung zu meinen eigenen Bestrebungen gewesen sind.[1])

Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integralflächen Minimalflächen sind, wurde von Lagrange aufgestellt, und darnach von Monge integriert. Nach der Natur der Sache war Monges allgemeines Integral mit Imaginären behaftet, und daher gelang es lange nur, ganz partikuläre reelle Minimalflächen zu finden. Erst Bonnet gab eine allgemeine Methode zur Auffindung aller reellen Minimalflächen, und gleichzeitig eine Methode zur Bestimmung von beliebig vielen reellen algebraischen Minimalflächen.

Weierstraß gab später eine erschöpfende und elegante Methode zur Auffindung aller reellen algebraischen Minimalflächen. Zugleich stellte er die Aufgabe, alle Minimalflächen gegebener Klasse zu bestimmen. — Hiermit war also die Aufmerksamkeit insbesondere auf die algebraischen Minimalflächen gelenkt worden.

Im folgenden versuche ich, eine allgemeine projektivische Theorie der algebraischen Minimalflächen zu entwickeln. Ich gebe

1) Eine ausführliche Angabe der hierher gehörigen Literatur findet man in den folgenden Abhandlungen: Riemann, Abhandlungen der Gesellschaft d. W. zu Göttingen, Bd. 13; Beltrami, Memorie ... di Bologna, Serie II, Tomo 7, 1868; Schwarz, Crelle-Borchardts Journal, Bd. 80. Unter den neuesten Arbeiten über diesen Gegenstand erlaube ich mir die Aufmerksamkeit auf einige schöne Sätze von Herrn Henneberg zu lenken. (Vergleiche seine Dissertation, Zürich 1875, und Annali di Matematica, Bd. 9.)

bemerkenswerte Methoden zur Bestimmung von Klasse und Ordnung [332 einer beliebigen Minimalfläche. Ich beschäftige mich mit der Bestimmung aller reellen Minimalflächen von gegebener Klasse, oder von gegebener Ordnung. Es gelingt mir zum Beispiel, die Gleichung einer jeden Minimalfläche, deren Klassenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist, anzugeben. Ich vervollständige Geisers schöne Untersuchungen über die unendlich entfernten Punkte einer Minimalfläche, und so weiter.

In meiner nächsten Abhandlung über Minimalflächen entwickele ich einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Krümmungstheorie aller algebraischen Raumkurven und der Theorie aller algebraischen Minimalflächen, die in eine vorgelegte algebraische Developpable eingeschrieben sind.

In meinen beiden ersten, wie auch in meinen späteren Arbeiten über Minimalflächen werde ich gelegentlich die Theorie der Berührungstransformationen für die Theorie der Minimalflächen verwerten.

Ich hege überhaupt die Hoffnung, daß meine Untersuchungen dazu dienen werden, die Theorie der Minimalflächen in höherem Grade als früher geschehen war, einer synthetischen Behandlung zugänglich zu machen.[1])

Nach dem Vorgange von Riemann und Weierstraß untersucht man jetzt häufig eine reelle Minimalfläche, indem man ihre reellen Punkte in der bekannten Weise auf die reellen Punkte einer $(x+iy)$-Ebene bezieht. So schön, einfach und fruchtbar diese Methode auch sein mag, so scheint es mir doch eine Unvollkommenheit derselben zu sein, daß sie nur die reellen Punkte der reellen Minimalflächen in Betracht zieht. Obgleich ich daher den bleibenden Wert der Riemann-Weierstraßischen Methode unbedingt anerkenne, wage ich doch zu glauben, daß es nützlich sein wird, Methoden zu entwickeln, die nicht allein die reellen, sondern auch die imaginären Punkte der Minimalflächen berücksichtigen.

1) In einer Abhandlung im Bd. II der Zeitschrift „Archiv for Mathematik og Naturvidenskab", Christiania [1877, d. Ausg. Bd. I, Abh. XVII], habe ich mich schon mit Untersuchungen über Ordnung und Klasse der Minimalflächen beschäftigt. Im Texte wird ein Fehler jener Arbeit korrigiert. (Vergleiche den letzten Paragraphen dieser Arbeit.)

§ 1. Über die Flächen, die in zweifacher Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden können.

Unter den Flächen, die sich folgendermaßen darstellen lassen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = A(t) + A_1(\tau), \\ y = B(t) + B_1(\tau), \\ z = C(t) + C_1(\tau), \end{cases}$$

befinden sich, wie wir später nach Monge zeigen werden, insbesondere alle Minimalflächen, die keine imaginären Developpablen sind. Ich habe gefunden, daß eine große Anzahl Eigenschaften der Minimalflächen überhaupt allen Flächen zukommt, die die Gleichungsform (1) besitzen. Daher finde ich es zweckmäßig, zunächst die allgemeine Flächenkategorie zu betrachten, die durch die Gleichungen (1) definiert wird. [333

1. Ich nehme zwei Kurven[1]) c_0 und $\varkappa_0$, die einen Punkt p_0 gemein haben, und verschiebe c_0 parallel mit sich selbst derart, daß p_0 die Kurve $\varkappa_0$ durchläuft. Hierbei beschreibt ein beliebiger auf c_0 gelegener Punkt eine Kurve $\varkappa$, die mit $\varkappa_0$ kongruent und gleichgestellt ist. Infolgedessen kann die von der beweglichen Kurve c erzeugte Fläche zugleich durch Translationsbewegung der Kurve $\varkappa$ erzeugt werden. Also:

Satz 1. Kann eine Fläche in einer Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden, so gestattet sie noch eine solche Erzeugung.

Es ist leicht, zu erkennen, daß sich die hiermit definierten Flächen auch dadurch charakterisieren lassen, daß sie die Gleichungsform (1) besitzen. Es seien in der Tat:

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

die Gleichungen der Kurve c_0, und ebenso seien:

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

die Gleichungen der Kurve $\varkappa_0$. Dabei werden wir der Einfachheit wegen annehmen, daß der Koordinatenanfangspunkt der gemeinsame Punkt p_0

1) Wenn ich von Kurven spreche, so verstehe ich darunter den Inbegriff aller Wertsysteme x, y, z, die durch zwei Gleichungen: $f = 0$, $\varphi = 0$ bestimmt werden. Dabei nehme ich wie gewöhnlich an, daß f und φ Reihenentwickelungen sind, die innerhalb eines gewissen Bereiches konvergieren.

unserer beiden Kurven ist. Unter diesen Voraussetzungen stellen die Gleichungen:

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau)$$

offenbar eine Fläche dar, die durch Translationsbewegung sowohl von c_0 wie von $\varkappa_0$ erzeugt werden kann. Gibt man dem Parameter τ sukzessiv verschiedene konstante Werte, so erhält man auf der Fläche gelegene Kurven c, die mit c_0 kongruent und gleichgestellt sind. Gibt man andererseits dem Parameter t konstante Werte, so erhält man auf der Fläche gelegene Kurven $\varkappa$, die mit $\varkappa_0$ kongruent und gleichgestellt sind.

2. Die Flächenfamilie (1) gestattet eine andere einfache geometrische Erzeugung, die allerdings mit der soeben vorgetragenen in genauester Verbindung steht. [334

Ich betrachte die beiden Kurven:

$$(2)\qquad x_1 = 2A(t), \quad y_1 = 2B(t), \quad z_1 = 2C(t)$$

und:

$$(3)\qquad x_2 = 2A_1(\tau), \quad y_2 = 2B_1(\tau), \quad z_2 = 2C_1(\tau)$$

und verbinde einen beliebigen Punkt x_1, y_1, z_1 der ersten Kurve durch eine Gerade mit einem beliebigen Punkte x_2, y_2, z_2 der zweiten Kurve. Ich suche den Mittelpunkt:

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

dieser beiden Punkte. Der Ort dieser Mittelpunkte ist offenbar die Fläche:

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau).$$

Nimmt man einen bestimmten Punkt x_1, y_1, z_1 und läßt dagegen den Punkt x_2, y_2, z_2 die Kurve (3) durchlaufen, so beschreibt der Mittelpunkt eine Kurve $\varkappa$.

Diese zweite geometrische Erzeugung wird in dieser ersten Abhandlung keine Rolle spielen, während sie den Ausgangspunkt meiner nächsten Arbeit über Minimalflächen bilden soll.

3. Konstruiert man in einem beliebigen Punkte einer Fläche, die die Gleichungsform (1) besitzt, die Tangente an die hindurchgehende Kurve c und zugleich die Tangente an die hindurchgehende Kurve $\varkappa$, so liegen diese beiden Geraden, wie jetzt gezeigt werden soll, harmonisch hinsichtlich der beiden Haupttangenten.

Man nehme in der Tat zwei benachbarte Kurven c und zugleich zwei benachbarte Kurven $\varkappa$. Diese vier Kurven bestimmen nach unseren früheren Entwickelungen ein infinitesimales auf der Fläche gelegenes Parallelogramm, dessen Seiten infinitesimale Strecken der vier Kurven sind. Hieraus folgt, daß je zwei zusammenstoßende Seiten des Parallelogramms im Dupinschen Sinne konjugierte Gerade sind. Also:

Satz 2. In jedem Punkte unserer Fläche bestimmen die hindurchgehenden Kurven c und $\varkappa$ zwei Richtungen, die zu den zugehörigen Haupttangenten harmonisch liegen.

Einen analytischen Beweis dieses fundamentalen Satzes erhält man folgendermaßen.

In jedem nicht singulären Punkte unserer Fläche bilden die Fortschreitungsrichtungen dx, dy, dz ein ebenes Büschel:

$$(4)\qquad \begin{cases} dx = A'(t)dt + A_1'(\tau)d\tau, \\ dy = B'(t)dt + B_1'(\tau)d\tau, \\ dz = C'(t)dt + C_1'(\tau)d\tau, \end{cases}$$ [335

das in der Tangentenebene gelegen ist. Durch Elimination von dt und $d\tau$ kommt die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} dx & A'(t) & A_1'(\tau) \\ dy & B'(t) & B_1'(\tau) \\ dz & C'(t) & C_1'(\tau) \end{vmatrix} = 0,$$

die als Gleichung der Tangentenebene aufgefaßt werden kann. Dementsprechend ist:

$$\begin{vmatrix} dx & A'+A''dt & A_1'+A_1''d\tau \\ dy & B'+B''dt & B_1'+B_1''d\tau \\ dz & C'+C''dt & C_1'+C_1''d\tau \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung der Tangentenebene in einem benachbarten Punkte. Ich verlange, daß die Verbindungsgerade unserer beiden benachbarten Punkte eine Haupttangente sein soll, das heißt, daß diese Verbindungsgerade die Schnittlinie der beiden benachbarten Tangentenebenen ist. Unsere Forderung kommt darauf hinaus, daß die beiden letzten Gleichungen durch dasselbe Wertsystem dx, dy, dz befriedigt werden, und findet daher ihren analytischen Ausdruck in der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} dx & A''dt & A_1' \\ dy & B''dt & B_1' \\ dz & C''dt & C_1' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dx & A' & A_1''d\tau \\ dy & B' & B_1''d\tau \\ dz & C' & C_1''d\tau \end{vmatrix} = 0,$$

wenn man in derselben dx, dy, dz durch ihre Werte (4) ersetzt. In dieser Weise ergibt sich als Differentialgleichung der Haupttangentenkurven die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & A_1' \\ B' & B'' & B_1' \\ C' & C'' & C_1' \end{vmatrix} dt^2 + \begin{vmatrix} A_1' & A' & A_1'' \\ B_1' & B' & B_1'' \\ C_1' & C' & C_1'' \end{vmatrix} d\tau^2 = 0,$$

welche die Differentiale dt und $d\tau$ nur als Quadrate dt^2, $d\tau^2$, dagegen nicht in der Kombination $dt\,d\tau$ enthält.

Diese Form der Differentialgleichung zeigt, daß in jedem Punkte der Fläche die beiden Haupttangenten harmonische Lage hinsichtlich der Richtungen der Kurven $t =$ Const. und $\tau =$ Const. besitzen.

4. Jetzt konstruieren wir in jedem Punkte einer Kurve c die Tangente an die durch denselben Punkt hindurchgehende Kurve $\varkappa$. Nach der Definition unserer Fläche müssen alle diese Tangenten parallel sein, sodaß ihr Inbegriff eine um die Fläche umgeschriebene Zylinderfläche bildet. Also:

Satz 3. Die Developpable, die unsere Fläche längs einer Kurve der einen Schar berührt, ist eine Zylinderfläche. [336

Dieser Satz gibt, wie ich beiläufig bemerke, ohne Schwierigkeit einen dritten Beweis des Satzes 2.

5. Ich lasse jetzt eine erste Beschränkung eintreten. Ich setze nämlich voraus, daß sich die Tangenten der Kurven c_0 und $\varkappa_0$ paarweise als parallel zusammenordnen lassen, anders ausgesprochen, daß diese beiden Kurven eine gemeinsame irreduktible Differentialgleichung von der Form:

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

befriedigen. Alsdann müssen sämtliche Kurven c und $\varkappa$ die Gleichung $f = 0$ erfüllen.

Ich werde zeigen, daß in diesem Falle sowohl die Kurven c wie die Kurven $\varkappa$ eine Umhüllungskurve, und zwar eine gemeinsame Umhüllungskurve besitzen.

Die durch die Punkte einer Kurve c_0 hindurchgehenden Kurven $\varkappa$ besitzen nämlich in diesen Punkten eine gemeinsame Tangentenrichtung. Und nach unserer Voraussetzung hat auch die Kurve c_0 dieselbe Richtung in einem gewissen Punkte π. In diesem Punkte berührt daher c_0 die durch denselben Punkt hindurchgehende Kurve $\varkappa$. Erinnert man sich nun, daß c_0 in die benachbarte Kurve c_0' übergeht durch eine infinitesimale Translation, deren Richtung die besprochene gemeinsame Tangentenrichtung ist, so erkennt man einerseits, daß c_0 und c_0' einander im Punkte π schneiden, sodaß alle c eine Umhüllungskurve Σ bestimmen, andererseits, daß c_0 diese Umhüllungskurve im Punkte π berührt. Und da c_0 in diesem Punkte zugleich eine Kurve $\varkappa$ berührt, so folgt, daß Σ auch von allen $\varkappa$ berührt wird. Also:

Satz 4. Wenn die auf unserer Fläche gelegenen Kurven c und $\varkappa$ eine [irreduktible] Relation von der Form:

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

befriedigen, so haben sowohl die Kurven c, wie die Kurven $\varkappa$ eine Umhüllungskurve, und zwar haben beide Kurvenscharen dieselbe Umhüllungskurve.

Hieraus folgt, daß unsere Fläche zwei weitere Erzeugungsweisen gestattet. Entweder kann man die Kurve c in Translationsbewegung führen, derart, daß sie längs Σ gleitet; oder auch, man kann die Kurve $\varkappa$ in Translationsbewegung führen, derart, daß sie längs Σ gleitet.

Man wähle andererseits eine beliebige Kurve c, und eine beliebige Kurve Σ', deren Tangenten paarweise mit den Tangenten von c parallel sind. Gleitet nun c in Translationsbewegung längs Σ', so beschreiben die Punkte von c kongruente und gleichgestellte Kurven $\varkappa$, deren Tangenten jedesmal mit einer Tangente der Kurve c parallel sind. [337
Dies gibt:

Satz 5. Gleitet eine Kurve c in Translationsbewegung längs einer Kurve Σ, deren Tangenten paarweise mit den Tangenten von c parallel sind, so kann die erzeugte Fläche auch dadurch beschrieben werden, daß eine gewisse andere Kurve $\varkappa$ in Translationsbewegung längs Σ gleitet.

§ 2. Geometrische Interpretation von Monges allgemeinem Integrale der Differentialgleichung der Minimalflächen.

Durch eine zweckmäßige Spezialisation gehen die in dem vorangehenden Paragraphen betrachteten Flächen in Minimalflächen über, und zwar erhält man in dieser Weise alle Minimalflächen, die in Monges allgemeinem Integrale der betreffenden Differentialgleichung enthalten sind. Dies soll jetzt gezeigt werden.

6. Ich setze voraus, daß die in dem vorangehenden Paragraphen betrachteten Kurven c_0 und $\varkappa_0$ der Differentialgleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 \tag{1}$$

genügen; anders ausgesprochen, daß sie Kurven von der Länge Null sind. Um die Sprache zu erleichtern, erlaube ich mir vorzuschlagen, Kurven, deren Länge gleich Null ist, mit dem Namen Minimalkurven zu bezeichnen. Dieser Name scheint mir unter anderm auch deswegen naturgemäß, weil diese Kurven, wie später gezeigt werden soll, als Ebenengebilde aufgefaßt, Minimalflächen sind.

Die Voraussetzung, daß c_0 und $\varkappa_0$ Minimalkurven sind, zieht nach sich, daß auch die allgemeinen Kurven c und $\varkappa$ solche Kurven sind. Infolgedessen liegen in jedem Punkte der erzeugten Fläche die beiden Haupttangenten harmonisch hinsichtlich der beiden Tangenten, deren Länge Null ist. Das heißt, daß die beiden Haupttangenten senkrecht auf einander stehen, und daß infolgedessen die beiden Hauptkrümmungsradien gleich groß und dabei entgegengesetzt gerichtet sind. Die Fläche ist daher eine Minimalfläche.

Indem man die Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen berücksichtigt, erhält man somit die folgenden Sätze:

Satz 6. Führt man eine Minimalkurve c in Translationsbewegung derart, daß ein Punkt der Kurve eine andere Minimalkurve durchläuft, so beschreibt c immer eine Minimalfläche.

Satz 7. Nimmt man zwei beliebige Minimalkurven c und $\varkappa$, verbindet einen arbiträren Punkt der ersten Kurve mit einem arbiträren Punkte der zweiten Kurve, und bestimmt den Mittelpunkt dieser beiden Punkte, so ist der Ort dieser Mittelpunkte eine Minimalfläche.

Satz 8. Gleitet eine Minimalkurve c in Translations- [338
bewegung längs einer festen Minimalkurve, so beschreibt c eine Minimalfläche.

7. Es ist leicht, nachzuweisen, daß die soeben angegebenen Konstruktionen sämtliche Minimalflächen liefern, auf denen durch jeden Punkt von allgemeiner Lage zwei verschiedene Minimalkurven hindurchgehen.

Wählt man nämlich auf einer beliebigen Minimalfläche eine Minimalkurve c von allgemeiner Lage, und konstruiert für jeden Punkt dieser Kurve die Tangente an die zweite durch diesen Punkt hindurchgehende Minimalkurve, so bilden alle diese Tangenten eine Developpable, weil jede unter diesen Tangenten zu der entsprechenden Tangente der Kurve c konjugiert ist.

Hieraus folgt, daß die Developpable, die unsere Minimalfläche längs einer Minimalkurve von allgemeiner Lage berührt, entweder den Kugelkreis enthält, oder, daß diese Developpable ein Kegel ist, dessen Spitze auf dem Kugelkreise gelegen ist. Und da es nur eine Developpable gibt, die gleichzeitig um die vorgelegte Minimalfläche und den Kugelkreis umgeschrieben ist, so erkennen wir, daß der erste Fall jedenfalls nur für solche Minimalflächen eintreten kann, die selbst imaginäre Developpable sind, welche um den Kugelkreis umgeschrieben sind. Also:

Satz 9. Wählt man auf einer beliebigen Minimalfläche eine Minimalkurve von allgemeiner Lage und zieht darnach durch jeden Punkt dieser Kurve die Tangente an die zweite durch den betreffenden Punkt hindurchgehende Minimalkurve, so treffen die konstruierten Tangenten sämtlich den Kugelkreis in **demselben** Punkte.

Führt man daher die gewählte Minimalkurve eine infinitesimale Strecke in Translationsbewegung gegen den im vorangehenden Satze besprochenen Punkt des Kugelkreises, so liegt die hierdurch erhaltene benachbarte Minimalkurve fortwährend auf der Fläche, vorausgesetzt, daß man von infinitesimalen Größen zweiter Ordnung absieht.

Und also kann die vorgelegte Minimalfläche in der Weise beschrieben werden, daß man die gewählte Minimalkurve in Translationsbewegung führt derart, daß ihre Punkte die Minimalkurven der zweiten Schar durchlaufen.

Hiermit ist die Richtigkeit der im Anfange dieser Nummer aufgestellten Behauptung nachgewiesen, sodaß wir den folgenden Satz aussprechen können:

Satz 10. Die Operationen der vorangehenden Nummer liefern alle Minimalflächen, auf denen durch jeden Punkt von allgemeiner Lage **zwei** verschiedene Minimalkurven hindurchgehen.

8. Jetzt brauchen wir nur die Ergebnisse der beiden letzten Nummern analytisch zu formulieren, um Monges allgemeine Bestimmung aller Minimalflächen wiederzufinden.

Seien in der Tat: [339

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

und:

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

die Gleichungen zweier beliebiger Minimalkurven, sodaß die beiden Gleichungen:

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0,$$
$$dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0$$

bestehen. Alsdann bestimmen die Gleichungen:

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau)$$

eine Fläche, die in zweifacher Weise durch Translationsbewegung einer Minimalkurve erzeugt werden kann. Unsere Fläche ist daher (Nr. 6) eine Minimalfläche, und andererseits besitzen (Nr. 7) alle Minimalflächen diese Gleichungsform, vorausgesetzt, daß man von den imaginären Developpabeln absieht, die um den Kugelkreis umgeschrieben sind. Also:

Satz 11. Sieht man von den imaginären um den Kugelkreis umgeschriebenen Developpabeln ab, so besitzt jede Minimalfläche die Gleichungsform:

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau),$$

wo:

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0 = dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2$$

ist. Und andererseits bestimmen diese Gleichungen immer eine Minimalfläche.

9. Hiernach reduziert sich die Bestimmung aller Minimalflächen auf die Auffindung aller Minimalkurven. Lagrange hat zuerst gelehrt, beliebig viele Minimalkurven zu bestimmen. Für eine synthetische Auffassung scheint mir die folgende von Darboux[1]) herrührende Bestimmung aller Minimalkurven die einfachste zu sein.

Man unterwirft die allgemeine Ebene: [340

$$tx + uy + vz - 1 = 0$$

der Bedingungsgleichung:

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

1) Um überhaupt beliebig viele Kurven zu finden, die eine vorgelegte Relation:

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

erfüllen, sucht man nach Monge und Pfaff eine vollständige Lösung derjenigen partiellen Differentialgleichung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

deren Charakteristiken $f = 0$ befriedigen. Durch Variation der Konstanten findet man beliebig viele Integralflächen, die im allgemeinen eine Rückkehrkante besitzen, welche der Gleichung $f = 0$ genügt.

welche ausdrückt, daß die betreffende Ebene den Kugelkreis berührt, und fügt sodann eine beliebige Relation:

$$f(t, u, v) = 0$$

hinzu. Die hiermit bestimmten Ebenen bilden eine Developpable, die dem Kugelkreise umgeschrieben ist. Die Rückkehrkante derselben ist eine Minimalkurve, und auf diese Weise können offenbar sämtliche Minimalkurven erhalten werden.[1]) Ist insbesondere f eine algebraische Funktion, so ist die erhaltene Minimalkurve algebraisch, und umgekehrt ist klar, daß alle algebraischen Minimalkurven in dieser Weise erhalten werden. Also:

Satz 12. Die allgemeinste algebraische Minimalkurve wird dargestellt in Ebenenkoordinaten durch die Gleichungen:

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0,$$
$$f(t, u, v) = 0,$$

wo f eine arbiträre algebraische Funktion von t, u, v bezeichnet.

10. Unter den verschiedenen expliziten Formeln für alle Minimalkurven, insbesondere für alle algebraischen Minimalkurven, sind die nachstehenden von Weierstraß herrührenden besonders bemerkenswert:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = (1 - s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s), \\ y = i(1 + s^2)F''(s) - 2isF'(s) + 2iF(s), \\ z = 2sF''(s) - 2F'(s), \end{cases}$$

woraus durch Differentiation:

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = (1 - s^2)F'''(s)ds, \\ dy = i(1 + s^2)F'''(s)ds, \\ dz = 2sF'''(s)ds. \end{cases}$$

Daß diese beiden äquivalenten Gleichungssysteme eine Minimalkurve bestimmen, folgt daraus, daß sie die Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

identisch erfüllen. Daß sie alle Minimalkurven liefern, liegt darin, daß die Ausdrücke der Differentiale dx, dy, dz eine arbiträre Funktion der Hilfsvariablen s enthalten. Also:

1) Besonders interessant für die Theorie der Minimalflächen ist der Fall, daß die Gleichung $f(t, u, v) = 0$ eine reelle Raumkurve in Ebenenkoordinaten darstellt. Diesen Fall betrachte ich in meiner nächsten Abhandlung.

Satz 13. Die Formeln (1) liefern alle Minimalkurven. [341

Läßt man in den Weierstraßischen Formeln $F(s)$ eine beliebige algebraische Funktion von s bezeichnen, so erhält man offenbar eine algebraische Minimalkurve. Daß man umgekehrt in dieser Weise sämtliche algebraische Minimalkurven findet, kann man folgendermaßen erkennen.

Laß mich voraussetzen, daß eine algebraische Minimalkurve durch die Formeln (1) dargestellt wird. Alsdann können x, y, z immer als algebraische Funktionen einer gewissen Hilfsgröße t ausgedrückt werden. Und da wegen (2):

$$s = -\frac{dx}{dz} - i\frac{dy}{dz}$$

ist, so folgt, daß auch s eine algebraische Funktion von t, und ebenso, daß t eine algebraische Funktion von s ist. Folglich sind auch x, y, z algebraische Funktionen von s. Und da aus den Gleichungen (1) folgt:

$$F(s) = -\tfrac{1}{4}\{(1 - s^2)x + i(1 + s^2)y + 2sz\},$$

ergibt sich, daß $F(s)$ selbst eine algebraische Funktion von s ist. Hiermit ist der folgende Satz, der sich bei Weierstraß in dieser Form nicht findet, erwiesen:

Satz 14. Man erhält die allgemeinste algebraische Minimalkurve, indem man in den Formeln (1) für $F(s)$ eine beliebige algebraische Funktion von s wählt.

§ 3. Reelle Minimalflächen. Algebraische Minimalflächen.

11. Es ist nun nach Bonnets Vorgange sehr leicht, beliebig viele und sogar alle reellen Minimalflächen zu finden. Hierzu stelle ich zunächst den folgenden, sozusagen evidenten Satz auf:

Satz 15. Die zu einer beliebigen vorgelegten Minimalkurve gehörige konjugiertimaginäre Kurve ist selbst eine Minimalkurve.

Denn die neue Kurve wird erhalten, wenn man in den Gleichungen der vorgelegten Minimalkurve $+i$ mit $-i$ vertauscht.

Seien:

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

die Gleichungen einer beliebigen Minimalkurve, und seien:

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau),$$

wo $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ die konjugierten Funktionen der neuen Hilfsgröße τ

bezeichnen, die Gleichungen der konjugierten Minimalkurve. Ich betrachte die Minimalfläche:

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau).$$

Setze ich in diesen Gleichungen, indem ich mit t_1 und t_2 beliebige [342 reelle Größen bezeichne:

$$t = t_1 + it_2, \quad \tau = t_1 - it_2,$$

so ist der entsprechende Punkt unserer Minimalfläche offenbar reell. Und indem man t_1 und t_2 sukzessiv alle möglichen reellen Werte gibt, erhält man ∞^2 reelle auf der Fläche gelegene Punkte, sodaß die konstruierte Minimalfläche reell ist. Also:

Satz 16. Läßt man in den allgemeinen Formeln einer Minimalfläche:

$$x = A(t) + A_1(\tau),$$
$$y = B(t) + B_1(\tau),$$
$$z = C(t) + C_1(\tau),$$

wo:

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0,$$
$$dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2 = 0$$

ist, die Größen $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ die zu $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ konjugierten Funktionen von τ bezeichnen, so ist die betreffende Minimalfläche immer reell.

12. Wir werden zeigen, daß die soeben entwickelte Methode alle reellen Minimalflächen liefert. Hierzu machen wir die folgenden Überlegungen.

Ich wähle eine beliebige reelle Fläche, die keine Minimalfläche zu sein braucht. Alle imaginären Punkte dieser Fläche ordnen sich paarweise als konjugiert imaginärzusammen. Und dementsprechend ordnen sich auch alle auf der Fläche gelegenen Minimalkurven paarweise als konjugiert zusammen. Dies vorausgesetzt, werde ich die beiden durch einen reellen Punkt p der Fläche hindurchgehenden Minimalkurven betrachten. Vertausche ich die konjugierten Punkte der Fläche unter einander, so bleibt p ungeändert, und daher sind nur die beiden folgenden Fälle denkbar. Entweder bleiben die durch p gehenden Minimalkurven alle beide ungeändert, indem sich jede in sich transformiert, oder auch es vertauschen

sich diese Kurven unter einander. Ich werde zeigen, daß nur der letzte Fall eintreten kann. Wenn insbesondere die beiden durch p gehenden Minimalkurven Zweige einer irreduktiblen Kurve sind, so vertauschen sich, werde ich nachweisen, die beiden Zweige unter einander.

Laß uns in der Tat voraussetzen, daß ein solcher Zweig in sich selbst transformiert würde. Und seien x, y, z die Koordinaten des Punktes p, $x + dx + id\xi$, $y + dy + id\eta$, $z + dz + id\zeta$ Koordinaten eines benachbarten Punktes des betreffenden Zweiges. Nach unserer Voraussetzung wären dann $x + dx - id\xi$, $y + dy - id\eta$, $z + dz - id\zeta$ die Koordinaten [343 eines gewissen Punktes desselben Zweiges. Es beständen daher drei Relationen von der Form:

$$dx + id\xi = (a + \alpha i)(dx - id\xi),$$
$$dy + id\eta = (a + \alpha i)(dy - id\eta),$$
$$dz + id\zeta = (a + \alpha i)(dz - id\zeta).$$

Setzte man hier:

$$dx + id\xi = re^{fi}, \quad dy + id\eta = \varrho e^{\varphi i}, \quad dz + id\zeta = Re^{Fi},$$
$$a + i\alpha = Ae^{Bi},$$

so käme:

$$re^{fi} = Are^{(B-f)i}, \quad \varrho e^{\varphi i} = A\varrho e^{(B-\varphi)i}, \quad Re^{Fi} = ARe^{(B-F)i},$$

woraus:

$$A = 1, \quad f = B - f, \quad \varphi = B - \varphi, \quad F = B - F,$$

und also:

$$f = \varphi = F = \tfrac{1}{2}B.$$

Also käme:

$$dx + id\xi = re^{\frac{1}{2}Bi},$$
$$dy + id\eta = \varrho e^{\frac{1}{2}Bi},$$
$$dz + id\zeta = Re^{\frac{1}{2}Bi},$$

woraus:

$$\frac{dx + id\xi}{r} = \frac{dy + id\eta}{\varrho} = \frac{dz + id\zeta}{R}$$

folgen würde. Nun aber ist

$$(dx + id\xi)^2 + (dy + id\eta)^2 + (dz + id\zeta)^2 = 0,$$

also käme:

$$r^2 + \varrho^2 + R^2 = 0,$$

welche Gleichung jedoch kontradiktorisch ist, weil r, ϱ, R reelle Größen sind, die nicht sämtlich verschwinden dürfen. Hieraus folgt nun zunächst der Satz:

Satz 17. Unter den imaginären Richtungen, die durch einen reellen Punkt hindurchgehen und welche dabei den Kugelkreis treffen, gibt es keine, die sich selbst konjugiert ist.

Hieraus fließt unmittelbar:

Satz 18. Vertauscht man die konjugierten Punkte einer reellen Fläche unter einander, so vertauschen sich die beiden durch einen reellen Punkt der Fläche hindurchgehenden Minimalkurven.

Wenden wir nun diesen Satz auf eine beliebige reelle Minimal- [344
fläche an, so ergibt sich, daß die beiden durch einen reellen Punkt von allgemeiner Lage hindurchgehenden Minimalkurven, die auf der Fläche gelegen sind, einander konjugiert sind. Und also ergibt sich der Satz:

Satz 19. Man erhält die allgemeinste reelle Minimalfläche, indem man, wie in Satz 16 geschehen, eine beliebige Minimalkurve:

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

mit der konjugierten Minimalkurve:

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

verbindet und darnach die Minimalfläche:

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau) \end{aligned}$$

bildet.

13. In der zitierten Arbeit gibt Bonnet zugleich Methoden zur Auffindung von beliebig vielen reellen algebraischen Minimalflächen. Dagegen behandelt er nicht die Frage nach der Bestimmung aller reellen algebraischen Minimalflächen. Erst Weierstraß hat eine erschöpfende Methode zur Bestimmung aller reellen algebraischen Minimalflächen gegeben.

Indem ich im folgenden eine neue Behandlung des von Weierstraß erledigten Problems entwickele, erlaube ich mir die Aufmerksamkeit darauf zu lenken, daß bei meiner Behandlung das betreffende Problem in mehrere Unterprobleme zerlegt wird. Zugleich hebe ich schon hier hervor, daß ich in entsprechender Weise dasselbe Problem für einige andere interessante partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung erledigt habe.

Ich bemerke zunächst, daß die (reelle oder imaginäre) Minimalfläche:

$$\begin{aligned} x &= A(t) + A_1(\tau), \\ y &= B(t) + B_1(\tau), \\ z &= C(t) + C_1(\tau) \end{aligned}$$

immer algebraisch ist, wenn die beiden Minimalkurven:

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

und:

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

algebraisch sind.

Umgekehrt ist leicht einzusehen, daß diese hinreichende Bedingung auch notwendig ist. Denn sei überhaupt eine algebraische Minimalfläche vorgelegt. Ich konstruiere den Tangentenkegel, dessen Spitze in einem beliebigen Punkte des Kugelkreises gelegen ist. Dieser Kegel ist algebraisch, und folglich ist auch seine Berührungskurve mit der vorgelegten [345
Fläche algebraisch. Aber diese Berührungskurve zerfällt in Minimalkurven, die auf der Fläche gelegen sind, und zwar befindet sich unter ihnen jedenfalls eine Minimalkurve jeder Schar. Also schließen wir, daß die auf einer algebraischen Minimalfläche gelegenen Minimalkurven sämtlich algebraisch sind. Also ergibt sich:

Satz 20. Man erhält alle algebraischen Minimalflächen, indem man in der früher (Satz 6 und 7) auseinandergesetzten Weise zwei beliebige algebraische Minimalkurven verbindet.

Hiermit ist das vorliegende Problem darauf zurückgeführt, sämtliche algebraische Minimalkurven aufzufinden. Und da dieses Hilfsproblem schon in Nr. 9 und 10, und sogar auf zwei verschiedene Weisen erledigt wurde, so ist die Frage nach allen algebraischen Minimalflächen erledigt.

Fragt man mit Weierstraß insbesondere nach allen reellen algebraischen Minimalflächen, so erhält man, indem man die Sätze 19 und 20 verbindet, unmittelbar die Antwort in der folgenden Form:

Satz 21. Man erhält die allgemeinste reelle algebraische Minimalfläche, indem man eine beliebige algebraische Minimalkurve mit der konjugierten Minimalkurve in der früher (Satz 6 und 7) auseinandergesetzten Weise verbindet.

Wünscht man endlich die Bestimmung aller reellen algebraischen Minimalflächen eben in der von Weierstraß gegebenen Form zu erhalten, so braucht man nur Satz 14 mit dem vorangehenden Satze zu verbinden.

Bezeichnet man dabei überhaupt den reellen Teil einer Funktion f mit $R(f)$, so ergibt sich der folgende von Weierstraß herrührende Satz:

Satz 22. Die allgemeinste reelle algebraische Minimalfläche wird dargestellt durch die Formeln:

$$x = R[(1-s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s)],$$
$$y = R[i(1+s^2)F''(s) - 2isF'(s) + 2iF(s)],$$
$$z = R[2sF''(s) - 2F'(s)],$$

in denen $F(s)$ eine beliebige algebraische Funktion von s bezeichnet.

Die vereinigten Sätze 20 und 21 leisten insofern mehr als Satz 22, weil sie alle algebraischen Minimalflächen, und nicht allein die reellen algebraischen Minimalflächen, liefern.

§ 4. Minimalflächen, deren Minimalkurven eine irreduktible Schar bilden.

Durch jeden Punkt einer Minimalfläche, die keine imaginäre Developpable ist, gehen zwei Minimalkurven, die im allgemeinen zwei ver- [346 schiedenen Scharen angehören. Ausnahmeweise kann es jedoch eintreten, daß sämtliche Minimalkurven einer Minimalfläche eine irreduktible Schar bilden, welche dann die Fläche zweifach bedeckt. Solche Minimalflächen nenne ich Doppelflächen.

14. Es ist leicht, die allgemeinen Gleichungen aller Minimalflächen, die Doppelflächen sind, anzugeben. Seien in der Tat:

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t) \tag{1}$$

die Gleichungen einer beliebigen Minimalkurve. Alsdann sind:

$$x = A(t) + A(\tau),$$
$$y = B(t) + B(\tau),$$
$$z = C(t) + C(\tau)$$

die Gleichungen einer Minimalfläche, deren sämtliche Minimalkurven mit der vorgelegten Minimalkurve kongruent und gleichgestellt sind. Und da die beiden Gleichungssysteme:

$$x = A(a) + A(\tau),$$
$$y = B(a) + B(\tau), \qquad (a = \text{Const.}),$$
$$z = C(a) + C(\tau)$$

und:

$$x = A(t) + A(a),$$
$$y = B(t) + B(a), \qquad (a = \text{Const.}),$$
$$z = C(t) + C(a)$$

dieselbe Minimalkurve darstellen, so bilden die auf unserer Fläche gelegenen Minimalkurven eine irreduktible Schar, sodaß unsere Minimalfläche eine Doppelfläche ist.

Es ist andererseits klar, daß hiermit die allgemeinen Gleichungen aller Doppelflächen gefunden sind. Denn da eine allgemeine Minimalfläche bestimmt ist, wenn auf derselben eine Minimalkurve aus jeder Schar gegeben ist, so ist eine Doppelfläche bestimmt, wenn nur eine einzige auf derselben gelegene Minimalkurve vorgelegt ist. Also:

Satz 23. Alle Minimalflächen, die Doppelflächen sind, werden definiert durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} x = A(t) + A(\tau), \\ y = B(t) + B(\tau), \\ z = C(t) + C(\tau), \end{cases} \tag{2}$$

vorausgesetzt daß:

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t)$$

die Gleichungen einer beliebigen Minimalkurve sind.

Zu bemerken ist, daß die Parameterwerte:

$$t = a, \quad \tau = b$$

denselben Punkt liefern wie die Werte: [347

$$t = b, \quad \tau = a.$$

15. Im allgemeinen ist die durch die Formeln (2) gelieferte Doppelfläche imaginär, und es stellt sich daher die neue Aufgabe, alle reellen Minimalflächen zu finden, die Doppelflächen sind.

Seien:

$$x + \xi i, \quad y + \eta i, \quad z + \zeta i \tag{3}$$

die Koordinaten eines beliebigen Punktes einer reellen Doppelfläche. Alsdann gehört auch der konjugierte Punkt:

$$x - \xi i, \quad y - \eta i, \quad z - \zeta i \tag{4}$$

unserer Fläche an. Wenn der erste Punkt eine Minimalkurve durchläuft, so beschreibt der konjugierte Punkt die konjugierte Minimalkurve. Sollen nun sämtliche Minimalkurven unserer Fläche eine irreduktible Schar bilden, so muß jede dieser Minimalkurven durch eine gewisse Translationsbewegung in die konjugierte Minimalkurve übergehen können. Man kann daher in diesem Falle solche Konstanten:

$$a+\alpha i, \quad b+\beta i, \quad c+\gamma i$$

wählen, daß der Punkt:

$$x+a+(\alpha-\xi)i, \quad y+b+(\beta-\eta)i, \quad z+c+(\gamma-\zeta)i,$$

derselben Minimalkurve, wie der Punkt (3) angehört. Also:

Satz 24. Bilden die Minimalkurven einer reellen Minimalfläche eine irreduktible Schar, so ist es, wenn wir mit:

$$x+\xi i, \quad y+\eta i, \quad z+\zeta i$$

die Koordinaten eines **variablen** Punktes einer auf der Fläche gelegenen Minimalkurve bezeichnen, immer möglich, solche **Konstanten** $a+\alpha i$, $b+\beta i$, $c+\gamma i$ zu wählen, daß der variable Punkt:

$$x+a+(\alpha-\xi)i, \quad y+b+(\beta-\eta)i, \quad z+c+(\gamma-\zeta)i$$

ebenfalls der vorgelegten Minimalkurve angehört.

Indem wir auf den neuen Punkt unserer Minimalkurve nochmals dieselbe Operation anwenden, erkennen wir, daß auch der Punkt mit den Koordinaten:

$$x+2a+\xi i, \quad y+2b+\eta i, \quad z+2c+\zeta i$$

unserer Minimalkurve angehört. Und durch $2m$-malige Wiederholung derselben Operation erkennt man, daß jeder Punkt mit den Koordinaten:

$$(5) \qquad x+2ma+\xi i, \quad y+2mb+\eta i, \quad z+2mc+\zeta i,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, unserer Kurve angehört.

Sind nun a, b, c nicht sämtlich gleich Null, so bestimmen die Ko- [348
ordinatenwerte (5) unendlich viele Punkte, die unsere Minimalkurve mit der Geraden:

$$\frac{x'-(x+\xi i)}{a} = \frac{y'-(y+\eta i)}{b} = \frac{z'-(z+\zeta i)}{c}$$

gemein hat. Also ist die Kurve transzendent, und folglich ist auch die zugehörige reelle Minimalfläche transzendent.

In dem vorliegenden Falle können wir bemerken, daß unsere Minimalkurve die Translationsbewegung:

$$\Delta x = a, \quad \Delta y = b, \quad \Delta z = c$$

gestattet. Folglich gestatten sämtliche Minimalkurven dieselbe Bewegung, sodaß die Fläche periodisch[1]) ist. Also:

Satz 25. Wenn die Größen a, b, c nicht sämtlich gleich Null sind, so ist unsere Doppelfläche periodisch und also transzendent.[2])

16. Soll also eine Doppelfläche algebraisch sein, so muß:

$$a = b = c = 0$$

sein. In diesem Falle entspricht jedem Punkte:

$$x+\xi i, \quad y+\eta i, \quad z+\zeta i$$

einer auf der Fläche gelegenen Minimalkurve ein anderer Punkt:

$$x+(\alpha-\xi)i, \quad y+(\beta-\eta)i, \quad z+(\gamma-\zeta)i$$

derselben Minimalkurve. Man führe die Translationsbewegung:

$$\Delta x = -\tfrac{1}{2}\alpha i, \quad \Delta y = -\tfrac{1}{2}\beta i, \quad \Delta z = -\tfrac{1}{2}\gamma i$$

auf unsere Kurve aus. Hierdurch erhalten wir eine neue Minimalkurve, auf der jedem Punkte:

$$x+(\xi-\tfrac{1}{2}\alpha)i, \quad y+(\eta-\tfrac{1}{2}\beta)i, \quad z+(\zeta-\tfrac{1}{2}\gamma)i$$

der konjugierte Punkt:

$$x-(\xi-\tfrac{1}{2}\alpha)i, \quad y-(\eta-\tfrac{1}{2}\beta)i, \quad z-(\zeta-\tfrac{1}{2}\gamma)i$$

zugeordnet ist. Daher ist die neue Kurve sich selbst konjugiert. Also:

Satz 26. Jede Minimalkurve einer reellen algebraischen Doppelfläche kann durch eine zweckmäßige Trans- [349
lationsbewegung in eine sich selbst konjugierte Kurve übergeführt werden.

Wir können auch den noch allgemeineren Satz aussprechen:

1) Hier möge angeführt sein, daß eine jede Periode einer Minimalfläche ihren Grund in einer Periode der Minimalkurven der einen Schar hat. Ähnliche Sätze gelten für reelle algebraische Minimalflächen, die überhaupt eine Gruppe linearer Transformationen gestatten, bei denen der Kugelkreis invariant bleibt.

2) Als Beispiel für periodische Doppelflächen möge die Schraubenfläche angeführt sein. Ein zweites Beispiel ist die Fläche, deren Haupttangentenkurven sich auf die Kugel als konfokale sphärische Kegelschnitte abbilden. Diese beiden Flächen sind dadurch bemerkenswert, daß sie gleichzeitig hinsichtlich einfach unendlich vieler Kegelschnitte Minimalflächen sind.

Satz 27. Jede Minimalkurve einer nicht periodischen Doppelfläche geht durch eine gewisse Translationsbewegung in eine sich selbst konjugierte Kurve über.

Sei andererseits eine beliebige sich selbst konjugierte Minimalkurve vorgelegt:

$$x = A(t), \quad y = B(t), \quad z = C(t),$$

und laß mich voraussetzen, daß die Parameterwerte:

$$t = \lambda + \mu i, \quad t = \nu + \varrho i$$

zwei konjugierte Punkte liefern. Gebe ich dann in den Gleichungen:

$$x = A(t) + A(\tau),$$
$$y = B(t) + B(\tau),$$
$$z = C(t) + C(\tau),$$

den Größen t und τ die Werte:

$$t = \lambda + \mu i, \quad \tau = \nu + \varrho i,$$

so ist der hervorgehende Punkt reell. Die erhaltene Doppelfläche ist daher auch reell. Also:

Satz 28. Eine sich selbst konjugierte Minimalkurve liefert immer eine **reelle Doppelfläche.**

17. In der vorangehenden Nummer reduzierten wir das Problem, alle reellen algebraischen Doppelflächen zu finden, auf die Bestimmung aller sich selbst konjugierten algebraischen Minimalkurven. Es ist aber leicht, das letzte Problem zu erledigen.

Man nehme in der Tat eine beliebige reelle Gleichung zwischen den Ebenenkoordinaten t, u, v:

$$f(t, u, v) = 0$$

und füge die Gleichung des Kugelkreises hinzu:

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen eine sich selbst konjugierte Developpable, deren Rückkehrkante eine sich selbst konjugierte Minimalkurve ist. Allerdings ist es hierbei denkbar, daß die Developpable und infolgedessen auch die Rückkehrkante in Teile zerfällt, die paarweise einander konjugiert sind. Doch ist es klar, daß ein solches Zerfallen nur ausnahmeweise eintritt.

Auf der anderen Seite ist klar, daß alle sich selbst konjugierten Minimalkurven in dieser Weise erhalten werden; denn in Ebenenkoordinaten wird eine solche Kurve eo ipso durch die Gleichung:

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0$$

zusammen mit einer anderen reellen Gleichung zwischen t, u, v dargestellt. Also ergibt sich: [350

Satz 29. Um **alle**[1]) reellen algebraischen Doppelflächen zu finden, verfährt man folgendermaßen. Zu der Gleichung des Kugelkreises in Ebenenkoordinaten:

$$t^2 + u^2 + v^2 = 0$$

fügt man eine beliebige reelle algebraische Relation zwischen t, u, v hinzu:

$$f(t, u, v) = 0.$$

Ist die hierdurch bestimmte Minimalkurve:

$$x = A(s), \quad y = B(s), \quad z = C(s)$$

irreduktibel, so bestimmen die Gleichungen:

$$x = RA(s), \quad y = RB(s), \quad z = RC(s)$$

eine reelle algebraische Minimalfläche, die eine Doppelfläche ist.

Nimmt man z. B. einen reellen Kegelschnitt und sucht die um diesen Kegelschnitt und den imaginären Kugelkreis umgeschriebene Developpable, so erhält man bekanntlich eine sich selbst konjugierte Developpable achter Ordnung, deren Rückkehrkante eine sich selbst konjugierte Minimalkurve zwölfter Ordnung ist. Die zugehörige Minimalfläche, die Herr Henneberg[2]) zuerst betrachtet hat, ist eine Doppelfläche. Besonders interessant ist der ebenso von Herrn Henneberg betrachtete Fall, daß der vorgelegte Kegelschnitt eine Parabel ist. Mit diesen beiden Flächen werde ich mich sowohl in dieser wie in meiner nächsten Abhandlung über Minimalflächen beschäftigen.

---

1) Dieser Satz ist deswegen bemerkenswert, weil derselbe nicht gültig bleibt, wenn man das Wort „algebraisch" wegläßt.

2) Bei Henneberg werden die besprochenen Minimalflächen dadurch definiert, daß sie die Evolute eines Kegelschnitts als geodätische Kurve enthalten.

§ 5. Bestimmung der Klasse einer algebraischen Minimalfläche.

Da eine Minimalfläche durch die auf derselben gelegenen Minimalkurven bestimmt ist, stellt sich die allgemeine Aufgabe, die charakteristischen Zahlen einer algebraischen Minimalfläche, zum Beispiel deren Klasse, Ordnung und so weiter zu bestimmen, wenn die betreffenden Minimalkurven bekannt sind.

In diesem Paragraphen entwickele ich eine äußerst einfache Formel zur Bestimmung der Klasse einer beliebigen algebraischen Minimalfläche. Diese Formel ist jedoch verschieden, jenachdem die Fläche eine Doppelfläche ist, oder nicht. Wir betrachten daher diese beiden Fälle für sich.

18. Wir wollen zunächst solche Minimalflächen betrachten, die [351 keine Doppelflächen sind, also solche Minimalflächen, die zwei verschiedene Scharen von Minimalkurven enthalten. Sei K eine Kurve der einen Schar, K' eine Kurve der zweiten Schar. Sei R und R' der Rang dieser Kurven, M und M' die Multiplizität des Kugelkreises auf den zugehörigen Developpablen. Ich werde zeigen, daß die Klasse der Fläche durch die Formel:

$$M'(R-M)+M(R'-M')$$

ausgedrückt wird.

Zunächst zeige ich, daß jeder Tangentenkegel, dessen Spitze auf dem Kugelkreise liegt, in $M+M'$ Kegel zerfällt. Durch einen Punkt π des Kugelkreises gehen nämlich M Tangenten an die Kurve K. Jede solche Tangente gehört einem Kegel an, der die Fläche nach einer Kurve aus der Schar K' berührt. Ich behaupte, daß keine zwei unter diesen Tangenten die Fläche in Punkten *derselben* Kurve K' berühren können. Wäre dies nämlich allgemein der Fall, so müßte die Kurve K' durch eine endliche Translationsbewegung in sich selbst übergehen können, sodaß K' *periodisch* und also transzendent sein würde. Daher gibt es M verschiedene Tangentenkegel, deren Spitzen in π liegen, welche nach Kurven K' berühren. Dementsprechend gibt es M' Tangentenkegel, deren Spitzen in π liegen, welche nach Kurven K berühren. Und da jede durch π gehende Tangente entweder eine Kurve K oder eine Kurve K' berührt, ergibt sich der Satz:

Satz 30. *Jeder Tangentenkegel, dessen Spitze auf dem Kugelkreise liegt, zerfällt in M Kegel, die die Fläche nach Kurven K', und in M' Kegel, die nach Kurven K berühren.*

Die Kegel, die nach Kurven K' berühren, sind von der Klasse $R'-M'$. Ebenso sind die Kegel, die nach Kurven K berühren, von der Klasse $R-M$.

Also ist die Klasse des gesamten Tangentenkegels, dessen Spitze auf dem Kugelkreise gelegen ist, gleich:

$$M(R'-M')+M'(R-M).$$

Diese Zahl ist somit die Klasse der Fläche. Also:

Satz 31. *Die Klasse einer [algebraischen] Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, wird gegeben durch die Formel:*

$$M'(R-M)+M(R'-M');$$

R ist der Rang einer auf der Fläche gelegenen Minimalkurve, M ist die Multiplizität des Kugelkreises auf der zugehörigen Developpabeln; R' und M' sind die entsprechenden Zahlen einer Minimalkurve der zweiten Schar.

Ist insbesondere die betreffende Fläche reell, so ist:

$$R=R',\quad M=M',$$

und also ergibt sich:

Satz 32. *Die Klasse einer reellen [algebraischen] [352 Minimalfläche ist gleich $2M(R-M)$, vorausgesetzt, daß die Fläche keine Doppelfläche ist.*

19. Wünscht man, die Klasse einer Doppelfläche zu bestimmen, so verfährt man in entsprechender Weise. Ist R der Rang einer allgemeinen auf der Fläche gelegenen Minimalkurve, M die Multiplizität des Kugelkreises auf der betreffenden Developpablen, so erkennt man, daß der Tangentenkegel, dessen Spitze auf dem Kugelkreise liegt, in M Kegel zerfällt, unter denen jeder nach einer Minimalkurve berührt. Infolgedessen ist die Klasse eines jeden solchen Kegels gleich $R-M$. Also ist die Klasse des gesamten Tangentenkegels gleich $M(R-M)$. Daher:

Satz 33. *Die Klasse einer [algebraischen] Minimalfläche, deren Minimalkurven eine irreduktible Schar bilden, ist gleich $M(R-M)$.*[1])

Diese letzte Formel gilt für *alle* Doppelflächen, sowohl die reellen, wie die imaginären.

20. Transformiert man eine Minimalkurve durch reziproke Radien[2]), so erhält man bekanntlich eine neue Minimalkurve. Insbesondere geht eine Minimalgerade in eine ebensolche Gerade über.

1) Selbstverständlich sehen wir hier, wie gewöhnlich, von den imaginären Developpablen, die den Kugelkreis enthalten, ab.

2) Man vergleiche zum Beispiel *Darboux*: Sur une classe remarquable de courbes etc.

Hieraus lassen sich leicht Schlüsse ziehen, die für die Theorie der algebraischen Minimalflächen wichtig sind. Zunächst zeige ich, daß die Zahl $R-M$ bei der besprochenen Transformation invariant bleibt.

Bei der Transformation geht nämlich die Developpable einer Minimalkurve in die Developpable einer ebensolchen Kurve über. Die vorgelegte Developpable wird von einer Minimalgeraden von allgemeiner Lage in $R-M$ Punkten geschnitten. Also wird auch die neue Developpable von einer jeden Minimalgeraden von allgemeiner Lage in ebensovielen Punkten geschnitten. Und also kommt:

Satz 34. Transformiert man eine Minimalkurve durch reziproke Radien, so bleibt die Zahl $R-M$ invariant.

Durch analoge Betrachtungen werden wir jetzt einen Minimalwert der Zahl $R-M$ herleiten. Die Developpable einer vorgelegten Minimalkurve schneiden wir mit einem Kreise, der die Kurve in einem gewissen Punkte π trifft, sonst aber eine allgemeine Lage besitzt. Sodann führen wir eine Transformation durch reziproke Radien aus, indem wir den Punkt π zum Pole der Transformation wählen. Hierdurch geht der Kreis über in eine Gerade von allgemeiner Lage, welche die Developpable der neuen Minimalkurve in R'' Punkten trifft, vorausgesetzt, daß R'' den Rang der [353 neuen Minimalkurve bezeichnet. Folglich ist R'' gleich der Zahl der Schnittpunkte der ursprünglichen Developpablen mit dem besprochenen Kreise, minus der Zahl dieser Schnittpunkte, die entweder im Punkte π oder unendlich entfernt liegen. Das heißt, es ist:

$$R'' = 2(R-M) - \omega,$$

wo ω die Zahl der im Punkte π vereinigten Schnittpunkte bezeichnet. Und da diese Zahl gleich 2 ist, wenn π kein singulärer Punkt der vorgelegten Minimalkurve ist, so können wir setzen:

$$R'' = 2(R-M) - 2.$$

Wäre nun $R-M$ kleiner als 3, so ergäbe sich für R'' ein kleinerer Wert als 4. Es gibt aber keine Kurve, deren Rang kleiner als 4 ist. Also:

Satz 35. Die Zahl $R-M$ ist gleich oder größer als 3.

Später werden wir zeigen, das $R-M$ entweder gleich oder auch größer als M ist.

21. Die obenstehenden Entwickelungen führen zu einer einfachen Bestimmung der niedrigsten Klassenzahl einer Minimalfläche. Dabei sehen wir von der Ebene und den imaginären Developpablen ab.

Es folgt zunächst aus den Sätzen 31, 32 und 35, daß die Klasse einer reellen oder imaginären Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, nicht kleiner als 6 sein kann.

Dagegen kann die Klasse einer Doppelfläche gleich 3 sein. Die Hypothese:

$$M(R-M) = 3$$

gibt nämlich:

$$M = 1, \quad R = 4,$$

und es gibt bekanntlich eine Minimalkurve 3. O., deren Rang gleich 4 ist, und deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält. Also:

Satz 36. Es gibt eine Minimalfläche dritter Klasse.[1])

Es fragt sich, ob es reelle Minimalflächen dritter Klasse gibt. Um diese Frage zu beantworten, erinnern wir uns, daß eine jede Minimalkurve einer reellen algebraischen Doppelfläche durch eine gewisse Translationsbewegung in eine sich selbst konjugierte Kurve übergehen kann. Hieraus aber fließt der Hilfssatz:

Satz 37. Eine Minimalkurve von allgemeiner Lage einer reellen Doppelfläche trifft den Kugelkreis in einer **geraden** Anzahl von Punkten, die paarweise konjugiert sind.

Und da eine Minimalkurve dritter Ordnung den Kugelkreis nur in [354 einem Punkte trifft, folgt:

Satz 38. Es gibt keine reelle Minimalfläche dritter Klasse.

Um alle Minimalflächen vierter Klasse zu finden, setzt man:

$$M(R-M) = 4,$$

woraus:

$$M = 1, \quad R = 5.$$

Es gibt bekanntlich eine Minimalkurve vierter Ordnung, deren Rang 5 ist, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält. Also existiert eine Minimalfläche vierter Klasse. Da indes die besprochene Minimalkurve den Kugelkreis nur in einem Punkte trifft, so gibt es keine reelle Minimalfläche vierter Klasse. Also:

Satz 39. Es gibt eine Minimalfläche vierter Klasse, welche jedoch immer imaginär ist.

Und da es nach Herrn Hennebergs schönen Untersuchungen eine reelle Minimalfläche fünfter Klasse gibt, so folgt[2]):

1) Diese Fläche ist, wie ich beiläufig bemerke, eine Cayleysche Linienfläche dritter Ordnung.

2) Man vergleiche hierzu den letzten Paragraphen dieser Abhandlung.

Satz 40. Die niedrigste Klassenzahl der **reellen** Minimalflächen ist 5.

Wie man sieht, sind alle Minimalflächen fünfter Klasse bestimmt durch die Gleichung:

$$M(R-M)=5,$$

woraus:

$$M=1,\quad R=6.$$

In späteren Paragraphen dieser Abhandlung werde ich mich eingehender mit der Bestimmung aller Minimalflächen von gegebener Klasse beschäftigen. Es gelingt mir unter anderem, alle reellen Minimalflächen anzugeben, deren Klasse gleich einer beliebigen vorgelegten Primzahl ist.

§ 6. Die Ordnung einer algebraischen Minimalfläche.

Ich stelle mir jetzt die Aufgabe, die Ordnung einer vorgelegten algebraischen Minimalfläche:

$$(1)\qquad \begin{cases} x=A(t)+A_1(\tau),\\ y=B(t)+B_1(\tau),\\ z=C(t)+C_1(\tau)\end{cases}$$

zu bestimmen. Ich werde eine allgemeine Methode zur Erledigung dieses Problems entwickeln. Dabei bemerke ich, daß sich diese Methode überhaupt auf alle Flächen, deren Gleichungen die Form (1) besitzen, anwenden läßt.

22. Ich schneide die vorgelegte Minimalfläche, deren Minimal- [355
kurven zwei verschiedene Scharen bilden mögen, mit einer Geraden, die durch den gegebenen Punkt:

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c$$

hindurchgeht, und welche dabei die Richtungskosinus α, β, γ besitzt. Die Gleichungen dieser Geraden sind:

$$(2)\qquad x=a+\alpha\varrho,\quad y=b+\beta\varrho,\quad z=c+\gamma\varrho,$$

wo ϱ die Distanz des laufenden Punktes x, y, z von dem festen Punkte a, b, c bezeichnet.

Ich setze voraus, daß die Konstanten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ allgemeine Werte haben. Infolgedessen kann ich annehmen, daß sämtliche Schnittpunkte zwischen der Fläche (1) und der Geraden (2) verschieden sind und dabei endliche Koordinatenwerte haben. Ich nehme ferner an, daß die Gerade (2) nicht eine solche Lage besitzt, daß zwei unter ihren Schnittpunkten mit der Fläche demselben Wertsysteme t, τ entsprechen. Ich setze endlich voraus, daß die Gerade (2) auch nicht eine solche Lage besitzt, daß ein Schnittpunkt zu einem solchen Wertsysteme t, τ gehört, für welches eine unter den Größen $A(t), B(t), C(t), A_1(\tau), B_1(\tau), C_1(\tau)$ unendlich wird.

Nach diesen Festsetzungen ist die Ordnung der Fläche gleich der Zahl der Wertsysteme t, τ, ϱ, welche die Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} A(t)+A_1(\tau)=a+\alpha\varrho,\\ B(t)+B_1(\tau)=b+\beta\varrho,\\ C(t)+C_1(\tau)=c+\gamma\varrho\end{cases}$$

erfüllen, ohne eine oder mehrere unter den Größen $A(t), B(t), C(t), A_1(\tau), B_1(\tau), C_1(\tau)$ unendlich zu machen.

Wir schreiben die Gleichungen (3) folgendermaßen:

$$(4)\qquad \begin{cases} A(t)-a=\alpha\varrho-A_1(\tau),\\ B(t)-b=\beta\varrho-B_1(\tau),\\ C(t)-c=\gamma\varrho-C_1(\tau),\end{cases}$$

und ersetzen sie darnach, indem wir drei Hilfsgrößen x', y', z' einführen, durch die sechs äquivalenten Gleichungen:

$$(5)\qquad x'=A(t)-a,\quad y'=B(t)-b,\quad z'=C(t)-c.$$

$$(6)\qquad x'=\alpha\varrho-A_1(\tau),\quad y'=\beta\varrho-B_1(\tau),\quad z'=\gamma\varrho-C_1(\tau).$$

Die drei Gleichungen (5) bestimmen eine Minimalkurve, die mit den Minimalkurven der einen Schar unserer Fläche kongruent und gleichgestellt ist. Die drei Gleichungen (6) bestimmen eine Zylinderfläche, deren [356
Erzeugende die Richtungskosinus α, β, γ besitzen, und welche dabei die Minimalkurve:

$$x'=-A_1(\tau),\quad y'=-B_1(\tau),\quad z'=-C_1(\tau)$$

enthält. Hiernach ist der folgende Satz gefunden:

Satz 41. Die Ordnung der Fläche (1) ist gleich der Anzahl der im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkte zwischen der Kurve (5) und der Zylinderfläche (6). Vorausgesetzt ist dabei, daß die Größen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ allgemeine Werte haben.[1]

[1] Man könnte sich von vornherein denken, daß ein im endlichen Raume gelegener Schnittpunkt x', y', z' zwischen der Kurve (5) und der Zylinderfläche einem

Ist nun die Kurve (5) von der Ordnung m, und die Kurve:

$$x = A_1(\tau), \quad y = B_1(\tau), \quad z = C_1(\tau)$$

und also auch die Kurve:

$$x = -A_1(\tau), \quad y = -B_1(\tau), \quad z = -C_1(\tau)$$

von der Ordnung m_1, so schneidet die Kurve (5) die Zylinderfläche (6) in $m m_1$ Punkten. Liegen dieselben sämtlich im endlichen Raume, so ist die Ordnung der Fläche (1) gleich $m m_1$. Liegen dagegen einige unter diesen Punkten, etwa ω, unendlich entfernt, so ist die Ordnung der Minimalfläche gleich $m m_1 - \omega$. Also:

Satz 42. Erzeugen zwei algebraische Minimalkurven, deren Ordnungen beziehungsweise gleich m und m_1 sein mögen, eine Minimalfläche, so läßt sich die Ordnung dieser Fläche durch $m m_1 - \omega$ ausdrücken. Hierbei ist ω eine positive Zahl, die nur vom Verhalten der beiden vorgelegten Minimalkurven im Unendlichen abhängt.

Haben insbesondere unsere beiden Minimalkurven keinen gemeinsamen unendlich entfernten Punkt, so ist ω gleich Null, sodaß die Ordnung der Fläche gleich $m m_1$ ist.

Ist unsere Minimalfläche insbesondere reell, so ist, da zwei konjugierte Minimalkurven dieselbe Ordnung haben, m gleich m_1. Setzen wir voraus, daß sich unter den unendlich entfernten Punkten einer Minimalkurve unserer Fläche keine solchen befinden, die zu einander konjugiert sind, so ist ω gleich Null, da unsere Minimalkurve keinen unendlich entfernten Punkt mit der konjugierten Kurve gemein hat. Also:

Satz 43. Erzeugt eine Minimalkurve von der Ordnung m eine reelle Minimalfläche, die jedoch keine Doppelfläche ist, so ist die Ordnung dieser Fläche gleich $m^2 - \omega$. Die Zahl ω ist gleich Null, wenn die Minimalkurve keine konjugierten, unendlich entfernten Punkte besitzt; dagegen größer als Null, wenn die Kurve solche Punkte enthält. [357

Wertsysteme t, τ entspräche, für welches eine der Größen $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ und also auch ϱ unendlich wäre. Dann aber beständen für diesen Wert von τ die Relationen:

$$\frac{A_1(\tau)}{\alpha} = \frac{B_1(\tau)}{\beta} = \frac{C_1(\tau)}{\gamma},$$

und das ist unmöglich, da α, β, γ allgemeine Konstanten sind.

23. Es fragt sich, wie man in jedem einzelnen Falle die Zahl ω, das heißt, die Anzahl der unendlich entfernten Schnittpunkte der Kurve (5) mit dem Zylinder (6) bestimmt.

Um dies zu beantworten, ersetzen wir die Kurve (5) durch einen hindurchgehenden Zylinder, dessen Erzeugende, wie diejenigen des Zylinders (6), die Richtungskosinus α, β, γ besitzen. Die Zahl ω ist gleich der Anzahl derjenigen gemeinsamen Erzeugenden dieser beiden Zylinder, die in der unendlich entfernten Ebene liegen. Hierbei ist zu bemerken, daß der Zylinder (6), nachdem die Konstanten α, β, γ gewählt sind, eine bestimmte Lage besitzt, während der neue Zylinder wegen der unbestimmten Parameter a, b, c zweifach unendlich viele Lagen besitzen kann. Diese Lagen gehen aus einer bestimmten solchen Lage durch Anwendung aller Translationen des Raumes hervor. Indem wir sowohl den festen, wie den variablen Zylinder durch seine Schnittkurve mit einer festen Ebene ersetzen, erhalten wir den Satz:

Satz 44. Die Zahl ω ist gleich der Anzahl der unendlich entfernten Schnittpunkte einer festen ebenen Kurve mit einer variablen Kurve derselben Ebene, auf die alle möglichen Translationen, welche diese Ebene invariant lassen, ausgeführt werden.

Es ist leicht, den letzten Satz durch ein analytisches Raisonnement herzuleiten. Die Gleichungen (4) geben durch Elimination von ϱ:

$$(7) \qquad \begin{cases} \beta A(t) - \alpha B(t) - (\beta a - \alpha b) = -[\beta A_1(\tau) - \alpha B_1(\tau)], \\ \gamma A(t) - \alpha C(t) - (\gamma a - \alpha c) = -[\gamma A_1(\tau) - \alpha C_1(\tau)], \end{cases}$$

und da jedes Wertsystem t, τ, welches diese beiden Gleichungen befriedigt und dabei den Größen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ endliche Werte erteilt, durch Einsetzung in (4) zugleich der Größe ϱ einen endlichen Wert gibt, so ist die Ordnung der Fläche gleich der Anzahl derjenigen Wertsysteme t, τ, welche die beiden Gleichungen (7) erfüllen und dabei keine unter den Größen $A(t), \ldots, C_1(\tau)$ unendlich machen.

Da nun die Parameter α, β, γ allgemeine Werte haben sollen, so können wir annehmen, indem wir mit t_∞ einen Wert von t bezeichnen, der eine der Größen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ unendlich macht, daß die Gleichungen:

$$\frac{A(t_\infty)}{\alpha} = \frac{B(t_\infty)}{\beta} = \frac{C(t_\infty)}{\gamma}$$

nicht bestehen, und ebenso, indem wir mit τ_∞ einen Wert von τ bezeichnen, der eine der Größen $A_1(\tau)$, $B_1(\tau)$, $C_1(\tau)$ unendlich macht, [358 daß die Gleichungen:

$$\frac{A_1(\tau_\infty)}{\alpha} = \frac{B_1(\tau_\infty)}{\beta} = \frac{C_1(\tau_\infty)}{\gamma}$$

nicht bestehen.

Infolgedessen ist die Ordnung der Fläche zugleich die Anzahl derjenigen Wertsysteme t, τ, welche die beiden Gleichungen (7) erfüllen, und dabei keine unter den Größen:

$$\beta A(t) - \alpha B(t), \quad \gamma A(t) - \alpha C(t),$$
$$\beta A_1(\tau) - \alpha B_1(\tau), \quad \gamma A_1(\tau) - \alpha C_1(\tau)$$

unendlich machen.

Betrachten wir daher die beiden Kurven:

$$x' = \beta A(t) - \alpha B(t) - (\beta a - \alpha b),$$
$$y' = \gamma A(t) - \alpha C(t) - (\gamma a - \alpha c),$$

und:

$$x'' = -[\beta A_1(\tau) - \alpha B_1(\tau)],$$
$$y'' = -[\gamma A_1(\tau) - \alpha C_1(\tau)],$$

so ist, können wir sagen, die Ordnung der Fläche gleich der Anzahl der nicht unendlich entfernten Schnittpunkte unserer beiden Kurven.[1])

24. Handelt es sich darum, die Ordnung einer Doppelfläche:

$$x = A(t) + A(\tau),$$
$$y = B(t) + B(\tau),$$
$$z = C(t) + C(\tau)$$

zu bestimmen, so muß man sich erinnern, daß die beiden Wertsysteme:

$$t = a, \quad \tau = b,$$
$$t = b, \quad \tau = a$$

denselben Punkt unserer Fläche liefern. Daher sind die Schnittpunkte der Fläche mit der Geraden:

$$x = a + \alpha\varrho, \quad y = b + \beta\varrho, \quad z = c + \gamma\varrho$$

---

1) Diese beiden Kurven sind, wie man sieht, Projektionen der beiden Minimalkurven:

$$x = A(t) - a, \quad y = B(t) - b, \quad z = C(t) - c$$

und:

$$x = -A_1(\tau), \quad y = -B_1(\tau), \quad z = -C_1(\tau).$$

allerdings, wie im allgemeinen Falle, durch die Gleichungen:

$$A(t) + A(\tau) = a + \alpha\varrho,$$
$$B(t) + B(\tau) = b + \beta\varrho,$$
$$C(t) + C(\tau) = c + \gamma\varrho$$

bestimmt; aber man hat jetzt zu beachten, daß je zwei Wertsysteme [359
t, τ, welche diese Gleichungen erfüllen und dabei keine unter den Größen $A(t), \ldots, C(\tau)$ unendlich machen, demselben Schnittpunkte zwischen der Fläche und der Geraden entsprechen. Die in den früheren Entwickelungen als Ordnungszahl gefundene Zahl ist daher jetzt durch 2 zu dividieren. Also:

Satz 45. Erzeugt eine Minimalkurve m-ter Ordnung eine Doppelfläche, so ist die Ordnung dieser Fläche $\frac{1}{2}(m^2 - \omega)$, wo ω nach den früheren Regeln bestimmt wird.

Dieser Satz gilt für alle Doppelflächen, sowohl die reellen wie die imaginären.

§ 7. Bestimmung der Zahl ω.

25. Ich werde jetzt zeigen, wie man die Anzahl der unendlich entfernten Schnittpunkte einer festen Kurve mit einer variablen Kurve, auf die sukzessiv alle möglichen Translationen ausgeführt werden, bestimmen kann. Hierzu brauche ich einen bekannten Satz über die Schnittpunkte zweier algebraischer Kurven.[1])

„Seien $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$ drei gerade Linien einer Ebene, und sei $t = 0$, $x = 0$ ein gemeinsamer Schnittpunkt zweier Kurven. Ich setze:

$$\frac{t}{y} = \tau, \quad \frac{x}{y} = \xi,$$

und suche für jede Kurve die Reihenentwickelung von τ nach den wachsenden Potenzen von ξ. Seien:

$$\tau = A_0\xi^{\frac{p}{q}} + A_1\xi^{\frac{p+1}{q}} + \cdots + A_k\xi^{\frac{p+k}{q}} + \cdots,$$
$$\tau' = B_0\xi^{\frac{r}{s}} + B_1\xi^{\frac{r+1}{s}} + \cdots + B_i\xi^{\frac{r+i}{s}} + \cdots,$$

diese Entwickelungen.

---

1) Vergleiche Halphen, Bulletin de la Société mathématique, 1873. Im Jahre 1869 teilte Weierstraß mir in einem Gespräche denselben Satz mit.

„Es wird vorausgesetzt, daß die Exponenten $p:q$ und $r:s$ gleich oder größer als 1 sind, sodaß die Gerade $x = 0$ keine Tangente unserer Kurven ist.

„Man bildet die Differenz $\tau - \tau'$, die qs verschiedene Funktionen von ξ darstellt. Bezeichnet man nun mit:

$$\delta(\tau - \tau')$$

die Ordnung der infinitesimalen Größe $\tau - \tau'$, aufgefaßt als Funktion von ξ, so ist die Summe:

$$\sum \delta(\tau - \tau')$$ [360

eben die Anzahl der im Punkte $t = 0$, $x = 0$ vereinigten Schnittpunkte unserer beiden Kurven."

Ist insbesondere $p:q \gtrless r:s$, zum Beispiel:

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s},$$

so ist $\delta(\tau - \tau') = p:q$, und:

$$\sum \delta(\tau - \tau') = ps,$$

sodaß ps die Zahl der vereinigten Schnittpunkte ist. Ist dagegen:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s},$$

und ist dabei ε ein Maximalwert der Größe $\delta(\tau - \tau')$, so ist offenbar:

$$\varepsilon q s$$

ein Maximalwert für die Zahl der vereinigten Schnittpunkte.

Hat die eine oder haben beide Kurven mehrere derartige Entwickelungen, so verbindet man jede Entwickelung der einen Kurve mit jeder Entwickelung der zweiten Kurve und summiert die hierdurch erhaltenen Zahlen.

26. Diese bekannte Theorie werden wir jetzt auf das im Anfang dieses Paragraphen gestellte Problem anwenden.

Sei $t = 0$ die unendlich entfernte Gerade, und sei $x = 0$, $t = 0$ ein gemeinsamer Punkt der festen und der beweglichen Kurve. Dabei nehmen wir an, daß unsere Kurven nicht von der Geraden $x = 0$ berührt werden. Sei:

$$\tau = \sum A_k \xi^{\frac{p+k}{q}} \tag{8}$$

die Reihenentwickelung eines Zweiges der festen Kurve, und sei:

$$\tau = \sum B_i \xi^{\frac{r+i}{s}} \tag{9}$$

die Reihenentwickelung eines Zweiges der beweglichen Kurve.

Ist nun zum Beispiel:

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s},$$

so ist nach dem Vorangehenden die Zahl der im Punkte $t = 0$, $x = 0$ vereinigten Schnittpunkte unserer Kurven gleich:

$$\Sigma p s,$$

wo sich das Summationszeichen darauf bezieht, daß jede Entwickelung der einen Kurve mit jeder Entwickelung der zweiten Kurve verbunden werden soll.

Ist dagegen: [361

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s},^{1)}$$

so muß man in jedem einzelnen Falle eine gewisse Anzahl Glieder der Reihenentwickelungen (8) und (9) wirklich aufstellen und sodann die Formel:

$$\Sigma\Sigma\delta(\tau - \tau')$$

anwenden. Hierbei tritt, wie wir sogleich zeigen werden, der merkwürdige Umstand ein, daß man einen Maximalwert der gesuchten Zahl a priori angeben kann. Dies liegt daran, daß die Größen B_i variable Parameter sind, weil die Entwickelung (9) eine variable Kurve darstellt.

