Anhang:

Einiges über den Unterricht in der Geometrie.

Hierbei wird die Darstellung naturgemäß einen wesentlich historischen Charakter erhalten, vielmehr noch, als bei den entsprechenden Erörterungen im vorigen Semester; denn die Geometrie kann entsprechend ihrem ehrwürdigen Alter als Wissenschaft auch auf eine so alte Tradition als Unterrichtsfach zurückblicken, wie keine der früher besprochenen Disziplinen. Ist diese Tradition nach der einen Seite hin ein Vorzug, so birgt sie doch in anderer Hinsicht schwere Gefahren; in der Tat krankt der geometrische Unterricht heute geradezu an der Last der Überlieferung, denn es sind in ihm viele nicht mehr eigentlich lebensfähige Bestandteile jetzt so fest eingenistet, daß sie schwer zu beseitigen sind, und sogar das Herauskommen neuer gesunder Gebiete auf alle Weise erschweren.

Wollen wir die heutige Gestaltung des geometrischen Unterrichts verstehen, so müssen wir auf die Zeit des Wiedererwachens wissenschaftlicher Betätigung, die Renaissance im weitesten Sinne gefaßt (von 1200 an), zurückgehen. Damals war es selbstverständlich, daß man an die Alten anknüpfte und besonders die Elemente des Euklid als Einleitung in die Geometrie studierte. Dazu nahm man noch die sonstigen Bestandteile der Geometrie der Alten, die man besaß, also in erster Linie die Berechnung

von π durch Archimedes, die Kegelschnittlehre des Apollonius, endlich das Interesse an den Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, wie es auf die Platonische Schule zurückgeht. Dieser geometrische Stoff ist natürlich äußerst einseitig gewählt; nicht nur die Pflege der Anwendungen, sondern auch die Ausbildung der Raumanschauung ist ganz zurückgedrängt und ausschließlich die abstrakt logische Seite geometrischer Deduktion berücksichtigt. Nun ist aber das Merkwürdige, daß nicht nur der Forscher, der Gelehrte so Geometrie trieb, sondern daß die Ansicht sich bildete, Euklids Elemente seien ein geeignetes Schulbuch für den ersten Unterricht! Mag diese Verwechslung damals auch nahe gelegen haben, da man nichts anderes als den Euklid hatte, Euklids eigner Meinung entspricht sie sicher nicht, denn die Elemente sind – das kann man nicht oft genug betonen – aus Universitätsvorlesungen hervorgegangen und sind alles weniger, als ein Lehrbuch für zehnjährige Knaben. Und doch hat dieses Mißverständnis bis zur heutigen Zeit wesentlich nachgewirkt, wie wir noch vielfach sehen werden.

Fragen wir nur zunächst einmal, was für Anforderungen man heute an einen gesunden geometrischen Schulunterricht wird stellen müssen. Jedermann gibt gewiß zu, daß da

1) die psychologischen Gesichtspunkte wesentlich maßgebend sein müssen. Der Unterricht kann nicht nur vom Stoff ab-

hängen, sondern es kommt vor allem auch auf das Subjekt an, das man zu unterrichten hat; man wird ein und dieselbe Sache einem sechsjährigen Knaben anders darstellen müssen, als einem zehnjährigen, und diesem wiederum anders, als einem gereiften Manne. Um das speziell auf die Geometrie anzuwenden, wird man auf der Schule stets zuerst an die lebhafte konkrete Anschauung anknüpfen müssen und wird erst allmählich logische Elemente in den Vordergrund bringen können; überhaupt wird sich die genetische Methode allein als berechtigt erweisen, die den Schüler langsam in die Dinge hineinwachsen läßt.

2.) Was die Auswahl des Stoffes anlangt, werden wir aus dem Gesamtgebiet der reinen und angewandten Geometrie solche Stücke herauszunehmen suchen, wie sie dem Zwecke der Geometrie im Rahmen des gesamten Unterrichts zu entsprechen scheinen, ohne uns dabei von historischen Zufälligkeiten beeinflussen zu lassen. Es ist nicht unnötig, allgemeine Forderungen dieser Art immer wieder aufzustellen; denn wenn sie auch jeder theoretisch zuzugeben geneigt ist, werden sie doch oft genug in der Praxis nicht befolgt.

3.) Hinsichtlich des allgemeinen Unterrichtszweckes kann ich hier auf die feineren Nuanzierungen zwischen den einzelnen Schularten nicht eingehen. Es genüge zu betonen, daß er außerordentlich von der jeweiligen Kulturrichtung der Zeitepoche abhängt; und wir reden gewiß keinem flachen Utilita-

rismus das Wort, wenn wir als Zweck der modernen Schule bezeichnen, weite Kreise tüchtig zu machen zur Mitwirkung an der im wesentlichen auf praktische Betätigung gerichteten heutigen Kulturarbeit; daher erweist sich speziell für den mathematischen Unterricht eine immer stärkere Berücksichtigung der Naturwissenschaften und der Technik als nötig.

4.) Eine bestimmte Stoffauswahl kann ich natürlich nicht treffen; nur der praktische Schulmann kann sie treffen, der selbst reiche Erfahrung im Unterrichten hat. Die gegenwärtige Vorlesung soll, wie ich schon oft betonte, einer solchen Auswahl insofern vorarbeiten, als sie Ihnen in Gestalt eines Überblickes über die gesamte reine Geometrie auch von dieser Seite her das Material an die Hand gibt, das Sie später zu einem eigenen sachverständigen Urteil über diese Frage befähigt.

5.) Nur einen wichtigen methodischen Gesichtspunkt möchte ich noch hier hervorheben, nämlich die schon öfters erwähnte Tendenz der Fusion des planimetrischen und stereometrischen Unterrichts, die eine einseitige Ausbildung in der Planimetrie unter Vernachlässigung der dreidimensionalen Raumanschauung verbieten will. Und im selben Sinne ist auch weiterhin eine Fusion der Arithmetik und Geometrie zu verlangen: Ich meine nicht, daß diese Gebiete völlig verschmolzen werden sollen, aber sie sollten doch nicht so scharf getrennt werden, wie das heute an der Schule wohl vielfach geschieht; der ganze Gang dieser und der vorigen Vorlesung zeigen ja, wie ich das aufgefaßt wissen möchte.

Messen Sie nun an diesen Gedanken und Forderungen die *wirkliche Schulpraxis*, so wird sie vielfach durchaus nicht befriedigen können. Freilich ist es schwer, ein allgemeines Urteil abzugeben, da selbst innerhalb eines und desselben Landes an jeder Anstalt, ja fast bei jedem Lehrer eine verschiedene Praxis herrscht; aber ich denke doch, daß ich einige wenige im großen Durchschnitt richtige Züge festhalten kann, wenn sich auch jeder einzelnen Ausstellung gegenüber gewiß zahlreiche Fälle aufweisen lassen, wo sie durchaus nicht zutrifft.

1.) Vor allem glaube ich, daß die *Fusion der verschiedenen Gebiete* heutzutage im Unterricht viel zu wenig durchgeführt ist; ich will das durch einige Einzelheiten belegen, die Sie vielleicht selbst noch in lebendiger Erinnerung haben:

a.) Das *Projizieren und Zeichnen* räumlicher Figuren, das gewiß etwas äußerst wichtiges ist, kommt im heutigen geometrischen Unterricht nicht recht zur Geltung. Es wird wohl äußerlich dem Lehrgang angeheftet, aber nicht innerlich mit ihm verschmolzen. Damit hängt zusammen, daß das, was man „*Geist der neueren Geometrie*" nennt, im Unterricht nicht die gebührende Stellung einnimmt, ich meine die *Idee der Beweglichkeit einer jeden Figur*, durch die jedesmal über den speziellen Fall hinaus der allgemeine Charakter der geome-

trischen Gebilde erfaßbar wird. Wohl hat man einzelne Kapitel der „neueren Geometrie", wie die Lehre von den harmonischen Punkten und den Transversalen, in den Lehrgang aufgenommen, aber das, was ihre eigentliche Methode auf diesen Gebieten mit einem Blick zu fassen gestattet, stellt man gewöhnlich in der starren Euklidischen Manier, in zahlreiche Fallunterscheidungen zerlegt, dar:

b.) Die *Geometrie und Arithmetik* hält man auf der Schule gewöhnlich unnatürlich getrennt voneinander; ein lehrreiches Beispiel ist die oben (S. 419) schon erwähnte *Behandlung der Proportionen*, die man zuerst arithmetisch, und dann – häufig gar noch ohne Bezugnahme darauf – in geometrischer Form durchnimmt.

c.) Die *analytische Geometrie* mit dem Grundsatz, daß eine Funktion $y = f(x)$ eine Kurve darstellt, ist gewiß der Auffassung der Knaben schon auf früher Stufe zugänglich, und sie könnte und sollte von da an den ganzen geometrischen Unterricht durchdringen. Statt dessen wird sie als neuer getrennter Aufbau auf die fertige Geometrie aufgesetzt, und wenn man die Kegelschnitte einmal „synthetisch" (im Sinn der Alten!) behandelt hat, wird nun gezeigt, wie sich mit Hilfe einer „neuen Disziplin", der analytischen Geometrie, die Sache viel einfacher machen läßt. Die tiefere Auffassung der modernen Geschichtsforschung, daß bereits bei Apollonius die Ideeen der analytischen Geometrie im Grunde schon vorhanden waren, kommt dabei freilich auch nicht zur Geltung.

2.) Ich möchte nun einen Blick darauf werfen, was für wissenschaftliche Folgen dies Beharren des Unterrichts in der historisch gegebenen Trennung der einzelnen Gebiete gehabt hat. Natürlich gibt die Elementargeometrie auch in ihrer von mir beklagten historischen Begrenzung zu wissenschaftlichen Problemen vielfach Anlaß. Was Literatur anlangt, möchte ich nur auf Max Simons Referat „Über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert"[1] verweisen, andererseits aber neben meiner kleinen Schrift „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie"[2] die interessante Sammlung von F. Enriques nennen: „Questioni riguardanti la geometria elementare",[3] die auch in deutscher Bearbeitung unter dem Titel „Fragen der Elementargeometrie"[4] in 2 Bänden erschienen ist; endlich wäre noch die „Theorie der geometrischen Konstruktionen"[5] von A. Adler hervorzuheben.

Ich kann auf die positive Seite der hier einsetzenden interessanten Probleme leider nicht eingehen, muß mich vielmehr darauf

1.) Jahresber. d. d. Math.-Verein. Ergänzungsband I (Leipzig 1906).
2.) Ausgearb. v. F. Tägert. Leipzig 1895.
3.) Bologna 1900.
4.) Bd. I: Prinzipien der Geometrie. Deutsch v. H. Thieme. (Leipzig 1911).
Bd. II: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Deutsch v. H. Fleischer. (Leipzig 1907).
5.) Samml. Schubert 52. (Leipzig 1906).

beschränken, einige arge Mißstände hervorzuheben, die sich infolge der isolierten Stellung der Elementargeometrie fern von der allgemeinen Entwicklung der Mathematik herausgebildet haben; man hat da einzelne Gebiete weit ausgesponnen und auch in den Schulunterricht eingeführt, die von einem höheren Standpunkte aus nur von sehr geringem Interesse sind.

a.) In dieser Hinsicht habe ich zuerst die auf der Schule als algebraische Geometrie bezeichnete Disziplin zu nennen, die Stücke des Dreiecks oder anderer Figuren erst zu berechnen und dann gesondert für sich zu konstruieren lehrt. Sie haben einen Maßstab für die Wertung dieser Gebiete, wenn Sie sich fragen, ob Sie sie jemals im Hochschulunterricht benutzt haben oder hätten benutzen können. Gewiß nicht; es handelt sich hier eben um ein Seitenästchen, das nur um seiner selbst willen künstlich gepflegt worden und niemals mit andern Zweigen der Wissenschaft in lebendige Wechselwirkung getreten ist.

b.) Berühmt ist auch das Gebiet der Dreieckskonstruktionen. Daß man überhaupt Figuren konstruiert, ist sehr schön und nützlich, und ich empfehle gewiß immer die Benutzung graphischer Verfahren auf allen Gebieten; wie sie ja die moderne Mathematik mehr und mehr heranzieht; Sie haben gerade hier in Göttingen in Prof. Runges Vorlesungen über graphische Methoden die beste Gelegenheit, die zahlreichen in neuerer Zeit entwickelten äußerst sinnreichen Methoden kennen zu lernen.

Aber um solche allgemein wichtige und interessante Dinge handelt es sich auf der Schule nicht; da beschränkt man sich vielmehr ganz überwiegend auf Konstruktion von Dreiecken, und noch dazu auf Aufgaben, die mit Zirkel und Lineal lösbar sind. Bekanntlich erhält man eine große Mannigfaltigkeit solcher zum Teil recht schwieriger Aufgaben, wenn man die drei gegebenen Stücke des Dreiecks auf die verschiedenste und – wie man wohl gesagt hat – „auf möglichst unzweckmäßige Weise" wählt; freilich legt man auf die wirkliche Ausführung der Konstruktionen, die man so findet, vielfach gar keinen Wert, und tatsächlich sind sie infolge der künstlichen Beschränkung der Hilfsmittel für die Praxis meist auch viel zu kompliziert. Nun sind ja gewiß auch theoretisch sehr interessante tiefe Fragen mit solchen Konstruktionen verknüpft, wie sie etwa in dem genannten Werke von Enriques behandelt werden oder wie sie an einigen Beispielen auch im vorigen Semester von uns erörtert worden sind:[1)] ich meine die algebraischen Unmöglichkeitsbeweise, die zeigen, warum man bei gewissen Konstruktionen (z. B. der Konstruktion des regulären Siebenecks oder der Dreiteilung des beliebigen Winkels) gerade nicht mehr mit Zirkel und Lineal durchkommt. Davon aber ist auf der Schule in der Regel auch nicht andeutungsweise die Rede, und von da aus setzt sich leider immer aufs neue bei

1) s. Teil I S. 123 ff. (Siebeneck) S. 261 ff (Trisektion).

vielen Leuten die Überzeugung fest, jede geometrische Aufgabe müsse sich mit Zirkel und Lineal durchführen lassen; darin ist auch wohl der Grund zu suchen, daß jene große Schar der Kreisquadrierer und Winkeltrisezierer, von denen ich Ihnen schon im vorigen Semester sprach, niemals ausstirbt.

c.) Endlich habe ich noch die sog. Dreiecksgeometrie zu nennen, das ist die Lehre von den „merkwürdigen" Punkten und Geraden des Dreiecks, die ganz besonders innerhalb der Schulmathematik als selbständige Disziplin ausgebildet worden ist; auch hier werden Sie mir bestätigen, daß dies Gebiet in demselben Maße, wie es im Schulunterricht im Vordergrunde zu stehen pflegt, bei weitergehenden Studien zurücktritt. Wir haben ja früher schon erläutert, in welcher Ecke der projektiven Geometrie diese Dreiecksgeometrie einzuordnen ist, (vgl. S. 344 f): Es handelt sich um die Invariantentheorie derjenigen ebenen Figur, welche aus drei beliebigen Punkten und den beiden imaginären Kreispunkten ihrer Ebene gebildet ist, also tatsächlich um etwas durchaus Partikuläres. –

Wollen wir nun aber über diese allgemeine Kritik hinaus Näheres über die gegenwärtige Gestaltung der geometrischen Unterrichts sagen, so müssen wir die Entwicklung in den einzelnen Ländern getrennt behandeln, da sie sich überall natürlich ganz verschieden gestaltet hat; wir können hier freilich nur die wichtigsten Kulturländer, etwa England, Frankreich, Italien und Deutschland, durchsprechen:

I. Der Unterricht in England.

In England stand man am längsten im Banne der mittelalterlichen Euklidtradition, die zum Teil noch heute nachwirkt. Diese Sachlage wird bedingt durch die Organisation der englischen Examina; das schöne Prinzip, daß man unabhängig vom Examen lernen soll, wird ja wie so viele andern schönen Prinzipien leider nirgendwo befolgt. In England herrscht nämlich das merkwürdige System der streng zentralisierten Examens bei sonst völlig unabhängiger, privater Organisation der einzelnen Schulen. Es ist gerade umgekehrt, wie bei uns: Bei uns wird an jeder einzelnen Schule der Schüler von den Lehrern geprüft, die ihn genau kennen, und dabei soll seiner Individualität weitgehend Rücksicht getragen werden; dafür haben wir aber einheitliche Lehrpläne, die hinsichtlich des Stoffes und der Gestaltung des Unterrichts für alle Schulen bestimmte allgemeine Richtlinien vorschreiben. Demgegenüber sind in England die einzelnen Schulen private Institutionen, die an sich fast vollständige Bewegungsfreiheit haben und ihrer ganzen Organisation nach heterogenster Art sind. Aber prüfen dürfen sie ihre Schüler nicht selbst; vielmehr besteht gerade das Prinzip, daß der Examinator den Prüfling nicht kennt, ja nicht einmal sieht,

sondern daß er ganz schematisch lediglich seine schriftliche Leistung beurteilt, deren Ausfall allein das Examen entscheidet. In London, Cambridge und Oxford befinden sich die großen Examenskommissionen, die die Absolventen des ganzen Landes prüfen. Von London aus werden z. B., wie mir einer der Hauptexaminatoren berichtete, 24000 Schüler jährlich geprüft, und die erhalten nun alle dieselben Aufgaben, dieselben Fragen. Der Examinator hat zur Durchsicht dieser Aufgaben 30 Assistenten, von denen jeder also noch 800 mal dieselbe Arbeit zu korrigieren hat; natürlich fände sich zu dieser Arbeit niemand, wenn sie nicht so gut bezahlt würde.

