Dritter Hauptteil: Systematik und Grundlegung der Geometrie.

I. Die Systematik.

Wir benutzen zunächst die geometrischen Transformationen, um uns eine systematische Einteilung des Gesamtgebietes der Geometrie zu verschaffen, die von einem Standpunkte aus die einzelnen Teile wie ihre Zusammenhänge zu überschauen gestattet.

1. Überblick über die Gliederung der Geometrie.

Es handelt sich hier um Betrachtungen, wie ich sie systematisch in meinem Erlanger Programm [1] von 1872 entwickelt habe; über die Weiterbildung dieser Ideen seit dieser Zeit finden Sie in dem Encyklopädiereferat von Fano: „Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip" (Enc. III A. B. 4b) Auskunft.

1.) Wir werden uns auch weiterhin, wie bisher, zur Beherrschung der geometrischen Verhältnisse konsequent der Analysis bedienen, indem wir die Gesamtheit der Raumpunkte durch die Gesamtheit der Wertetripel der 3 „Koordinaten" x, y, z repräsentiert denken. Jeder Transfor-

1.) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrischen Forschungen". Erlangen 1872. Abgedruckt Mathem. Annalen 43 (1893) pag. 63 f. f.

mation des Raumes entspricht dann eine gewisse Transformation dieser Koordinaten; gleich von Beginn unserer Erörterungen an waren uns 4 Arten von Transformationen als besonders bedeutsam entgegengetreten, die durch gewisse spezielle lineare Transformationen von x, y, z dargestellt werden: Parallelverschiebungen, Drehungen um den Koordinatenanfangspunkt O, Spiegelungen an O, Ähnlichkeitstransformationen von O aus.

2.) Es besteht jedoch nicht etwa, wie man nach der Einführung von Koordinaten zunächst vielleicht annehmen könnte, vollständige Identität zwischen der Analysis dreier unabhängigen Veränderlichen x, y, z und der Geometrie im spezifischen Sinne. Vielmehr handelt, wie ich das ja auch früher schon gelegentlich hervorhob (vgl. S. 57 ff), die Geometrie nur von solchen Beziehungen zwischen den Koordinaten, die bei den unter 1.) aufgeführten linearen Substitutionen ungeändert bleiben – mag man diese nun als Veränderungen des Koordinatensystems oder als Transformationen des Raumes auffassen; die Geometrie ist also die Invariantentheorie jener linearen Substitutionen. Alle nichtinvarianten Gleichungen zwischen Koordinaten hingegen, z. B. die Aussage, daß ein Punkt die Koordinaten 2, 5, 3 hat, beziehen sich nur auf ein bestimmtes ein für alle Mal fester Koordinatensystem und gehören einer Wissenschaft an, die jeden Punkt für sich individualisiert und seine Eigenschaften gesondert auffaßt: der *Topographie* oder – wenn man will – Geographie. Zur näheren Erläuterung will ich noch an einige *Beispiele geometrischer Eigenschaften* erinnern: Zwei Punkte haben eine bestimmte *Entfernung*, wenn nur einmal eine Einheit festgelegt ist; das bedeutet in der gegenwärtigen Auffassung, daß man aus ihren Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2\, y_2\, z_2$ einen Ausdruck $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ aufbauen kann, der bei allen jenen Substitutionen ungeändert bleibt oder sich doch nur mit einem von der speziellen Lage der Punkte unabhängigen Faktor multipliziert. Ähnliche Bedeutung haben die Aussagen, daß 2 Gerade einen bestimmten *Winkel* bilden, daß ein Kegelschnitt bestimmte *Hauptachsen* und *Brennpunkte* hat et c.

Die Gesamtheit dieser geometrischen Eigenschaften, also die ganze Geometrie, werden wir auch als „*metrische Geometrie*" bezeichnen, um von ihr sogleich verschiedene andere „*Arten von Geometrieen*" zu unterscheiden. Wir werden diese gewinnen, indem wir nach einem bestimmten Prinzip gewisse Gruppen von Sätzen der metrischen Geometrie aussondern und für sich betrachten; demnach sind alle diese neuen Arten von Geometrie

wenigstens für die nächstliegende Auffassung Teile der metrischen Geometrie als der umfassendsten „Art von Geometrie".

3.) Wir gehen aus von den früher ausführlich studierten *affinen Transformationen*, d. h. den ganzen linearen Substitutionen der x, y, z:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 , \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 , \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 , \end{cases}$$

unter denen die unter 1.) betrachteten Transformationen als spezielle Fälle enthalten sind, und heben von sämtlichen geometrischen Begriffen und Theoremen den engeren Kreis derjenigen hervor, die bei beliebigen affinen Transformationen ungeändert bleiben; ihren Inbegriff betrachten wir als die erste neue Art Geometrie, die sog. *affine Geometrie* oder *Invariantentheorie der affinen Transformationen*.

Aus unserer Kenntnis der affinen Transformationen können wir danach sofort Begriffe und Sätze dieser Geometrie entnehmen; ich erinnere hier nur an einiges wenige: Von Entfernung und Winkel wird in der affinen Geometrie nicht mehr die Rede sein können, ebenso wird der Begriff der Hauptachsen eines Kegelschnittes oder der Unterschied zwischen Kreis und Ellipse verwischt. Erhalten aber bleibt die Unterscheidung von Endlichem und Unendlichweitem des Raumes und alles, was sich darauf bezieht: der Begriff des Parallelismus zweier Geraden, die Einteilung aller Kegelschnitte in Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln und dgl.; ferner die Begriffe Mittelpunkt und Durchmesser eines Kegelschnittes und speziell die Beziehung konjugierter Durchmesser.

4.) Weiter ziehen wir die projektiven Umformungen, d. h. die gebrochenen linearen Transformationen:

$$x' = (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) : (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4),$$
$$y' = (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) : (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4),$$
$$z' = (a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3) : (a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4)$$

heran, die die affinen Transformationen als Spezialfälle umfassen. Bleiben geometrische Eigenschaften allen diesen Transformationen gegenüber ungeändert, so müssen sie gewiß auch der affinen Geometrie angehören; sie scheiden damit also aus dieser die sog. projektive Geometrie als Invariantentheorie der projektiven Transformationen aus. Die schrittweise Aussonderung der affinen und projektiven Geometrie aus der metrischen können wir dem Vorgehen des Chemikers vergleichen, der aus einem Stoff durch Anwendung immer stärkerer Zersetzungsmittel immer wertvollere Bestandteile

isoliert; unsere Zersetzungsmittel sind erst die affinen, dann die projektiven Transformationen.

Was die Sätze der projektiven Geometrie angeht, so sei nur hervorgehoben, daß nunmehr die ausgezeichnete Stellung des Unendlichweiten und alle damit zusammenhängenden Begriffe der affinen Geometrie in Fortfall kommen. Es gibt nur noch eine Art von eigentlichem Kegelschnitt; es bleibt aber beispielsweise bestehen die Beziehung zwischen Pol und Polare und ebenso die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlenbüschel, von der wir früher (S. 218 f) sprachen. –

Wir können nun aber nach demselben Prinzip von der metrischen Geometrie auch zu anderen Arten von Geometrieen aufsteigen; eine der wichtigsten ist

5.) die Geometrie der reziproken Radien. Sie umfasst die Gesamtheit derjenigen Theoreme der metrischen Geometrie, welche bei allen möglichen Transformationen durch reziproke Radien erhalten bleiben; es hat also z. B. der Begriff der Gerade oder Ebene keine selbständige Bedeutung mehr, wohl aber der Begriff Kreis oder Kugel, dem Gerade bezw. Ebene als Spezialfall untergeordnet werden.

6.) Endlich hebe ich noch eine Art von Geometrie hervor, die gewissermaßen durch das schärfste Ätzungsmittel gewonnen wird und daher die wenigsten Theoreme umfasst: die *Analysis situs*, die ich ja schon früher (S. 238) erwähnte. Hier handelt es sich um die *Gesamtheit der Eigenschaften, die allen eineindeutigen, nur durchaus stetigen Transformationen gegenüber erhalten bleiben*; um dem Unendlichweiten, das die so definierten Transformationen stets in sich überführen würden, keine ausgezeichnete Stellung einzuräumen, können wir noch entweder die *projektiven Transformationen* oder die *Transformationen durch reziproke Radien* hinzunehmen. –

Das so skizzierte Schema werden wir jetzt noch schärfer umschreiben, indem wir den fundamentalen *Begriff der Gruppe* einführen. Wir nennen eine *Gesamtheit* von Transformationen dann eine Gruppe, *wenn 2 Transformationen aus ihr nacheinander vorgenommen wieder eine Transformation derselben Gesamtheit ergeben*. Beispiele von Gruppen sind der Inbegriff der *Bewegungen*, oder derjenige der *Kollineationen* (projektiven Transformationen); denn 2 Bewegungen setzen sich wieder zu einer Bewegung, 2 Kollineationen wieder zu einer Kollineation zusammen. Das ist geometrisch evident und kann auch analytisch leicht bestätigt werden.

Blicken wir nun auf unsere verschiedenen Arten

von Geometrie zurück, so werden wir sehen, daß die Transformationen, die in jeder eine Rolle spielen, gerade immer eine Gruppe bilden. Die sämtlichen linearen Substitutionen zunächst, die die Theoreme der *metrischen Geometrie* ungeändert lassen, die Verschiebungen, Drehungen, Spiegelungen und Ähnlichkeitstransformationen, bilden ersichtlich eine Gruppe, die man als *Hauptgruppe der räumlichen Änderungen* bezeichnet. Ebenso leicht überzeugt man sich von der analogen Bedeutung der *affinen Gruppe* aller Affinitäten für die *affine*, der *projektiven Gruppe* aller Kollineationen für die *projektive Geometrie*. Die Theoreme der *Geometrie der reziproken Radien* bleiben erhalten bei allen Transformationen, die man durch Zusammensetzung irgendwelcher Transformationen durch reziproke Radien mit Substitutionen der Hauptgruppe erhält; sie alle bilden wieder eine Gruppe, die „*der reziproken Radien*". Und für die *Analysis situs* endlich kommt die *Gruppe aller stetigen eineindeutigen Verzerrungen* in Betracht.

Wir wollen noch feststellen, von wievielen unabhängigen Parametern die einzelne Operation in jeder dieser Gruppen abhängt. In der Hauptgruppe sind die Bewegungen mit 6 Parametern enthalten, und dazu kommt noch ein Parameter für die Maßstabänderung, so daß im ganzen 7 Parameter vorhanden sind; wir drücken dies aus, indem wir die Hauptgruppe als eine G_7 bezeichnen. Die Gleichungen der allgemeinen affinen Transformation enthalten $3 \cdot 4 = 12$ willkürliche Koeffizienten, die der projektiven $4 \cdot 4 = 16$, wobei aber bei den letzteren ein allen gemeinsamer Faktor unwesentlich ist; also ist die affine Gruppe eine G_{12}, die projektive eine G_{15}. Die Gruppe der reziproken Radien ist, wie ich hier nur referierend angebe, eine G_{10}, und die Gruppe aller stetigen Verzerrungen besitzt schließlich überhaupt keine endliche Parameterzahl, sondern ihre Operationen hängen noch von willkürlichen Funktionen oder, wenn wir wollen, von unendlichvielen Parametern ab (sie ist eine G_∞).

In dem Zusammenhang der verschiedenen Arten von Geometrie und der Gruppen von Transformationen, den wir so konstatiert haben, kann man nun ein fundamentales Prinzip zur Charakterisierung aller überhaupt möglichen Geometrieen erblicken; es ist das, das eben den Hauptgedanken meines Erlanger Programmes ausmacht: Es sei irgend eine beliebige Gruppe räumlicher Transformationen gegeben, welche die Hauptgruppe als Teil umfaßt; dann ist die Invariantentheorie dieser Gruppe eine bestimmte Art von Geometrie, und man kann so jede mögliche Geometrie er-

halten; als Charakteristikum jeder Geometrie wird ihre Gruppe stets in den Vordergrund der Betrachtung gestellt.

Dies Prinzip ist in der Literatur vollständig durchgeführt nur für die in unserem Schema zuerst genannten 3 Fälle, und mit ihnen als den wichtigsten oder bekanntesten wollen wir uns noch ein wenig beschäftigen und dabei zunächst namentlich auf den Übergang vom einen zum andern achten.

Ich wähle die Reihenfolge umgekehrt wie vorhin und beginne mit der projektiven Geometrie, also mit der G_{15} aller projektiven Transformationen, die wir homogen schreiben:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\rho'\xi' &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau \\
\rho'\eta' &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau \\
\rho'\zeta' &= a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau \\
\rho'\tau' &= a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4\tau .
\end{aligned}
$$

Um nun zu der affinen Gruppe zu kommen, gehen wir von der Bemerkung aus, daß eine Projektivität dann eine Affinität ist, wenn sie die unendlichferne Ebene in sich überführt, d. h. wenn jedem Punkte mit verschwindendem τ ein Punkt mit verschwindendem τ' entspricht. Denn dies besagt $a_4 = b_4 = c_4 = 0$, und daher folgt aus den Gleichungen (1) durch Division für die inhomogeren Gleichungen, wenn wir noch die Quotienten $a_1 : d_4, \ldots$ einfach durch $a_1, \ldots$ ersetzen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{aligned}$$

– in der Tat die alten Formeln der Affinität: Die Bedingung, daß die unendlichferne Ebene ungeändert bleibt, schneidet also aus der projektiven G_{15} eine 12-parametrige „Untergruppe" aus, eben die affine Gruppe.

In ganz analoger Weise gelangt man zu der Hauptgruppe G_7, indem man diejenigen Projektivitäten bzw. Affinitäten bestimmt, die außer der unendlichfernen Ebene noch den imaginären Kugelkreis in sich überführen, d. h. bei denen auch jedem der Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0 \quad \text{und} \quad \tau = 0$$

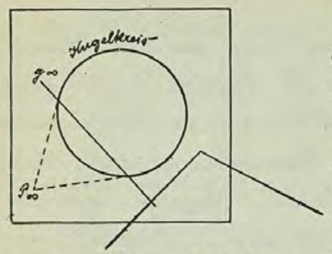
genügenden Punkt ein dieselben Gleichungen erfüllender entspricht. Sie werden diese Behauptung leicht verifizieren können; Sie brauchen nur zu beachten, daß unsere Bedingung die 6 (homogenen) Konstanten des dem Kugelkreis vermöge einer Affinität in der Ebene $\tau' = 0$ entsprechenden Kegelschnittes gerade bis auf einen Konstanten Faktor bestimmt, und daher den 12 Konstanten der Affinität $6 - 1 = 5$ Bedingungen auferlegt – womit eben die $12 - 5 = 7$ Parameter der G_7

überbleiben. –

Diese ganze Art der Betrachtung hat nun durch den großen englischen Geometer A. Cayley [1] 1859 eine wichtige Wendung erfahren: Während es bisher schien, als ob die affine und projektive Geometrie ärmere Ausschnitte der metrischen seien, macht es Cayley möglich umgekehrt die affine sowohl als die metrische Geometrie der projektiven als besondere Fälle einzuordnen. „projective geometry is all geometry". Dieser zunächst vielleicht paradox erscheinende Zusammenhang entsteht so, daß man den zu untersuchenden Figuren bestimmte Gebilde, nämlich die unendlichferne Ebene und eventuell den Kugelkreis in ihr hinzufügt; dann sind die affinen bzw. metrischen Eigenschaften einer Figur nichts als die projektiven Eigenschaften der so erweiterten Figur.

Lassen Sie mich dies zunächst an zwei ganz einfachen Beispielen erläutern, wobei ich nur von früher her bekannte Tatsachen in ein wenig modifizierter Form ausspreche. Daß 2 Gerade parallel sind, hat in der projektiven Geometrie zunächst gar keine Bedeutung; nehmen wir aber die unendlichferne

1.) In „A sixth memoir upon quantics." Phil. Trans. of the R. S. of London, 1859 = Collected mathem. papers, II (Cambridge 1889), pg. 561 ff.



Ebene zu den gegebenen Gebilden (den beiden Geraden) hinzu, so liegt (vgl. S. 206) die rein projektive Aussage vor, daß zwei gegebene Gerade sich auf einer gegebenen Ebene schneiden. Ähnlich ist es, wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht. Wir können das (vgl. S. 278 f) auf eine Polarenbeziehung – das ist ja eine projektive Eigenschaft – der durch Hinzunahme des Kugelkreises erweiterten Figur zurückführen: Der Spurpunkt P_∞ der Geraden und die Spurlinie g_∞ der Ebene in der unendlichfernen Ebene sollen in Bezug auf den Kugelkreis Pol und Polare sein.

Ich möchte nun den hiermit kurz angedeuteten Gedankengang genauer ausführen und zeigen, wie er zu einem vollkommen systematischen Lehrgebäude der Geometrie führt. Das größte Verdienst darum haben sich die Engländer erworben; Cayley habe ich schon genannt, und ich habe ihm noch zur Seite zu stellen J. J. Sylvester und G. Salmon in Dublin. Diese Männer haben von 1850 an diejenige algebraische Disziplin geschaffen, welche man im engeren Sinne Invariantentheorie der li-

nearen homogenen Substitutionen [1] nennt, und die unter Voranstellung des Cayleyschen Prinzipes eine vollständige Systematik der Geometrie auf analytischer Basis ermöglicht. Zum Verständnis dieser Systematik wird es nötig, daß wir uns vorerst mit der Invariantentheorie selbst ein wenig befassen:

2. Exkurs über die Invariantentheorie der linearen Substitutionen.

Natürlich werde ich dabei lediglich kurz referierend die Hauptgedankengänge und Resultate vortragen können, ohne auf Einzelheiten und auf Beweise einzugehen. Was Literatur dieses großen Gebietes anlangt, so verweise ich vor allem auf den Bericht von W. Franz Meyer: „die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert" in Bd. I der Jahresberichte der deutschen Mathem.-Vereinig. (1892), sowie auf das Encyklopädiereferat „Invariantentheorie" desselben Autors (Enc., Bd. I B 2). Was man von der Invariantentheorie in der Geometrie braucht, findet man besonders in den Lehrbüchern von

[1] Man gebraucht das Wort „Invariantentheorie" auch im weiteren Sinne mit Bezug auf beliebige Transformationsgruppen; im engeren Sinne, wie es auch in der Folge für uns maßgebend ist, hat es Sylvester zuerst angewendet.

G. Salmon,[1] die zur Verbreitung der hier in Betracht kommenden Ideeen wohl am meisten beigetragen haben, und die auch in der deutschen Bearbeitung von W. Fiedler stets ungemein viel benutzt worden sind. In derselben Richtung liegen auch die Vorlesungen von A. Clebsch[2], die Lindemann herausgegeben hat. –

Wenn wir nun zu unserm Gegenstand übergehen, so denken wir uns

1.) irgend eine Anzahl von Variablen gegeben, und sprechen je nachdem vom binären, ternären, quaternären, ... Gebiet. Indem wir uns vorbehalten die Variablen in diesen ersten drei Fällen schliesslich als homogene Koordinaten in einer Geraden, einer Ebene oder einem Raume aufzufassen, bezeichnen wir sie mit:

$$\xi, \tau \,;\; \xi, \eta, \tau \,;\; \xi, \eta, \zeta, \tau \,,$$

wobei dann $\tau = 0$ allemal die unendlichfernen Elemente charakterisieren soll.

2.) Wir betrachten die Gruppen aller homogenen linearen Substitutionen dieser Variablen, wobei wir aber zunächst nicht bloss, wie es später in der projek-

1) Analytische Geometrie der Kegelschnitte – der höheren ebenen Kurven – des Raumes. Deutsch bearb. v. W. Fiedler. Leipzig (Teubner); jede in mehreren Auflagen.

2) Vorlesungen über Geometrie, bearb. von F. Lindemann. Leipzig (Teubner). 1. Aufl. (1876 ff.) 2. Aufl. (1906 ff.)

tiven Geometrie geschieht, die Verhältnisse der Variablen, sondern auch ihre Einzelwerte selbst in Betracht ziehen wollen; wir schreiben diese Substitutionen:

$$\begin{array}{lll} & & \xi' = a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1\tau \\ \xi' = a_1\xi + d_1\tau & \xi' = a_1\xi + b_1\eta + d_1\tau & \eta' = a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2\tau \\ \tau' = a_4\xi + d_4\tau \,; & \eta' = a_2\xi + b_2\eta + d_2\tau & \zeta' = a_3\xi + b_3\eta + c_3\zeta + d_3\tau \\ & \tau' = a_3\xi + b_3\eta + d_3\tau \,; & \tau' = a_4\xi + b_4\eta + c_4\zeta + d_4\tau \,. \end{array}$$

Die Parameterzahl dieser 3 Gruppen ist bezw. 4, 9, 16.

Um im folgenden alle Dimensionszahlen umfassen zu können, wollen wir in den Formeln immer nur die Variablen ξ und τ und die auf sie bezüglichen Glieder ausschreiben und dazwischen Punkte setzen; will man dann das binäre Gebiet behandeln, so hat man diese Punkte einfach zu ignorieren, für das ternäre und quaternäre aber hat man sie durch Glieder in η bezw. η und ζ zu ersetzen, die den ausgeschriebenen Termen analog sind. Wir reden also allgemein von den Variablen

$$\underline{\xi, \ldots \tau}$$

und von den linearen Substitutionen in ihnen

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi' = a_1\xi + \ldots + d_1\tau \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau' = a_4\xi + \ldots + d_4\tau \,. \end{array} \right.$$

3.) Was nun die Objekte der Invariantentheorie angeht, so wollen wir hier 2 Stufen der Fragestellung unterscheiden: Einmal seien *irgendwelche einzelne Wertsysteme der Variablen*

$$\xi_1, \dots \tau_1\,; \quad \xi_2, \dots \tau_2\,; \quad \xi_3, \dots \tau_3\,; \dots$$

gegeben, die wir im Anklang an die Geometrie ja wohl schon hier kurzweg als *Punkte* 1; 2; 3, etc. bezeichnen dürfen. Jedes dieser Wertsysteme für sich wird den Substitutionen (1) der Gruppe unterworfen, und es handelt sich darum solche *Verbindungen unserer Wertsysteme zu bilden, die bei diesen simultanen Substitutionen invariant bleiben*.

4.) Die *zweite Stufe* der Problemstellung zieht neben solchen Punkten auch *Funktionen der Variablen* heran und zwar in erster Linie *ganze rationale Funktionen*; man kann sich dabei auf *homogene* rationale ganze Funktionen, die die Invariantentheorie *Formen* nennt, beschränken, da sich wegen der Homogeneität der Substitutionen die Terme gleicher Dimension ohnehin für sich substituieren. Wir werden da also *lineare Formen*

$$\varphi = \alpha\,\xi + \dots + \delta\,\tau$$

betrachten, ferner *quadratische Formen*

$$f = \mathfrak{A}\,\xi^2 + \dots + 2\,\mathfrak{G}\,\xi\tau + \dots + \mathfrak{K}\,\tau^2$$

und so fort. Auch *mehrere Formen* gleicher Dimension werden wir gleichzeitig heranziehen können und unterscheiden sie dann durch Indices, z. B.

$$\varphi_1 = \alpha_1\,\xi + \dots + \delta_1\,\tau\,; \quad \varphi_2 = \alpha_2\,\xi + \dots + \delta_2\,\tau\,; \dots$$

Ebenso können *Formen mit mehreren Variablenreihen*, z. B. Bilinearformen

$$f = A\,\xi_1\xi_2 + \dots + \Delta\cdot\xi_1\tau_2 + \dots + N\tau_1\xi_2 + \dots + \Pi\,\tau_1\tau_2\,,$$

den Ausgangspunkt bilden.

Um das hier entstehende allgemeine Problem deutlich zu machen, müssen wir erst zusehen, *wie denn die Koeffizienten dieser Formen sich transformieren*, wenn wir die Variablen den Substitutionen der Gruppe (1) unterwerfen. Betrachten wir zunächst die Linearform und setzen

$$\varphi = \alpha\,\xi + \dots + \delta\,\tau = \alpha'\xi' + \dots + \delta'\tau'\,;$$

führen wir die Ausdrücke (1) von $\xi', \dots \tau'$ ein, so muss in den Variablen $\xi, \dots \tau$ die Identität bestehen:

$$\begin{aligned}\alpha\xi + \dots + \delta\tau &= \alpha'(a_1\xi + \dots + d_1\tau) + \dots + \delta'(a_4\xi + \dots + d_4\tau)\\ &= (\alpha' a_1 + \dots + \delta' a_4)\xi + \dots + (\alpha' d_1 + \dots + \delta' d_4)\tau\,,\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned}\alpha &= a_1\,\alpha' + \dots + a_4\,\delta'\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ \delta &= d_1\,\alpha' + \dots + d_4\,\delta'\,.\end{aligned}\right.$$

Die neuen Koeffizienten $\alpha', \dots \delta'$ der Linearform hängen also mit den alten $\alpha, \dots \delta$ *wiederum durch eine lineare Substitution* zusammen, die sich in einfacher Weise aus (1) ergibt: man vertausche vertikale und horizontale Reihen der Koeffizientenschemas („transponiere" die Substitution) und vertausche obendrein noch die Stellung der alten (nichtakzentuierten) und der neuen (akzentuierten) Größen. Die so entstehende Substitution nennt man <u>kontragredient</u> zur ursprünglichen (1) und sagt kurz, <u>daß sich die Koeffizienten $\alpha, \dots \delta$ einer Linearform kontragredient mit den Variablen $\xi, \dots \tau$ substituieren.</u> Die vorhin betrachteten Variablenreihen $\xi_1, \dots \tau_1$; $\xi_2, \dots \tau_2$; …, die sämtlich jeweils der gleichen Transformation (1) zu unterwerfen sind, heißen in analoger Terminologie <u>kogrediente Veränderliche</u>.

Gehen wir nun zur <u>quadratischen Form f</u> über, so überlegen wir vorab, wie die in sie eingehenden quadratischen Terme $\xi^2, \dots \xi.\tau, \dots \tau^2$ sich bei der linearen Substitution (1) verhalten; wir finden aus (1) sofort für die quadratischen Terme in den neuen Veränderlichen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi'^2 = \alpha_1^{\,2} \xi^2 + \dots + 2\,\alpha_1 \delta_1 \xi\tau + \dots + \delta_4^{\,2} \tau^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi'\tau' = \alpha_1 \alpha_4 \xi^2 + \dots + (\alpha_1 \delta_4 + \alpha_4 \delta_1)\xi\tau + \dots + \delta_1 \delta_4 \tau^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tau'^2 = \alpha_4^{\,2} \xi^2 + \dots + 2\,\alpha_4 \delta_4 \xi\tau + \dots + \delta_4^{\,2} \tau^2 \end{array} \right.$$

und können das kurz ausdrücken: Die quadratischen Terme der Variablen erleiden gleichzeitig mit diesen eine aus (1) sich unmittelbar ergebende homogene lineare Substitu-

tion. Nun ist f eine <u>lineare</u> Form dieser quadratischen Terme, also erkennen wir durch genaue Wiederholung der vorigen Überlegungen, daß sich <u>seine Koeffizienten $A, \dots 2G, \dots K$ linear homogen, und zwar kontragredient zur Substitution (3) der Terme $\xi^2 \dots \xi\tau, \dots \tau^2$ transformieren</u>; d. h. die Gleichungen zwischen $A, \dots 2G, \dots K$ und $A', \dots 2G', \dots K'$ entstehen genau so aus (3), wie die Gleichungen (2) aus (1).

5.) Nun können wir das <u>allgemeine Problem der Invariantentheorie</u> formulieren. Sind irgendwie eine Reihe von Punkten 1; 2; … sowie von linearen, quadratischen, event. auch höheren Formen φ_1; φ_2; …; f_1; f_2; … vorgegeben, so versteht man unter einer <u>Invariante</u> eine solche Funktion der Koordinaten $\xi_1, \dots \tau_1$; $\xi_2, \dots \tau_2$; … und der Koeffizienten $\alpha_1, \dots \delta_1$; $\alpha_2, \dots \delta_2$; …; $A_1 \dots K_1$; $A_2, \dots K_2$; …, die bei den linearen Substitutionen (1) der Variablen und den zugehörigen, soeben bestimmten Substitutionen der Koeffizientensysteme ungeändert bleibt; <u>es soll die Gesamtheit der überhaupt möglichen Invarianten studiert werden.</u>

Man gebraucht in der Literatur gelegentlich auch die Worte <u>Kovariante</u> und <u>Kontravariante</u> für besondere Arten der hier allgemein als Invarianten bezeichneten Gebilde. Sind nämlich in dem invarianten Ausdruck die Variablenreihen $\xi_1 \ldots \tau_1$; $\xi_2 \ldots \tau_2$; … selbst enthalten, so spricht man von *Kovarianten*, und treten in ihm Koeffizienten von Linearformen $\alpha_1, \ldots \delta_1$; $\alpha_2, \ldots \delta_2$; … auf, so sagt man *Kontravariante*; das Wort *Invariante* reserviert man dann für solche Ausdrücke, die weder solche Koordinaten $\xi_1, \ldots$ noch Koeffizienten $\alpha_1, \ldots$ enthalten und lediglich aus den Koeffizienten quadratischer oder höherer Formen zusammengesetzt sind. Daß man jene beiden Fälle hervorhebt und einander entgegenstellt, geschieht in Rücksicht darauf, daß die Variablenreihen $\xi, \ldots \tau$ einerseits und $\alpha, \ldots \delta$ andererseits ein gewissermaßen reziprokes Verhalten aufweisen: erleiden die einen von ihnen eine lineare Substitution, so erfahren die andere gerade die kontragrediente, gleichgültig von welcher Reihe man ausgeht; aus jeder invarianten Bildung in Größen der einen Art kann man also durch passende Umsetzung eine ebensolche in Größen der andern herleiten. Für die geometrische Deutung ist hiermit offenbar das *Prinzip der Dualität* ausgesprochen, denn $\alpha, \ldots \delta$ werden homogene Geraden- bezw. Ebenenkoordinaten, wenn wir $\xi, \ldots \tau$ als Punktkoordinaten auffassen. – Übrigens hat jener Unterschied, ob Wertsysteme $\xi, \ldots \tau$ bezw. $\alpha, \ldots \delta$ in den aufzustellenden Ausdrücken vorkommen oder nicht, natürlich

keinerlei fundamentale Bedeutung, und wir werden daher im allgemeinen weiterhin nur das *Wort Invariante im umfassenden Sinne* gebrauchen.