Seien $B_0', \ldots, B_i', \ldots$ die Werte dieser Parameter, die einer bestimmten Lage unserer beweglichen Kurve entsprechen, und sei:

$$\tau = \sum B_i' \xi^{\frac{r+i}{s}},$$

oder:

$$\frac{t}{y} = \sum B_i' \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{r+i}{s}}$$

die entsprechende Entwickelung. Setzt man hier, indem man mit a und b unbestimmte Parameter bezeichnet, statt x und y beziehungsweise $x + at$, $y + bt$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{t}{y + bt} = \sum B_i' \left(\frac{x + at}{y + bt}\right)^{\frac{r+i}{s}},$$

---

1) Wenn $p:q = r:s$ ist, so ist:

$$p = \lambda r, \quad q = \lambda s,$$

wo λ nicht gleich 1 zu sein braucht.

welche die allgemeine Lage unserer beweglichen Kurve darstellt. Indem wir diese Entwickelung nach den gewöhnlichen Regeln auf die Form:

$$\frac{t}{y} = \sum B_i \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{r+i}{s}}$$

bringen, erkennen wir, daß:

$$B_0 = B_0', \quad B_1 = B_1', \ldots, B_{r-s-1} = B_{r-s-1}'$$

sind; dagegen ist:

$$B_{r-s} = B_{r-s}' + \frac{a r}{s} B_0'^2,$$

sodaß B_{r-s} und B_{r-s}', für einen allgemeinen Wert von a, verschieden sind.

Hieraus geht hervor, daß die Zahl:

$$\frac{2r - s}{s}$$

der Maximalwert der Ordnung der infinitesimalen Größe: [362

$$\sum A_k \xi^{\frac{p+k}{q}} - \sum B_i \xi^{\frac{r+i}{s}}$$

ist, wenn $p:q$ gleich $r:s$ ist.

Infolgedessen haben die Kurven (8) und (9), wenn $p:q = r:s$ ist, höchstens $(2r-s)q$ im Punkte $t = 0$, $x = 0$ vereinigte Schnittpunkte, die von den besprochenen Reihenentwickelungen herrühren.

27. Wir werden jetzt *bis auf weiteres* annehmen, daß eine jede unserer beiden Kurven nur *eine* Reihenentwickelung im Punkte $t = 0$, $x = 0$ besitzt. Alsdann schneidet die unendlich entfernte Gerade die feste Kurve in p Punkten, die im Punkte $t = 0$, $x = 0$ zusammengefallen sind. Ebenso schneidet jene Gerade die bewegliche Kurve in r Punkten, die im Punkte $t = 0$, $x = 0$ zusammengefallen sind. Da nun:

$$\frac{r}{s} \gtreqless 1 \quad \text{und:} \quad \frac{p}{q} \gtreqless 1$$

ist, und folglich auch:

$$rp \gtreqless sp, \quad rp \gtreqless rq,$$

so besteht, wenn $p:q$ und $r:s$ verschieden sind, der Satz:

Schneidet die unendlich entfernte Gerade die feste Kurve in p im Punkte $x = 0$, $t = 0$ zusammengefallenen Punkten, und die bewegliche Kurve in r solchen Punkten, so ist rp ein Maximum der Zahl der in diesem Punkte vereinigten Schnittpunkte unserer Kurven. Vorausgesetzt ist dabei, daß $p:q$ und $r:s$ verschieden sind, ferner, daß eine jede unserer Kurven in dem betreffenden Punkte nur eine Reihenentwickelung besitzt.

Sodann wenden wir uns zu dem Falle:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}, \tag{10}$$

indem wir fortwährend annehmen, daß jede Kurve in dem betreffenden Punkte nur eine Reihenentwickelung besitzt. Nach dem Vorangehenden ist:

$$(2r - s)q$$

ein Maximum der Zahl der im Punkte $t = 0$, $x = 0$ vereinigten Schnittpunkte unserer Kurven. Ferner ist:

$$\frac{r}{s} \gtreqless 1,$$

also kommt:

$$(r - s)^2 \gtreqless 0,$$

und zugleich:

$$r^2 \gtreqless (2r - s)s,$$

oder, indem wir berücksichtigen, daß $r:s = p:q$ ist:

$$rp \gtreqless (2r - s)q.$$ [363

Hiermit ist nachgewiesen, daß *der obenstehende Satz noch besteht, wenn die Exponenten $r:s$ und $p:q$ einander gleich sind.*

Laß uns jetzt voraussetzen, daß die feste Kurve in dem Punkte $x = 0$, $t = 0$ gerade k Reihenentwickelungen besitzt, und seien:

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_\varkappa}{q_\varkappa}, \ldots, \frac{p_k}{q_k}$$

die entsprechenden Werte des Exponenten $p:q$; wir nehmen ferner an, daß die bewegliche Kurve in demselben Punkte j Reihenentwickelungen besitzt, und daß:

$$\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2}, \ldots, \frac{r_i}{s_i}, \ldots, \frac{r_j}{s_j}$$

die entsprechenden Werte des Exponenten $r:s$ sind. Alsdann erkennt man, indem man je zwei solche Reihenentwickelungen verbindet, daß die Summe:

$$\sum_i \sum_\varkappa r_i p_\varkappa = \left(\sum_i r_i\right)\left(\sum_\varkappa p_\varkappa\right)$$

das Maximum der Zahl der im Punkte $x = 0$, $t = 0$ vereinigten Schnittpunkte unserer Kurven ist. Und da die feste Kurve die unendlich entfernte

Gerade in $p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ im Punkte $x = 0$, $t = 0$ zusammengefallenen Punkten schneidet, und ebenso die bewegliche Kurve dieselbe Gerade in $r_1 + r_2 + \cdots + r_l$ zusammengefallenen Punkten schneidet, so ergibt sich ohne Beschränkung der Satz:

Satz 46. Schneidet die unendlich entfernte Gerade die feste und die bewegliche Kurve beziehungsweise in p und in r im Punkte $x = 0$, $t = 0$ zusammengefallenen Punkten, so ist pr ein Maximalwert für die Zahl der in diesem Punkte vereinigten Schnittpunkte unserer beiden Kurven.

28. Im vorangehenden Paragraphen reduzierten wir die Bestimmung der Ordnung einer Minimalfläche auf die Bestimmung der unendlich entfernten Schnittpunkte einer festen ebenen Kurve mit einer beweglichen Kurve derselben Ebene, auf welche alle möglichen Translationen ausgeführt werden. Und in den vorangehenden Nummern dieses Paragraphen zeigten wir, daß die Erledigung des reduzierten Problems nur die Bestimmung einer gewissen Anzahl von Gliedern in den Reihenentwickelungen zweier auf der Fläche gelegener Minimalkurven verlangt.

In späteren Paragraphen werden wir vermöge dieser allgemeinen Theorie die Ordnungen einer Reihe algebraischer Minimalflächen bestimmen.

Hier beschränken wir uns darauf, zwei Formeln zu entwickeln, die uns nützlich sein werden, wenn wir später die schwierige Aufgabe an- [364
greifen, alle reellen Minimalflächen von gegebener Ordnung anzugeben.

Auf einer vorgelegten Minimalfläche wähle ich eine Minimalkurve jeder Schar. Ich nehme an, daß diese beiden Kurven zusammen die unendlich entfernte Ebene in g von einander verschiedenen Punkten schneiden. Unter diesen g Punkten, die $P_1, P_2, \ldots, P_g$ heißen mögen, gehören im allgemeinen einige nur der einen Kurve, einige nur der zweiten Kurve an, und endlich können einige gleichzeitig beiden Kurven angehören.

Im Punkte P_1 möge die erste Kurve die unendlich entfernte Ebene in p_1 vereinigten Punkten treffen, im Punkte P_2 in p_2 vereinigten Punkten, und so weiter, und endlich in dem letzten Punkte P_g in p_g vereinigten Punkten. Dabei können unter den Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_g$ einige gleich Null sein. Jedenfalls ist die Zahl:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_g = \sum p_\varkappa$$

die Ordnungszahl der Kurve.

Dementsprechend möge die Minimalkurve der zweiten Schar die unendlich entfernte Ebene überhaupt im Punkte $P_\varkappa$ in $\pi_\varkappa$ vereinigten Punkten

treffen. Alsdann ist die Zahl:

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_g = \sum \pi_\varkappa$$

die Ordnungszahl der zweiten Kurve.

Nehmen wir nun an, daß unsere Fläche keine Doppelfläche ist, (was wir übrigens schon implizite vorausgesetzt haben, indem wir von zwei Scharen von Minimalkurven sprachen), so lehren unsere früheren Entwickelungen, daß die Zahl:

$$\left(\sum p_\varkappa\right)\left(\sum \pi_\varkappa\right) - \sum p_\varkappa \pi_\varkappa$$

ein Minimalwert der Ordnung unserer Fläche ist.

Ist die Fläche eine Doppelfläche, so ist $p_\varkappa = \pi_\varkappa$, und also ist:

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\sum p_\varkappa\right)^2 - \sum p_\varkappa^2\right\}$$

ein Minimalwert für die Ordnung der betreffenden Fläche.

Ist unsere Fläche reell und dabei keine Doppelfläche, so sind die Minimalkurven der beiden Scharen konjugiert und daher von derselben Ordnung, sodaß:

$$\sum p_\varkappa = \sum \pi_\varkappa$$

ist. Also ist:

$$\left(\sum p_\varkappa\right)^2 - \sum p_\varkappa \pi_\varkappa$$

ein Minimalwert für die Ordnung der Fläche.

§ 8. Minimalkurven, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthalten. [365

Es ist möglich, eine vollständige Theorie solcher Minimalkurven zu entwickeln, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthalten. Hierauf begründen wir in einem späteren Paragraphen (§ 10) unter anderm eine Bestimmung und Diskussion aller reellen Minimalflächen, deren Klassenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist.

29. Wie wir in Nummer 10 sahen, bestimmen die Weierstraßischen Formeln:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = (1-s^2)F'''(s) + 2sF''(s) - 2F'(s), \\ y = i(1+s^2)F'''(s) - 2isF''(s) + 2iF'(s), \\ z = 2sF'''(s) - 2F''(s), \end{cases}$$

in denen F eine arbiträre algebraische Funktion von s bezeichnet, eine jede algebraische Minimalkurve. Aus den entsprechenden Differentialgleichungen:

$$dx = (1-s^2)F'''(s)ds,$$
$$dy = i(1+s^2)F'''(s)ds,$$
$$dz = 2sF'''(s)ds$$

folgt:

$$dx : dy : dz = (1-s^2) : i(1+s^2) : 2s,$$

sodaß die beiden Verhältnisse:

$$\frac{dx}{dz}, \quad \frac{dy}{dz}$$

rationale Funktionen von s sind. Andererseits ist:

$$s = -\frac{dx}{dz} - i\frac{dy}{dz}.$$

Hieraus fließt einerseits, daß zu einem gegebenen Werte des Parameters s eine bestimmte Richtung der Tangente der Minimalkurve gehört, andererseits, daß einer gegebenen Tangentenrichtung ein ganz bestimmter Wert von s entspricht. Erinnern wir uns daher, daß die Tangenten einer Minimalkurve sämtlich den Kugelkreis treffen, so können wir sagen:

Die verschiedenen Werte des Parameters s sind den Punkten des Kugelkreises eindeutig zugeordnet. Gibt man in den Formeln (1) der Größe s einen gewissen Wert s_0, so erhält man denjenigen Punkt oder diejenigen Punkte der Minimalkurve, deren Tangenten den Kugelkreis in dem zu s_0 gehörigen Punkte treffen.

Laß uns jetzt voraussetzen, daß $F(s)$ eine *rationale* Funktion von s ist; alsdann sind auch x, y, z rationale Funktionen von s. In diesem Falle hat daher unsere Minimalkurve nur *eine* Tangente, die den Kugel- [366
kreis in einem vorgelegten Punkte schneidet. Der Kugelkreis ist daher ein *einfacher* Kegelschnitt auf der betreffenden Developpablen. Also:

Satz 47. *Ist $F(s)$ eine* **rationale** *Funktion von s, so bestimmen die Formeln (1) eine Minimalkurve, deren Developpable den Kugelkreis als* **einfachen** *Kegelschnitt enthält.*

Ist andererseits der Kugelkreis ein einfacher Kegelschnitt auf der Developpablen einer algebraischen Minimalkurve, so sind x, y, z rationale Funktionen von s, und da wegen der Formeln (1):

$$F(s) = -\tfrac{1}{4}\{(1-s^2)x + i(1+s^2)y + 2sz\}$$

ist, so folgt, daß auch $F(s)$ eine rationale Funktion von s ist. Also:

Satz 48. *Man erhält* **eine jede** *algebraische Minimalkurve, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält, indem man in den Formeln (1) für $F(s)$ eine* **rationale** *Funktion von s setzt.*

Um die zu einer beliebigen vorgelegten rationalen Funktion F gehörige Minimalkurve zu diskutieren, denken wir uns $F(s)$ zunächst in eine ganze Funktion $H(s)$ und in Ausdrücke von der Form:

$$\frac{A}{(s-a)^m}$$

zerlegt. Ist nun $H(s)$ von dritter oder von noch höherer Ordnung, so werden die durch die Formeln (1) bestimmten Ausdrücke der Größen x, y, z *unendlich*, wenn man $s = \infty$ setzt. In diesem Falle gibt daher der Parameterwert $s = \infty$ einen unendlich entfernten Punkt auf unserer Kurve. Und da sich das Eintreten dieses Umstandes immer dadurch vermeiden läßt, daß man auf die Minimalkurve eine gewisse (reelle) Bewegung ausführt, welche keine Translation ist, so können wir uns auf den Fall, daß $H(s)$ von der nullten, ersten oder zweiten Ordnung ist, beschränken.

Bestimmt man auf der anderen Seite die beiden Minimalkurven, die zu *zwei* rationalen Funktionen $F(s)$ und $F_1(s)$ gehören, deren Differenz eine ganze Funktion von der zweiten Ordnung ist, so erkennt man, daß die eine dieser Minimalkurven durch eine gewisse Translationsbewegung in die andere übergehen kann. Hieraus ergibt sich der Satz:

Satz 49. *Eine jede Minimalkurve, die der Hypothese $M = 1$ entspricht, kann in der Weise erhalten werden, daß man in den Formeln (1) statt $F(s)$ eine gewisse rationale Funktion von s setzt, deren Nenner von höherer Ordnung als der Zähler ist, und daß man darnach eine gewisse Bewegung auf die erhaltene Kurve ausführt.*

30. Wir können daher voraussetzen, daß $F(s)$ die Form:

$$F(s) = \sum_k^{1\ldots q} \left\{ \frac{A_{m_k}^{(k)}}{(s-a_k)^{m_k}} + \frac{A_{m_k-1}^{(k)}}{(s-a_k)^{m_k-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(k)}}{(s-a_k)} \right\},$$

oder die äquivalente Form: [367

$$F(s) = \sum_k^{1\ldots q} \sum_j^{1\ldots m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j} \tag{2}$$

besitzt. Man findet:

$$F'(s) = \sum_k \sum_j \frac{-j A_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}},$$
$$F''(s) = \sum_k \sum_j \frac{j(j+1) A_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+2}}.$$

Durch Einsetzung in (1) erhalten x, y, z die Form:

$$\frac{h_{m_1+m_2+\cdots+m_q+2q-1}}{(s-a_1)^{m_1+2}(s-a_2)^{m_2+2}\ldots(s-a_q)^{m_q+2}},$$

wo der Index die Ordnung des Zählers angibt.

Insbesondere ist:

$$z=\sum_k\sum_j\frac{2j\,((j+2)s-a_k)}{(s-a_k)^{j+2}}A_j^{(k)}=\frac{k_{m_1+m_2+\cdots+m_q+2q-2}}{(s-a_1)^{m_1+2}\ldots(s-a_q)^{m_q+2}}.$$

Wir werden zeigen, daß sich der Zähler:

$$k_{m_1+m_2+\cdots+m_q+2q-2}$$

nicht durch einen Faktor des Nenners verkürzen läßt.

Laß uns in der Tat voraussetzen, daß eine Verkürzung zum Beispiel mit $s-a_1$ möglich wäre, sodaß z die Form:

$$z=\frac{k_{m_1+\cdots+m_q+2q-3}}{(s-a_1)^{m_1+1}(s-a_2)^{m_2+2}\ldots(s-a_q)^{m_q+2}}$$

besäße. Alsdann bestände eine Relation von der Form:

$$\frac{2\,m_1((m_1+2)s-a_1)}{(s-a_1)^{m_1+2}}A_{m_1}^{(1)}=\frac{k_{m_1+\cdots+m_q+2q-3}}{(s-a_1)^{m_1+1}(s-a_2)^{m_2+2}\ldots(s-a_q)^{m_q+2}}-$$
$$-\sum_j^{1\ldots m_1-1}\frac{2j((j+2)s-a_1)}{(s-a_1)^{j+2}}A_j^{(1)}-\sum_k^{2\ldots q}\sum_j^{1\ldots m_k}\frac{2j((j+2)s-a_k)}{(s-a_k)^{j+2}}A_j^{(k)},$$

wo die Größe $s-a_1$ in dem Nenner links in der Potenz $(s-a_1)^{m_1+2}$ aufträte, während sie in den Nennern rechts nur in niedrigeren Potenzen vorkäme. Und da sich der Zähler links nicht mit $s-a_1$ verkürzen läßt, so ist unsere frühere Annahme unmöglich. Folglich ist der Nenner von z von der Ordnung:

$$m_1+m_2+\cdots+m_q+2q,$$

während der Zähler von z eine niedrigere Ordnung besitzt. Und da nach dem Vorangehenden auch die Nenner und die Zähler der Größen x und y nicht von höherer Ordnung als der Nenner von z sind, ergibt sich, daß [368 die Ordnung unserer Kurve gleich Σm_k+2q ist.

Ferner ist klar, daß nur die Parameterwerte $s=a_k$ unendlich entfernte Punkte unserer Kurve liefern. Die unendlich entfernte Ebene schneidet unsere Kurve in q verschiedenen Punkten, die sämtlich auf dem Kugelkreise gelegen sind. In jedem Punkte $s=a_k$ fallen m_k+2 Schnittpunkte zwischen der Kurve und der unendlich entfernten Ebene zusammen. In

jedem solchen Schnittpunkte ist, wie ich beiläufig bemerke, die unendlich entfernte Ebene Oskulationsebene der Kurve. Also:

Satz 50. Hat $F(s)$ die Form (2), so ist die Ordnung der entsprechenden Minimalkurve gleich:

$$m_1+m_2+\cdots+m_q+2q.$$

Sie trifft die unendlich entfernte Ebene in q verschiedenen Punkten, die sämtlich auf dem Kugelkreise liegen, und zwar liegen im ersten Punkte m_1+2 Schnittpunkte der Kurve und der Ebene vereinigt, im zweiten liegen m_2+2 Schnittpunkte vereinigt, und so weiter.

31. Jetzt werden wir den Rang unserer Minimalkurve bestimmen.

Die Gleichungen:

$$x'=x+\varepsilon\frac{dx}{ds},\quad y'=y+\varepsilon\frac{dy}{ds},\quad z'=z+\varepsilon\frac{dz}{ds},$$

in denen x, y, z Koordinaten eines Punktes der Minimalkurve sind, während ε einen variablen Parameter darstellt, bestimmen sämtliche Punkte x', y', z', die auf einer Tangente der Kurve gelegen sind. Faßt man sowohl s wie ε als variable Parameter auf, so bestimmen unsere Gleichungen alle Punkte, die auf der Developpablen der Minimalkurve gelegen sind. Die Schnittpunkte der Developpablen mit der Geraden:

$$\text{(3)}\qquad\begin{cases}Ax'+By'+C=0,\\ Lx'+Mz'+N=0\end{cases}$$

sind daher bestimmt durch die Gleichungen:

$$\text{(4)}\qquad\begin{cases}Ax+By+C+\varepsilon\left(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}\right)=0,\\ Lx+Mz+N+\varepsilon\left(L\frac{dx}{ds}+M\frac{dz}{ds}\right)=0,\end{cases}$$

aus denen folgt:

$$\text{(5)}\qquad\begin{cases}\quad(Ax+By+C)\left(L\frac{dx}{ds}+M\frac{dz}{ds}\right)-\\ -(Lx+Mz+N)\left(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}\right)=0.\end{cases}$$

Wir setzen voraus, daß die Konstanten A, B, C, L, M, N allgemeine [369 Werte haben. Alsdann ist der Rang der Kurve, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Ordnung der Developpablen gleich der Anzahl der Schnittpunkte zwischen der Developpablen und der Geraden (3).

Da die Gerade eine allgemeine Lage hat, können wir annehmen, daß sie nicht mit einer Tangente der Kurve parallel ist, woraus hervorgeht, daß die Gleichungen:

$$A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds} = 0, \quad L\frac{dx}{ds} + M\frac{dz}{ds} = 0$$

nur unter der Voraussetzung gleichzeitig bestehen können, daß gleichzeitig:

$$\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{dz}{ds} = 0,$$

das heißt, daß gleichzeitig:

$$F'''(s) = 0$$

ist.

Ist nun x', y', z' ein, im endlichen Raume gelegener, Schnittpunkt, so geht durch denselben eine bestimmte Tangente, deren Berührungspunkt x, y, z einem bestimmten Werte s_0 von s entspricht. Und da für diesen Berührungspunkt die Größen:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

von Null verschieden sind, weil sonst die Gerade (3) eine partikuläre Lage hätte, so geben die Gleichungen (4) einen endlichen Wert der Größe ε. Ebenso ist klar, daß s_0 von ∞ verschieden ist, weil sonst die Gerade (3) eine spezielle Lage hätte. Hieraus ergibt sich, daß **jeder Schnittpunkt der Developpablen mit einer Geraden (3) von allgemeiner Lage ein endliches Wertsystem s, ε liefert, welches die Gleichungen (4) befriedigt.**

Laß uns andererseits voraussetzen, daß die Gleichungen (4) und also zugleich die Gleichung (5) durch ein endliches Wertsystem ε, s befriedigt werden. Alsdann sind die entsprechenden Werte von x, y, z, $dx:ds, dy:ds, dz:ds$ endlich[1]), und also liefern die Koordinatenwerte:

$$x + \varepsilon\frac{dx}{ds}, \quad y + \varepsilon\frac{dy}{ds}, \quad z + \varepsilon\frac{dz}{ds}$$

einen im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkt zwischen der Developpablen und der Geraden.

Es fragt sich, ob jeder endliche Wert von s, der die Gleichung (5) befriedigt, zugleich einen endlichen Wert von ε liefert.

1) Dies beruht darauf, daß für allgemeine Werte der Größen A, B, C, L, M, N keine unter den Größen $a_1, a_2, \ldots, a_q$ die Gleichung (5) befriedigt, wie in der nächsten Nummer nachgewiesen wird.

Der betreffende Wert von ε ist endlich, ausgenommen, wenn die beiden Gleichungen:

$$A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds} = 0,$$ [370

$$L\frac{dx}{ds} + M\frac{dz}{ds} = 0$$

bestehen, das heißt nach dem Vorangehenden, wenn:

$$F'''(s) = 0$$

ist. Unter den Lösungen der Gleichung (5) müssen also diejenigen als uneigentlich ausgeschlossen werden, welche zugleich $F'''(s) = 0$ ergeben. Also:

Satz 51. **Der Rang unserer Minimalkurve ist gleich der Zahl der verschiedenen Werte von s, welche die Gleichung (5) befriedigen, und welche nicht gleichzeitig $F'''(s) = 0$ erfüllen.**

32. Die Gleichung (5) kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$(6)\quad \begin{cases} AM(xdz - zdx) + BL(ydx - xdy) + BM(ydz - zdy) + \\ \qquad + (CL - AN)dx + CMdz - BNdy = 0. \end{cases}$$

Nun ist [mit Weglassung von ds]:

$$\begin{aligned} xdz - zdx &= (2s^2 + 2)F'F''' - 4sFF''', \\ ydx - xdy &= -4isF'F''' + 4iFF''', \\ ydz - zdy &= (-2s^2 + 2)iF'F''' + 4isFF''', \\ dx = (1 - s^2)F''', \quad dy &= i(1 + s^2)F''', \quad dz = 2sF'''. \end{aligned}$$

Daher ist F''' ein Faktor der linken Seite der Gleichung (6), und nach dem letzten Satze kann dieser Faktor weggelassen werden.

Es ist (Nr. 30):

$$F(s) = \sum_k \sum_j \frac{A_j^{(k)}}{(s - a_k)^j},$$

$$F'(s) = \sum_k \sum_j \frac{-jA_j^{(k)}}{(s - a_k)^{j+1}},$$

$$F''(s) = \sum_k \sum_j \frac{j(j+1)A_j^{(k)}}{(s - a_k)^{j+2}}.$$

Also nimmt die Gleichung (6) nach Weglassung des Faktors F''' die Form an:

$$(7)\quad \begin{cases} AM\left\{(2s^2+2)\sum_k\sum_j \frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}} - 4s\sum_k\sum_j \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}\right\} + \\ + BL\left\{-4is\sum_k\sum_j \frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}} + 4i\sum_k\sum_j \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}\right\} + \\ + BM\left\{(-2s^2+2)i\sum_k\sum_j \frac{-jA_j^{(k)}}{(s-a_k)^{j+1}} + 4is\sum_k\sum_j \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}\right\} + \\ + (CL-AN)(1-s^2) + CM\,.\,2s - BNi(1+s^2) = 0. \end{cases}$$

Durch Zusammenziehung erhält die linke Seite folgende Gestalt: [371

$$\frac{h_{m_1+m_2+\cdots+m_q+q+2}}{(s-a_1)^{m_1+1}(s-a_2)^{m_2+1}\cdots(s-a_q)^{m_q+1}},$$

wo der Zähler eine ganze Funktion von der Ordnung $\Sigma m_k + q + 2$ ist. Und da sich der Zähler für allgemeine Werte der Größen A, B, L, M nicht mit $s-a_1, s-a_2, \ldots,$ oder $s-a_q$ verkürzen läßt, weil die Größen:

$$s^2+1,\quad s \quad\text{und}\quad -s^2+1$$

nicht gleichzeitig mit einer Größe $s-a_k$ dividierbar sind, so hat die Gleichung (7) $\Sigma m_k + q + 2$ Wurzeln. Unter diesen Wurzeln befindet sich eo ipso keine der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_q$. Also ergibt sich der

Satz 52. Der Rang unserer Minimalkurve ist gleich:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_q + q + 2.$$

Bei dem Beweise dieses Satzes haben wir vorausgesetzt, daß die Gleichung (5):

$$(Ax+By+C)\left(L\frac{dx}{ds}+M\frac{dz}{ds}\right)-(Lx+Mz+N)\left(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}\right)=0$$

keine gleichen Wurzeln besitzt. Ich werde andeuten, wie man dies beweist.

Die gleichen Wurzeln, die möglicherweise existieren, befriedigen zugleich die durch Differentiation hervorgehende Gleichung:

$$(Ax+By+C)\left(L\frac{d^2x}{ds^2}+M\frac{d^2z}{ds^2}\right)-(Lx+Mz+N)\left(A\frac{d^2x}{ds^2}+B\frac{d^2y}{ds^2}\right)=0,$$

woraus:

$$\frac{L\frac{dx}{ds}+M\frac{dz}{ds}}{L\frac{d^2x}{ds^2}+M\frac{d^2z}{ds^2}} = \frac{A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}}{A\frac{d^2x}{ds^2}+B\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

Diese Gleichung erhält durch Ausmultiplizieren die Form:

$$AM\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)+BL\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)-BM\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)=0,$$

woraus durch eine geometrische Überlegung hervorgeht, daß die Gerade (3) jedesmal die Developpable der Minimalkurve berührt, wenn die Gleichung (5) eine mehrfache Wurzel besitzt. Und da dies durch die allgemeine Lage der Geraden (3) ausgeschlossen ist, folgt, daß gleiche Wurzeln nicht auftreten können.

33. Es ist sehr leicht, die Klasse einer Minimalkurve, die der Hypothese $M = 1$ entspricht, zu bestimmen. Dies soll jetzt gezeigt werden, obgleich diese Bestimmung für das Folgende unwesentlich ist.

Die Gleichung der Oskulationsebene:

$$(x'-x)(dz\,d^2y-dy\,d^2z)+(y'-y)(dx\,d^2z-dz\,d^2x)+ \\ +(z'-z)(dy\,d^2x-dx\,d^2y)=0$$

nimmt durch Ausführung und Weglassung des unwesentlichen Faktors [372 F'''^2 die Form an:

$$(1-s^2)x'+i(1+s^2)y'+2sz'+4F(s)=0,$$

wo x', y', z' die Koordinaten eines laufenden Punktes der Oskulationsebene sind. Und da:

$$F(s)=\sum_k^{1\ldots q}\sum_j^{1\ldots m_k}\frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}$$

ist, so folgt, daß die Oskulationsebenen, die durch einen beliebigen vorgelegten Punkt gehen, durch eine Gleichung von der $(m_1+\cdots+m_q+2)$-ten Ordnung bestimmt sind. Hieraus folgt:

Satz 53. Die Klasse unserer Minimalkurve ist gleich:

$$m_1+\cdots+m_q+2.$$

Bezeichne ich die Ordnung, die Klasse und den Rang unserer Minimalkurve beziehungsweise mit O, C und R, so ist also:

$$O = m_1+\cdots+m_q+2q,$$
$$C = m_1+\cdots+m_q+2,$$
$$R = m_1+\cdots+m_q+q+2.$$

Hieraus ergibt sich die Relation:

$$O+C-2R+2=0,$$

die für jede Minimalkurve besteht, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält.

Merkwürdig ist dabei, wie ich beiläufig bemerke, daß diese Relation bei einer Transformation durch reziproke Radien ungeändert bleibt.

Hier möge auch die Bemerkung ihren Platz finden, daß die im endlichen Raume gelegenen Spitzen und Inflexionstangenten einer jeden Minimalkurve beziehungsweise durch die Gleichungen:

$$F'''(s) = 0 \quad \text{und:} \quad F'''(s) = \infty$$

bestimmt werden. Ist jedoch $M = 1$, so hat die Kurve keine Inflexionstangente, deren Berührungspunkt im endlichen Raume gelegen ist.

Die in diesem Paragraphen gegebene Bestimmung der Ordnung, der Klasse und des Ranges einer Minimalkurve, die der Hypothese $M = 1$ entspricht, fand ich ursprünglich durch einfache synthetische Betrachtungen, indem ich nämlich den Einfluß eines jeden unendlich entfernten Punktes, der nur von der zugehörigen Reihenentwickelung abhängt, bestimmte. Eine ähnliche Diskussion gibt die Bestimmung der genannten charakteristischen Zahlen einer ganz beliebigen Minimalkurve.[1])

§ 9. Bestimmung aller sich selbst konjugierten Minimalkurven, die der Annahme $M = 1$ entsprechen. [373

Ich werde zeigen, daß es möglich ist, alle sich selbst konjugierten Minimalkurven, die der Annahme $M = 1$ entsprechen, zu bestimmen. Hieraus ergibt sich sodann im nächsten Paragraphen unmittelbar die Bestimmung aller reellen Minimalflächen, deren Klassenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist.

34. Setzt man in den Weierstraßischen Formeln einer Minimalkurve:

$$\begin{aligned} x &= (1-s^2)F'' + 2sF' - 2F, \\ y &= i(1+s^2)F'' - 2isF' + 2iF, \\ z &= 2sF'' - 2F' \end{aligned}$$

und den entsprechenden Differentialgleichungen:

$$dx = (1-s^2)F'''ds, \quad dy = i(1+s^2)F'''ds, \quad dz = 2sF'''ds$$

einmal:

(1) $$s = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

1) Die Klasse einer Minimalkurve ist immer gleich der Multiplizität der unendlich entfernten Ebene als Oskulationsebene plus der zweifachen Multiplizität des Kugelkreises auf der betreffenden Developpablen.

ein andermal:

$$s = -\frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so erhält man bekanntlich auf der Kurve zwei Punkte, deren Tangenten konjugierte Richtungen haben.

Ich werde annehmen, daß die Hypothese $F = \Phi(s)$ eine sich selbst konjugierte Minimalkurve, und ebenso, daß die Annahme $F = \Psi(s)$ eine andere sich selbst konjugierte Kurve gibt. Bezeichne ich dann mit λ eine beliebige reelle Konstante, so ist vermöge der vorangehenden Bemerkung leicht zu erkennen, daß auch die Annahme $F = \Phi + \lambda\Psi$ eine sich selbst konjugierte Kurve liefert.

Insbesondere gibt die Funktion $\Phi - \Psi$ eine sich selbst konjugierte Kurve.

Hiermit verbinden wir die folgende Bemerkung.

Nach dem Vorangehenden wird jede sich selbst konjugierte Minimalkurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, erhalten, wenn für $F(s)$ eine gewisse Funktion von der Form:

$$\sum_k \sum_j \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j} + Ls^2 + Ms + N$$

gewählt wird. Nun aber wissen wir einerseits, daß die unendlich entfernten Punkte einer sich selbst konjugierten Kurve paarweise konjugiert sind, andererseits, daß die unendlich entfernten Punkte unserer Kurve auf dem Kugelkreise in den Punkten $s = a_k$ liegen. Hieraus folgt, daß die Punkte $s = a_k$ paarweise konjugiert sind.

Seien überhaupt $s = a_k$ und $s = \alpha_k$ zwei konjugierte Punkte des [374 Kugelkreises, und seien:

$$a_1, a_2, \ldots, a_g, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g$$

die unendlich entfernten Punkte unserer Kurve. Die zugehörige Funktion F_0 besitzt dann also die Form:

$$F_0(s) = \sum_k^{1\ldots g} \sum_j^{1\ldots m_k} \left\{ \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j} + \frac{B_j^{(k)}}{(s-\alpha_k)^j} \right\} + Ls^2 + Ms + N,$$

wo $(s - a_k)$ und $(s - \alpha_k)$ in gleich hohen Potenzen auftreten.

35. Nach diesen Vorbereitungen betrachte ich die Minimalkurve, die zu der Funktion:

$$F_1(s) = \sum_k^{1\ldots g} \sum_j^{1\ldots m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}$$

gehört, und zugleich die konjugierte Minimalkurve, deren charakteristische Funktion $F_2(s)$ die Form:

$$F_2(s) = \sum_k^{1\ldots g} \sum_j^{1\ldots m_k} \frac{C_j^{(k)}}{(s-\alpha_k)^j} + Ps^2 + Qs + R$$

besitzt. Setze ich dann:

$$F_1 + F_2 = F_3,$$

so ist die zu F_3 gehörige Minimalkurve sich selbst konjugiert. Andererseits ist auch die zu F_0 gehörige Minimalkurve sich selbst konjugiert. Also ist auch die zu $F_0 - F_3$ gehörige Minimalkurve sich selbst konjugiert. Nun aber besitzt $F_0 - F_3$ die Form:

$$F_0 - F_3 = \sum_k^{1\ldots g} \sum_j^{1\ldots m_k} \frac{B_j^{(k)} - C_j^{(k)}}{(s-\alpha_k)^k} + (L-P)s^2 + (M-Q)s + (N-R),$$

und, da die Punkte des Kugelkreises, die den Parameterwerten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g$ entsprechen, nicht paarweise konjugiert sind, ergibt sich, daß die Zähler der Größen $(s-\alpha_k)^j$ sämtlich verschwinden:

$$B_j^{(k)} - C_j^{(k)} = 0.$$

Infolgedessen reduziert sich die zu $F_0 - F_3$ gehörige, sich selbst konjugierte Minimalkurve auf den Punkt:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2(L-P) - 2(N-R), \\ y_0 &= 2i(L-P) + 2i(N-R), \\ z_0 &= -2(M-Q), \end{aligned}$$

der reell sein muß. Die Größen L, M, N sind also durch die Größen P, Q, R bis auf drei arbiträre reelle Konstanten x_0, y_0, z_0 bestimmt. Daß diese drei Konstanten arbiträr sind, liegt daran, daß eine sich selbst konjugierte Kurve bei einer jeden reellen Translation sich [375 selbst konjugiert bleibt. Setzt man diese arbiträren reellen Konstanten x_0, y_0, z_0, wie man ohne wesentliche Beschränkung tun kann, sämtlich gleich Null, so kommt:

$$L = P, \quad N = R, \quad M = Q.$$

Das Obenstehende fassen wir folgendermaßen zusammen:

Satz 54. Man findet eine jede sich selbst konjugierte Minimalkurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, folgendermaßen:

Auf dem Kugelkreise wählt man eine beliebige Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_g$, unter denen keine zwei konjugiert sind, und bildet dann, indem man mit $m_1, m_2, \ldots, m_g$ beliebige positive ganze Zahlen, mit $A_j^{(k)}$ arbiträre Konstanten bezeichnet, den Ausdruck:

$$\Phi_1 = \sum_k^{1\ldots g} \sum_j^{1\ldots m_k} \frac{A_j^{(k)}}{(s-a_k)^j}.$$

Man bestimmt die zugehörige Minimalkurve, ferner die konjugierte Minimalkurve, und endlich die zu der letzten Kurve gehörige charakteristische Funktion:

$$\Phi_2 = \sum_k^{1\ldots g} \sum_j^{1\ldots m_k} \frac{B_j^{(k)}}{(s-\alpha_k)^j} + Ps^2 + Qs + R.$$

Alsdann ist die der Funktion $\Phi_1 + \Phi_2$ entsprechende Minimalkurve immer sich selbst konjugiert.

Die Bestimmung der Konstanten $B_j^{(k)}$, P, Q und R verlangt die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen und kann daher in jedem einzelnen Falle ausgeführt werden.

36. Unsere früheren Formeln für die Ordnung, die Klasse und den Rang einer Minimalkurve, die der Annahme $M = 1$ entspricht, geben für die sich selbst konjugierten Kurven die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} O &= 2(m_1 + \cdots + m_g) + 4g, \\ R &= 2(m_1 + \cdots + m_g) + 2g + 2, \\ C &= 2(m_1 + \cdots + m_g) + 2, \end{aligned}$$

sodaß die Ordnung, die Klasse und der Rang in diesem Falle sämtlich gerade Zahlen sind.[1])

Wünscht man nun zum Beispiel alle Minimalkurven der betreffenden Art, deren Rang gleich einer beliebigen geraden Zahl 2ω ist, zu finden, so muß man zunächst die Gleichung:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_g + g + 1 = \omega$$

auf alle möglichen Weisen in ganzen positiven Zahlen auflösen. [376 Sodann verfährt man nach den Regeln des letzten Satzes. Also:

Satz 55. Es ist immer möglich, alle sich selbst konjugierten Minimalkurven von gegebenem Range, die der Annahme $M = 1$ entsprechen, zu bestimmen.

1) Es ist übrigens leicht, zu erkennen, daß diese Zahlen für eine jede sich selbst konjugierte [algebraische] Minimalkurve gerade sind.

§ 10. Bestimmung aller reellen Minimalflächen, deren Klassenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist.

Die vorangehenden Entwickelungen erlauben, alle reellen Minimalflächen, deren Klassenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl π ist, zu finden.

37. Die Klasse einer reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist (§ 5), wird gegeben durch die Formel:

$$2M(R-M),$$

während die Klasse einer Doppelfläche (§ 5) gleich:

$$M(R-M)$$

ist. Da nun die Primzahl π, die größer als 2 sein muß, eine ungerade Zahl ist, so muß die Fläche eine Doppelfläche sein. Also:

Satz 56. Eine jede reelle Minimalfläche, deren Klasse eine ungerade Zahl ist, muß eine Doppelfläche sein. Dies ist insbesondere der Fall bei jeder reellen Minimalfläche, deren Klasse eine Primzahl ist.

Es handelt sich also darum, die Gleichung:

$$M(R-M)=\pi$$

in allgemeinster Weise zu befriedigen, derart, daß die betreffende Minimalkurve sich selbst konjugiert ist. Da π eine Primzahl ist, und $R-M$ nach einem früheren Satze nicht gleich 1 sein kann, folgt:

$$M=1, \quad R-M=\pi,$$

und:

$$R=\pi+1,$$

wo $\pi+1$ offenbar eine gerade Zahl ist. Andererseits fanden wir in dem vorangehenden Paragraphen die Formel:

$$R=2(m_1+\cdots+m_g)+2g+2.$$

Also kommt:

$$\tfrac{1}{2}(\pi+1)=m_1+\cdots+m_g+g+1,$$

welche Gleichung man in allgemeinster Weise befriedigen muß.

Jedem Systeme ganzzahliger Lösungen dieser Gleichung entspricht nach dem vorangehenden Paragraphen eine sich selbst konjugierte Minimalkurve, die:

$$g+m_1+\cdots+m_g=\tfrac{1}{2}(R-2)=\tfrac{1}{2}(\pi-1)$$

arbiträre Konstanten[1]) enthält. Die zugehörige reelle Minimalfläche [377 ist von der π-ten Klasse. Und in dieser Weise werden alle derartigen Flächen bestimmt. Also:

Satz 57. Um **alle** reellen Minimalflächen zu finden, deren Klasse gleich einer gewissen Primzahl π ist, sucht man nach den Regeln des vorangehenden Paragraphen alle sich selbst konjugierten Minimalkurven, deren Rang gleich $\pi+1$ ist, und welche dabei der Annahme $M=1$ entsprechen. Die zugehörigen Minimalflächen sind von der π-ten Klasse.

38. Als Beispiel werden wir zeigen, wie man alle reellen Minimalflächen der dreizehnten Klasse bestimmen kann.

Man soll die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}(13+1)=7=m_1+m_2+\cdots+m_g+g+1,$$

oder die äquivalente Gleichung:

$$6=m_1+m_2+\cdots+m_g+g$$

in allgemeinster Weise durch ganze Zahlen befriedigen. Die folgenden Möglichkeiten können eintreten:

1. $g=1, \quad m_1=5,$
2. $g=2, \quad m_1=3, \quad m_2=1,$
3. $g=2, \quad m_1=2, \quad m_2=2,$
4. $g=3, \quad m_1=1, \quad m_2=1, \quad m_3=1.$

Es gibt daher vier verschiedene Arten reeller Minimalflächen der dreizehnten Klasse.

1. Die Flächen der ersten Art werden erhalten, wenn man setzt:

$$F(s)=\frac{A_5}{(s-a)^5}+\frac{A_4}{(s-a)^4}+\cdots+\frac{A_1}{s-a}+$$
$$+\frac{B_5}{(s-\alpha)^5}+\frac{B_4}{(s-\alpha)^4}+\cdots+\frac{B_1}{s-\alpha}+Ps^2+Qs+R.$$

Die Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_5$ und a sind arbiträr; dagegen sind die B_k, P, Q, R und α eindeutig bestimmt, wenn die sechs ersten Konstanten gewählt sind. Man findet sie nach den früheren Regeln.

1) Diese arbiträren Konstanten sind komplexe Größen und sind daher der doppelten Anzahl reeller Konstanten äquivalent. Durch eine zweckmäßige reelle Rotation der Minimalkurve ließen sich noch drei reelle Konstanten entfernen, endlich könnte eine vierte reelle Konstante durch eine reelle Ähnlichkeitstransformation weggeschafft werden.

2. Die Minimalflächen der zweiten Art werden erhalten, wenn man setzt:

$$F(s)=\frac{A_3}{(s-a_1)^3}+\frac{A_2}{(s-a_1)^2}+\frac{A_1}{s-a_1}+\frac{B_1}{s-a_2}+$$ [378

$$+\frac{C_3}{(s-\alpha_1)^3}+\frac{C_2}{(s-\alpha_2)^2}+\frac{C_1}{s-\alpha_1}+\frac{D_1}{s-\alpha_2}+Ps^2+Qs+R.$$

Hier sind A_1, A_2, A_3, B_1, a_1 und a_2 arbiträre Konstanten, während die übrigen Konstanten eindeutig bestimmt sind, wenn jene gewählt sind.

3. Die Flächen der dritten Art erhält man, wenn man setzt:

$$F(s)=\frac{A_2}{(s-a_1)^2}+\frac{A_1}{s-a_1}+\frac{B_2}{(s-a_2)^2}+\frac{B_1}{s-a_2}+$$

$$+\frac{C_2}{(s-\alpha_1)^2}+\frac{C_1}{s-\alpha_1}+\frac{D_2}{(s-\alpha_2)^2}+\frac{D_1}{s-\alpha_2}+Ps^2+Qs+R,$$

darnach A_1, A_2, B_1, B_2, a_1 und a_2 arbiträr wählt, und endlich die übrigen Konstanten wie früher bestimmt.

4. Endlich die Flächen der vierten Art erhält man, indem man setzt:

$$F(s)=\frac{A}{s-a_1}+\frac{B}{s-a_2}+\frac{C}{s-a_3}+$$

$$+\frac{D}{s-\alpha_1}+\frac{E}{s-\alpha_2}+\frac{F}{s-\alpha_3}+Ps^2+Qs+R,$$

darnach A, B, C, a_1, a_2 und a_3 arbiträr wählt, und endlich die übrigen Konstanten passend bestimmt.

Es gibt daher vier Arten reeller Minimalflächen dreizehnter Klasse. Betrachtet man ähnliche Flächen als identisch, so hängen die Flächen jeder Art von acht reellen Konstanten ab.

§ 11. Bestimmung reeller Minimalflächen von beliebig gegebener Klasse.

Verlangt man, daß die Klasse einer reellen Minimalfläche gleich einer vorgelegten Zahl, die keine Primzahl ist, sein soll, so ist mir die Bestimmung der betreffenden Flächen nur in den einfacheren Fällen gelungen, und ich vermute sogar, daß sich eine allgemeine Erledigung dieses Problems nicht geben läßt. Doch scheinen mir die nachstehenden Entwickelungen bemerkenswert zu sein.

39. Ich will zunächst versuchen, alle reellen Minimalflächen gegebener Klasse, die keine Doppelflächen sind, zu bestimmen. Die Klasse einer solchen Fläche ist gegeben durch:

$$2M(R-M),$$

woraus hervorgeht, daß die Klasse immer gerade und dabei gleich oder größer als sechs ist.

1. Die Hypothese:

$$2M(R-M)=6$$

gibt:

$$M=1,\quad R=4.$$

Nun aber ist: [379

$$R=m_1+\cdots+m_q+q+2,$$

also ist:

$$q=1,\quad m_1=1,$$

und es wird:

$$F(s)=\frac{A}{s-a}.$$

Die entsprechende Minimalkurve ist von der dritten Ordnung; sie hat nur einen unendlich entfernten Punkt, daher hat sie keinen unendlich entfernten Punkt mit der konjugierten Minimalkurve gemein. Die zugehörige Minimalfläche ist somit (§ 6 und 7) von der neunten Ordnung. Dies ist die von Herrn Enneper entdeckte Minimalfläche neunter Ordnung, sechster Klasse.

2. Die Hypothese:

$$2M(R-M)=8$$

gibt:

$$M=1,\quad R=5,$$

und da:

$$R=m_1+\cdots+m_q+q+2,$$

so folgt:

$$q=1,\quad m_1=2,$$

woraus:

$$F(s)=\frac{A}{(s-a)^2}+\frac{B}{s-a}.$$

Die Ordnung dieser Minimalkurve ist gleich $m_1+2q=4$, sie schneidet die unendlich entfernte Ebene nur in einem Punkte. Die Ordnung der zugehörigen Minimalfläche ist sechzehn.

3. Die Hypothese:

$$2M(R-M)=10$$

wird befriedigt auf zwei Weisen.

Entweder ist:

$$M=1,\quad R=6,\quad q=1,\quad m_1=3,\quad O=5,$$

sodaß:

$$F(s)=\frac{A}{(s-a)^3}+\frac{B}{(s-a)^2}+\frac{C}{s-a}$$

Da die Minimalkurve nur einen unendlich entfernten Punkt besitzt, so ist die Ordnung der betreffenden Minimalfläche gleich 25.

Oder auch, es ist:

$$M = 1, \quad R = 6, \quad q = 2, \quad m_1 = m_2 = 1, \quad O = 6,$$

dabei ist die Klasse der Kurve gleich $m_1 + m_2 + 2 = 4$. Da die Minimalkurve zwei unendlich entfernte Punkte besitzt, so sind zwei Fälle denkbar. Entweder sind diese Punkte nicht konjugierte Punkte; dann ist die Ordnung der Fläche gleich 36. Oder auch, sie sind konjugierte Punkte; dann ist die Ordnung der Fläche gleich 30, 28 oder 26.

4. Die Hypothese: [380

$$2M(R - M) = 12$$

wird befriedigt durch:

$$M = 1, \quad R = 7, \quad q = 1, \quad m_1 = 4, \quad O = 6,$$

die Ordnung der Fläche ist gleich 36.

Oder auch, es ist:

$$M = 1, \quad R = 7, \quad q = 2, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 1, \quad O = 7;$$

die Ordnung der Fläche ist, je nachdem die beiden unendlich entfernten Punkte nicht konjugiert, oder konjugiert sind, entweder 49 oder 43.

Endlich kann:

$$M = 2, \quad R = 5$$

sein. Es gibt bekanntlich eine Minimalkurve, deren Rang fünf ist, auf deren Developpablen der Kugelkreis ein zweifacher Kegelschnitt ist. Die Ordnung dieser Kurve ist vier, sie enthält zwei unendlich entfernte Punkte. Haben dieselben eine allgemeine Lage, so ist die Ordnung der Fläche gleich 16; sind sie dagegen konjugiert, so ist die Ordnung der Fläche gleich 12.

5. Die Hypothese:

$$2M(R - M) = 14$$

gibt jedenfalls:

$$M = 1, \quad R = 8.$$

Dabei können vier Unterfälle eintreten:

a) $q = 1, \quad m_1 = 5, \quad O = 7,$

b) $q = 2, \quad m_1 = 3, \quad m_2 = 1, \quad O = 8,$

c) $q = 2, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 2, \quad O = 8,$

d) $q = 3, \quad m_1 = m_2 = m_3 = 1, \quad O = 9.$

Im Falle a) ist die Ordnung der Fläche gleich 49; im Falle b) entweder 64 oder 58; im Falle c) entweder 64, 56, 54, 52 oder 50; endlich im Falle d) entweder 81, 75, 73 oder 71.

6. Die Hypothese:

$$2M(R - M) = 16$$

gibt entweder:

$$M = 1, \quad R = 9,$$

in welchem Falle vier leicht bestimmbare Unterfälle eintreten können.

Oder auch es ist:

$$M = 2, \quad R = 6.$$

In dem nächsten Paragraphen werden wir zeigen, daß es nur zwei Minimalkurven vom Range 6 gibt, deren Developpable den Kugelkreis zweifach enthalten. Die eine Kurve, die von der fünften Ordnung ist, oskuliert die unendlich entfernte Ebene in einem Punkte und schneidet in zwei anderen Punkten. Die entsprechende Minimalfläche ist von der 25-ten [381 oder 23-ten Ordnung.

Die zweite Kurve ist von der sechsten Ordnung. Sie hat zwei unendlich entfernte Spitzen, deren Tangenten den Kugelkreis berühren. Die entsprechende Minimalfläche ist von der 36-ten, 30-ten oder 28-ten Ordnung.

7. Die Hypothese:

$$2M(R - M) = 18$$

gibt entweder:

$$M = 1, \quad R = 10,$$

welcher Fall wie gewöhnlich diskutiert wird.

Oder auch, es ist:

$$M = 3, \quad R = 6.$$

Es fragt sich, ob eine solche Minimalkurve existiert. Ist dies der Fall, so könnte man sie durch eine Transformation durch reziproke Radien, deren Pol auf der Kurve liegt, in eine neue Minimalkurve, deren Rang (§ 5) gleich:

$$2(R - M) - 2 = 4$$

ist, überführen. Die neue Minimalkurve würde dann von der dritten Ordnung sein. Führt man andererseits eine Transformation durch reziproke Radien auf eine Minimalkurve dritter Ordnung aus, so erhält man eine Minimalkurve vierter Ordnung, vom Range 6, von sechster Klasse. Dabei ist $M = 3$. Die Kurve schneidet die unendlich entfernte Ebene in vier verschiedenen Punkten. Die zugehörige Minimalfläche ist von der Ordnung 12, 14 oder 16 (siehe den nächsten Paragraphen).

8. Die Hypothese:

$$2M(R-M)=20$$

gibt entweder:

$$M=1,\quad R=11,$$

welcher Fall wie gewöhnlich erledigt wird, oder auch:

$$M=2,\quad R=7,$$

und da Schwarz alle Kurven vom Range 7 bestimmt hat, wird es wohl nicht schwierig sein, durch Verfolgung seiner Betrachtungen die Hypothese $M=2$, $R=7$ in allgemeinster Weise zu erfüllen. Einen anderen Weg zur Erledigung dieser Frage gebe ich später an.

Die Hypothese:

$$2M(R-M)=22$$

gibt mit Notwendigkeit:

$$M=1,\quad R=12;$$

die entsprechenden Flächen werden wie gewöhnlich bestimmt.

Soll endlich:

$$2M(R-M)=24$$

sein, so sind die folgenden Fälle denkbar:

a) $M=1,\quad R=13,$ [382

b) $M=2,\quad R=8,$

c) $M=3,\quad R=7,$

d) $M=4,\quad R=7.$

Es ist leicht, nachzuweisen, daß die Fälle a), b) und c) wirklich Minimalflächen geben. Dagegen kann der letzte Fall nicht eintreten; denn es besteht (§ 8) allgemein die Formel:

$$C=2M+N,$$

wo N die Multiplizität der unendlich entfernten Ebene als Oskulationsebene bezeichnet. Und infolgedessen ist die Zahl $R-2M$ nie negativ.

40. Jetzt werden wir versuchen, reelle Minimalflächen von gegebener Klasse zu bestimmen, unter der beschränkenden Voraussetzung, daß die betreffenden Flächen Doppelflächen sind.

Die Klasse einer solchen Fläche ist gegeben durch die Formel:

$$M(R-M).$$

1. Die Hypothese:

$$M(R-M)=3$$

würde geben:

$$M=1,\quad R=4,\quad O=3.$$

Es gibt aber keine sich selbst konjugierte Minimalkurve dritter Ordnung[1]), da jede Minimalkurve dritter Ordnung nur einen unendlich entfernten Punkt besitzt. Es gibt also keine reelle Doppelfläche dritter Klasse.

2. Die Hypothese:

$$M(R-M)=4$$

gibt:

$$M=1,\quad R=5.$$

Nun aber wissen wir, daß der Rang einer jeden sich selbst konjugierten Minimalkurve, die der Annahme $M=1$ entspricht, eine gerade Zahl (§ 9) ist. Daher gibt es keine Doppelfläche vierter Klasse.

3. Die Hypothese:

$$M(R-M)=5$$

gibt:

$$M=1,\quad R=6,$$

und da (§ 9):

$$R=2(m_1+\cdots+m_g)+2g+2$$

ist, so folgt:

$$g=1,\quad m_1=1,$$

$$F(s)=\frac{A}{s-a}+\frac{B}{s-b}+Ps^2+Qs+R.$$

Die Ordnung und die Klasse der betreffenden Kurve sind beziehungsweise gleich 6 und 4. Die Ordnung der Fläche ist (§ 6, 7) gleich: [383

$$\tfrac{1}{2}(36-2\,.\,3)=15.$$

Diese Fläche ist von Henneberg entdeckt worden.

Nach meinen früheren Entwickelungen müssen a und b konjugierte Punkte des Kugelkreises sein. A kann arbiträr gewählt werden; hinterher werden B, P, Q, R nach meinen früheren Regeln bestimmt. Betrachtet man ähnliche Flächen als identisch, so enthält die vorliegende Fläche gar keine Konstante, wie die Entwickelungen in Nr. 37 zeigen.

4. Die Hypothese:

$$M(R-M)=6$$

wird nicht durch die Annahme:

$$M=1,\quad R=7$$

1) Allgemeiner könnte man sagen: Es gibt keine sich selbst konjugierte Minimalkurve, deren Ordnung eine ungerade Zahl ist.

erfüllt, da R eine gerade Zahl sein soll. Es bleibt also nur die Annahme:

$$M = 2, \quad R = 5,$$

die aus demselben Grunde keine sich selbst konjugierte Minimalkurve geben kann.[1]) Es gibt daher keine reelle Doppelfläche sechster Klasse.

5. Die Hypothese:

$$M(R - M) = 7$$

gibt:

$$M = 1, \quad R = 8$$

und:

$$R = 8 = 2\,(m_1 + \cdots + m_g) + 2g + 2,$$

woraus:

$$g = 1, \quad m_1 = 2$$

und:

$$F(s) = \frac{A}{(s-a)^2} + \frac{B}{s-a} + \frac{C}{(s-\alpha)^2} + \frac{D}{s-\alpha} + Ps^2 + Qs + R.$$

Hier sind A, B und a arbiträr, dagegen α, C, D, P, Q, R bestimmt. Betrachtet man ähnliche Flächen als identisch, so enthält die Fläche noch zwei reelle Konstanten. Die Ordnung der betreffenden Minimalkurve ist 8; die Ordnung der Fläche ist gleich:

$$\tfrac{1}{2}(64 - 2\,.\,4) = 28.$$

6. Die Hypothese:

$$M(R - M) = 8$$

wird nicht befriedigt durch die Annahme:

$$M = 1, \quad R = 9,$$ [384

da R keine ungerade Zahl sein darf.

Es bleibt noch die Hypothese:

$$M = 2, \quad R = 6.$$

Nun habe ich mich allerdings überzeugt, daß es eine Doppelfläche achter Klasse gibt, die dieser Annahme entspricht; es ist mir aber nicht gelungen, zu entscheiden, ob diese Fläche reell sein kann. Ist dies möglich, so muß die Ordnung der betreffenden Fläche gleich:

$$\tfrac{1}{2}(36 - 2\,.\,4 - 2\,.\,3) = 11$$

sein.[2])

1) Man könnte die Überlegung auch in mehr spezieller Form durchführen: Es gibt allerdings eine Minimalkurve vom Range 7 mit zwei unendlich entfernten Punkten. Da aber diese Punkte ungleichartig sind, kann die Kurve nicht sich selbst konjugiert sein. [Ebenso ist der Rang 5 ausgeschlossen.]

2) Ich finde nachträglich, daß diese Fläche nie reell ist (November 1878).

7. Die Hypothese:

$$M(R - M) = 9$$

wird befriedigt durch:

$$M = 1, \quad R = 10,$$

woraus entweder folgt:

$$g = 1, \quad m_1 = 3,$$

oder auch:

$$g = 2, \quad m_1 = m_2 = 1,$$

sodaß es jedenfalls zwei verschiedene Arten reeller Doppelflächen neunter Klasse gibt.

Man hat ferner die Hypothese:

$$M = 3, \quad R = 6,$$

die ich noch nicht erledigt habe. Ich habe allerdings gefunden, daß es eine Doppelfläche neunter Klasse, sechster Ordnung gibt; ich weiß aber nicht, ob diese Fläche reell sein kann. (Vgl. die beiden folgenden Paragraphen.)

§ 11*. Eine polare Beziehung zwischen zwei Linienkomplexen.

41. Bei den Untersuchungen über Minimalkurven, die, wie ich zeigte, für die Theorie der algebraischen Minimalflächen von größter Wichtigkeit sind, stützt man sich häufig vorteilhaft auf einen Zusammenhang zwischen allen Minimalkurven und allen Kurven, deren Tangenten einem linearen Linienkomplexe angehören. In einer liniengeometrischen Abhandlung (Über Komplexe ..., Math. Ann., Bd. V [hier Abh. I]) habe ich diesen Zusammenhang, der durch eine eigentümliche Abbildung vermittelt wird, schon ziemlich ausführlich besprochen. Hier werde ich denselben etwas näher verfolgen.

Interpretiert man in den Gleichungen:

$$-Zz = x - (X + iY),$$
$$(X - iY)z = y - Z$$

X, Y, Z und x, y, z als Cartesische Punktkoordinaten zweier Räume, so werden den Punkten x, y, z diejenigen Geraden im Raume X, Y, Z [385 zugeordnet, die den Kugelkreis schneiden. Auf der anderen Seite werden den Punkten X, Y, Z alle Geraden eines gewissen linearen Komplexes im Raume x, y, z zugeordnet. Schreibt man die Gleichungen der geraden Linien im Raume x, y, z folgendermaßen:

$$rz = x - \varrho, \quad sz = y - \sigma,$$

so ist:

$$r + \sigma = 0$$

die Gleichung des besprochenen linearen Komplexes in Linienkoordinaten.

Jede Kurve, deren Tangenten diesem linearen Komplexe angehören, wird durch meine Abbildung einer Minimalkurve im Raume X, Y, Z zugeordnet.

Bei der Abbildung ist der Kugelkreis ein Fundamentalgebilde im Raume X, Y, Z. Im Raume x, y, z tritt die unendlich entfernte Gerade der x, y-Ebene als Fundamentalgebilde auf. Diese Gerade möge mit g bezeichnet werden.

Es bestehen jetzt mehrere Relationen zwischen den charakteristischen Zahlen zweier entsprechender Kurven. Wir werden diejenigen dieser Relationen, die wir später brauchen, entwickeln.

Es sei k eine Kurve, deren Tangenten dem linearen Komplexe angehören; sei o ihre Ordnung, c ihre Klasse, r ihr Rang, m die Multiplizität der Geraden g als Tangente[1]), i die Zahl der Inflexionstangenten, die g nicht schneiden, s die Zahl der Spitzen, deren Tangente g nicht schneidet. Endlich möge μ die Anzahl derjenigen Schnittpunkte zwischen der Kurve und einer beliebigen durch g gehenden Ebene sein, die auf g liegen.

Sei andererseits K die entsprechende Minimalkurve im Raume X, Y, Z. Sei O ihre Ordnung, C ihre Klasse, R ihr Rang, M die Multiplizität des Kugelkreises auf der Developpablen, J die Zahl der Inflexionstangenten, deren Berührungspunkt nicht unendlich entfernt ist, S die Zahl der Spitzen, die nicht auf dem Kugelkreise liegen.

42. Wir werden einige zwischen diesen Zahlen bestehende Relationen entwickeln.

1. Wir nehmen einen Punkt des Kugelkreises, der nicht auf K liegt. In diesem Punkte legen wir eine beliebige Tangentenebene an den Kugelkreis. Diese Ebene schneidet K in O im endlichen Raume gelegenen Punkten. Andererseits enthält diese Ebene einfach unendlich viele Mini- [386
malgerade, deren Bildpunkte x, y, z eine gerade Linie γ erzeugen, die g schneidet. Nun aber trifft γ außer g eine gewisse Anzahl und zwar $r - m$ Tangenten der Kurve k. Die Bildpunkte dieser Tangenten sind die früher besprochenen O Punkte im Raume X, Y, Z; daher ist:

$$O = r - m.$$

1) Bestimmter ausgesprochen soll m folgendermaßen definiert werden. Eine Gerade von allgemeiner Lage im Raume x, y, z schneidet die Developpable unserer Kurve in r Punkten; begegnet sie insbesondere der Fundamentalgeraden g, so gibt es unter den r Schnittpunkten eine gewisse Anzahl, die in den Schnittpunkt der beiden Geraden zusammengefallen sind. Diese Anzahl bezeichne ich mit m.

2. Ich schneide die Developpable der Minimalkurve mit einer beliebigen Minimalgeraden und erhalte $R - M$ im endlichen Raume gelegene Schnittpunkte. Die Punkte unserer Geraden geben im Raume x, y, z einfach unendlich viele Komplexlinien, die ein ebenes Büschel bilden. Unter diesen Komplexlinien gibt es o, welche die Kurve k treffen. Nun aber sind die $R - M$ Schnittpunkte in (X, Y, Z) die Bildpunkte von den soeben besprochenen o Komplexlinien. Also kommt:

$$o = R - M.$$

3. Eine durch g gehende Ebene schneidet die Kurve k in $o - \mu$ Punkten, die nicht auf g liegen. Nun aber sind überhaupt die Punkte unserer Ebene Bildpunkte aller Minimalgeraden, die durch einen gemeinsamen Punkt des Kugelkreises gehen. Daher sind die besprochenen $o - \mu$ Punkte die Bildpunkte derjenigen Tangenten der Kurve K, die durch den besprochenen Punkt des Kugelkreises gehen. Und da es jedesmal M Tangenten gibt, die einen Punkt des Kugelkreises treffen, so ist:

$$M = o - \mu.$$

Früher haben wir schon benutzt, daß jede Ebene, die den Kugelkreis berührt, aufgefaßt als von Minimalgeraden erzeugt, im Raume x, y, z eine Gerade γ liefert, die g schneidet; und zwar ist γ eine Komplexlinie. Diese Bemerkung gibt eine Relation zur Bestimmung der Klasse unserer Minimalkurve. Die Oskulationsebenen der Minimalkurve berühren nämlich den Kugelkreis, und liefern daher Komplexlinien γ, die g schneiden. Daher liefern die durch einen Punkt gehenden Oskulationsebenen der Minimalkurve diejenigen Linien des linearen Komplexes, die gleichzeitig die Kurve k, die Gerade g und außerdem noch eine Komplexlinie schneiden. Die Klasse der Minimalkurve ist daher gleich der Zahl der Schnittpunkte zwischen der Kurve k und derjenigen Fläche zweiten Grades, deren Erzeugende Komplexlinien sind, welche außer g noch eine Komplexlinie schneiden; vorausgesetzt wird dabei, daß von den auf g gelegenen Schnittpunkten abgesehen wird. Diese Bestimmung hängt genau zusammen mit unserer früheren Formel:

$$C = 2M + N,$$

wo N die Multiplizität der unendlich entfernten Ebene als Oskulationsebene der Minimalkurve bezeichnet.

Hier möge noch das Folgende, dessen Richtigkeit später nach- [387
gewiesen wird, zugefügt sein. Berührt k die Gerade g, so oskuliert die Minimalkurve die unendlich entfernte Ebene. Ist g eine gewöhnliche Inflexionstangente, so ist die unendlich entfernte Ebene eine zweifach zählende

Oskulationsebene der Minimalkurve. Schneidet k die Gerade g, ohne diese zu berühren, so hat die Minimalkurve eine Spitze auf dem Kugelkreise; die Tangente der Spitze ist zugleich die Tangente des Kugelkreises.

Man sieht leicht, daß:

$$i = S, \quad J = s$$

ist.

Beiläufig möge bemerkt werden, daß die in § 8 gefundene Relation:

$$O + C - 2R + 2 = 0,$$

die für eine ausgedehnte Kategorie von Minimalkurven bewiesen wurde, für die entsprechenden Komplexkurven die noch einfachere Relation:

$$r - 2o + 2 = 0$$

liefert. Die betreffenden Komplexkurven sind dadurch charakterisiert, daß sie eine gewisse Komplexlinie in $o - 1$ Punkten treffen.

43. Ich werde nun diese Abbildung auf die einfachsten Minimalkurven anwenden.

Ich nehme im Raume x, y, z eine Raumkurve dritter Ordnung, deren Tangenten dem linearen Komplexe angehören; dabei setze ich voraus, daß die Kurve die Gerade g berührt. Also ist:

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 1, \quad \mu = 2, \quad i = 0, \quad s = 0;$$

dementsprechend ist:

$$M = 1, \quad O = 3, \quad R = 4, \quad J = 0, \quad S = 0.$$

Diese Formeln zeigen, daß es eine Minimalkurve dritter Ordnung gibt, deren Developpable den Kugelkreis als einfachen Kegelschnitt enthält. Der Rang derselben ist gleich 4. Dies ist bekanntlich richtig. Wir erkennen ferner, daß die Berührung zwischen g und der Komplexkurve dritter Ordnung eine Oskulierung der Minimalkurve mit der unendlich entfernten Ebene gibt. Hieraus folgt der allgemeine Satz, daß *eine jede Komplexkurve, die g berührt, eine Minimalkurve liefert, die die unendlich entfernte Ebene oskuliert.*

Sei andererseits gegeben eine Komplexkurve dritter Ordnung, die g schneidet. Alsdann ist:

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 0, \quad \mu = 1, \quad i = 0, \quad s = 0;$$

dementsprechend ist:

$$M = 2, \quad O = 4, \quad R = 5, \quad J = 0, \quad S = 0.$$

Und es gibt in der Tat eine Minimalkurve vierter Ordnung und [388 vom Range 5, die den Kugelkreis zweifach enthält. Diese Kurve hat be-

kanntlich keine im endlichen Raume gelegene Spitze, auch keine Inflexionstangente, deren Berührungspunkt im endlichen Raume liegt. Dagegen hat unsere Kurve, wie ich als bekannt voraussetzen darf, eine unendlich entfernte Spitze, deren Tangente den Kugelkreis berührt. Hieraus folgt, daß *jede Komplexkurve, die g schneidet, ohne jedoch diese Gerade zu berühren, eine Minimalkurve mit einer unendlich entfernten Spitze liefert. Die Tangente der Spitze berührt den Kugelkreis.*

Die Gerade g berührt die Developpable in einem Punkte, der als Schnittpunkt dreifach zählt; daher schneidet g die Developpable in noch einem Punkte. Die hindurchgehende Erzeugende bildet sich im Raume (X, Y, Z) ab als ein unendlich entfernter Punkt der Minimalkurve. Und da die Spitze als drei zusammengefallene unendlich entfernte Punkte zählt, so folgt, daß der soeben gefundene unendlich entfernte Punkt nur einfach zählt. Hieraus fließt der allgemeine Satz:

Die unendlich entfernten Punkte einer Minimalkurve entsprechen bei unserer Abbildung denjenigen Erzeugenden der [Developpabeln der] Komplexkurve, die g schneiden. Eine Erzeugende, deren Berührungspunkt nicht auf g liegt, gibt einen einfach zählenden unendlich entfernten Punkt auf der Minimalkurve.

Laß uns endlich die Komplexkurve dritter Ordnung von allgemeiner Lage betrachten. Es ist dann:

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 0, \quad \mu = 0, \quad i = 0, \quad s = 0,$$

und also kommt:

$$M = 3, \quad O = 4, \quad R = 6, \quad J = 0, \quad S = 0.$$

Hiermit erkennen wir die Existenz einer Minimalkurve vierter Ordnung, vom Range 6, deren Developpable den Kugelkreis dreifach enthält.[1]

Die Gerade g schneidet die Developpable der vorgelegten Komplexkurve in vier verschiedenen Punkten; dementsprechend hat unsere Minimalkurve vierter Ordnung vier verschiedene unendlich entfernte Punkte. Die Klasse dieser Minimalkurve ist gleich sechs.

44. Ich wende mich nun zur Betrachtung von Kurven vierter Ordnung, deren Tangenten unserem linearen Komplexe angehören, um später

1) Dieser Spezialfall der Kurven vierter Ordnung zweiter Gattung scheint zuerst von mir bemerkt worden zu sein.

die entsprechenden Minimalkurven zu untersuchen. Der Kürze wegen brauche ich wie früher das Wort *Komplexkurve*, um eine Kurve, deren Tangenten dem linearen Komplexe angehören, zu bezeichnen.

Eine Komplexkurve vierter Ordnung kann bekanntlich nicht auf [389 *zwei* Flächen zweiter Ordnung liegen[1]). Hieraus folgt, daß sich die Punkte einer solchen Kurve *eindeutig* auf die Punkte einer Geraden beziehen lassen. Dieses vorausgesetzt, denke ich mir in einem beliebigen Punkte p der Kurve die zugehörige Oskulationsebene konstruiert. Diese schneidet die Kurve außer in p nur noch in einem anderen Punkte π. Hiermit ist eine eindeutige Zuordnung je zweier Punkte der Kurve festgestellt. Und da die Kurve vom Geschlechte Null ist, können wir schließen[2]), daß es jedenfalls einen Punkt p_0 gibt, dessen zugeordneter Punkt π_0 mit p_0 zusammenfällt. In diesem Punkte schneidet die Oskulationsebene die Kurve in *vier* zusammengefallenen Punkten. Und also ist entweder die Oskulationsebene eine stationäre Ebene und gleichzeitig der betreffende Punkt ein stationärer Punkt; oder auch die zugehörige Tangente ist eine stationäre Tangente.

Jedenfalls ist klar, daß eine jede Ebene, die durch die Tangente im Punkte p_0 hindurchgeht, die Kurve außer in p_0 nur noch in *einem* Punkte schneidet.

Dieses vorausgesetzt, werde ich der Komplexkurve vierter Ordnung eine solche Lage geben, daß die Gerade g die Kurve im Punkte p_0 berührt. Es ist[3]):

$$o = 4, \quad r = 6, \quad \mu = 3.$$

Hieraus folgt:

$$M = 1, \quad R = 5.$$

Die erhaltene Minimalkurve ist daher die bekannte Kurve vierter Ordnung vom Range 5, die eine Spitze enthält.

Es ist leicht, die Darstellung dieser Kurve vermöge der *Weierstraßischen* Formeln zu finden; denn es ist (Nr. 33):

$$O = m_1 + \cdots + m_q + 2q,$$
$$R = m_1 + \cdots + m_q + q + 2,$$

1) Die Kurven vierter Ordnung, die auf *zwei* Flächen zweiten Grades liegen, sind, wenn ich nicht irre, genau untersucht. Dagegen sind die Spezialfälle der übrigen Kurven vierter Ordnung noch nicht eingehend genug betrachtet worden.

2) Man nehme eine feste Gerade γ, die die Kurve in drei Punkten schneidet, und konstruiere die Ebenen γp und $\gamma\pi$; dieselben bilden eine *Involution* mit *zwei* Doppelelementen. Die Gerade $p\pi$ ist nämlich eine Komplexlinie.

3) Der Rang einer *allgemeinen* Kurve vierter Ordnung, die nur auf *einer* Fläche zweiter Ordnung liegt, ist 6. Der Rang einer speziellen Kurve dieser Art kann bekanntlich nicht gleich 5 oder 4 sein.

woraus:

$$4 = m_1 + \cdots + m_q + 2q,$$
$$5 = m_1 + \cdots + m_q + q + 2$$

und durch Elimination:

$$q = 1, \quad m_1 = 2,$$

sodaß: [390

$$F(s) = \frac{A}{(s-\alpha)^2} + \frac{B}{s-\alpha}$$

wird. Diese Minimalkurve hat eine unendlich entfernte stationäre Ebene; dementsprechend ist im Raume des linearen Komplexes die Gerade g eine Inflexionstangente der Komplexkurve 4. Ordnung. Daß diese Kurve noch eine Inflexionstangente besitzt, geht daraus hervor, daß die Minimalkurve eine im endlichen Raume gelegene Spitze besitzt.

In dieser Weise finden wir den folgenden Satz, der möglicherweise einen kleinen Beitrag zur Theorie der Raumkurven vierter Ordnung liefert:

Es gibt nur **eine** *Kurve vierter Ordnung, deren Tangenten einem linearen Komplexe angehören. Diese besitzt zwei Inflexionstangenten.*[1])

Auf diese Weise habe ich bekannte Eigenschaften einer Minimalkurve zur Auffindung von Eigenschaften der entsprechenden Komplexkurve verwertet. Jetzt werde ich, indem ich der gefundenen Komplexkurve eine *neue* Lage gebe, aus ihren bekannten Eigenschaften die charakteristischen Zahlen derjenigen Minimalkurve, die der neuen Lage entspricht, herleiten.

Laß mich zunächst annehmen, daß die Gerade g eine gewöhnliche Tangente der Komplexkurve vierter Ordnung ist. Alsdann ist:

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = 1, \quad \mu = 2, \quad i = 2, \quad s = 0;$$

also kommt:

$$M = 2, \quad R = 6, \quad O = 5, \quad S = 2, \quad J = 0.$$

Die Gerade g trifft zwei Erzeugende der Komplexkurve; dementsprechend erkennen wir, daß die Minimalkurve zwei einfach zählende unendlich entfernte Punkte besitzt; außerdem oskuliert sie die unendlich entfernte Ebene in einem Punkte.

Laß mich ferner annehmen, daß die Komplexkurve vierter Ordnung die Gerade g in *zwei* verschiedenen Punkten schneidet, was nach dem Vorangehenden denkbar ist. Alsdann ist:

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = 0, \quad \mu = 2, \quad i = 2, \quad s = 0,$$

1) Diese Kurve, welche ich im Jahre 1870 eben in dieser Weise fand, war schon früher von *Cayley* und *Cremona* betrachtet worden.

und folglich wird:

$$M = 2, \quad R = 6, \quad O = 6, \quad S = 2, \quad J = 0.$$

Die Gerade g trifft die Developpable nur in den beiden Punkten der Komplexkurve. Dementsprechend hat die Minimalkurve nur zwei unendlich entfernte Punkte, welche alle beide Spitzen sind, deren Tangenten den Kugelkreis berühren (Nr. 43).

