



Zweiter Hauptteil: Die geometrischen Trans-
formationen.

Es ist eines der wichtigsten Kapitel der wissenschaftlichen Geometrie, das wir damit beginnen. In seinem Grundgeden und seinen einfacheren Teilen liefert es aber - und darauf möchte ich in dieser Vorlesung besonders hinweisen - auch für den Schulunterricht sehr anregender Material; sind doch die geometrischen Transformationen schließlich nichts als eine Verallgemeinerung des einfachen Punktbegriffes, den ja unsere modernen Reformtendenzen durchaus in den Mittelpunkt des mathematischen Unterrichtes stellen wollen.

Ich beginne mit der Behandlung der Punkttransformationen, die die einfachste Klasse der geometrischen Transformationen ausmachen. Sie lassen den Punkt als Raumelement bestehen, d. h. sie ordnen jedem Punkt wieder einen Punkt zu - entgegen solchen Transformationen, die den Punkt in andere Raumelemente, wie Gerade, Ebenen, Kugeln u. dgl. überführen. Ich stelle auch hier wieder die analytische Behandlung voran, da sie jeweils den provin-

sierten Ausdruck der Tatsachen gestattet.

Das analytische Abbild einer Punkttransformation ist das, was die Analysis Einführung neuer Veränderlicher x', y', z' nennt, die als Funktionen der alten Variablen x, y, z gegeben sind:

$$\begin{cases} x' = \varphi(x, y, z) \\ y' = \psi(x, y, z) \\ z' = \chi(x, y, z) \end{cases}$$

Ein solches Gleichungssystem kann man freilich in der Geometrie auf zweierlei Arten, ich möchte sagen aktiv und passiv, interpretieren: Passiv stellt es eine Änderung des Koordinatensystems dar, d. h. dem Punkte mit den Koordinaten x, y, z werden die neuen Koordinaten x', y', z' zugeschrieben. Von dieser Artung haben wir bisher stets bei dem Studium der Änderungen des rechtwinkligen Koordinatensystems Gebrauch gemacht; für allgemeine Funktionen φ, ψ, χ ist natürlich in jenen Formeln noch darüber hinaus auch der Übergang zu ganz andersartigen Koordinatensystemen, wie z. B. Dreieckskoordinaten, Polar-Koordinaten, elliptischen Koordinaten u. dgl. einbegriffen. Demgegenüber hält die aktive Auffassung des Koordinatensystems fest und gestaltet den Raum: Jedem Punkte x, y, z wird der Punkt x', y', z' zu-



geordnet, und damit ist tatsächlich eine Transformation der Raumpunkte gegeben; diese Deutung ist es, mit der wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

Die ersten Beispiele von Punkttransformationen werden wir gemäß diesen Erörterungen natürlich erhalten, indem wir die Formeln hernehmen, die uns früher (§. 914) - passiv aufgefaßt - eine Verschiebung, Drehung, Spiegelung, Hauptstabänderung des rechtwinkligen Koordinatensystems darstellen, und sie nun aktiv interpretieren. Man überzeugt sich ganz leicht, daß die ersten beiden jeder Formelgruppe eine Verschiebung des Raumes - als starrer Gebilde aufgefaßt - bzw. eine Drehung um O gegen das festgehaltene Koordinatensystem darstellen; die dritte Gruppe gibt eine Inversion der Raumpunkte am Nullpunkt O (jedem Punkt x, y, z wird der symmetrische zu O gelegene $-x, -y, -z$ zugeordnet), die letzte endlich stellt eine sog. Schubdrücktransformation des Raumes vom Nullpunkt O aus dar.

Unsere eigentlichen Untersuchungen beginnen wir nunmehr mit einer speziellen einfachsten Gruppe von Punkttransformationen, die die genannten Transformationen sämtlich als Unterfälle umfaßt.

I. Affine Transformationen

Eine affine Transformation ist analytisch dadurch definiert, daß x', y', z' beliebige ganze lineare Funktionen von x, y, z sind:

$$(1.) \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 \end{cases}$$

Für Name, der übrigens auf Wölbins zurückgeht, soll besagen, daß bei einer solchen Transformation unendlich fernem Punkten stets wieder unendlich ferne entsprechen, also gewissermaßen die „Enden“ des Raumes erhalten bleiben; in der Tat ergeben die Formeln sofort, daß x', y', z' gleichzeitig mit x, y, z unendlich wird. Das ist ein Gegensatz zu dem später zu behandelnden allgemeinen projektiven Transformationen, wo x', y', z' gebrochene lineare Funktionen von x, y, z werden und demgemäß gewisse im Endlichen gelegenen Punkte ins Unendlichweite transformiert werden. In der Physik spielen diese affinen Transformationen unter dem Namen homogene Deformationen eine große Rolle; das Wort „homogen“ drückt (im Gegensatz zu heterogen) die Unabhängigkeit der Koeffizienten von der betrachteten Raumstelle aus, das Wort „Deformation“ erinnert daran, daß im allgemeinen die Gestalt einer



jeden Körpers durch die Transformation geändert wird.

Die Transformation (1) kann man offenbar zusammensetzen aus je einer Verschiebung des Raumes um die Größen d_1, d_2, d_3 parallel zu den 3 Koordinatenrichtungen und der keine Konstanten Term mehr enthaltenden homogenen linearen Transformation:

$$(2) \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

die den Nullpunkt ungeändert läßt und die etwas bequemer zu untersuchen ist. Wir beginnen die Betrachtung dieses Typus (2)

1.) mit der Frage, wie es mit der Stuflosbarkeit des Gleichungssystemes (2) steht. Wie die Determinantentheorie lehrt, kommt es dabei wesentlich darauf an, ob die Determinante des Koeffizientensystemes der Transformation

$$(3) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

verschwindet oder nicht. Der erste Fall wird uns später noch besonders beschäftigen; vorläufig nehmen wir $\Delta \neq 0$ an. Dann ist (2) eindeutig lösbar und

zwar in der Form:

$$(4) \begin{cases} x = a'_1 x' + b'_1 y' + c'_1 z' \\ y = a'_2 x' + b'_2 y' + c'_2 z' \\ z = a'_3 x' + b'_3 y' + c'_3 z' \end{cases}$$

wo a'_1, \dots, c'_3 Quotienten der Unterdeterminanten von Δ durch Δ selbst sind.

2.) Wir können nun fragen, wie sich die Raumgebilde bei diesen Affinitäten verändern. Haben wir zunächst eine Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

so ergibt sich als Gleichung des entsprechenden Gebildes, indem wir die Ausdrücke (4) für x, y, z eintragen:

$$A'x' + B'y' + C'z' + D' = 0,$$

wo sich die A', \dots, D' in gewisser Weise aus den A, \dots, D und den Transformationskoeffizienten zusammensetzen; einer jeden Ebene entspricht also wieder eine Ebene. Da eine Gerade der Schnitt zweier Ebenen ist, umso weiterhin notwendig jeder Geraden auch wieder eine Gerade entsprechen; Transformation dieser letzteren Eigenschaft nennt Möbius Kollinearitäten, da wie die „Kollinearität“ dreier Punkte, d. h. die Eigenschaft, auf einer Geraden zu liegen, erhalten. Die Affinität ist also gewiß eine Kollinea-



hier.

Untersucht man ebenso eine Fläche 2. Grades:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots = 0,$$

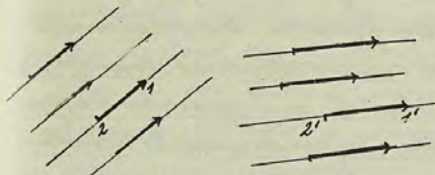
so ergibt sich durch Einsetzen von (4) für x', y', z' ebenfalls eine quadratische Gleichung, d. h. die Affinität führt jede Fläche zweiten Grades wieder in eine solche und ebenso jede Fläche n ter Ordnung wieder in eine n ter Ordnung über.

Es werden später die Flächen besonderer Interesse haben, die einer Kugel entsprechen. Zunächst sind es nach dem vorigen Flächen 2. Grades, da die Kugel eine spezielle Fläche dieser Art ist; da aber ferner alle Punkte der Kugel im Endlichen liegen und daher keinen ins Unendliche geworfen werden kann, müssen er notwendig ganz im Endlichen gelegene Flächen 2. Grades, das sind Kollipsoide, sein.

3.) Wir wollen nun ansehen, was aus einem freien Vektor mit den Komponenten $X = x_1 - x_2, Y = y_1 - y_2, Z = z_1 - z_2$ wird; indem wir für die Punkte 1 und 2 die Transformationsformeln (1) einsetzen, erhalten wir für die Komponenten $X' = x'_1 - x'_2, Y' = y'_1 - y'_2, Z' = z'_1 - z'_2$ der entsprechenden Punkte 1' 2':

$$(5) \quad \begin{cases} X' = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ Y' = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ Z' = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{cases}$$

Diese neuen Komponenten hängen also nur von den X, Y, Z , nicht von den Einzelwerten der Koordinaten $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ ab, d. h. sämtlichen Strecken 1 2 mit den gleichen Komponenten X, Y, Z entsprechenden Strecken 1' 2' mit den gleichen Komponenten X', Y', Z' oder mit anderen Worten: Jedem



freien Vektor entspricht bei der Affinität wieder ein freier Vektor. In dieser Aussage ist wesentlich mehr enthalten,

als in der, daß jeder Geraden eine Gerade entspricht. Nehmen wir nämlich auf zwei parallelen Geraden gleiche und gleichgerichtete Abschnitte an, so stellen diese denselben freien Vektor dar, also wissen auch die entsprechenden Strecken einen und denselben Vektor darzustellen, d. h. parallel und gleich sein. Jeden Systeme paralleler Geraden entsprechen also wieder parallele Geraden und gleichen Abschnitten auf ihnen entsprechen gleiche Abschnitte. Diese Eigenschaften sind recht merkwürdig, da - wie man sich



leicht überlegen kann - die absolute Länge einer Strecke und die absolute Größe des Winkels zweier Geraden durch affine Transformation im allgemeinen geändert wird.

4.) Betrachten wir jetzt zwei Vektoren auf derselben Geraden, die bekanntlich durch Multiplikation mit einem Skalar auseinander hervorgehen; da x', y', z' in (5) homogene Funktionen von x, y, z sind, unterscheiden sich auch die entsprechenden Vektoren lediglich durch genau denselben Faktor, und das heißt nichts, als daß ihre Längen sich verhalten wie die Längen der ersten Vektoren. Wir können das auch so aussprechen: Zwei in einer Affinität einander entsprechende Geraden sind „ähnlich“ auf einander bezogen d. h. entsprechende Strecken haben konstantes Verhältnis.

5.) Endlich wollen wir noch zwei entsprechende Tetraederinhalte $T = (1, 2, 3, 4)$ und $T' = (1', 2', 3', 4')$ vergleichen. Es ist

$$6T' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & 1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 & a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 & a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 & 1 \\ a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 & a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 & a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 & 1 \\ a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1 z_3 & a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2 z_3 & a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3 & 1 \\ a_1 x_4 + b_1 y_4 + c_1 z_4 & a_2 x_4 + b_2 y_4 + c_2 z_4 & a_3 x_4 + b_3 y_4 + c_3 z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

oder nach Anweisung der bekannten Multiplikationstheoreme der Determinanten:

$$6T' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix};$$

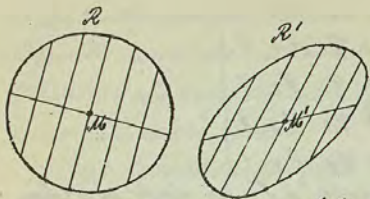
der erste Faktor ist Δ , der zweite $6T$, so daß wir haben:

$$T' = \Delta \cdot T.$$

Bei affinen Transformationen multiplizieren sich also alle Tetraederinhalte, und so überhaupt alle Rauminhalte (als Summen solcher) mit einem konstanten Faktor, der Selbstbestimmtheitsdeterminante Δ .

Diese wenigen Sätze, die wir so aus der analytischen Definition der Affinität gewonnen haben, reichen nun hin, um uns eine durchaus anschauliche geometrische Vorstellung von dieser Transformation zu verschaffen. Dabei hat sich ihre Ableitung einfacher gestaltet, als man sie sonst vielfach angeben pflegt, da wir in dem Vektorbegriff das richtige Hilfsmittel zur Hand hatten.

Das deutlichste geometrische Bild erhalten wir nun, wenn wir von einer Kugel im Raum R der x, y, z ausgehen; ihre wird, wie wir wissen, im Räume R' der x', y', z' ein Ellipsoid entsprechen. Betrachten wir nun ein System paralleler Sehnen der Kugel, so müssen ihnen nach Nr. 3 auch parallele Sehnen



des Ellipsoide entsprechen. Ferner müssen, da entsprechende Punktreihen ähnlich sind (Nr. 4), den Halbpunkt der Kugelschnitte auch die Halbpunkt der Ellipsoidachsen entsprechen, und da jene auf einer Ebene liegen, müssen endlich wegen der Fundamentaleigenschaft d. 2. auch diese auf einer Ebene liegen, die eine Diametralebene des Ellipsoide heißt. Man enthält bekanntlich alle Diametralebenen der Kugel, deren Mittelpunkt M , der jede durch ihn gehende Sehne (Kugeldurchmesser) halbiert; daher liegt der entsprechende Punkt M' (Mittelpunkt des Ellipsoide) in allen Diametralebenen, und halbiert jede durch ihn gehende Sehne (Durchmesser des Ellipsoide).

Es ist nun weiter von Wichtigkeit, zu sehen, was einem System von 3 aufeinander senkrechten Diametralebenen der Kugel entspricht. Ein solches hat offenbar die charakteristische Eigenschaft, daß jede der 3 Ebenen die der Schnittgeraden der beiden anderen parallelen Sehnen halbiert. Diese Eigenschaft bleibt bei der affinen Transformation erhalten, und daher entspricht jedem der unendlich vielen Tripel

aufeinander senkrechter Diametralebenen der Kugel ein Tripel von Diametralebenen des Ellipsoide von der Beschaffenheit, daß die der Schnittlinie irgend zweier der Ebenen parallelen Sehnen von der dritten Ebene halbiert werden. Solche drei Ebenen heißen Tripel konjugierter Diametralebenen, ihre drei Schnittlinien Tripel konjugierte Durchmesser.

Man beachte - ich darf das hier wohl als bekannt voraussetzen - ein Ellipsoid 3 sog. Hauptachsen, das ist ein Tripel konjugierter Durchmesser, von denen jeder auf den beiden anderen senkrecht steht. Ihnen entsprechen nach dem soeben Stützgebildeten von ungeänderter Affinität in R drei aufeinander senkrechte Durchmesser der Kugel. Wir nehmen nun der Einfachheit halber an, daß die Mittelpunkte der Kugel und des Ellipsoide Koordinatenaufangspunkte in R bzw. R' sind und machen alsdann durch geeignete Drehung die genannten beiden senkrechten Achsentripel zur x', y', z' - bzw. x, y, z - Achse in R' bzw. R ; dabei bleibt es der Willkür überlassen, ob wir uns den Raum oder das Koordinatensystem gedreht denken. Jedenfalls werden beide Operationen durch lineare homogene Koordinatensubstitutionen der früher ausführlich betrachteten speziellen Art



dargestellt, und da die stufenanderefolge mehrerer li-
nearer homogener Substitutionen stets wieder eine
Substitution derselben Art ergibt, so werden die
Gleichungen unserer Transformation von R in R'
auch in den neuen Koordinaten wieder von der
Form (2):

$$\begin{aligned}x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z.\end{aligned}$$

Man entspricht aber nach der neuen Definition der
Achsen der x -Achse die x' -Achse, d. h. für $y = z = 0$
ist stets auch $y' = z' = 0$; daraus folgt aber $a_1 = a_2 = a_3 = 0$,
und ebenso folgt auch $b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jede
Affinität ist daher abgesehen von passenden Substi-
tutionen nichts als eine sog. "reine Affinität":

$$(6) \quad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \mu y \\ z' = \nu z \end{cases},$$

oder wie die Physiker sagen, eine reine homogene
Deformation (englisch: pure strain). Den Inhalt
dieser Gleichungen kann man aber offenbar in ein-
fachster Weise geometrisch vollständig beschreiben:
Der Raum wird parallel der x -Achse auf das λ -fache
ausgedehnt (bzw. kontrahiert, wenn $|\lambda| < 1$ und

aufßerdem noch gespiegelt, wenn $\lambda < 0$), und ebenso pa-
rallel den anderen beiden Koordinatenrichtungen
auf das μ - bzw. ν -fache; wir können die reine
Affinität also kurz als gleichförmige Streckung des
Raumes nach drei zu einander senkrechten Rich-
tungen beschreiben und haben damit ein geome-
trisches Bild, wie man es anschaulicher kaum ver-
langen kann.

Wollen wir schiefwinklige Parallelskoordinaten
zulassen, so gestalten sich die Verhältnisse noch ein-
facher. Wir nehmen im Raume R , ohne den Null-
punkt zu ändern, irgend ein beliebiges, recht- oder
schiefwinkliges Achsensystem x, y, z an und be-
nutzen in R' die 3 dem Achsenvermögen der Affi-
nität entsprechenden Geraden als Achsen eines -
allgemein zu reden - schiefwinkligen Koordinaten-
systems x', y', z' . Man sind die Übergangsformeln
von rechtwinkligen zu schiefwinkligen Parallel-
koordinaten bei festem Nullpunkt bekanntlich li-
nearer homogener Gleichungen von der Form (2), und
da die Zusammensetzung solcher Substitutionen
stets wieder dieselbe Form hat, müssen die Glei-
chungen der Affinität auch bei Verwendung der
soeben festgelegten schiefwinkligen Koordinaten

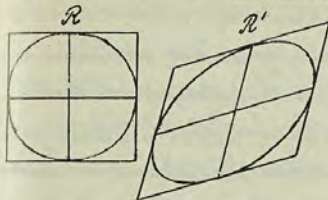


die Gestalt (2) haben. Nach unserer Koordinatenbestimmung führen sie aber die 3 Achsen von R in die von R' über, und daher können wir durch genaue Wiederholung der vorher angestellten Nebenlegung schließen, daß die Gleichungen tatsächlich sich auf die zuletzt angegebene Form (6) reduzieren. Überwenden wir also (schiefwinklige) Parallelkoordinaten in Bezug auf irgend zwei korrespondierende Achsen, so haben die Gleichungen der Affinität ohne weiteres diese einfache spezielle Form (6). -

Ich will hier nicht weiter auf die Diskussion aller Eigenschaften der Affinitäten eingehen, die sich ohne jede Schwierigkeit ausschließen ließe, sondern will Ihnen lieber zeigen, wozu man diese Transformationen eigentlich gebrauchen kann.

Zunächst ein Beispiel dafür, wie sie ein ausgezeichnetes Halbspinittel zur Ableitung neuer geometrischer Theoreme bilden; die oben erörterte affine Umwandlung der Kugel in ein Ellipsoid gestattet nämlich, aus zahlreichen Eigenschaften der Kugel neue Sätze über das Ellipsoid zu gewinnen. Konstruieren wir beispielsweise drei auf einander senkrechte Durchmesser der Kugel und in ihren Endpunkten die 6 Tangentialebenen, so ent-

steht ein der Kugel umschriebener Würfel vom Rauminhalt $V = 8r^3$, wenn r der Kugelradius ist.



Unsere affine Transformation führt jede Tangentialebene der Kugel offenbar in eine Tangentialebene der Ellipsoide über, und daher folgt mit Hilfe der besprochenen Sätze,

daß jener Würfel des Raumes R in R' ein dem Ellipsoid umschriebenes Parallelepiped entspricht, dessen Seitenflächen an den Endpunkten dreier konjugierter Durchmesser berühren und den zugehörigen Diametralebenen parallel sind, und dessen Kanten jenen Durchmessern bezüglich parallel sind. (Von der Ebene gilt entsprechendes für Kreis und Ellipse; vgl. Figur.) Diese Schlussweise läßt sich offenbar sofort auch umkehren: Jedem dem Ellipsoide umschriebenen Parallelepiped der beschriebenen Art entspricht ein der Kugel umschriebener Würfel, da den konjugierten Durchmessern der Ellipsoide drei aufeinander senkrecht stehende Kugeldurchmesser entsprechen. Man wissen wir aber (S. 163), daß bei der Affinität jeder Rauminhalt sich mit der Substitutionsdeterminante Δ multipliziert, und



daher gilt für den Inhalt eines jeden dem Ellipsoid
umschriebenen Parallelepipeds jener Satz:

$$V' = \frac{1}{8} \Delta = \frac{1}{8} \pi^3 \Delta.$$

Diese Formel ist offenbar unabhängig davon, wie man das
Parallelepipid speziell legt, das Parallelepipid hat also
immer denselben konstanten Rauminhalt, gleichgültig
von welchem Tripel konjugierter Durchmesser man
ausgeht. Verwenden wir speziell das Hauptachsen-
tripel, dessen Geraden rechte Winkel miteinander
bilden, so erhalten wir ein rechtwinkliges Paral-
lelepipid, dessen Inhalt offenbar $8abc$ ist, wenn
 $2a, 2b, 2c$ die Längen der Hauptachsen sind. Damit
haben wir jenen konstanten Rauminhalt bestimmt
und unser Theorem lautet also schließlich: Jedes ein-
nen Ellipsoid umschriebene Parallelepipid, dessen
Seitenflächen drei konjugierten Durchmesser
parallel sind, hat ein und denselben Rauminhalt
 $V' = \frac{1}{8} abc$, wenn a, b, c die Längen der halben
Hauptachsen sind. Um die Allgemeingültigkeit die-
ses Satzes für jedes Ellipsoid zu zeigen, hat man noch
zu überlegen, daß sich jedes beliebige Ellipsoid aus
einer Kugel durch affine Transformation erzeugen
läßt. Das ergibt sich aber sogleich aus der Form (6)
der Gleichungen der Affinität; sie lassen nämlich

erkennen, daß die Achsen des aus der Kugel entstehenden
Ellipsoides sich wie λ, μ, ν verhalten, wo λ, μ, ν
drei willkürliche Zahlen sind. -

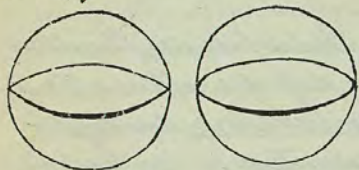
Wenn ich mich auf dieses kleine Beispiel für
die Anwendungen der Affinitäten in der theoretischen
Geometrie beschränke, so will ich nun um so mehr
betonen, daß die Affinitäten auch in der Praxis die
größte Bedeutung haben.

