SOPHUS LIE
GESAMMELTE ABHANDLUNGEN

AUF GRUND EINER BEWILLIGUNG AUS DEM NORWEGISCHEN FORSCHUNGSFONDS VON 1919 UND MIT UNTERSTÜTZUNG DER VIDENSKAPSAKADEMI ZU OSLO UND DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG · HERAUSGEGEBEN VON DEM NORWEGISCHEN MATHEMATISCHEN VEREIN DURCH

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
OSLO

ZWEITER BAND

GEOMETRISCHE ABHANDLUNGEN

ZWEITE ABTEILUNG

I. TEIL

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL UND POUL HEEGAARD

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1935

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1935

SOPHUS LIE

SOPHUS LIE

SAMLEDE AVHANDLINGER

VED BEVILGNING FRA
STATENS FORSKNINGSFOND AV 1919
OG MED UNDERSTØTTELSE AV
VIDENSKAPSAKADEMIET I OSLO
OG
VIDENSKAPERNES AKADEMI I LEIPZIG
UTGITT AV
NORSK MATEMATISK FORENING

VED

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR VED UNIVERSITETET
I GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR VED UNIVERSITETET
I OSLO

ANNET BINDS

FÖRSTE DEL

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1935

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1935

SOPHUS LIE

MELTE ABHANDLUNGEN

RUND EINER BEWILLIGUNG AUS DEM
EGISCHEN FORSCHUNGSFONDS VON 1919
MIT UNTERSTÜTZUNG DER
VIDENSKAPSAKADEMI ZU OSLO
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG
HERAUSGEGEBEN VON DEM
NORWEGISCHEN MATHEMATISCHEN VEREIN

DURCH

FRIEDRICH ENGEL
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
GIESSEN

POUL HEEGAARD
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
OSLO

ZWEITEN BANDES

ERSTER TEIL

LEIPZIG
B. G. TEUBNER
1935

OSLO
H. ASCHEHOUG & CO.
1935

GEOMETRISCHE ABHAND

ZWEITE ABTEILUNG

ERSTER TEIL

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL UND POUL HE

GEOMETRISKE AVHANDLINGER

ANNEN AVDELING

FÖRSTE DEL

UTGITT AV

FRIEDRICH ENGEL OG POUL HEEGAARD

GEOMETRISCHE ABHANDLUNGEN

ZWEITE ABTEILUNG

ERSTER TEIL

HERAUSGEGEBEN VON

FRIEDRICH ENGEL UND POUL HEEGAARD

GEOMETRISKE AVHANDLINGER

ANNEN AVDELING

FÖRSTE DEL

UTGITT AV

FRIEDRICH ENGEL OG POUL HEEGAARD

PRINTED IN GERMANY

Vorwort der Herausgeber

Da der zweite Band, wie er ursprünglich vorgesehen war, gar zu unhandlich ausgefallen wäre, haben wir uns entschlossen, ihn in zwei Teile zu zerlegen. Indem wir bei den Abhandlungen IX und X auf die sonst streng eingehaltene Anordnung nach der Zeitfolge verzichteten, haben wir erreicht, daß die neun Abhandlungen des jetzt erscheinenden ersten Teiles ein abgeschlossenes Ganzes bilden. Dasselbe gilt von den sieben Abhandlungen, die der zweite Teil enthalten wird.

Der vorliegende erste Teil gliedert sich ganz von selbst in vier Abschnitte. Den ersten bildet die berühmte Abhandlung I: „Über Komplexe", aus Bd. V der Mathematischen Annalen, eine Neubearbeitung der Abhandlungen XI und XII von Bd. I, deren erste Lies Doktordissertation war. Durch ihre Veröffentlichung in einer über die ganze mathematische Welt verbreiteten Zeitschrift trat Lie mit einem Male in die Reihe der ersten Mathematiker seiner Zeit. Der zweite Abschnitt besteht aus den Abhandlungen II und III, den „Beiträgen zur Theorie der Minimalflächen", in denen die Abhandlungen XVII—XIX, XXI—XXIII von Bd. I neu bearbeitet und zum Teil ganz wesentlich erweitert sind. Den dritten Abschnitt bildet die Abhandlung IV, eine durch zahlreiche neue Entwickelungen bereicherte Umarbeitung der Abhandlung XXIV von Bd. I, in die überdies dessen Abhandlung XXVI als Note 4 (S. 365—373) mit aufgenommen ist.

In den Anmerkungen, die zugleich mit dem zweiten Teile von Bd. II erscheinen werden, wird genaue Rechenschaft über alles Neue abgelegt werden, was diese Abhandlungen I—IV gegenüber den in Bd. I abgedruckten älteren Fassungen enthalten.

Der vierte und letzte Abschnitt des ersten Teiles von Bd. II umfaßt die Abhandlungen V—IX, die sämtlich den Grundlagen der Geometrie gewidmet sind. Durch F. Klein auf die bekannte Helmholtzsche Arbeit von 1868 aufmerksam gemacht, hatte Lie sofort erkannt, daß das von Helmholtz behandelte Problem vor vielen andern geeignet war, die Macht seiner Gruppentheorie zu zeigen. Die umfangreichen, hier hinter einander abgedruckten Untersuchungen, zu denen er dadurch veranlaßt wurde, hat er 1893, vollständig umgearbeitet, in den III. Bd. seiner „Theorie der Transformationsgruppen" aufgenommen. Durch die auch heute noch nicht zur Ruhe gekommene Welle der Axiomatik, die Hilberts 1899 erschienene, mit Recht bewunderte „Grundlagen der Geometrie" hervorgerufen haben, sind diese Lieschen Untersuchungen etwas in den Hintergrund gedrängt worden. Sie verdienen aber auch heute noch, nicht bloß gelesen, sondern gründlich durchgearbeitet zu werden. Verfolgen sie doch ganz andere Ziele, als sich die Axiomatiker stellen. Wir erinnern nur daran, daß bei Lie zum ersten Male aufgeklärt wird, was in dem Begriffe der Entfernung steckt, eine Frage, um die sich die Axiomatiker gar nicht kümmern.

Der zweite Teil des ersten Bandes wird die Sammlung der von Lie selbst veröffentlichten Abhandlungen zum Abschlusse bringen. Außer den von 1892 bis 1897 erschienenen Arbeiten über Translationsflächen und Translationsmannigfaltigkeiten enthält er noch die ebenso inhaltreiche wie wichtige Abhandlung: „Liniengeometrie und Berührungstransformationen" aus dem Jahre 1897. Dazu kommen endlich die von Engel 1904 herausgegebenen drei Kapitel aus dem nicht vollendeten zweiten Bande der „Geometrie der Berührungstransformationen".

August 1935.

F. Engel und **P. Heegaard.**

Inhaltsverzeichnis zum ersten Teile des zweiten Bandes

I.

Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe, [145 mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen.

Math. Ann. Bd. V, Heft 1, S. 145—208, ausgeg. 11. 3. 1872,
Heft 2, S. 209—256, ausgeg. 3. 6. 1872.

I.

Die rasche Entwickelung der Geometrie in unserem Jahrhundert ist bekanntlich innig mit philosophischen Betrachtungen über das Wesen der Cartesischen Geometrie verknüpft, Betrachtungen, die in ihrer allgemeinsten Form von Plücker in seinen ersten Arbeiten auseinandergesetzt worden sind. Für denjenigen, der in den Geist der Plückerschen Werke eingedrungen ist, wird der Gedanke, daß man eine jede Kurve, die von drei Parametern abhängt, als Raumelement anwenden kann, nichts wesentlich Neues enthalten, und wenn doch niemand, soviel ich weiß, diese Idee ausgeführt hat, so glaube ich, die Ursache darin suchen zu müssen, daß man derselben keinen praktischen Wert beigelegt hat. Ich bin zu einem Studium der genannten Theorie dadurch geführt worden, daß ich eine merkwürdige Transformation entdeckte, die einen genauen Zusammenhang zwischen Krümmungslinien und Haupttangentenkurven darlegt, und es ist meine Absicht, in der folgenden Abhandlung die Resultate, die ich in dieser Weise erhalten habe, auseinanderzusetzen.

Im ersten Abschnitte beschäftige ich mich mit Kurvenkomplexen, das heißt, mit Mannigfaltigkeiten, die von dreifach unendlich vielen Kurven gebildet werden. Alle Flächen, die von einfach unendlich vielen Kurven eines gegebenen Komplexes gebildet werden, genügen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die als singuläres erstes Integral eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zuläßt. Für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung erhalte ich in dieser Weise eine neue geometrische Interpretation, die insbesondere, wenn der besprochene Komplex ein Plückerscher Linienkomplex ist, Interesse darbietet.

Ebenso wie die allgemeine Gleichung $F(x, y, z, X, Y, Z) = 0$ als aequatio directrix eine Reziprozität im Raume bestimmt, zeige ich, [146 daß auch das simultane Gleichungssystem:

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

ein Entsprechen zwischen den Flächenelementen zweier Räume feststellt. Diese beiden Arten von Transformationen, zusammen mit allen Punkttransformationen, sind die einzigen räumlichen Umformungen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist, und also beruhen alle solchen Transformationen entweder auf einem Wechsel des Raumelements, oder auf der Einführung eines neuen Koordinatensystems.

Endlich betrachte ich die Anwendung solcher Transformationen auf partielle Differentialgleichungen.

Im zweiten Abschnitte setze ich voraus, daß die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ hinsichtlich beider Systeme von Veränderlichen linear sind, und zwar untersuche ich insbesondere das System:

$$-Zz = x - (X + iY), \quad (X - iY)z = y - Z$$

und die dadurch bestimmte räumliche Abbildung. Es transformieren sich dabei die Geraden des Raumes (x, y, z) in die Kugeln des zweiten Raumes, das heißt, alle Flächenelemente, die zwei konsekutive Punkte einer Geraden enthalten, gehen in die Elemente einer Kugel über. Gerade, die einander schneiden, bilden sich hierbei als Kugeln ab, die einander berühren.

Hierauf begründe ich einen genauen und nach meiner Auffassung fundamentalen Zusammenhang zwischen Liniengeometrie und Kugelgeometrie und demzufolge zwischen mehreren projektivischen und metrischen Theorien, einen Zusammenhang, der sein Hauptinteresse dadurch erhält, daß die Haupttangentenkurven gewissermaßen dieselbe Stelle in der ersten Geometrie, wie die Krümmungslinien in der zweiten einnehmen. Diese Theorie gibt die Bestimmung der Haupttangentenkurven für viele partikuläre Flächen, insbesondere für die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten.

Endlich beweise ich, daß die allgemeinste Transformation des Raumes (X, Y, Z), bei welcher einerseits Berührung eine invariante Beziehung ist, andererseits Krümmungslinien kovariante Kurven sind, durch meine Abbildung der allgemeinen linearen oder dualistischen Transformation des Raumes (x, y, z) entspricht. Alle diese Transformationen können aus Transformationen durch reziproke Radien und aus Paralleltransformationen (Dilatationen) zusammengesetzt werden.

Im dritten Abschnitte bestimme ich, mit Anwendung der Begriffe: Linien- und Kugelkomplex, Linien- und Kugelkongruenz, alle partiellen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung, deren Charakteristiken

Haupttangentenkurven oder Krümmungslinien auf den Integralflächen sind. Unter den besprochenen Gleichungen zweiter Ordnung gelingt es mir, alle, welche ein allgemeines erstes Integral, beziehungsweise [147
zwei allgemeine erste Integrale besitzen, anzugeben, und dabei zeigt es sich, daß, wenn ein allgemeines erstes Integral existiert, dasselbe, wie auch das zugehörige singuläre erste Integral, immer aufgestellt werden kann. Ich komme hier auf die bekannten Untersuchungen über Flächen, deren Krümmungslinien eben oder sphärisch sind, über Flächen, die eine gegebene sphärische Abbildung besitzen, und so weiter.

Im vierten Abschnitte gebe ich endlich einige Theorien, die sich an das Vorangehende anschließen.

Während ich mich mit diesen Entwickelungen beschäftigte, bin ich in lebhaftem Verkehr gewesen mit Herrn F. Klein, dem ich viele der hier verarbeiteten Ideen verdanke, mehr, als es mir durch Zitate anzugeben möglich gewesen ist.

Ich bemerke auch, daß die hier dargestellten Theorien einige Berührungspunkte mit meinen früheren Untersuchungen über die Repräsentation des Imaginären haben; wenn ich in meiner jetzigen Darstellung diesen Zusammenhang nicht hervortreten lasse, so geschieht es einerseits, weil ich denselben für einigermaßen zufällig halte, andererseits, weil ich nicht von der gewöhnlichen Sprache der Mathematik abzuweichen wünschte.[1])

Erster Abschnitt.

Über eine neue Reziprozität im Raume.

In den beiden ersten Paragraphen dieses Abschnitts gebe ich eine kurze Übersicht über einige bekannte Theorien, um dadurch das Verständnis des Paragraphen 4 zu erleichtern. Dieser Paragraph gibt sodann alle Voraussetzungen, die notwendig sind, um den zweiten Abschnitt verstehen zu können; für den dritten und vierten Abschnitt benutze ich außerdem noch die folgenden Paragraphen.

1) Die wesentlichsten Gesichtspunkte und Resultate dieser Abhandlung finden sich in einer kurzen Note (Oktober 1870) und in zwei größeren Arbeiten (1871), die in die Verhandlungen der Akademie zu Christiania aufgenommen sind. Den Zusammenhang zwischen Haupttangentenkurven und Krümmungslinien, wie überhaupt zwischen Liniengeometrie und Kugelgeometrie teilte ich derselben Gesellschaft im Juli 1870 mit. Vgl. auch die Comptes Rendus vom Oktober 1870, sowie eine von Herrn Klein und mir veröffentlichte Note in den Monatsberichten der Berliner Akademie, 15. Dez. 1870. [Diese Ausg. Bd. I, Abh. IX, XI, XII, VII, VIII und X.]

§ 1. Reziprozität zwischen zwei Ebenen oder zwei Räumen. [148

1. Die Poncelet-Gergonnesche Reziprozitätstheorie der Ebene kann bekanntlich aus der Gleichung:

$$X(a_1x+b_1y+c_1)+Y(a_2x+b_2y+c_2)+(a_3x+b_3y+c_3)=0, \tag{1}$$

oder, was dasselbe ist:

$$x(a_1X+a_2Y+a_3)+y(b_1X+b_2Y+b_3)+(c_1X+c_2Y+c_3)=0$$

entwickelt werden, vorausgesetzt, daß man x, y und X, Y als Cartesische Punktkoordinaten zweier Ebenen interpretiert.

Bezeichnet man nämlich als konjugiert zwei Punkte, deren Koordinatenwerte (x, y) und (X, Y) der Gleichung (1) genügen, so kann man sagen, daß die einem Punkte konjugierten Punkte der andern Ebene eine Gerade bilden, und diese betrachten wir als dem gegebenen Punkte entsprechend. Alle Punkte einer Geraden haben einen gemeinsamen konjugierten Punkt in der andern Ebene, und somit gehen ihre entsprechenden Geraden durch diesen gemeinsamen Punkt.

Die beiden Ebenen werden also durch (1) so auf einander bezogen, daß sich die Geraden jeder Ebene als die Punkte der andern Ebene abbilden. Den Punkten einer Geraden λ entsprechen hierbei die durch den Bildpunkt von λ gehenden Geraden. Diese gegenseitige Beziehung ist das Fundamentalprinzip der besprochenen Reziprozität.

Sei nun gegeben in der einen Ebene ein Polygon und in der andern Ebene dasjenige Polygon, dessen Seiten sich als die Ecken des ersten abbilden; nach dem Vorstehenden ist dann klar, daß auch die Ecken des letzten Polygons den Seiten des ersten entsprechen, daß also die beiden Polygone in reziproker Beziehung stehen. Aus diesen Polygonen erhält man durch Grenzübergang zwei Kurven, die, wie man sich ausdrückt, hinsichtlich der Gleichung (1) zu einander reziprok sind. Es ist einleuchtend, daß sich die Tangenten jeder Kurve als die Punkte der reziproken abbilden.

2. Plücker[1]) gründet eine Verallgemeinerung der eben entwickelten Theorie auf die Interpretation der allgemeinen Gleichung:

$$F(x, y, X, Y)=0. \tag{2}$$

Die einem Punkte (x, y) konjugierten Punkte (X, Y) bilden nun eine Kurve C, die durch (2) dargestellt wird, wenn (x, y) als Parameter, (X, Y) dagegen als laufende Koordinaten aufgefaßt werden; umgekehrt

1) Analytisch-geometrische Entwickelungen. T. 1. Zweite Abteilung.

bilden die einem Punkte (X, Y) konjugierten Punkte (x, y) eine Kurve c, welche ebenfalls durch (2) dargestellt wird. Die beiden Ebenen werden also durch (2) derart auf einander bezogen, daß den Punkten der einen Ebene in der andern die Kurven eines Kurvennetzes (C oder c) entsprechen. [149 Ganz wie früher sieht man ein, daß den Punkten einer Kurve C diejenigen Kurven c entsprechen, welche durch den Bildpunkt von C gehen.

Einem Kurvenpolygone $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ entspricht ein Punktsystem $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, und offenbar liegen diese Punkte paarweise (p_1, p_2), $(p_2, p_3), \ldots$ auf denjenigen Kurven c, deren Bildpunkte Ecken des gegebenen krummlinigen Polygons sind. Durch Grenzübergang erhält man auch hier Kurven, die in solcher Beziehung stehen, daß den Punkten der einen solche Kurven c oder C entsprechen, welche die andre umhüllen. Doch ist das Reziprozitätsverhältnis im allgemeinen nicht vollständig. Ist nämlich Σ die Umhüllungskurve aller C, die sich als die Punkte einer Kurve σ abbilden, so umhüllen freilich die den Punkten von Σ entsprechenden c die gegebene Kurve σ, aber im allgemeinen außerdem eine zweite Kurve.

3. Plücker[1]) gründet die allgemeine Reziprozität zwischen zwei Räumen r und R auf die allgemeine Gleichung:

$$F(x, y, z, X, Y, Z)=0.$$

Wenn insbesondere F hinsichtlich beider Systeme von Veränderlichen linear ist, so erhält man die Poncelet-Gergonnesche Reziprozität zwischen den Punkten und den Ebenen der beiden Räume.

Es ist nun meine Absicht, in dieser Abhandlung, und insbesondere im ersten Abschnitte derselben, eine neue, der **Plücker**schen koordinierte Reziprozität zu betrachten, die durch das Gleichungssystem:

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z)=0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z)=0$$

bestimmt wird, vorausgesetzt, daß man (x, y, z) und (X, Y, Z) als Punktkoordinaten zweier Räume r und R auffaßt.

§ 2. Kurven, die von drei Parametern abhängen, können als Raumelemente eingeführt werden.

4. Die Transformation geometrischer Theoreme, die sich auf die Poncelet-Gergonnesche oder Plückersche Reziprozitätstheorie

1) Es ist korrekt, glaube ich, Plücker diese Reziprozität zuzuschreiben, obgleich ich keinen Ort in Plückers Werken angeben kann, wo er explizite die Reziprozität des Raumes in dieser Weise begründet.

gründet, kann, wie Gergonne und Plücker hervorgehoben haben, unter einem höheren Gesichtspunkte, den wir sogleich angeben, betrachtet werden. Dasselbe gilt von unserer neuen Reziprozität.

Die Cartesische analytische Geometrie übersetzt beliebige geometrische Theoreme in algebraische und macht dadurch aus der Geo- [150
metrie der Ebene eine sinnliche Darstellung der Algebra zweier Variabeln, und ebenso aus der Geometrie des Raumes eine Repräsentation einer Algebra, die drei variable Größen umfaßt. Nun hat insbesondere Plücker die Aufmerksamkeit darauf gelenkt, daß die Cartesische Geometrie eine zweifache Willkürlichkeit enthält.

Descartes stellt ein Wertsystem der beiden Variabeln x und y durch einen Punkt in der Ebene dar; er hat, wie man zu sagen pflegt, den Punkt zum Elemente der ebenen Geometrie gewählt, während man ebensogut die Gerade, oder überhaupt eine beliebige, zwei Parameter enthaltende Kurve als Element anwenden könnte. Man kann aber bekanntlich die durch die **Poncelet-Gergonne**sche Reziprozität vermittelte Transformation als auf dem Übergange vom Punkte als Element zur Geraden als Element beruhend auffassen, und ebenso besteht gewissermaßen die **Plücker**sche Reziprozität der Ebene in dem Übergange vom Punkte als Element zu einer von zwei Parametern abhängenden Kurve als Element.

Ferner stellt Descartes das Wertsystem (x, y) durch denjenigen Punkt in der Ebene dar, dessen Abstände von zwei gegebenen Geraden — den Koordinatenachsen — beziehungsweise gleich x und y sind; er hat unter den unbegrenzt vielen möglichen Koordinatensystemen ein bestimmtes gewählt.

Es ist bekannt, daß sich die Fortschritte der Geometrie in unserem Jahrhundert wesentlich darauf gründen, daß die beiden besprochenen Willkürlichkeiten in der Cartesischen Repräsentation klar als solche aufgefaßt worden sind, und es liegt somit nahe, zu versuchen, aus dieser fruchtbaren Quelle noch mehr zu schöpfen.

5. Die im folgenden dargestellten neuen Theorien beziehen sich darauf, daß man als Raumelement eine jede Raumkurve, die von drei Parametern abhängt, anwenden kann. Erinnert man sich zum Beispiel, daß die Gleichungen einer Raumgeraden vier wesentliche Konstanten enthalten, so sieht man ein, daß man die geraden Linien, welche eine Bedingung befriedigen, als Elemente einer Raumgeometrie, die eine sinnliche Darstellung einer Algebra mit drei Variabeln gibt, wählen

kann. Da aber hierdurch ein Geradensystem — ein Plückerscher Linienkomplex — ausgezeichnet wird, so ist es einleuchtend, daß eine bestimmte Repräsentation der angegebenen Art nur eine begrenzte Anwendung finden kann. Wenn man sich indessen mit einem Studium des Raumes hinsichtlich eines Linienkomplexes beschäftigt, so kann es sehr vorteilhaft sein, die Linien dieses Komplexes als Raumelemente zu benutzen.

In der metrischen Geometrie ist zum Beispiel der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis und infolgedessen der Komplex der imaginären Geraden, welche denselben schneiden, ausgezeichnet, und es könnte somit a priori wahrscheinlich scheinen, daß es, um ge- [151
wisse metrische Probleme zu behandeln, vorteilhaft ist, diese imaginären Linien als Elemente einzuführen.

Wenn wir eben gesagt haben, daß es beispielsweise möglich ist, die Geraden eines Linienkomplexes zu Raumelementen zu wählen, so muß man wohl bemerken, daß dieses etwas ganz anderes, etwas, wenn man will, mehr Partikuläres ist, als die Ideen, welche Plücker in seinem letzten Werke: „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement", entwickelt hat. Plücker hatte schon früh[1]) die Aufmerksamkeit darauf gelenkt, daß es möglich ist, eine Repräsentation einer Algebra mit beliebig vielen Variabeln zu schaffen, indem man nämlich ein Gebilde, das ebensoviele Parameter enthält, als Raumelement einführt. Insbesondere hob er hervor, daß die Raumgerade vier Koordinaten besitzt, daß man also eine Geometrie einer Mannigfaltigkeit mit vier Dimensionen erhält, wenn man die Gerade als Element des Raumes betrachtet.

§ 3. Kurvenkomplexe. Neue geometrische Interpretation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Haupttangentenkurven eines Linienkomplexes.

6. Nach Plücker nennt man den Inbegriff der Geraden, die einer Bedingung unterworfen sind, welche also noch von drei wesentlichen Konstanten abhängen, einen Linienkomplex. In Analogie damit werde ich im folgenden ein jedes System von Kurven c, deren Gleichungen drei unabhängige Parameter enthalten, als einen Kurvenkomplex bezeichnen. Die Gleichungen:

$$f_1(x, y, z, a, b, c) = 0, \quad f_2(x, y, z, a, b, c) = 0, \tag{1}$$

in denen a, b, c Konstanten sind, stellen also einen Kurvenkomplex dar.

1) Geometrie des Raumes, Nr. 258 (1846).

Durch Differentiation dieser beiden Gleichungen hinsichtlich x, y, z und Elimination der Größen a, b, c erhält man eine Resultante:

$$(2) \qquad f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

die, wenn dx, dy, dz als Bestimmungselemente einer Richtung aufgefaßt werden, jedem Punkte des Raumes einen Kegel zuordnet, den Inbegriff nämlich der Richtungen aller Komplexkurven c, die durch den betreffenden Punkt gehen. Diese Kegel nenne ich elementare Komplexkegel; ebenso wende ich den Ausdruck elementare Komplexrichtung an, um ein beliebiges Linienelement (dx, dy, dz) einer Komplexkurve c zu bezeichnen. Der Inbegriff aller einem Punkte [152 entsprechenden elementaren Komplexrichtungen bildet den dem betreffenden Punkte zugeordneten elementaren Komplexkegel.

Einem gegebenen Systeme (1), oder, wie man auch sagen kann, einem gegebenen Kurvenkomplexe entspricht eine bestimmte Differentialgleichung $f = 0$; dagegen gibt es unbegrenzt viele Systeme (1), welche auf dieselbe Differentialgleichung $f = 0$ führen. Wählt man nämlich eine beliebige Relation:

$$\psi(x, y, z, dx, dy, dz, \alpha) = 0,$$

in welcher α eine Konstante bezeichnet, und sind:

$$(3) \qquad \varphi_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = 0$$

die Integrale des simultanen Systems:

$$f = 0, \quad \psi = 0,$$

so ist es klar, daß auch die Gleichungen (3) durch Differentiation hinsichtlich x, y, z und Elimination der Größen α, β, γ als Resultat:

$$f = 0$$

geben. Es existieren also unbegrenzt viele Kurvenkomplexe, deren Gleichungen eine gegebene Relation:

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

befriedigen. Eine jede Kurve eines solchen Komplexes wird von Kurven c des ursprünglichen Komplexes umhüllt, weil alle ihre Elemente Komplexrichtungen sind.

7. Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den Variabeln x, y, z ist nach Monge mit dem Probleme äquivalent: die allgemeinste Fläche zu finden, die in jedem ihrer Punkte einen dem be-

treffenden Punkte nach einem beliebigen Gesetze zugeordneten Kegel berührt. Indem man hierbei in der gegebenen partiellen Differentialgleichung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

x, y, z als Parameter, p und q dagegen als Ebenenkoordinaten auffaßt, kann man sagen, daß $F = 0$ die allgemeine Gleichung des besprochenen Kegelsystems in Ebenenkoordinaten darstellt.

Lagrange und Monge haben die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auf die Bestimmung eines gewissen Kurvenkomplexes, der sogenannten Charakteristiken, zurückgeführt, indem sie gezeigt haben, daß, wenn einfach unendlich viele Charakteristiken eine Kurve umhüllen, sie immer eine Integralfläche erzeugen. Es ist zu bemerken, daß die Differentialgleichung der Charakteristiken:

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

mit der partiellen Differentialgleichung als äquivalent aufzufassen ist; beide Gleichungen geben nämlich die analytische Definition des besprochenen Kegelsystems.

8. Sei nun gegeben eine partielle Differentialgleichung erster [153 Ordnung D_1, die zugehörige Differentialgleichung der Charakteristiken $f = 0$, und endlich dreifach unendlich viele Kurven c, die ebenfalls $f = 0$ genügen. Betrachten wir hier eine beliebige Integralfläche U_0, eine auf derselben gelegene Charakteristik k_0 und ferner eine Komplexkurve c_0, die k_0 berührt, so behaupte ich, daß c_0 die Fläche U_0 dreipunktig berührt.

Nennen wir nämlich die beiden gemeinsamen, unendlich nahen Punkte der Kurven c_0 und k_0, p_1 und p_2, ferner die nächstfolgenden Punkte unserer Kurven bezüglich π und p_3, so ist klar, daß der elementare Komplexkegel, dessen Spitze in p_2 liegt, das Flächenelement (p_2, p_3, π) enthält. Nun berührt der Kegel die Integralfläche U_0 nach der Erzeugenden $p_2 p_3$, und also gehört das Element (p_2, p_3, π) zugleich der Fläche U_0 an, welche somit den Punkt π enthält. Unsere Behauptung ist also erwiesen.

Dieser Satz läßt sich dahin verallgemeinern, daß, wenn c_0 n konsekutive Punkte mit der Charakteristik k_0 gemein hat, $(n + 1)$ Schnittpunkte von c_0 und der Integralfläche U_0 zusammenfallen.[1])

9. Die Forderung, daß eine Fläche $z = F(x, y)$ in einem jeden Punkte drei konsekutive Punkte mit einer Komplexkurve c gemein haben soll,

1) Entsprechende Sätze gelten für einen Raum mit beliebig vielen Dimensionen.

drückt sich durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung D_2[1]) aus, und zwar sieht man leicht, daß einfach unendlich viele c immer eine Integralfläche bilden. Man kennt somit das allgemeine zweite Integral der Gleichung D_2 mit zwei arbiträren Funktionen. Nun besagt der Satz der letzten Nummer, daß auch die Integralflächen der Gleichung D_1 — die im allgemeinen nicht von Komplexkurven c erzeugt werden — in einem jeden ihrer Punkte dreipunktig von einer c berührt werden, und also ist D_1 ein singuläres erstes Integral unserer Differentialgleichung zweiter Ordnung. *Ich behaupte, daß es sonst kein weiteres singuläres Integral gibt.*

Sei nämlich ϑ eine Integralfläche der Gleichung D_2, die nicht von Kurven c gebildet wird. Es gehen dann durch jeden Punkt der Fläche zwei zusammenfallende Kurven c, die dieselbe in diesem Punkte berühren. Hieraus folgt, daß der zugehörige elementare Komplexkegel die Fläche berührt, daß also diese der Gleichung D_1 genügt.

Die beiden letzten Nummern geben die folgende bemerkenswerte geometrische Interpretation der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen drei Variabeln:

Die Aufgabe, alle Flächen zu finden, die mit **zweifach** *unendlich vielen Kurven eines gegebenen Komplexes jedesmal drei konsekutive Punkte gemein haben, drückt sich durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung aus. Alle Komplexe, deren Gleichungen einer gegebenen Relation:* [154

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

genügen, führen auf dieselbe partielle Gleichung, und zwar befriedigen die zugehörigen Charakteristiken die Gleichung $f = 0$.

10. Korollar. *Die Aufgabe, alle Flächen zu finden, deren* **zweifach** *unendlich viele Haupttangenten des einen Systems einem gegebenen Linienkomplexe angehören, führt auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Charakteristiken von den Geraden des Komplexes umhüllt werden. Die Charakteristiken sind in diesem Falle*

1) Diese Differentialgleichung hat die folgende Form:

$$r + 2Ns + N^2 t + M = 0,$$

wobei N und M von x, y, z, p, q abhängen.

auf den Integralflächen[1]) *Haupttangentenkurven des einen Systems.*

Ich werde andeuten, wie man diesen Satz selbständig beweisen könnte.

Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Charakteristiken von den Geraden eines Linienkomplexes umhüllt werden, ist bekanntlich der Ausdruck des folgenden Problems: die allgemeinste Fläche zu finden, die in allen ihren Punkten den betreffenden Komplexkegel berührt. Nun ist die Oskulationsebene einer Kurve, deren Tangenten einem Linienkomplexe angehören, eine Tangentenebene des entsprechenden Komplexkegels, und also berühren in unserem Falle die Oskulationsebenen der Charakteristiken jedesmal die zugehörigen Integralflächen. Die Charakteristiken sind folglich Haupttangentenkurven.

Ein jeder Linienkomplex bestimmt also dreifach unendlich viele Kurven, die von Komplexlinien umhüllt werden und dabei die Eigenschaft besitzen, Haupttangentenkurven auf einer jeden Fläche zu sein, die einfach unendlich viele solche Kurven enthält, vorausgesetzt, daß immer zwei konsekutive dieser Kurven einander schneiden. Diese Kurven, die in der Theorie der Linienkomplexe eine wichtige Rolle spielen werden (vergleiche den dritten Abschnitt dieser Abhandlung), nenne ich die *Haupttangentenkurven des Linienkomplexes.*

Herr *Klein* hat mir die Bemerkung gemacht, daß die Komplexlinien, die *Plücker* als singuläre Linien des Komplexes bezeichnet, Haupttangentenkurven desselben sind. Wird der Komplex von den Tangenten einer Fläche, oder von den Linien, die eine Kurve schneiden, gebildet, so sind alle Komplexlinien singuläre Linien und also zugleich die Haupttangentenkurven des Komplexes.

§ 4. Das Gleichungssystem: [155

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

bestimmt eine Reziprozität zwischen zwei Räumen.

11. Wir beginnen nun (vergleiche § 1) ein Studium der räumlichen Reziprozität, die durch die beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

1) Herr *Darboux*, dem ich diesen Satz im Sommer 1870 mitteilte, kannte damals denselben. Vergleiche den Anfang und Schluß des zweiten Teiles.

bestimmt wird, wenn (x, y, z) und (X, Y, Z) als Punktkoordinaten zweier Räume r und R[1]) interpretiert werden.

Bezeichnet man als *konjugiert* zwei Punkte (x, y, z) und (X, Y, Z), deren Koordinatenwerte den Gleichungen (1) genügen, so kann man sagen, daß die einem Punkte (x, y, z) konjugierten Punkte (X, Y, Z) eine Kurve C bilden; diese wird durch (1) dargestellt, vorausgesetzt, daß man x, y, z als Parameter, X, Y, Z dagegen als laufende Koordinaten auffaßt. Den Punkten des Raumes r entsprechen somit dreifach unendlich viele Kurven C, und ebenso tritt im Raume r ein Kurvenkomplex auf, dessen Kurven c in demselben Verhältnisse zu den Punkten des Raumes R stehen. Die Punkte einer c haben hierbei einen gemeinsamen konjugierten Punkt in R, und also gehen ihre entsprechenden C durch diesen gemeinsamen Punkt.

Die beiden Räume r und R werden durch die Gleichungen (1) so auf einander bezogen, daß den Punkten des einen Raumes die Kurven eines Komplexes im andern Raume entsprechen. Komplexkurven, die durch einen gegebenen Punkt gehen, bilden sich hierbei als die Punkte der dem gegebenen Punkte entsprechenden Komplexkurve ab.

12. Es läßt sich nun zeigen, daß die Gleichungen (1) eine allgemeine Reziprozität zwischen Gebilden der beiden Räume bestimmen, und zwar insbesondere zwischen Kurven, die von Komplexkurven c und C umhüllt werden.

Wenn zwei Komplexkurven des einen Raumes einen gemeinsamen Punkt haben — was offenbar im allgemeinen nicht der Fall ist —, so liegen ihre Bildpunkte auf einer Komplexkurve des andern Raumes; insbesondere ist zu bemerken, daß zwei unendlich nahen, einander schneidenden Komplexkurven im anderen Raume Punkte entsprechen, deren infinitesimale Verbindungslinie eine Komplexrichtung ist. Man betrachte nun eine von einfach unendlich vielen c umhüllte Kurve σ und die den Punkten dieser letzten Kurve entsprechenden C; es ist einleuchtend, daß jedesmal zwei konsekutive C einander schneiden, daß also ihr Inbegriff eine Umhüllungskurve Σ bestimmt. Führt man die entsprechende Operation [156 auf Σ aus, so erhält man eine von Komplexkurven c umhüllte Kurve σ', und zwar behaupte ich, daß σ' eben die ursprüngliche Kurve σ ist.

Um dies zu beweisen, betrachte man einerseits ein von Komplexkurven c gebildetes krummliniges Polygon, andererseits die den besprochenen Kurven zugehörigen Bildpunkte, welche offenbar paarweise auf Komplexkurven C liegen, auf denjenigen nämlich, die den Ecken des gegebenen Polygons entsprechen. Dieses neue Polygon und das gegebene stehen also in einem vollständigen reziproken Verhältnisse.

[1]) Gebilde des Raumes r werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet; dagegen brauche ich große Buchstaben für alles, was dem Raume R angehört.

Durch Grenzübergang erhält man zwei von Komplexkurven c und C umhüllte Kurven, die in solcher gegenseitiger Beziehung stehen, daß den Punkten der einen diejenigen Komplexkurven entsprechen, welche die andere umhüllen.

Eine jede von Komplexkurven umhüllte Kurve bildet sich also für eine zweifache Auffassung ab als eine andere ebenso von Komplexkurven umhüllte Kurve, die wir als die *reziproke* der gegebenen hinsichtlich des Gleichungssystems (1) bezeichnen; und offenbar kann man, wenn die Gleichungen der einen Kurve gegeben sind, diejenigen der reziproken durch einfache Operationen — Differentiation und Elimination — bestimmen. Es ist auch zu bemerken, daß *die elementaren Komplexrichtungen (dx, dy, dz) und (dX, dY, dZ) sich paarweise als reziproke zusammenordnen*, daß also zwei von Komplexkurven umhüllte Kurven, zwischen denen Berührung stattfindet, sich als ebensolche Kurven im andern Raume abbilden.

13. Auch unter anderen Raumgebilden bestimmen die Gleichungen (1), und zwar für eine zweifache Auffassung, ein Entsprechen, welches aber im allgemeinen keine *vollständige* Reziprozität ist.

Die elementaren Komplexkegel, deren Spitzen auf einer Fläche f liegen, schneiden die entsprechenden Tangentenebenen jedesmal nach n Geraden — n bezeichnet die Ordnung der Komplexkegel — und ordnen dadurch jedem Punkte der Fläche n elementare Komplexrichtungen zu. Die kontinuierliche Aufeinanderfolge dieser Richtungen bildet eine die Fläche n-fach bedeckende Schar von Kurven σ, die sämtlich von Komplexkurven c umhüllt werden. Die entsprechenden reziproken Kurven Σ erzeugen eine Fläche F, die wir als Bildfläche der gegebenen auffassen. Daß das Reziprozitätsverhältnis nicht vollständig ist, liegt daran, daß durch jeden Punkt der Fläche F im allgemeinen nur eine Kurve Σ geht. Die Fläche F enthält nämlich außerdem eine Schar von Kurven Σ', die ebenfalls von Komplexkurven C umhüllt sind, und zwar gehen durch jeden Punkt unserer Fläche $N-1$ solche Σ', vorausgesetzt, daß N die Ordnung der elementaren Komplexkegel des Raumes R bezeichnet. Die den Kurven Σ' zugehörigen reziproken bilden eine Fläche φ, die ge- [157 wissermaßen der gegebenen Fläche assoziiert ist.

Durch jeden Punkt der Fläche f gehen, wie gesagt wurde, n Kurven σ, und also ist dieser Punkt das Bild einer Komplexkurve C, welche n Kurven Σ berührt; demzufolge berührt unsere C die Fläche F in n Punkten. Andererseits geht durch jeden Punkt der Fläche F nur eine Σ, dagegen $N-1$ Kurven Σ', und also ist unser Punkt das Bild einer Komplexkurve c, welche f in einem Punkte, φ dagegen in $N-1$ Punkten berührt. Führen wir nun — in Analogie mit der für Liniensysteme gebräuchlichen Terminologie — die Bezeichnungen „*Kurvenkongruenz*" und „*Brennfläche*[1]) *einer Kurvenkongruenz*" ein, so können wir das Obenstehende folgendermaßen zusammenfassen:

Die Punkte einer Fläche f bilden sich in R ab als zweifach unendlich viele Komplexkurven C, als eine Kurvenkongruenz, deren Brennfläche F wir als Bildfläche der gegebenen betrachten. Ebenso bilden sich die Punkte der Fläche F als zweifach unendlich viele Kurven c ab, und zwar enthält die zugehörige Brennfläche die gegebene Fläche f als irreduktiblen Teil.

14. Die vorstehenden Betrachtungen gelten auch, wenn f und F Flächenelemente sind. *Unsere Reziprozität bestimmt ein Entsprechen zwischen Flächenelementen.* Einem gegebenen Elemente des Raumes r entsprechen n Elemente des zweiten Raumes; andererseits entsprechen jedem Elemente des Raumes R gerade N Elemente in r. Sollen also die Gleichungen (1) eine vollständige Reziprozität, das heißt, ein eindeutiges Entsprechen zwischen Flächenelementen bestimmen, so müssen die beiden Zahlen n und N gleich 1 sein.