Wir können sodann annehmen, daß die Gerade g die Komplex- [391 kurve nur in einem Punkte schneidet; alsdann ist:

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = 0, \quad \mu = 1, \quad s = 0, \quad i = 2 \text{ (oder } i = 1),$$

woraus:

$$M = 3, \quad R = 7, \quad O = 6, \quad J = 0, \quad S = 2 \text{ (oder } S = 1).$$

Endlich können wir annehmen, daß die Gerade g die Komplexkurve gar nicht schneidet; dabei ist denkbar, daß doch noch die eine oder beide Inflexionstangenten die Gerade g treffen. Es ist leicht, die charakteristischen Zahlen der drei betreffenden Minimalkurven anzugeben.

45. Die vorangehenden Entwickelungen erlauben unter anderm, die allgemeinsten Minimalkurven, die den Annahmen:

$$M = 2, \quad R = 6,$$

oder:

$$M = 3, \quad R = 7,$$

oder endlich:

$$M = 4, \quad R = 8$$

entsprechen, anzugeben. Denn es wird jedenfalls:

$$R - M = 4 = o,$$

sodaß die entsprechende Kurve im linearen Komplexe von der vierten Ordnung ist. Und wir haben soeben die allgemeinste Komplexkurve vierter Ordnung bestimmt.

Soll insbesondere:

$$M = 2, \quad R = 6$$

sein, so kommt, da $o = 4$ ist:

$$\mu = 2.$$

Diese Relation kann aber nur auf zwei Weisen erfüllt werden. Entweder ist g eine gewöhnliche Tangente der Kurve, oder auch, es schneidet g die Kurve in zwei verschiedenen Punkten. Die beiden entsprechenden Minimalkurven sind früher diskutiert worden.

Ich erinnere zum Schlusse noch an folgendes: Wird der Raum x, y, z linear transformiert, und geht dabei unser linearer Komplex in sich über, so wird nach meinen Untersuchungen (Über Komplexe, Math. Ann. Bd. V [hier Abh. I, S. 39—43]) der Punktraum X, Y, Z konform transformiert.

§ 12. Bestimmung reeller Minimalflächen von gegebener Ordnung.

Das Problem, alle reellen Minimalflächen von gegebener Ordnung zu bestimmen, ist im allgemeinen mit bedeutenden Schwierigkeiten verknüpft. Doch ist mir seine Erledigung in mehreren speziellen Fällen gelungen. [392 Und ich vermute, daß der von mir eingeschlagene Weg noch weiter führen kann. Wie bei den entsprechenden Untersuchungen über Minimalflächen gegebener Klasse betrachte ich die zweierlei Arten von Minimalflächen für sich.

46. Zuerst werde ich suchen, reelle Minimalflächen gegebener Ordnung zu bestimmen, indem ich die Doppelflächen ausschließe.

Ich wähle (vergleiche Nr. 28) auf einer reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, eine Minimalkurve jeder Schar. Der Inbegriff dieser beiden Kurven schneidet die unendlich entfernte Ebene in einer geraden Anzahl von Punkten, die paarweise konjugierte Punkte des Kugelkreises sind. Seien:

$$P_1, \ldots, P_q, \quad \Pi_1, \ldots, \Pi_q$$

diese Punkte, und seien P_k und Π_k jedesmal konjugierte Punkte. Ich setze voraus, daß für die eine Kurve jeder Punkt P_k als p_k-facher Schnittpunkt mit der unendlich entfernten Ebene zählt, und daß ebenso für dieselbe Kurve jeder Punkt Π_k als π_k-facher Schnittpunkt zählt. Alsdann zählen die Punkte P_k und Π_k für die andre Kurve beziehungsweise als π_k-facher und p_k-facher Schnittpunkt.

Die Ordnung einer jeden auf unserer Fläche gelegenen Minimalkurve von allgemeiner Lage ist gleich:

$$\sum p_k + \sum \pi_k.$$

Die Ordnung der Fläche ist nach unseren früheren Untersuchungen (§ 6 und 7) jedenfalls nicht kleiner als:

$$\left(\sum p_k + \sum \pi_k\right)^2 - 2\sum p_k \pi_k$$

und also auch nicht kleiner als:

$$\sum p_k^2 + \sum \pi_k^2.$$

Ich kann ohne Beschränkung annehmen, daß $p_1, p_2, \ldots, p_q$ sämtlich größer als Null sind, während einige unter den Zahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_q$ im allgemeinen gleich Null sind. Ich nehme ferner an, daß jede Zahl p_k gleich oder größer als π_k ist, und endlich, daß p_k gleich oder größer als p_{k+1} ist.

47. Es ist jetzt leicht, alle reellen Minimalflächen, deren Ordnung nicht größer als 16 ist, und welche dabei keine Doppelflächen sind, zu bestimmen. Zunächst zeige ich, daß es keine derartige Fläche gibt, deren Ordnung kleiner als 9 ist.

Existierte eine Fläche, deren Ordnung O' kleiner als 9 wäre, so müßte, da:

$$(1) \qquad O' \geqq \sum p_k^2 + \sum \pi_k^2$$

ist, p_1 kleiner als 3 sein. [393

Sei nun zunächst:

$$p_1 = 2, \quad \pi_1 = 2.$$

Ist dabei p_2 größer als Null, so müßte wegen der Formel:

$$(2) \qquad O' \geqq \left(\sum p_k + \sum \pi_k\right)^2 - 2 \sum p_k \pi_k$$

die Ordnung der Fläche jedenfalls gleich 17 sein. Es bleibt also nur die Hypothese $p_2 = 0$ zu untersuchen. Es läßt sich aber nachweisen, daß es keine Minimalkurve vierter Ordnung gibt, die die unendlich entfernte Ebene in zwei distinkten, doppeltzählenden Punkten schneidet. Denn es gibt keine derartige Minimalkurve vierter Ordnung, die auf zwei Flächen zweiter Ordnung liegt. Und die Minimalkurven vierter Ordnung, die nur auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, und welche dabei bekanntlich vom Range 6 sind, entsprechen notwendig, da $R - M \geqq 3$ ist, einer der folgenden Annahmen:

$$M = 1, \quad R = 6, \quad O = 4,$$
$$M = 2, \quad R = 6, \quad O = 4,$$
$$M = 3, \quad R = 6, \quad O = 4.$$

Unter diesen ist die erste unmöglich, weil die beiden Gleichungen:

$$m_1 + \cdots + m_q + q + 2 = R = 6,$$
$$m_1 + \cdots + m_q + 2q \quad = O = 4$$

die unmögliche Relation $q = 0$ nach sich ziehen würden.

Die zweite Annahme (vergleiche Nr. 44) gibt:

$$R - M = 4 = o, \quad r = 6, \quad m = r - O = 2,$$

sodaß die Kurve im linearen Komplexe von der Geraden g in zwei konsekutiven Punkten berührt würde; dann aber hätte die Minimalkurve die unendlich entfernte Ebene zur stationären Oskulationsebene, womit wir auf Widerspruch geführt sind.

Die dritte Annahme endlich würde geben:

$$R - M = 3 = o.$$

Nun sahen wir allerdings in Nummer 43, daß die Annahme $o = 3$ auf Minimalkurven vierter Ordnung führen könnte, doch waren die unendlich entfernten Punkte dieser Kurven nie so gelegen, wie oben verlangt wurde.[1])

In dieser Weise erkennen wir, daß es keine Minimalkurve vierter Ordnung gibt, die der Hypothese $p_1 = 2$, $\pi_1 = 2$ entspricht, und daß infolgedessen die Hypothese $p_1 = 2$, $\pi_1 = 2, \ldots$, oder, sage ich kurzweg, die Hypothese (2, 2), ... keine Fläche gibt, deren Ordnung niedriger als 17 ist. [394

Wir wenden uns jetzt zu der Hypothese (2, 1), ..., das heißt, wir setzen voraus, daß $p_1 = 2$, $\pi_1 = 1$ ist, während wir die Werte der Zahlen $p_2, \pi_2, \ldots$ unbestimmt lassen. Ist nun $p_2 = 2$, so ist die Ordnung der Fläche gleich oder größer als 21. Ich werde nachweisen, daß die Hypothese $p_2 = 1$ nur für Minimalkurven, deren Ordnung größer als 4 ist, eintreten kann.

Existierte in der Tat eine Minimalkurve vierter Ordnung, die der Hypothese:

$$p_1 = 2, \quad \pi_1 = 1, \quad p_2 = 1, \quad \pi_2 = 0, \quad p_2 = 0$$

entspräche, so müßte:

$$R = 6$$

sein, während M nicht größer als 3 sein könnte. M kann nicht gleich 1 sein, da die Zahlen p_k und π_k nicht sämtlich größer als 2 sind.

Die Hypothese $M = 2$ gibt:

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = r - O = 2.$$

Infolgedessen müßte g eine Inflexionstangente der Komplexkurve, und andererseits die unendlich entfernte Ebene eine stationäre Oskulationsebene der Minimalkurve sein, sodaß wir auf Widerspruch geführt sind.

Die Hypothese $M = 3$ endlich gibt:

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = 0, \quad \mu = 0.$$

Wir haben aber früher gesehen, daß die dieser Komplexkurve entsprechende Minimalkurve die unendlich entfernte Ebene in vier verschiedenen Punkten schneidet. Hiermit ist nachgewiesen, daß Minimalkurven, die der Hypothese:

$$p_1 = 2, \quad \pi_1 = 1, \quad p_2 = 1, \ldots$$

1) Ich bemerke beiläufig, daß die Entwickelungen des Textes eine erschöpfende Bestimmung aller Minimalkurven vierter Ordnung liefern.

entsprechen, von fünfter oder noch höherer Ordnung sind. *Folglich ist die Ordnung der entsprechenden Flächen gleich oder größer als 19.*

Ist $p_1 = 2$, $\pi_1 = 0$, so muß p_2 größer als Null sein, da es keine Minimalkurve zweiter Ordnung gibt. Ist p_2 gleich 1, so muß unsere Kurve nach dem soeben Entwickelten jedenfalls von der fünften Ordnung sein, sodaß die betreffende Fläche *jedenfalls von der 23-ten Ordnung* sein muß. Ist endlich $p_2 = 2$, so muß die Minimalkurve jedenfalls von der fünften, die Fläche *jedenfalls von der 25-ten Ordnung* sein.

So bleibt nur noch die Annahme, daß p_1 gleich 1 ist, und daß infolgedessen die π_k und die übrigen Größen p_k gleich 1 oder Null sind. Hierbei können verschiedene Unterfälle eintreten.

Zunächst werden wir annehmen, daß die betreffenden Minimalkurven von der *vierten* Ordnung sind. Alsdann gibt die Hypothese (1,1), (1,1) eine Fläche zwölfter Ordnung, die Hypothese (1,1), (1,0), (1,0) eine Fläche vierzehnter Ordnung, endlich die Hypothese (1,0), (1,0), (1,0), [395
(1,0) eine Fläche sechzehnter Ordnung. Diese drei Flächen sind (Nr. 43) sämtlich von der achtzehnten Klasse. Ist die Ordnung unserer Minimalkurve größer als vier, so ist die Ordnung der betreffenden Fläche jedenfalls größer als 21.

Hiermit ist nachgewiesen, daß die Ordnung einer jeden reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, jedenfalls größer als 8 ist.

Wünscht man, indem man fortwährend alle Doppelflächen ausschließt, alle reellen Minimalflächen von der neunten Ordnung zu bestimmen, so zeigen die obenstehenden Entwickelungen, daß p_1 nicht kleiner als 3 sein darf. Auf der anderen Seite zeigt die Formel (1), daß p_1 auch nicht größer als 3 sein kann, und daß dabei die π_k und die übrigen p_k gleich Null sein müssen. Und da es nur eine Minimalkurve dritter Ordnung gibt, fließt hieraus der Satz:

Satz 58. *Die* **Enneper**sche *Minimalfläche neunter Ordnung, sechster Klasse ist die einzige Minimalfläche neunter Ordnung, die keine Doppelfläche ist.*

48. Verlangt man alle Flächen, deren Ordnung 16 nicht übersteigt, so kann p_1 nicht größer als 4 sein. Ist p_1 gleich 4, so müssen die π_k und die übrigen p_k gleich Null sein. Die zugehörige Minimalkurve ist daher von der vierten Ordnung. Liegt dieselbe auf zwei Flächen zweiten Grades, so ist ihr Rang gleich 5; die betreffende Fläche ist von der Ordnung 16 und von der Klasse 8. Ist dagegen die Minimalkurve eine solche Kurve

vierter Ordnung, die nur auf einer Fläche zweiten Grades gelegen ist, so muß nach einer früheren Bemerkung die Größe M entweder gleich 2 oder gleich 3 sein. Ist:

$$M = 2, \quad O = 4, \quad R = 6,$$

so kommt:

$$o = 4, \quad r = 6, \quad m = r - O = 2, \quad \mu = o - M = 2,$$

was kontradiktorisch ist, weil eine Komplexkurve vierter Ordnung nicht eine solche Lage hinsichtlich der Geraden g haben kann, daß gleichzeitig $m = 2$, $\mu = 2$ ist. Ist andererseits:

$$M = 3, \quad O = 4, \quad R = 6,$$

so kommt:

$$o = 3, \quad r = 4, \quad m = r - O = 0,$$

sodaß unsere Minimalkurve vier verschiedene, und nicht, wie früher vorausgesetzt, vier vereinigte unendlich entfernte Punkte haben müßte. Hiermit ist gezeigt, daß die *Hypothese* (4,0) *nur eine Fläche sechzehnter Ordnung, achter Klasse gibt.*

Ist $p_1 = 3$, so kann π_1 nicht größer als 2 sein, und dann müssen die übrigen p_k und π_k gleich Null sein, sodaß die Minimalkurve von der [396
fünften Ordnung ist. Ich werde zeigen, daß die Ordnung der entsprechenden Minimalflächen jedenfalls größer als 16 ist.

Laß mich zunächst voraussetzen, daß die durch den Punkt P_1 hindurchgehenden Kurvenzweige durch eine *einzige* Reihenentwickelung dargestellt, und daß ebenso die durch Π_1 gehenden Zweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind. Der niedrigste Exponent der ersten Entwickelung ist dann entweder $\frac{3}{1}$, oder $\frac{3}{2}$, oder $\frac{3}{3}$. Der niedrigste Exponent der zweiten Entwickelung ist $\frac{2}{1}$, oder $\frac{2}{2}$. Unsere Annahme führt also auf sechs verschiedene Fälle:

1. Sind die niedrigsten Exponenten beziehungsweise $\frac{3}{1}$ und $\frac{2}{1}$, so ist die Ordnung der betreffenden Fläche gleich oder größer als 21.

2. Die Exponenten $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$ geben nur Flächen, deren Ordnung größer als 20 ist.

3. Die Exponenten $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{1}$ geben nur Flächen, deren Ordnung größer als 18 ist.

4. Die Exponenten $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{2}$ geben nur Flächen, deren Ordnung größer als 16 ist.

5. Die Exponenten $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{1}$ geben nur Flächen, deren Ordnung größer als 18 ist.

6. Die Exponenten $\frac{3}{3}, \frac{2}{2}$ können nicht gleichzeitig vorkommen, da keine Raumkurve 5-ter Ordnung gleichzeitig einen dreifachen und einen zweifachen Punkt haben kann.

Sind die durch P_1 gehenden Zweige nicht durch eine einzige, sondern durch zwei oder drei Entwickelungen dargestellt, so sind die entsprechenden niedrigsten Exponenten im ersten Falle $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}$, im zweiten Falle $\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}$. Sind andererseits die durch Π_1 gehenden Zweige durch zwei Entwickelungen dargestellt, so sind die entsprechenden Exponenten $\frac{1}{1}, \frac{1}{1}$.

Indem man sukzessiv alle möglichen Fälle berechnet, und dabei berücksichtigt, daß ein dreifacher und ein zweifacher Punkt nicht gleichzeitig auftreten können, erkennt man, daß die Annahme (3, 2) nur Flächen gibt, deren Ordnung größer als 16 ist.

Die Hypothese (3, 1) gibt bekanntlich nur eine Minimalkurve vierter Ordnung, fünften Ranges. Die entsprechende Minimalfläche ist von der zwölften Ordnung und der zwölften Klasse. Die Hypothese (3, 1), ... gibt nur Flächen, deren Ordnung größer als 18 ist.

Die Hypothese (3, 0) gibt die Ennepersche Fläche neunter Ordnung. Die Hypothese (3, 0), ... gibt nur eine Fläche sechzehnter Ordnung, [397 zwölfter Klasse.

Die Flächen, die den Hypothesen $p_1 = 2$ und $p_1 = 1$ entsprechen, sind früher bestimmt worden. Und also ist es uns wirklich gelungen, alle reellen Minimalflächen, deren Ordnung niedriger als 17 ist, und welche dabei keine Doppelflächen sind, zu bestimmen. Ich stelle die betreffenden Flächen in dem folgenden Schema zusammen:

Hypothese	Ordnung	Klasse
(4, 0)	16	8
(3, 1)	12	12
(3, 0) (1, 0)	16	12
(3, 0)	9	6
(1, 1) (1, 1)	12	18
(1,1) (1,0) (1,0)	14	18
(1, 0) (1, 0) (1, 0) (1, 0)	16	18

49. Es ist schwieriger, alle Doppelflächen von gegebener Ordnung zu bestimmen. Ich werde diejenigen Resultate, die ich bis jetzt erhalten habe, auseinandersetzen.

Da die betreffenden Minimalkurven sich selbst konjugiert sind, so wird:

$$p_k = \pi_k.$$

Bezeichnen wir die Ordnung der Doppelfläche mit O'', so ist nach unseren früheren Untersuchungen:

$$O'' \geqq 2\left(\sum p_k\right)^2 - \sum p_k^2,$$

und also zugleich:

$$O'' \geqq \sum p_k^2.$$

Verlangen wir, daß O'' kleiner als 9 sein soll, so muß nach der letzten Formel p_1 entweder gleich 2 oder gleich 1 sein.

Da es keine Minimalkurve vierter Ordnung gibt, die der Hypothese (2, 2) entspricht, so erkennen wir, daß die Annahme $p_1 = 2$ nur Doppelflächen liefert, deren Ordnung größer als 12 ist.

Es bleibt also nur die Annahme $p_1 = 1$. Die Hypothese:

$$(1, 1), (1, 1)$$

gibt bekanntlich (Nummer 40, 43) eine Doppelfläche sechster Ordnung, neunter Klasse, wobei indes wie früher unentschieden bleibt, ob dieselbe reell sein kann.

Die Hypothese:

$$(1, 1), (1, 1), (1, 1)$$ [398

gibt nur Doppelflächen, deren Ordnung größer als 14 ist. Also kommt, indem wir uns zugleich an unsere früheren Ergebnisse erinnern:

Satz 59. Gibt es reelle Minimalflächen, deren Ordnung niedriger als neun ist, so muß ihre Ordnung gleich sechs, ihre Klasse gleich neun sein.

Wir stellen sodann die Frage nach den reellen Doppelflächen, deren Ordnung nicht größer als 15 ist.

Es ist zunächst klar, daß p_1 nicht größer als 3 sein darf. Und da wir schon die beiden Hypothesen $p_1 = 2$ und $p_1 = 1$ behandelt haben, bleibt nur die Hypothese $p_1 = 3$ übrig. Ist dabei p_2 größer als Null, so ist die Ordnung der betreffenden Doppelflächen jedenfalls gleich 22. Wir haben daher nur zu untersuchen, welche Doppelflächen der Hypothese:

$$(3, 3)$$

entsprechen.

Es können drei verschiedene Fälle eintreten; wir werden dieselben der Reihe nach betrachten.

1. Laß uns zunächst voraussetzen, daß die durch P_1 gehenden Kurvenzweige durch dieselbe Reihenentwickelung dargestellt werden, und daß der niedrigste Exponent gleich $\frac{3}{1}$ ist. Die entsprechenden Minimalflächen sind von der fünfzehnten Ordnung. Hierher gehört die Hennebergsche

Fläche fünfter Klasse. Es ist mir nicht gelungen, zu entscheiden, ob es noch andere reelle Doppelflächen fünfzehnter Ordnung gibt, die unserer Hypothese entsprechen. Ist dies der Fall, so ist ihre Klasse dargestellt durch die Formel:

$$M(M+4)$$

und also gleich 12, 21 oder noch größer.

2. Wir setzen fortwährend voraus, daß die durch P_1 gehenden Zweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind; und sei jetzt der niedrigste Exponent gleich $\frac{3}{2}$. Die Ordnung der entsprechenden Doppelflächen ist gleich:

$$\tfrac{1}{2}(36-2\,.\,4-2\,.\,3)=11.$$

Es ist mir nicht gelungen, zu entscheiden, ob diese Hypothese reelle Doppelflächen liefert.

3. Es bleibt nur die Annahme, daß die durch P_1 gehenden Zweige durch zwei Entwickelungen dargestellt sind, und daß $\frac{2}{1}$ und $\frac{1}{1}$ die betreffenden Exponenten sind. Die Ordnung der entsprechenden Flächen ist gleich:

$$\tfrac{1}{2}(36-2\,.\,2-2\,.\,1-2\,.\,1-2\,.\,1)=13.$$ [399

Ich weiß indes nicht, ob diese Hypothese reelle Doppelflächen liefern kann.

Früher haben wir schon gesehen, daß die Hypothese $p_1=2$ jedenfalls nur Flächen, deren Ordnung größer als 12 ist, liefert. Ich werde versuchen, diese Hypothese etwas näher zu diskutieren.

Ist p_2 größer als 1, so ist die Ordnung der betreffenden Flächen jedenfalls größer als 23. Andererseits kann p_2 nicht Null sein, da die Hypothese $(2,2)$ keine Minimalkurve vierter Ordnung liefert. Daher muß $p_2=1$ sein. Ist dabei p_3 größer als Null, so ist die Ordnung der betreffenden Flächen größer als 25. Wir brauchen somit nur die Hypothese:

$$(2,2),(1,1)$$

zu untersuchen. Es können drei Fälle eintreten:

1. Laß uns zunächst voraussetzen, daß die durch P_1 gehenden Kurvenzweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind, und daß der betreffende Exponent gleich $\frac{2}{1}$ ist. Die Ordnung der entsprechenden Doppelflächen ist gleich:

$$\tfrac{1}{2}(36-2\,.\,2-2\,.\,1)=15.$$

2. Laß uns andererseits voraussetzen, daß die durch P_1 gehenden Zweige durch eine einzige Entwickelung dargestellt sind, und daß der betreffende Exponent gleich $\frac{2}{2}$ ist. Die Ordnung der entsprechenden Doppelflächen ist gleich:

$$\tfrac{1}{2}(36-2\,.\,4-2\,.\,1)=13.$$

3. Endlich haben wir noch die Annahme, daß die durch P_1 gehenden Zweige durch zwei Entwickelungen dargestellt sind, und daß die betreffenden Exponenten gleich $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{1}$ sind. Die reellen Doppelflächen, die dieser Annahme entsprechen können, sind von der 13-ten Ordnung.

Aus dem Vorangehenden fließt der Satz:

Satz 59*. Es gibt keine reelle Doppelfläche, deren Ordnung gleich einer der folgenden Zahlen:

$$2,3,4,5,7,8,9,10,12,14$$

ist. Dagegen lasse ich unentschieden, ob die Ordnung einer reellen Doppelfläche gleich 6, 11, oder 13 sein kann.[1])

Im übrigen betrachte ich den folgenden Satz als das wichtigste [400 Ergebnis meiner Untersuchungen über Minimalflächen gegebener Ordnung:

Satz 60. Die Summe der Ordnung und der Klasse einer reellen Minimalfläche, sie möge eine Doppelfläche sein oder nicht, ist immer größer als 14.

§ 13. Der Asymptotenkegel zerfällt in Ebenen.

50. Ich werde jetzt die unendlich entfernten Punkte einer algebraischen Minimalfläche bestimmen. Dabei setze ich zunächst voraus, daß die Minimalkurven der einen Schar keinen unendlich entfernten Punkt enthalten, der zugleich den Minimalkurven der zweiten Schar angehört.

Sei:

$$x=A(t),\quad y=B(t),\quad z=C(t)$$

eine Minimalkurve der einen Schar, deren Ordnung gleich m sein möge. Und sei:

$$x=A_1(\tau),\quad y=B_1(\tau),\quad z=C_1(\tau)$$

eine Minimalkurve der zweiten Schar, die von der p-ten Ordnung ist. Alsdann ist die Ordnung der Fläche gleich mp.

Die Kurven der ersten Schar haben m gemeinsame unendlich entfernte Punkte; ebenso haben die Kurven der zweiten Schar p gemeinsame un-

1) Die interessante Frage, ob es [reelle] Doppelflächen sechster Ordnung gibt, kann nach dem Vorangehenden auch folgendermaßen formuliert werden: Kann eine Minimalkurve dritter Ordnung durch eine Transformation durch reziproke Radien in eine sich selbst konjugierte Kurve umgewandelt werden?

endlich entfernte Punkte, wobei zu bemerken ist, daß einige unter diesen m oder p Punkten vereinigte Lage haben können. Ich verbinde die m Punkte mit den p Punkten durch gerade Linien, und erhalte hierdurch mp Gerade, von denen unter Umständen einige zusammenfallen.

Ich wähle einen beliebigen unendlich entfernten Punkt Q, der jedoch nicht auf den besprochenen Geraden liegen darf, und ziehe eine durch Q gehende Gerade von allgemeiner Lage. Um die Schnittpunkte dieser Geraden mit unserer Fläche mp-ter Ordnung zu finden, verfährt man nach den Untersuchungen in § 6 folgendermaßen: Man konstruiert die beiden Kegel, welche beziehungsweise die Minimalkurven:

$$x = A(t) - a, \quad y = B(t) - b, \quad z = C(t) - c$$

und:

$$x = -A_1(\tau), \quad y = -B_1(\tau), \quad z = -C_1(\tau)$$

enthalten, und für welche dabei Q gemeinsame Spitze ist. Man bestimmt die gemeinsamen Erzeugenden dieser Kegel. Die Zahl dieser Erzeugenden, die nicht in der unendlich entfernten Ebene liegen, ist gleich der Zahl der im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkte zwischen der Fläche und der durch Q gezogenen Geraden. Nun aber ist klar, daß unsere [401 Kegel nach den gemachten Voraussetzungen keine gemeinsame, unendlich entfernte Erzeugende haben. Und da unsere Kegel beziehungsweise von der m-ten und der p-ten Ordnung sind, so haben sie mp gemeinsame im endlichen Raume gelegene Erzeugende, die wegen der unbestimmten Parameter a, b, c sämtlich verschieden sein müssen. Dementsprechend schneidet eine durch Q gehende Gerade von allgemeiner Lage die Fläche in mp verschiedenen Punkten. Und da die Ordnung der Fläche gleich mp ist, folgt, daß Q nicht auf der Fläche liegt.

Liegt dagegen die Kegelspitze auf einer unter den besprochenen mp Geraden, so haben die Kegel jedenfalls *eine* gemeinsame unendlich entfernte Erzeugende, und also liegt die Spitze auf der Fläche.

Setzt man daher voraus, daß die Minimalkurven der einen Schar keinen unendlich entfernten Punkt mit den Kurven der zweiten Schar gemein haben, so besteht die Schnittkurve der Fläche mit der unendlich entfernten Ebene nur aus mp Geraden: den Verbindungsgeraden der m unendlich entfernten Punkte der Minimalkurven der einen Schar mit den p entsprechenden Punkten der zweiten Schar.

51. Jetzt werden wir annehmen, daß die Kurven der einen Schar unendlich entfernte Punkte mit den Kurven der zweiten Schar gemein haben. Um die Überlegung möglichst eingehend führen zu können, scheint es mir

zweckmäßig, die Reihenentwickelungen der Minimalkurven in der Umgebung des besprochenen gemeinsamen Punktes aufzustellen.

Ich wähle mein Koordinatentetraeder in der folgenden Weise. Sei $t = 0$ die unendlich entfernte Ebene, und $z = 0$ eine beliebige andere Ebene. Ich ziehe eine zur Ebene $z = 0$ senkrechte Gerade und lege durch dieselbe zwei Ebenen, die den Kugelkreis berühren. Seien $x = 0$ und $y = 0$ diese Ebenen. Wählt man diese vier Ebenen zu Koordinatenebenen, so erhält die Differentialgleichung aller Minimalkurven folgende Form:

$$d\frac{x}{t}\,d\frac{y}{t} - \left(d\frac{z}{t}\right)^2 = 0\,.$$

Ich führe:

$$\frac{t}{y} = \tau, \quad \frac{x}{y} = \xi, \quad \frac{z}{y} = \zeta$$

als neue Koordinaten ein. Dieselben sind jetzt nicht mehr homogene, sondern absolute Koordinaten. Hierdurch nimmt die obenstehende Differentialgleichung die Form an:

$$d\tau(\xi\,d\tau - \tau\,d\xi) = (\tau\,d\zeta - \zeta\,d\tau)^2.$$

Nun werde ich die allgemeinen Reihenentwickelungen einer durch den Punkt:

$$\tau = 0, \quad \xi = 0, \quad \zeta = 0$$

des Kugelkreises hindurchgehenden Minimalkurve suchen. Ich setze:

$$\tau = M_0\zeta^{\frac{p}{q}} + M_1\zeta^{\frac{p+1}{q}} + \cdots = \sum M_\varkappa \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}} = \sum M_\varkappa \zeta^{\pi_\varkappa}, \qquad [402$$

$$\xi = L_0\zeta^{r_0} + L_1\zeta^{r_1} + \cdots = \sum L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$$

und versuche, indem ich die $M_\varkappa$ als gegebene Größen betrachte, die Koeffizienten $L_\varkappa$ und die Exponenten $r_\varkappa$ derart zu bestimmen, daß die Differentialgleichung identisch befriedigt wird. Man findet die Bedingungsgleichung:

$$\sum_\varkappa \sum_{\varkappa'} \sum_i \pi_\varkappa(\pi_{\varkappa'} - r_i)\,M_\varkappa M_{\varkappa'} L_i \zeta^{\pi_\varkappa + \pi_{\varkappa'} + r_i - 2} =$$
$$= \sum_g \sum_{g'} (1 - \pi_g)(1 - \pi_{g'})\,M_g M_{g'} \zeta^{\pi_g + \pi_{g'}},$$

die identisch bestehen soll.

Indem wir zunächst voraussetzen, daß keine unter den Gleichungen:

$$\pi_0 = r_0, \quad \pi_0 = 1$$

stattfindet, ergibt sich, daß $2\pi_0 + r_0 - 2$ der niedrigste Exponent links, und $2\pi_0$ der niedrigste Exponent rechts ist. Also ist:

$$2\pi_0 + r_0 - 2 = 2\pi_0,$$

woraus:

$$r_0 = 2\,.$$

Es ergibt sich ferner, daß:

$$r_1 = 2 + \frac{1}{q}, \quad r_2 = 2 + \frac{2}{q}, \ldots,$$

und im allgemeinen:

$$r_\varkappa = 2 + \frac{\varkappa}{q} = \frac{2q + \varkappa}{q}.$$

Wir werden zeigen, daß die Koeffizienten:

$$L_0, L_1, \ldots, L_{p-2q-1}$$

durch die Größen:

$$M_0, M_1, \ldots, M_{p-2q-1}$$

vollständig bestimmt sind.

Die Größe L_i tritt nämlich zuerst auf in dem Gliede:

$$\pi_0 (\pi_0 - r_i) M_0 M_0 L_i \zeta^{\pi_0 + \pi_0 + r_i - 2}.$$

Infolgedessen ist L_i im allgemeinen eine unzweideutige Funktion von:

$$L_0, L_1, \ldots, L_{i-1}, \quad M_0, M_1, \ldots, M_i;$$

ausgenommen ist dabei nur der Fall, daß $r_i = \pi_0$ ist. In diesem ist L_0 bestimmt durch M_0, L_1 durch M_0 und M_1, und so weiter, und endlich L_{p-2q-1} bestimmt durch $M_0, M_1, \ldots, M_{p-2q-1}$; sodaß der folgende Teil:

$$L_0 \zeta^2 + L_1 \zeta^{\frac{2q+1}{q}} + \cdots + L_{p-2q-1} \zeta^{\frac{p-1}{q}}$$

der Reihe $\Sigma L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$ durch die vorgelegte Reihe $\Sigma M_\varkappa \zeta^{\pi_\varkappa}$ vollständig bestimmt ist.

Ist $\pi_0 = r_0$, so bleiben die obenstehenden Betrachtungen aller- [403
dings nicht mehr gültig. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß in der Reihe $\Sigma L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$ die Koeffizienten der Größen:

$$\zeta^{\frac{p-1}{q}}, \zeta^{\frac{p-2}{q}}, \ldots, \text{und so weiter}$$

gleich Null und somit [auch in diesem Falle] durch die vorgelegte Reihe unzweideutig bestimmt sind.[1])

Ist endlich:

$$\pi_0 = 1 \quad \text{und} \quad \pi_0 \gtrless r_0,$$

so muß:

$$\pi_0 + \pi_1 + r_0 - 2 = \pi_1 + \pi_1$$

sein, woraus folgt:

$$r_0 = 2 + \pi_1 - \pi_0,$$

1) Die Annahme:

$$\pi_0 = r_0$$

kann nur eintreten, wenn π_0 kleiner als 2 ist, wie man leicht einsieht.

sodaß r_0 größer als 2 ist. Auch in diesem Falle sind daher die Koeffizienten der Größen:

$$\zeta^{\frac{p-1}{q}}, \zeta^{\frac{p-2}{q}}, \ldots, \text{und so weiter}$$

gleich Null, und somit durch die vorgelegte Reihe unzweideutig bestimmt.

Zu bemerken ist, daß r_0 nur dann gleich 1 sein kann, wenn gleichzeitig $\pi_0 = 1$ ist; diesen einfachen Fall schließen wir vorläufig aus.

52. Für das Folgende ist es notwendig, die Reihenentwickelungen einer Minimalkurve für eine etwas allgemeinere Lage des Koordinatentetraeders aufzustellen.

Ich setze:

$$\varrho t = t', \quad \varrho x = x', \quad \varrho y = y' + \alpha x', \quad \varrho z = z' + \beta x'$$

und:

$$\frac{t'}{y'} = \tau', \quad \frac{x'}{y'} = \xi', \quad \frac{z'}{y'} = \zeta'$$

und führe nun τ', ξ', ζ' als neue Koordinaten ein. Es ist:

$$\tau = \frac{\tau'}{1 + \alpha \xi'}, \quad \xi = \frac{\xi'}{1 + \alpha \xi'}, \quad \zeta = \frac{\zeta' + \beta \xi'}{1 + \alpha \xi'}.$$

Durch Einführung dieser Werte findet man zunächst eine Entwickelung: [404

$$\xi' = L_0' \zeta'^{\frac{2q}{q}} + \cdots + L_{p-2q-1}' \zeta'^{\frac{p-1}{q}} + \cdots,$$

wo jede Größe L_i' durch die Koeffizienten $L_0, \ldots, L_i$ bestimmt ist. Man findet ferner:

$$\frac{\tau'}{1 + \alpha \xi'} = M_0 \left(\frac{\zeta' + \beta \xi'}{1 + \alpha \xi'} \right)^{\frac{p}{q}} + \cdots,$$

und durch Ausführung kommt:

$$\tau' = M_0 \zeta'^{\frac{p}{q}} + M_1 \zeta'^{\frac{p+1}{q}} + \cdots +$$
$$+ M_0 \frac{p}{q} \beta \zeta'^{\frac{p-q}{q}} \left(L_0' \zeta'^{\frac{2q}{q}} + \cdots + L_{p-2q-1}' \zeta'^{\frac{p-1}{q}} + \cdots \right) + \cdots.$$

53. Laß mich annehmen, daß die beiden Minimalkurven:

$$x = A(t) - a, \quad y = B(t) - b, \quad z = C(t) - c$$

und:

$$x = -A_1(t_1), \quad y = -B_1(t_1), \quad z = -C_1(t_1)$$

einer Minimalfläche durch den auf dem Kugelkreise gelegenen Punkt:

$$\tau = 0, \quad \xi = 0, \quad \zeta = 0$$

hindurchgehen. Die Reihenentwickelungen dieser Kurven seien:

$$\tau = \sum M_\varkappa \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi = \sum L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$$

und:

$$\tau_1 = \sum M_{1,\varkappa} \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi_1 = \sum L_{1,\varkappa} \zeta^{r_{1,\varkappa}}.$$

Ich nehme an, daß:

$$M_0 = M_{1,0}, \ldots, M_{\nu-1} = M_{1,\nu-1}, \quad M_\nu \gtrless M_{1,\nu}$$

ist, wobei bekanntlich:

$$\nu \gtreqless p - q$$

ist. Alsdann ist, wenn wir mit μ die kleinere der Zahlen ν und $p-2q$ bezeichnen, nach dem Vorangehenden:

$$L_0 = L_{1,0}, \ldots, \quad L_{\mu-1} = L_{1,\mu-1},$$

während im allgemeinen:

$$L_\mu \gtrless L_{1,\mu}$$

ist. Seien:

$$\tau' = \sum M'_\varkappa \zeta'^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi' = \sum L'_\varkappa \zeta'^{r_\varkappa}$$

und:

$$\tau'_1 = \sum M'_{1,\varkappa} \zeta'^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi'_1 = \sum L'_{1,\varkappa} \zeta'^{r_{1,\varkappa}}$$

die Reihenentwickelungen in den neuen Variabeln. Es ist dann zu- [405
nächst klar, daß:

$$L'_0 = L'_{1,0}, \ldots, L'_{\mu-1} = L'_{1,\mu-1}$$

wird. Ist nun $\nu < p - q$, so ist:

$$M'_0 = M'_{1,0}, \ldots, M'_{\nu-1} = M'_{1,\nu-1}, \quad M'_\nu \gtrless M'_{1,\nu}.$$

Ist dagegen $\nu = p - q$, so kommt allerdings:

$$M'_0 = M'_{1,0}, \ldots, M'_{p-q-1} = M'_{1,p-q-1},$$

während man nicht ohne weiteres einsieht, daß:

$$M'_{p-q} \gtrless M'_{1,p-q}$$

sein muß. Es ist:

$$M'_{p-q} = M_{p-q} + \frac{p}{q}\beta M_0 L'_{p-2q} + \ldots,$$

$$M'_{1,p-q} = M_{1,p-q} + \frac{p}{q}\beta M_0 L'_{1,p-2q} + \ldots,$$

und da M_{p-q} und $M_{1,p-q}$ verschieden sind, so ist klar, daß M'_{p-q} und $M'_{1,p-q}$ jedenfalls nur für spezielle Werte des Parameters β einander gleich sein können. Da indes die Parameter a, b, c *allgemeine Werte* haben sollen, so lehren die Entwickelungen der Nummer 26, daß M'_{p-q} und $M'_{1,p-q}$ auch für spezielle Werte von β nicht einander gleich sein können. Folglich ist:

$$\delta(\tau - \tau_1) = \delta(\tau' - \tau'_1).$$

Haben die Reihenentwickelungen unserer Minimalkurven die Form:

$$\tau = \sum M_\varkappa \zeta^{\frac{p+\varkappa}{q}}, \quad \xi = \sum L_\varkappa \zeta^{r_\varkappa}$$

und:

$$\tau_1 = \sum M'_{1,\varkappa} \zeta^{\frac{p_1+\varkappa}{q_1}}, \quad \xi_1 = \sum L_{1,\varkappa} \zeta^{r_{1,\varkappa}},$$

wo:

$$\frac{p}{q} \gtrless \frac{p_1}{q_1}$$

ist, so ergibt sich sogleich, daß:

$$\delta(\tau - \tau_1) = \delta(\tau' - \tau'_1)$$

ist.

Erinnern wir uns nun, daß der Punkt:

$$t' = 0, \quad z' = 0, \quad y' = 0$$

einen jeden unendlich entfernten Punkt, der nicht auf der Tangente $\xi = 0$, $\tau = 0$ des Kugelkreises liegt, darstellen kann, so ergibt sich aus unseren früheren Untersuchungen (§ 6 und 7) der Satz:

Gehört ein gewisser Punkt Q des Kugelkreises sowohl den Minimalkurven der einen Schar an, wie den Kurven der zweiten Schar, so liegen diejenigen unendlich entfernten Punkte der betreffenden Minimalfläche, die von [406 *den durch Q hindurchgehenden Kurvenzweigen herrühren können, auf der Tangente des Kugelkreises in Q.*

Berührt die Tangente des Kugelkreises in Q sowohl die Minimalkurven der einen Schar wie die Kurven der zweiten Schar, so ist es leicht, zu beweisen, daß die betreffende Tangente wirklich auf der Fläche liegt.

Aus den beiden Entwickelungen einer Kurve der einen Schar:

$$\xi = L_0 \zeta^{\frac{2q}{q}} + L_1 \zeta^{\frac{2q+1}{q}} + \cdots,$$

$$\tau = M_0 \zeta^{\frac{p}{q}} + M_1 \zeta^{\frac{p+1}{q}} + \cdots$$

folgen nämlich, indem man ξ als unabhängige Variable einführt, zwei Entwickelungen von der Form:

$$\zeta'' = l_0\, \xi^{\frac{q}{2q}} + l_1\, \xi^{\frac{q+1}{2q}} + \cdots,$$
$$\tau'' = m_0\, \xi^{\frac{p}{2q}} + m_1\, \xi^{\frac{p+1}{2q}} + \cdots,$$

und dementsprechend kommt, wenn:

$$\xi_1 = L_{1,0}\, \xi^{\frac{2q_1}{q_1}} + L_{1,1}\, \xi^{\frac{2q_1+1}{q_1}} + \cdots,$$
$$\tau_1 = M_{1,0}\, \xi^{\frac{p_1}{q_1}} + M_{1,1}\, \xi^{\frac{p_1+1}{q_1}} + \cdots$$

die Reihenentwickelungen einer Kurve der zweiten Schar sind, durch Einführung von ξ als unabhängiger Variabeln:

$$\zeta_1'' = l_{1,0}\, \xi^{\frac{q_1}{2q_1}} + l_{1,1}\, \xi^{\frac{q_1+1}{2q_1}} + \cdots,$$
$$\tau_1'' = m_{1,0}\, \xi^{\frac{p_1}{2q_1}} + m_{1,1}\, \xi^{\frac{p_1+1}{2q_1}} + \cdots.$$

Hieraus folgt, wenn zum Beispiel $p : q < p_1 : q_1$ ist:

$$\delta(\tau - \tau_1) = \frac{p}{q}, \quad \sum \delta(\tau - \tau_1) = p q_1,$$
$$\delta(\tau'' - \tau_1'') = \frac{p}{2q}, \quad \sum \delta(\tau'' - \tau_1'') = 2 p q_1,$$

sodaß:

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') > \sum \delta(\tau - \tau_1)$$

wird. Ist andererseits $p : q = p_1 : q_1$, so kommt:

$$\delta(\tau - \tau_1) \lesseqgtr \frac{2p-q}{q}, \quad \sum \delta(\tau - \tau_1) \lesseqgtr (2p-q) q_1,$$
$$\delta(\tau'' - \tau_1'') \gtreqless \frac{p}{2q}, \quad \sum \delta(\tau'' - \tau_1'') \gtreqless p \cdot 2 q_1,$$

sodaß auch jetzt: [407

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') > \sum \delta(\tau - \tau_1)$$

wird.[1])

1) Ausnahmeweise kann es zum Beispiel eintreten, daß:

$$r_0 = \frac{p}{q} > 1, \quad r_{1,0} = \frac{p_1}{q_1} > 1$$

ist; alsdann ist, wenn wir zum Beispiel $p : q \lesseqgtr p_1 : q_1$ annehmen:

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') = p p_1,$$
$$\sum \delta(\tau - \tau_1) \lesseqgtr (2p-q) q_1, \quad \text{oder} \quad = p q_1,$$

Diese Formel bleibt, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, gültig, wenn die Tangente des Kugelkreises in Q nur die eine, dagegen nicht, wenn sie keine unter den Minimalkurven berührt. In dem letzten Falle ist in der Tat:

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') = \sum \delta(\tau - \tau_1).$$

Dies gibt:

Berührt eine Tangente des Kugelkreises alle Minimalkurven, die der einen Schar angehören, so liegt diese Tangente auf der Fläche. Berührt dagegen diese Gerade keine Minimalkurve, so liegt sie nicht auf der Fläche.

Die Multiplizität einer solchen Geraden auf der Fläche wird in jedem Falle bestimmt, indem man in den früher betrachteten Entwickelungen die notwendige Anzahl von Gliedern wirklich berechnet. Doch halte ich es nicht für notwendig, hierauf näher einzugehen.

Aus den vorangehenden Betrachtungen ergibt sich nun der folgende Satz, der die unendlich entfernten Punkte einer jeden Minimalfläche vollständig bestimmt:

Satz 61. Schneiden die Minimalkurven der einen Schar die unendlich entfernte Ebene und also auch den Kugelkreis in den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_g$, während die Kurven der zweiten Schar den Kugelkreis in den Punkten $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ treffen, so liegen sämtliche Verbindungsgeraden **verschiedener** Punkte P, Π auf der Fläche.[1]) Desgleichen, wenn P_a mit Π_b identisch ist, so gehört die Tangente des Kugel- [408 kreises in diesem Punkte der Fläche an, sofern sie von allen Minimalkurven der einen Schar berührt wird, sonst nicht.

Dieser Satz gilt für alle nicht developpablen Minimalflächen, sie mögen reell oder imaginär, Doppelflächen oder nicht Doppelflächen sein. Mein Satz vervollständigt eine frühere Angabe von Geiser. Derselbe hat nämlich gefunden[2]), daß der Schnitt einer algebraischen Minimalfläche mit der unendlich entfernten Ebene nur aus dem Kugelkreise und aus geraden Linien bestehen kann. Nach dem Obenstehenden kann der Kugelkreis nur

und da:

$$p p_1 > (2p-q) q_1, \quad p p_1 > p q_1$$

ist, folgt auch in diesem Falle:

$$\sum \delta(\tau'' - \tau_1'') > \sum \delta(\tau - \tau_1).$$

1) Ist die Fläche insbesondere reell, und sind dabei P_i und Π_i konjugierte Punkte des Kugelkreises, so sind die Geraden $P_i \Pi_i$ eo ipso reell.

2) Mathematische Annalen Bd. III, S. 530.

auf den developpablen und zugleich imaginären Minimalflächen liegen. Überdies ist im Vorangehenden die Lage der betreffenden Geraden bestimmt.

54. Es ist leicht, nachzuweisen, daß jede Minimalfläche eine Anzahl unendlich entfernter konischer Punkte enthält. Seien in der Tat c_0 und k_0 zwei auf einer Minimalfläche gelegene Minimalkurven, und laß mich annehmen, daß c_0 den Kugelkreis im Punkte Q schneidet, ohne jedoch denselben zu berühren. Führe ich nun c_0 in Translationsbewegung, indem ich k_0 als Direktrix benutze, so beschreibt die Tangente von c_0 im Punkte Q einen Kegel, dessen Ordnung gleich der Ordnung der Kurve k_0 sein wird, wenn nicht zufälligerweise auch k_0 durch den Punkt Q hindurchgeht. Folglich ist Q ein konischer Punkt, dessen Tangentenkegel der soeben besprochene Kegel ist. Berührt c_0 den Kugelkreis in Q, so ist dieser Punkt ein ausgearteter konischer Punkt. Also:

Satz 62. Die Schnittpunkte der auf einer Minimalfläche gelegenen Minimalkurven mit der unendlich entfernten Ebene sind konische Punkte der Fläche.

Da nun alle Tangentenkegel einer Fläche durch die konischen Punkte derselben hindurchgehen, fließt aus dem Vorangehenden unter anderm der Satz:

Satz 63. Die Tangentenkegel einer Minimalfläche schneiden den Kugelkreis in gewissen gemeinsamen Punkten. Außerdem gibt es jedoch variable Schnittpunkte.

§ 14. Die Ordnung der Tangentenkegel einer Minimalfläche.

55. Ich werde zeigen, wie man am besten verfährt, wenn man die Ordnung der Tangentenkegel einer Minimalfläche zu bestimmen wünscht. Zunächst werde ich voraussetzen, daß die Kegelspitze unendlich entfernt ist, sodaß der Kegel ein berührender Zylinder wird. In diesem Falle ist die Ordnungsbestimmung äußerst einfach.

Ich nehme einen allgemeinen Punkt des Kugelkreises und konstruiere den Tangentenkegel, dessen Spitze der gewählte Punkt ist. [409
Der erhaltene Kegel zerfällt nach dem Vorangehenden in $M+M'$ Kegel, deren jeder die Fläche nach einer Minimalkurve berührt; außerdem wird unter Umständen die unendlich entfernte Ebene ein Teil des gesamten Tangentenkegels sein. Die besprochenen M und M' Kegel sind beziehungsweise von der Ordnung O' und O. Also ist die Ordnung des eigentlichen Tangentenkegels, dessen Spitze ein allgemeiner Punkt des Kugelkreises ist, gleich $MO'+M'O$.

Man verlege jetzt die Spitze des Tangentenkegels in einen allgemeinen Punkt der unendlich entfernten Ebene. Alsdann zerfällt unser Kegel in die unendlich entfernte Ebene und einen berührenden Zylinder. Sei α die Multiplizität der unendlich entfernten Ebene als irreduktiblen Teiles des Tangentenkegels, und sei β die Ordnung des Zylinders. Alsdann ist $\alpha+\beta$ die Ordnungszahl eines Tangentenkegels von allgemeiner Lage; die Spitze möge unendlich entfernt oder im endlichen Raume liegen.

Es ist klar, daß die beiden Zahlen α und β ungeändert bleiben, wenn die Spitze die unendlich entfernte Ebene durchläuft, dabei vorausgesetzt, daß man solche Punkte vermeidet, die auf der Fläche liegen. Und da der Kugelkreis nicht auf der Fläche liegt, schließen wir, daß

$$\beta = MO' + M'O$$

ist. Also:

Satz 64. Die Ordnungszahl eines berührenden Zylinders ist gleich $MO'+M'O$, oder, wenn die Fläche eine Doppelfläche ist, gleich MO. Ist die Fläche reell und keine Doppelfläche, so ist die besprochene Zahl $2MO$.

56. Wünscht man, weiter zu gehen und die Ordnungszahl eines allgemeinen Tangentenkegels zu bestimmen, so hat man die Zahl α zu bestimmen. Es ist leicht einzusehen, daß sich α als die Summe einer Reihe von Zahlen α_{ik} darstellen läßt. Bezeichnen wir nämlich wie früher die unendlich entfernten Punkte der auf unserer Fläche gelegenen Minimalkurven beziehungsweise mit:

$$P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_\varrho,$$
$$\Pi_1, \ldots, \Pi_k, \ldots, \Pi_s,$$

so besteht bekanntlich die Schnittkurve der Fläche mit der unendlich entfernten Ebene aus den Geraden $P_i\Pi_k$. Berührt die Fläche die Ebene nach einer gewissen Geraden $P_i\Pi_k$, so veranlaßt dieser Umstand, daß jeder Tangentenkegel, dessen Spitze unendlich entfernt ist, die unendlich entfernte Ebene etwa α_{ik}mal als irreduktiblen Teil enthält. Daher wird:

$$\alpha = \sum\sum \alpha_{ik},$$

wo sich jede Zahl α_{ik} nur auf die Gerade $P_i\Pi_k$ bezieht. Die Zahl α_{ik} [410
ist bestimmt durch die Reihenentwickelungen derjenigen Zweige unserer Minimalkurven, die durch P_i und Π_k hindurchgehen. Doch gehe ich auf die Berechnung der α_{ik} nicht näher ein.

57. Es ist leicht, beliebig viele Minimalflächen zu konstruieren, für welche $\alpha = 0$ ist; wir können sogar beliebig viele Minimalflächen konstruieren, die die unendlich entfernte Ebene nicht berühren.

Man zeigt nämlich zunächst, daß:

$$2\,M\,M'$$

die Zahl der parallelen Tangentenebenen der Fläche ist. Wünscht man in der Tat durch eine unendlich entfernte Gerade alle möglichen Tangentenebenen an die Fläche zu legen, so verfährt man folgendermaßen. Man bestimmt die Schnittpunkte P und Q der Geraden mit dem Kugelkreise, und wählt eine Minimalkurve aus jeder Schar, etwa c_0 und k_0. Man bestimmt die M auf c_0 gelegenen Punkte π, deren zugehörige Tangenten den Kugelkreis in P (oder Q) treffen; ebenso sucht man die M' auf k_0 gelegenen Punkte π', deren zugehörige Tangenten den Kugelkreis in Q (oder P) treffen. Man zieht die durch die M Punkte π gehenden Kurven k, und zugleich die durch die M' Punkte π' gehenden Kurven c.

Die gezogenen Kurven c und k schneiden einander in $M\,M'$ Punkten, deren zugehörige Tangentenebenen die verlangte Richtung haben. Endlich findet man $M\,M'$ weitere solche Punkte, indem man die Punkte P und Q vertauscht. Also:

Satz 65. Eine Minimalfläche hat $2\,M\,M'$ parallele Tangentenebenen, unter denen, wenn die Fläche reell ist, $2\,M$ reell sind. Ist die Fläche eine Doppelfläche, so sind unsere Zahlen mit 2 zu dividieren.

Nun ist die Klasse einer Minimalfläche gleich:

$$M(R'-M')+M'(R-M),$$

also ergibt sich durch Subtraktion, daß:

$$M(R'-M')+M'(R-M)-2\,M\,M'$$

die Multiplizität der unendlich entfernten Ebene als Tangentenebene ist. Also:

Satz 66. Die Multiplizität der unendlich entfernten Ebene als Tangentenebene ist $M(R'-2\,M')+M'(R-2\,M)$, oder, wenn die Fläche reell ist: $2\,M(R-2\,M)$. Ist die Fläche eine Doppelfläche, so ist die besprochene Zahl gleich $M(R-2\,M)$.

Ist daher $R=2\,M$, so berührt die zugehörige reelle Minimalfläche die unendlich entfernte Ebene gar nicht.

Um solche Minimalflächen zu finden, verfahre ich folgendermaßen. Ich nehme eine Kurve, deren Tangenten unserem linearen Komplexe angehören, und welche dabei eine allgemeine Lage hinsichtlich der Ge-

raden g hat. Infolgedessen schneidet g die zugehörige Developpable [411
in r verschiedenen Punkten. Dabei ist:

$$m=0, \quad \mu=0,$$

folglich wird für die entsprechende Minimalkurve:

$$M=o, \quad R-M=o, \quad R=2\,o=2\,M,$$

sodaß die dieser Minimalkurve entsprechende reelle Minimalfläche die unendlich entfernte Ebene gar nicht berührt.

Der Tangentenkegel einer solchen Fläche ist nach dem Vorangehenden von der Ordnung $2\,M\,O$ (oder $M\,O$, wenn die Fläche eine Doppelfläche ist).

58. Die Ordnung eines Tangentenkegels ist nach Plücker gleich der Klasse einer ebenen Schnittkurve der Fläche. Insbesondere schließen wir, daß jede auf einer Minimalfläche gelegene ebene Kurve $M\,O'+M'\,O$ (oder $M\,O$) parallele Tangenten besitzt. Hieraus folgt weiter, daß unsere Kurve $(M\,O'+M'\,O)^2$ Brennpunkte besitzt. Ist die Fläche reell, so gibt es $2\,M\,O$ (oder $M\,O$) reelle Brennpunkte. Also:

Satz 67. Die auf einer reellen Minimalfläche liegenden ebenen Kurven haben $2\,M\,O$ reelle Brennpunkte; diese Zahl ist mit 2 zu dividieren, wenn die Fläche eine Doppelfläche ist.

59. Es gibt eine andere bemerkenswerte Methode zur Bestimmung der Ordnung eines Tangentenkegels. Ich werde dieselbe in aller Kürze entwickeln, obgleich ich noch nicht alle mit derselben verbundenen Schwierigkeiten erledigt habe.

Ich schneide einen Tangentenkegel mit einem Kegel, der dieselbe Spitze besitzt und welcher dabei den Kugelkreis enthält. Die Ordnung des Tangentenkegels ist gleich der Zahl der gemeinsamen Erzeugenden, dividiert durch 2. Es gibt zweierlei solcher Erzeugender: diejenigen, die durch die Punkte P_i, Π_k gehen, und diejenigen, deren Berührungspunkt im endlichen Raume liegt. Ich werde eine Methode entwickeln zur Bestimmung der letzteren.

Betrachtet man in den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi &= A(t)+A_1(\tau)+\varepsilon A'(t), \\ \eta &= B(t)+B_1(\tau)+\varepsilon B'(t), \\ \zeta &= C(t)+C_1(\tau)+\varepsilon C'(t) \end{aligned}$$

t, τ als gegebene Parameter, ε als eine variable Größe, so erhält man alle Punkte ξ, η, ζ auf einer Tangente einer Minimalkurve c. Betrachtet man dagegen ξ, η, ζ als gegeben, so bestimmen unsere Gleichungen alle durch diesen Punkt gehenden Tangenten an Kurven der Schar c.

Ich führe drei neue Größen x', y', z' ein, und ersetze meine drei Gleichungen durch die sechs folgenden äquivalenten:

$$(1)\quad x' = A(t) + \varepsilon A'(t), \quad y' = B(t) + \varepsilon B'(t), \quad z' = C(t) + \varepsilon C'(t),$$ [412

$$(2)\quad x' = \xi - A_1(\tau), \quad y' = \eta - B_1(\tau), \quad z' = \zeta - C_1(\tau).$$

Die drei Gleichungen (1) bestimmen alle Punkte auf der Developpablen einer Minimalkurve c. Die Gleichungen (2) bestimmen eine Minimalkurve, die zu den Kurven der Schar k kollinear verwandt ist.

Die Anzahl der im endlichen Raume gelegenen Schnittpunkte zwischen der Kurve (2) und der Developpablen (1) ist gleich der Anzahl derjenigen Tangenten, die durch den Punkt ξ, η, ζ gehen, und welche dabei eine Kurve c berühren.

In dieser Weise bestimmt man diejenigen gemeinsamen Erzeugenden der besprochenen Kegel, deren Berührungspunkte im endlichen Raume liegen. Hierzu fügt man die nach den Punkten P_i und Π_k hinlaufenden Geraden, welche ebenfalls gemeinsame Erzeugende sind. Hierbei lasse ich jedoch *unentschieden, wie man die Multiplizität* dieser letzten Geraden als gemeinsamer Erzeugender unserer Kegel bestimmt.[1])

§ 15. Die parabolische Kurve und die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche.

60. Die beiden auf einer Minimalfläche gelegenen Scharen Minimalkurven c und k bestimmen nach dem Vorangehenden (§ 2) eine gemeinsame Umhüllungskurve Σ. Diese Kurve ist eo ipso der Ort derjenigen Punkte, in denen die beiden Minimalrichtungen zusammenfallen. Und also enthält diejenige Developpable, die unsere Fläche längs Σ berührt, den imaginären Kugelkreis. Also ist Σ nach einer Bemerkung von *Darboux* eine auf der Fläche gelegene Krümmungslinie. Daß Σ zugleich eine Haupttangentenkurve ist, beweist man folgendermaßen.

Ist überhaupt eine Fläche und ein Linienkomplex gegeben, so ist der Ort aller Punkte, deren Komplexkegel die Fläche berührt, immer dann eine Haupttangentenkurve, wenn die Berührungserzeugende den besprochenen Ort berührt. Dieser Satz, angewandt auf eine Minimalfläche und den Inbegriff aller Minimalgeraden, gibt:

1) Die gesuchte Zahl hängt offenbar nur ab von der Art des konischen Punktes P_i oder Π_k.

Satz 68. *Die Umhüllungskurve aller auf einer Minimalfläche gelegenen Minimalkurven ist eine Haupttangentenkurve und zugleich eine Krümmungslinie der Fläche.*

Wenn unsere Minimalfläche keine Doppelfläche ist, so ist die Kurve Σ eine Rückkehrkurve der Fläche. Folglich ist sie zugleich ein Teil der parabolischen Kurve. Ist dagegen die Fläche eine Doppelfläche, so ist Σ keine Rückkehrkurve, und auch keine parabolische Kurve.

Um überhaupt die im endlichen Raume gelegene parabolische [413
Kurve einer Minimalfläche zu bestimmen, stellen wir nach den in Nummer 3 gegebenen Regeln die Differentialgleichung der Haupttangentenkurven auf. Man erhält die Gleichung:

$$(s - \sigma)^2 (F'''(s)\, ds^2 - \Phi'''(\sigma)\, d\sigma^2) = 0,$$

oder durch Wegwerfung des Faktors $(s - \sigma)^2$:

$$F'''(s)\, ds^2 - \Phi'''(\sigma)\, d\sigma^2 = 0.$$

Sollen daher die beiden Haupttangenten zusammenfallen, so muß eine der Gleichungen:

$$F'''(s) = 0, \quad F'''(s) = \infty,$$
$$\Phi'''(\sigma) = 0, \quad \Phi'''(\sigma) = \infty$$

bestehen. Wenn daher eine Minimalkurve etwa aus der Schar c eine Spitze oder Inflexionstangente besitzt, so ist die durch einen solchen Punkt gehende Minimalkurve k immer ein Teil der parabolischen Kurve. Also:

Satz 69. *Die parabolische Kurve einer Minimalfläche besteht außer aus den unendlich entfernten Geraden der Fläche nur aus Minimalkurven.*

Die unendlich entfernten Geraden gehören immer der parabolischen Kurve an.

61. Es ist leicht nachzuweisen, daß die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, im allgemeinen zerfällt.

Ich nehme eine Doppeltangentialebene, und ziehe durch den ersten Berührungspunkt die beiden Tangenten t und τ, die den Kugelkreis treffen, und ebenso durch den zweiten Berührungspunkt die entsprechenden Tangenten t_1 und τ_1. Alsdann ist t etwa mit t_1, und τ mit τ_1 parallel. Dies vorausgesetzt, sind zwei Fälle denkbar. Entweder berühren t und t_1 Minimalkurven, die derselben Schar angehören. Oder auch berühren t und t_1 Minimalkurven, die nicht derselben Schar angehören. Infolgedessen zerfallen die Doppeltangentialebenen einer Minimalfläche im allgemeinen in zwei Scharen, deren jede eine Developpable erzeugt. Also:

Satz 70. Die Doppeldeveloppable einer Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, zerfällt im allgemeinen in zwei Teile.

Ich werde zeigen, wie man die beiden Teile der Doppeldeveloppablen analytisch bestimmt. Seien:

$$\begin{aligned} dz &= 2s\,F'''(s)\,ds + 2\sigma\,\Phi'''(\sigma)\,d\sigma, \\ dx &= (1-s^2)\,F'''(s)\,ds + (1-\sigma^2)\,\Phi'''(\sigma)\,d\sigma, \\ dy &= i(1+s^2)\,F'''(s)\,ds + i(1+\sigma^2)\,\Phi'''(\sigma)\,d\sigma \end{aligned}$$

die Differentialgleichungen einer Minimalfläche. Die Relation:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

gibt: [414

$$\begin{aligned} 2s - p(1-s^2) - iq(1+s^2) &= 0, \\ 2\sigma - p(1-\sigma^2) - iq(1+\sigma^2) &= 0, \end{aligned}$$

woraus:

$$p = \frac{s\sigma - 1}{s+\sigma}, \quad q = \frac{1+s\sigma}{i(s+\sigma)}.$$

Erinnern wir uns nun, daß sich die Punktkoordinaten z, x, y folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} z &= \sum_i f_i(s)\,F^{(i)}(s) + \sum_i f_i(\sigma)\,\Phi^{(i)}(\sigma), \\ x &= \sum_i \varphi_i(s)\,F^{(i)}(s) + \sum_i \varphi_i(\sigma)\,\Phi^{(i)}(\sigma), \\ y &= \sum_i \psi_i(s)\,F^{(i)}(s) + \sum_i \psi_i(\sigma)\,\Phi^{(i)}(\sigma), \end{aligned}$$

wo $F^{(i)}$ die drei Differentialquotienten $F''(s)$, $F'(s)$ und $F(s)$ darstellt, so finden wir zur Bestimmung der Größe:

$$z - px - qy = w$$

eine Gleichung von der Form:

$$w = \sum_i \chi_i(s, \sigma)\,F^{(i)}(s) + \sum_i \chi_i(\sigma, s)\,\Phi^{(i)}(\sigma),$$

die wir als Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten betrachten.

Soll nun unsere Fläche Doppeltangentialebenen der ersten Art besitzen, so ist es notwendig, daß jedenfalls die eine der Größen $F(s)$ und $\Phi(\sigma)$ eine mehrdeutige Funktion des betreffenden Arguments ist.[1]) Laß mich mit $F_1(s)$ und $F_2(s)$ zwei Werte von $F(s)$ bezeichnen, die dem-

1) Ist daher $M = 1$, so existiert keine Doppeldeveloppable der ersten Art.

selben Argumente s entsprechen. Ebenso seien $\Phi_1(\sigma)$ und $\Phi_2(\sigma)$ zwei Werte von $\Phi(\sigma)$, die demselben σ entsprechen. Alsdann werden die Doppeltangentialebenen der ersten Art bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} w &= \sum_i \chi_i(s, \sigma)\,F_1^{(i)}(s) + \sum_i \chi_i(\sigma, s)\,\Phi_1^{(i)}(\sigma), \\ w &= \sum_i \chi_i(s, \sigma)\,F_2^{(i)}(s) + \sum_i \chi_i(\sigma, s)\,\Phi_2^{(i)}(\sigma), \end{aligned}$$

und also genügen sie zugleich der Gleichung:

$$w = \sum_i \chi_i(s, \sigma)\tfrac{1}{2}(F_1^{(i)} + F_2^{(i)}) + \sum_i \chi_i(\sigma, s)\tfrac{1}{2}(\Phi_1^{(i)} + \Phi_2^{(i)}),$$

die eine neue Minimalfläche bestimmt. Hiermit ist eine neue Minimalfläche gefunden, die in die Doppeldeveloppable der ersten Art eingeschrieben ist.

Die Doppeltangentialebenen der zweiten Art sind bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$w = \sum_i \chi_i(s, \sigma)\,F^{(i)}(s) + \sum_i \chi_i(\sigma, s)\,\Phi^{(i)}(\sigma), \qquad [415$$

$$w = \sum_i \chi_i(\sigma, s)\,F^{(i)}(\sigma) + \sum_i \chi_i(s, \sigma)\,\Phi^{(i)}(s)$$

und genügen daher zugleich der Gleichung:

$$w = \sum_i \chi_i(s, \sigma)\tfrac{1}{2}(F^{(i)}(s) + \Phi^{(i)}(s)) + \sum_i \chi_i(\sigma, s)\tfrac{1}{2}(F^{(i)}(\sigma) + \Phi^{(i)}(\sigma)),$$

die eine neue Minimalfläche, und zwar eine Doppelfläche bestimmt.

Die Doppeldeveloppable der zweiten Art ist daher einer gewissen Doppelfläche umgeschrieben. So zum Beispiel kann in die Doppeldeveloppable zweiter Art einer Enneperschen Minimalfläche eine Henneberg-sche Minimalfläche eingeschrieben werden.[1])

62. Indem ich schließe, füge ich noch einige Bemerkungen über die Singularitäten einer Minimalfläche hinzu.

Geht durch einen im endlichen Raume gelegenen Punkt einer Minimalfläche mehr als eine Minimalkurve der einen Schar, so gehört dieser Punkt einer auf der Fläche gelegenen Doppelkurve an.

Geht durch einen im endlichen Raume gelegenen Punkt nur eine Minimalkurve aus jeder Schar, und ist dabei der betreffende Punkt kein

1) Die beiden im Texte besprochenen Flächen berühren einander nach einer Minimalkurve, die auf der Enneperschen Fläche die Umhüllungskurve aller Minimalkurven ist. Diese Bemerkung dehnt sich auf beliebige Minimalflächen aus.

singulärer Punkt der besprochenen Kurven, so ist derselbe auch kein singulärer Punkt der Fläche (vorausgesetzt, daß der Punkt nicht auf der Umhüllungskurve aller Minimalkurven gelegen ist). Ist unser Punkt ein Doppelpunkt oder eine Spitze der einen Kurve, so ist die zweite eine Doppelkurve oder Rückkehrkurve der Fläche.

Soll daher eine Minimalfläche im endlichen Raume gelegene konische Punkte besitzen, so müssen alle Minimalkurven der Fläche durch denselben Punkt gehen. Man sieht so unmittelbar, daß der Tangentenkegel eines solchen konischen Punktes, wie Geiser bemerkt hat[1]), den Kugelkreis enthält.

§ 16. Berichtigung eines Fehlers.

63. In einer früheren Abhandlung in Bd. II der norwegischen Zeitschrift „Archiv for Mathematik og Naturvidenskab" [Bd. I d. Ausg., Abh. XVII] beschäftigte ich mich mit ähnlichen Untersuchungen wie die in dieser Arbeit dargestellten. Durch eine Ungenauigkeit kam ich in jener Abhandlung zu dem falschen Schlusse, daß alle algebraischen Doppelflächen imaginär seien, während ich die Existenz der periodischen reellen Doppelflächen richtig erkannte. Dieser Irrtum veranlaßte einige falsche Resultate. So behauptete ich zum Beispiel, daß die Klasse einer reellen Minimal- [416
fläche immer größer als fünf sein müßte; während meine Untersuchungen eigentlich nur zeigten, daß eine Minimalfläche, deren Klasse kleiner als sechs wäre, eine Doppelfläche sein müßte. Meine Abhandlung gab eine richtige Bestimmung aller Doppelflächen dritter, vierter, fünfter Klasse und so weiter; wie gesagt, behauptete ich aber irrtümlicherweise, daß diese Flächen sämtlich imaginär seien.

Erst im September 1877 erfuhr ich, daß Herr Henneberg schon im Jahre 1875 eine reelle Minimalfläche fünfter Klasse entdeckt hatte. Ich bemerkte dann sogleich meinen Irrtum, und sah zugleich, daß die Klasse einer reellen Doppelfläche größer als vier sein müßte. Hierüber gab ich der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania Nachricht in einer kleinen Note, die zugleich einige weitere Resultate enthielt. [D. Ausg. Bd. I, Abh. XVIII.]

Nachträglich erfahre ich durch eine briefliche Mitteilung Hennebergs, daß er schon früher in einer Vorlesung den Satz bewiesen hatte, daß die Klasse einer reellen Minimalfläche größer als vier sein muß. Man vergleiche seine elegante Abhandlung im neunten Bande der Annali di matematica. Meine Untersuchungen gehen indes weiter. So zum Beispiel

1) Math. Annalen Bd. III, S. 534.

bestimmen sie alle reellen Minimalflächen, deren Klassenzahl eine beliebige vorgelegte Primzahl ist.

64. Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir, einige weitere Unterschiede zwischen meinen und Herrn Hennebergs Resultaten zu besprechen.

Herr Henneberg findet, daß die Ordnung seiner reellen Minimalfläche fünfter Klasse gleich siebzehn ist, während nach mir alle reellen Minimalflächen fünfter Klasse von fünfzehnter Ordnung sind. Nach meiner allgemeinen Theorie der unendlich entfernten Punkte einer Minimalfläche muß die Hennebergsche Fläche drei unendlich entfernte Gerade enthalten, unter denen eine reell ist, während die beiden anderen den Kugelkreis in den Schnittpunkten der ersten Linie berühren. Henneberg findet aber, daß seine Fläche fünf unendlich entfernte Gerade enthält.

Endlich scheint mir, daß Henneberg das Geschlecht seiner Fläche unrichtig bestimmt. Es besteht nämlich überhaupt der Satz, daß das Geschlecht einer jeden Minimalfläche, deren erzeugende Minimalkurven vom Geschlechte Null sind, gleich Null ist.[1])

In diesen Punkten, die allerdings in Hennebergs wertvoller Arbeit nur eine untergeordnete Wichtigkeit haben, während sie in meinen Untersuchungen eine wesentlichere Rolle spielen, scheint mir Henneberg sich geirrt zu haben.

Christiania, 20. Juni 1878.

IIa.

Selbstanzeigen von II.

1. Königsberger und Zeuner, Repertorium Bd. II, S. 409—410, Leipzig 1879. Die Selbstanzeige bezieht sich zugleich auf Abh. XVII von Bd. I d. Ausg.

Nimmt man zwei Raumkurven c und k, die einen Punkt p gemein haben, und verschiebt c parallel mit sich selbst derart, daß p die Kurve k durchläuft, so kann die erzeugte Fläche zugleich durch Translationsbewegung der Kurve k erzeugt werden. Sie enthält daher ∞^1 Kurven c und zugleich ∞^1 Kurven k. In jedem Punkte der Fläche liegen die beiden Haupttangenten harmonisch hinsichtlich der hindurchgehenden Kurven c und k. Jede solche Fläche besitzt die Gleichungsform

$$x = A(t) + A_1(\tau), \quad y = B(t) + B_1(\tau), \quad z = C(t) + C_1(\tau).$$

Setzt man insbesondere voraus, daß

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0 = dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2$$

1) Dieser Satz besteht auch, wenn die Fläche eine Doppelfläche ist.

ist, so ist die Fläche nach **Monge** eine Minimalfläche. Sind die Kurven c und k kongruent und zugleich gleichgestellt, so bilden die beiden besprochenen Kurvenscharen eine irreduktible Schar. Eine solche Minimalfläche nennt der Verfasser eine Doppelfläche.

Ausgehend von diesen geometrischen Betrachtungen sucht der Verfasser eine allgemeine projektivische Theorie der algebraischen Minimalflächen zu entwickeln. Unter seinen Resultaten mögen hier nur die folgenden genannt werden.

Sei R der Rang der Kurve c, und M die Multiplizität des Kugelkreises auf der Developpablen von c, und seien R' und M' die entsprechenden Zahlen der Kurve k.

Alsdann ist die Klasse C der erzeugten Minimalfläche gleich

$$M'(R-M)+M(R'-M').$$

Ist die Fläche eine Doppelfläche, so ist [410

$$C=M(R-M);$$

ist sie reell und keine Doppelfläche, so kommt

$$C=2M(R-M).$$

Die Zahlen M und R befriedigen die Relationen

$$R-M \gtreqless 3, \quad M \lesseqgtr R-M.$$

Vermöge dieser Formeln ist es nun häufig leicht, alle Minimalflächen von gegebener Klasse zu bestimmen.

Soll zum Beispiel $C=3$ sein, so muß $C=M(R-M)$, $M=1$, $R=4$ sein. Die entsprechende Minimalfläche ist eine **Cayley**sche Linienfläche dritter Ordnung und dritter Klasse, die jedoch immer imaginär ist. Soll überhaupt die Klasse einer reellen Minimalfläche eine Primzahl sein, so ist $M=1$ und $C=R-1$. Die entsprechenden Flächen werden sämtlich bestimmt. Soll die Klasse dividiert mit 2 eine Primzahl sein, so ist $C=2M(R-M)$, $M=1$. Auch diese [Flächen] sind in jedem einzelnen Falle leicht zu bestimmen.

Ist die Ordnung von c und k beziehungsweise gleich o und ω, so ist die Ordnung der Fläche gleich $o\omega-\varrho$, wo ϱ nach einer bemerkenswerten Regel zu berechnen ist. Die Zahl ϱ ist immer gleich Null, wenn c und k keinen gemeinsamen unendlich entfernten Punkt haben. Es gibt keine **reelle** Minimalfläche, deren Ordnung gleich 2, 3, 4, 5, 7, 8 ist. Dagegen bleibt es unentschieden, ob es reelle Flächen sechster Ordnung gibt. Ist dies der Fall, so ist die Klasse einer jeden solchen Fläche gleich 9.

Der Schnitt mit der unendlich entfernten Ebene besteht nur aus geraden Linien, die man erhält, wenn man die unendlich entfernten Punkte der Kurve c mit den entsprechenden Punkten der Kurve k durch Gerade verbindet. Die Ordnung einer umgeschriebenen Zylinderfläche ist gleich

$$M\omega+M'o.$$

Die Multiplizität der unendlich entfernten Ebene als Tangentenebene ist gleich

$$M'(R-2M)+M(R'-2M').$$

2. Bulletin des Sciences mathématiques, Bd. XIV (II. Ser., Bd. III), 2. Abt., S. 186—187; Paris, November 1879.

Die Selbstanzeige bezieht sich zugleich auf die Abh. XVII von Bd. I d. Ausg.