Was da zunächst das Bedürfnis des Physikers
angeht, so ist zu erwähnen, daß die affinen Trans-
formationen in der Elastizitätslehre, der Hydro-
dynamik, überhaupt in jedem Zweige der Mechanik
der Kontinua eine fundamentale Rolle spie-
len. Ich brauche das wohl kaum näher zu erläu-
tern, denn wer sich nur einmal mit diesen Diszi-
plinen beschäftigt hat, weiß ja zur Genüge, daß
man es da immer, sowie man die Betrachtung
auf hinreichend kleine Räumelemente beschränkt,
mit homogenen linearen Deformationen zu tun hat.

Ausführlicher will ich hier lieber die Anwendung
auf das vielstige Leidener behandeln, das ja der
Physiker ebenso wie der Mathematiker braucht.
Soweit es sich da um Parallelprojektionen handelt,
liegen nämlich immer nur affine Transformationen



des Raumes zu Grunde. Auf diesen Gebiete der richtigen Zeichnung wird nun leider ungemein viel gesündigt; Sie können sowohl in mathematischen Büchern bei der Abbildung räumlicher Konfigurationen, als auch in Physikbüchern bei der Darstellung von Apparaten ganz ungläubliche Zeichnungen finden. Besonders häufig findet man, um nur ein Beispiel zu nennen;

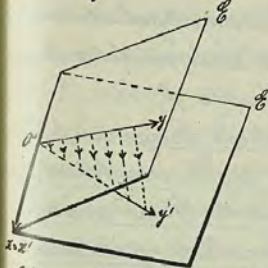


nein; daß bei der Abbildung einer Kugel der Äquator als Kreisbogenweise gezeichnet wird; natürlich ist das durchaus verkehrt, denn in Wahrheit muß er sich, wie wir sogleich sehen werden, stets als Ellipse darstellen.

Das Prinzip der geometrisch richtigen Zeichnung ist nun das, daß die abzubildende Figur durch geradlinige Strahlen von einem Punkt aus auf die Zeichnebene projiziert wird. Am einfachsten werden die Verhältnisse, wenn man sich jenen Zentralpunkt ins Unendliche hinausgerichtet denkt, d. h. die Abbildung durch ein paralleles Strahlenbündel vollzieht; dies ist der Fall, der uns hier interessiert. Übrigens betreten wir mit diesen Erweiterungen das Gebiet der darstellenden Geometrie; ich will sie hier keineswegs syste-

matisch vortragen, sondern will Ihnen nur zeigen, wie sie sich in das Gebäude der allgemeinen Geometrie einordnet; daher werde ich auch auf die Details der Beweise nicht nimmer eingehen können.

Beginnen wir damit, die Abbildung einer ebenen Figur, d. h. die Projektion einer Ebene \mathcal{E} auf eine andere \mathcal{E}' veranlaßt eines Parallelstrahlenbündels zu untersuchen. Wir legen dazu den Koordinatenanfang O in die Schnittgerade von \mathcal{E} und \mathcal{E}' und die x -Achse in ihre Richtung; die y -Achse legen wir in \mathcal{E} beliebig, z. B. senkrecht zur x -Achse, durch O und bestimmen die y' -Achse als ihre Projektion auf \mathcal{E}' durch die Strahlen des projizierenden Parallelstrahlenbündels, so daß wir in \mathcal{E}' event. ein schiefwinkliges Parallelkoordinatensystem haben. Dann stehen die Koordinaten zweier korrespondierender Punkte in \mathcal{E} und \mathcal{E}' in der Beziehung



$x' = x$

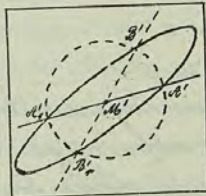
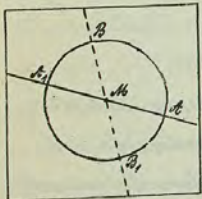
$$y' = \mu \cdot y,$$

wo μ eine von der gegebenen Lage der Ebenen und des Parallelstrahlenbündels abhängige Konstante ist; es liegt also tatsächlich eine affine Transformation vor.



Der Beweis dieser Gleichungen ist so einfach, daß ich mich bei ihrem Kaum aufzuhalten brauche. Übrigens sind diese Gleichungen gegenüber der allgemeinen Form (6) der Affinitätsgleichungen insofern spezialisiert, als $\lambda = 1$, also α' genau gleich α ist, doch liegt natürliches daran, daß die α -Stelle Schnittgerade von Original- und Bildebene ist, also jeder Punkt auf ihr mit seinem Bilde zusammenfällt. Alle wesentlichen Eigenschaften unserer Abbildung erhalten wir natürlich sofort, wenn wir die früher für den Raum abgeleiteten Sätze für die Ebene spezialisieren; so entspricht z. B. jedem Kreis in \mathcal{E} eine Ellipse in \mathcal{E}' u. s. f.

Es liegt nun nahe, die umgekehrte Frage aufzuwerfen: Kann man irgend zwei in gegebener Weise affin auf einander bezogene Ebenen $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ so zueinander legen, daß die eine durch Parallelprojektion aus der andern entsteht? Um das zu entscheiden, gehen wir von einem beliebigen Kreise in \mathcal{E} und der ent-



sprechenden Ellipse in \mathcal{E}' aus (wir können statt dessen auch zwei beliebige entsprechende Ellipsen verwenden); es entspricht dann dem Kreismittel-

punkt ab der Ellipsenmittelpunkt ab' . Wir legen nun den Kreis von \mathcal{E} in die Ebene \mathcal{E}' mit dem Zentrum nach ab' , so wird er die Ellipse entweder in 4 Punkten schneiden oder keinen Punkt mit ihr gemein haben; den Übergangsfall der Berührung wollen wir hier der Einfachheit halber nicht ausdrücklich berücksichtigen.

Im ersten Falle, den die Figur zeigt, fassen wir die beiden Ellipsendurchmesser ab' und $b'b'$ in \mathcal{E}' durch die 4 Schnittpunkte auf; ihnen entsprechen vorhinige unserer Affinität zwei Kreisdurchmesser ab und $b'b$ in \mathcal{E} , denen sie - so haben wir sie ja konstruiert - ebenfalls noch gleich sind. Daher sind nach einer allgemeinen Eigenschaft der Affinitäten (Nr. 4 S. 162), überhaupt entsprechende Strecken auf den Geraden ab und ab' , bzw. $b'b$ und $b'b'$ gleich. Legen wir nun die Ebene \mathcal{E} so auf \mathcal{E}' , daß ab nach ab' fällt und einer dieser Geradenpaare, etwa ab und ab' , zusammenfallen, und drehen \mathcal{E} um diese Gerade als Achse in der Raum hinaus, so haben wir eine affine Transformation der beiden Ebenen, bei der jeder Punkt der Schnittgeraden sich selbst entspricht. Man kann dann leicht zeigen - ich führe wiederum den Beweis nicht im einzelnen aus - daß, gleichgültig, welchen



Winkel die Ebenen bilden, die Verbindungslinien entsprechender Punkte sämtlich untereinander parallel sind, d. h. dass sich die Affinität der Ebenen in der Tat durch Parallelprojektion erzeugen lässt.

Schneidet unser Kreis aber die Ellipse nicht, d. h. ist sein Radius kleiner als die kleine oder größer als die große Halbachse der Ellipse, so werden - in der Sprache der Analysis - jene beiden gemeinsam Durchmesser imaginär, und für den Zeichner sind sie überhaupt nicht vorhanden; die ganze Konstruktion ist unmöglich. Dann bleibt, wenn man doch zu einer Herstellung durch Parallelprojektion gelangen will, nichts übrig, als eine Abbildlichkeits-Transformation zu Hilfe zu nehmen und den Kreis soweit zu vergrößern oder zu verkleinern, bis der vorige Fall eintritt; solche Abbildlichkeits-Transformationen verwendet man ja als „Umzeichnungen der Bilder in einen andern Maßstab“ beim Entwerfen von Bildern ohnehin stets. Wir gelangen so schließlich zu dem Haupttheorem, dass sich jede affine Verwandtschaft zweier Ebenen auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Kombination einer Abbildlichkeits-Transformation und einer Parallelprojektion herstellen lässt. -

Wiel interessanter und wichtiger als diese Abbildung

einer Ebene auf eine andere ist das Problem der Abbildung des ganzen Raumes auf eine Ebene durch Parallelprojektion, zu dem wir jetzt übergehen; wir wollen dabei, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, vorvornehmlich eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Bildes durch Abbildlichkeits-Transformation stets mit zulassen. So entsteht das in der darstellenden Geometrie als Axonometrie bezeichnete Verfahren, das in der Praxis eine außerordentlich bedeutende Rolle spielt. Jede Photographie ist nämlich eine Axonometrie, wenn der abgebildete Gegenstand nur hinreichend weit vom Apparat entfernt war, genau genommen ist sie eine Zentralprojektion; vor allem aber wird die genaue Axonometrie in allen Bereichen benutzt, wenn man räumliche geometrische Figuren, physikalische Apparate, Architekturteile u. dgl. abbilden will. Sehr interessante Beispiele aller möglichen solcher axonomischen Darstellungen, die auch für den Unterricht unmittelbar brauchbar sind, finden Sie in dem interessanten Leitfaden der Projektionslehre von C. H. Müller und O. Pressler; da sehen Sie z. B. wie man eine Fingerringbussole, einen Formelindikator, Kristalle der verschiedensten Art u. ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Leipzig 1903



oder, um noch Beispiele aus einem ganz andern Gebiet, der Biologie, anzuführen, Zellgewebe, einen Meeresstock und vieler andere axiometrische Korrekturen.

Lassen Sie mich nun sogleich den Satz angeben, der diese Axiometrie mit unsern vorhergehenden Überlegungen über Affinitäten in Zusammenhang bringt: Die Abbildung des Raumes vermittelt Parallelprojektion und Ähnlichkeitstransformationen (Axiometrie) auf eine Ebene wird analytisch durch eine affine Transformation mit verschwindender Determinante dargestellt:

$$(1) \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}, \text{ wo } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0;$$

das ist also gerade der Ausnahmefall, dessen Behandlung wir uns noch vorbehalten hatten. Sie sehen, wie wichtig diese „ausgearteten“ Transformationen sind, die man leider vielfach ungebührlich vernachlässigt. Es gilt nämlich auch die Umkehrung, daß jede solche Substitution mit $\Delta = 0$ eine axiometrische Abbildung ergibt; dabei sollen allerdings nicht etwa gar alle Koeffizienten der Substitution, oder auch nur alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung

aus ihnen verschwinden; denn dann würden sich noch weitere Voraussetzungen ergeben, die ich hier übergehen darf, da Sie sie selbst nach dem folgenden Muster leicht werden untersuchen können.

Überzeugen wir uns, um den Beweis unserer Behauptung zu führen, zunächst, daß tatsächlich alle durch (1) gelieferten Punkte $x' | y' | z'$ (für beliebige x, y, z) auf einer Ebene liegen, d. h. daß es drei Zahlen k_1, k_2, k_3 gibt, so daß identisch in x, y, z :

$$(2) \quad k_1 x' + k_2 y' + k_3 z' = 0.$$

Diese Identität ist aber äquivalent mit den 3 homogenen linearen Gleichungen:

$$(2') \quad \begin{cases} k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1 = 0 \\ k_1 a_2 + k_2 b_2 + k_3 c_2 = 0 \\ k_1 a_3 + k_2 b_3 + k_3 c_3 = 0 \end{cases}$$

und diese bestimmen bekanntlich gerade dann die Verhältnisse $k_1 : k_2 : k_3$ eindeutig, wenn die Koeffizientendeterminante Δ verschwindet, ohne daß alle 9 Unterdeterminanten Null sind; daher liegen tatsächlich alle Bildpunkte $x' | y' | z'$ in der durch die Gleichungen (2') bestimmten Ebene (2).

Wir wollen nun im Raume R' derart ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem einführen, daß diese Ebene (2) zur $x'-y'$ -Ebene ($z' = 0$) wird. Dann muß



jedem Punkte der R ein Punkt aus $\mathbb{C}' = \sigma$ entsprechen, und die Gleichungen unserer Affinität in den neuen Koordinaten haben daher notwendig die Form:

$$(3) \quad \begin{cases} x' = \sigma_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' = \sigma_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' = \sigma \end{cases}$$

Hierbei sind die 6 Konstanten $\sigma_1, \dots, \gamma_2$ durchaus willkürlich, da der speziellen Form der letzten Zeile wegen stets die Determinante verschwindet; und dürfen nicht alle 3 Unterdeterminanten aus ihnen verschwinden (d. h. es darf nicht $\sigma_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \sigma_2 : \beta_2 : \gamma_2$ sein), da sonst die anfangs ausgeschlossene weitere Betrachtung vorliegt.

Es will nun den Beweis, daß die so analytisch definierten Abbildungen der Räume R auf die $x'y'$ -Ebene \mathbb{C}' geometrisch tatsächlich mit den oben definierten axiomatischen Projektionen identisch sind, können in einzelnen Schritten darstellen, indem ich zugleich die Haupteigenschaften dieser Abbildung (3) ähnlich wie früher (S. 158ff) die der Affinitäten mit nicht verschwindender Determinante entwickle:

1) Zunächst ist klar, daß jedem Punkte $x|y|z$ des R eindeutig ein Punkt $x'|y'$ in \mathbb{C}' entspricht. Geben wir umgekehrt einen Punkt $x'|y'$ in \mathbb{C}' , so besagen

die Gleichungen (3), daß der entsprechende Punkt $x|y|z$ in R auf 2 bestimmten Ebenen liegt, deren Koeffizienten unserer Annahme nach nicht proportional sind, und die daher eine im Endlichen gelegene Schnittgerade haben; die sämtlichen Punkte dieser Geraden müssen dem gegebenen Punkte $x'|y'$ in unserer Transformation entsprechen. Variieren wir nun x', y' , so verschieben sich jene beiden Ebenen je parallel mit sich selbst, da die Koeffizienten $\sigma_1, \beta_1, \gamma_1$ bzw. $\sigma_2, \beta_2, \gamma_2$ un geändert bleiben. Also bleibt auch ihre Schnittgerade sich selbst parallel, und wir haben das Resultat, daß jedem Punkte von \mathbb{C}' die sämtlichen Punkte je einer von zweifach unendlich vielen Parallelgeraden in R entsprechen. Hiervon ist der Zusammenhang unserer Abbildung mit der Parallelprojektion des Raumes bereits angedeutet.

2) Genau wie unter Nr. 3 (S. 160f) bei der allgemeinen Affinität finden wir für die Konstanten der einen freien Vektor x, y, z von R entsprechenden Punkte x', y' in \mathbb{C}' die Formeln

$$(4) \quad \begin{cases} x' = \sigma_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' = \sigma_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' = \sigma \end{cases}$$

Das besagt aber wiederum, daß jedem freien Vektor

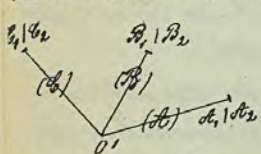


in R ein freier Vektor X', Y' derildebene \mathcal{E}' entspricht, oder genauer: Verschiebt man eine Strecke im Raume R irgendwie parallel mit sich unter Winkelterhaltung ihrer Größe und ihres Sinnes, so bewegt sich die entsprechende Strecke in der Ebene \mathcal{E}' gleichfalls parallel mit sich und behält ihre Länge und ihren Sinn bei.

3.) Wir betrachten speziell den Einheitsvektor auf der x -Achse $X = 1, Y = Z = 0$, der vom Punkte $0|0|0$ nach dem Punkte $1|0|0$ geht. Ihm entspricht in \mathcal{E}' nach (4) der Vektor

$$X' = A_1, Y' = A_2,$$

der vom Anfangspunkt $0'$ nach dem Punkt mit den Koordinaten $A_1 | A_2$ geht. Genau ebenso entsprechenden Einheitsvektoren der y - und z -Achse die beiden Vektoren von $0'$ nach dem Punkten $B_1 | B_2$ bzw. $C_1 | C_2$.

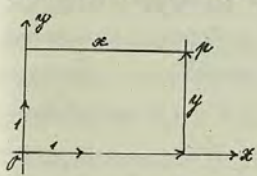


Diese drei Vektoren in \mathcal{E}' nennen wir sie kurz $(A), (B), (C)$ können nun ganz beliebig angewonnen werden, denn sie legen durch die Koordinaten

ihrer Endpunkte gerade die willkürlichen 6 Parameter der Affinität (3) fest, so daß durch sie die Abbildung vollkommen bestimmt ist; nur dürfen sie nicht etwa alle drei in die gleiche Gerade fallen, und wir wollen nur der Einfachheit halber vorstellen, daß auch

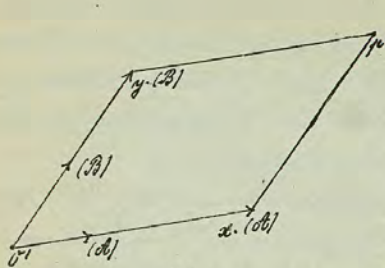
keine zwei von ihnen in einer Geraden liegen. Die 3 Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen der R werden also - das ist das Resultat - auf 3 beliebige Vektoren durch den Anfangspunkt $0'$ in \mathcal{E}' abgebildet, die ihrerseits die Affinität vollkommen bestimmen.

4.) Um nun auch geometrisch aus $(A), (B), (C)$ die Abbildung heranzustellen, gehen wir zunächst von irgend einem Punkte $p(x|y|z=0)$ der x - y -Ebene aus, wir erhalten den Vektor von $0'$ nach p , indem wir

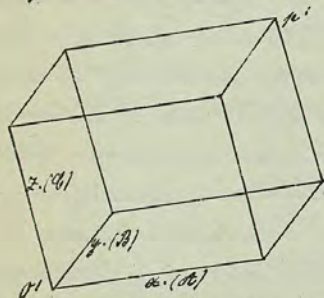


den Einheitsvektor der x -Achse mit der skalaren Zahl x und den den y -Achse mit der Zahl y multiplizieren und die Produktvektoren addieren. Diese Kon-

struktion können wir aber sofort auf \mathcal{E}' übertragen, da die Beziehung zwischen der x - y -Ebene und \mathcal{E}' offenbar eine gewöhnliche zweidimensionale Affinität (mit nicht verschwindender Determinante) ist. Wir erhalten also den Bildpunkt p' von p , indem wir den Vektor (A) mit x , den Vektor (B) mit y skalar multiplizieren und die Produkte nach dem Parallelogrammgesetz addieren. So können wir in \mathcal{E}' das Bild jedes Punktes der x - y -Ebene und so jeder Figur in



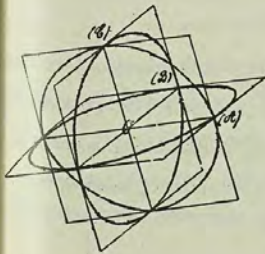
ihre punktweise Konstruktion.
 5.) Übertragen wir diese Überlegungen auf einen beliebigen Punkt des Raumes R , so ergibt sich leicht. Das Bild p' eines Punktes p mit den Koordinaten x, y, z entsteht durch Vektoraddition der bezüglich mit x, y, z multiplizierten Vektoren $(A), (B), (C)$ nach dem Parallelogrammgesetz. Wegen der Kommutativität der Addition kann man



dies auf 1, 2, 3 - 6 verschiedene Arten ausführen, und man erhält p' so als Endpunkt von 6 verschiedenen, aus parallelen und gleichen Stücken bestehenden Linienzügen; die von ihnen gebildete Figur ist offenbar das Abbild derjenigen rechtwinkligen Parallelepipedes des Raumes R , das von den 3 Koordinatenebenen und den durch p gelegten Parallelebenen zu ihnen begrenzt wird. Wir sind von Jugend auf gewohnt, derartige ebene Figuren sogleich als Bilder räumlicher aufzufassen, besonders wenn

dem Anschein nach durch Verstärkung der vorerwähnten Kanten nachgeholfen ist. Diese Gewohnheit ist so stark, daß uns diese Abbildung des Parallelepipedes fast trivial erscheint, während sie tatsächlich doch ein sehr bemerkenswertes Theorem darstellt.

6.) Mit Hilfe dieser letzten Konstruktion können wir nun in \mathcal{E}' das Bild jeder Raumfigur, d. h. aller ihrer Punkte herstellen. Folgt will dafür nur ein Beispiel betrachten: Haben wir eine Kugel mit dem Radius 1, nun den Anfangspunkt O' , so werden wir vor allem die Kreise auffassen, in denen sie die Koordinatenebenen schneidet. Für Schnittkreis in der $x-y$ -Ebene beispielsweise hat die Einheitsvektoren der x - und y -Achse an konjugierten, d. h. auf einander senkrechten Halbmessern; da eine affine Beziehung statt hat, entspricht ihm also eine Ellipse, die O' zum Mittelpunkt und die Vektoren (A) und (B) zu



konjugierten Halbmessern hat, die also dem aus den Vektoren 2. (A) und 2. (B) gebildeten Parallelogramm eingeschrieben ist. Ebenso haben die den anderen beiden Schnittkreisen entsprechenden Ellipsen O' zum Mittelpunkt und



(B) und (C), bzw. (Ab) und (Cb) zu konjugierten Halb-
messern.

7.) Nachdem wir uns so von der Natur dieser
Affinitäten (3) mit verschwindender Determinante ein
vollständiges Bild gemacht haben, haben wir noch
den letzten entscheidenden Schritt in unserer Betrachtung
zu tun, nämlich zu zeigen, daß jene Affinitäten
tatsächlich in der früher behaupteten Weise durch eine
normale Projektion entstehen. Dabei kommt hauptsächlich
der sog. Fundamentalsatz der Stereometrie von Pohlke
in Betracht, den H. Pohlke, Professor der darstellenden
Geometrie an der Panatskademie in Berlin, 1828
entdeckt und 1860 in seinem Lehrbuch der darstellenden
Geometrie¹⁾ veröffentlicht hat. Zu einer Abhandlung
vom Jahre 1863²⁾ hat H. St. Schwarz zum ersten Male
einen elementaren Beweis dieses Satzes publiziert
und gleichzeitig dessen interessante Entdeckungsgeschichte
ausführlich geschildert, die Sie dort nachlesen
mögen.

Pohlke selbst definiert nun die Stereometrie nicht
analytisch, sondern geometrisch als Abbildung der Raumebene
durch Parallelstrahlen (noch verbunden mit einer

1) 2. Aufl., 4. Aufl., Berlin 1876. - Der Satz findet sich Abb. 1, pag. 109.