Im mathematischen Unterricht ist nun ein solches eigentümliches Verfahren nur möglich, wenn es ein „standard-work" gibt, das jeder Examinand kennt, und das der Examinator seinen Fragen zu Grunde legen kann; als solches Normalbuch fungieren in England von altersher, was Geometrie angeht, die Euklidischen Elemente. Es ist verständlich, daß sich bei einem solchen System ein und dasselbe Werk und damit ein und dieselbe Unterrichtsart so lange wesentlich unverändert erhalten mußte, wie denn überhaupt bei ihm eine Reform mit den größten Schwierigkeiten verknüpft ist. Denn die Examensbehörde kann von sich aus den Unterrichtsbetrieb im ganzen Lande nicht reorganisieren, da sie keinerlei offiziellen Einfluß auf ihn hat, und andererseits ist es ihr bei ihrem Massenbetriebe schwer möglich, auf abweichende Verhältnisse einer einzelnen Schule Rücksicht zu nehmen, die etwa selbständige Versuche mit neuen Unterrichtsmethoden vornehmen wollte.

Sehen wir uns nun einmal einen solchen *englischen Schuleuklid* an; ich habe hier die Ausgabe von *R. Potts*,[1] die in den letzten Jahrzehnten besondere Verbreitung gefunden hat. Sie enthält lediglich – das ist charakteristisch – die Bücher 1–6 (Planimetrie) sowie 11, 12 (Anfänge der Stereometrie und Exhaustionsmethode), und zwar alles in wortgetreuer Übersetzung; diesem Stoff sind erklärende und zum Teil historische Noten sowie Aufgaben angefügt. Es fehlen also aus den Elementen die arithmetischen Bücher 7–9, die Klassifikation der Irrationalitäten in 10, und die regulären Körper in 13. Dieser Stoff wird nun traditioneller Weise in den englischen Schulen mehr oder minder auswendig gelernt, damit er im Examen jedem zur Hand ist; Perry machte zur Charakteristik dieser Methode einmal die amüsante Bemerkung: „Wie gesund muß die englische Natur sein, daß sie durch die Jahrhunderte eine so ungeeignete Erziehungsmethode ertragen hat.“ Nun hat man freilich auch die Notwendigkeit empfunden, die moderne über Euklid weit hinausgehende Forschung zu berücksichtigen;

1) Euclid elements of geometry. London 1869.

das tat man aber, indem man sie gewaltsam in die starre Euklidische Form preßte, wobei natürlich ein guter Teil des modernen Geistes verloren geht. Als Beispiel der so entstandenen sog. „*sequels to Euclid*“ lege ich Ihnen hier das Buch von *J. Casey*[1] vor, das die Anfangslehren der projektiven Geometrie in dieser Art behandelt.

Natürlich blieb eine *Gegenwirkung* gegen dieses erstarrte System nicht aus; sie knüpfte an eine 1869 von dem großen englischen Mathematiker *Sylvester* gegebene Anregung an, und führte 1874 zur Gründung einer *Association for the improvement of geometrical teaching*. Diese Gesellschaft hat lange gearbeitet, bis sie endlich zur Herausgabe eines neuen Normalbuches, der *Elements of plane geometry*[2] gelangte. Das ist im wesentlichen lediglich eine etwas abgeglichene und geglättete Bearbeitung der ersten 6 Bücher der Euklidischen Elemente; so sind z. B. die Unebenheiten am Anfang des ersten Buches, die wir beklagten, beseitigt, indem der Bewegungsbegriff konsequent vorangestellt wird. Im allgemeinen aber ist die Reihenfolge und Stoffbegrenzung des Euklid beibehalten, eben wieder in Rücksicht auf das Examen. Es ist also nur eine ziemlich zah-

1) A sequel to the first 6 books of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry. Dublin 1900.
2) P. 1. 2. London 1884. 1888.

ne Reform, die hier versucht wird, aber trotzdem hat sie bei den Anhängern des alten Euklidischen Systems scharfen Widerspruch gefunden. Als Beleg dafür zeige ich Ihnen ein wenigstens recht amüsant geschriebenes Buch von Dodgson: „Euklid and his modern rivals." 1) Hier geht der Verfasser scharf mit der Association ins Gericht, im wörtlichen Sinne, denn er läßt keinen Geringeren als den Höllenrichter Minos auftreten, vor dem sich Euklid und seine modernen Rivalen, das sind die Verfasser neuerer Lehrbücher, allen voran Legendre, verteidigen; aber Euklid allein schneidet gut dabei ab, während die anderen und besonders die Euklidverbesserer der Association mit ihren Argumenten bald am Ende sind.

Ich kann auf Einzelheiten hier unmöglich eingehen, und möchte nur auf einen Umstand von allgemeiner Bedeutung verweisen, der auch für die Literatur der anderen Länder Geltung hat. Ein großer Teil der Leute, die über Unterrichtsfragen schreiben, kennt nämlich fast ausschließlich die Schulliteratur der eigenen Länder, und hat keine Ahnung weder von parallelen Bestrebungen in anderen Ländern, noch von den Fortschritten der reinen Wissenschaft auf den in Betracht kommenden Gebieten, hier also in den Grundlagen der Geometrie. Man

1) 2. ed. London 1885.

sieht das so recht bei Dodgson, bei dem mit Ausnahme von Legendre (der eine Sonderstellung einnimmt) lediglich englische Schulschriftsteller genannt werden, während auch auf Fortschritte der wissenschaftlichen Erforschung der Grundlagen gar keine Rücksicht genommen wird. Man kann diese Bemerkung noch oft machen; vergleichende Betrachtungen der verschiedenen Nationen, wie wir sie hier anstellen, sind noch lange nicht genügend verbreitet.

Eine viel größere Wirkung als die Bewegung der Association hat eine andere Reformaktion von, man könnte geradezu sagen, revolutionärem Charakter in den letzten 10 Jahren gehabt, die an den Namen Perry anknüpft. John Perry ist Ingenieur und unterrichtet an einer der größten technischen Anstalten Londons; von ihm geht eine mächtige Bewegung aus, die die einseitige logische Schulung durch das Euklidstudium auf das schärfste bekämpft und an ihre Stelle einen durchaus auf Anschauung basierten Unterricht setzen will, der vor allem zur vollständigen Beherrschung der mathematischen Exekutive führen soll. Perry ist vor allem bekannt als Verfasser von Lehrbüchern, die die praktische Einführung der Ingenieurkreise in die Beherrschung der Infinitesimalrechnung zum Ziel haben; ich nenne besonders den „Calculus for engineers", 1) der

1) London 1897.

als „Höhere Analysis für Ingenieure" 1) von R. Fricke und F. Süchting ins Deutsche übersetzt ist. Daneben ist als für seine Tendenzen charakteristisch noch die kleine Schrift „practical mathematics" 2) zu erwähnen, die aus Vorträgen für Arbeiterkreise hervorgegangen ist und in sehr geschickter und packender Weise versucht, die Ideen des Koordinatensystems, der Funktion et c. unter fortwährender Bezugnahme auf praktische Beispiele einem größeren Publikum zugänglich zu machen.

Das ist aller nicht eigentlich Geometrie, aber durch Perrys Einwirkung hat man den Unterricht auch auf diesem Gebiete umzugestalten gesucht, indem man die sogenannte Laboratoriums-Methode einführte: Da beginnt man damit, daß man die Dinge in ihrer praktischen Anwendung lehrt, also Kurven auf Millimeterpapier zeichnet und ausmißt, den Gebrauch des Planimeters übt et c.; von logischen Deduktionen und Beweisen ist gar nicht mehr die Rede, oder sie werden doch wenigstens sehr stark zurückgedrängt, und nur auf das praktische Können kommt es an; wir haben hier eigentlich den größten denkbaren Gegensatz gegen Euklids Verfahren. Diese Bestrebungen kommen ganz zum Ausdruck in dem Harrisonschen Lehrbuche: „practical plane and solid

1) Leipzig 1902. – 2. Aufl. 1910.
2) London 1899.

geometry for elementary students"; 1) er beginnt tatsächlich mit der Angabe von allem dem, was man zum Zeichnen braucht: Zeichenpapier, Zeichenbrett, eine Nadel zum Markieren von Punkten, Bleistift et c. et c. Dann werden praktische Anweisungen für das Zeichnen gegeben, es wird gezeigt, wie man ein Lineal auf seine Geradlinigkeit, einen rechten Winkel auf seine Rechtwinkligkeit prüft, und so wird weiterhin immer unter Voranstellung der wirklichen zeichnerischen Ausführung und der lebhaften Anschauung in sozusagen rein empirischer Weise die Lehre von den einfachsten ebenen und räumlichen Gebilden entwickelt. Etwas weiter als dieses ganz elementare Buch geht Harrison und Baxandall, pactical plane and solid geometry for advanced students including graphic statics; 2) das in derselben empirischen Art bis zur darstellenden Geometrie und den Methoden der graphischen Rechnens heranführt. Weitere Literatur finden Sie in dem sehr interessanten Bericht „Über Reorganisationsbestrebungen des mathematischen Elementarunterrichts in England" von Robert Fricke, 3) in dem die Perrybewegung eingehend besprochen wird. Recht interessant sind übrigens auch die Berichte über die Diskussionen, die Perry auf der Glasgower und

1) London 1903.
2) London 1903.
3) Jahresber. d. deutsch. Math.-Vereinig. 13. (1904), pg. 283 ff.

der Johannesburger Tagung (1901 und 1905) der Britisch Association – dem englischen Analogon unserer deutschen Naturforscherversammlung – veranlaßt hat [1] und durch die er eine weitergehende Einwirkung auf den Unterricht in England erreichte.

Ich halte diese Perryschen Tendenzen gewiß für sehr geeignet für Fortbildungsschulen, niedere und mittlere Fachschulen, die praktisch leistungsfähige Handwerker und niedere Techniker heranzuziehen haben; so wird sich, um nur ein naheliegendes Beispiel zu nennen, an der Mechanikerschule, die jetzt hier in Göttingen in der Gründung begriffen ist, ein mathematischer Unterricht in dem Perryschen Rahmen gewiß als recht fruchtbringend erweisen. An höheren Schulen aber erscheint mir die ausschließliche Betonung der praktischen Momente, die der Perryschen Richtung eigen ist, nicht ausreichend, wenn sie auch da gewiß sehr dankenswerte Anregungen geben; so gänzlich wird man aber da die Ausbildung des logischen Denkens durch den mathematischen Unterricht nicht missen wollen, und was man wünschen wird, wird vielmehr ein Mittelding zwischen den beiden möglichen Extremen sein, wo neben dem intuitiven vom praktischen Erfahrungen ausgehenden

1) Perry, Discussion on the teaching of mathematics (London 1902). – Disc. at Johannesburg on the teaching of elementary mechanics. (London 1906).

Aufbau der Geometrie doch auch die logischen Beweise nicht zu kurz kommen.

Einem solchen Kompromiß scheinen sich in der Tat unter dem Druck der Perrybewegung gegenwärtig die Examensbehörden in Oxford und Cambridge zu nähern, wie neuere Examensbestimmungen zeigen. [1] An diese schließt das neue Lehrbuch von Godfrey und Siddons an: „Elementary geometry practical and theoretical“, [2] das im Vergleich mit den Elementen der Association beträchtliche Fortschritte aufweist. Es beginnt mit einer anschauungsmäßigen Einleitung („experimental geometry“) für die erste Stufe, einer geometrischen Propädeutik, wie sie ja bei uns seit langem allgemein üblich ist, aber wie man sie in England wohl vorher kaum hatte. Dann folgt der logische Aufbau der Geometrie, der freilich in Stoff und Form wieder nahe Beziehungen zu Euklid aufweist, der aber doch gelegentlich mit neuen Gedanken durchsetzt ist; z. B. wird der Flächeninhalt einer Figur zuerst geradezu so eingeführt, daß man die Figur auf Millimeterpapier zeichnet und die umschlossenen Quadrate zählt. Dies Buch, das man wohl als Beleg für die nun endlich einsetzende langsame Modernisierung des englischen Unterrichts an-

1) vgl. z. B. Regulations of the Oxford and Cambridge Schools Examination board for the Year 1904, wo sich pag. 37 besondere Abschnitte über „Practical Geometry“ finden.
2) Cambridge 1904.

sehen kann, hat gleich ungeheuere Verbreitung gefunden, wie man überhaupt bei dem Riesenbedarf des englischen Kolonialreiches auf dem englischen Büchermarkt mit ganz anderen Ziffern rechnen muss, als bei uns.

Der allgemeinen Konservativität des englischen Schulwesens widerspricht nicht, dass einzelne Autoren äusserst freie und interessante Anschauungen über den Unterricht entwickeln, ohne damit eben direkt eine Organisationsänderung in die Wege leiten zu wollen oder zu können. Als Beispiel nenne ich das neue Buch von Branford, „A study of mathematical education, including the teaching of Arithmetic." [1] Es enthält äusserst interessante Studien über die psychologischen Bedingungen des Unterrichts, und nimmt besonders Rücksicht auf den Parallelismus, der zwischen der Entwicklungsgeschichte des Kindes und der Stammesgeschichte besteht; dabei kommt das mathematische Verständnis des Kindes, an das sich der erste Unterricht wenden muss, also mit der Mathematik der Naturvölker in Parallele.

Daneben möchte ich „the first book of geometry" [2] von G. und W. H. Young nennen, das kürzlich von Prof. Bernstein unter dem Titel „der kleine Geometer" [3] deutsch herausgegeben worden ist. Hier soll ein neuer origineller Weg gewiesen werden

1) Oxford 1908. 2) London 1905.

3) Deutsch von S. und F. Bernstein. Leipzig und Berlin 1908.

das Kind in das geometrische Verständnis und zwar sogleich in die dreidimensionale Raumanschauung einzuführen; die leitende Idee ist, dass die natürliche Raumanschauung notwendig erlahmen muss, wenn man das Kind von vornherein ausschliesslich an das Zeichnen auf dem zweidimensionalen Papier gewöhnt und so seine Anschauung künstlich auf die Ebene beschränkt. So wird dann von vornherein mit dem interessanten Hilfsmittel des Papierfaltens operiert, wodurch allein mit Hilfe von Stecknadeln alle möglichen räumlichen und ebenen Figuren gebildet werden. Dabei ergeben sich auch äusserst anschauliche und doch gleichzeitig logisch befriedigende Beweise z. B. für den pythagoräischen Satz, und es entsteht überhaupt ein neuer interessanter, auch für den höheren Betrieb durchaus in Betracht kommender Aufbau der Geometrie.

Doch damit verlassen wir die englischen Verhältnisse und wenden uns zu Frankreich.

II. Der Unterricht in Frankreich

Die Verhältnisse hier sind für uns umso interessanter, als sie auch auf Deutschland mannigfach eingewirkt haben. Hier zeigt sich ein von England grundverschiedenes Bild; während der Engländer streng konservativ an den alten Einrichtungen hängt, liebt der Franzose das Neue und erreicht es sogar oft statt durch stetige Umbildung der Alten durch *plötzliche Reformation*, die schon mehr Revolution ist. Auch die Organisation des Unterrichts ist ganz verschieden: Wir haben in Frankreich nicht nur *Zentralisation des Examens* – vermöge der Aufnahmeprüfungen an den Hochschulen, vor allem an denen in Paris – sondern überhaupt eine *streng zentralisierte Unterrichtsorganisation*; die oberste Behörde, der conseil d'instruction supérieure, dem übrigens stets auch wissenschaftlich bedeutende Mathematiker ersten Ranges angehörten, ist unbedingter Herrscher und kann nach eigenem Ermessen die weitestgehenden Reformen und Änderungen vorschreiben, so oft sie will. Solche Reformen müssen dann im ganzen Lande sofort durchgeführt werden, und die Lehrer können zusehen, wie sie damit zurechtkommen. Die individuelle Freiheit des einzelnen Lehrers, an die wir in Deutschland im hohen Grade gewöhnt sind, kommt hier viel weniger zur Geltung. Man konnte geradezu von einem „System der Revolution von oben" reden.