Si l'on prend deux courbes dans l'espace c et k, ayant un point commun p, et que l'on transporte c parallèlement à elle-même de manière qu'elle parcoure la courbe k, la surface engendrée peut aussi être produite par un mouvement de translation de k. Elle contient donc ∞^1 courbes c et ∞^1 courbes k. Par chaque point de la surface passe une courbe de chacune des deux séries. Les tangentes correspondantes de ces deux courbes sont situées harmoniquement par rapport aux deux tangentes principales qui passent par ce même point. Toute surface de cette espèce est représentée par des équations de la forme

$$x=A(t)+A_1(\tau), \quad y=B(t)+B_1(\tau), \quad z=C(t)+C_1(\tau).$$

Si l'on suppose, en particulier, que l'on ait

$$dA^2+dB^2+dC^2=0=dA_1^2+dB_1^2+dC_1^2,$$

la surface sera, d'après **Monge**, une surface minimum. Si les deux courbes c et k sont superposables et semblablement placées, les deux séries de courbes formeront une série irréductible. L'auteur appelle une telle surface une **surface double**.

En partant de ces considérations géométriques, l'auteur cherche à développer une théorie projective générale des surfaces minima algébriques. Parmi les résultats qu'il a obtenus, nous citerons ici les suivants. Soient R le rang de la courbe c, M le degré de multiplicité du cercle sphérique sur la développable de c, et R', M' les nombres correspondants relatifs à la courbe k. Alors la classe C de la surface minimum engendrée sera égal à

$$M'(R-M)+M(R'-M').$$

Si la surface est une surface double, on aura

$$C=M(R-M).$$

Les nombres R et M satisfont aux relations

$$R - M \gtreqqless 3, \quad R - M \gtreqqless M.$$

À l'aide de ces formules il est souvent facile de déterminer toutes les surfaces minima d'une classe donnée.

Si l'on doit avoir, par exemple, $C = 3$, il faudra alors que l'on ait

$$C = M(R - M), \quad M = 1, \quad R = 4.$$

La surface minimum correspondante est une surface gauche de Cayley, de troisième ordre et de troisième classe, qui est cependant toujours imaginaire.

Si C doit être égal à un nombre premier quelconque, alors [187
on aura

$$C = M(R - M), \quad M = 1.$$

Les surfaces correspondantes peuvent être indiquées dans chaque cas particulier. Si $\frac{1}{2} C$ doit être égal à un nombre premier, on aura

$$C = 2M(R - M), \quad M = 1.$$

Dans ce cas aussi, il est toujours possible d'indiquer les surfaces correspondantes.

Si les ordres de c et de k sont respectivement égaux à o et à ω, l'ordre de la surface sera égal à $o\omega - \varrho$, où ϱ peut se calculer par une règle simple. Si c et k n'ont aucun point commun à l'infini, ϱ sera égal à zéro. Il n'existe pas de surface minimum réelle dont l'ordre soit égal à l'un des nombres 2, 3, 4, 5, 7, 8. La somme de l'ordre et de la classe d'une surface minimum réelle est toujours plus grande que 14.

L'intersection avec le plan de l'infini se compose de lignes droites, que l'on obtient en joignant les points à l'infini de la courbe c avec les points correspondants de la courbe k. L'ordre d'une surface cylindrique circonscrite est égal à $M\omega + M'o$. La multiplicité du plan de l'infini comme plan tangent est égale à

$$M'(R - 2M) + M(R' - 2M').$$

III.

Beiträge zur Theorie der Minimalflächen.[1] [465

II. Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen.

Math. Ann. Bd. XV, Heft 3, 4, S. 465—506. Ausgeg. 22. 10. 1879.

Björling bestimmte zuerst diejenige Minimalfläche, die eine vorgelegte Developpable nach einer vorgelegten Kurve berührt. Später gab Bonnet eine selbständige Lösung des Björlingschen Problems. Hiermit war, wie Bonnet ausdrücklich bemerkt, insbesondere auch die Bestimmung derjenigen Minimalfläche, die eine vorgelegte Kurve als Krümmungslinie, Haupttangentenkurve oder geodätische Kurve enthält, geleistet. Endlich gab auch Weierstrass eine schöne und strenge Erledigung des besprochenen Problems, indem er sich auf den Fall einer reellen Developpablen und einer reellen Berührungskurve beschränkte. Er zeigte, daß es dann immer eine und nur eine reelle Minimalfläche gibt, die die gestellten Forderungen erfüllt.[2]

Unter den verschiedenen expliziten Formeln, die zur Erledigung des Björlingschen Problems dienen, sind die folgenden von Schwarz herrührenden oft besonders zweckmäßig:

$$U = \mathbf{x} + i\int (Z d\mathbf{y} - Y d\mathbf{z}),$$
$$V = \mathbf{y} + i\int (X d\mathbf{z} - Z d\mathbf{x}),$$
$$W = \mathbf{z} + i\int (Y d\mathbf{x} - X d\mathbf{y}),$$
$$x = RU, \quad y = RV, \quad z = RW.$$

Hier sind $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ die Koordinaten der vorgelegten reellen Kurve, X, Y, Z die Richtungskosinus der längs dieser Kurve gegebenen Tangentenebenen; R bezeichnet den reellen Teil der komplexen Größen U, V, W; x, y, z sind die Koordinaten der Punkte der bestimmten Fläche. Diese [466
Formeln dehnen sich ohne große Änderung auf den Fall aus, daß $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$,

1) Vergleiche die erste Abhandlung in Bd. XIV, S. 331—416 [hier Abh. II].

2) Aus einem Zitate sehe ich, daß sich auch Mathet mit dem Björlingschen Probleme beschäftigt hat.

X, Y, Z imaginär sind, wie in § 1 der nachstehenden Abhandlung gezeigt wird. In diesem allgemeinen Falle bleibt aber der soeben genannte Satz von Weierstrass nicht mehr gültig.

Im Jahre 1872 wurde den mathematischen Schülern des Züricher Polytechnikums folgende Aufgabe gestellt:

„Eine Minimalfläche ist durch die Bedingung analytisch zu bestimmen, daß eine vorgeschriebene ebene Kurve eine kürzeste Linie derselben sein soll."

Nun ist diese Aufgabe allerdings, wie Bonnet längst bemerkt hat, nur ein sehr spezieller Fall des Björlingschen Problems, dessen allgemeine Lösung man kennt. Nichtsdestoweniger sind die von Henneberg und Herzog gegebenen Beantwortungen des speziellen Problems bemerkenswert. Und insbesondere sind die beiden folgenden Sätze, die von Henneberg herrühren, sehr schön:

I. Enthält eine reelle Minimalfläche eine reelle ebene geodätische Kurve, so ist die Fläche nur dann algebraisch, wenn die Kurve die Evolute einer ebenen algebraischen Kurve ist.

II. Der orthogonale Querschnitt eines jeden um eine reelle algebraische Minimalfläche umgeschriebenen reellen Zylinders ist die Evolute einer ebenen algebraischen Kurve.

Ich habe mir die allgemeine Aufgabe gestellt, zu untersuchen, ob in eine vorgelegte algebraische Developpable algebraische Minimalflächen eingeschrieben werden können. Ich frage ferner, wie man in jedem einzelnen Falle sämtliche eingeschriebene algebraische Minimalflächen findet. Nun ist es mir allerdings nicht gelungen, diese beiden Probleme vollständig zu erledigen. Doch habe ich eine Reihe allgemeiner Resultate, die mir wichtig scheinen, gefunden, wie ich in der nachstehenden Abhandlung zeigen werde.

Wenn die vorgelegte Developpable ein beliebiger algebraischer Kegel ist, so gibt es immer ∞^∞ eingeschriebene algebraische Minimalflächen, die durch eine elegante Konstruktion bestimmt werden. In jede um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebene Developpable können ∞^∞ algebraische Minimalflächen eingeschrieben werden. Auch diese Flächen lassen sich durch eine gemeinsame Konstruktion bestimmen. Beispiele solcher Developpablen sind einerseits alle Developpablen, deren Ebenen Normalebenen einer beliebigen algebraischen Raumkurve sind, andererseits alle Developpablen, deren Ebenen eine feste Gerade unter konstantem Winkel schneiden.

[Diejenigen Nummern der nachstehenden Abhandlung, die eingeklammert sind, mag der Leser zunächst überspringen.]

Den Schluß meiner Abhandlung bilden einige Noten. In der ersten Note bestimme ich alle reellen Minimalflächen, deren Klassenzahl, dividiert durch 2, eine vorgelegte Primzahl ist. In der zweiten Note gebe ich Formeln zur Bestimmung der Klasse einer algebraischen Minimalfläche, [467 die eine ebene geodätische Kurve enthält. Endlich in der dritten Note bestimme ich jede Minimalfläche, die auf ∞^1 mit ihr ähnliche Flächen abgewickelt werden kann.[1])

In meiner nächsten (dritten) Abhandlung über Minimalflächen bestimme ich alle reellen und imaginären Minimalflächen, die durch Translationsbewegung einer reellen oder imaginären Kurve erzeugt werden können. Gleichzeitig bestimme ich jede Minimalfläche, die durch unendlich viele lineare Transformationen wiederum in eine Minimalfläche übergeführt wird. Dabei brauchen diese Transformationen keineswegs den imaginären Kugelkreis invariant zu lassen.

In weiteren Abhandlungen gedenke ich, eine vollständige Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen zu entwickeln. Diese Theorie subsumiert sich unter umfassende Untersuchungen, die ich über die Transformationstheorie der allgemeinen Gleichung:

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0$$

angestellt habe. Zugleich werde ich einen interessanten Zusammenhang der Theorie der Minimalflächen mit der Theorie des linearen Linienkomplexes und mit der Theorie des tetraedralen Linienkomplexes nachweisen.

§ 1. Bestimmung derjenigen Minimalfläche, die eine gegebene Developpable nach einer gegebenen Kurve berührt.

Nach Weierstrass gibt es immer eine und nur eine (reelle) Minimalfläche, die eine vorgelegte reelle Developpable nach einer gegebenen reellen Kurve berührt. Dies bleibt nicht mehr immer wahr, wenn die gegebene Developpable, oder die gegebene Kurve imaginär ist. Für das folgende ist es mir notwendig, zuerst die hiermit angedeutete kleine Lücke in der analytischen Theorie der Minimalflächen auszufüllen.[2])

1) Diese Flächen gestatten eine Gruppe linearer Transformationen, die den Kugelkreis invariant lassen.

2) Auch Björling und Bonnet sind, soviel mir bekannt, auf die betreffenden Ausnahmefälle nicht eingegangen.

1. Indem wir die developpablen Minimalflächen, die den Kugelkreis enthalten, vorläufig ausschließen, können wir bekanntlich die Gleichungen einer jeden Minimalfläche auf die Form bringen:

$$x = U_1(t) + U_2(\tau), \quad y = V_1(t) + V_2(\tau), \quad z = W_1(t) + W_2(\tau),$$

wo:

$$(1) \qquad dU_1^2 + dV_1^2 + dW_1^2 = 0, \quad dU_2^2 + dV_2^2 + dW_2^2 = 0$$

ist. Soll diese Fläche die gegebene Kurve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ enthalten, so muß [468
es möglich sein, eine solche Relation zwischen t und τ anzunehmen, daß:

$$(2) \qquad \mathbf{x} = U_1 + U_2, \quad \mathbf{y} = V_1 + V_2, \quad \mathbf{z} = W_1 + W_2$$

wird. Soll andererseits die Fläche längs der gegebenen Kurve die gegebenen Richtungskosinus X, Y, Z besitzen, so ist hierzu notwendig und hinreichend, daß die Gleichung:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

oder die beiden äquivalenten Gleichungen:

$$(3) \quad XdU_1 + YdV_1 + ZdW_1 = 0, \quad XdU_2 + YdV_2 + ZdW_2 = 0$$

bestehen.

Unser Problem wird daher analytisch formuliert durch die vereinigten Gleichungen (1), (2), (3). Wie man sieht, befriedigen sowohl die Größen U_1, V_1, W_1, wie die Größen U_2, V_2, W_2 die Gleichungen:

$$dU^2 + dV^2 + dW^2 = 0,$$
$$XdU + YdV + ZdW = 0,$$
$$(d\mathbf{x} - dU)^2 + (d\mathbf{y} - dV)^2 + (d\mathbf{z} - dW)^2 = 0,$$

die im allgemeinen jene Größen vollständig bestimmen. Man erhält zuerst die äquivalenten Gleichungen:

$$(4) \quad \begin{cases} dU^2 + dV^2 + dW^2 = 0, \\ XdU + YdV + ZdW = 0, \\ 2(d\mathbf{x}\,dU + d\mathbf{y}\,dV + d\mathbf{z}\,dW) = ds^2 = d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2 + d\mathbf{z}^2, \end{cases}$$

aus denen folgt:

$$Zds^2 - 2(Zd\mathbf{y} - Yd\mathbf{z})dV = 2(Zd\mathbf{x} - Xd\mathbf{z})dU,$$
$$Xds^2 - 2(Xd\mathbf{y} - Yd\mathbf{x})dV = 2(Xd\mathbf{z} - Zd\mathbf{x})dW,$$

und:

$$\left[\tfrac{1}{2} Zds^2 - (Zd\mathbf{y} - Yd\mathbf{z})dV\right]^2 + \left[\tfrac{1}{2} Xds^2 - (Xd\mathbf{y} - Yd\mathbf{x})dV\right]^2 + $$
$$+ (Zd\mathbf{x} - Xd\mathbf{z})^2 dV^2 = 0,$$

oder durch Ausführung, indem man die Identität:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

berücksichtigt:

$$ds^2 \left\{(X^2 + Y^2 + Z^2)(dV^2 - dydV) + \tfrac{1}{4} ds^2 (Z^2 + X^2)\right\} = 0.$$

Jetzt setzen wir voraus: einerseits, daß die vorgelegte Kurve nicht die Gleichung $ds^2 = 0$ erfüllt, andererseits, daß der Ausdruck $X^2 + Y^2 + Z^2$ von Null verschieden ist, geometrisch ausgesprochen, daß die längs der Kurve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ gegebenen Tangentenebenen nicht sämtlich den Kugel- [469
kreis berühren. Wir können daher mit ds^2 dividieren und darnach $X^2 + Y^2 + Z^2$ gleich 1 setzen. Dies gibt:

$$dV^2 - d\mathbf{y} \,.\, dV + \tfrac{1}{4} ds^2 (Z^2 + X^2) = 0,$$

woraus folgt:

$$2dV = d\mathbf{y} \pm i(Xd\mathbf{z} - Zd\mathbf{x}).$$

Durch analoge Rechnungen findet man die Größen dU und dW. Die Gleichungen (4) werden daher in allgemeinster Weise befriedigt, indem man setzt:

$$2dU = d\mathbf{x} \pm i(Zd\mathbf{y} - Yd\mathbf{z}),$$
$$2dV = d\mathbf{y} \pm i(Xd\mathbf{z} - Zd\mathbf{x}),$$
$$2dW = d\mathbf{z} \pm i(Yd\mathbf{x} - Xd\mathbf{y}),$$

wo man entweder überall das Zeichen + oder überall das Zeichen − zu nehmen hat. Nimmt man das eine Zeichen, so erhält man die Größen dU_1, dV_1 und dW_1; nimmt man das andere Zeichen, so erhält man die Größen dU_2, dV_2, dW_2. Durch Quadratur findet man darnach die Größen $U_1, V_1, W_1; U_2, V_2, W_2$ selbst.

Denkt man sich die bekannten Größen $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, X, Y, Z$ als Funktionen eines Parameters u gegeben, so sind hiermit die Werte der Größen $U_1, \ldots, W_2$ längs der gegebenen Kurve als Funktionen von u gefunden. Und dies genügt zur Erledigung unseres Problems. Man setze in der Tat:

$$(5) \quad x = U_1(u_1) + U_2(u_2), \; y = V_1(u_1) + V_2(u_2), \; z = W_1(u_1) + W_2(u_2),$$

und fasse dabei u_1 und u_2 als unabhängige Variabeln auf. Alsdann definieren unsere Gleichungen eine Minimalfläche, die die gestellten Forderungen erfüllt.

Nimmt man daher eine beliebige (reelle oder imaginäre) Developpable, die jedoch den Kugelkreis nicht enthält, und wählt eine beliebige auf derselben gelegene

Kurve, die die Gleichung $ds^2 = 0$ nicht befriedigt, so gibt es immer eine und nur eine Minimalfläche, die jene Developpable nach der gewählten Kurve berührt.

[**2.** Ich werde jetzt voraussetzen, daß die vorgelegte Kurve die Gleichung $ds^2 = 0$ befriedigt, während der Ausdruck $X^2 + Y^2 + Z^2$ von Null verschieden ist. Alsdann lehren die Sätze 3 und 9 meiner ersten Abhandlung über Minimalflächen (Math. Ann. Bd. XIV, S. 336 und 338 [hier Abh. II, S. 127 und 130]), daß sämtliche längs der vorgelegten Kurve gegebene Tangentenebenen durch einen gemeinsamen Punkt des Kugelkreises hindurchgehen müssen. Ist dies der Fall, so gibt es unbeschränkt viele Minimalflächen, die die gestellten Forderungen erfüllen.[1]) Man findet dieselben, indem man die vorgelegte Minimalkurve nach den [470 Regeln meiner [ersten] Abhandlung mit einer ganz beliebigen zweiten Minimalkurve in passender Weise verbindet.

Sei andererseits:

$$ds^2 = 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0.$$

In diesem Falle gibt es nach den Entwickelungen meiner soeben zitierten Abhandlung ebenfalls unbeschränkt viele Minimalflächen, die unsere Forderungen erfüllen. Läßt man in der Tat eine ganz beliebige Minimalkurve längs der vorgelegten Minimalkurve in Translationsbewegung gleiten, so erzeugt die bewegliche Kurve immer eine Minimalfläche, die die gestellten Forderungen erfüllt.

Wir haben also nur noch die Hypothese:

$$ds^2 \gtrless 0, \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$$

zu betrachten. Da eine Developpable, die gleichzeitig um den Kugelkreis und eine Minimalfläche von der Gleichungsform (5) umgeschrieben ist, die betreffende Minimalfläche immer nach einer Minimalkurve berührt, so schließen wir, daß unsere Hypothese durch diejenige Developpable, die gleichzeitig um die vorgelegte Kurve $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und den Kugelkreis geschrieben ist, und nur durch diese Developpable befriedigt wird.

3. Zugefügt möge hier der Vollständigkeit wegen noch das folgende werden.

Im Vorangehenden ist, können wir sagen, eine Minimalfläche durch eine kontinuierliche Schar von ∞^1 auf der Fläche liegenden Flächenelementen bestimmt worden. Dabei setzten wir ausdrücklich voraus, daß

1) Betrachtet man eine jede Minimalkurve als eine Minimalfläche, was bei einer dualistischen Auffassung erlaubt ist, so müssen die Entwickelungen des Textes modifiziert werden.

diese Flächenelemente nicht durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Es liegt nahe, zu fragen, ob sich eine Minimalfläche auch durch ∞^1 durch einen gemeinsamen Punkt gehende Flächenelemente bestimmen läßt. Dieser Punkt wäre dann ein Doppelpunkt mit gegebenem Tangentenkegel.

Die soeben aufgeworfene Frage ist mit Nein zu beantworten. Denn nach einer Bemerkung von Geiser muß der Tangentenkegel eines auf einer Minimalfläche gelegenen Doppelpunktes immer den Kugelkreis enthalten. Es gibt andererseits unbeschränkt viele Minimalflächen mit einem solchen konischen Punkte, und es wäre leicht, dieselben sämtlich zu bestimmen.[1])]

4. Ich will nun annehmen, daß eine algebraische Minimalfläche:

$$x = U_1(t) + U_2(\tau), \quad y = V_1 + V_2, \quad z = W_1 + W_2 \qquad [471$$

in eine algebraische Developpable eingeschrieben ist. Alsdann können wir bekanntlich voraussetzen, daß $U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2$ algebraische Funktionen beziehungsweise von t und τ sind. Die Berührungskurve, deren Punkte die Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ besitzen mögen, wird dann bestimmt durch eine gewisse algebraische Relation zwischen t und τ. Also sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ algebraische Funktionen von t (oder von τ). Ist daher $\mathfrak{x}$ keine Konstante, so ist eine jede der Größen $U_1, V_1, \ldots, W_2$ eine algebraische Funktion von $\mathfrak{x}$. Diese Bemerkung wird uns später nützlich sein.

§ 2. Algebraische Minimalflächen mit einer ebenen Krümmungslinie.

In diesem Paragraphen beschäftige ich mich mit algebraischen Minimalflächen, die einander unter konstantem Winkel schneiden. Dabei setze ich zunächst voraus, daß die eine Fläche eine Ebene ist. Alsdann hat die zweite Fläche eine ebene Krümmungslinie.

5. Ich suche die Minimalflächen, die eine vorgelegte krumme Linie als Krümmungslinie enthalten. Dabei setze ich voraus, daß diese Kurve in einer Ebene liegt, und daß diese Ebene den Kugelkreis nicht berührt. Die gesuchten Flächen schneiden die Ebene nach einem bekannten Satze unter konstantem Winkel. Und daher lehren die Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen, daß es einfach unendlich viele Flächen gibt, die die gestellten Forderungen erfüllen.

1) Bewegt man eine beliebige Minimalkurve derart, daß sie immer durch einen festen Punkt hindurchgeht, so beschreibt sie immer eine Minimalfläche mit einem konischen Punkte der verlangten Art. Und in dieser Weise werden alle derartigen Flächen beschrieben.

Da die vorgelegte Ebene den Kugelkreis nicht berührt, kann ich durch eine zweckmäßige (reelle oder imaginäre) Bewegung immer erreichen, daß jene Ebene mit der Ebene $z = 0$ eines Cartesischen Koordinatensystems zusammenfällt. Alsdann wird die vorgelegte Kurve definiert durch zwei Gleichungen von der Form:

$$\mathbf{z} = 0, \quad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Und da die Tangentenebene längs dieser Kurve einen konstanten Winkel mit der z-Achse bilden soll, können wir setzen:

$$Z = \gamma = \text{Const.}, \quad X d\mathbf{x} + Y d\mathbf{y} = 0,$$

woraus, wenn wir die Bogenlänge der Kurve $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ mit s bezeichnen:

$$\frac{d\mathbf{x}}{Y} = \frac{d\mathbf{y}}{-X} = \frac{ds}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \frac{Y d\mathbf{x} - X d\mathbf{y}}{1-\gamma^2}.$$

Also werden die Minimalkurven der gesuchten Fläche bestimmt (Nr. 1) durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2U &= \mathbf{x} \pm i\gamma\mathbf{y}, \\ 2V &= \mathbf{y} \mp i\gamma\mathbf{x}, \\ 2W &= \quad \pm is\sqrt{1-\gamma^2}. \end{aligned}$$

Soll nun die Fläche algebraisch sein, so ist (Math. Ann. Bd. XIV, [472 S. 345, Satz 20 [hier Abh. II, S. 137]) erforderlich und hinreichend, daß sich U, V und W (welches Vorzeichen wir auch wählen mögen) als algebraische Funktionen einer Hilfsgröße t ausdrücken lassen. Und also werden sowohl $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wie s algebraische Funktionen von t. Was wieder zeigt, daß die Kurve $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ die Evolute einer algebraischen ebenen Kurve sein muß, da ja s eine algebraische Funktion von $\mathbf{x}$ oder $\mathbf{y}$ sein soll. Dies gibt:

Satz 1. Schneidet eine Minimalfläche eine Ebene unter konstantem Winkel, so ist die Fläche algebraisch, wenn die Durchschnittskurve, die eo ipso eine Krümmungslinie der Fläche ist, die Evolute einer ebenen algebraischen Kurve ist, sonst nicht.

Dieser Satz ist eine erste Verallgemeinerung des ersten Hennebergschen Satzes (vergleiche die Einleitung). Denn eine ebene geodätische Kurve ist an sich eine Krümmungslinie, während eine ebene Krümmungslinie im allgemeinen keine geodätische Kurve ist.

6. Der Satz 1 hängt genau zusammen mit einem allgemeineren Satze, den ich hier entwickeln werde, da derselbe im folgenden gelegentlich angewandt wird.

Ich will überhaupt annehmen, daß zwei algebraische Minimalflächen einander unter konstantem Winkel schneiden, und seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ die Koordinaten eines laufenden Punktes der Schnittkurve. Ich bezeichne mit X_1, Y_1, Z_1 die Richtungskosinus der Tangentenebene der einen Fläche längs der Kurve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, und ebenso mit X_2, Y_2, Z_2 die entsprechenden Größen der zweiten Fläche. Da nun die beiden Flächen algebraisch sind, so lassen sich die Größen $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ als algebraische Funktionen einer Hilfsgröße t ausdrücken. Andererseits müssen sowohl die Integrale (§ 1, Schluß):

$$\int(Z_1 d\mathbf{y} - Y_1 d\mathbf{z}), \quad \int(X_1 d\mathbf{z} - Z_1 d\mathbf{x}), \quad \int(Y_1 d\mathbf{x} - X_1 d\mathbf{y}),$$

wie die entsprechenden Integrale:

$$\int(Z_2 d\mathbf{y} - Y_2 d\mathbf{z}), \quad \int(X_2 d\mathbf{z} - Z_2 d\mathbf{x}), \quad \int(Y_2 d\mathbf{x} - X_2 d\mathbf{y})$$

algebraische Funktionen von t sein.

Ich setze:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = \xi, \quad \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 = \eta, \quad \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 = \zeta$$

und bemerke, daß sich die Konstanten λ_1, λ_2 derart bestimmen lassen, daß ξ, η, ζ die Richtungskosinus einer Ebene werden. Es ist in der Tat:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2(X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2),$$

ferner ist nach Voraussetzung:

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = k = \text{Const.}$$

Man braucht daher nur: [473

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 k = 1$$

zu setzen, um das gewünschte Resultat zu erreichen. Hierbei wird λ_2 bestimmt als Funktion der Größe λ_1, die selbst unbestimmt bleibt.

Andererseits ist klar, daß die drei Integrale:

$$\int(\xi d\mathbf{y} - \eta d\mathbf{z}), \quad \int(\xi d\mathbf{z} - \zeta d\mathbf{x}), \quad \int(\eta d\mathbf{x} - \xi d\mathbf{y})$$

sämtlich algebraische Funktionen von t sind. Und also geben unsere Entwickelungen den folgenden bemerkenswerten Satz:

Satz 2. Schneiden zwei algebraische Minimalflächen einander unter konstantem Winkel, so gibt es einfach unendlich viele algebraische Minimalflächen, die durch die Schnittkurve hindurchgehen und einander dabei gegenseitig unter konstantem Winkel schneiden.

Aus diesem Satze, verbunden mit dem ersten Hennebergschen Satze, folgt mein Satz 1, den ich soeben direkt bewiesen habe, als Korollar.

§ 3. Algebraische Minimalflächen, die eine Zylinderfläche nach einer geodätischen Kurve berühren oder schneiden.

7. Sei vorgelegt eine Zylinderfläche, deren unendlich entfernte Spitze jedoch nicht auf dem Kugelkreise liegen darf.[1]) Ich suche die Minimalfläche, die die Zylinderfläche nach einer beliebigen geodätischen Kurve berührt.

Durch eine (reelle oder imaginäre) Bewegung läßt sich immer erreichen, daß die Erzeugenden des Zylinders mit der z-Achse eines Cartesischen Koordinatensystems parallel werden, sodaß der Zylinder durch eine Relation von der Form:

$$\varphi(x, y) = 0$$

dargestellt wird. Der Kürze wegen setze ich:

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

sodaß s die Bogenlänge des orthogonalen Querschnittes der Zylinderfläche darstellt.

Suche ich nun die Minimalfläche, die den Zylinder nach einer beliebigen Kurve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ berührt, so muß ich (Nr. 1) setzen:

$$Z = 0, \quad X d\mathbf{x} + Y d\mathbf{y} = 0,$$

woraus:

$$\frac{d\mathbf{x}}{Y} = \frac{d\mathbf{y}}{-X} = \frac{ds}{1} = \frac{Y d\mathbf{x} - X d\mathbf{y}}{1}. \tag{6}$$

Und also werden die Minimalkurven der gesuchten Minimalfläche [474 bestimmt (Nr. 1) durch die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} 2U &= \mathbf{x} \mp i\int Y d\mathbf{z}, \\ 2V &= \mathbf{y} \pm i\int X d\mathbf{z}, \\ 2W &= \mathbf{z} \pm is. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Soll diese Minimalfläche algebraisch sein, so muß sowohl der Zylinder $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, wie die Berührungskurve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ algebraisch sein. Endlich sahen wir in § 1 (Schluß), daß W eine algebraische Funktion von $\mathbf{z}$ sein muß. Also wird s eine algebraische Funktion von $\mathbf{z}$ und zugleich eine algebraische Funktion von $\mathbf{x}$ oder $\mathbf{y}$. Hiermit ist nachgewiesen, daß der Querschnitt eines jeden um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebenen Zylinders die Evolute einer ebenen algebraischen Kurve sein muß, wie der zweite Henneberg sche Satz lehrt.

1) Eine Zylinderfläche, deren Erzeugende sämtlich den Kugelkreis in demselben Punkte schneiden, ist eine Minimalfläche.

Diese notwendige Forderung ist indes keineswegs hinreichend, weil überdies die beiden Integrale $\int Y d\mathbf{z}$, $\int X d\mathbf{z}$ algebraisch sein müssen. Ich werde später zeigen, wie man die allgemeinste Kurve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ findet, die diese Forderungen erfüllt. Hier beschränke ich mich auf das Folgende.

Ich werde annehmen, daß die Kurve $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ eine geodätische Kurve des Zylinders ist. Alsdann besteht eine Relation von der Form:

$$\mathbf{z} = ks \qquad (k = \text{Const.}),$$

und also kommt (6), (7):

$$\begin{aligned} 2U &= \mathbf{x} \mp ik\mathbf{x} = (1 \mp ik)\mathbf{x}, \\ 2V &= \mathbf{y} \mp ik\mathbf{y} = (1 \mp ik)\mathbf{y}, \\ 2W &= ks \pm is = (k \pm i)s, \end{aligned}$$

sodaß die gesuchte Minimalfläche algebraisch wird. Dies gibt:

Satz 3. Die Minimalfläche, die einen Zylinder nach einer geodätischen Kurve[1]) berührt, ist algebraisch, wenn der Querschnitt des Zylinders die Evolute einer ebenen algebraischen Kurve ist, sonst nicht.

Dieser Satz kann übrigens auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

Die Minimalfläche, die einen Zylinder nach einer (nicht ebenen) geodätischen Kurve berührt, ist algebraisch, wenn die Kurve selbst algebraisch ist.

8. Ich suche jetzt die Minimalfläche, die eine geodätische Kurve einer Zylinderfläche als Haupttangentenkurve enthält.

Seien wie früher $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ die Koordinaten einer geodätischen Kurve eines Zylinders, und sei s die Bogenlänge des orthogonalen Querschnitts, und $\mathbf{z} = ks$. Bezeichne ich dann mit X, Y, Z die Richtungskosinus [475 einer Oskulationsebene der Kurve, so finde ich durch elementare Überlegungen, daß:

$$X = \frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad Y = \frac{d\mathbf{y}}{ds}\frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1 + k^2}}$$

ist. Und also kommt (Nr. 1):

$$\begin{aligned} 2U &= \mathbf{x} \mp i\mathbf{y}\sqrt{1 + k^2}, \\ 2V &= \mathbf{y} \pm i\mathbf{x}\sqrt{1 + k^2}, \\ 2W &= \mathbf{z}. \end{aligned}$$

1) Ist die vorgelegte geodätische Kurve selbst eine Minimalkurve und also $k = \pm i$, so reduziert sich die gesuchte Fläche auf die vorgelegte Minimalkurve.

Ist daher die Kurve x, y, z algebraisch, so ist dasselbe der Fall mit der gesuchten Minimalfläche.

Die gefundene Minimalfläche schneidet den Zylinder und also zugleich die in der vorangehenden Nummer betrachtete Minimalfläche orthogonal. Also erhalten wir durch Anwendung von Satz 2 den folgenden Satz:

Satz 4. Ist der Querschnitt eines Zylinders die Evolute einer ebenen algebraischen Kurve, so gibt es einfach unendlich viele algebraische Minimalflächen, die einander nach einer beliebigen geodätischen Kurve des Zylinders schneiden. Je zwei Flächen schneiden einander dabei unter konstantem Winkel.

9. Ich nehme eine beliebige Raumkurve C, deren Oskulationsebenen einen festen (jedoch nicht rechten) Winkel mit einer Geraden L bilden. Alsdann ist C geodätische Kurve auf einem Zylinder, dessen Erzeugende mit L parallel sind. Soll daher die Minimalfläche, auf der C Haupttangentenkurve ist, algebraisch sein, so ist hierzu notwendig und hinreichend, daß der Querschnitt des Zylinders die Evolute einer algebraischen Kurve ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die Kurve C algebraisch ist. Dies gibt

Satz 5. Enthält eine Minimalfläche eine Haupttangentenkurve, deren Oskulationsebenen [einen] konstanten [nicht rechten] Winkel mit einer festen Geraden bilden, so ist die Fläche algebraisch, wenn die Kurve algebraisch ist; sonst nicht.

§ 4. Über eine Transformation der Minimalflächen, die die Biegung als speziellen Fall umfaßt.

[**10.** Sei vorgelegt die Minimalfläche:

$$x = U_1(t) + U_2(\tau), \quad y = V_1(t) + V_2(\tau), \quad z = W_1(t) + W_2(\tau).$$

Ich führe die Minimalkurve:

$$x = U_1, \quad y = V_1, \quad z = W_1$$

durch eine orthogonale Transformation in eine neue Lage: [476

$$x = U_1', \quad y = V_1', \quad z = W_1'$$

über. Ebenso führe ich die Minimalkurve:

$$x = U_2, \quad y = V_2, \quad z = W_2$$

durch eine andere orthogonale Transformation in die Lage:

$$x = U_2', \quad y = V_2', \quad z = W_2'$$

über. Ich bilde die Minimalfläche:

$$x = U_1'(t) + U_2'(\tau), \quad y = V_1'(t) + V_2'(\tau), \quad z = W_1'(t) + W_2'(\tau)$$

und betrachte dieselbe als die Transformierte der ursprünglichen Fläche. Dabei betrachte ich zwei solche Punkte dieser Flächen, die zu demselben Wertsysteme t, τ gehören, als einander entsprechend.

Die hiermit definierte allgemeine Kategorie von Transformationen, unter denen bis jetzt nur spezielle Fälle betrachtet sind, verdient, wenn ich nicht irre, allgemein untersucht zu werden. Hier beschränke ich mich auf einige Bemerkungen, die, wenn es sich darum handelt, die einfachsten algebraischen Minimalflächen zu studieren, nicht ohne Interesse sind.

Satz 6. Ist sowohl die ursprüngliche wie die transformierte Fläche eine Doppelfläche, so haben beide Flächen dieselbe Klasse. Ebenso, wenn beide keine Doppelflächen sind. Ist dagegen die eine und nur die eine Doppelfläche, so ist ihre Klasse nur halb so groß wie diejenige der andern Fläche.

Ist die ursprüngliche Fläche reell, und sind dabei die beiden orthogonalen Transformationen konjugiertimaginäre Operationen, so ist auch die neue Fläche reell.

Sind die beiden orthogonalen Transformationen Ähnlichkeitstransformationen, so sind die Tangentenebenen in je zwei entsprechenden Punkten parallel.

Sind die beiden orthogonalen Transformationen konjugiertimaginäre Ähnlichkeitstransformationen:

$$x' = (a + \alpha i)x, \quad y' = (a + \alpha i)y, \quad z' = (a + \alpha i)z,$$
$$x'' = (a - \alpha i)x, \quad y'' = (a - \alpha i)y, \quad z'' = (a - \alpha i)z,$$

und ist dabei $a^2 + \alpha^2$ gleich 1, so ist das Bogenelement der neuen Fläche gleich dem entsprechenden Bogenelemente der ursprünglichen Fläche.[1]) Daher nennt man eine solche Transformation eine Biegung.

Die Theorie der Biegung der Minimalflächen rührt von Bonnet her.]

11. Die Bemerkungen der letzten Nummer finden eine inter- [477 essante, wenn auch partikuläre Anwendung auf die in den vorangehenden Paragraphen betrachteten Flächenfamilien.

1) Dabei braucht die vorgelegte Fläche keineswegs reell zu sein.

Die Minimalkurven der Minimalflächen, die eine vorgelegte ebene Kurve $\mathrm{z} = 0$, $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$ als Krümmungslinie enthalten, werden nach dem Vorangehenden bestimmt durch die Formeln:

$$(8) \qquad 2\,U = \mathrm{x} \pm i\gamma\mathrm{y}, \quad 2\,V = \mathrm{y} \mp i\gamma\mathrm{x}, \quad 2\,W = \pm\, is\sqrt{1-\gamma^2}.$$

Setzt man insbesondere $\gamma = 0$, so erhält man die Minimalfläche mit den Minimalkurven:

$$(9) \qquad 2\,U_0 = \mathrm{x}, \quad 2\,V_0 = \mathrm{y}, \quad 2\,W_0 = \pm\, is,$$

die die vorgelegte Kurve als geodätische Kurve enthält. Nun aber ist klar, daß die Minimalkurven (8) aus den Minimalkurven (9) durch je eine imaginäre orthogonale Transformation hervorgehen.

Also hat die Minimalfläche, die eine gewisse ebene Evolute als Krümmungslinie enthält, dieselbe Klasse wie die Minimalfläche, die jene Evolute als geodätische Kurve enthält, dabei vorausgesetzt, daß entweder beide Flächen Doppelflächen, oder auch, daß keine unter ihnen Doppelfläche ist. Ist nur die eine Fläche Doppelfläche, so ist ihre Klasse nur halb so groß.

Jetzt betrachte ich den Zylinder $\varphi(x, y) = 0$, eine geodätische Kurve desselben, und die nach dieser Kurve berührende Minimalfläche, deren Minimalkurven nach Nummer 7 durch die Gleichungen:

$$2\,U_1 = (1 \mp ik)\mathrm{x}, \quad 2\,V_1 = (1 \mp ik)\mathrm{y}, \quad 2\,W_1 = (k \pm i)s$$

bestimmt werden. Auch diese Minimalkurven gehen aus den Minimalkurven (9) durch je eine orthogonale Transformation hervor.

Die Minimalfläche, die einen Zylinder nach einer nicht ebenen geodätischen Kurve berührt, geht durch Biegung, verbunden mit einer Ähnlichkeitstransformation, über in die Minimalfläche, die den orthogonalen Querschnitt des Zylinders als ebene geodätische Kurve enthält.

Endlich sahen wir, daß die Minimalkurven der Minimalfläche, auf der die besprochene geodätische Kurve Haupttangentenkurve ist, durch die Gleichungen:

$$2\,U_2 = \mathrm{x} \mp i\mathrm{y}\sqrt{1+k^2}, \quad 2\,V_2 = \mathrm{y} \pm i\mathrm{x}\sqrt{1+k^2}, \quad 2\,W_2 = ks$$

bestimmt werden. Auch diese Minimalkurven gehen aus den Kurven (9) durch je eine orthogonale Transformation hervor. Dasselbe gilt für die einfach unendlich vielen Minimalflächen, die einander (Satz 4) nach unserer geodätischen Kurve unter konstantem Winkel schneiden.

Also haben die im Satze 4 betrachteten, einfach unendlich vielen algebraischen Minimalflächen im allgemeinen dieselbe Klasse. Und zwar bleibt diese Klassenzahl invariant, wenn man von einer geodätischen Kurve des vorgelegten Zylinders zu einer anderen solchen Kurve übergeht.

Zu einem Zylinder, dessen Querschnitt die Evolute einer ebenen algebraischen Kurve ist, gehören somit dreifach unendlich viele algebraische Minimalflächen, die im allgemeinen dieselbe [478 Klasse besitzen.

Wenn man zum Beispiel auf die Hennebergsche Minimalfläche fünfter Klasse die angegebenen Operationen ausführt, so erhält man ∞^3 reelle Minimalflächen zehnter Klasse.

12. Man nehme eine beliebige reelle ebene Kurve mit Mittelpunkt. Deren Evolute besitzt dann ebenfalls einen Mittelpunkt, und läßt sich daher darstellen durch die beiden äquivalenten Gleichungen:

$$\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0, \quad \varphi(-\mathrm{x}, -\mathrm{y}) = 0.$$

Die Minimalkurven der Minimalfläche, die diese Evolute als geodätische Kurve enthält, werden bekanntlich bestimmt durch die Gleichungen:

$$(10) \qquad 2\,U = \mathrm{x}, \quad 2\,V = \mathrm{y}, \quad 2\,W = \pm\, is.$$

Die Minimalkurven der Bonnetschen Biegungsfläche werden bestimmt durch:

$$(11) \qquad 2\,U_1 = i\mathrm{x}, \quad 2\,V_1 = i\mathrm{y}, \quad 2\,W_1 = \mp\, s.$$

Bestimmen nun die Gleichungen (10), wie ich annehmen werde, eine irreduktible Minimalkurve, so entspricht jedem Punkte $x, y, +is$ auf dieser Kurve ein anderer Punkt mit den Koordinaten $-x, -y, +is$. Infolgedessen ist die durch die Gleichungen (11) dargestellte Kurve sich selbst konjugiert, da jedem Punkte $ix, iy, -s$ ein anderer Punkt $-ix, -iy, -s$ zugeordnet ist.

Infolgedessen sind die beiden genannten Flächen Doppelflächen und haben somit dieselbe Klasse.]

§ 5. Die Minimalfläche, die die Evolute einer algebraischen Raumkurve nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, ist algebraisch.

Die Normalebenen einer Raumkurve umhüllen bekanntlich eine Developpable, die ich der Kürze wegen die Evolute der Raumkurve nennen werde. In diesem Paragraphen bestimme ich einfach unendlich viele algebraische Minimalflächen, die in die Evolute einer algebraischen Raumkurve eingeschrieben sind. Alle diese Flächen sind ähnlich mit den Biegungsflächen einer beliebig unter ihnen gewählten Fläche.

13. Seien x, y, z die Koordinaten eines Punktes einer algebraischen Raumkurve. Die Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Krümmungsmittelpunktes sind bekanntlich bestimmt durch die Gleichungen:

$$x_1 = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$y_1 = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$z_1 = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

wo die Bogenlänge s der Raumkurve als unabhängige Variable be- [479
nutzt ist. Die Tangentenebene der Evolute in einem Krümmungsmittelpunkte besitzt die Richtungskosinus x', y', z'. Daher werden die Minimalkurven der Minimalfläche, die die Evolute nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, bestimmt durch die Formeln:

$$2U = x_1 \pm i\int (z'\,dy_1 - y'\,dz_1),$$
$$2V = y_1 \pm i\int (x'\,dz_1 - z'\,dx_1),$$
$$2W = z_1 \pm i\int (y'\,dx_1 - x'\,dy_1).$$

Man findet:

$$2U = x_1 \pm i\int \left(z'.\, d\frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} - y'.\, d\frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\right),$$

oder, wenn man die Integration ausführt und darnach die analogen Ausdrücke der Größen V und W hinzufügt:

$$2U = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\frac{z'y'' - y'z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$2V = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\frac{x'z'' - z'x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$2W = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\frac{y'x'' - x'y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Diese Formeln zeigen, daß die gesuchte Minimalfläche algebraisch ist. Also:

Satz 7. Die Minimalfläche, die die Evolute einer algebraischen Raumkurve nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, ist algebraisch.

14. Alle auf der Evolute gelegenen Punkte ξ, η, ζ werden bekanntlich erhalten, wenn man in den Formeln:

$$\xi = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} + k\frac{z'y'' - y'z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$\eta = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} + k\frac{x'z'' - z'x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

$$\zeta = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} + k\frac{y'x'' - x'y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

der Größe k sukzessiv alle möglichen Werte erteilt. Gibt man dagegen k einen bestimmten Wert, so erhält man eine auf der Evolute gelegene Kurve. Die Minimalkurven der nach dieser Kurve berührenden Minimalfläche werden bestimmt durch die Formeln:

$$2U_1 = \xi \pm i\int (z'\,d\eta - y'\,d\zeta),$$
$$2V_1 = \eta \pm i\int (x'\,d\zeta - z'\,d\xi),$$
$$2W_1 = \zeta \pm i\int (y'\,d\xi - x'\,d\eta),$$

woraus durch Ausführung: [480

$$(12)\quad \begin{cases} 2U_1 = (1 \mp ik)\left(x + \dfrac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\dfrac{z'y'' - y'z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\right), \\[2ex] 2V_1 = (1 \mp ik)\left(y + \dfrac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\dfrac{x'z'' - z'x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\right), \\[2ex] 2W_1 = (1 \mp ik)\left(z + \dfrac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\dfrac{y'x'' - x'y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}\right). \end{cases}$$

Hiermit ist nachgewiesen, daß diese Minimalfläche algebraisch ist, welchen Wert auch die Konstante k haben mag. Also:

Satz 8. In die Evolute einer algebraischen Raumkurve kann man jedenfalls einfach unendlich viele algebraische Minimalflächen einschreiben.

In späteren Paragraphen zeige ich, daß es ∞^∞ algebraische Minimalflächen gibt, die in unsere Evolute eingeschrieben sind.

[**15.** Wie man sieht, bestehen Relationen von der Form:

$$U_1 = (1 \mp ik)U, \quad V_1 = (1 \mp ik)V, \quad W_1 = (1 \mp ik)W.$$

Infolgedessen geht die in Nummer 13 betrachtete Minimalfläche durch Biegungen, jede verbunden mit einer reellen Ähnlichkeitstransformation in die Flächen der Nummer 14 über.

Die Berührungskurven ξ, η, ζ dieser letzten Flächen können folgendermaßen geometrisch definiert werden: Durch die Tangenten der vorgelegten Kurve x, y, z legen wir Ebenen, die mit den entsprechenden Oskulationsebenen [einen] konstanten Winkel bilden. Jede solche Ebene schneidet die entsprechende Krümmungsachse in einem Punkte, der sicher auf der Evolute liegt. Der Inbegriff der hiermit erhaltenen Punkte ist eine Kurve ξ, η, ζ.[1])

§ 6. Jede algebraische Minimalfläche ist eingeschrieben in ∞^4 Evoluten von algebraischen Raumkurven.

Die Entwickelungen des vorangehenden Paragraphen führen zu der Frage: Wie viele algebraische Raumkurven gibt es, in deren Evolute eine vorgelegte algebraische Minimalfläche eingeschrieben ist? Mit dieser Frage werde ich mich jetzt beschäftigen.

16. Sei:

$$x = U_1^0(t) + U_2^0(\tau), \quad y = V_1^0(t) + V_2^0(\tau), \quad z = W_1^0(t) + W_2^0(\tau)$$

eine vorgelegte Minimalfläche. Ich setze:

$$\begin{aligned} U_1^0 + A &= U_1, \quad & U_2^0 - A &= U_2, \\ V_1^0 + B &= V_1, \quad & V_2^0 - B &= V_2, \\ W_1^0 + C &= W_1, \quad & W_2^0 - C &= W_2, \end{aligned}$$ [481

wo A, B und C arbiträre Konstanten bezeichnen sollen. Alsdann definieren die Gleichungen:

$$x = U_1 + U_2, \quad y = V_1 + V_2, \quad z = W_1 + W_2$$

wiederum die vorgelegte Minimalfläche.

Ich führe drei neue Größen ξ, η, ζ ein, indem ich setze:

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\xi - 2U_1}{dU_1} = \dfrac{\eta - 2V_1}{dV_1} = \dfrac{\zeta - 2W_1}{dW_1}, \\[2mm] \dfrac{\xi - 2U_2}{dU_2} = \dfrac{\eta - 2V_2}{dV_2} = \dfrac{\zeta - 2W_2}{dW_2}; \end{cases}$$

hierdurch werden die Parameter t und τ durch eine Relation verbunden. Die variablen Größen ξ, η, ζ interpretiere ich als die Koordinaten der Punkte einer algebraischen Raumkurve. Ich werde zeigen, daß die vorgelegte Minimalfläche in die Evolute dieser Kurve eingeschrieben ist.

1) Wickelt man die Evolute in eine Ebene ab, so wird die Kurve ξ, η, ζ die schiefe Fußpunktkurve eines gewissen Punktes hinsichtlich derjenigen Kurve, in welche die Rückkehrkante übergegangen ist.

Es ist:

$$dU_1^2 + dV_1^2 + dW_1^2 = 0 = dU_2^2 + dV_2^2 + dW_2^2,$$

also kommt:

$$(14) \qquad \begin{cases} (\xi - 2U_i)^2 + (\eta - 2V_i)^2 + (\zeta - 2W_i)^2 = 0, \\ (\xi - 2U_i)\,dU_i + (\eta - 2V_i)\,dV_i + (\zeta - 2W_i)\,dW_i = 0 \\ \qquad (i = 1, 2), \end{cases}$$

und durch Differentiation der Gleichungen (14), indem man die übrigen Relationen berücksichtigt:

$$dU_1\xi' + dV_1\eta' + dW_1\zeta' = 0 = dU_2\xi' + dV_2\eta' + dW_2\zeta',$$

$$(\xi - 2U_1)\xi' + (\eta - 2V_1)\eta' + (\zeta - 2W_1)\zeta' = 0 = (\xi - 2U_2)\xi' + \cdots.$$

Durch Differentiation dieser letzten Gleichungen kommt:

$$(\xi - 2U_1)\xi'' + (\eta - 2V_1)\eta'' + (\zeta - 2W_1)\zeta'' + (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 0,$$

$$(\xi - 2U_2)\xi'' + (\eta - 2V_2)\eta'' + (\zeta - 2W_2)\zeta'' + (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 0.$$

Wir wählen die Bogenlänge der Kurve ξ, η, ζ zur unabhängigen Variablen. Alsdann wird:

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1.$$

Infolgedessen werden die Gleichungen:

$$(15) \qquad \begin{cases} (\xi - 2U)^2 + (\eta - 2V)^2 + (\zeta - 2W)^2 = 0, \\ (\xi - 2U)\xi' + (\eta - 2V)\eta' + (\zeta - 2W)\zeta' = 0, \\ (\xi - 2U)\xi'' + (\eta - 2V)\eta'' + (\zeta - 2W)\zeta'' + 1 = 0 \end{cases}$$

sowohl durch U_1, V_1, W_1, wie durch U_2, V_2, W_2 befriedigt. Die drei [482
letzten Gleichungen geben durch Auflösung:

$$2U = \xi + \frac{\xi''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2} \pm i\,\frac{\zeta'\eta'' - \eta'\zeta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$

$$2V = \eta + \frac{\eta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2} \pm i\,\frac{\xi'\zeta'' - \zeta'\xi''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$

$$2W = \zeta + \frac{\zeta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2} \pm i\,\frac{\eta'\xi'' - \xi'\eta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2}.$$

Diese Gleichungen zeigen in der Tat (Nr. 13), daß die vorgelegte Minimalfläche in die Evolute der Raumkurve ξ, η, ζ eingeschrieben ist. Und da diese Kurve von den drei arbiträren Parametern A, B, C abhängt, erhalten wir den Satz:

Satz 9. Jede algebraische Minimalfläche berührt dreifach unendlich viele Evoluten algebraischer Raumkurven, [jede] nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte.[1])

Zerfällt die Raumkurve ξ, η, ζ, so nennt man bekanntlich jeden Teil derselben Fokalkurve der übrigen Teile. Dies gibt den Satz:

Satz 10. Berührt eine Minimalfläche die Evolute einer Raumkurve nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte, so steht sie in demselben Verhältnis zu den Evoluten aller Fokalkurven.

17. Ich betrachte wiederum eine beliebige algebraische Minimalfläche:

$$x = U_1^0(t) + U_2^0(\tau), \quad y = V_1^0 + V_2^0, \quad z = W_1^0 + W_2^0. \tag{16}$$

Ich setze:

$$\frac{m+n}{m}(U_1^{(0)} + A) = U_1, \quad \frac{m+n}{n}(U_2^{(0)} - A) = U_2,$$
$$\frac{m+n}{m}(V_1^{(0)} + B) = V_1, \quad \frac{m+n}{n}(V_2^{(0)} - B) = V_2,$$
$$\frac{m+n}{m}(W_1^{(0)} + C) = W_1, \quad \frac{m+n}{n}(W_2^{(0)} - C) = W_2,$$

wo A, B, C und $n:m$ arbiträre Konstanten bezeichnen sollen. Alsdann definieren die Gleichungen:

$$\begin{cases} x = \dfrac{m}{m+n} U_1 + \dfrac{n}{m+n} U_2, \\ y = \dfrac{m}{m+n} V_1 + \dfrac{n}{m+n} V_2, \\ z = \dfrac{m}{m+n} W_1 + \dfrac{n}{m+n} W_2 \end{cases}$$

wiederum die vorgelegte Minimalfläche.

Sodann führe ich drei Variable ξ, η, ζ ein, indem ich setze: [483

$$\frac{\xi - U_1}{dU_1} = \frac{\eta - V_1}{dV_1} = \frac{\zeta - W_1}{dW_1},$$
$$\frac{\xi - U_2}{dU_2} = \frac{\eta - V_2}{dV_2} = \frac{\zeta - W_2}{dW_2};$$

hierdurch werden die Parameter t und τ durch eine Relation verbunden. Außerdem ist:

$$dU_1^2 + dV_1^2 + dW_1^2 = 0 = dU_2^2 + dV_2^2 + dW_2^2.$$

1) Vergleiche hierzu Satz 12.

Also erhält man, indem man ganz wie in der vorangehenden Nummer verfährt, die Formeln:

$$U = \xi + \frac{\xi''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2} \pm i \frac{\zeta'\eta'' - \eta'\zeta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$
$$V = \eta + \frac{\eta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2} \pm i \frac{\xi'\zeta'' - \zeta'\xi''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$
$$W = \zeta + \frac{\zeta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2} \pm i \frac{\eta'\xi'' - \xi'\eta''}{\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2},$$

wo das eine Zeichen die Größen U_1, V_1, W_1, das zweite Zeichen die Größen U_2, V_2, W_2 liefert.

Es gibt nun immer eine Konstante k, die die beiden Relationen:

$$\begin{cases} \dfrac{m}{m+n} = \dfrac{1}{2}(1 - ik), \\ \dfrac{n}{m+n} = \dfrac{1}{2}(1 + ik) \end{cases} \tag{17}$$

befriedigt. Also ist unsere Minimalfläche (§ 5, Nr. 14) eingeschrieben in die Evolute der Raumkurve ξ, η, ζ. Und da diese Kurve vier arbiträre Parameter, $A, B, C, m:n$ enthält, erhalten wir den Satz:

Satz 11. Jede algebraische Minimalfläche ist jedenfalls in vierfach unendlich viele Evoluten algebraischer Raumkurven eingeschrieben.

Ich will insbesondere annehmen, daß die Minimalfläche (16) reell ist, und dementsprechend setzen:

$$A = ia, \quad B = ib, \quad C = ic, \quad m = \mu + \nu i, \quad n = \mu - \nu i,$$

wo a, b, c, μ und ν reelle Konstanten bezeichnen. Alsdann kommt (17):

$$k = -\frac{\nu}{\mu},$$

und folglich ist die Kurve ξ, η, ζ reell, das heißt, sie wird bestimmt durch reelle Gleichungen.

Jede reelle algebraische Minimalfläche ist daher eingeschrieben in ∞^4 Evoluten von reellen algebraischen Raumkurven.

Auch bei den Entwickelungen dieser Nummer ist zu bemerken, daß die Raumkurve ξ, η, ζ in mehrere Kurven, deren jede Fokalkurve zu den übrigen ist, zerfallen kann.

§ 7. Synthetische Betrachtungen. [484

[Ich werde kurz zeigen, wie ich die interessanten Theorien der letzten Paragraphen ursprünglich fand.

18. Seien:

$$x_1 = 2\,U_1(t), \quad y_1 = 2\,V_1(t), \quad z_1 = 2\,W_1(t) \tag{18}$$

und:

$$x_2 = 2\,U_2(\tau), \quad y_2 = 2\,V_2(\tau), \quad z_2 = 2\,W_2(\tau) \tag{19}$$

die Gleichungen zweier algebraischer Minimalkurven. Ich verbinde einen beliebigen Punkt x_1, y_1, z_1 mit einem beliebigen Punkte x_2, y_2, z_2 und suche den Mittelpunkt:

$$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

dieser beiden Punkte. Der Ort dieser Mittelpunkte:

$$x = U_1 + U_2, \quad y = V_1 + V_2, \quad z = W_1 + W_2 \tag{20}$$

ist bekanntlich eine Minimalfläche (Math. Ann. Bd. XIV, S. 334 u. 337 [hier Abh. II, S. 125 u. 129]).

Zu bemerken ist hierbei, daß die Tangentenebene der Fläche zwei Gerade enthält, die mit den entsprechenden Tangenten der Kurven (18) und (19) parallel sind. Konstruiert man daher die um diese beiden Kurven umgeschriebene Developpable D, so berührt diese die Minimalfläche nach einer gewissen Kurve S.

Ich werde zeigen, daß die Developpable die Evolute einer algebraischen Raumkurve, und daß S der Ort der Krümmungsmittelpunkte ist.

Man konstruiere in der Tat die beiden Developpablen, deren Rückkehrkanten die Minimalkurven (18) und (19) sind. Diese Flächen schneiden einander nach einer Raumkurve C, deren Evolute bekanntlich eben D ist. Dabei ist die Kurve S der Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Hiermit erkennen wir also wie früher, daß die Minimalfläche (20) in die Evolute der Kurve C eingeschrieben ist. Und da die Gleichungen unserer Minimalfläche auch folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} x &= (U_1 + A) + (U_2 - A), \\ y &= (V_1 + B) + (V_2 - B), \\ z &= (W_1 + C) + (W_2 - C), \end{aligned}$$

wo A, B, C arbiträre Konstanten sind, so sehen wir, daß unsere Minimalfläche dreifach unendlich viele Evoluten algebraischer Raumkurven, [jede] nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt.

Es ist möglich, diesen schon früher bewiesenen Satz zu vervollständigen. [485

Soll in der Tat die Minimalfläche (20) die Evolute einer Raumkurve C' nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berühren, so müssen nach dem Vorangehenden die auf der Minimalfläche gelegenen Minimalkurven mit denjenigen beiden Minimalkurven, deren Developpable durch C' hindurchgehen, ähnlich und gleichgestellt sein. Und dabei muß das Ähnlichkeitsverhältnis gleich 1 : 2 sein. Hieraus aber fließt, daß es nicht mehr als dreifach unendlich viele Kurven C' gibt, die die gestellten Forderungen erfüllen.

Satz 12. Jede [algebraische] Minimalfläche berührt ∞^3 und **auch nicht mehr** Evoluten von algebraischen Raumkurven, [jede] nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte.

Ist insbesondere die vorgelegte Fläche reell, so können wir annehmen, daß U_1 und U_2, V_1 und V_2, W_1 und W_2 konjugierte Funktionen ihrer Argumente sind. Setzen wir daher:

$$A = ia, \quad B = ib, \quad C = ic,$$

wo a, b und c beliebige reelle Größen sind, so erhalten wir ∞^3 umgeschriebene Evoluten, deren jede durch eine reelle Gleichung dargestellt wird.

Zerfällt die Schnittkurve zwischen den Developpablen der Minimalkurven (18) und (19), so ist jede Teilkurve Fokalkurve zu den übrigen Teilen. Alsdann zerfällt eo ipso die umgeschriebene Evolute in die Evoluten der gegenseitigen Fokalkurven.

Man nehme zum Beispiel eine Raumkurve mit einer Symmetrieebene, die wir zur y, z-Ebene wählen. Es ist dann klar, wenn wir voraussetzen, daß die Developpable, die gleichzeitig um die Kurve und den Kugelkreis umgeschrieben ist, irreduktibel ist, daß ihre Gleichung eben die Größe x nur als Quadrat enthält. Und da die Developpable die y, z-Ebene weder berührt, noch orthogonal schneidet, so ist die betreffende Schnittkurve eine Doppelkurve der Developpablen.

Nimmt man daher eine Raumkurve mit einer Symmetrieebene und konstruiert diejenige Minimalfläche, die deren Evolute nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, so hat diese Fläche immer dann eine ebene geodätische Kurve in der Symmetrieebene, wenn die um die Raumkurve und den Kugelkreis umgeschriebene Developpable irreduktibel ist.

Ist zum Beispiel die vorgelegte Kurve eine Parabel, so erkennen wir, daß die Minimalfläche, die die Evolute dieser Parabel als ebene geodätische

Kurve enthält, zugleich die Evolute der Fokalparabel als ebene geodätische Kurve enthält. (Vergleiche Hennebergs früher zitierte Arbeit.)

Andererseits ist klar, daß die Minimalfläche, die die Evolute einer Ellipse oder Hyperbel als ebene geodätische Kurve enthält, zugleich die Evoluten der beiden Fokalkegelschnitte als ebene geodätische Kurven enthält.

An dieser Stelle scheint es mir nützlich, den folgenden Satz, der [486 an und für sich ziemlich selbstverständlich ist, der übrigens im Vorangehenden schon als bekannt vorausgesetzt worden ist, ausdrücklich auszusprechen:

Satz 13. Enthält eine Developpable zwei algebraische Minimalkurven (oder eine solche, die alle Erzeugenden zweifach schneidet), so ist die Developpable die Evolute einer algebraischen Raumkurve, nämlich der Schnittkurve zwischen den Developpablen der beiden Minimalkurven.

19. Seien wiederum:

$$x_1 = U_1, \quad y_1 = V_1, \quad z_1 = W_1$$

und:

$$x_2 = U_2, \quad y_2 = V_2, \quad z_2 = W_2$$

zwei Minimalkurven. Alsdann bestimmen die Gleichungen:

$$x = \frac{m}{m+n} U_1 + \frac{n}{m+n} U_2,$$

$$y = \frac{m}{m+n} V_1 + \frac{n}{m+n} V_2,$$

$$z = \frac{m}{m+n} W_1 + \frac{n}{m+n} W_2,$$

wie auch die Konstanten m und n gewählt werden, immer eine Minimalfläche. Konstruiert man nun diejenige Developpable, die gleichzeitig um jene beiden Minimalkurven umgeschrieben ist, so erkennt man wie in der vorangehenden Nummer, daß die Minimalfläche in diese Developpable eingeschrieben ist. Und andererseits lehrt der vorangehende Satz, daß die Developpable die Evolute einer algebraischen Raumkurve ist. Hiermit haben wir eine synthetische Begründung der Sätze 8 und 11 erhalten.]

§ 8. Bestimmung aller algebraischen Minimalflächen, die in einen algebraischen Kegel eingeschrieben sind.

Der zweite Henneberg sche Satz lehrt, daß sich nicht in jeden algebraischen Zylinder algebraische Minimalflächen einschreiben lassen. Es liegt somit nah, zu vermuten, daß sich auch nicht in jeden algebraischen Kegel algebraische Minimalflächen einschreiben lassen. Merkwürdigerweise stellt sich die Sache anders. Ich werde in der Tat jetzt zeigen, daß sich in jeden algebraischen Kegel, dessen Spitze im endlichen Raume liegt, und welcher dabei keine infinitesimale Kugel ist, unbeschränkt viele (∞^∞) algebraische Minimalflächen einschreiben lassen. Gleichzeitig bestimme ich alle diese Flächen.

20. Sind x, y, z die Koordinaten der Punkte einer algebraischen Raumkurve, so werden die Minimalkurven der Minimalfläche, die die Evolute nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, bestimmt [487 durch die früher gefundenen Formeln:

$$2U = x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i \frac{z'y'' - y'z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = x_1 \pm i x_2,$$

$$2V = y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i \frac{x'z'' - z'x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = y_1 \pm i y_2,$$

$$2W = z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i \frac{y'x'' - x'y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = z_1 \pm i z_2.$$

Die Minimalkurven der Bonnetschen Biegungsfläche werden bekanntlich bestimmt durch die Gleichungen:

$$2U_1 = -x_2 \pm i x_1, \quad 2V_1 = -y_2 \pm i y_1, \quad 2W_1 = -z_2 \pm i z_1.$$

Hierbei ist die Kurve x_1, y_1, z_1 der vorgelegten in die Kurve $-x_2, -y_2, -z_2$ der neuen Fläche übergegangen. Die Tangentenebenen der neuen Fläche längs dieser Kurve besitzen die Richtungskosinus x', y', z', das heißt, dieselben Richtungskosinus wie die entsprechenden Tangentenebenen der vorgelegten Fläche.

Wir werden zeigen, daß die besprochenen Tangentenebenen der neuen Fläche durch einen gemeinsamen Punkt, nämlich den Koordinatenanfangspunkt, gehen. Dies geht unmittelbar daraus hervor, daß die Gleichung:

$$x'x_2 + y'y_2 + z'z_2 = 0,$$

wie man durch Ausführung findet, identisch besteht. So folgt:

Satz 14. Berührt eine Minimalfläche die Evolute einer Raumkurve längs des Ortes der Krümmungsmittelpunkte, so ist die **Bonnet**sche Biegungsfläche eingeschrieben in einen Kegel, dessen Tangentenebenen mit den Tangentenebenen der Evolute parallel sind. Die Distanz der Kegelspitze von einem beliebigen Punkte x_2, y_2, z_2 der Berührungskurve ist gleich dem Krümmungsradius der ursprünglichen Raumkurve in demjenigen Punkte, dessen Tangente auf der betreffenden Tangentenebene der Biegungsfläche senkrecht steht.

Der letzte Teil dieses Satzes beruht darauf, daß die Gleichung:

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

wie man durch Ausführung zeigt, identisch stattfindet.

Früher fanden wir, daß jede (algebraische) Minimalfläche ∞^3 Evoluten von (algebraischen) Raumkurven, jede nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt. Den betreffenden Berührungskurven entsprechen dabei auf der Bonnetschen Biegungsfläche die ∞^3 Kurven, nach denen diese Fläche von ihren Tangentenkegeln berührt wird. Und da die Beziehung zwischen den beiden Minimalflächen eine gegenseitige ist, folgt, daß auch die Berührungskurven der ursprünglichen Fläche mit ihren Tangentenkegeln diejenigen Kurven der Biegungsfläche liefern, nach denen diese [488 von umgeschriebenen Evoluten [und zwar von jeder] nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt wird.

21. Ist nun gegeben ein beliebiger algebraischer Kegel:

$$f\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}\right) = 0,$$

der jedoch keine infinitesimale Kugel sein darf, so findet man folgendermaßen vermöge des letzten Satzes unbeschränkt viele algebraische Minimalflächen, die in ihn eingeschrieben sind.

Ich setze:

$$f\left(\frac{t}{v}, \frac{u}{v}\right) = 0$$

und interpretiere dabei mit Plücker die Größen t, u, v als Koordinaten der allgemeinen Ebene:

$$t x_2 + u y_2 + v z_2 - 1 = 0.$$

Sodann füge ich eine arbiträre algebraische Relation zwischen t, u, v:

$$\varphi(t, u, v) = 0$$

hinzu. Alsdann bestimmen die vereinigten Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ die Oskulationsebenen einer algebraischen Raumkurve, deren Binormalen mit den Erzeugenden des vorgelegten Kegels parallel sind.

Sodann nehme ich auf jeder Erzeugenden einen Punkt p, dessen Distanz vom Koordinatenanfangspunkte, das heißt von der Kegelspitze, gleich dem entsprechenden Krümmungsradius der Raumkurve ist. Der Inbegriff der Punkte p bildet eine Kurve, und diejenige Minimalfläche, die den Kegel nach dieser Kurve berührt, ist nach den Entwickelungen der vorangehenden Nummer die Biegungsfläche einer algebraischen Minimalfläche und infolgedessen selbst algebraisch. Also:

Satz 15. Es gibt unendlichfach unendlich viele algebraische Minimalflächen, die in einen beliebigen algebraischen Kegel eingeschrieben sind.

Um eine solche Fläche zu finden, nimmt man eine beliebige algebraische Raumkurve, deren Binormalen mit den Erzeugenden des vorgelegten Kegels parallel sind. Auf jeder Erzeugenden bestimmt man denjenigen Punkt p, dessen Distanz von der Kegelspitze gleich dem entsprechenden Krümmungsradius der Raumkurve ist. Diejenige Minimalfläche, die den Kegel nach dem Orte der Punkte p berührt, ist algebraisch.

Ist der vorgelegte Kegel insbesondere reell, so ist es immer möglich, eine solche reelle Gleichung $\varphi(t, u, v) = 0$ zu wählen, daß die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ die Oskulationsebenen einer reellen Raumkurve bestimmen. Alsdann gibt die Methode des vorangehenden Satzes eine algebraische Minimalfläche, die den vorgelegten Kegel nach einer reellen Kurve berührt, das heißt, eine reelle eingeschriebene [algebraische] Minimalfläche.

22. Der letzte Satz erhält dadurch eine noch größere Wichtigkeit, daß die angegebene Konstruktion sämtliche algebraische Minimal- [489 flächen liefert, die in den vorgelegten Kegel eingeschrieben sind.

Seien in der Tat:

$$\xi = x_2, \quad \eta = y_2, \quad \zeta = z_2$$

die Gleichungen der Berührungskurve zwischen dem vorgelegten Kegel und einer beliebigen eingeschriebenen algebraischen Minimalfläche. Die Richtungskosinus X, Y, Z der Tangentenebene des Kegels, dessen Spitze im Anfangspunkte liegen mag, sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$X x_2 + Y y_2 + Z z_2 = 0, \quad X d x_2 + Y d y_2 + Z d z_2 = 0,$$

woraus:

$$\frac{X}{\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ d y_2 & d z_2 \end{vmatrix}} = \frac{Y}{\begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ d z_2 & d x_2 \end{vmatrix}} = \frac{Z}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ d x_2 & d y_2 \end{vmatrix}}.$$

Setze ich dann:

$$(21)\quad dx_1 = Zdy_2 - Ydz_2,\quad dy_1 = Xdz_2 - Zdx_2,\quad dz_1 = Ydx_2 - Xdy_2,$$

so werden die Minimalkurven der nach der Kurve x_2, y_2, z_2 berührenden Minimalfläche bekanntlich bestimmt durch die Gleichungen:

$$2U = x_2 \pm i x_1,\quad 2V = y_2 \pm i y_1,\quad 2W = z_2 \pm i z_1.$$

Es bestehen, wie man leicht verifiziert, die folgenden Formeln:

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} dx_2 &= Ydz_1 - Zdy_1,\\ dy_2 &= Zdx_1 - Xdz_1,\\ dz_2 &= Xdy_1 - Ydx_1,\\ Xx_2 + Yy_2 + Zz_2 &= 0,\\ Xdx_2 + Ydy_2 + Zdz_2 &= 0,\\ x_2 dX + y_2 dY + z_2 dZ &= 0,\\ Xdx_1 + Ydy_1 + Zdz_1 &= 0.\end{aligned}\right.$$

Wir führen drei neue Größen x, y, z ein, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + Yz_2 - Zy_2,\\ y &= y_1 + Zx_2 - Xz_2,\\ z &= z_1 + Xy_2 - Yx_2;\end{aligned}$$

dabei interpretieren wir x, y, z als Koordinaten der Punkte einer Raumkurve, deren Bogenlänge s heißen mag. Diese Raumkurve ist algebraisch. Durch Berücksichtigung von (21) folgt:

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} dx &= z_2 dY - y_2 dZ,\\ dy &= x_2 dZ - z_2 dX,\\ dz &= y_2 dX - x_2 dY,\end{aligned}\right.$$

woraus:

$$(24)\quad x_2 dx + y_2 dy + z_2 dz = 0.$$

Andererseits findet man (23), (22): [490

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} y_2 & z_2\\ Y & Z\end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} z_2 & x_2\\ Z & X\end{vmatrix} dy + \begin{vmatrix} x_2 & y_2\\ X & Y\end{vmatrix} dz =\\ &= (z_2 y_2 Z - z_2^2 Y - x_2^2 Y + x_2 y_2 X)dY +\\ &+ (x_2 z_2 X - x_2^2 Z - y_2^2 Z + y_2 z_2 Y)dZ +\\ &+ (y_2 x_2 Y - y_2^2 X - z_2^2 X + z_2 x_2 Z)dX =\\ &= -(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)(XdX + YdY + ZdZ) = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung drückt aus, daß die drei Geraden, deren Richtungskoeffizienten beziehungsweise x_2, y_2, z_2; X, Y, Z; dx, dy, dz sind, in derselben Ebene liegen. Und da nach (22), (24) die beiden letzten Richtungen auf [der] ersten senkrecht stehen, so müssen sie identisch sein, das heißt es ist:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{ds}{1}.$$

Also kommt:

$$X = \frac{dx}{ds} = x',\quad Y = \frac{dy}{ds} = y',\quad Z = \frac{dz}{ds} = z'.$$

Die obenstehenden Formeln erlauben, die Größen $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ als Funktionen von $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ auszudrücken.

Setzt man in der Tat:

$$2U_1 = x_1 \pm i x_2,\quad 2V_1 = y_1 \pm i y_2,\quad 2W_1 = z_1 \pm i z_2,$$

wobei U_1, V_1, W_1 zwei Größensysteme darstellen, so bestehen, wie man durch Ausführung ohne Schwierigkeit verifiziert, die drei folgenden Relationen:

$$(25)\quad (2U_1 - x)^2 + (2V_1 - y)^2 + (2W_1 - z)^2 = 0,$$

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &(2U_1 - x)x' + (2V_1 - y)y' + (2W_1 - z)z' = 0,\\ &\qquad x'dU_1 + y'dV_1 + z'dW_1 = 0.\end{aligned}\right.$$

Differentiiert man die vorletzte und berücksichtigt dabei die letzte Gleichung, so findet man:

$$(27)\quad (2U_1 - x)x'' + (2V_1 - y)y'' + (2W_1 - z)z'' - 1 = 0.$$

Die Gleichungen (25), (26), (27) geben durch Auflösung:

$$\begin{aligned} 2U_1 &= x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\,\frac{z'y'' - y'z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = x_1 \pm i x_2,\\ 2V_1 &= y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\,\frac{x'z'' - z'x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = y_1 \pm i y_2,\\ 2W_1 &= z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \pm i\,\frac{y'x'' - x'y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2} = z_1 \pm i z_2,\end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, & x_2 &= \pm\frac{z'y'' - y'z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},\\ y_1 &= y + \frac{y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, & y_2 &= \pm\frac{x'z'' - z'x''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},\\ z_1 &= z + \frac{z''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}, & z_2 &= \pm\frac{y'x'' - x'y''}{x''^2 + y''^2 + z''^2},\end{aligned}$$ [491

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

Diese Formeln zeigen, daß die vorgelegte eingeschriebene Minimalfläche erhalten wird, wenn die Operationen der vorangehenden Nummer auf die Raumkurve x, y, z angewendet werden. Dies gibt:

Satz 16. Die Operationen der vorangehenden Nummer liefern alle algebraischen Minimalflächen, die in einen vorgelegten algebraischen Kegel eingeschrieben sind.

Insbesondere findet man alle reellen algebraischen Minimalflächen, die sich in einen reellen algebraischen Kegel $f = 0$ einschreiben lassen, wenn man, wie am Schlusse der vorangehenden Nummer geschehen, zu der reellen Gleichung $f(t:v, u:v) = 0$ eine arbiträre reelle Gleichung $\varphi(t, u, v) = 0$ hinzufügt.

§ 9. Über die in eine algebraische Developpable eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen.

In diesem Paragraphen zeige ich, daß in jede um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebene Developpable unbeschränkt viele (∞^∞) algebraische Minimalflächen eingeschrieben werden können. Ich gebe ferner eine bemerkenswerte Konstruktion dieser eingeschriebenen Flächen.

23. Sei t ein Parameter, dessen verschiedene Werte den verschiedenen Erzeugenden einer algebraischen Developpablen zugeordnet sind, und seien X, Y, Z die Richtungskosinus der Tangentenebenen der Developpablen. Da eine Developpable nur ∞^1 Tangentenebenen besitzt, und da jede Ebene längs einer Erzeugenden berührt, so sind X, Y, Z Funktionen von t, und von t allein.