2) Journ. f. reine u. angew. Math. Bd. 63, pag. 309. - Ges. mathem. Abhandl.
Abt. I (Berlin 1890), pag. 1.

Ähnlichkeitstransformation), sein Theorem sagt dann
aus, daß durch eine solche Abbildung die Einheitsvektoren
auf den Koordinatenachsen des Raumes in 3 beliebige
Vektoren der Ebene E' durch O' übergehen können.
Daß unsere analytisch definierte Abbildung tatsächlich
zu 3 beliebigen solchen Vektoren führt, können wir
in Nr. 3 leicht einsehen, für uns ist daher die
triefliedende Aussage des Pohlkeschen Satzes, daß
man unsere analytisch definierte Abbildung (3) geometrisch
durch Parallelprojektion und Hauptstabänderung erhält,
wobei die in Nr. 1 erwähnten Parallelgeraden zu
Projektionsstrahlen werden.

8.) Ich möchte hier noch den ungefähren Gang
für einen direkten analytischen Beweis des Satzes in
dieser Form andeuten. Fassen wir die beiden Ebenen
von Parallelen des R

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = \xi$$

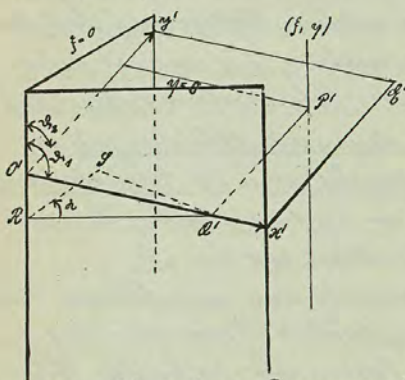
$$A_2 x + B_2 y + C_2 z = \eta$$

auf (wo ξ, η variable Parameter), so bestimmt jedes Wertepaar
 ξ, η eine der genannten Parallelgeraden; die Aufgabe
ist, in dem Raum R eineildebene E' und in sie ein
rechtwinkliges Koordinatensystem x', y' mit einem
passenden Hauptstab so zu legen, daß jeder Strahl
 ξ, η dieildebene E' im Punkte $x' = \xi, y' = \eta$, durchstößt;



dann wäre die Abbildung (3) tatsächlich in der gewünschten Weise geometrisch hergestellt.

Zu diesem Ende müssen zunächst die Ebenen $\xi = 0, \eta = 0$ jene Ebene ξ' in den Koordinatenachsen $O'x'$ bzw. $O'y'$, d. h. in aufeinander senkrechten Geraden schneiden; sind ν_1, ν_2 die (die Lage von ξ' bestimmenden) Winkel dieser Ebenen gegen die Gerade $\xi = \eta = 0$, und bezeichnen wir mit α den (bekannten) Winkel der Ebenen $\xi = 0, \eta = 0$, so ist nach dem Cosinussatz



der sphärischen Trigonometrie, angewandt auf das von den Ebenen $\xi = 0, \eta = 0$ und ξ' gebildete Dreieck, der Cosinus der Winkel der Geraden $O'x', O'y'$ gleich $\cos \nu_1, \cos \nu_2 + \sin \nu_1, \sin \nu_2 \cos \alpha$, und daher ist dieser Winkel ein Rechter, wenn

$$(a) \quad \operatorname{ctg} \nu_1 \cdot \operatorname{ctg} \nu_2 = -\cos \alpha.$$

Wenn schneidet jede Ebene $\sigma, x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \xi$ in ξ' eine Gerade $x' = \text{const. ein}$; ist α' ihr Schnitt mit der x' -Achse, so ist der zugehörige x' -Wert bis auf den noch zu bestimmenden Maßstabfaktor λ des Koordinatensystems in ξ' gleich $O'A'$. Füllen wir die Lote $O'P$ und $O'R$ auf die Ebene $\xi = 0$ bzw. die Gerade $\xi = \eta = 0$, so ist

$$O'A' = \frac{O'R}{\sin \nu_1}, \quad O'R = \frac{O'P}{\sin \alpha},$$

und da $O'P$ sich als senkrechter Abstand der beiden Ebenen $\sigma, x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0$ und $\sigma, x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \xi$ nach einer bekannten Formel der analytischen Raumgeometrie leicht ausdrückt, so folgt schließlich

$$x' = \lambda \cdot O'A' = \lambda \frac{O'P}{\sin \nu_1 \sin \alpha}.$$

Man analog ergibt sich als y' -Koordinate der von der Ebene $\sigma, x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \eta$ in ξ' eingeschrittenen Punkte

$$y' = \lambda \frac{\eta}{\sqrt{\beta_2^2 + \beta_1^2 + \gamma_2^2} \cdot \sin \nu_2 \cdot \sin \alpha}.$$

Damit nun, wie wir es ja wünschen, jeder durch die Parameterwerte ξ, η bestimmte Parallelstrahl die Ebene ξ' in dem Punkte $x' = \xi, y' = \eta$ durchstoßt, muß daher

$$(b) \quad \lambda = \sqrt{\beta_2^2 + \beta_1^2 + \gamma_2^2} \cdot \sin \nu_2 \cdot \sin \alpha = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_1^2} \cdot \sin \nu_1 \cdot \sin \alpha$$

sein, was für ν_1, ν_2 die zweite Gleichung

$$(c) \quad \sin \nu_1 \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_1^2} = \sin \nu_2 \sqrt{\beta_2^2 + \beta_1^2 + \gamma_2^2}$$

ergibt. Eine sehr einfache Rechnung zeigt, daß die Gleichungen (a), (c) nur ein einziges reelles bis auf Vorzeichen bestimmtes Lösungspaar $\operatorname{ctg} \nu_1, \operatorname{ctg} \nu_2$ besitzen, d. h. es gibt im wesentlichen nur eine (und die in Bezug auf die gemeinsame Normalebene von $\xi = 0, \eta = 0$



symmetrische) Lage der Ebene \mathcal{E}' in der die Affinität $x' = \xi, y' = \eta$ axonometrisch realisiert ist, wofür man den Maßstab des rechtwinkligen Koordinatensystems in \mathcal{E}' gemäß (4) wählt. Man kann diesen ganzen Gedankengang auch mehr geometrisch fassen, wenn man von der Bedingung ausgeht, daß die Eckenpunkte der x' - und y' -Achse auf die Geraden $\xi = 1, \eta = 0$ und $\xi = 0, \eta = 1$ fallen; dann liegt die Aufgabe vor, eine Ebene \mathcal{E}' zu finden, die ein gegebenes dreiseitiges Prisma in einem rechtwinklig-gleichschenkeligen Dreieck schneidet. -

Nach dieser ausführlichen Vorlegung brauche ich auf die früher gleichfalls schon ausgesprochene Kurzerklärung wohl kaum mehr näher einzugehen, daß jede axonometrische Projektion eine affine Transformation mit verschwindender Determinante darstellt. Man wird das leicht verifizieren, indem man ähnlich wie früher (§. 173) in der Projektionsebene \mathcal{E}' zunächst das durch die Parallelprojektion aus der x - und y -Achse von R entstehende schiefwinklige Koordinatensystem benutzt und dann nachträglich durch eine lineare Substitution zu dem in \mathcal{E}' vorvorherigen gegebenen rechtwinkligen Koordinatensystem übergeht. Indem ich damit endlich dieses Kapitel

von den Affinitäten beschließe, will ich Ihnen das Bestehen der axonometrischen Abbildung noch gewissermaßen experimentell dadurch anschaulich machen, daß ich durch den Lichtbogen unserer Projektionslampe (den wir uns unendlich fern denken mögen) Schattenbilder einiger einfacher Modelle, (Quadrat, Kreis, Ellipse, Würfel) auf der Projektionssehnen werfe; Sie finden da genau unsere Resultate und Figuren bestätigt und können insbesondere auch den Polhemschen Satz leicht experimentell nachprüfen, indem Sie das Schattenbild dreier aufeinander senkrechter Stangen durch Bewegung der Modelles sowohl wie auch der Projektionsebene allen möglichen Änderungen unterwerfen.

Wir gehen damit zu einem neuen Kapitel über, das von allgemeineren, die Affinitäten als Spezialfälle umfassenden Transformationen handelt:

I. Projektive Transformationen.

Statt hier möchte ich von vornherein den dreidimensionalen Raum vornehmen und stelle wieder 1) die analytische Definition der projektiven Transformation an die Spitze. Wir setzen jetzt x', y', z' nicht mehr als ganze, sondern als gebrochene lineare



Funktionen von x, y, z an, die nur sämtlich - das ist ganz wesentlich - einen und denselben Nenner haben müssen:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad x' &= \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\
 y' &= \frac{a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4} \\
 z' &= \frac{a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3}{a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4}
 \end{aligned}$$

Jedem Punkte x, y, z entspricht danach ein bestimmter endlicher Punkt x', y', z' , sofern nur der gemeinsame Nenner von Null verschieden ist. Nähert sich aber x, y, z der Ebene $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0$, so entfernt sich - das ist das Neue gegenüber der Affinität - der entsprechende Punkt x', y', z' ins Unendliche, er „entflieht“ gewissermaßen; man nennt jene Ebene daher Flüchtelebene, ihre Punkte Flüchelpunkte und sagt, daß sie in der projektiven Transformation dem Unendlich-weiten des Raumes, der sog. unendlichfernen Ebene, bzw. den unendlichfernen Punkten entsprechen.

2.) Bei der Behandlung der hier entstehenden Probleme ist es bekanntlich sehr zweckmäßig, homogene Koordinaten einzuführen, d. h. an Stelle der drei Punktkoordinaten x, y, z vier Größen ξ, η, ζ, τ zu

setzen, die durch die Gleichungen

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}, \quad z = \frac{\zeta}{\tau}$$

definiert werden; diese vier Größen sollen unabhängig von einander veränderlich sein, nur sollen sie nicht alle 4 gleichzeitig verschwinden, und keine von ihnen soll je-mals unendlich werden. Jedem Punkte x, y, z gehören dann noch unendlich viele Wertsysteme ξ, η, ζ, τ zu, wo τ ein willkürlicher Faktor ist; umgekehrt legt jeder Wertsystem ξ, η, ζ, τ , wo $\tau \neq 0$, einem bestimmten endlichen Punkt x, y, z fest (und alle Wertsysteme ξ, η, ζ, τ denselben Punkt). Nur wenn $\tau = 0$ ist, wird mindestens einer der Quotienten x, y, z unendlich, und man setzt demgemäß fest, daß jeder Wertsystem $\xi, \eta, \zeta, \tau = 0$ einen „unendlichfernen Punkt“ bedeuten soll, und zwar alle Systeme $\xi, \eta, \zeta, \tau = 0$ einen und denselben Punkt; hiermit sind in präziser analytischer Weise die Punkte eingeführt, die man als „unendlichferne“ den gewöhnlichen endlichen Punkten linearanzugehen pflegt.

Für Operieren mit homogenen Koordinaten hat erfahrungsgemäß jedenfalls für den Anfang und manchmal auch späterhin etwas Unbehagliches; ich glaube, daß das gewissermaßen Unbestimm-

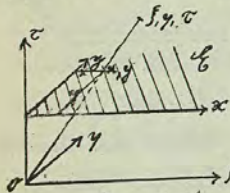


te, Fließende dieser Größen, das der willkürliche Faktor ρ mit sich bringt, davon schuld ist, und es mag vielleicht zur Beseitigung dieses Unbekannten beitragen, wenn das einmal deutlich ausgesprochen wird.

Zu demselben Zwecke wird es gut sein, hier einige Bemerkungen über gewisse geometrische Vorstellungen anzuschalten, die man mit den homogenen Koordinaten verbinden kann. Ich spreche da zunächst nur von einer Ebene \mathcal{E} , wo wir für die zwei rechtwinkligen Koordinaten

$$x = \frac{\xi}{\tau}, \quad y = \frac{\eta}{\tau}$$

setzen. Wir wollen ξ, η, τ als rechtwinklige Koordinaten eines Raumes denken und in diesem Raume die Parallelebene $\tau = 1$ zur $\xi - \eta$ -Ebene als die Ebene \mathcal{E} auffassen, indem wir in ihr $x = \xi$, $y = \eta$ setzen. Verbinden wir nun



den Punkt x, y von \mathcal{E} mit τ durch einen geraden Strahl, so ist auf ihm bekanntlich $\frac{\xi}{\tau}$ und $\frac{\eta}{\tau}$ konstant, und zwar muß

$$\frac{\xi}{\tau} = x, \quad \frac{\eta}{\tau} = y$$

sein, da ja gerade für $\tau = 1$ $\xi = x$ und $\eta = y$ sein sollte. Die Einführung homogener Koordinaten bedeutet hier

nach einfach die Abbildung der Ebene \mathcal{E} auf das sie aus dem Nullpunkt $\tau = 0$ des dreidimensionalen Hilfsraumes projizierende Strahlenbündel: die homogenen Koordinaten eines Punktes sind die Raumkoordinaten der Punkte des ihm projizierenden Strahles; die des Bündels; da jedem Punkt von \mathcal{E} die unendlich vielen Punkte des Strahles zugehören, ist die Bedeutung der Unbestimmtheit der homogenen Koordinaten völlig klar gestellt. Daß das Wertesystem $\xi - \eta - \tau = 0$ ausgeschlossen ist, hat seinen geometrischen Grund darin, daß durch den Punkt $\tau = 0$ allein noch kein Strahl und daher kein Punkt in \mathcal{E} bestimmt ist. Auch daß wir keine unendlichen Werte ξ, η, τ brauchen, ist selbstverständlich, da wir alle Strahlen bereits durch Verbindung von $\tau = 0$ mit im Endlichen gelegenen Punkten erhalten. Und endlich wird anschaulich, wie wir das Unendlichferne der Ebene vermeiden, indem wir es durch die in $\tau = 0$ gelegenen Parallelstrahlen durch $\tau = 0$ ersetzen.

Auch die bekannte Sprechweise von der unendlich fernem Geraden erhält hier einen anschaulichen geometrischen Inhalt. Analytisch ist sie nur der Ausdruck der abstrakten Analogie, daß alle „unendlich fernem Punkte“ der linearen Gleichung $\tau = 0$ genügen,



genau wie jede endliche Gerade eine lineare Gleichung besitzt. Jetzt können wir aber ganz geometrisch sagen: jeder Geraden von \mathcal{C} gehört im Bündel \mathcal{O} ein ebener Strahlenbüschel zu, und umgekehrt bestimmt jedes ebene Strahlenbüschel im Bündel \mathcal{O} eine Gerade in \mathcal{C} - abgesehen von dem ebenen Büschel \mathcal{C}_0 , dann erscheint es zweckmäßig, auch den Fachbegriff der von ihm in der Parallelebene \mathcal{C} definierten Punkte als eine Gerade zu bezeichnen, und damit hat man eben „die unendlich ferne Gerade“.

Sowohl analoge Vorstellungen können wir uns bilden, wenn wir in einem dreidimensionalen Raum homogene Koordinaten einführen. Wir denken ihn uns als Durchschnitt $\tau=1$ eines vierdimensionalen Hilfsraumes ξ, η, ζ, τ und beziehen ihn auf das Strahlenbüschel, das ihn aus dem Nullpunkt des Hilfsraumes projiziert. Wir können dann alle weiteren Betrachtungen in fast wörtlicher Analogie zum vorigen ohne jede Schwierigkeit durchführen und insbesondere auch die Deutung der unendlich-fernen Elemente übertragen; natürlich ist dabei die Bemerkung des vierdimensionalen Raumes lediglich ein Mittel der bequemeren Ausdrucksweise, denn keineswegs ist gänzlich eine mystische Meinung beizumessen ist.

3.) Führen wir nun in den Gleichungen (1) der projektiven Transformation für beide Räume R, R' homogene Koordinaten ein, so können wir sie, da allenthalben derselbe Nenner auftritt, unter Einführung eines willkürlichen Proportionalitätsfaktors ρ' in die folgenden 4 Gleichungen zerfallen:

$$(2.) \begin{cases} \rho' \xi' = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta + d_1 \tau \\ \rho' \eta' = a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta + d_2 \tau \\ \rho' \zeta' = a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta + d_3 \tau \\ \rho' \tau' = a_4 \xi + b_4 \eta + c_4 \zeta + d_4 \tau \end{cases}$$

das ist, abgesehen vom willkürlichen Faktor ρ' , die allgemeinste homogene lineare Substitution in 4 Variablen und stellt also eine affine Verwandtschaft der beiden vierdimensionalen Hilfsräume P, P' dar, in dem wir nach dem Verfahren von Nr. 3 die homogenen Koordinaten konkret denken. Deutlicher läßt sich das wieder vorstellen, wenn wir uns von Haus aus auf eine Ebene beschränken; Die allgemeinste projektive Transformation einer Ebene erhalten wir, indem wir den Raum, der sie projizierenden Strahlenbüschels bei festgehaltenem Anfangspunkt \mathcal{O} einer sonst willkürlichen affinen Transformation unterwerfen und hinterher die Ebene mit dem transformierten Bündel schneiden. Dabei erhalten



wir allenthal dieselbe Projektivität, wenn wir, dem Faktor ρ' entsprechend, eine beliebige Ähnlichkeitstransformation des Raumes von O aus hinzufügen; denn diese führt jeden Strahl durch O , auf deren Schnitte mit der Ebene es für die Projektivität allein ankommt, in sich über.

Das Verfahren, das wir hier verwendet haben, indem wir die Hilfsräume P, P' benutzen, nennt man Prinzip der Projektionen und Schnitte; es erweist sich auch sonst vielfach als sehr nützlich, indem es - allgemein zu reden - kompliziertere Verhältnisse in Räumen von n Dimensionen durch Hilfsbetrachtungen in Räumen von $n+1$ Dimensionen einfacher und verständlicher erscheinen läßt.

4.) Wir haben nun die Transformationsgleichungen (2) umzukehren; die Determinantenlehre lehrt, daß auch ξ, η, ζ, τ lineare homogene Kombinationen von $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ sind, natürlich wieder mit einem willkürlichen Proportionalitätsfaktor ρ :

$$(3) \begin{cases} \rho \xi = a_1' \xi' + b_1' \eta' + c_1' \zeta' + d_1' \tau' \\ \rho \eta = a_2' \xi' + b_2' \eta' + c_2' \zeta' + d_2' \tau' \\ \rho \zeta = a_3' \xi' + b_3' \eta' + c_3' \zeta' + d_3' \tau' \\ \rho \tau = a_4' \xi' + b_4' \eta' + c_4' \zeta' + d_4' \tau' \end{cases}$$

vorausgesetzt nur, daß die Determinante von (2) nicht

verschwindet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die Wertsysteme ξ, η, ζ, τ und $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ entsprechen einander dann also eindeutig (bis auf jene gemeinsamen willkürlichen Faktoren).

Sie bemerke sogleich, wie Sie nach unserm Verfahren bei der Affinität sofort glauben werden, daß auch hier der Fall $\Delta = 0$ tatsächlich besonders interessant ist und nicht übergangen werden darf; er stellt eine Abbildung des Raumes auf eine Ebene dar, wie wir sie bei jeder Zentralprojektion, z. B. bei der Photographie haben. Zunächst wollen wir jedoch den allgemeinen Fall $\Delta \neq 0$ erledigen.

5.) Aus (2) und (3) geht sofort hervor, daß jedesmal, wenn zwischen ξ, η, ζ, τ eine lineare Gleichung besteht, eine solche auch zwischen $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ besteht, und umgekehrt. Jeder Ebene entspricht also eine Ebene, insbesondere z. B. entspricht der unendlichfernen Ebene von R' eine bestimmte im allgemeinen endliche Ebene in R , d. i. die früher bereits genannte Fluchtebene. So erweist sich die Sprechweise



von der unendlich fernen Ebene als äußerst zweckmäßig, da nur sie hier den Hinterschnitt solcher ausnahmslos gel-
tigen Sätze gestattet. - Weiter folgt unmittelbar, dass
jeder Geraden notwendig eine Gerade entspricht. Nach
der Möbiusschen Terminologie (S. 159) ist also jede pro-
jektive Transformation eine Kollineation.

6.) Nun ist aber das Schöne, dass dieser Satz um-
kehrbar ist: Jede Kollineation des Raumes, d. h. jede
eindeutige Transformation, die jeder Geraden eine
Gerade zuordnet und die noch gewissen fast selbstver-
ständlichen Bedingungen genügt, ist eine Projektivi-
tät (d. h. eine analytisch durch die Gleichungen (1)
bezw. (3) definierte Transformation).