Was nun speziell den *geometrischen Unterricht* anlangt, so beginnt seine *Modernisierung* d. h. die Befreiung von der strengen Bindung an Euklid in Frankreich schon sehr früh, etwa *um 1550*, um eine runde Zahl zu nennen; sie ist nur eine Erscheinung in dem großen Kampfe des neuen Humanismus gegen die alte Scholastik, der sich um jene Zeit

abspielte. Damals schrieb *Petrus Ramus*, der auch auf andern Gebieten als der Mathematik unter den Vertretern der neuen Ideeen eine hervorragende Stelle einnahm, ein Lehrbuch der Mathematik („Arithmeticae libri 2, geometricae libri 27." 1)). Hier wird bereits Euklids Form und Euklids Stoff völlig verlassen; vielmehr ist für Rameâ, wie er charakteristischer Weise an der Spitze des ersten Buches sagt, die Geometrie die Kunst gut zu messen, („ars bene metiendi"). Demgemäß stehen die *praktischen Interessen* durchaus voran; er erklärt vor allem, wie man einfache geodätische Messungen ausführt, beschreibt die Instrumente und erläutert das alles an zahlreichen interessanten Abbildungen. Erst in zweiter Linie werden auch logische Deduktionen herangebracht, aber keineswegs als Selbstzweck, sondern nur um neue aus der Beobachtung nicht unmittelbar abzunehmende und doch zur Anwendung nützliche geometrische Sätze abzuleiten; so weit wie bei Perry wird freilich die Deduktion doch wohl nicht zurückgedrängt.

Diese Behandlung der Geometrie hat sich in Frankreich lange in Geltung erhalten. Rund 200 Jahre nach Ramus sind die berühmten „*Élémens de géometrie*" 2) von *Clairaut* entstanden. Das ist derselbe Clairaut, der als *hervorragender Forscher* bekannt ist, wie wir denn auch sonst in

1) Basel 1580.　　2) 1741 – Nouv. éd. Paris 1830.

Frankreich im Gegensatz zu Deutschland und England die Wahrnehmung machen können, daß sich hervorragende Forscher stets der Unterrichtsfragen mit Interesse annehmen. Clairauts Werk zeichnet sich durch seinen ausgezeichneten Stil aus; überhaupt besitzen ja die Franzosen die Kunst der fortlaufenden, lesbaren Darstellung auch schwieriger, abstrakter Dinge in hohem Maße, die der schärfste Gegensatz zu der langweiligen, schablonenhaft gegliederten „Euklidischen" Manier ist. Solche Bücher lesen sich „wie ein Roman" und widerlegen damit die alte Ansicht, gute wissenschaftliche Bücher müßten langweilig geschrieben sein, aufs schlagendste. Was nun den Inhalt anlangt, so geht auch Clairaut durchaus von praktischen Problemen der Feldmessens aus und führt dann ganz allmählich zu allgemeinen Ideeenbildungen empor, wobei das streng logische Moment etwas zurücktritt. Er setzt in seiner sehr interessanten Vorrede auseinander, warum er diese Anordnung wählt: Die praktischen Probleme der Feldmessens sind es, die die Menschen überhaupt zur Ausbildung einer geometrischen Wissenschaft angeregt haben, und darum wird man, wenn man sie voranstellt, auch jetzt noch jeden Menschen ganz anders für die Geometrie interessieren können, als wenn man mit einem abstrakten Gebäude von Axiomen und Theoremen beginnt, dessen innern Sinn niemand so bald be-

greifen kann. Clairaut hat hier offenbar die Tendenz, sein Werk auch für weitere nicht eigentlich fachmännische Kreise genießbar zu machen, wie denn ja damals tatsächlich die Mathematik in ungleich höherem Maße zur allgemeinen Bildung der führenden Gesellschaftsschichten gehörte, als es heute der Fall ist.

Eine neue Epoche der Unterrichtsgestaltung tritt am Ende des Jahrhunderts ein in Gefolge der großen Umwälzungen durch die französische Revolution von 1789. Handelte es sich bisher wesentlich immer nur um die Ausbildung der höheren Stände, speziell auch um die Vorbildung zur Offizierslaufbahn, so treten jetzt neue soziale Schichten des Bürgertumes in den Vordergrund, und der Unterricht erhält neue Ziele und Methoden. Ich habe da 2 Richtungen der Entwickelung hervorzuheben, die an die beiden damals gegründeten Pariser Hochschulen, die école polytechnique und die école normale supérieure anknüpfen; die erstere ist, im Zeichen der neu emporwachsenden Technik, zur Ausbildung von Ingenieuren und Genieoffizieren, die andere zur Heranziehung von Oberlehrern bestimmt. An der école polytechnique war der einflußreichste Mann der berühmte Monge; er hat dort die geometrischen Unterrichtseinrichtungen geschaffen, wie wir sie noch heute an den technischen Hochschulen und ähnlichen Instituten haben, vor allem den großen Kursus in darstellender Geometrie, und in analytischer Geometrie. Die wesentliche Neuerung gegen den früheren Betrieb ist dabei, daß nicht nur wenige besonders interessierte Hörer gefördert werden, sondern daß durch zweckmäßige Organisation gleichzeitig eine große Anzahl von Studierenden in eigener Arbeit fruchtbringend beschäftigt ist. Auf die Zeitgenossen von Monge machte er einen großen Eindruck, als er zum ersten Male Übungen leitete, in denen vielleicht 70 Personen gleichzeitig an ihren Zeichenbrettern arbeiteten.

An der École normale andererseits wirkte Legendre, der durch seine 1794 zum ersten Male erschienenen berühmten Éléments de géométrie auf den geometrischen Unterricht für lange Zeit einen beherrschenden Einfluß ausgeübt hat; ich kann Ihnen hier die 4. Auflage dieses Buches[4] vorlegen. Dies Werk hat nächst Euklids Elementen unter allen Lehrbüchern der Elementargeometrie die weiteste Verbreitung gefunden, und zwar bemerkenswerter Weise – ich deutete es schon an – nicht nur in Frankreich, wo es das ganze 19. Jahrhundert hindurch immer wieder neu aufgelegt wurde, sondern auch in andern Ländern; namentlich in Amerika und Italien nahm es lange eine maßgebende Stellung ein.

Im Vergleich zu Clairaut oder gar Petrus Ramus bedeutet Legendres Buch einen großen Schritt auf Euklid hin; sein Hauptziel ist wieder ein in sich geschlossenes abstraktes System der Elementargeometrie. Andererseits bestehen aber doch wesentliche Unterschiede Euklid gegenüber, die ich in Anbetracht der großen historischen Bedeutung Legendres nun gern ausführlicher darlegen will:

1.) Was zunächst den Stil der Darstellung anlangt, so hat Legendre einen zusammenhängenden bequem lesbaren Text; er nähert sich in seiner äußeren Form viel mehr der Clairautschen Darstellung, die ich vorhin rühmte, als der in bekannter Weise zergliederten, fast möchte ich sagen zerhackten, in ihrer Einförmigkeit langweiligen Schreibweise Euklids.

2.) In Hinsicht auf den Inhalt ist wohl der wesentliche Punkt, daß Legendre im Gegensatz zu Euklid in der Geometrie bewußten Gebrauch von der elementaren Arithmetik seiner Zeit macht; er ist also, um diesen Ausdruck zu gebrauchen, Anhänger der Fusion von Arithmetik und Geometrie und begreift sogar in diese Fusion noch weiterhin die Trigonometrie ein, die er gleichfalls in seinem Werke behandelt.

3.) Der prinzipielle Standpunkt Legendres ist gegenüber dem Euklids ein wenig von der logischen nach der anschauungsmäßigen Seite verschoben. Euklid legt – ich

[4] Paris 1802.

habe das ja oft genug betont – allen Nachdruck auf das logische Raisonnement, das er wenigstens der Tendenz nach von der Einmischung von Anschauungselementen frei hält; alles was er an Tatsachen der Anschauung zu brauchen meint, stellt er vorher in seinen Axiomen etc. zusammen. Dementgegen kommt es Legendre nicht darauf an, auch innerhalb seiner Deduktionen geometrischer Sätze gelegentlich anschauliche Überlegungen zu verwenden.

4.) Um mehr in Details einzugehen, ist es besonders interessant, die <u>Behandlung der Irrationalzahlen</u> bei beiden Autoren zu vergleichen. Im Buch 5 von Euklid wird – wie wir wissen – der Begriff der Irrationalzahl unter der Form des Logos oder Verhältnisses zweier inkommensurablen Größen ausführlich definiert und untersucht, in völliger Analogie mit der modernen Theorie der Irrationalzahl; im weiteren Verlauf führt Euklid dann die Beweise der Sätze, in die dem Wesen der Sache nach Irrationalzahlen eingehen, immer ganz besonders sorgfältig mit einer geradezu modernen Anforderungen genügenden Strenge durch (Exhaustionsbeweis–!). Legendre aber gleitet über alle diese Punkte kurz hinweg; die Zahlen, rationale und irrationale, nimmt er aus der Arithmetik als bekannt an, in der man sich freilich damals über ihre strenge Begründung auch nicht viel Kopfzer-

brechen machte. Und Exhaustionsbeweise oder dgl. kennt er nicht; es ist ihm ohne weitere Erläuterung ganz selbstverständlich, daß ein für alle rationalen Zahlen gültiger Satz auch für alle irrationalen gilt. Auch hierin stimmt er übrigens mit allen anderen großen Mathematikern seiner Zeit überein; ich habe gerade im vorigen Semester ein Beispiel dieser Auffassung in Lagranges „Calcul des fonctions" Ihnen vorgelegt.[1.)]

5.) Trotz dieser freieren Stellung Legendres hinsichtlich der logischen Strenge der Einzelausführungen steht er doch den <u>prinzipiellen Fragen über die Grundlagen der Geometrie</u> keineswegs gleichgültig gegenüber; da nimmt er vielmehr im Gegensatz zu seinen Vorgängern in Frankreich nicht nur die Euklidische Tradition mit vollem Interesse auf, sondern fördert sie sogar durch wesentliche neue Ideeen.

Besonders ist es die <u>Theorie der Parallelen</u>, auf die er seine Aufmerksamkeit richtet, und hierüber will ich noch gern einiges Nähere sagen. Übrigens muß man sich dabei an die ersten Auflagen halten, da die späteren Bearbeiter gerade in dieser Richtung stark geändert haben.

Ich gehe von folgender Bemerkung aus: Wir hatten

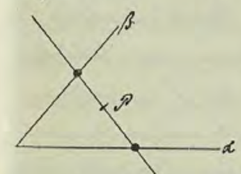
1.) siehe Teil I pag. 343. (Beweis der binomischen Satzes).

die beiden nichteuklidischen und die euklidische Geometrie früher dadurch charakterisiert, daß keine, 2 oder 1 Parallele existieren; statt dessen kann man jedoch auch die Winkelsumme einer beliebigen geradlinigen Dreiecks heranziehen und erhält folgende, wie sich zeigen läßt, genau aequivalente Unterscheidung: In der euklidischen Geometrie ist sie stets π, in der nichteuklidischen erster Art (der hyperbolischen) ist sie stets kleiner als π, und in der zweiten Art (der elliptischen) endlich stets größer als π. Nun will Legendre beweisen, daß die letzten beiden Möglichkeiten ausgeschlossen sind. Da das nichts heißt, als das euklidische Parallelenaxiom beweisen, kann er das nur dadurch erreichen, daß er der Anschauung gewisse einfache, das Parallelenaxiom implizierende Obersätze entnimmt, und seine Kunst ist nur, diese so plausibel zu wählen, daß der Leser und gewiß auch der Autor selbst nicht merkt, daß es sich hier tatsächlich um neue einschränkende Voraussetzungen handelt.

Was zunächst die Unmöglichkeit der elliptischen Geometrie, also der Winkelsumme $> \pi$ anlangt, so liegt dem sehr beachtenswerten Legendre'schen Beweise die stillschweigende Annahme unendlicher Länge der Geraden zu Grunde. Das ist gewiß eine äußerst plausible Annahme, an deren Richtigkeit weder Legendre noch einer seiner

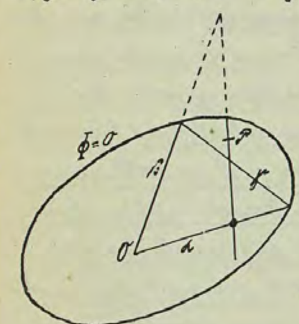
Leser gezweifelt hat, und die auch weiterhin alle Geometer vor Riemann als selbstverständlich angesehen haben. Und doch zeigt die elliptische Geometrie, daß mit den andern Axiomen auch die Annahme einer endlichen Länge der Geraden verträglich ist, wenn man sie nur unbegrenzt, also in sich zurücklaufend annimmt; man muß sich also bewußt sein, daß man mit der unendlichen Länge der Geraden eine neue unabhängige Tatsache der Anschauung heranzieht.

Um ebenso die hyperbolische Geometrie auszuschließen, benutzt Legendre gleichfalls – ohne sie besonders hervorzuheben – eine einfache Anschauungstatsache, an der kein naiver, durch geometrische Studien noch nicht sozusagen verbildeter Verstand jemals zweifeln wird: Ist P irgend ein Punkt innerhalb des Winkels zweier Halbstrahlen α, β so soll man durch P stets eine Gerade ziehen können, die sowohl α als auch β trifft.



Indem er das benutzt, gelingt ihm einwandfrei der Beweis, daß die Winkelsumme im Dreieck auch niemals kleiner als π sein kann, womit dann schließlich allein die Euklidische Geometrie übrig bleibt.

Ich muß nun deutlich machen, inwiefern diese so plausible Tatsache in der Nichteuklidischen Geometrie *erster Art nicht zutrifft*; dann erst können wir es vollkommen verstehen, daß es Legendre durch ihre Benutzung gelingt, diese Geometrie auszuschließen. Wir knüpfen genau an frühere Betrachtungen (S. 398) an. Es seien α, β 2 Strahlen der hyperbolischen Geometrie durch den Punkt O, der natürlich im Innern der fundamentalen Kegelschnittes $\phi = 0$ liegen muß. Die sämtlichen Parallelen zu α sind dann die Strahlen durch den Schnitt von α mit dem Kegelschnitt (d. i. der unendlichferne Punkt von α), soweit sie im Innern verlaufen, und analoges gilt für β. Es gibt also eine Gerade γ, die sowohl zu α als zu β parallel ist, nämlich die Verbindung ihrer Schnitte mit dem Kegelschnitte $\phi = 0$; das kann natürlich in der Euklidischen Geometrie nicht vorkommen. Wählen wir nun den Punkt P zwischen α und β außerhalb des von γ mit α und β abgegrenzten Dreiecks, (aber natürlich innerhalb des Kegelschnittes), so trifft für ihn die Legendre'sche Annahme nicht mehr zu; denn jede Gerade durch P wird nur einen der Strahlen α, β innerhalb des Kegelschnittes, den andern aber außerhalb, d. h. im Sinne unserer Geometrie gar-

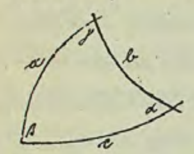


nicht treffen. Das gerade wollte ich aber hier zeigen. –

Verlassen wir nach diesem Exkurse Legendre und sehen zu, wie die *Entwicklung des geometrischen Unterrichts in Frankreich nach ihm* weitergeht. Merkwürdigerweise hat sich die Organisation des Schulwesens in Frankreich im Laufe des 19. Jahrhunderts äußerst wenig geändert, wie denn überhaupt auf allen kulturellen Gebieten die unter Napoleon I. geschaffenen Einrichtungen lange Zeit hindurch allen Wechsel des politischen Regimes überdauert haben. So herrscht im geometrischen Unterricht immer weiter fast unbeschränkt Legendre, nur daß in den fortgesetzten *Neuauflagen* [1] sich eine gewisse Filtrierung des Inhaltes vollzieht in dem Sinne einer *Einschränkung der Beziehungen zu den Anwendungen*, die sich bei Legendre noch finden. Wenn nämlich auch Legendre selbst der Kunst des geometrischen Messens nicht mehr die hervorragende Stelle einräumt, wie Clairaut oder gar Petrus Ramus, so hat er doch nicht die Geringschätzung dafür, wie sie später einriß, und auch der Sinn für mathematische Exekutive, für numerisches Rechnen, ist noch recht rege bei ihm. Aber alles hierauf Bezügliche wird in den späteren Auflagen mehr und mehr

1) Ich habe hier zur Hand die 33. Aufl., bearbeitet von *A. Blanchet* (Paris 1893).

weggelassen, speziell fällt das Kapitel über Trigonometrie fort, in dem Legendre besonders enge Beziehungen zu jenen Anwendungen nimmt. Als charakteristisches Beispiel will ich den sog. *Legendre'schen Satz* der sphärischen Trigonometrie anführen. Hat man ein sphärisches Dreieck mit



den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ auf der Kugeloberfläche, so ist der sog. *sphärische Exzess* $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \mathcal{E}$ bekanntlich stets positiv. Sind nun die Seiten im Verhältnis zum Kugelradius nicht zu groß, auf der Erdoberfläche etwa nicht größer als 100 km, *so kann man das sphärische Dreieck mit einer für alle praktischen Zwecke hinreichenden Genauigkeit ersetzen durch ein ebenes Dreieck mit den Winkeln $\alpha - \frac{\mathcal{E}}{3}$, $\beta - \frac{\mathcal{E}}{3}$, $\gamma - \frac{\mathcal{E}}{3}$.* Diesen schönen Satz, der tatsächlich in der geodätischen Praxis viel gebraucht wird, beweist Legendre sehr einfach, indem er in den Formeln der sphärischen Trigonometrie nur die ersten Glieder der Reihen für die trigonometrischen Formeln benutzt. In den späteren Auflagen des Legendre'schen Buches würden Sie diesen Satz aber vergebens suchen.