Seien ξ_1, η_1, ζ_1 die Koordinaten der Punkte, in denen eine vorgelegte algebraische Minimalfläche die Developpable berührt. Ebenso seien ξ_2, η_2, ζ_2 die Punktkoordinaten der Berührungskurve unserer Developpablen mit einer beliebigen anderen Minimalfläche. Dabei sind sowohl ξ_1, η_1, ζ_1, wie ξ_2, η_2, ζ_2 Funktionen von t.

Unsere Voraussetzung, daß die erste Minimalfläche algebraisch sein soll, kommt darauf hinaus, daß die drei Integrale:

$$\int(Z d\eta_1 - Y d\zeta_1), \quad \int(X d\zeta_1 - Z d\xi_1), \quad \int(Y d\xi_1 - X d\eta_1)$$ [492

algebraische Funktionen von t sind. Und die Forderung, daß auch die zweite Fläche algebraisch sein soll, kommt darauf hinaus, daß auch die drei Integrale:

$$\int(Z d\eta_2 - Y d\zeta_2), \quad \int(X d\zeta_2 - Z d\xi_2), \quad \int(Y d\xi_2 - X d\eta_2)$$

algebraische Funktionen von t sein sollen. Diese Forderung ist aber, wenn wir:

$$\xi_2 - \xi_1 = x_2, \quad \eta_2 - \eta_1 = y_2, \quad \zeta_2 - \zeta_1 = z_2$$

setzen, und darnach x_2, y_2, z_2 als unbekannte Größen anstatt ξ_2, η_2, ζ_2 einführen, mit der Forderung äquivalent, daß die drei Integrale:

$$(28) \quad \int(Z dy_2 - Y dz_2), \quad \int(X dz_2 - Z dx_2), \quad \int(Y dx_2 - X dy_2)$$

algebraische Funktionen von t sein sollen.

Es ist:

$$X d\xi_1 + Y d\eta_1 + Z d\zeta_1 = 0,$$

$$X d\xi_2 + Y d\eta_2 + Z d\zeta_2 = 0,$$

woraus folgt:

$$X dx_2 + Y dy_2 + Z dz_2 = 0.$$

Es ist ferner:

$$X(\xi_2 - \xi_1) + Y(\eta_2 - \eta_1) + Z(\zeta_2 - \zeta_1) = 0,$$

da $\xi_2 - \xi_1$, $\eta_2 - \eta_1$, $\zeta_2 - \zeta_1$ mit den Richtungskosinus der Erzeugenden proportional sind. Also kommt:

$$X x_2 + Y y_2 + Z z_2 = 0.$$

Endlich sind die Richtungskosinus der Erzeugenden durch eine [algebraische] Relation:

$$f\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\zeta_2 - \zeta_1}, \frac{\eta_2 - \eta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right) = 0$$

verbunden[1]), und daher sind die Verhältnisse der Größen x_2, y_2, z_2 durch die entsprechende Gleichung:

$$f\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}\right) = 0$$

verbunden.

Hiermit gewinnt unser Problem die folgende Gestalt:

Man soll drei Größen x_2, y_2, z_2, deren Verhältnisse durch eine vorgelegte algebraische Relation $f = 0$ verknüpft sind, in allgemeinster Weise als algebraische Funktionen einer Hilfsgröße bestimmen derart, daß die drei Integrale (28), in denen X, Y, Z durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} X x_2 + Y y_2 + Z z_2 &= 0, \\ X dx_2 + Y dy_2 + Z dz_2 &= 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1 \end{aligned}$$

bestimmt sind, algebraische Funktionen der Hilfsgröße werden.

1) Wäre die Developpable eine Zylinderfläche, so gäbe es zwei solche Relationen. Diesen Ausnahmefall schließen wir daher vorläufig aus.

Nach den Entwickelungen des letzten Paragraphen kann dieses [493
letzte Problem auch folgendermaßen formuliert werden:

Vorgelegt ist ein algebraischer Kegel:

$$f\left(\frac{x_2}{z_2},\ \frac{y_2}{z_2}\right) = 0.$$

Man soll in allgemeinster Weise eine auf diesem Kegel gelegene Kurve x_2, y_2, z_2 bestimmen derart, daß die nach dieser Kurve berührende Minimalfläche algebraisch ist.

Und da diese letzte Aufgabe eben in dem letzten Paragraphen erledigt wurde, so ist auch die in diesem Paragraphen gestellte Aufgabe als erledigt zu betrachten. Dies gibt den folgenden merkwürdigen Satz:

Satz 17. Ist eine algebraische Developpable und eine eingeschriebene algebraische Minimalfläche vorgelegt, so findet man folgendermaßen beliebig viele (∞^∞) eingeschriebene algebraische Minimalflächen.

Man nimmt eine algebraische Raumkurve, deren Binormalen mit den Erzeugenden der Developpablen parallel sind. Sodann bestimmt man auf jeder Erzeugenden einen Punkt p, dessen Distanz von dem Berührungspunkte der Erzeugenden mit der vorgelegten Minimalfläche dem entsprechenden Krümmungsradius der Raumkurve gleich ist. Diejenige Minimalfläche, die die Developpable nach dem Orte der Punkte p berührt, ist algebraisch, und in dieser Weise werden alle eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen erhalten.

Ist insbesondere die vorgelegte Developpable und die vorgelegte eingeschriebene Minimalfläche reell, so lehrt der vorangehende Satz beliebig viele und sogar alle eingeschriebenen reellen algebraischen Minimalflächen finden.

24. Früher zeigte ich (§ 5, Nr. 13), daß in die Evolute einer algebraischen Raumkurve eine algebraische Minimalfläche eingeschrieben werden kann. Hieraus ergibt sich nach dem Vorangehenden der Satz:

Satz 18. In die Evolute einer algebraischen Raumkurve C kann man immer unendlichfach unendlichviele (∞^∞) algebraische Minimalflächen einschreiben.

Um eine solche Fläche zu finden, benutzt man nach dem Satze 17 als Hilfskurve eine beliebige Raumkurve, deren Tangenten beziehungsweise mit den Tangenten der Kurve C parallel sind. Wählt man insbesondere zur Hilfskurve eine mit C ähnliche und gleichgestellte Kurve,

so erhält man die in Nummer 14 betrachteten eingeschriebenen Minimalflächen.

Ist eine Developpable die Evolute einer algebraischen Raumkurve, so enthält sie (§ 7) zwei algebraische Minimalkurven. Enthält auf der anderen Seite eine Developpable zwei algebraische Minimalkurven, so ist sie die Evolute einer algebraischen Raumkurve. Infolgedessen kann der letzte Satz auch folgendermaßen formuliert werden:

Satz 19. Enthält eine Developpable zwei algebra- [494
ische Minimalkurven, so gibt es unendlichfach unendlichviele algebraische Minimalflächen, die in die Developpable eingeschrieben sind.

Erinnert man sich jetzt, daß eine Minimalkurve, als Ebenengebilde aufgefaßt, eine Minimalfläche ist, so erkennt man einerseits, daß der letzte Satz eine unmittelbare Konsequenz von Satz 17 ist, andererseits, daß man den allgemeineren Satz aussprechen kann:

Satz 20. Enthält eine algebraische Developpable eine algebraische Minimalkurve, so gibt es ∞^∞ eingeschriebene algebraische Minimalflächen.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch den folgenden Satz aussprechen:

Satz 21. In eine algebraische Developpable, deren Ebenen eine feste Ebene unter konstantem Winkel (jedoch nicht senkrecht) schneiden, kann man immer ∞^∞ algebraische Minimalflächen einschreiben.

Denn die Rückkehrkurve ist geodätische Kurve auf einer Zylinderfläche (Nr. 9), und daher ist die Minimalfläche, auf der diese Rückkehrkurve Haupttangentenkurve ist, algebraisch. Hiermit kennen wir eine in die vorgelegte Developpable eingeschriebene algebraische Minimalfläche, und also ist unser Satz richtig.

Dieser Beweis hat keinen Sinn, wenn die Ebenen der vorgelegten Developpablen die feste Ebene senkrecht schneiden. Und in diesem Falle ist unser Satz, wie der zweite Hennebergsche Satz uns lehrt, auch nicht mehr richtig.

25. Die vorangehenden Entwickelungen dieses Paragraphen bleiben nicht mehr gültig, wenn die vorgelegte Developpable eine Zylinderfläche ist. Wir behandeln nunmehr diesen Ausnahmefall.

Ist $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ die Gleichung einer vorgelegten Zylinderfläche, so werden die Minimalkurven jeder eingeschriebenen Minimalfläche bestimmt durch Gleichungen von der Form:

$$2U = \mathbf{x} \pm i\xi, \quad 2V = \mathbf{y} \pm i\eta, \quad 2W = \mathbf{z} \pm i\zeta.$$

Und da:

$$dU^2 + dV^2 + dW^2 = 0$$

ist, folgt:

$$(29)\quad \begin{cases} d\mathbf{x}d\xi + d\mathbf{y}d\eta + d\mathbf{z}d\zeta = 0, \\ d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2 + d\mathbf{z}^2 - (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) = 0. \end{cases}$$

Bezeichnen wir andererseits die Richtungskosinus der Tangentenebenen des Zylinders wie gewöhnlich mit X, Y, Z, so ist:

$$XdU + YdV + ZdW = 0, \quad Z = 0,$$

woraus:

$$Xd\mathbf{x} + Yd\mathbf{y} = 0, \quad Xd\xi + Yd\eta = 0.$$

Wenn wir daher voraussetzen, daß sich der vorgelegte Zylinder nicht auf eine Gerade reduziert, und daß daher $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{y}$ nicht beide [495
gleich Null sind, so können wir setzen:

$$d\xi = \varrho\, d\mathbf{x}, \quad d\eta = \varrho\, d\mathbf{y},$$
$$d\mathbf{z} = \lambda\, ds = \lambda\sqrt{d\mathbf{x}^2 + d\mathbf{y}^2}, \quad d\zeta = \mu\, ds,$$

wo die Funktionen ϱ, λ, μ im allgemeinen endliche Werte haben.

Durch Substitution in (29) kommt:

$$ds^2(\varrho + \lambda\mu) = 0,$$
$$ds^2(1 - \varrho^2 + \lambda^2 - \mu^2) = 0,$$

woraus, da ds nicht verschwindet:

$$\varrho + \lambda\mu = 0, \quad 1 - \varrho^2 + \lambda^2 - \mu^2 = 0.$$

Ist nun $\lambda \gtrless 0$, so kommt:

$$\mu = -\frac{\varrho}{\lambda}, \quad (1 + \lambda^2)(\lambda^2 - \varrho^2) = 0,$$

wo wir zunächst annehmen werden, daß:

$$\lambda^2 = \varrho^2$$

ist. In diesem Falle kommt, wenn wir die Bogenlänge der Kurve ξ, η mit σ bezeichnen:

$$2U = \mathbf{x} \pm i\xi, \quad 2V = \mathbf{y} \pm i\eta, \quad 2W = \sigma \pm is.$$

Nimmt man zweitens an, daß:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

ist, so wird $\lambda = i$ und $\mathbf{z} = is$.

Es bleibt somit nur die Hypothese $\lambda = 0$ zu diskutieren. Alsdann wird $\varrho = 0$:

$$2U = \mathbf{x}, \quad 2V = \mathbf{y}, \quad 2W = \pm is,$$

was dem Henneberg schen Falle einer ebenen geodätischen Kurve entspricht.

Hiermit ist der folgende allgemeine Satz gefunden:

Satz 22. Ist der Querschnitt eines Zylinders $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ die Evolute einer ebenen algebraischen Kurve, so findet man folgendermaßen alle eingeschriebenen [algebraischen] Minimalflächen.

Man nimmt eine andere Evolute $\psi(\xi, \eta) = 0$ einer ebenen algebraischen Kurve und betrachtet je zwei solche Punkte der beiden Evoluten, die parallele Tangenten haben, als zusammengehörend. Bezeichnet man sodann die Bogenlänge der Kurve $\psi = 0$ mit σ und konstruiert die Kurve:

$$x = \mathbf{x}, \quad y = \mathbf{y}, \quad z = \sigma,$$

so ist diejenige Minimalfläche, die den Zylinder nach dieser Kurve berührt, immer algebraisch.

Die allgemeine Methode der Nummer 23 bleibt also noch gültig, wenn die vorgelegte Developpable eine Zylinderfläche ist.

Zugefügt möge endlich noch sein, daß sich der Satz 22 derart [496
formulieren läßt, daß derselbe gültig bleibt, wenn sich die vorgelegte Zylinderfläche auf eine gerade Linie reduziert.

§ 10. Synthetische Betrachtungen.

[Auch die Theorie des letzten Paragraphen fand ich ursprünglich durch synthetische Betrachtungen, die ich hier kurz reproduzieren werde, da sie an und für sich Interesse darbieten.

26. Legendre gab zuerst der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen durch Einführung von Ebenenkoordinaten:

$$z - px - qy = w, \quad p, \quad q$$

eine lineare Form. Hieraus folgt sogleich, wie Weierstraß zuerst explizite bemerkt hat, daß die Auffindung zweier (reeller) Minimalflächen:

$$w = F(p, q) \quad \text{und:} \quad w = \Phi(p, q)$$

die Bestimmung von einfach unendlich vielen solchen Flächen:

$$w = F + \lambda\Phi \qquad (\lambda = \text{Const.})$$

leistet; sind dabei die vorgelegten Flächen algebraisch, so werden auch die derivierten Flächen algebraisch.

Eine solche Konstruktion von neuen Minimalflächen vermöge zweier gegebener Flächen wird geliefert durch den folgenden Satz, den ich vielleicht zuerst in dieser Form aufgestellt habe:

G l e i t e t e i n e M i n i m a l f l ä c h e i n T r a n s l a t i o n s b e w e g u n g l ä n g s e i n e r f e s t e n M i n i m a l f l ä c h e , s o b e s c h r e i b t j e d e r m i t d e r b e w e g l i c h e n F l ä c h e f e s t v e r b u n d e n e P u n k t w i e d e r u m e i n e M i n i m a l f l ä c h e .

Diese Form der Konstruktion ist deswegen wichtig, weil sie unmittelbar eine ausgedehnte Kategorie von Berührungstransformationen liefert, die Minimalflächen in Minimalflächen überführen.[1])

Man führe in der Tat auf eine vorgelegte (algebraische) Minimalfläche:

$$f(x, y, z) = 0$$

und einen mit derselben fest verbundenen Punkt $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ alle möglichen Translationen aus. Alsdann erhält die Fläche ∞^3 Lagen:

$$f(x + a,\ y + b,\ z + c) = 0,$$

und gleichzeitig erhält der Punkt x', y', z' die Lagen:

$$x' = -a, \quad y' = -b, \quad z' = -c.$$

Daher wird das Entsprechen zwischen den verschiedenen Lagen der [497 Fläche und des Punktes durch die Gleichung:

$$f(x - x',\ y - y',\ z - z') = 0$$

bestimmt. Aber diese Gleichung definiert eine Berührungstransformation. Wenn insbesondere der Punkt x', y', z' eine Minimalfläche durchläuft, so umhüllt die entsprechende Fläche nach unserem Satze eine Minimalfläche. Die aufgestellte Berührungstransformation besitzt daher wirklich die Eigenschaft, Minimalflächen in Minimalflächen überzuführen.

Hieraus folgt insbesondere, was übrigens schon aus der Form der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen hervorgeht, daß die Punkte des Raumes, als Ebenengebilde aufgefaßt, Minimalflächen sind.

Man erkennt ferner, daß jede Ebene in eine parallele Ebene übergeht, und daß infolgedessen jede Developpable in eine Developpable mit parallelen Ebenen umgewandelt wird.

---

1) In meiner vierten Abhandlung über Minimalflächen bestimme ich sämtliche Berührungstransformationen, die alle Minimalflächen in Minimalflächen umwandeln.

27. Dies vorausgesetzt, nehme man einen beliebigen algebraischen Kegel und sämtliche algebraische Minimalflächen, die nach § 8[1]) in diesen Kegel eingeschrieben sind, und führe sodann unsere Berührungstransformation, die nach unserer Voraussetzung algebraisch ist, aus. Hierbei geht der Kegel in eine algebraische Developpable mit parallelen Ebenen über; die in den Kegel eingeschriebenen algebraischen Minimalflächen liefern algebraische Minimalflächen, die in die Developpable eingeschrieben sind.

Hiermit erkennen wir sogleich, daß es möglich ist, beliebig viele algebraische Developpable, in die sich ∞^∞ algebraische Minimalflächen einschreiben lassen, anzugeben. Die vorangehenden Entwickelungen führen indes weiter.

Sei in der Tat eine algebraische Developpable mit einer eingeschriebenen algebraischen Minimalfläche gegeben. Ich behaupte, daß es ∞^∞ algebraische Minimalflächen gibt, die in die Developpable eingeschrieben sind.

Zum Beweise führe ich diejenige Berührungstransformation der früher besprochenen Art aus, bei welcher die vorgelegte Minimalfläche in einen beliebig gewählten Punkt p übergeht. Hierbei wird die vorgelegte Developpable eine um den Punkt p umgeschriebene Developpable, das heißt, ein K e g e l, dessen Spitze eben p ist. In diesen Kegel lassen sich jetzt ∞^∞ algebraische Minimalflächen, die sich sämtlich angeben lassen, einschreiben. Führt man daher die inverse Transformation aus, so erhält man ∞^∞ algebraische Minimalflächen, die in die ursprünglich vorgelegte Developpable eingeschrieben sind. Und es ist andererseits klar, daß man in dieser Weise sämtliche in unsere Developpable eingeschriebene algebraische Minimalflächen wirklich erhält.[2]) [498

Die Betrachtungen dieses Paragraphen bilden eine Methode, vermöge deren Sätze über Minimalflächen in neue Sätze über Minimalflächen übergeführt werden können.]

---

1) Auch die Theorien des Paragraphen 8 ließen sich in einfacher Weise aus synthetischen Betrachtungen herleiten, worauf ich jedoch in dieser Abhandlung nicht eingehen werde.

2) Wenn man hierzu die Bemerkung hinzufügt, daß unsere Berührungstransformation eine jede Ebene und eine in derselben gelegene Figur in eine parallele Ebene und eine k o n g r u e n t e Figur überführt, so erhält man den Satz 17.

§ 11. Enthält jede um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebene algebraische Developpable eine algebraische Minimalkurve?

Die Entwickelungen des Paragraphen 9 sind geeignet, auf die Vermutung zu führen, daß jede um eine algebraische Minimalfläche umgeschriebene algebraische Developpable eine algebraische Minimalkurve enthält. Wäre diese Vermutung richtig, so ließe sich leicht nachweisen, daß jede um eine reelle algebraische Minimalfläche umgeschriebene Developpable die Evolute einer algebraischen Raumkurve sein müßte. Der Zweck dieses Paragraphen ist, die hiermit aufgeworfene interessante Frage zu beantworten.[1])

28. Ich stelle mir überhaupt die Aufgabe, die auf unserer umgeschriebenen Developpablen gelegenen Minimalkurven zu bestimmen.

Ich bezeichne mit x, y, z die laufenden Punktkoordinaten der Berührungskurve, mit x', y', z' die laufenden Punktkoordinaten der umgeschriebenen Developpablen, mit λ, μ, ν die Richtungskosinus der Erzeugenden der Developpablen, mit X, Y, Z die Richtungskosinus der Ebenen der Developpablen, mit ϱ den Abstand eines Punktes x, y, z von einem auf der hindurchgehenden Erzeugenden liegenden Punkte x', y', z', mit $d\varphi$ den Winkel zwischen zwei benachbarten Erzeugenden.

Das Bogenelement:

$$dS' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$$

ist bestimmt durch die Gleichung:

$$dS'^2 = [d\varrho + (\lambda dx + \mu dy + \nu dz)]^2 +$$
$$+ \left[\varrho d\varphi + \sqrt{dS^2 - (\lambda dx + \mu dy + \nu dz)^2}\right]^2,$$

wo:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dS^2$$

gesetzt ist. Die auf unserer Developpablen gelegenen Minimalkurven sind daher bestimmt durch die lineare Differentialgleichung:

$$d\varrho + (\lambda dx + \mu dy + \nu dz) + i\varrho d\varphi + i\sqrt{dS^2 - (\lambda dx + \mu dy + \nu dz)^2} = 0,$$

die wir jetzt durch Einführung von zweckmäßigen unabhängigen [499 Variabeln auf eine bemerkenswerte Form bringen werden.

1) Die Schnittkurve einer Fläche mit der unendlich entfernten Ebene ist immer eine Minimalkurve. Von derselben wird jedoch im Texte abgesehen.

29. Unsere Minimalfläche ist durch die Formeln gegeben:

$$\begin{aligned} dx &= (1 - s^2)F'''(s)ds + (1 - \sigma^2)\Phi'''(\sigma)d\sigma, \\ dy &= i(1 + s^2)F'''(s)ds - i(1 + \sigma^2)\Phi'''(\sigma)d\sigma, \\ dz &= 2sF'''(s)ds + 2\sigma\Phi'''(\sigma)d\sigma; \end{aligned}$$

ferner ist:

$$\begin{aligned} X dx + Y dy + Z dz &= 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1, \end{aligned}$$

daher findet man:

$$X = \frac{\sigma + s}{1 + s\sigma}, \quad Y = i\frac{\sigma - s}{1 + s\sigma}, \quad Z = \frac{s\sigma - 1}{1 + s\sigma}$$

und:

$$s = \frac{X + iY}{1 - Z}, \quad \sigma = \frac{X - iY}{1 - Z}.$$

Längs der Berührungskurve sind s und σ verbunden durch eine Relation, die σ als Funktion von s bestimmt. Gibt man daher s einen bestimmten Wert, so erhält man einen bestimmten Punkt x, y, z der Berührungskurve, und zugleich eine bestimmte hindurchgehende Erzeugende. Gibt man darnach ϱ einen bestimmten Wert, so erhält man einen bestimmten Punkt x', y', z' auf jener Erzeugenden. Daher kann man x', y', z' als Funktionen von s und ϱ auffassen; und da nach dem Vorangehenden x, y, z; λ, μ, ν; X, Y, Z; $d\varphi$ Funktionen von s und ds sind, so können wir die Größen s und ϱ als unabhängige Variable in die Differentialgleichung der gesuchten Minimalkurven einführen.

Es ist:

$$\begin{aligned} dX &= \frac{(1 - \sigma^2)ds + (1 - s^2)d\sigma}{(1 + s\sigma)^2}, \\ dY &= i\frac{-(1 + \sigma^2)ds + (1 + s^2)d\sigma}{(1 + s\sigma)^2}, \\ dZ &= \frac{2\sigma ds + 2s d\sigma}{(1 + s\sigma)^2}, \end{aligned}$$

ferner ist:

$$\begin{aligned} \lambda X + \mu Y + \nu Z &= 0, \\ \lambda dX + \mu dY + \nu dZ &= 0, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1, \end{aligned}$$

also kommt:

$$\begin{aligned} \lambda &= i\frac{(\sigma^2 - 1)ds + (1 - s^2)d\sigma}{2(1 + s\sigma)\sqrt{ds\,d\sigma}}, \\ \mu &= -\frac{(1 + \sigma^2)ds + (1 + s^2)d\sigma}{2(1 + s\sigma)\sqrt{ds\,d\sigma}}, \\ \nu &= i\frac{-2\sigma ds + 2s d\sigma}{2(1 + s\sigma)\sqrt{ds\,d\sigma}}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung findet man: [500

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = i\frac{(1+s\sigma)(-F'''ds^2 + \Phi'''d\sigma^2)}{\sqrt{ds\,d\sigma}},$$

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 4(1+s\sigma)^2 F'''\Phi''' ds\,d\sigma,$$

$$\sqrt{dS^2 - (\lambda dx + \mu dy + \nu dz)^2} = \pm\frac{(1+s\sigma)(F'''ds^2 + \Phi'''d\sigma^2)}{\sqrt{ds\,d\sigma}}.$$

Es bleibt übrig, die Größe:

$$d\varphi = \sqrt{(\mu d\lambda - \lambda d\mu)^2 + (\nu d\mu - \mu d\nu)^2 + (\lambda d\nu - \nu d\lambda)^2}$$

zu berechnen. Es ist:

$$\frac{\mu d\lambda - \lambda d\mu}{Z} = \frac{\nu d\mu - \mu d\nu}{X} = \frac{\lambda d\nu - \nu d\lambda}{Y} = \frac{d\varphi}{\pm 1}$$

und:

$$\mu d\lambda - \lambda d\mu = -\frac{i(1-s\sigma)}{(1+s\sigma)^2}\left\{(1+s\sigma)d\left(\log\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\right) + \sigma ds - s d\sigma\right\};$$

also kommt:

$$d\varphi = \pm i\left\{d\left(\log\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\right) + \frac{\sigma ds - s d\sigma}{1+s\sigma}\right\}.$$

Durch Einsetzung der gefundenen Werte erhält die Differentialgleichung der gesuchten Minimalkurven die folgende Gestalt:

$$d\varrho + \varrho\left\{d\left(\log\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\right) + \frac{\sigma ds - s d\sigma}{1+s\sigma}\right\} - 2i\frac{1+s\sigma}{\sqrt{ds\,d\sigma}}F'''ds^2 = 0,$$

woraus durch Multiplikation mit $\sqrt{d\sigma : ds}$:

$$d\left(\varrho\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\right) + \varrho\sqrt{\frac{d\sigma}{ds}}\cdot\frac{\sigma ds - s d\sigma}{1+s\sigma} - 2i(1+s\sigma)F'''ds = 0,$$

oder, wenn man $\varrho\sqrt{d\sigma : ds} = u$ setzt:

$$du + u\frac{\sigma ds - s d\sigma}{1+s\sigma} - 2i(1+s\sigma)F'''ds = 0.$$ [1]

30. Die im Anfange dieses Paragraphen gestellte Frage kommt nun darauf hinaus, ob die gefundene Differentialgleichung immer dann eine algebraische Partikularlösung besitzt, wenn σ und F algebraische Funktionen von s sind. Zur Entscheidung dieser Frage genügt es, das folgende Beispiel zu betrachten.

1) In diesem Paragraphen sind an mehreren Stellen zweideutige Zeichen vorgekommen. Ich bin auf die Zeichenbestimmung nicht eingegangen, da es keinen wesentlichen Einfluß auf die Rechnungen des Textes haben würde, wenn man die Zeichen anders gewählt hätte.

Ich will voraussetzen, daß die Ebenen der umgeschriebenen Developpablen [einen] konstanten Winkel mit der z-Achse bilden, daß also:

$$s\sigma = \text{Const.}$$ [501

ist; und es sei:

$$F(s) = \frac{L}{s-a} \qquad (L = \text{Const.}).$$

Alsdann nimmt unsere Differentialgleichung die Form an:

$$du + \varepsilon u\frac{ds}{s} + \frac{B\,ds}{(s-a)^4} = 0,$$

wobei ε und B Konstanten sind. Setze ich nun zum Beispiel $\varepsilon = 3$, so besitzt das allgemeine Integral die Form:

$$u = Ds^{-3}\log(s-a) + A(s),$$

wobei A eine algebraische Funktion von s und der Integrationskonstanten bezeichnet, während D nur von B und a abhängt und dabei im allgemeinen von Null verschieden ist. In diesem Falle existiert somit keine algebraische Partikularlösung.

Die Evoluten von algebraischen Raumkurven sind somit nicht die einzigen Developpablen, in die sich eine, und infolgedessen ∞^∞ algebraische Minimalflächen einschreiben lassen.

Note 1. Bestimmung aller reellen Minimalflächen, deren Klassenzahl dividiert durch 2 eine Primzahl ist.

31. In meiner ersten Abhandlung über Minimalflächen (Bd. XIV [hier Abh. II]) bestimmte ich alle [reellen] Minimalflächen, deren Klassenzahl eine Primzahl ist. Ich werde jetzt alle [reellen] Minimalflächen, deren Klassenzahl dividiert durch 2 eine vorgelegte Primzahl ist, bestimmen.

Die Klasse einer reellen Minimalfläche, die keine Doppelfläche ist, wird nach der zitierten Abhandlung gegeben durch die Formel:

$$2M(R-M),$$

wo R den Rang einer auf der Fläche gelegenen Minimalkurve bezeichnet, während M die Multiplizität des Kugelkreises auf der Developpablen einer solchen Minimalkurve darstellt. Die Klasse einer Doppelfläche ist gleich:

$$M(R-M).$$

Ich werde zeigen, daß eine Relation von der Form:

$$M(R-M) = 2P,$$

wo P eine Primzahl ist, nicht bestehen kann. Wir wissen nämlich, daß:

$$R - M \gtreqless 3$$

ist. Also käme entweder:

$$M = 2, \quad R = 2 + P,$$

oder:

$$M = 1, \quad R = 2P + 1,$$

sodaß der Rang eine ungerade Zahl sein müßte. Wenn aber eine ima- [502 ginäre Developpable sich selbst konjugiertimaginär ist, so muß ihr Rang eine grade Zahl sein. Die Annahme $M(R - M) = 2P$ führt somit auf Widerspruch.

32. Wir müssen daher:

$$2M(R - M) = 2P$$

setzen. Also kommt:

$$M(R - M) = P,$$

woraus bekanntlich folgt, daß:

$$M = 1, \quad R = P + 1$$

ist. Und es ist leicht, wie ich in meiner vorigen Abhandlung zeigte, die allgemeinste Minimalkurve, die der Annahme $M = 1$, $R = P + 1$ entspricht, anzugeben.

Die in dieser Weise gefundenen Flächen erfüllen die gestellten Forderungen, wenn sie nicht zufälligerweise Doppelflächen sind; in welchem Falle ihre Klasse gleich P, und nicht gleich $2P$ wäre. Meine früher gegebenen Regeln erlauben, für jeden Wert von P unter den gefundenen Flächen alle Doppelflächen auszuscheiden. Dies gibt:

Ist die Klasse einer reellen Minimalfläche gleich $2P$, wo P eine Primzahl bezeichnet, so ist:

$$2P = 2M(R - M)$$

und infolgedessen $M = 1$, $R = P + 1$. Die der Annahme $M = 1$, $R = P + 1$ entsprechenden Flächen, die sämtlich bestimmt werden können, besitzen die Klassenzahl $2P$, wenn sie nicht zufälligerweise Doppelflächen sind. In jedem einzelnen Falle ist es möglich, alle Doppelflächen auszuscheiden.

Note 2. Bestimmung der Klasse einer Minimalfläche mit einer ebenen geodätischen Kurve.

33. Wir werden jetzt insbesondere Minimalflächen mit einer ebenen geodätischen Kurve E:

$$z = 0, \quad f(x, y) = 0$$

betrachten. Dabei setzen wir mit Henneberg voraus, daß E die Evolute einer reellen algebraischen Kurve C:

$$z = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

ist. Sei o_e und c_e die Ordnung und Klasse der Evolute; und sei ε die Zahl der parallelen Tangenten, die an die Kurve C gezogen werden können.

Wünscht man diejenige Minimalfläche, auf der E geodätische Kurve ist, zu bestimmen, so muß man die gleichzeitig um C und den Kugel- [503 kreis umgeschriebene Developpable konstruieren. Die zugehörige Rückkehrkurve ist ähnlich und gleichgestellt mit den auf der gesuchten Fläche gelegenen Minimalkurven.

34. Dabei sind zwei Fälle denkbar, jenachdem diese Rückkehrkurve in Teile zerfällt oder nicht. Ist sie irreduktibel, so ist die gesuchte Fläche eine Doppelfläche und also ihre Klasse gleich:

$$M(R - M);$$

dabei ist R im allgemeinen gleich $2c_e$ (siehe den Schluß dieser Note), während M immer gleich ε ist.

Man ziehe in der Tat die Tangente des Kugelkreises in einem Punkte π. Diese Tangente trifft die Ebene $z = 0$ im Punkte p. Durch p gehen ε Tangenten der Kurve C, deren Berührungspunkte q im endlichen Raume liegen. Die ε Geraden $\overline{\pi q}$ sind die durch π gehenden Tangenten der früher besprochenen Rückkehrkurve. Also ist wirklich $M = \varepsilon$. Unter der gemachten Voraussetzung ist daher die Klasse der Minimalfläche gleich:

$$\varepsilon(2c_e - \varepsilon).$$

35. Wir wollen jetzt voraussetzen, daß die Rückkehrkurve in zwei Teile zerfällt. Alsdann ist im allgemeinen:

$$R = c_e$$

und jedenfalls:

$$M = \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Also wird die Klasse der Fläche in diesem Falle gleich:

$$2M(R - M) = \varepsilon(c_e - \tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Wünscht man, die Ordnung der Fläche zu bestimmen, so ist es nützlich, zu bemerken, daß die Ordnung der gesamten Rückkehrkurve gleich $2o_e$ ist. Im übrigen kann ich auf die betreffenden Entwickelungen meiner ersten Arbeit über Minimalflächen verweisen.

Die früher benutzten Formeln $R = 2c_e$ und $R = c_e$ sind, wie man leicht verifiziert, richtig, wenn die Kurve C nicht durch die Kreispunkte der Ebene $z = 0$ hindurchgeht. Auch wenn C diese spezielle Lage hat, können jene Formeln richtig bleiben. Es hat keine Schwierigkeit, diese Ausnahmefälle zu erledigen.

Note 3. Minimalflächen, die unendlich oft mit sich selbst ähnlich sind.

36. Es ist bekannt, daß die Minimalfläche, auf der ein vorgelegter Kreis geodätische Kurve oder Krümmungslinie ist, selbst eine Rotationsfläche ist. Dies läßt sich a priori daraus schließen, daß der Inbegriff aller Flächenelemente, die den Kreis berühren und dabei die Ebene dieses Kreises unter konstantem Winkel schneiden, dieselbe Rotation wie [504 der Kreis gestattet.

Man nehme andererseits eine Schraubenlinie und ∞^1 Flächenelemente, die diese Kurve berühren und welche dabei mit der entsprechenden Oskulationsebene [einen] konstanten Winkel bilden. Der Inbegriff dieser Flächenelemente gestattet dieselbe Schraubenbewegung wie die Kurve. Daher ist die Minimalfläche, die durch diese Elemente bestimmt wird, selbst eine Schraubenfläche.

37. Diese Schlußweise führt indes weiter. Man nehme in der Tat eine logarithmische Spirale $r = Ae^{mv}$ und ∞^1 Flächenelemente, die diese Kurve berühren und welche dabei die Ebene derselben unter konstantem Winkel schneiden. Der Inbegriff dieser Elemente gestattet dieselben ∞^1 Ähnlichkeitstransformationen wie die Kurve. Daher ist die Minimalfläche, die eine logarithmische Spirale als geodätische Kurve oder als Krümmungslinie enthält, unendlich oft mit sich selbst ähnlich.

Führt man auf diese Fläche eine Biegung aus, so erhält man nach meinen früheren Entwickelungen Minimalflächen, die sich auch folgendermaßen definieren lassen:

Man nehme einen Zylinder, dessen orthogonaler Querschnitt eine logarithmische Spirale ist, und lege durch eine beliebige geodätische Kurve desselben eine Minimalfläche, die den Zylinder unter konstantem Winkel schneidet. Alle in dieser Weise erhaltenen Minimalflächen sind unendlich oft mit sich selbst ähnlich. Und es gibt auch keine anderen Minimalflächen, die diese Eigenschaft besitzen. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß man die Grenzfälle mitnimmt.

Man erhält die in Rede stehenden Flächen, wenn man der Weierstraßischen Funktion $F(s)$ die Form:

$$F(s) = (C_1 + C_2 i) s^{m_1 + m_2 i}$$

erteilt.

38. Die hiermit angedeutete Theorie subsumiert sich unter eine viel allgemeinere Theorie.

Sei in der Tat das Bogenelement einer beliebigen Fläche durch die Gleichung:

$$ds^2 = e^w dy\,dx$$

gegeben. Alsdann werden die geodätischen Kurven dieser Fläche bestimmt durch:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dw}{dx}\frac{dy}{dx} - \frac{dw}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Ich verlange, daß diese Differentialgleichung eine infinitesimale Transformation gestatten soll. Anders ausgesprochen, es soll möglich sein, jedem Punkte der Fläche eine solche benachbarte Lage zu geben, daß vermöge dieser Verschiebung jede geodätische Kurve in eine ebensolche Kurve übergeführt wird. Diese Forderung wird zum Beispiel erfüllt von jeder Rotations- oder Schraubenfläche, wie auch von jeder auf eine solche Fläche abwickelbaren Fläche, zugleich aber von jeder Fläche, die unendlich [505 oft mit sich selbst ähnlich ist, wie auch von allen auf eine solche Fläche abwickelbaren Flächen. Es gibt aber noch weitere hierher gehörige Flächenfamilien, wie ich in einer Arbeit über diesen Gegenstand nachgewiesen habe.[1])

39. Hier beschränke ich mich auf das Folgende. Ich suche die allgemeinste reelle Minimalfläche, die in unendlich viele mit ihr ähnliche[2]) Flächen gebogen werden kann. Eine solche Fläche gestattet unendlich viele Transformationen in sich selbst, und zwar sind diese Umformungen konforme Transformationen, bei denen geodätische Kurven in ebensolche Kurven übergehen. Seien r und r' die Krümmungsradien in einem Punkte der Fläche; und seien R und R' die Krümmungsradien desjenigen Punktes, in den der gewählte Punkt durch eine solche Transformation übergeführt wird. Alsdann ist:

$$RR' = K^2 rr' \qquad (K = \text{Const.}),$$

$$R + R' = r + r' = 0,$$

woraus:

$$R = Kr, \quad R' = Kr'.$$

Hieraus folgt, daß das sphärische Bild der transformierten Figur mit dem sphärischen Bilde der ursprünglichen Figur kongruent ist.

1) Klassifikation der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Kurven, Universitätsprogramm 1879, Christiania [d. Ausg. Bd. I, Abh. XXIV].

2) Ersetzt man das Wort „ähnlich“ durch „kongruent“, so reduziert sich unser Problem auf ein von Bour erledigtes Problem, welches Schwarz neuerdings in seinen Miszellen, Crelle, Bd. 80, in neuer Weise behandelt hat.

Definiert man nun, wie Weierstraß, das Bogenelement durch die Gleichung:

$$dS^2 = (1 + s\sigma)^2 F'''(s)\, \Phi'''(\sigma)\, ds\, d\sigma$$

und setzt dabei:

$$s = x + yi, \quad F'''(s) = X + iY,$$

so erkennt man ohne Schwierigkeit, daß man:

$$X^2 + Y^2 = \Psi(x^2 + y^2) e^{m \operatorname{arc\,tg} (y:x)}$$

setzen kann. Diese Funktionalgleichung genügt zur Bestimmung von X und Y.

40. Setzt man in der Tat:

$$\log (X^2 + Y^2) = W = f(x^2 + y^2) + m \operatorname{arc\,tg} (y:x),$$

so ist:

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{d^2 W}{dy^2} = 0,$$

woraus:

$$f' + (x^2 + y^2) f'' = 0$$

und:

$$f = n \log (x^2 + y^2) + \text{Const.}$$

und endlich: [506

$$X^2 + Y^2 = A(x^2 + y^2)^n e^{m \operatorname{arc\,tg} (y:x)}.$$

Setzt man andererseits $Y : X = \Phi$, so kommt:

$$2 \frac{d\Phi}{dx} = -(1 + \Phi^2) \frac{dW}{dy},$$

$$2 \frac{d\Phi}{dy} = \quad (1 + \Phi^2) \frac{dW}{dx},$$

oder:

$$2 \frac{d}{dx} (\operatorname{arc\,tg} \Phi) = \frac{-2ny - mx}{x^2 + y^2},$$

$$2 \frac{d}{dy} (\operatorname{arc\,tg} \Phi) = \frac{2nx - my}{x^2 + y^2},$$

woraus:

$$2 \operatorname{arc\,tg} \Phi = 2n \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} m \log (x^2 + y^2) + \text{Const.}$$

Nun ist:

$$X + iY = \sqrt{X^2 + Y^2}\, e^{i \operatorname{arc\,tg} \Phi};$$

also kommt:

$$X + iY = (C_1 + C_2 i)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2} n - \frac{1}{4} m i} e^{\left(\frac{1}{2} m + n i\right) \operatorname{arc\,tg} (y:x)},$$

oder:

$$X + iY = (C_1 + C_2 i)(x + iy)^{n - \frac{1}{2} m i},$$

sodaß wir nur die im Anfange dieser Note betrachteten Flächen wiederfinden.[1])

Christiania, 20. Juni 1879.

IIIa.
Selbstanzeigen von III.

1. Repertorium Bd. II, S. 410—411. Berlin 1879. [Die Selbstanzeige, die früher als die Abhandlung erschienen ist, bezieht sich zugleich auf Abh. XXI, XXII und XXIII von Bd. I d. Ausg.]

Enthält eine Minimalfläche eine ebene Krümmungslinie[2]), so ist [411 die Fläche algebraisch, wenn die Kurve die Evolute einer ebenen algebraischen Kurve ist, und nur in diesem Falle. Berührt eine Minimalfläche eine Zylinderfläche nach einer nicht ebenen geodätischen Kurve, so ist die Fläche nur dann algebraisch, wenn die Kurve selbst algebraisch ist. Die Minimalfläche, die die Evolute (Polarfläche) einer algebraischen Raumkurve C nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt, ist algebraisch. Eine solche Fläche ist zugleich eingeschrieben in die Evoluten der Fokalkurven von C. Zu jeder algebraischen Minimalfläche gehören jedenfalls ∞^4 algebraische Raumkurven, deren Evoluten um die Fläche umgeschrieben sind. Insbesondere gibt es ∞^3 Evoluten, die [sie] nach dem Orte der Krümmungsmittelpunkte berührt.

Die Tangentenkegel einer Minimalfläche berühren dieselbe nach ∞^3 Kurven. Diesen Kurven entsprechen auf der Bonnetschen Biegungsfläche diejenigen ∞^3 Kurven, nach denen die letzte Fläche die soeben besprochenen Evoluten algebraischer Raumkurven berührt. Jeder algebraische Kegel ist umschrieben um ∞^∞ algebraische Minimalflächen, die durch eine gemeinsame elegante Konstruktion bestimmt werden.

Nimmt man unter den Tangentenebenen einer algebraischen Minimalfläche nach einem arbiträren algebraischen Gesetze einfach unendlich viele, so ist die hervorgehende Developpable immer um ∞^∞ algebraische Minimalflächen umgeschrieben. Dieselben werden durch eine elegante Konstruktion bestimmt. Die Evolute einer algebraischen Raumkurve ist somit um ∞^∞ algebraische Minimalflächen umgeschrieben.

Die allgemeinste Minimalfläche, die auf ∞^1 mit ihr ähnliche Flächen abgewickelt werden kann, wird erhalten, wenn man die Weierstraßische Funktion $F(s)$ gleich:

$$(C_1 + C_2 i) s^{m_1 + m_2 i}$$

1) Es ist leicht, zugleich alle imaginären Minimalflächen, die die gestellte Forderung erfüllen, zu bestimmen.

2) Setzt man hier statt „Krümmungslinie“ insbesondere „geodätische Kurve“, so erhält man einen von Henneberg herrührenden Satz.

setzt. Ist insbesondere $m_2 = 0$, so erhält man bekanntlich die auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen.

2. Bull. Bd. XIV (II. Ser., Bd. III), Abt. 2, S. 189—190. Paris, November 1879. [Die Selbstanzeige, die früher erschienen ist als die Abhandlung, bezieht sich zugleich auf Abh. XXI, XXII und XXIII von Bd. I d. Ausg.]

M. Henneberg a fait voire qu'une surface minimum qui a une ligne géodésique plane ne peut être algébrique que si cette ligne est la développée d'une courbe algébrique plane. Ce théorème subsiste encore si l'on considère une ligne de courbure au lieu d'une ligne géodésique. Si une surface minimum est tangente à une surface cylindrique suivant une ligne géodésique non plane, la surface sera toujours algébrique si la ligne géodésique elle-même est algébrique. La surface minimum qui est tangente à la surface développée (surface polaire) d'une courbe gauche algébrique, suivant le lieu des centres de courbure, est algébrique. Une telle surface est en même temps inscrite dans les surfaces polaires de toutes les courbes focales de la courbe gauche donnée. A toute surface minimum algébrique correspondent, dans tous les cas, ∞^4 courbes gauches algébriques dans les surfaces polaires desquelles la surface est inscrite. En particulier, il existe ∞^3 surfaces polaires qui lui sont tangentes suivant le lieu des centres de courbure.

Les cônes tangents à une surface minimum algébrique la touchent suivant ∞^3 courbes algébriques.

A ces courbes correspondent, sur la surface de flexion de Bonnet, les ∞^3 courbes suivant lesquelles cette surface touche les surfaces polaires dont nous venons de parler. Tout cône algébrique est tangent à ∞^∞ sur- [190
faces minima algébriques, que l'on peut déterminer par une même construction élégante.

Si parmi les plans tangents à une surface minimum algébrique on en choisit, suivant une loi algébrique arbitraire, un nombre simplement infini, on obtiendra toujours une développable algébrique, dans laquelle on pourra inscrire ∞^∞ surfaces minima algébriques, qui seront susceptibles d'une construction élégante. Dans la surface polaire d'une courbe gauche algébrique, il est toujours possible d'inscrire ∞^∞ surfaces minima algébriques.

La surface minimum la plus générale qui puisse être appliquée sur ∞^1 surfaces semblables à elles s'obtiendra en posant

$$F(s) = (C_1 + C_2 i)\, s^{m_1 + m_2 i}.$$

Si l'on a, en particulier, $m_2 = 0$, on obtiendra, comme on sait, les surfaces minima applicables sur les surfaces de révolution. S. L.

IV.

Untersuchungen über geodätische Kurven. [357

Ann. Bd. XX, Heft 3, S. 357—454. Ausgegeben 31. 8. 1882.

In der nachstehenden Abhandlung behandle ich ein allgemeines Problem, das sich auf die geodätischen Kurven der Flächen bezieht. Dasselbe steht in einem gewissen Zusammenhange mit einigen schönen Untersuchungen von Beltrami (Annali di matematica Serie I, t. VII) und von Dini (Annali di matematica, Serie II, t. III), welche ich zunächst besprechen werde.

Beltrami machte zuerst darauf aufmerksam, daß sich die geodätischen Kurven einer Fläche konstanter Krümmung immer darstellen lassen durch eine solche Gleichung zwischen den krummlinigen (Gaußischen) Koordinaten x, y und den beiden arbiträren Konstanten a und b, die linear hinsichtlich a und b ist und somit die Form:

$$a X(x, y) + b Y(x, y) - 1 = 0$$

besitzt. Interpretiert man die Größen X, Y als Cartesische Punktkoordinaten in einer Ebene, so erhält man eine Abbildung der Fläche auf die Ebene, bei der jeder Punkt x, y der Fläche dem Punkte X, Y der Ebene zugeordnet ist, und bei der die geodätischen Kurven der Fläche den geraden Linien der Ebene entsprechen.

Beltrami fand ferner, daß die Flächen konstanter Krümmung die einzigen sind, die sich in dieser Weise auf eine Ebene abbilden lassen. Indem er nun bemerkte, daß die geraden Linien der Ebene gleichzeitig geodätische Kurven derselben sind, wurde er dazu geführt, das folgende allgemeine Problem zu stellen:

Man soll in allgemeinster Weise zwei zusammengehörige Flächen finden, die nicht auf einander abwickelbar sind und welche sich nichtsdestoweniger derart auf einander abbilden lassen, daß jedem Punkte der einen Fläche ein Punkt oder einige Punkte der zweiten zugeordnet sind, und dabei den geodätischen Kurven der ersten Fläche ebensolche Kurven der zweiten Fläche entsprechen.

Eben dieses anscheinend sehr schwierige Problem behandelt nun *Dini* in der eben zitierten ausgezeichneten Abhandlung und findet dabei den Satz, daß die Bogenelemente der beiden zusammengehörigen Flächen [358 die analogen Formen:

$$ds_1^2 = \{\psi_1(x+y) + \Psi_1(x-y)\}\, dx\,dy,$$

$$ds_2^2 = \{\psi_2(x+y) + \Psi_2(x-y)\}\, dx\,dy$$

besitzen müssen; ψ_1 und Ψ_1 sind hier arbiträre Funktionen ihrer Argumente, während ψ_2 und Ψ_2 durch einfache Rechnungen bestimmt werden.

Bei dem Beweise dieses Satzes setzt *Dini*, wenn ich nicht irre, voraus, sowohl, daß die betreffenden Flächen reell sind, wie auch, daß die Abbildung durch reelle Gleichungen zwischen den Cartesischen Punktkoordinaten der Flächen vermittelt wird. Läßt man alle derartigen Beschränkungen hinsichtlich der Realität fallen, so findet man noch weitere Resultate, wie ich in einer Note am Schlusse dieser Abhandlung (Note 1) zeigen werde.

Indem ich mich jetzt zur Formulierung der Hauptprobleme dieser Arbeit wende, schicke ich die Bemerkung voraus, daß ich die Operation, bei der jeder Punkt einer Fläche in einen infinitesimal benachbarten Punkt derselben übergeführt wird, *eine infinitesimale Verschiebung der Fläche in sich* nennen werde. Es ist einleuchtend, daß eine jede Fläche unbegrenzt viele infinitesimale Verschiebungen in sich gestattet. Dabei ist klar, daß eine solche *Verschiebung im allgemeinen mit einer Dehnung verbunden* sein wird. Nach einem von *Bour* herrührenden Satze sind die auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen die einzigen, die eine infinitesimale Verschiebung in sich ohne Dehnung gestatten.

Ich suche zuerst *die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche, die derart in sich infinitesimal verschoben werden kann, daß dabei jede geodätische Kurve der Fläche in eine benachbarte geodätische Kurve derselben Fläche übergeführt wird.*

Jede Rotationsfläche, oder Schraubenfläche, wie überhaupt jede auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche erfüllt diese Forderung, und zwar ist in diesem Falle die betreffende Verschiebung von keiner Dehnung begleitet. Ebenso wird unsere Forderung erfüllt von jeder Fläche, die unendlich oft mit sich selbst ähnlich ist, wie auch von jeder auf eine solche Fläche abwickelbaren; dabei ist indes die Verschiebung der Fläche in sich von einer Dehnung begleitet. Es gibt, zeige ich, noch weitere Flächenfamilien, die unsere Forderung erfüllen und welche wahrscheinlich zuerst von mir bemerkt worden sind.

Ich bestimme sodann *das Bogenelement einer jeden Fläche, die mehrere infinitesimale Verschiebungen in sich gestattet, bei denen geodätische Kurven in ebensolche Kurven übergehen.* Unter den wichtigen Flächenfamilien, die ich in dieser Weise finde, verdient möglicherweise eine ganz besonders hervorgehoben zu werden: sie wird gebildet von den Zentraflächen aller Flächen, deren Haupt- [359 krümmungshalbmesser in konstantem Verhältnisse stehen.

Ich erhalte in dieser Weise eine rationelle Klassifikation aller Flächen, die eine infinitesimale Verschiebung in sich gestatten, bei der geodätische Kurven in ebensolche Kurven übergehen. Diese Klassifikation ist, wenn ich nicht irre, gänzlich verschieden von der von *Christoffel* (Abhandlungen der k. Akademie d. W. zu Berlin, 1868) gegebenen Einteilung der Flächen, welche ebenfalls auf das Verhalten der geodätischen Kurven begründet ist. In *Christoffels* schönen und umfassenden Untersuchungen spielen metrische Betrachtungen eine wesentlichere Rolle als bei mir. Meine Klassifikation scheint insofern zweckmäßiger als die *Christoffels*, als es mir größtenteils gelungen ist, die Form des Bogenelementes derjenigen Flächen anzugeben, welche meinen verschiedenen Klassen und Unterklassen angehören.[1])

Um den Zusammenhang zwischen dem von *Dini* und dem von mir behandelten Probleme möglichst klar hervortreten zu lassen, sage ich mit *Dini*, daß zwei Flächen geodätisch auf einander abgebildet sind, wenn sie derart auf einander bezogen sind, daß jedem Punkte der einen Fläche ein Punkt der zweiten zugeordnet ist, und dabei den geodätischen Kurven der ersten Fläche ebensolche Kurven auf der zweiten Fläche entsprechen. In dieser Terminologie deckt sich das von *Beltrami* gestellte und von *Dini* behandelte Problem mit der allgemeinsten Bestimmung je zweier Flächen, die sich auf einander geodätisch abbilden lassen. Demgegenüber besteht das von mir im folgenden behandelte Problem in der *Bestimmung einer jeden Fläche, die unendlich oft auf sich selbst geodätisch abgebildet werden kann.*

Am Schlusse der folgenden Abhandlung habe ich einige Noten hinzugefügt.

In der ersten Note vervollständige ich *Dinis* soeben besprochene Untersuchungen, indem ich das Bogenelement aller imaginären wie reellen

1) v. *Mangoldt* und *Weingarten* zeigten neuerdings, daß von den Christoffelschen Klassen nur die allgemeine und diejenige, welche den Flächen konstanter Krümmung entspricht, existieren. Siehe Berichte der Freiburger Gesellschaft, beziehungsweise der Berliner Akademie von 1882. (Juni 1882.)

Flächen bestimme, welche eine durch imaginäre oder reelle Gleichungen vermittelte geodätische Abbildung auf eine andere Fläche gestatten.

In der zweiten Note entwickele ich einige Sätze über die durch Differentiation auszuführende Bestimmung der geodätischen Kurven[1]) auf Flächen, welche den von mir aufgestellten Flächenklassen angehören.

In der dritten Note bestimme ich alle möglichen Gleichungsformen der geodätischen Kurven für eine jede Fläche, die eine infinitesimale Verschiebung in sich von der früher besprochenen Art gestattet. [360

In der vierten Note behandle ich die Frage nach der Form des Bogenelementes:

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2$$

einer jeden Fläche, deren geodätische Kurven durch eine Gleichung von gegebener Form:

$$\Omega(u, v, a, b) = 0$$

bestimmt werden. Ich zeige, daß diese Frage im allgemeinen durch Differentiation, und jedenfalls durch Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen erledigt werden kann.

Endlich in der fünften Note bestimme ich alle Minimalflächen, die eine infinitesimale Verschiebung der besprochenen Art in sich gestatten. Außer den von Bour entdeckten Minimalflächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind, finde ich nur die von mir bei einer früheren Gelegenheit besprochenen Minimalflächen, die unendlich oft mit sich selbst ähnlich sind.

Die in der nachstehenden Abhandlung entwickelten Theorien stehen in genauem Zusammenhange mit meinen Untersuchungen über Transformationsgruppen (Math. Ann. Bd. XVI [d. Ausg. Bd. VI, Abh. I]), die ich indes bei der Redaktion dieser Arbeit nicht als bekannt vorausgesetzt habe. Nur in meiner dritten Note habe ich es für zweckmäßig erachtet, mich auf die soeben zitierte Arbeit zu beziehen.[2])

1) Diese Sätze stehen, wie ich später zeige, im Zusammenhange mit Jacobis und Liouvilles berühmten Untersuchungen über geodätische Kurven.

2) In der Abhandlung: „Klassifikation der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Kurven", die im Anfange des Jahres 1879 in Christiania als Universitätsprogramm erschien [d. Ausg. Bd. I, Abh. XXIV], habe ich schon verwandte Untersuchungen über geodätische Kurven veröffentlicht. Der Unterschied zwischen jener und meiner jetzigen Arbeit liegt einerseits darin, daß letztere mehrere neue Resultate enthält, indem unter anderm die erste, dritte, vierte und fünfte Note neu sind, dann aber darin, daß meine neue Arbeit einen wesentlich elementareren Charakter besitzt, insofern ich eine selbständige und einfache Begründung einiger Hilfssätze gebe, die ich in meinem Universitätsprogramme aus meiner Theorie der Transformationsgruppen entnommen hatte.

Der Zweck dieser Abhandlung ist einerseits, die Theorie der geodätischen Kurven zu fördern, andererseits an einem einfachen und wichtigen Beispiele eine allgemeine Untersuchungsmethode zu entwickeln, die sicher mit Erfolg auf viele Klassen von Differentialgleichungen angewandt werden kann. Wenn ich im übrigen die zugrundeliegenden Ideen in meiner Darstellung nicht stärker hervortreten lasse, so ist die Ursache nur die, daß ich das Verständnis meiner Arbeit nicht zu erschweren wagte.

§ 1. Über Differentialgleichungen, die infinitesimale Transformationen gestatten. [361

1. Die Operation, bei der das Größensystem x, y in das infinitesimal benachbarte System:

$$x + \delta x = x + \xi(x,y)\delta t, \quad y + \delta y = y + \eta(x,y)\delta t$$

übergeführt wird, nenne ich eine infinitesimale Transformation der Größen x, y, und als Symbol derselben benutze ich die Gleichungen:

$$\delta x = \xi(x,y)\delta t, \quad \delta y = \eta(x,y)\delta t.$$

Betrachten wir x und y als Gaußische Koordinaten der Punkte einer Fläche, so besteht die infinitesimale Transformation, wie wir sagen können, in einer infinitesimalen Verschiebung der Fläche in sich, bei der alle Punkte x, y die infinitesimalen Strecken δx, δy durchlaufen. Jede auf der Fläche gelegene Kurve erhält eine neue Lage, indem sie in eine benachbarte Kurve derselben Fläche übergeht, und hierbei wird im allgemeinen die Bogenlänge der betreffenden Kurve geändert. Die infinitesimale Verschiebung der Fläche in sich ist daher im allgemeinen mit einer Dehnung verbunden.

Bei dem ersten Lesen der folgenden Entwickelungen dieses Paragraphen ist es möglicherweise zweckmäßig, die Größen x und y als Cartesische Koordinaten eines Punktes in einer Ebene aufzufassen; unsere Betrachtungen bleiben indes noch gültig, wenn wir die allgemeinere geometrische Interpretation anwenden und x, y überhaupt als Gaußische Koordinaten der Punkte einer beliebigen Fläche betrachten.

Zwei einander im Punkte x, y berührende Kurven gehen bei der infinitesimalen Transformation:

$$\delta x = \xi(x,y)\delta t, \quad \delta y = \eta(x,y)\delta t$$

in zwei benachbarte Kurven über, die einander ebenfalls berühren. Bei der Transformation geht daher jedes Linienelement x, y, y', wo:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

gesetzt ist, in ein benachbartes Linienelement: $x + \delta x,\ y + \delta y,\ y' + \delta y'$ über. Wir müssen das Inkrement $\delta y'$ berechnen.

Es ist:

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,\frac{\delta\,dy}{\delta t} - dy\,\frac{\delta\,dx}{\delta t}}{dx^2},$$

woraus durch Vertauschung der Symbole δ und d:

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dx\,.\,d\frac{\delta y}{\delta t} - dy\,.\,d\frac{\delta x}{\delta t}}{dx^2} = \frac{dx\,.\,d\eta - dy\,.\,d\xi}{dx^2}$$

und durch Ausführung: [362

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{d\eta}{dx} + y'\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - y'^2\frac{d\xi}{dy} = \zeta. \tag{1}$$

2. Wir wollen jetzt eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = \psi(x, y)$$

mit ihren einfach unendlich vielen Integralkurven betrachten. Diese Gleichung gestattet, sagen wir, die infinitesimale Transformation:

$$\delta x = \xi(x, y)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(x, y)\,\delta t,$$

wenn jede Integralkurve durch die Transformation in eine infinitesimal benachbarte Integralkurve übergeführt wird.

Hierzu ist notwendig und hinreichend[1]), daß jedes Wertsystem x, y, y', das die Gleichung $y' = \psi(x, y)$ erfüllt, durch die infinitesimale Transformation in ein benachbartes Wertsystem $x + \delta x,\ y + \delta y,\ y' + \delta y'$ übergeführt wird, das ebenfalls die Gleichung $y' = \psi$ befriedigt, daß also die Gleichung:

$$y' + \delta y' = \psi(x + \delta x, y + \delta y)$$

durch die Substitution:

$$\delta x = \xi\,\delta t, \quad \delta y = \eta\,\delta t, \quad \delta y' = \zeta\,\delta t$$

und durch Benutzung der Relation:

$$y' = \psi(x, y)$$

in eine Identität umgewandelt wird. Unser Verlangen führt somit auf die Bedingungsgleichung:

$$\frac{d\eta}{dx} + \psi\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - \psi^2\frac{d\xi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}\xi + \frac{d\psi}{dy}\eta, \tag{2}$$

sodaß wir den folgenden Satz aussprechen können:

1) Eingehender behandelte ich diese Theorie in den Mathem. Annalen Bd. XI, S. 487 ff. [1877. Diese Ausgabe Bd. IV, Abh. III, S. 187 ff.]

Satz 1. Soll die Differentialgleichung $y' = \psi(x, y)$ die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\,\delta t,\ \delta y = \eta\,\delta t$ gestatten, so ist hierzu notwendig und hinreichend, daß die Relation (2) identisch stattfindet.

Um der soeben gefundenen Bedingungsgleichung eine elegantere und zweckmäßigere Form zu geben, setzen wir:

$$\frac{df}{dx} + \psi\frac{df}{dy} = A(f),$$

$$\xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy} = B(f)$$

und ersetzen sodann unsere Gleichung durch Einführung einer Hilfsgröße $\lambda(x, y)$ durch die vereinigten Gleichungen:

$$\frac{d\xi}{dx} + \psi\frac{d\xi}{dy} = A(\xi) = \lambda,$$

$$\frac{d\eta}{dx} + \psi\frac{d\eta}{dy} - \xi\frac{d\psi}{dx} - \eta\frac{d\psi}{dy} = A(\eta) - B(\psi) = \lambda\,.\,\psi,$$ [363

die sich wiederum in die einzige Relation:

$$A\big(B(f)\big) - B\big(A(f)\big) = \lambda\,A(f)$$

zusammenziehen lassen. Dies gibt:

Satz 2. Soll die Differentialgleichung $y' = \psi(x, y)$ die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\,\delta t,\ \delta y = \eta\,\delta t$ gestatten, so ist, wenn wir:

$$\frac{df}{dx} + \psi\frac{df}{dy} = A(f), \quad \xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy} = B(f)$$

setzen, notwendig und hinreichend, daß eine Bedingungsgleichung von der Form:

$$A\big(B(f)\big) - B\big(A(f)\big) = \lambda(x, y)\,A(f)$$

stattfindet.

3. Führen wir nunmehr die infinitesimale Transformation:

$$\delta x = \xi(x, y)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(x, y)\,\delta t$$

auf beliebig viele Kurven aus, die drei konsekutive Punkte gemein haben, so erhalten wir benachbarte Kurven, die ebenfalls drei konsekutive Punkte gemein haben. Bei unserer infinitesimalen Transformation erhält daher die Größe:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

einen infinitesimalen Zuwachs $\delta y''$, der nur von x, y, y', y'' und δt abhängt. Wir werden $\delta y''$ berechnen.

Es ist:

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\,\frac{d y'}{d x} = \frac{d x \dfrac{\delta}{\delta t} d y' - d y' \dfrac{\delta}{\delta t} d x}{d x^2},$$

oder durch Vertauschung der Symbole d und δ:

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = \frac{d x \,.\, d\,\dfrac{\delta y'}{\delta t} - d y' \,.\, d\,\dfrac{\delta x}{\delta t}}{d x^2} = \frac{d x \,.\, d\zeta - d y' \,.\, d\xi}{d x^2};$$

und durch Ausführung, indem man sich erinnert, daß die Größe $\zeta = \delta y' : \delta t$ eine Funktion von x, y, y' ist, während ξ und η nur von x und y abhängen:

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = \left(\frac{d\eta}{d y} - 2\frac{d\xi}{d x} - 3 y' \frac{d\xi}{d y}\right) y'' + \frac{d\zeta}{d y} y' + \frac{d\zeta}{d x} = \vartheta.$$

Ich will jetzt eine beliebige Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = \psi(x, y, y')$$

mit ihren zweifach unendlich vielen Integralkurven betrachten. *Wir sagen, daß diese Differentialgleichung die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ gestattet, wenn jede Integralkurve durch die Transformation in eine benachbarte* [364 *Integralkurve, oder auch in sich selbst übergeführt wird.*

Hierzu ist erforderlich und hinreichend, daß jedes Wertsystem x, y, y', y'', das die Gleichung $y'' = \psi(x, y, y')$ erfüllt, durch die infinitesimale Transformation in ein benachbartes Wertsystem $x + \delta x, \ldots, y'' + \delta y''$ übergeführt wird, das ebenfalls die Gleichung $y'' = \psi$ befriedigt, daß also die Gleichung:

$$y'' + \delta y'' = \psi(x + \delta x, y + \delta y, y' + \delta y')$$

durch die sukzessive Ausführung der beiden Substitutionen:

$$\delta x = \xi\delta t, \quad \delta y = \eta\delta t, \quad \delta y' = \zeta\delta t, \quad \delta y'' = \vartheta\delta t$$

und:

$$y'' = \psi(x, y, y')$$

in eine Identität umgewandelt wird. Unser Verlangen führt somit auf die Relation:

$$\left(\frac{d\eta}{d y} - 2\frac{d\xi}{d x} - 3 y' \frac{d\xi}{d y}\right)\psi + \frac{d\zeta}{d y} y' + \frac{d\zeta}{d x} = \frac{d\psi}{d x}\xi + \frac{d\psi}{d y}\eta + \frac{d\psi}{d y'}\zeta, \tag{3}$$

sodaß wir den folgenden Satz aufstellen können:

Satz 3. *Soll eine Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \psi(x, y, y')$ die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ gestatten, so ist erforderlich und hinreichend, daß die Bedingungsgleichung (3) identisch stattfindet.*

Setzen wir:

$$\frac{d f}{d x} + y' \frac{d f}{d y} + \psi \frac{d f}{d y'} = A'(f),$$

$$\xi\frac{d f}{d x} + \eta\frac{d f}{d y} + \zeta\frac{d f}{d y'} = B'(f),$$

so kann Gleichung (3), wie jetzt gezeigt werden soll, auf die einfache Form:

$$A'\big(B'(f)\big) - B'\big(A'(f)\big) = \lambda(x, y, y') A'f,$$

wo λ eine geeignete Funktion von x, y, y' bezeichnet, gebracht werden.

Die letzte Gleichung zerlegt sich nämlich in die drei folgenden:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\xi}{d x} + y' \frac{d\xi}{d y} = \lambda, \\ &\frac{d\eta}{d x} + y' \frac{d\eta}{d y} - \zeta = \lambda y', \\ &\frac{d\zeta}{d x} + y' \frac{d\zeta}{d y} + \psi \frac{d\zeta}{d y'} - \xi\frac{d\psi}{d x} - \eta\frac{d\psi}{d y} - \zeta\frac{d\psi}{d y'} = \lambda\psi, \end{aligned}\right. \tag{3'}$$

unter denen die erste die Größe λ bestimmt, die zweite durch Substitution der Werte von λ (und ζ) in eine Identität übergeht, und endlich die dritte sich durch dieselbe Substitution in die Bedingungsgleichung (3) verwandelt. Unser Satz 3 kann somit folgendermaßen ausgesprochen werden:

Satz 4. *Soll die Differentialgleichung $y'' = \psi(x, y, y')$* [365 *die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ gestatten, so ist, wenn wir:*

$$\frac{d f}{d x} + y' \frac{d f}{d y} + \psi \frac{d f}{d y'} = A'(f),$$

$$\xi\frac{d f}{d x} + \eta\frac{d f}{d y} + \zeta\frac{d f}{d y'} = B'(f)$$

setzen, erforderlich und hinreichend, daß eine Relation von der Form:

$$A'\big(B'(f)\big) - B'\big(A'(f)\big) = \lambda(x, y, y') A'f$$

identisch stattfindet.

Anstatt zu sagen, daß eine Differentialgleichung $y'' = \psi(x, y, y')$ eine gewisse infinitesimale Transformation gestattet, ist es, wie ich beiläufig bemerke, zuweilen zweckmäßiger zu sagen, *daß die Integralkurven jene Transformation gestatten.*

Zu bemerken ist noch, daß r infinitesimale Transformationen:

$$\delta x = \xi_1 \delta t,\ \delta y = \eta_1 \delta t;\ \ldots;\ \delta x = \xi_r \delta t,\ \delta y = \eta_r \delta t$$

als unabhängig aufzufassen sind, wenn es unmöglich ist, r solche [nicht sämtlich verschwindende] Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_r$ aufzufinden, daß die beiden Relationen:

$$c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_r \xi_r = 0,$$

$$c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2 + \cdots + c_r \eta_r = 0$$

gleichzeitig identisch bestehen.

Erster Abschnitt.

Formulierung zweier allgemeiner Probleme und Zerlegung derselben.

4. Die geodätischen Kurven einer beliebigen Fläche sind die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = \psi(x, y, y')$$

zwischen den Gaußischen Punktkoordinaten x, y der Fläche. Eine infinitesimale Verschiebung der Fläche in sich findet in der eingeführten Terminologie ihren analytischen Ausdruck in einer infinitesimalen Transformation $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$ der Größen x und y. Wird nun bei einer solchen infinitesimalen Verschiebung einer Fläche in sich jede geodätische Kurve in eine benachbarte geodätische Kurve derselben Fläche übergeführt, so heißt dies in der eingeführten Terminologie, daß die Differentialgleichung $y'' = \psi$ der geodätischen Kurven die betreffende infinitesimale Transformation gestattet, oder anders ausgesprochen, daß die geodätischen Kurven unserer Fläche jene Transformation gestatten.

Die Aufgabe, die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche [366
zu finden, die eine infinitesimale Verschiebung in sich zuläßt, bei der jede geodätische Kurve der Fläche in eine ebensolche Kurve übergeht, läßt sich hiernach auch folgendermaßen formulieren:

Problem I. Es wird verlangt, die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.

Dieses Problem zerlegt sich, wie wir am Schlusse dieses Paragraphen zeigen, naturgemäß in drei Unterprobleme. Denken wir uns das Bogenelement der gesuchten Fläche, wie bekanntlich erlaubt, auf die Form:

$$ds^2 = \Phi(x, y)\, dx\, dy$$

gebracht, so werden die betreffenden Unterprobleme charakterisiert durch die hinzutretende Forderung, daß unter den Größen:

$$\frac{d\xi}{dy} \quad \text{und:} \quad \frac{d\eta}{dx}$$

keine, eine oder beide verschwinden sollen.

Die Bemerkung, daß es Flächen gibt, zum Beispiel die Flächen konstanter Krümmung, die mehrere infinitesimale Verschiebungen in sich gestatten, bei denen geodätische Kurven in ebensolche Kurven übergehen, führt uns zur Aufstellung des folgenden allgemeinen Problems:

Problem II. Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.

Auch dieses Problem zerlegt sich naturgemäß in eine Reihe von Unterproblemen, die wir sukzessiv in den Paragraphen 5—8 behandeln werden.

5. Indem wir jetzt das Problem I angreifen, müssen wir zunächst nach Gauß die Differentialgleichung der geodätischen Kurven einer Fläche aufstellen. Dabei ist es zweckmäßig, nach Liouvilles[1]) Vorgange, das Bogenelement der betreffenden Fläche auf die Form:

$$ds = \sqrt{F(x,y)\, dy\, dx} = \sqrt{F \cdot y'} \cdot dx$$

gebracht zu denken. Dann sind die geodätischen Kurven bekanntlich bestimmt durch die Gleichung:

$$\delta \int \sqrt{F \cdot y'} \cdot dx = 0,$$

oder durch die äquivalente Differentialgleichung:

$$\frac{d(\sqrt{F}\sqrt{y'})}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{d(\sqrt{F}\sqrt{y'})}{dy'} = 0,$$

die durch Ausführung die Form:

$$y'' = \frac{d \log F}{dx} y' - \frac{d \log F}{dy} y'^2$$ [367

annimmt.

Um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen, setzen wir:

$$\log F = w,$$

und also wird:

$$ds = e^{\frac{1}{2} w} \sqrt{y'} \cdot dx$$

1) Siehe Liouvilles Ausgabe von Monges: Application de l'analyse à la géométrie, Paris 1850, S. 571.

unsere Form des Bogenelements, und:

$$y'' = \frac{dw}{dx}y' - \frac{dw}{dy}y'^2$$

die entsprechende Form der Differentialgleichung der geodätischen Kurven.

6. Sollen daher die geodätischen Kurven einer Fläche, deren Bogenelement durch die Gleichung:

$$ds^2 = e^w\,dx\,dy$$

bestimmt wird, die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi(x, y)\,\delta t$, $\delta y = \eta(x, y)\,\delta t$ gestatten, so ist, wenn wir wie früher in Gleichung (1)

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{d\eta}{dx} + y'\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - y'^2\frac{d\xi}{dy} = \zeta$$

und:

$$y'' = \frac{dw}{dx}y' - \frac{dw}{dy}y'^2 = \psi$$

setzen, hierzu erforderlich und hinreichend (Satz 3), daß die Bedingungsgleichung:

$$\left(\frac{d\eta}{dy} - 2\frac{d\xi}{dx} - 3y'\frac{d\xi}{dy}\right)\psi + \frac{d\zeta}{dy}y' + \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\psi}{dx}\xi + \frac{d\psi}{dy}\eta + \frac{d\psi}{dy'}\zeta,$$

oder die äquivalente:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d^2\eta}{dx^2} &+ y'\left(2\frac{d^2\eta}{dx\,dy} - \frac{d^2\xi}{dx^2}\right) + y'^2\left(\frac{d^2\eta}{dy^2} - 2\frac{d^2\xi}{dx\,dy}\right) - y'^3\frac{d^2\xi}{dy^2} + \\ &+ \left(\frac{d\eta}{dy} - 2\frac{d\xi}{dx} - 3y'\frac{d\xi}{dy}\right)\left(y'\frac{dw}{dx} - y'^2\frac{dw}{dy}\right) - \xi\left(y'\frac{d^2w}{dx^2} - y'^2\frac{d^2w}{dx\,dy}\right) - \\ &- \eta\left(y'\frac{d^2w}{dx\,dy} - y'^2\frac{d^2w}{dy^2}\right) - \left(\frac{d\eta}{dx} + y'\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - y'^2\frac{d\xi}{dy}\right)\left(\frac{dw}{dx} - 2y'\frac{dw}{dy}\right) \end{aligned}$$

identisch stattfindet.

Da ξ, η und w nur von x und y abhängen, zerlegt sich die letzte Gleichung in die vier folgenden:

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dx} &= 0, \\ -\frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d\xi}{dy}\frac{dw}{dy} &= 0, \\ 2\frac{d^2\eta}{dx\,dy} - \frac{d^2\xi}{dx^2} - \xi\frac{d^2w}{dx^2} - \eta\frac{d^2w}{dx\,dy} + 2\frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\frac{dw}{dx} &= 0, \\ -2\frac{d^2\xi}{dx\,dy} + \frac{d^2\eta}{dy^2} + \xi\frac{d^2w}{dx\,dy} + \eta\frac{d^2w}{dy^2} - 2\frac{d\xi}{dy}\frac{dw}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\frac{dw}{dy} &= 0, \end{aligned} \right.$$

mit deren allgemeiner Integration wir uns jetzt beschäftigen werden.

Die Behandlungsweise dieser vier Relationen wird eine wesentlich verschiedene, jenachdem die beiden Größen: [368

$$\frac{d\xi}{dy} \quad \text{und:} \quad \frac{d\eta}{dx}$$

verschwinden oder von Null verschieden sind.

Im nächsten Paragraphen erledigen wir den anscheinend speziellen Fall, der sich jedoch als der allgemeinste Fall ergibt, daß:

$$\frac{d\xi}{dy} = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} = 0$$

ist. Da $x = \text{Const.}$ und $y = \text{Const.}$ die beiden Integralgleichungen von $ds^2 = 0$ sind, so kann dieser Fall dadurch charakterisiert werden, daß die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ eine konforme ist.

In § 3 erledigen wir sodann den Fall, daß die eine der beiden Größen $d\xi : dy$, $d\eta : dx$ gleich Null, die andere von Null verschieden ist.

Und endlich in § 4 setzen wir voraus, daß diese Größen beide von Null verschieden sind.