6.) Wir wollen jetzt diesen Begriff der Invariante nach anderer Richtung schärfer fassen, um einen geordneten Aufbau der Theorie zu ermöglichen. Wir betrachten als Invarianten fortan nur *rationale Funktionen der Koordinaten und Koeffizienten*, die obendrein noch in den Koordinaten jedes einzelnen auftretenden Punktes und den Koeffizienten jeder einzelnen auftretenden Form *homogen* sein mögen. Jede solche rationale Funktion können wir als *Quotienten zweier ganzen rationalen homogenen Funktionen* darstellen, und diese werden wir für sich untersuchen; da ein gemeinsamer Faktor von Zähler und Nenner den Wert der Quotienten nicht ändert, werden sie freilich nicht mehr notwendig Invarianten im bisherigen Sinne sein müssen, sondern sie werden sich bei jeder linearen Substitution möglicherweise mit einem gewissen Faktor multiplizieren können.

Man zeigt nun leicht, daß dieser Faktor nur von den Koeffizienten der Substitution abhängt und daß er notwendig eine *Potenz der Substitutionsdeterminante*

$$r = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \cdots & \delta_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_4 & \cdots & \delta_4 \end{vmatrix}$$

sein muß. Wir kommen so schließlich dazu, solche ganze rationale homogene Funktionen der gegebenen Größenreihen zu betrachten, die sich bei den linearen Substitutionen der Variablen und Koeffizienten, wie wir sie vorhin aufstellten, mit einer Potenz r^{λ} der Substitutionsdeterminante multiplizieren; man nennt sie relative Invarianten, da sie sich nur unwesentlich ändern und ganz ungeändert bleiben bei allen Substitutionen, für die $r = 1$ ist. Der Exponent λ heißt das Gewicht der Invariante. Im Gegensatz dazu nennt man das, was wir bisher Invariante schlechtweg nannten, absolute Invariante; jede absolute Invariante ist also ein Quotient relativer Invarianten gleichen Gewichts.

7.) Damit ist tatsächlich ein Gesichtspunkt zur Systematisierung der Invariantentheorie gewonnen. Die einfachsten relativen Invarianten werden die sein, die Polynome möglichst niedrigen Grades in den gegebenen Größenreihen sind; von ihnen aus wird man zu denen höheren Grades aufsteigen. Sind j_1, j_2 irgendwelche relative Invarianten, so ist jedes Produkt von Potenzen $j_1^{\kappa_1} \cdot j_2^{\kappa_2}$ wieder eine relative Invariante; denn erhält j_1 bei der Substitution den Faktor r^{λ_1}, j_2 den Faktor r^{λ_2}, so reproduziert sich $j_1^{\kappa_1} \cdot j_2^{\kappa_2}$ bis auf den Faktor $r^{\kappa_1 \lambda_1 + \kappa_2 \lambda_2}$. Bildet man nun eine Summe solcher

Terme, noch multipliziert mit konstanten Faktoren

$$\sum_{(\kappa_1, \kappa_2, \dots)} c_{\kappa_1, \kappa_2, \dots} \, j_1^{\kappa_1} \, j_2^{\kappa_2} \dots$$

und sorgt dabei nur dafür, daß die einzelnen Summanden sich allemal mit derselben Potenz von r multiplizieren, d.h. daß sie alle dasselbe Gewicht haben oder – wie man sagt – „isobar" sind, so erhält man offenbar wiederum eine relative Invariante höheren Grades, da der Faktor der einzelnen Glieder einfach vor die Summe tritt.

Das zentrale Problem der Invariantentheorie ist nun natürlich die Frage, ob man so stets alle Invarianten erhalten kann: Welches ist in jedem bestimmten Falle das volle System der niedersten Invarianten, aus denen sich sämtliche relativen Invarianten in der angedeuteten Weise ganz und rational aufbauen lassen. Das Haupttheorem ist, daß es zu jeder endlichen Anzahl vorgegebener Größen stets ein solches endliches „volles Invariantensystem" gibt, d.h. endlich viele Invarianten, aus denen sich alle andern ganz und rational zusammensetzen. Diese abschließenden Resultate der systematischen Invariantentheorie verdankt man übrigens deutschen Forschern, nämlich P. Gordan und D. Hilbert; besonders ist des letzteren Arbeit in Bd. 36 der math. Ann.[1] hervorzuheben –

[1] „Über die Theorie der algebraischen Formen". Bd. 36, p. 473 ff. (1890).

Ich möchte nun noch an <u>einfachen Beispielen</u>, wie wir sie hernach in der Geometrie gebrauchen werden, etwas näher die vorgetragenen abstrakten Entwicklungen erläutern, werde freilich auch hier mehr referieren, als beweisen.

1.) Nehmen wir zunächst an, daß im <u>binären Gebiete</u> lediglich eine <u>Anzahl von Punkten</u> gegeben seien:

$$\xi_1, \tau_1;\ \xi_2, \tau_2;\ \xi_3, \tau_3; \ldots$$

Dann gilt der interessante Satz, <u>daß die einfachsten Invarianten durch die zweireihigen Determinanten geliefert werden, die man aus diesen Koordinaten bilden kann, und daß diese Determinanten zugleich das volle Invariantensystem bilden</u>.

Wir können aus 2 Punkten 1, 2 folgende zweireihige Determinante bilden:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \tau_2 \end{vmatrix} .$$

Das ist tatsächlich eine ganze rationale Funktion der Variablen und auch homogen sowohl in ξ_1, τ_1 als in ξ_2, τ_2. Die invariante Natur erkennen wir sofort, wenn wir unter Benutzung des Determinantenmultiplikationssatzes ausrechnen:

$$\Delta_{12}' = \begin{vmatrix} \xi_1' & \tau_1' \\ \xi_2' & \tau_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \xi_1 + d_1 \tau_1, & \alpha_4 \xi_1 + d_4 \tau_1 \\ \alpha_1 \xi_2 + d_1 \tau_2, & \alpha_4 \xi_2 + d_4 \tau_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & d_1 \\ \alpha_4 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = r \cdot \Delta_{12};$$

also es liegt eine Invariante vom <u>Gewicht 1</u> vor.

Solcherweise haben n Punkte $1, 2, \ldots n$ im ganzen $\frac{n(n-1)}{2}$ Invarianten vom Gewicht 1:

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \xi_i & \tau_i \\ \xi_k & \tau_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2, \ldots n);$$

daß diese Determinanten weiterhin das volle Invariantensystem bilden, d. h. <u>daß jede relative Invariante der n Punkte als Summe isobarer Terme</u>

$$\underline{\sum C . \Delta_{ik}^{s} \Delta_{lm}^{t} \ldots}$$

<u>darstellbar ist</u>, – das zu beweisen würde freilich hier zu weit führen. Aus diesen relativen Invarianten erhält man die allgemeinsten rationalen absoluten Invarianten als Quotienten bei gleichem Gewichte von Zähler und Nenner; ein einfachstes Beispiel einer absoluten Invariante wäre also der Quotient $\frac{\Delta_{ik}}{\Delta_{lm}}$.

Ich möchte an diesem Beispiel noch eine feinere Begriffsbildung erläutern, die in der Theorie eine große Rolle spielt, nämlich die der <u>Syzygieen</u> (d. h. „Zusammengürtelungen“ oder Verknüpfungen von Invarianten). Es kann nämlich vorkommen, <u>daß gewisse jener Aggregate der fundamentalen Invarianten identisch verschwinden</u>; so hat man z. B. bei 4 Punkten

$$\Delta_{12}\, \Delta_{34} + \Delta_{13}\, \Delta_{42} + \Delta_{14}\, \Delta_{23} = 0,$$

was lediglich auf eine bekannte Determinantenidentität hinauskommt, die wir übrigens gelegentlich (S. 70) schon benutzt haben. Eine solche Identität zwischen Invarianten des vollen Systems heißt eine Syzygie. Hat man mehrere solche Syzygieen, so kann man durch Multiplikation und Addition neue daraus bilden, und wie bei den Invarianten selbst kann man nach dem *vollen System der Syzygieen* fragen, aus denen sich alle andern in dieser Weise aufbauen lassen; die Theorie zeigt, *daß es stets ein endliches solches System gibt*. Im Falle von 4 Punkten z. B. besteht dieses volle System aus der einzigen angegebenen Gleichung, d. h. alle zwischen den 6 Determinanten $\Delta_{12}, \dots \Delta_{34}$ bestehenden Identitäten sind Folgen jener einen; bei mehreren Punkten besteht es aus allen möglichen Gleichungen von jenem Typus. Die Kenntnis dieser Syzygieen ist selbstverständlich von fundamentaler Wichtigkeit für die Kenntnis des gesamten Invariantensystems; denn unterscheiden sich zwei isobare Aggregate der einfachsten Invarianten um Terme, welche die linke Seite einer Syzygie zum Faktor haben, so sind sie identisch und brauchen nicht zweimal aufgezählt zu werden.

2.) Sind ebenso *einzelne Punkte im ternären oder im quaternären Gebiete* gegeben, so werden natürlich ganz genau so die vollen Invariantensysteme durch die *3- oder 4-reihigen Determinanten aus ihren Koordinaten*

konstituiert; im ternären Gebiet z. B. ist die fundamentale Invariante dreier Punkte, wiederum vom Gewicht 1:

$$\Delta_{123} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \tau_3 \end{vmatrix} .$$

Sie wollen selbst durchdenken, wie sich alles Weitere, insbesondere die Syzygieen, hier gestaltet.

3.) Steigen wir nun gleich zur Betrachtung einer *quadratischen Form*, etwa im quaternären Gebiet, auf:

$$f = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + 2D\xi\zeta + 2E\eta\zeta + F\zeta^2 + 2G\xi\tau + 2H\eta\tau + 2J\zeta\tau + K\tau^2.$$

Wir können zunächst *eine Invariante* bilden, die nur von den 10 Koeffizienten $A, \dots K$ abhängt, nämlich die *Determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D & G \\ B & C & E & H \\ D & E & F & J \\ G & H & J & K \end{vmatrix} ;$$

da sich die $A, \dots K$ kontragredient zu den quadratischen Termen in $\xi, \dots \tau$ transformieren, bestätigt man leicht, daß das *Gewicht dieser Invariante* -2 ist:

$$\Delta' = r^{-2} \cdot \Delta .$$

Das volle System der aus den Koeffizienten der Form allein gebildeten Invarianten besteht allein aus diesem Δ, d. h. *jede* ganze rationale Invariante, welche nur $A, \dots K$ enthält, ist eine Potenz von Δ.

Nehmen wir nun die Koordinaten ξ, η, ζ, τ eines Punktes zu den Koeffizienten der Form hinzu, so ist die einfachste gemeinsame Invariante oder – nach der oben erwähnten Terminologie – Kovariante die Form f selbst, denn aus der Forderung ihrer Invarianz sind ja die Transformationen der $\mathcal{A}, \dots \mathcal{K}$ überhaupt bestimmt; so ist selbstverständlich jede vorgegebene Form ihre eigene Kovariante. Sie wird sogar bei unseren Substitutionen überhaupt nicht geändert, ist also eine Invariante vom Gewicht 0 oder eine absolute Invariante. Verwenden wir aber nun 2 Punkte $\xi_1, \dots \tau_1$ und $\xi_2, \dots \tau_2$, so tritt als neue Kovariante die sog. Polarform

$$\mathcal{A}\xi_1\xi_2 + \mathcal{B}(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + \mathcal{C}\eta_1\eta_2 + \dots + \mathcal{K}\tau_1\tau_2$$

auf, deren Gewicht wiederum 0 ist, d. h. die ebenfalls absolut invariant ist.

Betrachten wir endlich gleichzeitig mit f noch eine Linearform φ d. h. den Inbegriff ihrer Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so erhalten wir die folgende simultane Invariante vom Gewicht -2 die aus der Determinante durch den sog. Prozeß der „Ränderung" mit $\alpha, \dots \delta$ entsteht:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{D} & \mathcal{G} & \alpha \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} & \mathcal{E} & \mathcal{H} & \beta \\ \mathcal{D} & \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{J} & \gamma \\ \mathcal{G} & \mathcal{H} & \mathcal{J} & \mathcal{K} & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & 0 \end{vmatrix};$$

man kann sie nach dem früheren auch als Kontravariante bezeichnen. Bekanntlich spielt diese Bildung in der analytischen Geometrie eine große Rolle, wenn es sich darum handelt, eine Fläche 2. Ordnung in Ebenenkoordinaten darzustellen; man sieht aber, daß der Sache der rein analytische Prozeß der Invariantenbildung zu Grunde liegt.

Liegen ebenso 2 Linearformen φ_1, φ_2 mit den Koeffizienten $\alpha_1, \dots \delta_1$ und $\alpha_2, \dots \delta_2$ vor, so kann durch „zweimalige Ränderung" derselben Determinante eine weitere Invariante gebildet werden:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} & \mathcal{D} & \mathcal{G} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} & \mathcal{E} & \mathcal{H} & \beta_1 & \beta_2 \\ \mathcal{D} & \mathcal{E} & \mathcal{F} & \mathcal{J} & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \mathcal{G} & \mathcal{H} & \mathcal{J} & \mathcal{K} & \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

die gleichfalls das Gewicht -2 hat. –

Diese wenigen Angaben müssen hier genügen, um Ihnen einen Einblick in das große Gebiet der Invariantentheorie zu vermitteln. Es ist eine ungemein ausgebreitete Lehre, die sich da entwickelt hat, und man hat insbesondere sehr viel Scharfsinn auf die Herstellung von Verfahren verwandt, die zu irgendwie gegebenen Grundformen das volle System der Invarianten und der Syzygieen zu bilden gestatten. Nur noch eine allgemeine Bemerkung hierzu! In unseren Beispielen haben wir die Invarianten stets durch Determinantenbildung aufgestellt, und so bewährt sich überhaupt stets die <u>Determinantentheorie als Grundlage der Invariantentheorie</u>; die Beziehung veranlaßte Cayley ursprünglich den Invarianten den Namen Hyperdeterminanten zu geben. Erst später führte Sylvester das Wort „Invarianten“ ein. Es ist ganz interessant sich einmal die Frage vorzulegen, für wie wichtig man im Rahmen der gesamten Mathematik ein spezieller ihrer Kapitel halten soll, etwa die Determinantentheorie. Cayley sagte mir einmal im Gespräch, falls er 15 Vorlesungen über die gesamte Mathematik zu halten hätte, so würde er <u>eine</u> den Determinanten widmen. Überlegen Sie, ob Sie Ihren Erfahrungen nach der Determinantentheorie auch diese Wertschätzung zuteil werden lassen können! Ich selbst habe in meinen gewöhnlichen Elementar-Vorlesungen aus pädagogischen Gründen die Determinanten immer mehr und mehr zurückgedrängt; ich habe zu oft die Erfahrung gemacht, daß sich die Hörer wohl an die <u>Schemata</u> gewöhnen, mit denen man da in sehr zweckmäßiger Weise lange Ausdrücke abkürzen lernt, daß ihnen aber vielfach ihre <u>Bedeutung</u> keineswegs geläufig wird und die Gewöhnung an das Schema sie vielmehr hindert, in alle Einzelheiten der Sache bis zu ihrer vollen Beherr-

schung einzudringen. Selbstverständlich können wir aber bei allgemeinen Ueberlegungen und so hier bei der Invariantentheorie die Determinanten nicht entbehren. –

Wir kommen nun endlich zu unserem eigentlichen Ziel mit Hilfe dieser Betrachtungen eine Systematisierung der Geometrie zu erhalten:

3. Anwendung der Invariantentheorie auf die Geometrie.

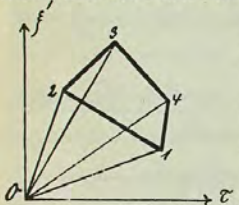
Wir beginnen damit, daß wir die Variablen $\xi \ldots \tau$ als <u>gewöhnliche rechtwinklige inhomogene Koordinaten</u> deuten, also ξ, τ in der Ebene, ξ, η, τ im Raume, ξ, η, ζ, τ im vierdimensionalen Raume etc. Die linearen homogenen Substitutionen der Invariantentheorie

$$(1.)\qquad \begin{array}{l} \xi' = a_1 \xi + \ldots + d_1 \tau \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau' = a_4 \xi + \ldots + d_4 \tau \end{array}$$

stellen dann die <u>Gesamtheit der affinen Transformationen des betrachteten Raumes bei festgehaltenem Koordinatenanfangspunkte</u> dar. Die einzelnen <u>Invarianten</u> selbst werden also solche geometrische Größen sein, die bei jenen affinen Transformationen bis auf einen Faktor ungeändert bleiben, d. h. <u>Größen, die in der durch jene Transformationen definierten affinen Geometrie eine bestimmte Bedeutung haben.</u>

Sind beispielsweise im <u>binären Falle</u>, also in der <u>Ebene</u>

2 Punkte 1, 2 gegeben, so stellt die fundamentale Invariante Δ_{12} den doppelten Inhalt des Dreiecks 0_{12}, mit passenden Vorzeichen versehen, dar, wie wir von früher her wissen. in der Tat ist bekannt (vgl. die analoge Feststellung für den Raum S. 163), daß sich der Dreiecksinhalt bei einer affinen Transformation nur mit der Substitutionsdeterminante multipliziert, d. h. eben, Δ_{12} ist eine relative Invariante vom Gewicht 1. Der



Quotient zweier Inhalte $\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{34}}$ bleibt absolut ungeändert, ebenso aber auch eine Gleichung $\Delta_{12} = 0$, da für sie ein hinzutretender Faktor unwesentlich ist; tatsächlich hat diese Gleichung die bei unseren affinen Transformationen offenbar absolut invariante Bedeutung, daß die 3 Punkte 0, 1, 2 auf einer Geraden liegen.

Haben wir nun mehrere Punkte 1, 2, 3, 4, ..., so besteht ihr volles Invariantensystem aus allen ihren Determinanten Δ_{ik}; gelingt es also irgend eine Größe aus ihnen zu bilden, die allen affinen Transformationen (1) gegenüber relativ invariant ist, d. h. die überhaupt in unserer affinen Geometrie Bedeutung hat, so muß sie sich als Polynom in den Δ_{ik} darstellen. Wir können dies in einfachen Fällen sofort geometrisch verifizieren; z. B. ist jeder Flächeninhalt der Ebene, etwa das Polygon (1, 2, 3, 4), solch eine Invariante,

und tatsächlich ist die Formel, die wir früher (S. 20) allgemein für den Polygon-Inhalt gegeben hatten:

$$(1, 2, 3, 4) = \Delta_{12} + \Delta_{23} + \Delta_{34} + \Delta_{41}$$

nichts als der Ausdruck des allgemeinen Theorems für diesen speziellen Fall.

Endlich haben wir noch von den Syzygieen zwischen den Invarianten zu reden. Die fundamentale Syzygie

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{42} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0$$

stellt eine Identität zwischen den sechs von vier beliebigen Punkten mit dem Nullpunkt gebildeten Dreiecksinhalten dar, also ein allgemeines Theorem unserer affinen Geometrie. Analoges gilt natürlich für jede Syzygie, und ebenso muß umgekehrt jedes Theorem unserer affinen Geometrie, insofern es eine Relation zwischen Invarianten der affinen Transformationen (1) ist, durch eine Syzygie dargestellt werden. Nach dem, was wir früher (S. 320) über das volle System der Syzygieen im Falle von 4 Punkten behaupteten, müssen also alle in unserer affinen Geometrie für ein System von 4 Punkten gültigen Sätze aus jenem einen soeben angegebenen folgen. Und ebenso macht man sich die Richtigkeit der allgemeinen Behauptung klar, daß die Invariantentheorie die lückenlose systematische Aufzählung aller in unserer affinen Geometrie möglichen Größen und Theoreme gestattet, indem sie das volle System der Invarianten und das der Syzygieen gibt.

Ich werde diese Betrachtungen wiederum nicht im einzelnen durchführen; ich will nur erwähnen, daß man neben den Punkten auch die durch Formen $\varphi = \alpha\xi + \delta\tau$, $f = A\xi^2 + 2B\xi\tau + C\tau^2, \ldots$ bestimmten Gebilde unserer Geometrie in Betracht ziehen kann. Eine solche Form ordnet jedem Punkte der Ebene einen Zahlenwert zu, d. h. sie bestimmt ein Skalarfeld; man kann in dieser Auffassung die Invarianten vorgegebenen Form leicht geometrisch deuten, und jede Syzygie zwischen den Invarianten wird wieder einen geometrischen Satz darstellen. –

Neben dieser bisher betrachteten, ich möchte sagen, naiven Deutung der Invariantentheorie in der Geometrie einer n-dimensionalen Raumes, in welchem die n Veränderlichen als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten gelten, kommt nun aber auch eine wesentlich andere Darstellung in Betracht: Man kann jene Variablen auch als homogene Koordinaten in einem $n-1$-dimensionalen Raume R_{n-1} auffassen, dessen inhomogene Koordinaten $x = \frac{\xi}{\tau}, \ldots$ sind; dabei bleibt ein den n Koordinaten gemeinsamer Faktor unwesentlich. Wir haben früher (S. 194 ff) nur überlegt, in welchem Zusammenhange diese Koordinatenbestimmungen des R_{n-1} und R_n stehen: wir betrachten den R_{n-1} als das lineare $n-1$-dimensionale Gebilde $\tau = 1$ der R_n, und projizierten seine Punkte durch Strahlen von dessen Koordinatenanfangspunkt auf den R_n; dann waren die sämtlichen möglichen Wertsysteme der homogenen Koordinaten eines Punktes aus dem R_{n-1} identisch mit den Koordinaten aller ihm so entsprechenden Punkte im R_n. Nun stellen die linearen Substitutionen der homogenen Variablen im R_{n-1} sämtliche projektive Transformationen dar, und zwar geben alle nur durch einen willkürlichen Faktor ρ' sich unterscheidenden Substitutionen

$$\rho'\xi' = \alpha_1\xi + \ldots + \delta_1\tau$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho'\tau' = \alpha_4\xi + \ldots + \delta_4\tau$$

ein und dieselbe projektive Umformung. Die nunmehr in Betracht kommende Gruppe aller projektiven Transformationen enthält also nicht mehr n^2 sondern nur n^2-1 willkürliche Konstante; im R_2 und R_3 sind es also speziell 8 bezw. 15.

Wollen wir nun die Invariantentheorie der n Variablen $\xi \ldots \tau$ in der projektiven Geometrie der R_{n-1} geometrisch deuten, so haben wir vor allem zu bedenken, daß eben wegen der Verwendung homogener Koordinaten nur diejenigen Größen und Beziehungen der Invariantentheorie eine Bedeutung finden können, die in den Koordinaten $\xi, \dots \tau$ jedes einzelnen auftretenden Punktes homogen von nullter Ordnung sind, und die dieselbe Eigenschaft auch in Bezug auf jedes einzelne etwa vorkommende Koeffizientensystem einer linearen, quadratischen etc. Form haben.

Das wird am besten klar werden, wenn ich es sofort an konkreten Beispielen ausführe. Es wird genügen, vom binären Gebiete $(n = 2)$ zu reden, wir haben also 2 Variabele ξ, τ und deuten $x = \frac{\xi}{\tau}$ als Abszisse auf der Geraden. Sind eine Reihe von Wertsystemen $\xi_1, \tau_1; \xi_2, \tau_2; \dots \xi_p, \tau_p$ gegeben, so wissen wir, daß die Determinanten

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \xi_i & \tau_i \\ \xi_k & \tau_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, \dots p)$$

das volle System fundamentaler Invarianten darstellen. Welche der sämtlichen invarianten Aussagen haben nun in der projektiven Geometrie Bedeutung? Nun, die Aussage, dass ein Δ_{ik} irgend einen bestimmten Zahlenwert hat, jedenfalls nicht, denn wenn man ξ_i, τ_i mit einem Faktor ρ multipliziert, was ja den Punkt i nicht ändert, multipliziert sich auch Δ_{ik} mit ρ. Wohl aber hat das Verschwinden eines Δ_{ik}, die Relation $\Delta_{ik} = 0$, projektiv geometrische Bedeutung, denn wir können sie schreiben: $\frac{\xi_i}{\tau_i} = \frac{\xi_k}{\tau_k}$, so dass tatsächlich nur die Verhältnisse der Koordinaten beider Punkte eingehen, und die geometrische

Bedeutung – Zusammenfallen der Punkte i und k – evident ist.

Um nun aber eine zahlenmäßige Invariante zu bekommen, die selbst 0^{ter} Dimension ist, müssen wir mehr als 2 Punkte kombinieren; der Versuch zeigt, dass man 4 Punkte 1, 2, 3, 4 braucht und zwar ist dann jeder Quotient folgender Bauart:

$$\frac{\Delta_{12} \cdot \Delta_{34}}{\Delta_{14} \cdot \Delta_{32}}$$

in jedem der 4 Variabelenpaare $\xi_1, \tau_1; \dots \xi_4, \tau_4$ homogen von 0^{ter} Dimension; daraus folgt zugleich, dass er das Gewicht 0 hat, d. h. eine absolute Invariante darstellt. Diese Größe hat also als solche eine projektive Bedeutung und stellt einen allen projektiven Umformungen der Geraden gegenüber invarianten Zahlenwert dar. Sie ist natürlich nichts anderes als das „Doppelverhältnis" der 4 in bestimmter Reihenfolge geschriebenen Punkte, denn man kann sie in inhomogenen Koordinaten sofort schreiben

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} .$$

Das Doppelverhältnis von 4 Punkten erhalten wir hier vom invariantentheoretischen Standpunkte also mit Notwendigkeit als die einfachste Invariante irgend einer Punktreihe auf der Geraden, die der für eine projektiv-geometrische Bedeutung notwendigen Homogenitäts-bedingung genügt.

Ich schliesse hier gern eine allgemeinere Bemerkung an. Ich habe früher schon der in der projektiven Geometrie vielfach bestehenden Tendenz gedacht, alle auftretenden Grössen invarianten Charakters auf Doppelverhältnisse zurückzuführen. Wir können von unserm jetzt gewonnenen Standpunkt das Urteil fällen, dass durch dieses Bestreben die Gewinnung eines tieferen Einblicks in den Aufbau der projektiven Geometrie nur erschwert wird. Viel besser ist es, wenn man zuerst nach allen rationalen ganzen (relativen) Invarianten überhaupt fragt, und aus ihnen erst die rationalen Invarianten, speziell die absoluten und unter ihnen wieder die der Homogenitätsbedingung der projektiven Geometrie genügenden bildet. Hier hat man dann eine wirkliche vom Einfachsten zum Komplizierteren aufsteigende Systematik vor sich, die verwischt wird, wenn man eine spezielle rationale Invariante, das Doppelverhältnis, voranstellt, und nun ausschliesslich rational gebrochene Darstellungen der andern Invarianten durch sie sucht.

Wir wollen nun noch zusehen, zu was für Sätzen der projektiven Geometrie die *Syzygieen* zwischen den Invarianten Δ_{ik} Anlass geben. Gehen wir wieder von der fundamentalen Syzygie

$$\Delta_{12}\,\Delta_{34} + \Delta_{13}\,\Delta_{42} + \Delta_{14}\,\Delta_{23} = 0$$

aus, dividieren durch den letzten Summanden der linken

Seite und berücksichtigen, dass $\Delta_{23} = -\Delta_{32}$ und $\Delta_{42} = -\Delta_{24}$, so erhalten wir

$$\frac{\Delta_{12}\,\Delta_{34}}{\Delta_{14}\,\Delta_{32}} = 1 - \frac{\Delta_{13}\,\Delta_{24}}{\Delta_{14}\,\Delta_{23}}\ .$$

Hier steht links das Doppelverhältnis der Punkte 1, 2, 3, 4 nach der ursprünglichen Definition, rechts das ganz genau ebenso gebildete Doppelverhältnis dieser 4 Punkte, wenn man nur die Reihenfolge von 2 und 3 vertauscht; die Doppelverhältnisse in noch anderer Reihenfolge erhält man, wenn man durch andere Terme dividiert. *So finden die fundamentalen Syzygieen zwischen den Invarianten von je 4 Punkten ihre geometrische Deutung in den bekannten Relationen zwischen den 6 Werten, die ihr Doppelverhältnis je nach der Reihenfolge der 4 Punkte annehmen kann.*

Ich will hier nicht weiter ausführen, wie sich die Fortführung des Aufbaues der projektiven Geometrie der Geraden auf dieser Grundlage, und wie sich ebenso die *Deutung der ternären und quaternären Invariantentheorie in der projektiven Geometrie der Ebene und des Raumes* gestaltet; Sie finden das beispielsweise in den schon genannten Lehrbüchern von *Salmon – Fiedler* und *Clebsch – Lindemann* im einzelnen dargestellt, wo gerade mit dieser Deutung der Invariantentheorie fortwährend operiert wird. So entsteht eine *in sich vollständige Systematik der projektiven Geometrie*, sowohl was die Grössen angeht, die man in ihr betrachten kann (die den Invarianten entsprechen), als auch die Theoreme, die man aufstellen kann (entsprechend den Syzygieen). Freilich ist vom Standpunkte des Invariantentheoretikers diese Deutung weniger befriedigend als für den Geometer; für ihn ist die zuerst gegebene Deutung in der affinen Geometrie des R_{n+1} wertvoller, da im R_n nur die der Homogenitätsbedingung genügenden Invarianten und Syzygieen zur Geltung kommen.