Neben den fortgesetzten Neuauflagen von Legendre läuft inzwischen noch eine andere Tendenz her, die durch den umfangreichen „*Traité de géométrie*" von *Rouché* und *de Comberousse*[1]

1) T. 1. 2. – 6. éd. Paris 1891.

charakterisiert ist. In Frankreich wird der dem Hochschulstudium vorangehende mathematische Unterricht sehr viel weiter getrieben, als bei uns; den Übergang zur Hochschule vermittelt der zweijährige Kurs der *classes de Mathématiques spéciales*, in denen es nicht weniger als *16 Wochenstunden Mathematik* gibt und wo alle, die sich später der Mathematik bedienen müssen, eine weitgehende Ausbildung erhalten. Durch diesen Betrieb entstand das Bedürfnis, den Lehrbüchern der elementaren Geometrie eine *Menge neuen Stoffes* hinzuzufügen, und das ist in typischer Weise in dem Rouché-Comberousse geschehen, der ein äußerst verbreitetes Lehrbuch war; er enthält in zahlreichen Noten Exkurse über nichteuklidische Geometrie, Dreiecksgeometrie, Tetraedergeometrie, die Lehre von den wichtigeren Kurven und Flächen und vieles andere.

Ich komme nun auf die *neue Reformbewegung im mathematischen Unterricht* zu sprechen, die in Frankreich *um 1900* einsetzt, und die unseren deutschen Reformbestrebungen ganz analog ist. Wir können auch diese Bewegung wieder mit Verschiebungen im gesamten Kulturbilde der Zeitepoche in Zusammenhang bringen. Durch den ungeheuren Aufschwung von Handel und Verkehr, Technik und Industrie wird in immer weiteren Volksschichten das dringende Bedürfnis nach Teilnahme an allen kulturellen Errungenschaften, nach Bildung auf allen Gebieten, nicht zum mindesten auch auf mathematischem, erweckt; freilich sind nicht theoretische Interessen dabei leitend, sondern das Bestreben, nützliche, in der Praxis unmittelbar anwendbare Kenntnisse zu erhalten. Man darf den Führern dieser Bewegung aber keineswegs flache Utilitätsgründe vorwerfen; denn es ist ein hohes Ziel – die Hebung der allgemeinen beruflichen Tüchtigkeit – das ihnen vor Augen steht.

Charakteristisch für die französischen Verhältnisse ist, daß diese Reform mit Beratungen in der Pariser Deputiertenkammer begann; eine dort eingesetzte Kommission, die sich mit einer großen Zahl öffentlicher Körperschaften in Beziehung setzte, erstattete einen ausführlichen Bericht über die Reform des Mittelschulunterrichts überhaupt, wobei der mathematische Unterricht nur ein wichtiges Glied einer langen Kette ist. Die Hauptgesichtspunkte für dessen Neubildung sind Vereinfachung und höhere Anschaulichkeit des Unterrichts einerseits, andererseits die Herübernahme gewisser Dinge in das Schulpensum, die man von altersher der höheren Mathematik zugerechnet hat, die nicht nur leicht zugänglich sondern vor allem von größter Bedeutung für das moderne Kulturleben, speziell für Naturwissenschaft

und Technik sind: ich meine den Funktionsbegriff, die graphische Darstellung, die Anfänge der Infinitesimalrechnung. Damit wird insbesondere eine viel engere Verbindung von Arithmetik und Geometrie erstrebt, als man sie früher jemals ins Auge faßte, es ist der Gipfel dieser Fusion im weitesten Sinne. Diese Reform ist niedergelegt im Plan d'études von 1902 [1] und sogleich allgemein eingeführt worden. In diesem einheitlichen Vorgehen zeigt sich so recht die Wirkung der früher erwähnten weitgehenden Zentralisation gerade auch der Schulverwaltung in Frankreich, vermöge deren es zu einer solchen weitgehenden Reform nur einer Verordnung der obersten Behörde bedarf. Diese ganze Entwicklung ist eingehend in dem von Herrn Schimmack herausgegebenen Bande meiner „Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen" [2] behandelt, auf den ich Sie hier gern verweise; Sie finden da überhaupt zahlreiche nähere Angaben über die Organisation und Entwicklung des mathematischen Unterrichts überhaupt, die das hier speziell für die Geometrie Vorzutragende ergänzen und vervollständigen. Was die französischen neuen Lehr-

1) Plan d'études et programmes d'enseignement dans les lycées et collèges de garçons. Paris 1903.
2) T. I. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907.

pläne angeht, so will ich an dieser Stelle nur das noch besonders betonen, daß die alte Elementargeometrie im Euklidischen Sinne in diesen Lehrplänen gegenüber den modernen neuen Ideeen recht stark zurücktritt. Sie werden das bestätigt finden, wenn Sie sich eines der wichtigsten der an die neuen Lehrpläne anschließenden geometrischen Lehrbücher, die Géométrie von Borel [1] ansehen; es ist ein sehr interessantes Buch, in dem der Stoff einfach und sinnfällig angeordnet ist, und wo übrigens die praktischen Interessen ungemein stark hervortreten.

Demgegenüber ist es bemerkenswert, daß man jetzt im französischen Unterricht zugleich auch wieder einem vollständig logisch durchgearbeiteten Lehrgebäude der Elementargeometrie, wie es etwa Euklid vorschwebte, Interesse zuwendet. Besonders ein sehr bedeutendes Buch habe ich Ihnen da zu nennen, die „Nouveaux éléments de géométrie" von Ch. Méray in Dijon, die zwar schon 1874 zum ersten Mal erschienen sind, aber doch erst in den letzten Jahren die Aufmerksamkeit weiterer Kreise auf sich lenkten. [2] Méray benutzt in seinen Beweisen keine Tatsache der Anschauung, die er nicht zuvor in einem Axiom formuliert hat und entwickelt so ein vollständiges

1) Paris 1905. Deutsche Übertragung (als „Elemente der Mathematik" Bd. II) von P. Stäckel (Leipzig 1909).
2) Nouv. éd. Dijon 1903. 3 éd. 1906.

Axiomensystem der Geometrie; dabei kommt er aber den Anforderungen des wirklichen Unterrichts insofern viel mehr als die strengen Euklidanhänger entgegen, als er die Anzahl der Axiome nicht so streng auf ein Minimum unabhängiger Sätze zu reduzieren strebt und sie auch im wesentlichen immer erst dann formuliert, wenn er sie wirklich braucht. Besonders charakteristisch für Méray aber ist einmal, daß er die Fusion von Planimetrie und Stereometrie so vollständig durchführt, als irgend möglich, und dann, daß er im Gegensatz zu Euklid den Begriff der Bewegungsgruppe durchaus an die Spitze stellt und seinen ganzen Aufbau der Geometrie konsequent auf ihn stützt. So entsteht ein ganz ähnlicher Aufbau, wie wir ihn neulich skizzierten: Translationen und Rotationen stehen von Anfang an einander gegenüber; die ersteren liefern den Begriff der Parallelität, die andern, da es sich immer von vornherein um den Raum handelt, den Begriff des Senkrechtstehens in der Lage der Rotationsachse zu den Ebenen, in denen die Bahnkurven (Kreise) jedes Punktes liegen. Sie mögen die sehr interessante genaue Durchführung dieses Aufbaues bei Méray selbst nachlesen. Ich erwähne hier nur noch, daß er stets besonderen Wert auf die exakte Durchführung aller in der Geometrie etwa notwendigen Grenzprozesse legt und dabei den modernen Zahl-

begriff in seiner exakten Formulierung gelegentlich wohl benutzt, wenn er auch lange nicht so weit in der Fusion mit der Arithmetik, der analytischen Geometrie geht, wie wir das hier taten.

Man kann übrigens in den modernen französischen Schulbüchern die Einwirkung des Méray'schen Standpunktes deutlich wahrnehmen. So spielt in dem genannten Buche *Borels* der Bewegungsbegriff eine größere Rolle und noch vielmehr ist das in den neuen „*Eléments de géométrie*" von *C. Bourlet* [1] der Fall, von dem viele sehr verbreitete Lehrbücher herrühren; hier ist überall ganz ausdrücklich von der Bewegungsgruppe und den geometrischen Begriffen als ihren Invarianten die Rede.

Wir verlassen damit Frankreich und gehen zu Italien über.

III. Der Unterricht in Italien.

Da haben wir ebenfalls eine äußerst charakteristische Entwicklung, die durchaus andere Grundzüge aufweist als in England und Frankreich, und in ihrer typischen Ausbildung höchstens mit Méray in Parallele gesetzt werden kann. Ich will mich hier nur mit dem *modernen Italien von etwa 1860 an* beschäftigen. Den größten Einfluß auf die einheit-

1.) Paris 1908.

liche Neugestaltung des mathematischen Unterrichts in diesem neugebildeten Einheitsstaate hatte *L. Cremona*, derselbe, der Ihnen allen wegen seiner wissenschaftlichen Bedeutung in der Entwicklung der modernen Geometrie bekannt ist; ist er doch geradezu der *Begründer der selbständigen algebraisch-geometrischen Forschung* in Italien, die so hervorragende Resultate gezeitigt hat. Dieser seiner wissenschaftlichen Tätigkeit gemäß hat Cremona eine nachhaltige Wirkung auf den *Hochschulunterricht* ausgeübt, indem er die *projektive Geometrie in Verbindung mit darstellender Geometrie und graphischer Statik* in den Vordergrund brachte. Die Ingenieure sprechen heute überall in der Welt vom *Cremonaschen Kräfteplan*, und wenn der Name auch historisch unberechtigt ist, zeigt er doch deutlich den großen Einfluß Cremonas.

Dieser Cremona hat merkwürdigerweise auf den Unterricht an den Mittelschulen in ganz anderem Sinne eingewirkt. In einem berühmten *Gutachten von 1867* empfiehlt er den *Euklid*, wenn nicht als verbindlich, so doch in seiner Anordnung und Begrenzung des Stoffes sowie vor allem in seinem Ideal eines streng logisch geschlossenen Aufbaues der Geometrie als *vorbildlich für den gesamten geometrischen Schulunterricht* einzuführen. Hier betont er also besonders die *logische Seite*, während in seiner eigenen unmittelbaren Lehrtätigkeit und auch in seiner wissenschaftlichen Arbeit vor allem die anschaulichen Momente in den Vordergrund kommen;[1] es ist nicht recht zu verstehen, was eigentlich das Bindeglied zwischen diesen beiden anscheinend so entgegengesetzten Anschauungen bei Cremona war.

Jedenfalls aber fiel diese Anregung Cremonas von 1867 auf äußerst fruchtbaren Boden und es bemächtigte sich der italienischen Mathematiker ein wahrer Wetteifer, den Euklid durch Lehrbücher zu ersetzen, die seinen Stoff und seine ganze Tendenz durchaus festhalten und sie nur in einer den heutigen verschärften Anforderungen entsprechenden Weise realisieren. Charakteristisch ist, daß sich ganz wie wir es in Frankreich sahen, auch eine Reihe der wissenschaftlich hochstehenden Mathematiker an dieser Arbeit beteiligen, und daß demgemäß eine Anzahl wissenschaftlich sehr bedeutender Werke dabei entstehen, deren paedagogischen Wert man freilich nicht ebenso so hoch einzuschätzen braucht. Ein sehr interessantes Referat über die wichtigsten Erscheinungen dieser Bewegung hat neuerdings W. Lietzmann[2] gegeben; ich

1) Vgl. dafür z. B. Cremonas „Elemente der projektivischen Geometrie." (1872) Deutsch von Trautvetter. Stuttgart 1882.

2) „Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht (mit besonderer Berücksichtigung Italiens)." Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht 39. (1908), pag. 177.

will im folgenden, zum Teil im Anschluß daran, nur wenige besonders charakteristische Momente hervorheben.

Ich beginne damit, die Euklidübersetzung zu nennen, die E. Betti und F. Brioschi im Jahre 1867 veranstalteten[1] und auf die die Verbreitung der Euklidkenntnis in Italien zurückgeht; sie enthält, ganz wie die Schuleuklidausgaben der Engländer nur die Bücher 1 bis 6, 11 und 12, aber im Gegensatz zur englischen Tradition beabsichtigt sie ausdrücklich keineswegs den Stoff in dieser alten Form den Schülern darzubieten, sondern sie will vielmehr nur die Basis zur selbständigen wissenschaftlichen Verarbeitung liefern. Von den hieran anschließenden Lehrbüchern hält sich eine größere Reihe älterer noch möglichst eng an das Euklidsche Schema der Definitionen etc., wobei indessen alle die zahlreichen Anschauungstatsachen, von denen Euklid stillschweigend Gebrauch macht, ausdrücklich praezis formuliert werden. Um über die Lücken im ersten Buch hinwegzukommen, rechnet man allgemeiner Ansicht zufolge auch den Begriff der starren Bewegung zu diesen stillschweigend von Euklid benutzten Dingen und stellt ihn daher ausdrücklich mit an die Spitze des Systems, indem man eine Reihe „Axiome der Bewegung" formuliert. Ganz wie bei Méray wird dabei übrigens aus paedagogischen Gründen kein Wert auf Unabhängigkeit der einzelnen aufge-

1) Gli Elementi di Euclide. 3a Ristampa. Firenze 1901.

stellten Axiome gelegt. Ein typisches Buch dieser Richtung sind die sehr verbreiteten „Elementi di geometria" von A. Sannia und E. d'Ovidio,[1] die 1869 zum ersten Male erschienen, und in denen Sie alle vorgenannten Punkte bestätigt finden werden. Der Stoff ist genau so begrenzt wie bei Euklid, nur daß er in wesentlich geglätteter Gestalt dargeboten wird. So wird der Zahlbegriff der reinen Arithmetik durchaus vermieden, aber aus den Euklidischen Exhaustionsbeweisen doch ein für alle Male die zu Grunde liegende Idee des Grenzbegriffes deutlicher herauspräpariert, als es Euklid tut. Weiterhin ist insbesondere Planimetrie und Stereometrie äußerlich getrennt, doch wird offenbar damit gerechnet, daß das Buch in Schulen mit „fusionistischem" Lehrgange gebraucht wird, wie ja diese Fusionsbestrebungen zwischen Planimetrie und Stereometrie gerade in Italien besonders verbreitet sind. Als ein Lehrbuch, das sie am meisten propagiert hat, will ich die „Elementi di Geometria" von R. de Paolis[2] wenigstens noch nennen.

Wesentlich mehr als diese und die verwandten Werke entfernt sich eine andere Gruppe von Lehrbüchern von der Euklidischen Darstellung, indem sie ein sehr viel höheres Maß von Strenge und Präzision in der Fassung der Grundlagen zu erreichen sucht. Sie halten die zahlreichen geometrischen Grundbegriffe des Euklid und jener Lehrbücher für nicht

1) Vol. I. II. 11. Ed. Napoli 1902.   2) Torino 1884.

hinreichend streng definiert und wollen daher mit einem einzigen Grundbegriff, dem des Punktes, auskommen, aus dem alle andern in der Geometrie notwendigen Gebilde rein logisch aufgebaut werden sollen; insbesondere soll auch jeder Gebrauch des Begriffes der starren Bewegung bei der Grundlegung der Geometrie durchaus vermieden werden.

Den Höhepunkt dieser Entwicklung stellen wohl die verschiedenen Lehrbücher G. Veroneses dar, die das gesamte Gebiet der Geometrie umfassen. Für uns kommen hier nicht seine „Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt"[1] in Betracht, die durchaus kein Schulbuch sind, sondern in abstraktester Form das rein wissenschaftliche Problem einer allgemeinen mehrdimensionalen und „nichtarchimedischen" Geometrie behandeln; uns interessieren vielmehr seine Schulbücher „Nozioni elementari di geometria intuitiva"[2] und „Elementi di geometria".[3] Das erstere ist eine induktive Einführung, die auf der Unterstufe dem Schüler die verschiedenen geometrischen Formen anschaulich nahe bringen soll – entsprechend etwa unserm propädeutischen Vorkursus. Der eigentliche systematische geometrische Unterricht beginnt nämlich nach allen italieni-

1) Dtsch. v. A. Schepp. Leipzig 1894.   2) 2 ed. Verona 1902

3) In verschiedenen Ausgaben; z. B. „ad uso dei ginnasi e licei. Con collaborazione di P. Gazzaniga. P. I. II. Ed. III. Verona 1904."

schen Lehrplänen erst <u>sehr spät</u>, in Klassen, die etwa unseren Sekunden entsprechen; man darf also nicht etwa glauben, daß alle diese exakten Lehrbücher sich an Knaben vom Alter unserer Quartaner wenden!