Sollen die geodätischen Kurven einer Fläche mehrere, etwa r, infinitesimale Transformationen:

$$\delta x = \xi_i\delta t, \quad \delta y = \eta_i\delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

gestatten, so muß die Zahl r, wie wir später zeigen, gleich 2, 3 oder 8 sein. Dabei kann eine Reihe von Unterfällen eintreten, jenachdem die $2r$ Größen:

$$\frac{d\xi_i}{dy} \quad \text{und:} \quad \frac{d\eta_i}{dx}$$

gleich Null oder teilweise von Null verschieden sind. Wir geben später eine rationelle und einfache Methode zur erschöpfenden Bestimmung aller möglichen Fälle.

§ 2. Flächen, deren geodätische Kurven eine konforme infinitesimale Transformation gestatten.

7. Bei der allgemeinen Integration der Gleichungen (4) erledigen wir zuerst und zwar in diesem Paragraphen den interessanten Fall, daß:

$$\frac{d\xi}{dy} = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} = 0$$

ist, und daß infolgedessen die infinitesimale Transformation der geodätischen Kurven unserer Fläche eine konforme ist.

In diesem Falle sind die beiden ersten Gleichungen des Systems (4) an sich identisch erfüllt, während die beiden letzten in die folgenden [369 übergehen:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \xi\frac{d^2w}{dx^2} + \eta\frac{d^2w}{dx\,dy} + \frac{dw}{dx}\frac{d\xi}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dy^2} + \xi\frac{d^2w}{dx\,dy} + \eta\frac{d^2w}{dy^2} + \frac{dw}{dy}\frac{d\eta}{dy} = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\xi}{dx} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{d\eta}{dy} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy}\right) = 0,$$

und somit kommt durch Integration:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} + \xi\dfrac{dw}{dx} + \eta\dfrac{dw}{dy} = \varphi(y), \\ \dfrac{d\eta}{dy} + \xi\dfrac{dw}{dx} + \eta\dfrac{dw}{dy} = f(x), \end{cases}$$

und durch Subtraktion:

$$\frac{d\xi}{dx} + f(x) = \frac{d\eta}{dy} + \varphi(y) = B = \text{Const.},$$

sodaß sich die Gleichungen (5) durch die einzige Gleichung:

$$(6)\qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} = B$$

ersetzen lassen.

Hier können wiederum verschiedene Fälle eintreten, da ξ und η entweder gleich Null oder von Null verschieden sein werden.

Ist sowohl ξ wie η von Null verschieden, so führen wir statt x und y zwei Funktionen dieser Größen: $x'(x)$ und $y'(y)$ als unabhängige Variable ein. Alsdann wird:

$$\frac{\delta x'}{\delta t} = \frac{dx'}{dx}\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx'}{dx}\xi = \xi',$$

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dy'}{dy}\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{dy'}{dy}\eta = \eta';$$

setzt man daher:

$$dx' = \frac{dx}{\xi}, \quad dy' = \frac{dy}{\eta},$$

so wird $\xi' = 1$ und ebenso $\eta' = 1$. In den Gleichungen (5) und (6) können wir daher ohne wesentliche Beschränkung:

$$\xi = 1, \quad \eta = 1$$

annehmen. Dies gibt:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dy} = \varphi(y) = f(x) = a = \text{Const.}$$

und:

$$(7)\qquad w = \varrho(x-y) + ax, \quad e^w = e^{ax}\Phi(x-y),$$ [370

womit der Fall, daß ξ, η beide von Null verschieden sind, erledigt ist.

Da ξ und η nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, weil sonst unsere infinitesimale Transformation alle Punkte der Fläche invariant ließe, so ist nur noch der Fall zu behandeln, daß die eine der Größen ξ und η verschwindet, während die andere von Null verschieden ist. Sei zum Beispiel:

$$\xi = 0, \quad \eta \gtrless 0.$$

Alsdann können wir immer durch Einführung einer zweckmäßigen Funktion von y als neuem y erreichen, daß $\eta = 1$ wird. In diesem Falle geben die Gleichungen (5):

$$\frac{dw}{dy} = \varphi(y) = f(x) = a$$

und:

$$w = ay + X(x), \quad e^w = Y(y)\,X_1(x),$$

sodaß die entsprechende Fläche, deren Bogenelement die Form:

$$ds^2 = Y(y)\,X_1(x)\,dy\,dx$$

besitzt, developpabel sein muß und somit ein spezieller Fall der durch (7) bestimmten Flächen ist.

Wir erhalten somit den Satz:

Satz 5. Sollen die geodätischen Kurven einer Fläche eine konforme infinitesimale Transformation gestatten, so ist es erforderlich und hinreichend, daß ihr Bogenelement die Form:

$$ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dy\,dx,$$

wo a eine beliebige Konstante, Φ eine arbiträre Funktion von $x - y$ bezeichnet, erhalten kann.

8. Die Gleichung (6) ist einer eleganten geometrischen Interpretation fähig, wie jetzt gezeigt werden soll.

Wir führen unsere infinitesimale Transformation auf die Gleichung:

$$ds^2 = e^w\,dx\,dy$$

aus, indem wir die Relation:

$$\frac{\delta}{\delta t}(ds^2) = \frac{\delta}{\delta t}(e^w\,dx\,dy)$$

bilden. Nun aber ist:

$$\frac{\delta}{\delta t}(dx\,dy) = d\frac{\delta x}{\delta t}dy + d\frac{\delta y}{\delta t}dx = d\xi\,dy + d\eta\,dx,$$

und also kommt:

$$\frac{\delta}{\delta t}(ds^2) = e^w dx\,dy\left(\frac{dw}{dx}\xi + \frac{dw}{dy}\eta + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right),$$

oder (6): [371

$$\frac{\delta}{\delta t}ds^2 = B\,ds^2,$$

oder endlich:

(8) $$\frac{\delta}{\delta t}(ds) = \tfrac{1}{2}B\,ds,$$

was sich folgendermaßen aussprechen läßt:

Satz 6. Gestatten die geodätischen Kurven einer Fläche eine konforme infinitesimale Transformation, so werden die Bogenlängen aller auf der Fläche gelegenen Kurven bei dieser Transformation nach konstantem Verhältnisse geändert.[1])

Wir wollen jetzt:

$$B = 0$$

setzen, was darauf hinauskommt, daß unsere Fläche eine Verschiebung in sich ohne Dehnung gestatten soll, und überdies, indem wir von den developpablen Flächen absehen, die Variablen x und y derart wählen, daß $\xi = 1$, $\eta = 1$ wird. Alsdann ist (7):

$$e^w = e^{ax}\Phi(x-y)$$

und (6):

$$0 = B = \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dy} = a,$$

---

1) Der im Texte aufgestellte Satz läßt sich leicht als Korollar aus einem von Dini angegebenen Satze (Ann. di Matem. Serie II, Bd. 3, S. 276) herleiten. Derselbe wird folgendermaßen synthetisch erwiesen, und gleichzeitig auf n Dimensionen erweitert. Durch unsere infinitesimale Transformation werden alle durch einen Punkt gehenden geodätischen Kurven in eine ebensolche Kurvenschar übergeführt. Und da die Transformation konform sein soll, so geht jeder geodätische Kreis, der die vorgelegte Kurvenschar orthogonal schneidet, in einen geodätischen Kreis über. Hiermit ist unsere Behauptung erwiesen, und man erkennt nicht allein, daß sich unser Satz auf n Dimensionen erweitert, sondern zugleich, daß dies der Fall bleibt, wenn man das Wort „infinitesimale" wegläßt.

Kann daher eine Fläche eines n-fach ausgedehnten Raumes derart auf sich selbst (oder auf eine andere Fläche dieses Raumes) abgebildet werden, daß geodätische Kurven in ebensolche Kurven übergehen, und ist dabei diese Abbildung konform, so werden alle Bogenlängen nach **konstantem** Verhältnisse geändert.

sodaß unser Bogenelement die für alle auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen charakteristische Form:

$$ds^2 = \Phi(x-y)\,dx\,dy$$

besitzen muß. Dies gibt den folgenden Satz (siehe Bours Abhandlung im Journal de l'École pol. t. XXII, S. 79):

Satz 7. Sollen die geodätischen Kurven einer Fläche eine infinitesimale Transformation gestatten, die von keiner Dehnung begleitet ist, so muß die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar sein.[1])

9. In früheren Arbeiten (zum Beispiel Math. Ann. Bd. V, S. 204, [372
1872 [hier Abh. I, S. 65]) beschäftigte ich mich gelegentlich mit Flächen, die in unendlich vielen Weisen mit sich selbst ähnlich sind. Diese Flächen lassen sich auch dadurch charakterisieren, daß sie eine infinitesimale Transformation gestatten, die gleichzeitig linear und konform ist. Ich fand, daß nicht allein die Haupttangentenkurven[2]), sondern auch die Krümmungslinien derselben durch Quadratur bestimmt werden können. Ich zeigte ferner, daß die Bestimmung der geodätischen Kurven dieser Flächen nur die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung verlangt.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß die geodätischen Kurven einer jeden Fläche, die auf eine Fläche der besprochenen Art abwickelbar ist, eine konforme infinitesimale Transformation gestatten. Daher besitzt ihr Bogenelement die Form:

$$ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dx\,dy.$$

Andererseits ist auch nicht schwer, zu erkennen, daß jede Fläche, deren Bogenelement diese Form besitzt, auf eine andere abwickelbar ist, die in unendlich vielen Weisen mit sich selbst ähnlich ist. Diesen letzten Satz gab zuerst Herr M. Lévy in einer interessanten Note in den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 18. November 1878.[3])

---

1) Kann eine Fläche ohne Dehnung in sich verschoben werden, so ist sie abwickelbar auf eine Rotationsfläche. Aus diesem längst bekannten Satze folgt der Satz des Textes natürlich unmittelbar als Korollar.

2) Vergleiche hierzu Kleins und meine gemeinsame Abhandlung im vierten Bande, S. 84 dieser Zeitschrift [1871, d. Ausg. Bd. I, Abh. XIV, S. 265].

3) In einer anderen Note in den Comptes Rendus (t. LXXXVI, S. 463—466) lehrt Herr Lévy entscheiden, ob eine quadratische Form von n Differentialen dx_i, deren Koeffizienten Funktionen der Variablen x_i sind, durch Transformation in eine andere solche Form übergehen kann, deren Koeffizienten nur noch $n-k$ Variable enthalten. Sein hierauf bezüglicher Satz hängt genau zusammen mit einem allgemeinen Theoreme über permutable infinitesimale Transformationen in meiner

§ 3. Die zweite Flächenklasse, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.

Wir bestimmen jetzt die Form des Bogenelementes:

$$ds^2 = e^w \, dx \, dy$$

einer jeden Fläche, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$\delta x = \xi(x) \, \delta t, \quad \delta y = \eta(x, y) \, \delta t$$

gestatten, wobei wir ausdrücklich festsetzen, daß $d\eta : dx$ von Null verschieden sein soll. Durch Einführung einer zweckmäßigen Funktion $x'(x)$ als neuen x und einer zweckmäßigen Größe $y'(y)$ als neuen y erreichen [373 wir, daß die unbekannte Funktion e^w keine arbiträre Funktion, sondern nur gewisse arbiträre Konstanten enthält.

10. Die Bedingungsgleichungen (4) reduzieren sich unter den gemachten Voraussetzungen auf die drei Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\eta}{dx^2} - \dfrac{dw}{dx}\dfrac{d\eta}{dx} = 0, \\[2ex] 2\dfrac{d^2\eta}{dx\,dy} - \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - \xi\dfrac{d^2w}{dx^2} - \eta\dfrac{d^2w}{dx\,dy} + 2\dfrac{dw}{dy}\dfrac{d\eta}{dx} - \dfrac{dw}{dx}\dfrac{d\xi}{dx} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dy^2} + \xi\dfrac{d^2w}{dx\,dy} + \eta\dfrac{d^2w}{dy^2} + \dfrac{dw}{dy}\dfrac{d\eta}{dy} = 0. \end{cases}$$

Die erste gibt durch Integration:

$$(10) \quad Y(y)\frac{d\eta}{dx} = e^w,$$

wo Y eine von Null verschiedene Funktion von y bezeichnet. Ebenso gibt die dritte Gleichung des Systems (9):

$$\frac{d\eta}{dy} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} = f(x),$$

wo $f(x)$ eine gewisse Funktion von x bezeichnet.

Um die zweite zu integrieren, bringen wir sie auf die Form:

$$\frac{d}{dx}\left\{2\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy}\right\} + 3\frac{dw}{dy}\frac{d\eta}{dx} = 0.$$

Theorie der Transformationsgruppen. Das betreffende Theorem deutete ich 1872 in den Verh. d. Gesellschaft d. W. zu Christiania an [d. Ausg. Bd III, Abh. I, S. 2, Anm.].

Nun aber gibt Gleichung (10):

$$Y'\frac{d\eta}{dx} + Y\frac{d^2\eta}{dx\,dy} = e^w\frac{dw}{dy} = Y\frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dy}.$$

Also kommt:

$$\frac{d}{dx}\left\{5\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy} + 3\frac{Y'}{Y}\eta\right\} = 0,$$

und durch Integration:

$$(11) \quad 5\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy} + 3\frac{Y'}{Y}\eta = \varphi(y),$$

wo φ von x unabhängig ist.

Es ist möglich, eine solche Größe $y'(y)$ als neues y einzuführen, daß Y gleich 1 wird. Es ist in der Tat:

$$e^w = e^{w'}\frac{dy'}{dy},$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \eta = \frac{dy}{dy'}\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dy}{dy'}\eta',$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{dy}{dy'}\frac{d\eta'}{dx},$$

und also kommt (10):

$$Y\frac{dy}{dy'}\frac{d\eta'}{dx} = e^{w'}\frac{dy'}{dy},$$ [374

oder:

$$Y\left(\frac{dy}{dy'}\right)^2\frac{d\eta'}{dx} = e^{w'}.$$

Bestimmen wir daher y' durch Integration der Gleichung:

$$(12) \quad dy' = \sqrt{Y(y)} \, . \, dy,$$

so kommt:

$$\frac{d\eta'}{dx} = e^{w'}.$$

Hieraus folgt ohne weitere Rechnung, daß man in den Gleichungen (10) und (11) ohne wesentliche Beschränkung $Y = 1$ setzen kann. Also wird die gesuchte Flächenklasse bestimmt durch die drei Gleichungen:

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{d\eta}{dx} = e^w, \\[2ex] \dfrac{d\eta}{dy} + \xi\dfrac{dw}{dx} + \eta\dfrac{dw}{dy} = f(x), \\[2ex] 5\dfrac{d\eta}{dy} - \dfrac{d\xi}{dx} - \xi\dfrac{dw}{dx} - \eta\dfrac{dw}{dy} = \varphi(y) = \pi'(y), \end{cases}$$

die wir noch einmal integrieren werden.

11. Durch Addition der beiden letzten Gleichungen kommt:

$$6\frac{d\eta}{dy} = f(x) + \frac{d\xi}{dx} + \pi'(y), \tag{14}$$

und durch Integration, indem wir ξ' statt $d\xi : dx$ schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} 6\eta &= (f + \xi')y + \pi(y) + \mathbf{F}(x), \\ 6e^{w} &= (f' + \xi'')y + \mathbf{F}'(x). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Nun aber ist (13, 2):

$$\left(\frac{d\eta}{dy} - f\right)e^{w} + \xi\frac{d}{dx}e^{w} + \eta\frac{d}{dy}e^{w} = 0, \tag{16}$$

also kommt durch Einsetzung der Werte von η und e^{w}:

$$\begin{aligned}(-5f + \xi' + \pi')\,[(f' + \xi'')y + \mathbf{F}'] + 6\xi[(f'' + \xi''')y + \mathbf{F}''] + \\ + [(f + \xi')y + \pi + \mathbf{F}]\,(f' + \xi'') = 0,\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\pi'[(f' + \xi'')y + \mathbf{F}'] + \pi(f' + \xi'') + (\xi' - 5f)\,[(f' + \xi'')y + \mathbf{F}'] + \\ + 6\xi[(f'' + \xi''')y + \mathbf{F}''] + [(f + \xi')y + \mathbf{F}]\,(f' + \xi'') = 0,\end{aligned}$$

oder endlich:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\{\pi[(f' + \xi'')y + \mathbf{F}']\} + y[(2\xi' - 4f)\,(f' + \xi'') + 6\xi(f'' + \xi''')] + \\ + \mathbf{F}'(\xi' - 5f) + 6\xi\mathbf{F}'' + \mathbf{F}(f' + \xi'') = 0,\end{aligned}$$

woraus durch Integration eine Gleichung von der Form: [375

$$\pi[(f' + \xi'')y + \mathbf{F}'] = y^2\Phi_2(x) + y\,\Phi_1(x) + \Phi_0(x)$$

hervorgeht. Hieraus folgt, daß $\pi(y)$ jedenfalls die Form:

$$\pi(y) = c_1 y + c_2 + \frac{c(x)}{(f' + \xi'')y + \mathbf{F}'}$$

besitzt. Dabei sind c_1 und c_2 Konstanten, während $c(x)$ entweder gleich Null ist, oder zwei Relationen von der Form:

$$\frac{f' + \xi''}{c(x)} = \text{Const.} = L, \quad \frac{\mathbf{F}'}{c(x)} = M$$

erfüllt. Die Annahme, daß $c(x)$ von Null verschieden ist, gibt somit (15):

$$6e^{w} = c(x)(Ly + M),$$

was nur developpable Flächen liefert. Daher können wir, indem wir von den developpablen Flächen absehen:

$$\left\{\begin{aligned} \pi(y) &= c_1 y + c_2, \\ 6\eta &= y(f + \xi' + c_1) + \mathbf{F}(x) + c_2, \\ 6e^{w} &= y(f' + \xi'') + \mathbf{F}' \end{aligned}\right. \tag{17}$$

setzen, und dabei annehmen, daß:

$$f' + \xi'' \gtrless 0$$

ist. Überdies können wir durch Einführung einer zweckmäßigen Funktion von x als neuen x immer erreichen, daß:

$$f + \xi' + c_1 = x, \quad f' + \xi'' = 1, \quad \pi(y) = c_1 y + c_2,$$
$$6e^{w} = y + \mathbf{F}'(x), \quad 6\eta = yx + \mathbf{F}(x)$$

wird.

Es handelt sich darum, die Funktion $\mathbf{F}(x)$ zu bestimmen. Durch Einführung der gefundenen Werte in (16) kommt die Gleichung:

$$(6\xi' - 5x + 6c_1)(y + \mathbf{F}') + 6\xi\mathbf{F}'' + xy + \mathbf{F} = 0,$$

die sich in die beiden:

$$6\xi' = 4x - 6c_1, \quad -x\mathbf{F}' + 6\xi\mathbf{F}'' + \mathbf{F} = 0$$

zerlegt. Also wird:

$$6\xi = 2x^2 - 6cx + \varkappa,$$

und $\mathbf{F}(x)$ wird bestimmt durch die lineare Differentialgleichung:

$$(2x^2 - 6cx + \varkappa)\mathbf{F}'' - x\mathbf{F}' + \mathbf{F} = 0, \tag{18}$$

die das partikuläre Integral $\mathbf{F} = x$ besitzt. Da es für uns wesentlich nur auf die Bestimmung von $\mathbf{F}'(x)$ ankommt, differentiieren wir die letzte Gleichung und bilden so die unmittelbar integrable Gleichung:

$$(2x^2 - 6cx + \varkappa)\mathbf{F}''' + (3x - 6c)\mathbf{F}'' = 0. \tag{19}$$

Wir resumieren die vorangehenden Entwickelungen in folgendem Satze:

Satz 8. *Sollen die geodätischen Kurven einer Fläche* [376 *eine infinitesimale Transformation von der Form:*

$$\delta x = \xi(x)\delta t, \quad \delta y = \eta(x, y)\delta t \quad \left(\frac{d\eta}{dx} \gtrless 0\right)$$

gestatten, so kann das Bogenelement der Fläche immer die Form:

$$ds^2 = [y + \mathbf{F}'(x)]\,dx\,dy$$

erhalten. Dabei wird $\mathbf{F}'$ *bestimmt durch die integrable Differentialgleichung:*

$$(2x^2 - 6cx + \varkappa)\mathbf{F}'' - x\mathbf{F}' + \mathbf{F} = 0. \tag{18}$$

Die entsprechenden Werte von ξ *und* η *sind:*

$$\xi = 2x^2 - 6cx + \varkappa, \quad \eta = xy + \mathbf{F}(x). \tag{20}$$

Die hiermit definierten Flächenfamilien enthalten größtenteils nur imaginäre Flächen. Beschränkt man sich auf reelle Flächen, so erhält man, wie wir später zeigen, nur eine hierher gehörige Flächenfamilie, deren Bogenelement die Form:

$$\left(y + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx\,dy,$$

oder die äquivalente Form:

$$(yx + 1)\,dx\,dy$$

besitzt.

§ 4. Über die dritte Klasse von Flächen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.

Jetzt suchen wir alle Flächen, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$\delta x = \xi\,\delta t, \quad \delta y = \eta\,\delta t, \quad \frac{d\xi}{dy} \gtrless 0, \quad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$$

gestatten. Ich zeige, daß man immer die Koordinaten x und y derart wählen kann, daß e^w die Liouvillesche Form:

$$e^w = \psi(x+y) + \Psi(x-y)$$

annimmt. Dabei sind die Größen ψ und Ψ, deren jede nur von einem Argumente abhängt, bestimmt durch gewöhnliche Differentialgleichungen, die ich allerdings nicht integriere, während es mir jedoch gelingt, eine Reihe bemerkenswerter Lösungen derselben aufzufinden.

12. Die Bedingungsgleichungen (4): [377

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\eta}{dx^2} - \dfrac{d\eta}{dx}\dfrac{dw}{dx} = 0, \\[2mm] \dfrac{d^2\xi}{dy^2} - \dfrac{d\xi}{dy}\dfrac{dw}{dy} = 0, \\[2mm] 2\dfrac{d^2\eta}{dx\,dy} - \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - \xi\dfrac{d^2w}{dx^2} - \eta\dfrac{d^2w}{dx\,dy} + 2\dfrac{d\eta}{dx}\dfrac{dw}{dy} - \dfrac{d\xi}{dx}\dfrac{dw}{dx} = 0, \\[2mm] 2\dfrac{d^2\xi}{dy\,dx} - \dfrac{d^2\eta}{dy^2} - \xi\dfrac{d^2w}{dx\,dy} - \eta\dfrac{d^2w}{dy^2} + 2\dfrac{d\xi}{dy}\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{d\eta}{dy}\dfrac{dw}{dy} = 0 \end{cases}$$

gestatten auch jetzt eine erste Integration. Die beiden ersten Gleichungen geben nämlich:

$$(21)\quad Y(y)\frac{d\eta}{dx} = e^w = X(x)\frac{d\xi}{dy},$$

wo X und Y, wie wir sogleich zeigen werden, ohne wesentliche Beschränkung gleich 1 gesetzt werden können.

Statt x und y führen wir neue unabhängige Variable $x'(x)$ und $y'(y)$ ein. Es ist:

$$\xi = \frac{dx}{dx'}\frac{\delta x'}{\delta t} = \frac{dx}{dx'}\xi',$$

$$\eta = \frac{dy}{dy'}\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dy}{dy'}\eta';$$

also kommt:

$$X\frac{d\xi}{dy} = X\frac{dx}{dx'}\frac{d\xi'}{dy'}\frac{dy'}{dy}, \quad Y\frac{d\eta}{dx} = Y\frac{dy}{dy'}\frac{d\eta'}{dx'}\frac{dx'}{dx},$$

$$e^w = e^{w'}\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dy},$$

und also nimmt Gleichung (21) die Form an:

$$X\frac{dx}{dx'}\frac{d\xi'}{dy'}\frac{dy'}{dy} = e^{w'}\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dy} = Y\frac{dy}{dy'}\frac{d\eta'}{dx'}\frac{dx'}{dx}.$$

Wählt man daher die Größen x' und y' derart, daß:

$$(21')\quad dx' = \sqrt{X}.dx, \quad dy' = \sqrt{Y}.dy,$$

so kommt:

$$\frac{d\xi'}{dy'} = e^{w'} = \frac{d\eta'}{dx'}.$$

Daher können wir in (21) ohne wesentliche Beschränkung $X = 1 = Y$ setzen, woraus:

$$(22)\quad \frac{d\eta}{dx} = e^w = \frac{d\xi}{dy},$$

und durch Differentiation:

$$\frac{d^2\eta}{dx\,dy} = e^w\frac{dw}{dy} = \frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dy}, \quad \frac{d^2\xi}{dx\,dy} = e^w\frac{dw}{dx} = \frac{d\xi}{dy}\frac{dw}{dx}.$$

Hierdurch erhalten die beiden letzten Bedingungsgleichungen (4) [378 die Form:

$$\frac{d}{dx}\left\{5\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy}\right\} = 0,$$

$$\frac{d}{dy}\left\{5\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy}\right\} = 0,$$

woraus durch Integration:

$$(23)\quad \begin{cases} 5\dfrac{d\eta}{dy} - \dfrac{d\xi}{dx} - \xi\dfrac{dw}{dx} - \eta\dfrac{dw}{dy} = \lambda(y), \\[2mm] 5\dfrac{d\xi}{dx} - \dfrac{d\eta}{dy} - \xi\dfrac{dw}{dx} - \eta\dfrac{dw}{dy} = f(x). \end{cases}$$

Die vereinigten Gleichungen (22) und (23) sind äquivalent mit den Gleichungen (4).

Die Gleichungen (22) zeigen, daß wir:

$$\xi = \frac{dU}{dx}, \quad \eta = \frac{dU}{dy}, \quad e^{w} = \frac{d^2 U}{dx\,dy} \tag{23'}$$

setzen können, und zwar ist hierdurch die Bestimmung unserer Flächenklasse zurückgeführt auf die Bestimmung der Funktion U.

Durch Subtraktion der Gleichungen (23) kommt:

$$6\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) = \lambda(y) - f(x),$$

oder:

$$6\left(\frac{d^2 U}{dy^2} - \frac{d^2 U}{dx^2}\right) = \lambda(y) - f(x).$$

Folglich besitzt U die Form:

$$U = \varphi(x+y) + \Phi(x-y) + X(x) + Y(y),$$

und dabei ist:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \varphi' + \Phi' + X', \\ \eta &= \varphi' - \Phi' + Y', \\ e^{w} &= \varphi''(x+y) - \Phi''(x-y). \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Wir haben somit nur noch die vier Funktionen φ, Φ, X und Y, deren jede nur von einem Argumente abhängt, zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke substituieren wir die Werte (24) in (23), wodurch kommt:

$$\left\{\begin{aligned} &4(\varphi'' + \Phi'') + 5Y'' - X'' - \\ &\qquad - \frac{(\varphi' + \Phi' + X')(\varphi''' - \Phi''') + (\varphi' - \Phi' + Y')(\varphi''' + \Phi''')}{\varphi'' - \Phi''} = \lambda(y), \\ &4(\varphi'' + \Phi'') + 5X'' - Y'' - \\ &\qquad - \frac{(\varphi' + \Phi' + X')(\varphi''' - \Phi''') + (\varphi' - \Phi' + Y')(\varphi''' + \Phi''')}{\varphi'' - \Phi''} = f(x), \end{aligned}\right. \tag{25}$$

woraus durch Subtraktion:

$$6Y'' - 6X'' = \lambda(y) - f(x)$$

und:

$$6Y'' = \lambda(y) + A, \quad 6X'' = f(x) + A, \tag{26}$$

wo A eine Konstante bezeichnet. Hierdurch reduzieren sich die beiden [379
Bedingungsgleichungen (25) auf die einzige Gleichung:

$$0 = A + 4(\varphi'' + \Phi'') - X'' - Y'' - \frac{2\varphi'\varphi''' - 2\Phi'\Phi''' + (X' + Y')\varphi''' - (X' - Y')\Phi'''}{\varphi'' - \Phi''}, \tag{27}$$

welche die vier Funktionen $\varphi(x+y)$, $\Phi(x-y)$, $X(x)$ und $Y(y)$ bestimmt.

Um diese Bedingungsgleichung in allgemeinster Weise zu befriedigen, hätte man nach der gewöhnlichen Regel (vergleiche Abels Werke, Bd. I, S. 1 der neuen Ausgabe) so viele neue Gleichungen durch Differentiation zu bilden, daß es gelänge, zwei unter den vier unbekannten Funktionen zu eliminieren. Erteilt man darnach dem Argumente der einen unter den beiden zurückgebliebenen Funktionen einen konstanten Wert, so hat man eine gewöhnliche Differentialgleichung mit einer unabhängigen und einer abhängigen Variablen. Diese Methode führt indes, wie es scheint, zu sehr komplizierten Differentialgleichungen. Ich habe mich daher darauf beschränken müssen, durch allerdings spezielle, aber rationelle Methoden, die ich später auseinandersetze, eine Reihe von Partikularlösungen, die ganz besonders interessant sind, zu bestimmen.

In der nächsten Nummer finde ich einige solche Partikularlösungen, indem ich $X'' = Y'' = \text{Const.}$ setze; am Schlusse dieser Abhandlung (Note 2) zeige ich, daß die dieser letzten Annahme entsprechende Flächenfamilie eine wohl begrenzte Unterabteilung meiner dritten Flächenklasse bildet.

In den Paragraphen 7 und 8 bestimme ich das Bogenelement aller Flächen, die nicht allein der dritten sondern gleichzeitig der zweiten oder der ersten Flächenklasse angehören.

13. Eine ziemlich allgemeine Lösung von (27) erhält man, indem man setzt:

$$X'' = Y'' = \alpha = \text{Const.},$$

oder:

$$X' = \alpha x, \quad Y' = \alpha y,$$

wobei wir die Integrationskonstanten ohne wesentliche Beschränkung weggelassen haben. Hierdurch erhält (27) die Form:

$$\begin{aligned} 0 = (A - 2\alpha)(\varphi'' - \Phi'') + 4(\varphi''^2 - \Phi''^2) - 2\varphi'\varphi''' + 2\Phi'\Phi''' - \\ - \alpha(x+y)\varphi''' + \alpha(x-y)\Phi''' \end{aligned}$$

und zerlegt sich daher in die beiden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} B + (A - 2\alpha)\varphi'' + 4\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi''' - \alpha(x+y)\varphi''' = 0, \\ B + (A - 2\alpha)\Phi'' + 4\Phi''^2 - 2\Phi'\Phi''' - \alpha(x-y)\Phi''' = 0, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

in denen B eine arbiträre Konstante bezeichnet.

Um diese Gleichungen, welche dieselbe Form besitzen, zu integrieren, setzen wir:

$$\varphi' + \tfrac{1}{2}\alpha(x+y) = \psi', \quad \Phi' + \tfrac{1}{2}\alpha(x-y) = \Psi',$$

woraus: [380

$$(29)\quad \begin{cases} B - \frac{1}{2}\alpha A + 2\alpha^2 + (A - 6\alpha)\psi'' + 4\psi''^2 - 2\psi'\psi''' = 0, \\ B - \frac{1}{2}\alpha A + 2\alpha^2 + (A - 6\alpha)\Psi'' + 4\Psi''^2 - 2\Psi'\Psi''' = 0. \end{cases}$$

Es handelt sich also darum, eine Gleichung von der Form:

$$L + M\psi'' + 4\psi''^2 - 2\psi'\psi''' = 0$$

zu integrieren.

Nach der gewöhnlichen Regel setzen wir $\psi' = z$, $\psi'' = u$ und betrachten u als eine unbekannte Funktion von z. Es ist $\psi''' = u(du:dz)$, und also kommt:

$$L + Mu + 4u^2 = 2zu\frac{du}{dz}$$

und:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2u\,du}{L + Mu + 4u^2} = \frac{u\,du}{2(u-\gamma)(u-\beta)},$$

woraus:

$$z^{2(\beta-\gamma)} = K(u-\gamma)^{-\gamma}(u-\beta)^{\beta},$$

oder:

$$\psi'^{2(\beta-\gamma)} = K(\psi''-\gamma)^{-\gamma}(\psi''-\beta)^{\beta},$$

oder endlich:

$$(30)\qquad \psi' = K_1(\psi''-\gamma)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-\beta)}}(\psi''-\beta)^{\frac{\beta}{2(\beta-\gamma)}} = f(\psi'').$$

Um diese Gleichung zu integrieren, differentiieren wir sie hinsichtlich $(x+y)$:

$$\psi'' = f'(\psi'')\frac{d\psi''}{d(x+y)}$$

und finden so die Integralgleichung:

$$x + y = \int\frac{f'(\psi'')}{\psi''}\,d\psi'',$$

welche die Größe ψ'' als Funktion von $x+y$ bestimmt. Gleichzeitig finden wir Ψ'' als Funktion von $x-y$, und hiernach kommt durch Subtraktion:

$$e^{w} = \varphi'' - \Phi'' = \psi'' - \Psi'',$$

womit die betreffende Flächenfamilie bestimmt ist.

Dabei ist zu bemerken, daß die Konstante α ohne wesentliche Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann, da die Differenz $\varphi'' - \Phi''$ ungeändert bleibt, wenn eine jede der Größen φ'' und Φ'' um eine Konstante vermehrt wird.

Setzt man zum Beispiel $L = 0$, $M = -4$, so erhält man die Flächenfamilie:

$$e^{w} = \frac{1}{\cos^2(x+y)} - \frac{1}{\cos^2(x-y)},$$

die wir später wiederfinden werden. Setzt man andererseits $M = 0$, das heißt $\beta = -\gamma$, so erhält man eine andere bemerkenswerte Flächen- [381
familie, deren Bogenelement von elliptischen Funktionen (lemniskatischen Funktionen) abhängt.

Zu bemerken ist, daß man eine beliebige Lösung ψ' von (29, 1) mit einer beliebigen Lösung Ψ' von (29, 2) verbinden kann. Insbesondere ist es erlaubt, $\Psi'' = K =$ Const. zu setzen, weil diese Annahme wirklich die letzte Gleichung (29) befriedigt. Die entsprechenden Flächen sind auf Rotationsflächen abwickelbar, deren geodätische Kurven [infolgedessen] zwei verschiedene infinitesimale Transformationen gestatten. Auf diese interessante Flächenfamilie kommen wir später wieder zurück.

Zweiter Abschnitt.

Flächen, deren geodätische Kurven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.

Wenn eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen x und y mehrere unabhängige infinitesimale Transformationen:

$$\delta x = \xi_1(x,y)\delta t_1,\ \delta y = \eta_1(x,y)\delta t_1;\ \ldots;\ \delta x = \xi_r\delta t_r,\ \delta y = \eta_r\delta t_r$$

gestattet, so bestehen zwischen den ξ_k und η_k gewisse Differentialrelationen, die wir jetzt entwickeln werden, indem wir uns dabei auf den für uns allein wichtigen Fall beschränken, daß die betreffende Differentialgleichung von der zweiten Ordnung ist. Dabei benutzen wir den Ausdruck:

$$(31)\qquad B_k f = \xi_k\frac{df}{dx} + \eta_k\frac{df}{dy}$$

als Symbol der infinitesimalen Transformation:

$$(32)\qquad \delta x = \xi_k\delta t,\quad \delta y = \eta_k\delta t.$$

Die Berechtigung dieser (von mir schon in einer Reihe von Abhandlungen angewandten) Ausdrucksweise beruht darauf, daß bei Einführung neuer Variabeln x' und y' einerseits die infinitesimale Transformation die Form:

$$\delta x' = B_k x'.\delta t,\quad \delta y' = B_k y'.\delta t$$

annimmt, andererseits der Ausdruck $B_k f$ die entsprechende Form:

$$B_k f = B_k x'\frac{df}{dx'} + B_k y'\frac{df}{dy'}$$

erhält, was wieder heißt, daß ξ_k und η_k in der Gleichung (31) in derselben Weise transformiert werden, wie in den Gleichungen (32).

Wir fügen die Bemerkung hinzu, daß r infinitesimale Transformationen $B_1 f$, $B_2 f$, ..., $B_r f$ nach unserer früher eingeführten Terminologie unabhängig sind, wenn keine lineare Relation von der Form:

$$c_1 B_1 f + c_2 B_2 f + \cdots + c_r B_r f = 0,$$

mit konstanten [nicht sämtlich verschwindenden] Koeffizienten identisch stattfindet.

14. Setzen wir: [382

$$L_1 f = \xi_1 \frac{df}{dx} + \eta_1 \frac{df}{dy} + \zeta_1 \frac{df}{dz},$$

$$L_2 f = \xi_2 \frac{df}{dx} + \eta_2 \frac{df}{dy} + \zeta_2 \frac{df}{dz},$$

$$L_3 f = \xi_3 \frac{df}{dx} + \eta_3 \frac{df}{dy} + \zeta_3 \frac{df}{dz}$$

und lassen dabei vorläufig die Größen ξ_k, η_k und ζ_k beliebige Funktionen der drei Variabeln x, y, z bezeichnen, setzen wir ferner wie gewöhnlich:

$$L_i(L_k(f)) - L_k(L_i(f)) = (L_i L_k),$$

so lehrt die sogenannte Jacobische Identität, daß die Gleichung:

$$((L_1 L_2) L_3) + ((L_2 L_3) L_1) + ((L_3 L_1) L_2) = 0$$

identisch stattfindet. Wir setzen dies Theorem, das in jedem nicht zu knappen Werke[1]) über partielle Differentialgleichungen 1. O. bewiesen wird, als bekannt voraus.

Vermöge dieses Satzes läßt sich nun zeigen, daß, wenn eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = \psi(x, y, y')$$

zwei vorgelegte infinitesimale Transformationen:

$$B_1 f = \xi_1(x, y) \frac{df}{dx} + \eta_1(x, y) \frac{df}{dy},$$

$$B_2 f = \xi_2(x, y) \frac{df}{dx} + \eta_2(x, y) \frac{df}{dy}$$

zuläßt, sich eine dritte, von ihnen unabhängige oder abhängige infinitesimale Transformation angeben läßt, welche von der Gleichung $y'' = \psi$ ebenfalls gestattet wird.

1) Vergleiche zum Beispiel Imschenetzkys verdienstvolles Werk: Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, traduit par J. Hoüel, Grunerts Archiv Bd. 50, Greifswald 1869, S. 326—328.

Um dies zu beweisen, setzen wir:

$$A' f = \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} + \psi \frac{df}{dy'},$$

$$B_1' f = \xi_1 \frac{df}{dx} + \eta_1 \frac{df}{dy} + \zeta_1 \frac{df}{dy'},$$

$$B_2' f = \xi_2 \frac{df}{dx} + \eta_2 \frac{df}{dy} + \zeta_2 \frac{df}{dy'},$$

wobei wir die Ausdrücke:

$$\frac{d\eta_i}{dx} + y' \left(\frac{d\eta_i}{dy} - \frac{d\xi_i}{dx}\right) - y'^2 \frac{d\xi_i}{dy} \qquad (i = 1, 2)$$

wie in Nummer 1 zur Abkürzung mit ζ_i bezeichnet haben. Sodann [383 bilden wir die Jacobische Identität:

$$((A' B_1') B_2') + ((B_1' B_2') A') + ((B_2' A') B_1') = 0. \tag{33}$$

Da die Gleichung $y'' = \psi$ die beiden infinitesimalen Transformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ gestatten soll, so bestehen (Satz 4) Relationen von der Form:

$$(A' B_1') = \lambda_1(x, y, y') A' f,$$

$$(A' B_2') = \lambda_2(x, y, y') A' f,$$

und also kommt durch Substitution dieser Werte in (33):

$$((B_1' B_2') A') = (B_2' \lambda_1 - B_1' \lambda_2) A'(f) = \lambda(x, y, y') A' f. \tag{34}$$

Nun aber ist:

$$(B_1' B_2') = (B_1 \xi_2 - B_2 \xi_1) \frac{df}{dx} + (B_1 \eta_2 - B_2 \eta_1) \frac{df}{dy} + (B_1' \zeta_2 - B_2' \zeta_1) \frac{df}{dy'}$$
$$= B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f)) + (B_1' \zeta_2 - B_2' \zeta_1) \frac{df}{dy'},$$

und dabei hängen die beiden Größen:

$$B_1 \xi_2 - B_2 \xi_1 \quad \text{und:} \quad B_1 \eta_2 - B_2 \eta_1$$

nur von x und y ab. Daher zeigt die Gleichung (34) nach dem Satze 4, daß die Differentialgleichung $y'' = \psi$ zugleich diejenige infinitesimale Transformation gestattet, deren Symbol ist:

$$B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f)) = (B_1 \xi_2 - B_2 \xi_1) \frac{df}{dx} + (B_1 \eta_2 - B_2 \eta_1) \frac{df}{dy}.$$

Wenden wir daher wiederum den abgekürzten Ausdruck $(B_1 B_2)$ an, so können wir den folgenden fundamentalen Satz aussprechen:

Satz 9. Gestattet die Differentialgleichung $y'' = \psi(x, y, y')$ die beiden infinitesimalen Transformationen $B_1 f$ und $B_2 f$, so gestattet sie auch diejenige Transformation, deren Symbol $(B_1 B_2)$ ist.[1])

Ist nun die neue infinitesimale Transformation $(B_1 B_2)$, die wir kurzweg mit $B_3 f$ bezeichnen, von $B_1 f$ und $B_2 f$ unabhängig, so sind $(B_1 B_3)$ und $(B_2 B_3)$ wiederum infinitesimale Transformationen, die möglicherweise von $B_1 f$, $B_2 f$ und $B_3 f$ unabhängig sind, und dabei jedenfalls die Gleichung $y'' = \psi$ in sich überführen. In dieser Weise kann man nun weitergehen. Gestattet $y'' = \psi$ nur eine begrenzte Anzahl[2]) unabhängiger infini- [384
tesimaler Transformationen, so muß man zuletzt zu einem Ausdrucke $(B_i B_k)$ kommen, der sich als Summe der früher gefundenen $B_k f$, multipliziert mit Konstanten ausdrückt. Wir können daher den folgenden Satz aufstellen:

Satz 10. Gestattet eine Differentialgleichung zweiter Ordnung r und nicht mehr unabhängige infinitesimale Transformationen $B_1 f, \ldots, B_r f$, so drückt sich jedes $(B_i B_k)$ aus als Summe der $B_k f$, multipliziert mit Konstanten; das heißt, es bestehen $\frac{1}{2} r(r-1)$ Relationen von der Form:

$$(B_i B_k) = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} B_s f.$$

15. Unter den r infinitesimalen Transformationen $B_k f$, welche eine vorgelegte Differentialgleichung $y'' = \psi$ gestattet, nehmen wir eine beliebige heraus, etwa $B_1 f$; alsdann ist es, behaupten wir, immer möglich, $r-1$ solche, nicht sämtlich verschwindende Konstanten $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$ zu wählen, daß die infinitesimale Transformation:

$$Bf = \lambda_2 B_2 f + \cdots + \lambda_r B_r f$$

1) In meiner Theorie der Transformationsgruppen beweise ich den allgemeineren Satz, daß eine Transformationsgruppe, welche die beiden infinitesimalen Transformationen $B_1 f$ und $B_2 f$ enthält, immer die durch ihre Zusammensetzung entstandene Transformation $(B_1 B_2)$ enthält. Hier kann ich mich auf den im Texte bewiesenen Spezialfall meines Satzes beschränken.

2) In meiner Theorie der Transformationsgruppen beweise ich, daß eine Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(\mu)}) = 0,$$

[bei der $\mu > 1$ ist], nie eine unbegrenzte Anzahl unabhängiger infinitesimaler Transformationen gestattet. Hieraus folgt dann insbesondere, daß die geodätischen Kurven einer Fläche nur eine begrenzte Anzahl [unabhängiger] infinitesimaler Transformationen gestatten können.

eine Relation von der Form:

$$(B_1 B) = \omega Bf + \omega_1 B_1 f \qquad (\omega_i = \text{Const.})$$

befriedigt.

Zum Beweise bilden wir die Gleichung:

$$(B_1 B) = \left(B_1, \sum_i^{2 \ldots r} \lambda_i B_i f\right) = \sum_i^{2 \ldots r} \lambda_i (B_1 B_i) = \sum_i^{2 \ldots r} \lambda_i \sum_s^{1 \ldots r} c_{1is} B_s f$$
$$= \sum_s^{1 \ldots r} B_s f \sum_i^{2 \ldots r} \lambda_i c_{1is},$$

welche zeigt, daß unsere Forderung durch die r Relationen:

$$\begin{gathered} c_{121} \lambda_2 + c_{131} \lambda_3 + \cdots + c_{1r1} \lambda_r = \omega_1, \\ c_{122} \lambda_2 + c_{132} \lambda_3 + \cdots + c_{1r2} \lambda_r = \omega \lambda_2, \\ c_{123} \lambda_2 + c_{133} \lambda_3 + \cdots + c_{1r3} \lambda_r = \omega \lambda_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{12r} \lambda_2 + c_{13r} \lambda_3 + \cdots + c_{1rr} \lambda_r = \omega \lambda_r \end{gathered}$$

ausgedrückt wird. Und da diese Gleichungen immer durch Werte der [385
λ_k befriedigt werden, die nicht sämtlich verschwinden, so können wir, wie oben behauptet wurde, den folgenden Satz aufstellen:

Satz 11. Stehen r unabhängige infinitesimale Transformationen $B_1 f, \ldots, B_r f$ paarweise in der Beziehung:

$$(B_i B_k) = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} B_s f,$$

so ist es, wenn wir eine beliebige unter diesen Transformationen, etwa $B_1 f$, wählen, immer möglich $r-1$ solche Konstanten $\lambda_2, \ldots, \lambda_r$ zu bestimmen, daß der Ausdruck:

$$Bf = \lambda_2 B_2 f + \cdots + \lambda_r B_r f$$

eine Relation von der Form:

$$(B_1 B) = \omega Bf + \omega_1 B_1 f$$

befriedigt, wo ω und ω_1 konstant sind.

Und als Korollar fließt hieraus der folgende Satz, der für die Entwickelungen dieses Abschnittes die Grundlage bildet.

Satz 12. Gestattet eine Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \psi(x, y, y')$ r unabhängige infinitesimale Transformationen $B_1 f, \ldots, B_r f$, so ist es immer möglich, einen Ausdruck:

$$Bf = \lambda_1 B_1 f + \cdots + \lambda_r B_r f$$

mit konstanten Koeffizienten λ_k zu bilden, der zum Beispiel zu $B_1 f$ in der durch die Gleichung:

$$(B_1 B) = \omega B(f) + \omega_1 B_1(f) \qquad (\omega_i = \text{Const.})$$

ausgedrückten Beziehung steht.

§ 5. Flächen, deren geodätische Kurven mehrere konforme infinitesimale Transformationen gestatten.

16. Gestatten die geodätischen Kurven einer Fläche, deren Bogenelement die Form:

$$ds^2 = e^w dx\, dy$$

besitzt, mehrere konforme infinitesimale Transformationen:

$$B_k f = \xi_k(x) \frac{df}{dx} + \eta_k(y) \frac{df}{dy},$$

so kann man nach dem Vorangehenden unter diesen immer zwei, etwa $B_1 f$ und $B_2 f$, wählen, die durch eine Gleichung von der Form:

$$B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f)) = \omega_1 B_1 f + \omega_2 B_2 f$$

verbunden sind. Dabei können wir von dem Falle absehen, daß die beiden Konstanten ω_1 und ω_2 gleichzeitig verschwinden. Denn in diesem Falle beständen Relationen von der Form:

$$\xi_1 \frac{d\xi_2}{dx} - \xi_2 \frac{d\xi_1}{dx} = 0, \quad \eta_1 \frac{d\eta_2}{dy} - \eta_2 \frac{d\eta_1}{dy} = 0, \qquad [386$$

sodaß die Größen ξ_1 und ξ_2 (und ebenso die Größen η_1 und η_2) in konstantem Verhältnisse stehen würden:

$$\xi_2 = a\,\xi_1 \qquad (a = \text{Const.}).$$

Dann aber gestatteten die geodätischen Kurven unserer Fläche eine infinitesimale Transformation:

$$B_2 f - a B_1 f = (\xi_2 - a\,\xi_1) \frac{df}{dx} + (\eta_2 - a\,\eta_1) \frac{df}{dy},$$

deren ξ, nämlich die Größe $\xi_2 - a\,\xi_1$, identisch verschwände, und dann wäre unsere Fläche (Nummer 7) developpabel. Wir können daher, indem wir von den developpablen Flächen absehen, immer ohne Beschränkung annehmen, daß zum Beispiel die Konstante ω_1 von Null verschieden ist. Setzen wir dann:

$$B_1' f = \omega_1 B_1 f + \omega_2 B_2 f, \quad B_2' f = \frac{1}{\omega_1} B_2 f,$$

so ist:

$$(B_1' B_2') = (B_1 B_2) = \omega_1 B_1 f + \omega_2 B_2 f = B_1' f.$$

Wenn daher die geodätischen Kurven einer nicht developpablen Fläche mehrere konforme infinitesimale Transformationen gestatten, so können wir immer unter diesen zwei wählen, etwa $B_1' f$ und $B_2' f$, oder kurz $B_1 f$ und $B_2 f$, die in der Beziehung $(B_1 B_2) = B_1 f$ stehen. Dieses vorausgesetzt, können wir nach den Entwickelungen der Nummer 7 immer annehmen, daß die Variabeln x und y derart gewählt sind, daß $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 1$ sind, und daß $B_1 f$ infolgedessen die Form:

$$B_1 f = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}$$

annimmt, während e^w die Form:

$$e^w = e^{ax} \Phi(x - y)$$

besitzt. Alsdann zerlegt sich die Gleichung $(B_1 B_2) = B_1 f$ in die beiden:

$$\frac{d\xi_2}{dx} = 1, \quad \frac{d\eta_2}{dy} = 1,$$

sodaß ξ_2 und η_2 die Werte $\xi_2 = x + a$, $\eta_2 = y + b$ besitzen. Überdies kann man durch Einführung von $x + a$ als neuem x und von $y + b$ als neuem y erreichen, daß:

$$\xi_2 = x, \quad \eta_2 = y$$

wird.

Es handelt sich also jetzt darum, das Bogenelement $e^w = e^{ax} \Phi(x - y)$ in allgemeinster Weise zu bestimmen derart, daß die geodätischen Kurven der betreffenden Fläche außer der infinitesimalen Transformation $df : dx + df : dy$ noch die Transformation $x(df : dx) + y(df : dy)$ gestatten. Wir müssen also in die Gleichung (6):

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \xi \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} = B \qquad [387$$

die Werte $\xi = x$, $\eta = y$ einsetzen, und finden so die Relation:

$$x \frac{dw}{dx} + y \frac{dw}{dy} = B - 2 = m = \text{Const.}$$

Nun aber hat w die Form:

$$w = ax + \log \Phi(x - y),$$

und also wird:

$$ax + \frac{(x - y)\,\Phi'(x - y)}{\Phi(x - y)} = m,$$

sodaß a gleich Null ist, während Φ die Form $A(x - y)^m$ besitzt. Hierdurch erhalten wir den Satz:

Satz 13. Die Rotationsflächen, deren Bogenelement die Form:

$$ds^2 = (x - y)^m dx\,dy$$

besitzt, und die auf sie abwickelbaren Flächen sind die einzigen Flächen, deren geodätische Kurven mehrere konforme infinitesimale Transformationen gestatten.

Die hiermit definierte interessante Flächenfamilie gestattet eine sehr schöne geometrische Definition, wie ich in der letzten Nummer dieses Paragraphen im Anschlusse an bekannte Untersuchungen von Weingarten und Dini zeigen werde.

17. Jetzt fragen wir nach allen Flächen, deren geodätische Kurven mehr als zwei konforme Transformationen gestatten.

Das Bogenelement der betreffenden Flächen hat nach dem Vorangehenden jedenfalls die Form:

$$ds^2 = (x - y)^m dx\,dy.$$

Zur näheren Bestimmung der Konstanten m substituieren wir in die Gleichung (6) den Wert $e^w = (x - y)^m$, und erhalten so die Relation:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{m}{x - y}(\xi - \eta) = B = \text{Const.}$$

Durch sukzessive Differentiation derselben hinsichtlich x und y folgt die Gleichung:

$$m\frac{d\xi}{dx} + m\frac{d\eta}{dy} - \frac{2m}{x - y}(\xi - \eta) = 0,$$

oder, da die Annahme $m = 0$ nur developpable Flächen liefert und somit ausgeschlossen werden kann, die äquivalente Gleichung:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} - \frac{2}{x - y}(\xi - \eta) = 0,$$

die mit der vorangehenden Gleichung verbunden, die Relation:

$$\frac{m + 2}{x - y}(\xi - \eta) = B$$

liefert. [388

Ist nun $m + 2$ von Null verschieden, so haben ξ und η hinsichtlich x und y lineare Form:

$$\xi = ax + b, \quad \eta = cy + d.$$

Bezeichnet man die betreffende infinitesimale Transformation:

$$(ax + b)\frac{df}{dx} + (cy + d)\frac{df}{dy}$$

mit $B_3 f$ und erinnert sich dabei, daß $B_1 f$ und $B_2 f$ die Form:

$$B_1 f = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}, \quad B_2 f = x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy}$$

haben, so ergibt sich, daß die geodätischen Kurven unserer Fläche eine infinitesimale Transformation, nämlich:

$$B_3 f - a B_2 f - b B_1 f,$$

gestatten, deren ξ gleich Null ist. Die Annahme $m + 2 \gtrless 0$ liefert somit (Nummer 7) nur developpable Flächen.

Es bleibt daher nur die Annahme $m + 2 = 0$, die bekanntlich auf die Flächen konstanter Krümmung führt. Dies gibt den Satz:

Satz 14. Wenn die geodätischen Kurven einer Fläche mehr als zwei konforme infinitesimale Transformationen gestatten, so hat die Fläche konstante Krümmung. Ihr Bogenelement hat die Form:

$$ds^2 = (x - y)^{-2} dx\,dy,$$

und die **drei** zugehörigen konformen infinitesimalen Transformationen sind die folgenden:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}, \quad x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy}, \quad x^2\frac{df}{dx} + y^2\frac{df}{dy}.$$

18. Die im vorangehenden betrachteten Flächen, deren geodätische Kurven zwei und nur zwei konforme infinitesimale Transformationen gestatten, lassen sich in einer anderen merkwürdigen Weise definieren.

Nach Weingartens bekannten Untersuchungen (Journal für die reine und angew. Math., Bd. 59) über Flächen, deren Krümmungshalbmesser ϱ, ϱ' durch eine Relation:

$$\varrho' = f(\varrho)$$

verknüpft sind, können nämlich die Zentraflächen dieser letzten Flächen auf Rotationsflächen abgewickelt werden. Das Bogenelement der betreffenden Zentraflächen besitzt in der Tat die für Rotationsflächen charakteristische Form:

$$ds^2 = d\varrho^2 + e^{2\int \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho'}} dv^2. \tag{35}$$

Ich will nun mit Dini insbesondere annehmen, die Relation $\varrho' = f(\varrho)$ sage aus, daß ϱ und ϱ' in konstantem Verhältnisse stehen, daß also:

$$\varrho' = k\varrho \qquad (k = \text{Const.})$$ [389

ist. In diesem speziellen Falle geht die Gleichung (35) über in:

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^{\frac{2}{1-k}} dv^2,$$

oder in:

$$ds^2 = \varrho^{\frac{2}{1-k}} \left[\varrho^{\frac{2}{k-1}} d\varrho^2 + dv^2\right].$$

Setzen wir daher:

$$\varrho^{\frac{1}{k-1}} d\varrho + i\,dv = d\xi, \quad \varrho^{\frac{1}{k-1}} d\varrho - i\,dv = d\eta$$

oder:

$$\frac{k-1}{k}\,\varrho^{\frac{k}{k-1}} + iv \;= \xi, \quad \frac{k-1}{k}\,\varrho^{\frac{k}{k-1}} - iv \;= \eta,$$

so wird:

$$ds^2 = \left(\frac{2k-2}{k}\right)^{\frac{2}{k}} (\xi + \eta)^{-\frac{2}{k}} d\xi\, d\eta, \tag{36}$$

wobei die Fälle $k = 1$ und $k = 0$ ausgeschlossen sind. Setzt man hier

$$\xi = x, \quad \eta = -y, \quad -\frac{2}{k} = m$$

und sieht dabei von einem unwesentlichen konstanten Faktor ab, so geht die Formel (36) über in die früher betrachtete Gleichung:

$$ds^2 = (x - y)^m\, dx\, dy,$$

wobei m alle möglichen endlichen konstanten Werte mit Ausnahme von -2 annehmen kann. Hiermit ist der folgende schöne Satz erwiesen:

Satz 15. Flächen, deren geodätische Kurven zwei und nur zwei konforme infinitesimale Transformationen gestatten, lassen sich auch definieren als Zentraflächen von Flächen, deren Hauptkrümmungshalbmesser in konstantem Verhältnisse stehen.

Wir zeigen später, daß die Annahme, daß $k = -2$ und also $m = 1$ ist, ganz besonders bemerkenswert ist. In diesem Falle gestatten die geodätischen Kurven der betreffenden Zentrafläche außer den beiden schon besprochenen konformen infinitesimalen Transformationen noch eine dritte infinitesimale Transformation, die nicht konform ist.

§ 6. Flächen, die sowohl der ersten wie der zweiten Flächenklasse angehören.

In diesem Paragraphen bestimmen wir das Bogenelement aller Flächen, deren geodätische Kurven zwei (oder noch mehr) infinitesimale Transformationen gestatten, unter denen eine die Form:

$$\xi_1(x)\frac{df}{dx} + \eta_1(y)\frac{df}{dy}$$

aufweist, während eine andere die Form: [390

$$\xi_2(x)\frac{df}{dx} + \eta_2(x,y)\frac{df}{dy} \quad \left(\frac{d\eta_2}{dx} \gtrless 0\right)$$

besitzt. Die betreffenden Flächen gehören somit gleichzeitig unserer ersten und zweiten Flächenklasse an.

19. Da die gesuchten Flächen der zweiten Flächenklasse angehören sollen, so können wir:

$$e^{w'} = y' + \Phi(x')$$

setzen, und dabei muß es möglich sein, solche durch die Gleichungen:

$$y' = Y(y), \quad x' = X(x)$$

bestimmte, neue Variable x, y einzuführen, daß e^w die Form:

$$e^w = e^{ax}\,\Psi(x - y) \qquad (a = \text{Const.})$$

annimmt. Dies gibt die Bedingungsgleichung:

$$[Y + \Phi(X)]\, Y'(y)\, X'(x) = e^{ax}\,\Psi(x - y) = W,$$

wobei W die Relation:

$$\frac{dW}{dx} + \frac{dW}{dy} = aW$$

erfüllt. Setzen wir daher

$$X' = f(x), \quad \Phi(X)\, X' = F(x),$$

so erhalten wir zur Bestimmung der drei unbekannten Funktionen Y, f und F die Relation:

$$\frac{d}{dx}(YY'f + Y'F) + \frac{d}{dy}(YY'f + Y'F) = a(YY'f + Y'F),$$

oder die äquivalente:

$$YY'f' + Y'F' + (YY'' + Y'^2 - aYY')f + (Y'' - aY')F = 0. \tag{37}$$

Wir geben zuerst die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung (37) und bestimmen daher zunächst alle Flächen, deren Bogenelement sowohl die Form $e^w = e^{ax}\Psi(x - y)$, wie die Form $e^{w'} = y' + \Phi(x')$ erhalten kann. Durch Partikularisation der gefundenen Lösung erhält man sodann alle Flächen, die sowohl der ersten als der zweiten Klasse angehören. Wir zeigen später (Note 1), daß auch die allgemeine Lösung von (37) Interesse darbietet.

Bestände keine oder nur eine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten zwischen f', F', f und F, etwa:

$$Af' + BF' + Cf + DF = 0, \tag{38}$$

so verschwände jedenfalls ein Ausdruck von der Form $Y'(a + bY)$, sodaß Y konstant sein müßte, was indes mit der Gleichung $y' = Y$ im Widerspruche steht. Also finden jedenfalls zwei Relationen von der Form (38) statt. Dabei bemerken wir, daß f und F nicht in konstantem Verhältnisse [391
stehen können, weil das Bogenelement $e^{w} = YY'f + Y'F$ sonst einer developpablen Fläche entspräche, und dieser Ausnahmefall von uns immer ausgeschlossen wird. Hieraus folgt, daß nicht mehr als zwei unabhängige Relationen von der Form (38) stattfinden können, weil sich sonst immer eine Gleichung von der Form $Cf + DF = 0$ herleiten ließe.

In dieser Weise erkennen wir die Existenz zweier Relationen von der Form:

$$f' = \alpha f + \beta F, \quad F' = \gamma f + \delta F.$$

Durch Einführung dieser Werte in (37) kommt:

$$\begin{cases} YY'' + Y'^2 + (\alpha - a) YY' + \gamma Y' = 0, \\ Y'' + \beta YY' + (\delta - a) Y' \qquad\qquad = 0, \end{cases} \tag{39}$$

woraus durch Elimination von Y'':

$$Y'^2 + \gamma Y' + (\alpha - \delta) YY' - \beta Y^2 Y' = 0,$$

oder, da Y' von Null verschieden ist:

$$Y' + \gamma + (\alpha - \delta) Y - \beta Y^2 = 0.$$

Durch Differentiation kommt:

$$Y'' + (\alpha - \delta) Y' - 2\beta YY' = 0,$$

und durch Vergleichung mit (39) folgt:

$$\alpha - \delta = \delta - a, \quad a = 2\delta - \alpha, \quad \beta = 0.$$

Bei der weiteren Diskussion werden wir die beiden Fälle $\delta \gtrless \alpha$ und $\delta = \alpha$ getrennt behandeln.

20. Sei zunächst $\delta \gtrless \alpha$. Alsdann werden die drei Gleichungen:

$$f' = \alpha f, \quad F' = \gamma f + \delta F, \quad Y' = (\delta - \alpha) Y - \gamma \tag{40}$$

in allgemeinster Weise befriedigt, wenn man setzt:

$$\begin{cases} f = Be^{\alpha x}, \quad F = Me^{\delta x} + \dfrac{B\gamma}{\alpha - \delta} e^{\alpha x}, \\ Y = \dfrac{\gamma}{\delta - \alpha} + Ae^{(\delta - \alpha) y}. \end{cases} \tag{41}$$

Die entsprechende Form des Bogenelementes ist:

$$e^{w} = e^{(2\delta - \alpha)x}[A^2 B(\delta - \alpha) e^{2(\delta - \alpha)(y - x)} + AM(\delta - \alpha) e^{(\delta - \alpha)(y - x)}], \tag{42}$$

sodaß die betreffenden Flächen wirklich, wie vorauszusehen war, unserer ersten Flächenklasse angehören.

Um zu entscheiden, wann sie zugleich der zweiten Klasse angehören, kehren wir zu den Variabeln x', y' zurück, indem wir setzen:

$$\frac{dx'}{dx} = X' = f = Be^{\alpha x}, \quad y' = Y.$$

Ist dabei $\alpha \gtrless 0$, so wird:

$$x' = \frac{B}{\alpha} e^{\alpha x} + k, \quad e^{\alpha x} = \frac{\alpha(x' - k)}{B}$$ [392

und:

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{X'} = y' + \frac{M}{B} e^{(\delta - \alpha)x} + \frac{\gamma}{\alpha - \delta},$$

oder:

$$e^{w'} = y' + \frac{M}{B}\left(\frac{\alpha}{B}\right)^{\frac{\delta - \alpha}{\alpha}} (x' - k)^{\frac{\delta - \alpha}{\alpha}} + \frac{\gamma}{\alpha - \delta},$$

oder endlich durch Einführung dreier neuer Konstanten a, b und ε:

$$e^{w'} = y' + a(x' - k)^{\varepsilon} + b.$$

Es fragt sich (Satz 8), ob die Größe:

$$a(x' - k)^{\varepsilon} + b,$$

die wir in Übereinstimmung mit dem im zitierten Satze angewandten Symbole mit $\mathbf{F}' = d\mathbf{F} : dx'$ bezeichnen werden, durch passende Partikularisation der Konstanten die Differentialgleichung:

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\mathbf{F}''' + (3x' - 6c)\mathbf{F}'' = 0$$

befriedigt. Indem wir von der, nur developpable Flächen liefernden Annahme: $\varepsilon = 0$ absehen, ist hierzu, wie wir finden, erforderlich und hinreichend, daß:

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{2}, \quad c = k, \quad K = 4k^2$$

wird. Unser Bogenelement erhält also die Form:

$$e^{w'} = y' + a(x'-k)^{-\frac{1}{2}} + b,$$

oder, wenn wir $k = b = 0$ setzen, was erlaubt ist, die äquivalente Form:

$$e^{w'} = y' + a x'^{-\frac{1}{2}}.$$

Die entsprechende infinitesimale Transformation:

$$\xi(x') \frac{df}{dx'} + \eta(x', y') \frac{df}{dy'}$$

hat nach Satz 8 die Form $\xi = 2x'^2$, $\eta = x'y' + \mathbf{F}(x')$, wo die Größe $\mathbf{F}(x') = 2ax'^{\frac{1}{2}} + L$ die Gleichung:

$$2x'^2\mathbf{F}'' - x'\mathbf{F}' + \mathbf{F} = 0$$

befriedigen muß, sodaß die Integrationskonstante L gleich Null ist. Außer der hiermit bestimmten infinitesimalen Transformation:

$$2x'^2 \frac{df}{dx'} + \left(x'y' + 2ax'^{\frac{1}{2}}\right) \frac{df}{dy'}$$

gestatten die geodätischen Kurven unserer Fläche noch eine Trans- [393 formation, und zwar die konforme infinitesimale Transformation[1]):

$$2x' \frac{df}{dx'} - y' \frac{df}{dy'},$$

weil die Werte $\xi = 2x'$, $\eta = -y'$, $e^{w'} = y' + ax'^{-\frac{1}{2}}$ die Gleichung (6):

$$\frac{d\xi}{dx'} + \frac{d\eta}{dy'} + \xi \frac{dw'}{dx'} + \eta \frac{dw'}{dy'} = \text{Const.}$$

identisch erfüllen.

Führen wir die Größe $\sqrt{x'} = x''$ als neues x ein, so erhält unser Bogenelement die bemerkenswerte Form:

$$e^{w''} = x''y'' + a, \text{ [2])}$$

die hinsichtlich x'' und $y'' = y'$ symmetrisch ist. Zu den früher gefundenen

1) Wir haben früher gefunden, daß die Größe $\varepsilon = (\delta - \alpha) : \alpha$ gleich $-\frac{1}{2}$ ist, und daß daher $2\delta - \alpha = 0$ ist. Also zeigt Formel (42), daß unsere Flächen auf eine Rotationsfläche abwickelbar sind.

2) Flächen mit dem Bogenelemente $ds^2 = (xy + a)\,dx\,dy$ haben nur, wenn a verschwindet, eine konstante Krümmung, und sind dann gleichzeitig developpabel. Ist a von Null verschieden, so kann man ohne wesentliche Beschränkung $a = 1$ setzen.

infinitesimalen Transformationen, die in den neuen Variabeln die Form:

$$B_1 f = x''^3 \frac{df}{dx''} + (x''^2 y'' + 2ax'') \frac{df}{dy''},$$

$$B_2 f = x'' \frac{df}{dx''} - y'' \frac{df}{dy''}$$

besitzen, können wir wegen der Symmetrie des Bogenelementes hinsichtlich x'' und y'' die dritte Transformation:

$$B_3 f = (x''y''^2 + 2ay'') \frac{df}{dx''} + y''^3 \frac{df}{dy''}$$

fügen. Zwischen diesen bestehen, wie man durch Ausführung findet, die Relationen:

$$(B_1 B_2) = -2B_1, \quad (B_2 B_3) = -2B_3, \quad (B_1 B_3) = 4a^2 B_2.$$

Wir beweisen später, daß die hiermit bestimmten drei infinitesimalen Transformationen die einzigen sind, welche die geodätischen Kurven unserer Flächen in sich überführen.

Setzen wir:

$$B_1 f + B_3 f = \xi \frac{df}{dx''} + \eta \frac{df}{dy''},$$

so ist:

$$\frac{d\xi}{dy''} \gtrless 0, \quad \frac{d\eta}{dx''} \gtrless 0,$$

sodaß unsere Flächen auch der dritten Flächenklasse angehören.

Diejenigen Flächen, deren Bogenelement die Form: [394

$$e^w = xy + a$$

besitzt, gestatten drei unabhängige infinitesimale Transformationen. Sie gehören gleichzeitig der ersten, der zweiten und der dritten Flächenklasse an.

Ich will jetzt annehmen, daß $\alpha = 0$ ist, während δ von 0 verschieden ist; die Differentialgleichungen (40):

$$f' = 0, \quad F' = \gamma f + \delta F, \quad Y' = \delta Y - \gamma$$

werden dann in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir:

$$f = B, \quad F = Me^{\delta x} - \frac{B\gamma}{\delta}, \quad Y = \frac{\gamma}{\delta} + Ae^{\delta y}$$

setzen. Die entsprechende Form des Bogenelementes:

$$e^w = e^{2\delta x}\{A^2 B\delta e^{2\delta(y-x)} + AM\delta e^{\delta(y-x)}\}$$

ist, wie wir sehen, nur ein spezieller Fall der Formel (42).

Um zu entscheiden, wann die betreffenden Flächen zu der zweiten Klasse gehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln x', y' zurück, indem wir:

$$\frac{dx'}{dx} = X' = f = B, \quad y' = Y$$

setzen. Alsdann wird $Bx = x' - k$, und:

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{X'} = y' + \frac{M}{B} e^{\delta x} - \frac{\gamma}{\delta},$$

oder:

$$e^{w'} = y' + \frac{M}{B} e^{\frac{\delta}{B}(x'-k)} - \frac{\gamma}{\delta},$$

oder endlich durch Einführung dreier neuer Konstanten a, b und ε:

$$e^{w'} = y' + a e^{\varepsilon x'} + b.$$

Es fragt sich (Satz 8), ob die Größe:

$$a e^{\varepsilon x'} + b = \mathbf{F}'$$

die Differentialgleichung:

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\mathbf{F}''' + (3x' - 6c)\mathbf{F}'' = 0$$

bei passender Partikularisation der Konstanten befriedigt. Dies ist, wie wir finden, nur der Fall, wenn $a = 0$ ist. *Die Annahme $\alpha = 0$, $\delta \gtrless 0$ liefert daher jedenfalls nur developpable Flächen, welche gleichzeitig der ersten und der zweiten Klasse angehören.*

21. Ich will ferner annehmen, daß $\alpha = \delta$ ist, und daß sie beide von Null verschieden sind. Dann werden die Gleichungen (40):

$$f' = \alpha f, \quad F' = \gamma f + \alpha F, \quad Y' = -\gamma$$

in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir:

$$f = Be^{\alpha x}, \quad F = \gamma B x e^{\alpha x} + D e^{\alpha x}, \quad Y = -\gamma y + E$$ [395

setzen. Die entsprechende Form des Bogenelementes:

$$e^{w} = -\gamma e^{\alpha x}\{\gamma B(x - y) + EB + D\}$$

zeigt, daß unsere Flächen wirklich der ersten Klasse angehören.

Um zu entscheiden, wann sie auch zu der zweiten Klasse gehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln x', y' zurück, indem wir:

$$\frac{dx'}{dx} = Be^{\alpha x}, \quad y' = Y$$

setzen. Dann wird:

$$x' - k = \frac{B}{\alpha} e^{\alpha x}, \quad x = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\alpha(x' - k)}{B}$$

und:

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{f} = y' + \gamma x + \frac{D}{B},$$

oder:

$$e^{w'} = y' + \frac{\gamma}{\alpha} \log \frac{\alpha(x' - k)}{B} + \frac{D}{B},$$

oder endlich durch Einführung zweier neuer Konstanten a und b:

$$e^{w'} = y' + a \log(x' - k) + b.$$

Es fragt sich (Satz 8), ob die Größe:

$$a \log(x' - k) + b = \mathbf{F}'$$

die Differentialgleichung:

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\mathbf{F}''' + (3x' - 6c)\mathbf{F}'' = 0$$

für passende Werte der Konstanten befriedigt. Man sieht durch Ausführung, daß dies nur geschieht, wenn $a = 0$ ist, das heißt, wenn die betreffenden Flächen developpabel sind.

Die Annahme $\delta = \alpha \gtrless 0$ liefert somit nur developpable Flächen, welche gleichzeitig der ersten und der zweiten Klasse angehören.

22. Es bleibt jetzt nur noch die Annahme zu erledigen, daß $\alpha = \delta = 0$ ist. Dann werden die Gleichungen (40):

$$f' = 0, \quad F' = \gamma f, \quad Y' = -\gamma$$

in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir:

$$f = B, \quad F = \gamma B x + C, \quad Y = -\gamma y + D$$

setzen. Die entsprechende Form des Bogenelementes:

$$e^{w} = -\gamma\{\gamma B(x - y) + BD + C\}$$

zeigt, daß unsere Flächen auf Rotationsflächen abwickelbar sind, und daß sie somit der ersten Klasse angehören.

Um zu entscheiden, wann sie zugleich der zweiten Klasse angehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln x, y zurück, indem wir:

$$\frac{dx'}{dx} = B, \quad y' = Y$$

setzen. Dann wird $x' - k = Bx$ und:

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{f} = y' + \gamma x + \frac{C}{B},$$ [396

oder:

$$e^{w'} = y' + \frac{\gamma}{B}(x' - k) + \frac{C}{B},$$

oder endlich, durch Einführung zweier neuer Konstanten a und b:

$$e^{w'} = y' + a x' + b.$$

Nun aber verifiziert man leicht, daß die Größe $a x' + b = \mathbf{F}'$ der Differentialgleichung:

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\mathbf{F}''' + (3x' - 6c)\mathbf{F}'' = 0$$

nicht genügt, außer wenn $a = 0$ ist.

Die Annahme $\delta = \alpha = 0$ liefert daher nur developpable Flächen.

Wir resümieren die obenstehenden Entwickelungen in folgendem Satze:

Satz 16. Gestatten die geodätischen Kurven einer Fläche eine konforme infinitesimale Transformation und daneben eine Transformation von der Form:

$$\xi(x)\frac{df}{dx} + \eta(x, y)\frac{df}{dy} \qquad \left(\frac{d\eta}{dx} \gtrless 0\right),$$

so kann das entsprechende Bogenelement auf die Form:

$$e^w = y + \frac{a}{\sqrt{x}},$$

oder auf die äquivalente Form:

$$e^w = xy + a$$

gebracht werden. Die betreffenden Flächen gehören nicht bloß der ersten und der zweiten, sondern zugleich der dritten Flächenklasse an.

Es gibt indes, haben wir gefunden, noch weitere Flächenfamilien, deren Bogenelement sowohl die Form $e^w = e^{ax}\,\Psi(x - y)$, wie die Form $e^{w'} = y' + \Phi(x')$ erhalten kann.

23. Jetzt suchen wir alle Flächen, deren geodätische Kurven zwei oder noch mehr infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\xi_\varkappa(x)\frac{df}{dx} + \eta_\varkappa(x, y)\frac{df}{dy} \qquad \left(\frac{d\eta_\varkappa}{dx} \gtrless 0\right)$$

gestatten. Für jede solche Fläche können wir:

$$e^w = y + F(x), \quad \frac{d\eta_1}{dx} = e^w, \quad Y(y)\frac{d\eta_2}{dx} = e^w$$

setzen.