Nur einen besonders wichtigen Punkt möchte ich noch ausführlicher erörtern, um wieder an eine früher (S. 307) abgebrochene Betrachtung anzuschließen: ich möchte zeigen, wie unter Anwendung der Invariantentheorie sich die durch das Cayleysche Prinzip ermöglichte Einordnung der affinen und metrischen Geometrie in das Schema der projektiven gestaltet.

4. Die Systematisierung der affinen und metrischen Geometrie auf Grund des Cayleyschen Prinzips.

Hier handelt es sich natürlich um die allgemeine affine Geometrie, in der keineswegs, wie bei der anfangs betrachteten vollständigen Deutung der Invariantentheorie, ein festgehaltener ausgezeichneter Punkt – der Koordinatenanfangspunkt – existiert.

Betrachten wir sogleich den dreidimensionalen Raum mit den inhomogenen Koordinaten x, y, z bezw. den

homogenen ξ, η, ζ, τ; das Cayleysche Prinzip sagt dann, dass aus der projektiven Geometrie die affine hervorgeht, wenn wir die unendlichferne Ebene $\tau = 0$, die metrische aber, wenn wir außerdem noch den imaginären Kugelkreis $\tau = 0,\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ den jeweils vorgelegten Gebilden adjungieren.

Eine Bemerkung über diesen Kugelkreis wird die Darstellung des folgenden erleichtern: Wir haben ihn hier durch 2 Gleichungen, als Schnitt der unendlichfernen Ebene mit einem Kegel durch den Nullpunkt, definiert, wir können ihn aber auch, wie überhaupt jeden Kegelschnitt, durch nur eine Gleichung in Ebenenkoordinaten bestimmen, wenn wir ihn als Umhüllungsgebilde aller ihn berührenden Ebenen auffassen. Bezeichnen wir, wie wir es zuletzt taten, die „Ebenenkoordinaten" d. h. die Koeffizienten einer Linearform φ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so lautet die Gleichung des Kugelkreises, wie man leicht verifiziert:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0;$$

mit andern Worten, diese Gleichung ist die Bedingung dafür, daß die Ebene $\alpha\xi + \ldots + \delta\tau = 0$ den Kugelkreis berührt. –

Nunmehr ist es ein leichtes, den Übergang von der projektiven zur affinen bezw. metrischen Geometrie invariantentheoretisch aufzufassen: Wir fügen den gegebenen Wertsystemen – Punktkoordinaten, lineare und quadratische Formen etc. –, die die betrachtete Figur beschreiben, noch die eine bestimmte Linearform τ (d.h. das Koeffizientensystem 0, 0, 0, 1) bezw. die in Ebenenkoordinaten geschriebene quadratische Form $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ hinzu. Behandeln wir das so erweiterte Formensystem genau wie vorhin, d.h. stellen wir das vollständige System seiner Invarianten und der Syzygieen zwischen diesen auf, und heben diejenigen unter ihnen hervor, die der Homogenitätsbedingung genügen, so erhalten wir alle Begriffe und Sätze der affinen bezw. metrischen Geometrie der ursprünglich gegebenen Elemente; damit ist dann die invariantentheoretische Systematik auf die affine und metrische Geometrie übertragen, und ich möchte wiederum darauf hinweisen (vgl. S. 332), dass so insbesondere durch die Betonung der ganzen rationalen Bildung von Invarianten und Syzygieen ein sonst wenig hervorgehobener systematisierender Gesichtspunkt in die Geometrie hineinkommt. –

Statt abstrakter Erörterungen hierüber will ich Ihnen auch diese Beziehungen lieber sogleich durch einfache Beispiele deutlich machen, indem ich wirklich zeige, wie man die elementarsten Fundamentalgrößen der

affinen und metrischen Geometrie darstellen kann als Simultaninvarianten der gegebenen Größensysteme und der Form τ bezw. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

Aus der affinen Geometrie zunächst wähle ich als Beispiel den Inhalt T des von 4 Punkten gebildeten Tetraeders, der sich bekanntlich ausdrückt als:

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6\,\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \tau_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & \tau_4 \end{vmatrix}.$$

Wir haben zu untersuchen, inwieweit dieser Ausdruck die behauptete Invarianteneigenschaft hat. Zunächst wissen wir, dass die hier auftretende Determinante tatsächlich die fundamentale relative Invariante von 4 Punkten ist (S. 321); ferner aber stehen im Nenner die Werte der unserer Figur adjungierten Linearform τ für diese 4 Punkte, und das sind ja die einfachsten mit Hilfe einer Form überhaupt zu bildenden (absoluten) Invarianten (S. 322). Das ist natürlich so zu verstehen, dass nach einer Transformation in den Nenner die Werte der Form zu schreiben sind, in die die Linearform τ übergeht, oder dass, wenn wir allgemein die Form $\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\delta\tau$ adjungieren, in den Nenner das Produkt der 4 Werte dieser Form für die Punkte 1, … 4 zu treten hat. So ist T also selbst *auch eine rationale Invariante*, und zwar ist sie homogen von nullter Dimension in den Koordinaten jeder der 4 Punkte. In Bezug auf die Koeffizienten unserer adjungierten Linearform 0, 0, 0, 1 bezw. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die ja im Nenner auftreten, hat T allerdings die Dimension -4, so daß, da ein gemeinsamer Faktor dieser Größen willkürlich ist, der absolute Wert von T in der projektiven Geometrie unserer erweiterten Figur keine Bedeutung haben kann. Tatsächlich hat man ja auch in der affinen Geometrie zunächst kein Mittel, einem Tetraeder einen bestimmten zahlenmäßigen Inhalt zuzuschreiben, es sei denn, daß man bereits Einheitsstrecken bezw. ein Einheitstetraeder festgelegt hat, wie wir es bei der Benutzung inhomogener Koordinaten ja immer annahmen. Von unserm jetzigen allgemeinen Standpunkte aus würde das aber heißen, daß wir der Figur außer der „unendlichfernen Ebene" $\tau = 0$ noch weitere Elemente hinzufügen; adjungieren wir z. B. einen fünften Punkt und bilden den *Quotienten* zweier analog T gebildeter Ausdrücke, so haben wir tatsächlich einen allen Homogenitätsbedingungen genügenden Ausdruck, der dann auch eine *absolute Invariante* der affinen Geometrie ist. Der einzelne Ausdruck T ist (wir wissen das ja auch schon von früher; vgl. S. 163) lediglich eine *relative* Invariante vom *Gewicht 1.*

Hier ist nun der Ort noch einmal auf die ganzen *Entwicklungen des ersten Hauptteils* hinzuweisen, deren innerster Wesen sich jetzt klarer enthüllt. Daß die Graßmannschen Elementargrößen der Geometrie, die wir dort herleiteten, durchaus der affinen Geometrie angehören, das haben wir ja schon beim speziellen Studium der affinen Transformationen erkannt (vgl. S. 160). Das *Graßmannsche Determinantenprinzip* aber, das uns jene Größen lieferte, ist – das können wir jetzt nachtragen – durchaus kein unverständlicher Kunstgriff, sondern es ist nichts als die völlig *naturgemäße Anwendung der Invariantentheorie in der affinen Geometrie*, d. h. der projektiven Geometrie bei Adjunktion der unendlichfernen Ebene. Das Auftreten der gewöhnlichen quadratischen Determinanten – Strecke, Flächeninhalt, Rauminhalt – ist ja durch das soeben erörterte Beispiel schon zur Genüge erklärt. Es bleibt nur noch zu zeigen, wie die invariantentheoretische Systematik auf die durch die Unterdeterminanten *rechteckiger Matrizen* definierten allgemeinen Graßmannschen Elementargrößen führt, und auch das wird wiederum an einem Beispiel am deutlichsten werden: Hat man 2 Punkte ξ_1, η_1, τ_1; ξ_2, η_2, τ_2 in der Ebene, so soll man also das invariantentheoretische Aequivalent der ihnen zugehörigen Gebilde der affinen Geometrie (Linienteil, Gerade, ...) herstellen. Das ordnet sich nun sofort dem früheren ein, wenn man einen dritten „unbestimmten" Punkt ξ, η, τ hinzunimmt, und nun wiederum die fundamentale Invariante

$$\frac{1}{\tau\,\tau_1\,\tau_2}\begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix}$$

als eine Linearform in ξ, η, ζ betrachtet. Die drei Koeffizienten dieser Variablen, das sind die Determinanten der Matrix

$$\frac{1}{\tau_1\,\tau_2}\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

sind also die für das neu definierte Gebilde charakteristischen Größen, und so sind wir tatsächlich genau auf die früher zur Definition der Linienteiler 1 2 verwendete Matrix geführt worden. Ganz ebenso kann man im Raum aus drei bezw. zwei Punkten durch Adjunktion eines bezw. zweier Quadrupel unbestimmter Koordinaten eine relativ invariante Linear- bezw. Bilinearform bilden, deren Koeffizienten dann ganz in Übereinstimmung mit unserer alten Definition die Koordinaten eines Ebenenteils bezw. räumlichen Linienteiles sind. Ich kann diese Andeutungen hier nicht weiter ins Einzelne ausführen; sie dürf-

ten aber wohl zur ersten Orientierung genügen und Sie zu weiterem Nachdenken anregen. –

Ich gehe nun zur metrischen Geometrie über, um auch da nur wenige charakteristische Beispiele herauszugreifen; ich werde zeigen, wie die beiden wichtigsten Grundbegriffe „Entfernung r zweier Punkte $x_1 = \frac{\xi_1}{\tau_1}, \ldots$ und $x_2 = \frac{\xi_2}{\tau_2}, \ldots$," sowie „Winkel ω zweier Ebenen $\alpha_1, \ldots \delta_1$ und $\alpha_2, \ldots \delta_2$" aus der invariantentheoretischen Systematik sich ableiten. Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie ist ja:

$$r = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} = \sqrt{\frac{(\xi_1\tau_2-\xi_2\tau_1)^2+(\eta_1\tau_2-\eta_2\tau_1)^2+(\zeta_1\tau_2-\zeta_2\tau_1)^2}{\tau_1^2\,\tau_2^2}},$$

$$\omega = \arccos\left(\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2}{\sqrt{(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)}}\right).$$

Das sind algebraische bezw. transzendente Funktionen der Parameter; wir werden sie als „algebraische" bezw. „transzendente" Invarianten bezeichnen dürfen, wenn wir zeigen, daß die rationalen ganzen Bestandteile, aus denen sie sich aufbauen, für sich bereits Invarianten im alten Sinne sind.

Beginnen wir mit dem Winkel ω. Die Figur, deren Invariante er werden soll, besteht aus zwei Linearformen

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \text{ und } \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$$

und der den Kugelkreis darstellenden quadratischen Form in Linienkoordinaten:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

Wir können natürlich aus dieser quadratischen Form in Ebenenkoordinaten genau so Invarianten bilden, wie früher (S. 321 ff) aus Formen in Punktkoordinaten, indem wir nur immer Punkt- und Ebenenkoordinaten vertauschen („dualisieren"). Insbesondere sind also die Werte der Form für die beiden gegebenen Wertsysteme:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 \quad \text{und} \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2$$

sowie der für diese beiden Systeme gebildete Wert ihrer Polarform

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2$$

invariant, und gerade aus diesen Ausdrücken setzt sich $\cos \omega$ hauptsächlich zusammen; übrigens ist es in jedem der beiden Wertsysteme $\alpha_1, \dots \delta_1$ und $\alpha_2, \dots \delta_2$ und ebenso in den Koeffizienten $1, 1, 1, 0$ der gegebenen quadratischen Form, homogen von 0^{ter} Dimension, so daß der Ausdruck in der metrischen Geometrie eine selbständige Bedeutung hat. Tatsächlich gibt es ja auch in der metrischen Geometrie ein absolutes, von willkürlicher Annahme der Einheit unabhängiges Winkelmaß. Damit ist zugleich gesagt, daß unser Ausdruck eine absolute Invariante ist.

Was nun weiter die Entfernung r anlangt, so erinnern wir uns, daß wir Invarianten einer quadratischen Form in Punktkoordinaten gebildet hatten, indem wir ihre Determinante mit den Koordinaten einer oder zweier Ebenen ränderten (S. 322 f). Ebenso werden wir jetzt für unsere aus einer quadratischen Form in Ebenenkoordinaten und 2 Punkten bestehende Figur Invarianten erhalten, indem wir – genau dual vorgehend – die Determinante der Form $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ein- und zweimal mit den Koordinaten $\xi_1, \dots \tau_1$ und $\xi_2, \dots \tau_2$ der gegebenen Punkte rändern. Aus den so entstehenden Invarianten bilden wir den Quotienten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} : \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_1 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tau_2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 \end{vmatrix} \right\}.$$

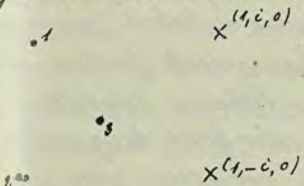
Indem man die 3 Determinanten ausrechnet, findet man leicht, daß dieser Quotient genau dem oben angegebenen Werte von r^2 gleich ist, dessen invariante Natur damit erkannt ist. Übrigens ist er ähnlich wie die früher betrachtete Fundamentalinvariante der affinen Geometrie wohl in den Koordinaten der beiden vorgelegten Punkte homogen von nullter Dimension, nicht aber in den Koeffizienten der gegebenen quadratischen Form, in denen er vielmehr homogen von $(-4)^{\text{ter}}$ Dimension ist. Zudem ist er auch keine absolute Invariante, denn jede der 3 auftretenden Determinanten hat, da es sich um die dualen Bildungen zu den S. 322 f betrachteten Invarianten handelt, das Gewicht $+2$, der Quotient also das Gewicht $2-4=-2$. Daher besitzt der numerische Wert von r noch keine unmittelbare Bedeutung in der metrischen Geometrie, und tatsächlich kann man ja die Entfernung zweier Punkte erst messen, wenn man eine weitere (Einheits-) Strecke willkürlich festgelegt, d.h. neben der fundamentalen quadratischen Form noch der Figur adjungiert hat. Absolute Invarianten der metrischen Geometrie stellen sich erst durch Quotienten von Ausdrücken der angegebenen Art dar.

Auch hier kann ich nicht näher ins Detail eingehen; diese Beispiele werden Ihnen aber wenigstens einen ungefähren Begriff davon geben, wie die hier entstehende vollständige Systematik der affinen und der metrischen Geometrie, die aus der systematischen Gliederung der ganzen rationalen Invarianten erwächst, aussieht. Mögen Sie Genaueres in den mehrfach genannten Lehrbüchern nachlesen! –

Nur ein gewisses kleineres Beispiel will ich noch berühren, das übrigens auch in der Neuauflage von Clebsch-Lindemann [1] genau behandelt ist, ich meine die sog. Dreiecksgeometrie. Hier ist im Laufe der Zeit besonders durch die Arbeit der Gymnasiallehrer ein großes abgeschlossenes Gebiet entstanden, das von den vielen merkwürdigen Punkten, Geraden, Kreisen handelt, die man an einem Dreieck definieren kann: Schwerpunkt, Höhen, Winkelhalbierende, Ankreise, Umkreis,

[1] loc. cit. pag. 312

Feuerbachscher Kreis etc. etc. Die unzähligen Beziehungen, die man hier immer aufs neue zu finden sich bemüht hat und noch weiter bemüht, kann man nun unserer Systematik ganz leicht einordnen: Gegeben sind da 3 Punkte



$\xi_1 | \eta_1 | \tau_1$, $\xi_2 | \eta_2 | \tau_2$, $\xi_3 | \eta_3 | \tau_3$ der Ebene, die Dreiecksecken, und wir adjungieren, da es sich doch ganz um metrische Beziehungen handelt, die beiden imaginären Kreispunkte, deren Geradengleichung $\alpha^2+\beta^2=0$ lautet; wir können aber einfach auch die Werte $1, i, 0$ und $1, -i, 0$ ihrer Punktkoordinaten adjungieren. Dann ist die ganze Dreiecksgeometrie nichts als die projektive Invariantentheorie dieser 5 Punkte, d.h. schließlich 5 beliebiger Punkte der Ebene, von denen nur 2 sprachlich etwas ausgezeichnet werden. Diese Bemerkung erst verleiht der Dreiecksgeometrie den Charakter eines systematischen durchsichtigen Lehrgebäudes, den man sonst an ihr so vermißt. –

Ich verlasse damit die Betrachtungen über die Systematik der Geometrie. Gewiß befriedigt es den ästhetischen Sinn, wenn man sich die Dinge in der geschilderten Weise zurecht legt, und da zudem allein diese Systematik eine tiefere Einsicht in die Geometrie vermittelt, sollte gewiß jeder Mathematiker, jeder Lehramtskandidat von ihr Kenntnis haben; darum erschien es mir notwendig, sie in diesem Kolleg zu berücksichtigen, zumal Ihnen ohnehin in der Literatur vielfach diese Auffassung – wenn auch vielleicht nicht immer in so konsequenter Darstellung – entgegengetreten sein wird. Freilich wäre es ganz verkehrt, wenn man sich nun dogmatisch an diese Systematik binden und die Geometrie stets nur in ihrem Schema darstellen wollte; denn dann würde sie sehr bald langweilig werden und allen Reiz verlieren, vor allem aber am neuen erfindungsreichen Denken hindern, das ja stets unabhängig von jeder Systematik vorgeht.

Waren das gewissermaßen Erörterungen über die Architektur des Gebäudes der Geometrie, so wenden wir uns nun seinen nicht minder wichtigen Fundamenten zu:

II. Grundlagen der Geometrie.

Einen Überblick über das äußerst umfangreiche Gebiet, das wir hier betreten, gibt das Enzyklopädiereferat von _F. Enriques_ über die „_Prinzipien der Geometrie_" (Enc. III A B 1). Die Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie treten vielfach in Beziehung zu den Interessen der Erkenntnistheorie und Psychologie, die von sich aus untersuchen, wie die Raumanschauung entsteht und mit welchem Recht man sie mit mathema-

tischen Methoden behandeln darf. Wir werden diese Fragen hier natürlich nur ganz flüchtig streifen können und werden wesentlich _die mathematische Seite des Problemes_ behandeln, wobei wir die Raumanschauung als gegeben annehmen; damit müssen wir insbesondere auch die für die Pädagogik so wichtige Frage, wie sich im einzelnen Individuum die Raumanschauung zu der präzisen Form entwickelt, an die wir als Mathematiker gewohnt sind, beiseite lassen.

Unsere Aufgabe in dieser Begrenzung ist dann, _das ganze Gebäude der Geometrie auf möglichst einfacher Grundlage durch rein logische Operationen aufzuführen_. Diese Grundlagen freilich kann die reine Logik nicht mehr liefern; die logische Deduktion kann erst einsetzen, wenn der _erste Teil_ des Problemes gelöst ist: _wenn man ein System gewisser einfacher Grundbegriffe und gewisser einfacher Sätze, der sog. Axiome, besitzt, das den einfachsten Tatsachen unserer Anschauung gerecht wird_. Man kann diese Axiome natürlich je nach Geschmack mehr oder weniger weit in einzelne von einander unabhängige Bestandteile zergliedern und hat auch sonst bei ihrer Auswahl noch große Freiheit. Denn die einzige Bedingung, der das Axiomensystem unterliegt, ist durch den _zweiten Teil_ unserer Aufgabe gegeben: _Aus jenen Grundbegriffen und_

Axiomen soll der ganze Inhalt der Geometrie rein logisch hergeleitet werden, ohne daß man aufs neue an die Anschauung zu appellieren braucht.

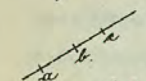
Für die Behandlung dieser Aufgabe legt uns der ganze Gang unserer Vorlesung einen bestimmten charakteristischen Weg nahe. Wir hatten uns ja stets prinzipiell der Hilfsmittel der Analysis, speziell der Methoden der analytischen Geometrie bedient: So wollen wir denn auch hier wiederum die Analysis als bekannt annehmen und werden nur fragen, wie man auf kürzeste Weise von dem Axiomensysteme zu den Ansätzen der analytischen Geometrie gelangen kann. Leider wird diese einfache Formulierung nur selten verwendet, da die Geometer häufig eine gewisse Scheu vor der Verwendung der Analysis haben, und so weit als irgend möglich ohne Zahlen auskommen wollen.

Das hiermit im allgemeinen angedeutete Programm läßt sich nun auf verschiedenen Wegen durchführen, je nachdem, welche Grundbegriffe und Axiome man gerade hervorheben will. Vielfach üblich und bequem ist es an die Spitze der Betrachtung die Grundbegriffe der projektiven Geometrie zu stellen, nämlich Punkt, Gerade und Ebene, die wir ja schon früher (S. 130 f) als solche hervorhoben. Dabei soll nicht etwa definiert wer-

den, was das für Dinge sind – das muß jedermann von Hause aus wissen! – sondern es sollen nur soviele ihrer charakteristischen Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen ausgesprochen werden, daß man aus ihnen im oben praezisierten Sinne die ganze Geometrie herleiten kann. Die einzelnen Axiome, in denen das geschieht, will ich Ihnen hier nicht vollständig aufzählen – das würde uns in dieser enzyklopädischen Vorlesung zu weit abseits führen –, sondern ich will nur ihren Inhalt soweit charakterisieren, daß Sie eine klare Vorstellung von ihnen bekommen.

An der Spitze stehen die Sätze der Verknüpfung, die ich für die projektive Geometrie ja schon früher (S. 131) ausgesprochen hatte. Wir wollen aber hier nicht von vornherein, wie dort, die ausnahmslose Existenz eines Schnittpunktes zweier Geraden derselben Ebene oder einer Schnittgeraden zweier Ebenen fordern, sondern, wie es den unmittelbaren Verhältnissen der metrischen und affinen Geometrie entspricht, uns auf den Satz beschränken, daß 2 Gerade der Ebene einen Punkt oder keinen, 2 Ebenen eine Gerade oder gar keinen Punkt gemein haben; man kann dann nachträglich noch immer in gewisser Weise durch Adjunktion „uneigentlicher" Punkte, Geraden und Ebenen zu dem vollständigen System der projektiven Geometrie aufsteigen.

Die Anordnungssätze weiterhin beschreiben, wie in der Ebene und auf der Geraden verschiedene Punkte zu einander liegen können, daß also z. B. von 3 Punkten a, b, c einer geraden Linie stets einer c zwischen den beiden andern a und b liegt und so fort; man nennt sie wohl auch kurz Sätze des Zwischen.



Was endlich Stetigkeitseigenschaften anlangt, so sei hier vorläufig nur die Lückenlosigkeit der Geraden hervorgehoben: Teilt man die Strecke zwischen 2 Punkten a, b irgendwie in 2 Teile 1, 2, so daß (wenn a links von b liegt) alle Punkte von 1 links von allen Punkten von 2 liegen, so gibt es gerade einen Punkt c, der diese Einteilung hervorruft, derart, daß zwischen a und c die Punkte des Teiles 1, zwischen c und b die von 2 liegen. Das entspricht offenbar genau der Einführung der Irrationalzahlen durch den Dedekindschen Schnitt.[1)]

Aus diesen Axiomen kann man tatsächlich die ganze projektive Geometrie des Raumes durch rein logische Deduktion herleiten, insbesondere natürlich auch sehr bald gewisse Koordinaten einführen und die projektive Geometrie analytisch behandeln.

Will man aber weiter zur metrischen Geometrie gelangen, so hat man zuerst zu berücksichtigen, daß man mit der

1) Vgl. Teil I, pg. 82 f.

projektiven Geometrie auch den Begriff der Gruppe der ∞^{15} Kollineationen oder projektiven Umformungen des Raumes hat. Wir wissen, wie man als Untergruppe von ihr die 7-parametrige Hauptgruppe der räumlichen Änderungen charakterisieren kann, deren Invariantentheorie die metrische Geometrie ist: sie besteht aus den Kollineationen, die eine Ebene, die unendlichferne Ebene, und in ihr eine imaginäre quadratische Kurve, den Kugelkreis (bezw. das ihn repräsentierende absolute Polarsystem) ungeändert lassen. Von hier aus bleibt aber noch ein Schritt zu machen, wenn man genau die Sätze der elementaren Geometrie gewinnen will; man muß aus der Hauptgruppe die 6-parametrige Untergruppe der eigentlichen Bewegungen (Verschiebungen und Drehungen) aussondern, die die Entfernung zweier Punkte völlig ungeändert lassen – während die Ähnlichkeitstransformationen sie mit einem Faktor multiplizieren –, und die also die metrische Geometrie der Kongruenzen im engeren Sinne zur Invariantentheorie haben. Man kann die Bewegungen aus der Hauptgruppe beispielsweise durch die Forderung herausheben, daß die „Bahnkurven" einer Bewegung geschlossen sind, sofern sie nur einen Punkt fest läßt.

Der so skizzierte Aufbau der Geometrie ist vielleicht der theoretisch einfachste, da er zunächst für die projektive Geometrie ausschließlich mit linearen Gebilden operiert, und erst hinterher, wenn es für die metrische Geometrie notwendig wird, ein quadratisches Gebilde, den Kugelkreis hinzunimmt. Dafür ist seine Durchführung allerdings recht abstrakt und langwierig, und sie kann nur in einer eigenen Vorlesung über projektive Geometrie Platz finden. Hier muß es genügen, wenn ich Sie nach dieser allgemeinen Auseinandersetzung noch auf diejenige Darstellung in der Literatur verweise, die wohl die lesbarste ist, nämlich auf die von *H. Fleischer* übersetzten „*Vorlesungen über projektive Geometrie*"[1] von *F. Enriques*.

Für allgemeine Unterrichtszwecke geeigneter scheint mir ein anderer Aufbau der Geometrie, dem ich mich jetzt – der Einfachheit halber unter Beschränkung auf die *Geometrie der Ebene* – zuwende.

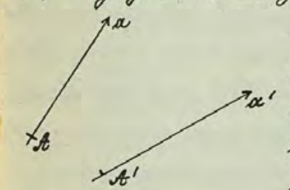
1. Aufbau der ebenen Geometrie unter Voranstellung der Bewegungen.

Als Grundbegriffe nehmen wir *Punkt und Gerade* an und setzen Axiome über ihre *Verknüpfung*, *Anordnung und Stetigkeit* voraus. Dabei enthalten die Verknüpfungssätze wiederum nur, *daß durch irgend 2 Punkte stets eine und nur eine Gerade geht*, *während 2 Gerade entweder einen oder*

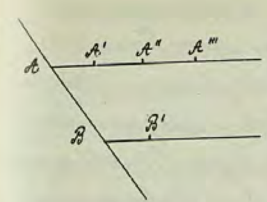
1) Leipzig 1903. – Original: Lezioni di geometria proiettiva. Bologna 1898

keinen Punkt gemein haben können. Über die *Anordnung* der Punkte auf einer Geraden behalten wir die oben bereits angedeuteten Forderungen bei; auf die genaue Formulierung der weiteren Anordnungssätze und der Stetigkeitsaxiome wird im Verlauf der Untersuchung noch zu verweisen sein.

Auf dieser Grundlage wollen wir jetzt unmittelbar – ohne den Umweg über die Projektivitäten – die *Gruppe der ∞^3 Bewegungen der Ebene* einführen, um mit ihrer Hilfe zu unseren eigentlichen Ziel, dem System der ebenen analytischen Geometrie, zu gelangen. Wir müssen dann zunächst in einer Reihe von Axiomen abstrakt formulieren, welche Eigenschaften dieser „Bewegungen" in Hinblick auf das System der Punkte und Geraden wir voraussetzen und benutzen wollen; wir orientieren uns dabei natürlich an der anschaulichen Vorstellung von einer Bewegung, die wir von unseren Erfahrungen mit starren Körpern her haben. Danach muß eine Bewegung in erster Linie eine eineindeutige Transformation der Punkte unseres Raumes sein (also insbesondere jedem Punkt gewiß einen im Endlichen gelegenen Punkt zuordnen) und ferner soll sie Gerade ausnahmslos in Gerade überführen. Es ist bequem, für Transformationen dieser Art allgemein wieder das Wort *Kollineation* gebrauchen; freilich wissen wir zunächst noch nicht, ob es überhaupt solche Kollineationen gibt, da wir ja nicht – wie vorhin – im Besitz der projektiven Geometrie sind. Wir müssen also die Existenz wenigstens dieser ausgezeichneten Kollineationen durch ein neues Axiom ausdrücklich postulieren; demgemäß fordern wir, daß es eine Gruppe von ∞^3 gewissen Kollineationen gibt, die wir Bewegungen nennen, und als deren Invariantentheorie wir die Geometrie der Ebene anzusehen haben. Dabei ist noch präziser zu charakterisieren, was mit dem „dreifach unendlich" gemeint ist: Es seien beliebig irgend 2 Punkte A, A' gegeben und je eine Halbgerade a von A aus, a' von A' aus; dann soll es stets eine und nur eine Bewegung geben, die den Punkt A in A' und gleichzeitig den Strahl a in a' überführt. Figuren, die durch eine Bewegung ineinander übergehen, nennen wir kongruent.



Wir wollen zunächst jedoch von der Existenz dieser ganzen Bewegungsgruppe noch nicht Gebrauch machen, sondern werden nur eine spezielle Klasse von Bewegungen verwenden, über die wir nun noch einige spezielle Postulate aufstellen. Es gibt nämlich genau 1 Bewegung, die einen Punkt A in einen beliebig gegebenen A' und gleichzeitig die Gerade von A nach A' (mit dieser Richtung) in sich selbst überführt; eine solche Bewegung nennen wir Verschiebung (Translation) oder deutlicher Parallelverschiebung. Wir fordern

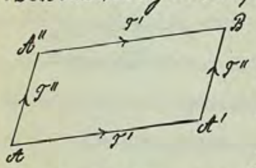


nun, daß jede einzelne solche Verschiebung überhaupt die Verbindungsgerade je zweier entsprechender Punkte B, B' (unter Erhaltung ihrer Richtung) in sich überführt, und ferner – und das ist das wesentliche – daß alle ∞^2 Verschiebungen der Ebene eine Untergruppe der Bewegungsgruppe bilden.