Hierher gehört, wie ich beiläufig bemerke, die *Ampère*sche Transformation (vgl. § 7, Nr. 22). Dagegen haben wir gefunden, daß das Entsprechen zwischen elementaren Komplexrichtungen im allgemeinen eindeutig ist, und in der Tat *erhält man die klarste Vorstellung von unserer Reziprozität, wenn man eine jede Figur als von elementaren Komplexrichtungen gebildet auffaßt. Beispielsweise können wir sagen, daß sich die zweifach unendlich vielen elementaren Komplexrichtungen einer Fläche f als die elementaren Komplexrichtungen der entsprechenden Fläche F abbilden.*

---

1) Definiert man eine Kurvenkongruenz durch eine *lineare* partielle Differentialgleichung erster Ordnung, so ist die Brennfläche dasjenige, was man im allgemeinen als das *singuläre Integral* der betreffenden Differentialgleichung bezeichnet.

Sei nun gegeben eine Kurve k, die wir als eine Röhrenfläche von infinitesimalem Querschnitte auffassen. Alle elementaren Komplexrichtungen, die k schneiden, geben zweifach unendlich viele Komplexrichtungen (dX, dY, dZ), deren Inbegriff im allgemeinen eine Fläche F [158
bildet, welche das Bild von k ist. Diese Definition der Bildfläche ist mit den beiden folgenden äquivalent: F enthält einfach unendlich viele Kurven C, die sich als die Punkte der Kurve k abbilden. Alle Komplexkurven c, die k schneiden, bilden sich als die Punkte der Fläche F ab.

Die Gleichungen $F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0$, $F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$ führen somit beliebige gegebene Gebilde in neue über, sie können also dazu dienen, geometrische Theoreme und Probleme zu transformieren. Im zweiten Abschnitte machen wir für eine partikuläre Form der Abbildungsgleichungen wichtige Anwendungen von diesem Transformationsprinzip.

§ 5. Bestimmung aller Raumtransformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist.

15. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen spielen bekanntlich Transformationen, die sich folgendermaßen ausdrücken lassen:

$$(1)\quad X = f_1(x, y, z, p, q), \quad Y = f_2(x, y, z, p, q), \quad Z = f_3(x, y, z, p, q),$$

eine wichtige Rolle. Es sollen hier p und q, wie auch später P und Q, die partiellen Derivierten:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial X}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y}$$

bezeichnen. Bemerkenswert ist insbesondere der Fall, daß sich aus den Gleichungen (1) Ausdrücke für P und Q, die ebenfalls nur von (x, y, z, p, q) abhängen, herleiten lassen. Alsdann besitzt unsere Transformation die Eigenschaft, Flächen, die einander berühren, in ebensolche überzuführen, und zwar werde ich in diesem Paragraphen eine, wie es scheint, neue analytischgeometrische Einteilung dieser Transformationen in drei Klassen geben.

Die Gleichungen (1) ordnen einem beliebigen Flächenelemente (x, y, z, p, q) einen Punkt (X, Y, Z) zu, und also entsprechen den Elementen einer Fläche f alle Punkte einer Fläche F, die freilich in eine Kurve, oder sogar in einen Punkt ausarten kann. Läßt man eine Fläche π variieren, in solcher Weise, daß ein Flächenelement derselben ungeändert bleibt, so berühren die entsprechenden Π einander in einem (oder mehreren) gemeinsamen Elementen E. Wenn Π in eine Kurve ausartet, so enthält dieselbe, wie eine Kontinuitätsbetrachtung zeigt, zwei konsekutive Punkte des Elementes E. Wird endlich Π eine Punktkugel (unendlich kleine Kugel), so liegt dieselbe auf E.

Man betrachte nun dreifach unendlich viele Flächen f, die ganz beliebig gewählt sind, und die entsprechenden Gebilde F des zweiten Raumes, die entweder Flächen oder Kurven oder Punktkugeln sind. Eine Fläche φ wird von zweifach unendlich vielen f umhüllt, und nach dem Vorstehenden berühren dann die entsprechenden zweifach unendlich [159
vielen F die Bildfläche Φ. Hierin liegt eine allgemeine geometrische Definition unserer Transformationen.

16. Wählen wir insbesondere als Flächen f alle Punktkugeln des Raumes r, so finden wir die analytische Definition der Gebilde F, indem wir zwischen den Gleichungen:

$$X = f_1(x, y, z, p, q), \quad Y = f_2(x, y, z, p, q), \quad Z = f_3(x, y, z, p, q)$$

p und q eliminieren. Es sind hier drei Fälle möglich: Entweder existiert nur eine Relation zwischen (x, y, z, X, Y, Z), und dann gehört die Transformation[1] unter die von Plücker aufgestellte allgemeine Reziprozität; oder es finden sich zwei solche Relationen, was der von mir aufgestellten Reziprozität entspricht; oder es existieren drei unabhängige Gleichungen zwischen den Punktkoordinaten der beiden Räume, was bei allen Punkttransformationen der Fall ist.

Es gibt drei distinkte Klassen von Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist; die erste entspricht der Plückerschen Reziprozität des Raumes und wird durch **eine** aequatio directrix:

$$F(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

definiert; die zweite entspricht der von mir aufgestellten Reziprozität, sie wird durch **zwei** Gleichungen:

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

definiert; die dritte endlich umfaßt alle Punkttransformationen: sie wird durch **drei** Gleichungen:

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0,$$
$$F_3(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

bestimmt.[2])

1) Vergleiche du Bois-Reymond, Partielle Differentialgleichungen, § 75–81.

2) Für einen Raum mit n Dimensionen gibt es n distinkte Klassen von Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist. Bezeichnet m eine beliebige ganze, positive Zahl, die nicht größer als n ist, so können wir sagen, daß eine jede Klasse durch m Gleichungen zwischen den Koordinaten des ursprünglichen und des transformierten Raumes definiert wird.

Die beiden ersten Klassen von Transformationen beruhen auf der Einführung eines neuen Raumelements, die letzte auf der Anwendung eines neuen Koordinatensystems.

§ 6. Transformation partieller Differentialgleichungen.

17. Legendre[1]) hat eine allgemeine Methode gegeben, um — in der Sprache der modernen Geometrie — eine partielle Differentialgleichung zwischen Punktkoordinaten x, y, z in eine zwischen Ebenenkoordi- [160
naten t, u, v überzuführen; hierbei kann man t, u, v auch als Punktkoordinaten eines auf den gegebenen reziprok bezogenen Raumes betrachten. Ebenso ist es, wenn man die Kurven oder Flächen eines Komplexes als Raumelemente einführt, möglich, eine Differentialgleichung in den Variablen x, y, z in eine zwischen den Koordinaten X, Y, Z des neuen Elementes zu transformieren. Auch hier ist zu bemerken, daß man in der neuen Gleichung X, Y, Z als Punktkoordinaten des Raumes R interpretieren kann, und zwar wird diese Auffassung in unserer Darstellung die hervortretende sein.

Der analytische Beweis für die Wahrheit der vorstehenden Behauptung liegt darin, daß sich der besprochene Wechsel des Raumelements durch fünf Relationen zwischen (x, y, z, p, q) und (X, Y, Z, P, Q) ausdrücken läßt. Wenn man aber in eine partielle Differentialgleichung:

$$\Pi(x, y, z, p, q) = 0$$

statt x, y, z, p, q die Werte dieser Größen ausgedrückt durch X, Y, Z, P, Q einsetzt, so erhält man eine neue partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Geometrisch kann man dasselbe in folgender Weise einsehen.

Es sei gegeben eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung $\Pi(x, y, z, p, q) = 0$ und alle Flächen φ, die ein sogenanntes vollständiges Integral bilden; hierbei hat man sich zu erinnern, daß eine jede andere Integralfläche f von einfach unendlich vielen φ umhüllt wird. Man betrachte ferner die zugehörigen Bildflächen Φ und F; wir werden beweisen, daß jede F von einfach unendlich vielen Φ umhüllt wird.

Aus den Entwickelungen des letzten Paragraphen folgt, daß, wenn zwei Flächen einander nach einer Kurve berühren, das heißt, einfach unendlich viele Flächenelemente gemein haben, die Bildflächen in demselben gegenseitigen Verhältnisse stehen. Dieses vorausgesetzt, betrachte man eine Integralfläche f_0, ferner alle einfach unendlich vielen φ_0, welche

1) Die hier gegebene allgemeine Auffassung der sogenannten Legendreschen Transformation gehört wohl Plücker. Crelle IX. 1831.

diese nach einer Charakteristik berühren, und endlich die entsprechenden Flächen F_0 und Φ_0. Es ist klar, daß jede Φ_0 die Fläche F_0 nach einer Kurve berührt, daß also F_0 die Umhüllungsfläche der Φ_0 ist. Wir sehen somit, daß unsere Transformation alle Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung $\Pi(x, y, z, p, q) = 0$ in die Integralflächen einer neuen partiellen Differentialgleichung $F(X, Y, Z, P, Q) = 0$ überführt, und das war eben unsere Behauptung.

18. Wir betrachten nun eine, durch zwei auf einander bezogene Kurvenkomplexe c und C definierte Transformation; wenden wir dieselbe auf die dem Kurvenkomplexe c zugehörige (§ 3, Nr. 9) partielle Differentialgleichung erster Ordnung an, so zerfällt die entsprechende Differential- [161
gleichung zwischen X, Y, Z in zwei Gleichungen, unter denen die eine eben dem Kurvenkomplexe C entspricht.

Sei nämlich gegeben eine Fläche f, die in allen ihren Punkten die zugehörigen elementaren Komplexkegel berührt. Diese Kegel bestimmen in jedem Flächenelemente (§ 4, Nr. 13) n elementare Komplexrichtungen, unter denen jedesmal zwei zusammenfallen. Die auf f gelegenen Kurven, die von Komplexkurven c umhüllt werden, teilen sich also in zwei Scharen: die Charakteristiken der Fläche f und eine Schar, die die Fläche $(n-2)$-fach bedeckt. Die Punkte unserer Fläche bilden sich somit ab als zweifach unendlich viele Kurven C, deren Brennfläche in zwei Flächen F_1 und F_2 zerfallen ist, und zwar berühren die Kurven C die Fläche F_1 in zwei zusammenfallenden Punkten, dagegen die Fläche F_2 in $n-2$ getrennten Punkten. Die Fläche F_1 genügt also nach § 3, Nr. 9 der den Komplexkurven C zugehörigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, während F_2 eine andere Differentialgleichung befriedigt. Unsere Behauptung ist also erwiesen.

Unser Satz ist mit den beiden folgenden identisch:

Wenn ein Flächenelement des Raumes r einen elementaren Komplexkegel berührt, so bildet es sich in R ab durch $n-1$ Elemente, unter denen das eine zweifach zählt und dabei einen elementaren Komplexkegel berührt.[1])

1) Einem Elemente des einen Raumes entsprechen im allgemeinen n, beziehungsweise N Elemente des andern Raumes. Demzufolge ordnen sich die Elemente jedes Raumes in Gruppen von n oder N zusammen, wir werden sagen als assoziierte Elemente. Wenn unsere Transformation durch zwei Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ definiert wird, so gibt es nach den Entwickelungen des Textes in jedem Raume vierfach unendlich viele Elemente, die mit einem assoziierten zusammengefallen sind, und zwar ist es bemerkenswert, daß sich ein solches Element als

Die Komplexkurven c und C bestimmen zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken reziproke Kurven hinsichtlich der Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ sind.

19. Die letzte Form unseres Satzes gibt die folgende Methode zur Transformation partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Man bestimme die Differentialgleichung $f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$ der Charakteristiken und wähle eine beliebige Relation:

$$\psi(x, y, z, dx, dy, dz, X) = 0,$$

in welcher X eine Konstante bezeichnet. Es seien:

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

die Integrale mit zwei arbiträren Konstanten Y und Z des simultanen Systems:

$$f = 0, \quad \psi = 0.$$ [162

Die Gleichungen $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ geben durch Differentiation und Elimination eine Gleichung:

$$F_3(X, Y, Z, dX, dY, dZ) = 0,$$

welche wir auffassen als bestimmend eine partielle Differentialgleichung:

$$F_4\left(X, Y, Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) = 0,$$

die sich nach gewöhnlichen Methoden finden läßt.

Die gegebene partielle Differentialgleichung und die eben gefundene $F_4 = 0$ sind äquivalente Probleme in dem Sinne, daß die zugehörigen Charakteristiken reziproke Kurven hinsichtlich des Systems $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ sind.

Es ist nicht schwer, die Wahrheit der beiden folgenden Behauptungen, die ich als Beispiele aufstelle, zu erkennen.

Transformiert man nach der angegebenen Methode die einem Linienkomplexe (§ 3, Nr. 10) zugehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, so ist die neue Gleichung $F_4 = 0$ nur vom zweiten Grade. Dieses liegt daran, daß die Geraden einer Linienkongruenz die Brennfläche in zwei Punkten berühren.[1])

ein ähnliches im zweiten Raume abbildet. Der Satz des Textes gilt in dieser Form auch für Transformationen, die durch eine Gleichung $F(x, y, z, X, Y, Z) = 0$ definiert werden.

1) Die hier angedeutete einfache Form, welche die einem Linienkomplexe zugehörige partielle Differentialgleichung annehmen kann, gründet sich nach den Entwickelungen in § 2 (vergleiche auch den dritten Abschnitt dieser Abhandlung) darauf, daß man die Geraden des betreffenden Linienkomplexes als Raumelemente einführt.

Transformiert man dagegen die einem Kegelschnittkomplexe zugehörige partielle Differentialgleichung (§ 3, Nr. 9), so ist die neue Differentialgleichung im allgemeinen vom dreißigsten Grade. Dieses liegt daran, daß, wenn zweifach unendlich viele Kegelschnitte eine Kongruenz bilden, jeder Kegelschnitt die Brennfläche in sechs Punkten berührt. Demzufolge sind die neuen elementaren Komplexkegel von sechster Ordnung und also von dreißigster Klasse, und so weiter.

20. Hier mögen noch die folgenden Bemerkungen, auf deren Beweis ich nicht eingehe, ihren Platz finden.

a) Wenn in der letzten Nummer $f=0$ die Form:

$$\boldsymbol{X}dx + \boldsymbol{Y}dy + \boldsymbol{Z}dz = 0^{1)}$$

besitzt, so sind die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung $F_4 = 0$ eben diejenigen Kurven, die durch $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ dargestellt werden, wenn man x, y, z als Parameter auffaßt. Wir können hieraus als wesentliche Eigenschaft der Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die folgende schließen:

Die Kurven eines gegebenen Komplexes sind Cha- [163
rakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, wenn in einer beliebigen, diesem Komplexe angehörigen Kongruenz jede Kurve[2] die Brennfläche nur in einem Punkte berührt. Hierbei wird von der allen solchen Kongruenzen möglicherweise gemeinsamen Brennfläche abgesehen.

Wenn die elementaren Komplexkegel beider Räume in ebene Strahlenbüschel zerfallen, so liegen die dreifach unendlich vielen Komplexkurven jedes Raumes auf einfach unendlich vielen Flächen — das heißt, die Gleichungen:

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \quad F_3(X, Y, Z, dX, dY, dZ) = 0,$$

die hinsichtlich der Differentiale linear sind, können integriert werden. Dieser Satz ist, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde, von Bedeutung, wenn man insbesondere alle eindeutigen Transformationen sucht.

b) Alle Transformationen, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist, besitzen die charakteristische Eigenschaft, die Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0$$

1) $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ sollen hier beliebige Funktionen von x, y, z bezeichnen.

2) Jede Kurve einer solchen Kongruenz schneidet nur eine unendlich benachbarte Kurve.

in eine ähnliche Gleichung überzuführen. Wenn die gegebene Gleichung ein allgemeines erstes Integral zugibt, so ist dieses offenbar auch mit der neuen der Fall. (Vergleiche eine Abhandlung von Boole in Crelle-Borchardts Journal, Bd. 61.)

c) Im allgemeinen entspricht bei unseren Transformationen einem gegebenen Elemente eine endliche Anzahl Elemente des zweiten Raumes. Es gibt indessen Ausnahmeelemente, die sich als unbegrenzt viele Elemente abbilden. Ohne auf eine vollständige Diskussion dieser wichtigen Theorie einzugehen, bemerke ich, daß, wenn ein Element einfach unendlich viele Komplexrichtungen enthält, dasselbe ein Ausnahmeelement ist. Dieses liegt unmittelbar darin, daß sich ein Element im allgemeinen in so viele Elemente transformiert, wie dasselbe Komplexrichtungen enthält (§ 4, Nr. 13 und 14). Wenn daher die elementaren Komplexkegel des Raumes r in ebene Büschel zerfallen sind, so erhalten wir in diesem Raume dreifach unendlich viele Ausnahmeelemente, deren Inbegriff den vierfach unendlich vielen Elementen entspricht, welche sämtliche elementare Komplexkegel des Raumes R umhüllen.

Zweiter Abschnitt. [164

Die Plückersche Liniengeometrie[1]) läßt sich in eine Kugelgeometrie transformieren.

In diesem Abschnitte betrachte ich einen besonderen Fall der früher entwickelten allgemeinen Theorie, denjenigen nämlich, in welchem die beiden auf einander bezogenen Kurvenkomplexe Linienkomplexe sind. Doch ist es nur ein Degenerationsfall, den ich einem näheren Studium unterwerfe. Indessen glaube ich, daß es Interesse darbieten würde, sowohl den allgemeinen Fall, wie alle möglichen Spezialfälle genau zu untersuchen.

§ 7. Die beiden Kurvenkomplexe sind Linienkomplexe.

21. Setzen wir voraus, daß die beiden Gleichungen der Reziprozität hinsichtlich (x, y, z) und (X, Y, Z) linear sind:

$$(1)\quad \left|\begin{aligned} &X(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + Y(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) + \\ &+ Z(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) + (a_4x + b_4y + c_4z + d_4) = 0, \\ &X(\alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \delta_1) + Y(\alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \delta_2) + \\ &+ Z(\alpha_3x + \beta_3y + \gamma_3z + \delta_3) + (\alpha_4x + \beta_4y + \gamma_4z + \delta_4) = 0, \end{aligned}\right.$$

1) Hinsichtlich der Theorie der Komplexe setze ich als bekannt voraus: Plücker, Neue Geometrie des Raumes ... 1868, 69; Klein, Zur Theorie der Komplexe ... Math. Ann. II, 2. Herrn Battaglinis Arbeiten über Linienkomplexe kann ich nicht zitieren, weil sie mir unzugänglich sind.

so bilden offenbar die einem gegebenen Punkte konjugierten Punkte des zweiten Raumes eine Gerade. Die beiden Kurvenkomplexe sind Plückersche Linienkomplexe, und also bestimmen die Gleichungen (1) ein Entsprechen zwischen r und R, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) In jedem Raume befindet sich ein Linienkomplex, dessen Gerade sich als die Punkte des andern Raumes abbilden.

b) Wenn ein Punkt eine Komplexlinie beschreibt, so dreht sich die entsprechende Gerade um den Bildpunkt der durchlaufenen Linie.

c) Kurven, deren Tangenten beziehungsweise den beiden Komplexen angehören, ordnen sich paarweise als reziproke zusammen, dergestalt, daß sich die Tangenten der einen als die Punkte der andern abbilden.

d) Einer Fläche f wird für eine zweifache Auffassung eine Fläche F zugeordnet. Einerseits ist F die Brennfläche derjenigen Linienkongruenz, deren Gerade den Punkten von f entsprechen; andererseits sind die Punkte von F [165 das Bild aller Tangenten der Fläche f, welche dem betreffenden Linienkomplexe angehören.[1])

e) Auf den eben besprochenen Flächen ordnen sich alle Kurven paarweise als konjugierte zusammen. Die Punkte einer solchen Kurve transformieren sich in die Erzeugenden einer Linienfläche, welche die konjugierte Kurve enthält und nach derselben die Fläche f oder F berührt.

f) Einer Kurve, deren Tangenten dem betreffenden Komplexe angehören, entspricht als konjugierte eine ebenfalls von Komplexlinien umhüllte Kurve, und zwar eben diejenige, die wir als die reziproke der gegebenen bezeichnet haben.

Der Beweis für die unter e) aufgestellte Behauptung liegt darin, daß eine Komplexlinie und ein auf derselben gelegener Punkt sich als ein Punkt und eine durch denselben gehende Komplexlinie abbilden.

22. Eine jede der Gleichungen (1) bestimmt ein homographisches Entsprechen zwischen den Punkten und Ebenen der beiden Räume, und also läßt sich jeder unserer Komplexe definieren als der Inbegriff der

1) Daß die Reziprozität nicht vollständig ist, liegt daran, daß die Fläche F die vollständige Brennfläche der zugehörigen Kongruenz ist; dagegen umhüllen die Linien der andern Kongruenz außer f noch eine zweite Fläche.

Durchschnittsgeraden von homographisch entsprechenden Ebenen, oder der Verbindungslinien von homographisch zusammengehörenden Punkten. Der hierdurch bestimmte Linienkomplex zweiten Grades ist nach den Untersuchungen des Herrn Reye[1]) mit demjenigen Liniensysteme identisch, welches Binet zuerst als den Inbegriff stationärer Umdrehungsachsen eines materiellen Körpers betrachtet hat, und welches später mehrere Mathematiker, insbesondere die Herren Chasles und Reye, untersucht haben.

Wenn die Konstanten der Gleichungen (1) partikularisiert sind, so können die Komplexe entweder eine spezielle gegenseitige Lage erhalten — sie können zum Beispiel zusammenfallen, welchen Fall Herr Reye in seiner Geometrie der Lage betrachtet, indem er zugleich die hier untersuchte Abbildung des Komplexes, wie auch den unter b) angeführten Satz angibt — oder selbst partikularisiert werden. Ohne hier auf eine Diskussion aller möglichen Fälle einzugehen, hebe ich die beiden folgenden wichtigsten Degenerationen hervor.[2])

Die beiden Komplexe können spezielle lineare Komplexe sein. Dieser Fall führt auf die bekannte Ampèresche Transformation, die also darauf beruht, daß man alle Geraden, die eine feste Gerade schneiden, als [166 Raumelemente anstatt des Punkts oder der Ebene einführt. Die Ampèreschen Transformationsgleichungen:

$$X+p=0, \quad Y+y=0, \quad Z+z-px=0$$

geben nämlich zwischen (x, y, z, X, Y, Z) die beiden Relationen:

$$Y+y=0, \quad Z+z+Xx=0,$$

welche offenbar eine partikuläre und symmetrische Form der Gleichungen (1) bilden.

Der eine Komplex kann in den Inbegriff aller Geraden, die einen festen Kegelschnitt schneiden, übergehen; alsdann ist der zweite Komplex ein allgemeiner linearer.[3]) Diese Degeneration werde ich im folgenden

1) Reye, Geometrie der Lage, II. Abteilung 1868, S. 116—172.

2) Lie, Repräsentation der Imaginären, Akad. zu Christiania. Februar und August 1869. Die in dieser Abhandlung §§ 17, 25, 27—29 betrachtete räumliche Verwandtschaft ist mit unserer jetzigen identisch. In § 25 bespreche ich die erste der beiden Degenerationen. [Diese Ausg. Bd. I, Abh. III, S. 30; IV, S. 41—43, 46—53.]

3) Herr Nöther hat diese Abbildung des linearen Komplexes, die ich übrigens selbständig gefunden habe, bereits gelegentlich gegeben. (Götting. Nachr. 1869: Zur Theorie der algebraischen Funktionen.) Die für uns fundamentale Auffassung, daß die beiden Räume je einen Komplex enthalten, dessen Linien sich als die Punkte des andern Raumes abbilden, ist in der besprochenen Note nicht angedeutet. Ich

unter der Voraussetzung, daß der fundamentale Kegelschnitt der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis ist, näher untersuchen.

23. Wir wissen, daß die beiden Kurvenkomplexe Linienkomplexe sind, wenn die Gleichungen der Reziprozität hinsichtlich der beiden Systeme von Variabeln (x, y, z) und (X, Y, Z) linear sind, und wir stellen uns nun die Frage, ob diese hinreichende Bedingung auch notwendig ist. Es ist dies, wie jetzt gezeigt werden soll, allerdings der Fall, wenn man die Bedingung hinzufügt, daß das Entsprechen eindeutig sein soll. Ich bemerke übrigens, daß diese Frage, die an und für sich Interesse darbietet, für die folgenden Theorien keine Bedeutung hat.

Wenn der eine Komplex ein Linienkomplex ist, so müssen die elementaren Komplexkegel des andern Komplexes, der im allgemeinen ein Kurvenkomplex ist, in eine Anzahl von Kegeln zweiten Grades zerfallen. Der Beweis dieses Satzes liegt darin, daß die Geraden einer allgemeinen Linienkongruenz die Brennfläche nur in zwei Punkten berühren. Wird insbesondere der eine Komplex von den Tangenten einer Fläche gebildet, so zerfallen die elementaren Kegel des zweiten Komplexes in ebene Strahlenbüschel. Stellt man nun die Forderung, daß die Abbildung eindeutig sein soll, so sind nur noch die drei folgenden Fälle möglich:

1. Die beiden Linienkomplexe sind allgemeine Komplexe zweiten Grades.

2. Der eine Komplex ist ein spezieller Komplex zweiten Grades, der andere ein allgemeiner linearer.

3. Die beiden Komplexe sind spezielle lineare. [167

W i r d e u t e n a n, w i e s i c h h i e r a u s h e r l e i t e n l ä ß t, d a ß d i e G l e i c h u n g e n (1) d i e a l l g e m e i n s t e e i n d e u t i g e g e g e n s e i t i g e A b b i l d u n g z w e i e r L i n i e n k o m p l e x e d e f i n i e r e n, w o b e i j e d o c h d e r F a l l, d a ß b e i d e L i n i e n k o m p l e x e s p e z i e l l e l i n e a r e s i n d, n i c h t v o l l s t ä n d i g i n B e t r a c h t g e n o m m e n i s t.[1])

Wenn die beiden Komplexe allgemeine Komplexe zweiten Grades sind, so können die zugehörigen Singularitätenflächen, wie man leicht findet, keine k r u m m e n Flächen sein. Von jedem Punkte der Singularitätenfläche gehen nämlich zwei ebene Strahlenbüschel aus, deren Gerade sich im andern Raume als die Punkte e i n e r Geraden abbilden. Alle Geraden des einen Büschels transformieren sich hierbei in einen einzigen Punkt. Der Inbegriff aber aller Geraden, die keine selbständige Abbildung haben, kann nicht ein Komplex, höchstens eine Anzahl von Kongruenzen sein. Da jedoch alle ebenen Strahlenbüschel, deren Spitzen auf einer k r u m m e n Fläche liegen, notwendigerweise einen Komplex bilden, so muß die Singularitätenfläche aus Ebenen bestehen, und hieraus läßt sich schließen, daß die beiden Komplexe zweiten Grades solche sind, wie sie B i n e t zuerst betrachtet hat.

möchte ferner hinzufügen, daß ich die Idee, ein Entsprechen zwischen den Flächenelementen zweier Räume auf die Abbildung eines Komplexes zu begründen, nirgendwo ausgesprochen gefunden habe.

1) Man stelle ein eindeutiges Entsprechen fest zwischen den Ebenen zweier linearer Büschel. Man beziehe darnach die Geraden jeder Ebene dualistisch auf die Punkte der entsprechenden Ebene. Man erhält hierdurch eine gegenseitige Abbildung zweier spezieller linearer Komplexe, die allgemeiner als diejenige ist, welche durch die A m p è r e schen Gleichungen bestimmt wird.

Wenn ein spezieller Komplex zweiten Grades und ein allgemeiner linearer auf einander abgebildet sind, so wären a priori zwei Fälle denkbar. Die Linien des Komplexes zweiten Grades könnten einen Kegelschnitt schneiden, oder eine Fläche zweiten Grades umhüllen. Durch Betrachtungen, auf welche ich hier nicht eingehe, habe ich bewiesen, daß nur der erste Fall stattfindet.

§ 8. Reziprozität zwischen einem linearen Komplexe und dem Inbegriffe aller Geraden, die den imaginären unendlich weit entfernten Kreis schneiden.

24. Wir wenden uns nun zu den Gleichungen:

$$(1)\qquad -Zz = x - (X + iY), \quad (X - iY)z = y - Z,$$

die, wie man sieht, hinsichtlich (x, y, z) und (X, Y, Z) linear sind, welche somit ein Entsprechen zwischen zwei Linienkomplexen bestimmen. Zuerst suchen wir die Gleichungen dieser Komplexe in P l ü c k e r schen Linienkoordinaten.

P l ü c k e r schreibt die Gleichungen der geraden Linie in der Form:

$$rz = x - \varrho, \quad sz = y - \sigma$$

und betrachtet dabei die fünf Größen: [168

$$r, s, \varrho, \sigma, (r\sigma - s\varrho)$$

als Linienkoordinaten. Also stellen die Gleichungen (1), wenn man in denselben X, Y, Z als Parameter auffaßt, ein System von Geraden dar, deren Koordinaten den folgenden Relationen genügen:

$$r = -Z, \quad \varrho = X + iY, \quad s = X - iY, \quad \sigma = Z,$$

aus denen:

$$(2)\qquad r + \sigma = 0$$

hervorgeht. Der Linienkomplex im Raume r ist somit ein linearer, und zwar ein allgemeiner linearer Komplex, der die unendlich weit entfernte Gerade[1]) der x, y-Ebene enthält.

Um den Komplex des Raumes R zu bestimmen, ersetze man das System (1) durch das äquivalente:

$$\frac{1}{2}\left[z - \frac{1}{z}\right] Z = X - \frac{1}{2}\left[x + \frac{y}{z}\right],$$

$$\frac{1}{2i}\left[z + \frac{1}{z}\right] Z = Y - \frac{1}{2i}\left[x - \frac{y}{z}\right],$$

welches bei Vergleichung mit den allgemeinen Gleichungen einer Geraden:

$$(3) \qquad RZ = X - \mathsf{P}, \quad SZ = Y - \Sigma$$

die folgenden Relationen gibt:

$$R = \frac{1}{2}\left[z - \frac{1}{z}\right], \quad \mathsf{P} = \frac{1}{2}\left[x + \frac{y}{z}\right],$$

$$S = \frac{1}{2i}\left[z + \frac{1}{z}\right], \quad \Sigma = \frac{1}{2i}\left[x - \frac{y}{z}\right].$$

Somit finden wir als Gleichung des besprochenen Komplexes:

$$(4) \qquad R^2 + S^2 + 1 = 0.$$

Nun geben die Relationen (3):

$$R = \frac{dX}{dZ}, \quad S = \frac{dY}{dZ},$$

und also kann (4) auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Der Linienkomplex des Raumes R wird von den imaginären Geraden, deren Länge gleich Null[2]) ist, gebildet.

Die Gleichungen (1) *beziehen die beiden Räume so aufeinander, daß den Punkten des Raumes* r *die imaginären Geraden, deren Länge gleich Null ist, entsprechen,* [169
während sich die Punkte des Raumes R *als die Linien des linearen Komplexes* $r + \sigma = 0$ *abbilden.*

Es ist zu bemerken, daß, wenn ein Punkt eine Linie des Komplexes $r + \sigma = 0$ durchläuft, die entsprechende Bildlinie eine infinitesimale Kugel, eine Punktkugel beschreibt.

1) Diese Gerade tritt bei der Abbildung als Fundamentalgebilde auf. Ich bezeichne diese Gerade zuweilen als die Fundamentalgerade des Raumes r.

2) Indem ich der bequemen französischen Terminologie folge, bezeichne ich als *Gerade von der Länge Null* eine jede Linie, die den unendlich weit entfernten imaginären Kreis schneidet.

25. Nach der allgemeinen Theorie reziproker Kurven (§ 4, Nr. 12) läßt sich, wenn eine Kurve bekannt ist, deren Tangenten dem einen Komplexe angehören, die von Geraden des andern Komplexes umhüllte Bildkurve durch einfache Operationen — Differentiation und Elimination — bestimmen. Nun hat *Lagrange* die allgemeinen Gleichungen aller Kurven gefunden, deren Tangenten den imaginären Kreis schneiden, und somit *ist es auch möglich, die allgemeinen Gleichungen derjenigen Kurven hinzuschreiben, deren Tangenten einem linearen Komplexe angehören.*

Um uns nicht von unserem Ziele zu entfernen, gehen wir auf die einfachen geometrischen Relationen, die zwischen reziproken Kurven der beiden Komplexe stattfinden, nicht näher ein.[1])

Das durch die Gleichungen (1) bestimmte Entsprechen zwischen Flächen der beiden Räume besitzt einige Eigentümlichkeiten, die ich kurz angeben werde, indem ich sonst auf die allgemeinen Entwickelungen des § 4 verweise.

Wenn die Fläche f eine allgemeine Lage in r hat, so umhüllen die Tangenten derselben, die dem linearen Komplexe angehören, außerdem eine zweite Fläche φ. Die auf diesen beiden Flächen gelegenen Kurven, deren Tangenten Komplexlinien sind, nennen wir σ_f und σ_φ. Die entsprechenden reziproken Kurven Σ_f und Σ_φ erzeugen *dieselbe* Fläche F, die das Bild der gegebenen Fläche f, wie auch dasjenige der Fläche φ ist.

Nimmt man dagegen eine beliebige Fläche Φ des Raumes R, so umhüllen die Komplexlinien, welche Φ berühren, keine andere Fläche. Die von Komplexlinien umhüllten Kurven Σ unserer Fläche bilden eine *irreduktible* Schar, die Φ zweifach bedeckt. Die reziproken Kurven σ erzeugen die Bildfläche, die keine weiteren Kurven enthält, deren Tangenten dem linearen Komplexe angehören.

Endlich möchte ich aussprechen, daß unsere Abbildung die beiden folgenden Probleme in einander überführt: *Auf der Brennfläche einer Kongruenz, deren Linien einem linearen Komplexe an-* [170
gehören, die Rückkehrkanten der Developpablen zu bestimmen; und: auf einer gegebenen Fläche die geodätischen Kurven, deren Länge gleich Null ist, aufzufinden.

1) Ich möchte darauf aufmerksam machen, daß einer Spitze der einen Kurve eine stationäre Tangente im zweiten Raume entspricht. Überhaupt treten stationäre Tangenten *regelmäßig* als *Singularitäten* auf, wenn man Kurven als Liniengebilde, das heißt, als von den Geraden eines *gegebenen* Komplexes umhüllt, auffaßt.

26. Ich werde mich später zuweilen auf die beiden folgenden Sätze stützen:

a) Eine Fläche F n-ter Ordnung, die den unendlich weit entfernten imaginären Kreis als p-fache Linie enthält, ist das Bild einer Kongruenz, deren Ordnung und Klasse gleich $n-p$ sind.

Eine imaginäre Linie, deren Länge gleich Null ist, schneidet nämlich F in $n-p$ im endlichen Raume gelegenen Punkten, und also gehen ebensoviele Gerade der besprochenen Kongruenz durch jeden Punkt des Raumes r. Bei einer Kongruenz, die einem linearen Komplexe angehört, ist aber bekanntlich die Klasse gleich der Ordnung.

b) Eine Kurve C n-ter Ordnung, die den imaginären Kreis in p Punkten schneidet, bildet sich als eine Linienfläche $(2n-p)$-ter Ordnung ab.

Eine Gerade des linearen Komplexes $r+\sigma=0$ schneidet nämlich die besprochene Linienfläche in ebensovielen Punkten, wie die Kurve C und eine infinitesimale Kugel gemein haben, wobei jedoch die unendlich weit entfernten Punkte nicht mitzuzählen sind.

§ 9. Die Plückersche Liniengeometrie läßt sich in eine Kugelgeometrie transformieren.

27. In diesem Paragraphen begründe ich einen fundamentalen Zusammenhang zwischen der **Plücker**schen Liniengeometrie und einer Geometrie, deren Element die Kugel ist.

Die Gleichungen (1) des letzten Paragraphen transformieren die Geraden des Raumes r in die Kugeln des zweiten Raumes, und zwar in zweifacher Auffassung. Einerseits gehen diejenigen Linien des linearen Komplexes $r+\sigma=0$, die eine beliebige Gerade l_1, und also zugleich die ihr hinsichtlich des Komplexes zugeordnete reziproke Polare l_2 schneiden, nach einem früheren Satze (Nr. 26a) in die Punkte einer Kugel über; andererseits transformieren sich die Punkte der Linien l_1 und l_2 in die geradlinigen Erzeugenden dieser Kugel (Nr. 26b).

Durch folgende analytische Betrachtungen findet man die Relationen, welche zwischen den Koordinaten der Linien l_1 und l_2, und andererseits den Mittelpunktskoordinaten X', Y', Z' und dem Radius H' der entsprechenden Kugel stattfinden. Sind:

$$rz = x - \varrho, \quad sz = y - \sigma$$

die Gleichungen der Geraden l_1 oder l_2, und erinnert man sich, daß [171
sich die Linien des Komplexes $r+\sigma=0$ folgendermaßen darstellen lassen:

$$(1) \qquad -Zz = x-(X+iY), \quad (X-iY)z = y-Z,$$

so sieht man, daß man x, y, z zwischen diesen vier Gleichungen eliminieren muß, um die Geraden (1) der Bedingung zu unterwerfen, l_1 zu schneiden. In dieser Weise findet man, daß die Koordinaten X, Y, Z unserer Komplexlinien, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die Koordinaten X, Y, Z der entprechenden Bildpunkte die Relation:

$$[X-\tfrac{1}{2}(\varrho+s)]^2 + [Y-\tfrac{1}{2}i(s-\varrho)]^2 + [Z-\tfrac{1}{2}(\sigma-r)]^2 = \tfrac{1}{4}[\sigma+r]^2$$

befriedigen. Unsere frühere Behauptung ist hierdurch analytisch bewiesen; zugleich erhalten wir die folgenden Formeln:

$$(2) \quad X' = \tfrac{1}{2}(\varrho+s), \; iY' = \tfrac{1}{2}(\varrho-s), \; Z' = \tfrac{1}{2}(\sigma-r), \; \pm H' = \tfrac{1}{2}(\sigma+r),$$

oder die äquivalenten:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varrho = X'+iY', \quad s = X'-iY', \quad \sigma = Z' \pm H', \\ \qquad\qquad r = -(Z' \mp H'), \end{cases}$$

in denen man die Akzente ohne weiteres weglassen kann. Für unsere Auffassung ist nämlich der Punkt des Raumes R eine Kugel, deren Radius unendlich klein ist.

Die Formeln[1] (2) und (3) zeigen, daß eine gegebene Gerade des Raumes r in eine vollständig bestimmte Kugel übergeht; dagegen bildet sich eine gegebene Kugel $[X, Y, Z, H^2]$ ab durch zwei Linien:

$$(X, Y, Z, +H), \quad (X, Y, Z, -H),$$

welche reziproke Polaren hinsichtlich des linearen Komplexes:

$$\pm H = \tfrac{1}{2}(r+\sigma) = 0$$

sind. Jene Gleichungen bestimmen offenbar, wenn man H gleich Null setzt, die eindeutige Beziehung zwischen den Punktkugeln des Raumes R und den Geraden des Komplexes $H=0$.

Eine Ebene, das heißt, eine Kugel, deren Radius unendlich groß ist, transformiert sich nach den Gleichungen (3) in zwei Linien l_1 und l_2, welche die unendlich weit entfernte Gerade der x, y-Ebene schneiden. Dabei sind nach dem Vorstehenden die Punkte der Linien l_1 und l_2 die Bilder aller Geraden unserer Ebene, welche durch die zugehörigen imagi-

1) Aus diesen Formeln in Verbindung mit dem durch dieselben analytisch begründeten Satze der nächsten Nummer läßt sich, wie mir Herr Klein bemerkt hat, die Relation zwischen Linien- und Kugelgeometrie unmittelbar herleiten.

nären Kreispunkte gehen. Insbesondere bildet sich eine Ebene, die [172 den imaginären Kreis berührt, als eine mit der x, y-Ebene parallele Komplexlinie ab.