Wir werden zunächst zeigen, daß $Y(y)$ eine Konstante sein muß. Führen wir eine neue Variable y' ein, indem wir:

$$dy' = \sqrt{Y}.dy$$

setzen, so muß der Ausdruck $e^{w'} = e^w\, dy : dy'$ die Form $y'\varphi(x) + \Phi(x)$ [397
annehmen:

$$(y + F)\frac{dy}{dy'} = y'\varphi(x) + \Phi(x).$$

Setzen wir daher:

$$\frac{1}{\varphi} = \psi, \quad \frac{F}{\varphi} = \Psi, \quad y = Y_1(y'),$$

so kommt durch Differentiation:

$$\frac{d}{dy'}(Y_1 Y_1').\psi + \frac{d}{dy'}(Y_1').\Psi = 1,$$

und, wenn man hier der Variablen y' sukzessiv verschiedene konstante Werte erteilt, so erhält man jedenfalls eine Relation von der Form:

$$a\psi + b\Psi = 1.$$

Beständen nun mehrere solche Relationen, so müßten $\psi(x)$ und $\Psi(x)$ in konstantem Verhältnisse stehen, und die betreffenden Flächen infolgedessen developpabel sein. Sehen wir daher von den developpablen Flächen ab, so können wir:

$$\frac{d}{dy'}(Y_1 Y_1') = a, \quad \frac{d}{dy'}(Y_1') = b$$

und:

$$Y_1 Y_1' = ay' + a_1, \quad Y_1' = by' + b_1,$$

und also:

$$y = Y_1 = cy' + c_1, \quad \frac{dy}{dy'} = c$$

setzen. Hiermit ist erwiesen, daß die Größe $\sqrt{Y}$ und also auch Y konstant ist. Und also wird:

$$\frac{d\eta_1}{dx} = e^w = k\frac{d\eta_2}{dx}, \quad \frac{d(\eta_1 - k\eta_2)}{dx} = 0,$$

wo k eine Konstante bezeichnet, sodaß die geodätischen Kurven unserer Flächen eine konforme infinitesimale Transformation, nämlich:

$$(\xi_1 - k\xi_2)\frac{df}{dx} + (\eta_1 - k\eta_2)\frac{df}{dy}$$

gestatten. Dann aber kann das betreffende Bogenelement die Form:

$$e^{w} = xy + a$$

erhalten. Dies gibt:

Satz 17. Gestatten die geodätischen Kurven einer Fläche zwei oder noch mehr infinitesimale Transformationen von der Form:

$$\xi(x)\frac{df}{dx} + \eta(x, y)\frac{df}{dy} \quad \left(\frac{d\eta}{dx} \gtrless 0\right),$$

so kann das zugehörige Bogenelement immer die Form:

$$e^{w} = xy + a$$

erhalten.

§ 7. Flächen, die gleichzeitig der zweiten und der dritten Klasse angehören. [398

In diesem Paragraphen bestimme ich das Bogenelement aller Flächen, die gleichzeitig meiner zweiten und meiner dritten Klasse angehören.

Dieselben sind dadurch charakterisiert, daß ihre geodätischen Kurven eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$\xi(x)\frac{df}{dx} + \eta(x, y)\frac{df}{dy} \qquad \left(\frac{d\eta}{dx} \gtrless 0\right),$$

und eine andere von der Form:

$$\xi(x, y)\frac{df}{dx} + \eta(x, y)\frac{df}{dy} \qquad \left(\frac{d\xi}{dy} \gtrless 0, \ \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0\right)$$

gestatten.

23*. Da die gesuchten Flächen der zweiten Klasse angehören sollen, so kann ihr Bogenelement die Form:

$$e^{w'} = y' + \Phi(x')$$

annehmen, und da sie gleichzeitig der dritten Klasse angehören sollen, so muß es möglich sein, solche neue Variable x und y einzuführen, daß eine Relation von der Form:

$$e^{w} = e^{w'}\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dy} = \psi(x + y) + \Psi(x - y)$$

stattfindet. Setzen wir:

$$y' = Y(y), \quad \frac{dx'}{dx} = f(x), \quad \Phi\frac{dx'}{dx} = F(x),$$

so kommt:

$$YY'f(x) + Y'F(x) = \psi(x + y) + \Psi(x - y),$$

woraus:

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(YY'f(x) + Y'F(x)\right) - \frac{d^2}{dx^2}(YY'f + Y'F) = 0,$$

oder entwickelt:

$$(43) \qquad (YY''' + 3Y'Y'')f + Y'''F - YY'f'' - Y'F'' = 0.$$

Wir geben zuerst die allgemeine Lösung dieser Funktionalgleichung und bestimmen daher zunächst alle Flächen, deren Bogenelement sowohl die Form $e^{w} = \psi(x + y) + \Psi(x - y)$, wie die Form $e^{w'} = y' + \Phi(x')$ erhalten kann. Durch Partikularisation finden wir sodann alle Flächen, die sowohl der zweiten wie der dritten Klasse angehören. Wir zeigen später (Note 1), daß auch die allgemeinere hier erledigte Frage ein wirkliches Interesse darbietet.

Bestände in (43) keine oder nur eine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten zwischen f, F, f'' und F'' von der Form:

$$(44) \qquad af + bF + cf'' + dF'' = 0, \qquad [399$$

so wäre Y konstant, was mit der Gleichung $y' = Y(y)$ im Widerspruche steht. Bemerken wir nun ferner, daß mehr als zwei Relationen von der Form (44) nicht bestehen können, weil f und F dann in konstantem Verhältnisse ständen, und somit die betreffende Fläche developpabel wäre, so können wir schließen, daß sicher zwei Relationen von der Form:

$$(45) \qquad \begin{cases} F'' + \alpha f + \beta F = 0, \\ f'' + \gamma f + \delta F = 0 \end{cases}$$

stattfinden.

Durch Einsetzung dieser Werte in (43) folgt eine Gleichung, die sich in die beiden folgenden zerlegt:

$$(46) \qquad \begin{cases} YY''' + 3Y'Y'' + \gamma YY' + \alpha Y' = 0, \\ Y''' + \qquad \delta YY' + \beta Y' = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von Y''' folgt:

$$Y'(3Y'' - \delta Y^2 + (\gamma - \beta)Y + \alpha) = 0,$$

woraus durch Division mit Y' und Differentiation:

$$3Y''' - 2\delta YY' + (\gamma - \beta)Y' = 0,$$

sodaß durch Vergleichung mit (46, 2) hervorgeht, daß $\delta = 0$, $\gamma = 4\beta$ ist. Die Größen f, F und Y werden hiernach bestimmt durch die Gleichungen:

$$(47) \qquad \begin{cases} f'' = -4\beta f, \quad F'' = -\alpha f - \beta F, \\ \qquad Y'' = -\beta Y - \frac{1}{3}\alpha, \end{cases}$$

bei deren Integration verschiedene Fälle eintreten können.

24. Ich will zunächst annehmen, daß $\beta \gtrless 0$ ist. Alsdann werden die Gleichungen (47) in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir:

$$Y = -\frac{\alpha}{3\beta} + G \sin\left(y\sqrt{\beta} + \gamma\right), \quad f = L \sin\left(2x\sqrt{\beta} + \lambda\right),$$

$$F = \quad \frac{\alpha}{3\beta} L \sin\left(2x\sqrt{\beta} + \lambda\right) + M \sin\left(x\sqrt{\beta} + \mu\right)$$

setzen. Die entsprechende Form von e^w ist, [wenn man den Faktor $G\sqrt{\beta}$ wegläßt]:

$$e^w = \left\{ G L \sin\left(2x\sqrt{\beta} + \lambda\right) \sin\left(y\sqrt{\beta} + \gamma\right) + \right.$$
$$\left. + M \sin\left(x\sqrt{\beta} + \mu\right)\right\} \cos\left(y\sqrt{\beta} + \gamma\right),$$

oder:

$$e^w = \tfrac{1}{2} G L \sin\left(2x\sqrt{\beta} + \lambda\right) \sin\left(2y\sqrt{\beta} + 2\gamma\right) +$$
$$+ M \cos\mu \,.\, \sin x\sqrt{\beta} \,.\, \cos\left(y\sqrt{\beta} + \gamma\right) +$$
$$+ M \sin\mu \,.\, \cos x\sqrt{\beta} \,.\, \cos\left(y\sqrt{\beta} + \gamma\right),$$

und dabei sieht man unmittelbar, daß diese Größe die Form [400
$\psi(x + y) + \Psi(x - y)$ erhalten kann.

Um zu entscheiden, wann die entsprechenden Flächen der zweiten Klasse angehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln x', y' zurück, indem wir:

$$y' = Y(y), \quad \frac{dx'}{dx} = f = L \sin\left(2x\sqrt{\beta} + \lambda\right)$$

setzen. Dies gibt:

$$x' = -\frac{L}{2\sqrt{\beta}} \cos\left(2x\sqrt{\beta} + \lambda\right) + k$$

und:

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{\frac{dx'}{dx}} = y' + \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{M \sin\left(x\sqrt{\beta} + \mu\right)}{L \sin\left(2x\sqrt{\beta} + \lambda\right)}.$$

Um die Größe x zwischen den beiden letzten Gleichungen zu eliminieren, setzen wir vorläufig:

$$x\sqrt{\beta} + \tfrac{1}{2}\lambda = x''.$$

Alsdann erhalten die betreffenden Gleichungen die Form:

$$\cos 2x'' = -\frac{2\sqrt{\beta}(x' - k)}{L},$$

$$e^{w'} = y' + \frac{a}{\sin x''} + \frac{b}{\cos x''} + d,$$

wo a, b und d drei neue Konstanten sind. Drücken wir $\sin x''$ und $\cos x''$ zuerst durch $\cos 2x''$, und sodann durch x' aus, so erhält $e^{w'}$ die Form:

$$e^{w'} = y' + a_1(x' + A)^{-\frac{1}{2}} + b_1(-x' + B)^{-\frac{1}{2}} + d,$$

und dabei bemerken wir, daß die Summe der Konstanten A und B von Null verschieden ist.

Es fragt sich (Satz 8), ob die Größe:

$$a_1(x' + A)^{-\frac{1}{2}} + b_1(-x' + B)^{-\frac{1}{2}} + d,$$

die wir nach der Ausdrucksweise des zitierten Satzes mit $\mathbf{F}'(x')$ bezeichnen, bei passender Partikularisation der Konstanten die Differentialgleichung:

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\mathbf{F}''' + (3x' - 6c)\mathbf{F}'' = 0$$

befriedigt. Schreiben wir diese Gleichung folgendermaßen:

$$\frac{\mathbf{F}'''}{\mathbf{F}''} = \frac{3}{2} \frac{a_1(x' + A)^{-\frac{5}{2}} + b_1(-x' + B)^{-\frac{5}{2}}}{-a_1(x' + A)^{-\frac{3}{2}} + b_1(-x' + B)^{-\frac{3}{2}}} = -\frac{3x' - 6c}{2x'^2 - 6cx' + K}$$

und schaffen sodann die Irrationalitäten des zweiten Nenners in der [401
bekannten Weise weg, so ergibt sich, daß die Größe:

$$a_1 b_1 (x' + A)^{-\frac{3}{2}} (-x' + B)^{-\frac{3}{2}} \left\{(x' + A)^{-1} + (-x' + B)^{-1}\right\}$$

eine rationale Funktion von x' sein muß, was, da $A + B$ von Null verschieden ist, das Verschwinden des Produktes $a_1 b_1$ verlangt. Daher muß entweder a_1 oder b_1, zum Beispiel b_1, gleich Null sein, und *somit das Bogenelement unserer Flächen die Form:*

$$e^{w'} = y' + a_1(x' + b)^{-\frac{1}{2}} + d$$

besitzen, die wir schon in dem vorigen Paragraphen mehrmals trafen.

Daß die betreffenden Flächen wirklich sowohl der zweiten wie der dritten Klasse angehören, ist uns schon von früher bekannt.

25. Sei jetzt $\beta = 0$. Alsdann werden die Gleichungen:

$$f'' = 0, \quad F'' = -\alpha f, \quad Y'' = -\tfrac{1}{3}\alpha$$

in allgemeinster Weise erfüllt durch die Integralgleichungen:

$$(48) \qquad \begin{cases} f = Ax + B, \quad Y = -\frac{1}{6}\alpha y^2 + \beta y + \gamma, \\ F = -\frac{1}{6}\alpha A x^3 - \frac{1}{2}\alpha B x^2 + Cx + D. \end{cases}$$

Setzen wir dabei voraus, daß A von Null verschieden ist, so können wir $Ax + B = Ax''$ und also:

$$f = Ax'', \quad F = -\tfrac{1}{6}\alpha Ax''^3 + C_1x'' + D_1$$

setzen. Das entsprechende Bogenelement:

$$e^w = \{Ax''(-\tfrac{1}{6}\alpha y^2 + \beta y + \gamma) - \tfrac{1}{6}\alpha Ax''^3 + C_1x'' + D_1\}(-\tfrac{1}{3}\alpha y + \beta)$$

kann, wie man leicht verifiziert, unmittelbar auf die Form:

$$\psi(x'' + y) + \Psi(x'' - y)$$

gebracht werden.

Um zu entscheiden, wann die betreffenden Flächen meiner zweiten Klasse angehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln zurück, indem wir:

$$y' = Y(y), \quad \frac{dx'}{dx} = f(x)$$

und also:

$$\frac{dx'}{dx''} = Ax'', \quad x' = \tfrac{1}{2}Ax''^2 + k$$

setzen. Dann wird:

$$e^{w'} = y' + \Phi(x) = y' + \frac{F(x)}{f(x)}$$ [402

$$= y' - \tfrac{1}{6}\alpha x''^2 + \frac{D_1}{A}x''^{-1} + \frac{C_1}{A},$$

oder durch Wegschaffung von x'', wenn wir gleichzeitig drei neue Konstanten a, b und d einführen:

$$e^{w'} = y' + a(x' - k) + b(x' - k)^{-\frac{1}{2}} + d.$$

Es fragt sich, ob die Größe:

$$a(x' - k) + b(x' - k)^{-\frac{1}{2}} + d,$$

die wir wie gewöhnlich $\mathbf{F}'(x')$ nennen, die Differentialgleichung:

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\mathbf{F}''' + (3x' - 6c)\mathbf{F}'' = 0$$

bei passender Partikularisation der Konstanten befriedigt. Hierzu ist, finden wir, notwendig, daß a verschwindet, sodaß wir wiederum nur die Form:

$$e^{w'} = y' + b(x' - k)^{-\frac{1}{2}} + d$$

erhalten.

26. Ich will endlich annehmen, daß in den Integralgleichungen (48) die Größe A verschwindet, und daß also:

$$f = B, \quad Y = -\tfrac{1}{6}\alpha y^2 + \beta y + \gamma, \quad F = -\tfrac{1}{2}\alpha Bx^2 + Cx + D$$

ist. Das entsprechende Bogenelement:

$$e^w = \{B(-\tfrac{1}{6}\alpha y^2 + \beta y + \gamma) - \tfrac{1}{2}\alpha Bx^2 + Cx + D\}(-\tfrac{1}{3}\alpha y + \beta)$$

kann auch jetzt auf die beiden Formen:

$$e^w = \psi(x + y) + \Psi(x - y), \quad e^{w'} = y' + \Phi(x')$$

gebracht werden.

Um zu entscheiden, wann die betreffenden Flächen meiner zweiten Klasse angehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln x', y' zurück, indem wir:

$$y' = Y, \quad \frac{dx'}{dx} = f(x) = B, \quad x' = Bx + k$$

setzen. Dann wird:

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{f(x)} = y' - \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + bx + b_1$$

und:

$$e^{w'} = y' + ax'^2 + bx' + b_1.$$

Es fragt sich, ob die Größe $ax'^2 + bx' + b_1$, die wir wie gewöhnlich mit $\mathbf{F}'(x')$ bezeichnen, die Differentialgleichung:

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\mathbf{F}''' + (3x' - 6c)\mathbf{F}'' = 0$$ [403

bei passender Partikularisation der Konstanten befriedigt. Hierzu ist, finden wir, erforderlich, daß $a = b = 0$ ist, und daß daher die betreffenden Flächen developpabel sind.

Wir fassen die vorangehenden Entwickelungen in folgendem Satze zusammen:

Satz 18. Es gibt mehrere Familien von Flächen, deren Bogenelement sowohl die Form $e^w = \psi(x + y) + \Psi(x - y)$, wie die Form $e^{w'} = y' + \Phi(x')$ erhalten kann. Verlangt man, daß dieselben sowohl meiner zweiten, wie meiner dritten Klasse angehören sollen, so muß ihr Bogenelement die Form $e^w = xy + a$ erhalten können.

27. Die Entwickelungen dieses Paragraphen geben unmittelbar die Lösung einer anderen für uns wichtigen Frage.

In der Tat, fragen wir nach allen Flächen, deren geodätische Kurven nicht allein eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$B_1f = \xi_1(x)\frac{df}{dx} + \eta_1(x, y)\frac{df}{dy} \quad \left(\frac{d\eta_1}{dx} \gtrless 0\right),$$

sondern zugleich eine Transformation von der Form:

$$B_2f = \xi_2(x, y)\frac{df}{dx} + \eta_2(y)\frac{df}{dy} \quad \left(\frac{d\xi_2}{dy} \gtrless 0\right)$$

gestatten, so ist klar, daß die betreffenden Kurven zugleich eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$B_1 f + B_2 f = \xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} \quad \left(\frac{d\xi}{dy} \gtrless 0, \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0\right)$$

gestatten, und daß sich daher die aufgestellte Frage unter das in diesem Paragraphen erledigte Problem subsumiert. Hiermit erhalten wir also den Satz:

Satz 19. Sollen die geodätischen Kurven einer Fläche eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$\xi_1(x) \frac{df}{dx} + \eta_1(x, y) \frac{df}{dy} \quad \left(\frac{d\eta_1}{dx} \gtrless 0\right)$$

und eine andere von der Form:

$$\xi_2(x, y) \frac{df}{dx} + \eta_2(y) \frac{df}{dy} \quad \left(\frac{d\xi_2}{dy} \gtrless 0\right)$$

gestatten, so muß das Bogenelement der Fläche die Form $e^w = xy + a$ erhalten können.

§ 8. Flächen, die gleichzeitig der ersten und der dritten Klasse angehören. [404

Indem ich mir jetzt die Aufgabe stelle, alle Flächen zu finden, die gleichzeitig der ersten und der dritten Klasse angehören, kann ich von den früher gefundenen Flächen, die zugleich der zweiten Klasse angehören, absehen. Ebenso sehe ich vorläufig von den schon bestimmten Flächen ab, deren Bogenelement die Form $e^w = (x-y)^m$ besitzt, und welche zwei konforme infinitesimale Transformationen gestatten.

28. Ich suche also alle Flächen, deren geodätische Kurven eine und nur eine konforme infinitesimale Transformation, etwa:

$$B_1 f = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy},$$

und gleichzeitig eine oder mehrere Transformationen von der Form:

$$\xi_\varkappa(x, y) \frac{df}{dx} + \eta_\varkappa(x, y) \frac{df}{dy} \quad \left(\frac{d\xi}{dy} \gtrless 0, \ \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0\right)$$

gestatten.

Unter den letztgenannten Transformationen gibt es dann (Satz 12) jedenfalls eine, zum Beispiel:

$$B_2 f = \xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy},$$

die mit $B_1 f$ durch eine Relation von der Form:

$$B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f)) = c_1 B_1 f + c_2 B_2 f \tag{49}$$

mit den konstanten Koeffizienten c_1 und c_2 verbunden ist. Hier sind drei verschiedene Fälle möglich.

Der erste Fall ist, daß c_1 und c_2 beide gleich Null sind.

Der zweite Fall ist, daß c_2 verschwindet, während c_1 von Null verschieden ist; in diesem Falle kann man durch Einführung von $(1 : c_1) B_2 f$ als neuem $B_2 f$ erreichen, daß die Relation (49) die Form:

$$B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f)) = B_1 f$$

erhält.

Der dritte und letzte Fall ist, daß c_2 von Null verschieden ist; in diesem Falle führen wir $B_2 f + (c_1 : c_2) B_1 f$ als neues $B_2 f$ und ferner $(1 : c_2) B_1 f$ als neues $B_1 f$ ein, und erreichen dadurch, daß die Relation (49) die Form:

$$B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f)) = B_2 f$$

annimmt.

29. Ich will annehmen, daß die zwischen $B_1 f$ und $B_2 f$ bestehende Relation die Form:

$$B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f)) = \varepsilon B_1 f$$ [405

besitzt, wobei wir unentschieden lassen, ob die Konstante ε gleich Null oder von Null verschieden ist.

Unsere Bedingungsgleichung zerlegt sich in die beiden:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\xi}{dy} = \varepsilon, \quad \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\eta}{dy} = \varepsilon,$$

die durch Integration und Wegwerfung der unwesentlichen Integrationskonstanten die Formeln:

$$\xi = f(x-y) + \varepsilon x, \quad \eta = \varphi(x-y) + \varepsilon y$$

geben. Da die konforme infinitesimale Transformationen $B_1 f$ nach Voraussetzung die Form $df : dx + df : dy$ besitzt, so hat das Bogenelement der gesuchten Flächen in den Variabeln x und y die Form $e^w = e^{\alpha x} . \lambda(x-y)$, wo α eine Konstante, $\lambda(x-y)$ eine Funktion von $x-y$ bezeichnet. Aber andererseits besteht nach (21) eine Gleichung von der Form:

$$X(x) \frac{d\xi}{dy} = e^w = Y(y) \frac{d\eta}{dx},$$

die in die folgende übergeht:

$$e^w = -Xf'(x-y) = e^{\alpha x} \lambda(x-y) = Y\varphi'(x-y).$$

Hieraus erhält man, indem man mit K und L zwei Konstanten bezeichnet, die folgenden Werte der Funktionen X, Y, f und φ:

$$X = Ke^{\alpha x}, \quad Y = Le^{\alpha y},$$
$$\lambda(x-y) = -Kf'(x-y) = Le^{\alpha(y-x)}\varphi'(x-y).$$

Hiermit ist alles zurückgeführt auf die Bestimmung der Konstanten α und der Funktion λ.

Wir führen [nach § 4] neue Variable x', y' ein, indem wir, vermöge (21'):

$$dx' = \sqrt{X}\,.\,dx = \sqrt{K}\,.\,e^{\frac{1}{2}\alpha x}dx, \quad dy = \sqrt{Y}\,.\,dy = \sqrt{L}\,.\,e^{\frac{1}{2}\alpha y}dy$$

setzen. Durch Integration kommt, wenn α von Null verschieden ist:

$$x' + \beta = \frac{2\sqrt{K}}{\alpha}e^{\frac{1}{2}\alpha x}, \quad y' + \gamma = \frac{2\sqrt{L}}{\alpha}e^{\frac{1}{2}\alpha y},$$

oder, wenn wir $x' + \beta = x''$, $y' + \gamma = y''$ setzen:

$$x'' = \frac{2\sqrt{K}}{\alpha}e^{\frac{1}{2}\alpha x}, \quad y'' = \frac{2\sqrt{L}}{\alpha}e^{\frac{1}{2}\alpha y}$$

und durch Auflösung:

$$x = \frac{2}{\alpha}\log\frac{\alpha x''}{2\sqrt{K}}, \quad y = \frac{2}{\alpha}\log\frac{\alpha y''}{2\sqrt{L}}.$$

Die Größe $e^{w'}$ wird bestimmt durch die Gleichung: [406

$$e^{w'} = e^{w}\frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'} = \frac{e^{w}\,.\,e^{-\frac{1}{2}\alpha(x+y)}}{\sqrt{KL}} = \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(x-y)}\,.\,\lambda(x-y)}{\sqrt{KL}} = \mu(x-y)$$

und erhält daher in den neuen Variabeln x', y' (oder x'', y'') die Form:

$$e^{w'} = \mu\left(\frac{2}{\alpha}\log\frac{\sqrt{L}\,.\,x''}{\sqrt{K}\,.\,y''}\right) = \Theta\left(\frac{x''}{y''}\right) = \Theta(\omega),$$

wo wir $x'' : y'' = \omega$ gesetzt haben. Bemerken wir nun, daß $\Theta(x'' : y'')$ sicher auf die Form $\psi(x'' + y'') + \Psi(x'' - y'')$ gebracht werden kann, so erhalten wir zur Bestimmung von Θ die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\Theta}{dx''^2} - \frac{d^2\Theta}{dy''^2} = 0, \tag{50}$$

die wir in eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen Θ und ω überführen werden.

Es ist:

$$\frac{d\Theta}{dx''} = \frac{1}{y''}\frac{d\Theta}{d\omega}, \quad \frac{d\Theta}{dy''} = -\frac{x''}{y''^2}\frac{d\Theta}{d\omega},$$
$$\frac{d^2\Theta}{dx''^2} = \frac{1}{y''^2}\frac{d^2\Theta}{d\omega^2}, \quad \frac{d^2\Theta}{dy''^2} = 2\frac{x''}{y''^3}\frac{d\Theta}{d\omega} + \frac{x''^2}{y''^4}\frac{d^2\Theta}{d\omega^2},$$

also erhalten wir durch Einsetzung in (50) die lineare Differentialgleichung:

$$(1-\omega^2)\frac{d^2\Theta}{d\omega^2} - 2\omega\frac{d\Theta}{d\omega} = 0 = \frac{d}{d\omega}\left\{(1-\omega^2)\frac{d\Theta}{d\omega}\right\},$$

deren allgemeine Lösung die Form:

$$\Theta = M\log\frac{\omega+1}{\omega-1} + N$$

besitzt. Setzen wir hier $M = 1$, wie wir ohne Beschränkung tun können, und andererseits $\omega = x'' : y''$, so wird:

$$\Theta = \log(x'' + y'') - \log(x'' - y'') + N,$$

oder (§ 4, Formel (23')):

$$e^{w'} = \log(x'' + y'') - \log(x'' - y'') + N = \frac{d^2U}{dx''\,dy''}.$$

Dabei sind die Größen ξ' und η' nach den Entwickelungen des soeben zitierten Paragraphen bestimmt durch die Formeln:

$$\xi' = \frac{dU}{dx''}, \quad \eta' = \frac{dU}{dy''},$$

welche:

$$\xi' = (x'' + y'')\log(x'' + y'') + (x'' - y'')\log(x'' - y'') + Ny'' + X_1(x''),$$
$$\eta' = (x'' + y'')\log(x'' + y'') - (x'' - y'')\log(x'' - y'') + Nx'' + Y_1(y'')$$

ergeben.

Zur Bestimmung der noch unbekannten Funktionen $X_1(x'')$ und [407 $Y_1(y'')$ benutzen wir die Gleichungen:

$$\xi' = \xi\frac{dx'}{dx} = \xi\frac{dx''}{dx} = (f(x-y) + \varepsilon x)\tfrac{1}{2}\alpha x'',$$
$$\eta' = \eta\frac{dy'}{dy} = \eta\frac{dy''}{dy} = (\varphi(x-y) + \varepsilon y)\tfrac{1}{2}\alpha y''.$$

Die erste gibt durch Division mit x'':

$$\left(1+\frac{y''}{x''}\right)\log\left(1+\frac{y''}{x''}\right) + \left(1-\frac{y''}{x''}\right)\log\left(1-\frac{y''}{x''}\right) + 2\log x'' + N\frac{y''}{x''} + \frac{X_1(x'')}{x''} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\alpha(f(x-y) + \varepsilon x) = \tfrac{1}{2}\alpha\,\Omega\left(\frac{x''}{y''}\right) + \varepsilon\log\frac{\alpha x''}{2\sqrt{K}},$$

und, wenn der Größe $y'' : x''$ ein konstanter Wert erteilt wird, folgt:

$$2\log x'' + \frac{X_1(x'')}{x''} = \varepsilon\,.\,\log\frac{\alpha x''}{2\sqrt{K}} + P \qquad (P = \text{Const.}),$$

oder:

$$X_1(x'') = (\varepsilon - 2)x''\log x'' + P_1 x'' \qquad (P_1 = \text{Const.}).$$

Eine ganz analoge Rechnung gibt:

$$Y_1(y'') = (\varepsilon - 2)\,y'' \log y'' + R_1 y'' \qquad (R_1 = \text{Const.}).$$

Indem wir jetzt zu den Bezeichnungen des Paragraphen 4 zurückkehren, finden wir:

$$\varphi' = (x'' + y'') \log (x'' + y'') + \tfrac{1}{2} N (x'' + y''),$$

$$\Phi' = (x'' - y'') \log (x'' - y'') - \tfrac{1}{2} N (x'' - y''),$$

$$\varphi'' = \log (x'' + y'') + 1 + \tfrac{1}{2} N, \quad \Phi'' = \log (x'' - y'') + 1 - \tfrac{1}{2} N,$$

$$\varphi''' = \frac{1}{x'' + y''}, \quad X' = (\varepsilon - 2)\,x'' \log x'' + P_1 x'',$$

$$\Phi''' = \frac{1}{x'' - y''}, \quad Y' = (\varepsilon - 2)\,y'' \log y'' + R_1 y''.$$

Diese Werte setzen wir in die Fundamentalgleichung (27) ein und finden hierdurch eine nicht identische algebraische Relation zwischen:

$$x'', y'', \;\log (x'' + y''),\; \log (x'' - y''),\; \log x'',\; \log y''.$$

Da indes eine solche Relation unmöglich ist, so schließen wir, daß die Annahme $\alpha \gtrless 0$ keine Fläche liefert, welche gleichzeitig meiner ersten und meiner dritten Klasse angehört.

Nichtsdestoweniger werden wir später finden (Note 1), daß die Flächenfamilie:

$$e^{w'} = \log (x'' + y'') - \log (x'' - y'') + N$$

bei Untersuchungen über geodätische Kurven Interesse darbietet.

Ich will nunmehr annehmen, daß $\alpha = 0$ ist. Alsdann wird: [408

$$\xi = f(x - y) + \varepsilon x, \quad \eta = \varphi (x - y) + \varepsilon y,$$

$$e^{w} = \lambda (x - y) = X(x) \frac{d\xi}{dy} = Y(y) \frac{d\eta}{dx}$$

und:

$$X(x) = K^2 = \text{Const.}, \quad Y(y) = L^2 = \text{Const.}$$

Wir führen wiederum neue Variable x' und y' ein, indem wir setzen:

$$dx' = K\,dx, \quad dy' = L\,dy$$

und:

$$x'' = x' + \beta = Kx, \quad y'' = y' + \beta = Ly.$$

Es ist:

$$e^{w'} = e^{w} \frac{dx}{dx'} \frac{dy}{dy'} = \frac{\lambda(x - y)}{KL} = \frac{1}{KL} \lambda \left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right),$$

und, da $e^{w'}$ die Form $\psi(x'' + y'') + \Psi(x'' - y'')$ besitzen soll, so muß λ die Gleichung:

$$\frac{d^2\lambda}{dx''^2} - \frac{d^2\lambda}{dy''^2} = 0 = \left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{L^2}\right) \lambda'' = 0$$

befriedigen, was auf zwei verschiedene Weisen geschehen kann, jenachdem $K^2 - L^2$ gleich Null oder von Null verschieden ist.

Ist $K^2 - L^2 \gtrless 0$, so wird:

$$e^{w'} = C + D\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right) = \frac{d^2 U}{dx'\,dy'}$$

und:

$$\xi' = \frac{dU}{dx'} = Cy'' + \frac{D}{K} x'' y'' - \frac{1}{2} \frac{D}{L} y''^2 + X_1(x''),$$

$$\eta' = \frac{dU}{dy'} = Cx'' + \frac{1}{2} \frac{D}{K} x''^2 - \frac{D}{L} x'' y'' + Y_1(y'').$$

Andererseits ist:

$$\xi' = \xi \frac{dx'}{dx} = K\xi = Kf(x - y) + K\varepsilon x,$$

$$\eta' = \eta \frac{dy'}{dy} = L\eta = L\varphi (x - y) + L\varepsilon y.$$

Also wird:

$$CLy + DLxy - \tfrac{1}{2} DLy^2 + X_1(x) = Kf(x - y) + K\varepsilon x,$$

$$CKx + \tfrac{1}{2} DKx^2 - DKxy + Y_1(y) = L\varphi (x - y) + L\varepsilon y$$

und:

$$X_1 = -\tfrac{1}{2} DLx^2 + (K\varepsilon - CL)x + A,$$

$$Y_1 = \quad \tfrac{1}{2} DKy^2 + (L\varepsilon - CK)y + B,$$

und endlich:

$$\xi' = -\frac{1}{2} DL \left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right)^2 + \frac{K\varepsilon - CL}{K} x'' + Cy'' + A,$$ [409

$$\eta' = \quad \frac{1}{2} DK \left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right)^2 + \frac{L\varepsilon - CK}{L} y'' + Cx'' + B.$$

Diese Werte substituieren wir in die Bedingungsgleichungen (23), die wir vorher mit $e^{w'}$ multiplizieren. Indem wir sodann bemerken, daß der Koeffizient der Größe:

$$\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right)^2$$

in beiden Gleichungen verschwinden muß, erkennen wir, daß die Konstante D gleich Null ist, und daß daher die betreffenden Flächen developpabel sind.

Sei jetzt $K^2 - L^2 = 0$ und $K = \pm L$, zum Beispiel $K = + L = 1$. Alsdann wird, wenn wir $\lambda(x-y) = \mu'(x-y)$ setzen:

$$e^w = \lambda(x-y) = \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx} = \mu'(x-y)$$

und durch Integration:

$$\xi = -\mu(x-y) + X', \quad \eta = \mu(x-y) + Y'.$$

Nun aber ist, wissen wir:

$$\xi = f(x-y) + \varepsilon x, \quad \eta = \psi(x-y) + \varepsilon y,$$

sodaß wir:

$$X' = \varepsilon x + \varepsilon_1, \; Y' = \varepsilon y + \varepsilon_2$$

und:

$$\xi = -\mu(x-y) + \varepsilon x + \varepsilon_1, \quad \eta = \mu(x-y) + \varepsilon y + \varepsilon_2$$

setzen können. Kehren wir jetzt zu den Bezeichnungen des § 4 zurück, so wird:

$$\varphi'' = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \Phi'' = -\mu'(x-y), \quad \Phi' = -\mu(x-y),$$

$$\xi' = \varphi' + \Phi' + X', \quad \eta' = \varphi' - \Phi' + Y'; \quad X' = \varepsilon x + \varepsilon_1, \quad Y' = \varepsilon y + \varepsilon_2,$$

und, wenn wir diese Werte in die Bedingungsgleichung (27) substituieren, so erhalten wir die Gleichung:

$$(2\mu - \varepsilon(x-y) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2))\mu'' + (A - 2\varepsilon)\mu' - 4\mu'^2 = 0,$$

oder, da $\Phi' = -\mu$ ist, die äquivalente Gleichung:

$$(2\Phi' + \varepsilon(x-y) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2)\Phi''' + (2\varepsilon - A)\Phi'' - 4\Phi''^2 = 0,$$

die wir schon in Nr. 13 getroffen und integriert haben. In dieser Weise finden wir eine interessante Familie von Flächen, die einerseits auf Rotationsflächen abwickelbar sind, andererseits unserer dritten Klasse angehören.

30. Jetzt erledigen wir den Fall, daß die zwischen den beiden infinitesimalen Transformationen:

$$B_1 f = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}, \quad B_2 f = \xi(x,y)\frac{df}{dx} + \eta(x,y)\frac{df}{dy}$$

bestehende Relation die Form:

$$B_1(B_2(f)) - B_2(B_1(f)) = B_2 f$$ [410

besitzt, und daß daher die Größen ξ und η die Gleichungen:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\xi}{dy} = \xi, \quad \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\eta}{dy} = \eta$$

erfüllen, und somit die Form:

(51) $$\xi = e^x f(x-y), \quad \eta = e^y \varphi(x-y)$$

besitzen.

Da die geodätischen Kurven unserer Flächen die infinitesimale Transformation $B_1 f = df : dx + df : dy$ gestatten, so hat das entsprechende Bogenelement die Form $e^w = e^{\alpha x}\lambda(x-y)$; und da die betreffenden Flächen überdies der dritten Klasse angehören sollen, so bestehen Relationen von der Form:

$$X(x)\frac{d\xi}{dy} = e^w = Y(y)\frac{d\eta}{dx}$$

und:

$$e^w = -X e^x f'(x-y) = e^{\alpha x}\lambda(x-y) = Y e^y \varphi'(x-y).$$

Daher kann man schließen, daß X und Y die Form:

$$X = K^2 e^{(\alpha-1)x}, \quad Y = L^2 e^{(\alpha-1)y}$$

besitzen, und daß dabei K^2 und L^2 gewisse Konstanten bezeichnen.

Wünschen wir das Bogenelement auf die Form $\psi(x'+y') + \Psi(x'-y')$ zu bringen, so müssen wir nach (21′):

(52) $$dx' = K e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)x} dx, \quad dy' = L e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)y} dy$$

setzen. Ist hier $\alpha - 1$ von Null verschieden, so wird:

$$\frac{2K}{\alpha-1} e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)x} = x' + \beta = x'', \quad \frac{2L}{\alpha-1} e^{\frac{1}{2}(\alpha-1)y} = y' + \beta = y''$$

und:

$$x = \frac{2}{\alpha-1}\log\frac{(\alpha-1)x''}{2K}, \quad y = \frac{2}{\alpha-1}\log\frac{(\alpha-1)y''}{2L}.$$

Es ist:

$$e^{w'} = e^w \frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'} = \frac{e^{\alpha x}\lambda(x-y)}{KL} e^{\frac{1}{2}(1-\alpha)(x+y)} = e^x \Omega(x-y),$$

und also besteht eine Relation von der Form:

$$e^{w'} = x''^{\frac{2}{\alpha-1}}\,\Theta\left(\frac{y''}{x''}\right) = x''^{\frac{2}{\alpha-1}}\,\Theta(\omega),$$

wo zur Abkürzung $y'' : x'' = \omega$ gesetzt ist.

Zur Bestimmung der Funktion $\Theta(\omega)$ bilden wir die Gleichung:

$$\frac{d^2}{dx''^2}e^{w'} - \frac{d^2}{dy''^2}e^{w'} = 0,$$

die stattfinden muß, da $e^{w'}$ die Form $\psi(x''+y'')+\Psi(x''-y'')$ be- [411
sitzen soll, und finden hierdurch die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$(\omega^2-1)\,\Theta''-2\,\frac{3-\alpha}{\alpha-1}\,\omega\,\Theta'+\frac{2}{\alpha-1}\cdot\frac{3-\alpha}{\alpha-1}\,\Theta=0,$$

deren allgemeines Integral:

$$L(1+\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}+M(1-\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}$$

die beiden Konstanten L und M besitzt. Dies gibt:

$$e^{w'}=L(x''+y'')^{\frac{2}{\alpha-1}}+M(x''-y'')^{\frac{2}{\alpha-1}}=\frac{d^2U}{dx''\,dy''}; \tag{53}$$

dabei ist $\xi'=dU:dx''$, $\eta'=dU:dy''$. Schließen wir daher den Fall, daß $\alpha=-1$ ist, aus, so kommt durch Integration:

$$\xi'=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,L(x''+y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,M(x''-y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}+X',$$

$$\eta'=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,L(x''+y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,M(x''-y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}+Y'.$$

Nun aber ist:

$$\xi'=\frac{dx'}{dx}\,\xi=\frac{1}{2}(\alpha-1)x''e^{x}f(x-y)=x''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\,F\left(\frac{y''}{x''}\right),$$

$$\eta'=\frac{dy'}{dy}\,\eta=\frac{1}{2}(\alpha-1)y''e^{y}\varphi(x-y)=y''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\,\Phi\left(\frac{y''}{x''}\right),$$

und also besitzen X' und Y' die Form:

$$X'=Rx''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},\quad Y'=Sy''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},$$

wobei R und S zwei Konstanten sind.

Jetzt kehren wir zu den Bezeichnungen des § 4 zurück. Es ist:

$$\varphi''=\qquad L(x''+y'')^{\frac{2}{\alpha-1}},\quad \Phi''=\qquad -M(x''-y'')^{\frac{2}{\alpha-1}},$$

$$\varphi'=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,L(x''+y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},\quad \Phi'=-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,M(x''-y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},$$

$$\varphi'''=\frac{2}{\alpha-1}\,L(x''+y'')^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}},\quad \Phi'''=-\frac{2}{\alpha-1}\,M(x''-y'')^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}.$$

Diese Werte substituieren wir in die Bedingungsgleichung (27):

$$0=A(\varphi''-\Phi'')+4(\varphi''^2-\Phi''^2)-(X''+Y'')(\varphi''-\Phi'')-$$
$$-2\varphi'\varphi'''+2\Phi'\Phi'''-(X'+Y')\varphi'''+(X'-Y')\Phi''',$$

und erhalten hierdurch eine Gleichung, deren Glieder mit Ausnahme von $A(\varphi''-\Phi'')$ hinsichtlich x'', y'' homogen von der Dimension $4:(\alpha-1)$ [412
sind; während das ausgeschlossene Glied $A(\varphi''-\Phi'')$ von der Dimension $2:(\alpha-1)$ ist. Also können wir zunächst schließen, daß die Konstante A gleich Null sein muß. Es ist, wenn wir wie früher $y'':x''=\omega$ setzen:

$$(4\varphi''^2-2\varphi'\varphi'''):x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=\qquad\frac{4\alpha}{\alpha+1}\,L^2(1+\omega)^{\frac{4}{\alpha-1}},$$

$$(-4\Phi''^2+2\Phi'\Phi'''):x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=-\frac{4\alpha}{\alpha+1}\,M^2(1-\omega)^{\frac{4}{\alpha-1}},$$

$$(-X''\varphi''-X'\varphi'''):x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=$$
$$=-RL\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(1+\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}+\frac{2}{\alpha-1}(1+\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right\},$$

$$(X''\Phi''+X'\Phi'''):x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=$$
$$=-RM\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(1-\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}+\frac{2}{\alpha-1}(1-\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right\},$$

$$(-Y''\varphi''-Y'\varphi'''):x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=$$
$$=-SL\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\,\omega^{\frac{2}{\alpha-1}}(1+\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}+\frac{2}{\alpha-1}\,\omega^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(1+\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right\},$$

$$(Y''\Phi''-Y'\Phi'''):x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=$$
$$=-SM\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\,\omega^{\frac{2}{\alpha-1}}(1-\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}-\frac{2}{\alpha-1}\,\omega^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(1-\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right\},$$

und, da die Summe der links stehenden Glieder gleich Null ist, so verschwindet die Summe der rechts stehenden Glieder ebenfalls. Setzen wir jetzt zunächst voraus, daß $2:(\alpha-1)$ keine ganze positive oder negative Zahl ist, so erkennen wir durch Reihenentwickelungen, daß die Summe der beiden letzten rechts stehenden Glieder verschwindet, und daß infolgedessen:

$$S(L+M)=0,\quad S(L-M)=0$$

ist; da L und M nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, schließen wir, daß $S = 0$ ist. Und durch Vertauschung der gleichberechtigten Größen x'', y'' schließen wir unter den genannten Voraussetzungen, daß auch $R = 0$ ist. Unsere Bedingungsgleichung reduziert sich hierdurch auf die beiden ersten Glieder, deren Summe nur dann verschwindet, wenn $\alpha = 0$ ist.

Die Annahme $\alpha = 0$ liefert die Flächenfamilie:

$$e^{w} = \frac{L}{(x+y)^2} + \frac{M}{(x-y)^2};$$

die entsprechenden Flächen sind auf Rotationsflächen abwickelbar und gehören zugleich meiner dritten Klasse an. Ich zeige später, daß die betreffenden geodätischen Kurven drei unabhängige infinitesimale Transformationen gestatten.

Ist andererseits $2:(\alpha-1)$ eine ganze negative Zahl, so er- [413 kennen wir, indem wir von der Annahme $2:(\alpha-1) = -1$ absehen, die auf den schon früher ausgeschlossenen Fall $\alpha = -1$ führen würde, daß auch jetzt $R = S = 0$ sein muß. Infolgedessen müßte wiederum $\alpha = 0$ sein, was indes jetzt ausgeschlossen ist.

Setzen wir endlich voraus, daß $2:(\alpha-1)$ eine ganze positive Zahl ist, so werden wir zunächst annehmen, daß $2:(\alpha-1) > 2$ ist. Alsdann erhalten wir jedenfalls die sechs folgenden Relationen zwischen L, M, R, S und α:

$$\frac{4\alpha}{\alpha+1}(L^2 - M^2) - \frac{\alpha+3}{\alpha-1} R(L+M) = 0,$$

$$\frac{2\alpha}{\alpha+1}(L^2 + M^2) - \frac{1}{\alpha-1} R(L-M) = 0,$$

$$\frac{8\alpha}{\alpha+1}(L^2 - M^2) - \frac{3-\alpha}{\alpha-1} R(L+M) = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{8\alpha}{\alpha+1}(L^2 - M^2) - \frac{3-\alpha}{\alpha-1} S\left(L + (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M\right) = 0,$$

$$\frac{2\alpha}{\alpha+1}(L^2 + M^2) - \frac{1}{\alpha-1} S\left(L - (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M\right) = 0,$$

$$\frac{4\alpha}{\alpha+1}(L^2 - M^2) - \frac{\alpha+3}{\alpha-1} S\left(L + (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M\right) = 0.$$

Hier kombinieren wir die erste Gleichung mit der dritten, und andererseits die vierte mit der sechsten, und erhalten hierdurch die beiden Relationen:

$$\frac{3(\alpha+1)}{\alpha-1} R(L+M) = 0, \quad \frac{3(\alpha+1)}{\alpha-1} S\left(L + (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M\right) = 0,$$

die sich, da die Annahme $\alpha + 1 = 0$ den ausgeschlossenen Fall:

$$2:(\alpha-1) = -1$$

geben würde, auf die Gleichungen:

$$R(L+M) = 0, \quad S\left(L + (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M\right) = 0$$

reduzieren.

Wäre $R = 0$, so gäben die beiden ersten unter den sechs obenstehenden Relationen die Gleichungen:

$$\alpha(L^2 - M^2) = 0, \quad \alpha(L^2 + M^2) = 0,$$

sodaß sowohl L wie M verschwinden müßte, was indes absurd wäre. Ein analoges Raisonnement zeigt, daß auch S nicht verschwinden darf. Also wird:

$$L + M = 0, \quad L + (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M = 0$$ [414

und:

$$(-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} = 1,$$

sodaß $2:(\alpha-1)$ eine gerade Zahl sein muß, und dabei unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls größer als 3. Infolgedessen können wir zu den sechs obenstehenden Relationen sicher noch weitere, insbesondere die nachstehende, fügen:

$$\frac{4\alpha(5-\alpha)}{\alpha+1}(L^2 + M^2) - \frac{(2-\alpha)(3-\alpha)}{\alpha-1} R(L-M) = 0.$$

In diese substituieren wir den Wert $M = -L$ und zugleich den aus der zweiten unter den sechs obenstehenden Relationen hervorgehenden Wert:

$$R = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{\alpha+1} L$$

und erhalten hierdurch die Gleichung:

$$\alpha^2 - 3\alpha = 4,$$

deren Wurzeln -1 und 4 der Größe $2:(\alpha-1)$ die ausgeschlossenen Werte -1 und $\frac{2}{3}$ geben würden. Die Annahme, daß $2:(\alpha-1)$ eine ganze positive Zahl, und dabei größer als 2 ist, gibt somit nichts.

Ich will sodann annehmen, daß $2:(\alpha-1)=2$ und also $\alpha=2$ ist. Dann erhalten wir die Relationen:

$$\tfrac{8}{3}(L^2-M^2)-5R(L+M)=0,$$

$$\tfrac{8}{3}\cdot 4(L^2+M^2)-8R(L-M)=0,$$

$$16(L^2-M^2)-3(R+S)(L+M)=0,$$

$$\tfrac{8}{3}\cdot 4(L^2+M^2)-8S(L-M)=0,$$

$$\tfrac{8}{3}(L^2-M^2)-5S(L+M)=0,$$

aus denen:

$$(R-S)(L+M)=0, \quad (R-S)(L-M)=0$$

hervorgeht, sodaß wir $R=S$ setzen können. Also wird:

$$\tfrac{8}{3}(L^2-M^2)-5R(L+M)=0,$$

$$16(L^2-M^2)-6R(L+M)=0,$$

und:

$$L^2-M^2=0, \quad R(L+M)=0.$$

Wäre nun $R=0=S$, so ergäben sich wie früher die absurden [415 Werte $L=M=0$. Also ist $L+M=0$, sodaß unser Bogenelement die Form:

$$e^{w'}=L(x''+y'')^2-L(x''-y'')^2=4Lx''y''$$

annimmt. Dieser Fall führt somit nur auf developpable Flächen.

Ich will endlich annehmen, daß $2:(\alpha-1)=1$ ist. Dann werden L, M, R und S bestimmt durch die Gleichungen:

$$L^2-M^2-R(L+M)=0,$$

$$6(L^2+M^2)-2R(L-M)-2S(L+M)=0,$$

$$L^2-M^2-S(L-M)=0,$$

welche uns, da die Annahme $L\pm M=0$ nur developpable Flächen liefert und somit ausgeschlossen werden kann, die folgenden Werte gibt:

$$M=iL, \quad R=L(1-i), \quad S=L(1+i).$$

Durch Weglassung von unwesentlichen konstanten Faktoren können wir hiernach:

$$e^{w'}=x''-iy'',$$

$$\xi'=3x''^2+2\,ix''y''+y''^2, \quad \eta'=ix''^2+2x''y''+3iy''^2$$

setzen. Die betreffenden Flächen gehören, wie man sieht, zu denjenigen, deren geodätische Kurven zwei konforme infinitesimale Transformationen, nämlich:

$$\frac{df}{dx''}-i\frac{df}{dy''}, \quad x''\frac{df}{dx''}+y''\frac{df}{dy''}$$

gestatten.

Die geodätischen Kurven der Flächen $e^w=x-iy$ gestatten somit drei infinitesimale Transformationen, nämlich:

$$B_1f=\frac{df}{dx}-i\frac{df}{dy}, \quad B_2f=x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy},$$

$$B_3f=(3x^2+2\,ixy+y^2)\frac{df}{dx}+(ix^2+2xy+3iy^2)\frac{df}{dy}.$$

Diese sind, wie man sieht, verbunden durch die Relationen:

$$(B_1B_2)=B_1f, \quad (B_1B_3)=8B_2f, \quad (B_2B_3)=B_3f.$$

Ich will nun annehmen, daß in den Gleichungen (52) die Größe $\alpha=1$ ist; dann sind die neuen unabhängigen Variabeln x', y' bestimmt durch die Gleichungen:

$$dx'=Kdx, \quad dy'=Ldy,$$

die durch Integration:

$$Kx=x'+\beta=x'', \quad Ly=y'+\gamma=y''$$

geben. Also wird:

$$e^{w'}=e^{w}\frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'}=\frac{e^x\lambda(x-y)}{KL}=\frac{e^{x'':K}.\lambda\left(\frac{x''}{K}-\frac{y''}{L}\right)}{KL}, \qquad [416$$

und dabei ist die unbekannte Funktion λ bestimmt durch die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dx''^2}(e^{x'':K}.\lambda)-\frac{d^2}{dy''^2}(e^{x'':K}.\lambda)=0,$$

oder durch die äquivalente gewöhnliche Differentialgleichung:

$$(L^2-K^2)\lambda''+2L^2\lambda'+L^2\lambda=0,$$

deren allgemeines Integral, da wir von der, nur developpable Flächen liefernden Hypothese $L^2-K^2=0$ absehen können, die Form:

$$Ae^{-\frac{L}{L+K}\left(\frac{x''}{K}-\frac{y''}{L}\right)}+Be^{-\frac{L}{L-K}\left(\frac{x''}{K}-\frac{y''}{L}\right)}$$

besitzt. Infolgedessen können wir:

$$e^{w'} = A e^{\frac{x''+y''}{L+K}} + B e^{-\frac{x''-y''}{L-K}} = \frac{d^2 U}{dx''\,dy''}$$

setzen.

Durch Integration erhalten die Größen:

$$\xi' = \frac{dU}{dx''}, \quad \eta' = \frac{dU}{dy''}$$

die Werte:

$$\xi' = A(L+K)e^{\frac{x''+y''}{L+K}} + B(L-K)e^{-\frac{x''-y''}{L-K}} + X',$$

$$\eta' = A(L+K)e^{\frac{x''+y''}{L+K}} - B(L-K)e^{-\frac{x''-y''}{L-K}} + Y',$$

und, da ξ' und η' andererseits (51) die Form:

$$\xi' = \xi\frac{dx'}{dx} = e^{x} f(x-y) = e^{\frac{x''}{K}} f\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right),$$

$$\eta' = \eta\frac{dy'}{dy} = e^{y}\varphi(x-y) = e^{\frac{y''}{L}}\varphi\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right)$$

besitzen müssen, so erkennen wir, daß X' und Y' in die Form gesetzt werden können:

$$X' = R e^{\frac{x''}{K}}, \quad Y' = S e^{\frac{y''}{L}},$$

wobei K und L Konstanten sind.

Kehren wir jetzt zu den Bezeichnungen des vierten Paragraphen zurück, so wird:

$$\varphi' = A(L+K)e^{\frac{x''+y''}{L+K}}, \quad \Phi' = B(L-K)e^{-\frac{x''-y''}{L-K}}.$$

Setzen wir diese Werte, wie auch die soeben gefundenen Werte von X' und Y' in die Bedingungsgleichung (27) ein, und sehen dabei von der Annahme $AB = 0$, die nur developpable Flächen liefert, ab, so [417
werden wir auf Widerspruch geführt, und erkennen somit, daß *die Hypothese $\alpha = 1$ keine nicht developpable Fläche der dritten Klasse liefert.*

Es bleibt noch die Annahme zu erledigen, daß in der Gleichung (53) die Größe $\alpha = -1$ ist. Dann wird:

$$e^{w'} = \frac{L}{x''+y''} + \frac{M}{x''-y''} = \frac{d^2U}{dx''\,dy''}$$

und:

$$\xi' = \frac{dU}{dx''} = L\log(x''+y'') - M\log(x''-y'') + X',$$

$$\eta' = \frac{dU}{dy''} = L\log(x''+y'') + M\log(x''-y'') + Y'.$$

Nun aber bestehen (51) Gleichungen von der Form:

$$\xi' = \xi\frac{dx'}{dx} = f(x-y) = \Theta\left(\frac{y''}{x''}\right),$$

$$\eta' = \eta\frac{dy'}{dy} = \varphi(x-y) = \Omega\left(\frac{y''}{x''}\right),$$

und also haben X' und Y' die Werte:

$$X' = (M-L)\log x'' + R,$$

$$Y' = -(M+L)\log y'' + S,$$

wo R und S gewisse Konstanten bezeichnen. Setzen wir die gefundenen Ausdrücke in die Bedingungsgleichung (27) ein, so werden wir wiederum auf Widerspruch geführt, und erkennen somit, daß auch die Annahme $\alpha = -1$ keine Fläche der dritten Klasse liefert.

31. Um die Untersuchungen dieses Paragraphen zum vollständigen Abschlusse zu bringen, müssen wir schließlich alle der dritten Klasse angehörigen Flächen suchen, deren Bogenelement die Form $e^{w} = (x-y)^m$ besitzt.

Unser Verlangen führt auf die Funktionalgleichung:

$$(X+Y)^m X'Y' = \psi(x+y) + \Psi(x-y),$$

und also zugleich auf die Differentialgleichung:

$$(54)\qquad (X+Y)^2\left(\frac{X'''}{X'} - \frac{Y'''}{Y'}\right) + 3m(X+Y)(X''-Y'') + \\ + m(m-1)(X'^2 - Y'^2) = 0,$$

die durch die Substitution:

$$X = z, \quad X'^2 = w, \quad Y = \zeta, \quad Y'^2 = \omega$$

die Form:

$$(54^*)\qquad w'' - \omega'' + \frac{3m}{z+\zeta}(w'-\omega') + \frac{2m(m-1)}{(z+\zeta)^2}(w-\omega) = 0$$

annimmt. Durch Differentiation hinsichtlich ζ kommt die Gleichung:

$$\frac{3m}{(z+\zeta)^2}(w'-\omega') + \frac{4m(m-1)}{(z+\zeta)^3}(w-\omega) + \omega''' + \frac{3m}{z+\zeta}\omega'' + \quad [418 \\ + \frac{2m(m-1)}{(z+\zeta)^2}\omega' = 0,$$

oder die äquivalente:

$$3m(w'-\omega') + \frac{4m(m-1)}{z+\zeta}(w-\omega) + \omega'''(z+\zeta)^2 + 3m\,\omega''(z+\zeta) + \\ + 2m(m-1)\omega' = 0,$$

und durch neue Differentiation hinsichtlich ζ:

$$-\frac{4m(m-1)}{(z+\zeta)^2}(w-\omega)-\frac{4m(m-1)}{z+\zeta}\omega'+2m(m-1)\omega''+$$
$$+(3m+2)(z+\zeta)\omega'''+(z+\zeta)^2\omega^{(4)}=0.$$

Wenn wir endlich mit $(z+\zeta)^2$ multiplizieren, und sodann hinsichtlich ζ differentiieren, so erhalten wir die Relation:

$$(2m^2+7m+6)(z+\zeta)^2\omega'''+(3m+6)(z+\zeta)^3\omega^{(4)}+(z+\zeta)^4\omega^{(5)}=0,$$

welche zeigt, daß die Größe $\omega^{(4)}$ sicher verschwindet, und daß ω''' nur, wenn $2m^2+7m+6$ verschwindet, von Null verschieden sein kann.

In dieser Weise erkennen wir, daß $X(x)$ und $Y(y)$ immer zwei Differentialgleichungen von der Form:

$$X'^2=a+bX+cX^2+dX^3,$$
$$Y'^2=\alpha+\beta Y+\gamma Y^2+\delta Y^3$$

mit konstanten Koeffizienten erfüllen. Setzen wir diese Werte in die Bedingungsgleichung (54*) ein, so erkennen wir, daß m gleich -2, 0 oder 1 sein muß.

Die beiden erstgenannten Hypothesen liefern nur Flächen konstanter Krümmung. Die Annahme $m=1$ liefert die wichtige Flächenfamilie $e^w=x+y$, die wir indes schon früher gefunden und diskutiert haben.

Hiermit kennen wir das Bogenelement einer jeden Fläche der dritten Klasse, die gleichzeitig entweder der ersten oder der zweiten Klasse angehört.

Dagegen ist es mir nicht gelungen, alle Flächen zu bestimmen, die in mehrfacher Weise der dritten Klasse angehören. Ich weiß nur, daß Flächen mit dem Bogenelemente:

$$e^w=\frac{A}{(x+y)^2}+\frac{B}{(x-y)^2}$$

in zweifacher Weise dieser Klasse angehören (Note 1).

Ob es Flächen gibt, die in dreifacher Weise der dritten Klasse angehören, ist mir nicht gelungen, definitiv zu entscheiden; ich betrachte es indes als außerordentlich wahrscheinlich, daß dies bei den Flächen:

$$e^w=\left(\frac{1}{u^4+Mu^2+K}-\frac{1}{v^4+Mv^2+K}\right)\left(\frac{du^2}{u^4+Mu^2+K}-\frac{dv^2}{v^4+Mv^2+K}\right),$$

die ich in der nachfolgenden Note 1 betrachte, der Fall ist. [419

In der dritten Note zeige ich, daß Flächen, deren Krümmung nicht konstant ist, nie mehr als drei infinitesimale Transformationen ihrer geodätischen Kurven gestatten können.

Note 1. Über die allgemeinste geodätische Abbildung einer reellen oder imaginären Fläche.

In einer schönen Abhandlung der Annali di Matematica, Serie II, t. 3, beschäftigt sich Dini, wie schon bemerkt, mit der allgemeinsten Bestimmung zweier Flächen, die sich derart auf einander abbilden lassen, daß zu einem gegebenen Punkte der einen Fläche ein Punkt oder einige Punkte der andern Fläche zugeordnet sind, und dabei den geodätischen Kurven der ersten Fläche ebensolche Kurven der zweiten Fläche entsprechen. Zwei solche Flächen, sagt Dini, sind geodätisch auf einander abgebildet.

Verlangt man mit Dini sowohl, daß die betreffenden Flächen reell sind, wie daß sich die Abbildung durch reelle Gleichungen zwischen den Cartesischen Punktkoordinaten der beiden Flächen ausdrücken lassen soll, so geben Dinis Entwickelungen die allgemeinste Erledigung des gestellten Problems. Läßt man dagegen alle Beschränkungen hinsichtlich der Realität fallen, so erhält man, wie ich in dieser Note zeigen werde, noch weitere Resultate.

32. Dini nimmt seinen Ausgangspunkt in dem folgenden von Tissot herrührenden Satze:

Sind zwei reelle Flächen durch eine ganz beliebige reelle Punkttransformation auf einander abgebildet, so gibt es immer auf der einen Fläche ein Orthogonalsystem von Kurven, deren entsprechende Kurven auf der andern Fläche ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden.

Um einen naturgemäßen Ausgangspunkt für die Erledigung unserer allgemeineren Fragestellung zu gewinnen, werden wir zunächst die Beschränkungen suchen, unter denen sich Tissots Satz auf imaginäre Flächen ausdehnen läßt.

Wir wollen annehmen, daß zwei Strahlenbüschel ($\mathfrak{t}$) und (τ) projektiv auf einander bezogen sind, und daß dabei $\mathfrak{t}$ und τ entsprechende Gerade sind. Wir setzen ausdrücklich voraus, daß die Ebenen dieser Strahlenbüschel den Kugelkreis nicht berühren, daß vielmehr jede ihn in verschiedenen Punkten schneidet. Seien m_1 und m_2 die beiden getrennten Geraden des ersten Büschels, die den Kugelkreis schneiden, und seien m_1' und m_2' diejenigen Geraden desselben Büschels, deren entsprechende Gerade μ_1', μ_2' im zweiten Büschel den Kugelkreis schneiden. Setze ich nun zuerst voraus, daß weder m_1 noch m_2 mit m_1' oder m_2' zusammenfällt, so gibt es immer im ersten Büschel ein und nur ein Geradenpaar $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$, das sowohl hinsichtlich $m_1 m_2$, wie hinsichtlich $m_1' m_2'$ [420 *harmonische Lage besitzt.* Daß aber $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ hinsichtlich $m_1 m_2$ harmonisch liegen, heißt eben, daß $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ senkrecht auf einander stehen. Und daß $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ hinsichtlich $m_1' m_2'$ harmonisch liegen, besagt ebenfalls, daß die beiden $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ zugeordneten Geraden τ_1 und τ_2 senkrecht auf einander stehen.

Wenn daher zwei Strahlenbüschel projektiv auf einander bezogen sind, und dabei diejenigen Geraden des einen Büschels, die den Kugelkreis schneiden, solchen Geraden des zweiten Büschels zugeordnet sind, welche den Kugelkreis **nicht** *schneiden, so gibt es in jedem Büschel ein und nur ein Paar getrennter und senkrechter Geraden, deren entsprechende Gerade ebenfalls senkrecht auf einander stehen.*

Wir wollen ferner, indem wir die oben eingeführten Bezeichnungen m_1, m_2, m_1', m_2', μ_1', μ_2' festhalten, annehmen, daß m_1 mit m_1' zusammenfällt, während m_2 und m_2' verschiedene Gerade sind. Sollen jetzt zwei Gerade $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ sowohl hinsichtlich $m_1 m_2$, wie hinsichtlich $m_1' m_2'$ harmonisch liegen, so müssen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ mit einander und gleichzeitig mit m_1 zusammenfallen.

Sind daher zwei Strahlenbüschel projektiv auf einander bezogen, und ist dabei die eine und nur die eine Gerade des ersten Büschels, die den Kugelkreis schneidet, einer Geraden des zweiten Büschels zugeordnet, die ebenfalls den Kugelkreis schneidet, so gibt es im ersten Büschel keine zwei getrennten und senkrechten Geraden, deren entsprechende Gerade im zweiten Büschel senkrecht auf einander stehen.

Fällt endlich m_1 mit m_1' und gleichzeitig m_2 mit m_2' zusammen, so liefert *jedes* Paar senkrechter Geraden im ersten Büschel zwei orthogonale Gerade im zweiten Büschel.

33. Die vorangehenden Entwickelungen zeigen fast unmittelbar, unter welchen Beschränkungen sich *Tissots* Satz auf die allgemeinste analytische Abbildung zweier reeller oder imaginärer Flächen ausdehnen läßt. Zieht man nämlich alle Tangenten in einem willkürlichen Punkte der einen Fläche, und ebenso alle Tangenten in dem zugeordneten Punkte der andern Fläche, so erhält man zwei Strahlenbüschel, deren Gerade durch die Abbildung notwendig *projektiv* auf einander bezogen sind.

Es sind hierbei drei wesentlich verschiedene Fälle denkbar, jenachdem die auf unseren Flächen gelegenen Kurven, deren Bogenlänge gleich

Null ist (die sogenannten *Minimalkurven*) bei der Transformation in ebensolche Kurven übergeführt werden oder nicht. Jede Fläche enthält zwei Scharen Minimalkurven. Gehen bei der Transformation beide Scharen Minimalkurven der einen Fläche in Kurven der andern Fläche über, deren Bogenlänge von Null verschieden ist, so gibt es nach dem Vorangehenden in jedem Punkte der ersten Fläche zwei und nur zwei verschiedene und [auf einander] senkrechte Fortschreitungsrichtungen, denen auf der [421 zweiten Fläche ebenfalls senkrechte Fortschreitungsrichtungen zugeordnet sind.

Wenn daher zwei Flächen in solcher Weise auf einander abgebildet sind, daß den beiden Scharen Minimalkurven der einen Fläche auf der anderen Fläche Kurven zugeordnet sind, deren Bogenlänge von Null verschieden ist, so gibt es auf der ersten Fläche immer zwei (und nie mehr) Scharen von Kurven, die einander orthogonal schneiden, und deren zugeordnete Kurven ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden.

Setzen wir sodann voraus, daß bei der gegenseitigen Abbildung zweier Flächen die eine und nur die eine Schar Minimalkurven der einen Fläche ebensolchen Kurven der andern Fläche zugeordnet ist, so gibt es nach dem Vorangehenden in einem willkürlichen Punkte der einen Fläche keine zwei distinkten orthogonalen Fortschreitungsrichtungen, denen auf der andern Fläche orthogonale Fortschreitungsrichtungen zugeordnet sind.

Geht daher die eine und nur die eine Schar von Minimalkurven bei der Abbildung in ebensolche Kurven über, so gibt es auf keiner der beiden Flächen ein Paar von Kurvenscharen, deren einzelne Kurven einander orthogonal schneiden, während die zugeordneten Kurven ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden.

In diesem Falle bleibt also *Tissots* Satz[1]) nicht mehr gültig. Dieser Ausnahmefall kann offenbar auch eintreten, wenn die beiden Flächen reell sind, vorausgesetzt, daß die Abbildung durch *imaginäre* Relationen zwischen den Cartesischen Punktkoordinaten der betreffenden Flächen vermittelt wird.

Sind endlich zwei Flächen in solcher Weise auf einander abgebildet, daß beiden Scharen Minimalkurven der einen Fläche ebensolche Kurven der andern Fläche entsprechen, so ist die betreffende Abbildung bekannt-

1) Ich kann nicht bezweifeln, daß die im Texte angegebene Beschränkung in *Tissots* Abhandlung, die ich nicht kenne, berücksichtigt worden ist.

lich konform, und daher liefert jedes Orthogonalsystem der einen Fläche ein ebensolches Kurvensystem auf der andern Fläche.

34. Nach diesen Vorbereitungen können wir unser Problem angreifen. Ich will zunächst annehmen, daß zwei Flächen in solcher Weise geodätisch auf einander abgebildet sind, daß es möglich ist, auf der einen Fläche zwei Scharen orthogonaler Kurven anzugeben, deren Bildkurven auf der andern Fläche ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden. In diesem Falle führt die von Dini (Annali di mat. Ser. II, t. III, S. 276—279) entwickelte Methode zum Ziele. Reproduziert man seine Entwickelungen und Rechnungen (S. 276—279 seiner Abhandlung), indem man nur diejenigen Betrachtungen wegläßt, in denen Beschränkungen hinsichtlich der [422 Realität implizite enthalten sind, so erhält man den folgenden Satz:

Satz 20. Sind zwei Flächen geodätisch auf einander abgebildet, und gibt es dabei auf der einen Fläche ein und nur ein System orthogonaler Kurven, deren entsprechende Kurven ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden, so ist es immer möglich, das Bogenelement der einen Fläche auf die Form:

$$ds^2 = \{U(u) - V(v)\}\,(U_1(u)\,du^2 + V_1(v)\,dv^2)\ ^{1)}$$

und gleichzeitig das Bogenelement der andern Fläche auf die Form:

$$\left(\frac{1}{aV+b} - \frac{1}{aU+b}\right)\left(\frac{U_1}{a(aU+b)}\,du^2 + \frac{V_1}{a(aV+b)}\,dv^2\right)$$

zu bringen. Dabei sind $U(u)$, $U_1(u)$, $V(v)$, $V_1(v)$ arbiträre Funktionen ihrer Argumente, während a und b beliebige Konstanten bezeichnen.

Wünscht man, alle Flächen zu finden, auf denen sich eine vorgelegte Fläche vermöge dieses Satzes geodätisch abbilden läßt, so muß man zunächst das Bogenelement der gegebenen Fläche in allgemeinster Weise auf die Form:

$$(U(u) - V(v))\,(U_1(u)\,du^2 + V_1(v)\,dv^2)$$

bringen; sodann gibt Dinis Satz die Form des Bogenelementes der gesuchten Flächen. Ich führe später die Anwendung dieser Theorie auf ein interessantes Beispiel vollständig durch.

1) Man kann im Texte ohne wesentliche Beschränkung $U_1 = 1$, $V_1 = 1$ setzen. Die betreffenden Flächen lassen sich übrigens auch dadurch charakterisieren, daß ihr Bogenelement die Form:

$$ds^2 = [\psi(x+y) + \Psi(x-y)]\,dx\,dy$$

erhalten kann.

35. Ich suche jetzt die allgemeinste geodätische Abbildung einer vorgelegten Fläche, bei der ihre Minimalkurven der einen Schar in Minimalkurven der neuen Fläche übergehen, während sich die Minimalkurven der zweiten Schar in geodätische Kurven umwandeln, deren Bogenlänge von Null verschieden ist.

Ist das Bogenelement der gegebenen Fläche auf die Form:

$$ds^2 = 2\,\mathrm{F}(x,y)\,dx\,dy \tag{55}$$

gebracht, und ordne ich dabei jedem Punkte der neuen Fläche diejenigen Koordinatenwerte x, y zu, welche dem entsprechenden Punkte der vorgelegten Fläche zukommen, sodaß die Abbildung durch die Gleichungen:

$$x = x, \quad y = y$$

vermittelt wird, so kann ich annehmen, daß das Bogenelement der neuen Fläche die Form:

$$ds_1^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy \tag{56}$$

besitzt. Die eine Schar von Minimalkurven wird auf jeder Fläche be- [423 stimmt durch die Gleichung $dx = 0$; die zweite Schar Minimalkurven wird für die erste Fläche durch $dy = 0$, dagegen für die zweite Fläche durch die Differentialgleichung $E\,dx + 2F\,dy = 0$ bestimmt. Da die geodätischen Kurven beider Flächen durch dieselbe Relation zwischen x und y bestimmt werden sollen, so müssen die Differentialgleichungen der geodätischen Kurven unserer beiden Flächen identisch sein.

Die Differentialgleichung der geodätischen Kurven der Fläche (56) hat nach Gauß die Form:

$$\frac{dE}{dx}\,dx^2 + 2\,\frac{dF}{dx}\,dx\,dy = 2\,ds\,.\,d\,\frac{E\,dx + F\,dy}{ds},$$

woraus durch Entwickelung die Gleichung:

$$2F^2y'' + 2F\frac{dF}{dy}y'^2 + \left(3F\frac{dE}{dy} - 2F\frac{dF}{dx}\right)y' + \\ + \left(E\frac{dE}{dy} - 2E\frac{dF}{dx} + F\,\frac{dE}{dx}\right) = 0$$

hervorgeht. Dementsprechend bestimmt die Differentialgleichung:

$$2\mathrm{F}^2y'' + 2\mathrm{F}\,\frac{d\mathrm{F}}{dy}y'^2 - 2\mathrm{F}\frac{d\mathrm{F}}{dx}y' = 0$$

die geodätischen Kurven der Fläche (55). Und da unsere beiden Differentialgleichungen identisch sein sollen, so findet das vorliegende Problem seinen analytischen Ausdruck in den Relationen:

$$(57)\quad \begin{cases} \dfrac{d\log F}{dy} = \dfrac{d\log \mathrm{F}}{dy}, \quad E\dfrac{dE}{dy} - 2E\dfrac{dF}{dx} + F\dfrac{dE}{dx} = 0, \\ \dfrac{1}{F}\left(3\dfrac{dE}{dy} - 2\dfrac{dF}{dx}\right) = -\dfrac{2}{\mathrm{F}}\dfrac{d\mathrm{F}}{dx}, \end{cases}$$

die wir jetzt integrieren werden.

Die erste Gleichung zeigt, daß F die Form:

$$F = \mathrm{F}\,.\,X(x)$$

besitzt. Hierdurch nimmt die letzte Gleichung (57) die Form an:

$$3\frac{dE}{dy} = 2\mathrm{F}\frac{dX}{dx}.$$

Um die Formeln zu vereinfachen, führen wir die Größe $X(x)$ als neues x ein. Dann wird:

$$F = x\mathrm{F}, \quad 3\frac{dE}{dy} = 2\mathrm{F},$$

und die zweite Gleichung (57) liefert die partielle Differentialgleichung:

$$-2E\frac{dE}{dy} + \frac{3}{2}x\frac{dE}{dx}\frac{dE}{dy} - 3xE\frac{d^2E}{dx\,dy} = 0,$$

die durch die Substitution:

$$E = x^{-\frac{4}{3}}\mathrm{E}$$ [424

die einfachere Form:

$$2\mathrm{E}\frac{d^2\mathrm{E}}{dx\,dy} - \frac{d\mathrm{E}}{dx}\frac{d\mathrm{E}}{dy} = 0$$

annimmt. Also ist:

$$\mathrm{E} = (X_1 + Y_1)^2,$$

wo X_1 eine arbiträre Funktion von x, Y_1 eine arbiträre Funktion von y bezeichnet. Durch Substitution kommt:

$$E = x^{-\frac{4}{3}}(X_1 + Y_1)^2, \quad \mathrm{F} = 3x^{-\frac{4}{3}}(X_1 + Y_1)\,Y_1',$$

$$F = 3x^{-\frac{1}{3}}(X_1 + Y_1)\,Y_1',$$

wo Y_1' wie gewöhnlich die derivierte Funktion von $Y_1(y)$ hinsichtlich y bezeichnet.

Die Bogenelemente unserer beiden zusammengehörigen Flächen besitzen somit die Formen:

$$ds_1^2 = x^{-\frac{4}{3}}(X_1 + Y_1)^2dx^2 + 6x^{-\frac{1}{3}}(X_1 + Y_1)\,Y_1'\,dx\,dy,$$

$$ds^2 = 6x^{-\frac{4}{3}}(X_1 + Y_1)\,Y_1'\,dx\,dy.$$

Durch Einführung von Y_1 als neuem y und von $-x^{-\frac{1}{3}}$ als neuem x und durch Weglassung eines unwesentlichen konstanten Faktors erhalten wir daher die allgemeine Erledigung des vorliegenden Problems in folgendem Satze:

Satz 21. Sollen sich zwei Flächen in solcher Weise geodätisch auf einander abbilden lassen, daß die eine und nur die eine Schar von Minimalkurven der einen Fläche einer Minimalkurvenschar auf der andern Fläche entspricht, so kann das Bogenelement der einen Fläche die Form:

$$ds^2 = (y + X(x))\,dx\,dy$$

und gleichzeitig das Bogenelement der andern Fläche die Form:

$$ds_1^2 = \tfrac{1}{2}x^{-4}(y + X)^2\,dx^2 - x^{-3}(y + X)\,dx\,dy$$

erhalten.

Man sieht, daß die hiermit gefundene allgemeine Flächenkategorie meine sogenannte zweite Flächenklasse als speziellen Fall umfaßt.

Kann das Bogenelement einer reellen Fläche die Form:

$$ds^2 = (y + X)\,dx\,dy$$

erhalten, so muß dasselbe auch die Form:

$$ds^2 = (x' + \psi(y'))\,dx'\,dy'$$ [425

annehmen können. Setzt man daher:

$$y = Y(y'), \quad \frac{dx}{dx'} = X_1,$$

so werden die betreffenden Flächen bestimmt durch die Bedingungsgleichung:

$$(Y + X)\,Y'X_1 = x' + \psi(y'),$$

die durch Differentiation nach x' die äquivalente Relation:

$$YY'X_1' + Y'(XX_1)' = 1$$

liefert. Gibt man hier der Größe x' sukzessiv verschiedene konstante Werte, so darf man nur eine Relation von der Form:

$$aYY' + bY' = 1$$

erhalten, weil Y nicht konstant sein kann. Daher findet man zur Bestimmung der drei unbekannten Funktionen Y, X, X_1 die einfachen Gleichungen:

$$X_1' = a, \quad (XX_1)' = b, \quad aYY' + bY' = 1,$$

die durch Integration:

$$X_1 = ax' + c, \quad XX_1 = bx' + d, \quad aY^2 + 2bY = 2y' + k$$

geben, wobei a, b, c, d und k arbiträre Konstanten sind.