Wiederholen wir nun mehrere Male eine und dieselbe Verschiebung, so geht A stets in Punkte A', A'', A''', ... des nach A' hin weisenden Halbstrahles der Geraden AA' über; wir müssen als weiteres Postulat noch aussprechen, daß diese Punkte schließlich jeden Punkt dieser Halbgeraden erreichen oder einschließen. Durch Wiederholung der reziproken Transformation erhalten wir eine Punktfolge der gleichen Art auf der andern Halbgeraden. Indem wir uns die Vorstellung bilden, daß wir jede Verschiebung kontinuierlich aus der Anfangs- in die Endlage vornehmen, wie wir das hernach noch benutzen werden, nennen wir die in Rede stehende Gerade die Bahnkurve des Punktes A bei der Translation; dann ist jede Gerade Bahnkurve von unendlichvielen Punkten, und es gibt für jede Verschiebung ∞^1 solche Bahngerade, eben die Geraden, die die Verschiebung in sich überführt.

Nun können sich zwei verschiedene Bahngerade ein und derselben Translation nicht schneiden; denn man sieht leicht, daß ihr Schnittpunkt sonst bei einer Translation aus 2 verschiedenen Punkten, nämlich je einem der beiden Bahngeraden, hervorgehen müßte – entgegen dem Charakter der Translation als eineindeutiger Punkttransformation. Wir nennen nun diese sämtlichen Bahngeraden ein und derselben Translation parallele Geraden, und haben damit diesen Begriff aus einer Eigenschaft unserer Bewegungen heraus eingeführt. Gleichzeitig ist klar, daß es durch jeden Punkt A zu einer Geraden a jedenfalls eine Parallele gibt – nämlich seine Bahngerade in einer Verschiebung längs der gegebenen Geraden a.

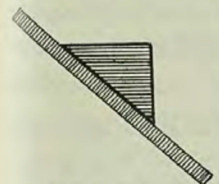
Endlich haben wir noch ein letztes Axiom über diese Verschiebungen aufzustellen, daß nämlich 2 beliebige Verschiebungen T', T'' mit einander vertauschbar seien, d.h. daß derselbe Punkt B herauskommt, wenn man einen bestimmten Punkt A zuerst der Verschiebung T' und dann der T'', oder wenn man ihn zuerst der Verschiebung T'' und dann der T' unterwirft:



$$T' . T'' = T'' . T' . \text{ –}$$

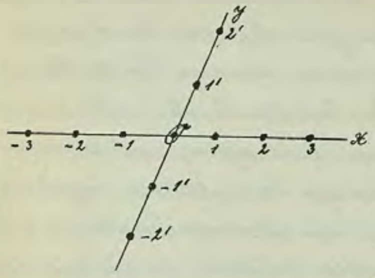
Auf die Frage, wie man überhaupt auf solche Axiome kommt, werde ich später noch ein wenig einzugehen haben; hier möchte ich nur betonen, daß unsere Vordersätze gerade

das ausdrücken, was jedem Menschen von den ersten Anfängen des geometrischen Zeichnens her geläufig ist. Da ist ja das erste, was man tut, daß man einen starren Körper, Lineal oder Zirkel oder dgl. von einem Ort der Zeichenebene zum andern bewegt, um Größen zu übertragen, und insbesondere wendet man die Operation der Translation ungeheuer oft an, indem man etwa ein Dreieck an einem Lineal entlang führt; dabei zeigt die Erfahrung immer wieder, daß alle Punkte des Dreiecks parallele Gerade beschreiben.



Unsere Annahmen, die wir logisch nicht mehr weiter zergliedern, haben also durchaus nichts Künstliches an sich. –

Nun wollen wir zusehen, wie weit wir von diesen ersten auf die Verschiebungen bezüglichen Begriffen aus in die analytische Geometrie eindringen können. Von rechtwinkligen Koordinaten können wir freilich nicht reden, da wir für die Definition eines rechten Winkels bisher noch gar keinen Anhaltspunkt haben, wohl aber können wir allgemeine Parallelkoordinaten einführen. Wir legen durch einen Punkt O irgend 2 Gerade, die wir als x- und y-Achse bezeichnen. Fassen wir die Verschiebung T auf, die O in einen irgendwie gewählten Punkt 1 der



x-Achse verwandelt, so mögen aus ihr durch Iteration die Punkte 2, 3, 4, … der x-Achse entstehen; indem wir ebenso wiederholt die reziproke Operation T^{-1} ausführen, die dadurch definiert ist, daß sie 1 in 0 überführt, geht 0 der Reihe nach in die Punkte $-1, -2, -3, \dots$ der x-Achse über. Wir ordnen den so erhaltenen Punkten die positiven und negativen ganzen Zahlen $0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$ als „Abszissen" x zu; sie werden freilich nicht sämtliche Punkte der x-Achse erschöpfen, aber – nach einem unserer Postulate – doch so liegen, daß jeder weitere Punkt zwischen zweien von ihnen eingeschlossen ist.

In gleicher Weise gehen wir von irgend einer Verschiebung T' längs der y-Achse aus und erhalten, indem wir sie beliebig oft vor- und rückwärts ausführen, in allen aus 0 hervorgehenden Punkten $1', 2', 3', \dots, -1', -2', -3', \dots$ die Punkte der y-Achse mit positiven und negativen ganzzahligen Ordinaten. Dabei ist aber wohl zu beachten, daß wir die so definierten Längen x und y auf beiden Achsen wechselseitig nicht in Beziehung setzen können, da eine die x- in die y-Achse über-

führende Bewegung (Drehung) neben den Translationen zunächst nicht benutzt werden soll.

Wir können jetzt weiter auch zu Punkten der x-Achse mit nicht ganzzahligen Abszissen aufsteigen, indem wir immer die einmal beliebig gewählte Einheit festhalten. Was zunächst die rationalen Punkte angeht, so werden wir – um die Sache an einem Beispiel deutlich zu machen – vorerst eine Verschiebung S längs der x-Achse suchen, die einmal wiederholt gerade die vorhin betrachtete Einheitsverschiebung T ergibt; als Punkt $\frac{1}{2}$ werden wir den Punkt bezeichnen, in den 0 durch S übergeführt wird, während wiederholte Anwendung von S auch die Punkte mit den Abszissen $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ liefern wird. Um die Existenz einer solchen Verschiebung S bezw. dieser Punkte nachzuweisen, zeigen wir zunächst, daß jedenfalls die Gerade von $\frac{1}{2}$ nach dem Punkte 1' der y-Achse parallel der Geraden 2'1 sein müßte (was der bekannten Konstruktion zur Teilung einer Strecke in gleiche Teile entspricht). Fassen wir nämlich die Verschiebung S von 0 nach $\frac{1}{2}$ auf als Aufeinanderfolge der Verschiebungen T' von 0 nach 1' und S' von 1' nach $\frac{1}{2}$, so kann man die einmal iterierte Verschiebung S, die ja ex definitione mit T identisch ist, in Anbetracht der Vertauschbarkeit je

zweier Translationen ersetzen durch die Aufeinanderfolge der iterierten Verschiebung T' und der iterierten S'; da aber erstere 0 in $2'$ überführt, so ist damit gesagt, daß 1 aus $2'$ durch zweimalige Anwendung der Translation S' entsteht. Also ist $2'1$ eine Bahngerade der Verschiebung S' und als solche in der Tat der Bahngeraden $1'\frac{1}{2}$ derselben Verschiebung parallel.

Nun besitzen wir ja nach dem früheren bereits die Punkte $2'$ und 1 und damit die Translation S'. Es wäre also aus den bereits vorhandenen Elementen die eindeutige Konstruierbarkeit des Punktes $\frac{1}{2}$ als des Schnittpunktes der x-Achse und der Bahngeraden von $1'$ in jener Translation S' gesichert – wenn wir nur wüßten, daß diese Bahngerade die x-Achse auch wirklich schneidet. Das kann ja anschaulich natürlich keinem Menschen zweifelhaft sein, im Rahmen unserer Axiomatik aber muß man zu diesem Schluß noch ein besonderes Axiom, das sog. „*ebene Zwischenaxiom*" heranziehen; es sagt aus, daß eine Gerade, die durch *eine* Seite eines Dreiecks in dasselbe hineintritt, durch eine *andere* wieder heraustreten muß – eine triviale Tatsache unserer Raumanschauung, die nur als solche besonders hervorgehoben werden muß, da sie von den andern Axiomen logisch unabhängig ist. – Durch völlig analoge Überlegungen erhält man offenbar überhaupt

zu jedem rationalen Abszissenwert x einen Punkt; man schließt leicht aus unseren Postulaten, daß innerhalb jeder (noch so kleinen) Strecke solche „rationalen Punkte" liegen.

Um nun aber wirklich zu allen Punkten zu gelangen, die man in der Geometrie tatsächlich betrachtet, müssen wir auch irrationale Abszissen berücksichtigen; dazu brauchen wir ein neues, gleichfalls sehr einleuchtendes Postulat, das nur die oben angekündigte *Präzision der Stetigkeitsforderung* ist: *Es soll unendlich viele weitere Punkte der x-Achse bezw. Verschiebungen derselben in sich geben, die zu den rationalen Punkten und zueinander in genau den gleichen Beziehungen der Aufeinanderfolge und Stetigkeit stehen, wie die irrationalen und rationalen Zahlen.* Dieses Axiom ist um so plausibler, als umgekehrt doch die Einführung der irrationalen Zahlen historisch von der Betrachtung der geometrischen Stetigkeit aus erfolgt ist.[1] Danach sind dann schließlich *alle Punkte der x-Achse auf alle positiven und negativen reellen Zahlen x eindeutig bezogen, und genau das Analoge läßt sich natürlich für die Punkte der y-Achse durchführen.*

Ich weise übrigens darauf hin, daß das so geschilderte Verfahren der Herstellung eines Maßstabes auf einer Geraden durchaus das naturgemäße ist, wer sich einen Maß-

[1] Vgl. die Auseinandersetzungen in Teil I, pag. 85 ff.

stab herstellt, verfährt so, daß er einen starren Körper von der schließlich willkürlichen Länge der Einheit (etwa die Entfernung der Zirkelspitzen) an seinem Lineal entlang verschiebt, und die so entstehenden Strecken unterteilt.

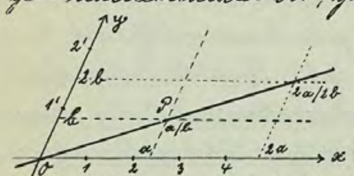
Jede Verschiebung der Ebene längs der x-Achse können wir jetzt durch eine einfache Gleichung charakterisieren, die zu jedem Punkte x der x-Achse die Abszisse der neuen Lage gibt:

$$x' = x + a,$$

d. h. zu x wird das rationale oder irrationale, positive oder negative Stück a addiert. Ebenso ist eine Verschiebung längs der y-Achse durch eine Gleichung

$$y' = y + b$$

beschrieben. Nehmen wir nun diese beiden Verschiebungen nacheinander vor, gleichgültig in welcher Reihen-



folge, so geht O wegen der Vertauschbarkeit der Verschiebungen in einen eindeutig bestimmten Punkt P über; wir sagen dann, daß P die Abszisse a und die Ordinate b hat. Umgekehrt kann man aber auch so jedem Punkte P zwei Zahlen a, b eindeutig zuordnen; man braucht nur die Verschiebung von O nach P vorzunehmen und für die Schnitte der neuen Lagen, in die die Achsen dabei kommen mit ihren ursprüng-

lichen Lagen Abszisse und Ordinate zu bestimmen. Damit ist die Gesamtheit der Punkte der Ebene auf die Gesamtheit der Zahlenpaare $(a \mid b)$ eineindeutig abgebildet, d. h. wir haben tatsächlich eine vollständige Koordinatenbestimmung in der Ebene.

Zu überlegen bleibt nur, wie jetzt die Gleichung der Geraden aussieht. Betrachten wir zunächst die Gerade von O nach $P(a \mid b)$; sie muß offenbar sämtliche Punkte enthalten, die durch Iteration der von O nach P führenden Verschiebung entstehen, also die Punkte

$$x = \lambda a \qquad y = \lambda b$$

mit ganzzahligem λ. Des Weiteren aber erkennt man ganz leicht, daß auch alle durch diese Gleichungen bei rationalen und schließlich bei irrationalen λ bestimmten Punkte auf ihr liegen müssen, daß aber dadurch alle ihre Punkte erschöpft werden; durch Elimination von λ ergibt sich also ihre Gleichung als

$$x : y = a : b \quad \text{oder} \quad bx - ay = 0.$$

Daher stellt auch jede Gleichung der Form

$$\alpha x + \beta y = 0$$

eine Gerade durch O dar. Nun kann man jede beliebige Gerade aus einer geeigneten Geraden durch O durch eine Parallelverschiebung erhalten; so folgt schließlich, daß sämtliche Geraden durch sämtliche Gleichungen 1. Ordn.

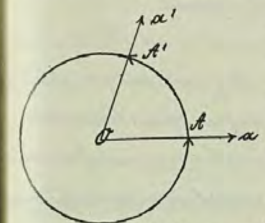
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

dargestellt werden, die man ja eben darum lineare Gleichungen nennt.

Aus dieser Tatsache, daß die Gerade eine lineare Gleichung hat, ergibt sich nun durch die Methoden der analytischen Geometrie ohne Schwierigkeit ein großer Teil der geometrischen Sätze. Ich gehe darauf im Einzelnen nicht ein und führe nur kurz an, daß man so die gesamte affine Geometrie und damit auch die gesamte projektive Geometrie herleiten kann; soweit kommen wir also allein auf Grund der speziellen Postulate über die Untergruppe der ∞^2 Verschiebungen. Nur eine Tatsache, die wir später brauchen werden, will ich noch hervorheben. Wir hatten früher auf Grund der Sätze der projektiven Geometrie den Möbiusschen Satz bewiesen, daß jede Kollineation d. h. eine eindeutige Transformation, die Gerade in Gerade überführt, eine projektive Umformung ist, d. h. eine Umformung, die durch lineare Substitutionen der Koordinaten dargestellt wird. Nun waren ja nach unserer ersten Annahme die Bewegungen Kollineationen, andererseits besitzen wir jetzt bereits die gesamte projektive Geometrie, und daher gilt insbesondere auf unserem Standpunkt auch der Möbiussche Satz: Also wird jede Bewegung notwendig durch eine lineare Transformation der soeben eingeführten Parallelkoordinaten x, y dargestellt. –

Wollen wir jetzt weiter in die metrischen Begriffe der Geometrie eindringen, besonders also den Winkel zweier Geraden und die Entfernung zweier beliebigen Punkte (bisher können wir ja nur von der Entfernung zweier Punkte auf der x-Achse oder der y-Achse reden) kennen lernen, so müssen wir uns mit der vollen Bewegungsgruppe beschäftigen.

Wir wollen besonders die Bewegungen ins Auge fassen, die einen Punkt, etwa den Anfangspunkt O, ungeändert lassen, die sog. Drehungen um diesen Punkt. Nach dem allgemeinen Postulat über die Bestimmung einer Bewegung gibt es dann



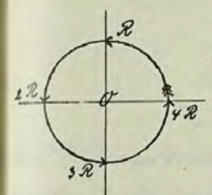
genau eine Drehung, die einen Halbstrahl a durch O in irgend einen andern Halbstrahl a' durch O überführt. Diese Drehungen sind gewissermaßen dual zu den Verschiebungen, da sie einen Punkt ungeändert lassen, so wie diese eine Gerade in sich überführen. Genau wie die Verschiebungen wollen wir uns auch die Drehungen kontinuierlich von der Anfangslage an ausgeführt denken, und wir werden wieder von der Bahnkurve reden, die jeder Punkt dabei beschreibt.

Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied zwischen Drehungen und Verschiebungen, den wir auch hier ausdrücklich als besonderes Postulat formulieren müssen: Die durch Wiederholung einer und derselben Drehung um O aus a entstehenden Halb-

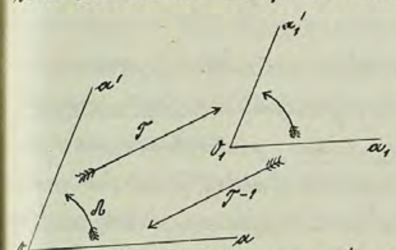
strahlen a', a'', … sollen jeden Halbstrahl durch O schließlich entweder erreichen oder einschließen (während eine Translation nur die Punkte einer Hälfte der festen Geraden lieferte). Insbesondere muß daher die kontinuierliche Drehung den Strahl a schließlich in seine Ausgangslage zurückführen, wobei notwendig auch jeder Punkt von A in seine Ausgangslage zurückkehrt: *Die Bahnkurven sind also geschlossene Linien*, die jede Halbgerade von O in genau 1 Punkte A treffen, derart, daß alle Strecken OA einander kongruent (d. h. durch eine Bewegung ineinander überführbar) sind; sie sind also das, was man gewöhnlich *Kreise mit dem Mittelpunkt O* nennt.

Nun werden wir im Strahlenbüschel um O mit Hilfe dieser Drehungen eine *Skala* festlegen, ganz analog wie wir sie oben auf der Geraden mit Hilfe der Verschiebungen konstruierten, wobei wir nur noch passende *Stetigkeitsannahmen* machen müssen. Ich brauche das hier wohl nicht im einzelnen auszuführen und gebe nur als Resultat an, daß wir schließlich dazu kommen, jeder Drehung eine reelle Zahl, den *Winkel dieser Drehung* zuzuordnen; dabei tritt auch jede reelle Zahl als Drehwinkel auf. Als neues Moment erscheint natürlich die Periodizität der Drehung, und es liegt nahe, gerade die *volle Drehung*, die einen Strahl wieder in sich überführt, als Einheit zu wählen. Man nimmt aber herkömmlicher Weise *zur Einheit die Vierteldrehung*, die viermal wiederholt die volle Drehung gibt

und deren Winkel man *einen Rechten R* nennt; jede Drehung wird dann durch ihren Winkel $\omega \cdot R$ gemessen, wo ω jede beliebige reelle Zahl sein kann, die man aber der Periodizität wegen auf die Werte von 0 bis 4 beschränken darf.



Entsprechend kann man nun in dem Strahlenbüschel um jeden andern Punkt O_1 die Winkelskala definieren; man kann aber auch mit Hilfe der Translation die *Winkelskala von O unmittelbar auf O_1 übertragen*.



Sind nämlich die Halbstrahlen a_1, a_1' durch O_1 gegeben, und ist T die Verschiebung, die O in O_1 überführt, so bezeichnen wir die Halbstrahlen durch O, in die die Strahlen a_1, a_1' vermöge der reziproken Translation T^{-1} übergehen, mit a, a'; ist dann $\mathfrak{D}$ die Drehung um O, die a in a' verwandelt, so ist die Drehung $\mathfrak{D}_1$ von a_1 in a_1' um O_1 gegeben durch die Aufeinanderfolge von T^{-1}, $\mathfrak{D}$, T oder in unmittelbar verständlicher Symbolik:

$$\mathfrak{D}_1 = T^{-1}\,\mathfrak{D}\,T;$$

denn auch die rechte Seite stellt eine Bewegung dar, die O_1, a_1 in O_1, a_1' überführt, und eine solche Bewegung ist eindeutig bestimmt. Wir legen nun $\mathfrak{D}_1$ denselben Winkel $\omega \cdot R$ bei, wie ihm $\mathfrak{A}$ nach der obigen Definition hat. Haben wir nun eine zweite Drehung $\mathfrak{A}'$ im Büschel O, so entspricht ihr im Büschel O_1 die Drehung

$$\mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{T},$$

und die Zusammensetzung von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}'_1$ ist

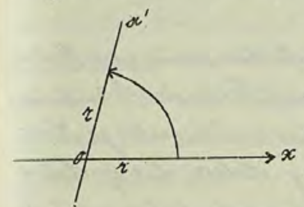
$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{-1}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}')\,\mathfrak{T}$$

und entspricht also der Zusammensetzung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$! Daraus folgt, daß unsere Uebertragung tatsächlich bei O_1 dieselbe Skala liefert, wie sie durch Wiederholung des direkten Verfahrens entstehen würde.

Es gibt bei Euklid einen Satz, der in die meisten unserer elementaren Lehrbücher übergegangen ist, daß nämlich alle rechten Winkel kongruent sind; jeder Knabe wird freilich diesen Satz für selbstverständlich halten, und ich meine, daß man ihn auf der Schule wirklich sparen sollte, da der Schüler doch nicht auffaßt, was mit ihm gemeint ist. Sein tatsächlicher Inhalt aber ist mit dem in den letzten Ausführungen Enthaltenen identisch: daß man gleiche Winkel, die durch Drehungen an verschiedenen Punkten definiert sind, durch Bewegungen zur Deckung bringen kann, d.h. eben daß sie kongruent sind. –

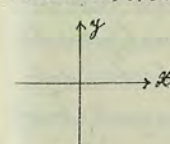
Nachdem wir so den Winkel allgemein definiert haben, werden wir auch die Entfernung zweier beliebiger Punkte definieren, während wir bisher Entfernungen nur auf ein und dersel-

ben Geraden durch Translation vergleichen konnten. Haben wir jetzt aber eine Entfernung r auf der x-Achse etwa von O aus



abgetragen, so können wir sie durch Drehung um O auf jede beliebige Gerade α' durch O übertragen; so können wir überhaupt die ganze Längenskala auf der x-Achse auf α' und dann durch Verschiebung weiter auf jede Parallelgerade zu α' und damit überhaupt auf jede beliebige Gerade übertragen. Wir können also tatsächlich den Abstand zweier beliebiger Punkte messen, indem wir sie durch eine Gerade verbinden und in der angedeuteten Weise den Maßstab der x-Achse auf sie übertragen.

Nun wollen wir mit dem neuen Begriff der Drehung unseren Apparat der analytischen Geometrie vervollständigen. Dabei benutzen wir, was wir ja jetzt tun können, statt der allgemeinen Parallelkoordinaten speziell rechtwinklige Koordinaten x, y.



Wir wissen bereits (S. 364), daß sich jede Bewegung als eine lineare Substitution in x, y darstellt:

$$x' = (a_1 x + b_1 y + c_1) : N$$
$$y' = (a_2 x + b_2 y + c_2) : N .$$

Da sie jeden im Endlichen gelegenen Punkt wieder in einen solchen überführt, muß der Nenner N konstant sein, und er darf daher gleich 1 gesetzt werden; betrachten wir speziell eine Drehung um O, so ist $c_1 = c_2 = 0$, und es bleibt

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y \\ y' = a_2 x + b_2 y \,. \end{cases}$$

Für eine besondere Drehung, nämlich die um einen Rechten, können wir nun unmittelbar die genaue Form der Gleichungen angeben; sie führt nämlich, da wir rechtwinklige Koordinaten haben, die x-Achse in die y-Achse, die y-Achse in die negative x-Achse über, und wird daher einfach dargestellt durch

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \,. \end{cases}$$

Nunmehr ist die Frage nach der Angabe der Drehungsformeln auf eine rein analytische Aufgabe zurückgeführt: Es soll eine solche einfach unendliche Gruppe von Substitutionen der Form (1) angegeben werden, die die Substitution (2) enthält; bedeutet ω einen reellen Parameter, so soll jede Substitution der Gruppe, allgemein zu reden, durch ω-malige Iteration aus (2) entstehen. Für ein rational gebrochenes $\omega = \frac{p}{q}$ soll dieser Ausdruck natürlich bedeuten, daß die Substitution q-mal wiederholt gerade die p-mal iterierte Substitution (1) gibt, während irrationale ω gemäß den Stetigkeitsannahmen durch rationale zu approximieren sind.

Wir müssen uns nun klar darüber sein, daß wir hier an

geometrischer Kenntnis, speziell über die Drehungsformeln eines rechtwinkligen Koordinatensystems, nichts voraussetzen dürfen, wohl aber können und wollen wir Kenntnisse in der Analysis rücksichtslos benutzen; dann wird unser Aufbau zwar in dieser Form für den Schulunterricht unmittelbar gewiß nicht verwendbar, er nimmt aber dafür eine sehr elegante und einfache Gestalt an.

Ich beginne mit der Bemerkung, daß sich die Drehung (2) unter Benutzung komplexer Zahlen auch in die eine Formel zusammenfassen läßt

$$(2') \qquad x' + iy' = i(x + iy) \,.$$

Aus dieser Gestalt entnimmt man sofort, daß die iterierte Substitution durch

$$x' + iy' = i^2(x + iy)$$

dargestellt wird, also eine Gleichung derselben Form, wo nur der Faktor i^2 an Stelle von i eingetreten ist, und ebenso ergibt sich, daß bei ω-maliger Iteration im vorhin festgelegten Sinne gerade der Faktor i^ω auftritt, für jedes reelle ω; wir erhalten also als analytische Darstellung der Drehung der Ebene um O durch den Winkel $\omega \cdot R$:

$$(3.) \qquad x' + iy' = i^\omega (x + iy).$$

Bei der exakten Durchführung dieses Gedankenganges müssen wir freilich aus der Analysis die vollständige Kenntnis der Exponentialfunktion e^z und ebenso der mit ihr durch die

Eulersche Formel

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

zusammenhängenden trigonometrischen Funktionen benutzen (ohne daß wir von ihrer geometrischen Bedeutung vorläufig eine Ahnung haben). Dann kennen wir auch die Zahl π durch die Formel $e^{i\pi} = -1$ und es ist

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}} .$$

Unter i^{ω} ist durchweg der durch die folgende Formel eindeutig definierte Wert zu verstehen:

$$i^{\omega} = e^{\omega\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\omega\pi}{2} + i \sin\frac{\omega\pi}{2} .$$

Führen wir das in (3) ein und trennen reellen und imaginären Bestandteil, so wird:

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = \cos\frac{\omega\pi}{2} \cdot x - \sin\frac{\omega\pi}{2} \cdot y \\ \underline{y' = \sin\frac{\omega\pi}{2}\, x + \cos\frac{\omega\pi}{2}\, y} , \end{cases}$$

und das ist also in mehr elementaren analytischen Symbolen die gesuchte Darstellung der Drehungsgruppe.

Es liegt nun nach diesem Resultat nahe, den <u>rechten Winkel nicht als Einheit, sondern als Winkel $\frac{\pi}{2}$ zu wählen</u>; wir werden das die <u>natürliche Winkelskala</u> nennen, so wie wir vom natürlichen Logarithmus reden, um anzudeuten, daß diese Begriffe in der Natur der Dinge begründet liegen, obwohl ihre Aufdeckung eine tiefere Einsicht erfordert. In dieser natürlichen Skala haben wir statt $\frac{\omega\pi}{2}$ einfach ω zu schreiben, und erhalten statt (4) als Formeln der Drehung

die altbekannten Formeln:

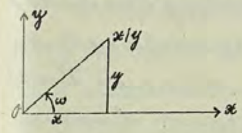
$$(5) \qquad \begin{aligned} x' &= \cos\omega \cdot x - \sin\omega\, y \\ \underline{y'} &\underline{= \sin\omega \cdot x + \cos\omega\, y} . \end{aligned}$$

Wir haben nun zu untersuchen, was in dieser Formel an geometrischen Wahrheiten alles enthalten ist. Es werden das alle die Elementartheoreme sein, die man gewöhnlich vorausschickt, um dann auf ihnen die Formeln (5) aufzubauen:

1) Wir mögen zunächst den Punkt der x-Achse im Abstand r vom Anfangspunkt betrachten: $x = r$, $y = 0$. Drehen wir ihn um den Winkel ω, so liefern die Formeln (5) als Koordinaten seiner neuen Lage.

$$(6) \qquad \begin{cases} x = r \cos\omega \\ y = r \sin\omega ; \end{cases}$$

die Akzente an den Koordinaten des neuen Punktes sind dabei der Kürze halber fortgelassen. Nehmen wir nun, um die Ideen zu fixieren, $\omega < \frac{\pi}{2}$ und betrachten das rechtwinklige Dreieck, das vom Radiusvektor r des Punktes $x|y$, seiner Abszisse x und Ordinate y gebildet wird, so



enthalten die Formeln (6) den Zusammenhang seiner Seiten und des Winkels ω. Wegen der Relation $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$, die aus den hier zu Grunde gelegten analytischen Definitionen dieser Funktionen folgt, ergibt sich aus (6) unmittelbar

$$(6^a) \qquad \underline{x^2 + y^2 = r^2} ,$$

und das ist der pythagoräische Lehrsatz, den wir so also als Folge unserer Annahmen über die Bewegungen der Ebene erhalten. Weiter aber können wir (6) umschreiben in

$$(6^b) \qquad \cos\omega = \frac{x}{r} \qquad \sin\omega = \frac{y}{r} \;,$$

und das ist die elementare trigonometrische Bedeutung unserer Winkelfunktionen, die man sonst geradezu zu ihrer Definition verwendet: Cosinus und Sinus sind das Verhältnis von anliegender und gegenüberliegender Kathete zur Hypotenuse.