Ich führe den von Möbius herrührenden Be-
weis dieses Satzes hier der Bequemlichkeit halber nur
für die Ebene aus; für den Raum würde er ganz
analog verlaufen. Der Gedankengang des Beweises
ist der: Wir entnehmen einer beliebigen vorgelegten Kollie-
niation 2 entsprechende Punktquadrupel, und vor-
den zunächst unter a.) zeigen, dass es stets eine Pro-
jektivität gibt, die zwei beliebige solche Quadrupel
ineinander überführt. Eine Projektivität ist aber
gleichfalls eine Kollineation, und wir werden ferner
unter b.) beweisen, dass es stets nur eine Kollineation

geben kann, in der sich dieselben Punktquadrupel ent-
sprechen. Also muss die Projektivität mit der vorgeleg-
ten Kollineation tatsächlich identisch sein, und das
enthält die Behauptung. - Nun zur Einzelausfüh-
rung der beiden Beweisteile!

a.) Wir bemerken, dass die Gleichungen der Projektivität in der Ebene

$$\rho' \xi' = a_1 \xi + b_1 \eta + d_1 \tau$$

$$\rho' \eta' = a_2 \xi + b_2 \eta + d_2 \tau$$

$$\rho' \tau' = a_3 \xi + b_3 \eta + d_3 \tau$$

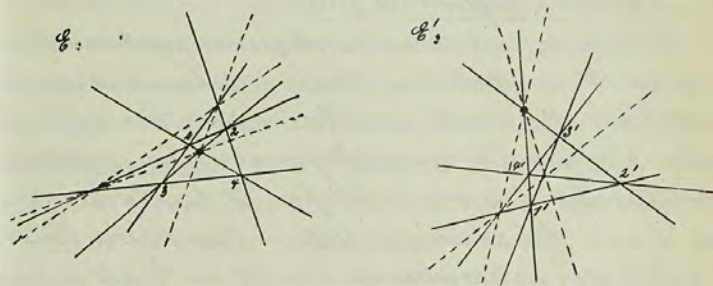
9-1 = 8 Konstante enthalten (da die Abänderung von
 ρ' die Transformation nicht ändert). Dass zwei vorge-
gebene Punkte einander in einer Projektivität ent-
sprechen, sind nun für diese 2 lineare Bedingungen,
da es nur auf die Verhältnisse der 3 homogenen Ko-
ordinaten ankommt. Das Entsprechen zweier Punkt-
quadrupel stellt also 2. 4 = 8 lineare Bedingungen
dar, genauer gesagt, 8 lineare homogene Gleichun-
gen für die 9 Größen a_1, \dots, d_3 . Solche Gleichun-
gen haben bekanntlich stets eine Lösung, und man
kann damit die Konstanten einer Projektivität
gewinnen, die die gegebenen Quadrupel in einander über-
führt. Dass dies freilich eine eigentliche Projektivi-
tät von nichtverschwindender Determinante, und



dass sie eindeutig bestimmt ist, kann man - wie leicht zu sehen - nur garantieren, wenn jedes der beiden gegebenen Punktquadrupel, in allgemeiner Lage sich befindet, d. h. wenn keine 3 der 4 Punkte in gerader Linie liegen; nur für diesen Fall brauchen wir hier den Satz.

b.) Wir denken uns nun eine beliebige Kollineation der Ebenen \mathcal{E} , \mathcal{E}' gegeben. Sind dann 1, 2, 3, 4 irgend vier Punkte in \mathcal{E} von denen keine drei in gerader Linie liegen, und sind 1', 2', 3', 4', die entsprechenden Punkte in \mathcal{E}' , so ist die Behauptung, dass die Kollineation durch das Entsprechen dieser beiden Punktquadrupel völlig eindeutig festgelegt ist. Den Beweis führen wir, indem wir zeigen, dass sich die Kollineation aus diesen beiden entsprechenden Quadrupeln allein unter Bestimmung ihrer beiden charakteristischen Eigenschaften (Eindeutigkeit und gegenseitiges Entsprechen von Geraden) in eindeutig bestimmter Weise aufbauen lässt. Als Haupthilfsmittel verwenden wir die sog. Hölinerschen Netze, das sind Systeme von Geraden, die wir gleichsam wie die Netze einer Spinne über die Ebene ausspannen.

Zunächst ziehen wir in jeder Ebene die 6 die 4 gegebenen Punkte paarweise verbindenden Geraden;



sie müssen einander in der Kollineation entsprechen, denn z. B. der Geraden 1 2 muss in \mathcal{E}' genau eine Gerade zugeordnet sein, die sowohl den 1 korrespondierenden Punkt 1' als auch den 2 korrespondierenden 2' enthält, und das kann nur 1' 2' sein. Ebenso müssen aber nun auch notwendig die neben den 4 Grundpunktern neu entstehenden Schnitte entsprechender Geraden sich entsprechen, z. B. der Punkt (14, 23) und (1'4', 2'3'); auch das folgt sofort aus der Kollinearität und der Eindeutigkeit. Verbinden wir diese neuen Punkte mit einander wieder durch Geraden, schneiden sie miteinander, verbinden obermals, und setzen dieses Verfahren immer fort, so entsteht schließlich in jeder Ebene ein immer dichter werdendes Netz von



Punkten und Geraden, und diese Punkte und Geraden müssen in der gesuchten Kollineation notwendig einander paarweise zugeordnet sein.

Hält man nun einen beliebigen vorgegebenen Punkt etwa in \mathcal{C} , so wird er entweder selbst einmal ein Eckpunkt des Netzes oder man kann ihn, wie man sich leicht klar macht, in unbegrenzt enger werdende Maschen des Netzes einschließen, d. h. als Grenzpunkt von Netzen darstellen. Im ersten Falle ist sofort der entsprechende Punkt in \mathcal{C}' als entsprechende Netzstelle eindeutig bestimmt; um den zweiten zu erledigen, müssen wir aber noch einen Zusatz zur Definition der Kollineation machen, der übrigens noch so selbstverständlich erscheint, daß er ihn nicht ausdrücklich aussprechen für nötig hielt. Sie soll nämlich eine stetige Abbildung sein, d. h. jedem Grenzpunkt einer Punktmenge in \mathcal{C} soll der Grenzpunkt der entsprechenden Punktmenge in \mathcal{C}' korrespondieren. Daraus folgt dann auch im zweiten Falle nach der vorhergehenden Bemerkung offenbar eindeutig der entsprechende Punkt in \mathcal{C}' . Damit ist dann schließlich unsere Behauptung b.) für eine stetige Kollineation als richtig erkannt. Übrigens würde man ebenso beweisen, daß eine stetige Kollineation

im Raume durch 5, allgemein in n -dimensionalen Raume durch $n+2$ Paare entsprechender Punkte bestimmt ist.

Rufen wir uns nun die Überlegung vom Beginn dieser Nr. 6.) zurück (S. 200), so haben wir als Resultat folgendes präzisierendes Theorem gewonnen: Die projektiven Transformationen sind die einzigen stetigen, eindeutigen Transformationen, die ausnahmslos Gerade in Gerade überführen. —

Nach dieser Abschweifung sehen wir die in Nr. 5.) (S. 199) begonnene Untersuchung des Verhaltens der geometrischen Grundgebilde bei einer projektiven oder, wie wir jetzt in gleicher Bedeutung sagen können, kollinearen Transformation fort. Wir hatten da gesehen, daß eine unbegrenzte Ebene oder Gerade durch eine Projektivität in ein Gebilde der gleichen Art übergeführt wird, so daß diese Begriffe also den Projektivitäten gegenüber eine unveränderliche bestimmte Bedeutung haben. In dieser Eigenschaft stimmen die allgemeinen Projektivitäten mit den affinen Transformationen überein; sie unterscheiden sich aber von diesen bereits durch ihr 4.) Verhalten gegenüber dem Begriffe des Parallelinnen. Bei projektiven Transformationen bleibt



nämlich der Parallelismus zweier Geraden nicht mehr notwendig erhalten, wie das bei affinen noch der Fall war (vgl. S. 161). Vielmehr kann ja die unendlich ferne Ebene des einen Raumes in irgend eine im Endlichen gelegene Ebene des andern, dessen Fluchtebene, übergehen, und dabei entspricht dem dem bei den Parallelen gemeinsamen unendlichfernen Punkte im allgemeinen ein im Endlichen gelegener Punkt der Fluchtebene, in dem sich dann die den beiden Parallelen korrespondierenden Geraden schneiden; man kann das etwa mit Hilfe der homogenen Koordinaten genau verfolgen. Freilich sehen wir dabei auch, daß der Begriff des Parallelismus nicht sinnlos zerstört wird, sondern daß er in einer ganz bestimmten allgemeinen Anschauung aufgelöst: Die unendlich fernen Punkte des Raumes erfüllen eine Ebene, die projektiv in jede andere (endliche) Ebene des Raumes übergeführt werden kann und daher mit allen diesen Ebenen durchaus gleichberechtigt erscheint; sie ist nur gewissenmaßen willkürlich durch das Prädikat „die unendlich ferne“ ausgezeichnet. Parallel heißen dann Geraden (oder auch Ebenen), deren Schnitt auf dieser ausgezeichneten Ebene liegt; eine projektive Um-

formung kann bewirken, daß sie sich auf einer anderen festen Ebene treffen, und dann nennt man sie eben nicht mehr parallel.

Mit dieser Eigenschaft steht nun im Zusammenhang, daß auch die Grassmannschen Grundgebilde der Projektivitäten gegenüber keine invariante Bedeutung mehr haben; der freie Vektor wird keineswegs mehr in einen freien Vektor, der linienflüchtig nicht mehr in einen linienflüchtigen übergeführt, u. s. f. In der Tat betrachten wir einen Linienanteil des R mit den 6 Koordinaten:

$x = x_1, x_2, y = y_1, y_2, z = z_1, z_2, \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \mu = \mu_1, \mu_2, \nu = \nu_1, \nu_2$ und bilden die analogen Größen K_1, \dots, K_6 aus den Koordinaten der vermöge der projektiven Transformation (1) (S. 192) entsprechenden Punkte s', t' :

$$x'_1 = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + d_1}{a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4} \text{ et. c.}, \quad x'_2 = \frac{a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1 z_2 + d_1}{a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4} \text{ et. c.}$$

Durch diese Formeln gehen K_1, \dots, K_6 in Brüche über, deren Zähler sich zwar als lineare Kombinationen der 6 Größen K_1, \dots, K_6 allein mit konstanten Koeffizienten darstellen, während der allen gemeinsame Nenner

$(a_4 x_1 + b_4 y_1 + c_4 z_1 + d_4)(a_4 x_2 + b_4 y_2 + c_4 z_2 + d_4)$ die Punktkoordinaten selbst enthält und sich nicht durch K_1, \dots, K_6 allein ausdrücken läßt. Die Koordinaten des transformierten Linienanteils hängen also



nicht nur von denen des ursprünglichen ab, sondern auch von der speziellen Lage seines Anfangs- und Endpunktes, und wenn wir die Strecke (1, 2) längs ihrer Geraden verschieben, so daß sich K, \dots, N nicht ändern, so wird sich im allgemeinen K', \dots, N' doch ändern, d. h. die Strecke (1', 2') ist kein Bruchteil im Grassmannschen Sinne.

Daß dementsgegen die unbegrenzte Gerade bei projektiven Transformationen als solche erhalten bleibt, erklärt sich in diesem Zusammenhange so, daß sie durch die Verhältnisse der Größen $K:Y:\dots:N$ dargestellt wird, aus denen sich der allen 6 Größen gemeinsame störende Nenner wieder forthebt; es drücken sich also diese Verhältnisse tatsächlich allein durch die Verhältnisse $K:Y:\dots:N$ aus.

8.) Ich habe nun noch einige wichtige Gebilde zu nennen, die durch projektive Transformationen wieder in Gebilde derselben Art übergehen. Zunächst geht jede quadratische Gleichung in x', y', z' , wie man durch Multiplikation mit dem Quadrat des gemeinsamen Nenners $a_x x + b_y y + c_z z + d_4$ sieht, aus einer quadratischen Gleichung in x, y, z hervor und umgekehrt, das besagt, daß jeder unbegrenzten Fläche zweiter Ordnung in einem Raume R eine

ebensolche in R' entspricht; daher wird auch der Schnitt einer solchen Fläche mit einer Ebene, d. h. eine Kurve zweiter Ordnung, gleichfalls in eine Kurve zweiter Ordnung übergeführt. Ebenso wird überhaupt jedes unbegrenzte algebraische Gebilde, das durch eine oder mehrere Gleichungen in den Koordinaten definiert ist, in ein gleichartiges Gebilde derselben Ordnung transformiert; diese Gebilde sind also gegenüber projektiven Umformungen invariant.

9.) Neben diesen durch Gleichungen definierten invarianten Gebilden muß ich noch eine salutemündige Größe hervorheben, deren Wert bei allen projektiven Transformationen ungeändert bleibt; sie bietet einen gewissen Ersatz des Begriffes der Entfernung und des Winkels, deren Werte ja bekanntlich schon nicht einmal bei affinen Transformationen, geschweige denn bei projektiven invariant sind. Es handelt sich hier, um zuerst von der Geraden zu reden, um eine gewisse Funktion der Entfernungen von 4 irgendwie gelegenen Punkten 1, 2, 3, 4, nämlich das schon früher erwähnte Doppelverhältnis oder Doppelverhältnis¹⁾ (vgl. §. 14):

$$\frac{\frac{12}{14} : \frac{32}{34}}{\frac{12}{14} : \frac{34}{32}}$$

¹⁾ Der erste Name stammt von Möbius; der zweite von Steiner.



In der Tat kann man die Invarianz dieser Größe leicht rechnerisch bestätigen, wie wir übrigens später noch einmal von andern Gesichtspunkten aus tun werden.

Ganz analog ist es bei den Strahlenbüscheln, nur müssen wir da nicht die Winkel selbst, sondern ihre Sinus verwenden, also, wenn 1, 2, 3, 4 Strahlen oder Ebenen eines Büschels sind:

$$\frac{\sin(1,2)}{\sin(1,4)} : \frac{\sin(3,2)}{\sin(3,4)} = \frac{\sin(1,2)\sin(3,4)}{\sin(1,4)\sin(3,2)}$$

Da doch die ersten zahlenmäßigen Invarianten projektiver Transformationen waren, die man kennen lernte, betrachteten es die projektiven Geometer sehr vielfach als erstrebenswertes Ziel, alle weiteren Invarianten der Projektivitäten auf Doppelverhältnisse zurückzuführen, wenn das auch manchmal nur sehr künstlich ging; wir werden später auf diese Bemerkungen eingehender zurückkommen. -

Diese wenigen Andeutungen werden genügen, um Ihnen zu zeigen, wie man das ganze Material der Geometrie nach ihrem Verhalten gegenüber den projektiven Transformationen streng scheiden kann. Alles, was bei solchen Umformungen erhalten bleibt, das bildet den Gegenstand jener im letzten Jahrhundert entstandenen projektiven Geometrie, von der ich

früher schon sprach, und auf die wir weiterhin noch tiefer eingehen haben werden. Dieser Name, der jetzt allgemein üblich ist, ist besser als der früher viel gebrauchte „Geometrie der Lage“, mit dem man den Gegensatz zu der die sämtlichen, auch die nicht projektiv-invarianten geometrischen Eigenschaften umfassenden „Geometrie des Maßes“ oder „elementaren Geometrie“ bezeichnen wollte; denn der ältere Name verdeckt ganz und gar, daß auch manche Maßesigenschaften, insbesondere die Werte der Doppelverhältnisse, hierhin gehören. -

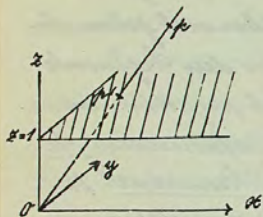
Sie möchte nun noch, genau wie früher bei den Affinitäten, über die Anwendungen der projektiven Transformationen sprechen. Ich beginne hier mit Ausführungen zur

1) darstellenden Geometrie und kann da natürlich lediglich unter Verzicht auf jede Systematik einige charakteristische Beispiele hervorheben. Das erste sei

a.) die Abbildung des Raumes durch Zentralperspektive auf eine Ebene, die die direkte Vorlage-meinung der Axonometrie (Parallelperspektive) ist; hier gehen die Projektionsstrahlen von einem beliebigen endlichen statt von einem unendlich fernen



Punkte aus. Wir wollen das Projektionszentrum speziell in den Koordinatenanfang O legen und die Bildebene zur Ebene $z = 1$ machen. Dann ist für den Bildpunkt $p'(x' | y' | z')$ jedes Punktes $p(x | y | z)$ jedenfalls



und ferner ist, da p, p' auf demselben Strahl durch O liegen:

$$x' : y' : z' = x : y : z.$$

Daher lauten die Gleichungen unserer Abbildung

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{z} \\ y' &= \frac{y}{z} \\ z' &= \frac{z}{z} \end{aligned}$$

Das ist also eine spezielle projektive Transformation, und die Analogie zu den Verhältnissen bei der stereometrischen läßt bereits vermuten, daß sie eine verschwindende Determinante besitzen wird. In der Tat, gehen wir zu homogenen Koordinaten über, so wird

$$\begin{cases} p' \xi' = \xi \\ p' \eta' = \eta \\ p' \zeta' = \zeta \end{cases},$$

und die Determinante ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die einzelnen Eigenschaften dieser Transformation werden sich nach Analogie unserer früheren Betrachtungen leicht ableiten können, wenn Sie nur bemerken, daß jede Ebene auf die Bildebene im allgemeinen durch eine projektive (zweidimensionale) Transformation von nichtverschwindender Determinante bezogen ist. Daraus folgt insbesondere z.B., daß das Doppelverhältnis von je 4 entsprechenden Punkten einer Geraden oder je 4 Strahlen durch einen Punkt bei der Transformation ungewandelt bleibt.

b.) Das zweite Beispiel betrifft eine die Zentralperspektive als Grenzfall einschließende Projektivität von nichtverschwindender Determinante, die sog. Reliefperspektive. Ein Relief einer Gegenstands soll so gearbeitet sein, daß es nach dem an einem bestimmten Punkte aufgestellten Auge des Beschauers dieselben Strahlen sendet, wie sie das Original nach dem entsprechend aufgestellten Beobachter gehen lassen würde. Für ein geeignet orien-



Viertes Koordinatensystem besagt das wieder, daß Originalpunkt und Bildpunkt je auf demselben Strahl durch den Aufangspunkt liegen:

$$(1) \quad x' : y' : z' = x : y : z.$$

Der Unterschied gegen den vorigen Fall ist aber, daß der betrachtete Raum nicht in eine Ebene abgebildet, sondern nur auf ein gewisses schmales Raumstück endlicher Breite komprimiert wird.

Sich behauptet sogleich, daß das durch die folgenden Formeln:

$$(2) \quad x' = \frac{(1+k)x}{z+k}, \quad y' = \frac{(1+k)y}{z+k}, \quad z' = \frac{(1+k)z}{z+k}$$

geleistet wird, die zunächst jedenfalls eine Kollimation darstellen und offenbar den Gleichungen (1) genügen. Wir bilden ihre Determinante aus den zugehörigen homogenen Gleichungen

$$\begin{cases} g' f' = (1+k) f \\ g' y' = (1+k) y \\ g' f' = (1+k) f \\ g' z' = f + k \cdot z \end{cases};$$

sie lautet

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k(1+k)^3$$

und ist also von Fall verschieden, außer wenn $k = 0$ oder $k = -1$ ist.

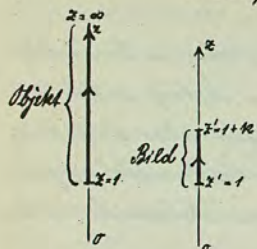
Für $k = 0$ geht (2) genau in die obigen Formeln der Zentralperspektive über, d. h. das Reliefartet vollständig zur Ebene aus; $k = -1$ ergibt aber $x' = y' = z' = 0$, d. h. jeder Raumpunkt wird in den Nullpunkt abgebildet - eine offenbar gänzlich unbrauchbare triviale Auswertung.

Wir nehmen der Bestimmtheit halber $k > 0$ an. Um die Abbildung (2) nun geometrisch klar zu machen, bemerken wir zunächst, daß jede Ebene $z = \text{const.}$ in eine Parallelebene mit dem Koordinatenwert

$$(3) \quad z' = \frac{(1+k)z}{z+k}$$

übergeht; die durch Projektionsstrahlen aus Torsfolgende Abbildung beider Ebenen aufeinander ist durchaus anschaulich, und nur das Gesetz (3) selbst bleibt noch zu verdeutlichen.

Für $z = \infty$ (bzw. $z = 0$) wird $z' = 1+k$; die Parallelebene zur $x-y$ -Ebene im Abstände $1+k$ ist also die Fluchtebene des Bildraumes und bildet gewissermaßen den Hintergrund des Reliefs, auf dem der unendlichferne Hintergrund des Objektraumes abgebildet erscheint. Eine wichtige Rolle spielt wohl die Ebene $z = 1$, in der Objekt und Bild zusammenfallen; denn



tatsächlich wird für $z=1$ auch $z'=1$. Läuft nun z von 1 wachsend bis zu ∞ , so wächst z' monoton von 1 bis $1+k$, d. h. beschränken wir uns auf Objekte hinter der Ebene $z=1$, so erhalten wir tatsächlich ein Relief von endlicher Tiefe k als Bild; eine solche Beschränkung wird in der Praxis stets stattfindenden Körnern und unmissen.

Was sonst die Zuordnung (3) angeht, so gilt für das Doppelverhältnis der Punkte $z, 1, z', 0$:

$$\frac{z-1}{z-0} \cdot \frac{z'-0}{z'-1} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{(1+k)x}{k(z-1)} = \frac{1+k}{k}$$

Allgemein gehören also zwei solche Werte z, z' zusammen, die mit den Punkten 1 und 0 ein Doppelverhältnis von festem Betrage bilden.

Ich kann Ihnen hier noch ein Modell vorführen, das eine Kugel auf einem Würfel, einen Rotationskegel, und einen Rotationszylinder in Reliefperspektive darstellt, aus der richtigen Entfernung betrachtet, vermittelt es in der Tat einen sehr deutlichen Eindruck der Originalkörper. Hierbei spielen natürlich psychologische Momente sehr stark mit, denn die Tatsache, daß die gleichen Lichtstrahlen in ein Auge treten, vermag allein den körperlichen Eindruck nicht zu be-

stimmern; sehr maßgebend ist dabei jedenfalls die Gewöhnung, denn da wir weit öfter eine Kugel auf einem Würfel, als ein schmales Ellipsoid auf einem schmalen Hexaeder gesehen haben (das ist die Gestalt des reliefperspektivischen Bildes), so sind wir von vornherein geneigt, den Eindruckdruck auf die erstere Ursache zurückzuführen. Die nähere Eingliederung der hierbei in Betracht kommenden Momente wäge indessen dem Psychologen überlassen bleiben.

Das mag genügen, um Ihnen einen ersten Einblick in die Verwendung der projektiven Transformationen in der darstellenden Geometrie zu geben. Natürlich bedürfen diese Dinge dringend der Vertiefung, und ich möchte dies Gebiet nicht verlassen, ohne Sie zu einem eingehenden Studium der darstellenden Geometrie aufzufordern, die, wie mir scheint, für jeden Lehrer der Mathematik unentbehrlich ist. -

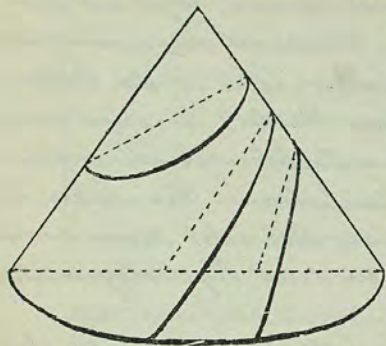
2.) Die zweite Anwendung der projektiven Transformationen, von der ich nun noch reden will, betrifft die Herleitung geometrischer Sätze und Auffassungen; analog hatten wir ja früher (S. 65 ff.) die affinen Transformationen verwendet.