Hier treten zwei wesentlich verschiedene Fälle auf, jenachdem a gleich Null oder von Null verschieden ist. In dieser Weise erhalten wir den Satz:

Satz 22. Soll das Bogenelement:

$$ds^2 = (y + X(x))\,dx\,dy$$

durch Einführung neuer Variabeln x', y', bestimmt durch $y = Y(y')$, $x = F(x')$, die Form:

$$ds^2 = (x' + \psi(y'))\,dx'\,dy'$$

erhalten können, so sind zwei wesentlich verschiedene Fälle möglich; es kann nämlich ψ entweder gleich by' oder gleich $b : \sqrt{y'}$ gesetzt werden.

Die beiden soeben gefundenen Flächenfamilien haben schon in den vorangehenden Untersuchungen eine wichtige Rolle gespielt. Wir wissen, daß jedes unter den betreffenden Bogenelementen auf die Form:

$$\psi(x + y) + \Psi(x - y)$$

gebracht werden kann. Und also können wir durch Verknüpfung der vorangehenden Entwickelungen den folgenden Satz aussprechen:

Satz 22*. Gestattet eine **reelle** Fläche eine geodätische Abbildung auf Flächen, auf welche sie nicht abwickelbar ist, so kann ihr Bogenelement sicher die Form:

$$ds^2 = (\psi(x + y) + \Psi(x - y))\,dx\,dy$$ [426

erhalten; dabei wird die betreffende Abbildung im allgemeinen durch **Dinis** Formel geliefert. Wenn jedoch das betreffende Bogenelement die Form:

$$ds^2 = \{(x + y)^2 - (x - y)^2 + 1\}\,dx\,dy,$$

oder auch die Form:

$$ds^2 = \{a(x + y) + b(x - y)\}\,dx\,dy$$

erhalten kann, so gestattet die betreffende Fläche nicht bloß solche geodätische Abbildungen, die durch **Dinis** Formel geliefert werden, sondern noch weitere geodätische Abbildungen, die sich indes nie durch **reelle** Relationen zwischen den betreffenden Punktkoordinaten ausdrücken lassen.

36. Zur Illustration der vorangehenden Theorien werden wir die allgemeinste geodätische Abbildung der wichtigen Flächenfamilie:

$$ds^2 = (y' + x')\,dx'\,dy'$$

bestimmen.

Wir setzen $y' = Y(y)$, $x' = X(x)$ und verlangen, daß die Relation:

$$(Y + X)\,Y'X' = \psi(x + y) + \Psi(x - y)$$

in allgemeinster Weise befriedigt werden soll. Dies gibt die Bedingungsgleichung:

$$YY'X''' + Y'(XX')'' - (YY')''X' - Y'''XX' = 0,$$

oder die äquivalente:

$$\frac{(XX')''}{X'} + \frac{X'''}{X'}Y - \frac{(YY')''}{Y'} - \frac{Y'''}{Y'}X = 0, \tag{58}$$

und durch zweimalige Differentiation hinsichtlich X:

$$\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{(XX')''}{X'}\right) + \frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{X'''}{X'}\right)Y = 0.$$

Da Y keine Konstante und noch weniger eine Funktion von x sein darf, so wird:

$$\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{(XX')''}{X'}\right) = 0, \quad \frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{X'''}{X'}\right) = 0,$$

und:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{(XX')''}{X'} &= a_0 + b_0 X, \\ \frac{X'''}{X'} &= a_1 + b_1 X, \end{aligned}\right. \tag{59}$$

wo a_0, a_1, b_0, b_1 konstant sind. Durch Einsetzung dieser Werte in (58) erhält man die analogen Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{(YY')''}{Y'} &= a_0 + a_1 Y = \frac{YY''' + 3Y'Y''}{Y'}, \\ \frac{Y'''}{Y'} &= b_0 + b_1 Y, \end{aligned}\right. \tag{60}$$ [427

die zusammen mit (59) die unbekannten Funktionen X und Y vollständig bestimmen.

Durch Elimination von Y''' kommt:

$$3\,Y'' = a_0 + (a_1 - b_0)\,Y - b_1\,Y^2,$$

und durch Differentiation hinsichtlich y:

$$\frac{3\,Y'''}{Y'} = a_1 - b_0 - 2b_1\,Y,$$

und endlich durch Vergleichung mit (60):

$$a_1 = 4b_0, \quad b_1 = 0.$$

Durch analoge Behandlung der Gleichungen (59) ergibt sich, daß

$$b_0 = 4a_1, \quad b_1 = 0$$

wird, was wieder heißt, daß:

$$b_0 = a_1 = b_1 = 0$$

ist. Also wird:

$$3\,Y'' = a_0, \quad 3\,X'' = a_0$$

und:

$$(61) \qquad Y = \tfrac{1}{6}a_0 y^2 + \beta y + \gamma, \quad X = \tfrac{1}{6}a_0 x^2 + \delta x + \varepsilon,$$

wo ein wesentlicher Unterschied eintritt, jenachdem a_0 gleich Null oder von Null verschieden ist.

Ist a_0 von Null verschieden, so können wir ohne wesentliche Beschränkung $a_0 = 6$, $\beta = \delta = 0$ setzen, sodaß unser Bogenelement die Form:

$$ds^2 = 4(y^2 + x^2 + \gamma + \varepsilon)\,xy\,dx\,dy,$$

oder durch Wegwerfung eines unwesentlichen Faktors die äquivalente Gestalt:

$$ds^2 = \{(x+y)^4 + M(x+y)^2 - (x-y)^4 - M(x-y)^2\}\,dx\,dy$$

annimmt. Setzen wir hier:

$$x + y = u, \quad x - y = v,$$

so wird:

$$ds^2 = \tfrac{1}{4}(u^4 + Mu^2 - v^4 - Mv^2)(du^2 - dv^2),$$

und also lehrt Dinis Satz (20), daß sich unsere Flächen geodätisch abbilden lassen auf jeder Fläche, deren Bogenelement die Form:

$$(62) \quad ds^2 = \left\{\frac{1}{u^4 + Mu^2 + K} - \frac{1}{v^4 + Mv^2 + K}\right\}\left\{\frac{du^2}{u^4 + Mu^2 + K} - \frac{dv^2}{v^4 + Mv^2 + K}\right\}$$

besitzt. Wir bemerken beiläufig, daß sich dieses neue Bogenelement [428
durch Einführung der elliptischen Funktionen wesentlich vereinfachen läßt.[1])

Der einfachste Fall ist, daß die Größe $u^4 + Mu^2 + K$ ein vollständiges Quadrat:

$$u^4 + Mu^2 + K = (u^2 + a^2)^2$$

ist. Setzen wir in diesem Falle:

$$\frac{du}{u^2 + a^2} = du_1, \quad \frac{dv}{v^2 + a^2} = dv_1,$$

so können wir, wenn a von Null verschieden ist, ohne Beschränkung:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} = au_1, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{a} = av_1$$

annehmen; und folglich wird:

$$(\cos^4 au_1 - \cos^4 av_1)(du_1^2 - dv_1^2),$$

oder:

$$\{\cos^4 \tfrac{1}{2}(x_1 + y_1) - \cos^4 \tfrac{1}{2}(x_1 - y_1)\}\,dx_1\,dy_1,$$

oder endlich:

$$\sin x_1 \sin y_1 (1 + \cos x_1 \cos y_1)\,dx_1\,dy_1$$

das entsprechende Bogenelement. Dasselbe erhält bei der Substitution $\cos x_1 = x''$, $\cos y_1 = y''$ die Form:

$$(1 + x''y'')\,dx''\,dy'',$$

die wir früher so oft angetroffen haben.

Flächen mit dem Bogenelemente $ds^2 = (x+y)\,dx\,dy$ lassen sich daher geodätisch abbilden auf einer jeden Fläche, deren Bogenelement die Form $ds^2 = (xy + 1)\,dx\,dy$ besitzt.

Jetzt müssen wir annehmen, daß in der Formel (61) die Größe a_0 verschwindet.

Das vorgelegte Bogenelement $ds^2 = (y' + x')\,dx'\,dy'$ erhält unter dieser Voraussetzung die Form:

$$[a(x+y) - b(x-y) + c]\,dx\,dy,$$

---

1) Es ist selbstverständlich, daß die durch die Formel (62) definierten Flächen drei unabhängige infinitesimale Transformationen ihrer geodätischen Kurven gestatten, und ich vermute, daß diese sämtlichen Transformationen für allgemeine Werte der Konstanten M und K meiner dritten Klasse angehören. Ist diese Vermutung richtig, so definiert die zitierte Formel eine neue sehr bemerkenswerte Flächenfamilie.

oder, da die Größe c ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann, die einfachere Form:

$$[a(x+y) - b(x-y)]\,dx\,dy,$$

die wir auch folgendermaßen schreiben können:

$$(au - bv)(du^2 - dv^2).$$

Die betreffenden Flächen lassen sich nach Dinis Satze geodätisch ab- [429
bilden auf jede Fläche, deren Bogenelement die Form:

$$\left(\frac{1}{au+\varepsilon} - \frac{1}{bv+\varepsilon}\right)\left(\frac{du^2}{au+\varepsilon} - \frac{dv^2}{bv+\varepsilon}\right)$$

besitzt. Setzen wir hier:

$$\frac{du}{\sqrt{au+\varepsilon}} = du_1 = d(x_1 + y_1), \quad \frac{dv}{\sqrt{bv+\varepsilon}} = dv_1 = d(x_1 - y_1),$$

so erkennen wir, daß unser neues Bogenelement auch die Gestalt:

$$\left\{\frac{\frac{1}{a^2}}{(x+y)^2} - \frac{\frac{1}{b^2}}{(x-y)^2}\right\} dx\,dy$$

erhalten kann.

Die Flächen mit dem Bogenelemente: $ds^2 = (y' + x')\,dx'\,dy'$ lassen sich daher geodätisch abbilden auf alle Flächen, deren Bogenelement die Form erhalten kann:

$$ds^2 = \left\{\frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2}\right\} dx\,dy,$$

wo A und B Konstanten sind.

37. Hiermit kennen wir die allgemeinste geodätische Abbildung einer Fläche mit dem Bogenelemente $ds^2 = (y + x)\,dx\,dy$, die sich aus Dinis Untersuchungen herleiten läßt. Es bleiben noch diejenigen weiteren Abbildungen zu untersuchen, die durch meinen Satz 21 geleistet werden.

Wir müssen zuerst das Bogenelement $ds^2 = (y' + x')\,dx'\,dy'$ in allgemeinster Weise durch die Substitution $y' = Y(y)$, $x' = X(x)$ auf die Form $ds^2 = (y + X_1)\,dx\,dy$ bringen. Unsere Forderung wird durch die Bedingungsgleichung:

$$(Y + X)\,Y'X' = y + X_1(x)$$

oder durch die äquivalente Gleichung:

$$(YY')'X' + Y''XX' = 1$$

ausgedrückt. Geben wir hier der Größe y sukzessiv verschiedene konstante Werte, so dürfen wir, wie vorhin, nur eine Relation von der Form:

$$aX' + bXX' = 1$$

erhalten. Also wird:

$$(YY')' = a, \quad Y'' = b,$$

sodaß Y die Form $cy + d$ besitzt, während b gleich Null, $X' = 1 : a$ wird. Wir müssen daher den Satz 21 auf das Bogenelement:

$$ds^2 = (y + Ax + B)\,dx\,dy = (y + X)\,dx\,dy$$

anwenden, und erhalten hierdurch das neue Bogenelement:

$$ds_1{}^2 = \tfrac{1}{2}x^{-4}(y + Ax + B)^2\,dx^2 - x^{-3}(y + Ax + B)\,dx\,dy.$$

Um dasselbe auf die Form $2F\,dx'\,dy'$ zu bringen, bemerken wir, daß [430
die Differentialgleichung:

$$y + Ax + B - 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

das Integral:

$$\frac{y}{\sqrt{x}} - A\sqrt{x} + \frac{B}{\sqrt{x}} = \eta$$

besitzt, und daß infolgedessen:

$$ds_1{}^2 = \left(\eta + \frac{2A}{\sqrt{\frac{1}{x}}}\right) d\eta\, d\left(\frac{1}{x}\right)$$

wird.

Flächen mit dem Bogenelemente: $ds^2 = (x + y)\,dx\,dy$ lassen sich daher auch in solcher Weise auf eine Fläche mit dem Bogenelemente: $ds'^2 = (x'y' + 1)\,dx'\,dy'$ [geodätisch] abbilden, daß die Minimalkurven der einen Schar der vorgelegten Fläche in Minimalkurven der neuen Fläche übergehen.

Hiermit ist die allgemeinste geodätische Abbildung einer Fläche mit dem Bogenelemente $ds^2 = (y + x)\,dx\,dy$ bestimmt. Gleichzeitig finden wir unter anderm die allgemeinste geodätische Abbildung aller Flächen, deren Bogenelement entweder die Form $ds^2 = (xy + 1)\,dx\,dy$, oder die Form:

$$ds^2 = \left(\frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2}\right) dx\,dy \quad (A \gtrless 0,\ B \gtrless 0)$$

besitzt.

38. Wenn man eine vorgelegte Fläche der dritten Klasse:

$$e^{w} = \psi(x+y) + \Psi(x-y)$$

durch Dinis Transformation in eine neue Fläche überführt, so kann man immer aus den bekannten infinitesimalen Transformationen der geodätischen Kurven der ersten Fläche die entsprechenden infinitesimalen Transformationen der neuen Fläche herleiten. Wendet man diese Bemerkung auf die Fläche $e^{w} = x + my$ mit ihren drei bekannten infinitesimalen Transformationen an, so findet man unter anderm, daß die Fläche:

$$e^{w} = \frac{1}{(m+1)^2(x+y)^2} - \frac{1}{(m-1)^2(x-y)^2}$$

die drei infinitesimalen Transformationen:

$$B_1 f = \frac{2(m^2+1)x + 4my}{x^2-y^2}\frac{df}{dx} - \frac{4mx + 2(m^2+1)y}{x^2-y^2}\frac{df}{dy},$$

$$B_2 f = \frac{x^3y(2mx+(1+m^2)y)}{x^2-y^2}\frac{df}{dx} - \frac{xy^3(2my+(m^2+1)x)}{x^2-y^2}\frac{df}{dy},$$

$$B_3 f = x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy}$$

besitzt. Auf dieser Fläche gibt es somit zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der dritten Klasse, nämlich: [431

$$B_1 f = \xi_1\frac{df}{dx} + \eta_1\frac{df}{dy}, \quad B_2 f = \xi_2\frac{df}{dx} + \eta_2\frac{df}{dy}.$$

Bilden wir nun den Ausdruck $a_1 B_1 f + a_2 B_2 f$ und lassen dabei a_1 und a_2 willkürliche Konstanten bezeichnen, so können wir unser Bogenelement nach den Regeln des vierten Paragraphen in unendlich vielen Weisen auf die Form $e^{w} = \varphi''(x+y) - \Phi''(x-y)$ bringen. Wir werden diese recht interessante Rechnung andeuten.

Durch Ausführung erhalten wir die beiden Relationen:

$$\frac{d(a_1\xi_1 + a_2\xi_2)}{dy}e^{-w} = b + cx^4,$$

$$\frac{d(a_1\eta_1 + a_2\eta_2)}{dx}e^{-w} = b + cy^4,$$

in denen b und c gewisse Konstanten bezeichnen. Setzen wir sodann:

$$dx'' = \frac{dx}{\sqrt{b+cx^4}}, \quad dy'' = \frac{dy}{\sqrt{b+cy^4}},$$

so muß unser Bogenelement in den neuen Variabeln x'', y'' immer die Form $\psi(x''+y'') + \Psi(x''-y'')$ erhalten. Ich überlasse dem Leser, die hierzu erforderlichen Rechnungen mit Hilfe der elliptischen Funktionen wirklich durchzuführen.

Hier bemerke ich noch ausdrücklich, daß in § 7 das Bogenelement aller Flächen bestimmt wurde, welche sowohl vermöge des Satzes 20, wie vermöge des Satzes 21 geodätisch abgebildet werden können. In § 6 bestimmte ich alle Flächen, deren Bogenelement die Form: $ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dx\,dy$ erhalten kann, und die sich vermöge des Satzes 21 geodätisch abbilden lassen. Und endlich in § 8 fand ich eine Reihe Flächen mit dem Bogenelemente $ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dx\,dy$, die sich vermöge des Satzes 20 geodätisch abbilden lassen.

Note 2. Über die Bestimmung der geodätischen Kurven, die infinitesimale Transformationen gestatten.

Wenn die geodätischen Kurven einer Fläche eine infinitesimale Transformation gestatten, so vereinfacht sich immer die Bestimmung dieser Kurven. Um dies nachzuweisen, gebe ich zunächst den Beweis eines merkwürdigen Satzes, den ich schon früher und sogar in allgemeinerer Form aufgestellt habe (Math. Ann. Bd. XI, S. 508 [1877, d. Ausg. Bd. IV, Abh. III, S. 209]).

39. Sei:

$$Af = X_1\frac{df}{dx_1} + X_2\frac{df}{dx_2} + \cdots + X_n\frac{df}{dx_n} = 0$$

eine vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung, die zu einem bekannten Ausdrucke: [432

$$Bf = \xi_1\frac{df}{dx_1} + \xi_2\frac{df}{dx_2} + \cdots + \xi_n\frac{df}{dx_n}$$

in solcher Beziehung steht, daß eine Relation von der Form:

$$B(A(f)) - A(B(f)) = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) . Af \tag{63}$$

stattfindet. Ist dann M ein Jacobischer Multiplikator von $Af = 0$, was durch die Bedingungsgleichung:

$$\frac{d(MX_1)}{dx_1} + \frac{d(MX_2)}{dx_2} + \cdots + \frac{d(MX_n)}{dx_n} = 0 = A(M) + M\sum_k\frac{dX_k}{dx_k}$$

ausgedrückt wird, so ist es folgendermaßen möglich, eine Lösung von $Af = 0$ zu finden.

Wir differentiieren die Gleichung (63):

$$\sum_q \left(\xi_q \frac{d X_j}{d x_q} - X_q \frac{d \xi_j}{d x_q} \right) = \lambda X_j$$

nach x_j und summieren sodann nach j. Dies gibt, wenn wir die sich aufhebenden Glieder weglassen:

$$\sum_j \sum_q \left(\xi_q \frac{d^2 X_j}{d x_q \, d x_j} - X_q \frac{d^2 \xi_j}{d x_q \, d x_j} \right) = A(\lambda) + \lambda \sum_j \frac{d X_j}{d x_j},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$B\left(\sum_j \frac{d X_j}{d x_j} \right) - A\left(\sum_j \frac{d \xi_j}{d x_j} \right) = A(\lambda) + \lambda \sum_j \frac{d X_j}{d x_j}.$$

Nun ist aber nach Voraussetzung:

$$\sum_j \frac{d X_j}{d x_j} = - A(\log M);$$

also folgt:

$$- B(A(\log M)) - A\left(\sum_j \frac{d \xi_j}{d x_j} \right) = A\lambda - \lambda A(\log M),$$

und durch Berücksichtigung von (63):

$$- A(B(\log M)) - A\left(\sum_j \frac{d \xi_j}{d x_j} \right) - A\lambda = 0.$$

Diese letzte Gleichung, die sich auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$A\left(B(\log M) + \sum_j \frac{d \xi_j}{d x_j} + \lambda \right) = 0,$$

zeigt, daß es uns wirklich gelungen ist, einen Ausdruck aufzustellen, der die Gleichung $Af = 0$ erfüllt.

Dies gibt:

Satz 23. Stehen die beiden Ausdrücke: [433

$$Af = \sum_q X_q \frac{df}{d x_q}, \quad Bf = \sum_j \xi_j \frac{df}{d x_j}$$

in der Beziehung:

$$B(A(f)) - A(B(f)) = \lambda A(f),$$

so ist, wenn M einen beliebigen Jacobischen Multiplikator von $Af = 0$ bezeichnet, der Ausdruck:

$$B(\log M) + \sum_j \frac{d \xi_j}{d x_j} + \lambda$$

entweder eine Konstante oder eine Lösung von $Af = 0$.

40. Sei jetzt:

$$ds^2 = e^w \, dx \, dy$$

das Bogenelement einer Fläche und:

$$Af = \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} + \left(y' \frac{dw}{dx} - y'^2 \frac{dw}{dy} \right) \frac{df}{dy'} = 0$$

die lineare partielle Differentialgleichung der betreffenden geodätischen Kurven. Dann ist die Größe:

$$M = e^{\frac{1}{2} w} y'^{-\frac{3}{2}}$$

nach einem Satze von Jacobi, den man übrigens sehr leicht verifiziert, ein Multiplikator von $Af = 0$.

Setzen wir nun voraus, daß die geodätischen Kurven unserer Fläche die infinitesimale Transformation:

$$Bf = \xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} + \zeta \frac{df}{dy'} \tag{64}$$

gestatten, und daß also eine Relation von der Form:

$$B(A(f)) - A(B(f)) = \lambda A(f)$$

stattfindet, so ist der Ausdruck:

$$J = B(\log M) + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dy'} + \lambda \tag{65}$$

nach dem vorangehenden Satze entweder eine Konstante oder eine Lösung von $Af = 0$.

Es ist sogar möglich, noch einen Ausdruck aufzustellen, der $Af = 0$ erfüllt. Setzen wir nämlich in die Relation:

$$B(A(f)) - A(B(f)) = \lambda Af$$

statt f die Größe J, so kommt:

$$A(B(J)) = 0,$$

sodaß auch $B(J)$ entweder eine Konstante oder eine Lösung von $A(f) = 0$ darstellt.

In der Formel (64) denken wir uns, wie immer in der vorangehenden Abhandlung, daß ξ und η nur von x und y abhängen.[1]) Dann ist [434

---

1) Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = w(x, y, y')$ gestattet immer beliebig viele infinitesimale Berührungstransformationen. Kennt man zufälligerweise eine solche Transformation der geodätischen Kurven einer Fläche, so findet man diese Kurven nach den Entwickelungen des Textes.

Man kann sich übrigens die Aufgabe stellen, alle Flächen zu finden, deren geodätische Kurven eine vorgelegte infinitesimale Berührungstransformation gestatten. Besonders interessant scheint der Fall, daß die charakteristische Funktion dieser Transformation die Form $\Sigma f_k(x, y) y'^k$ besitzt.

nach den früheren Formeln (1), (3′):

$$\zeta = \frac{d\eta}{dx} + y'\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - y'^2\frac{d\xi}{dy},$$

$$\lambda = -\frac{d\xi}{dx} - y'\frac{d\xi}{dy}, \quad \log M = \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}\log y';$$

ferner ist:

$$B(\log M) = \frac{1}{2}\left(\xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy}\right) - \frac{3}{2}\frac{1}{y'}\left(\frac{d\eta}{dx} + y'\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - y'^2\frac{d\xi}{dy}\right),$$

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dy'} = 2\frac{d\eta}{dy} - 2y'\frac{d\xi}{dy}.$$

Also wird:

$$2J = \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} - 3y'\frac{d\xi}{dy} - 3\frac{1}{y'}\frac{d\eta}{dx},$$

und man sieht, daß J nur dann eine absolute Konstante sein kann, wenn die beiden Relationen $d\xi : dy = 0$, $d\eta : dx = 0$ bestehen. In diesem speziellen Falle wird:

$$2J = \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy},$$

und dieser Ausdruck ist nach der Formel (6) wirklich gleich einer Konstanten, die sogar, wenn das Bogenelement die Form:

$$ds^2 = \Phi(x-y)\,dx\,dy$$

besitzt, identisch verschwindet. Also:

Satz 24. Gehört eine Fläche meiner zweiten oder dritten Klasse an, und ist dabei ihr Bogenelement schon auf die Form $ds^2 = e^w dx dy$ gebracht, so findet man ein Integral der Differentialgleichung der geodätischen Kurven durch **Differentiation.**

41. Es fragt sich, ob man durch Bildung des Ausdrucks $B(J)$ eine neue Lösung durch Differentiation herleiten kann. Wir setzen:

$$J_1 = \frac{2}{3}J = \frac{1}{3}\left(\xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right) - y'\frac{d\xi}{dy} - \frac{1}{y'}\frac{d\eta}{dx} \tag{66}$$

$$= \alpha - \beta y' - \gamma\frac{1}{y'},$$

und bilden den Ausdruck:

$$B(J_1) = B(\alpha) - B(\beta)y' - B(\gamma)\frac{1}{y'} - \qquad [435$$

$$-\left(\beta - \gamma\frac{1}{y'^2}\right)\left(\frac{d\eta}{dx} + y'\frac{d\eta}{dy} - y'\frac{d\xi}{dx} - y'^2\frac{d\xi}{dy}\right),$$

woraus:

$$B(J_1) = B(\alpha) - \beta\frac{d\eta}{dx} - \gamma\frac{d\xi}{dy} - y'\left(B(\beta) + \beta\frac{d\eta}{dy} - \beta\frac{d\xi}{dx}\right) -$$

$$-\frac{1}{y'}\left(B(\gamma) - \gamma\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dx}\right) + y'^2\beta\frac{d\xi}{dy} + \frac{1}{y'^2}\gamma\frac{d\eta}{dx}.$$

Um zu entscheiden, ob dieser Ausdruck, der nur dann eine Konstante sein kann, wenn die beiden Größen $d\xi : dy = \beta$ und $d\eta : dx = \gamma$ gleichzeitig verschwinden, ein von J_1 unabhängiges Integral darstellt, bilden wir die Größe:

$$B(J_1) - J_1^2 = J_2,$$

die wiederum ein Integral darstellt. Es ist:

$$\left\{\begin{aligned} J_2 = B(\alpha) - 4\beta\gamma - \alpha^2 - y'\left(B(\beta) + \beta\frac{d\eta}{dy} - \beta\frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\beta\right) - \\ -\frac{1}{y'}\left(B(\gamma) - \gamma\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\gamma\right). \end{aligned}\right. \tag{67}$$

Ich will jetzt zunächst annehmen, daß die betreffende Fläche meiner dritten Klasse angehört. Dann können wir nach (22):

$$\beta = \gamma = e^w = \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx}$$

setzen, also wird:

$$J_2 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - \left(y' + \frac{1}{y'}\right)(B(\beta) - 2\alpha\beta) - \left(y' - \frac{1}{y'}\right)\beta\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right)$$

und andererseits:

$$J_1 = \alpha - \left(y' + \frac{1}{y'}\right)\beta \qquad (\beta \gtrless 0). \tag{68}$$

Ist daher die Größe $d\eta : dy - d\xi : dx$ verschieden von Null, so sind J_2 und J_1 unabhängige Integrale, sodaß wir unter dieser Voraussetzung die vollständige Integration der Differentialgleichung der geodätischen Kurven durch Differentiation allein leisten können.

Ist dagegen, wenn wir die Bezeichnungen des vierten Paragraphen anwenden:

$$\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} = 0 = X'' - Y'',$$

und infolgedessen:

$$X'' = Y'' = a = \text{Const.},$$

so wird:

$$B(\beta) - 2\alpha\beta = B(e^w) - \frac{2}{3}\left(\xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right)e^w \qquad [436$$

$$= B(e^w) - \frac{2}{3}B(e^w) - \frac{2}{3}\{2(\varphi'' + \Phi'') + X'' + Y''\}.e^w$$

$$= \frac{1}{3}B(e^w) - \frac{4}{3}(\varphi'' + \Phi'')e^w - \frac{4}{3}a e^w.$$

Nun aber erhält die Formel (27) durch die Substitution $X'' = Y'' = a$ und durch Multiplikation mit der Größe $e^w = \varphi'' - \Phi''$ die Gestalt:

$$(A - 2a)(\varphi'' - \Phi'') + 4(\varphi'' - \Phi'')(\varphi'' + \Phi'') - B(e^w) = 0,$$

also wird:

$$B(\beta) - 2\alpha\beta = \tfrac{1}{3}(A - 6a)(\varphi'' - \Phi'') = \tfrac{1}{3}(A - 6a)\beta,$$

und infolgedessen:

$$J_2 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - \tfrac{1}{3}(A - 6a)\beta\left(y' + \frac{1}{y'}\right),$$

und endlich:

$$J_2 - \tfrac{1}{3}(A - 6a)J_1 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - \tfrac{1}{3}(A - 6a)\alpha.$$

Das hiermit gefundene Integral ist von y' unabhängig und muß somit identisch gleich einer Konstanten sein, was sich folgendermaßen verifizieren läßt. Die Gleichung (27) zeigt, daß:

$$B(w) = A + 4(\varphi'' + \Phi'') - X'' - Y'', \tag{69}$$

und infolgedessen, daß:

$$\alpha = \tfrac{1}{3}A + 2(\varphi'' + \Phi'') \tag{70}$$

ist. Folglich wird:

$$J_2 - \tfrac{1}{3}(A - 6a)J_1 = (4\varphi'\varphi''' - 8\varphi''^2 + 2(X' + Y')\varphi''' - 2(A - 2a)\varphi'') +$$
$$+ (4\Phi'\Phi''' - 8\Phi''^2 + 2(X' - Y')\Phi''' - 2(A - 2a)\Phi'') - \tfrac{2}{9}A^2 + \tfrac{2}{3}aA,$$

und dabei erkennt man sogleich durch Anwendung der Formeln (28), daß die rechte Seite der letzten Gleichung eine Konstante ist.

Hiermit erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 25. Sollen die Größen J_1 und $B(J_1)$, die durch Differentiation gefunden werden, unabhängige Integrale der Differentialgleichung der geodätischen Kurven auf einer Fläche der dritten Klasse darstellen, so ist notwendig und hinreichend, daß die Größe $X'' - Y''$ [nicht] gleich Null ist.

Dieser Satz gibt eine interessante Definition der in Nummer 13 gefundenen Unterabteilung meiner dritten Klasse.

Ich will nun ferner annehmen, daß die Formel (67) auf eine Fläche der zweiten Klasse angewandt wird. In diesem Falle wird:

$$\beta = 0, \quad \gamma = e^w, \quad J_1 = \alpha - \frac{1}{y'}\gamma,$$
$$J_2 = B(\alpha) - \alpha^2 - \frac{1}{y'}\left(B(\gamma) - \gamma\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\gamma\right)$$

und: [437

$$B(\gamma) - \gamma\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\gamma = \frac{1}{3}B(e^w) - \frac{5}{3}e^w\frac{d\eta}{dy} + \frac{1}{3}e^w\frac{d\xi}{dx}.$$

Nun aber ist (13), (17):

$$B(w) - 5\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\xi}{dx} = -\pi'(y) = -c_1,$$

also kommt:

$$J_2 = B(\alpha) - \alpha^2 + \frac{1}{y'}\cdot\frac{1}{3}c_1\gamma,$$

und:

$$J_2 + \tfrac{1}{3}c_1J_1 = B(\alpha) - \alpha^2 + \tfrac{1}{3}c_1\alpha.$$

Hiermit ist nachgewiesen, daß $J_2 + \tfrac{1}{3}c_1J_1$ nur von x und y abhängt, und somit als Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung eine absolute Konstante ist. Also:

Satz 26. Die Größen J_1 und $B(J_1)$ sind nie unabhängige Integrale, wenn die betreffende Fläche der zweiten Klasse angehört.

Wenn die vorangehenden Theorien nur ein Integral liefern, so findet man die betreffenden geodätischen Kurven durch eine Quadratur, indem man die Jacobische Theorie des letzten Multiplikators zu Hilfe nimmt.

42. Bour hat bekanntlich (Journal de l'école polytechnique t. XXII, S. 79—80) gezeigt, daß man die geodätischen Kurven einer jeden auf Rotationsflächen abwickelbaren Fläche, die jedoch nicht konstante Krümmung besitzen darf, durch gewisse Quadraturen bestimmen kann. Ich werde andeuten, wie man diesen schönen Satz am einfachsten mit meinen Untersuchungen in Verbindung setzen kann.

Da die betreffende Fläche unter den gemachten Voraussetzungen nur eine infinitesimale Verschiebung in sich ohne Dehnung gestattet, so findet man die entsprechende infinitesimale Transformation:

$$\xi(x)\frac{df}{dx} + \eta(y)\frac{df}{dy}$$

durch Quadratur. Nimmt man sodann die Differentialgleichung der geodätischen Kurven:

$$y'' = \psi(x, y, y')$$

und setzt:

$$A(f) = \frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} + \psi\frac{df}{dy'},$$
$$B(f) = \xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy} + \zeta\frac{df}{dy'},$$

so bilden die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$A(f) = 0, \quad B(f) = 0$$

ein vollständiges System, dessen Multiplikator (Math. Ann. Bd. XI, S. 501 [diese Ausg. Bd. IV, Abh. III, S. 202]) aufgestellt werden kann, da man nach Jacobi den Multiplikator von $A(f) = 0$ schon kennt, und überdies die Differentialinvariante J (65) identisch verschwindet. Hiernach inte- [438
griert man leicht das vollständige System, sowie die Gleichung $Af = 0$, womit die gesuchten geodätischen Kurven bestimmt sind.[1])

Bei meiner früheren Bestimmung der geodätischen Kurven einer jeden Fläche, die meiner dritten Klasse angehört, durch Differentiation wurde ausdrücklich vorausgesetzt, daß das entsprechende Bogenelement schon auf die Form:

$$e^w = \varphi''(x+y) - \Phi''(x-y)$$

gebracht war. Es ist indes unmittelbar evident, daß diese Voraussetzung nicht notwendig ist, wenn die betreffende infinitesimale Transformation schon bekannt ist.

Ist eine beliebige Fläche vorgelegt, so läßt sich immer durch ausführbare Operationen entscheiden, ob ihre geodätischen Kurven eine oder sogar mehrere infinitesimale Transformationen gestatten. Existiert eine und nur eine solche Transformation, so findet man dieselbe durch Quadratur, und kann sie sodann für die Bestimmung der geodätischen Kurven in Übereinstimmung mit den obenstehenden Entwickelungen verwerten. Gibt es mehrere infinitesimale Transformationen, so verlangt deren Bestimmung höchstens die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung; in mehreren Fällen läßt sie sich durch Quadratur leisten.[2])

1) Einfacher als die Entwickelungen des Textes ist die folgende Methode, die ohne Zweifel bekannt ist.

Bei der infinitesimalen Verschiebung beschreiben alle Punkte der Fläche isotherme Kurven, die zusammen mit ihren Orthogonalkurven durch Quadratur bestimmt werden. Wählt man dieselben zu Koordinatenkurven u, v, so erhält das Bogenelement sogleich die Form:

$$ds^2 = du^2 + \Phi(u)\,dv^2,$$

die sodann unmittelbar auf die kanonische Form:

$$ds^2 = \Psi(x-y)\,dx\,dy$$

gebracht wird. Hieraus aber findet man leicht die geodätischen Kurven durch Quadratur.

2) Dies ist insbesondere sicher der Fall, wenn die vorgelegte Fläche gleichzeitig mehreren unter meinen drei Klassen angehört; indessen sehen wir dabei von den Flächen konstanter Krümmung ab.

Wenn daher die geodätischen Kurven einer Fläche eine oder mehrere infinitesimale Transformationen gestatten, so verlangt die Bestimmung dieser Kurven höchstens die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Sucht man zum Beispiel die geodätischen Kurven einer Fläche, deren Bogenelement die Form:

$$ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dx\,dy$$

erhalten kann, so wird das Integrationsproblem leicht auf eine Differentialgleichung erster Ordnung reduziert. Diese Gleichung läßt sich, wenn a von Null verschieden ist, nicht durch Quadratur erledigen. [439

Diejenigen Kurven, welche die Punkte der Fläche durch kontinuierliche Ausführung der infinitesimalen Transformation beschreiben, sind isotherme Kurven, und werden daher, wie auch ihre Orthogonalkurven, durch Quadratur gefunden. Gleichzeitig bestimmt man die auf der Fläche gelegenen Kurven, deren Bogenlänge gleich Null ist. Hiernach kann man das Bogenelement der Fläche auf die kanonische Form $ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dx\,dy$ bringen.

Liouville hat bekanntlich[1]) gezeigt, daß die geodätischen Kurven einer jeden Fläche, deren Bogenelement schon auf die Form:

$$ds^2 = [\psi(x+y) + \Psi(x-y)]\,dx\,dy$$

gebracht ist, durch Quadratur bestimmt werden können. Hiermit stehen offenbar die vorangehenden Entwickelungen, insofern sie sich auf Flächen der dritten Klasse beziehen, in genauester Verbindung. Das Neue bei meinen allerdings mehr speziellen Theorien liegt einerseits darin, daß es für mich nicht notwendig ist, daß das Bogenelement schon auf die Liouvillesche Form gebracht ist, andererseits darin, daß ich in gewissen Fällen die von Liouville verlangten Quadraturen durch Differentiationen ersetze.

43. Durch Verknüpfung einiger von Liouville und Bour herrührender Entwickelungen, die ich sogleich reproduziere, mit meinen vorangehenden Untersuchungen erhält man einen interessanten Satz über die Form des Bogenelementes aller Flächen, die meiner dritten Klasse angehören.

Besitzt die Differentialgleichung der geodätischen Kurven:

$$y'' = y'\frac{dw}{dx} - y'^2\frac{dw}{dy}$$

1) Application d'analyse à la géométrie, par Monge, édition de Liouville, S. 577.

ein oder mehrere Integrale von der Form:

$$(71)\qquad U = f(x, y) + y'\varphi(x, y) + \frac{1}{y'}\psi(x, y),$$

so müssen die Größen f, φ und ψ die Relationen:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \varphi\frac{dw}{dy}, \quad \frac{df}{dy} = -\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{dw}{dx},$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \psi\frac{dw}{dx}, \quad \frac{df}{dx} = -\frac{d\psi}{dy} - \psi\frac{dw}{dy}$$

erfüllen. Also besitzen φ und ψ die Form:

$$\varphi = X_1(x)e^w, \quad \psi = Y_1(y)e^w,$$

während die nach x und y genommenen Differentialquotienten von f die Werte:

$$\frac{df}{dx} = -2Y_1\frac{d}{dy}(e^w) - Y_1'e^w, \quad \frac{df}{dy} = -2X_1\frac{d}{dx}(e^w) - X_1'e^w$$ [440

aufweisen. Um das hiermit gefundene Integral:

$$(72)\qquad U = f + X_1e^w y' + Y_1e^w\frac{1}{y'}$$

zu vereinfachen, führen wir statt x und y neue Variabeln $x_1(x)$, $y_1(y)$ ein. Es wird dann:

$$U = f + X_1\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 e^{w_1}\frac{dy_1}{dx_1} + Y_1\left(\frac{dy_1}{dy}\right)^2 e^{w_1}\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}.$$

Bestimmen wir daher x_1 und y_1 durch die Relationen:

$$dx_1 = \frac{dx}{\sqrt{X_1}}, \quad dy_1 = \frac{dy}{\sqrt{Y_1}},$$

so wird:

$$U = f + e^{w_1}y_1' + e^{w_1}\frac{1}{y_1'},$$

und:

$$\frac{df}{dx_1} = -2\frac{d(e^{w_1})}{dy_1}, \quad \frac{df}{dy_1} = -2\frac{d(e^{w_1})}{dx_1},$$

und infolgedessen:

$$\frac{d^2(e^{w_1})}{dx_1^2} - \frac{d^2(e^{w_1})}{dy_1^2} = 0, \quad e^{w_1} = \psi(x_1 + y_1) + \Psi(x_1 - y_1).$$

Hiermit ist gezeigt, daß ein Integral von der Form (71) nur dann auftritt, wenn das betreffende Bogenelement die **Liouville***sche Form annehmen kann. Existieren zwei oder*

noch mehr Integrale von der Form (71), so kann das Bogenelement in **mehrfacher** *Weise die* **Liouville***sche Form erhalten.*

Diesen bekannten Satz werden wir auf eine Fläche meiner dritten Klasse anwenden.

Wir bemerken da zunächst, daß die Form des früher durch Differentiation gefundenen Integrals:

$$J_1 = \alpha - e^w\left(y' + \frac{1}{y'}\right)$$

mit den soeben angestellten Betrachtungen übereinstimmt. Es ist leicht, zu verifizieren, daß auch das Integral:

$$J_2 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - \left(y' + \frac{1}{y'}\right)(B(\beta) - 2\alpha\beta) - \left(y' - \frac{1}{y'}\right)\beta\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right)$$

die Form (72) besitzt. Denn nach den Formeln (69), (70) ist:

$$B(\beta) - 2\alpha\beta = (\tfrac{1}{3}A - X'' - Y'')e^w,$$

$$\beta\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) = (Y'' - X'')e^w,$$

und also wird:

$$J_2 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - (\tfrac{1}{3}A - 2X'')e^w y' - (\tfrac{1}{3}A - 2Y'')e^w\frac{1}{y'}.$$ [441

Ist dabei $X'' - Y'' \gtrless 0$, so sind J_2 und J_1 unabhängige Integrale; und daher kann das betreffende Bogenelement in mehrfacher Weise, ja sogar in unendlich vielen Weisen auf die Liouvillesche Form gebracht werden.

Bezeichnet man nämlich mit λ eine willkürliche Konstante, so ist $J_2 + \lambda J_1$ immer ein Integral von der Form (72). Setzt man daher:

$$dx_1 = \frac{dx}{\sqrt{2X'' - \frac{1}{3}A + \lambda}}, \quad dy_1 = \frac{dy}{\sqrt{2Y'' - \frac{1}{3}A + \lambda}}$$

und führt sodann x_1 und y_1 als neue Variable ein, so erhält die Größe e^{w_1} immer wieder die Form:

$$e^{w_1} = \psi(x_1 + y_1) + \Psi(x_1 - y_1).$$

Alle Flächen meiner dritten Klasse, die nicht durch die Formeln der Nummer 13 geliefert werden, haben somit die charakteristische Eigenschaft, daß ihr Bogenelement in unendlich vielen Weisen die **Liouville***sche Form* $e^w = \psi(x + y) + \Psi(x - y)$ *erhalten kann.*

Wir haben in der Tat schon gesehen, daß zum Beispiel das Bogenelement $e^w = x + y$ in mehrfacher Weise die Liouvillesche Form erhalten kann. Dieselbe Bemerkung gilt unter anderm auch für die Flächenfamilien:

$$e^w = xy + 1, \quad e^w = \frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2}.$$

Hierzu fügen wir noch die folgende interessante Bemerkung. Aus den in § 4 gefundenen Formeln:

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \xi = \varphi'(x+y) + \Phi'(x-y) + X',$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \eta = \varphi'(x+y) - \Phi'(x-y) + Y',$$

ergibt sich:

$$\frac{\delta(x+y)}{\delta t} = 2\varphi' + X' + Y', \quad \frac{\delta(x-y)}{\delta t} = 2\Phi' + X' - Y'.$$

Ist nun:

$$X'' = Y'' = a = \text{Const.},$$

$$X' = ax + b, \quad Y' = ay + c,$$

so wird:

$$\frac{\delta(x+y)}{\delta t} = 2\varphi'(x+y) + a(x+y) + b + c,$$

$$\frac{\delta(x-y)}{\delta t} = 2\Phi'(x-y) + a(x-y) + b - c.$$

In diesem Falle wird eine jede der isothermen Kurvenscharen

$$x + y = \text{Const.} \quad \text{und:} \quad x - y = \text{Const.}$$ [442

in sich transformiert durch die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\,\delta t$, $\delta y = \eta\,\delta t$.

Die in Nummer 13 bestimmten Flächen der dritten Klasse lassen sich daher auch dadurch charakterisieren, daß sie ein isothermes Orthogonalsystem enthalten, welches bei der betreffenden infinitesimalen Transformation invariant bleibt.

Note 3. Bestimmung aller Formen, welche die Transformationsgruppe der geodätischen Kurven einer Fläche besitzen kann.

Will man meine Theorie der Transformationsgruppen als bekannt voraussetzen, so ist es nicht schwierig, die vorangehenden Theorien wesentlich zu vervollständigen. Es ist in der Tat möglich, die Form der Transformationsgruppe der geodätischen Kurven einer Fläche a priori anzugeben, und gleichzeitig die entsprechende Gleichungsform der geodätischen Kurven aufzustellen.

Hat die betreffende Fläche konstante Krümmung, so können ihre geodätischen Kurven nach Beltramis Untersuchungen durch eine lineare Gleichung:

$$aX(x,y) + bY(x,y) + c = 0 \tag{73}$$

dargestellt werden. Also gestatten die geodätischen Kurven einer solchen Fläche jedenfalls die ∞^8 linearen Transformationen der Größen X, Y. Und da die Gruppe der linearen Punkttransformationen einer Ebene in keiner umfassenderen Transformationsgruppe der Ebene enthalten ist, so schließen wir, daß die geodätischen Kurven einer Fläche konstanter Krümmung keine weiteren Transformationen als die soeben besprochenen linearen Transformationen der Größen X und Y gestatten.

44. Indem wir uns jetzt zur Betrachtung von Flächen, deren Krümmung nicht konstant ist, wenden, stützen wir uns auf Beltramis Satz, daß die geodätischen Kurven einer solchen Fläche nie durch eine lineare Gleichung von der Form (73) dargestellt werden. Wir suchen daher die allgemeinste Gruppe von Punkttransformationen einer Ebene, welche zweifach unendlich viele Kurven, die sich nicht durch eine lineare Gleichung darstellen lassen, unter einander vertauscht.

Jede Gruppe hat, wie wir wissen, zweigliedrige Untergruppen, die, wenn ich wie gewöhnlich:

$$\frac{df}{dx} = p, \quad \frac{df}{dy} = q$$

setze, eine unter den Formen:

$$q,\ X(x)q; \quad q,\ yq; \quad q,\ p; \quad q,\ xp + yq$$ [443

besitzen.

Läßt die zweigliedrige Gruppe q, $X(x)q$ eine zweifach unendliche Kurvenschar invariant, so gibt es unter diesen Kurven sicher solche, deren Gleichung sich hinsichtlich y auflösen läßt. Sei $y = f(x)$ eine solche Kurve der Schar. Alsdann gehören alle Kurven mit der Gleichungsform:

$$y = f(x) + a + bX,$$

was auch die Konstanten a und b sind, unserer Schar an. Und also wird diese Schar dargestellt durch eine Gleichung, die hinsichtlich der Konstanten linear ist. Gestatten daher die geodätischen Kurven einer Fläche eine Transformationsgruppe mit einer Untergruppe von der Form q, Xq, so hat die Fläche konstante Krümmung.

Ich will sodann annehmen, daß die zweigliedrige Gruppe q, yq eine zweifach unendliche Kurvenschar invariant läßt, und daß $y = f(x)$ wiederum eine Kurve der Schar ist. Dann gehören alle Kurven mit der Gleichungsform:

$$y = af(x) + b$$

mit den beiden willkürlichen Konstanten a und b unserer Schar an. Diese wird daher auch jetzt durch eine lineare Gleichung dargestellt. Hieraus folgt wie soeben, daß nur auf den Flächen konstanter Krümmung die geodätischen Kurven eine Gruppe mit einer Untergruppe von der Form q, yq gestatten können.

Die geodätischen Kurven einer Fläche, deren Krümmung nicht konstant ist, gestatten daher jedenfalls nur solche Transformationsgruppen, deren sämtliche zweigliedrige Untergruppen entweder die Form p, q oder die Form $p, xp + yq$ besitzen. Setzt man nun meine Aufzählung aller Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene als bekannt voraus, so erhält man ohne weiteres den folgenden wichtigen Satz:

Satz 27. Die Transformationsgruppe einer Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$, die nicht durch Punkttransformation auf die Form $y'' = 0$ gebracht werden kann, besitzt eine der folgenden Formen:

$$p; \quad p, q; \quad p, xp + yq; \quad p, q, xp + \lambda yq;$$
$$p, q, xp + (y + x)q; \quad p, xp + yq, \quad x^2p + (2xy + \lambda y^2)q.$$

Wenn daher die geodätischen Kurven einer Fläche eine Transformationsgruppe gestatten, so besitzt diese Gruppe 1, 2, 3 oder 8 Parameter. Der letzte Fall entspricht den Flächen konstanter Krümmung.

45. Einer jeden unter den hiermit aufgestellten Transformationsgruppen entspricht eine bestimmte Gleichungsform der betreffenden geodätischen Kurven:

1. Gestatten die geodätischen Kurven die infinitesimale Transformation p, so hat ihre Gleichung die Form: [444

$$x + a + f(y, b) = 0,$$

wobei a und b willkürliche Konstanten sind.

2. Gestatten die geodätischen Kurven die beiden permutablen infinitesimalen Transformationen p und q, so hat ihre Gleichung die Form:

$$y + b = f(x + a).$$

3. Gestatten die geodätischen Kurven die infinitesimalen Transformationen p und $xp + yq$, so hat ihre Gleichung die Form:

$$ay = f(ax + b).$$

4. Gestatten die geodätischen Kurven die drei infinitesimalen Transformationen $p, q, xp + \lambda yq$, so hat ihre Gleichung (wenn λ nicht verschwindet) die Form:

$$y + b = K(x + a)^\lambda,$$

wobei a und b willkürliche Konstanten sind, während die Größe K für eine gegebene Fläche einen bestimmten Wert hat.

5. Gestatten die geodätischen Kurven die drei infinitesimalen Transformationen $p, q, xp + (y + x)q$, so hat ihre Gleichung die Form:

$$y + b = (x + a)\log(x + a) + K(x + a),$$

wobei die Konstante K wiederum in jedem einzelnen Falle einen bestimmten Wert besitzt.

6. Gestatten die geodätischen Kurven die drei infinitesimalen Transformationen $p, xp + yq, x^2p + 2xyq$, so hat ihre Gleichung die Form:

$$K(x + a)(1 - (x + a)b) = y,$$

wo abermals K für eine gegebene Fläche einen bestimmten Wert besitzt.

7. Gestatten endlich die geodätischen Kurven die drei infinitesimalen Transformationen $p, xp + yq, x^2p + (2xy + y^2)q$, so hat ihre Gleichung die Form:

$$y = K(x + a)(1 - (y + x + a)b),$$

wo die Konstante K, wie in den früheren Fällen, für eine gegebene Fläche einen bestimmten Wert besitzt.

Die in die drei ersten unter den aufgestellten Gleichungsformen eingehenden willkürlichen Funktionen lassen sich näher bestimmen. Hierauf gehe ich indes bei dieser Gelegenheit nicht näher ein.

Note 4. Über Flächen, deren geodätische Kurven eine Gleichung von gegebener Form erfüllen. [445

46. Wir stellen uns noch die allgemeine Aufgabe, das Bogenelement:

$$ds^2 = Edu^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2 \tag{74}$$

einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Kurven eine gegebene Gleichung:

$$\Omega(u, v, a, b) = 0$$

zwischen u, v und zwei willkürlichen Konstanten a, b befriedigen.

Wir bilden die Differentialgleichung der geodätischen Kurven:

$$F\left(u, v, \frac{du}{dv}, \frac{d^2u}{dv^2}\right) = 0$$

derjenigen Fläche, deren Bogenelement durch (74) gegeben ist. Sodann differentiieren wir $\Omega = 0$ zweimal hinsichtlich v, und bilden durch Elimination von a und b die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\Phi\left(u, v, \frac{du}{dv}, \frac{d^2u}{dv^2}\right) = 0,$$

die mit $F = 0$ identisch sein soll. Dies gibt mehrere, und zwar vier Bedingungsgleichungen zwischen u, v und den ersten Differentialquotienten von E, F und G hinsichtlich u und v. Es fragt sich, ob diese partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei unbekannten Funktionen E, F und G gemeinsame Lösungen besitzen.

Es ist denkbar, und zwar ist dies im allgemeinen der Fall, daß es gar kein Wertsystem E, F, G gibt, welches unsere Bedingungsgleichungen erfüllt. Alsdann gibt es keine Fläche, deren geodätische Kurven durch eine Relation von der Form $\Omega = 0$ bestimmt werden können. Man kann immer durch sogenannte ausführbare Operationen entscheiden, ob dieser Fall vorliegt oder nicht.

Haben unsere Bedingungsgleichungen gemeinsame Lösungen, so gibt es Flächen, deren geodätische Linien durch eine Relation von der Form $\Omega = 0$ bestimmt werden, und zwar sind hierbei zwei Fälle möglich.

Es ist denkbar, daß es ein und nur ein Wertsystem E, F, G gibt, das unsere Bedingungsgleichungen erfüllt. In diesem Falle verlangt die Bestimmung der Größen E, F und G als Funktionen von u und v nur ausführbare Operationen, das heißt Differentiationen und Eliminationen.

Dieser Fall tritt ein, wenn es unter den Flächen, deren geodätische Kurven durch $\Omega = 0$ bestimmt werden, eine gibt, deren Bogenelement weder die Form: [446

(75) $$ds^2 = (\psi(x + y) + \Psi(x - y))\, dx\, dy,$$

noch die Form:

(76) $$ds^2 = (y + X(x))\, dx\, dy$$

erhalten kann. Denn unter dieser Voraussetzung sind alle Flächen, deren geodätische Linien durch $\Omega = 0$ bestimmt werden, auf einander abwickelbar und besitzen somit dasselbe Bogenelement.

Es ist aber auch denkbar, daß es unendlich viele Systeme der Funktionen E, F und G gibt, welche die vier Bedingungsgleichungen erfüllen.

Dieser Fall tritt ein, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ die geodätischen Linien einer Fläche bestimmt, deren Bogenelement entweder die Form (75), oder die Form (76) erhalten kann. In diesem Falle kann die Bestimmung der Größen E, F und G als Funktionen von u und v immer auf die Integration von gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen zurückgeführt werden.

Besonders interessant ist der Fall, daß die durch $\Omega = 0$ bestimmten geodätischen Kurven infinitesimale Transformationen gestatten. In diesem Falle reduziert sich das Problem jedesmal auf die Integration eines gewöhnlichen simultanen Systems, das selbst infinitesimale Transformationen gestattet. Demnach können bei der Integration dieses Systems diejenigen Theorien, die ich in Bd. XI dieser Annalen [diese Ausg. Bd. IV, Abh. III] entwickelt habe, verwertet werden.

47. Die Frage nach dem Bogenelemente:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

einer Fläche, deren geodätische Kurven eine gegebene Differentialgleichung erster Ordnung mit einer willkürlichen Konstanten:

$$f\left(u, v, \frac{du}{dv}\right) = a$$

erfüllen, läßt sich auf das soeben behandelte Problem zurückführen. Denn durch Differentiation der letzten Gleichung erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mit der Differentialgleichung der geodätischen Kurven identisch sein muß, sodaß man wiederum Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von E, F und G ohne weiteres erhalten kann. Bei deren Behandlung können selbstverständlich dieselben Fälle wie soeben eintreten.

Note 5. Zur Theorie der geodätischen Kurven der Minimalflächen.[1] [447

48. Liouville hat bekanntlich gezeigt, daß die geodätischen Kurven einer jeden Fläche, deren Bogenelement die Form:

(1) $$ds^2 = (\psi(x + y) + \Psi(x - y))\, dx\, dy$$

besitzt, bestimmt werden können. Sucht man daher spezielle Minimalflächen, deren geodätische Kurven bestimmbar sind, so liegt es nahe, zuerst alle Minimalflächen aufzusuchen, deren Bogenelement die Form (1) erhalten kann.

1) Vgl. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Bd. VI, 1882, S. 490 ff. [d. Ausg. Bd. I, Abh. XXVI].

Nun aber hat das Bogenelement der Minimalflächen die Form:

$$ds^2 = f(X)\varphi(Y)(1 + XY)^2 X'Y'\,dx\,dy, \tag{2}$$

wo $X(x)$ und $Y(y)$ arbiträre Funktionen ihrer Argumente sind. Es handelt sich daher darum, die Funktionalgleichung:

$$f(X)\varphi(Y)(1 + 2XY + X^2Y^2)X'Y' = \psi(x + y) + \Psi(x - y) \tag{3}$$

in allgemeinster Weise zu erfüllen.

49. Setzen wir:

$$f(X)X' = X_1, \quad \varphi(Y)Y' = Y_1$$

und für einen Augenblick:

$$X_1Y_1 + 2XX_1YY_1 + X^2X_1Y^2Y_1 = \Omega,$$

so findet unser Problem seinen analytischen Ausdruck in der Gleichung:

$$\frac{d^2\Omega}{dx^2} - \frac{d^2\Omega}{dy^2} = 0,$$

oder durch Ausführung in der äquivalenten:

$$\begin{gathered} X_1''Y_1 + 2(XX_1)''YY_1 + (X^2X_1)''Y^2Y_1 - \\ - X_1Y_1'' - 2XX_1(YY_1)'' - X^2X_1(Y^2Y_1)'' = 0. \end{gathered}$$

Dividieren wir mit X_1Y_1, so kommt:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{X_1''}{X_1} + 2\frac{(XX_1)''}{X_1}Y + \frac{(X^2X_1)''}{X_1}Y^2 - \\ &- \frac{Y_1''}{Y_1} - 2X\frac{(YY_1)''}{Y_1} - X^2\frac{(Y^2Y_1)''}{Y_1} = 0 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

und durch dreimalige Differentiation hinsichtlich X:

$$\frac{d^3}{dX^3}\left(\frac{X_1''}{X_1}\right) + 2\frac{d^3}{dX^3}\left(\frac{(X_1X)''}{X_1}\right)Y + \frac{d^3}{dX^3}\left(\frac{(X_1X^2)''}{X_1}\right)Y^2 = 0.$$

Diese Gleichung zerlegt sich, da Y keine Konstante und noch weniger eine Funktion von x sein darf, in die drei folgenden:

$$\frac{d^3}{dX^3}\frac{X_1''}{X_1} = 0, \quad \frac{d^3}{dX^3}\frac{(X_1X)''}{X_1} = 0, \quad \frac{d^3}{dX^3}\frac{(X_1X^2)''}{X_1} = 0,$$

woraus durch Integration: [448

$$\left\{\begin{aligned} \frac{X_1''}{X_1} &= a_0 + 2a_1X + a_2X^2, \\ \frac{(X_1X)''}{X_1} &= b_0 + 2b_1X + b_2X^2, \\ \frac{(X_1X^2)''}{X_1} &= c_0 + 2c_1X + c_2X^2, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

wo die Größen a_k, b_k und c_k Konstanten sind. Durch Einführung dieser Werte in (4) folgt:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{Y_1''}{Y_1} &= a_0 + 2b_0Y + c_0Y^2, \\ \frac{(Y_1Y)''}{Y_1} &= a_1 + 2b_1Y + c_1Y^2, \\ \frac{(Y_1Y^2)''}{Y_1} &= a_2 + 2b_2Y + c_2Y^2. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Die vereinigten Gleichungen (5) und (6) bestimmen die unbekannten Funktionen X_1, X, Y_1, Y vollständig.

50. Ich will zuerst die Gleichungen (5) betrachten. Durch Kombination der beiden ersten Gleichungen (5) folgt:

$$2\frac{X_1'}{X_1}X' + X'' = b_0 + (2b_1 - a_0)X + (b_2 - 2a_1)X^2 - a_2X^3, \tag{7}$$

und in entsprechender Weise geben die erste und die letzte unter den Gleichungen (5):

$$\left\{\begin{aligned} &4\frac{X_1'}{X_1}XX' + 2XX'' + 2X'^2 = \\ &= c_0 + 2c_1X + (c_2 - a_0)X^2 - 2a_1X^3 - a_2X^4. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Durch Elimination von X_1 zwischen (7) und (8) folgt:

$$\left\{\begin{aligned} 2X'^2 &= c_0 + 2(c_1 - b_0)X + (c_2 + a_0 - 4b_1)X^2 + \\ &\quad + 2(a_1 - b_2)X^3 + a_2X^4, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

und durch eine ähnliche Behandlung der Gleichungen (6):

$$\left\{\begin{aligned} 2Y'^2 &= a_2 + 2(b_2 - a_1)Y + (c_2 + a_0 - 4b_1)Y^2 + \\ &\quad + 2(b_0 - c_1)Y^3 + c_0Y^4. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

51. Um die beiden Gleichungen (9) und (10) zu vereinfachen, bemerken wir, daß die Form des Bogenelements (2) im wesentlichen ungeändert bleibt, wenn wir X durch:

$$\frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}$$

und Y durch:

$$\frac{-\delta Y + \gamma}{\beta Y - \alpha}$$

ersetzen, dabei vorausgesetzt, daß $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ beliebige Konstanten bezeichnen. Wir wählen diese Konstanten derart, daß die Gleichungen (9) und [449 (10) eine möglichst einfache Form erhalten.

Schließen wir vorläufig den Ausnahmefall, daß die Gleichung vierten Grades:

$$0 = c_0 + 2(c_1 - b_0)X + (c_2 + a_0 - 4b_1)X^2 + 2(a_1 - b_2)X^3 + a_2 X^4$$

drei und nur drei gleiche Wurzeln besitzt, aus, so können wir offenbar die Konstanten α, β, γ, δ derart wählen, daß in den transformierten Gleichungen (9) und (10) die ungeraden Potenzen von X und Y fortfallen, sodaß:

$$c_1 - b_0 = 0, \quad a_1 - b_2 = 0$$

wird. Um die Formeln abzukürzen, setzen wir:

$$c_2 + a_0 - 4b_1 = \omega,$$

wodurch (9) die Form:

$$2X'^2 = c_0 + \omega X^2 + a_2 X^4 \tag{11}$$

annimmt. Durch Differentiation kommt:

$$2X'' = \omega X + 2a_2 X^3, \tag{12}$$

$$2\frac{X'''}{X'} = \omega + 6a_2 X^2. \tag{13}$$

Gleichung (7) gibt:

$$2\frac{X_1'}{X_1} = \frac{b_0 + (2b_1 - a_0)X + (b_2 - 2a_1)X^2 - a_2 X^3 - X''}{X'},$$

woraus durch Differentiation und Multiplikation mit $2X'^2$:

$$(13')\begin{cases} 4\dfrac{X_1''}{X_1}X'^2 - 4\left(\dfrac{X_1'}{X_1}X'\right)^2 = 2X'^2(2b_1 - a_0 + 2(b_2 - 2a_1)X - 3a_2X^2) - \\ \quad - 2X'X''' - 2X''(b_0 + (2b_1 - a_0)X + (b_2 - 2a_1)X^2 - a_2X^3 - X''). \end{cases}$$

52. Hier führen wir die früher gefundenen Werte von:

$$\frac{X_1''}{X_1}, \quad \frac{X_1'}{X_1}X', \; X'^2, \; X'' \text{ und } X'''$$

ein und erhalten dadurch [wegen $b_2 = a_1$] die Relation:

$$(c_0 + \omega X^2 + a_2 X^4)(2b_1 - 3a_0 - 6a_1 X - 5a_2 X^2) +$$
$$+ (b_0 + (2b_1 - a_0)X - a_1 X^2 - a_2 X^3)^2 -$$
$$- 2(\omega X + 2a_2 X^3)(b_0 + (2b_1 - a_0)X - a_1 X^2 - a_2 X^3) +$$
$$+ \tfrac{3}{4}(\omega X + 2a_2 X^3)^2 - \tfrac{1}{2}(\omega + 6a_2 X^2)(c_0 + \omega X^2 + a_2 X^4) = 0.$$

Diese zerlegt sich, da X keine Konstante sein darf, in sieben Gleichungen, unter denen jedoch zwei identisch bestehen, sodaß wir nur die fünf folgenden erhalten:

[450

$$(14)\begin{cases} c_0(2b_1 - 3a_0) + b_0^2 - \tfrac{1}{2}c_0\omega = 0, \\ -6a_1c_0 + 2b_0(2b_1 - a_0) - 2b_0\omega = 0, \\ -8a_2c_0 - 2b_0a_1 + (2b_1 - a_0)^2 + \tfrac{1}{4}\omega^2 - \omega(2b_1 + a_0) = 0, \\ -4a_1\omega - 6a_2b_0 - 2a_1(2b_1 - a_0) = 0, \\ a_2(3a_0 - 10b_1) + a_1^2 - \tfrac{7}{2}a_2\omega = 0. \end{cases}$$

Durch eine entsprechende Behandlung der Gleichungen (6) und (10) erhält man die analogen Relationen:

$$(15)\begin{cases} a_2(2b_1 - 3a_0) + a_1^2 - \tfrac{1}{2}a_2\omega = 0, \\ -6b_0a_2 + 2a_1(2b_1 - a_0) - 2a_1\omega = 0, \\ -8a_2c_0 - 2b_0a_1 + (2b_1 - a_0)^2 + \tfrac{1}{4}\omega^2 - \omega(2b_1 + a_0) = 0, \\ -4b_0\omega - 6c_0a_1 - 2b_0(2b_1 - a_0) = 0, \\ c_0(3a_0 - 10b_1) + b_0^2 - \tfrac{7}{2}c_0\omega = 0, \end{cases}$$

unter denen jedoch die dritte mit der dritten Gleichung des Systems (14) identisch ist.

Wir subtrahieren jede Gleichung, etwa die k-te des Systems (15) von der $(6-k)$-ten des Systems (14) und erhalten hierdurch die vier folgenden sehr einfachen Relationen:

$$c_0(c_2 - a_0) = 0,$$
$$b_0(c_2 - a_0) = 0,$$
$$a_1(c_2 - a_0) = 0,$$
$$a_2(c_2 - a_0) = 0,$$

welche zeigen, daß es naturgemäß ist, die beiden Hypothesen $c_2 \gtrless a_0$ und $c_2 = a_0$ getrennt zu behandeln.

I. $c_2 - a_0 \gtrless 0$.

53. Ist $c_2 - a_0 \gtrless 0$, so kommt:

$$c_0 = b_0 = a_1 = a_2 = 0 = c_1 = b_2.$$

Die Gleichungen (9) und (10) geben:

$$2X'^2 = \omega X^2, \quad 2Y'^2 = \omega Y^2,$$

wo ω nicht verschwinden darf, weil X und Y keine Konstanten sein können. Setzen wir:

$$\omega = 2k^2,$$

so wird:

$$X' = kX, \quad Y' = \pm kY,$$

und:

$$X = Ae^{kx}, \quad Y = Be^{\pm ky}.$$

X_1 wird bestimmt durch (7):

$$\frac{X_1'}{X_1} = \frac{2b_1 - a_0 - k^2}{2k} = \varepsilon,$$ [451

woraus:

$$X_1 = Ce^{\varepsilon x}.$$

Dementsprechend ist:

$$Y_1 = De^{\pm \varepsilon y}.$$

Die entsprechende Minimalfläche ist, wie man leicht verifiziert, auf eine Rotationsfläche abwickelbar.

II. $c_2 - a_0 = 0$.

54. Sei jetzt $c_2 - a_0 = 0$. Alsdann befriedigen die Konstanten die folgenden Relationen:

$$(16) \qquad \begin{cases} 4c_0(b_1 - a_0) + b_0^2 = 0, \\ -a_1c_0 + b_0(2b_1 - a_0) = 0, \\ -4a_2c_0 - b_0a_1 + 4b_1(2b_1 - a_0) = 0, \\ a_1(a_0 - 2b_1) + a_2b_0 = 0, \\ 4a_2(b_1 - a_0) + a_1^2 = 0. \end{cases}$$

Durch Kombination der zweiten und vierten unter diesen Gleichungen folgt:

$$b_0a_1\{a_2c_0 - (2b_1 - a_0)^2\} = 0 = b_0a_1\Delta.$$

Setzen wir zunächst voraus, daß Δ von Null verschieden ist, so muß entweder b_0 oder a_1 verschwinden. Nun aber ist klar, daß bei der Vertauschung von x und y die Größen b_0 und a_1 unter einander vertauscht werden. Daher können wir ohne Beschränkung $b_0 = 0$ setzen. Die zweite und vierte unter den Gleichungen (16) geben somit:

$$a_1c_0 = 0, \quad a_1(a_0 - 2b_1) = 0,$$

sodaß die Annahme $a_1 \gtrless 0$ die kontradiktorische Relation:

$$a_0 - 2b_1 = 0 = \Delta$$

geben würde. Daher können wir annehmen, daß nicht allein b_0, sondern gleichzeitig a_1 gleich Null ist. Also geben die Gleichungen (16):

$$c_0(b_1 - a_0) = 0, \quad a_2(b_1 - a_0) = 0,$$
$$a_2c_0 - b_1(2b_1 - a_0) = 0.$$

Wäre $b_1 - a_0 = 0$, so käme die kontradiktorische Gleichung:

$$a_2c_0 - b_1^2 = 0 = \Delta.$$

Also ist $b_1 - a_0 \gtrless 0$ und:

$$c_0 = 0 = a_2, \quad b_1(2b_1 - a_0) = 0,$$

und da X' und Y' nicht verschwinden dürfen, folgt $b_1 = 0$.

Indem man nun ganz wie bei der Diskussion der Annahme $c_2 - a_0 \gtrless 0$ weiter geht, erhält man wiederum nur solche Minimalflächen, die auf [452 Rotationsflächen abwickelbar sind.

55. Jetzt müssen wir die Annahme:

$$c_2 - a_0 = 0, \quad \Delta = 0 = c_0a_2 - (2b_1 - a_0)^2$$

betrachten.

In diesem Falle können die Gleichungen:

$$2X'^2 = c_0 + 2(a_0 - 2b_1)X^2 + a_2X^4,$$
$$2Y'^2 = a_2 + 2(a_0 - 2b_1)Y^2 + c_0Y^4$$

durch die einfacheren:

$$X'\sqrt{2} = \sqrt{c_0} + \sqrt{a_2}\,X^2,$$
$$Y'\sqrt{2} = \sqrt{a_2} + \sqrt{c_0}\,Y^2$$

ersetzt werden. Hier können c_0 und a_2 nicht beide verschwinden, und wir können daher ohne Beschränkung annehmen, daß zum Beispiel c_0 von Null verschieden ist.

Ist dabei $a_2 = 0$, so kommt:

$$a_0 = 2b_1, \quad a_1 = 0, \quad b_0^2 - 4c_0b_1 = 0;$$

und wenn wir:

$$c_0 = 2k^2$$

setzen, folgt:

$$X = kx, \quad Y = \pm\frac{1}{ky},$$
$$X_1 = Ae^{mx}, \quad Y_1 = By^2e^{\pm my}.$$

Die entsprechenden Minimalflächen sind auch jetzt auf Rotationsflächen abwickelbar.

56. Ich will nun annehmen, daß $\varDelta = 0$, $a_2 \gtrless 0$, $c_0 \gtrless 0$ ist. Indem man die Größen X, Y, x und y durch mX, $(1:m)Y$, nx und $\pm ny$ ersetzt, und sodann die Konstanten m und n zweckmäßig wählt, erhält man die einfacheren Gleichungen:

$$X' = 1 + X^2, \quad Y' = 1 + Y^2.$$

Überdies ist:

$$a_2 = c_0 = 2, \quad a_0 - 2b_1 = 2$$

und:

$$b_0^2 + 8(b_1 - a_0) = 0, \quad a_1 = -b_0, \quad -16 + b_0^2 - 8b_1 = 0,$$

sodaß die neun Konstanten die folgenden Werte erhalten:

$$\begin{gathered} a_0 = \tfrac{1}{4}b_0^2 - 2, \quad a_1 = -b_0, \quad a_2 = 2, \\ b_0 = b_0, \quad b_1 = \tfrac{1}{8}b_0^2 - 2, \quad b_2 = -b_0, \\ c_0 = 2, \quad c_1 = b_0, \quad c_2 = \tfrac{1}{4}b_0^2 - 2. \end{gathered}$$

Also kommt: [453

$$\begin{gathered} X = \operatorname{tg} x, \quad X_1 = A\cos^2 x \,.\, e^{\frac{1}{2}b_0 x}, \\ Y = \operatorname{tg} y, \quad Y_1 = B\cos^2 y \,.\, e^{-\frac{1}{2}b_0 y}. \end{gathered}$$

Die entsprechenden Minimalflächen sind auch jetzt auf Rotationsflächen abwickelbar. Sie sind übrigens identisch mit denjenigen, die der Hypothese $c_2 - a_0 \gtrless 0$ entsprechen.

57. Ich werde endlich annehmen, daß die Gleichung vierten Grades:

$$0 = c_0 + 2(c_1 - b_0)X + (c_2 + a_0 - 4b_1)X^2 + 2(a_1 - b_2)X^3 + a_2 X^4$$

drei und nur drei gleiche Wurzeln besitzt; dann kann man in (9) und (10) ohne wesentliche Beschränkung:

$$c_0 = 0, \quad c_2 + a_0 - 4b_1 = 0, \quad a_1 - b_2 = 0, \quad a_2 = 0, \quad c_1 - b_0 = 1$$

setzen. Also kommt:

$$X'^2 = X, \quad Y'^2 = -Y^3.$$

Durch Differentiation kommt:

$$2X'' = 1, \quad X''' = 0,$$

und durch Substitution in (13'):

$$(17)\ \begin{cases} -4X(a_0 + 2a_1 X) + (b_0 + (2b_1 - a_0)X - a_1 X^2 - \frac{1}{2})^2 + \\ + 2X(2b_1 - a_0 - 2a_1 X) - (b_0 + (2b_1 - a_0)X - a_1 X^2 - \frac{1}{2}) = 0, \end{cases}$$

woraus:

$$a_1 = 0, \quad a_0 = b_1 = 0, \ (b_0 - \tfrac{1}{2})(b_0 - \tfrac{3}{2}) = 0.$$

Andererseits ist:

$$2Y'' = -3Y^2, \quad Y''' = -3YY',$$

also, unter Benutzung der Gleichung:

$$\begin{gathered} -4\frac{Y_1''}{Y_1}Y'^2 + 4\left(\frac{Y_1'}{Y_1}Y'\right)^2 + 2Y'^2(2b_1 - a_0 + 2(1 - b_0)Y) - \\ -2Y'Y''' - 2Y''(a_1 + (2b_1 - a_0)Y + (1 - b_0)Y^2 - Y'') = 0 \end{gathered}$$

überdies:

$$\begin{gathered} 4Y^3(a_0 + 2b_0 Y) + (a_1 + (2b_1 - a_0)Y - (b_0 - \tfrac{5}{2})Y^2)^2 - \\ -2Y^3(2b_1 - a_0 + 2(1 - b_0)Y) - 6Y^4 + \\ +3Y^2(a_1 + (2b_1 - a_0)Y - (b_0 - \tfrac{5}{2})Y^2) = 0 \end{gathered}$$

und durch Berücksichtigung der Werte $a_1 = 0$, $a_0 = 0$, $b_1 = 0$: [454

$$8b_0 + (b_0 - \tfrac{5}{2})^2 + 4(b_0 - 1) - 6 - 3(b_0 - \tfrac{5}{2}) = 0,$$

was mit der früher gefundenen Relation:

$$(b_0 - \tfrac{1}{2})(b_0 - \tfrac{3}{2}) = 0$$

im Widerspruche steht.

58. *Soll daher das Bogenelement einer Minimalfläche die Form:*

$$ds^2 = [\psi(x + y) + \Psi(x - y)]\,dx\,dy$$

erhalten können, so muß diese auf eine Rotationsfläche abwickelbar sein.

Die vorangehenden Entwickelungen geben gleichzeitig eine, allerdings weitläufige, Bestimmung der auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen.

Einfacher ist es, die Funktionalgleichung:

$$f(X)\varphi(Y)(1 + XY)^2 X'Y' = \psi(x + y)$$

direkt nach der im Vorangehenden entwickelten Methode zu behandeln. Gleichzeitig findet man alle Minimalflächen, deren Bogenelement die Form:

$$ds^2 = e^{\alpha x}\Phi(x + y)\,dx\,dy$$

besitzt, da auch dieses Problem durch die soeben hingeschriebene Funktionalgleichung ausgedrückt wird.

Hiermit sind alle Minimalflächen gefunden, deren geodätische Kurven eine infinitesimale Transformation gestatten.

Christiania, im April 1882.