2.) Wir können nun leicht die allgemeinen analytischen Ausdrücke der Grundbegriffe Entfernung und Winkel angeben, indem wir die gegebenen Elemente, Punkte oder Gerade, durch Verschiebung und Drehung in die soeben betrachtete spezielle Lage bringen. Einmal ergibt sich so für die Entfernung zweier Punkte $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$

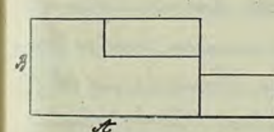
$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \;;$$

denn man braucht nur durch Parallelverschiebung den Punkt 2 in den Koordinatenanfang überzuführen, so werden nach den Verschiebungsformeln (S. 362) $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ die neuen Koordinaten des Punktes 1, und aus (6^a) folgt sofort unser Ausdruck für r. Ganz ähnlich folgt – ich brauche das hier wohl nicht im einzelnen auseinanderzusetzen – aus (6^b) für den Winkel ω irgend zweier Geraden mit den Gleichungen $\alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1 = 0$, $\alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2 = 0$:

$$\begin{cases} \cos\omega = \dfrac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}} \\[2ex] \sin\omega = \dfrac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}} \end{cases} .$$

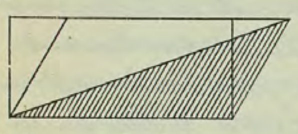
3.) Wir müssen endlich noch vom Begriffe des Flächeninhaltes reden, von dem wir bisher bei dem Aufbau der Geometrie noch nicht den mindesten Gebrauch gemacht haben. Trotzdem ist dieser Begriff, wenn auch in mehr oder weniger unexakter Form, im naiven räumlichen Bewusstsein eines jeden Menschen enthalten; jeder Bauer weiß, was es heißt, daß ein Stück Land so und soviel Quadratmeter Inhalt hat. Wenn wir also die Geometrie vollkommen fundamentiert haben – und das ist tatsächlich im Vorhergehenden geschehen – ohne diesen Grundbegriff zu benutzen, so werden wir ihn doch jetzt nachträglich an das System anschließen, d. h. ihn in Koordinaten ausdrücken müssen.

Wir müssen da mit einer kleinen geometrischen Betrachtung beginnen, wie sie ungefähr ebenso bei Euklid und in den elementaren Darstellungen der Geometrie stets angestellt wird. Haben wir ein Rechteck von den Seiten A, B, so definieren wir als seinen Inhalt das Produkt $A \cdot B$.



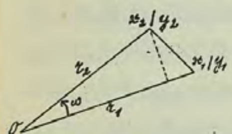
Fügen wir ferner 2 Rechtecke oder überhaupt 2 Figuren bekannten Inhaltes zusammen, so entsteht eine Figur, die die Summe der Inhaltszahlen zum Inhalt haben soll; ziehen wir von einem Rechteck oder sonst einer Figur ein kleineres ganz in ihr gelegenes Stück ab, so soll der Rest die <u>Differenz</u> der Inhaltszahlen zum Inhalt haben.

Von diesen Festsetzungen aus gelangt man sofort zur Angabe des <u>Inhaltes eines Parallelogrammes</u>. Es entsteht aus



einem Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe, indem man ein Dreieck fortnimmt und ein kongruentes hinzufügt; daher soll sein Inhalt gleich dem Rechtecksinhalt sein, also gleich dem <u>Produkt von Grundlinie und Höhe</u>. Durch eine Diagonale zerfällt das Parallelogramm in 2 kongruente Dreiecke, deren jedes also den halben Parallelogramminhalt zum Inhalt hat: <u>Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe</u>.

Wenden wir das auf ein Dreieck mit den Seiten r_1, r_2



und dem eingeschlossenen Winkel ω an, so ist die Höhe auf r_1 gleich $r_2 \sin \omega$ und daher der Inhalt

$$\Delta = \frac{r_1 r_2 \sin \omega}{2}.$$

Legen wir die eine Ecke dieses Dreiecks in den Koordinatenanfang und bezeichnen die Koordinaten der andern beiden Ecken mit $x_1 | y_1$ und $x_2 | y_2$, so läßt sich diese Formel mit Hilfe der obigen Ausdrücke für Entfernung und Winkel leicht umrechnen in

$$\Delta = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Drehungen des Koordinatensystems diesen Ausdruck Δ ungeändert lassen, so daß tatsächlich ein „geometrischer Begriff" damit gegeben ist. Um aber auch Invarianz bei Verschiebungen und damit bei allen Bewegungen zu haben, muß man auch die dritte Ecke mit transformieren, d. h. die Formel für den Inhalt eines aus drei beliebigen Punkten $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$, $x_3 | y_3$ gebildeten Dreiecks aufstellen; man erhält dann

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

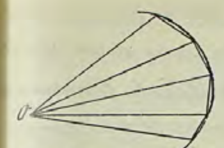
und das ist ja die Formel, mit der wir diese Vorlesung begonnen hatten (s. S. 8). Man kann nun leicht bestätigen, daß sich die so definierten Dreiecksinhalte bei Aneinanderfügung oder Teilung von Dreiecken addieren oder subtrahieren; das kommt, wie wir ja früher schon sahen, auf einfache Determinantenrelationen heraus.

Damit ist der Anschluß der Inhaltsidee an unser System der analytischen Geometrie vollzogen und wir haben gleichzeitig etwas gewonnen, was in der naiven Auffassung zunächst noch nicht enthalten ist: der Inhalt ist eine mit <u>Vorzeichen</u> behaftete Größe geworden. Was für ein Vorteil hinsichtlich des freien Operierens mit den Formeln und ihrer aus nahmslosen Gültigkeit damit gegenüber der naiven Auffassung der Inhalts als absoluter Größe erzielt ist, das habe ich ja gerade am Anfange dieser Vorlesung ausführlich auseinandergesetzt (Vgl. S. 16 ff.).

4) Ein weiteres Beispiel für einen in der naiven Raumvorstellung mehr oder weniger praezis enthaltenen Begriff, den wir jetzt erst nachträglich an unser System der Geometrie anschließen müssen, ist der <u>Begriff der (willkürlichen) Kurve</u>. Was eine Kurve ist, glaubt jeder Mensch zu wissen, bis er soviel Mathematik gelernt hat, daß ihn die unzähligen möglichen Abnormitäten verwirrt gemacht haben; eine gute Orientierung gibt auch auf diesem Gebiete das einschlägige <u>Encyklopädiereferat von v. Mangoldt</u>: <u>Die Begriffe „Linie" und „Fläche"</u> (III A B 2). Wir wollen uns hier indessen um Einzelheiten nicht kümmern und einfach sagen, eine Kurve ist die Gesamtheit der Punkte, deren Koordinaten Funktionen φ, χ eines Parameters t sind, die so oft differenzierbar sein sollen, wie man es nur irgend braucht:

$$x = \varphi(t) \qquad y = \chi(t).$$

Dann kann man im Rahmen unserer analytischen Geometrie sofort alle die Begriffe und Sätze entwickeln, die man gewöhnlich unter dem Namen <u>Infinitesimalgeometrie</u> zusammenfasst, die Begriffe von <u>Bogenlänge</u>, krummlinigem <u>Flächeninhalt</u>, <u>Krümmung</u>, <u>Evolute</u> etc. Die



Grundidee ist immer, daß man die Kurve als Grenze eines eingeschriebenen geradlinigen Polygons auffaßt; sind die Koordinaten zweier aufeinanderfolgender Punkte x, y und $x + dx$, $y + dy$, so folgt aus der pythagoräischen Formel sofort für die <u>Bogenlänge</u>

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und ebenso folgt aus der Formel für den Inhalt eines Dreiecks mit der Spitze in O sofort für den <u>Flächeninhalt des Sektors</u> zwischen Kurve und 2 Radienvektoren nach O die bereits früher (S. 23) benutzte Formel:

$$\frac{1}{2} \int (x\,dy - y\,dx).$$

Ich verlasse damit unseren ersten Aufbau der Geometrie, dessen Charakteristikum war, daß wir die Existenz und Gliederung der dreiparametrigen Bewegungsgruppe an die Spitze stellten und dann sogleich Koordinaten einführten, um weiterhin unsere Schlüsse ganz im Gebiete der Arithmetik abmachen zu können. Nun ist eine zweite Art die Geometrie zu begründen gewissermaßen entgegengesetzt; sie führt gleichfalls direkt zur metrischen Geometrie und hat von jeher eine große Rolle gespielt; auf sie will ich daher auch noch eingehen.

<u>2. Andere Begründung der metrischen Geometrie; die Rolle des Parallelenaxioms.</u>

Der Gegensatz zum ersten Systeme besteht darin, daß jetzt der Begriff der Bewegung gerade konsequent vermieden oder doch erst nachträglich herangebracht wird. Wenn man diese Anordnung im Altertum, wie auch heute noch vielfach bevorzugt, so waren dabei wohl zum Teil philosophische Ueberlegungen maßgebend, auf die ich hier wenigstens kurz hinweisen will. Man fürchtete mit den Bewegungen in die Geometrie ein ihr fremdes Element, die Zeit, hineinzubringen; und konnte man versuchen, das Voranstellen der Bewegungen mit der grossen Anschaulichkeit der Idee des starren Körpers zu rechtfertigen, so kann dagegen der Einwand, daß diese Idee an sich gar keinen praezis faßbaren Sinn habe, sondern gerade umgekehrt erst begründet werden könne, wenn man schon vorher den Begriff der Entfernung besitzt. Dem wird der Empirist freilich immer entgegenhalten können, daß tatsächlich die abstrakte Idee der Entfernung erst aus dem Vorhandensein „hinreichend" starrer Körper entnommen sei. –

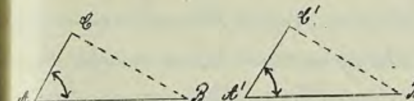
Doch nun lassen Sie mich in Kürze die Hauptgedanken dieses zweiten Aufbaues der Geometrie andeuten. Man beginnt da, genau wie früher,

1./ mit der Einführung von Punkten und Geraden und den Sätzen über ihre Verknüpfung, Anordnung, Stetigkeit.

2./ Daneben aber werden – und das ist neu – einerseits die Entfernung zweier Punkte (Strecke), andererseits der Winkel

zweier Geraden als neue Grundbegriffe herangezogen, und Axiome über sie aufgestellt, die im wesentlichen aussagen, daß sich Strecke und Winkel in bekannter Weise durch Zahlen messen lassen.

3./ Als charakteristisches die Axiome über die Bewegungsgruppe eigentlich ersetzendes Axiom tritt der erste Kongruenzsatz auf: Haben zwei Dreiecke 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel gemein, so sind sie kongruent, d. h. sie stimmen in allen Stücken überein. In unserem früheren Systeme

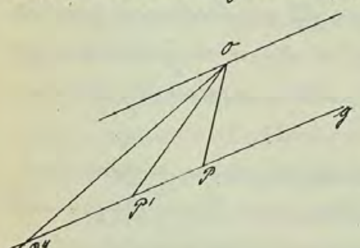


ist das ein beweisbarer Satz; man kann eine Bewegung angeben, die die Seite A' B' mit A B zur Deckung bringt, dann fällt wegen der Voraussetzung notwendig auch A' C' mit A C zusammen, und die Dreiecke kommen überhaupt zur Deckung. Wenn wir aber Bewegungen nicht unter die Grundbegriffe aufnehmen und daher nicht benützen dürfen, so gibt es keine Möglichkeit, diesen Satz zu beweisen, und wir müssen ihn notwendig als neues Axiom postulieren.

4./ Im weiteren Verfolg wird man nun genau umgekehrt vorgehen, als bei unserem ersten Aufbau, wie Ihnen das ja wohl bekannt ist, der elementare geometrische Unterricht geht ja – im wesentlichen im Anschluß an Euklid, von dem ich später noch näher zu reden haben werde – ganz diesen

Weg. Man wird zunächst den pythagoräischen Satz beweisen, und wird dann die trigonometrischen Funktionen cos, sin aus ihrer Bedeutung in der Dreieckslehre einführen; von da aus kommt man dann schließlich zu demselben analytischen Apparat, wie vorhin.

5) Dabei wird aber noch die Aufstellung eines weiteren besonders wichtigen Axiomes nötig, das die Theorie der Parallelen betrifft. Bei unserer ersten Begründung war der Parallelismus einer der ersten Grundbegriffe, der sofort bei Betrachtung der Verschiebungen auftrat: Parallel hießen gerade Linien, wenn sie Bahnkurven derselben Verschiebung waren. Ganz anders hier; unter den bisher eingeführten Grundbegriffen war der Parallelismus noch nicht, und wir müssen daher jetzt noch besonders von ihm reden. Haben wir nämlich eine Gerade g und einen Punkt O außerhalb, so verbinden wir O mit einem Punkte P von g und lassen P durch die Lagen P', P'',... immer weiter auf g hinausrücken (d. h. wir fassen die Punktfolge P, P', P'',... bzw. die Folge der Geraden OP, OP', OP'',... auf – von Bewegung im früheren Sinne ist hier nicht die Rede).



Der Strahl OP wird bei dieser Drehung um O eine Grenzlage erreichen, wenn sich P ins Unendliche entfernt, und diese

Grenzgerade bezeichnen wir als eine Parallele durch O zu g. Dabei erscheint es von vornherein keineswegs nötig, daß sich OP derselben Grenzlage nähert, wenn P nach den beiden verschiedenen Seiten ins Unendliche geht, und es ist so die abstrakte Möglichkeit der Existenz zweier von einander verschiedener Parallelgeraden durch O zu g gegeben.

Darum ist es bei unserem jetzigen Aufbau ein neues Axiom, wenn wir gemäß unserer gewohnten Anschauung postulieren, es sollen stets jene beiden Grenzlagen zusammenfallen, d. h. es soll nur eine Parallele durch einen Punkt O zu einer Geraden g geben. Das ist das berühmte Parallelenaxiom, über das seit Jahrhunderten so viel gestritten worden ist; man nennt es auch wohl das Euklidische Axiom, da es bei Euklid ausdrücklich als Postulat formuliert wird.

Ich habe Ihnen zunächst einiges zur Geschichte dieses Axioms zu berichten. Lange Zeit hindurch hat man immer wieder die größten Anstrengungen gemacht, das Axiom zu beweisen, d. h. es auf die anderen geometrischen Axiome zurückzuführen – stets freilich vergeblich. Natürlich haben diese Bemühungen auch heute noch nicht aufgehört; denn die Wissenschaft kann fortschreiten, soweit sie will, es wird immer wieder Leute geben, die es besser zu verstehen meinen und die Resultate der exakten Forschung ignorieren. Tatsächlich ist die Mathematik nämlich von jenen vergeblichen Versuchen längst schon zu fruchtbaren neuen

Untersuchungen und positiven Resultaten vorgeschritten; schon im 18. Jahrhundert tritt die charakteristische neue weiterführende Fragestellung auf: Ist es nicht möglich ein logisch konsequentes widerspruchsfreies System einer Geometrie aufzubauen, die von jenem Parallelenaxiom absieht, und die Existenz zweier verschiedener Grenzgeraden im oben besprochenen Sinne, d. h. zweier verschiedener Parallelen durch O zu g zulässt?

Am Anfang des 19. Jahrhunderts konnte man diese Frage bejahen, und es war Gauss, der als erster die Existenz einer „Nichteuklidischen Geometrie" – so nennen wir mit ihm ein geometrisches System jener Art – entdeckte; aus seinem Nachlass geht hervor, dass er sie gewiss 1816 bereits genau gekannt hat; die betr. Manuskripte sind freilich erst spät aufgefunden und 1900 im Bd. VIII der gesammelten Werke gedruckt worden.[1] Gauss selbst hat ausser wenigen gelegentlichen Äusserungen nichts über diese seine grosse Entdeckung veröffentlicht. Die ersten Publikationen einer Nichteuklidischen Geometrie rühren von dem Russen N. J. Lobatschefsky (1829) und dem Ungarn J. Bolyai de Bolya dem Jüngeren (1832) her,[2] die beide unabhängig voneinander die-

1) Leipzig 1900. Der betr. Teil ist von P. Stäckel herausgegeben.

2) Deutsch übers. i. d. „Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie" von Engel und Stäckel. Bisher erschienen Teil 1 (Lobatschefsky) von Engel (Leipzig 1898.) Vgl. auch die „Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie" von Stäckel und Engel (Leipzig 1895).

se Resultate gefunden hatten und sie übrigens nachweisbar schon 1826 bezw. 1823 besassen. Im Laufe des Jahrhunderts sind dann durch vielfache Arbeiten diese Dinge Allgemeinbesitz der Mathematiker geworden, und heut hat wohl sogar jeder allgemein Gebildete schon einmal etwas von der Existenz einer Nichteuklidischen Geometrie gehört, wenn auch ein klares Verständnis für sie doch nur der Fachmann erreichen kann.

Eine wesentlich neue Wendung hat dann am Anfange der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts Riemann diesen Problemen gegeben; sie ist dargelegt in seinem Habilitationsvortrage „über die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen" vom Jahre 1854.[1] Riemann bemerkt, dass allen vorangehenden Untersuchungen die Annahme einer unendlichen Länge der Geraden zu Grunde liegt, die ja gewiss äusserst naturgemäss und naheliegend ist: Wie aber, wenn man auf diese Annahme verzichten will, wenn man im Gegenteil etwa zulässt, dass die Geraden so in sich zurücklaufen, wie die grössten Kreise auf einer Kugel? Es handelt sich hier um den Unterschied zwischen Unendlichkeit und Unbegrenztheit des Raumes, der ja im Beispiel am besten zu verstehen ist: Unbegrenzt ist sowohl die gewöhnliche Ebene als die Kugeloberfläche, aber nur die erstere ist unendlich, während die andere eine endliche Ausdehnung hat. Riemann nimmt nun in der Tat den Raum

1) Publiziert in Bd. XIII der Abh. d. Ges. d. W. zu Göttingen = Ges. mathem. Werke. 2. Aufl. (Leipzig 1892) pg. 272 ff.

nur unbegrenzt und nicht unendlich an; dann wird die Gerade eine geschlossene Kurve, auf der die Punkte wie auf einem Kreise angeordnet sind. Läßt man jetzt, wie vorhin, einen Punkt P auf einer Geraden g in bestimmter Richtung immer weiter laufen, so wird er schließlich wieder zum Ausgangsort zurückkehren und der Strahl O P wird überhaupt keine Grenzlage haben: Es gibt überhaupt keine parallele Gerade durch O zu g. So tritt bei Riemann eine zweite Art nichteuklidischer Geometrie („N. G. II") der nichteuklidischen Geometrie von Gauß, Bolyai und Lobatschefskij („N. G. I") entgegen.

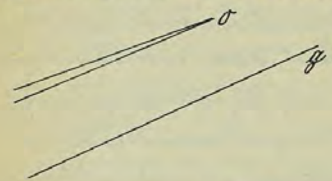
Das scheint zunächst etwas paradox, aber der Mathematiker bemerkt hier sofort eine Beziehung zur gewöhnlichen Theorie der quadratischen Gleichungen, die den Weg zum Verständnisse der Sache weist. Eine quadratische Gleichung hat nämlich entweder 2 verschiedene reelle Wurzeln oder gar keine (sondern 2 imaginäre) oder endlich – als Uebergangsfall – eine doppelt zählende reelle Wurzel; das ist ganz analog den 2 verschiedenen reellen Parallelen der N. G. I, dem Fehlen reeller Parallelen in der N. G. II, und endlich dem Uebergangsfall einer auf zwei Weisen als Grenzlage zu definierenden Parallelen in der Euklidischen Geometrie.

Bevor ich nun genauer auf die mathematische Behandlung der nichteuklidischen Geometrie eingehe, will ich wenigstens kurz auch ihre große Bedeutung nach philosophischer Seite hin streifen, vermöge deren sie bei den Philosophen stets großes

Interesse, vielfach aber auch scharfe Ablehnung gefunden hat.

Vor allem gibt jene Disziplin darüber Auskunft, welchen Charakter die geometrischen Axiome vom Standpunkte der reinen Logik aus betrachtet haben. Man kann nämlich unmittelbar aus der Existenz der nichteuklidischen Geometrie schließen, daß das Euklidische Axiom keine Folge der vorausgestellten Grundbegriffe und Sätze ist, und daß auch sonst erst recht kein logischer Zwang zu seiner Annahme besteht; denn substituiert man an seiner Statt eine ihm widersprechende Annahme, während man alle andern Axiome beibehält, so wird man auf keinen Widerspruch geführt, sondern es ergibt sich die nichteuklidische Geometrie als ein logisch ebenso korrektes Lehrgebäude, wie es die Euklidische ist. Einzelheiten unserer Raumvorstellung wie das Parallelenaxiom beschreibt, sind also jedenfalls keine rein logischen Notwendigkeiten.

Es fragt sich nun, ob man denn nicht anschauungsgemäß über die Richtigkeit des Parallelenaxioms entscheiden kann, und auch hier gibt die nichteuklidische Geometrie wichtige Aufschlüsse. Es ist nämlich gewiß nicht wahr, daß uns die unmittelbare sinnliche Anschauung die Existenz genau einer Parallelen lehrt. Denn unsere Raumwahrnehmung besitzt durchaus keine absolute Genauigkeit, sondern hier wie in jedem andern Gebiete sinnlicher Wahrnehmung können wir Größen (Strecken, Winkel etc.), deren Unterschied unter einer gewissen Grenze, der sog. Schwelle, liegt, nicht mehr als verschieden auffassen. Legen wir also insbesondere durch den Punkt O äußerst nahe aneinander 2 Gerade, so kann man sie gewiß nicht mehr von einander unterscheiden, wenn man nur ihren Winkel klein genug, 1" oder, wenn man will, $\frac{1}{1000}$" oder noch kleiner nimmt. Es wird also schwer sein, aus der unmittelbaren



Anschauung zu entnehmen, ob es denn wirklich genau eine Parallele durch O zu g gibt, oder zwei nur um einen solchen kleinen Winkel von einander abstehende. Man wird das noch deutlicher empfinden, wenn man sich O von g ungeheuer weit entfernt denkt, sagen wir eine oder gar Millionen Siriusweiten; bei solchen Distanzen verliert die Anschauung ganz die Schärfe, die man ihr sonst zutraut, und man wird gewiß nicht mehr deutlich vor Augen sehen können, ob es dann entsprechend der Definition der Parallelen als Grenzlage eines sich drehenden Strahles eine oder zwei Parallelen zur gegebenen Geraden g gibt.

Dieser Sachlage fügt sich nun die nichteuklidische Geometrie 1. Art tatsächlich ebenso gut ein wie die Euklidische; wie dies aus den sogleich mitzuteilenden mathematischen Formeln noch deutlicher hervorgehen wird, enthält sie noch eine willkürliche Konstante, und indem man über diese passend verfügt, kann man

den Winkel zwischen beiden Parallelen zu g durch einen von g mäßig abstehenden Punkt O beliebig klein machen, und erst in dem Maße, wie sich O von g entfernt, wird der Winkel merkliche Größe annehmen. Insofern es also wahr ist, daß sich unsere Raumanschauung nur auf ein begrenztes Raumstück mit begrenzter Genauigkeit bezieht, kann man ihr durch eine N. G. I beliebig genau entsprechen.

Ganz ähnlich ist es aber auch mit der N. G. II. Wir müssen uns da darüber klar werden, daß auch die unendliche Länge der Geraden nicht aus der unmittelbaren Anschauung zu entnehmen ist. Wir können jede Gerade immer nur in einem endlichen Raumstück verfolgen, und daher kann es der Wahrnehmung nicht widersprechen, wenn wir sagen, die Gerade hat eine zwar ungeheuer große aber doch eine endliche Länge, vielleicht Millionen oder mehr Siriusweiten; die Phantasie kann sich hier ja beliebig große Zahlen ausdenken, die über jede Anschauung hinausgehen. Gemäß diesen Ueberlegungen kann man auch durch die N. G. II, die wieder einen willkürlichen Parameter enthält, die Verhältnisse in jedem begrenzten Raumstück beliebig genau darstellen.

Die hier berührten logischen und anschaulichen Tatsachen, wie sie sich vom Standpunkte der Mathematik aus darbieten, laufen freilich in hohem Maße jener orthodoxen Raumauffassung zuwider, die viele Philosophen an den Namen Kants anknüpfen und nach der alle Sätze der Geometrie absolute Gültigkeit haben sollen. So erklärt sich, daß die Nichteuklidische Geometrie bei ihrem Bekanntwerden in philosophischen Kreisen so viel Aufregung und Widerstand hervorgerufen hat. –

Wollen wir uns nun endlich zur eigentlich mathematischen Behandlung der nichteuklidischen Geometrieen uns wenden, so werden wir am besten den Weg durch die projektive Geometrie nehmen; es ist das die Ableitung, die ich 1871 in Band IV der mathem. Ann.[1] gegeben habe.

Wir denken uns die projektive Geometrie unabhängig von jeder Metrik aus den Grundbegriffen Punkt, Gerade, Ebene und ihren Axiomen der Verknüpfung, Anordnung und Stetigkeit so aufgebaut, wie ich das am Anfang dieser Auseinandersetzungen über die Grundlagen der Geometrie (S. 348 f) kurz angedeutet habe; insbesondere seien auch Punktkoordinaten x, y, z oder homogen $\xi : \eta : \zeta : \tau$ und ebenso Ebenenkoordinaten $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ eingeführt, so daß das Zueinanderliegen von Punkt und Ebene durch die bilineare Gleichung $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \delta\tau = 0$ gegeben ist.

Auf dieser Grundlage haben wir früher die gewöhnliche Euklidische Geometrie mit Hilfe der Invariantentheorie und des Cayleyschen Prinzipes erhalten, indem wir die spezielle in Ebenenkoordinaten geschriebene quadratische Form

$$\Phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

---

1) „Über die sog. Nicht-Euklidische Geometrie", pag. 573 ff.

adjungierten, die gleich Null gesetzt, den imaginären Kugelkreis vorstellt. Der Winkel zweier Ebenen

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}\,\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}$$

und die Entfernung zweier Punkte

$$r = \frac{\sqrt{(\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2 + (\eta_1\tau_2 - \eta_2\tau_1)^2 + (\zeta_1\tau_2 - \zeta_2\tau_1)^2}}{\tau_1\,\tau_2}$$

waren dann, wie wir gezeigt hatten (S. 341 ff), einfache simultane Invarianten der gegebenen Figur (eben der 2 Ebenen oder der 2 Punkte) und der Form Φ_0.

Ganz ähnlich wollen wir nun zur nichteuklidischen Geometrie gelangen; wir nehmen nur statt des Kugelkreises $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ eine andere quadratische Form, die dieser „benachbart" ist, nämlich:

$$\Phi = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon \cdot \delta^2 .$$

Hier sei ε ein Parameter, den man beliebig klein wählen kann, und für $\varepsilon = 0$ wird $\Phi = \Phi_0$; unser Ansatz wird so sein, daß bei positivem ε die N. G. I, bei negativem ε die N. G. II entsteht, während für $\varepsilon = 0$ die obigen Formeln der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie sich ergeben. Wesentlich bei der Aufstellung dieser Form Φ ist, daß ihre Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} = -\varepsilon$$

im allgemeinen von Null verschieden ist; nur im speziellen Falle $\varepsilon = 0$, also wenn $\Phi = 0$ den Kugelkreis darstellt, verschwindet sie. Unser Ansatz kommt demnach darauf hinaus, daß wir die quadratische Form verschwindender Determinante durch eine solche von nicht verschwindender positiver oder negativer (aber dem absoluten Werte nach beliebig kleiner) Determinante ersetzen.

Die Maßgrößen unserer nichteuklidischen Geometrieen werden wir nun erhalten, indem wir ganz analoge Invarianten aus der allgemeinen Form ϕ und der Figur zweier Ebenen bezw. zweier Punkte bilden, wie sie die vorhin angegebenen Euklidischen Größen für die spezielle Form $\phi_0 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ darstellen. Das ist nichts, als die von Cayley [1] 1859 begründete Auffassung, daß man in Bezug auf irgend eine quadratische Fläche (z. B. die Fläche $\Phi = 0$) ebensogut eine Maßbestimmung definieren kann, wie in Bezug auf den Kugelkreis. Bei der kurzen Zeit, auf die dieser Exkurs hier naturgemäß beschränkt sein muß, ist es am zweckmäßigsten, die analytischen Formeln definitionsweise voranzustellen; so läßt sich die Sachlage am raschesten präzis aussprechen und jeder Schatten von etwas Geheimnisvollen wird vermieden. Freilich kann diese Darstellung zum vollen Verständnis des Stoffes nur führen, wenn man ihn hinterher noch genau nach der geometrischen Seite hin durcharbeitet, wie Sie das gerade in meiner bereits genannten Arbeit in Bd. IV der math. Ann. finden.

1) In dem schon (S. 305) zitierten „sixth memoir upon quantics."

Betrachtet man zunächst 2 Ebenen, so liegt es ganz nahe, wie man den Ausdruck ihres „in Bezug auf die Fläche $\phi = 0$ gemessenen Winkels" in Verallgemeinerung der obigen Winkelausdruckes anzusetzen hat; man bildet genau wie dort aus den Werten der Form ϕ und ihrer Polarform

$$\omega = \arccos \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 - \varepsilon\,\delta_1\delta_2}{\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2-\varepsilon\,\delta_1^2}\;\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2-\varepsilon\,\delta_2^2}},$$

und hat so einen offenbar invarianten Ausdruck, der für $\varepsilon = 0$ tatsächlich in den Winkel der Euklidischen Geometrie übergeht.

Nicht so unmittelbar klar ist es, wie man den Ausdruck der Entfernung zweier Punkte auf unsere Maßbestimmung übertragen soll, und zwar liegt die Schwierigkeit der Uebertragung darin, daß wir jetzt eine Form mit nichtverschwindender Determinante statt der für die Euklidische Maßbestimmung maßgebenden Form ϕ_0 mit verschwindender Determinante verwenden: Wir können aber den Weg zur Aufstellung des Entfernungsausdruckes so finden, daß wir genau dualistisch zur soeben gegebenen Definition des Winkels vorgehen; dann erhalten wir sicher wieder eine Invariante. Wir stellen also zunächst die Gleichung der Fläche $\Phi = 0$ in Punktkoordinaten auf, deren linke Seite $f(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ bekanntlich durch Ränderung der Determinante Δ von Φ mit Punktkoordinaten entsteht:

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau \\ \xi & \eta & \zeta & \tau & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \tau^2 .$$

Nun übertragen wir genau den Ausdruck von ω, indem wir den Quotienten aus der Polarform zu f und dem Produkt der Quadratwurzeln aus den Werten von f für die Punkte 1 und 2 bilden und davon den Arcus cosinus nehmen:

$$r = k \arccos \frac{\varepsilon(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) - \tau_1\tau_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2) - \tau_1^2}\ \sqrt{\varepsilon(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2) - \tau_2^2}}\,.$$

Der hinzugefügte Faktor k gestattet nur, eine beliebige Strecke der Einheit gleich zu machen, wie es unserer Gewöhnung entspricht und übrigens bei dem sogleich durchzuführenden Uebergang zur Euklidischen Geometrie sich als notwendig erweisen wird. Dabei muss man k bei negativem ε reell, bei positivem rein imaginär annehmen, damit r reell ist für alle oder doch (bei $\varepsilon < 0$) wenigstens für ein gewisses Teilgebiet aller reellen Punkte, die dann das reelle Substrat der nichteuklidischen Geometrie bilden.