Die „Elementi" Veronese's geben die <u>theoretischen Entwicklungen</u>, wobei in äußerst vollständiger Weise <u>alle</u> Postulate der Geometrie aufgestellt werden – auch wenn sie noch so selbstverständlich erscheinen; so heißt es z. B. ausdrücklich als erstes Postulat „Es gibt <u>verschiedene</u> Punkte" – wir betrachten also nicht etwa eine Geometrie, in der nur 1 Punkt existiert! Dabei wird übrigens immer noch wenigstens kurz der empirischen Beobachtung gedacht, die als heuristisches Prinzip für die Aufstellung der Axiome leitend ist. Im einzelnen verwendet nun Veronese die <u>geradlinige Strecke</u> als fundamentales geometrisches Gebilde, das er als ein gewissen Forderungen genügendes <u>System von Punkten</u> definiert. Auf die Kongruenz solcher Strecken, die als Grundbegriff auftritt, wird nun in sehr origineller Weise alles andere zurückgeführt; so heißen <u>2 Dreiecke</u> kongruent, wenn alle Seiten kongruent sind, womit auch die Kongruenz der Winkel definiert ist (Also <u>Voranstellung des 3. Kongruenzsatzes</u>!), und sogar die <u>Parallelenlehre</u> wird so in Angriff genommen: Parallel heißen 2 Gerade, die in Bezug auf einen Punkt zentrosymmetrisch liegen, d. h. auf allen Geraden durch ihn paarweis gleiche Strecken ausschneiden. Übrigens hält sich

auch Veronese durchaus <u>innerhalb der Grenzen des Euklidischen Lehrstoffes</u>, speziell vermeidet er natürlich jede Anlehnung an die Arithmetik. Diesem Veroneseschen Buche inhaltlich verwandt sind die „<u>Elementi di geometria</u>" von <u>F. Enriques und U. Amaldi</u>,[1] die nur in bedeutend höherem Maße neben der strengen Systematik auch die paedagogischen oder psychologischen Momente betonen.

Diese abstrakte Richtung Veroneses hat nun noch eine Steigerung erfahren in der sog. <u>Peanoschule</u>. <u>G. Peano</u> in Turin vertritt die Tendenz, die rein logische von Anschauungselementen freie Bearbeitung der Mathematik noch viel schärfer durchzuführen, als es in den bisher berührten axiomatischen Untersuchungen geschieht, und er hat zu diesem Ende eine besondere <u>Formelsprache</u> ersonnen, die an die Stelle der gewöhnlichen Sprache treten soll; denn er meint, daß man sonst infolge der zahlreichen Assoziationen, die sich unwillkürlich an die uns geläufigen Worte knüpfen, das Hineinspielen nicht logischer Momente unmöglich vermeiden könne. So wird das Ideal schließlich ein <u>Operieren mit an sich bedeutungslosen Symbolen nach „willkürlichen" Regeln</u>, die auch ihrerseits nichts zu bedeuten haben. Peano hat eine große Schule begründet, die jetzt in Italien weit verbreitet ist und viel Einfluß hat; mit seinen Schülern gemeinsam veröffentlicht er ein „Formulaire", in dem die gesamte Mathematik ihrem rein

[1] 2 ed. Bologna 1905.

logischen Inhalt noch in seiner Formelsprache dargestellt werden soll.

Fragen wir uns, ob eine solche extreme Betonung der rein logischen Momente für die Wissenschaft förderlich sein kann. Ich wende da gern ein Gleichnis an: viele Leute empfinden, wenn sie aus dem Tal auf einen Berg steigen, die reinere, dünnere Luft angenehm und doch ist es keineswegs so, daß immer weitere Verdünnung der Luft das Wohlbefinden stets erhöht; es gibt da eine Grenze, jenseits deren überhaupt jede Existenzmöglichkeit aufhört. So glaube ich, daß die Begeisterung der Logiker für die Elimination jeder Anschauung (sofern sie überhaupt möglich ist, denn auch die Peanoschen Symbole bringen als solche noch einen Rest anschaulicher Elemente in sein System!) etwas voreilig ist: mag manchem vielleicht auch zunächst in dieser reineren Logik sehr wohl zu Mute sein, so wird es doch auch hier ein Optimum in der Verteilung von Logik und Anschauung geben, das zu Gunsten der ersteren ohne Schaden nicht überschritten werden kann!

Freilich, was die reine Forschung angeht, wird man natürlich jeden neuen Ansatz gut heißen und die Fortschritte und Anregungen abwarten, die er bringt. Aber es ist notwendig, auch vom Standpunkte der Pädagogik aus ein Urteil abzugeben, da jene abstrakten Tendenzen vielfach auch auf den Schulunter-

richt Einfluß gewonnen zu haben scheinen, und dieses Urteil wird sehr negativ lauten müssen: man darf wohl vermuten, daß bei einem Schulunterricht im Sinne jener Richtung viele Schüler gar nichts lernen, und die Wenigen, die überhaupt folgen können, jedenfalls nicht das erhalten, was sie später gebrauchen können.

In der Tat scheint in Italien auch bereits eine Reaktion gegen diese allzu abstrakte Gestaltung des Unterrichts entstanden zu sein – auch an den Hochschulen, denn merkwürdiger Weise haben die reinen Logiker gerade an den technischen Hochschulen vielfach das Übergewicht erlangt. Man klagt da jetzt über eine schlechte mathematische Ausbildung der Durchschnitts der Studenten, die die abstrakten Auseinandersetzungen nicht auffassen können; schon vor Jahren wurde mir gelegentlich als amusantes Beispiel mangelnder Anpassung an die tatsächlichen Bedürfnisse erzählt, daß in Vorlesungen für Ingenieure der Taylorsche Satz zuerst für beliebig viele Variable bewiesen und erst hinterher auf eine Variable spezialisiert wurde.

Auch im Mittelschulunterricht machen sich in neuerer Zeit Reformbestrebungen geltend, die ganz im Sinne unserer deutschen und der französischen Bewegung die vorwiegende Berücksichtigung der abstrakten Logik und den engen stofflichen Anschluß an Euklid aufgeben, und den Unterricht durch anschauliche Momente, durch Heranziehung der wichtigsten Allgemeinbegriffe der modernen Wissenschaft (Funktionsbegriff), schließlich auch durch Bezugnahme auf die Anwendungen beleben wollen. Der Führer dieser Bewegung ist Gino Loria, der 1904 vor dem 3. internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg über den mathematischen Unterricht in Italien berichtet [1] und seither auch in einem interessanten auch ins Deutsche übertragenem Vortrage [2] vor der italienischen Oberlehrervereinigung „Mathesis" über seine Reformvorschläge gesprochen hat. Diese Vereinigung ist ein Zeugnis dafür, daß man in den Lehrerkreisen Italiens den modernen Ideen jetzt reges Interesse zuwendet, und wenn auch die neuen Lehrpläne von 1905 [3] nur erst geringe Spuren davon zeigen, so darf man doch vielleicht annehmen, daß man sich allmählich an den italienischen Schulen von den Banden der extremen Logik befreien und eine moderne Gestaltung des Unterrichts einführen wird.

Wir wenden uns nun endlich unserer Heimat zu:

IV. Der Unterricht in Deutschland.

Dabei wollen wir der Idee nach auch alle deutschsprechenden

1) Verhandlungen des..., Leipzig 1905, pag. 594.
2) „Vergangene und künftige Lehrpläne". Deutsch v. H. Wieleitner. Leipzig 1906.
3) Istruzioni e programmi vigenti nei gymnasi e licei. Torino 1905.

Länder, wie die deutsche Schweiz und Oesterreich, mit berücksichtigen. Der Entwicklungsgang des deutschen geometrischen Unterrichts zeigt einen ganz anderen Typus, als in den andern Ländern; vor allem fehlt die Einheitlichkeit der Entwicklung, wie sie anderwärts durch die strenge staatliche Organisation oder das Eingreifen einer starken Persönlichkeit erzielt war. Hier in Deutschland hat sich vielmehr der Unterricht in jedem Einzelstaate für sich in eigenen Bahnen entwickelt und noch darüber hinaus blieb der einzelnen Anstalt, dem einzelnen Lehrer stets ein relativ großer Spielraum für selbständige Betätigung. So sind denn eine große Menge verschiedenartiger Anregungen aus den verschiedensten Quellen nebeneinander zur Geltung gekommen, und sie konnten meist ihre Wirksamkeit entfalten, noch ehe ihnen in offiziellen Lehrplänen nachgegeben war. Ich kann hier natürlich nur wenige Gesichtspunkte herausgreifen, die für die Entwicklung in den letzten Jahrzehnten – sagen wir von etwa 1870 an – besonders bedeutsam geworden sind und verweise im übrigen auch hier zur Ergänzung auf die ausführliche Darstellung der allgemeinen Entwicklungslinien in Klein-Schimmack. [1]

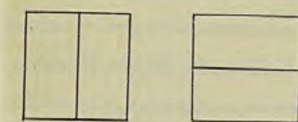
Eine besonders wichtige Tendenz, die sich seit den siebziger Jahren geltend macht – im Zusammenhang mit

1) (Zitiert S. 491) Siehe insbesondere pag. 67 ff.

dem gesteigerten Bildungsbedürfnis weiter Volksschichten, wie es mit dem nationalen Aufschwung in jener Zeit entstand – geht auf <u>Bewegungen im Volksschulunterricht</u> zurück; es ist die Auffassung, daß <u>im Elementarunterricht notwendig die unmittelbare Anschauung voran</u> stehen müsse, daß man hier den Unterricht immer an sichtbare dem Schüler wohlbekannte Dinge anknüpfen müsse. Diese Anregungen stammen bekanntlich von dem berühmten Schweizer <u>H. Pestalozzi</u>, in dem man überhaupt den Begründer des Elementarunterrichts im heutigen Sinne sehen muß; seine Wirkungszeit fällt – in runder Zahl – <u>um das Jahr 1800</u>. Gewiß hat es für jeden Mathematiker Interesse, Pestalozzis Originalpublikationen, die für die Mathematik in Betracht kommen, kennen zu lernen; es sind dies „<u>das A B C der Anschauung oder die Anschauungslehre der Maßverhältnisse</u>“ [1] und „<u>die Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse</u>“. [2] Diese Bücher sollen zeigen, wie man die allereinfachsten Tatsachen der Raum- und Zahlanschauung dem gänzlich unvorgebildeten Schüler durchaus zu Eigen machen kann. Freilich täuscht man sich sehr, wenn man in ihnen irgend etwas besonders Packendes erwartet; sie sind so ziemlich

1) In 2 Heften. Zürich und Tübingen 1803.
2) In 3 Heften. Zürich und Tübingen 1803/04.

das Langweiligste, was ich je in der Hand gehabt habe, da sie lediglich alle möglichen trivialen Verhältnisse mit erschreckender Konsequenz ganz ausführlich darstellen. Um nur ein Beispiel herauszugreifen: Das Kind soll lernen, daß ein Quadrat durch horizontale und vertikale Gerade in gleiche Teile geteilt werden kann; dazu gibt Pestalozzi nicht nur eine Tafel mit sämtlichen 100 Kombinationen von Teilungen durch 0, 1, … 9 vertikale und horizontale Linien, sondern er bespricht auch im Text

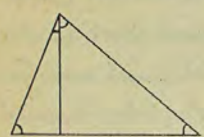


die Anzahl, Lage etc. der Teilquadrate und Rechtecke in jedem einzelnen Falle nach immer wieder demselben Schema in der denkbar ausführlichsten Weise. Man muß das wohl so verstehen, daß er so auch dem ungeschicktesten Volksschullehrer – er mußte ja damals noch mit ganz unzureichend vorgebildetem Material rechnen – eine reiche Sammlung von Beispielen bieten wollte, von dem er einen beliebigen Teil nach Auswahl wörtlich seinem Unterricht zu Grunde legen konnte.

Ich lege Ihnen zur Ergänzung noch ein Schriftchen des Göttinger Philosophen <u>J. F. Herbart</u> vor, der besonders für die Ausbreitung dieser Ideeen tätig war: „<u>Pestalozzis Idee eines A B C der Anschauung</u>.“ [1] Hier werden die Pesta-

1) Göttingen 1802.

lozzischen Ansätze in weniger schematischer und darum interessanterer Darstellung fortgeführt. Namentlich sind es alle möglichen Dreiecksgestalten, die Herbart den Kindern deutlich gemacht wissen will. So gibt er in einer Tabelle die Dreieckswinkel sowie die Winkel rechts und links der Höhe von 5° zu 5° an, und in einer andern Tabelle die zugehörigen Seitenlängen, in der Absicht, diese Tabelle durch Nachmessen prüfen zu lassen.



Amüsant ist auch sein Vorschlag, die verschiedenen Dreiecksformen den Kindern dadurch einzuprägen, daß man ihnen schon in der Wiege Tafeln mit den verschiedensten Dreiecksformen vor Augen stellt.

Pestalozzi und Herbart üben eine mächtige Einwirkung auf den Volksschulunterricht aus, die noch heute nachhält; Sie werden in den meisten Lehrbüchern der Raumlehre für Volksschulen deutliche Nachwirkungen der Pestalozzischen Ideeen finden können. In sehr charakteristischer Form finden Sie Pestalozzis Anschauungslehre noch in unsern ganz auf ihn bezw. auf F. Fröbel zurückgehenden Kindergärten erhalten, wo die kleinen Kinder im Spiel mit geeigneten Gegenständen die einfachsten Raumformen kennen lernen.

Aber eben auch auf höhere Schulen haben diese pädagogischen Ideeen bald übergegriffen. Besonders charakte-

ristisch ist in dieser Hinsicht der Lehrplan, den Exner und Bonitz um 1850 für Oesterreich aufgestellt haben. Daß gerade hier und zu dieser Zeit die Bewegung einsetzte, kann man wieder aus den politischen Verhältnissen verstehen; in Oesterreich hatte sich durch die zahlreichen katholischen Ordensschulen, besonders die der Jesuiten, im mathematischen Unterricht wesentlich die dogmatische Methode des Mittelalters erhalten, und als die revolutionäre Bewegung von 1848 das Alte wegschwemmte, da konnte man von dem Vorhandenen gar nichts mehr zur Anknüpfung benutzen und führte das Neue im reinsten Typ ein. So übernehmen denn die Exner-Bonitzschen Lehrpläne, soweit irgend möglich die neuen anschauungsmäßigen Methoden auf die höheren Schulen. Die Raumanschauung wird nicht nur auf der Unterstufe als Vorbereitung betrieben, sondern sie wird zum Selbstzweck erhoben; man soll nicht etwa bloß an anschaulichen Dingen das logische Denken üben, sondern um Übung der Anschauung selbst handelt es sich. Auf der Unterstufe (4 Jahre) tritt der logische Betrieb überhaupt gänzlich zurück und nur das anschauliche Erfassen der Figuren wird unter fortgesetztem Zeichnen geübt; auch auf der Oberstufe, wo der so gewonnene Stoff logisch verarbeitet wird, wird das Zeichnen in beträchtlichem Umfange beibehalten. Viele von Ihnen mögen gelegentlich bemerkt haben, wie geschickt die österreichischen Mathematiker zu zeichnen verstehen – eine Folge jener charakteristischen Gestaltung der Lehrplanes.

Diese Tendenzen sind es nun, die am Anfang der siebziger Jahre auch in Preußen und überhaupt in Norddeutschland sich durchzusetzen beginnen. Man muß hier auch des persönlichen Moments gedenken, daß Bonitz damals ins preußische Kultusministerium als maßgebende Kraft eintrat. Formuliert wurden die Grundsätze dieser Reform für Preußen in den Lehrplänen von 1882; ihr äußeres Kennzeichen ist die Einführung eines geometrischen Vorkursus, der sog. geometrischen Propädeutik auf der Quinta; hier soll der Schüler anschauungsgemäß mit den Dingen vertraut gemacht werden, die später den Inhalt des Lehrgebäudes der Geometrie bilden werden. Vergleichen Sie hierzu außer Klein-Schimmack auch etwa meinen Aufsatz „100 Jahre mathematischer Unterricht in den höheren preußischen Schulen“,[1] in dem ich überhaupt den Gang der Entwicklung unseres mathematischen Unterrichts im letzten Jahrhundert darzustellen gesucht habe.

Das Lehrbuch, in dem die Tendenzen der Reform von

[1] In Lexis, die Reform des höheren Schulwesens in Preußen (Halle 1902). Abgedruckt in Jahresber. d. deutsch. Math.-Verein. 13 (1904) pag. 347 und Klein-Riecke, Neue Beiträge zur Frage der math. u. phys. Unterr. an höheren Schulen. (Leipzig 1904). pag. 63.