28. Zwei einander schneidende Gerade l und λ bilden sich als Kugeln ab, zwischen denen Berührung stattfindet.

Denn die reziproken Polaren der gegebenen Geraden hinsichtlich des Komplexes $H=0$ schneiden einander auch, und also enthalten die Bildkugeln zwei gemeinsame Gerade, die verschiedenen Erzeugungen angehören. Wenn aber der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades in einen Kegelschnitt und ein Geradenpaar zerfällt, so berühren die Flächen einander in drei Punkten, den Doppelpunkten der Schnittkurve nämlich. Die beiden Kugeln haben also drei Berührungspunkte, unter denen indessen zwei, welche imaginär und unendlich entfernt sind, nicht in Betracht kommen.

Analytisch beweist man unser Theorem in folgender Weise. Die Bedingung des Schneidens der beiden Geraden:

$$r_1 z = x - \varrho_1, \qquad r_2 z = x - \varrho_2,$$
$$s_1 z = y - \sigma_1, \qquad s_2 z = y - \sigma_2$$

wird durch:

$$(r_1 - r_2)(\sigma_1 - \sigma_2) - (s_1 - s_2)(\varrho_1 - \varrho_2) = 0$$

dargestellt, und diese Gleichung geht durch Anwendung der Formeln (3) in:

$$(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 = (H_1 \pm H_2)^2$$

über, das heißt, in die Bedingung der Berührung der beiden Bildkugeln.

Zwei Kugeln, die einander berühren, transformieren sich in zwei Linienpaare, deren gegenseitige Lage eine solche ist, daß jede Linie des einen Paares eine Gerade des zweiten schneidet.

§ 10. Verschiedene Abbildungen.

29. Man betrachte die Geraden eines ebenen Strahlenbüschels im Raume r, ferner die zugehörigen reziproken Polaren hinsichtlich $H=0$, die ebenfalls ein ebenes Strahlenbüschel bilden, und endlich die entsprechenden Bildkugeln. Es ist leicht zu erkennen, daß alle diese Kugeln zwei gemeinsame Gerade enthalten, diejenigen nämlich, welche den Scheiteln der beiden Strahlenbüschel entsprechen, und also berühren unsere Kugeln einander in dem Durchschnittspunkte dieser beiden Linien.

Die Geraden eines ebenen Strahlenbüschels bilden sich als alle Kugeln ab, die einander in einem gemeinsamen Punkte berühren.

Hieraus folgt, daß eine Fläche f und alle ihre Tangenten in einem gegebenen Punkte sich als eine Fläche und alle dieselbe in einem Punkte berührenden Kugeln abbilden (§ 5, Nr. 15). Dies findet seinen einfachsten Ausdruck in dem folgenden Satze:

Alle Flächenelemente des Raumes r, die zwei konsekutive Punkte einer Geraden enthalten, gehen bei unserer [173 Abbildung in die Elemente der entsprechenden Bildkugel über.

Eine auf der Fläche f gelegene Gerade, welche also dieselbe in unendlich vielen Punkten berührt, wird eine Kugel, welche die Bildfläche unendlich oft, das heißt, nach einer Kurve berührt. Hieraus läßt sich schließen, daß eine Linienfläche in eine Kugelenveloppe (eine Röhrenfläche) übergeht. Eine developpable Fläche transformiert sich in die Umhüllungsfläche von einfach unendlich vielen Kugeln, die der Bedingung unterworfen sind, daß jedesmal zwei konsekutive einander berühren. Man erhält also die von Monge betrachteten imaginären Linienflächen, deren beide Scharen von Krümmungslinien in die geradlinigen Erzeugenden zusammengefallen sind. Aus der Bemerkung, daß eine Linienfläche in eine Kugelenveloppe übergeht, folgt, daß sich eine Fläche zweiten Grades, die ja bekanntlich zwei Scharen von Geraden enthält, in eine Fläche transformiert, die auf zwei Weisen als Kugelenveloppe aufgefaßt werden kann, und zwar erhalten wir die allgemeinste Fläche — die **Dupin**sche Zyklide —, welche diese Eigenschaft besitzt.

30. Aus einem früheren Satze folgt unmittelbar, daß sich alle Geraden, die eine feste Gerade schneiden, als die eine gegebene Kugel berührenden Kugeln abbilden, und wir kennen somit die Abbildung des speziellen linearen Komplexes.

Die Gleichung des allgemeinen linearen Linienkomplexes ist nach Plücker:

$$(1) \qquad (r\sigma - s\varrho) + mr + n\sigma + p\varrho + qs + t = 0,$$

und hieraus geht als Gleichung des entsprechenden linearen Kugelkomplexes:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2) + MX + NY + PZ + QH + T = 0\text{[1]}$$

1) Die Gleichung läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 + (iH - iH_0)^2 = \text{Const.}$$

hervor. Es bezeichnen hier M, N, P, Q, T Konstanten, die von m, n, p, q, t abhängen, *während* X, Y, Z, H *als nicht homogene Kugelkoordinaten aufzufassen sind.*

Die letzte Gleichung bestimmt, wie man leicht sieht, alle Kugeln, die eine feste Kugel:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2) + MX + NY + PZ + T = 0$$

unter konstantem Winkel schneiden, und zwar ist diese Kugel das Bild aller Geraden, die zugleich dem gegebenen Komplexe (1) und $H = 0$ angehören. Wenn die simultane Invariante dieser beiden Komplexe gleich Null ist, wenn dieselben also in Involution liegen, so ist, wie man sich leicht überzeugt, der betreffende konstante Winkel gleich 90°.

Die eine gegebene Kugel unter konstantem Winkel [174 *schneidenden Kugeln transformieren sich in die Geraden zweier linearer Komplexe, die einander hinsichtlich* $H = 0$ *konjugiert sind. Insbesondere sind die Orthogonalkugeln einer gegebenen Kugel das Bild der Geraden eines linearen Komplexes, der mit* $H = 0$ *in Involution liegt.*

Eine Gleichung von der Form:

$$ar + b\sigma + c\varrho + ds + e = 0 \tag{2}$$

gibt eine lineare Gleichung zwischen den Kugelkoordinaten $X, Y, Z, H,$ und also wird der betreffende Kugelkomplex von allen Kugeln gebildet, die eine gegebene Ebene unter konstantem Winkel schneiden. Dieses könnte man auch daraus schließen, daß der Komplex (2) die unendlich weit entfernte Gerade der x, y-Ebene enthält, daß also die Komplexe (2) und $H = 0$ einander nach einer linearen Kongruenz schneiden, deren Direktrizen mit der x, y-Ebene parallel sind.

Wenn endlich die Komplexe (2) und $H = 0$ in Involution liegen, so erhält man alle Kugeln, deren Mittelpunkte in einer festen Ebene liegen.

Die vier Komplexe:

$$X = 0 = \varrho + s, \quad iY = 0 = \varrho - s,$$
$$Z = 0 = \sigma - r, \quad H = 0 = \sigma + r$$

liegen, wie man leicht erkennt, paarweise in Involution und enthalten dabei eine gemeinsame Gerade, die unendlich weit entfernte in der x, y-Ebene nämlich. *Es bilden also die fünf Komplexe:*

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad H = 0, \quad \text{Const.} = 0,$$

indem man den letzten, der als spezieller Komplex mit sich selbst in Involution ist, doppelt zählt, ein System, welches

als eine Degeneration der sechs Fundamentalkomplexe des Herrn **Klein** *aufzufassen ist. Es ist einleuchtend, daß man die vier Kugelkoordinaten* X, Y, Z, H *zugleich als nicht homogene Linienkoordinaten auffassen kann.*

Bemerkenswert ist endlich auch, daß jeder unter den einfach unendlich vielen Linienkomplexen, die sich durch die Gleichung darstellen lassen:

$$H = \text{Const.}$$

durch alle Kugeln einer gegebenen Größe abgebildet wird. Diese Komplexe berühren einander nach einer gemeinsamen speziellen Kongruenz, deren beide Direktrizen in die unendlich weit entfernte Gerade der x, y-Ebene zusammengefallen sind. Die Geraden dieser Kongruenz bilden sich alle als Ebenen ab, welche den unendlich weit entfernten imaginären Kreis berühren.

31. Es ist bekanntlich eine unmittelbare Konsequenz der *Plücker*schen Auffassung, daß, wenn $l_1 = 0$ und $l_2 = 0$ die Gleichungen zweier linearer Komplexe sind, die Gleichung:

$$l_1 + ul_2 = 0,$$

in welcher u einen Parameter bezeichnet, eine Schar linearer Kom- [175 plexe darstellt, die eine gemeinsame lineare Kongruenz enthalten. Unsere Abbildung transformiert diesen Satz in den folgenden:

Die Kugeln K, *welche zwei feste Kugeln* S_1 *und* S_2 *unter gegebenen Winkeln* V_1 *und* V_2 *schneiden, stehen in demselben Verhältnisse zu unendlich vielen Kugeln* S. *Es gibt, den Direktrizen der besprochenen Kongruenz entsprechend, zwei* S, *die von allen* K *berührt werden.*

Der variable Linienkomplex $l_1 + ul_2 = 0$ schneidet den Komplex $H = 0$ nach einer linearen Kongruenz, deren beide Direktrizen eine Fläche zweiten Grades — die Durchschnittsfläche der drei Komplexe $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $H = 0$ — beschreiben, und also umhüllen die genannten Kugeln S eine *Dupin*sche Zyklide, die freilich in einen diesen Kugeln gemeinsamen Kreis ausgeartet ist.

Hier möchte ich auch darauf aufmerksam machen, daß unsere Abbildung gegebene interessante, diskontinuierliche Liniengruppen in entsprechende Kugelgruppen überführt. Beispielsweise schließen wir aus der bekannten Theorie der 27 Geraden auf der Fläche dritten Grades die Existenz einer Gruppe, bestehend aus 27 Kugeln, deren jede zehn andere Kugeln der Gruppe berührt. Andererseits gehen Kugelkonfigurationen in eigentümliche Geradenkonfigurationen über.

§ 11. Entsprechen zwischen Aufgaben, die sich auf Kugeln, und solchen, die sich auf Linien beziehen.

32. In diesem Paragraphen erledigen wir einige bekannte, sehr einfache Aufgaben, welche sich auf Kugeln beziehen, die gewissen Bedingungen unterworfen sind, indem wir die entsprechenden Linienprobleme betrachten.

a) W i e v i e l e K u g e l n b e r ü h r e n v i e r g e g e b e n e K u g e l n ?

Die vier Kugeln transformieren sich in vier Linienpaare $(l_1\lambda_1)$, $(l_2\lambda_2)$, $(l_3\lambda_3)$, $(l_4\lambda_4)$. Nehmen wir nun eine Gerade aus jedem Paare und fassen die so erhaltenen vier Linien zu einer Gruppe zusammen, so fragen wir nach den beiden Transversalen dieser Gruppe. Wir finden 16 verschiedene Gruppen, die indessen paarweise, wie zum Beispiel:

$$l_1\lambda_2 l_3 l_4,\quad \lambda_1 l_2\lambda_3\lambda_4$$

hinsichtlich $H=0$ konjugiert sind. Offenbar sind die beiden Transversalenpaare:

$$t_1 t_2,\quad \tau_1\tau_2$$

zweier solcher Gruppen selbst konjugiert, und bilden sich also nur als zwei Kugeln ab. E s g i b t 1 6 i n 8 P a a r e g e o r d n e t e K u g e l n , d i e v i e r g e g e b e n e K u g e l n b e r ü h r e n.

b) W i e v i e l e K u g e l n g i b t e s , d i e v i e r g e g e b e n e [176 K u g e l n u n t e r g e g e b e n e n W i n k e l n s c h n e i d e n ?

Kugeln, die eine gegebene Kugel unter demselben Winkel schneiden, bilden sich ab als die Geraden zweier linearer Komplexe, die einander hinsichtlich $H=0$ konjugiert sind. Wir müssen also vier Paare linearer Komplexe $(l_1\lambda_1)$, $(l_2\lambda_2)$, $(l_3\lambda_3)$, $(l_4\lambda_4)$ betrachten und dieselben zunächst auf alle möglichen Weisen in Gruppen zu vier ordnen, dergestalt, daß niemals zwei Komplexe einer Gruppe denselben Index haben; zweitens alle Linien finden, die den vier Komplexen einer jeden Gruppe angehören. Vier lineare Komplexe enthalten zwei gemeinsame Gerade, und also erhält man, indem man wie im ersten Probleme verfährt, als Lösung unserer Aufgabe 16 in 8 Paare gruppierte Kugeln.

Unser Problem vereinfacht sich, wenn einer oder mehrere der gegebenen Winkel gleich 90° sind, weil sich die Orthogonalkugeln einer Kugel als die Geraden e i n e s Komplexes, der mit $H=0$ in Involution liegt, abbilden. Sind endlich alle vier Winkel gleich 90°, so fragt man nach den gemeinsamen Geraden von vier linearen Komplexen, die mit $H=0$ in Involution liegen. Die erhaltenen beiden Geraden sind hinsichtlich $H=0$ konjugiert, und es gibt also nur e i n e K u g e l , d i e v i e r g e g e b e n e K u g e l n o r t h o g o n a l s c h n e i d e t.

c) A l l e K u g e l n z u k o n s t r u i e r e n , d i e f ü n f g e g e b e n e K u g e l n u n t e r d e m s e l b e n W i n k e l s c h n e i d e n.

Unsere Abbildung führt diese Aufgabe darauf zurück, fünf gegebene Paare von Geraden $(l_1\lambda_1)$, $(l_2\lambda_2)$, …, $(l_5\lambda_5)$ auf alle möglichen Weisen in Gruppen zu 5 zu ordnen, doch mit der Beschränkung, daß niemals zwei Gerade einer Gruppe denselben Index haben dürfen, und sodann alle linearen Komplexe zu finden, welche jedesmal alle Linien einer Gruppe enthalten. Es gibt 32 verschiedene Gruppen, die paarweise hinsichtlich $H=0$ konjugiert sind. Dementsprechend erhalten wir 32 paarweise konjugierte lineare Komplexe, die sich als 16 lineare Kugelkomplexe abbilden. Die 16 Kugeln, deren jede von den Kugeln eines solchen Komplexes unter konstantem Winkel geschnitten wird, sind die Lösungen unserer Aufgabe.

Zwei Liniengruppen wie:

$$l_1, \lambda_2, \lambda_3, l_4, l_5,\quad l_1, \lambda_2, \lambda_3, l_4, \lambda_5$$

enthalten vier gemeinsame Gerade $(l_1, \lambda_2, \lambda_3, l_4)$, und also schneiden die entsprechenden linearen Komplexe einander nach einer linearen Kongruenz, deren Direktrizen d_1, d_2 die beiden Transversalen der vier besprochenen Linien sind. Der Komplex $H=0$ schneidet diese Kongruenz nach einer Fläche zweiten Grades, die das Bild eines Kreises ist, des Durchschnittskreises zweier der gesuchten Kugeln, zugleich aber der beiden Kugeln, welche d_1 und d_2 entsprechen. Diese letzten Kugeln lassen [177 sich nun auch dadurch definieren, daß sie vier der fünf gegebenen berühren, und also kann man auf jeder unter den sechzehn Kugeln, welche fünf gegebene unter demselben Winkel schneiden, fünf Kreise bestimmen, vorausgesetzt, daß man die Kugeln, welche vier gegebene berühren, konstruieren kann.

§ 12. Unsere Abbildung führt die Haupttangentenkurven einer Fläche f in die Krümmungslinien der Bildfläche F über.

33. Die in den letzten Paragraphen betrachtete Abbildung erhält ein großes Interesse durch den folgenden merkwürdigen Satz:

D i e K r ü m m u n g s l i n i e n e i n e r F l ä c h e F t r a n s f o r m i e r e n s i c h i n L i n i e n f l ä c h e n , d i e d i e B i l d f l ä c h e f n a c h H a u p t t a n g e n t e n k u r v e n b e r ü h r e n.

Die Tangenten der Fläche f verwandeln sich in Kugeln, die F berühren, und somit liegt der Gedanke nahe, daß sich die Haupttangenten der ersten Fläche als die Hauptkugeln der letzten abbilden. Dies ist in der Tat der Fall. Die Fläche f wird nämlich von einer Haupttangente in drei zusammenfallenden Punkten geschnitten, und somit berühren drei konsekutive auf der Bildkugel gelegene Gerade die Fläche F. Die Schnittkurve dieser Flächen hat also im betreffenden Punkte eine Spitze, und infolgedessen ist die Kugel eine Hauptkugel. Bemerkt man nun ferner, daß die Richtung dieser Spitze die Tangente einer Krümmungslinie ist, so sieht man, daß sich zwei konsekutive Punkte einer Haupttangentenkurve als zwei imaginäre Gerade abbilden, welche F in konsekutiven Punkten einer Krümmungslinie berühren, daß sich also alle Punkte der Haupttangentenkurve in die Erzeugenden einer Linienfläche transformieren, welche F nach einer Krümmungslinie berührt. Hieraus folgt aber unser Theorem (§ 7, Nr. 21 c).

Die beiden folgenden Beispiele bestätigen unseren Satz. Eine Kugel transformiert sich in eine lineare Kongruenz, als deren Brennfläche die beiden Direktrizen aufzufassen sind. Nun ist bekanntlich jede auf einer Kugel gelegene Kurve eine Krümmungslinie, und in der Tat sind auch die Direktrizen einer linearen Kongruenz Haupttangentenkurven auf einer jeden dieser Kongruenz angehörigen Linienfläche. Andererseits wissen wir, daß sich ein Hyperboloid f als eine Dupinsche Zyklide abbildet. Es sind nun die Linienflächen des Komplexes $H=0$, die f nach seinen Haupttangentenkurven — den geradlinigen Erzeugenden — berühren, selbst vom zweiten Grade, und also finden wir den bekannten Satz wieder, daß die Krümmungslinien der Dupinschen Zyklide zwei Kreisscharen sind.

Als eine interessante Anwendung unseres Satzes ist die folgende [178
zu betrachten.

Die **Kummer**sche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten hat algebraische Haupttangentenkurven sechzehnter Ordnung, die den vollständigen Berührungsdurchschnitt der Fläche mit Linienflächen achter Ordnung bilden.[1])

Die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten ist bekanntlich die Brennfläche der allgemeinen Kongruenz zweiter Ordnung und Klasse. Dieses Liniensystem (§ 8, Nr. 26 a) bildet sich, wenn es $H=0$ angehört, als eine Fläche vierter Ordnung F_4 ab, und hierbei enthält F_4 den unendlich weit entfernten imaginären Kreis als Doppelkegelschnitt. Nun haben die Herren Darboux und Moutard gefunden,

1) Herr Klein, dem ich mitteilte, daß die Haupttangentenkurven algebraisch sind, fand, daß dieselben mit einem Kurvensysteme, welches er schon früher unter einem anderen Gesichtspunkte betrachtet hatte, identisch sind (diese Annalen II, S. 219). Vergleiche unsere gemeinsame Note in den Monatsberichten der Berliner Akademie. Dez. 1870. [D. Ausg. Bd. I, Abh. X.]

daß die Krümmungslinien einer solchen Fläche F_4 Kurven achter Ordnung sind; dieselben schneiden den imaginären Kreis in acht Punkten, und also (§ 8, Nr. 26 b) sind ihre Bildflächen Linienflächen achter Ordnung, deren Erzeugende Doppeltangenten der Kummerschen Fläche sind. Hieraus folgt unser Satz unmittelbar.

Es ist einleuchtend, daß auch die Degenerationen der Kummerschen Fläche, zum Beispiel die Wellenfläche, die Plückersche Komplexfläche, die Steinersche[1]) Fläche vierter Ordnung und dritter Klasse, einige Linienflächen vierter Ordnung mit zwei Doppellinien, die zusammenfallen können, die Linienfläche dritter Ordnung, und so weiter, algebraische Haupttangentenkurven haben.

34. Herr Darboux hat gezeigt, daß man auf einer jeden Fläche im allgemeinen eine im endlichen Raume gelegene Krümmungslinie angeben kann, die Berührungskurve nämlich mit der imaginären Developpablen, die der gegebenen Fläche und dem imaginären Kreise zugleich umgeschrieben ist.

Dementsprechend läßt sich im allgemeinen auf der Brennfläche einer jeden Kongruenz, die einem linearen Komplexe angehört, eine Haupttangentenkurve angeben, der geometrische Ort nämlich aller Punkte, für welche die Tangentenebene zugleich die dem betreffenden Punkte durch den linearen Komplex zugeordnete Ebene ist.

Die unendlich kleinen Kugeln, die eine Fläche F berühren, teilen sich nämlich in zwei Systeme, erstens die Punkte der Fläche, zweitens die Punkte der oben genannten imaginären Developpablen. Also zerfallen [179
auch die Linien des linearen Komplexes $H=0$, welche die Bildfläche f berühren, in ein System Doppeltangenten und den Inbegriff aller Geraden, die f in den Punkten einer Kurve c berühren. Diese Kurve ist aber als das Bild einer imaginären Linienfläche, die F nach einer Krümmungslinie berührt, eine Haupttangentenkurve auf f.

Diese Bestimmung wird jedoch illusorisch, wenn nicht die Kongruenz, sondern ihre Brennfläche — oder eigentlich ein irreduktibler Teil derselben — allgemein gegeben wird. Auf einer Fläche befindet sich nämlich im allgemeinen nur eine endliche Anzahl von Punkten, deren Tangentenebene dem betreffenden Punkte durch einen linearen Komplex zugeordnet wird.

Das Vorstehende findet seinen einfachsten Ausdruck in folgendem Satze:

1) Herr Clebsch hat die Haupttangentenkurven der Steinerschen Fläche gefunden; es sind Kurven vierter Ordnung (Borchardts Journal, Bd. 67).

Wenn eine Fläche ihre eigene reziproke Polare hinsichtlich eines linearen Komplexes ist, so enthält sie eine Haupttangentenkurve, deren Tangenten dem Komplexe angehören. Diese ausgezeichnete Kurve kann durch Differentiation und Elimination bestimmt werden.[1])

Bemerkt man, daß eine jede Linienfläche, deren Erzeugende einem linearen Komplexe angehören, ihre eigene reziproke Polare hinsichtlich des Komplexes ist, so läßt sich der folgende Satz aussprechen:

Auf einer jeden Linienfläche, die in einem linearen Komplexe enthalten ist, liegt eine im allgemeinen krumme Haupttangentenkurve[2]), deren Tangenten dem Komplexe angehören. Diese kann immer ohne Integration gefunden werden.

Herr Clebsch hat nun gezeigt (Borchardts Journal, Bd. 68), daß, wenn auf einer Linienfläche eine Haupttangentenkurve außer den Erzeugenden bekannt ist, sich die Bestimmung der übrigen auf Quadraturen zurückführen läßt. Also hängt die Auffindung der Haupttangentenkurven auf einer Regelfläche, die einem linearen Komplexe angehört, nur von Quadratur ab.

Indem wir unsere Transformationsmethode auf dieses Theorem des Herrn Clebsch, wie auch auf die aus demselben angeführte Konsequenz anwenden, erhalten wir die beiden folgenden Sätze:

Wenn auf einer Röhrenfläche (Kugelenveloppe) eine nicht kreisförmige Krümmungslinie bekannt ist, so können die übrigen durch Quadratur gefunden werden.

Wenn einfach unendlich viele Kugeln eine Kugel S unter konstantem Winkel schneiden, so kann man auf der [180
Umhüllungsfläche zuerst eine Krümmungslinie durch Differentiation und Elimination finden und darnach die übrigen durch Quadratur bestimmen.

Daß man eine Krümmungslinie auf der betrachteten Röhrenfläche finden kann, schließt man auch unmittelbar daraus, daß diese Fläche und

1) Diese Kurve ist, nach einer Bemerkung von Herrn Klein, zugleich eine Kurve vierpunktiger Berührung für die Fläche.

2) Eine interessante Anwendung dieses Satzes ist die folgende. Die Geraden einer linearen Kongruenz gehören nach Plücker einfach unendlich vielen linearen Komplexen an. Demzufolge enthält eine jede [algebraische] Regelfläche, deren Linien zwei feste Gerade schneiden, einfach unendlich viele algebraische Haupttangentenkurven, unter denen jede von den Geraden eines linearen Komplexes umhüllt wird (vgl. auch Cremona, Annali di mat. Ser. II, t. I).

die Kugel S einander unter konstantem Winkel schneiden. Die Durchschnittskurve ist nun eine Krümmungslinie auf der Kugel S und steht also nach einem bekannten Satze in demselben Verhältnisse zu der Röhrenfläche.

§ 13. Entsprechen zwischen Transformationen der beiden Räume.

35. Unsere Abbildung drückt sich, wie wir wissen (§ 5), durch Gleichungen aus, die eine jede Größe aus einer der Gruppen:

$$(x, y, z, p, q), \quad (X, Y, Z, P, Q)$$

als Funktion der Größen in der andern Gruppe bestimmen. Wird nun der eine Raum, zum Beispiel r, einer Transformation unterworfen, bei welcher Flächen, die einander berühren, in ebensolche übergehen, so besitzt die entsprechende Umformung des zweiten Raumes dieselbe Eigenschaft. Die besprochene Transformation drückt sich nämlich durch fünf Gleichungen zwischen $(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1)$ und $(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2)$ aus — die beiden Indizes beziehen sich auf die beiden Zustände des Raumes r —, und diese Relationen werden mittels der Abbildungsgleichungen in fünf Relationen zwischen $(X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1)$ und $(X_2, Y_2, Z_2, P_2, Q_2)$ übergeführt, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Beschränken wir uns auf lineare Transformationen des Raumes r, so finden wir unter den entsprechenden Umformungen des zweiten Raumes: alle Bewegungen (Translation, Rotation und Schraubenbewegung), Paralleltransformation[1]) — darunter den Übergang von einer Fläche zu einer Parallelfläche verstanden —, eine von Herrn Bonnet angegebene reziproke Transformation, eine reziproke Umformung hinsichtlich einer Zyklide, und so weiter, welche alle, als linearen Transformationen des Raumes r entsprechend, die Eigenschaft besitzen, Krümmungslinien in Krümmungslinien der transformierten Fläche überzuführen. Ich beweise endlich, daß diese Transformationen des Raumes R die einzigen sind, bei denen Flächen, die einander nach einer Krümmungslinie berühren, in ebensolche übergehen.

36. Betrachten wir nun zunächst diejenigen linearen Punkttransformationen des Raumes r, denen lineare Umformungen des zweiten Raumes entsprechen, so ist es klar, daß wir nur solche lineare Transformationen [181
des Raumes R treffen können, bei denen der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis seine Lage behält, und umgekehrt erhalten wir diese auch alle. Eine solche Transformation führt nämlich einerseits Gerade, die den imaginären Kreis schneiden, in ebensolche Linien über, andererseits Kugeln

1) Herrn Bonnets Dilatation

in Kugeln, und also ist die entsprechende Umformung des Raumes r zugleich eine Punkt- und Linientransformation, das heißt, eine lineare Punkttransformation, was zu beweisen war.

Die allgemeine lineare Transformation, bei welcher der imaginäre Kreis seine Lage behält, enthält sieben wesentliche Konstanten und läßt sich bekanntlich aus Translationen, Rotationen und Ähnlichkeitstransformationen zusammensetzen. Die entsprechende Umformung des Raumes r, die ebenfalls von sieben Konstanten abhängt, kann dadurch charakterisiert werden, daß sie den linearen Komplex $H = 0$ und eine Gerade desselben (Const. $= 0$) in sich überführt. Diese Transformation ist zugleich die allgemeinste, die eine spezielle lineare Kongruenz in sich transformiert.

Durch analytische Betrachtungen findet man in folgender Weise die einer Translation des Raumes R entsprechende lineare Punkttransformation des Raumes r.

Eine Translation drückt sich, als Kugeltransformation aufgefaßt, durch die Gleichungen:

$$X_1 = X_2 + A, \quad Y_1 = Y_2 + B, \quad Z_1 = Z_2 + C, \quad H_1 = H_2$$

aus, und dieselben geben durch Benutzung der Formeln (2) in § 9:

$$r_1 = r_2 + a, \quad s_1 = s_2 + b, \quad \varrho_1 = \varrho_2 + c, \quad \sigma_1 = \sigma_2 + d.$$

Bei Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichungen einer geraden Linie:

$$r_1 z = x - \varrho_1, \quad s_1 z = y - \sigma_1$$

findet man als Definition der besprochenen Transformation:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = x_2 + a z_2 + c, \quad y_1 = y_2 + b z_2 + d.$$

Ebenso ist es leicht, die einer Ähnlichkeitstransformation entsprechende Umformung des Raumes r zu bestimmen. Die Gleichungen:

$$X_1 = m X_2, \quad Y_1 = m Y_2, \quad Z_1 = m Z_2, \quad H_1 = m H_2$$

geben nämlich durch Anwendung der Formeln (2) des § 9:

$$r_1 = m r_2, \quad s_1 = m s_2, \quad \varrho_1 = m \varrho_2, \quad \sigma_1 = m \sigma_2,$$

welche Gleichungen eine Transformation definieren, die auch durch:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = m x_2, \quad y_1 = m y_2$$

bestimmt werden kann. Die letzten Gleichungen definieren eine lineare Punkttransformation, bei welcher die Punkte zweier Geraden ihre Lage behalten.

Durch geometrische Betrachtungen werde ich beweisen, daß auch Rotationsbewegungen des Raumes R in Transformationen der eben be- [182
sprochenen Art übergehen.

Sei A die Rotationsachse, M, N seien die beiden Punkte des imaginären Kreises, die bei der Rotation nicht verschoben werden. Es ist dann einleuchtend, daß alle imaginären Geraden, die A schneiden und zugleich durch M oder N gehen, während der Rotation ihre Lage behalten, und demzufolge bleiben auch die diesen Geraden zugehörigen Bildpunkte, die auf zwei Geraden liegen, während der entsprechenden Umformung des Raumes r ungeändert.

37. Transformation durch reziproke Radien des Raumes R transformiert Punkte in Punkte, Kugeln in Kugeln und endlich Gerade, die den imaginären Kreis schneiden, in ähnliche Linien, und also ist die entsprechende Umformung des Raumes r eine lineare Punkttransformation, die den linearen Komplex $H = 0$ in sich überführt. Bemerkt man ferner, daß jede Transformation durch reziproke Radien die Punkte und geradlinigen Erzeugenden einer Kugel ungeändert läßt, so sieht man, daß bei der entsprechenden reziproken Punkttransformation des Raumes r die Punkte zweier Geraden ihre Lage behalten. Herr Klein hat darauf aufmerksam gemacht, daß sich diese Transformation aus zwei reziproken Transformationen hinsichtlich zweier in Involution liegender linearer Komplexe zusammensetzen läßt, und zwar ist in unserem Falle $H = 0$ der eine Komplex, während sich der andere als das System solcher Kugeln abbildet, welche die bei der Transformation durch reziproke Radien zu Grunde gelegte rechtwinklig schneiden.

Eine Fläche F, die bei einer Transformation durch reziproke Radien in sich selbst übergeführt wird, bildet sich somit im Raume r als eine Kongruenz ab, die ihre eigene reziproke Polare hinsichtlich eines mit $H = 0$ in Involution liegenden linearen Komplexes ist. Die zugehörige Brennfläche ist ihre eigene reziproke Polare hinsichtlich eines jeden der beiden in Involution liegenden Komplexe, und demzufolge zerfällt das System ihrer Doppeltangenten in drei Kongruenzen, von denen die eine dem Komplexe $H = 0$ angehört, während die zweite in dem zweiten Komplexe enthalten ist.

38. Man betrachte die allgemeinste Linientransformation des Raumes r, bei welcher Schneiden zwischen Geraden eine invariante Beziehung ist, und andererseits im Raume R die entsprechende Umformung, die offenbar Kugeln in Kugeln, Kugeln, die einander berühren, in ebensolche überführt. Bei der besprochenen Linientransformation transformieren sich alle Tangenten einer Fläche in diejenigen einer zweiten, und dabei entsprechen

insbesondere die Haupttangenten der beiden Flächen einander, und zwar sowohl, wenn die betreffende Transformation eine lineare Punkttransformation, als wenn sie eine lineardualistische Umformung ist. Bei der entsprechenden Transformation des Raumes R gehen alle dreifach unendlich vielen Kugeln, die eine Fläche F_1 berühren, in alle Kugeln über, die [183
in demselben Verhältnisse zu einer anderen Fläche F_2 stehen, und insbesondere entsprechen die Hauptkugeln der beiden Flächen einander. Hieraus folgt, daß die Krümmungslinien der Flächen einander in dem Sinne entsprechen, daß, wenn eine Gleichung:

$$F(X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1) = 0 \tag{1}$$

für alle Punkte einer Krümmungslinie auf F_1 stattfindet, auch die Gleichung, die man erhält, indem man in (1) statt X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1 die Werte dieser Größen, [ausgedrückt] durch X_2, Y_2, Z_2, P_2, Q_2, setzt, für alle Punkte einer Krümmungslinie auf F_2 gilt.

Ich werde nun beweisen, daß wir alle Transformationen erhalten, bei denen einerseits Berührung eine invariante Beziehung ist, andererseits Krümmungslinien kovariante Kurven sind, wenn wir unsere Abbildung auf alle linearen Punkttransformationen (oder lineardualistischen Umformungen) des Raumes r anwenden.

Zum Beweise bemerke ich, daß es zwei Arten von Flächen gibt, deren sämtliche Kurven Krümmungslinien sind: die Kugeln und die imaginären Developpablen, die den unendlich weit entfernten imaginären Kreis enthalten. Es ist klar, daß die gesuchte Transformation eine jede solche Fläche in eine, die ebenfalls einer dieser beiden Kategorien angehört, überführen muß, und zwar liegt die Vermutung nahe, daß insbesondere Kugeln in Kugeln übergehen müssen. Dies ist auch der Fall. Die besprochenen imaginären Developpablen genügen nämlich der partiellen Differentialgleichung:

$$1 + P^2 + Q^2 = 0,$$

und also befriedigen die entsprechenden Flächen in r auch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Unter den Integralflächen derselben können sich höchstens dreifach unendlich viele Gerade befinden, und also können Kugeln im allgemeinen nicht in imaginäre Developpable übergehen.

Unsere Transformation ist also eine Kugeltransformation, und zwar nach unserer Voraussetzung eine, bei welcher Kugeln, die einander berühren, in ebensolche übergehen. Die entsprechende Umformung des Raumes r ist also eine *Linien*transformation, bei welcher Schneiden zwischen Geraden eine invariante Beziehung ist, und dies ist bekanntlich nur für die linearen Punkttransformationen und die lineardualistischen Umformungen der Fall.

Bemerkt man, daß alle Punkttransformationen, bei denen Krümmungslinien kovariante Kurven sind, *infinitesimale* Kugeln in *infinitesimale* Kugeln überführen, und daß infolgedessen diese Umformungen [184
zugleich die allgemeinsten Punkttransformationen sind, bei denen Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen beibehalten wird, so kann man den folgenden Satz aufstellen:

Alle linearen Transformationen des Raumes r, die den linearen Komplex $H = 0$ in sich überführen, gehen durch unsere Abbildung in alle Punkttransformationen über, bei denen Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen beibehalten wird.

Zugleich finden wir, mit Berücksichtigung unserer früheren Sätze, ohne Schwierigkeit das folgende, zuerst von Herrn *Liouville* bewiesene Theorem wieder:

Eine jede Punkttransformation, bei welcher Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen beibehalten wird, läßt sich aus einer Transformation durch reziproke Radien und einer Bewegung zusammensetzen.

39. *Paralleltransformation* — darunter verstanden den Übergang von einer Fläche zu einer Parallelfläche — führt bekanntlich Krümmungslinien in Krümmungslinien über, und in der Tat ist es leicht, zu erkennen, daß dieselbe das Bild einer linearen Transformation des Raumes r ist. Den Gleichungen:

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2, \quad H_1 = H_2 + A$$

entsprechen nämlich (Nr. 36) Relationen von der folgenden Form:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = x_2 + a z_2 + b, \quad y_1 = y_2 + c z_2 + d,$$

womit meine Behauptung erwiesen ist.

Herr *Bonnet* hat mehrmals eine Transformation betrachtet, die er durch die Gleichungen:

$$Z_1 = i Z_2 \sqrt{1 + P_2^2 + Q_2^2}, \quad X_1 = X_2 + P_2 Z_2, \quad Y_1 = Y_2 + Q_2 Z_2$$

definiert. Herr *Bonnet* zeigt, daß diese Transformation eine reziproke ist, daß die Krümmungslinien in Krümmungslinien übergeführt werden, daß endlich die Relationen:

$$\zeta_1 = i H_2, \quad H_1 = -i \zeta_2 \tag{1}$$

stattfinden, vorausgesetzt, daß H_1 und H_2 Krümmungsradien entsprechender Punkte bezeichnen, daß ferner ζ_1 und ζ_2 die z-Ordinaten der zugehörigen Krümmungszentren sind.

Die **Bonnet**sche Transformation ist, wie wir sogleich beweisen werden, das Bild einer reziproken Umformung des Raumes r hinsichtlich des linearen Komplexes:

$$Z + i H = 0.$$

Nach Herrn Klein genügen nämlich die Koordinaten zweier Geraden (X_1, Y_1, Z_1, H_1), (X_2, Y_2, Z_2, H_2), die zu einander hinsichtlich dieses Komplexes konjugiert sind, den Relationen:

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = i H_2, \quad H_1 = -i Z_2.$$

Diese Gleichungen aber bestimmen, wenn X, Y, Z, H als Kugelkoordinaten aufgefaßt werden, ein Entsprechen zwischen allen Kugeln des [185
Raumes, und zwar dasselbe wie die Bonnetsche Transformation.[1])

Unter den linearen Transformationen des Raumes spielen bekanntlich die reziproken Umformungen hinsichtlich Flächen zweiten Grades eine fundamentale Rolle, und es liegt somit nahe, die entsprechenden linearen Kugeltransformationen zu betrachten. Dieselben beziehen sich jedesmal auf die beiden Kugelgruppen einer Dupinschen Zyklide, und zwar in der folgenden Weise. Eine gegebene Kugel Q_1 berührt zwei Kugeln aus jeder Gruppe, S_1, S_2 und Σ_1, Σ_2; es gibt nun bekanntlich außer Q_1 fünfzehn Kugeln, welche diese S und Σ berühren, und unter denselben wählt man diejenige Q_2, die Q_1 in dem bekannten Sinne zugeordnet ist. Durch die betreffende Kugeltransformation sind Q_1 und Q_2 einander zugeordnet.

Bemerkenswert ist insbesondere der Fall, daß die Erzeugenden des einen Systems auf der ursprünglich angenommenen Fläche 2. Grades dem linearen Komplexe $H = 0$ angehören. Alsdann reduziert sich die Zyklide auf einen Kreis; ferner ist die Kugeltransformation eine Punkttransformation. Wir finden also hier eine ausgezeichnete konforme Punkttransformation, bei welcher ein im endlichen Raume gelegener Kreis als Fundamentalgebilde auftritt.

---

1) Die Bonnetsche Transformation ordnet den Punkten des Raumes Kugeln zu, deren Zentren in einer Ebene liegen. Ersetzt man hier die Kugel jedesmal durch den Durchschnittskreis derselben mit jener Ebene, so findet man einen interessanten Zusammenhang zwischen der Bonnetschen Transformation und einer von Möbius herrührenden Idee (Abhandlungen der Sächs. Akad. 1854). Es bietet sich hier die Idee, als Element einer Geometrie mit drei Dimensionen den Kreis in der Ebene, und als Koordinaten Zentrumkoordinaten und Radius desselben anzuwenden.

Die wichtigsten Ergebnisse dieses Paragraphen resumiere ich folgendermaßen:

Durch meine Abbildung entsprechen einander:

a) alle linearen Punkttransformationen und lineardualistischen Umformungen des Raumes;	a) alle Transformationen, bei denen Berührung längs Krümmungslinien eine invariante Beziehung ist;
b) alle ∞^{10} linearen Transformationen, bei denen ein linearer Linienkomplex in sich übergeführt wird;	b) alle konformen Punkttransformationen des Raumes;
c) alle ∞^{7} linearen Transformationen, die eine spezielle lineare Kongruenz in sich überführen.	c) alle konformen Punkttransformationen, die homographische Transformationen sind, bei denen der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis seine Lage behält.