Damit wäre eine allgemeine Definition der Entfernung gegeben; nachzuweisen bliebe nur, dass sie für $\varepsilon = 0$ auf den oben angegebenen Ausdruck der Euklidischen Geometrie zurückführt. Das ist hier nicht so leicht, wie vorhin beim Winkel ω; denn setzt man ohne weiteres $\varepsilon = 0$, so wird der Quotient 1, und $\frac{r}{k}$ ist daher bis auf das notwendig unbestimmt bleibende additive Vielfache von 2π gleich Null.

Wir können nun aber durch einen gewissen Kunstgriff trotz dieses zunächst etwas paradoxen Resultates doch schliess-

lich zu dem Euklidischen Ausdruck gelangen. Dazu ist es bequem die Definitionsgleichung von r mit Hilfe der bekannten Gleichung $\arccos \alpha = \arcsin \sqrt{1-\alpha^2}$ etwas umzuformen; bringen wir sofort auf einen Nenner, so wird

$$r = k \arcsin \sqrt{\frac{\{\varepsilon(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2) - \tau_1^2\}\{\varepsilon(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2) - \tau_2^2\} - \{\varepsilon(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2) - \tau_1\tau_2\}^2}{\{\varepsilon(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2) - \tau_1^2\}\{\varepsilon(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2) - \tau_2^2\}}}\,.$$

Nun kann man den Zähler leicht umsetzen; nach einer bekannten Determinantenrelation ist nämlich der Wert von f (d. i. die einmal geränderte Determinante Δ der Form φ) für den Punkt 1, multipliziert mit dem für den Punkt 2, minus dem Quadrat der mit 1 und 2 gebildeten Polarform gleich dem Produkt der Determinante Δ selbst und der zweimal mit den Koordinaten von 1 und 2 geränderten Determinante Δ, also gleich

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \tau_1 & \tau_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \tau_1 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \tau_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \;;$$

rechnet man das aus, so ergibt sich

$$-\varepsilon \cdot \{(\xi_1\tau_2 - \xi_2\tau_1)^2 + (\eta_1\tau_2 - \eta_2\tau_1)^2 + (\zeta_1\tau_2 - \zeta_2\tau_1)^2$$
$$-\varepsilon(\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)^2 - \varepsilon(\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1)^2 - \varepsilon(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2\}.$$

Wenn Determinantenrechnungen dieser Art unbequem sind, der mag durch direkte Rechnung die Identität dieses Ausdruckes mit der obigen Form des Zählers bestätigen.

Führen wir nun diesen Ausdruck in die Formel für r ein und lassen ε Null werden, so ergibt sich natürlich genau wie aus der ersten Form $\frac{r}{k} = \text{arc sin } 0 = 0$, wegen des Faktors $\sqrt{-\varepsilon}$. Lassen wir ε aber zunächst noch nicht Null, sondern nur beliebig klein werden, so ist der Arcus sinus in erster Annäherung gleich dem Sinus; im Zähler aber sind die drei mit ε multiplizierten Quadrate gegen die übrigen zu vernachlässigen, und ebenso fällt im Nenner in jedem Faktor der mit ε multiplizierte Term fort und es bleibt

$$r = k.\sqrt{-\varepsilon}\,\frac{\sqrt{(\xi_1\tau_2-\xi_2\tau_1)^2+(\eta_1\tau_2-\eta_2\tau_1)^2+(\zeta_1\tau_2-\zeta_2\tau_1)^2}}{\tau_1\cdot\tau_2}\,.$$

Nun kommt der Kunstgriff. Wir erteilen k während des Grenzüberganges $\lim\ \varepsilon = 0$ keinen festen Wert, sondern lassen es gleichzeitig derart unendlich werden, daß

$$\lim\,(k.\sqrt{-\varepsilon}) = 1$$

wird; zu dem Zwecke werden wir k natürlich durch rein imaginäre oder durch reelle Werte laufen lassen, je nachdem ε von positiven oder negativen Werten her gegen Null geht. Nun ist es ganz evident, daß durch diesen Grenzübergang tatsächlich der Entfernungsausdruck der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie (S. 391) herauskommt.

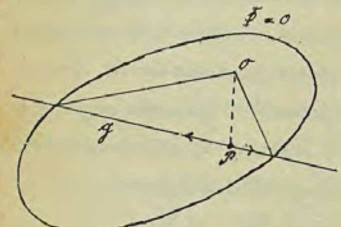
Denkt man sich nun in die geometrische Bedeutung der Form f sowie der hier nur analytisch hingestellten Ausdrücke hinein, so ergibt sich tatsächlich, daß man für $\varepsilon > 0$ gerade die nichteuklidische Geometrie erster Art, für $\varepsilon < 0$ die zweiter Art und

für $\varepsilon = 0$ natürlich die Euklidische Geometrie vor sich hat. Die genaue Begründung kann ich allerdings hier nicht geben; ich verweise dafür etwa auf meine mehrfach genannte Arbeit in Bd. IV. der Math. Ann. Damals habe ich für diese 3 Geometrieen die Namen hyperbolisch, elliptisch, parabolisch vorgeschlagen, da die Existenz von zwei reellen bezw. imaginären bezw. einer doppelt zählenden Parallelen genau dem Verhalten der Asymptoten der 3 Arten von Kegelschnitten entspricht; diese Namen werden Sie vielfach in der Literatur vorfinden.

An einem Beispiel möchte ich aber doch etwas näher ausführen, wie sich die Parallelentheorie auf Grund unseres Entfernungsausdruckes gestaltet; ich wähle dazu die hyperbolische Geometrie im Falle der Ebene. Dann haben wir die dritte Koordinate stets Null zu setzen, und unsere quadratische Form wird $\phi = \alpha^2 + \beta^2 - \varepsilon\,\delta^2$ und stellt gleich 0 gesetzt wegen $\varepsilon > 0$ einen reellen Kegelschnitt dar, den wir als Ellipse vorstellen und zeichnen mögen. Die Entfernungsformel wird

$$r = k \text{ arc cos } \frac{\varepsilon(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2)-\tau_1\tau_2}{\sqrt{\varepsilon(\xi_1^2+\eta_1^2)-\tau_1^2}\,\sqrt{\varepsilon(\xi_2^2+\eta_2^2)-\tau_2^2}}$$

mit rein imaginärem k. Sie gibt, wie man sich leicht überzeugt, reelle Werte für solche Punkte, die im Innern des reellen Kegelschnittes liegen; dabei ist unter dem Inneren der Inbegriff derjenigen Punkte der Ebene verstanden, durch welche keine reellen Tangenten an den Kegelschnitt laufen. Daher besteht *das Operationsgebiet der reellen hyperbolischen Geometrie lediglich aus den Punkten dieses Innern, und den Geraden, soweit sie durch das Innere gehen*; die Punkte des Kegelschnittes selbst stellen das *Unendlichweite* dar, denn jene Formel ergibt für die Entfernung jedes Punktes 1 von einem Kegelschnittpunkte 2 (für den $\varepsilon(\xi_2^2+\eta_2^2)-\tau_2^2=0$ ist) den Wert ∞. Auf jeder Geraden der reellen hyperbolischen Geometrie gibt es also in diesem Sinne *2 unendlichferne Punkte*, ihre beiden Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt $\Phi = 0$, auf jedem Halbstrahle aber nur *einen*. Haben wir eine Gerade g und einen ausserhalb gelegenen Punkt O, so sind die Parallelen durch O im Sinne unserer



früheren Definition (S. 382) als Grenzlagen der Verbindung von O mit einem auf g ins Unendliche sich entfernenden Punkte P die Verbindungsgeraden von O mit den Schnittpunkten von g mit dem Kegelschnitt: *Es gibt also in der Tat 2 von einander wesentlich verschiedene Parallelen*, deren jede einer Richtung auf g zugehört. –

Noch eine kurze Bemerkung lassen Sie mich machen, die sich auf den *Vergleich mit unserem ersten Aufbau der Euklidischen Geometrie* bezieht. Da gingen wir von der *Be-*

wegungsgruppe aus, das war die Gesamtheit der Kollineationen, die die Maßverhältnisse ungeändert lassen. Solche Kollineationen gibt es aber bei einer Nichteuklidischen Geometrie auch. Eine allgemeine homogene Gleichung zweiter Ordnung hat 10 Glieder, also 9 wesentliche Konstante; in der allgemeinsten Raumkollineation sind 15 Parameter willkürlich, also gibt es noch *6-fach unendlich viele Kollineationen, die eine vorgegebene quadratische Form, z. B. unser Φ, in sich überführen*, und das ist ja die Bedingung dafür, daß die von uns eingeführten Maßverhältnisse nicht verändert werden. *Also gibt es auch in jeder nichteuklidischen Geometrie eine 6-fach unendliche Gruppe von „Bewegungen", die ω und r ungeändert lassen*; bleibt man in der *Ebene* statt im Raum, so würde sich die Parameterzahl wie früher auf *3* reduzieren.

Wir können daher auch jede nichteuklidische Geometrie aufbauen, indem wir von der *Existenz einer Bewegungsgruppe* ausgehen, und es bleibt daher noch zu präzisieren, wieso wir durch unseren früheren Aufbau gerade ausschließlich zur *Euklidischen* Geometrie kamen. Das lag natürlich daran, daß wir aus den Bewegungen speziell eine zweiparametrige (im Raum würde es heissen dreiparametrige) *Untergruppe der sog. Parallelverschiebungen* herausgriffen, die lauter Geraden zu Bahnkurven hatten; solche Untergruppen gibt es in keiner nichteuklidischen Geometrie, und indem wir ihre Existenz gleich zu Anfang postulierten, schlossen wir alle nichteuklidischen Geometrieen von vornherein aus und behielten allein die eine Euklidische über. –

Und nun lassen Sie mich diese speziellen Erörterungen über nichteuklidische Geometrie mit einigen – ich möchte sagen – Leitsätzen allgemeiner Natur abschließen:

1.) Hatte ich früher berichtet, daß man auf philosophischer Seite der nichteuklidischen Geometrie vielfach noch nicht volles Verständnis entgegenbringt, so muß ich jetzt betonen, daß sie in der mathematischen Wissenschaft heutzutage ganz allgemein anerkannt ist; ja sie wird sogar für viele Zwecke, z. B. in der modernen Funktionentheorie, als ein äußerst bequemes Hilfsmittel gebraucht, um sich arithmetisch recht komplizierte Verhältnisse greifbarer vor Augen zu stellen.

2.) Jeder Gymnasiallehrer muß notwendig etwas von der nichteuklidischen Geometrie kennen; denn sie gehört nun einmal zu den wenigen Teilen der Mathematik, die zum mindesten in einzelnen Schlagworten in weiteren Kreisen bekannt geworden sind, und nach der daher jeder Lehrer jeden Moment gefragt werden kann. In der Physik

gibt es ja ungleich mehr solche Dinge – fast jede neue große Entdeckung gehört dahin – die in Schlagworten in jedermanns Munde sind und über die dann selbstverständlich jeder Lehrer unterrichtet sein muß. Man denke sich nur einen Lehrer der Physik, der über Röntgenstrahlen oder Radium nichts zu sagen weiß; einen viel besseren Eindruck würde auch der Mathematiker nicht machen, der auf Fragen über nichteuklidische Geometrie keine Auskunft geben kann!

3.) Demgegenüber möchte ich dringend davon abraten, im regulären Schulunterricht (d. h. abgesehen von gelegentlichen Andeutungen auf Veranlassung interessierterer Schüler) nichteuklidische Geometrie zu bringen, wie das Enthusiasten immer wieder empfehlen. Wir wollen zufrieden sein, wenn das vorangehende Postulat nur immer erfüllt ist, und wenn andererseits die Schüler die Euklidische Geometrie wirklich verstehen lernen; schließlich ist es ja auch in Ordnung, daß der Lehrer ein bischen mehr weiß, als der durchschnittliche Schüler. –

Ich will nun noch kurz über die Weiterentwicklung der modernen Wissenschaft berichten, die durch die Nichteuklidische Geometrie veranlaßt worden ist. Man knüpfte da vorzugsweise an das eine ihrer Resultate an, daß das Euklidische Parallelenaxiom von den voraufgehenden

Axiomen der Geometrie logisch unabhängig ist (s. S. 387) und entnahmen daraus die Anregung, auch die andern geometrischen Axiome auf ihre gegenseitige logische Abhängigkeit oder Unabhängigkeit zu untersuchen. So entstand die sog. moderne geometrische Axiomatik, die in ihren Betrachtungen genau den Wegen folgt, die jene alten Untersuchungen gewiesen haben: Man sieht zu, welche Teile der Geometrie sich ohne Anwendung gewisser Axiome aufbauen lassen, und ob man auch unter der Annahme des Gegenteiles eines einzelnen Axiomes zu einem logisch widerspruchsfreien Systeme einer sog. „Pseudogeometrie" gelangen kann.

Als wichtigster hierin gehöriger Werk habe ich Ihnen Hilberts „Grundlagen der Geometrie"[1] zu nennen, deren Hauptziel gegenüber früheren Untersuchungen es ist, in der angedeuteten Weise die Bedeutung der Stetigkeitsaxiome für die Geometrie festzustellen. Um dies zu erreichen, ist es natürlich vor allem nötig, das Axiomensystem der Geometrie so anzuordnen, daß die Stetigkeitssätze ganz ans Ende kommen, während sie für uns bisher immer am Anfang standen. So konnten wir ja auch bei der Ableitung der nichteuklidischen Geometrie nicht etwa den ersten Axiomenaufbau (S. 352 ff) verwenden, der den Parallelenbegriff an die Spitze stellte, sondern wir mußten uns vor allem ein

[1] 3. Aufl. Leipzig und Berlin 1909.

Axiomensystem verschaffen, von dem der größte Teil nichts von Parallelen enthielt und wo das Parallelenaxiom erst hinterher hinzukam. Von der hiermit bezeichneten wesentlichen Abweichung abgesehen, schließt sich das Hilbertsche Axiomensystem wesentlich dem in unserm zweiten Aufbau der Geometrie (S. 379 ff) auch befolgten Gange der elementaren Geometrie an.

Auf dieser Basis untersucht nun Hilbert, wieweit man die Geometrie ohne Benutzung der Stetigkeitsaxiome aufbauen kann, und er umfaßt damit zugleich die „Pseudogeometrieen", in denen zwar alle andern geometrischen Axiome, nicht aber mehr die Stetigkeitssätze gelten; das sind wesentlich die Tatsachen, die sich auf die eineindeutige Zuordnung der Punkte einer Geraden zu den gewöhnlichen reellen Zahlen (ihren Abszissen) beziehen (vgl. S. 350 und 361). Ich kann hier auf den genaueren Gedankengang, sowie auf die weiteren von Hilbert bei diesen Untersuchungen gewonnenen interessanten Resultate über den logischen Zusammenhang gewisser geometrischer Theoreme und Axiome natürlich nicht eingehen; Sie mögen es auf Grund dieser wenigen orientierenden Bemerkungen bei Hilbert selbst nachlesen. Nur daran will ich noch erinnern, daß die im letzten Wintersemester[1] gelegentlich schon

[1] siehe Teil I, S. 478 – 481.

besprochene Hilbertsche Nichtarchimedische Geometrie hierhin gehört; das ist eben eine solche Pseudogeometrie, in der speziell das sog. Archimedische Stetigkeitsaxiom nicht mehr erfüllt ist, d. h. in der sich die Abszissen zweier verschiedener Punkte auch nur um eine „aktual unendlich kleine Größe" unterscheiden können, von der kein endliches Vielfache einer gewöhnlichen endlichen reellen Zahl gleich ist.

Diese kurzen Bemerkungen über die moderne Axiomatik möchte ich nicht abschließen, ohne noch wenige Worte zu der wichtigen Frage nach der eigentlichen wahren Natur der geometrischen Axiome und Sätze zu sagen – womit ich freilich aus der streng mathematischen Fragestellung hinüber in die psychologisch – erkenntnistheoretische komme. Das eine habe ich schon betont und darüber ist man sich heute wohl allgemein einig, daß es sich hier um die obersten Begriffe und Sätze handelt, die man notwendig der Geometrie voranstellen muß, um überhaupt von ihnen aus rein logisch den mathematischen Beweisgang führen zu können. Aber mit dieser Feststellung ist die Frage noch nicht beantwortet, woher diese obersten Begriffe und Sätze denn eigentlich stammen. Da ist die alte Auffassung, daß sie in der Anschauung eines jeden Menschen ohne weiteres gegeben sind, daß sie von so evidenter Einfachheit sind, daß niemand an ihnen zweifeln kann. Diese Ansicht wurde aber durch die

Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie in hohem Maße erschüttert; denn hier wird ja gerade gezeigt (vgl. S. 387 ff), daß die Raumanschauung und die Logik keineswegs zwingend das Euklidische Parallelenaxiom liefern, sondern daß man auch mit einer ihm widersprechenden Annahme zu einem logisch in sich geschlossenen und die tatsächlichen Verhältnisse mit hinreichender Annäherung darstellenden geometrischen Systeme kommt. Wohl aber kann man jenes Parallelenaxiom immer noch als die einfachste Annahme aussprechen, die die räumlichen Verhältnisse darzustellen gestattet, und so wird es auch allgemein gelten, daß Grundbegriffe und Axiome nicht unmittelbar Tatsachen der Anschauung, sondern zweckmäßig gewählte Idealisierungen dieser Tatsachen sind. Schon der scharfe Begriff des Punktes existiert nicht in der unmittelbaren Anschauung, sondern er ist nur eine fingierte Grenze, der wir uns mit unseren Vorstellungen eines kleinen Raumstückes nähern können, ohne sie doch je zu erreichen.

Demgegenüber findet man bei solchen Leuten, die sich nur für die logische und nicht für die anschauliche oder die allgemein – erkenntnistheoretische Seite der Sache interessieren, neuerdings häufig die Meinung, die Axiome seien nur willkürliche Sätze, die wir ganz freiwillig anerkennen, und die Grundbegriffe schließlich ebenso nur willkürliche Zeichen für Dinge, mit denen wir operieren wollen. Das Wahre an einer solchen Ansicht ist natürlich, daß sich innerhalb der reinen Logik kein Grund für diese Sätze und Begriffe findet, und daß sie daher von anderer Seite – eben durch Einwirkung der Anschauung – geliefert oder angeregt werden müssen. Aber die Autoren drücken sich oft sehr viel einseitiger aus, und so sind wir in den letzten Jahren im Anschluß an die moderne Axiomatik geradezu wieder in diejenige Richtung der Philosophie hineingeraten, die man von Alters her Nominalismus nennt. Hier geht das Interesse an den Dingen selbst und ihren Eigenschaften ganz verloren, nur wie man sie nennt und nach welchem logischen Schema man mit den Namen operiert, davon wird noch geredet. Man sagt dann etwa, wir nennen den Inbegriff dreier Koordinaten einen Punkt, „ohne uns etwas dabei zu denken", und wir verabreden „willkürlich" gewisse Sätze, die über diese Punkte gelten sollen; man kann dabei ganz unbeschränkt beliebige Axiome aufstellen, wenn man nur den Gesetzen der Logik genügt und vor allem darauf achtet, daß sich in dem entstehenden Gebäude von Theoremen keine Widersprüche finden. Ich selbst teile diesen Standpunkt keineswegs, sondern halte ihn für den Tod aller Wissenschaft: die Axiome der Geometrie

sind – wie ich meine – nicht willkürliche, sondern vernünftige Sätze, die im allgemeinen durch die Raumanschauung veranlaßt und in ihrem Einzelinhalt und ihrer Reihenfolge durch Zweckmäßigkeitsgründe reguliert werden. –

Diesen philosophischen Exkursen, zu denen wir im letzten Abschnitt mehrfach uns veranlaßt sahen, möchte ich nun Erörterungen zur Geschichte der Geometrie, insbesondere die Entwicklung der Auffassungen von den Grundlagen, entgegenstellen. Da ist gegenüber ähnlichen Betrachtungen, wie wir sie im vorigen Winter für die Gebiete der Algebra, Arithmetik, Analysis häufig angestellt haben, von vornherein ein großer Unterschied zu bemerken. Diese Disziplinen haben in ihrer modernen Form eigentlich nur eine Geschichte von wenigen Jahrhunderten; sie beginnen mit dem Dezimalbruch- und Buchstabenrechnen, um eine runde Zahl zu nennen, ums Jahr 1500. Demgegenüber hat die Geometrie als selbständige Disziplin eine weit in das griechische Altertum zurückreichende Geschichte, und zwar hatte sie damals schon eine so hohe Entwicklungsstufe erreicht, daß man lange Zeit – bis in die Gegenwart hinein – in der griechischen Geometrie das Muster einer vollendeten Wissenschaft zu sehen glaubte. Dabei galt als Inbegriff griechischer Geometrie immer das weitaus bedeutendste uns erhaltene systematische Lehrbuch, die vielberühmten Elementa (στοιχεια) des Euklid; es gibt wohl kaum ein zweites Buch, das in seiner Wissenschaft so lange eine solche Stellung behauptet hat. Noch heute muss sich jeder Mathematiker mit Euklid auseinandersetzen, und wir wollen ihm daher den letzten Abschnitt des gegenwärtigen Kapitels widmen:

3. Euklids Elemente.

Lassen Sie mich Ihnen zuerst die philologisch beste Ausgabe dieses Werkes vorlegen, die von J. L. Heiberg in Kopenhagen bearbeitet ist.[1] Ihr ist die lateinische Uebersetzung des griechischen Urtextes beigegeben, was auch für die sehr nützlich ist, die Griechisch auf der Schule gelernt haben; denn Euklids Griechisch unterscheidet sich, zumal durch die Kunstausdrücke, wesentlich von dem Griechisch, das man auf der Schule treibt. Was Euklidkommentare angeht, so empfehle ich Ihnen besonders Zeuthens „Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter"[2] und Max Simons „Euklid und die 6 planimetrischen Bücher".[3] Man wird am leichtesten in den Stoff eindringen, wenn man zuerst Simon, dann die allgemeinen Ausführungen Zeuthens und schliesslich das Original vornimmt.

Von Euklid persönlich ist wenig bekannt; man weiss

1.) Euclidis opera omnia Bd. I–IV: Elementa. (Leipzig 1883–1885.)
2.) Kopenhagen 1896.
3.) Leipzig 1901. = Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss. XI.

nur, dass er um 300 v. Chr. in Alexandria lebte. Wohl aber wissen wir Bescheid über den allgemeinen wissenschaftlichen Betrieb, der damals in Alexandria herrschte. Nach der Gründung des Weltreiches Alexanders entstand allmählich das Bedürfnis, alles, was die vorangegangenen Jahrhunderte geschaffen hatten, zu sammeln und in ein einheitliches wissenschaftliches System zu bringen, und so entwickelte sich in Alexandria ein Unterricht, der durchaus gewissen Seiten unseres heutigen Universitätsunterrichts entspricht. Vor stand dabei die Sammlung und Ordnung des vorhandenen Materiales der frei weitertreibenden wissenschaftlichen Forschung voran, und so kam wohl in dem ganzen Betriebe ein gewisser Hang zur Schulmeisterei zur Geltung. –

Bevor wir an die nähere Besprechung der Elemente herangehen, lassen Sie mich einige allgemeine Ausführungen über die geschichtliche Stellung und wissenschaftliche Bedeutung des Euklid oder vielmehr der Euklidischen Elemente machen. Wenn man auch für ein vollständiges Bild der Persönlichkeit Euklids gewiss seine zahlreichen kleineren Schriften berücksichtigen müsste, so ist es doch berechtigt, wenn ich hier nur von dem einen grossen Werke rede; denn dies allein hat die merkwürdige beherrschende Stellung sich errungen, die von unsein Standpunkt nur eine Kritik dringend erfordert.

Als Grundlage dieser Kritik diene die Bemerkung, daß die falsche Einschätzung der Euklidischen Elemente ihren tiefen Grund findet in einer *verkehrten Auffassung des griechischen Geistes* überhaupt, wie sie lange Zeit verbreitet war und wohl heute noch vielfach populär ist: man glaubte, die griechische Kultur habe sich auf verhältnismäßig wenige Gebiete beschränkt, diese aber in so vollendeter Weise zu einem einheitlichen Bilde verarbeitet, daß ihr Standpunkt allen Zeiten als höchstes, freilich unerreichbares Vorbild gelten müsse. Tatsächlich hat aber die moderne philologische Wissenschaft die Unhaltbarkeit dieser Ansicht längst dargetan. Vielmehr hat sie gelehrt, daß gerade die Griechen wie kein anderes Volk sich mit der denkbar größten Vielseitigkeit auf *allen* Gebieten menschlicher Kultur betätigt haben; und so gewiß sie überall für jene Zeit Bewunderungswürdiges geleistet haben, so gewiß sind sie doch auch in manchen Dingen, von unserm heutigen Standpunkt aus betrachtet, nicht über die ersten Anfänge hinausgekommen, und auf keinem Gebiete kann man sagen, daß sie für alle Zeiten den Gipfel der menschlichen Leistungen erklommen hätten.

Was speziell die *Mathematik* anlangt, so hat die-

se Überschätzung – oder soll man sagen: Unterschätzung? – des Griechentums in dem Dogma ihren Ausdruck gefunden, daß die Griechen sich ganz wesentlich mit Geometrie beschäftigt und da ein unübertreffliches System aufgestellt hätten; diese Meinung hat sich besonders geradezu zu einem *Kultus der Euklidischen Elemente* verdichtet, in denen man jenes System in vollendeter Weise dargestellt zu sehen glaubte. Dieser alten und veralteten Ansicht habe ich hier die Behauptung entgegenzustellen, *daß die Griechen neben der Geometrie auch die verschiedensten andern Teilgebiete der Mathematik fruchtbar bearbeitet haben, daß wir aber heutzutage überall und gewiß auch in der Geometrie wesentlich über sie hinausgekommen sind.*

Lassen Sie mich diese Behauptung nun näher ausführen und begründen. Euklid wollte in seinen Elementen keineswegs eine Encyklopädie der gesamten geometrischen Wissens seiner Zeit schreiben, denn sonst hätte er in ihnen nicht ganze Teile der Geometrie, die man damals sicher schon kannte, einfach unberücksichtigt lassen dürfen; ich nenne als Beispiel nur die *Theorie der Kegelschnitte und höheren Kurven*, die die Griechen schon frühzeitig ausführlich zu behandeln begonnen hatten,[1] wenn auch

[1] Euklid selbst hat ein – nur nicht erhaltenes – Werk über die Kegelschnitte geschrieben.

ihre volle Entfaltung erst Apollonius (um Jahr 200 v. Chr.) zu verdanken ist. Vielmehr sollten die Elemente lediglich eine erste Einführung in das Studium der Geometrie – und damit der Mathematik überhaupt – geben, und dabei scheint es, daß sie noch auf einen ganz besonderen Zweck zugestutzt waren: sie sollten die Mathematik so traktieren, wie man sie im Sinne der platonischen Schule als Vorbereitung für allgemeine philosophische Studien für notwendig hielt. Aus dieser Bestimmung versteht man, warum der Hauptwert auf die Herausarbeitung der logischen Zusammenhänge und die Aufstellung eines in sich geschlossenen Systemes der Geometrie gelegt ist, während alle praktischen Anwendungen gänzlich beiseite geschoben sind; diesem System zu Liebe hat Euklid aber auch gewiß ein ganzes Teil theoretischen Wissens seiner Zeit übergangen, das noch nicht weit genug entwickelt war, um sich ihm einpassen zu lassen.

Eine richtige Vorstellung von der Beschränktheit des Stoffes der Euklidschen Elemente gegenüber dem ganzen Umfange der griechischen Mathematik erhalten wir am besten, wenn wir zum Vergleich die Gesamtpersönlichkeit und die Gesamtleistung des größten griechischen Mathematikers Archimedes heranziehen, der

kurz nach Euklid um Jahr 250 v. Chr. in Syrakus lebte; ich will nur wenige besonders interessante unterscheidende Punkte hervorheben:

1.) Ganz im Gegensatz zu dem in Euklids Elementen herrschenden Geist besitzt Archimedes einen stark entwickelten Sinn für numerisches Rechnen. Eine seiner größten Leistungen ist ja, um nur ein bestimmtes Beispiel zu nennen, die Berechnung der Zahl π vermöge der Approximation des Kreises durch reguläre Polygone; u.a. leitet er bereits die bekannten Näherungswerte $\frac{22}{7}$ und $\frac{355}{113}$ für π ab. Von einem Interesse für solche Zahlenwerte ist bei Euklid keine Spur; statt dessen findet sich nur die Angabe, daß sich zwei Kreisflächen wie die Quadrate der Radien oder zwei Kreisumfänge wie die Radien selbst verhalten, aber die Berechnung des Proportionalitätsfaktors, eben der Zahl π, wird nicht einmal versucht.