1882 wohl ihre ausgeprägteste Formulierung gefunden haben, ist Holzmüllers „methodisches Lehrbuch der Elementarmathematik“.[1] Hier ist schon der Titel charakteristisch: „Methodisch“ ist im Gegensatz zu „systematisch“ gemeint; nicht ein starres Lehrgebäude wie etwa bei Euklid soll aufgeführt werden, sondern ein naturgemäßer Lehrgang, der danach orientiert ist, wie man den Schüler erfahrungsgemäß am besten fördert. Und dann haben wir hier nicht ein Lehrbuch der Geometrie oder Arithmetik für sich, sondern die gesamte Elementarmathematik wird in wechselnder Reihenfolge ihrer einzelnen Fächer dargestellt, sowie man sie im Unterricht wirklich aufeinander folgen lassen kann, wobei auch ihre gegenseitige Beziehungen deutlich hervortreten. Im übrigen gehen die geometrischen Entwicklungen stets vom wirklichen Zeichnen und Konstruieren aus; besonderer Wert wird auf die Ausbildung der Raumanschauung, auf das stereometrische Zeichnen gelegt; und es wird auch immer darauf gesehen, daß man eine Konstruktion nicht nur als möglich erkennt, sondern daß man sie auch wirklich sauber und vollständig durchführt. Die geometrischen Lehrsätze fallen dabei häufig sozusagen nebenbei ab; z. B. entstehen die Kongruenzsätze aus der Bemerkung, daß die Konstruktion eines Dreiecks

[1] In 3 Teilen. Leipzig (Teubner) 1894–95, sowie zahlreiche Neuauflagen.

aus 3 gegebenen Stücken eindeutig ist. Ich muß ferner hervorheben, daß in Verbindung mit der geschilderten Tendenz auch die *Grundsätze der projektiven Geometrie* zum Teil in die Darstellung hineingearbeitet sind. Freilich darf ich nicht verschweigen, daß bei Holzmüller die logischen Momente zum Teil etwas zu kurz gekommen sind; aber es ist nun einmal eine alte Sache, daß man nach allen Seiten hin gleichzeitig Befriedigendes nicht erreichen kann; betont man vorzugsweise die Logik, so leidet die Anschaulichkeit, und umgekehrt.

Die positiven Resultate der hiermit geschilderten Bestrebungen sind wohl jetzt allgemein in den Unterrichtsbetrieb übergegangen, aber natürlich sind allmählich wieder neue Anregungen hinzugekommen. Da kommt in erster Linie wie in allen andern Ländern die starke, in Deutschland etwa ums Jahr 1890 einsetzende Bewegung in Betracht, die die *Anwendungen der Mathematik in allen Zweigen der Naturwissenschaft*, insbesondere in der *Technik*, sowie *ihre Bedeutung für alle Seiten des menschlichen Lebens* mehr betont zu wissen wünscht. Sie bringt gegenüber der auf Anschaulichkeit gerichteten Tendenz etwas wesentlich Neues; denn kann man diese noch mit rein formalen Zwecken verbinden, so handelt es sich jetzt darum, das mathematische Denken wirklich fruchtbar auf den verschiedensten

anderen Gebieten anzuwenden. Zu diesen Bestrebungen stehen die Reformtendenzen in naher Beziehung, die wir im vorigen Winter so oft berührt haben, und die ich daher hier wohl nur noch zu erwähnen brauche: Die *Heranziehung des Funktionsbegriffes*, der *graphischen Methoden*, der *Anfänge der Infinitesimalrechnung*, die ja alle auch für den geometrischen Unterricht zahlreiche neue Anregungen bringen.

Etwas ausführlicher will ich dafür aber über einige *neuere weitergehende Tendenzen* sprechen, mit denen sich die Mathematiker mehr auseinandersetzen müssen, als das bisher geschehen ist:

a., Zunächst meine ich da *gewisse Ergebnisse der modernen psychologischen Forschung*, speziell der experimentellen Psychologie, sowie der *modernen Hygiene*. Die Pädagogik auf die Psychologie aufzubauen versuchte schon Herbart, aber die Durchführung dieser Aufgabe hat eine ganz andere Grundlage erhalten, seitdem die Psychologie exakte experimentelle Methoden sich geschaffen hat. Denken Sie z. B. daran, wie wichtig die Erforschung des *Gedächtnisses* für die Pädagogik ist, wie wichtig es z. B. für sie ist, zu wissen, auf welche Weise sich Tatsachen dem Gedächtnis einprägen und darin haften bleiben, wie das von der Umgebung oder der persönlichen Disposition des Individuums abhängt; tatsächlich beschäftigen sich jetzt die Psychologen an vielen

Orten, gerade auch hier in Göttingen viel mit diesen Fragen. Ähnlich wichtig für die Pädagogik ist die Untersuchung der *Ermüdung*, die Frage z. B. ob körperliche und geistige Ermüdung unabhängig von einander sind oder nicht; früher glaubte man wohl, daß man nach vorangegangener körperlicher Anstrengung zur geistigen Arbeit besonders befähigt sei, während man jetzt, gestützt auf Beobachtungen, allgemein zur entgegengesetzten Ansicht gekommen ist.

Ein besonders wichtiges Problem auf diesem Gebiete gerade auch im Hinblick auf die Mathematik ist das der *Unterschiede der individuellen Begabung*. Es gab ja eine Zeit, wo man fest davon überzeugt war, daß nur ganz wenige Schüler „mathematische Begabung" hätten, – man meinte damit, daß nur sie überhaupt etwas von der Mathematik verstehen könnten und alle übrigen selbst bei größter Anstrengung doch nichts lernen könnten; den Grund, daß eine solche Ansicht so allgemeine Verbreitung finden konnte, kann man wohl nur in der mangelhaften Methode des mathematischen Unterrichts suchen, die damals herrschte. Als man später im Anschluß an die Gossler-Bonitzschen Lehrpläne größeren Wert auf pädagogische Kunst zu legen begann, kam man bald zu der entgegengesetzten Meinung, daß jeder Schüler bei gutem Willen und einiger Anstrengung auch

seitens des Lehrers etwas Erkleckliches in der Mathematik lernen könne. Ich erhoffe nun von der experimentellen psychologischen Forschung Auskunft darüber, wie es hiermit wirklich steht. Gewiß gibt es auch unter sonst begabten Leuten durchaus „amathematische", denen das mathematische Denken absolut nicht liegt. Daß auch unter künstlerisch hervorragend begabten Naturen solche Amathematiker vorkommen, zeigte mir kürzlich ein sehr interessantes Gespräch mit dem berühmten Berliner Architekten Messel, der Ihnen allen u. a. durch den ebenso zweckmäßigen wie künstlerisch wertvollen Wertheim'schen Warenhausbau bekannt ist; als der hörte, daß ich Mathematiker sei, sprach er sich in schärfster Weise über das ganze unnütze Zeug aus, mit dem man auf der Schule so geplagt werde, und das jedenfalls für ihn stets ohne jede Bedeutung geblieben sei. Vielleicht wäre es viel klüger, wenn man solche Naturen auf der Schule ohne Mathematik laufen ließe, als daß man sich vergeblich abmüht, ihnen wenigstens einige mathematische Kenntnisse beizubringen; man erreicht dabei doch meistens nichts, als daß man in ihnen einen großen Widerwillen gegen diese Dinge erweckt, die sie nicht begreifen können, und daß man dadurch der Mathematik einflußreiche Feinde verschafft. Freilich darf sich das nur auf die ganz wenigen beziehen, die bei sonst vortrefflicher Veranlagung einseitig mathematisch unbegabt sind, und es soll damit nicht etwa der Bequemlichkeit und Faulheit oder jener alten Theorie von der „allgemeinen mathematischen Unbegabtheit" das Wort geredet werden.

Weitere wichtige Aufgaben, die der Psychologie auf mathematischem Gebiet harren, beziehen sich auf die zweifellos vorhandenen *feineren Artunterschiede der mathematischen Begabung*, die sich bei den produktiv wissenschaftlich Arbeitenden geltend machen, aber gewiß auch für die pädagogischen Fragen bedeutsam sind. Bemerkt man doch alle Tage, daß der eine Mathematiker mehr abstrakt arithmetisch veranlagt ist, während der andere das Operieren mit geometrisch anschaulichen Gestalten vorzieht. Man hat bereits besonders solche Leute, die auf einem eng begrenzten Gebiet hervorragende Fähigkeiten ausgebildet haben, *große Rechner* oder *Schachspieler*, psychologisch untersucht, und auch da die größten Unterschiede gefunden; man weiß z. B. daß einige Rechner die großen Zahlen, mit denen sie operieren, anschaulich in Ziffern geschrieben vor sich sehen (*visuelle Veranlagung*), während andere wieder *auditiv* arbeiten, indem sie an den Ton der Zahlworte ihre Assoziationen knüpfen. Ich verweise Sie in dieser Hinsicht auf das interessante Buch *Binets* „*Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs*."[1.)]

b.) Eine zweite in der Neuzeit vielfach hervortretende Tendenz, die ich hier noch erwähnen will, berührt sich mit dem, was ich gerade über die mathematische Veranlagung hervorragend künstlerisch begabter Personen sagte; ich meine die moderne sog. *Kunsterziehung* und die Neuerungen im modernen *Zeichenunterricht*. Das Ziel ist hier, möglichst bald zu einer lebhaften *intuitiven Auffassung der Dinge im Ganzen, Großen* zu gelangen und nicht mit dem Studium ihrer Einzelheiten zu beginnen. Besonders interessant zeigt sich dies Bestreben, wie es in verwandter Weise auch bei manchen hervorragenden Ingenieuren hervortritt, in der Entwickelung des Zeichenunterrichtes. Früher legte man da vielfach den Hauptnachdruck darauf, daß jeder Schüler bestimmte Konturen nach Vorlagen exakt nachzeichnen lernte – ein Verfahren, mit dem man nur zu oft wenig Interesse und wenig Erfolge erzielte; ich erinnere mich, daß ich in meiner Schulzeit immer wieder dieselbe Arabeske kopieren mußte, weil sie mir absolut nicht gelingen wollte, wodurch gewiß meine Fähigkeit zu zeichnen nicht entwickelt wurde. Heut gibt man im Gegenteile dem Kinde von vornherein Pinsel und Farbe in die Hand und läßt

1.) Paris 1894.

er nach eigenem Eindruck einfache alltägliche Gegenstände abmalen, so wie er sie unmittelbar vor Augen oder in Erinnerung hat. Auf genaue Wiedergabe der Einzelheiten kommt er dabei garnicht an; die können höchst unexakt sein, wenn nur der Gesamteindruck getroffen ist. Man sieht heute allerwärts in Ausstellungen von Schulen, was für überraschend gute Resultate mit dieser Methode selbst bei Kindern ohne jede spezifisch künstlerische Begabung erzielt werden.

Freilich stellt diese Richtung durchaus im Gegensatz zum mathematischen Zeichnen, insofern dieser gerade auf genaue, auch quantitativ richtige Festlegung aller Einzelheiten Wert legen muss. Und natürlich können beide Tendenzen leicht in schärfsten Kampf miteinander geraten, wenn die eine oder andere allzu einseitig gehandhabt wird. Da werden z. B. einmal in der darstellenden Geometrie mit grosser Mühe sehr viele einzelne Punkte einer Kurve konstruiert, aber da mangels der nötigen zeichnerischen Fertigkeit diese Punkte vielleicht recht ungenau werden und der Zeichnende nicht die richtige Vorstellung vom Aussehen der Kurve hat, legt er statt einer ordentlichen Kurve einen unmöglichen Krakel, der jedenfalls kein Bild der wirklich darzustellenden räumlichen Verhältnisse vermittelt. Ebenso kann andererseits auch das

künstlerische Zeichnen zur Karrikatur werden; die Einzelheiten werden so verschwommen, dass man vielleicht in einiger Entfernung allenfalls etwas zu erkennen glaubt, in der Nähe aber nur einen undefinierbaren Klex sieht. Aber ich meine, vernünftig betrieben könnten sich beide Richtungen doch recht wohl verständigen und einander ergänzen, was im Interesse der Sache äusserst wünschenswert wäre; es wäre wohl auch für die Mathematik recht wenig zweckmässig, sich einer neuen rasch aufstrebenden Bewegung hier prinzipiell feindlich gegenüberzustellen. Manches anregende Material in der Richtung einer Verständigung enthält die Schrift von Fr. Schilling „über die Anwendungen der darstellenden Geometrie", [1.)] wo u. a. auch von den Beziehungen zur Kunst die Rede ist.

Ich erwähne in diesem Zusammenhange gern noch die oft zitierte so äusserst scharfe Kritik des berühmten Philosophen Schopenhauer gegen die Mathematik, weil sie für die Feindschaft mehr künstlerisch veranlagten Naturen gegen unsere Wissenschaft so überaus charakteristisch ist. Schopenhauer hält die Aufeinanderfolge einzelner logischer Schlüsse, die ein strenger mathematischer Beweis enthalten muss, für ungenügend und unerträglich; er will sofort gewissermassen

---

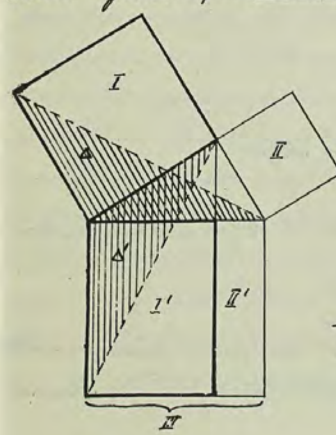
1.) Leipzig und Berlin 1904. – Heft 3 von F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathem. und physik. Unterrichts an höheren Schulen. Leipzig und Berlin 1904.

mit einem Blick von der Wahrheit des Satzes intuitiv überzeugt sein, und so hat er sich die Theorie gebildet, es gäbe neben jenen logischen von bestimmten Vordersätzen ausgehenden Deduktionen noch eine andere mathematische Beweismethode, die die mathematische Wahrheit direkt der Anschauung entnimmt. Von diesem Standpunkte verurteilt er in seinem Hauptwerke „die Welt als Wille und Vorstellung"[1] wie auch anderwärts das ganze Euklidische System prinzipiell aufs heftigste und besonders ist Euklids Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes Gegenstand seiner Angriffe; er nennt ihn einen „Mausefallenbeweis", der einen wohl schließlich zum Zugeben der Richtigkeit der Behauptung zwänge – indem er alle möglichen Auswege der Reihe nach hinterlistig absperre –, der aber nie zur inneren Erkenntnis der Wahrheit führe. Kein Mathematiker wird Schopenhauer bei diesen Ausführungen beistimmen können, denn mag man der Anschauung in der Mathematik auch eine noch so große Rolle als heuristisches die Wissenschaft förderndes Prinzip zuschreiben, schließlich wird doch als letzte allein entscheidende Instanz immer wieder der logische Beweis eintreten müssen; ich verweise übrigens gern auf die sehr interessante und amüsant geschriebene akademische Fest-

1.) siehe Werke (hrsg. v. Frauenstädt; Leipzig 1859) II, pag. 82 ff. und III, pag. 142; ferner auch I, pag. 135.

rede „über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik" von A. Pringsheim,[1] in der er sich ausführlich gerade mit Schopenhauers Angriffen auseinandersetzt.

Freilich, würde Schopenhauer lediglich die zerrissene abgehackte Form der Darstellung bei Euklid angreifen und eine übersichtlichere Herausarbeitung der Ideen eines jeden Beweisganges sowie überhaupt neben der Logik eine weitergehende Berücksichtigung der Anschauung wünschen, so könnte man ihm durchaus beipflichten. Aber auch dann hätte er sich in dem Euklidschen Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes gerade kein sehr passendes Objekt für seine Angriffe ausgesucht; denn den halte ich der Idee nach – wenn man von den Äußerlichkeiten der Euklidischen Darstellung absieht – gerade für besonders anschaulich, wie aus der folgenden Darstellung deutlich werden soll:



Wir zeichnen nur die bekannte Figur des rechtwinkligen Dreiecks mit den Quadraten I, II über den Katheten und III über der Hypotenuse; wir ziehen die Höhe des Dreiecks auf die Hypotenuse, deren Verlängerung das Quadrat III in die zwei Recht-

1.) München 1904 = Jahresbericht der deutschen Mathem.-Verein. 13 (1904) pg. 357

ecke $\underline{\mathrm{I}}'$ und $\underline{\mathrm{II}}'$ teilt, so daß also

$$(1) \qquad \underline{\mathrm{III}} = \underline{\mathrm{I}}' + \underline{\mathrm{II}}' .$$

Wir zeigen nun, daß das Rechteck $\underline{\mathrm{I}}'$ dem Kathetenquadrat $\underline{\mathrm{I}}$ gleich ist. Dazu ziehen wir die beiden gestrichelten Hilfslinien und betrachten das schräg schraffierte Dreieck Δ und das vertikale schraffierte Δ'. Das erstere Δ hat offenbar mit dem Quadrate $\underline{\mathrm{I}}$ Grundlinie und Höhe gemein, und ist daher bekanntlich halb so groß:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\ \underline{\mathrm{I}} ;$$

ebenso ist das vertikal schraffierte Dreieck Δ' gleich der Hälfte des Rechtecks $\underline{\mathrm{I}}'$:

$$\Delta' = \tfrac{1}{2}\ \underline{\mathrm{I}}' .$$

Endlich aber sieht man leicht, daß beide Dreiecke kongruent und also auch gleich sind:

$$\Delta = \Delta' ,$$

und damit folgt in der Tat

$$\underline{\mathrm{I}} = \underline{\mathrm{I}}' .$$

Ebenso kann man nachweisen, daß

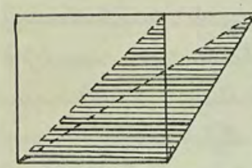
$$\underline{\mathrm{II}} = \underline{\mathrm{II}}' ,$$

und in Anbetracht der Tatsache (1) folgt wirklich der pythagoräische Satz

$$\underline{\underline{\mathrm{III}} = \underline{\mathrm{I}} + \underline{\mathrm{II}} .}$$

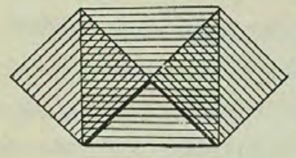
Hier ist also ganz kurz in, wie man meinen sollte, jedem Menschen sofort einleuchtender Weise der Beweis

geführt; dabei sind Anschauung und Logik derart verbunden – und das scheint mir wohl das Ideal – daß <u>jeder logische Schritt sofort auch zu anschaulicher Evidenz gebracht</u> wird. Auch den Hilfsatz $\Delta = \frac{1}{2}\,\underline{\mathrm{I}}$, der hier benutzt



wird, kann man sich bekanntlich durch die nebenstehende Figur, in der Δ aus der Hälfte des Quadrats $\underline{\mathrm{I}}$ durch Verschiebung der einzelnen Horizontalstreifen hervorgeht, anschaulich vollkommen klar machen (Cavalierisches Prinzip!). Damit freilich diese einfachen Ideen auch richtig und klar herauskommen, dazu trägt eine von dem Euklidischen starren Schema abweichende etwas flüssigere <u>Darstellung</u> und eine angemessene <u>Bezeichnungsweise</u> ihr wesentlicher Teil bei; besonders möchte ich dafür plädieren, daß man auch viel allgemeiner im Unterricht zur Unterscheidung von Linien und Flächen verschiedene Schraffierungen oder noch besser – was hier leider nicht angeht – <u>verschiedene Farben</u> verwendet, statt der gräßlichen Euklidischen Art, nur die Ecken mit Buchstaben zu markieren; das „rote" oder „gelbe" Dreieck ist ja ungleich augenfälliger, als wenn man sich die Ecken E K L erst in einer komplizierten Figur lange zusammensuchen soll.