Diese Entwickelungen geben zu wichtigen Theorien Veranlassung. Beispielsweise sei angeführt:

Alle Transformationen, bei denen Gerade, die ein- [186
ander schneiden, in ebensolche übergehen, können nach einer Bemerkung des Herrn **Klein** aus reziproken Umformungen hinsichtlich linearer Komplexe zusammengesetzt werden. Dementsprechend findet man, daß alle unsere Transformationen, bei denen Krümmungslinien kovariante Gebilde sind, sich aus Transformationen durch reziproke Radien und Paralleltransformationen (Dilatationen) zusammensetzen lassen.

Betrachtet man, wie Herr Klein es vorgeschlagen hat, die Linien- oder Kugelgeometrie mit Zugrundelegung der Koordinaten X, Y, Z, H als eine metrische Geometrie zwischen vier Variabeln, so findet man leicht, daß meine linearen Kugeltransformationen eben mit dem Inbegriffe aller konformen Punkttransformationen dieses Kugelraumes identisch sind.[1])

---

1) Den entsprechenden Satz habe ich in den Göttinger Nachrichten (1871, Nr. 7 [d. Ausg. Bd. I, Abh. XIII, S. 226 f.]) für einen Raum mit n Dimensionen aufgestellt. Weiter sei bemerkt, daß sich alle konformen Punkttransformationen eines Raumes R_n aus Bewegungen, Ähnlichkeitstransformationen und Transformationen durch reziproke Radien zusammensetzen lassen. Hiermit in Verbindung steht der Satz, daß, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als solche Funktionen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gegeben sind, daß:

$$\sum dx^2 = \Phi(y_1, \ldots, y_n) \sum dy^2$$

Übrigens hoffe ich, in einer anderen Abhandlung, deren Gegenstand überhaupt die Geometrie eines Raumes mit n Dimensionen sein wird, eine erschöpfende Darstellung dieser letzten Theorien, und zwar für einen jeden Raum, geben zu können.[1])

Christiania, 10. Oktober 1871.

II. [187

Im ersten Teile dieser Abhandlung habe ich, wie ich glaube, die erste vollständige analytischgeometrische Interpretation aller Raumtransformationen gegeben, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist. Ich betrachtete insbesondere eine derartige Verwandtschaft — ich bezeichne dieselbe zuweilen der Kürze wegen als eine Kugelabbildung —, welche die Geraden eines Raumes r in die Kugeln des Raumes R überführte, was so zu verstehen war, daß alle Flächenelemente, welche zwei konsekutive Punkte einer Geraden enthielten, in die Elemente einer Kugel übergingen. Ich begründete hierauf einen genauen und nach meiner Auffassung fundamentalen Zusammenhang zwischen Liniengeometrie und Kugelgeometrie, und demzufolge zwischen mehreren projektivischen und metrischen Theorien. Insbesondere zeigte es sich, daß sich die Haupttangentenkurven einer Fläche f in die Krümmungslinien der Bildfläche F transformierten.

Wenn ich eben das Wort Kugelgeometrie benutzt habe, so muß ich bemerken, daß meines Wissens eine solche Geometrie bisher noch nicht existierte, wenn auch viele partikuläre Probleme und Theorien, die sich

ist, auch eine Gleichung von der Form gilt:

$$\sum_i^{1\ldots n}(x_i-x_i')^2 = \Pi(y_1,\ldots,y_n)\,.\,\Pi(y_1',\ldots,y_n')\sum_i^{1\ldots n}(y_i-y_i')^2.$$

1) Ich führe noch an, daß sich jeder Satz der Linien- oder Kugelgeometrie in interessanter Weise transformieren läßt in einen Satz über Flächen, die aus einer beliebig gewählten durch Anwendung aller Translationen und Paralleltransformationen hervorgehen.

Wichtig sind auch die beiden folgenden Bemerkungen, die sich mir zu spät darbieten, um im Texte Platz finden zu können.

1. Im Linienraume r gibt es bekanntlich zweierlei Transformationen, bei denen Gerade, die einander schneiden, in ebensolche übergehen. Die entsprechenden Transformationen des Raumes B zerfallen nicht in zwei Klassen, wenn Punktkoordinaten zugrundegelegt werden.

2. Linientransformationen, bei denen (Const. = 0) seine Lage behält, geben sämtliche Transformationen von R, bei denen Flächen mit gemeinsamem sphärischen Bilde in ebensolche Flächen übergehen. Das neue sphärische Bild entsteht aus dem alten durch eine konforme Punkttransformation der Bildkugel. Hierher gehört die Bonnetsche Transformation.

auf Kugeln beziehen, schon erledigt waren. Nachdem ich aber Herrn Darboux[1]) die folgende Abhandlung, die, in etwas anderer Form, das erste Mal in den Berichten der Akademie zu Christiania, Sommer 1871, erschien [d. Ausg. Bd. I, Abh. XII], zugeschickt habe, erfahre ich, daß er 1868 bei der Pariser Akademie eine noch nicht veröffentlichte Abhandlung eingereicht hat, in welcher er sich mit solchen Kugelsystemen beschäftigte, die ich als Kugelkomplexe bezeichnet habe. Bei derselben Gelegenheit teilte er mir mit, daß er eben eine Note vorbereite, in welcher er mehrere Probleme behandeln werde, die ich in den §§ 15, 24 meiner jetzigen Abhandlung betrachtet habe. Wo ich dazu im Stande bin, werde ich im folgenden hierauf bezügliche Zitate machen, indem ich im übrigen auf Herrn Darbouxs Arbeiten, die hoffentlich bald erscheinen werden, verweise.

Wenn aber sowohl eine Kugelgeometrie, wie eine Liniengeometrie schon existierten, so scheint doch der eigentümliche Zusammenhang zwischen diesen beiden Disziplinen zuerst von mir bemerkt zu sein. Plücker, dem man überhaupt die Idee verdankt, eine sinnliche Darstellung einer Algebra mit vier oder noch mehr Variabeln zu geben, wählte die Gerade als Element des Raumes R_4. Diese Wahl ist ohne Zweifel gut; es würde aber nach meiner Auffassung ebenso zweckmäßig sein, die Kugel zu benutzen. Freilich besitzt die Liniengeometrie Vorzüge, die der Kugel- [188 geometrie fehlen; das Umgekehrte ist aber auch wahr. Dies liegt daran, daß sich sowohl die Gerade wie die Kugel in eigentümlicher Weise der Anschauung darbieten, andererseits auch daran, daß es einen einfachen Zyklus von Kugeltransformationen gibt, der denjenigen Linientransformationen entspricht, bei denen Schneiden eine invariante Beziehung ist. Es wird daher fruchtbar sein, die Liniengeometrie und die Kugelgeometrie, wie ich es begonnen habe, nebeneinander zu entwickeln, indem man immer die Resultate der einen Geometrie durch meine Abbildung für die andere Geometrie verwertet. Wenn es mir zuweilen gelungen ist, schwierige Probleme zu erledigen, so liegt dies wesentlich daran, daß ich abwechselnd an Linien- und Kugelvorstellungen anknüpfe. Diese Methode, die für mich der Weg der Entdeckung gewesen ist, habe ich in meiner jetzigen Darstellung beibehalten, obgleich ich fürchten muß, daß der häufige Wechsel des geometrischen Bildes dem Leser Schwierigkeiten bereiten wird.

1) Während der Korrektur erfahre ich neue Beziehungen zwischen Darbouxs und meinen Arbeiten. Vgl. den Schluß.

Dritter Abschnitt.

Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zwischen drei Variablen.

In diesem Abschnitte werde ich versuchen, einerseits die von Plücker in seinem letzten Werke eingeführten geometrischen Begriffe, andererseits die eben besprochenen Entwickelungen für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu verwerten. Man erkennt leicht, daß eine partielle Differentialgleichung beliebiger Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangentenkurven auf den Integralflächen sind, durch die obengenannte Transformation in eine Differentialgleichung derselben Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien sind, übergeführt wird. Es gründet sich hierauf ein interessanter Parallelismus zwischen mehreren wichtigen Klassen partieller Differentialgleichungen. An die Seite derselben stellen sich, wie wir später sehen werden, gewisse Differentialgleichungen, deren Charakteristiken geodätische Kurven sind.

Die folgenden Entwickelungen werden gewissermaßen einen partikulären Charakter haben, insofern ich mich nur mit besonderen Klassen von Differentialgleichungen beschäftige. Doch möchte ich hervorheben, daß der hier eingeschlagene Weg: nämlich die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen an erweiterte geometrische Begriffe anzuknüpfen, eine Methode zu sein scheint, aus welcher man überhaupt Fortschritte in der von Monge eingeschlagenen Richtung erwarten darf.

Über einige partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. [189

Zunächst betrachte ich drei in einander transformierbare Klassen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, die ich der Kürze wegen mit den Symbolen D_{11}, D_{12}, D_{13} bezeichnen werde.

1. D_{11}. Die Charakteristiken sind Haupttangentenkurven auf den Integralflächen. Die Gleichungen D_{11} entsprechen, wie ich später zeigen werde, gewissermaßen den Linienkomplexen und Linienkongruenzen.

2. D_{12}. Die Charakteristiken sind Krümmungslinien. Eine jede D_{12} entspricht entweder einem Kugelkomplexe oder einer Kugelkongruenz.

3. D_{13}. Die Charakteristiken sind geodätische Kurven. Bezeichnet H eine beliebige, bekannte Funktion von x, y, z, und wie gewöhnlich p, q die partiellen Derivierten von z hinsichtlich x und y, so läßt sich eine jede D_{13} folgendermaßen schreiben:

$$\frac{\partial H}{\partial x}p + \frac{\partial H}{\partial y}q - \frac{\partial H}{\partial z} = \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - 1}.$$

Diese Gleichungen sind, wie zu bemerken ist, nur vom zweiten Grade hinsichtlich p und q.

Aus dem Inhalte des folgenden Abschnitts hebe ich noch hervor, daß die Bestimmung der geodätischen Kurven einer Fläche gewissermaßen darauf hinauskommt, eine partikuläre D_{12} oder D_{11} zu integrieren. Demzufolge läßt sich die bisherige Theorie geodätischer Kurven für die neue Theorie der Plückerschen Komplexe verwerten.

§ 14. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangentenkurven auf den Integralflächen sind.

40. Wir haben gefunden (§ 3, Nr. 10), daß, wenn die charakteristischen Kurven einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von den Geraden eines Linienkomplexes umhüllt werden, die Charakteristiken Haupttangentenkurven auf den Integralflächen sind.[1]) Es ist andererseits leicht, zu erkennen, daß einer jeden Linienkongruenz eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung entspricht, deren zweifach unendlich viele Charakteristiken — die Geraden der Kongruenz nämlich — als Haupttangentenkurven auf den Integralflächen auftreten. Umgekehrt [190 werden wir beweisen, daß es keine weiteren partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gibt, welche die besprochene Eigenschaft besitzen, als die genannten beiden Arten.

Schreiben wir eine allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in der Form:

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

so müssen wir F, als Funktion von x, y, z, p, q aufgefaßt, in allgemeinster Weise so bestimmen, daß in einem beliebigen Punkte einer Integralfläche die Richtung der Charakteristik mit derjenigen der Trajektorie zusammenfällt. Die beiden besprochenen Richtungen liegen nämlich hinsichtlich der beiden entsprechenden Haupttangenten harmonisch; wenn sie also zusammenfallen, so werden sie zugleich mit der einen Haupttangente identisch. Nach Monge bestimmen aber:

$$\frac{\partial F}{\partial p}dy - \frac{\partial F}{\partial q}dx = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)dy = 0$$

beziehungsweise die Richtungen der Charakteristik und der Trajektorie, also kommt unser Problem darauf hinaus, das allgemeine Integral der

1) Herr Darboux, dem ich im Sommer 1870 in einem Gespräche mitteilte, daß jeder Linienkomplex eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt, deren Charakteristiken Haupttangentenkurven sind, kannte damals diesen Satz.

partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)=0 \tag{1}$$

zu bestimmen. Diese Gleichung läßt sich nach den gewöhnlichen Methoden integrieren; da wir jedoch hierdurch die Lösung in einer Form erhalten, die sich nicht unmittelbar interpretieren läßt, so wird es vorteilhafter sein, einen indirekten Weg einzuschlagen.

41. Setzen wir nun zunächst voraus, daß die gesuchte partielle Differentialgleichung $F=0$ keine lineare ist, so entsprechen derselben bekanntlich dreifach unendlich viele Charakteristiken, und also befriedigen diese Kurven nur *eine* Gleichung von der Form:

$$f(x, y, \dot{z}, dx, dy, dz)=0.$$

Setzen wir hier statt y und z die äquivalenten Ausdrücke:

$$y=\frac{(y\,dx-x\,dy)+x\,dy}{dx}, \quad z=\frac{x\,dz-(x\,dz-z\,dx)}{dx},$$

so erhält die Gleichung der Charakteristiken $f=0$ die Form:

$$\chi[dx, dy, dz, (x\,dz-z\,dx), (y\,dx-x\,dy), \varphi(x)]=0,$$

und zwar wissen wir, daß, wenn $\varphi(x)$ eine Konstante ist, und nur dann, die Charakteristiken von den Geraden eines Linienkomplexes umhüllt werden. Indem man nun nach den gewöhnlichen Regeln unter den Gleichungen:

$$\chi=0, \quad \chi'_{dx}=\varrho p, \quad \chi'_{dy}=\varrho q, \quad \chi'_{dz}=-\varrho$$

die Größen dx, dy, dz eliminiert, wobei ϱ wegfällt, erhält man die ursprüngliche partielle Differentialgleichung $F=0$ in der Form:

$$\pi[x, y, z, p, q, \varphi(x)]=0,$$ [191

und zwar fragt es sich hier, ob der Ausdruck π der Gleichung (1) in anderen Fällen genügen kann, als wenn $\varphi(x)$ eine Konstante ist.

Führt man auf π die durch (1) angegebenen Operationen aus, so bleibt nach einer Reduktion, die sich darauf gründet, daß π in dem angegebenen Falle die Gleichung (1) befriedigt, nur zurück:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \pi}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}=0,$$

eine Gleichung, die in drei zerfällt:

$$\frac{\partial \pi}{\partial p}=0; \quad \frac{\partial \pi}{\partial \varphi}=0; \quad \frac{d\varphi}{dx}=0.$$

Ist erstens $\partial\pi : \partial p$ gleich Null, so kommt p in der Gleichung $\pi=0$ gar nicht vor, und also läßt sich dieselbe auf die *lineare* Form:

$$q=\Phi(x, y, z)$$

bringen; diesen Fall haben wir aber vorläufig ausgeschlossen. Die Gleichungen $\partial\pi : \partial\varphi=0$ und $d\varphi : dx=0$ besagen beziehungsweise, daß π die Größe φ nicht enthält, und daß φ eine Konstante ist, und somit ist meine anfängliche Behauptung, insofern sie sich auf nichtlineare Gleichungen bezog, erwiesen.

Wir gehen nun zu dem Falle über, daß $F=0$ eine lineare partielle Differentialgleichung ist. Es gibt alsdann zweifach unendlich viele Charakteristiken, und es ist leicht, zu erkennen, daß dieselben gerade Linien sein müssen, wenn die fragliche Eigenschaft eintreten soll. Betrachten wir nämlich einen Punkt p, die durch denselben gehende Charakteristik c und endlich eine variable, unendlich nahe Charakteristik c'. Es ist klar, daß die Tangentenebene der entsprechenden Integralfläche im Punkte p mit c' variiert; es soll aber diese Ebene die Kurve c in diesem Punkte oskulieren, und also muß c die Eigenschaft besitzen, daß ihren Punkten eine unbestimmte Oskulationsebene entspricht. Dieses ist aber nur für die gerade Linie der Fall.

Die hiermit abgeleiteten Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Es gibt zwei distinkte Klassen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangentenkurven auf den Integralflächen sind.

Die eine besteht aus **linearen** *Differentialgleichungen, deren geradlinige Charakteristiken eine Kongruenz bilden.*

Die zweite Klasse entspricht den **Plücker***schen Linienkomplexen, in dem Sinne, daß die Charakteristiken einer solchen Differentialgleichung von den Geraden eines Komplexes umhüllt werden. Alsdann kommt die Aufgabe der Integration darauf hinaus: die allgemeinste Fläche zu finden, deren zweifach unendlich viele Haupttangenten* [192 *des einen Systems einem gegebenen Linienkomplexe angehören.*

Den Inbegriff dieser beiden Klassen bezeichnen wir mit dem Symbole D_{11}.[1])

1) Herr *Klein* macht mich darauf aufmerksam, daß sich die Resultate dieses Paragraphen leicht und übersichtlich durch geometrische Betrachtungen beweisen lassen

Entspricht die D_{11} einer Linienkongruenz, so ist die zugehörige Brennfläche das singuläre Integral. In dem zweiten Falle befinden sich unter den Integralflächen, wie mir Herr Klein bemerkt, die Developpablen der singulären Linien, wie auch die Singularitätenfläche des betreffenden Linienkomplexes.

42. In Verbindung mit dem Inhalte dieses Paragraphen steht der folgende Satz:

Auf einer Fläche liegen einfach unendlich viele Kurven, deren Tangenten einem gegebenen Linienkomplexe angehören. Haben diese Kurven eine Umhüllungskurve, was im allgemeinen nicht stattfindet, so sind zwei Fälle möglich. Entweder berühren diejenigen Komplexkegel die Fläche, deren Spitzen auf der Umhüllungskurve liegen, und dann ist dieselbe eine Haupttangentenkurve; oder die Tangenten der Umhüllungskurve sind Doppelkanten des betreffenden Komplexkegels. In dem letzten Falle läßt sich nichts schließen.

Es war durch Anwendung dieses Satzes, daß ich die Haupttangentenkurven der tetraedralsymmetrischen Flächen (Götting. Nachr. Jan. 1870 [d. Ausg. Bd. I, Abh. V, S. 76]) bestimmte. Durch eine andere Methode war Herr Clebsch, wie ich später erfahren habe, schon früher auf diese Bestimmung geführt worden, ohne indes etwas hierüber veröffentlicht zu haben. Später (Bulletin, Nov. 1870, S. 8) erhielt Herr Darboux dasselbe Resultat als Korollar einer allgemeineren Bestimmung.

Jede tetraedralsymmetrische Fläche steht in der besprochenen Beziehung zu jedem Linienkomplexe, dessen Gerade das der Fläche zugehörige Fundamentaltetraeder nach konstantem Doppelverhältnisse schneiden.

§ 15. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen sind.

43. Wir wissen, daß unsere Kugelabbildung die Elemente einer Fläche f in die Elemente einer Fläche F überführt. Es wird hierbei offenbar ein paarweises Zusammengehören zwischen allen Kurven der beiden Flächen festgestellt, und zwar entsprechen einander insbesondere die Haupt- [193 tangentenkurven auf f und die Krümmungslinien auf F. Hieraus folgt, daß zwei Flächen f_1 und f_2, die einander nach einer Haupttangentenkurve berühren, im allgemeinen in Flächen F_1 und F_2 übergehen, die in demselben gegenseitigen Verhältnisse längs einer Krümmungslinie stehen. Dieser Satz erleidet jedoch eine wichtige Ausnahme (die freilich im fol-

genden nicht in Betracht kommt), und, um alles möglichst klarzustellen, gehe ich hierauf etwas näher ein.[1])

Nach § 6, Nr. 18, 20 wissen wir, daß, wenn die beiden Räume r und R durch ein Gleichungssystem:

$$F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

reziprok auf einander bezogen sind, sich ein Flächenelement des einen Raumes, welches einen elementaren Komplexkegel berührt, im anderen Raume als ein ähnliches Element abbildet. Nun gibt es offenbar im allgemeinen in jedem Raume vierfach unendlich viele Elemente von dieser ausgezeichneten Lage. Wenn aber die elementaren Komplexkegel des Raumes r ebene Strahlenbüschel sind, so gibt es in r nur dreifach unendlich viele solche Elemente — ich bezeichne sie mit dem Buchstaben e —, welche den vierfach unendlich vielen ausgezeichneten Elementen E des Raumes R entsprechen. Einem Elemente e entsprechen alsdann einfach unendlich viele Elemente E.

Dies tritt insbesondere bei unserer Kugelabbildung ein. Durch jeden Punkt in r geht nur ein ausgezeichnetes Element, dasjenige nämlich, welches dem betreffenden Punkte durch den linearen Komplex $H = 0$ zugeordnet wird. Andererseits sind die ausgezeichneten Elemente E diejenigen, welche der Gleichung:

$$1 + P^2 + Q^2 = 0$$

genügen, wo P und Q wie früher die partiellen Derivierten von Z hinsichtlich X und Y bezeichnen sollen. Wie eine geometrische Betrachtung zeigt, sind es jedesmal die einfach unendlich vielen Elemente E, die sich an eine Gerade von der Länge Null anschließen, welche demselben Elemente e des Raumes r entsprechen.

44. Nach den obenstehenden Entwickelungen können wir den folgenden Satz aussprechen:

Wenn zwei Flächen f_1 und f_2 einander nach einer Haupttangentenkurve berühren, und die Tangenten dieser Kurve nicht dem linearen Komplexe $H = 0$ angehören, so berühren die Bildflächen F_1 und F_2 einander nach einer Krümmungslinie. In dem ausgeschlossenen Falle gehören alle Tan-

1) Es muß einer anderen Arbeit vorbehalten sein, eine eingehende Diskussion aller Eigentümlichkeiten zu geben, die bei der Nötherschen Abbildung des linearen Komplexes und meiner darauf begründeten Kugelabbildung hinsichtlich der Fundamentalgebilde der beiden Räume stattfinden.

genten der Flächen f_1 und f_2, die durch einen Punkt der gemeinsamen Haupttangentenkurve gehen, dem Komplexe [194
$H=0$ an, und alsdann kann man nur schließen, daß die Bildflächen F_1 und F_2 in eine gemeinsame Developpable, welche den unendlich entfernten imaginären Kreis enthält, eingeschrieben sind (§ 26, Nr. 84 b).

Berücksichtigt man indessen, daß es keine partielle Differentialgleichung gibt, deren krummlinige Charakteristiken sämtlich von Geraden des linearen Komplexes $H=0$ umhüllt werden, so läßt sich schließen (§ 6, Nr. 17), daß unsere Kugelabbildung eine jede D_{11} in eine partielle Differentialgleichung, deren Charakteristiken Krümmungslinien sind, überführt. Andererseits erhalten wir in dieser Weise alle Differentialgleichungen von dieser Eigenschaft, weil der folgende Satz ohne Ausnahme gilt:

Zwei Flächen F_1 und F_2, die einander nach einer Krümmungslinie berühren, geben in r Bildflächen, die einander nach einer gemeinsamen Haupttangentenkurve berühren.

Es gehen also die im vorangehenden Paragraphen erhaltenen Resultate in die folgenden über:

Es gibt zwei distinkte Klassen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen sind.

Die Gleichungen der ersten Klasse können dadurch charakterisiert werden, daß sie als vollständiges Integral den Inbegriff von zweifach unendlich vielen Kugeln — eine Kugelkongruenz — gestatten. Das allgemeine Integral wird also von Röhrenflächen gebildet, und deren kreisförmige Krümmungslinien sind die Charakteristiken.

Die zweite Klasse entspricht den Kugelkomplexen. Die Aufgabe, eine solche Differentialgleichung zu integrieren, kommt geometrisch darauf hinaus: die allgemeinste Fläche zu finden, deren zweifach unendlich viele Hauptkugeln des einen Systems einem gegebenen Komplexe angehören.

Den Inbegriff dieser beiden Klassen werde ich mit dem Symbole D_{12} bezeichnen.[1])

45. In seinem Werke: Partielle Differentialgleichungen, S. 127—129, stellt Herr du Bois-Reymond die Aufgabe, die wir eben

1) Herr Darboux teilt mir mit, daß auch er bemerkt hat, daß die Aufgabe, eine Fläche durch eine Eigenschaft der Hauptkugeln zu bestimmen, in gewissem Sinne nur auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung führt. (Vgl. das auf Darboux bezügliche Zitat in § 24.)

erledigt haben. Er macht darauf aufmerksam, daß, wenn die Charakteristiken Krümmungslinien sind, dieses auch mit den Trajektorien der Fall ist. Alsdann schneiden aber Charakteristiken und Trajektorien einander orthogonal, und dadurch wird das besprochene Problem (§ 14, Nr. 40) darauf zurückgeführt, die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial q}+q\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]-\frac{\partial F}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial p}+p\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial z}\left[p\frac{\partial F}{\partial q}-q\frac{\partial F}{\partial p}\right]=0$$

zu integrieren. Herr du Bois-Reymond führt diese Integration in [195
einigen sehr einfachen Fällen[1]) aus und äußert dabei die Vermutung, daß auch der allgemeine Fall keine erheblichen analytischen Schwierigkeiten bieten würde. Jedenfalls hat die vorstehende Lösung ein eigentümliches Interesse.

Hier mag auch die Bemerkung ihren Platz finden, daß, wenn zwei Flächen f_1 und f_2 mit einander eine Berührung n-ter Ordnung nach einer Haupttangentenkurve haben, die Bildflächen im allgemeinen in demselben gegenseitigen Verhältnisse längs einer Krümmungslinie stehen. Demzufolge wird eine partielle Differentialgleichung n-ter Ordnung, deren Charakteristiken des einen Systems Haupttangentenkurven auf den Integralflächen sind, durch unsere Kugelabbildung in eine Gleichung derselben Ordnung übergeführt, deren Charakteristiken des einen Systems Krümmungslinien sind.

46. Ich werde hier kurz andeuten, wie sich einige metrische Theorien verallgemeinern lassen.

Der Begriff der Krümmungslinien einer Fläche erweitert sich bekanntlich folgendermaßen. Es seien gegeben vierfach unendlich viele Flächen U, eine beliebige Fläche F und ein Punkt p derselben. Es gibt immer einige U, die eine stationäre Berührung mit F in p haben, und also F in einer Kurve mit Spitze schneiden. Betrachtet man die Tangente dieser Spitze als eine dem Punkte p zugeordnete Richtung, so bildet die kontinuierliche Aufeinanderfolge einander schneidender zugeordneter Richtungen Kurven, welche ich als die U-Krümmungslinien der Fläche F bezeichnen werde.

1) Die beiden ersten Arten D_{12} des Herrn du Bois-Reymond: die um eine Fläche umgeschriebenen Developpablen, und die einer gegebenen Achse zugehörigen Rotationsflächen, entsprechen Kongruenzen eines linearen Kugelkomplexes. Die geometrische Bedeutung seiner dritten Art sehe ich im Augenblick nicht.

Bemerkenswert ist der Fall, daß alle U aus einer gewissen Fläche U_0 durch Anwendung aller Translationen und Paralleltransformationen hergeleitet werden können. Alle Theorien über Krümmungslinien, und insbesondere die in dieser Abhandlung gegebenen, erweitern sich in gewissem Sinne auf diesen Fall (§ 13, Schluß). Es ist alsdann beispielsweise immer möglich, alle Flächen zu finden, deren U-Krümmungslinien die Eigenschaft besitzen, daß die in ihren Punkten errichteten Flächennormalen mit einer Ebene parallel sind. Diese Aufgabe entspricht nämlich durch eine gewisse Transformation der von Herrn Bonnet gelösten: alle Flächen mit ebenen Krümmungslinien zu finden.

Es gelten ferner die Sätze:

a) Wenn eine Fläche nach der gewöhnlichen Methode auf einer Kugel abgebildet wird, so gehen die U-Krümmungslinien in eine Schar [196 orthogonaler Kurven über.

b) Die Bestimmung der U-Krümmungslinien einer Fläche F läßt sich darauf zurückführen, die Krümmungslinien einer gewissen anderen Fläche Φ zu finden. Sind insbesondere U_0 und F Minimalflächen, oder Parallelflächen solcher, so ist auch Φ eine derartige Fläche, und dann können also die U-Krümmungslinien von F bestimmt werden.

Auch der Fall, daß alle Flächen U ähnlich und ähnlich gelegen sind, verdient eine besondere Untersuchung. Alsdann haben die einem Punkte zugehörigen Richtungen der U-Krümmungslinien paarweise eine harmonische Lage hinsichtlich der Haupttangenten der Fläche, wie hinsichtlich der Haupttangenten der stationär berührenden U.

Setzt man endlich voraus, daß alle U unendlich dünne Zylinder, das heißt, gerade Linien sind, so werden die U-Krümmungslinien mit den Haupttangentenkurven der betreffenden Fläche identisch.

§ 16. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken geodätische Kurven auf den Integralflächen sind.

47. Die Entwickelungen dieses Paragraphen lassen sich auf den bekannten Satz gründen: Wenn zwei Flächen I und U mit einander eine Berührung n-ter Ordnung nach einer Krümmungslinie haben, so stehen ihre Zentraflächen C_i und C_u in demselben gegenseitigen Verhältnisse hinsichtlich einer gemeinsamen geodätischen Kurve.

Betrachtet man nun einerseits die Integralflächen I einer D_{12} und unter denselben die Flächen U eines vollständigen Integrals, andererseits die zugehörigen Zentraflächen C_i und C_u, so sieht man leicht (§ 6, Nr. 17), daß die Flächen C_i einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

D_{13} genügen, deren Charakteristiken geodätische Kurven sind, und hierbei bilden die Flächen C_u ein vollständiges Integral.

Allgemein können wir sagen, daß den Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung n-ter Ordnung D_{n2}, deren Charakteristiken des einen Systems Krümmungslinien sind, Zentraflächen entsprechen, welche einer Differentialgleichung derselben Ordnung D_{n3} genügen, und zwar sind die Charakteristiken des einen Systems geodätische Kurven.[1])

Nach dem Obenstehenden entspricht jeder D_{n2} eine Differentialgleichung, deren Charakteristiken geodätische Kurven sind. Das Umgekehrte ist dagegen nicht wahr, [197 und demzufolge sind die D_{n3} nicht die einzigen partiellen Differentialgleichungen, welche die Eigenschaft besitzen, daß ihre Charakteristiken geodätische Kurven sind.

48. Zur Bestimmung der allgemeinen Form der Gleichungen D_{13} schlagen wir einen anderen Weg ein, indem wir uns auf die im ersten Abschnitte entwickelte Theorie reziproker Kurvenkomplexe stützen.

Sei nämlich im Raume r ein beliebiger Linienkomplex und in R der entsprechende Kugelkomplex gegeben, die sich beide durch eine Gleichung:

$$F(X, Y, Z, H) = 0$$

darstellen lassen; hierbei muß man X, Y, Z, H einerseits als Linienkoordinaten (§ 10, Nr. 30) hinsichtlich vier paarweise in Involution liegender linearer Komplexe, andererseits als Kugelkoordinaten auffassen. Indem wir nun den Mittelpunkt (X, Y, Z) einer beliebigen Kugel (X, Y, Z, H) des besprochenen Kugelkomplexes als das Bild der Geraden (X, Y, Z, H) auffassen, erhalten wir eine Abbildung des Linienkomplexes $F(X, Y, Z, H) = 0$ im Punktraume R, bei welcher einer jeden Komplexlinie ein bestimmter Punkt entspricht, während es eine Anzahl von Komplexgeraden gibt, die sich als derselbe Punkt abbilden — so viele nämlich, wie der Grad der Gleichung $F(X, Y, Z, H) = 0$ hinsichtlich H beträgt. Den Komplexlinien, die durch einen Punkt gehen, entsprechen die Punkte einer Kurve C, und es ist einleuchtend, daß alle C einen Kurvenkomplex bilden, der zu unserem Linienkomplexe in der reziproken Beziehung steht, die wir im ersten Abschnitte betrachtet haben. Hierbei müssen wir uns erinnern, daß die zwei reziproken Kurvenkomplexen zugehörigen partiellen

1) Einer jeden Differentialgleichung n-ter Ordnung entsprechen Integralflächen, deren Zentraflächen einer gewissen Gleichung $(n+1)$-ter Ordnung genügen. Außer den Zentraflächen besitzt die letzte Gleichung im allgemeinen Falle noch andere Integralflächen.

Differentialgleichungen erster Ordnung in dem Sinne mit einander äquivalent sind, daß die Lösung der einen diejenige der anderen gibt.

Setzt man (§ 9, Nr. 27) in die Gleichungen einer Geraden:

$$rz = x - \varrho, \quad sz = y - \sigma$$

die Werte:

$$\varrho = X + iY, \quad s = \quad X - iY,$$
$$\sigma = Z \pm H, \quad r = -(Z \mp H)$$

ein, so bestimmen die hervorgehenden Relationen:

$$-(Z \mp H)z = x - (X + iY),$$
$$(X - iY)z = y - (Z \pm H),$$

in denen man H als die durch $F(X, Y, Z, H) = 0$ bestimmte Funktion von X, Y, Z auffaßt, die eben besprochene Abbildung der beiden Räume. Indem man nun (§ 3, Nr. 6) hinsichtlich X, Y, Z differentiiert:

$$-(dZ \mp dH)z = -(dX + idY),$$
$$(dX - idY)z = -(dZ \pm dH),$$

und zwischen diesen beiden (und den ursprünglichen) Gleichungen x, y, z eliminiert, erhält man die Differentialgleichung des Kurven- [198
komplexes in R:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 + (idH)^2 = 0,$$

oder, wie man auch schreiben kann:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dH^2,$$

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung ist, daß die beiden Kugeln:

$$(X, Y, Z, H) \text{ und: } (X + \varDelta X,\ Y + \varDelta Y,\ Z + \varDelta Z,\ H + \varDelta H)$$

einander berühren, daß also die entsprechenden Geraden einander schneiden.

Die elementaren Komplexkegel:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial X} dX + \frac{\partial H}{\partial Y} dY + \frac{\partial H}{\partial Z} dZ\right)^2$$

berühren, wie ihre Gleichung zeigt, den unendlich weit entfernten, imaginären Kreis in den beiden Durchschnittspunkten desselben mit der Ebene:

$$\frac{\partial H}{\partial X} dX + \frac{\partial H}{\partial Y} dY + \frac{\partial H}{\partial Z} dZ = 0,$$

und also sind sie Umdrehungskegel, deren Achse die Richtungskoeffizienten $\partial H : \partial X$, $\partial H : \partial Y$, $\partial H : \partial Z$ besitzt. Wir erhalten somit die folgende übersichtliche Vorstellung von diesem Kurvenkomplexe:

Die elementaren Komplexkegel, deren Scheitel auf einer beliebigen Fläche aus der Schar $H = \text{Const.}$ liegen, sind Umdrehungskegel, deren Achse die entsprechende Normale der genannten Fläche ist. Die Winkelöffnung dieser Kegel variiert, wie die Gleichung:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dH^2$$

zeigt, in solcher Weise, daß die unendlich nahen Flächen $H = C$ und $H = C + \varDelta C$ auf den Erzeugenden dieser Kegel Segmente derselben Größe abschneiden. Hieraus folgt, wie wir sogleich zeigen werden, daß die Flächen $H = C$ die Integralflächen unserer D_{13} nach äquidistanten Kurven schneiden; hierbei sind die zugehörigen orthogonalen Kurven bekanntlich geodätische Linien und zugleich Charakteristiken hinsichtlich der D_{13}.

Diese geometrische Interpretation einer D_{13} gibt leicht als allgemeine Form derselben:

$$\frac{\partial H}{\partial X} P + \frac{\partial H}{\partial Y} Q - \frac{\partial H}{\partial Z} = \sqrt{1 + P^2 + Q^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Z}\right)^2 - 1},$$

welche Gleichung wir später durch eine analytische Methode finden werden.

Man betrachte [nämlich] eine beliebige auf $H = C$ gelegene Kurve k und die den Punkten derselben zugehörigen elementaren Komplexkegel, deren infinitesimale Durchschnittskurven mit der Fläche $H = C + \varDelta C$ zwei Umhüllungskurven k' bestimmen, unter denen wir die eine wählen; bekanntlich gehört der zwischen k und k' gelegene Flächenstreifen einer Integralfläche an. Durch Wiederholung dieser Operation findet man [199
auf den sukzessiven Flächen $H = C$ eine Schar Kurven k, deren Inbegriff eine Integralfläche bildet, und dabei folgt aus dem Vorstehenden, daß alle k äquidistante Kurven sind. Nun stehen immer die Tangente einer k und die Achse des zugehörigen Komplexkegels senkrecht auf einander, und also berührt dieser Kegel die betreffende Integralfläche nach einer Richtung, die ebenfalls die Tangente von k orthogonal schneidet. Die Charakteristiken und die Kurven k bilden, wie früher behauptet, ein Orthogonalsystem. Die Kurven k sind aber äquidistant, und also finden wir den Satz wieder, daß die Charakteristiken einer D_{13} geodätische Kurven auf den Integralflächen sind.

Um die der Differentialgleichung:

$$W = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial X} dX + \frac{\partial H}{\partial Y} dY + \frac{\partial H}{\partial Z} dZ\right)^2 = 0$$

zugehörige partielle Differentialgleichung zu bestimmen, muß man unter den Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial (dX)} = \varrho P, \quad \frac{\partial W}{\partial (dY)} = \varrho Q, \quad \frac{\partial W}{\partial (dZ)} = -\varrho$$

die Größen dX, dY, dZ eliminieren, und hierbei findet man als *allgemeine Form der partiellen Differentialgleichungen* D_{13}:

$$\frac{\partial H}{\partial X} P + \frac{\partial H}{\partial Y} Q - \frac{\partial H}{\partial Z} = \sqrt{1 + P^2 + Q^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial Z}\right)^2 - 1},$$

vorausgesetzt, daß H eine beliebige bekannte Funktion von X, Y, Z bezeichnet.

Aus unseren früheren Entwickelungen (§ 6, Nr. 18) folgt, daß die Integration einer D_{13} auf die Bestimmung der Haupttangentenkurven des entsprechenden Linienkomplexes zurückgeführt werden kann. Die betreffenden Charakteristiken sind ja reziproke Kurven hinsichtlich der Abbildungsgleichungen:

$$-(Z \mp H)z = x - (X + iY),$$
$$(X - iY)z = y - (Z \pm H);$$

wenn man also die allgemeine Gleichung des einen Kurvensystems kennt, so findet man diejenige des anderen durch Differentiation und Elimination.

Wenn wir andererseits sagen, daß die Integration einer D_{13} mit derjenigen einer D_{12} äquivalent ist, so kommt dies, geometrisch aufgefaßt, darauf hinaus, statt eine Fläche durch eine Eigenschaft der Hauptkugeln zu bestimmen, die entsprechende Zentrafläche zu suchen. Herr *Bonnet* benutzt eine solche Transformation bei seiner Bestimmung aller Flächen mit ebenen oder sphärischen Krümmungslinien.

Die obenstehende Form einer D_{13} teilte ich der Akademie zu Christiania (Oktober 1870) in einer Note mit, in welcher ich unter anderem die drei Klassen D_{11}, D_{12}, D_{13} aufstellte [d. Ausg. Bd. I, Abh. IX, S. 95]. Eine symmetrische Form erhält man, wenn man die Aufgabe [200 folgendermaßen stellt: Es soll eine Gleichung $\Phi(X, Y, Z, H) = 0$ gefunden werden, die, mit derjenigen des betreffenden Kugelkomplexes $\Pi(X, Y, Z, H) = 0$ verbunden, Z als die verlangte Funktion von X und Y gibt. Diese Bemerkung, oder eigentlich eine damit äquivalente, verdanke ich Herrn *Klein*, der darauf durch seine liniengeometrischen Untersuchungen geführt wurde (vgl. dessen zweite, hier[1]) folgende Arbeit). Andererseits teilt Herr *Darboux* mir eben (Oktober 1871) mit, daß er eine entsprechende Form durch Untersuchungen über Kugelkomplexe gefunden hat.

Die wichtigsten Resultate der drei vorangehenden Paragraphen fasse ich folgendermaßen zusammen:

Partielle Differentialgleichungen n-ter Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangentenkurven oder Krümmungslinien sind, und eine Klasse, deren Charakteristiken geodätische Linien sind, bilden äquivalente Probleme in dem Sinne, daß sie gegenseitig in einander transformiert werden können. Ist insbesondere n gleich 1, so entsprechen diesen Problemen Untersuchungen über Kongruenzen und Komplexe, deren Elemente gerade Linien oder Kugeln sind.