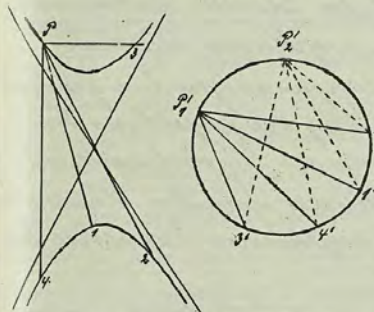
a.) Wir gehen davon aus, daß ein Kreis, wenn wir ihn projektiv umformen bzw. Zentralperspektiven unterwerfen, in einen beliebigen „Kegelschnitt“ übergeht, d. h. in dem Schnitt des Kegels durch ihn hinlaufenden Projektionsstrahlen mit einer beliebigen Ebene; ich habe hier ein Modell, das in dieser Weise die Entstehung von Ellipse, Hyperbel, Parabel zeigt.

b.) Für die projektive Geometrie gibt es also nur einen einzigen Kegelschnitt, denn je zwei lassen sich in den Kreis und daher auch ineinander projektiv überführen. Die Einteilung in Ellipse, Parabel, Hyperbel bezeichnet von diesem Standpunkt aus keinen absoluten inneren Unterschied, sondern betrifft nur die zufällige Lage gegen die eine Gerade, die man als „unendlich-fern“ für gewöhnlich auszeichnet.

c.) Nun soll der folgende Fundamentalsatz vom Doppelverhältnis bei Kegelschnitten abgeleitet werden: Jegend 4 feste Punkte eines Kegelschnitts



des 1, 2, 3, 4 werden von einem fünften beweglichen Punkte P desselben Kegelschnittes durch 4 Strahlen projiziert, die ein festes, von der speziellen Lage von P unabhängiges Doppelverhältnis haben.



Zum Beweise gehen wir auf den Kreis zurück, aus dem der betrachtete Kegelschnitt durch Zentralperspektive entsteht; da dabei die Doppelverhältnisse ungeändert bleiben, ist unser Satz allgemein jedenfalls richtig, wenn nur

beim Kreise die 4 entsprechenden Punkte 1, 2, 3, 4 aus beliebigen fünften Punkten P_1', P_2' durch Strahlen desselben konstanten Doppelverhältnisses projiziert werden. Das ist aber unmittelbar klar, denn nach dem Satze vom Peripheriewinkel sind die Winkel zwischen den Strahlen $P_1' (1, 2, 3, 4)$ einerseits und $P_2' (1, 2, 3, 4)$ andererseits paarweise gleich, und also sind es gewiß auch die aus dem Sinusdieser Winkel gebildeten Doppelverhältnisse der beiden Strahlenquadrupel.

e.) Entsprechend diesem Satz hat nun Steiner



überhaupt die Kegelschnitte definiert, indem er von zwei „projektiv aufeinander bezogenen“ Strahlenbüscheln ausging, in denen je 4 entsprechende Strahlen gleiches Doppelverhältnis haben; der Kegelschnitt ist dann der geometrische Ort der Schnitte korrespondierender Strahlen aus diesen projektiven Büscheln.

Diese wenigen Andeutungen mögen hier genügen, um Ihnen die große Bedeutung der projektiven Transformationen für die Theorie der Kegelschnitte verständlich zu machen. Näheres darüber können Sie in jedem Lehrbuche der projektiven Geometrie finden.

Wir gehen jetzt in dem großen Gedankengange dieses Hauptteiles weiter zu neuen Klassen geometrischer Transformationen, die nicht mehr zu den linearen Transformationen gehören, welche wir bisher von den Bewegungen bis zu den allgemeinsten Projektivitäten aufsteigend betrachtet haben.

III. Höhere Punkttransformationen.

Wir werden nämlich jetzt solche Transformationen untersuchen, die nicht mehr durch lineare, sondern durch höhere rationale, algebraische oder auch transcendente Funktionen dargestellt werden:

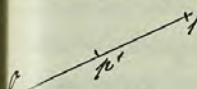
$$x' = \varphi(x, y, z), \quad y' = \chi(x, y, z), \quad z' = \psi(x, y, z).$$

Gemäß der Tendenz dieser Vorlesung will ich hier keine allgemeine Systematik geben, sondern nur eine Reihe besonderer Beispiele hervorheben, die eine allgemeine Bedeutung in der reinen Mathematik sowie vor allem auch in den Anwendungen haben.

Zunächst muß ich da von der wohl am meisten gebrauchten Transformation reden:

1. Die Transformation durch reziproke Radialen.

Bei ihr wird bekanntlich jedem Punkte p derjenige Punkt p' auf seiner Verbindungsgeraden Op mit dem Koordinatenanfang O zugeordnet, für den das Produkt $Op \cdot Op'$ gleich einer gegebenen Konstanten ist; diese Gleichung gibt der Transformation auch ihren Namen.



Sie wissen, daß diese Transformationen in der reinen Mathematik vorzugsweise in der Funktionsentheorie komplexer Variabler eine große Rolle spielen. Nicht minder häufig kommen sie aber in der Physik und anderen Anwendungen — von einer Anwendung von der wir noch ganz besonders sprechen — vor.

Bei der Behandlung unserer Transformationen gehe ich wiederum aus-



1) von der Aufstellung ihrer Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten. Da p und p' auf derselben Geraden durch O liegen, muß sein

$$(1) \quad x' : y' : z' = x : y : z,$$

und die Relation für die Aufformungen Op , Op' ergibt, wenn wir die Konstanz der Einfachheit halber setzen:

$$(2) \quad (x^2 + y^2 + z^2) / (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 1,$$

Terminale lauten die Gleichungen der Transformation:

$$(3) \quad x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad z' = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

und genau so ergibt sich, daß auch umgekehrt

$$(4) \quad x = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad y = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad z = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Sowohl die Koordinaten von p' stellen sich also als rationale Funktionen von p dar, als auch umgekehrt die Koordinaten von p durch die von p' (und zwar sind es beidemal dieselben Funktionen). Der Nenner ist ein quadratischer Ausdruck; es liegt hier ein spezieller Fall einer sog. quadratischen birationalen Transformation vor. Übrigens gibt es eine ausgedehnte Klasse solcher birationaler (im allgemeinen ein-eindeutiger) Transformationen, die in beiden Richtungen sich durch rationale Funktionen darstellen; sie sind unter dem Namen Cremona-Transformationen Gegenstand einer weit ausgebildeten Theorie geworden, auf die ich hier

bei der Behandlung ihres einfachsten Repräsentanten wenigstens hinweisen will.

2) Die Gleichungen (3), (4) zeigen, daß jedem Raumpunkt p ein Punkt p' und umgekehrt jedem p' ein Punkt p zugeordnet ist, mit Ausnahme zunächst des Nullpunktes. Läßt man aber x, y, z gleichzeitig sich der O nähern, so verschwindet der Nenner in (3) von höherer Ordnung als die Zähler, und daher werden x', y', z' unendlich; wir könnten den Nullpunkt also einen Fluchtpunkt der Transformation nennen. Gehen umgekehrt x', y', z' irgendwie ins Unendliche, so werden nach (4) stets x, y, z gleich Null; wollten wir uns also der früher eingeführten Terminologie bedienen, so müßten wir sagen, daß ein einziger Punkt der ganzen unendlich ferne Ebene entspricht. Aber diese „unendlich ferne Ebene“ war ja nur eine bequeme Ausdrucksweise, die den projektiven Transformationen angepaßt war; sie deutete an, daß sich bei diesen Transformationen das Unendlichweite verhält wie eine Ebene, d. h. in die Punkte irgend einer endlichen Ebene übergeführt wird, und sie ermöglicht es, Ausnahmen von den allgemeinen Sätzen und Fallunterscheidungen durchaus zu vermeiden. Es liegt kein Grund vor, der uns hindert, hier eine



davon verschiedene ausdrucksweise einzuführen und durch sie für unseren jetzigen Zweck zu ebenso ausnahmslosen Sätzen zu gelangen: Das Unendlichweite wird durch unsere Transformation in einen Punkt übergeführt; also sagen wir einfach, es gibt nur einen unendlichfernen Punkt, und der entspricht bei unserer Transformation eben dem Koordinatenanfangspunkt. Ferner ist unsere Transformation faktisch ausnahmslos eindeutig.

Man kann nicht genug betonen, daß an metaphysische Vorstellungen über die wahre Natur der Unendlichfernen hier ebenso wie früher nicht in ersterinstanz gedacht werden soll; es gibt allerdings immer wieder Menschen, die an die eine oder andere Redeweise vorzugsweise gewöhnt, ihr einen transzendenten Sinn unterlegen würden, und solche Vertreter der beiden Anschauungen geraten auch wohl manchmal miteinander in Streit. Tatsächlich haben sie beide Unrecht: sie vergessen, daß es sich um willkürliche, nur für den einen oder anderen Zweck jeweils geeignete Festsetzungen handelt.

3) Die hauptsächlichste Eigenschaft unserer Transformation ist, daß sie - allgemein zu reden - Kugeln in Kugeln überführt. Die Gleichung jeder Kugel hat

nämlich die Form

$$(5) \quad A(x'^2 + y'^2 + z'^2) + Bx' + Cy' + Dz' + E = 0;$$

indem wir hierin x', y', z' selbst aus den Transformationsgleichungen (3) und den quadratischen Form aus der Relation (2) (S. 222) ersehen, folgt nach Multiplikation mit $x'^2 + y'^2 + z'^2$

$$A + Bx + Cy + Dz + E(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

also tatsächlich wieder eine Kugelgleichung. Dabei ist freilich zu bemerken, daß in (5) für $A = 0$ auch die Ebenen mit einbegriffen sind, und wir werden sie zweckmäßiger Weise hier als spezielle Kugeln aussprechen, und zwar als solche, die den unendlichfernen Punkt enthalten. Sie verwandeln sich bei unserer Transformation in Kugeln durch den dem unendlichfernen Punkt entsprechenden Nullpunkt; ebenso gehen umgekehrt solche Kugeln in Kugeln durch den unendlichfernen Punkt, d. i. Ebenen, über. Mit diesen Festsetzungen gilt also das Theorem, daß Kugeln Kugeln entsprechen, tatsächlich ausnahmslos.

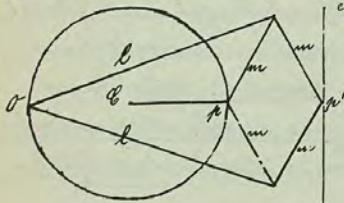
Da sich 2 Kugeln (und ebenso Kugel und Ebene) in einem Kreis schneiden, so gilt auch weiterhin, daß jeder Kreis ein Kreis entspricht; dabei sind gerade Linien speziell als „Kreise durch den unendlichfernen Punkt“, deren Kreise durch den Null-



punkt entsprechen, mit einbegriffen.

5) Dieser letzte Satz bleibt natürlich auch bestehen, wenn man die Transformation durch reziproke Radien nur innerhalb einer Ebene vornimmt, und er liefert da eine elegante Lösung der Probleme der Geradenführung, das ja äußerst elementar ist und eigentlich dem Ingenieurwesen auch des Nichtmathematikers angehört. Die Aufgabe ist die, durch gelenkig verbundene starre Stangen einen Punkt so zu führen, daß er eine Gerade beschreibt; früher legte man bei der Konstruktion von Dampfmaschinen besonderes Gewicht auf solche Mechanismen, die die Vermittelung zwischen dem geradlinig hin- und hergehenden Kolben und dem auf einem Kreise oscillierenden Endpunkt des Balancier's übernehmern sollten.

Hier interessiert uns der Inversor, den Peaucellier, ein französischer Offizier, 1864 konstruierte, und der damals großes Aufsehen erregte, obwohl seine Konstruktion sehr einfach und ziemlich naheliegend ist.



Es sind da zunächst 6 Stangen durch Gelenke verbunden: Zwei von der Länge l sind an einem festen Punkte O angebracht, die anderen 4, die die

Länge m haben, bilden einen mit 2 gegenüberliegenden Ecken an den Enden der Stangen l befestigten Rhombus; die beiden freien Ecken dieses Rhombus mögen p und p' heißen. Dieser Apparat hat 2 Freiheitsgrade: Einmal kann man die beiden Stangen l beliebig gegeneinander neigen und sie dann gemeinsam beliebig um O drehen. Bei jeder solchen Bewegung bleibt aber stets, wie eine ganz einfache geometrische Betrachtung lehrt, $O p p'$ eine Gerade, und es ist das Produkt

$$O p \cdot O p' = l^2 - m^2 = \text{Konst.}$$

unabhängig von der jeweiligen Lage von p ; der Apparat vermittelt also tatsächlich eine Transformation durch reziproke Radien mit O als Zentrum. Man braucht man nur p auf einem Kreise durch O laufen zu lassen, um nach dem Satze von Nr. 4 - p' wirklich zu einer Bewegung auf einer Geraden zu zwingen; das erreicht man aber sofort, wenn man an p noch einen siebenten Stab $p C$ anbringt, dessen zweiter Endpunkt C in der Mitte zwischen O und der Anfangslage von p befestigt ist; dann bleibt nur noch ein Freiheitsgrad übrig und p' wird in der That auf einer Geraden geführt. Übrigens muß man bemerken, daß p' nicht etwa die ganze unbegrenzte Gerade durchlaufen kann;



vielmehr ist es auf ein solches Stück von ihr beschränkt, daß seine Entfernung von O immer kleiner als $l + m$ bleibt, da die gegebenen Hauptachsen eine weitere Bewegung nicht gestatten. — Bei dem Modell, das ich Platten hier zeige, kann man übrigens auch O ein wenig verschieben; dann geht der Kreis, den p durchläuft, dicht an O vorbei, und daher beschreibt p' keine Gerade mehr, sondern einen Kreis von sehr großem Radius; auch in dieser Anwendung kann der Apparat gelegentlich nützlich sein.

6.) Von allgemeinen Eigenschaften der Transformation durch reziproke Radien habe ich endlich noch die Winkeltreue hervorzuheben, d. h. irgend 2 Flächen und insbesondere 2 Kugeln schneiden sich vor und nach der Transformation unter dem gleichen Winkel. Auf den Beweis gehe ich nicht ein, da es mir hier für diesen Überblick auf die Durchföhrung von Einzelheiten nicht ankommt. —

Ein spezieller Ausschnitt der Transformation durch reziproke Radien ist die stereographische Projektion, die gerade auch in den Anwendungen die größte Rolle spielt. Man erhält sie so:

Wir wollen die Kugel betrachten, die durch unsere Transformation (3) in die feste Ebene $z' = 1$

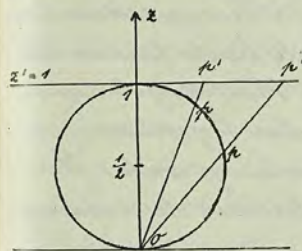
übergeführt wird. Nach der dritten Gleichung (3) ist ihre Gleichung

$$1 = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

was wir auch schreiben können:

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Es ist also eine Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $z = \frac{1}{2}$ der z -Achse, die tatsächlich durch den



Hilfspunkt geht und übrigens dieildebene $z' = 1$ berührt. Die Einzelheiten der Beziehung zwischen Ebene und Kugel können wir uns nun durch die Projektionsstrahlen durch O unmittelbar vor Augen führen;

ich hebe hier nur ohne Beweis folgendes hervor:

- 1.) Die Abbildung ist ausnahmslos ein-eindeutig, wenn wir das Unendlichweite der Ebene als einen Punkt auffassen, der dann auf dem Kugelpunkt O abgebildet wird.
- 2.) Kreisen der Kugel entsprechen Kreise der Ebene, speziell Kreise durch O entsprechen Kreise durch den unendlichfernen Punkt, das sind Gerade.
- 3.) Die Beziehung beider Flächen ist winkeltreu



oder - wie man auch sagt - Konform.

Trotz dieser stereographischen Projektion in der Funktionentheorie die größte Bedeutung hat, dürfte Ihnen allen bekannt sein, haben wir sie doch schon in der vorigen Vorlesung¹⁾ häufig mit Vorteil angewandt. Von den Anwendungen, in denen sie eine nicht minder wichtige Rolle spielt, möchte ich hier besonders die Geographie und Astronomie hervorheben; schon dem antiken Astronomen war sie bekannt, und wohl heute finden Sie in jedem Atlas Projektionen der Halbkugeln und der Polgegenden in stereographischer Projektion.

Ich will im Anschluss hieran einige weitere Beispiele geradezu dem zuletzt bezeichneten Anwendungsgebiet entnehmen:

2. Einige allgemeinere Kartenprojektionen.

Ein Exkurs in dieser Richtung scheint mir gerade in dieser Vorlesung besonders angebracht. Ist doch die Theorie der geographischen Karten ein Gebiet, das im Rahmen des Schulunterrichts von größter Bedeutung ist; gewiss wird es jedem Schüler interessant sein, zu hören, wie denn eigentlich die Karten in seinem Atlas gezeichnet sind, und der Mathematiklehrer wird sicher größere Teilnahme für seinen Unterricht erlangen

¹⁾ siehe Teil I, pag. 242 ff.

können, wenn er hierüber gelegentlich den erwünschten Aufschluss gibt, als wenn er ausschließlich abstrakte Fragen behandelt. So sollte jeder Lehramtskandidat Bescheid über jenes Gebiet wissen, das überdies auch dem Mathematiker interessante Beispiele von Punkttransformationen liefert.

Es wird am zweckmäßigsten sein, wenn wir uns vornehmen die Erdkugel stereographisch auf die $x-y$ -Ebene abgebildet denken; dann ist jede andere Abbildung auf eine $\xi-\eta$ -Ebene gegeben durch 2 Gleichungen

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \chi(x, y).$$

Eine erste in der Praxis oft gebrauchte Art von Abbildungen sind die winkeltreuen; man erhält sie, wie die Funktionentheorie lehrt, wenn man die komplexe Variable $\xi \pm i\eta$ als analytische Funktion der komplexen Variablen $x + iy$ auffasst:

$$\xi \pm i\eta = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y).$$

Nach möchte aber hier ausdrücklich betonen, dass in der geographischen Praxis gerade auch sehr vielfach nicht winkeltreue Abbildungen verwendet werden, so dass man keineswegs, wie es manchmal geschieht, diese als das allein Wichtige ansehen darf.

Unter den Konformen Abbildungen kommt ganz

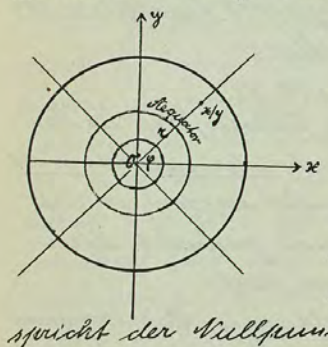


besonders eine in Betracht, die sog. Mercatorprojektion, die der berühmte Mathematiker Gerhard Mercator, der eigentlich den guten deutschen Namen Kremer führte, um 1550 entdeckt hat. Mercatorkarten der Erde finden Sie bekanntlich ebenfalls in jedem Atlas.

Diese Mercatorprojektion ist dadurch bestimmt, daß unsere analytische Funktion f speziell der Logarithmus ist, also durch die Gleichung

$$\xi + i\eta = \log(x + iy)$$

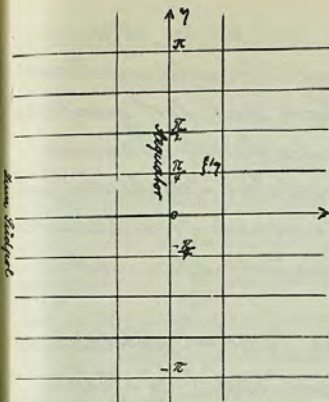
Wir können nunmehr als Mathematiker die Eigenschaften der Projektion aus dieser kurzen Formel sofort ableiten, während für den nicht mathematisch gebildeten Geographen die Behandlung der Mercatorprojektion natürlich recht schwer ist. Führen wir in der $x-y$ -Ebene Polarkoordinaten ein, d. h.



setzen wir $x + iy = r \cdot e^{i\varphi}$, so wird $\xi + i\eta = \log(r \cdot e^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$, also

$$\xi = \log r, \quad \eta = \varphi.$$

Wir nehmen an, daß der Südpol der Erde das Zentrum der verwendeten stereographischen Projektion ist; dann entspricht der Nullpunkt 0 der $x-y$ -Ebene dem



Nordpol und die Strahlen $\varphi = \text{Konst.}$ durch ihn entsprechen den Erdmeridianen. Daher werden diese in der Mercatorprojektion zu Parallelen $\eta = \text{Konst.}$ zur ξ -Achse; der Nordpol ($\xi = -\infty$) liegt auf ihnen links, der Südpol ($\xi = +\infty$) rechts im Unendlichweiten. Da der

Winkel φ bis auf Vielfache von 2π unbestimmt ist, ist die Abbildung unendlichvieldeutig, und jeder Parallelstreifen von der Breite 2π parallel zur ξ -Achse stellt bereits ein Bild der ganzen Erdoberfläche dar. Die Breitenkreise, denen in der stereographischen Projektion die Kreise $r = \text{Konst.}$ entsprechen, werden in der Mercatorprojektion zu den Parallelen $\xi = \text{Konst.}$, also, wie das ja auch der Winkeltheorie halber selbstverständlich ist, zu senkrechten Trajektorien der Bildgeraden der Meridiane; speziell dem Äquator ($r = 1$) entspricht die η -Achse ($\xi = 0$).

Dieses eine Beispiel mag genügen, um Sie zu weiterer Beschäftigung mit den zahlreichen Transformationen der geographischen Kartenlehre anzuregen.



gen; ich will hier lieber noch auf einen allgemeine-
ren Satz dieser Theorie eingehen. Wer sich von Thünen
mit Geographie beschäftigt hat, hat dort gewiß von
den Tissotschen Sätzen gehört, die Tissot in seinem
von Hauser in Stuttgart übersetzten Lehrbuch ent-
wickelt hat. Wir werden von unserem Standpunkte
aus uns ihren Inhalt sehr einfach klar machen
können.