So meine ich also, sind Schopenhauers Angriffe gegen den Euklidischen Beweis sachlich durchaus unberechtigt, und noch klarer wird das, wenn man sich ansieht, was er an seine Stelle setzen will. Er gibt da nur für den Spezialfall des rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks den bekannten Platonischen Beweis, den man ja freilich durch einen Blick auf die nebenstehende Figur übersieht, und



beschränkt sich darauf, für den allgemeinen Fall Ähnliches zu fordern. Aber das bietet dann ja gerade der Euklidische Beweis in einer vernünftigen Darstellung; und tatsächlich sind, wenn man der Sache auf den Grund geht, beide Beweise ganz gleichmäßig aus Logik und Anschauung gemischt, nur daß Schopenhauers Fall als der speziellere naturgemäß auch eine etwas einfachere Erledigung gestattet, und daß es demgemäß hier auch für den Ungeübten leichter ist, die in dem Beweise enthaltene Kette logischer Schlüsse mit einem Schlage anschaulich zu fassen. –

Doch damit genug von Schopenhauer; lassen Sie uns jetzt unsere *Bemerkungen zur Entwicklung des geometrischen Unterrichts in Deutschland* zu Ende bringen. Wir hatten bisher im Grunde immer noch die Entwicklungslinie verfolgt, die auf jene Pestalozzi-Herbartschen zunächst für den

Volksschulunterricht bestimmten Tendenzen zurückgeht. Nun wollen wir zusehen, welche Anregungen denn bei uns in Deutschland von dem mathematischen *Hochschulunterricht* aus auf den Unterricht an der Schule eingewirkt haben. Da sehen wir ein sehr viel weniger befriedigendes Bild, als in andern Ländern; gerade in der Geometrie zeigt sich die so oft beklagte Erscheinung, daß Hochschule und „höhere" Schule durchaus in getrennten Bahnen sich bewegten, ohne lebendige Wechselwirkungen aufeinander auszuüben. Ausnahmen bilden in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts die Vertreter der neueren Geometrie, besonders *Möbius* und *Steiner*, deren Werke ich ja in dieser Vorlesung vielfach zitiert habe. Später aber wächst mit dem großen Aufschwung der mathematischen Wissenschaft jene Entfremdung mehr und mehr, und erst in dem letzten Jahrzehnt können wir wieder erfreulicher Weise lebhafte Bemühungen feststellen, die Kluft zu überbrücken. Als hervorragendstes Zeugnis dieser Richtung nenne ich Ihnen gern wieder die *Encyklopädie der Elementarmathematik* von *H. Weber* und *J. Wellstein*, von der für uns hier besonders Band II (*Elemente der Geometrie*[1]) und Band III (*Angewandte Elementarmathematik*[2]) in Betracht kommt;

[1] 2. Aufl. Leipzig 1907.
[2] 1. Aufl. Leipzig 1907. – 2. Aufl. in 2 Teilen. 1910. 1912.

in Bd. II finden Sie die Grundlagen der Geometrie (Wellstein), Trigonometrie (Weber und W. Jacobsthal), analytische Geometrie (Weber), in Bd. III Vektortheorie und Graphik (Wellstein). Allerdings ist in dieser Encyklopädie nicht ganz das realisiert, was ich mir für die Schule wünsche, wie ich ja schon früher [1] ausgeführt habe; speziell in den geometrischen Teilen beschränken sich die Verfasser vielfach darauf, gewisse Dinge, mit denen sie sich besonders beschäftigt haben, in gewiss äusserst interessanter aber recht abstrakter Form zu entwickeln, statt lieber eine allgemeine Orientierung über den <u>Gesamtumfang</u> der Geometrie, soweit sie für den Schulunterricht in Betracht kommt, zu geben. Demgegenüber wissen Sie ja, was ich wiederholt schon als <u>Zielpunkt meiner eigenen Vorlesung</u> bezeichnet habe. Ich wollte einen <u>Gesamtrahmen der Geometrie</u> aufrichten, in dem gleichförmig Platz für <u>alle</u> ihrer Teile ist, und der einen Überblick über sie alle und ihre wechselseitigen Beziehungen gestattet. Freilich konnte ich es nur als Postulat hinstellen, nun gemäss den einzelnen aufgestellten allgemeinen Gesichtspunkten zu prüfen, was von all diesem Stoff für die Schule passt, und wie weit man überhaupt im Schulbetrieb unsern Ergebnissen gerecht werden kann.

1.) siehe Teil I, pag. 8 ff.

Natürlich ist dies Problem schon vielfach angegriffen, freilich noch niemals gelöst worden, und ich will nicht unterlassen, wenigstens noch zwei interessante Bücher zu nennen, die einen grossen Teil der hier in Betracht kommenden Fragen nach einheitlichen Gesichtspunkten verarbeitet haben. Das eine ist der neue <u>österreichische Lehrplan von 1900</u>,[1] der an den Grundlagen der <u>Exner-Bonitzschen</u> Reform von 1850 festhält. Wie dort wird ein Unter- und Oberbau des Gymnasiums unterschieden (je 4 Jahre), und auf ersterem der geometrische Unterricht ausschliesslich anschaulich mit sehr vielen Zeichenunterricht erteilt; dieser setzt sich auch auf der Oberstufe neben dem dort beginnenden logischen Betriebe fort. Das interessanteste an dem Lehrplan sind die <u>ausführlichen Erläuterungen</u> zum mathematischen Unterricht, die einen hervorragend sachkundigen Verfasser verraten; er ist mir aber nicht bekannt geworden, von wem sie herrühren. Wir haben hier einen erfreulichen Gegensatz zu den sonstigen offiziellen Lehrplänen, die im mathematischen Teil meist so knapp gehalten sind, dass man kaum etwas Bestimmtes aus ihnen entnehmen kann.

Das zweite Buch, das ich nennen will, ist das

1.) Lehrplan und Instruktionen für den Unterricht an Gymnasien in Österreich. 2. Aufl. Wien 1900.

Lehrbuch der Elementargeometrie von Henrici und Treutlein [1]. Hier sind die Verfasser erfolgreich bemüht, den Ergebnissen der damaligen neueren Forschung, der projektiven Geometrie, ebenso wie den Anwendungen Rechnung zu tragen, und auch die analytische Geometrie wird in organischer Verbindung mit anderem, namentlich der Trigonometrie gebracht. Im einzelnen erwähne ich, daß die Einteilung des Stoffes nach den Klassen geometrischer Transformationen erfolgt, so wie wir das früher taten und wie das Möbius zuerst in seinem „baryzentrischen Kalkül" ausführte: Kongruenz, Aehnlichkeit, Perspektivität. Hinsichtlich der Anwendungen verweise ich darauf, daß sich am Ende des 2. Teiles eine Vermessungskarte des Großherzogtums Baden befindet (die Verfasser sind Badenser), so daß der Schüler ein lebendiges Bild des Zweckes der Trigonometrie bekommt; ich meine, daß durch eine solche lebendige Bezugnahme zur Heimatskunde, die durch wirkliche Vornahme von Vermessungen im Gelände wirksam unterstützt wird, der Unterricht ganz außerordentlich gewinnt. So sollte man analog etwa an unseren Schulen hier die Gaußsche Vermessung des Königreiches Hannover vorlegen, wo dann jeder Schüler wissen würde, was es mit dem berühmten Drei-

[1] In 3 Teilen. Leipzig 1882/83. 3. bezw. 2. Aufl. 1897, 1907, 1901.

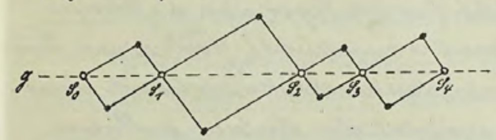
eck Hoher Hagen – Brocken – Inselsberg auf sich hat. – Henrici-Treutlein ist also ein äußerst beachtenswertes Buch; man mag vom heutigen Standpunkt aus freilich bedauern, daß die über die linearen Transformationen der projektiven Geometrie hinausgehenden allgemeinen Verwandtschaften, wie wir sie früher noch heranzogen, fehlen, und daß im Zusammenhang damit auch die modernen Forderungen der funktionalen Denkens etc. nicht berücksichtigt sind; es fehlt auch ein philosophischer Abschluß (also eine Erörterung über Axiomatik u. dgl.), wie er jetzt vielfach für die Oberklassen der Schule gewünscht wird.

Wir stehen nunmehr, meine Herren, am Ende unserer gemeinsamen Betrachtungen; konnte ich Ihnen im letzten Abschnitt auch schon viel davon erzählen, wie sich jetzt neues Leben überall an der Schule regt, so denke ich doch, daß das Problem der Neugestaltung des mathematischen, speziell auch des geometrischen Unterrichts in den nächsten Jahren noch in ungleich höherem Maße in den Mittelpunkt des allgemeinen Interesses rücken wird. Sie alle, meine Herren, sind berufen, an der Lösung dieser so wichtigen Aufgabe nach Kräften mitzuarbeiten – mitzuarbeiten auf Grund selbständigen Nachdenkens über alle einschlägigen Fragen und frei vom Drucke einer übermächtigen starren Tradition. Sie werden das können, wenn Sie sowohl über alle in Betracht kommenden Gebiete der Wissenschaft, als auch über die geschichtliche Entwicklung einen allseitigen Überblick haben, und dafür – so hoffe ich – soll Ihnen meine Vorlesung eine Grundlage gegeben haben.

Zusätze zur 2. Auflage.

Zu S. 157 ff: Zur Veranschaulichung der affinen Transformation.

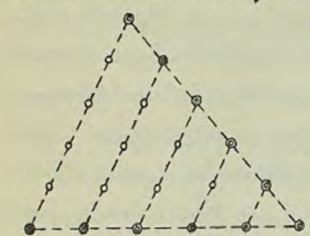
Im Anschluss an meine Vorlesung über Mechanik im W.-S. 1908/09 sind von Herrn R. Remak einige Modelle affin veränderlicher ebener und räumlicher Modelle hergestellt worden; eine Reihe derartiger Modelle sind jetzt im Verlage der Firma Martin Schilling in Leipzig erschienen.[1] Das Grundelement ist eine sog. „Nürnberger Schere", d.i. eine Kette von gelenkig verbundenen Stäben, die eine Reihe von einander ähnlichen Parallelogrammen bilden.



Die gemeinsamen Eckpunkte $S_0, S_1, S_2, \dots$ dieser Parallelogramme durchlaufen dann bei allen Deformationen des Gelenksystemes ähnliche Punktreihen auf ihrer Verbindungsgeraden g, der gemeinsamen Diagonale der Parallelogramme. Bildet man aus drei solchen Scheren ein Dreieck, indem man sie an irgend welchen der Eckpunkte S gelenkig verbindet, so wird sich das

1) Vgl. F. Klein und Fr. Schilling, Modelle zur Darstellung affiner Transformationen in der Ebene und im Raume; Zeitschr. f. Math. u. Phys., 58 (1910), S. 311.

aus sämtlichen Gelenkpunkten S bestehende Punktsystem bei jeder Veränderung des gesamten Gelenksystemes affin transformieren; man erkennt dies unmittelbar, indem man die Diagonalgeraden zweier der Scheren zu Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystemes macht (vgl. S. 167 ff.)



Weitere Punkte, die gleichzeitig derselben affinen Transformation unterliegen, erhält man, indem man zwischen irgend zwei Gelenkpunkten des Dreiecks weitere Scheren derselben Art einspannt und deren Gelenkpunkte S betrachtet (in der Figur sind die Scheren durch ihre Diagonalgeraden angedeutet). Nach diesem Prinzip lassen sich die verschiedensten ebenen und auch räumlichen Modelle affin veränderlicher Systeme aufbauen.

Zu S. 325 ff.: *Zur Einordnung des Graßmannschen Prinzips in die Invariantentheorie.*

Wir haben im Text in erster Linie nur solche „Größen" in einer bestimmten Geometrie herangezogen, die durch Invarianten der zugehörigen Gruppe dargestellt werden. Eine Ausdehnung dieses Ansatzes liegt sehr nahe, wenn wir uns des *allgemeinen Klassifikationsprinzipes* erinnern, das ich früher (S. 59) für die Hauptgruppe ausgesprochen hatte

und das dort die sämtlichen fundamentalen geometrischen Gebilde lieferte. Wir werden nämlich in jeder Geometrie neben *einzelnen* ganzen rationalen Funktionen der gegebenen Größenreihen (Koordinaten, Formenkoeffizienten, etc.), die uns die Invarianten lieferten, auch *Systeme solcher Funktionen* $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$ betrachten. Transformiert sich ein solches System bei allen Substitutionen der zugehörigen Gruppe in sich selbst, d. h. lassen sich die in gleicher Weise gebildeten Funktionen $\Xi'_1, \Xi'_2, \ldots$ der transformierten Koordinaten allein durch die $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$ linear ausdrücken mit Hilfe von Koeffizienten, die sich in eindeutig bestimmter Weise aus der Gruppensubstitution ergeben, so sagen wir, *das System definiert ein Gebilde der betr. Geometrie*. Und wir werden wieder von *gleichartigen geometrischen Gebilden* reden, wenn zwei Serien von gleich vielen Ausdrücken je dieselbe lineare Substitution erleiden („kogredient" sind). Besteht ein solches „kovariantes Größensystem" aus einer einzigen Funktion, so reduziert sich die lineare Substitution auf die Multiplikation mit einem Faktor, und die Funktion ist eine relative Invariante.

Ich will diesen abstrakten Sachverhalt an einem einfachen Beispiel aus der Invariantentheorie des ternären Gebietes näher erläutern, das wir in der affinen Geometrie der dreidimensionalen Raumes bei festgehaltenem Anfangspunkt deuten werden. Gegeben seien 2 Punkte ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2, so ist das einfachste Funktionensystem, in dem die beiden Koordinatentripel homogen und symmetrisch auftreten, das System der 9 bilinearen Terme

$$(1) \qquad \xi_1\xi_2,\ \xi_1\eta_2,\ \xi_1\zeta_2,\ \eta_1\xi_2, \dots \zeta_1\zeta_2 .$$

Bei einer linearen Transformation in unserer üblichen Bezeichnung hat man nun

$$\xi_1'\cdot\xi_2' = a_1^2\cdot\xi_1\xi_2 + a_1b_1(\xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2) + \dots + d_1^2\cdot\zeta_1\zeta_2$$

$$(2) \quad \xi_1'\eta_2' = a_1a_2\,\xi_1\xi_2 + a_1b_2\,\xi_1\eta_2 + a_2b_1\,\eta_1\xi_2 + \dots + d_1d_2\,\zeta_1\zeta_2$$

. . . .

$$\zeta_1'\zeta_2' = a_4^2\,\xi_1\xi_2 + a_4b_4(\xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2) + \dots + d_4^2\,\zeta_1\zeta_2,$$

d. h. diese 9 Größen bilden in der Tat in dem soeben erörterten Sinne ein kovariantes System, und wir werden sie daher als Bestimmungsstücke eines Gebildes unserer affinen Geometrie ansehen; man nennt dieses Gebilde und so jedes Größensystem, das sich nach den Gleichungen (2) transformiert, eine Dyade.