Hier soll auch darauf aufmerksam gemacht werden, daß ebenso wie es einen Zyklus von Verwandtschaften gibt, welche die Gleichungen D_{n1} in Gleichungen derselben Art überführen, alle linearen Punkttransformationen nämlich, zusammen mit allen dualistischen Umformungen des Raumes, es auch einen Zyklus von Verwandtschaften gibt, welche beziehungsweise die Gleichungen D_{n2} und D_{n3} ihren Charakter behalten lassen.

§ 17. Über Linienkomplexe, welche infinitesimale lineare Transformationen in sich selbst besitzen.[2])

49. Linienkomplexe, die sich durch eine Gleichung von der Form:

$$F(X, Y, Z) = 0$$

darstellen lassen, bilden sich als die Kugeln ab, deren Mittelpunkte auf der Fläche $F(X, Y, Z) = 0$ liegen. Dieser Kugelkomplex wird nun offenbar durch eine *beliebige* Paralleltransformation, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch eine *infinitesimale* solche in sich selbst übergeführt, und also können wir nach § 13, Nr. 39 den Linienkomplex $F(X, Y, Z) = 0$ dadurch charakterisieren, daß er eine infinitesimale [201 Transformation von der Form:

$$z_1 = z_2, \quad x_1 = x_2 + az_2 + b, \quad y_1 = y_2 + cz_2 + d$$

gestattet.

1) [Ann. V, S. 290 f., Ges. Abh. I, S. 140 f.]

2) Vgl. *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces*, par *Klein* et *Lie*, Comptes Rendus 1870. *Über vertauschbare lineare Transformationen*, von *Klein* und *Lie*, Math. Ann. Bd. IV. [Diese Ausg. Bd. I, Abh. VI und XIV.]

Nun ist es bekannt, daß die Aufgabe, die allgemeinste Fläche zu finden, deren Krümmungszentren des einen Systems auf einer gegebenen Fläche liegen, darauf hinauskommt, die geodätischen Kurven dieser Fläche zu finden. Unsere früheren Theorien geben also den folgenden interessanten Satz:

Die Bestimmung der Haupttangentenkurven des Linienkomplexes $F(X, Y, Z) = 0$ und die Auffindung der geodätischen Kurven auf der Fläche $F(X, Y, Z) = 0$ sind äquivalente Probleme.

Es ist zu bemerken, daß der Grad des Linienkomplexes gleich der Ordnung der Fläche ist; während aber die Fläche eine beliebige ist, muß der Komplex die besprochene infinitesimale Transformation in sich selbst besitzen.

Unter den linearen Tangentialkomplexen des Kugelkomplexes $F(X, Y, Z) = 0$ betrachte ich den folgenden:

$$\frac{\partial F_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial F_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial F_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0) = 0,$$

dessen Kugeln eine Tangentialebene der Fläche $F(X, Y, Z) = 0$ orthogonal schneiden (§ 10, Nr. 30). Eine beliebige Paralleltransformation führt sowohl den gegebenen Komplex, wie den Tangentialkomplex in sich selbst über, und also sehen wir, daß diese Komplexe einander in einfach unendlich vielen gemeinsamen Kugeln berühren. Der Komplex $F(X, Y, Z) = 0$ läßt sich infolgedessen als Enveloppengebilde von zweifach unendlich vielen linearen Komplexen auffassen.

Wenden wir uns zu den Linienvorstellungen, so können wir den entsprechenden Linienkomplex definieren als Enveloppengebilde von zweifach unendlich vielen linearen Komplexen, die mit einem gegebenen linearen Komplexe $H = 0$ in Involution liegen und außerdem eine gemeinsame Gerade desselben (die Fundamentalgerade des Raumes r) enthalten (vgl. § 10, Nr. 30).

Zweifach unendlich viele lineare Komplexe, die mit einem gegebenen in Involution liegen und außerdem eine Gerade dieses letzten Komplexes enthalten, umhüllen einen Linienkomplex, dessen Haupttangentenkurven sich dadurch bestimmen lassen, daß man die geodätischen Kurven einer gewissen Fläche aufsucht.

Im nächsten Abschnitte werde ich auf den Inhalt dieser Nummer zurückkommen.

50. Durch die Entwickelungen der vorangehenden Nummer wird man darauf geführt, sich die Frage zu stellen, ob sich die Bestimmung der

Haupttangentenkurven immer vereinfachen läßt, wenn der betreffende Linienkomplex eine infinitesimale lineare Transformation gestattet. [202
Die Antwort liegt unmittelbar in den oben genannten Arbeiten von Herrn Klein und mir (vgl. besonders diese Annalen Bd. IV, S. 80 [d. Ausg. Bd. I, Abh. XIV, S. 262]). Wir haben nämlich überhaupt die Aufmerksamkeit darauf gelenkt, daß, wenn bei einem Gebilde eine infinitesimale Transformation bekannt ist, sich die Bestimmung von anderen Gebilden, die mit dem gegebenen in einer durch die betreffende Transformation unzerstörbaren Beziehung stehen, im allgemeinen durch passende Koordinatenwahl vereinfachen läßt.

Hierbei muß man diejenigen Kurven anwenden, die den geometrischen Ort bilden für die infinitesimalen Wege, welche alle Punkte des Raumes während der besprochenen Transformation beschreiben. Setzen wir insbesondere voraus, daß die bekannte Transformation eine lineare ist, so werden diese Kurven eben die von Herrn Klein und mir unter der Bezeichnung Raumkurven W untersuchten. Man ordne die betreffenden, zweifach unendlich vielen Kurven W auf zwei Weisen zusammen in Flächenscharen:

$$U_1 = A, \quad U_2 = B.$$

Es geht alsdann jede Fläche U_1 oder U_2 durch die zugehörige Transformation in sich über. Man wähle ferner eine dritte Schar: diejenigen Flächen

$$V = C$$

nämlich, die aus einer beliebig gewählten durch kontinuierliche Anwendung der betreffenden Transformation hervorgehen, und hierbei soll C der Parameter der Transformation sein.

Führt man nun U_1, U_2 und V als Punktkoordinaten ein, so nimmt beispielsweise die Gleichung einer jeden Fläche, die jene Transformation gestattet, die Form an:

$$F(U_1, U_2) = 0.$$

Ebenso kann eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Inbegriff von elementaren Komplexkegeln durch die Transformation ungeändert bleibt, folgendermaßen geschrieben werden:

$$F\left(U_1, U_2, \frac{\partial V}{\partial U_1}, \frac{\partial V}{\partial U_2}\right) = 0,$$

was bekanntlich ein Schritt vorwärts ist. Dieses ist insbesondere der Fall mit der D_{11} eines Linienkomplexes, der selbst ungeändert bleibt.

Betrachten wir zum Beispiel die vier paarweise in Involution liegenden linearen Komplexe $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $H = 0$ und einen Linienkomplex, dessen Gleichung die folgende ist:

$$F\left(\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}\right) = 0,$$

so ist es einleuchtend, daß eine jede Transformation unter den unendlich vielen:

$$X_1 = m X_2, \quad Y_1 = m Y_2, \quad Z_1 = m Z_2, \quad H_1 = m H_2$$

unseren Komplex in sich überführt, und also nimmt die zugehörige [203 D_{11} die obenstehende Form an.

Hierher gehört, wie im nächsten Abschnitte gezeigt werden soll, ein Komplex zweiten Grades mit 17 Konstanten, und zwar ist derselbe der allgemeine Komplex zweiten Grades, dessen Singularitätenfläche eine Regelfläche ist. Die Komplexe zweiten Grades mit 18 und 19 Konstanten gestatten keine infinitesimale lineare Transformation.[1])

51. Ebenso ist es für die Untersuchung von räumlichen Gebilden, welche zwei infinitesimale und permutable lineare Transformationen gestatten, vorteilhaft, eine besondere Koordinatenwahl zu machen. Erstens nimmt man die einfach unendlich vielen Flächen:

$$V = A,$$

die durch unsere Transformationen ungeändert bleiben. Man wähle ferner zwei distinkte infinitesimale Transformationen β, γ aus unserem geschlossenen Systeme, und endlich zwei Flächen B_0 und C_0. Durch kontinuierliche Anwendung der Transformationen β und γ auf diese Flächen erhält man zwei Flächenscharen:

$$U_1 = B, \quad U_2 = C,$$

1) Der Linienkomplex $F(X:H,\ Y:H,\ Z:H) = 0$ läßt sich auch definieren als Enveloppengebilde von zweifach unendlich vielen linearen Komplexen, die mit zwei gegebenen linearen Komplexen in Involution liegen. Unter den Haupttangentenkurven eines solchen Komplexes gibt es einfach unendlich viele ausgezeichnete Scharen. Jede besteht aus einfach unendlich vielen Komplexkurven eines linearen Komplexes: $X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2 = \text{Const.}$

Das eben ausgesprochene Theorem ist zu gleicher Zeit eine Transformation und [eine] Verallgemeinerung des bekannten Satzes: Unter den geodätischen Kurven einer Fläche gibt es einfach unendlich viele, deren Tangenten den imaginären Kugelkreis schneiden.

Die hier betrachteten Linienkomplexe besitzen die charakteristische Eigenschaft, daß ihre Singularitätenflächen Regelflächen mit zwei geraden Leitlinien sind. Jede krumme Haupttangentenkurve einer solchen Regelfläche wird auch von Geraden eines linearen Komplexes $X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2 = \text{Const.}$ umhüllt.

wo B und C Transformationskonstanten bezeichnen. Wählt man nun V, U_1 und U_2 zu Punktkoordinaten, so nimmt die D_{11} eines Linienkomplexes, der durch unsere Transformationen ungeändert bleibt, die Form an:

$$F\left(V, \frac{\partial V}{\partial U_1}, \frac{\partial V}{\partial U_2}\right) = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung läßt sich bekanntlich auf eine Quadratur zurückführen.

Wir treffen somit eine Klasse Komplexe, deren Haupttangentenkurven wir bestimmen können. Hierher gehört zum Beispiel der Komplex zweiten Grades, dessen Singularitätenfläche in zwei Flächen zweiten Grades zerfallen ist, welche dann notwendig vier Erzeugende gemein haben.

Man erhält hier beispielsweise eine allgemeine Bestimmung der [204 geodätischen Kurven auf einer jeden Schraubenfläche. Der Inbegriff aller Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer solchen Fläche liegen, gestattet nämlich zwei permutable infinitesimale Transformationen in sich selbst: eine Schraubenbewegung und eine Paralleltransformation, und nach § 13 entsprechen solche Umformungen des Kugelraumes R linearen Punkttransformationen des Linienraumes r. Es gehört also diejenige D_{11}, deren Integration mit der Bestimmung jener geodätischen Kurven äquivalent ist, in die in Nr. 51 besprochene Kategorie, womit meine Behauptung erwiesen ist.

Sucht man die geodätischen Kurven auf einer Fläche, die eine infinitesimale lineare Punkttransformation gestattet, bei welcher der imaginäre Kugelkreis seine Lage behält, so kann man nach der in Nr. 50 auseinandergesetzten Methode dieses Problem darauf zurückführen, eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln zu integrieren. Die Krümmungslinien und Haupttangentenkurven dieser Flächen können bestimmt werden. (Vgl. die zitierte Arbeit Math. Ann. Bd. IV, S. 84 [d. Ausg. Bd. I, Abh. XIV, S. 265 f.].)

52. Als letztes Beispiel betrachte ich endlich die bekannte Aufgabe: alle Flächen zu finden, deren Normalen einem gegebenen Linienkomplexe angehören.[1]) Herr Abel Transon hat gezeigt, daß dieses Problem, welches unmittelbar auf eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

1) Es ist vielleicht nirgendwo ausgesprochen worden, daß diese Aufgabe in gewissem Sinne mit der folgenden äquivalent ist: alle Flächen zu finden, die eine Schar geodätischer Kurven enthalten, deren Tangenten einem gegebenen Linienkomplexe angehören. Sieht man ab von den Developpablen des betreffenden Linienkomplexes, so drückt sich das eben besprochene Problem unmittelbar durch eine partielle Gleichung erster Ordnung aus.

führt, immer eine Vereinfachung zuläßt.[1]) Diese kann auf die folgende einfache Bemerkung des Herrn Darboux (Bulletin, Nov. 1870, S. 351) gestützt werden: Die Parallelflächen einer Integralfläche sind selbst Integralflächen. Der Inbegriff aller Integralflächen gestattet also eine infinitesimale Paralleltransformation, und somit gehört die Gleichung $F=0$ in die Kategorie der Nummer 50.

Setzen wir nun weiter voraus, daß der Linienkomplex eine infinitesimale Bewegung zuläßt, so wird $F=0$ integrabel. Dies ist insbesondere der Fall, wenn der Komplex durch Rotation einer Linienkongruenz um eine feste Achse beschrieben werden kann. Hierher gehört der lineare Komplex, und es ist in der Tat auch bekannt, obgleich es vielleicht nirgend- [205
wo explizite ausgesprochen worden ist, daß alle Schraubenflächen, die einer gewissen Schraubenbewegung entsprechen, der betreffenden Gleichung $F=0$ genügen.[2]) Hierher gehört ferner ein Komplex zweiten Grades, dessen Singularitätenfläche aus einer Kugel und zwei parallelen Tangentenebenen derselben besteht, endlich auch der bekannte Komplex, dessen Gerade ein Tetraeder nach konstantem Doppelverhältnisse schneiden, unter der Voraussetzung, daß zwei Tetraederecken auf dem imaginären Kugelkreise liegen.

Herr Darboux findet mittels seiner obenstehenden Bemerkung, daß es eine andere homographische Partikularisation dieses Komplexes gibt, die von Binet und Chasles betrachtete nämlich, deren zugehörige $F=0$ sich integrieren läßt. Dies ließe sich auch daraus schließen, daß man in diesem Falle, wie Herr Reye bemerkt hat, zweifach unendlich viele Flächen zweiten Grades angeben kann, deren Normalen Komplexlinien sind.

§ 18. Trajektorienkreis. Trajektorienkurve.

53. Auf jeder Kugel eines Kugelkomplexes liegt ein ausgezeichneter Kreis, der gewissermaßen als Repräsentant der benachbarten Kugeln aufzufassen ist. Um den Sinn dieser Behauptung zu erklären, um ferner die Gleichung dieses Kreises zu finden, wird es vorteilhaft sein, sich auf die Liniengeometrie zu stützen.

1) Journal de l'Ecole Polytechnique, 1861.

2) Ein linearer Komplex gestattet zwei infinitesimale und permutable Bewegungen. Infolgedessen besitzt die zugehörige $F=0$ drei infinitesimale und permutable Transformationen in sich selbst. Die entsprechende partielle Differentialgleichung des Linienraumes r gestattet drei solche Transformationen, die lineare Punkttransformationen sind. Hieraus läßt sich zum Beispiel schließen, daß eine Schraubenbewegung zweifach unendlich viele Schraubenflächen gibt, auf denen die betreffenden Schraubenlinien Krümmungslinien sind.

Nach Plücker gibt es einfach unendlich viele lineare Komplexe, die einen gegebenen Komplex $F(X, Y, Z, H) = 0$ in einer Geraden (X_0, Y_0, Z_0, H_0) desselben berühren; dies ist so zu verstehen, daß die unendlich benachbarten Geraden allen diesen Komplexen gemein sind. In unserem Koordinatensysteme ist ein Tangentialkomplex ausgezeichnet, der folgende nämlich:

$$H - H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - \dot{Y}_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0).$$

Derselbe besteht, wenn wir zu den Kugelvorstellungen zurückkehren, aus allen Kugeln, welche die Ebene:

$$-H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0)$$

unter demselben Winkel schneiden, wie die Kugel: [206

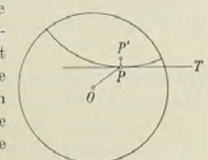
$$H_0^2 = (X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2.$$

Man sieht, daß die beiden letzten Gleichungen, oder der durch dieselben dargestellte Kreis, die benachbarten Kugeln definieren. Insbesondere wird die Kugel (X_0, Y_0, Z_0, H_0) in den Punkten dieses Kreises von einfach unendlich vielen benachbarten Kugeln berührt.

Man kann bemerken, daß unser Kreis zugleich auf dem der Kugel H_0 zugehörigen elementaren Komplexkegel:

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 = \\ = \left[\frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0)\right]^2$$

liegt, und dies ist geometrisch evident, weil dieser Kegel alle Richtungen definiert, nach denen man von dem Punkte (X_0, Y_0, Z_0) aus gehen muß, wenn die zugehörige Kugel die ursprüngliche (X_0, Y_0, Z_0, H_0) berühren soll.



Erinnert man sich nun an die geometrische Bedeutung des Problems: die einem Kugelkomplexe zugehörige D_{12} zu integrieren, so sieht man, daß jede Integralfläche, die eine stationäre Berührung mit der Kugel H_0 hat, diese in einem Punkte jenes Kreises berührt; hierbei ist, wie ich sogleich beweisen werde, die zugehörige Tangente PT (siehe die Figur) des Kreises jedesmal die entsprechende Trajektorienrichtung der Integralfläche.

Die Gerade PO — O ist der Mittelpunkt unserer Kugel — berührt nämlich in O eine auf der Zentralfläche unserer Integralfläche gelegene geodätische Kurve, deren Tangenten die Integralfläche in den Punkten einer Charakteristik (Krümmungslinie) treffen. Bezeichnet nun P' einen von diesen Punkten, der P unendlich nahe liegt, so oskuliert die Ebene OPP' die besprochene geodätische Kurve in O, und steht infolgedessen senkrecht auf der Ebene OPT, die zugleich den elementaren Komplexkegel:

$$(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2=$$
$$=\left[\frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X-X_0)+\frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y-Y_0)+\frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z-Z_0)\right]^2$$

nach der Geraden OP, und die Zentrafläche im Punkte O berührt. Die elementare Linie PP', also die Krümmungsrichtung, schneidet PT [207
orthogonal — PT ist die Trajektorienrichtung. Es soll darum unser Kreis der Trajektorienkreis der Kugel H_0 heißen.

Jede Kugel eines Kugelkomplexes wird in den Punkten eines gewissen Kreises von benachbarten Kugeln des Komplexes berührt. Alle Integralflächen der zugehörigen D_{12}, für welche die Kugel Hauptkugel ist, berühren diese in einem Punkte jenes Kreises, und hierbei ist die entsprechende Tangente des Kreises jedesmal die Trajektorienrichtung. Dieser Kreis, den ich als Trajektorienkreis der Kugel bezeichne, spielt eine bedeutende Rolle in Untersuchungen über Kugelkomplexe.

Alle Kugeln des Raumes, die eine gegebene Kugel eines Komplexes in den Punkten des Trajektorienkreises berühren, bilden eine Kugelkongruenz, die das Bild derjenigen speziellen linearen Linienkongruenz ist, welche allen einer Komplexlinie zugehörigen linearen Tangentialkomplexen gemein ist.

54. Eine sinnliche Vorstellung des Problems, eine gegebene D_{12} zu integrieren, erhält man folgendermaßen. Eine jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q)=0$$

scheidet aus den fünffach unendlich vielen Flächenelementen des Raumes vierfach unendlich viele aus. Die einer D_{12} entsprechenden Flächenelemente verteilen sich insbesondere auf dreifach unendlich viele Scharen, deren jede von einfach unendlich vielen Elementen gebildet ist, die auf einer Kugel des gegebenen Komplexes liegen und sich an den Trajektorienkreis derselben anschließen.

Hier mag die Bemerkung ihren Platz finden, daß man aus der Gleichung eines Kugelkomplexes $H=F(X, Y, Z)$ folgendermaßen die Differentialgleichung zwischen X, Y, Z, dX, dY, dZ finden kann, welche die Trajektorien der zugehörigen D_{12} befriedigen.

Aus den beiden Gleichungen des Trajektorienkreises:

$$U=(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2-H_0^2=0,$$
$$V=H_0+\frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X-X_0)+\frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y-Y_0)+\frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z-Z_0)=0$$

und den entsprechenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial X}dX+\frac{\partial U}{\partial Y}dY+\frac{\partial U}{\partial Z}dZ=0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial X}dX+\frac{\partial V}{\partial Y}dY+\frac{\partial V}{\partial Z}dZ=0$$

eliminiert man X_0, Y_0, Z_0, und es geht die gesuchte Gleichung hervor.

Um endlich die partielle Differentialgleichung D_{12} selbst aus der Gleichung des Kugelkomplexes zu finden, könnte man in folgender Weise vorgehen. Der Trajektorienkreis genügt der Gleichung:

$$(1)\qquad H_0+\frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X-X_0)+\frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y-Y_0)+\frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z-Z_0)=0,$$

ferner gelten für die Flächenelemente unserer Kugel, die sich an diesen [208
Kreis anschließen, welche somit der Gleichung D_{12} genügen, die folgenden Relationen:

$$(2)\quad X-X_0=\frac{H_0 P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}},\quad Y-Y_0=\frac{H_0 Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}},\quad Z-Z_0=\frac{-H_0}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}.$$

Bei Einsetzung dieser Werte in (1) findet man:

$$\sqrt{1+P^2+Q^2}+P\frac{\partial H_0}{\partial X_0}+Q\frac{\partial H_0}{\partial Y_0}-\frac{\partial H_0}{\partial Z_0}=0,$$

und in diese Gleichung muß man statt X_0, Y_0, Z_0 setzen die aus (2) genommenen Werte dieser Größen, ausgedrückt durch X, Y, Z, P und Q.

In den letzten analytischen Entwickelungen dachten wir uns immer H_0 als eine gegebene Funktion von X_0, Y_0, Z_0.

55. Unter den elementaren Komplexkegeln einer D_{12}, deren Scheitel in einer Ebene liegen, gibt es einfach unendlich viele, welche diese Ebene berühren. Der Ort der betreffenden Scheitel ist eine Kurve c, deren Tangente (als Trajektorienrichtung) jedesmal senkrecht steht hinsichtlich der Berührungsrichtung des entsprechenden Komplexkegels (der Richtung der Charakteristik). Die Kurve c ließe sich auch definieren als *geometrischer Ort aller Flächenelemente unserer Ebene, welche der gegebenen D_{12} genügen.*

Man könnte ebenso alle elementaren Komplexkegel, deren Scheitel auf einer beliebigen Kugel liegen, betrachten, und den Ort der Punkte suchen, deren zugehöriger Kegel die Kugel berührt. Ich behaupte, daß auch die Tangente dieser Kurve und die entsprechende Berührungsrichtung des Kegels orthogonal sind.

Zum Beweise ist nur erforderlich, eine Transformation durch reziproke Radien auszuführen, in solcher Weise nämlich, daß die Kugel in eine Ebene, der Kugelkomplex in einen neuen Kugelkomplex übergeht. Die besprochene Kurve nennen wir die Trajektorienkurve unserer Kugel, und es ist klar, daß, wenn die Kugel dem Komplexe angehört, daß dann die Trajektorienkurve in den Trajektorienkreis und eine zweite Kurve zerfällt. Wir können auch sagen, daß die Trajektorienkurve einer Kugel der geometrische Ort für alle Flächenelemente derselben ist, welche der gegebenen D_{12} genügen.

Wenn die Kugel infinitesimal wird, so umhüllen diejenigen Flächenelemente derselben, die sich an die Trajektorienkurve anschließen, den betreffenden elementaren Komplexkegel.

Der Kegel, dessen Spitze im Zentrum einer beliebigen Kugel liegt, und welcher die Trajektorienkurve derselben enthält, geht, wenn die Kugel infinitesimal wird, in den entsprechenden Normalenkegel über, das heißt, in denjenigen Kegel, dessen Erzeugende Normalen aller Integralflächen sind, die durch den betreffenden Punkt gehen.

Denkt man sich beispielsweise, daß man eine D_{12} kennt, deren [209 sämtliche Trajektorienkurven Kreise sind, so läßt sich schließen, daß alle Normalenkegel, und also zugleich alle elementaren Komplexkegel Umdrehungskegel sind. Alsdann hat unsere D_{12} die folgende Form:

$$\sqrt{1+P^2+Q^2}+F_1(X,Y,Z)\,.\,P+F_2(X,Y,Z)\,.\,Q+F_3(X,Y,Z)=0.$$

Über einige partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

55*. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung teilen sich bekanntlich in zwei Gruppen, weil durch jeden Punkt einer Integralfläche entweder nur eine oder auch zwei Charakteristiken gehen können.

Unter den Gleichungen der ersten Gruppe betrachte ich diejenigen, deren Charakteristiken Haupttangentenkurven oder Krümmungslinien sind. Diese Gleichungen haben die folgende Form, vorausgesetzt, daß F eine beliebige Funktion von x, y, z, p, q bezeichnet:

$$(D'_{21}) \qquad r+2Fs+F^2t=0,$$

$$(D'_{22}) \qquad \begin{aligned}[rt-s^2]F^2-[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,F+\\ +[1+p^2+q^2]^2=0.\end{aligned}$$

Die Integration einer D'_{21} kommt geometrisch darauf hinaus: alle Flächen zu finden, deren Haupttangenten des einen Systems nach irgend einem Gesetze durch die Lage des Flächenelementes x, y, z, p, q bestimmt werden. Andererseits ist die geometrische Bedeutung einer D'_{22} die folgende: alle Flächen zu finden, deren Hauptkugeln des einen Systems durch das Flächenelement bestimmt werden.

Ebenso betrachte ich unter den Gleichungen der zweiten Gruppe alle, deren beide Scharen von Charakteristiken Haupttangentenkurven oder Krümmungslinien sind. Die Form derselben ist:

$$(D''_{21}) \qquad rt-s^2=F,$$

$$(D''_{22}) \qquad r-\frac{1+p^2}{pq}s+\frac{1+q^2}{pq}Fs-Ft=0.$$

Eine D''_{21} bestimmt jedesmal alle Flächen, deren Krümmungsmaß von der Lage des Flächenelementes nach einem gegebenen Gesetze abhängt. Endlich kommt die Integration einer D''_{22} darauf hinaus, alle Flächen zu finden, auf denen die Richtungen der Krümmungslinien durch das Flächenelement bestimmt werden.

Diese vier wichtigen Gleichungen, die durch meine Abbildung paarweise einander entsprechen, sind, wie man sieht, Spezialfälle der bekannten Differentialgleichung:

$$(1) \qquad rt-s^2+Ar+Bs+Ct+D=0.$$

Man weiß, daß Gleichungen dieser Art zuweilen ein oder zwei allgemeine erste Integrale besitzen, und es existiert sogar eine allgemeine Methode, [210 um zu entscheiden, ob dies bei einer gegebenen Gleichung der Fall ist. Dagegen hat man sich, soviel ich weiß, nicht damit beschäftigt, die allgemeinste Form der Gleichungen (1) anzugeben, welche ein erstes Integral, beziehungsweise zwei allgemeine erste Integrale zulassen. Es ist mir gelungen, diese Bestimmung für die Gleichungen D'_{21}, D'_{22}, D''_{21}, D''_{22} durchzuführen, und ich möchte sogleich hervorheben, daß die Lösung dieser Fragen eine sehr einfache Form erhält, wenn man die Begriffe Linienkomplex, Linienkongruenz, Kugelkomplex und Kugelkongruenz anwendet.[1])

1) Es ist einleuchtend, daß Gleichungen zweiter Ordnung, deren Charakteristiken des einen Systems Krümmungslinien sind, durch meine Abbildung mit denen äquivalent sind, deren Charakteristiken des einen Systems Haupttangentenkurven sind, und so weiter.

§ 19. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integralflächen nur eine Schar von Charakteristiken enthalten, und zwar solche, welche Haupttangentenkurven oder Krümmungslinien sind.

56. Zunächst bestimme ich die allgemeine Form aller partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integralflächen nur eine Schar von Charakteristiken enthalten, welche zugleich die Haupttangentenkurven des einen Systems der betreffenden Fläche sind.

Bezeichnet:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

die allgemeine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, und ferner, wie gewöhnlich, R, S, T die partiellen Derivierten von F hinsichtlich r, s und t, so ist bekanntlich:

$$R\,dy^2 - S\,dy\,dx + T\,dx^2 = 0$$

die Differentialgleichung der beiden Charakteristiken. Andererseits bestimmt:

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

die Richtungen der beiden Haupttangenten, und also drückt:

(1) $$Rr + Ss + Tt = 0$$

die Forderung aus, daß die beiden Charakteristiken überall hinsichtlich der entsprechenden Haupttangenten harmonische Lage haben sollen. Es sagt ferner:

(2) $$4RT - S^2 = 0$$

aus, daß die beiden Charakteristiken immer zusammenfallen. Gilt also sowohl (1) als (2), so fallen die beiden Richtungen der Charakteristiken überall mit der einen Haupttangente zusammen, und das war unsere ursprüngliche Forderung.

Die Gleichung (1) zeigt, daß F die Form: [211

$$F(x, y, z, p, q, r:s, t:s) = 0$$

besitzt, und bezeichnen wir hier der Kürze wegen $r:s$ und $t:s$ durch ϱ und τ, so geht (2) in die folgende über:

(3) $$4\frac{\partial F}{\partial \varrho}\frac{\partial F}{\partial \tau} = \left(\varrho\frac{\partial F}{\partial \varrho} + \tau\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)^2,$$

eine Gleichung, die sich nach den allgemeinen Methoden integrieren läßt.

Man findet so als allgemeine Form der Gleichungen D'_{21}:

$$r + 2Ns + N^2 t = 0\,[1]),$$

und hierbei genügt die Richtung der Charakteristik der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = N(x, y, z, p, q).$$

Aus dem Vorstehenden folgt, daß eine jede D'_{21} der analytische Ausdruck des folgenden Problems ist: die allgemeinste Fläche zu finden, deren Haupttangenten des einen Systems nach einem gegebenen Gesetze durch die Lage des entsprechenden Flächenelements x, y, z, p, q bestimmt werden.[2])

57. Es ist bekannt, daß, wenn eine Differentialgleichung:

(1) $$ar + bs + ct + d = 0$$

ein allgemeines erstes Integral:

(2) $$u - f(v) = 0$$

besitzt, auf einer Fläche, welche (2), und also auch (1) genügt, die Charakteristiken hinsichtlich (2) zugleich Charakteristiken des einen Systems hinsichtlich (1) sind. Es folgt hieraus (§ 14), daß, wenn eine D'_{21} ein erstes Integral $u = 0$ zugibt, dasselbe eine D_{11} sein muß, und hierbei muß man sich erinnern, daß es zwei distinkte Klassen D_{11} gibt.

1) Das singuläre Integral der Gleichung (3) gibt die bekannte Differentialgleichung:

$$rt - s^2 = 0.$$

Diese besitzt bekanntlich ein allgemeines erstes Integral.

2) Schon früher habe ich gesagt, daß es vorteilhaft sein wird, die erweiterten geometrischen Begriffe der modernen Geometrie bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen anzuwenden. Als weiteres Beispiel deute ich im folgenden eine Theorie an, die ich eben (während der Korrektur) finde, und welche mir wichtig scheint.

Zunächst bemerke ich, daß eine jede Gleichung:

(I) $$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0$$

bei passender Wahl des Raumelements auf die lineare Form: $r + As + Bt + C = 0$ gebracht werden kann. Besitzt nun die letzte Gleichung nur eine Schar Charakteristiken, so ist sie der analytische Ausdruck eines Problems, welches sich ganz in derselben Weise auf vierfach unendlich viele Raumkurven bezieht, wie die Gleichung: $r + 2Ns + N^2 t = 0$ auf alle Raumgeraden. Hieraus folgt, wenn ich nicht irre, daß jede Gleichung (I) mit intermediärem Integrale und einer Schar Charakteristiken sich in dem von Boole angegebenen Sinne auf einen Flächenkomplex bezieht.

Wir wissen, daß eine D'_{21}, oder die äquivalente Gleichung [212
$dy : dx = N$ jedem Flächenelemente eine Richtung zuordnet. Betrachten wir nun die Elemente einer Ebene, so bildet die kontinuierliche Aufeinanderfolge dieser Richtungen eine Kurvenschar c, die in diesem Paragraphen eine wichtige Rolle spielen wird.

Man denke sich, daß unserer D'_{21} als partikuläres Integral eine D_{11} entspricht, und zwar eine, deren Charakteristiken die Geraden einer Kongruenz sind. In jeder Ebene E des Raumes liegt eine oder [liegen] einige Gerade l dieser Kongruenz, und offenbar müssen dieselben in der dieser Ebene zugehörigen Kurvenschar c enthalten sein. Unter den Integralflächen unserer D_{11} gibt es nämlich unbegrenzt viele, die l enthalten und dabei die Ebene E in einem beliebigen gegebenen Punkte p dieser Geraden berühren. Auf allen diesen Flächen ist nun l eine gemeinsame Haupttangente, und also ist die Richtung, welche unsere D'_{21} dem Flächenelemente (pE) zuordnet, mit dem betreffenden Linienelemente von l identisch; hiermit ist meine Behauptung erwiesen.

Man setze andererseits voraus, daß unsere D'_{21} als partikuläres Integral eine D_{11}, welche einem Linienkomplexe entspricht, zugibt. In einer beliebigen Ebene liegen einfach unendlich viele Komplexlinien, welche eine Kurve k umhüllen. Es ist einleuchtend, daß k eine von den Kurven c dieser Ebene sein muß.

Einfach unendlich viele Linienkomplexe bestimmen in jeder Ebene des Raumes eine Schar Komplexkurven k. Man wähle, was immer möglich ist, die Funktion N in solcher Weise, daß diese Kurven k eben die zugeordneten Kurven c sind. Alsdann erhält man eine D'_{21}, die ein erstes Integral mit [einer] arbiträren Konstanten besitzt.

Es ist andererseits leicht, zu erkennen, daß eine D'_{21} höchstens einfach unendlich viele erste Integrale dieser Art besitzen kann. Man betrachte nämlich in einer beliebigen Ebene unter den einfach unendlich vielen Kurven c eine bestimmte, ferner eine Tangente g derselben, und endlich eine zweite Ebene E', welche ebenfalls die Gerade g enthält. In E' liegen einfach unendlich viele Kurven c', und unter denselben wähle man eine, welche g berührt. In dieser Weise kann man nun unbegrenzt weiter gehen, und wir finden somit, daß eine gewählte Kurve c zur Konstruktion des betreffenden Linienkomplexes hinreicht, vorausgesetzt natürlicherweise, daß diese Konstruktion möglich ist. Meine Behauptung ist also erwiesen.

Soll eine Gleichung von der Form:

$$r + 2Ns + N^2 t = 0$$

ein erstes Integral besitzen, welches keine lineare partielle Differentialgleichung ist, sich also nicht auf eine Linienkongruenz bezieht, so kann dasselbe zwar eine arbiträre Konstante, dagegen keine arbiträre Funktion enthalten. Es ergibt sich dieses Integral durch die Inte- [213
gration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen zwei Variablen.

58. Wenn die Kurven c krumme Linien sind, so können nur erste Integrale der eben besprochenen Art auftreten. Sind dagegen alle c gerade Linien, so existiert zuweilen ein allgemeines erstes Integral. Dies ist der Fall, wenn die allen Ebenen zugeordneten Geradenscharen einen Komplex, und nicht den Inbegriff aller Geraden des Raumes, bilden. Alsdann ist jede in dem betreffenden Komplexe enthaltene Linienfläche eine Integralfläche, und demzufolge entspricht jeder, diesem Komplexe angehörigen Kongruenz eine D_{11}, die ein erstes Integral darstellt.[1])

Soll die Gleichung: $r + 2Ns + N^2 t = 0$ ein allgemeines erstes Integral besitzen, so muß sich die gewöhnliche Differentialgleichung zwischen x und y:

$$\frac{dy}{dx} = N(x, y, px + qy + k, p, q)$$

in der Form:

$$y = \pi x + f(\pi)$$

integrieren lassen, und außerdem muß zwischen den vier Linienkoordinaten der Geraden:

$$y = \pi x + f(\pi), \quad z = px + qy + k$$

eine Relation stattfinden. Der hierdurch definierte Linienkomplex bestimmt nach dem Obenstehenden sowohl ein allgemeines erstes Integral, wie das allgemeine zweite Integral mit zwei arbiträren Funktionen. In diesem Falle

1) Man sagt gewöhnlich, glaube ich, daß, wenn die Integralflächen einer Gleichung:

$$(1) \qquad A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0$$

nur eine Schar Charakteristiken enthalten, höchstens ein allgemeines erstes Integral existiert. Dieses ist nicht korrekt. Beispielsweise besitzt die einem Linienkomplexe zugehörige D'_{21} unbegrenzt viele allgemeine erste Integrale, die wesentlich verschieden sind. Dasselbe gilt von einer jeden Gleichung: $r + 2Ns + N^2 t + U = 0$, die einem Kurvenkomplexe entspricht (§ 3, Nr. 8, 9), wie auch von jeder Gleichung (1), die in dem von Boole angegebenen Sinne (Crelle-Borchardts Journal, Bd. 61) einem Flächenkomplexe entspricht.

existiert nach § 3, Nr. 10 zugleich ein singuläres erstes Integral, die unserem Linienkomplexe zugehörige D_{11}.

Wenn endlich die Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = N(x, y, px + qy + k, p, q)$$

eine Anzahl partikulärer Lösungen von der Form $y = \alpha x + \beta$ zugibt, und ferner zwei Relationen stattfinden zwischen den Linienkoordinaten der Geraden:

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = px + qy + k, \qquad [214$$

so besitzt die gegebene D'_{21} als partikuläres Integral die der hervorgehenden Linienkongruenz zugehörige D_{11}.

59. Alles, was wir über Gleichungen D'_{21} gefunden haben, überträgt sich nun unmittelbar auf Differentialgleichungen D'_{22}. Wir beschränken uns auf das folgende:

Eine jede Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integralflächen nur eine Schar Charakteristiken enthalten und zwar solche, welche Krümmungslinien sind, läßt sich als analytischer Ausdruck des folgenden Problems auffassen: die allgemeinste Fläche zu finden, deren Hauptkrümmungsradius des einen Systems von der Lage des Flächenelements nach einem gegebenen Gesetze abhängt.[1])

Wir schließen hieraus, daß die Gleichung der Hauptkrümmungsradien:

$$(rt-s^2)R^2-[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}\,.\,R+(1+p^2+q^2)^2=0,$$

vorausgesetzt, daß man in derselben R als eine beliebige gegebene Funktion von x, y, z, p, q auffaßt, eben die allgemeine Form einer D'_{22} ist.

Wenn eine D'_{22} dreifach unendlich viele Kugeln als partikuläre Integrale besitzt, dann und nur dann existiert ein allgemeines erstes Integral. Dasselbe entspricht den in dem besprochenen Kugelkomplexe enthaltenen Kugelkongruenzen. Die dem Komplexe zugehörige D_{12} ist ein singuläres erstes Integral.

---

1) Die Mongesche Differentialgleichung zur Bestimmung aller Flächen, auf denen nur eine Schar Krümmungslinien liegt, ist eine ausgezeichnete D'_{22}. Diese entspricht der in der letzten Nummer gefundenen ausgezeichneten D'_{21}: $rt - s^2 = 0$. Wir wissen ja, daß sich Developpable des Linienraumes im Kugelraume R als Regelflächen, die den imaginären Kreis enthalten, abbilden.

Endlich möchte ich ausdrücklich aussprechen — was freilich in dem Obenstehenden implizite liegt —, daß jeder Linien- oder Kugelkomplex eine D'_{21} oder D'_{22} bestimmt, welche ein allgemeines erstes Integral besitzt.

§ 20. Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integralflächen zwei Scharen von Charakteristiken und zwar eben die Krümmungslinien enthalten.

60. Bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung lege ich im folgenden eine einfache geometrische Auffassung der allgemeinen ersten Integrale: $u - f(v) = 0$ zu Grunde. Vielleicht wird es nicht unnötig sein, einige Worte hierüber zu sagen.

Man fasse $u = 0$ und $v = 0$ als die Gleichungen zweier Flächen [215 auf und betrachte dabei die beiden Flächenscharen:

$$u = \text{Const.}, \quad v = \text{Const.},$$

wie auch die zweifach unendlich vielen Durchschnittskurven je zweier Flächen, die verschiedenen Scharen angehören. Einfach unendlich viele solcher Kurven erzeugen bekanntlich immer eine Fläche, deren Gleichung die Form: $u - f(v) = 0$ besitzt, und andererseits entspricht jeder Fläche mit dieser Gleichungsform eine solche Erzeugung.