2.) Überhaupt ist für Archimedes das weitgehende Interesse für Anwendungen jeder Art charakteristisch; die verschiedensten Probleme der Physik und Technik behandelt er. Bekannt ist ja, wie er das fundamentale Prinzip der Hydrostatik fand, oder wie er an der Verteidigung von Syrakus durch Konstruktion von wirkungsvollen Hilfsmaschinen tätigen Anteil nahm. Wie wenig dagegen Euklid in den Elementen die Anwendungen berücksichtigt, geht besonders deutlich aus dem kleinen Zuge hervor, daß nicht einmal die einfachsten Zeichenapparate – Lineal und Zirkel – bei ihm genannt werden; er postuliert lediglich in abstracto, daß man eine Gerade durch 2 Punkte oder einen Kreis um einen Punkt zeichnen kann, ohne auch nur ein einziges Wort darüber zu verlieren, <u>wie</u> man das tut. Hier steht Euklid wohl im Banne der Auffassung, die überhaupt in gewissen antiken Philosophenschulen herrschte, daß die praktische Anwendung einer Wissenschaft etwas minderwertiges, handwerksmäßiges sei. Leider hat sich diese Anschauung an manchen Stellen bis heute erhalten, und es gibt immer noch Hochschullehrer, die jede Beschäftigung mit Anwendungen als „Banausentum" nicht genug verachten können. Der Hochmut, der in solchen Ansichten liegt, muß aufs schärfste bekämpft werden; man sollte doch jede tüchtige Leistung, liege sie auf theoretischem oder angewandtem Gebiete, gleich hoch schätzen, und jeden einzelnen sich mit den Dingen befassen lassen, zu denen er am meisten Neigung verspürt. Dabei wird ein jeder um so vielseitiger sich zeigen, je mehr Talente er besitzt: unsere Allergrößten, wie Archimedes, Newton, Gauß, haben stets Theorie und Anwendungen gleichmäßig umfaßt.

3.) Endlich fällt noch ein Unterschied besonders in die

Augen: Archimedes war ein <u>großer Forscher und Bahnbrecher</u>, der in jeder seiner Arbeiten die Erkenntnis um einen Schritt weiter treibt; in Euklids Elementen handelt es sich aber lediglich um <u>Sammlung und Systematisierung</u> von bereits vorhandenem Material. Damit hängt die verschiedene <u>Form der Darstellung</u> zusammen, worauf ich auch im vorigen Semester bei allgemeineren Ausführungen gelegentlich hingewiesen habe.[1] Besonders charakteristisch für Archimedes ist in dieser Hinsicht eine Handschrift,[2] die man im letzten Jahre gefunden hat, und in der er einem wissenschaftlichen Freunde seine neuesten Untersuchungen über die Kubierung räumlicher Gebilde mitteilt. Hier ist die Darstellung genau so, wie wir heute unterrichten; es wird <u>genetisch</u> vorgegangen, erst der Gedankengang angedeutet, und keineswegs die starre Gliederung in Voraussetzung, Behauptung, Beweis, Determination verwendet, die in den Euklidischen Elementen herrscht. Übrigens war auch vor jener neuen Entdeckung schon bekannt, daß die Griechen neben dieser auskrystallisierten „Euklidischen" Darstellung einer systematisierten Disziplin auch eine freiere genetische Form kannten, deren sich sowohl der Forscher bei seiner Arbeit, als auch der Lehrer beim Unter-

1.) siehe Teil I, S. 198.
2.) Vgl. Heiberg und Zeuthen, eine neue Schrift des Archimedes (Leipzig 1907) = Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. 7. pg. 321 ff.

richt bediente, und die vermutlich auch Euklid in andern Werken oder im eigenen Unterricht angewandt hat. Ja es gab sogar in Alexandrien damals auch ein genaues Analogon zu unseren autographierten Vorlesungsheften, die man *Hypomnemata* nannte, also in loserer Art gehaltene Wiedergaben der mündlichen Vorträge.

Das möge zum Vergleich der Elemente mit dem gesamten Umfange der griechischen Mathematik genügen; ich will nun noch, um unseren Gedankengang zu beenden, an ganz wenigen Beispielen zeigen, wie weit die *moderne Mathematik* über die der Griechen hinausgekommen ist. Einer der wichtigsten Unterschiede ist, daß die Griechen noch *keine selbständige Arithmetik* besaßen, weder Dezimalbrüche, die umfangreichere numerische Rechnungen erleichtern, noch das allgemeine Buchstabenrechnen; beides sind, wie ich im vergangenen Wintersemester näher ausgeführt habe, Erfindungen der beginnenden Neuzeit, der Renaissance. Als Ersatz hatten die Griechen nur eine *Arithmetik in geometrischer Form*, in der statt mit Zahlen mit Strecken oder andern geometrischen Größen konstruktiv operiert wird, natürlich ungemein viel schwerfälliger als in unserer Arithmetik. Damit hängt zusammen, daß die Griechen auch das nicht besaßen, was unserer Arithmetik und Algebra eigentlich erst ihre Geläufigkeit gibt: die *negativen und die imaginären Zahlen*. Infolge dessen fehlte ihnen die Allgemein-

heit der Methode, die in einer Formel alle möglichen Fälle zusammenzufassen gestattet, und äußerst langwierige Fallunterscheidungen spielten bei ihnen die größte Rolle. In der Geometrie macht sich dieser Mangel vielfach stark geltend, wo wir heutzutage – wir haben ja gerade in dieser Vorlesung stets diesen Weg eingeschlagen – durch Verwendung analytischer Hilfsmittel volle Allgemeinheit unter Vermeidung aller Fallunterscheidungen mit Leichtigkeit erreichen können. – Diese wenigen Andeutungen mögen hier genügen; Sie werden sich nach Ihrer eigenen Kenntnis ja selbst leicht weitere Rechenschaft über die Fortschritte der modernen Mathematik gegenüber der antiken geben können. –

Nach dieser allgemeinen Kritik der Euklidischen Elemente können wir uns der spezielleren Besprechung zuwenden; lassen Sie mich mit einer kurzen *Inhaltsübersicht* über die 13 „*Bücher*", d. h. Kapitel beginnen, aus denen die Elemente bestehen:

Im *Buch 1–6* ist die *Planimetrie* enthalten. Die *ersten vier Bücher* bringen die *allgemeinen Auseinandersetzungen über die geometrischen Grundgebilde* wie Strecken, Winkel, Inhalte etc. und die *Lehre von den einfachen geometrischen Figuren* (Dreiecke, Parallelogramme, Kreise, reguläre Polygone etc.) in der Form, wie man sie heute noch meist darstellt. In diesem Zusammenhange wird auch (in Buch 2) eine *elementare Arithmetik* und *Algebra der geometrischen Größen* gegeben, derart, daß

– um nur ein Beispiel anzuführen – das Produkt $a \cdot b$ zweier Strecken a, b als Rechteck dargestellt wird; soll man 2 solche Produkte $a \cdot b$, $c \cdot d$ addieren, was wir arithmetisch unmittelbar ausführen können, so muß man, um die Summe wieder als Rechteck zu haben, die beiden Rechtecke $a \cdot b$, $c \cdot d$ in Rechtecke mit gleicher Grundlinie verwandeln.

Das Buch 5 geht nun sehr viel tiefer, indem es das geometrische Aequivalent der allgemeinen positiven reellen Zahl einführt, das ist das Verhältnis $\frac{a}{b}$ irgend zweier Strecken a, b, das Euklid Logos (λόγος) nennt. Als wir im vergangenen Semester allgemein von der Irrationalzahl handelten, hatte ich ja schon hierauf hingewiesen.[4] Das wesentliche Moment an diesen Entwicklungen ist die Definition der Gleichheit zweier Verhältnisse $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; diese Definition muß ganz allgemein sein, also insbesondere auch für den Fall gelten, daß $\frac{a}{b}$ in unserem Sinne eine irrationale Zahl ist, d. h. daß – wie Euklid sagt – die Strecken a, b „asymmetros", d. h. ohne gemeinsames Maß, oder – wie man später übersetzte – „inkommensurabel" sind. Euklid geht nun folgendermaßen vor: Er nimmt irgend zwei ganze Zahlen m, n an und vergleicht die beiden Punkte $m \cdot a$ und $n \cdot b$ einerseits, $m \cdot c$ und $n \cdot d$ andererseits der Größe nach; es wird jeweils eine der drei Beziehungen

4 Siehe Teil I, S. 79 f.

$$m \cdot a \gtreqless n \cdot b \quad \text{bzw.} \quad m \cdot c \gtreqless n \cdot d$$

bestehen. Gilt alsdann für jede Wahl von m und n stets beidemal dasselbe Zeichen, so heißt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Dies entspricht tatsächlich ganz dem berühmten Schnittverfahren, durch welches Dedekind die irrationale Zahl einführt.

Hieran schließt Euklid nun die Untersuchung an, wie man mit solchen Gleichungen zwischen Verhältnissen rechnet, und entwickelt so seine vielgenannte Proportionenlehre, d. i. eine geometrische Theorie aller möglichen algebraischen Umformungen der Gleichungen vom Typus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Übrigens heißt bei Euklid die Proportion „Analogia", und zwar soll dies Wort besagen, der „Logos" zweier Größenpaare ist derselbe; Sie sehen wie merkwürdig weit es heute seine Bedeutung geändert hat. Und doch gibt es Stellen in der Mathematik, wo sich noch heute seine ursprüngliche Bedeutung erhalten hat; man spricht in der Trigonometrie von den Neperschen Analogieen, eben weil das gewisse Proportionen sind – freilich kennen heute wohl nur die wenigsten die eigentliche Bedeutung dieses Namens.

Die Proportionenlehre ist ein charakteristisches Beispiel dafür, mit welcher Zähigkeit sich die Euklidische Tradition im geometrischen Unterricht erhält. Noch heute wird diese Lehre nämlich in vielen, ja vielleicht in den meisten Schulen als besonderes Kapitel der Geometrie behandelt, obwohl sie sachlich ja in unserer modernen Arithmetik vollkommen enthalten ist, und demgemäß im arithmetischen Unterricht sogar schon zweimal, erst im Rechnen bei der Regeldetri und dann in den Anfängen des Buchstabenrechnens durchgenommen wird. Warum dann dieselbe Sache noch zum dritten Male in besonders geheimnisvoller, geometrischer Aufmachung erscheinen soll, ist wahrhaftig nicht einzusehen und muß gewiß auch dem Schüler vollkommen unverständlich bleiben. Der einzige Grund ist eben, daß man immer noch an dem alten Euklidischen Lehrgang hängt, obwohl doch der vernünftige Zweck, den Euklid mit der Proportionenlehre verband – einen Ersatz für die ihm fehlende Arithmetik zu schaffen – für uns durchaus gegenstandslos geworden ist.

Diese Kritik der heutigen Behandlung der Proportionenlehre soll sich natürlich nicht auf die wissenschaftliche Bedeutung des fünften Buches Euklids beziehen; die ist vielmehr besonders groß, weil hier zum ersten Male – modern zu reden – die Berechtigung des Rechnens mit irrationalen Zahlen auf Grund scharfer Definitionen durchaus einwandsfrei dargetan wird. Hier sieht man recht, daß die Elemente keineswegs ein Schulbuch waren und sind, wie das so oft mißverständlich angenommen wurde; vielmehr setzen sie durchaus einen reiferen, rein wissenschaftlichen Betrachtungen zugänglichen Leser voraus.

Ich muß hier noch die Tradition erwähnen, daß dieses fünfte Buch nicht von Euklid selbst geschrieben sei, sondern von Eudoxus von Knidos (um 350 v. Chr.) herrühre. Überhaupt hält man die Elemente nicht für ein einheitlich aus einem Guß geschriebenes Werk, sondern sie sollen aus verschiedenen vorhandenen älteren Bestandteilen zusammengeschweißt worden sein.

So gewiß das auch richtig ist, so sind alle bestimmten Angaben über die Verfasser etc. mit der größten Unsicherheit behaftet, da aus den Lebzeiten Euklids oder gar in eigenen Zitaten von ihm durchaus kein Material vorliegt. Im vorliegenden Falle geht die Tradition auf den Euklid-Kommentator Proclus Diadochus zurück, der um 450 n. Chr., also mehr als 700 Jahre nach Euklid lebte; mag die Behauptung von Proclus aus manchen Gründen auch eine gewisse innere Wahrscheinlichkeit besitzen, so wird man sie doch als absolut sicheres Zeugnis; ebensowenig gelten lassen, als wenn heute jemand eine Theorie über die Autorschaft eines ums Jahr 1200 verfassten Werkes aufstellte! –

Gehen wir nun in der Inhaltsangabe der Elemente weiter, so enthält Buch 6 die Lehre von den ähnlichen Figuren, wobei jene Proportionenlehre das Haupthilfsmittel ist.

In den Büchern 7, 8, 9 findet sich die Lehre von den ganzen Zahlen in geometrischer Form; zum Teil werden dabei für kommensurable Größen die Betrachtungen wiederholt, die in Buch 5 allgemein angestellt wurden – was gewiß die Annahme heterogenen Ursprungs der verschiedenen Bücher bestätigt. Ich möchte aus dem Inhalte dieser Bücher hier nur 2 Sachen hervorheben, die noch heute in der Zahlentheorie stets benutzt werden: Das eine ist der sog. Euklidische Algorithmus zur Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier ganzen Zahlen a, b die bei Euklid durch Strecken dargestellt werden. In moderner Sprache besteht er darin, daß man a durch b dividiert, dann b durch den Rest und so nach dem Schema

$$
\begin{aligned}
a &= m \cdot b + r_1 \,, \\
b &= m_1 \cdot r_1 + r_2 \,, \\
r_1 &= m_2 \cdot r_2 + r_3 \,, \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

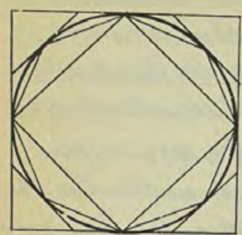
fortfährt, bis notwendig nach endlich vielen Schritten die Division aufgeht; der letzte Rest ist dann der gesuchte Teiler. Zweitens aber findet sich bei Euklid bereits der bekannte einfache Nachweis der Existenz unendlich vieler Primzahlen, den ich schon in der vorigen Vorlesung [1] vorgetragen habe.

Im Buch 10 weiterhin, das in seiner geometrischen Ausdrucksweise wohl besonders schwerfällig und schwer verständlich ist, ist eine geometrische Klassifikation der durch Quadratwurzeln darstellbaren Irrationalitäten enthalten, wie sie später zu ihrer geometrischen Konstruktion gebraucht wird.

[1] Siehe Teil I, S. 99

Jetzt erst folgen in Buch 11 die Anfänge der Stereometrie. Sie sehen, Euklid ist kein „Fusionist"; er stellt vielmehr die Stereometrie soweit entfernt von der Planimetrie, wie nur irgend möglich, während wir im Sinne der mehrfach erwähnten „Fusionsbestrebungen" es heute für richtig halten, die Raumvorstellung als Ganzes so früh wie möglich zu entwickeln, und daher von vornherein den Schüler an dreidimensionale Figuren gewöhnen, statt ihm erst künstlich die Beschränkung auf die Ebene anzuerziehen.

Im Buch 12 treten nochmals allgemeine Betrachtungen über irrationale Größen auf, die zur Bestimmung des Volumens der Pyramide und anderer Körper notwendig werden. Es handelt sich hier um eine verhüllte Anwendung des Grenzbegriffes im sog. Exhaustionsbeweise, durch den Proportionen zwischen irrationalen Größen streng bewiesen werden. Zunächst wird dieses Verfahren übrigens zu dem Beweis des planimetrischen Satzes benutzt, daß 2 Kreise sich wie die Quadrate ihrer Radien verhalten, und an diesem Beispiele will ich auch mit einem Worte den Grundgedanken der Methode auseinandersetzen: Jeder Kreis kann durch ein- und umgeschriebene n-Ecke von immer wachsender Seitenzahl immer besser angenähert, gewissermaßen „ausgeschöpft" werden, derart, daß sich



ihr Inhalt von dem Kreisinhalt beliebig wenig unterscheidet; würde nun jene Proportion nicht stattfinden, so könnte man leicht einen Widerspruch gegen die Tatsache herleiten, daß jeder eingeschriebene Polygon kleiner, jedes umgeschriebene aber größer ist als der Kreis.[1]

Das 13. Buch endlich bringt die Theorie der regulären Körper und gipfelt unter Benutzung des im zehnten angesammelten Materials in dem Nachweise, daß man alle diese Körper, d. h. die Längen ihrer Seiten, mit Lineal und Zirkel konstruieren kann. Dieser Abschluß entspricht dem besonderen Interesse, welches die griechischen Philosophen von jeher den regulären Körpern entgegenbrachten. –

Nach diesem allgemeinen Inhaltsüberblick wollen wir uns nun, wie es ja unser Vorsatz war, etwas näher mit den Kapiteln des Euklid beschäftigen, die von den Grundlagen der Geometrie handeln. Das ideale Ziel, das Euklid vorschwebt, ist ganz offenbar die lückenlose, rein logische Ableitung aller geometrischen Sätze aus vorher vollständig aufzustellenden Prämissen; in der Aufrichtung (oder Übermittelung) dieses Ideals ruht ohne Zweifel der Kern der historischen Bedeu-

1) Über die Beziehungen des Exhaustionsbeweises zur modernen Auffassung des Grenzbegriffes vgl. Teil I, S. 609 (Zusatz).

tung der Elemente. Keineswegs aber hat Euklid dieses sein hohes Ziel wirklich erreicht, denn gerade auch in den grundlegenden geometrischen Betrachtungen ist die moderne Wissenschaft zu wesentlich tieferer Erkenntnis gelangt und hat wesentliche Unklarheiten bei ihm aufgedeckt. Trotzdem – so stark ist die Tradition! – hält man auch heut vielfach Euklids Darstellung für das unübertroffene Muster einer Grundlegung der Geometrie; lassen Sie mich als ein Beispiel für viele nur einen Satz aus dem Anfang von Tropfkes Geschichte der Elementarmathematik[1] zitieren: „Stolzer als ein Denkmal von Stein, schärfer und reiner in der Linienführung als irgend ein Kunstwerk, hat es (das System Euklids) sich der Jetztzeit erhalten.“ Hier ist die historische Bedeutung des Werkes mit ihrer absoluten, bleibenden durchaus verwechselt, und es ist nur natürlich, wenn ich solcher grenzenlosen Überschätzung der Euklidischen Elemente gegenüber in der nachfolgenden Kritik besonders die negative Seite, die Punkte, wo Euklids Darstellung unseren Ansprüchen nicht mehr genügen kann, hervorhebe.

Eine besondere Schwierigkeit bei jeder solchen Kritik Euklids freilich entsteht durch die Unsicherheit des Textes. Manches ist durch den schon genannten Proclus beglaubigt und das ist noch die älteste Quelle; die ältesten Kodices, die wir besitzen, stammen aus dem 9ten Jahrhundert n. Chr., d. h. sie

1) Bd. 2. (Leipzig 1903), pag. 3.

sind gar 1200 Jahre jünger als Euklid! Dazu weichen diese verschiedenen Kodices außerordentlich von einander ab, besonders häufig gerade auch in den grundlegenden Stücken, auf die es besonders ankommt. Daneben läuft nun noch die Tradition lateinischer und arabischer Übersetzer und Kommentatoren, bei denen sich – entstanden aus dem Bestreben, den Text zu klären – immer wieder bedeutende Abweichungen finden. Die Herstellung eines möglichst verläßlichen Textes der Elemente ist so ein äußerst kompliziertes philologisches Problem, auf das in der Tat auch ungeheuer viel Scharfsinn verwandt worden ist. Man muß sich nur klar darüber werden, daß das, was durch solche philologische Arbeit gewonnen werden kann, im besten Falle der wahrscheinlichste Text ist, der aber wohl nicht der wahre Originaltext sein dürfte; denn es ist keineswegs notwendig, daß das, was wir aus vielen verschiedenen Aussagen als wahrscheinlichsten Hergang entnehmen, mit der Wirklichkeit in allen Punkten übereinstimmt. Auf der Höhe der heutigen philologischen Wissenschaft steht nach allgemeiner Ansicht Heibergs Text, und wir Nichtphilologen können nichts Besseres tun, als ihn unseren Ausführungen zu Grunde zu legen, wobei wir aber dem Gesagten zufolge nie vergessen dürfen, daß er mit dem Original durchaus nicht identisch zu sein braucht. Finden sich also in unserem Text Mängel und Widersprüche,

so wird man immer wohl im Zweifel sein müssen, ob man sie Euklid zur Last legen muß, oder ob sie sich erst durch die Überlieferung eingeschlichen haben.

Um nun zur Sache zu kommen, wollen wir zunächst zusehen, wie sich in Buch 1 der Elemente die Grundlegung der Geometrie gestaltet. Euklid stellt da an die Spitze 3 Gruppen von Sätzen, die er ὅροι (definitiones), αἰτήματα (postulata), κοιναὶ ἔννοιαι (communes animi conceptiones) nennt, was wir deutsch etwa als Erklärungen, Forderungen und Grundsätze wiedergeben können; für die letzte Gruppe gebraucht man jedoch nach Proclus gewöhnlich das Wort Axiome, das indessen heutzutage bekanntlich eine allgemeinere, die Postulate mit umfassende Bedeutung angenommen hat.

Um den Inhalt zunächst der Erklärungen zu verstehen, wollen wir uns erst erinnern, wie wir früher bei der Grundlegung der Geometrie begannen. Wir sagten, gewisse Dinge, wie Punkte, Gerade, Ebenen können wir nicht definieren, sondern müssen sie als jedem Menschen geläufige Grundbegriffe annehmen, und nur die Eigenschaften, die wir von ihnen benutzen wollen, scharf aussprechen; alsdann konnten wir die Geometrie bis hin zum Koordinatensystem x, y, z der analytischen Geometrie aufbauen, und erst hinterher bildeten wir uns den allgemeinen Kurvenbegriff, indem wir x, y, z gleich stetigen Funktionen eines Parameters z setzten. Ich habe gelegentlich angedeutet, daß hier noch die wunderbarsten Ausartungen, wie Kurven, die eine Fläche vollständig überdecken u. dgl., mit inbegriffen sind.

Euklid hat nicht diese vorsichtige oder resignierte Auffassung. Er beginnt mit der „Erklärung" aller möglichen geometrischen Begriffe, wie Punkt, Linie, Gerade, Fläche, Ebene, Winkel, Kreis etc. Die erste Erklärung lautet: Ein Punkt ist, dessen Teil nichts ist. Wir werden das aber kaum als eigentliche Definition anerkennen können, da ein Punkt doch keineswegs durch diese Eigenschaft allein bestimmt ist. Weiter heißt es dann: die Linie ist Länge ohne Breite. Hier ist gar die Richtigkeit der Aussage zweifelhaft, wenn man den soeben angedeuteten allgemeinen Kurvenbegriff anerkennt, von dem Euklid freilich noch nichts wußte. An dritter Stelle wird dann die Gerade als eine Linie erklärt, die gleichmäßig durch ihre Punkte gelegt ist. Der Sinn dieser Aussage ist vollends dunkel und man kann sich allerlei darunter denken. Es könnte heißen, daß die Gerade überall gleiche Richtung hat, dann müßte die Richtung als jedem Menschen geläufiger Grundbegriff anerkannt sein. Man könnte aber auch daran denken, daß eine Gerade, wenn man sie als starren Stab realisiert denkt, bei gewissen Bewegungen des Raumes immer mit sich selbst in Deckung bleibt, nämlich bei den Drehungen um sie als Achse

und den Verschiebungen an ihr entlang. Bei dieser Auffassung der Erklärung Euklids wäre freilich wieder der Begriff der Bewegung vorausgesetzt, und ob Euklid das tut, das ist eine sehr strittige Frage, auf die wir noch genauer zurückzukommen haben werden. Jedenfalls ist es nicht gelungen, für Euklids Definition der Geraden und ebenso auch für viele seiner weiteren Erklärungen, auf die ich hier im einzelnen nicht mehr eingehe, eine eindeutige Interpretation zu finden.

Wir kommen nun zu den Postulaten, deren sich in der Heibergschen Ausgabe 5 angegeben finden; Sie verlangen, daß es möglich sein soll:

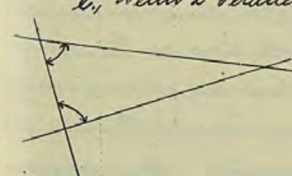
a., Von einem Punkte nach einem anderen eine Gerade zu ziehen.

b., Eine begrenzte Gerade unbegrenzt zu verlängern.

c., Einen Kreis mit gegebenem Mittelpunkt zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht.

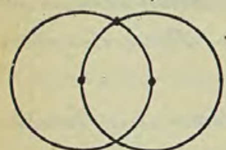
Das vierte stelle ich vorläufig zurück und nenne sogleich das fünfte, das sog. Parallelenpostulat:

e., Wenn 2 Gerade mit einer dritten auf derselben Seite



innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als ein flacher Winkel ist, so schneiden sie sich bei hinreichender Verlängerung auf dieser Seite.

Diese Postulate drücken die Ausführbarkeit gewisser Konstruktionen oder die Existenz gewisser geometrischer Gebilde aus, wie sie Euklid in seinen späteren Betrachtungen tatsächlich benutzt. Aber es gibt noch eine ganze Reihe ähnlicher Existenzpostulate in der Geometrie, die aus den genannten rein logisch nicht folgen, und von denen Euklid doch ebenso Gebrauch macht. Ich will nur als ein Beispiel den Satz hervorheben, daß zwei Kreise sich schneiden, wenn jeder durch den Mittelpunkt des anderen geht, und könnte noch eine Reihe ähnlicher Sätze nennen. Wir werden danach also das Euklidische System der Postulate jedenfalls als lückenhaft bezeichnen müssen.



Doch nun das vierte Postulat:

d.) Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Es ist viel darüber gestritten worden, wie dies Postulat zu verstehen ist und wie es überhaupt an seine Stelle kommt; dabei spielt die große Frage hinein, ob Euklid den Bewegungsbegriff benutzt oder nicht. Stellt man den Begriff der Bewegung der Figuren als starren Körper konsequent an die Spitze, wie wir das bei unserm ersten Aufbau der Geometrie taten, so ergibt sich (vgl. S. 368) dieses Postulat als notwendige logische Folge, und es wäre daher – wenn anders Euklid diese Auffassung hat – hier durchaus unnötig. Nun ist aber

in allen diesen grundlegenden Sätzen Euklids von Bewegungen sonst nicht explizit die Rede, so daß manche Erklärer annehmen, dies vierte Postulat solle geradezu zur Einführung der Bewegungsidee dienen – allerdings, wie man dann wohl zugeben muß, in etwas unvollkommener Form.

Demgegenüber meinen wohl die meisten Euklidkommentatoren, daß eine der wesentlichen Tendenzen Euklids gerade sei, gemäß gewissen philosophischen Erwägungen (vgl. S. 380) den Bewegungsbegriff prinzipiell aus der Geometrie fern zu halten; alsdann müßte aber der abstrakte Begriff der Kongruenz an der Spitze stehen – wie bei unserm zweiten Aufbau – und wiederum hätte dies vierte Postulat als Grundlage für die Lehre von der Kongruenz zu gelten. Dabei entsteht freilich die Frage, warum nicht auch über die Kongruenz von Strecken analoge Angaben gemacht werden. Was für wesentliche Schwierigkeiten aber sowohl der einen als der andern Auffassung in den weiteren Entwickelungen Euklids erwachsen, das werden wir sogleich noch sehen.

Hier nur noch die Bemerkung, daß keine der beiden Deutungen recht erklärt, warum dieser Satz gerade unter den Postulaten mit ihrer oben charakterisierten allgemeinen Tendenz steht; das hat Zeuthen zu einem interessanten Erklärungsversuch veranlaßt, der freilich nicht ganz überzeugend ist: das Postulat soll aussagen, daß die Verlängerung einer Strecke über einen Punkt hinaus, die nach Postulat b.) überhaupt möglich ist, *eindeutig* bestimmt ist. Näheres mögen Sie in Zeuthens Geschichte [1] nachlesen. Endlich bleibt natürlich immer der Ausweg, daß man hier eine *Verderbtheit des Textes* annimmt, und das ist auch von manchen Seiten geschehen und ja in der Tat auch nicht zu widerlegen.

Ich wende mich nun endlich zu den *Grundsätzen*, deren es bei Heiberg wiederum fünf gibt:

a.) Was demselben dritten gleich ist, ist untereinander gleich; wenn $a = b$, $b = c$, so ist $a = c$.

b.) Gleiches um Gleiches vermehrt gibt Gleiches; wenn $a = b$, $c = d$, so ist $a + c = b + d$.

c.) Wenn $a = b$, $c = d$, so ist $a - c = b - d$.

d.) Das Ganze ist größer als der Teil:

$$a > a - b.$$

e.) Einander Deckendes ist gleich.

Die ersten vier Sätze sind logischer Natur, und sie sollen an dieser Stelle offenbar aussagen, daß diese allgemeinen Relationen speziell auch für alle in Betracht kommenden geometrischen Größen (Strecken, Winkel, Flächeninhalte etc.) gelten. Der fünfte Satz bestimmt dann, daß in letz-

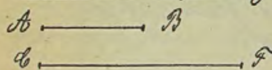
1) loc. cit. pag. 123 f.

ter Linie die „*Kongruenz*" oder das „*zur Deckung bringen*" das für die Gleichheit und Ungleichheit entscheidende Moment ist – wobei freilich wieder die Unklarheit bleibt, ob die Bewegungsidee vorausgesetzt ist, oder nicht.