Nun bemerkt man aber bei Betrachtung der Gleichungen (2) leicht, daß man aus den 9 Größen (1) einmal 6 und andererseits 3 einfache lineare Kompositionen herleiten kann, die sich je unter sich linear substituieren. Denkt man sich die Größen (1) zu einem quadratischen System geordnet, so sind es einmal die Summen von symmetrisch

zur Diagonale stehenden Gliedern:

$$(3) \qquad 2\xi_1\xi_2,\ \xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2,\ \xi_1\zeta_2+\zeta_1\xi_2, \dots 2\zeta_1\zeta_2,$$

andererseits die Differenzen derselben:

$$(4) \qquad \xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2,\quad \xi_1\zeta_2-\zeta_1\xi_2,\quad \eta_1\zeta_2-\zeta_1\eta_2 ;$$

die Substitutionsformeln ergeben sich unmittelbar aus (2). Wir haben damit zwei neue Gebilde unserer affinen Geometrie gewonnen, die man als Tensor (Tensortripel) bzw. Plangröße bezeichnet; der Name gilt natürlich wieder für jedes Größensystem, das sich beziehungsweise kogredient transformiert.

Was die 3 Größen (4) geometrisch bedeuten, wissen wir (vgl. S. 67): es sind die doppelten Projektionen des passend umlaufenen Dreiecks, das 1, 2 und der Anfangspunkt bilden, auf die Koordinatenebenen, und wir haben hier gerade eines der ersten Gebilde, die das Graßmannsche Determinantenprinzip lieferte. Und so dürfen wir überhaupt den Satz aussprechen: Bei dem systematischen Aufsuchen der kovarianten Systeme der affinen Geometrie wird man mit Notwendigkeit auf das Graßmannsche Determinantenprinzip und die mit seiner Hilfe festgelegten geometrischen Gebilde geführt. Ich kann das hier im einzelnen natürlich nicht ausführen; es genüge die Andeutung, daß man sämtliche früher besprochenen Gebilde erhält, wenn man in ganz analoger Weise die allgemeine affine Geometrie auf Grund des Cayleyschen Prinzips mit Hilfe der quaternären Invariantentheorie behandelt. (vgl. S. 337 ff.)

Wichtiger aber noch als diese Einordnung ist die Erkenntnis, daß das Graßmannsche Determinantenprinzip etwas spezieller ist und an sich durchaus nicht alle Gebilde der affinen Geometrie liefert. Vielmehr haben wir in der Dyade (1) bezw. in dem Tensor (3) ein wesentlich neues geometrisches Gebilde. Vielen von Ihnen wird bekannt sein, daß diese Gebilde in der affinen Geometrie, in der Vektorrechnung, besonders aber auch in den Anwendungen (z. B. Lehre von den elastischen Deformationen) eine bedeutende Rolle spielen. Ich erwähne übrigens, daß die quadratischen Terme der Punktkoordinaten, die wir früher (S. 312 f.) betrachteten, gerade einen Tensor bilden; die Koeffizienten einer vorgegebenen quadratischen Form der Koordinaten sind also – das ist der Sinn der Aussage von S. 313 – kontragredient den Komponenten eines Tensors.

Überhaupt sei zum Schluß darauf hingewiesen, daß man zu jedem kovarianten Größensystem ein System kontragredienter Veränderlicher definieren und beide dann zu einer Invariante zusammenfassen kann; so kann jedes kovariante System als Koeffizientensystem einer Invariante aufgefaßt werden. Das ist die Art, wie wir im Text (S. 339 ff.) die Determinanten des Graßmannschen Prinzips der Invariantentheorie einordneten.

Zu S. 346 ff:

Zur Grundlegung der Geometrie.

Ich möchte einige Punkte, die im Text an verschiedenen Stellen zur Geltung kommen, hier noch einmal einheitlich in Kürze zusammenfassen.

Die eine Bemerkung knüpft an die Tatsache an, daß wir auf gänzlich verschiedenen Wegen die Geometrie aufbauen konnten. Zwei davon haben wir ausführlicher betrachtet: Der eine Aufbau stellte den Begriff der Bewegungsgruppe und speziell der Translationsgruppe voran, der andere begann mit den Kongruenzaxiomen und schob den Parallelismus an sehr viel spätere Stelle. Diese Gegenüberstellung läßt die Freiheit, die wir in der axiomatischen Fundamentierung der Geometrie haben, so recht hervortreten. Und eben darauf sei hier nochmals ganz besonders der Ton gelegt, angesichts unduldsamer Äußerungen, denen man in dieser Frage vielfach begegnet, und die darauf abzielen, den einen oder andern dem Geschmacke des Autors besonders zusagenden Grundbegriff als den absolut einfachsten und allein zur Fundierung der Geometrie verwendbaren in Anspruch zu nehmen. Tatsächlich ist doch die Quelle aller geometrischen Grundbegriffe und Axiome die naive geometrische Anschauung: aus ihr schöpfen wir die Daten, die wir in geeigneter Idealisierung der logischen Behandlung zugrunde legen. Welche Auswahl aber dabei zu treffen ist, darüber kann es eine <u>absolute</u> Entscheidung nicht geben, und die hier platzgreifende Freiheit findet nur eine Schranke in der einen Forderung, daß das System der Axiome seinen Zweck auch wirklich erfüllt, d. h. daß es den Aufbau der Geometrie lückenlos gewährleistet.

Eine weitere Anmerkung betrifft unsere Stellungnahme zur analytischen Geometrie (vgl. S. 348) und unsere Kritik an gewissen Traditionen von Euklid her, die dem Stande der mathematischen Wissenschaft längst nicht mehr angemessen sind und die darum auch der Schulunterricht endlich aufgeben sollte. (Vergl. z. B. zur Behandlung der Proportionenlehre S. 418 f.) Bei Euklid ist die Geometrie vermöge ihrer Axiome die strenge Grundlage der allgemeinen Arithmetik, die auch das Irrationale umfasst. (vgl. S. 417) In dieser Hörigkeitsstellung zur Geometrie ist die Arithmetik bis ins 19. Jahrhundert verblieben, aber seitdem ist allmählich eine völlige Wandlung eingetreten. Heute hat gerade die Arithmetik als eigentliche Grunddisziplin die Vorherrschaft erlangt. Und das ist ein Faktum, dem bei dem Aufbau der wissenschaftlichen Geometrie Rechnung getragen werden sollte, d. h. die Geometrie sollte an die Ergebnisse der Arithmetik anknüpfen. In diesem Sinne will die Stellung zur analytischen Geometrie gewürdigt sein, die wir bei unserer „Grundlegung" einnehmen, wie wir uns denn überhaupt grund-

sätzlich der Hilfsmittel der Analysis bei der Behandlung der Geometrie bedient haben.

Wer sich übrigens über Fragen der antiken Geometrie informieren will, dem sei neben den bereits im Text erwähnten Quellen die eben erschienene erste Lieferung des von mir redigierten mathematischen Bandes der „Kultur der Gegenwart" empfohlen: <u>H. G. Zeuthen: „Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter"</u>. (Teil III des Gesamtwerkes, Abteilung 1, Leipzig 1912).

Zu S. 454 ff. <u>Zum Anhang: Unterricht in der Geometrie.</u>

Hier ist natürlich vor allem jener reichen Literatur zu gedenken, die seither durch die Tätigkeit der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (J M U K) entstanden ist; ich habe von der Gründung und der ersten Tätigkeit dieser Kommission ja schon in einem Zusatz zur Neuauflage von Teil I dieser Autographie (S. 594 ff.) berichtet. Der internationale Mathematikerkongreß zu Cambridge (1912) hat das Mandat der J M U K verlängert; sie soll dem nächsten Kongreß in Stockholm (1916) die Frucht ihrer gewaltigen Arbeit überreichen: eine vergleichende Übersicht über den Stand des mathematischen Unterrichts in der ganzen Welt, die dessen große Probleme möglichst vielseitig beleuchtet. Indessen liegt heut bereits ein reiches

Ertrag dieses Zusammenwirkens von Fachgenossen aller Kulturnationen vor: etwa 150 I M U K-Schriften sind vollendet [1] und geben uns ein Bild von der Mannigfaltigkeit des mathematischen Unterrichts des In- und Auslandes. Insbesondere sei auf die Besprechung einzelner pädagogischer Fragen verwiesen, die auf den Versammlungen der I M U K (1911 in Mailand und 1912 in Cambridge) stattgefunden haben.

Das Bestehen einer so erfolgreichen, die Völker verknüpfenden Organisation, wie sie die I M U K ist, läßt von vornherein vermuten, daß unsere Darstellung des geometrischen Unterrichts der einzelnen Länder verschiedentlich ergänzt werden kann. Wir beschränken uns dabei aber auf das Allerwichtigste.

Zu unseren Ausführungen über England möge zunächst nachgetragen werden, daß sich an Perrys Vortrag in Glasgow von 1901 (S. 471 f) im Jahre 1902 (bei der Tagung der British Association in Belfast) der Bericht einer Kommission schließt, in welcher die entgegengesetzten Standpunkte ihren Ausgleich fanden; dabei wurde ein propädeutischer Anfangskurs in der Geometrie auf praktischer, experimenteller Grundlage empfohlen.

1.) Die deutschen Veröffentlichungen erscheinen bei B. G. Teubner, Leipzig; ein Gesamtdepot sämtlicher I M U K.-Schriften findet sich bei Georg & Co. in Genf.

Über neuere Bewegungen im Gebiete des englischen Unterrichtswesens unter Berücksichtigung auch des Auslandes wird man durch fortlaufende Publikationen unterrichtet, die seitens des „Board of Education", einer seit 1894 bestehenden zentralen Institution, veranstaltet werden. Diese Behörde hat übrigens auch die Herausgabe der englischen I M U K-Schriften übernommen, die über viele Einzelheiten des eigenartig verwickelten englischen Unterrichtswesens Klarheit geben, den erwünschten Gesamtüberblick aber allerdings auch noch nicht vermitteln.

Betreffend den Unterricht in Frankreich (S. 475 ff) mag ebenso auf die Informationsquelle hingewiesen sein, welche durch die I M U K erschlossen ist. [1] Insbesondere findet man Näheres über die Arbeiten von Méray, Borel und Bourlet (vgl. S. 492 ff) in dem „Rapport sur la géométrie" von Ch. Rousseau. (Tome II, e).

Zur prinzipiellen Betonung des Gruppenbegriffs, wie wir sie in den französischen Lehrbüchern antreffen, sei übrigens an die S. 294 genannte Literatur erinnert. Man erkennt aus ihr, daß der Gruppenbegriff kein französisches Monopol ist. Ja, F. A. Möbius hat bereits im Jahre 1827 den Kern der Sache, was Elementargeometrie angeht,

1) 5 Bände, von denen der zweite, von Bioche redigiert, den höheren Schulen gewidmet ist.

getroffen. In seinem Werke „der barycentrische Calcul" handelt der 2. Abschnitt ausdrücklich „von den Verwandtschaften der Figuren und den daraus entspringenden Klassen geometrischer Aufgaben". Hier erscheinen die elementar-geometrischen Theoreme und Aufgaben nach den Verwandtschaften der Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität, Flächengleichheit und Kollineation geordnet.

Die Möbius'sche Darstellung hat in der Folge auf verschiedene deutsche Schulbücher stark eingewirkt. Wir erwähnen in diesem Zusammenhange C. A. Bretschneider, Lehrgebäude der niederen Geometrie, für den Unterricht an Gymnasien und höheren Realschulen entworfen, (Jena, Frommann 1844). Der Verfasser gibt die übliche Einteilung in Planimetrie und Stereometrie auf und setzt an ihre Stelle die folgende:

1., Synthetische Geometrie:
   a., Geometrie der Lage,
   b., Geometrie der Gestalt,
   c., Geometrie der Maße.
2., Analytische Geometrie:
   a., Goniometrie,
   b., Trigonometrie,
   c., Koordinatengeometrie.

Wir verweisen ferner auf das bereits auf S. 528 genannte

Lehrbuch der Elementargeometrie von Henrici und Treutlein. Auch das bisher nur in seinem ersten Teile vorliegende Lehrbuch der analytischen Geometrie von Heffter und Köhler (Leipzig, 1905) sei hier genannt.

Die S. 491 erwähnten französischen Lehrpläne – kurz als Plan d'études bezeichnet – haben seither eine zweimalige Revision erfahren. Einmal erschienen 1905 die „Modifications apportées au plan d'études des Lycées et collèges de garçons du 31. Mai 1902".[1] Hier wird scharf unterschieden zwischen Unter- und Oberstufe des Unterrichts („1. et 2. cycle"). Auf der Unterstufe soll die Anschauung an der Hand konkreter Dinge vorherrschen, auf der Oberstufe tritt die logische Schulung durchaus in den Vordergrund. Zum andern weist in Bd. II der französischen I M U K - Schriften (pg. 9) Bioche auf eine 1909 erfolgte teilweise Abänderung der Lehrpläne hin („Retouche des programmes des classes littéraires du second cycle").

Bei unserem Überblick über den Stand des geometrischen Unterrichts in den einzelnen Kulturländern trat uns Italien als das Land entgegen, in welchem lebhafte Bestrebungen für eine Fusion zwischen Planimetrie und

1., Vergl. dazu die Zeitschrift L'enseignement mathématique (offizieller Organ der I M U K) 1905, pag. 491 – 497 und 1906, pag. 65 – 77.

Stereometrie im Unterrichte im Gange waren. (Vergl. dazu S. 498). Dagegen hat aber gerade in allerjüngster Zeit eine Reaktion eingesetzt. Ja, bei den Verhandlungen des Kongresses der I M U K zu Mailand im September 1911 gewann man den Eindruck, daß die Fusionsbestrebungen in Italien endgültig zurückgedrängt worden sind, und das gerade in einem Zeitpunkte, wo P. Treutlein [1] durch die Übersetzung des fusionistischen standard-works der Italiener von Lazzeri und Bassani, Elementi di Geometria [2] die deutschen Lehrer für Fragen der Fusion zu interessieren suchte. Außer dieser Wiederaufgabe der Verschmelzung von Planimetrie und Stereometrie scheint in Italien auch sonst eine Rückkehr zu der an Euklid anknüpfenden Darstellungsweise und Stoffauswahl stattgefunden zu haben. –

Zum Schluß mögen noch einige Bemerkungen über den geometrischen Unterricht in Deutschland nachtragsweise Platz greifen. Wir beschränken uns dabei auf die Angabe einiger wichtiger Neuerscheinungen, soweit sie für unsere Tendenzen im Gebiet des geometrischen Unterrichts in Frage kommen. Als Beispiel eines Lehrganges, der

1.) Lazzeri u. Bassani, Elemente der Geometrie, deutsch von P. Treutlein, Leipzig 1911.

2.) 1. Auflage: Livorno; 1891. 2. Auflage 1898.

von unten auf vom Induktiven stetig zum Deduktiven schreitet, ist inzwischen erschienen: Behrendsen-Götting, Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen. Leipzig, bei Teubner:

Unterstufe 1909 } Ausgabe A für Gymnasien
Oberstufe (1911, 1912) } „ B „ Realanstalten.

Was sodann die Herausarbeitung der Anschauung und damit im Zusammenhange die Forderung eines propädeutischen Geometriekursus betrifft, so verweisen wir auf folgende neue Literatur:

1.) P. Treutlein: Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichts an unseren höheren Schulen. (Leipzig 1911).

2.) H. E. Timerding: Die Erziehung der Anschauung. (Leipzig 1912).

3.) W. Lietzmann: Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland (I M U K. Abhandlungen über den Unterricht in Deutschland, Bd. V, Heft 2; 1912).

Für den Unterricht in darstellender Geometrie und Trigonometrie kommen von den deutschen I M U K-Abhandlungen folgende zwei in Frage:

1.) P. Zühlke: Der Unterricht im Linearzeichnen und im der darstellenden Geometrie an den deutschen Realanstalten (Bd. III, Heft 3; 1911).

2.) B. Hoffmann: Mathematische Himmelskunde und niedere Geodäsie an den höheren Schulen (Bd. III, Heft 4; 1912).

Berichtigung einiger Schreibfehler.

Band I (2. Auflage).

Seite 136, Zeile 1: Lies IV statt VI.

Seite 307, Zeile 13: Lies $\left|\sqrt{-\frac{k^3}{27}}\right|$ statt $\sqrt{-\frac{k^3}{27}}\,|$

Seite 334, Zeile 5: Vor 0,0000001 ergänze ein Minuszeichen.

Seite 427, Zeile 1: Lies $\sum\limits_{\nu=1}^{n}$ statt $\sum\limits_{\nu=1}$.

Seite 583, Zeile 21: Lies „aussprechen" statt „ausprechen".

Band II (2. Auflage)

Seite 8: In der zweiten Determinante ergänze als dritte Kolonne z_1, z_2, z_3, z_4.

Seite 127, Zeile 13: Hinter „propriétés" ergänze „projectives".