Bezeichnen nun u und v Funktionen von x, y, z, p, q, so gestattet die Gleichung: $u - f(v) = 0$ eine ähnliche Interpretation. Hierbei betrachte ich eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung als die analytische Definition von vierfach unendlich vielen Flächenelementen, unter denen diejenigen, die durch einen Punkt gehen, den entsprechenden elementaren Komplexkegel umhüllen. Zwei solche Gleichungen bestimmen dreifach unendlich viele Flächenelemente, diejenigen nämlich, die beiden Gleichungen genügen.

Dieses vorausgesetzt, betrachte man die beiden Scharen von Differentialgleichungen:

$$u = u_n, \quad v = v_n$$

und ordne dieselben auf alle möglichen Weisen in Paare $(u_n v_n)$ zusammen. Jedes Paar $(u_n v_n)$ — und es gibt zweifach unendlich viele solche — bestimmt dreifach unendlich viele Flächenelemente. Wählt man nun nach einem arbiträren Gesetze einfach unendlich viele Paare $(u_n v_n)$, so bestimmt der Inbegriff der zugehörigen Flächenelemente eine partielle Differentialgleichung [erster Ordnung], die sich in der Form: $u - f(v) = 0$ schreiben läßt.

Hierbei sind zwei Fälle möglich. Entweder, und das ist der allgemeine Fall, durchziehen die gemeinsamen Elemente der beiden Gleichungen $u = u_n$, $v = v_n$ den ganzen Raum, und alsdann ordnet das Paar $(u_n v_n)$

jedem Punkte des Raumes ein oder einige Elemente zu; oder dieselben haben zweifach unendlich viele elementare Komplexkegel gemein, und dann definieren die gemeinsamen Elemente in gewissem Sinne eine Fläche, den Ort nämlich aller Spitzen der besprochenen Kegel.

61. Bei Herrn *du Bois-Reymond*[1]) finde ich angegeben, daß die allgemeinste partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren beide, und zwar distinkte, Scharen von Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen sind, die folgende ist:

$$(1)\qquad r-\left(\frac{1+p^2}{pq}\right)s+\left(\frac{1+q^2}{pq}s-t\right)F=0.$$

Man überzeugt sich leicht, daß sich diese Gleichung auch folgender- [216 maßen schreiben läßt:

$$(2)\qquad \{pqt-(1+q^2)s\}f^2+\{(1+p^2)t-(1+q^2)r\}f+\{(1+p^2)s-pqr\}=0,$$

vorausgesetzt, daß f wie F eine willkürliche Funktion von x, y, z, p, q bezeichnet. Wenn man aber in (2) statt f setzt $dx:dy$, so erhält man eben die Differentialgleichung der Krümmungslinien einer Fläche, und also können wir sagen:

Eine jede D_{22}'' läßt sich als analytischer Ausdruck des folgenden Problems auffassen: die allgemeinste Fläche zu finden, deren Krümmungsrichtungen nach irgend einem gegebenen Gesetze durch die Lage des entsprechenden Flächenelements bestimmt sind.

Man bemerke wohl, daß eine jede D_{22}'' in der eben angegebenen Bedeutung jedem Flächenelemente zwei orthogonale Richtungen zuordnet. Betrachtet man nun alle Elemente einer Fläche, so bildet die kontinuierliche Aufeinanderfolge der zugeordneten Richtungen zwei orthogonale Kurvenscharen, die ich mit den Symbolen s und σ bezeichnen werde. Eine Integralfläche unserer D_{22}'' läßt sich dadurch charakterisieren, daß die zugeordneten Kurven s und σ eben Krümmungslinien der Fläche sind. Im folgenden *werden die einer beliebigen Kugel zugehörigen Kurven s und σ eine wichtige Rolle spielen.*

62. Aus der Form der Differentialgleichungen D_{22}'' (§ 19, Nr. 57) folgt, daß, *wenn eine solche Gleichung ein partikuläres erstes Integral besitzt, dasselbe eine D_{12} sein muß*, und hierbei hat man sich zu erinnern, daß es zwei distinkte Klassen D_{12} gibt.

Setzen wir zunächst voraus, daß unser erstes Integral D_{12} einer *Kugelkongruenz* entspricht. Eine jede Kugel dieser Kongruenz wird

1) Partielle Differentialgleichungen, S. 130.

von den unendlich nahen Kugeln derselben Kongruenz nach einfach unendlich vielen Kreisen geschnitten, und offenbar bilden diese Schnittlinien in Verbindung mit den zugehörigen Orthogonalkurven das unserer Kugel durch die gegebene D_{22}'' zugeordnete Orthogonalsystem (s, σ).

Es ist leicht, zu erkennen, daß es D_{22}'' gibt, welche einfach unendlich viele partikuläre Integrale von dieser Art besitzen. Man denke sich nämlich einfach unendlich viele Kugelkongruenzen und auf jeder Kugel einer solchen Kongruenz die besprochenen Kreise mit den zugehörigen Orthogonalkurven. Es werden in dieser Weise jedem Flächenelemente des Raumes zwei orthogonale Richtungen zugeordnet, und es ist klar, daß die D_{22}'', welche eben diese Zuordnung bestimmt, durch die gegebenen einfach unendlich vielen D_{12} befriedigt wird.

Wir setzen nun die Existenz eines allgemeinen ersten Integrals dieser Art:

$$u-f(v)=0$$

voraus, wobei wir der Bequemlichkeit wegen *Linien*vorstellungen [217 anwenden werden. Es bezeichnet alsdann jede der Gleichungen:

$$u=\text{Const.},\quad v=\text{Const.}$$

einfach unendlich viele lineare Differentialgleichungen D_{11}, deren zugehörige Linienkongruenzen jedesmal einen Komplex bilden; und zwar werden wir erstens den Fall erledigen, daß die beiden Kongruenzscharen *demselben* Komplexe angehören.

Ein in dem allgemeinen Integrale enthaltenes partikuläres Integral:

$$u-f_0(v)=0$$

ordnet jedem Werte von u einen entsprechenden Wert von v zu: (u_0v_0), $(u_1v_1), \ldots, (u_nv_n)$. Nun repräsentiert sowohl $u=u_n$ als $v=v_n$ eine dem Komplexe angehörige Kongruenz[1]), und also stellt die Gruppe (u_nv_n) eine in dem Komplexe enthaltene Linienfläche dar: demzufolge ist auch $u-f_0(v)=0$ eine lineare D_{11}, deren zugehörige Linienkongruenz unserem Komplexe angehört. Die Integralflächen der Differentialgleichungen $u-f(v)=0$ sind somit Linienflächen des Komplexes. Es ist aber nach § 19, Nr. 58 die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche diese Flächen befriedigen, eine D_{21}' und nicht eine D_{21}''.

1) Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt vierfach unendlich viele Flächenelemente. Einer linearen D_{11} entsprechen insbesondere Elemente, die sich in zweifach unendlich viele Gruppen verteilen; die Elemente jeder Gruppe schließen sich an eine Gerade der zugehörigen Linienkongruenz an.

Seien zweitens die Komplexe, in denen die zu $u = \text{Const.}$, $v = \text{Const.}$ gehörigen Linienkongruenzen liegen, verschieden. Es enthalten alsdann im allgemeinen zwei Kongruenzen u_p und v_q nur eine endliche Anzahl gemeinsame Gerade, und also durchziehen die gemeinsamen Elemente der Differentialgleichungen u_p und v_q den ganzen Raum. Wir können somit sagen, daß die Gruppe (u_p, v_q) jedem Punkte ein Flächenelement zuordnet. Man erhält zweifach unendlich viele solcher Zuordnungen, und wenn man unter denselben nach einem beliebigen Gesetze einfach unendlich viele auswählt, so werden jedem Punkte einfach unendlich viele Elemente zugeordnet. Es soll die hierdurch definierte partielle Differentialgleichung erster Ordnung eine lineare D_{11} sein. Da nun der Inbegriff dieser D_{11} ein allgemeines erstes Integral bilden soll, so muß jede Zuordnung zu unbegrenzt vielen D_{11} gehören können, und demzufolge muß dieselbe durch einen linearen Komplex vermittelt sein; dieser Linienkomplex ist nämlich der einzige, der die Eigenschaft besitzt, daß die durch einen Punkt gehenden Geraden ein ebenes Büschel bilden.[1]) Den zweifach unendlich [218
vielen Zuordnungen entsprechen somit zweifach unendlich viele lineare Komplexe, und zur Existenz eines allgemeinen ersten Integrals ist notwendig, daß jedesmal einfach unendlich viele dieser Komplexe, die beliebig gewählt sind, eine Kongruenz gemein haben, daß ferner diese Kongruenz mit der Komplexschar variiert. Dieses ist aber absurd.

Eine D''_{21} gestattet niemals als allgemeines erstes Integral lineare Differentialgleichungen D_{11}.

Eine D''_{22} gestattet niemals als allgemeines erstes Integral Differentialgleichungen D_{12}, welche Kugelkongruenzen entsprechen.

63. Setzen wir nun voraus, daß eine gegebene D''_{22} als partikuläres erstes Integral eine D_{12} zugibt, die einem Kugelkomplexe entspricht, und betrachten wir eine Kugel dieses Komplexes. Es ist nach § 18, Nr. 53 klar, daß sich der entsprechende Trajektorienkreis unter den dieser Kugel durch die gegebene D''_{22} zugeordneten Kurven

1) Herrn Klein verdanke ich die Bemerkung, daß es spezielle Linienkomplexe gibt, deren Komplexkegel ebene Strahlenbüschel sind. So ist es zum Beispiel der Fall bei den Komplexen, die aus dem Inbegriffe aller Tangenten einer developpablen Fläche bestehen. Man erkennt leicht, daß es außer diesen und den linearen Komplexen keine Komplexe gibt, welche die geforderte Eigenschaft besitzen. Daß die Bemerkung von Herrn Klein die Resultate des Textes nicht beeinflußt, liegt daran, daß man keine zweifach unendliche Flächenschar finden kann, welche die Eigenschaft besitzt, daß jedesmal ∞^1 Flächen der Schar ∞^2 gemeinsame Tangenten haben.

(s, σ) befindet. Existieren einfach unendlich viele Integrale dieser Art, so muß, weil einfach unendlich viele Kugelkomplexe alle Kugeln des Raumes umfassen, das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonalsystem (s, σ) einen, oder einige Kreise enthalten.

Soll endlich ein allgemeines erstes Integral dieser Art existieren, so wären a priori zwei Fälle denkbar. Unter den einer Kugel zugeordneten Kurven (s, σ) befinden sich entweder nur eine endliche Anzahl, oder auch unendlich viele Kreise. Ich werde beweisen, daß der erste Fall unmöglich ist.

Setzen wir denselben voraus. Bezeichnet alsdann $H = F(X, Y, Z)$ einen Kugelkomplex, dessen zugehörige D_{12} ein erstes Integral ist, so liegt der Trajektorienkreis einer Kugel dieses Komplexes in der Ebene (§ 18, Nr. 53):

$$-H_0 = \frac{\partial H_0}{\partial X_0}(X - X_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Y_0}(Y - Y_0) + \frac{\partial H_0}{\partial Z_0}(Z - Z_0).$$

Andererseits läßt sich die Gleichung dieser Ebene auch folgendermaßen schreiben:

$$-H_0 = F_1(X - X_0) + F_2(Y - Y_0) + F_3(Z - Z_0),$$

und hierbei bezeichnen F_1, F_2, F_3 Funktionen von X_0, Y_0, Z_0, H_0, die nach dem Obenstehenden durch die gegebene D''_{22} bestimmt sind. Es gelten also die Gleichungen:

$$\frac{\partial H_0}{\partial X_0} = F_1, \quad \frac{\partial H_0}{\partial Y_0} = F_2, \quad \frac{\partial H_0}{\partial Z_0} = F_3,$$

die — vorausgesetzt, daß sie nicht kontradiktorisch sind, — ein Inte- [219
gral mit arbiträrer Konstante gestatten.

Wenn eine D''_{22} ein allgemeines erstes Integral gestatten soll, so muß das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonalsystem (s, σ) aus einer Schar von Kreisen und den zugehörigen Orthogonalkurven bestehen.

Soll eine D''_{22} zwei[1]) allgemeine erste Integrale besitzen, so muß das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonalsystem (s, σ) aus zwei Kreisscharen bestehen. Es gehen

1) Man sagt oft, daß, wenn eine Gleichung:

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0$$

ein allgemeines erstes Integral $u - f(v) = 0$ besitzt, noch ein solches Integral existiert. Und doch ist es wohl bekannt, daß, wenn die Gleichung:

$$R\,dy^2 - S\,dy\,dx + T\,dx^2 = 0$$

in zwei lineare Gleichungen zerfällt, jene Behauptung im allgemeinen falsch ist, daß ferner in dem allgemeinen Falle die sogenannten beiden Integrale ein irreduktibles Integral bilden.

alsdann, nach einer Bemerkung des Herrn **Bonnet**, die Kreise jeder Schar durch zwei feste Punkte.

Es ist in jedem gegebenen Falle leicht zu verifizieren, ob diese Bedingungen erfüllt sind. Ich muß hier zufügen, daß ich die Frage, ob die vorstehenden notwendigen Forderungen auch hinreichend sind, nicht entschieden habe. Da es mir aber, wie ich später zeigen werde, gelungen ist, die allgemeinste D_{22}'' anzugeben, welche ein, bezüglich zwei allgemeine erste Integrale besitzt, so scheint mir diese Frage von untergeordneter Bedeutung.

§ 21. Über einige Gleichungen D_{21}'' und D_{22}''.

64. Um nicht im folgenden die Darstellung abbrechen zu müssen, schicke ich in dieser Nummer einige Entwickelungen voraus, auf welche ich mich später mehrmals stützen werde. Es ist überhaupt der Zweck dieses Paragraphen, einerseits einige bekannte Theorien in Verbindung mit meinen Komplextheorien zu bringen, andererseits das Verständnis der wichtigen Ergebnisse des nächsten Paragraphen vorzubereiten.

Die Gleichung:

$$F(X, Y, Z, H, \lambda) = 0$$

definiert, wenn λ ein Parameter ist, X, Y, Z, H Linien- oder Kugelkoordinaten bezeichnen, einfach unendlich viele Komplexe, die linear sein sollen. Denselben entspricht in gewöhnlicher Bedeutung des Wortes ein [220 Enveloppenkomplex A, dessen Gleichung man findet, wenn man zwischen $F = 0$ und $dF : d\lambda = 0$ die Größe λ eliminiert.

Um eine geometrische Vorstellung von der dem Komplexe A zugehörigen D_{11} oder D_{12} zu erhalten, kann man die folgenden Betrachtungen machen. Ein Linienkomplex ordnet im allgemeinen jedem Punkte des Raumes einfach unendlich viele Flächenelemente zu, die den betreffenden Komplexkegel umhüllen. Eine Ausnahme macht nur der lineare Komplex, dessen Gerade bekanntlich dreifach unendlich viele ebene Büschel bilden. Dagegen ordnet der Inbegriff von einfach unendlich vielen linearen Komplexen jedem Punkte einfach unendlich viele Elemente zu, und zwar umhüllen dieselben, wie eine einfache Überlegung zeigen wird, jedesmal den Komplexkegel des Enveloppenkomplexes.

Zwei konsekutive lineare Komplexe schneiden einander nämlich nach einer linearen Kongruenz, und demzufolge läßt sich der Enveloppenkomplex A auffassen als gebildet von einer Schar Kongruenzen, aus denen immer zwei konsekutive demselben Komplexe angehören. Betrachtet man nun insbesondere unter den Geraden von A solche, die durch einen Punkt

gehen, so ist es klar, daß zwei unendlich nahe unter denselben jedesmal einem der gegebenen linearen Komplexe angehören, und also ist meine Behauptung erwiesen.

Andererseits wissen wir, daß die vierfach unendlich vielen Flächenelemente einer D_{12} sich an die dreifach unendlich vielen Trajektorienkreise (§ 18, Nr. 54) anschließen. Nun schneiden die Kugeln eines linearen Komplexes die zugehörige Fundamentalkugel S (§ 10, Nr. 30) unter konstantem Winkel, und zwar jedesmal nach den Trajektorienkreisen. Es gibt alsdann nur dreifach unendlich viele ausgezeichnete Flächenelemente, die sich in zweifach unendlich viele elementare Umdrehungskegel von derselben Winkelöffnung zusammenfassen lassen, und hierbei liegen die Kegelspitzen auf S, ferner sind die Kegelachsen Radien dieser Kugel. Betrachten wir nun einfach unendlich viele lineare Kugelkomplexe, so liegen also auf jeder der zugehörigen Fundamentalkugeln die Spitzen von zweifach unendlich vielen Umdrehungskegeln, und der Inbegriff aller dieser Kegel gibt die geometrische Definition von der dem Enveloppenkomplexe zugehörigen D_{12}.

Es ist auch bemerkenswert, daß eine jede solche D_{12} der analytische Ausdruck des folgenden Problems ist: alle Flächen zu finden, die eine Schar Kugeln unter gegebenen Winkeln schneiden; hierbei sind die Schnittkurven Krümmungslinien des einen Systems.

Die elementaren Kegel unserer D_{12} sind im allgemeinen, wie gesagt, Umdrehungskegel, und also besitzen diese Gleichungen die folgende Form:

$$F_1\sqrt{1 + p^2 + q^2} + F_2 p + F_3 q + F_4 = 0;$$

hier bezeichnen alle F Funktionen von x, y, z, die indessen gewisse [221 Relationen befriedigen müssen. Wir werden später beweisen (§ 22, Nr. 69), daß, wenn eine D_{22}'' ein allgemeines erstes Integral besitzt, die betreffenden Differentialgleichungen erster Ordnung zu der hier besprochenen Kategorie gehören.

Wir setzen nun voraus, daß die gegebenen einfach unendlich vielen linearen Komplexe C mit dem linearen Komplexe $H = 0$ in Involution liegen. Jeder C wird alsdann bekanntlich von den Orthogonalkugeln einer gegebenen Kugel gebildet, und also degenerieren alle elementaren Umdrehungskegel in Ebenenbüschel. Die dem Enveloppenkomplexe zugehörige D_{12} ist somit eine lineare partielle Differentialgleichung, deren zweifach unendlich viele Charakteristiken die gegebenen Fundamentalkugeln orthogonal schneiden. Eine solche Gleichung entspricht dem von Herrn Bonnet gelösten Probleme: alle Flächen zu finden, welche einfach unendlich viele gegebene Kugeln orthogonal schneiden.[1])

65. Wir fordern, daß in der Gleichung einer D''_{22}:

$$(1)\quad [pqt-(1+q^2)s]f^2+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]f+[(1+p^2)s-pqr]=0$$

f nur die Variabeln x und y enthält, und suchen dabei die allgemeinste Form dieser Größe, für welche unsere D''_{22} zwei allgemeine erste Integrale zugibt.

Die Differentialgleichung der Charakteristiken des einen Systems:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

besitzt ein Integral mit einer arbiträren Konstanten $\varphi(x,y)=$ Const., welches eine Schar von Zylindern darstellt, und nach § 20, Nr. 61 ist es klar, daß die Gleichung (1) alle Flächen bestimmt, deren Krümmungs- [222 linien des einen Systems auf diesen Zylindern liegen.

Das einer beliebigen Kugel (§ 20, Nr. 61) zugeordnete Orthogonalsystem (s,σ) wird nun offenbar von den Durchschnittskurven mit den Zylindern $\varphi=$ Const. in Verbindung mit den zugehörigen Orthogonalkurven gebildet. Es soll aber nach § 20, Nr. 63 das System (s,σ) aus zwei Kreisscharen bestehen. Unsere Zylinder müssen also eine jede Kugel und also zugleich eine jede Ebene nach Kreisen schneiden, und demzufolge sind sie selbst Ebenen. Ferner sollen die Kreise der beiden Scharen s und σ jedesmal durch zwei feste Punkte gehen, und also enthalten die Ebenen $\varphi=$ Const. eine gemeinsame Achse. Wir werden somit auf das von

1) Schließt man diejenigen linearen partiellen Differentialgleichungen aus, deren Charakteristiken Gerade von der Länge Null sind, so kann man behaupten, daß die im Texte besprochenen Gleichungen die einzigen linearen D_{12} sind.

Betrachten wir nämlich zweifach unendlich viele Kurven c, die nach einem arbiträren Gesetze zu Flächen zusammengefaßt, immer Krümmungslinien derselben sind, und ferner das simultane System:

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z},$$

dessen Integrale eben die Kurven c bestimmen. Es läßt sich beweisen, daß $Xdx+Ydy+Zdz=0$ der Integrabilitätsbedingung genügt, daß also die Kurven c eine Flächenschar S orthogonal schneiden. Nun bilden einfach unendlich viele c immer eine Fläche, die eine jede S orthogonal schneidet und zwar nach einer gemeinsamen Krümmungslinie dieser Flächen. Hieraus folgt, daß eine jede auf S gelegene Kurve eine Krümmungslinie derselben ist, daß also alle S Kugeln sind.

Den linearen D_{12} entspricht eine ausgezeichnete Klasse D_{11}. Jede solche Gleichung besitzt ∞^3 geradlinige Integralflächen, unter denen ∞^2 einem linearen Komplexe angehören.

Joachimsthal gelöste Problem geführt: alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien des einen Systems in einem Ebenenbüschel liegen.

Joachimsthal hat gezeigt, daß in diesem Falle zwei allgemeine erste Integrale existieren, und wir werden finden, daß dieselben zu der in der letzten Nummer besprochenen Kategorie gehören. Man ordne jeder Ebene des Büschels $\varphi=$ Const. nach einem beliebigen Gesetze einen Winkel zu und betrachte alle linearen Kugelkomplexe, deren Kugeln jedesmal eine Ebene φ unter dem betreffenden Winkel schneiden. Dem Enveloppenkomplexe entspricht eine D_{12}, die nach § 21, Nr. 64 ein erstes Integral ist. Man betrachte andererseits einfach unendlich viele Kugeln, deren Mittelpunkte auf der Achse des Ebenenbüschels liegen. Es ist geometrisch evident, daß die Kurven, welche diese Kugeln orthogonal schneiden, in den Ebenen φ liegen, und also ist die lineare D_{12}, deren Charakteristiken (§ 21, Nr. 64 Schluß) diese Kurven sind, ein erstes Integral.

Es ist leicht zu sehen, daß jedes der beiden allgemeinen ersten Integrale in einer gewissen Beziehung zu zweifach unendlich vielen linearen Komplexen steht. Wenn $L_1+\lambda L_2=0$ alle Ebenen des Büschels φ darstellt, so definiert die Gleichung:

$$L_1+\lambda L_2+\mu H=0,$$

in welcher λ und μ Parameter bezeichnen, die zweifach unendlich vielen Komplexe, deren Kugeln jedesmal eine Ebene φ unter konstantem Winkel schneiden, deren Punktkugeln also in dieser Ebene liegen. Alle diese Komplexe bilden eine dreigliedrige Gruppe[1]) und enthalten also einfach unendlich viele gemeinsame Kugeln, die Punktkugeln nämlich der Achse des Ebenenbüschels:

$$L_1=0,\quad L_2=0,\quad H=0.$$

Andererseits gibt es zweifach unendlich viele Kugeln, deren Mittel- [223 punkte auf der Achse $L_1=0$, $L_2=0$ liegen. Die zugehörigen Orthogonalkugeln bilden zweifach unendlich viele lineare Komplexe, welche die Ebenen φ als gemeinsame Kugeln enthalten. Auch hier treffen wir somit eine dreigliedrige Gruppe.

Die Beziehung zwischen den beiden Gruppen wird vielleicht noch anschaulicher, wenn wir zum Linienraume r übergehen, und uns dabei erinnern, daß einer Geraden in R, aufgefaßt einmal als Punktgebilde, ein andermal als Ebenengebilde, im Raume r die beiden Geradenscharen eines

1) Plücker, Neue Geometrie (1868—69), S. 112f.

Hyperboloids entsprechen. Unsere beiden dreigliedrigen Gruppen linearer Komplexe stehen also in der Beziehung, daß die gemeinsamen Geraden der einen Gruppe eine Fläche zweiten Grades bilden, deren Erzeugende des zweiten Systems allen Komplexen der anderen Gruppe angehören. Solche Gruppen werde ich als konjugierte bezeichnen.[1])

Die Joachimsthalsche Theorie gibt somit die folgenden für die Geometrie der Komplexe bemerkenswerten Resultate:

Es seien zwei konjugierte dreigliedrige Gruppen linearer Komplexe gegeben. Man wähle in jeder Gruppe einfach unendlich viele und suche die beiden zugehörigen Enveloppenkomplexe; denselben entsprechen zwei partielle Differentialgleichungen D_{11} (oder D_{12}), welche immer einfach unendlich viele gemeinsame Integrale besitzen. Alle D_{11} der einen Gruppe bilden das allgemeine erste Integral einer D_{21}'', welche noch ein allgemeines erstes Integral zugibt, und zwar steht dieses in derselben Beziehung zu der zweiten Gruppe.

Wählt man in der einen Gruppe die Komplexe eines Büschels, so degeneriert der Enveloppenkomplex in eine lineare Kongruenz.[2]) Die zugehörige lineare D_{11} ist natürlicherweise ein partikuläres erstes Integral, und offenbar finden sich zweifach unendlich viele solche in jedem allgemeinen Integrale. Der obenstehende Satz über gemeinsame Integrale [224 zeigt insbesondere, daß, wenn man aus jedem allgemeinen Integrale eine lineare D_{11} nimmt, diese stets einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen besitzen, und dieses ist a priori geometrisch evident; unsere beiden linearen D_{11} entsprechen nämlich linearen Kongruenzen, deren Direktrizenpaare ein räumliches Vierseit bilden, und es gibt bekanntlich einfach unendlich viele Flächen zweiten Grades, die ein solches enthalten.

1) Seien $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_6 = 0$ Herrn Kleins sechs Fundamentalkomplexe (Math. Annalen, Bd. II, S. 198). Die beiden Gruppen: $x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$, $x_4 + \gamma x_5 + \delta x_6 = 0$ stehen in der hier besprochenen Beziehung. Ein Komplex der ersten Gruppe liegt nach Herrn Kleins Ausdrucke immer in Involution mit einem jeden Komplexe der zweiten Gruppe.

2) Die Gruppe: $x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$ enthält zweifach unendlich viele solcher linearer Kongruenzen K, deren Direktrizen auf der zugehörigen Fläche zweiten Grades liegen. Ebenso bestimmt: $x_4 + \gamma x_5 + \delta x_6 = 0$ zweifach unendlich viele lineare Kongruenzen K', deren Direktrizen der zweiten Erzeugung der besprochenen Fläche angehören. Zwei Kongruenzen K und K' stehen somit immer in der Beziehung, daß die beiden Direktrizenpaare ein räumliches Vierseit bilden. Zwei solche Kongruenzen liegen, werde ich sagen, in Involution. Dieser Ausdruck entspricht der von Herrn Klein eingeführten Terminologie.

66. Der Fall, daß in der Gleichung einer D_{22}'':

$$[pqt-(1+q^2)s]f^2 + [(1+p^2)t-(1+q^2)r]f + [(1+p^2)s - pqr] = 0$$

f nur p und q enthält, daß also die Richtungen der Krümmungslinien jedesmal nur von der Richtung des Flächenelements abhängen, entspricht dem bekannten Probleme: alle Flächen zu finden, die eine gegebene sphärische Abbildung besitzen. Das Orthogonalsystem (s, σ) einer beliebigen Kugel ist nun mit dem gegebenen sphärischen Bilde, auf diese Kugel übergeführt, identisch, und also geben unsere früheren Resultate (§ 20, Nr. 63) den folgenden Satz:

Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die alle Flächen von einer gegebenen sphärischen Abbildung definiert, kann nur unter der Voraussetzung ein allgemeines erstes Integral gestatten, daß jene Abbildung aus einer Schar Kreise und den zugehörigen Orthogonalkurven besteht; zwei allgemeine erste Integrale können nur auftreten, wenn auch diese letzten Kurven Kreise sind.[1])

Herr Bonnet hat gezeigt, daß in den angegebenen Fällen ein, beziehungsweise zwei, allgemeine erste Integrale existieren, und wir werden nun dieselben etwas näher untersuchen.

Wir betrachten die Ebene eines Kreises, der dem gegebenen sphärischen Bilde angehört, und ferner alle Kugeln, welche diese Ebene unter demselben Winkel wie die Bildkugel schneiden. Auf den daraus hervorgehenden linearen Kugelkomplex wenden wir alle möglichen Translationen an und erhalten so einfach unendlich viele Komplexe. Indem wir in derselben Weise mit allen Kreisen des sphärischen Bildes verfahren, bekommen wir zweifach unendlich viele lineare Kugelkomplexe C, und es ist einleuchtend, daß, wenn man unter denselben nach einem beliebigen Gesetze einfach unendlich viele auswählt, dem Enveloppenkomplexe eine D_{12} entspricht, die ein erstes Integral ist.

Wir setzen nun insbesondere voraus, daß die sphärische Abbildung aus zwei Kreisscharen besteht, und betrachten die durch zwei feste [225 Punkte p_1 und p_2 gehenden Kreise der einen Schar, die offenbar Trajektorienkreise sind für alle Komplexe C, welche unsere Bildkugel Q enthalten. Diese Komplexe haben außer Q alle Punktkugeln der Geraden p_1, p_2

1) Es läßt sich sogar sehr leicht beweisen, daß auch partikuläre Integrale nur in den angegebenen Fällen existieren. Herr Darboux hat gefunden, daß sich die besprochene Aufgabe auch in anderen Fällen als in dem von Herrn Bonnet gelösten erledigen läßt. Seine Methode kann nach dem Texte nicht darin bestehen, daß er allgemeine erste Integrale gesucht hat.

gemein; sie enthalten also zugleich die hierdurch bestimmte lineare Kongruenz und bilden ein Büschel, dessen Gleichung sei:

$$L_1 + \lambda L_2 = 0.$$

Gibt man nun λ einen bestimmten Wert und versteht unter μ eine Konstante, so ist:

$$L_1 + \lambda L_2 + \mu = 0 \tag{1}$$

die Gleichung eines Komplexes, in den der gewählte durch eine Translation übergeführt wird. Wir finden somit, daß die Komplexe C eine dreigliedrige, durch (1) dargestellte Gruppe bilden. Wir werden beweisen, daß diese Gruppe eine partikularisierte ist, und hierbei wird es vorteilhaft sein, Linienvorstellungen anzuwenden.

Die Gleichungen $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ sind hinsichtlich X, Y, Z, H linear, und somit (§ 10, Nr. 30) enthalten die entsprechenden Linienkomplexe als gemeinsame Gerade die Fundamentalgerade des Raumes r. Ferner stellt Const. $= 0$ alle Geraden dar, welche die letztgenannte Linie schneiden, und wir finden so, daß die gemeinsamen Geraden aller Komplexe (1) eine *zerfallende* Fläche zweiten Grades, das heißt, zwei ebene Büschel bilden.

Die hier auftretenden Gebilde sind also ein Degenerationsfall von den in der vorangehenden Nummer untersuchten. *Die beiden konjugierten dreigliedrigen Gruppen werden nun durch zwei Punkte p_1, p_2 und zwei durch dieselben gehende Ebenen E_1, E_2 bestimmt.* Die Komplexe der einen Gruppe enthalten sämtlich die beiden Strahlenbüschel $(p_1 E_1)$, $(p_2 E_2)$; ebenso enthalten die Komplexe der zweiten Gruppe die Büschel $(p_1 E_2)$, $(p_2 E_1)$.

Dies Resultat entspricht dem bekannten Satze:

Die **Bonnet***sche Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung aller Flächen, deren sämtliche Krümmungslinien eben sind, läßt sich als ein Degenerationsfall auffassen von der* **Joachimsthal***schen, welche alle Flächen gibt, deren Krümmungslinien des einen Systems in einem gegebenen Ebenenbüschel liegen.*

67. Als letztes Beispiel betrachte ich die Aufgabe, alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien des einen Systems einer gegebenen Relation von der Form:

$$\Pi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

genügen. Zur Existenz von zwei allgemeinen ersten Integralen ist es, werde ich beweisen, notwendig und hinreichend, daß Π hinsichtlich der

Differentiale linear ist, daß ferner $\Pi = 0$ integrabel ist, daß endlich [226
die Integralflächen dieser totalen Differentialgleichung eine Kugelschar $S_1 + \lambda S_2 = 0$ sind.

Wir setzen die Existenz eines allgemeinen ersten Integrals:

$$u - f(v) = 0$$

voraus und betrachten für eine partikuläre Wahl der Funktion f den einem Punkte zugehörigen elementaren Komplexkegel, der ein Umdrehungskegel sein muß.[1]) Die konstanten Krümmungsrichtungen aller Flächenelemente, welche diesen Kegel umhüllen, sind die Berührungsrichtung des Elements mit dem Kegel und die zugehörige Orthogonalrichtung, und zwar ist es geometrisch evident, daß *diese letzten Richtungen ein ebenes Büschel bilden, dessen Achse zugleich die Mittellinie des Umdrehungskegels ist.* Die Gleichung $\Pi = 0$ ist also hinsichtlich dx, dy, dz linear, und ferner ist klar, daß *alle elementaren Rotationskegel, die für eine verschiedene Wahl der arbiträren Funktion f einem gegebenen Punkte entsprechen, dieselbe Achse haben.*

Man betrachte nun zwei partikuläre Integrale:

$$u - f_1(v) = 0, \quad u - f_2(v) = 0$$

und zwei Integralflächen derselben, I_1 und I_2, welche eine gemeinsame, $\Pi = 0$ genügende Kurve c enthalten. Alsdann ist c eine Krümmungslinie auf den beiden Flächen, die einander infolgedessen unter konstantem Winkel schneiden. Für einen jeden Punkt der Kurve c ist aber der besprochene Winkel gleich der Differenz zwischen den Winkelöffnungen der beiden zugehörigen elementaren Umdrehungskegel, und also hat *diese Differenz denselben Wert für alle Punkte unserer Kurve.* Läßt sich nun $\Pi = 0$ *nicht* integrieren, so kann man zwischen zwei beliebigen Punkten des Raumes eine Kurve ziehen, welche $\Pi = 0$ genügt, und in diesem Falle existiert also höchstens ein Integral mit einer *arbiträren Konstanten.*

Es bleibt zu untersuchen der Fall, daß $\Pi = 0$ ein Integral $S(x, y, z) =$ Const. besitzt. Das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonalsystem (s, σ) besteht nun aus den Durchschnittskurven mit allen Flächen S zusammen mit den zugehörigen Orthogonalkurven. Es ist aber die Kugel die einzige Fläche, welche *jede* beliebige Kugel nach Kreisen schneidet, und also sind die Flächen S, wie oben behauptet, Kugeln. Sollen ferner

1) Der Beweis dieser Behauptung liegt in den Schlußbemerkungen des § 18. Vgl. auch Nr. 63.

immer sowohl die Kurven s als σ Kreise sein, die jedesmal durch zwei feste Punkte gehen, so müssen die Kugeln S unendlich viele Punkte gemein haben, das heißt, sie bilden ein Büschel $S + \lambda S' = 0$. Wir werden also auf die Aufgabe geführt: alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien des einen Systems auf einem Büschel [227 von Kugeln liegen, und bekanntlich führt eine Transformation durch reziproke Radien dieses Problem in das von **Joachimsthal** gelöste über.

Nach Herrn Bonnet bestimmt unsere Aufgabe alle nicht röhrenförmigen Flächen, deren sämtliche Krümmungslinien sphärische Kurven sind.

68. Endlich werde ich andeuten, wie die von den Herren Bonnet und Serret erledigte Aufgabe: alle Flächen mit sphärischen Krümmungslinien zu bestimmen, nach den Anschauungen der Kugelgeometrie zu behandeln ist. Alles kommt, wie man leicht beweist (§ 24, Nr. 80), darauf hinaus, in allgemeinster Weise zwei Scharen linearer Komplexe zu finden, die paarweise in Involution liegen. Herrn Kleins Theorie der sechs Fundamentalkomplexe[1]):

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_6 = 0$$

beantwortet unmittelbar diese Frage. Man betrachte nämlich entweder die beiden dreigliedrigen Gruppen:

$$x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0, \quad x_4 + \gamma x_5 + \delta x_6 = 0,$$

oder die beiden Gruppen:

$$x_1 + \alpha x_2 = 0, \quad x_3 + \beta x_4 + \gamma x_5 + \delta x_6 = 0,$$

und wähle jedesmal einfach unendlich viele Komplexe aus jeder Gruppe. Die den beiden Enveloppenkomplexen zugehörigen D_{11} (oder D_{12}) besitzen einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen, die unsere Aufgabe in allgemeinster Weise befriedigen. Die hiermit angedeutete Methode gibt zugleich mit größter Leichtigkeit die verschiedenen bei diesen Untersuchungen gefundenen Resultate. (Vgl. eine Note des Herrn Picart in den Comptes Rendus. 1858.)

1) Man muß die verschiedenen Degenerationen des Systems der sechs Fundamentalkomplexe berücksichtigen.

§ 22. Bestimmung aller D_{21}'' und D_{22}'', welche allgemeine erste Integrale besitzen.

69. Es hat sich gezeigt, daß, wenn eine D_{21}'' ein allgemeines erstes Integral:

$$u - f(v) = 0$$

zugibt, dasselbe zuweilen durch zweifach unendlich viele lineare Komplexe definiert werden kann, und ich behaupte, daß dieses immer der Fall ist. Der Beweis gründet sich darauf, daß ein jedes in dem allge- [228 meinen Integrale enthaltene partikuläre eine D_{11} (Nr. 62, 63) sein muß, und zwar eine, welche einem Linienkomplexe — ich nenne denselben in der folgenden Entwickelung einen Integralkomplex — entspricht.

Eine jede der Gleichungen:

$$u = \text{Const.}, \quad v = \text{Const.}$$

bestimmt einfach unendlich viele solche Integralkomplexe, welche wir auf alle möglichen Weisen in Paare (u_p, v_q) zusammenfassen und dabei bemerken, daß eine beliebige Gruppe (u_p, v_q) jedem Punkte[1]) des Raumes ein oder einige Flächenelemente zuordnet — gemeinsamen Tangentenebenen von Komplexkegeln, welche dieselbe Spitze haben, entsprechend. Wählt man unter den zweifach unendlich vielen Gruppen (u_p, v_q) nach einem beliebigen Gesetze einfach unendlich viele, so ordnet man damit jedem Punkte einfach unendlich viele Elemente zu, und zwar wissen wir, daß dieselben jedesmal den Komplexkegel eines Integralkomplexes umhüllen.

Zwei konsekutive Gruppen (u_p, v_q), $(u_{p+\Delta p}, v_{q+\Delta q})$ ordnen jedem Punkte eine oder einige Richtungen zu, und dieselben gehören offenbar unbegrenzt vielen Integralkomplexen an. Es folgt hieraus, daß der geometrische Ort dieser dreifach unendlich vielen Richtungen eine Linienkongruenz sein muß, und es ist nicht schwer, zu erkennen, daß, wenn (u_p, v_q) konstant bleibt, $(u_{p+\Delta p}, v_{q+\Delta q})$ dagegen variiert, wir, allen Werten der Größe $\Delta u_p : \Delta v_q$ entsprechend, einfach unendlich viele Kongruenzen erhalten, deren Inbegriff einen Komplex C bildet. Die Geraden dieses Komplexes, die durch einen Punkt gehen, liegen nun immer in einer Ebene, derjenigen nämlich, die durch die Gruppe (u_p, v_q) dem

1) Die dreifach unendlich vielen gemeinsamen Flächenelemente zweier partieller Differentialgleichungen erster Ordnung brauchen nicht den ganzen Raum zu durchziehen; es ist nämlich möglich, daß zweifach unendlich viele elementare Komplexkegel zugleich beiden Gleichungen angehören. Dieser Fall kann hier nicht eintreten; zweifach unendlich viele Komplexkegel bestimmen nämlich bereits einen Linienkomplex, und unsere D_{11} entsprechen ja Linienkomplexen.

betreffenden Punkte zugeordnet wird, und also ist C ein linearer Komplex. Wir können somit den folgenden Satz aussprechen[1]):

Wenn eine D_{21}'' ein allgemeines erstes Integral be- [229
sitzt, so entsprechen demselben zweifach unendlich viele lineare Komplexe C, und zwar in solcher Weise, daß einfach unendlich viele C immer einen Enveloppenkomplex geben, dessen zugehörige D_{11} ein partikuläres erstes Integral ist.