Es mögen 2 geographische Karten, Abbildungen
der Erdkugel auf eine x - y - und eine ξ - η -Ebene,
vorliegen, die beide ganz beliebig sein können, also
auch nicht konform sein müssen. Diese beiden Ab-
bildungen stehen dann jedenfalls in einer Bezieh-
ung

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \chi(x, y).$$

Wir wollen nun mit die Umgebung zweier korrespon-
dierender Stellen x_0, y_0 und ξ_0, η_0 untersuchen, worüber

$$\xi_0 = \varphi(x_0, y_0), \quad \eta_0 = \chi(x_0, y_0).$$

Dann führen wir neue Variable x', y', ξ', η' durch die
Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x', & y &= y_0 + y'; \\ \xi &= \xi_0 + \xi', & \eta &= \eta_0 + \eta'. \end{aligned}$$

1) Die Wirkung geographischer Karten selbst Aufgaben über
Abbildung beliebiger Flächen aufeinander. Stuttgart 1886.

ein und haben dann als Entwicklungen von φ, χ nach
dem Taylor'schen Satze:

$$\begin{aligned} \xi' &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 \cdot x' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 \cdot y' + \dots \\ \eta' &= \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_0 \cdot x' + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_0 \cdot y' + \dots, \end{aligned}$$

wo die Ableitungen an der Stelle $x = x_0, y = y_0$ gewon-
nen sind und durch die Punkte Glieder höherer Ord-
nung in x', y' angedeutet werden. Wir beschränken
uns nun auf eine so kleine Umgebung unserer Stelle
 x_0, y_0 , daß die angeschriebenen linearen Glieder be-
reits eine hinreichende Annäherung an die wirk-
lichen Werte von ξ', η' geben; dabei schließen wir na-
türlich solche singulären Stellen x_0, y_0 aus, bei denen
eine derartige Umgebung nicht existiert, also z. B. sol-
che, an denen alle 4 ersten partiellen Ableitungen
gleichzeitig verschwinden, so daß die linearen Gli-
eder gar keine brauchbare Annäherung liefern.
Sehen wir uns nun die so entstehenden linearen
Gleichungen zwischen x', y', ξ', η' an, so haben wir
unmittelbar den fundamentalen Satz, der die Grund-
lage der Tissotschen Betrachtungen bildet: Zwei geo-
graphische Abbildungen desselben Terrains hängen in
der Umgebung einer beliebigen nicht gerade singu-
lären Stelle angewählt durch eine affine Transfor-
mation zusammen. Wendet man nun unsere früh-



nen Theoreme über die affinen Transformationen an, so erhält man tatsächlich alle die sog. Tissotschen Punkte.

Ich will nur an wenige Hauptpunkte erinnern. Wir wissen, daß es vor allem auf die Determinante der affinen Transformationen, hier also auf

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\frac{\partial x}{\partial \xi})_0 & (\frac{\partial y}{\partial \xi})_0 \\ (\frac{\partial x}{\partial \eta})_0 & (\frac{\partial y}{\partial \eta})_0 \end{vmatrix}$$

ankommt, die man bekanntlich als Funktionaldeterminante der Funktionen φ, χ an der Stelle $x = x_0, y = y_0$ bezeichnet. Den Fall $\Delta = 0$ wird man bei diesen Anwendungen stets vermeiden; denn in ihnen wird das kleine Flächenstück der x - y -Ebene abgebildet auf ein Kurvenstück der ξ - η -Ebene, und das wird der Geograph kaum als brauchbare Karte ansehen. Wir haben hier also stets $\Delta \neq 0$ anzunehmen. Das Zustandekommen einer solchen affinen Transformation hatten wir uns aber früher (S. 166 f.) ausführlich veranschaulicht, und wir können daher jetzt sofort den Satz übernehmen: Man erhält die Umgebung des Punktes ξ_0, η_0 aus der des Punktes x_0, y_0 mit der hier in Betracht kommenden Genauigkeit, indem man sie nach ξ zueinander senkrechten Richtungen reinen Deformationen unterwirft und sie

dann noch um einen passenden Winkel drehet. Sie werden bei Tissot finden, daß er tatsächlich diesen Satz sich ad hoc in anschaulicher Weise ableitet, und Sie haben hier ein interessantes Beispiel davon, wie die Vertreter der Anwendungen von sich aus den mathematischen Anforderungen ihrer Disziplinen genügen; dem Mathematiker erscheint die Sache natürlich dann immer sehr einfach, aber es ist doch lehrreich für ihn, zu wissen, was jenen Anwendungen not ist.

Ich will nun endlich noch eine letzte allgemeine Klasse von Punkttransformationen erörtern.

3. Die allgemeinsten einseitigen stetigen Punkttransformationen.

Alle bisher zur Verwendung gelangten abbildenden Funktionen waren stetig und beliebig oft differenzierbar, ja sogar analytisch (in eine Taylorsche Reihe entwickelbar); dafür ließen wir aber auch mehrdeutige, sogar unendlichvieldeutige Funktionen (z. B. den Logarithmus) zu. Jetzt wollen wir gerade das Hauptgewicht darauf legen, daß unsere abbildenden Funktionen ausnahmslos umkehrbar eindeutig seien, und im übrigen von ihnen nur Stetigkeit verlangen, aber die Existenz von Differentialquotienten et c. aber nichts voraussetzen; wir fragen dann nach den Eigen-



schaften von geometrischen Figuren, die bei diesen allgemeinsten uneindeutigen und stetigen Transformationen ungeändert bleiben. Denken Sie etwa, daß Sie eine Fläche oder ein Raumstück aus Kautschuk hergestellt und irgendwelche Figuren in ihm markiert haben; was bleibt von diesen Figuren erhalten, wenn Sie den Kautschuk in ganz willkürlicher Weise verzerrten, ohne ihn zu reißen.

Die Gesamtheit der Eigenschaften, die man so erhält, bildet das Gebiet der sog. Analysis situs, man könnte sagen, die Lehre von den reinsten Lageverhältnissen, die von Größenbeziehungen ganz unabhängig sind. Dieser Name rührt von Riemann her, der sich in seiner berühmten Arbeit von 1857, "Theorie der Abel'schen Funktionen" ⁴⁾ von funktionentheoretischen Interessen aus zu solchen Untersuchungen veranlaßt sah. Übrigens hält man es seitdem meist so, daß man von der Analysis situs in der Geometrie ganz schweigt und sie nur in der Funktionentheorie heranzieht, wenn man sie braucht. Anders macht es jedoch Möbius, der sich in einer Arbeit vom Jahre

1) Journ. f. d. u. a. Mathem., Bd. 54 = Ges. Mathem. Werke (2. Aufl., Leipzig 1892), pag. 87. — Das Wort „Analysis“ gebraucht Riemann hier aus Leibniz' Anknüpfung an seinen unvollständigen methodischen Sinn, nicht im dem Sinne, den es als mathematischer Terminus angenommen hat.

1863 ⁴⁾ von rein geometrischem Interesse aus mit der Analysis situs beschäftigt; er nennt dort Figuren, die durch uneindeutige stetige Verzerrungen auseinander hervorgehen, elementarverwandt, weil die bei diesen Transformationen invarianten Eigenschaften die einfachsten überhaupt möglichen sind.

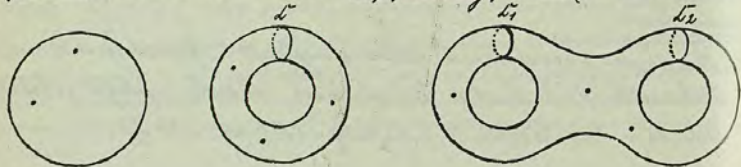
Wir wollen uns nun hier auf die Untersuchung von Flächen beschränken. Da ist zuerst eine erst von Möbius entdeckte Eigenschaft zu nennen, die Riemann wohl entgangen war: Die Unterscheidung nämlich, ob eine Fläche einseitig oder zweiseitig ist. Wir hatten ja schon früher (S. 42 f.) von dem einseitigen Möbiusschen Blatte gesprochen, auf dem man durch stetiges Hinwandern längs der Fläche unvermerkt von der einen Seite nach der anderen gelangen konnte, so daß eine Unterscheidung zweier Seiten keinen Sinn mehr hat. Es ist klar, daß diese Eigenschaft bei allen stetigen Verzerrungen erhalten bleibt, und daß man daher tatsächlich in der Analysis situs von vorherem einseitige und zweiseitige Flächen zu scheiden hat.

4) Theorie der elementaren Verwandtschaft? Berichte über d. Verhandl. d. K. Sachs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse Bd. 15 = Ges. Werke II (Leipzig 1866), pg. 433 ff.



Wir wollen uns hier der Einfachheit halber nur mit zweiseitigen Flächen beschäftigen, zumal sie allein in der Funktionentheorie vorkommen; übrigens ist die Theorie der einseitigen Flächen nicht etwa wesentlich schwieriger. Es ergibt sich dann, daß für eine Fläche im Laufe der Analysis stets 2 ganze natürliche Zahlen vollkommen charakteristisch sind: die Anzahl μ ihrer Randkurven und die Anzahl ν ihrer nichtzerstückelnden Rückkehrschnitte (das sog. "Geschlecht"), genau gesagt, zwei zweiseitige Flächen können dann und nur dann aufeinander einindeutig und stetig bezogen werden, sie sind "homöomorph" oder - wie man heute sagt - "homöomorph", wenn jene beiden Zahlen μ und ν für sie übereinstimmen. Es würde zu weit führen, wenn ich diesen Satz hier beweisen wollte; ich kann nur zur einzigen Beispiele die Bedeutung der beiden Zahlen μ und ν erläutern.

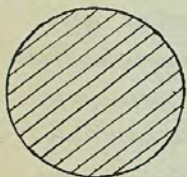
Stellen wir uns nebeneinander eine Kugel, eine Ringfläche und endlich eine Doppelpfandfläche (von der Form



einer Brezel) vor, wie sie hier schematisch angedeutet sind. Alles sind geschlossene Flächen, d. h. sie haben keine Randkurve: $\mu = 0$. Im ersten Falle zerfällt durch jeden geschlossenen Schnitt die Fläche in 2 getrennte Teile, d. h. es ist auch $\nu = 0$. Im zweiten Falle stellt eine Meridiankurve L_1 einen in sich zurücklaufenden Schnitt dar, der die Fläche nicht zerlegt; ist er aber einmal gezogen, so zerstückelt jeder weitere Rückkehrschnitt tatsächlich die Fläche, und das meinen wir, wenn wir $\nu = 1$ sagen. Im dritten Beispiele endlich ist $\nu = 2$, wie die beiden verschiedenen Meridiankurven L_1, L_2 auf dem getrennten Henkel zeigen. Durch Einführung weiterer Henkel können wir nun sofort zu Flächen mit beliebigem ν aufsteigen. Wollen wir aber auch noch μ einen beliebigen von 0 verschiedenen Wert erteilen, so brauchen wir nur in diesen Flächen μ kleine Löcher, sog. "Punkturierungen", auszubringen, die jedesmal eine Randkurve liefern. So können wir tatsächlich Flächen mit beliebigem Werte von μ und ν herstellen, und diesen müssen dann alle anderen Flächen mit demselben μ, ν homöomorph sein, wenn sie auch ein noch so verschiedenes Aussehen haben; die Funktionentheorie liefert ja viele Beispiele solcher Flächen.

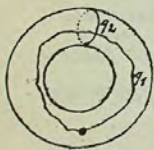


Sich nunf noch hier den weiteren Terminus Zusammenhang erklären, den Poincaré einführt; er versteht darunter die Zahl $2p + \mu$ und nennt die Fläche $(2p + \mu)$ -fach zusammenhängend. Ist eine Fläche einfach zusammenhängend ($2p + \mu = 1$), so folgt $p = 0, \mu = 1$,



d. h. sie ist einer Kugel mit einer Punktierung homoomorph, die man durch Verbreiterung dieses Loches auch stetig in eine ebene Kreisscheibe verwandeln kann.

Weiterhin führt nun Poincaré den Begriff des Querschnittes ein, d. i. ein Schnitt, der von einem Randpunkt zu einem anderen führt; man kann von Querschnitten also nur reden, wenn tatsächlich Randkurven vorhanden sind, also $\mu > 0$ ist. Nun gilt der Satz, dass jeder Querschnitt den Zusammenhang um 1 vermindert, so dass man insbesondere jede Fläche mit $\mu > 0$ durch $2p + \mu - 1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandeln kann.



z. B. eine Ringfläche mit einer Punktierung ($\mu = 1$), so legen wir erst den Querschnitt q_1 von dieser Punktierung aus und dann den Querschnitt q_2 , der von jenem ersten Schnitt ausgeht und wieder in ihn ein-

mündet und übrigens genau wie der frühere nicht zerstückelnde Rückkehrschnitt verläuft, dann ist der Zusammenhang tatsächlich von $2 \cdot 1 + 1 = 3$ auf 1 erniedrigt.

Was Literatur zur analysis situs anlangt, so ist eine zusammenfassende Darstellung nicht nur für Flächen, sondern auch für beliebig ausgedehnte Gebilde neuerdings in dem Referat in der math. Encyclopädie von M. Dehn und P. Heegaard (III A B 3) gegeben, das freilich sehr abstrakt geschrieben ist. Eine leichter lesbare, auch dem Neuling zugängliche Darstellung, die der abstrakten Theorie eine Entwicklung der allgemeinen Folgerungen einfachen Beispielen vorausschickt, wäre sehr wünschenswert.

Dass die analysis situs in der Physik, speziell in der Potentialtheorie Anwendung findet, ist bekannt. Aber auch in dem Schulunterricht greift sie ein, und zwar mit dem Eulerschen Polyedersatz, über den ich nun noch ein Wort sagen will. Euler bemerkte, dass für ein ebenflächiges gewöhnliches Polyeder mit \mathcal{G} Ecken, \mathcal{K} Kanten und \mathcal{F} Seitenflächen stets die Gleichung

$$\mathcal{G} + \mathcal{F} = \mathcal{K} + 2$$

gilt. Wenn man nun das Polyeder irgendwie einsein-



deutig und stetig deformiert, so wird aus jenen 3 Zahlen und daher an dieser Gleichung nichts geändert, und sie gilt daher schließlich noch, wenn \mathcal{G} , \mathcal{F} , \mathcal{K} die Zahlen der Ecken, Flächen, Kanten einer beliebigen Einteilung der Kugel oder überhaupt einer dieser homomorphen Fläche bezeichnen, sofern nur jedes Teilgebiet einfach zusammenhängend ist. Man kann man das Theorem aber sogleich auf Flächen beliebigen Geschlechts verallgemeinern: Teilt man irgend eine Fläche, die gerade p nicht zerstückelnde Rückkehrschnitte zulässt, durch K Linienstücke in F einfach zusammenhängende Flächenstücke, wobei \mathcal{G} Ecken auftreten, so gilt stets:

$$\mathcal{G} + \mathcal{F} = \mathcal{K} + 2 - 2p.$$

Sich überlasse es Ihnen, sich hierfür Beispiele zu machen und den Beweis sich selbst zu überlegen oder bei Delaunay - Heegaard nachzulesen; natürlich gibt es noch sehr viel weitergehende Verallgemeinerungen dieses Satzes. -

Wir verlassen damit endlich die Punkttransformationen überhaupt und wollen nunmehr einen Überblick über die wichtigsten Klassen solcher Transformationen zu gewinnen versuchen, die Punkte in anderartige Raumelemente überführen:

IV. Transformationen mit Wechsel des Raumelements.

1. Die dualistischen Transformationen.

Als erste Klasse treten sich da die Zuordnungen dar, die im zweidimensionalen Gebiete Punkt und Gerade, im dreidimensionalen Punkt und Ebene vertauschen. Ich beschränke mich hier auf den ersten Fall und wähle im übrigen die Darstellung, die zuerst Plücker 1831 im zweiten Teile seiner bereits früher (S. 128) genannten "analytisch-geometrischen Entwicklungen" gegeben hat, und die die analytische Formulierung voranstellt.

Die erste dort zu Grunde liegende Idee ist, wie ich es ja schon früher (S. 132) ausführte, die, die Koordinaten u, v der etwa in der Form

$$(1) \quad u x + v y = 1$$

gedarstellten Geradengleichung als Linienkoordinaten mit den gewöhnlichen Punktkoordinaten durchaus in Parallele zu stellen und mit beiden Koordinatenarten in ganz analoger, "dualer" Weise das Gebäude der analytischen Geometrie aufzuführen. So entsprechen sich insbesondere in der Ebene die durch die Punktgleichung $f(x, y) = 0$ als geometrischer Ort von Punkten dargestellte Kurve und die durch



die Geradengleichung $f(u, v) = 0$ als Umhüllungsgebiet
de einer einfach unendlichen Geradenschar definierte
Kurve.

Seine eigentliche Transformation, wie wir sie jetzt be-
trachten wollen, erhalten wir natürlich erst, wenn wir ne-
ben die bisher betrachtete eine Ebene \mathcal{E} noch eine
zweite \mathcal{E}' stellen und die Geradenkoordinaten u, v in
 \mathcal{E} zu den Punktkoordinaten x', y' in \mathcal{E}' in Beziehung
setzen; die allgemeinste Transformation dieser Art wird
also durch 2 Gleichungen

$$(1) \quad u = \varphi(x', y'), \quad v = \chi(x', y')$$

gegeben, d. h. jedem Punkte x', y' in \mathcal{E}' wird die Gerade
in \mathcal{E} zugeordnet, deren Gleichung sich durch Einsetz-
gen dieser Werte in (1) ergibt. Betrachten wir zunächst

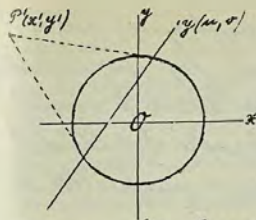
1) das einfachste Beispiel einer solchen Transforma-
tion, das durch die Gleichungen:

$$(2) \quad u = x', \quad v = y'$$

gegeben ist; durch sie wird also dem Punkte x', y'
der Ebene \mathcal{E}' in \mathcal{E} einfach die Gerade

$$(3a) \quad x'x + y'y = 1$$

zugeordnet. Es ist bekannt, daß dies diejenige Gerade
ist, die dem Punkte x', y' (wir denken uns jetzt
die Ebenen $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ so aufeinandergelegt, daß ihre
Koordinatensysteme sich decken) in Bezug auf



den Einheitskreis um den Null-
punkt ($x^2 + y^2 = 1$) als Polare zuge-
hört, so daß unsere Transformation
also nichts als diese bekannte Po-
lareverwandtschaft ist.

Wir bemerken, daß an Stelle der
beiden Gleichungen (3) auch die eine Gleichung (3a)
allein zur Definition der Verwandtschaft hinreicht,
da sie die Gleichung der jedem Punkte x', y' ent-
sprechenden Geraden darstellt. Da sie in x, y ein-
seits, x', y' andererseits völlig symmetrisch ist, so
müssen für unsere Verwandtschaft die beiden Ebenen
 $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ genau die gleiche Rolle spielen, d. h. es muß
auch jedem Punkte von \mathcal{E} eine Gerade in \mathcal{E}' entspre-
chen, und bei aufeinandergelegten Ebenen muß ei-
nem Punkte dieselbe Gerade entsprechen, gleichgültig,
ob wir ihn nach \mathcal{E} oder nach \mathcal{E}' rechnen; im Hinblick
auf die erste Eigenschaft bezeichnet man die Trans-
formation im engeren Sinne als dualistisch, im Hin-
blick auf die zweite als reziprok. Man kann also
schlechthoch, ohne die beiden Ebenen zu unterscheiden,
von der Zuordnung einer bestimmten Polare zu einem
Pole sprechen und kann dann die Reziprozitätsei-
genschaft in der früher (S. 129) bereits angegebenen



Weise ausdrücken.

Hinsichtlich der weiteren Eigenschaften dieser Transformationen bemerke ich hier nur, daß wir einer von Punkten x', y' durchlaufener Kurve der Ebene \mathcal{E}' gemäß dem Dualitätssatz als entsprechendes Gebilde die von den entsprechenden Geraden u, v umhüllte Kurve der Ebene \mathcal{E} zuordnen werden.

2.) Man kann nun leicht ganz analog zu unseren früheren Erörterungen über die allgemeinsten "Kollineationen" beweisen, daß die allgemeinste dualistische Verwandtschaft entsteht, wenn man in Verallgemeinerung des Satzes (3) u, v gleich allgemeinen linear gebrochenen Funktionen von x', y' mit dem gleichen Nenner setzt:

$$(4) \quad \begin{cases} u = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + c_3} \\ v = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + c_3} \end{cases}$$

Führt man das in die Gleichung (1) ein, so entsteht nach Heraufmultiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner wegen der Willkürlichkeit der 9 Koeffizienten a_1, \dots, c_3 die allgemeinste sowohl in x, y als auch in x', y' lineare Gleichung:

$$(4') \quad a_1 x x' + b_1 x y' + c_1 x + a_2 y x' + b_2 y y' + c_2 y - a_3 x x' - b_3 y y' - c_3 = 0.$$

Umgekehrt stellt aber auch jede solche in x, y und x', y' "bilineare" Gleichung eine dualistische Transformation zwischen den Ebenen $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ dar; denn sowie man das eine Koordinatenpaar festhält, d. h. einen festen Punkt in einer der beiden Ebenen betrachtet, ist sie in den andern beiden Koordinaten linear und stellt daher eine jenen Punkte zugeordnete Gerade der andern Ebene dar.

3.) Diese Verwandtschaft ist aber im allgemeinen nicht auch reziprok im oben definierten Sinne, vielmehr ist sie das nur dann, wenn immer zwei symmetrische Terme in (4') denselben Koeffizienten haben, wenn jene Gleichung also lautet:

$$(5) \quad A x x' + B(x y' + y x') + C y y' + D(x + x') + E(y + y') + F = 0.$$

Die hierdurch bestimmte Transformation ist aber wieder aus der Kegelschnittlehre wohl bekannt; sie ist nichts als die Zuordnung von Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt:

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0,$$

und jede solche Polarenverwandtschaft ist eine dualistische reziproke Verwandtschaft.

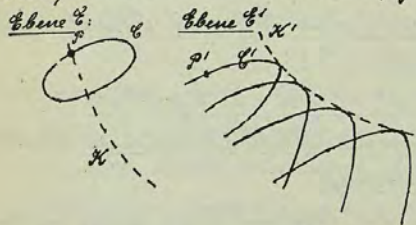
Man kann hiervon die Betrachtung einer wesentlich allgemeineren Klasse von Transformationen mit Wechsel des Nennerelements unmittelbar ausschließen.

2. Die Berührungstransformationen.

Man erhält diese von Pappus Lie so benannten Transformationen nämlich, wenn man statt der bitangentialen Gleichung (4^{te}) irgend eine beliebige, selbstständig den notwendigen Stetigkeitsbedingungen genügende höhere Gleichung in den 4 Punktkoordinaten beider Ebenen:

$$(1) \quad D_0(x, y; x', y') = 0$$

an die Spitze stellt, die man nach Plücker als Directrix oder Leitgleichung bezeichnet; die hierin in Betracht kommenden Entwicklungen für die Ebene sind übrigens bereits sämtlich in Plückers oben genannten Werke ¹⁾ enthalten. Halten wir zunächst x, y fest, d. h. betrachten wir einen bestimmten Punkt $P(x|y)$ in \mathcal{E}_0 , so stellt $D_0 = 0$ als Gleichung für die laufenden Koordinaten x', y' eine bestimmte Kurve \mathcal{C}'



in der Ebene \mathcal{E}' durch, und diese Kurve ordnen wir als meines Element der Ebene \mathcal{E}' - so wie bisher die Gerade - dem Punkte P zu. Nehmen

wir aber nun einen festen Punkt $P'(x'|y')$ in \mathcal{E}' , so

1) loc. cit., pag. 259-265.