Was nun den *Unterschied zwischen Grundsätzen und Postulaten* anlangt, so hat *Simon* die Formulierung gegeben, daß jene die einfachsten *Tatsachen der Logik*, diese die der *Raumanschauung* betreffen. Das wäre sehr zutreffend und einleuchtend, wenn es nur gewiß wäre, daß die hier gegebene Anordnung nach Heibergs Konjekturen genau dem Original entspräche. Aber tatsächlich finden sich in den Kodizes ganz wesentliche Abweichungen in der Anordnung und dem Inhalt der Postulate und Axiome, die sich keineswegs jenem Schema fügen; besonders wird z. B. der *Parallelensatz* häufig als 11. Axiom aufgeführt. –

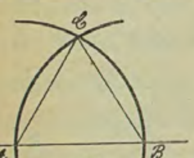
Vielmehr wollen wir nur genauer den *Anfang des Euklidischen Lehrgebäudes der Geometrie*, das auf diesen Erklärungen, Postulaten und Axiomen aufgeführt wird, ansehen, nämlich die ersten 4 Paragraphen, die auf die Axiome folgen. Dabei werden wir zugleich über Euklids Auffassung der Grundlagen, insbesondere auch seine Stellung zum Bewegungsbegriff interessante Wahrnehmungen machen können.

Die ersten drei Paragraphen zielen auf die Lösung der Aufgabe, eine gegebene Strecke A B auf einer anderen Strecke C F von C aus abzutragen. Das wird jeder Mensch praktisch



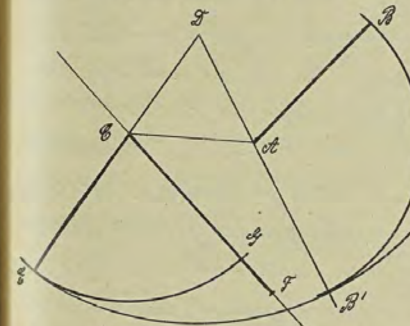
natürlich durch direkte Übertragung mittelst eines Zirkels oder eines Papierstreifens – d. h. durch Verschiebung eines starren Körpers in der Ebene – ausführen. Anders Euklid in seinen theoretischen Betrachtungen: Er hat ja in seinen Postulaten eine Konstruktion, die diesem frei beweglichen Zirkel entspricht, nicht vorausgesetzt, sondern sein Postulat c.) gestattet nur, um einen Punkt einen Kreis zu schlagen, wenn ein Punkt der Peripherie bereits gegeben ist. Nun will er lediglich die in den Postulaten gegebenen Möglichkeiten verwenden und muß daher die anscheinend so einfache Konstruktion in eine größere Zahl komplizierterer, allerdings höchst sinnreicher Schritte zergliedern:

1.) Über einer gegebenen Strecke A B ein gleichseitiges Dreieck zu errichten. Nach Postulat c.) läßt sich um A



ein Kreis mit A B, um B einer mit B A schlagen; daß diese Kreise einen Schnittpunkt C haben, wird freilich, wie schon erwähnt, ohne weitere Erörterung angenommen. Nun folgt ein streng formal logischer Beweis unter Benutzung der Grundsätze, daß A B C tatsächlich gleichseitig ist.

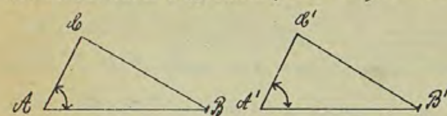
2.) Von einem gegebenen Punkte C aus eine Strecke abzutragen, die einer gegebenen A B gleich ist. Nach 1.) errichte man über A C ein gleichseitiges Dreieck A C D. Dann



verlängere man D A über A hinaus (Postul. b) und schlage um A mit A B einen Kreis (Postul. c.) bis zum Schnitt B' mit D A; die Existenz dieses Schnittes freilich wird wieder nicht besonders hervorgehoben. Weiter schlage man um D mit D B' einen Kreis und schneide ihn mit der Verlängerung von D C in E; dann ist C E = A B. Der Beweis, dessen Verlauf man ja sofort überblickt, wird zum Schluß wieder genau ausgeführt.

3.) Gegeben 2 Strecken A B, C F; auf C F eine Strecke gleich A B von C aus abzutragen. Nach 2.) zeichne man irgend eine Strecke C E = A B von C aus, und schlage um C einen Kreis mit C E, der C F in G trifft; C G ist die gesuchte Strecke.

Damit ist die erwähnte Aufgabe gelöst. Euklid läßt nun als Nr. 4 den ersten Kongruenzsatz folgen: Stimmen zwei Dreiecke A B C, A' B' C' in 2 Seiten (A B = A' B', A C = A' C') und einem Winkel (A = A') überein, so stimmen sie in allen Stücken überein.



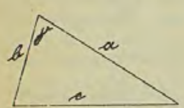
Bei dem Beweise dieses Satzes begeht Euklid dem vorigen gegenüber jene merkwürdige *Inkonsequenz*, wegen deren ich diese ganzen Betrachtungen wiedergebe. Er denkt sich das Dreieck A'B'C' so auf ABC gelegt, daß die Seiten A'B', A'C' bez. auf AB, AC und der Winkel A auf den Winkel A' fällt. Nun haben wir wohl im Vorhergehenden das Abtragen einer *Strecke* auf einer andern sehr genau gelernt, aber von dem Abtragen eines *Winkels* war noch nicht die Rede und noch viel weniger war je etwas davon gesagt, was bei einem solchen Übertragungsprozeß *aus der dritten Seite B'C'* wird, ob diese denn z. B. überhaupt eine *Gerade* bleibt. Anschaulich ist das ja ganz klar, aber das ganze Ziel Euklids ist ja immer die *logische* Vollständigkeit der Deduktion. Trotzdem schließt er nun hier ohne irgendwelche nähere Ausführungen, daß auch B'C' beim geschilderten Aufeinanderlegen in eine Gerade übergehen muß, die dann freilich notwendig mit BC zur Deckung kommt. Das heißt aber nichts als durchaus die Existenz von Bewegungen, die Gestalt und Abmessungen der geometrischen Figuren nicht ändern, voraussetzen – so wie wir das bei unserm ersten Aufbau der Geometrie taten; dabei ist es dann allerdings

selbstverständlich (vgl. S. 381), daß sich der erste Kongruenzsatz beweisen läßt.

So würde also dieser Beweis Euklids ganz dafür sprechen, daß er Anhänger der Bewegungsidee ist. Aber dann bleibt die Frage, warum in den Grundlagen gar nicht die Rede davon ist, und vor allem wäre alsdann seine kunstvolle Lösung der Aufgaben 2 und 3 durchaus zwecklos, da sie sich bei Verwendung des Bewegungsbegriffes mit einem Worte erledigen lassen. Betrachten wir aber andererseits – das scheint noch die einzig mögliche Lösung in diesem Wirrwarr – diese Nr. 4 als ein späteres Einschiebsel, so bleibt doch die Frage offen, wie sich Euklid zum ersten Kongruenzsatz gestellt hat, und damit bleibt eine *wesentliche Lücke* in seinen Entwicklungen; denn ohne Bewegungsbegriff kann man den Satz unmöglich beweisen, und man muß ihn, wie in unserm zweiten Aufbau der Geometrie (S. 381), unter die Axiome aufnehmen. Wir können jedenfalls diese Erörterungen abschließend nur sagen, *daß sich gerade am Anfange des ersten Buches der Elemente soviele innere Schwierigkeiten erheben, daß von einem Erreichen des Ideales, so wie wir es vorhin hinstellten, hier durchaus nicht die Rede sein kann.* –

Wesentlich schwerer aber als alle diese Lücken und Unklarheiten wiegt *ein anderer Einwand*, den man gegen Euklids

Darstellung der Grundlagen machen muss, wenn man ihn an seinem eigenen Ideal misst, und sich dabei unsere heutigen Kenntnisse vorhält. Euklid hat nämlich, um es zunächst in der uns geläufigen analytischen Sprache zu sagen, bei seinen geometrischen Grössen (Strecken, Winkel, Flächen etc.) niemals ein Vorzeichen, sondern er behandelt sie sämtlich stets als absolute Grössen; er treibt gewissermassen eine analytische Geometrie, in der die Koordinaten und sonstigen Grössen nur nach ihrem Absolutwerte eingehen. Die Folge davon ist, dass er nicht zur Aufstellung allgemeingültiger Sätze gelangen kann, sondern stets Fallunterscheidungen mitnehmen muss, je nachdem im konkreten Falle die Stücke in der Figur so oder anders liegen.



Um ein einfachstes Beispiel zu nennen, so gilt in unserer modernen Formelsprache der sog. erweiterte pythagoräische Lehrsatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos\gamma$$

allgemein für spitz- und stumpfwinklige Dreiecke, da wir $\cos\gamma$ sinngemäss als positive oder negative Grösse auffassen: Euklid aber kennt nur den Absolutwert $|\cos\gamma|$, und er müsste daher in beiden Fällen 2 verschiedene Formeln

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,|\cos\gamma| \text{ und } c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\,|\cos\gamma|$$

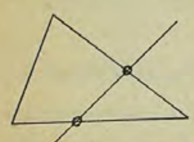
unterscheiden. Natürlich werden diese Fallunterscheidungen um so komplizierter und unübersichtlicher, je weiter man

geht.

Man kann den Mangel, von dem hier die Rede ist, natürlich auch ganz rein geometrisch formulieren. Dem Unterschied der Vorzeichen in der analytischen Darstellung entspricht in der reinen Geometrie ein Unterschied in der Anordnung, von dem Typus, ob ein Punkt C zwischen A und B oder ausserhalb der Strecke A B liegt. Man wird nun erst dann ein vollständiges logisches Gebäude der Geometrie aufführen können, wenn man die Grundtatsachen dieser Lagenbeziehung die sog. „Axiome des Zwischen" ausdrücklich formuliert, wie wir ja bei jedem Aufbau der Geometrie betont haben. Unterlässt man dies aber, wie Euklid, so wird das Ideal der rein logischen Beherrschung der Geometrie nicht erreicht, und man muss immer wieder auf die Figur zur Prüfung der Lagenverhältnisse zurückgreifen. Unser Einwand gegen Euklid ist also, kurz gesagt, der, dass er keine Zwischenaxiome hat.

Nun ist tatsächlich die Einsicht, dass man bestimmte Voraussetzungen über das „Zwischen" formulieren müsse, mit anderen Worten, dass man die elementargeometrischen Grössen nach gewissen Verabredungen mit Vorzeichen behaften müsse, noch relativ recht neuen Datums; ich hatte ja am Anfang dieser Vorlesung (S. 36), als wir uns ausführlich damit beschäftigten, berichtet, dass wir die erste Konsequente Durchführung der Vorzeichenregeln in Möbius „Baryzentrischem Kalkul“ von 1827 finden. Weiter ist in diesem Zusammenhang eine Stelle aus einem Briefe von Gauss an W. Bolyai vom 6. März 1832 historisch interessant, die freilich erst 1900 bei der Veröffentlichung in Bd. VIII der Werke 1) bekannt wurde und die lautet: „Bei einer vollständigen Durchführung müssen solche Worte wie „zwischen“ auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde.“

Die erste genauere geometrische Formulierung dieser „Zwischenaxiome“ gab M. Pasch 1882 in seinen „Vorlesungen über neuere Geometrie.“ 2) Vor allem tritt hier zum ersten Male der übrigens früher bei unserem ersten Aufbau der Geometrie (S. 360) ausdrücklich genannte und benutzte charakteristische Satz auf: Trifft eine Gerade eine Seite eines Dreiecks, so trifft sie gewiss auch eine der beiden andern.



Man darf die Bedeutung dieser Zwischenaxiome nicht unterschätzen; sie sind ebenso wichtig, wie alle andern Axiome, wenn man die Geometrie wirklich als rein logische Wissenschaft aufbauen will, die zur Abwicklung ihrer Schlüsse nach Aufstellung der Axiome nicht mehr notwendig der Bezugnahme

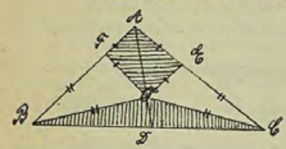
1) pag. 222. 2) Leipzig 1882.

auf Anschauung und Figuren bedarf (so anregend und für die Forschung förderlich diese Bezugnahme selbstverständlich auch stets bleiben wird). Euklid, der diese Axiome nicht hat, muss immer noch mit Fallunterscheidungen an der Hand der Figuren operieren, und da er andererseits auf das richtige geometrische Zeichnen so wenig Gewicht legt, so liegt die Gefahr nahe, dass ein Schüler des Euklid an der Hand falsch gezeichneter Figuren auch einmal zu falschen Sätzen kommt. So entstehen die zahlreichen sog. geometrischen Sophismen, das sind sonst formell korrekte Beweise für falsche Sätze, die nur auf schlecht gezeichneten, d. h. gegen die Zwischenaxiome verstossenden Figuren beruhen. Ich teile gern ein Beispiel mit, das gewiss manchem von Ihnen bekannt ist, den Beweis, dass jedes Dreieck gleichschenklig ist.

Man zieht da zunächst die Halbierende des Winkels A und die Senkrechte im Mittelpunkt D der Seite B C. Wären beide parallel, so stünde die Winkelhalbierende auf B C senkrecht, und das Dreieck wäre bekanntlich gleichschenklig, wie sofort zu zeigen. Wir können also annehmen, dass jene beiden Geraden sich schneiden, und wir unterscheiden 2 Fälle je nachdem der Schnitt O innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks liegt; in jedem Falle ziehen wir O E und O F senkrecht auf A B und

AC und verbinden O mit B und C.

Im ersten Falle sind die horizontal schraffierten



Dreiecke AOF und AOE kongruent, da sie in der Seite AO, den Winkeln bei A und den rechten Winkeln übereinstimmen; also ist

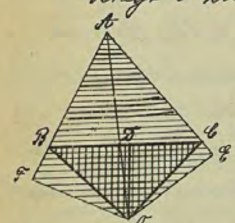
$$AF = AE.$$

Ebenso sind die vertikal schraffierten Dreiecke OCD, OBD kongruent, da in ihnen die Seiten OD und $DC = DB$ sowie die rechten Winkel übereinstimmen. Also ist $OC = OB$ und hieraus schließen wir weiter, da nach der ersten Kongruenz auch $OE = OF$ ist, auf die Kongruenz der nicht schraffierten Dreiecke OCE und OBF; daher ist

$$FB = EC$$

und die Addition zur vorhin gewonnenen Gleichung ergibt tatsächlich <u>$AC = AB$.</u>

Liegt O zweitens außerhalb, so schließen wir genau

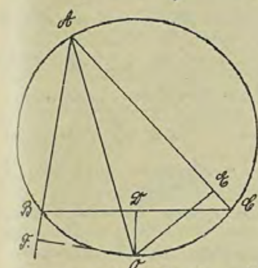


ebenso auf die Kongruenz der 3 Paare entsprechender Dreiecke und finden insbesondere

$$AF = AE, \quad FB = EC.$$

Durch Subtraktion folgt hieraus, wie die Figur zeigt, wieder $AB = AC$, d. h. die Gleichschenkligkeit wäre in jedem Falle erwiesen.

Was nun an diesem Beweise falsch ist, ist tatsächlich nur die Figur. Einmal kann nämlich <u>O niemals innerhalb des Dreiecks</u> liegen, und dann kann nie die im zweiten Fall gezeichnete Lage statt haben, sondern es muß



stets <u>einer der beiden Lotfußpunkte E, F innerhalb, der andere außerhalb</u> der ihn tragenden Dreiecksseite liegen, wie das nebenstehend gezeichnet ist. Tatsächlich ist also etwa

$$AB = AF - BF,$$
$$AC = AE + CE = AF + BF,$$

und wir dürfen keineswegs auf Gleichheit schließen.

Damit ist das Sophisma vollständig aufgeklärt, und in ganz ähnlicher Weise erklären sich die vielen sonst bekannten Scheinbeweise; stets werden ungenaue Figuren mit verkehrter Anordnung der Punkte und Geraden der Argumentation zu Grunde gelegt. –

Habe ich so wesentliche Mängel an Euklids Darstellung kritisiert, so will ich nun andererseits auch eine ihrer größten <u>Feinheiten</u> hervorheben, über die freilich jene früher gekennzeichneten begeisterten Anhänger Euklids meist ebenso hinweggleiten, wie über die Fehler. Ich berichtete bereits, daß im fünften Buch das <u>Verhältnis (Logos)</u> irgend zweier geometrischen Größen a, b betrachtet wird, das das Aequivalent des allgemeinen Zahlbegriffes gibt. Nun setzt aber Euklid hierbei ausdrücklich fest, daß er von einem Verhältnis zweier gleichartiger geometrischer Größen a, b nur unter einer gewissen Bedingung sprechen will: wenn nämlich zwei ganze Zahlen m und n derart sich bestimmen lassen, daß $m \cdot a > b$ und $a < n\, b$ wird; seine Worte sind „Ein Verhältnis haben Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können." Diese Forderung nennt man heutzutage Archimedisches Axiom, ein Name, der freilich durchaus unhistorisch ist, da eben Euklid lange vor Archimedes und wahrscheinlich sogar noch früher Eudoxos dies Axiom besaß, der aber nun einmal leider üblich geworden ist.

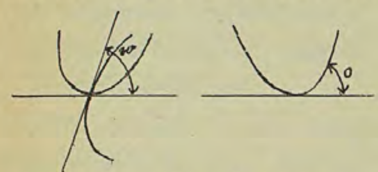
Dies Archimedische Axiom spielt als einer der wichtigsten Stetigkeitspostulate in den modernen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie wie der Arithmetik eine große Rolle, und demgemäß haben wir es auch in unsern eignen Entwicklungen bereits wiederholt berührt (vgl. etwa S. 404). Insbesondere stimmt – wie Sie sofort erkennen – bei unserm ersten Aufbau der Geometrie das Postulat, daß die durch Iteration einer Translation aus A entstehenden Punkte jeden Punkt einer Halbgeraden einschließen (S 355), sachlich durchaus mit dem Archimedischen Axiom überein. Wir haben aber auch

schon im vorigen Semester [1] ausführlich von diesem Axiom gesprochen. Da nannten wir eine Größe a, die nach Multiplikation mit jeder endlichen Zahl n immer noch kleiner als b blieb, aktual unendlich klein in Bezug auf b, oder umgekehrt b aktual unendlich groß in Bezug auf a. Was Euklid durch seine Forderung ausschließt, sind also Systeme geometrischer Größen, die aktual unendlich kleine oder große Elemente enthalten, und in der Tat ist er notwendig, solche Systeme auszuschließen, wenn man die Lehre von den Proportionen, die ja schließlich, wie oft betont, nichts als eine andere Form der modernen Theorie der Irrationalzahlen ist, begründen will. Euklid (oder wohl schon Eudoxus) macht also hier – das ist das Bewunderungswerte – im Grunde nichts anderes, als was man in den modernen Untersuchungen des Zahlbegriffes tut, und er macht es sogar genau mit denselben Hilfsmitteln.

Wir werden die Tragweite der hier in Rede stehenden Axioms am besten erkennen, wenn wir uns ein ganz konkretes ihm nicht genügendes System geometrischer Größen einmal vor Augen führen, das besonders auch darum interessant ist, weil es bereits im Altertum und Mittelalter wohl bekannt und vielfach umstritten war. Ich meine hier die sog. hornförmigen Win-

[1] Vgl. Teil I, S. 478–481.

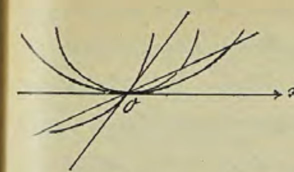
kel, das sind Winkel zwischen Kurven in einer gewissen allgemeinen Auffassung. Wenn wir heute von Winkel reden, so denken wir stets an Winkel zwischen geraden Linien, und insbesondere unter dem Winkel zweier Kurven verstehen wir nichts als den Winkel ihrer Tangenten; der Winkel einer Kurve, z. B. eines Kreises mit seiner eigenen Tangente ist dann stets Null.



Solcherweise bilden alle Winkel bekanntlich ein gewöhnliches „archimedisches" Größensystem, auf das man die Euklidische Verhältnislehre anwenden kann, das also mit andern Worten durch die einfache Reihe der reellen Zahlen gemessen wird.

Im Gegensatz dazu versteht man unter dem hornförmigen Winkel zweier Kurven – wobei wir uns im Sinne der Alten zunächst auf Kreis und Gerade beschränken wollen – das von den Kurven selbst in der Nähe ihres Schnittes (oder Berührungspunktes) eingeschlossene Flächenstück, und wir wollen nun sehen, wie diese Definition zu einem nichtarchimedischen d. h. jenem Axiom nicht genügenden Größenbegriff Anlaß gibt.

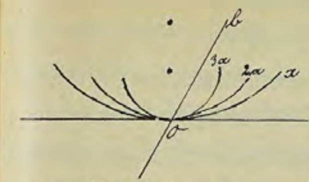
Wir wollen uns dabei auf Winkel beschränken, deren



einer Schenkel eine feste Gerade (die x-Achse) ist, und deren Scheitel im Nullpunkt O liegt; der andere Schenkel ist ein Kreis (oder event. auch eine Gerade), der in O die x-Achse schneidet oder berührt. Man wird dann ganz naturgemäß denjenigen von 2 hornförmigen Winkel den kleineren nennen, dessen freier Schenkel beim Zuschreiten auf O schließlich unterhalb des Schenkels des anderen bleibt, d. h. der dabei schließlich das schmälere Flächenstück begrenzt. Danach wird z. B. der Winkel eines berührenden Kreises stets kleiner sein, als der eines schneidenden Kreises oder einer Geraden, und von 2 berührenden Kreisen wird der mit größerem Radius den kleineren Winkel bilden, da er unterhalb der andern verläuft. Es ist klar, daß solcherweise für je zwei unserer hornförmigen Winkel bestimmt ist, welcher von ihnen der kleinere und welcher der größere ist; die Gesamtheit der hornförmigen Winkel ist, wie man heute in der Mengenlehre sagt, nach ihrer Größe „einfach geordnet" – genau wie es auch ja die Gesamtheit der gewöhnlichen reellen Zahlen ist.

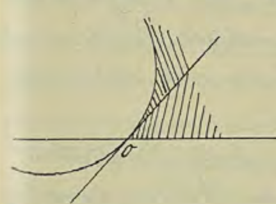
Um nun aber den charakteristischen Unterschied zwischen diesen beiden Anordnungen zu erkennen, müssen wir genaueres über die Messung dieser hornförmigen Winkel festsetzen. Das erste ist, daß wir den Winkel einer Geraden durch O im gewöhnlichen Winkelmaße messen; dann ist jeder Winkel a eines die x-Achse berührenden Kreises nach der Definition kleiner als jeder noch so kleine von Null verschiedene geradlinige Winkel, und das bereits kann im gewöhnlichen Zahlenkontinuum für ein von Null verschiedenes a nicht vorkommen und charakterisiert a als „aktual unendlich klein!

Um das im Zusammenhange mit dem Archimedischen Axiom zu verfolgen, müssen wir zunächst noch auch für diese krummlinigen Winkel die Multiplikation mit einer ganzen Zahl definieren. Betrachten wir zunächst einen in O berührenden Kreis vom Radius R, so liegt es nahe, dem berührenden Kreise mit dem Radius $\frac{R}{n}$ den n-fachen Winkel zuzuschreiben; tatsächlich fügt sich das der obigen Definition insofern ein, als nach ihr die Winkel der berührenden Kreise mit den Radien, R, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{3}$, … immer größer werden. Wohl aber entstehen so aus dem Winkel a eines berührenden Kreises stets wieder Winkel berührender Kreise, und alle Vielfache $n \cdot a$ bleiben daher unserer Definition zufolge notwendig kleiner als etwa der Winkel b einer festen schneidenden Geraden – wie groß auch man n nimmt. Also ist das Archimedische Axiom tatsächlich nicht befriedigt: die Winkel der berühren-



den Kreise sind demgemäß als aktual unendlich klein gegenüber dem Winkel einer schneidenden Geraden aufzufassen. Was die allgemeine Addition zweier solcher Winkel anlangt, so wird man sie gemäß der gegebenen Definition der Multiplikation mit ganzen Zahlen so vollziehen, daß man die reziproken Werte der Radien addiert, die überhaupt als Maßzahlen der aktual unendlich kleinen Winkel dienen werden.

Haben wir nun einen beliebigen Kreis durch O, so können wir seinen Winkel als Summe des Winkels seiner



Tangente gegen die x-Achse (im gewöhnlichen Sinne gemessen) und seines eigenen aktual unendlich kleinen Winkels gegen die Tangente im soeben definierten Sinne auffassen; man kann dann Addition und Multiplikation auf die einzelnen Summanden werfen, und hat so das Operieren mit hornförmigen Winkeln vollständig begründet. In diesem Gebiete gilt aber das Archimedische Axiom nicht, und man kann es daher nicht mit „Logoi" oder gewöhnlichen reellen Zahlen behandeln; gewiß war das Euklid wohlbekannt, und er schloß völlig bewußt solche Grössensysteme durch sein Axiom aus:

Man kann nun mit modernen Hilfsmitteln das Gebiet dieser hornförmigen Winkel wesentlich ausdehnen, wobei sich die Definitionen noch erweitern und zugleich vereinfachen, wenn man nämlich alle analytischen Kurven durch 0 in Betracht zieht. Jede solche Kurve wird durch eine Potenzreihe dargestellt:

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^3 + \cdots, \quad y_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x^2 + \gamma_2 x^3 + \cdots$$

Wir werden nun sagen, daß der Winkel der Kurve 1 gegen die x-Achse größer oder kleiner ist, als der von 2, je nachdem $\alpha_1 > \alpha_2$ oder $\alpha_1 < \alpha_2$; ist aber $\alpha_1 = \alpha_2$, so lassen wir in erster Linie $\beta_1 \gtrless \beta_2$, wenn aber auch $\beta_1 = \beta_2$, so $\gamma_1 \gtrless \gamma_2$ entscheiden, u. s. f. Es ist klar, daß so die Winkel aller analytischen Kurven in eine bestimmte einfach geordnete Reihe gebracht sind, in der offenbar auch die Kreise in der oben definierten Reihenfolge enthalten sind.

Nun wird man einfach als das n-fache des Winkels 1 den Winkel der mit n multiplizierten Reihenentwicklung $n \cdot y_1 = n\alpha_1 x + n\beta_1 x^2 + \dots$ bezeichnen können; vorhin mußten wir eine kompliziertere Operation anwenden, um nicht aus dem Gebiet der Kreise herauszukommen, nämlich den berührenden Kreis mit dem Radius R, dessen Reihenentwicklung

$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} + \cdots$$

ist, durch den mit dem Radius $\frac{R}{n}$:

$$y = n \cdot \frac{x^2}{2R} + n^3 \frac{x^4}{8R^3} + \cdots$$

ersetzen, was nur im ersten Glied der Reihenentwicklung wirklich Multiplikation mit n darstellt. Aber auch nach der neuen einfachen Definition haben wir wiederum ein nicht-archimedisches Grössensystem: Eine Kurve, deren Entwicklung erst mit x^2 beginnt ($\alpha_1 = 0$) wird nach Multiplikation mit noch so grossem n stets einen kleineren Winkel bilden, als eine mit nichtverschwindendem α_1. Wir haben hier im Grunde nur das in etwas anschaulicher Form wiederholt, was wir schon in der Wintervorlesung [1] gemacht hatten: In der Potenzentwicklung

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots$$

spielen bei dieser Deutung die sukzessiven Potenzen $x, x^2, x^3, \dots$ einfach die Rolle aktual unendlich kleiner Grössen von verschiedener immer ansteigender Ordnung.

Es ist nun interessant, daß man die Folge der hornförmigen Winkel noch weiterhin verdichten kann, indem man gewisse nichtanalytische Kurven hinzunimmt; nur dürfen sie, um eine Grössenvergleichung zu gestatten, nicht unendlich oft oszillieren, oder genauer gesagt keine analytische Kurve unendlich oft schneiden. Es mag genügen, wenn ich hier als einziges Beispiel die Kurve $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ hervorhebe; sie hat bekannt-

[1] loc. cit. S. 479, wo jene Grössen verschiedener Ordnung $\eta, \xi, \dots$ heissen.

lich die Eigenschaft, daß alle ihre Differentialquotienten bei $x = 0$ verschwinden (sodaß sie daselbst überhaupt in keine Potenzreihe entwickelbar ist), und daher verläuft sie schließlich unterhalb jeder analytischen Kurve. Trotzdem wir also vorhin schon eine so dichte Folge hornförmiger Winkel hatten, haben wir einen neuen hornförmigen Winkel, der mitsamt seinen endlichen Vielfachen kleiner ist als jeder Winkel einer analytischen Kurve! –

Wir wollen damit diese Betrachtungen, und überhaupt unser Studium des Euklid abschließen; ich fasse nur noch zum Schluß das Urteil über Euklids Elemente, das wir in allen diesen Erörterungen gewonnen haben, in wenige Sätze zusammen:

1.) Die große historische Bedeutung von Euklids Elementen besteht darin, daß durch sie das Ideal einer lückenlos-logischen Behandlung der Geometrie den kommenden Zeiten überliefert wurde.

2.) Was die Ausführung angeht, so ist vieles sehr fein gemacht, vieles andere aber bleibt prinzipiell durchaus hinter unserem heutigen Standpunkt zurück.

3.) Zahlreiche Einzelheiten wichtiger Art, namentlich am Anfange des ersten Buches, bleiben wegen Unsicherheiten des Textes durchaus zweifelhaft.

4.) Die ganze Entwicklung erscheint häufig unnötig schwerfällig, da Euklid keine fertige Arithmetik zur Hand hat.

5.) Überhaupt erschwert die einseitige Betonung des Logischen das Verständnis des Gesamtinhaltes und seines inneren Zusammenhanges. –

Wir wollen damit, meine Herren, die Erörterungen über die Theorieen der Geometrie beenden, die Ihnen hoffentlich den erwünschten Überblick über dies ganze Gebiet verschafft haben, soweit es zu den Bedürfnissen des Schulunterrichtes nur irgend Bezug hat. Und nun wollen wir zum Schluß, wie ich es ja schon ankündigte, im Zusammenhange noch ein wenig von dem geometrischen Unterricht handeln.