Wir erledigen nun die Frage, ob zweifach unendlich viele lineare Komplexe immer eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem allgemeinen ersten Integrale bestimmen, und hierbei wird es vorteilhaft sein, Kugelvorstellungen anzuwenden.

Einem jeden linearen Kugelkomplexe entsprechen, wie wir wissen (Nr. 64), dreifach unendlich viele Flächenelemente, die sich an die betreffende Fundamentalkugel anschließen. Betrachten wir also zweifach unendlich viele lineare Kugelkomplexe C, so gehört jedes Element des Raumes nur einem oder einigen C als ausgezeichnetes Element an. Man ordne nun einem jeden Flächenelemente die Durchschnittsrichtung mit der Fundamentalkugel des zugehörigen C zu und betrachte diejenige D_{22}'', welche eben diese Zuordnung (§ 20, Nr. 61) bestimmt. Dieselbe wird offenbar von einer jeden D_{12} befriedigt, die dem Enveloppenkomplexe von einfach unendlich vielen C entspricht.

Zweifach unendlich viele lineare Linien- oder Kugelkomplexe bestimmen immer eine D_{21}'' oder D_{22}'' mit einem allgemeinen ersten Integrale.

Unsere zweifach unendlich vielen linearen Komplexe, deren Gleichung mit zwei Parametern λ und μ sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$\Phi(X, Y, Z, H, \lambda, \mu) = 0,$$

bestimmen einen Enveloppenkomplex A, dessen Gleichung man findet, indem man zwischen den Gleichungen:

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$$

1) Herrn Kleins Bemerkung, daß die Tangenten einer developpablen Fläche einen Komplex bilden, dessen Komplexkegel ebene Büschel sind, macht es notwendig, die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, daß alle C solche Komplexe wären. Alsdann würden jedesmal ∞^1 C einen speziellen Komplex umhüllen, dessen Integralflächen Developpable wären. Wir würden also höchstens die bekannte Gleichung:

$$rt - s^2 = 0$$

erhalten, die wir schon als eine D_{21}' mit allgemeinem ersten Integrale angegeben haben.

die Parameter eliminiert. Es liegt nahe, zu vermuten, daß die dem Komplexe A zugehörige D_{12} ein singuläres erstes Integral darstellt, und das ist in der Tat auch der Fall.

Betrachten wir nämlich eine in A enthaltene Kugel Q und zugleich den entsprechenden linearen Komplex C, der sich offenbar unter den einfach unendlich vielen linearen Tangentialkomplexen befindet, welche A in Q besitzt, so ist es klar, daß dieser Kugel Q derselbe Trajektorienkreis hinsichtlich A, wie hinsichtlich eines beliebigen unter den früher betrachteten Enveloppenkomplexen, der von C umhüllt wird, entspricht. Es zeigt sich also, daß die Integralflächen von A unserer D_{22}'' genügen.

Eine D_{22}'' mit einem allgemeinen ersten Integrale besitzt im allgemeinen außerdem ein singuläres erstes Integral.

Ich werde nun andeuten, wie man durch analytische Operationen entscheidet, ob eine gegebene D_{22}'' ein allgemeines erstes Integral besitzt, wie man ferner in diesem Falle dasselbe bestimmt.

Man untersucht zuerst, ob die einer beliebigen Punktkugel durch [230
die D_{22}'' zugeordneten Kurven s oder σ Kreise sind, und bestimmt unter dieser Voraussetzung die elementaren Umdrehungskegel[1]), welche diese Kreise enthalten (Nr. 55). Sei:

$$F(x, y, z, p, q, v) = 0$$

die allgemeine Gleichung der besprochenen Kegel mit einer arbiträren Konstanten v außer den Scheitelkoordinaten x, y, z. Man sucht nun den analytischen Ausdruck erstens von der Winkelöffnung:

$$W = \Phi(x, y, z, v),$$

ferner von der Richtung der Kegelachse:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

In den Funktionen X, Y, Z, die von x, y, z, v abhängen, setzt man statt v den Wert dieser Größe, genommen aus der Gleichung:

$$W_0 = \Phi(x, y, z, v),$$

und bildet den Ausdruck:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

1) Wenn die auf einer beliebigen Punktkugel gelegenen Kurven s und σ Kreise sind, so ordnet unsere D_{22}'' in dem angegebenen Sinne jedem Punkte einfach unendlich viele Umdrehungskegel zu. Die so gefundenen ∞^4 Kegel ordnen sich, wenn erste Integrale existieren, in Scharen von ∞^3, die jedesmal ein erstes Integral bestimmen.

Wenn sich diese Gleichung integrieren läßt, und zwar in der Form:

$$[x - F_1(H)]^2 + [y - F_2(H)]^2 + [z - F_3(H)]^2 = H^2,$$

dann und nur dann existiert ein allgemeines erstes Integral.

Die letzte Gleichung enthält zwei Parameter W_0 und H und stellt also die zweifach unendlich vielen Fundamentalkugeln unserer linearen Kugelkomplexe C dar. Hieraus findet man leicht die allgemeine Gleichung:

$$\Pi(X, Y, Z, H, \lambda, \mu) = 0$$

dieser Komplexe, und damit ist das allgemeine erste Integral bestimmt. Endlich gibt die Elimination von λ und μ zwischen den Gleichungen:

$$\Pi = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = 0$$

das singuläre erste Integral.

Wenn eine D''_{22} ein allgemeines erstes Integral zugibt, so läßt sich dasselbe, wie auch das zugehörige singuläre erste Integral, immer angeben.[1])

70. In der folgenden Untersuchung, deren Zweck ist, alle D''_{22} [231 mit *zwei* allgemeinen ersten Integralen zu bestimmen, werde ich mich auf den früher (Nr. 65) eingeführten Begriff der involutorischen Lage zweier linearer Kongruenzen stützen. Wir müssen uns dabei erinnern, daß, wenn zwei *Linien*kongruenzen in dieser Beziehung stehen, die beiden Direktrizenpaare ein räumliches Vierseit bilden. Es sei andererseits Q die eine gemeinsame Kugel der entsprechenden linearen Kugelkongruenzen, und es seien p_1, p_2 die beiden auf Q gelegenen *Punktkugeln* der einen Kongruenz, π_1, π_2 die entsprechenden Punktkugeln der anderen Kongruenz. Die vier Punkte p_1, p_2, π_1, π_2 unserer Kugel stehen alsdann in der Beziehung, daß ein jeder durch p_1 und p_2 gehende Kreis einen beliebigen Kreis, der durch π_1 und π_2 geht, orthogonal schneidet.

Dieses vorausgesetzt, betrachten wir die durch unsere D''_{22} einer beliebigen Kugel Q zugeordneten (Nr. 61) orthogonalen Kreisscharen, die beziehungsweise durch zwei Punkte p_1, p_2, oder durch zwei andere π_1, π_2 gehen. Alle Integralkomplexe, welche Q enthalten, teilen sich in zwei Systeme, und zwar ist es klar, daß der Trajektorienkreis eines jeden Komplexes des einen Systems durch p_1 und p_2 geht, während die Komplexe

1) Ein gutes Beispiel einer D''_{22} mit einem allgemeinen ersten Integrale und einem zugehörigen singulären Integrale gibt die Aufgabe: alle Flächen zu finden, die einfach unendlich viele Tangentenebenen einer gegebenen Fläche Φ orthogonal schneiden. Das singuläre erste Integral entspricht der Bestimmung aller Flächen, deren Krümmungszentra des einen Systems auf Φ liegen.

des zweiten Systems in derselben Beziehung zu den Punkten π_1 und π_2 stehen. Hieraus läßt sich schließen, daß *einem Integralkomplexe des ersten Systems, der die Kugel Q enthält, außerdem die beiden unendlich nahen Kugeln Q' und Q'', welche Q beziehungsweise in p_1 und p_2 berühren, angehören.* Indem wir dieselben Schlüsse auf Q' und Q'', und so weiter anwenden, sehen wir, daß alle Komplexe des einen Systems, welche eine gegebene Kugel enthalten, außerdem wenigstens zweifach unendlich viele Kugeln gemein haben. Mehr können es auch nicht sein; denn sonst wären sie identisch, und dann hätten wir kein allgemeines Integral. Es zeigt sich also, daß eine jede Kugel des Raumes eine Kugelkongruenz bestimmt, und zwar gibt es zweifach unendlich viele solche, die, wenn man sie nach einem arbiträren Gesetze zu Komplexen zusammenfaßt, immer Integralkomplexe geben.

Ich werde nun zeigen, daß diese erzeugenden Kongruenzen — ich nenne die des einen Systems S, diejenigen des zweiten Σ — *lineare* Kongruenzen sind. Zu diesem Zwecke betrachte ich noch einmal die Kugel Q mit den Punkten p_1 und p_2, in denen Q' und Q'' die gegebene Kugel berühren. Einer jeden dieser letzten Kugeln ordnet unsere D''_{22} gewisse ausgezeichnete Punkte p_1', p_2' und p_1'', p_2'' zu, und zwar erkennt man leicht, daß p_1' mit p_1, p_2'' mit p_2 *identisch sein muß.* Hieraus folgt durch eine einfache Überlegung, daß *alle einfach unendlich vielen Kugeln, welche Q in p_1 oder p_2 berühren, unserer Kongruenz S angehören*; diese Kongruenzen lassen sich also in einfach unendlich viele Scharen von Kugeln, die jedesmal einen gemeinsamen [232 Berührungspunkt haben, zusammenfassen, und hierbei gehört jede Kugel *zwei* solchen Scharen an. Die entsprechenden Linienkongruenzen ordnen sich also in einfach unendlich viele ebene Büschel, und zwar gehört eine jede Kongruenzlinie zwei solchen Büscheln an. Dieses ist aber für die *lineare* Kongruenz charakteristisch.

Wenn eine D''_{22} zwei allgemeine erste Integrale besitzt, so entsprechen derselben zwei Scharen von zweifach unendlich vielen linearen Kongruenzen S und Σ. Einfach unendlich viele S oder Σ bilden immer einen Integralkomplex.

Mit Berücksichtigung des Anfangs dieser Nummer findet man nun, daß zwei beliebige Kongruenzen S und Σ immer in Involution liegen, daß also die beiden Direktrizenpaare der betreffenden Liniensysteme jedesmal ein räumliches Vierseit bilden.

Hieraus folgt, daß die Direktrizen aller S keine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit, sondern nur eine Linienfläche bestimmen. Sonst existierten nämlich zwei Linienkongruenzen — alle Direktrizen unserer beiden Systeme —, deren gegenseitige Beziehung eine solche wäre, daß eine jede Gerade der einen Kongruenz alle Linien der zweiten träfe. Dieses ist aber unmöglich.

Die Direktrizen bilden also die beiden Erzeugungen einer Linienfläche, die bekanntlich eine Fläche zweiten Grades sein muß, und also werden wir auf die in Nr. 66 untersuchten Gebilde zurückgeführt.

Zwei konjugierte dreigliedrige Gruppen linearer Komplexe definieren die allgemeinste D''_{21} (oder D''_{22}) mit zwei allgemeinen ersten Integralen.[1])

71. Ehe ich diesen Abschnitt schließe, will ich noch beweisen, daß, wie früher behauptet, die allgemeine Form einer D''_{21} die folgende ist:

$$rt - s^2 = \Phi(x, y, z, p, q),$$

ferner an diese Form eine Interpretation und einige Sätze anknüpfen.

Die Differentialgleichung der Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ schreibt sich bekanntlich:

$$\frac{\partial F}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial F}{\partial s} dy\,dx + \frac{\partial F}{\partial t} dx^2 = 0.$$

Andererseits befriedigen die Haupttangentenkurven die Relation:

$$t\,dy^2 + 2s\,dy\,dx + r\,dx^2 = 0.$$

Sollen also die Haupttangentenkurven beider Systeme Charakteristiken sein, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{t} = \frac{\frac{\partial F}{\partial s}}{-2s} = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{r},$$ [233

und, wenn man hier nach den gewöhnlichen Methoden integriert, so findet man die obenstehende Form.

Wie bekannt ist, ist:

$$\frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{rt - s^2}$$

die Formel des Krümmungsmaßes, und also kommt die Integration einer D''_{21} darauf hinaus: *alle Flächen zu finden, deren Krümmungsmaß nach einem gegebenen Gesetze von der Lage des Flächenelements abhängt.*

1) Auf den Integralflächen einer solchen D''_{21} gehören die Tangenten einer beliebigen Haupttangentenkurve jedesmal einem linearen Komplexe an.

Unser früherer Satz, daß, wenn eine D''_{21} ein erstes Integral $u = 0$ besitzt, dasselbe eine D_{11} sein muß, daß ferner jede D_{11} unbegrenzt vielen D''_{21} genügt, gibt leicht das folgende Theorem, welches sich übrigens unmittelbar aus einem Satze des Herrn Enneper (d. Ann. II, S. 596, Anm.) ableiten läßt:

Wenn zwei Flächen einander nach einer Kurve berühren, und dabei jedem Punkte dieser Kurve dasselbe Krümmungsmaß hinsichtlich beider Flächen entspricht, so ist die Kurve eine gemeinsame Haupttangentenkurve. Wenn andererseits zwei Flächen einander nach einer solchen Kurve berühren, so findet jene Beziehung immer statt.

Vierter Abschnitt.

Zur Theorie der Komplexe.

In den beiden ersten Paragraphen dieses Abschnittes beschäftige ich mich mit den Haupttangentenkurven des Komplexes zweiten Grades. In § 25 zeige ich, daß mehrere bekannte Theorien, die sich auf zwei zuerst von Herrn Kummer untersuchte Flächen vierter Ordnung — die mit 16 Knotenpunkten und die mit einem Doppelkegelschnitte — beziehen, durch meine Kugelabbildung in einander übergeführt werden können. Endlich beabsichtige ich mit den Entwickelungen des letzten Paragraphen, den Zusammenhang zwischen den Ideen dieser Abhandlung und einigen Arbeiten des Herrn Klein darzulegen.

§ 23. Über einen Linienkomplex zweiten Grades.

72. In § 17 haben wir gefunden, daß die Haupttangentenkurven des Linienkomplexes $F(X, Y, Z) = 0$ immer durch Differentiation und Elimination bestimmt werden können, wenn zuerst die geodäti- [234
schen Kurven der Fläche $F = 0$ gefunden sind. Die hier auftretenden Linienkomplexe charakterisierten wir dadurch, daß sie eine infinitesimale Transformation von der Form:

(1) $$z_1 = z_2,\quad x_1 = x_2 + a z_2 + b,\quad y_1 = y_2 + c z_2 + d$$

besitzen. Es folgt hieraus, daß auch die zugehörigen Singularitätenflächen, deren Beziehung zu den Komplexen bekanntlich eine durch lineare Transformationen unzerstörbare ist, durch die besprochene infinitesimale Transformation in sich übergeführt werden, und demzufolge müssen sie jedesmal von einfach unendlich vielen Kurven W (vgl. § 17) des entsprechenden Transformationszyklus erzeugt sein. Nun bestimmen die Gleichungen (1) in jeder Ebene $z = \text{Const.}$ eine Parallelverschiebung, und also sind die betreffenden Kurven W die Geraden einer speziellen linearen Kongruenz, deren Direktrizen in die unendlich weit entfernte Gerade der x, y-Ebene zusammengefallen sind. Die Singularitätenfläche eines jeden Linienkomplexes $F(X, Y, Z) = 0$ ist eine Linienfläche, deren Erzeugende dieser speziellen linearen Kongruenz angehören.

Wenn man die Singularitätenfläche eines Linienkomplexes bestimmen will, so kann man nach Plücker in folgender Weise verfahren. Man sucht alle Geraden des Komplexes, deren zugehörige lineare Tangentialkomplexe spezielle Komplexe sind. Die gefundenen zweifach unendlich vielen Komplexlinien umhüllen zwei Flächen, unter denen die Singularitätenfläche die eine ist.

Unser Komplex $F(X, Y, Z) = 0$ besitzt, wissen wir, nur zweifach unendlich viele (§ 17, Nr. 49) Tangentialkomplexe mit der Gleichungsform:

$$aX + bY + cZ + dR + e = 0, \tag{1}$$

und auf die Betrachtung derselben können wir uns beschränken. Hierbei ist immer $d = 0$, weil ein Komplex (1) von Kugeln gebildet wird, deren Zentra auf einer Tangentenebene der Fläche $F = 0$ liegen. Ein solcher Komplex kann nur unter der Voraussetzung ein spezieller sein, daß die betreffende Tangentenebene zugleich den imaginären Kugelkreis berührt. Wir werden somit auf die Betrachtung der imaginären Developpablen geführt, die zugleich um $F = 0$ und den imaginären Kugelkreis umgeschrieben ist. Die Ebenen dieser Abwickelbaren bilden sich im Linienraume r als die Erzeugenden (§ 9, Nr. 27; § 10, Nr. 30) der Singularitätenfläche ab[1]), und zwar erhalten wir in dieser Weise die vollständige Singularitätenfläche. [235 Hierbei ist, wie eine geometrische Überlegung zeigt, die Klasse der imaginären Developpablen gleich der Ordnung der Singularitätenfläche.[2])

1) Hieraus folgt, daß, wenn $F(X, Y, Z, \lambda) = 0$ in der gewöhnlichen Interpretation alle Flächen eines Orthogonalsystems darstellt, die Linienkomplexe $F(X, Y, Z, \lambda) = 0$ eine gemeinsame Singularitätenfläche haben. Diese Komplexe bilden in Verbindung mit den linearen Komplexen $H = \text{Const.}$ ein vollständiges Involutionssystem in Herrn Kleins metrischer Liniengeometrie.

2) Ist die Fläche $\Phi(X, Y, Z) = 0$ eine imaginäre Developpable, die den imaginären Kugelkreis enthält, so ist der Linienkomplex $\Phi(X, Y, Z) = 0$ der Inbegriff aller Tangenten einer Regelfläche, die einer speziellen linearen Kongruenz angehört. Insbesondere ist $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ einerseits die Gleichung einer Punktkugel, andererseits, wie Herr Klein es durch andere Betrachtungen gefunden hat, die Komplexgleichung einer Fläche zweiten Grades (vergleiche diese Annalen II, S. 209).

Es sei nun insbesondere $F = 0$ eine Regelfläche. Alsdann bildet der Inbegriff aller Kugeln, deren Zentra auf einer geraden Erzeugenden liegen, eine lineare Kugelkongruenz. Der Linienkomplex $F = 0$ wird also von einfach unendlich vielen linearen Kongruenzen gebildet, und hierbei sind die zugehörigen Direktrizen jedesmal das Bild derjenigen Tangentenebenen der Fläche $F = 0$, welche die besprochene Erzeugende enthalten und zugleich den imaginären Kugelkreis berühren. Die Erzeugenden der Singularitätenfläche τ ordnen sich in diesem Falle paarweise zusammen als Direktrizen jener linearen Kongruenzen.

Eine Fläche zweiten Grades $F_2 = 0$ kann bekanntlich auf zwei Weisen durch eine gerade Linie erzeugt werden, und also enthält der Linienkomplex $F_2 = 0$ zwei Scharen linearer Kongruenzen. Es ist aber zu bemerken, daß die eben besprochene imaginäre Developpable im allgemeinen nicht zerfällt, daß also die beiden Direktrizensysteme eine irreduktible Fläche τ bilden. Nun gehört jede Linie unseres Komplexes zwei linearen Kongruenzen an — einer aus jeder Schar — und schneidet infolgedessen die Fläche τ in wenigstens vier Punkten. Andererseits wissen wir, daß die Singularitätenfläche des allgemeinen Komplexes zweiten Grades von vierter Ordnung ist, also ist dieselbe eine Linienfläche vierten Grades.

Die Singularitätenfläche des Komplexes $F_2 = 0$ ist eine Linienfläche vierten Grades mit zwei zusammenfallenden Doppellinien; alle Komplexlinien, die eine Erzeugende schneiden, treffen außerdem die eine von zwei zugeordneten Erzeugenden.

73. Es ist bekannt, daß Jacobi die geodätischen Kurven auf der Fläche zweiten Grades mittels hyperelliptischer Transzendenten bestimmt hat, und also können die Haupttangentenkurven des Linienkomplexes $F_2 = 0$ mittels hyperelliptischer Transzendenten gefunden werden. Im folgenden werde ich alle hierher gehörigen Komplexe aufzählen und dabei aus den Eigenschaften der verschiedenen Flächen zweiten Grades entsprechende Eigentümlichkeiten des Bildkomplexes schließen. Zum [236 leichteren Verständnisse schicke ich einige Bemerkungen voraus.

In § 13 dachte ich mir den Raum r einer linearen Transformation unterworfen und betrachtete die entsprechenden Umformungen von R, unter denen ich alle Bewegungen, die Ähnlichkeitstransformation und die Paralleltransformation fand. Es ist nun einleuchtend, daß, wenn eine gegebene Fläche oder Komplex des einen Raumes durch eine infinitesimale Transformation in sich übergeführt wird, dasselbe mit der entsprechenden Figur des anderen Raumes der Fall ist. Eine Rotationsfläche des Raumes

R gestattet zum Beispiel eine infinitesimale Rotationsbewegung, und also können wir schließen, daß die Bildfläche eine gewisse infinitesimale lineare Transformation zugibt.

Ferner ist klar, daß, wenn ein Gebilde zwei unabhängige, infinitesimale und zugleich permutable Transformationen gestattet, dieses auch mit der entsprechenden Figur der Fall ist. In diese Kategorie gehört zum Beispiel einerseits der Inbegriff von Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Schraubenfläche liegen — die betreffenden permutablen Operationen sind Schraubenbewegung und Paralleltransformation — andererseits der entsprechende Linienkomplex, wie auch die zugehörige Singularitätenfläche, welche also nach Herrn Kleins und meinen Untersuchungen entweder durch die Gleichung $x^a y^b z^c = \text{Const.}$ dargestellt wird, oder sich als Degeneration einer solchen Fläche auffassen läßt (vergleiche Comptes Rendus 1870 [d. Ausg. Bd. I, Abh. VI]).

Als letztes Beispiel betrachte man endlich alle Kugeln, deren Zentra auf einem Rotationskegel liegen. Dieser Komplex gestattet drei unabhängige infinitesimale Transformationen: 1. eine Ähnlichkeitstransformation, deren Zentrum die Kegelspitze ist, 2. eine Rotationsbewegung um die Kegelachse, 3. eine Paralleltransformation, und zwar ist die zweite Operation sowohl mit der ersten, wie mit der letzten permutabel, während dieses nicht mit der ersten und letzten der Fall ist. Der Linienkomplex und die zugehörige Singularitätenfläche besitzen die entsprechenden Eigenschaften.

74. Im Raume R ist bei unserer Abbildung der unendlich weit entfernte, imaginäre Kreis und sonst nichts ausgezeichnet — das heißt, für eine projektivische Auffassung. Wenn wir also alle Spezialformen des Linienkomplexes $F_2(X, Y, Z) = 0$ suchen, so müssen wir uns zunächst erinnern, daß die projektivische Punktgeometrie nur eine Partikularisation der Fläche zweiten Grades kennt — den Kegel nämlich; ferner fragt es sich, wie viele verschiedene Lagen diese beiden Flächen hinsichtlich des genannten Kreises haben können. Nun ist es eben nach diesen Gesichtspunkten, daß die metrische Geometrie die Flächen zweiten Grades ordnet; hierbei muß man indessen wohl bemerken, daß die gewöhnlichen Aufzählungen keine Fläche berücksichtigen, deren Gleichung imaginäre Koeffizienten enthält.

Zunächst stellen wir zwei Gruppen auf, je nachdem die unend- [237
lich weit entfernte Ebene eine Tangentenebene ist oder nicht.

A. Wenn F_2 nicht von der unendlich weit entfernten Ebene berührt wird, so schreibt sich die entsprechende Gleichung in der folgenden Form:

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 = d, \tag{1}$$

vorausgesetzt, daß $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ die Hauptebenen sind. Durch eine Bewegung läßt sich die Fläche (1) im allgemeinen in:

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = d \tag{2}$$

überführen, und zwar können wir uns auf die Betrachtung dieser letzten Fläche beschränken; einer Bewegung des Raumes R entspricht nämlich eine lineare Transformation des anderen Raumes.

Es sind nun $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ allgemeine lineare Komplexe, $\text{Const.} = 0$ dagegen ein spezieller Komplex; ferner liegen diese Komplexe (§ 10, Nr. 30) paarweise in Involution, und also hängt ihr System von 13 Konstanten ab; wir finden somit, daß der Linienkomplex F_2 16 wesentliche Konstanten enthält. Setzt man in (2) statt X, Y, Z (§ 9, Nr. 27) die entsprechenden Ausdrücke durch die Plückerschen Linienkoordinaten r, ϱ, s, σ:

$$X = \tfrac{1}{2}(\varrho + s), \quad iY = \tfrac{1}{2}(\varrho - s), \quad Z = \tfrac{1}{2}(\sigma - r),$$

so findet man nach der gewöhnlichen Methode die Gleichung der Singularitätenfläche in der folgenden Form:

$$4abc(yz - xt)^2 + dc(a - b)(z^4 + t^4) - d(4ab - 2ac - 2bc)z^2t^2 = 0.$$[1]

1. Wenn die Koeffizienten a, b, c, d allgemein sind, so ist die Singularitätenfläche, wie wir schon von früher wissen (Nr. 72), eine Linienfläche vierter Ordnung; dieselbe, wie auch der Komplex gestattet eine infinitesimale lineare Transformation.

2. Sei $a = b$; die Fläche F_2 ist dann eine Rotationsfläche, und also besitzt der Linienkomplex F_2 zwei permutable infinitesimale lineare Transformationen, welche einer Rotationsbewegung und einer Paralleltransformation entsprechen. Die Singularitätenfläche:

$$\left(zy - xt - \sqrt{\frac{da - dc}{ac}} \cdot zt\right)\left(zy - xt + \sqrt{\frac{da - dc}{ac}} \cdot zt\right) = 0$$

zerfällt in zwei Flächen zweiten Grades, die einander nach einer gemeinsamen Erzeugenden: $z = 0$, $t = 0$ berühren.

3. Sei $d = 0$; F_2 ist ein Kegel. Der Kugelkomplex besitzt zwei infinitesimale Transformationen, die nicht permutabel sind: Paralleltransformation und Ähnlichkeitstransformation. Die Singularitätenfläche des [238
Linienkomplexes ist eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades:

$$(yz - xt)^2 = 0.$$

1) Es soll die Größe t eine homogene vierte Koordinate bezeichnen.

4. Sei $d = 0$, $a = b$; F_2 ist ein Rotationskegel; der Kugelkomplex gestattet drei infinitesimale Transformationen: Paralleltransformation, Rotationsbewegung und Ähnlichkeitstransformation. Die beiden ersten, wie auch die beiden letzten sind permutabel; dies ist dagegen nicht der Fall mit der ersten und letzten. Der Linienkomplex besitzt die entsprechenden Eigenschaften. Die Singularitätenfläche ist wiederum eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades.

5. Sei $c = 0$; F_2 ist ein Zylinder. Der Kugelkomplex besitzt zwei permutable Transformationen: Translationsbewegung und Paralleltransformation. Die Singularitätenfläche des Linienkomplexes wird von zwei doppeltzählenden Ebenen gebildet ($z^2 t^2 = 0$).

6. Sei $a = b$, $c = 0$; F_2 ist ein Rotationszylinder. Der Kugelkomplex gestattet drei permutable, infinitesimale Transformationen: Translation, Rotation und Paralleltransformation. Infolgedessen ist der Linienkomplex eine Degeneration desjenigen, dessen Gerade ein Tetraeder nach konstantem Doppelverhältnisse schneiden. Die Singularitätenfläche wird von zwei doppeltzählenden Ebenen ($z^2 t^2 = 0$) gebildet.

7. Sei $a = b = c$; F_2 ist eine Kugel. Der Kugelkomplex gestattet drei unabhängige infinitesimale Rotationen, die indessen nicht permutabel sind. Die Singularitätenfläche ist eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades:

$$(zy - xt)^2 = 0.$$

B. Wenn die unendlich weit entfernte Ebene die Fläche F_2 berührt, so nimmt die Gleichung derselben die folgende Form an:

$$aX^2 + bY^2 + 2cZ = 0.$$

1. Die Singularitätenfläche:

$$8abzt(xt - yz) - (a - b)c(z^4 + t^4) - 2(a + b)cz^2t^2 = 0$$

ist, wenn a, b, c allgemein sind, eine Linienfläche vierten Grades.

2. Sei $a = b$; F_2 ist ein Rotationsparaboloid. Die Singularitätenfläche besteht aus einer Fläche zweiten Grades und zwei Tangentenebenen derselben.

3. Sei $a = 0$; F_2 ist ein parabolischer Zylinder. Die Singularitätenfläche wird von zwei doppeltzählenden Ebenen gebildet.

75. Die folgende Aufzählung aller Komplexe, deren Gleichung die Form $F_2(X, Y, Z) = 0$ erhalten kann, ist vollständig.

F_2 ist eine allgemeine Fläche zweiten Grades. [239

Der Komplex kann in zwei Weisen durch eine lineare Kongruenz erzeugt werden.

A. Schneidet F_2 die unendlich entfernte Ebene nach einem nicht zerfallenden Kegelschnitte δ, so fallen die Leitlinien jener linearen Kongruenzen, das heißt die Erzeugenden der Singularitätenfläche niemals mit der Fundamentalgeraden in r (Const. $= 0$) zusammen. Nach der Lage des Kegelschnitts δ hinsichtlich des imaginären Kugelkreises $\varkappa$ erhalten wir sechs Unterformen.

1. δ und $\varkappa$ haben eine allgemeine gegenseitige Lage.

Die Developpable $(F_2\varkappa)$ ist eine allgemeine Abwickelbare vierter Klasse. δ und $\varkappa$ haben vier gemeinsame Punkte und vier gemeinsame Tangenten.	Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierter Ordnung mit zwei zusammenfallenden Doppellinien (Nr. 12 der Cremonaschen Aufzählung). Es gibt vier Kongruenzen in jeder Gruppe, die speziell sind. Es gibt vier singuläre Erzeugende.

2. δ und $\varkappa$ berühren einander in einem Punkte.

Die Developpable $(F_2\varkappa)$ ist eine Abwickelbare vierter Klasse mit einer Doppelebene. In dem Berührungspunkte zwischen δ und $\varkappa$ fallen zwei gemeinsame Tangenten, wie zwei gemeinsame Punkte zusammen.	Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierter Ordnung, die außer der Doppellinie Const. $= 0$ noch eine Doppelerzeugende enthält. In derselben haben sich zwei Leitlinien spezieller Kongruenzen, wie auch zwei singuläre Erzeugende vereinigt. (Cremonas Aufzählung Nr. 6.)

3. δ und $\varkappa$ haben zwei verschiedene Berührungspunkte.

Die Developpable $(F_2\varkappa)$ zerfällt in zwei Abwickelbare zweiter Klasse mit zwei gemeinsamen Ebenen.	Die Singularitätenfläche besteht aus zwei Flächen zweiten Grades mit zwei gemeinsamen Erzeugenden jeder Schar. Die Direktrizen der linearen Kongruenzen bilden die eine Erzeugung auf jeder Fläche.

4. δ berührt $\varkappa$ dreipunktig in einem Punkte.

$(F_2\varkappa)$ ist eine Developpable vierter Klasse mit einer stationären Ebene. In dem besprochenen Berührungspunkte sind drei gemeinsame Punkte und ebensoviele Tangenten zusammengefallen.	Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierter Ordnung mit einer Doppellinie (Const. $= 0$) und einer stationären Erzeugenden, in der sich drei Leitlinien spezieller Kongruenzen, wie auch drei singuläre Erzeugende vereinigt haben. (Cremonas Nr. 6.)

5. δ berührt $\varkappa$ vierpunktig. [240

$(F_2\varkappa)$ ist zerfallen in zwei Kegel zweiten Grades, die einander nach einer gemeinsamen Erzeugenden berühren.

Die Singularitätenfläche wird von zwei Flächen zweiten Grades, deren Durchschnitt aus zwei doppeltzählenden Geraden besteht, gebildet.

6. δ und $\varkappa$ sind identisch.

Die Abwickelbare $(F_2\varkappa)$ ist ein doppeltzählender Kegel zweiten Grades, nämlich der Asymptotenkegel der betreffenden Kugel. Durch jede imaginäre Erzeugende geht nur eine Tangentenebene des Asymptotenkegels.

Die Singularitätenfläche ist eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades. Der Komplex wird in zwei Weisen von ∞^1 speziellen linearen Kongruenzen erzeugt, und hierbei bilden die betreffenden Leitlinien jedesmal dieselbe Erzeugung der Singularitätenfläche.

B. F_2 berührt die unendlich weit entfernte Ebene. Der Durchschnittskegelschnitt zerfällt in zwei Gerade g und j, die fünf verschiedene Lagen hinsichtlich $\varkappa$ haben können. Unter den linearen Kongruenzen jeder Gruppe gibt es im allgemeinen eine, deren zusammenfallende Leitlinien mit Const. $= 0$ identisch sind.

7. g und j haben eine allgemeine Lage hinsichtlich $\varkappa$.

Die Developpable $(F_2\varkappa)$ ist eine Abwickelbare vierter Klasse, unter deren Ebenen sich die unendlich entfernte zweimal befindet; sowohl g wie j schneiden $\varkappa$ in zwei Punkten. Durch den Durchschnittspunkt von g und j gehen zwei Tangenten an $\varkappa$.

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierter Ordnung mit einer Leitlinie, mit welcher zwei Erzeugende zusammenfallen. Es gibt in jeder Schar linearer Kongruenzen zwei spezielle, deren Leitlinien von Const. $= 0$ verschieden sind. Es gibt, wie schon früher gesagt, zwei singuläre Erzeugende, die mit

Const. $= 0$

zusammengefallen sind. (Cremonas Nr. 10.)

8. g berührt $\varkappa$, j schneidet denselben.

Die Developpable $(F_2\varkappa)$ zerfällt in ein Ebenenbüschel, dessen Achse g ist, und eine Abwickelbare dritter Klasse, unter deren Ebenen sich die unendlich entfernte einmal befindet. Die Erzeugenden des einen Systems schneiden g. Es gibt eine Erzeugende der Fläche F_2, die $\varkappa$ berührt.

Die Singularitätenfläche besteht aus einer Cayleyschen Linienfläche dritter Ordnung, zusammen mit einer durch die Doppellinie gehenden Ebene. Den Kongruenzen der einen Schar entsprechen Leitlinien, unter denen jedesmal die eine auf der Linienfläche liegt, während die zweite einem ebenen Büschel in jener Ebene angehört. Die Leitlinien der [241 zweiten Erzeugung liegen alle auf der Cayleyschen Linienfläche. Es gibt eine zerfallende Kongruenz.

9. Sowohl g wie j berührt $\varkappa$.

Die Abwickelbare $(F_2\varkappa)$ besteht aus einem Kegel zweiten Grades und zwei Ebenenbüscheln. F_2 hat zwei Erzeugende, eine aus jeder Schar, g und j, die $\varkappa$ berühren.

Die Singularitätenfläche besteht aus einer Fläche zweiten Grades und zwei Tangentenebenen derselben. Den Kongruenzen jeder Schar entsprechen Leitlinien, unter denen die eine auf der Linienfläche, die zweite in der einen Tangentenebene liegt. Es gibt zwei zerfallende lineare Kongruenzen.

10. Der Durchschnittspunkt der Geraden g und j liegt auf $\varkappa$.

Die Abwickelbare $(F_2\varkappa)$ ist eine Developpable vierter Klasse mit der unendlich entfernten Ebene als stationärer Ebene.

Die Singularitätenfläche ist eine Linienfläche vierter Ordnung mit einer dreifachen Linie, mit welcher die Erzeugende zweimal zusammenfällt. (Cremona, Nr. 10.) In jeder Kongruenzschar gibt es zwei spezielle; die Leitlinie der einen ist Const. $= 0$.

11. g berührt $\varkappa$ in einem Punkte, durch den j geht.

$(F_2\varkappa)$ besteht aus einer Developpablen dritter Klasse und einem Ebenenbüschel, dessen Achse g diejenige Linie jener Developpablen ist, die in der unendlich entfernten Ebene liegt.

Die Singularitätenfläche besteht aus einer Cayleyschen Linienfläche dritter Ordnung und der singulären Tangentenebene derselben. Es gibt eine zerfallende Kongruenz.

$F_2 = 0$ ist ein Kegel.

Der Komplex enthält im allgemeinen nur eine Schar linearer Kongruenzen.

C. Die Kegelspitze liegt im endlichen Raume. Die Developpable $(F_2\varkappa)$ ist ein doppeltzählender Kegel zweiten Grades. Die Singularitätenfläche ist eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades. Die Leitlinien der linearen Kongruenzen sind die Erzeugenden des einen Systems. Dieselben sind im allgemeinen Falle zweizweideutig auf einander bezogen.

12. δ und $\varkappa$ haben eine allgemeine gegenseitige Lage. Unter den linearen Kongruenzen gibt es vier spezielle.

13. δ und $\varkappa$ berühren einander einmal. Unter den vier speziellen Kongruenzen sind zwei zusammengefallen.

14. δ und $\varkappa$ berühren einander in zwei verschiedenen Punkten. [242
Unter den vier speziellen Kongruenzen fallen paarweise zwei zusammen.

15. δ und $\varkappa$ haben drei konsekutive Punkte gemein. Drei spezielle Kongruenzen fallen zusammen.

16. δ und $\varkappa$ haben vier konsekutive Punkte gemein. Alle speziellen Kongruenzen haben sich vereinigt.

17. δ und $\varkappa$ sind identisch. Alle linearen Kongruenzen sind spezielle. Zwei konsekutive Erzeugende der Fläche zweiten Grades bestimmen jedesmal eine Kongruenz, und somit besteht dieselbe aus allen Tangenten der Fläche längs jener Erzeugenden. In der Tat hat auch Herr Klein schon 1869 (Math. Annal. II, S. 198) angegeben, daß die Gleichung $X^2+Y^2+Z^2=0$ (die in gewöhnlicher Interpretation die Punktkugel bestimmt) alle Tangenten einer Fläche zweiten Grades definiert.

D. Die Kegelspitze liegt in der unendlich entfernten Ebene, die den Kegel nach zwei Geraden g und j schneidet.

18. g und j haben eine allgemeine Lage hinsichtlich $\varkappa$.

Die Developpable $(F_2\varkappa)$ besteht aus zwei doppeltzählenden Ebenenbüscheln. Die Singularitätenfläche ist in zwei Ebenen zerfallen. In diesen Ebenen liegt je ein Strahlenbüschel, deren Gerade zweizweideutig auf einander bezogen sind. Entsprechende Gerade sind Direktrizen einer linearen Kongruenz, die dem Komplexe angehört. Unter den Kongruenzen gibt es zwei, und zwar spezielle, deren Direktrizen mit Const. $=0$ identisch sind.

19. g schneidet $\varkappa$, j berührt denselben.

Die Geraden der beiden Strahlenbüschel sind einzweideutig auf einander bezogen. Es gibt nur eine spezielle Kongruenz, deren Leitlinien in Const. $=0$ zusammengefallen sind, außerdem aber eine zerfallende Kongruenz.

20. g und j berühren beide $\varkappa$.

Die beiden Strahlenbüschel sind eindeutig auf einander bezogen. Der Komplex ist eine Degeneration desjenigen, dessen Gerade ein Tetraeder nach konstantem Doppelverhältnisse schneiden. Zwei zerfallende Kongruenzen.

21. Der Schnittpunkt der Linien g und j liegt auf $\varkappa$.

Die Singularitätenfläche besteht nur aus einer vierfachen Ebene. Der Komplex besteht aus einer Schar spezieller linearer Kongruenzen, deren Leitlinien ein ebenes Büschel bilden. Hierbei ist jede Linie des Büschels Leitlinie zweier spezieller Kongruenzen.

22. g berührt $\varkappa$ in einem Punkte, durch den j geht.