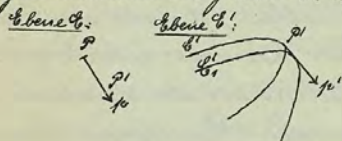
was auf der Kurve \mathcal{C}' an, so bestimmt dieselbe Gleichung $D_0 = 0$, in der wir jetzt dem zweiten Variablenpaare x', y' feste Werte erteilen und das erste als laufende Koordinaten auffassen, eine bestimmte Kurve \mathcal{C} in \mathcal{E}_0 , die natürlich durch jenen ersten Punkt P gehen muss. Damit haben wir die Punkte P in \mathcal{E}_0 den ∞^2 Kurven \mathcal{C}' in \mathcal{E}' und die Punkte P' von \mathcal{E}' den ∞^2 Kurven \mathcal{C} von \mathcal{E}_0 zugeordnet - genau wie vorher die Punkte der Geraden.

Bewegt sich nunmehr ein Punkt P in \mathcal{E}_0 auf einer ganz beliebigen (gestrichelt gezeichneten) Kurve \mathcal{K} , so entspricht jeder einzelnen Lage von P eine bestimmte Kurve \mathcal{C}' in \mathcal{E}' . Um aber aus der von diesen Kurven \mathcal{C}' gebildeten einfach unendlichen Kurvenschar eine einzige Kurve in \mathcal{E}' zu erhalten, die wir der Kurve \mathcal{K} in \mathcal{E}_0 entsprechen lassen können, übertragen wir genau das allgemeine, schon bei der dualistischen Verwandtschaft angewandte, Kurvenveloppenprinzip: Wir ordnen \mathcal{K} diejenige Kurve \mathcal{K}' in \mathcal{E}' zu, die von den verknüpften $D_0 = 0$ den einzelnen Punkten von \mathcal{K} entsprechenden Kurven \mathcal{C}' umhüllt wird, ihre Enveloppe. So haben wir aus der Leitgleichung $D_0 = 0$ tatsächlich eine Transformation der Ebenen gemacht, in der jeder Kurve der einen eine bestimmte Kurve der anderen entspricht; denn ganz dieselben Erörterungen



Können wir auch von einer beliebigen Kurve K' in C' ausgehend aufstellen.

Um diese Betrachtungen auch analytisch verfolgen zu können, denken wir uns die Kurve K durch ein geradliniges Polygon mit lauter sehr kleinen Seiten ersetzt, wie man das in der Differentialrechnung der Anschaulichkeit halber gern tut, und fragen erst einmal, was einer einzigen solchen Polygonseite denn entspricht. Hierbei ist natürlich immer an den Grenzübergang zur Kurve zu denken, so daß wir unter der Polygonseite schließlich nichts als einen Punkt P und eine Fortschreitungsrichtung (die Tangentenrichtung von K in ihm), ein sog. Grenzelement,



zu verstehen haben. Wir nehmen nun in dieser Richtung von P einen Nachbarpunkt P_1 mit den Koordinaten $x + dx, y + dy$

an, wobei dx, dy beliebig klein sind und schließlich gegen Null konvergieren, aber $\frac{dy}{dx}$ stets den bestimmten die gegebene Richtung charakterisierenden Wert μ besitzt. Dem Punkte P entspricht in C' die Kurve C' , deren Gleichung in laufenden Koordinaten x', y'

$$N(x, y; x', y') = 0$$

ist, dem Punkte P_1 aber entspricht die Kurve C_1 mit

der Gleichung

$$N(x + dx, y + dy; x', y') = 0,$$

oder wenn wir nach dx und dy entwickeln und wegen des schließlichem Grenzüberganges nur die linearen Glieder berücksichtigen:

$$N(x, y; x', y') + \frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial y} dy = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die Koordinaten x', y' des Schnittes P' von C' und C_1 , der in der Grenze der Berührungspunkt von C' mit der Enveloppe K' ist; wir können die Gleichungen, da $\frac{dy}{dx} = \mu$ war, auch ersetzen durch:

$$(2) \quad \begin{cases} N(x, y; x', y') = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \mu = 0 \end{cases}$$

Weiterhin aber haben C' und C_1 im Punkte P' in der Grenze die Tangentenrichtung $\mu' = \frac{dy'}{dx'}$, gemein, die auch gleichzeitig die Richtung der Enveloppe K' in P' ist; da $N = 0$ die Gleichung von C' in laufenden Koordinaten x', y' ist, bestimmt diese Tangentenrichtung sich aus der Gleichung

$$\frac{\partial N}{\partial x'} dx' + \frac{\partial N}{\partial y'} dy' = 0 \text{ oder}$$

$$(3) \quad \frac{\partial N}{\partial x'} + \frac{\partial N}{\partial y'} \mu' = 0.$$

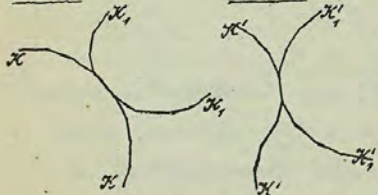
Kann man von K also nur einen Punkt P und die Tangentenrichtung μ in ihm, so ist bereits ein Punkt P' der entsprechenden Kurve K' nebst deren



Richtung p' in ihm bestimmt. Man sagt daher, dass unsere Transformation jedem Linienelement x, y, p der Ebene \mathcal{E} ein bestimmtes Linienelement x', y', p' der Ebene \mathcal{E}' vermöge der Gleichungen (2), (3) zuordnet.

Indem wir diese Betrachtung auf jede Seite der die Kurve K approximierenden Polygone bzw. auf jedes ihrer Linienelemente anwenden, erhalten wir in \mathcal{E}' die Seiten eines die entsprechende Kurve K' approximierenden Polygons bzw. die Linienelemente dieser Kurve. Die Gleichungen (2) stellen daher nach

\mathcal{E} bzw. \mathcal{E}' :



x', y' aufgelöst die Kurve K' analytisch dar, wenn man x, y, p die Werte der Koordinaten bzw. der Tangentialrichtung aller Punkte von K durchlaufen lässt.

Man wird auch klar, warum Sie diese Transformationen Berührungstransformationen nannte. Denn berühren sich 2 Kurven in \mathcal{E} , so heißt das nichts anderes, als dass sie ein Linienelement gemein haben; also müssen auch die entsprechenden Kurven in \mathcal{E}' ein Linienelement, d. h. einen Punkt und die Richtung, in ihm gemein haben. Die Berührung zweier Kurven ist also eine bei der Transformation invariante Eigenschaft,

und das soll jener Name aussagen. Sie hat die Lehre von diesen Berührungstransformationen namentlich in Räume wesentlich weiter entwickelt; eine zusammenfassende Darstellung hat er gemeinsam mit Schiffers 1896 in der „Geometrie der Berührungstransformationen“⁴⁾ begonnen, die leider nicht über den ersten Band herausgekommen ist. -

Da ich so die Theorie der Transformationen mit Wechsel des Raumelements allgemein kurz dargestellt habe, will ich sie wenigstens durch einige wenige Beispiele anschaulich machen, um zu zeigen, was man in den Anwendungen mit diesen Dingen anfangen kann.

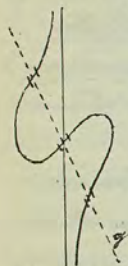
3. Einige Beispiele.

Lassen Sie mich zunächst von den dualistischen Transformationen reden und der Rolle, die sie in der Lehre von den Gestalten algebraischer Kurven spielen. Wir wollen zusehen, wie sich typische Kurvengestalten bei dualistischen Umformungen, etwa bei der reziproken Polarenverwandtschaft in Bezug auf einen Kegelschnitt, verändern, wobei wir uns natürlich auf ganz wenige charakteristische Fälle beschränken müssen.

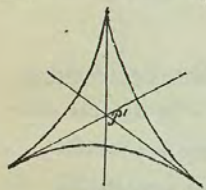
⁴⁾ Bd. I. Leipzig 1896.



So hebe ich zunächst bei der Kurve dritter Ordnung den Typus des unpaaren Zuges hervor, der von jeder Geraden in einem oder drei reellen Punkten geschnitten wird. In



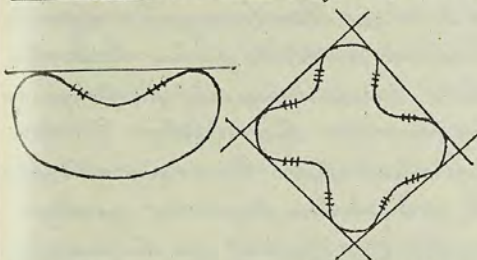
der nebenstehenden Skizze hat er 1 Asymptote, man kann daraus aber sofort eine Gestalt mit 3 Asymptoten herleiten, indem man die Ebene derart projektiv transformiert, daß eine die Kurve dreimal schneidende Gerade in die unendlich ferne Gerade übergeht. Jedenfalls aber hat die Kurve 3 reelle Wendepunkte, die die besondere Eigenschaft haben, in einer Geraden g zu liegen. Bei der Dualisierung entsteht nun aus dieser Kurve eine Kurve dritter Klasse, an die von jedem Punkt aus eine oder drei reelle



Tangenten gehen. Dem Wendepunkt entspricht dabei eine Spitze, was man leicht sich durch eingehende Überlegung klar machen muß; Sie finden solche Betrachtungen übrigens ausführlich in meinen früheren geometrischen Vorlesungen. Die Kurve dritter Klasse, die hier entsteht, hat also im ganzen 3 Spitzen, und die Tangenten derselben müssen durch ein und denselben Punkt P' gehen, welcher der die 3 Wendepunkte enthaltenden

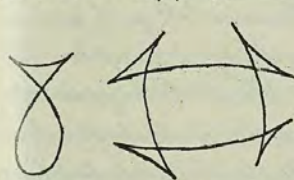
Geraden g dual entspricht.

Analoge Kurve Stümpfen will ich noch über die Kurve vierter Ordnung und vierter Klasse machen. Bei einer Kurve vierter Ordnung kann die Gestalt einer Ovale mit einer Einbuchtung auftreten; ja es können sogar



Gestalten mit 2, 3 und 4 Einbuchtungen auftreten. In ersten Tabelle sind 2 Wendepunkte und 1 Doppeltangente, in dem weiteren bis zu 8 Wendepunkten und 4 Doppeltangenten vorhanden. Dualisieren wir, so haben wir zu dem oben bereits-gesagten

nach nun hinzuüberlegen, daß einer Doppeltangente dual ein Doppelpunkt entspricht. Es entstehen also Typen von Kurven vierter Klasse mit 2 bis 8 Spitzen und 1 bis 4 Doppelpunkten, wie nebenstehend skizziert. Es hat einen eigenen Reiz, die Gestalten der algebraischen



Kurven eingehender durcharbeiten; ich kann sie hier leider nicht näher verfolgen und muß mich mit diesen Kurven Hinweisen begnügen; sie zeigen aber wohl hin-

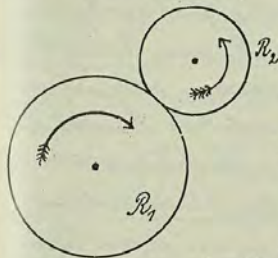


reichend, wie unsere dualistischen Transformationen Dinge unter das gleiche Gesetz bringen, die für die naive Anschauung so verschieden wie nur möglich sind. -

Ich komme nun zu den Anwendungen der Theorie der Berührungstransformationen; hier zeigt es sich in tersamer Weise, daß die Idee der Berührungstransformation wie die meisten theoretisch wirklich guten Gedanken in der Praxis ein weites Anwendungsfeld findet, ja daß man sie dort schon lange vor ihre theoretischen Durcharbeitung wirklich gebraucht hat. Es ist die alte Lehre von den Zahnradern, die ich hier besonders im Auge habe. Sie bildet ein spezielles Kapitel der Kinematik, der allgemeinen Lehre von den Bewegungsmechanismen, die von zentraler Bedeutung z. B. für die Maschinenlehre ist; in diese Kinematik gehören ja auch die Geradführungen hinein, von denen wir neulich ein Beispiel hatten. Auch für die Kinematik gilt, was ich Ihnen schon oft in dieser Vorlesung sagen mußte: Ich kann hier natürlich immer nur kleine Teile jeder einzelnen Disziplin herausgreifen und an einfachsten Beispielen ihren Sinn und ihre Bedeutung möglichst handgreiflich wesentlich referierend schildern. Ein einzelnes nimmt Sie sich dann nach diesen Anregungen in Spezialdarstellungen zurückzufinden suchen; als Haupt-

orientierungsmittel in dem Gesamtgebiet der Kinematik empfehle ich da wieder das einschlägige Encyclopädie-referat von St. Schoenflies (II 3), das auch über die gewaltige Literatur gut Auskunft gibt.

Die Aufgabe der Zahnradkonstruktionen ist, gleichförmige Bewegung von einem Rade auf ein anderes zu übertragen; da dabei aber auch Kräfte übertragen werden sollen, so genügt es nicht, die Räder aufeinander abrollen zu lassen, sondern man muß dem einen Rade Vorsprünge, Zähne, geben, die in Lücken des andern



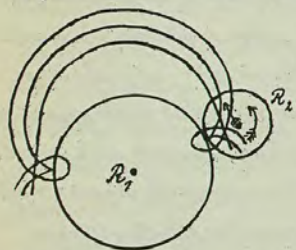
eingreifen. Das Problem ist daher, die Profile oder Flanken dieser Zähne so zu gestalten, daß eine gleichförmige Drehung des einen Rades auch eine gleichförmige Drehung des anderen bewirkt;

das ist gewiss auch eine geometrisch sehr interessante Fragestellung. Ich gebe so gleich den wichtigsten Teil der Lösung dieses Problems an; die Zähne des einen Rades können wesentlich willkürlich gewählt werden, mit den selbstverständlichen durch die praktische Verwertbarkeit bedingten Beschränkungen, daß die einzelnen Zähne nicht miteinander kollidieren u. dgl.; die Zähne des zweiten Rades sind aber dann



notwendig bestimmt, und zwar leiten sie sich durch eine ein für alle Male fest stehende Berührungstransformation aus den Zähnen des ersten Rades ab.

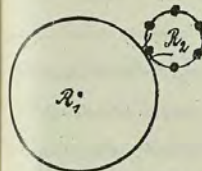
Es mag hier genügen, wenn ich das Zustandekommen dieses Theorems kurz erläutere, ohne es vollständig zu beweisen. Man bemerkt unmittelbar, daß es nur auf die Relativbewegung beider Räder gegeneinander ankommt; man darf also etwa das eine Rad R_1 überhaupt festgehalten denken, während das andere R_2 neben seiner Drehung noch um R_1 herumläuft. Dabei beschreibt jeder Punkt, der mit R_2 fest verbunden ist, in der ruhenden Ebene von R_1 eine Epizykloide, und zwar ist diese gestreckt, hat Spitzen oder ist verschlungen, je nachdem der betrachtete Punkt innerhalb, auf, oder außerhalb der Peripherie von R_2 liegt. Damit ist jedem Punkt der beweglichen



Ebene von R_2 in der festen Ebene von R_1 eine bestimmte Kurve zugeordnet, und wenn wir zu der diese Zuordnung vermittelnden Gleichung nach dem vorher angegebenen Verfahren die Berührungstransformation unmittelbar haben wir gerade die in Oberricht gestellte für die Zähnräder

charakteristische Berührungstransformation; man überzeugt sich nämlich leicht, daß zwei einander vermitte dieser Berührungstransformationen entsprechende Kurven bei der Bewegung tatsächlich aufeinander abrollen.

Endlich noch ein Wort darüber, wie sich dies hiermit ausgedeutete theoretische Prinzip bei der praktischen Konstruktion der Zahnräder gestaltet; ich rede nur von dem einfachsten Fall, der sog. Triebstockverzahnung. Da sind die Zähne von R_2 einfache Punkte, oder vielmehr, da diese keine Kraftübertragung geben würden, kleine Kreisförmige Zapfen, die sog. Triebstöcke. Jedem solchen kleinen Kreis entspricht wieder

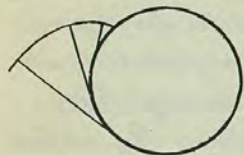


die Berührungstransformation eine Kurve, die sich sehr wenig von einer Epizykloide unterscheidet, nämlich eine Parallelkurve zu ihr in einem dem Kreisradius gleichen Abstände. Auf diesen Kurven rollen die Kreise bei der Drehung von R_2 ab, sie bilden also die Flanken der Zähne, die man auf R_1 aufsetzen muß, damit die kreisförmigen Zähne, die Triebstöcke, von R_2 gerade richtig eingreifen. In dem Modell, das ich Ihnen hier vorlege, sehen Sie in der That jeweils die stufartige



dieser Kurven als Profile der Lähne von R , realisiert - jede Kurve soweit, daß immer gerade ein Zahn nach dem andern eingreift.

Ich zeige Ihnen noch die Modelle zweier gleichfalls in der Praxis viel benutzter Verzahnungen, der Evoluteur- und der Zykloidenverzahnung.¹⁾ Die ersteren



bestehen, wie ich hier nur ganz kurz andeuten will, die Zahnprofile beider Räder aus Kreisevolventen, das sind Kurven, die durch das Abwickeln eines gespannten Fadens von einem Kreise entstehen und deren Evoluten also Kreise sind; bei der andern sind sie aus Zykloidenstücken zusammengesetzt. -

Ich hoffe Ihnen damit wenigstens eine erste Orientierung gegeben zu haben, um welche Probleme es sich in der Lehre von den Transformationen mit Wechsel der Raumelemente handelt; ich habe jetzt, bevor wir diesen zweiten von den Transformationen überhaupt handelnden Hauptteil verlassen, nur noch anhangsweise über ein wichtiges Kapitel zu reden, das in einer Encyclopädie der Geometrie nicht fehlen darf, nämlich über die Benützung imaginärer Elemente.
¹⁾ Alle diese Modelle sind von F. Schilling konstruiert (Verlag von H. Schilling, Leipzig).

V. Die Imaginärtheorie.

Die Lehre von Imaginären ist bekanntlich zuerst in der Algebra und Analysis ausgebildet worden, speziell in der Gleichungslehre und der Funktionentheorie komplexer Variabler, wo sie ja ihre größten Triumphe gefeiert hat. Weiterhin hat man aber auch frühzeitig in der analytischen Geometrie den Variablen x, y komplexe Werte $x = x_1 + i x_2, y = y_1 + i y_2$ erteilt und damit - zunächst ohne mit dieser der Analysis entsprechenden Sprechweise irgend einen eigentlichen geometrischen Sinn zu verbinden - den reellen Punkten eine große Mannigfaltigkeit komplexer Punkte hinzugefügt.

Der Nutzen dieser Voreinführungen soll natürlich darin bestehen, daß sie die bei Beschränkung auf reelle Variable nötigen Fallunterscheidungen überflüssig machen und das Aussprechen allgemeiner aussagenloser Sätze gestatten. Ganz analoge Überlegungen hatten uns ja bereits in der projektiven Geometrie zur Einführung der unendlichfernen Punkte sowie der von ihnen erfüllten unendlichfernen Ebene bew. Geraden geführt. Das eine wie das andere Mal, fern wir das, was man passend als „Adjunktion unendlichlicher Punkte“ zu den eigentlichen anschaulich erfassbaren Punkten



der Ebene bezeichnet.

Wir wollen nunmehr beide Adjunktionen gleichzeitig vollziehen. Zu diesem Zwecke führen wir, wie früher, homogene Koordinaten ein, setzen also zunächst in der Ebene zu bleiben, $\xi: \eta: \tau = x: y: 1$ und lassen für ξ, η, τ auch komplexe Werte zu. Betrachten wir dann beispielsweise eine homogene quadratische Gleichung

$$(1) \quad \alpha \xi^2 + 2\beta \xi \eta + \gamma \eta^2 + 2\delta \xi \tau + 2\epsilon \eta \tau + \zeta \tau^2 = 0,$$

so werden wir den Fachbegriff aller ihrer genügenden reellen und komplexen Wertsysteme ξ, η, τ (gleichgültig, ob sie endlich oder unendlich fern Punkte darstellen) eine Kurve zweiter Ordnung nennen. Man sagt dafür auch wohl manchmal einfach Kegelschnitt, aber das kann, wenn nicht bei den Lesern, die die Sache kennen, so doch bei den Vielen, denen die Betrachtung imaginärer Elemente nicht geläufig ist, Mißverständnis hervorrufen; braucht ja z. B. eine Kurve nach dieser Definition keinen einzigen reellen Punkt zu enthalten.

Kombinieren wir das nun mit einer linearen Gleichung:

$$(2) \quad \alpha \xi + \beta \eta + \gamma \tau = 0,$$

die wir ähnlich als Definition einer Kurve 1. Ordn.,

d. h. einer Geraden, auffassen. Diese beiden Gleichungen haben dann genau 2 Lösungstriplet $\xi: \eta: \tau$ gemein, d. h. eine Kurve erster und eine zweiter Ordnung, schneiden sich stets genau in 2 Punkten, die reell oder komplex, endlich oder unendlich fern, getrennt oder zusammenfallend sein können. Freilich sind Ausnahmen, die Abweichungen von diesem Satze hierbei führen, doch denkbar; zerfällt die linke Seite von (1) in zwei Linearfaktoren, und ist der eine von ihnen mit der linken Seite von (2) identisch, d. h. ist die Kurve 2. Ordn. eine „Geradenpaar“ und (2) mit einer ihrer Geraden identisch, so ist eben jeder Punkt von (2) gemeinsamer Punkt. Das kommt darauf hinaus, daß die quadratische Gleichung, die durch Klimination einer Variablen aus den beiden gegebenen Gleichungen entsteht, durchweg verschwindende Koeffizienten hat. Völlig weitergehende Ausnahmen treten natürlich ein, wenn die linke Seite einer oder gar beider gegebenen Gleichungen selbst identisch verschwindet ($\alpha = \beta = \dots = \zeta = 0$ oder $\alpha = \beta = \gamma = 0$); ich will jedoch alle diese und ähnliche Besonderheiten, die dem Wesen der Sache nach sämtlich trivial sind, im folgenden ganz bei Seite lassen. Dann dürfen wir z. B., wenn wir zur Betrachtung zweier Kurven 2. Ordn.



aufsteigen, den Satz aussprechen, daß sie stets gerade 4 Punkte gemeinsam haben.