Die Singularitätenfläche ist eine vierfache Ebene. Der Komplex besteht aus einer Schar spezieller linearer Kongruenzen, deren Leitlinien ein ebenes Strahlenbüschel bilden. Jede Linie des Büschels ist Leitlinie [243
einer Kongruenz. Es gibt eine von Const. $=0$ verschiedene Leitlinie, welcher eine zerfallende Kongruenz entspricht.

E. Der Kegel F_2 berührt die unendlich entfernte Ebene nach einer Geraden g.

23. Die Kegelspitze und g haben eine allgemeine Lage hinsichtlich $\varkappa$.

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei ebenen Strahlenbüscheln, deren Gerade zweizweideutig auf einander bezogen sind. Entsprechende Linien sind Direktrizen einer linearen Kongruenz. Es gibt eine doppeltzählende Kongruenz, deren Leitlinien in Const. $=0$ zusammengefallen sind. Const. $=0$ entspricht sich selbst, sowohl wenn man dieselbe als dem ersten Büschel, wie als dem zweiten angehörig betrachtet.

24. g berührt $\varkappa$. Die Kegelspitze liegt nicht auf $\varkappa$.

Die Singularitätenfläche besteht aus zwei ebenen Strahlenbüscheln, die einzweideutig auf einander bezogen sind. Const. $=0$ entspricht sich selbst, sowohl wenn sie als dem einen, als dem andern Büschel angehörig betrachtet wird.

25. Die Kegelspitze liegt auf $\varkappa$; g hat eine allgemeine Lage.

Die Singularitätenfläche ist eine vierfache Ebene. Der Komplex besteht aus einer Schar spezieller Kongruenzen, deren Leitlinien ein ebenes Strahlenbüschel zweimal erzeugen. Es gibt zwei Gerade in dem Büschel, welche nur für je eine spezielle Kongruenz Leitlinien sind, und zwar ist Const. $=0$ die eine.

26. Die Kegelspitze liegt auf dem Kegelschnitte $\varkappa$, der von g berührt wird.

Der Komplex besteht aus einer Schar spezieller Kongruenzen, deren Leitlinien einmal ein ebenes Strahlenbüschel erzeugen. Der Leitlinie Const. $=0$ entspricht eine zerfallende Kongruenz. Der Komplex ist eine Degeneration desjenigen, dessen Gerade ein Tetraeder nach konstantem Doppelverhältnisse schneiden.

Es bleibt die Frage zu entscheiden, ob diese 26 Komplexe wesentlich verschieden sind. Wie die Untersuchung derselben zeigt, sind 21 und 25, wie auch 22 und 26 paarweise identisch, und sonst keine. Es gibt also 24 verschiedene Komplexe zweiten Grades, deren Gleichung die Form $F_2(X, Y, Z) = 0$ erhalten kann. Die Haupttangentenkurven derselben hängen von hyperelliptischen Transzendenten oder einfacheren Funktionen ab.

Die Linienkomplexe $F(X, Y, Z) = 0$ sind, wie ich wiederholt bemerkt habe, als Degenerationen derjenigen Komplexe zu betrachten, die durch eine homogene Gleichung zwischen X, Y, Z, H dargestellt wer- [244 den. Diese letzten Komplexe können dadurch charakterisiert werden, daß ihre Singularitätenflächen Regelflächen mit zwei geraden Leitlinien sind. Hierher gehören insbesondere alle Komplexe zweiten Grades, deren Singularitätenfläche eine Regelfläche ist.

Nach Herrn Klein entsprechen jeder Kummerschen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten, und also zugleich jeder Regelfläche vierter Ordnung mit zwei Doppellinien einfach unendlich viele Komplexe zweiten Grades, deren gemeinsame Singularitätenfläche die Fläche ist. Jeder Komplex bestimmt eine Kurve auf der Fläche, den geometrischen Ort nämlich aller Punkte, deren sämtliche zugehörige Tangenten Komplexlinien sind. Diese Kurve ist eine Haupttangentenkurve. Es ist eben in dieser Weise, daß Herr Klein die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche findet.

Diese Bestimmungsweise wird in gewissem Sinne illusorisch, wenn die Fläche eine Regelfläche ist, weil man alsdann bei direkter Anwendung von Herrn Kleins Methode nur die Erzeugenden selbst findet. Dies liegt daran, daß die einer solchen Regelfläche zugehörige Schar von Komplexen in ein System von Komplexen zweiten Grades und ein System linearer Komplexe:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2 = \text{Const.}$$

zerfällt. Diese letzteren Komplexe stehen, wie ich in § 12 unter einem anderen Gesichtspunkte gefunden habe, in derjenigen Beziehung zu der Regelfläche, in welcher nach Klein ein allgemeiner Komplex zweiten Grades zu seiner Singularitätenfläche steht.

§ 24. Über die Haupttangentenkurven des allgemeinen Komplexes zweiten Grades.

76. Ein jeder Linienkomplex bestimmt (§ 3, Nr. 10; § 14) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung D_{11}, deren Charakteristiken von den Geraden des Komplexes umhüllt werden, und insofern existiert für einen gewissen Gesichtspunkt ein Zusammenhang zwischen der Plückerschen Liniengeometrie und der Mongeschen Theorie partieller Differentialgleichungen. Diese Bemerkung macht es a priori plausibel, bei dem Studium der Komplexe den Haupttangentenkurven derselben eine besondere Aufmerksamkeit zu widmen, und hoffentlich wird der Inhalt des dritten Abschnitts bewiesen haben, daß eine solche Richtung der Untersuchung in der Tat fruchtbar ist. Insbesondere schien es mir wahrscheinlich, daß die Bestimmung der Haupttangentenkurven des allgemeinen Komplexes zweiten Grades Interesse darbieten würde, dies um so mehr, weil diese Kurven für den Komplex, dessen Singularitätenfläche ein Tetraeder [245 ist, mit den von Herrn Klein und mir unter der Bezeichnung der Kurven W untersuchten identisch sind, und diese letzten Kurven — als ein räumliches Analogon der logarithmischen Spirale — höchst merkwürdige Eigenschaften besitzen.

Für einen Komplex mit 16 Konstanten führte ich, wie im vorangehenden Paragraphen auseinandergesetzt, die betreffende Differentialgleichung auf das von Jacobi gelöste Problem: die geodätischen Kurven einer Fläche zweiten Grades zu finden, zurück. Endlich fand ich, daß auch der allgemeine Fall von der Integration eines bestimmbaren algebraischen Differentials abhing (Akademie zu Christiania, Okt. 1870 [d. Ausg. Bd. I, Abh. 9, S. 95 f.]); die Form dieses Differentials zu bestimmen, war mir aber noch nicht gelungen, als eine briefliche Mitteilung des Herrn Klein mir es möglich machte, dasselbe, oder eigentlich ein damit äquivalentes, hinzuschreiben.[1])

77. Die folgenden Betrachtungen waren der Ausgangspunkt für den geometrischen Weg, der mich zu dem obenstehenden Resultate führte.

a) Herr Klein hat gefunden, daß die Kummersche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten gemeinsame Singularitätenfläche ist für ein-

1) In der zweiten der nachstehenden Abhandlungen gibt Herr Klein eine elegante und vollständige algebraische Lösung des hier betrachteten Problems. Herr Darboux teilt mir eben mit, daß er die betreffende Kugelaufgabe erledigt hat, und zwar in einer Weise, die durch meine Kugelabbildung genau der von Herrn Klein befolgten Methode entspricht.

fach unendlich viele Komplexe zweiten Grades, deren allgemeine Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{k_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{k_2+\lambda}+\cdots+\frac{x_6^2}{k_6+\lambda}=0$$

derjenigen der konfokalen Flächen zweiten Grades analog ist. Diese Komplexe werde ich mit Herrn *Klein* als *konfokale Komplexe zweiten Grades* bezeichnen.

b) Die Kugeln, deren Zentren auf einer beliebigen Fläche zweiten Grades aus einem gegebenen konfokalen Systeme liegen, bilden sich (§ 23, Nr. 72) jedesmal als einer unter einfach unendlich vielen Linienkomplexen ab, die eine Linienfläche vierten Grades als gemeinsame Singularitätenfläche besitzen.

c) Der bekannte Satz, daß, wenn man auf einer Fläche zweiten Grades die Tangenten einer geodätischen Kurve zieht, dieselben eine konfokale Fläche berühren, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß zwei konfokale Flächen zweiten Grades die vollständige Zentrafläche für eine Schar paralleler Flächen bilden, transformiert sich durch meine Kugelabbildung in das folgende Theorem: Den unter **b)** untersuchten konfokalen Linien- [246
komplexen entsprechen Differentialgleichungen D_{11}, die paarweise einfach unendlich viele gemeinsame Integrale besitzen.

d) Aus Herrn *Kleins* und meinen Untersuchungen über Flächen W folgt, daß zwei Komplexe zweiten Grades, deren gemeinsame Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, jedesmal einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen besitzen.

Es schien mir wahrscheinlich, daß die beiden letzten Sätze, die sich auf *verschiedenartige* Komplexe zweiten Grades beziehen, Spezialfälle des folgenden Theorems seien:

Zwei konfokale Komplexe zweiten Grades besitzen einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen.

78. Indem ich meine Aufmerksamkeit auf die entsprechenden Kugelkomplexe und die zugehörigen D_{12} richtete, sah ich, daß, wenn meine Vermutung richtig war, *für die dreifach unendlich vielen gemeinsamen Flächenelemente zweier D_{12} jedesmal die beiden zugehörigen charakteristischen Richtungen orthogonal sein mußten*. Daß diese notwendige Forderung auch genügt, folgt aus dem bekannten Satze: Zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung besitzen einfach unendlich viele gemeinsame Integrale, wenn für die dreifach unendlich vielen gemeinsamen Flächenelemente jedesmal die charakteristische Richtung jeder Gleichung mit der Trajektorienrichtung der anderen zusammenfällt.

Es war also notwendig und hinreichend, zu beweisen, daß die einer beliebigen Kugel durch unsere einfach unendlich vielen D_{12} zugeordneten Trajektorienkurven (§ 18, Nr. 55) ein Orthogonalsystem bilden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß dieses mit den einem beliebigen Punkte zugehörigen einfach unendlich vielen Normalenkegeln der Fall ist (§ 18, Nr. 55). Wenn nun $H=0$ ein linearer Komplex des konfokalen Systems ist, so sind die besprochenen Kegel, wie man leicht sieht, vom zweiten Grade, und also müssen sie vier gemeinsame Tangentenebenen, welche zugleich den imaginären Kreis berühren, besitzen. Alsdann müssen die einem beliebigen Punkte zugehörigen elementaren Komplexkegel vier gemeinsame Erzeugende, deren Länge gleich Null ist, haben.

Dieses letzte ist aber, wie wir sogleich beweisen werden, durch unsere Kugelabbildung eine Konsequenz davon, daß die betreffenden Linienkomplexe dieselbe Singularitätenfläche haben. Man betrachte nämlich im Raume R einen Kugelkomplex des konfokalen Systems und einen beliebigen Punkt P, andererseits in r den entsprechenden Linienkomplex und die Linie l, welche das Bild von P ist. Die Kugeln unseres Komplexes, deren Trajektorienkreise durch P gehen, umhüllen den zugehörigen elementaren Komplex- [247
kegel und bilden sich in r als Gerade g[1]) ab, welche l schneiden und zugleich in diesem Schnittpunkte einen Komplexkegelschnitt, dessen Ebene die Linie l enthält, berühren. Wenn zwei konsekutive Gerade g einander in einem auf l gelegenen Punkte p schneiden — was nur in den vier Schnittpunkten p_1, p_2, p_3, p_4 von l mit der Singularitätenfläche eintritt —, so berühren sich die Bildkugeln, deren Durchschnittskurve somit zerfällt, und zwar in eine durch P gehende Gerade L zusammen mit einer anderen imaginären Linie, die hier nicht in Betracht kommt. Nun sind die Geraden L_1, L_2, L_3, L_4 einerseits die Bilder der Punkte p_1, p_2, p_3, p_4, andererseits liegen sie auf dem elementaren Komplexkegel, und also enthalten, wie früher behauptet, die einem Punkte zugehörigen elementaren Komplexkegel vier gemeinsame Linien, die den imaginären Kreis schneiden.

Zwei konfokale Linienkomplexe zweiten Grades bestimmen immer einfach unendlich viele Flächen, deren beide Systeme von Haupttangenten beziehungsweise den beiden Komplexen angehören. Wenn die gemeinsame Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, so sind die eben besprochenen Flächen mit denen identisch, welche Herr **Klein**

1) Die Komplexlinien g gehören der Polarkongruenz der Geraden l hinsichtlich unseres Komplexes an. Vgl. *Plücker*, Neue Geometrie des Raumes, Nr. 304.

und ich unter der Bezeichnung: Flächen W untersucht haben.[1])

Mit Berücksichtigung dieses Satzes, wie der Entwickelungen in Nummer 50 würde es nicht schwer sein, zu beweisen, daß die Haupttangentenkurven eines Komplexes zweiten Grades mit 17 Konstanten:

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dH^2 = 0$$

durch Quadratur eines algebraischen Differentials bestimmt werden können; ich gehe aber darauf nicht näher ein.

79. Eine Schar konfokaler Kugelkomplexe zweiten Grades ordnet nach dem Obenstehenden jedem Punkte P einfach unendlich viele konfokale Kegel zweiten Grades zu[2]), und offenbar befinden sich unter den- [248
selben drei paarweise orthogonale Ebenen, den drei[3]) Komplexen, welche die Punktkugel P enthalten, entsprechend. Man erkennt leicht, daß diese Ebenen in P drei Flächen berühren, solche nämlich, die den geometrischen Ort für Punktkugeln unserer Komplexe bilden. Berücksichtigt man nun, daß diese Flächen, als das Bild einer Schar Linienkongruenzen zweiter Ordnung und Klasse, von vierter Ordnung sind und dabei den unendlich weit entfernten, imaginären Kreis zweifach enthalten, so kann man den folgenden Satz aussprechen:

Die Punktkugeln konfokaler Kugelkomplexe zweiten Grades bilden einfach unendlich viele Flächen vierter Ord-

1) Wenn ein Komplex zweiten Grades aus unserem konfokalen Systeme kontinuierlich in einen doppeltzählenden linearen Komplex übergeht, so wird die zugehörige D_{11} eine lineare Differentialgleichung, und zwar entspricht dieselbe der dem linearen Komplexe zugehörigen Kongruenz zweiter Ordnung und Klasse, welche von Doppeltangenten der betreffenden Kummerschen Fläche gebildet wird.

Setzen wir nun voraus, daß in dem Satze des Textes der eine Komplex ein allgemeiner, der zweite ein linearer ist, so werden also die gemeinsamen Integralflächen Linienflächen. Unter den Integralflächen eines Komplexes zweiten Grades befinden sich im allgemeinen sechs Scharen von Regelflächen, deren Erzeugende die Singularitätenfläche zweifach berühren.

Wenn beide Komplexe linear sind, so erhält man den folgenden Satz: Zwei beliebige unter den sechs Kongruenzen zweiter Ordnung und Klasse, die einer Kummerschen Fläche angehören, bestimmen einfach unendlich viele Hyperboloide, deren Erzeugende beziehungsweise den beiden Kongruenzen angehören. Diese Hyperboloidscharen zerfallen übrigens jedesmal in zwei Gruppen.

2) Wenn die konfokalen Kugelkomplexe von Kugeln gebildet werden, deren Mittelpunkte auf konfokalen Flächen zweiten Grades liegen, so sind die im Texte besprochenen konfokalen Kegel Tangentenkegel der genannten Flächen.

3) Außerdem gehört die Punktkugel P dem linearen Komplexe $H = 0$ an.

nung, die einem irreduktiblen Orthogonalsysteme, und zwar dem **Darboux-Moutard**schen angehören.

Wählt man nun, wie sich von selbst darbietet, dieses Orthogonalsystem zum Koordinatensysteme und zu Punktkoordinaten die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der durch einen Punkt gehenden Flächen, so läßt sich die Gleichung D_{12} eines Komplexes, dessen Parameter c ist, folgendermaßen schreiben:

$$(1)\quad f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1}\right)^2 + f(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1, c)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2}\right)^2 + f(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, c)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3}\right)^2 = 0.$$

Dieses liegt daran, daß die früher besprochenen drei orthogonalen Tangentenebenen jedesmal Hauptebenen des elementaren Komplexkegels sind.

Wenn nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ konstant bleiben, c dagegen variiert, so müssen wir nach dem obigen eine Schar Kegel erhalten, welche vier Erzeugende, und zwar solche, die den imaginären Kreis schneiden, gemein haben. Die Gleichung dieser Kegel in Ebenenkoordinaten hat dieselbe Form wie diejenige konfokaler Kegel in Punktkoordinaten, und also kann $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c)$ auf die Form:

$$\frac{F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c) - \varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1)}$$

gebracht werden. Der Nenner darf nur unter der Voraussetzung $c = \lambda_1$ verschwinden, und also muß $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c)$ eine ganze und lineare Funktion der Größe c sein[1]):

$$\varphi = \psi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)c + \psi_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \qquad [249$$

Bei Einsetzung dieses Wertes erhält $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, c)$ die folgende Form:

$$\frac{\Pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{c - \lambda_1}.$$

Wenn nun unter den drei Funktionen Π die eine gleich Null wird, so zerfallen alle dem betreffenden Punkte zugehörigen elementaren Komplexkegel in zwei ebene Büschel, deren Achsen in einer gemeinsamen Ebene liegen. Dieses tritt nur ein, wenn der Punkt λ auf einer unter den fünf Kugeln, die unserem Orthogonalsysteme angehören, gelegen ist.

Wenn andererseits unter den Funktionen Π die eine unendlich wird, (oder, was auf dasselbe hinauskommt, zwei zu gleicher Zeit verschwinden), so gehen alle elementaren Komplexkegel in dasselbe doppeltzählende Ebenenbüschel über. Dieses kann nur eintreten, wenn sich der Punkt λ

1) Es wäre auch denkbar, daß φ eine ganze und lineare Funktion des folgenden Ausdrucks $(a + c) : (b + c)$ wäre, dabei vorausgesetzt, daß a und b nur von den Variabeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ abhängen. Dieser Fall wird leicht auf den im Texte besprochenen zurückgeführt.

auf der dem Orthogonalsysteme zugehörigen imaginären Developpablen befindet.

In dieser Weise läßt sich beweisen, daß $\Pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ auf die folgende Form gebracht werden kann[1]):

$$\frac{F(\lambda_1)}{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_3)},$$

daß sich also (1) folgendermaßen schreiben läßt:

$$U(c) = \frac{F(\lambda_1)}{\varphi(\lambda_2) - \varphi(\lambda_3)} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1}\right)^2}{\lambda_1 - c} + \frac{F(\lambda_2)}{\varphi(\lambda_3) - \varphi(\lambda_1)} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2}\right)^2}{\lambda_2 - c} + $$
$$+ \frac{F(\lambda_3)}{\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2)} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3}\right)^2}{\lambda_3 - c} = 0.$$

Ich betrachte nun die einfach unendlich vielen gemeinsamen Integralflächen der beiden Gleichungen:

$$U(c_1) = 0, \quad U(c_2) = 0 \tag{2}$$

und die entsprechenden Durchschnittskurven mit einer gewählten Fläche λ_1. Diese Kurvenschar wird bestimmt durch eine Differentialgleichung zwischen λ_2 und λ_3, die sich aus (2) herleiten läßt, und zwar findet man, daß die Variabeln unmittelbar separiert werden können. Es werden aber die besprochenen Integralflächen zweifach von solchen Durchschnittskurven erzeugt, und also gibt die allgemeine Gleichung der Kurven zugleich die Gleichung der zugehörigen Integralflächen.

Läßt man endlich c_2 variieren, c_1 dagegen konstant bleiben, so erhält man ein vollständiges Integral der Differentialgleichung $U(c_1) = 0$, und also können wir behaupten, daß die Bestimmung der Haupt- [250 tangentenkurven des allgemeinen Komplexes zweiten Grades auf Quadratur eines algebraischen Differentials zurückgeführt werden kann.

80. Im Anschlusse an das Vorangehende möchte ich hier anführen, daß ich durch ähnliche Betrachtungen den folgenden interessanten Satz gefunden habe:

Wenn zwei beliebige Linienkomplexe eines irreduktiblen Systems jedesmal einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen besitzen, so haben die Komplexe dieselbe Singularitätenfläche.

1) Meine Betrachtungen schließen die Möglichkeit nicht aus, daß $\Pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ nur von λ_1 abhängt, worauf ich aber hier nicht näher eingehen will

Herr Klein teilt mir den folgenden einfachen Beweis dieses Satzes mit: Nach Voraussetzung müssen auch zwei konsekutive Komplexe des Systems ∞^1 gemeinsame Integralflächen haben. Die beiden Scharen von Haupttangenten einer solchen Fläche können, wie die Komplexe, nur unendlich wenig verschieden sein, das heißt, die Fläche ist eine Developpable. Nun besitzt aber ein Komplex unter seinen Integralflächen keine anderen Developpablen, als die einfach unendlich vielen seiner singulären Linien. Der konsekutive Komplex hat also mit dem gegebenen dessen singuläre Linien gemein, und das ist für die Komplexe mit gemeinsamer Singularitätenfläche charakteristisch.

Benutzt man den von Klein, Göttinger Nachr. 1871, Nr. 4 eingeführten Begriff der involutorischen Lage zweier Linienkomplexe, so gilt der folgende Satz:

Besitzen die zweien Linienkomplexen zugehörigen D_{11} einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen, so liegen die Komplexe in Involution.

Mein anfänglich gegebener Satz folgt als Korollar aus diesem in Verbindung mit einem Theoreme, welches mir Herr Klein mitgeteilt hat:

Liegen die Komplexe eines irreduktiblen Systems paarweise in Involution, so besitzen dieselben eine gemeinsame Singularitätenfläche.

§ 25. Zusammenhang zwischen der Theorie zweier Flächen vierter Ordnung.

81. Unter den Flächen vierter Ordnung gibt es zwei, zuerst von Herrn Kummer untersuchte, welche ich hier betrachten will: die mit 16 Knotenpunkten, f_4, und die mit einem Doppelkegelschnitte, F_4. Beide Flächen geben Anlaß zu einer Gleichung sechzehnten Grades; die eine durch ihre Knotenpunkte, die andere durch die auf ihr gelegenen geraden Linien. Die letztere führte Herr Clebsch auf eine schon von Herrn [251 Kummer aufgestellte Gleichung fünften Grades zurück. (Borchardts Journal Bd. 67.) Andererseits fand Herr Jordan, daß die erste Gleichung auf eine solche vom sechsten Grade zurückkommt (Borchardts Journal Bd. 70). Es fand dies seine geometrische Begründung in den auf diese Fläche bezüglichen Untersuchungen des Herrn Klein (Math. Ann. Bd. II). Derselbe fand ferner, als er sich im Herbste 1869 mit der eben von Herrn Nöther gegebenen Abbildung des linearen Komplexes beschäftigte, daß jene Abbildung einen allgemeinen und einfachen Zusammenhang zwischen beiden Flächen darlegt, insbesondere die beiden Gleichungen sechzehnten Grades in Verbindung setzt (vgl. eine Note, diese Ann. Bd. IV., S. 357). Einige Monate später fand ich durch meine Imaginärtheorie, unabhängig von den genannten Herren, dieselbe Abbildung, wie auch den betreffenden Zusammenhang, worüber ich indes damals nichts veröffentlichte.

Nachdem ich im Sommer 1870 gefunden hatte, daß sich die Nöthersche Abbildung als Grundlage einer weitergehenden Theorie betrachten ließ, war es natürlich, daß ich zuerst meine Theorien auf die beiden genannten Flächen anwandte. In dieser Weise fand ich sogleich, daß die Darboux-Moutardsche Bestimmung der Krümmungslinien auf derjenigen F_4, die den imaginären Kugelkreis enthält, die Haupttangentenkurven auf der Kummerschen Fläche f_4 ergibt. Ich werde im folgenden zeigen, wie sich mehrere andere, im allgemeinen bekannte Theorien dieser Flächen durch die Nöthersche Abbildung und meine darauf begründete Kugelabbildung in einander überführen lassen.

Eine jede auf F_4 gelegene Kurve n-ter Ordnung schneidet den imaginären Kreis in n Punkten und bildet sich also (§ 8, Nr. 26) in r als eine Linienfläche n-ter Ordnung ab, die f_4 nach einer Kurve $2n$-ter Ordnung berührt. Beispielsweise geben die 16 Geraden von F_4, von denen jede fünf der übrigen schneidet, 16 ebene Strahlenbüschel, die f_4 nach Kegelschnitten berühren, und hierbei hat jedes Büschel eine Gerade mit fünf anderen gemein (§ 7, Nr. 21). Ferner gehen die auf F_4 gelegenen zehn Kreisscharen über in zehn Hyperboloidscharen, die f_4 nach Kurven vierter Ordnung berühren, und so weiter.[1])

Die allgemeinen Entwickelungen in Nr. 25 zeigen, daß sich die [252 auf F_4 gelegenen Kurven C, deren Länge gleich Null ist, als Kurven c auf f_4 abbilden, deren Tangenten diese Fläche zweifach berühren. Nun hat einerseits Herr Darboux (nach einer mündlichen Mitteilung) gefunden, daß sich die Auffindung der Kurven C auf Quadratur zurückführen läßt, andererseits hat Herr Klein dieselbe Bemerkung hinsichtlich derjenigen auf f_4 gelegenen Kurven gemacht, deren Tangenten singuläre Linien eines zugehörigen Komplexes zweiten Grades sind (vgl. Gött. Nachr. 1871, Nr. 1). Setzt er insbesondere voraus, daß der Komplex ein linearer ist, so findet er die Kurven c, und offenbar ist diese letzte Bestimmung durch meine Abbildung mit derjenigen des Herrn Darboux äquivalent.

1) Die hier angedeutete Methode zur Diskussion der Kummerschen Fläche und einer zugehörigen Kongruenz zweiter Ordnung und Klasse gründet sich auf die Abbildung des linearen Komplexes in einem Punktraume. Einfacher ist es, den Ausgangspunkt in der Abbildung desjenigen Komplexes, dessen Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, zu nehmen. (Lie, Repr. der Imag., Akademie zu Christiania 1869, S. 107, 122—130. [Diese Ausg. Bd. I, Abh. IV, S. 33, 46—59].)

82. Die Herren Darboux und Moutard haben bekanntlich gefunden, daß eine F_4 auf fünf Weisen als vollständige Enveloppe von zweifach unendlich vielen Kugeln, die jedesmal eine Kugel S orthogonal schneiden, aufgefaßt werden kann. Diese fünf Kugeln S schneiden einander paarweise orthogonal; ferner führt eine Transformation durch reziproke Radien hinsichtlich einer Kugel S jedesmal die F_4 in sich selbst über.

Andererseits hat Herr Kummer gezeigt, daß die Doppeltangenten einer f_4 sechs Kongruenzen zweiter Ordnung und Klasse bilden, und hierbei liegen die sechs entsprechenden linearen Komplexe C nach Herrn Klein paarweise in Involution. Die Fläche transformiert sich in sich selbst einerseits durch eine jede reziproke Umformung hinsichtllich eines linearen Komplexes C, andererseits durch die 15 reziproken Punkttransformationen, zu denen sich die eben besprochenen Transformationen paarweise zusammensetzen lassen.

Diese letzte Theorie geht, wenn $H=0$ als ein Komplex C gewählt wird, durch meine Kugelabbildung unmittelbar in die erste über.

83. Herrn Kleins Darstellung eines Systems konfokaler Linienkomplexe mittels seiner sechs Fundamentalkomplexe: $x_1=0$, $x_2=0, \ldots,$ $x_6=0$:

$$\frac{x_1^2}{k_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{k_2+\lambda}+\cdots+\frac{x_6^2}{k_6+\lambda}=0, \tag{1}$$

wobei die Linienkoordinaten einer Bedingungsgleichung:

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_6^2=0$$

genügen, gibt eine elegante Form[1]) für die allgemeine Gleichung eines Darboux-Moutardschen Orthogonalsystems, die folgende nämlich: [253

$$\frac{s_1^2}{k_1+\lambda}+\frac{s_2^2}{k_2+\lambda}+\cdots+\frac{s_5^2}{k_5+\lambda}=0. \tag{2}$$

Die fünf Punktkoordinaten $s_1, s_2, \ldots, s_5$, zwischen denen eine Bedingungsgleichung:

$$s_1^2+s_2^2+\cdots+s_5^2=0$$

stattfindet, bezeichnen die mit gewissen Koeffizienten multiplizierten Potenzen eines Punktes hinsichtlich der fünf paarweise orthogonalen Kugeln S.

Herr Klein hat aus der Gleichung (1) geschlossen, daß sich die Geraden eines Komplexes zweiten Grades in Gruppen zu 32 zusammenfassen

1) Es ist mir nicht bekannt, daß diese Form veröffentlicht worden ist. Nach einer brieflichen Mitteilung des Herrn Darboux findet sich diese indessen bereits in einem ungedruckten Mémoire, welches er 1868 der Pariser Akademie eingereicht hat.

lassen, und zwar in solcher Weise, daß eine jede unter den früher besprochenen Transformationen eine beliebige Gruppe in sich selbst überführt. Ebenso zeigt (2), daß sich die Punkte einer F_4 zu 16 zusammenordnen, dergestalt, daß eine jede Transformation durch reziproke Radien hinsichtlich einer Kugel S die Gruppe ungeändert läßt. Auf die Existenz dieser Punktgruppen hat mich Herr Darboux aufmerksam gemacht.[1])

Man betrachte einen Linienkomplex, dessen Gleichung nur die Quadrate der Kleinschen Koordinaten $x_1, \ldots, x_6$ enthält. Der Komplex, wie auch die Singularitätenfläche, sind ihre eigenen reziproken Polaren hinsichtlich eines jeden der sechs Fundamentalkomplexe. Infolgedessen ordnen sich die Doppeltangenten jener Fläche im allgemeinen in sieben Kongruenzen, unter denen sechs je einem Fundamentalkomplexe angehören. Nach einem Satze von mir (§ 12) findet man sechs algebraische Haupttangentenkurven, die nach Herrn Klein zugleich Kurven vierpunktiger Berührung sind. Diese Sätze übertragen sich sämtlich auf Kugelgeometrie.[2])

Hier mag die Bemerkung ihren Platz finden, daß Herrn Moutards Untersuchungen über Flächen, die von zweifach unendlich vielen Orthogonalkugeln einer Kugel umhüllt werden, durch meine Abbildung einem Studium von Linienkongruenzen, die einem linearen Komplexe angehören, entsprechen.

§ 26. Zur Theorie des linearen Komplexes. Über Herrn Kleins metrische Liniengeometrie. [254

84. Im Raume r treten bei unserer Kugelabbildung ein linearer Komplex $H = 0$ und eine Gerade desselben Const. $= 0$ als ausgezeichnete Gebilde auf; andererseits ist der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis ein Fundamentalgebilde in R, und zwar das einzige. Es folgt hieraus, daß die gewöhnliche metrische Geometrie, die sich ja überhaupt mit auf den ge-

1) Bemerkenswert ist auch, daß die Aufgaben: alle Spezialformen der Flächen F_4 und f_4 anzugeben, äquivalente Probleme sind. Die Untersuchungen des Herrn Korndörfer (Math. Ann. I, S. 592, II, S. 41) lassen sich also für die Theorie der Kummerschen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten verwerten.

2) Sind F_1, F_2, F_3 rationale Funktionen von $x_1^2, x_2, x_3, x_4, x_5$ und x_6, so definieren die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ eine Linienfläche, die ihre eigene reziproke Polare hinsichtlich $x_1 = 0$ ist. Infolgedessen findet man (§ 12) eine algebraische Haupttangentenkurve auf derselben und darnach die übrigen durch Quadratur. Geht auch x_2 nur mit seinem Quadrate in die Gleichungen ein, so ist die Linienfläche ihre eigene Polare, sowohl hinsichtlich $x_2 = 0$ wie hinsichtlich $x_1 = 0$. Alsdann findet man zuerst zwei algebraische Haupttangentenkurven und darnach die übrigen durch algebraische Operationen.

nannten Kreis bezüglichen projektivischen Beziehungen beschäftigt, in eine Geometrie[1]) übergeht, deren Gegenstand kovariante Beziehungen hinsichtlich eines linearen Komplexes und einer Geraden desselben sind. Entsprechende Bemerkungen können hinsichtlich einer jeden Abbildung gemacht werden, bei welcher Fundamentalgebilde in zwei Räumen auftreten. Ohne auf das hiermit angedeutete geometrische Prinzip näher einzugehen, werde ich das Obengesagte durch einige Beispiele, unter denen insbesondere das letzte wichtig ist, erklären.

a) Es läßt sich die Aufgabe stellen, alle Gruppen linearer Transformationen anzugeben. Ich sage dabei, daß eine kontinuierliche oder diskontinuierliche Schar Transformationen eine Gruppe bildet, wenn die Kombination einiger dieser Transformationen jedesmal mit einer Transformation der gegebenen Schar äquivalent ist. Herr Jordan hat insbesondere alle Gruppen von Bewegungen bestimmt (Annali, Ser. II, t. II).

Erinnert man sich nun (§ 13, Nr. 36), daß den Bewegungen des Raumes R lineare Transformationen des anderen Raumes entsprechen und zwar solche, bei denen einfach unendlich viele lineare Komplexe, die einander nach einer gemeinsamen Geraden berühren, in sich übergeführt werden, so sieht man, daß unsere Abbildung, auf die Jordansche Theorie angewandt, alle Gruppen unter den eben besprochenen linearen Transformationen ergibt.

b) Die Flächen eines irreduktiblen Orthogonalsystems in R sind bekanntlich in eine imaginäre Developpable eingeschrieben; demzufolge bilden sie sich in r als Kongruenzen C ab, deren Brennflächen[2]) ein- [255
ander nach einer gemeinsamen Haupttangentenkurve berühren. Der bekannte Satz, daß die Flächen eines Orthogonalsystems einander nach

1) Bemerkenswert ist, daß dem Winkelbegriffe des Raumes R im anderen Raume ein Begriff entspricht, der sich nur auf den linearen Komplex $H = 0$, dagegen nicht auf die Gerade Const. $= 0$ bezieht. Der Beweis liegt darin, daß einer jeden Transformation des Raumes r, die den Komplex $H = 0$ in sich überführt, eine Umformung von R entspricht, bei welcher alle Winkel ungeändert bleiben (§ 13, Nr. 36).

2) Wenn das gegebene Orthogonalsystem das Darboux-Moutardsche ist, so sind die Brennflächen (§ 24, Nr. 79) eine Schar Kummerscher Flächen vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten, die einander nach einer gemeinsamen Haupttangentenkurve achter Ordnung und Klasse berühren und sonst keinen Schnittpunkt haben. Es ist bemerkenswert, daß, wenn man unter diesen Flächen eine beliebige nimmt und alle zugehörigen konfokalen Komplexe zweiten Grades betrachtet, die im Texte besprochene Kongruenzschar sich immer als Durchschnitt dieser Komplexe mit einem doppeltzählenden linearen Komplexe desselben Systems auffassen läßt.

Krümmungslinien schneiden, zeigt mit Berücksichtigung des Theorems in § 12, Nr. 33, daß die gemeinsamen Geraden zweier Kongruenzen C eine Linienfläche bilden, welche die beiden zugehörigen Brennflächen nach Haupttangentenkurven berührt. Nun gibt es bekanntlich unbegrenzt viele Orthogonalsysteme, und also kann ein linearer Komplex auf unbegrenzt viele Weisen zerlegt werden in Kongruenzen, welche die Eigenschaft besitzen, daß die zweien Kongruenzen gemeinsame Linienfläche jedesmal die zugehörigen Brennflächen nach Haupttangentenkurven berührt.[1])

85. Schon in der Einleitung habe ich hervorgehoben, daß ich, während ich mich mit den Ideen dieser Abhandlung beschäftigte, in lebhaftem Verkehr mit Herrn Klein gewesen bin. Derselbe teilte meine Überzeugung, daß der von mir gefundene Zusammenhang zwischen Liniengeometrie und Kugelgeometrie, wie auch zwischen Haupttangentenkurven und Krümmungslinien ein wesentlicher Gedanke sei. Infolgedessen entwickelte er denselben selbständig, und insbesondere beschäftigte er sich zu derselben Zeit wie ich mit solchen Liniensystemen des linearen Komplexes, die den Orthogonalsystemen des gewöhnlichen Punktraumes entsprechen. Er wurde hierdurch auf diejenigen Ideen geführt, die er in den Göttinger Nachrichten 1871, Nr. 4 dargestellt hat, und welche er ausführlicher und in umgestalteter Form in der folgenden[2]) Abhandlung auseinandersetzen wird.

Der im Schlusse der vorangehenden Nummer aufgestellte Satz kann die Frage veranlassen, ob die besprochene Eigenschaft für den linearen Komplex charakteristisch ist, oder ob dieselbe einem jeden Komplexe zukommt.

Andererseits führt die von Herrn Klein gegebene Gleichungsform konfokaler Komplexe zweiten Grades in Verbindung mit den Theorien des § 24 natürlich darauf, diese Komplexschar als ein Analogon im [256
Linienraume zu den Orthogonalsystemen des gewöhnlichen Punktraumes aufzufassen. Es liegt hier zugleich nahe, eine Erweiterung des Dupinschen Theorems, und zwar in der folgenden Form zu vermuten: die Linienfläche, welche dreien der Komplexe gemeinsam ist, berührt die Brennfläche der zweien dieser drei Komplexe gemeinsamen Kongruenz nach einer Haupttangentenkurve. Ist dieser Satz bewiesen, so fragt es sich, ob noch andere Systeme von Linienkomplexen in dieser Beziehung stehen. Herr Klein hat nun gefunden[3]), daß diesen unbestimmten Spekulationen, die

1) In dieser Weise findet man beliebig viele algebraische Flächen mit algebraischen Haupttangentenkurven.

2) [Ann. V, S. 257 ff. Ges. Abh. I, S. 106 ff.]

3) Göttinger Nachrichten, März 1871.

sich auch mir dargeboten hatten, eine Realität entspricht. Beim Beweise benutzt er in seiner ersten Mitteilung zur Bestimmung der geraden Linie vier Koordinaten, welche mit den von mir in dieser Abhandlung und auch in früheren Arbeiten als Linien- oder Kugelkoordinaten[1]) benutzten vier Größen X, Y, Z, H identisch sind. Er knüpft daran die weitere Bemerkung, daß unter der Zugrundelegung dieser Koordinaten die Liniengeometrie mit der metrischen Geometrie zwischen vier Variabeln identisch wird, insofern nämlich bei ihrer Zugrundelegung das Moment zweier Geraden sich darstellt wie die Entfernung zweier Punkte im Raume von vier Dimensionen, und die Bedingung für die involutorische Lage zweier Komplexe wie die Bedingung für die Orthogonalität zweier Flächen in diesem Raume.

Es ist dieses offenbar etwas anderes als der schon früher von mir hervorgehobene Zusammenhang zwischen gewissen Theorien der Plückerschen Liniengeometrie und einigen Problemen der gewöhnlichen metrischen Geometrie.

Christiania, 15. Novbr. 1871.

Nachschrift. Nachträglich erfahre ich neue und wichtige Beziehungen zwischen meinen und Herrn Darbouxs Arbeiten. Dieser teilt mir nämlich mit, daß er alle Berührungstransformationen eines Raumes von n Dimensionen bestimmt habe, und daß er sich ferner mit der einem Kurvenkomplexe (und zugleich auch mit der einem Flächenkomplexe) zugehörigen partiellen Gleichung erster Ordnung beschäftigt habe, ohne indessen bis jetzt etwas darüber zu veröffentlichen. Es stehen diese Arbeiten des Herrn Darboux in Verbindung mit seinen fundamentalen Untersuchungen über die partiellen Differentialgleichungen. März 1872.

1) Ich muß daran erinnern, daß die Koordinaten X, Y, Z, H als ein Degenerationsfall der von Herrn Klein 1868 eingeführten sechs homogenen Linienkoordinaten, zwischen denen eine Bedingungsgleichung von der Form:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 = 0$$

stattfindet, aufzufassen sind (§ 10, Nr. 30).