Führen wir nunmehr auch im Raume homogene Koordinaten $\xi: \eta: \zeta: \tau = x: y: z: 1$ ein und erlauben ihnen beliebige komplexe Werte; die Gesamtheit der Lösungen einer linearen bzw. einer quadratischen homogenen Gleichung in diesen 4 Variablen werden wir dann Fläche 1. Ordnung (Ebene) bzw. Fläche 2. Ordnung nennen. Dann gilt wiederum allgemein - von trivialen Ausnahmen abgesehen -, daß eine Fläche 2. Ordnung von einer Ebene in einer Kurve 2. Ordnung geschnitten wird, und daß zwei Flächen 2. Ordnung sich in einer Raumkurve 4. Ordnung schneiden, die ihrerseits mit jeder Ebene 4 Punkte gemeinsam hat. Dabei ist es ganz gleich, ob diese Schnittkurven reelle Reste haben oder nicht, ob sie im Endlichen oder Unendlich-weiten verlaufen.

Man hat bereits Poncelet 1822 in seinem schon genannten „Traité des propriétés projectives des figures“ diese Begriffe auf Kreise und Kugeln angewandt; freilich benutzte er nicht homogene Koordinaten und die durch sie ermöglichten präzisier analytischen Formulierungen, sondern er folgte mehr seinem starken Gefühle für geometrische Kontinuität. Sehen wir, um

seine merkwürdigen Resultate in präzisier Form kennen zu lernen, von der Kreisgleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

aus, die wir homogen schreiben:

$$(\xi - a\tau)^2 + (\eta - b\tau)^2 - r^2 \tau^2 = 0.$$

Der Schnitt mit der unendlichfernen Geraden $\tau = 0$ wird also gegeben durch

$$\xi^2 + \eta^2 = 0, \quad \tau = 0;$$

aus diesen Gleichungen sind die den speziell zu Grunde gelegten Kreis charakterisierenden Konstanten a, b, r herausgefallen. Jeder beliebige Kreis schneidet also die unendlichferne Gerade in denselben beiden festen Punkten

$$\xi: \eta = \pm i, \quad \tau = 0,$$

die man die (imaginären) Kreispunkte nennt. Ganz genau so leitet man ab, daß alle Kugeln des Raumes die unendlichferne Ebene in ein und demselben imaginären Kegelschnitt schneiden:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0, \quad \tau = 0,$$

den man auch schlechtweg (imaginären) Kugelkreis nennt.

Es gilt aber auch das umgekehrte: Jede Kurve 2. Ordnung, die durch die beiden Kreispunkte der unendlichfernen Geraden ihrer Ebene geht, ist ein Kreis, und



jede Fläche 2. Ordnung, die die unendlichferne Ebene im Kugelkreis schneidet, ist eine Kugel, so daß wir hier charakteristische Eigenschaften von Kreis und Kugel haben.

Ich habe hier absichtlich nicht gesagt "unendlichferne" Kreispunkte und "unendlichferner" Kugelkreis, wie es wohl manchmal geschieht. Der Abstand der Kreispunkte vom Koordinatenanfangspunkt ist nämlich nicht bestimmt unendlich, wie man zunächst vielleicht glauben möchte, sondern er hat die Form $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{e} = \frac{r}{e}$ und ist demnach unbestimmt; je nach dem Grenzübergang zu den Kreispunkten kann man ihm jeden beliebigen Wert erteilen. Ebenso ist die Entfernung der Kreispunkte von jedem endlichen Punkte unbestimmt, und dasselbe gilt auch für die Entfernung eines jeden Punktes der Kugelkreeses von einem endlichen Raumpunkte. Das ist nun keineswegs wunderbar, denn wir haben ja von den Kreispunkten gleichzeitig verlangt, daß sie von einem endlichen Punkte den Abstand r haben (auf dem Kreis mit r um ihm liegen) und unendlich fern von ihm sein sollen; diesen scheinbaren Widerspruch kann die analytische Formel nur dadurch ausgleichen, daß sie jenen unbestimmten Wert

liefert. Man muß sich diese einfachen Dinge einmal ganz klar machen, um so unklar, als häufig Falsches darüber gesagt und geschrieben wird.

Diese Kreispunkte und der Kugelkreis gestatten es, die Theorie der Kreise und Kugeln der allgemeinen Theorie der Gebilde 2. Ordnung aufs schönste unterzuordnen, während für die elementare Betrachtung gewisse Verschiedenheiten zu bestehen scheinen. Es spricht man in der elementaren analytischen Geometrie immer nur von zwei Schnittpunkten zweier Kreise, da die Elimination einer Unbekannten aus ihren Gleichungen nur auf eine quadratische Gleichung führt; man haben die beiden Kreise aber wohl auf der unendlichfernen Geraden die beiden Kreispunkte gemein, die die elementare Darstellung nicht berücksichtigt, und so kommen wir tatsächlich auf die durch das oben genannte allgemeine Theorem für 2 Kurven 2. Ordnung erforderliche Anzahl von 4 Schnittpunkten. Ganz analog spricht man zunächst immer nur von einem Kreis, in dem 2 Kugeln sich treffen, und der übrigens reell oder imaginär sein kann; wir wissen jetzt aber, daß die Kugeln in der unendlichfernen Ebene wohl überdies den Kugelkreis gemein haben, und dieser ergänzt jenen endlichen Kreis zu der Raumkurve 4.



Ordnung, die unser allgemeiner Satz als Schnittkurve fordert.

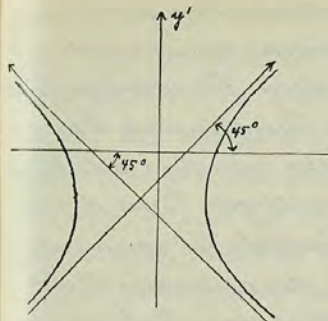
Selbst möchte man im Anschluss daran einige Worte über die sog. Quadrantentransformationen sagen. Man versteht darunter Kollineationen mit imaginären Homöographen, die imaginäre Punkte, für die man sich gerade vorzugsweise interessiert, in reelle Punkte verwandeln. So wird man hier in der Theorie der Kreispunkte mit Vorteil die Transformation

$$x' = x, \quad y' = iy, \quad z' = z$$

verwenden; denn durch sie geht die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ in $x'^2 - y'^2 = 0$ über, und daher werden die Kreispunkte $x = \pm i, z = 0$ in die reellen unendlich fernen Punkte

$$x' = \pm 1, \quad z = 0$$

verwandelt, das sind die unendlich fernen Punkte der beiden um 45° gegen die Achsen geneigten Richtungen. Alle Kreise werden also in Kegelschnitte durch diese beiden reellen unendlichfernen Punkte übergeführt, und das sind einfach sämtliche gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten jene Winkel $\pm 45^\circ$ mit den Achsen bilden. An dem Bilde dieser Hyperbeln kann man sich nun alle Theoreme über Kreise anschaulich klar machen, was für viele Zwecke



- besonders auch bei den analogen Entwicklungen im Raume - äußerst bequem und nützlich ist. Für Rahmen dieser Vorlesung muß ich es jedoch mit diesen Andeutungen genug sein lassen; nähere Ausführungen pflegt man in den Vorlesungen und

Büchern über „projektive Geometrie“ zu geben.

Es entsteht nun die Frage, ob man diesen imaginären Punkten, Ebenen, Kegelschnitten et c. nicht auch rein geometrisch nahe kommen kann, ohne sie - wie wir es bisher haben - gewaltsam aus den Formeln der Analysis zu überführen. Die älteren Geometer, Poncelet und auch Steiner hatten hierüber noch keine Klarheit gewonnen; bei Steiner sind die imaginären Größen in der Geometrie noch „Gespenster“, die gleichsam aus einer höheren Welt heraus sich in ihren Wirkungen bemerkbar machen, ohne daß wir von ihrem Wesen eine klare Vorstellung gewinnen können. Erst v. Staudt hat in seinen schon früher genannten Werken, der „Geometrie der Lage“¹⁾ und den „Beiträgen zur Geo-“
1) Würzburg 1846.



metrie der Lage",¹⁾ eine Frage vollkommen gelöst, und mit seinen Betrachtungen müssen wir uns noch ein wenig befassen. Ubrigens sind diese Haudtschens Bücher recht schwer lesbar, da er seine Theorien ohne Bezugnahme auf analytischen Formeln und ohne induktive Hinweise sogleich in ihrer zudringlichen Form deduktiv entwickelt; bequemer verständlich ist ja immer nur die geometrische Darstellung, die dem vom Autor bei der Entstehung seiner Ideen vermutlich eingeschlagenen Wege folgt.

Den beiden Werken v. Haudts entsprechen zwei verschiedene Stadien der Entwicklung seiner Theorie, die ich nun beide kurz darlegen will. In dem Werke von 1846 handelt es sich zunächst nur um die Betrachtung irgend welcher Gebilde zweiten Grades mit reellen Koeffizienten - ich sage Gebilde, weil ich die Dimension der Dimensionen (Gerade, Ebene oder Raum) unentschieden lassen will. Betrachten wir etwa eine Kurve 2. Ordnung in der Ebene, d. h. irgend eine homogene quadratische Gleichung in 3 Variablen mit reellen Koeffizienten:

$$A f^2 + 2 B f y + C y^2 + 2 D f z + 2 E y z + F z^2 = 0;$$

für die analytische Behandlung ist es dann völlig gleich-

1) Würzburg 1856-1860.

gültig, ob diese Gleichung überhaupt reelle Lösungen hat oder nicht, d. h. ob die Kurve zweiten Ordnung einen reellen Zug besitzt oder nur komplexe Punkte aufweist. Die Frage ist, was sich im letzteren Falle der reiner Geometer anschaulicher unter einer solchen Kurve denken, wie er sie mit geometrischen Mitteln definieren soll. Dieselbe Frage entsteht im eindimensionalen Gebiet, wenn wir die Kurve mit irgend einer Geraden, etwa der x -Achse $y = 0$ schneiden; dann werden die Schnitte - gleichgültig, ob sie reell oder imaginär sind - durch die Gleichung mit reellen Koeffizienten

$$A f^2 + 2 D f z + F z^2 = 0$$

geliefert, und die Frage ist, ob man im Falle komplexer Wurzeln irgend einen geometrischen Sinn damit verbinden kann.

Haudts Idee ist nun folgende: Er betrachtet statt der Kurve 2. Ordnung das ihr zugehörige Polarsystem, von dem wir ja früher (§. 249) sprachen, d. i. eine dualistische reciproke durch die Gleichung

$$A f f' + B (y y' + z z') + C y y' + D (f z + f' z') + E (y z + y' z') + F z z' = 0$$

dargestellte Verwandtschaft. Wegen der Realität der Koeffizienten ist das eine durchaus reelle Beziehung, die jedem reellen Punkte eine reelle Gerade zuordnet - mag



um der Kurve selbst reell sein oder nicht. Das Polarsystem bestimmt aber seinerseits die Kurve vollkommen als Gesamtheit der Punkte, die auf ihren eigenen Polaren liegen, wobei es von vornherein unentschieden bleibt, ob solche Punkte im Reellen existieren. In jedem Falle bildet aber das Polarsystem einen stets reellen Repräsentanten der durch die Gleichung definierten Kurve 2. Grades, der statt der Kurve zweckmäßig an die Spitze der Untersuchung gestellt werden kann.

Plausibel wir nun mit der x -Achse, d. h. setzen wir y und y' gleich 0, so haben wir ganz analog auf ihr eine eindimensionale stets reelle Polarenverwandtschaft, die durch die Gleichung

$$A x^2 + B x + C = 0$$

dargestellt wird und immer 2 reelle Punkte einander reziprok zuordnet. Die Schnittpunkte der x -Achse mit der Kurve sind die beiden in dieser Polarenverwandtschaft sich selbst entsprechenden Punkte, ihre sog. Grund- oder Ordnungspunkte. Sie können reell oder imaginär sein, jedenfalls wird auf sie selbst das Interesse erst in zweiter Linie gerichtet, und voran steht wieder die Polarenverwandtschaft als ihr stets reeller Repräsentant.

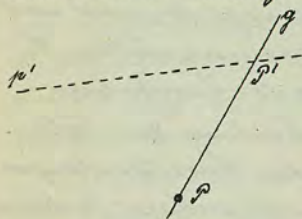
Man nennt die Paare $(\frac{x}{a}, \frac{x'}{a'})$ zweier sich in einer solchen eindimensionalen Polarenverwandtschaft entsprechender Punkte mit einem aus dem 17. Jahrhundert von Desargues herrührenden Ausdruck Punktepaare einer „Involution“, und zwar unterscheidet man 2 Hauptarten solcher Involutionen, je nachdem die Grundpunkte reell oder imaginär sind, und einen Übergangsfall, in dem sie zusammenfallen. Die Hauptfrage aber ist für uns hier der Involutionbegriff schlechthin; die Unterscheidung von Fällen, d. h. die Frage nach der Natur der Wurzeln der quadratischen Gleichung, hat erst sekundäres Interesse.

Mit diesen Betrachtungen, die sich natürlich auf 3 Dimensionen unmittelbar übertragen lassen, ist zwar das Imaginäre nicht gedeutet, aber doch – was Gebilde 2. Grades angeht – ein Standpunkt oberhalb des Unterschiedes von Reell und Imaginär gewonnen. Jeder Gebilde 2. Grades wird durch ein reelles Polarsystem dargestellt, und man kann mit diesem geometrisch ebenso operieren, wie analytisch mit den reellen Gleichungen der Gebilde.

Ein Beispiel soll das näher zeigen. Denken wir uns eine Kurve 2. Grades, d. h. also ein Polarsystem in der Ebene gegeben, und nehmen eine Gerade hinzu.



Da sind für die unmittelbare Anschauung sehr viele verschiedene Fälle möglich, je nachdem die Kurve überhaupt reelle Punkte hat, oder nicht und im ersten Falle die Gerade reell schneidet, oder nicht. Jedenfalls aber wird durch das ebene Polarsystem auf der Geraden g ein lineares Polarsystem d. h. eine Involution festge-

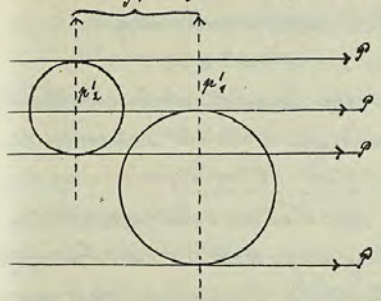


legt: Jedem Punkte P von g entspricht in ersterem eine Polare p' , und die schneidet in g einen Punkt P' ein, die Punkte (P, P') durchlaufen die in Rede stehende Involution. Nachträglich kann man dann

nach deren Grundpunkten fragen, und sehen, ob sie reell oder imaginär sind. Wir haben damit in geometrischer Sprache genau das gemacht, was wir zu Beginn dieser Erörterungen aus den Gleichungen schlossen.

Wir wollen nun diese Betrachtungen speziell auf die imaginären Kreispunkte und den Kugelkreis anwenden. Wir sagten früher, daß 2 beliebige Kreise die unendlichferne Gerade in denselben beiden Punkten, eben den Kreispunkten, schneiden, das wird jetzt also geometrisch bedeuten, daß ihre Polarsysteme auf der unendlichfernen Geraden ein und dasselbe Polar-

system, dieselbe Involution hervorbringen; in der Tat, sehen wir (vgl. S. 129) die Tangenten von einem unend-



lich ferne Punkte P von einem Kreis, so stellt dessen Polare p' als Verbindung ihrer Berührungspunkte auf ihrer gemeinsamen Richtung senkrecht. Da alle Geraden

wobei denselben unendlich ferne Punkte parallel sind, stellt auch seine Polare p'_2 in Bezug auf irgend einen zweiten Kreis auf derselben Richtung senkrecht und ist daher zu p'_1 parallel; mit anderen Worten, p'_1 und p'_2 schneiden die unendlichferne Gerade ihrerseits in denselben Punkte P' . Die Polarsysteme aller Kreise schneiden also - das ist das Resultat - in die unendlichferne Gerade ein und dasselbe Polarsystem, die sog. „absolute Involution“ ein, deren jedes Punktepaar von einem beliebigen endlichen Punkte aus betrachtet in einander senkrechten Richtungen erscheint.

Wir wollen diese Überlegung nun in analytische übertragen. Gehen wir von der homogenen Kreisgleichung



$(f - a\tau)^2 + (y - b\tau)^2 - r^2\tau^2 = 0$ oder
 $f^2 + y^2 - 2af\tau - 2by\tau + (a^2 + b^2 - r^2)\tau^2 = 0$
 aus, so ist die zugehörige Polarenverwandschaft:

$\{f' : y' - a(f\tau + f'\tau') - b(y\tau + y'\tau') + (a^2 + b^2 - r^2)\tau\tau' = 0;$
 wir erhalten daraus die auf der unendlichfernen Geraden
 erzeugte Verwandschaft, wenn wir $\tau = \tau' = 0$ setzen:

$$f'f' + yy' = 0, \tau = 0, \tau' = 0.$$

Diese Gleichungen sind in der Tat von den speziellen
 Konstanten a, b, r der Ausgangskreise unabhängig;
 ferner lehrt aber die analytische Geometrie, daß wegen
 der ersten Gleichung zwei nach den Punkten $f|y|0$
 und $f'|y'|0$ gehende Geraden auf einander senkrecht
 stehen, so daß wir wirklich den oben ausgesprochenen
 Satz wieder erhalten haben.

Ganz analoges gilt auch für die Kugeln des
Raumers. Sie alle liegen auf der unendlichfernen Eb.
 ne ein und dieselbe, die sog. absolute Polarenver-
wandschaft fest, die durch die Gleichungen

$$\{f'f' + yy' + \tau\tau' = 0, \tau = 0, \tau' = 0$$

gegeben ist, da die erste Gleichung aussagt, daß die
 Richtungen $f : y : f$ und $f' : y' : f'$ aufeinander senk-
 recht stehen, so entspricht dabei jedem unendlich-
 fernem Punkte P diejenige unendlichferne Gerade,
 die von einer auf der nach P weisenden Richtung

senkrechten Ebene ausgedreht wird. Damit haben
 wir ein reelles geometrisches Äquivalent der Linie über
 den imaginären Kugelkreis.

Man kann freilich sagen, daß in diesen ganzen
 Betrachtungen das Imaginäre mehr Umgangenes als ge-
 deutet ist. Eine wirkliche Interpretation einzelner
 imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen hat
 v. Staudt erst in seinem „Beiträgen“ von 1856/60
 durch Weiterbildung jenes Satzes gegeben. Ich will
 auch das hier auseinandersetzen, weil es ein Grunde-
 höchst einfache und sinnreich ist und nur in der ab-
 strakten Darstellung Staudts äußerst freundlich
 und schwierig erscheint. Dabei schließe ich mich durch-
 aus der analytischen Darstellung an, wie sie Holz
1871¹⁾ gegeben hat. Holz, der damals mit mir zusam-
 men in Göttingen war, hatte Staudt gelesen, was ich
 selbst nie fertig gebracht habe; von ihm lernte ich
 dann im persönlichen Verkehr die verschiedenen
 auch in anderer Hinsicht so interessantesten Staudt-
 schen Sätze kennen, über die ich späterhin viel-
 fach gearbeitet habe. Ich möchte im folgenden nur
 wieder die wichtigsten Dinge des Gedankenganges her-

1) Die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der ana-
 lytischen Geometrie. Math. Annal., Bd. 4, pg. 416.



vortreten lassen, ohne alle Einzelheiten vollständig auszuföhren; dabei wird es vollkommen genügen, wenn ich mich auf die Ebene beschränke.

Es sei also zunächst einmal ein imaginärer Punkt P , d. h. seine drei komplexen Koordinaten ξ, η, τ gegeben, es sei, in reellen und imaginären Bestandteil getrennt:

$$(1) \quad \xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \tau = \tau_1 + i\tau_2.$$

Wir wollen nun eine reelle Figur konstruieren, durch die dieser Punkt P seine Darstellung findet, und zwar soll der Zusammenhang ein projektiver sein, d. h. genauer gesagt, er soll durch beliebige reelle projektive Umformungen nicht geändert werden. Der erste Schritt dazu ist, daß wir

1) die beiden reellen Punkte P_1, P_2 auffassen, deren homogene Koordinaten die reellen bzw. die mit imultiplizierten Bestandteile der gegebenen Koordinaten von P sind:

$$(1^a) \quad P_1: \xi_1, \eta_1, \tau_1; \quad P_2: \xi_2, \eta_2, \tau_2.$$

Diese beiden Punkte sind verschieden, d. h. es ist nicht $\xi_1: \eta_1: \tau_1 = \xi_2: \eta_2: \tau_2$, da sonst $\xi: \eta: \tau$ sich wie drei reelle Größen verhalten und daher einen reellen Punkt darstellen würden. Daher bestimmen P_1, P_2 eine reelle Gerade g , deren Gleichung bekanntlich

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \tau \\ \xi_1 & \eta_1 & \tau_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \tau_2 \end{vmatrix} = 0$$

ist; auf ihr liegen sowohl der gegebene imaginäre Punkt P als auch sein „Korjugiert imaginärer Punkt“ \bar{P} mit den Koordinaten

$$(1^b) \quad \bar{\xi} = \xi_1 - i\xi_2, \quad \bar{\eta} = \eta_1 - i\eta_2, \quad \bar{\tau} = \tau_1 - i\tau_2,$$

denn beide Koordinatentripel (1), (1^b) genügen ersichtlich der Geradengleichung (2).

2) Natürlich wird das so konstruierte Punktepaar P_1, P_2 keineswegs als reeller Repräsentant der imaginären Punktes P gelten können, denn es hängt ganz wesentlich von den Einzelwerten von ξ, η, τ selbst ab, während für den Punkt P nur die Verhältnisse dieser Zahlen charakteristisch sind. Es wird also genau derselbe Punkt P dargestellt, wenn wir statt ξ, η, τ ihre Produkte mit einer beliebigen komplexen Konstanten

$$p = p_1 + i p_2$$

schreiben:

$$(3) \quad \begin{cases} p\xi = p_1\xi_1 - p_2\xi_2 + i(p_2\xi_1 + p_1\xi_2), \\ p\eta = p_1\eta_1 - p_2\eta_2 + i(p_2\eta_1 + p_1\eta_2), \\ p\tau = p_1\tau_1 - p_2\tau_2 + i(p_2\tau_1 + p_1\tau_2); \end{cases}$$

dann erhalten wir aber, indem wir wieder reellen und



imaginären Teil trennen, statt der Punkte P_1 und P_2 andere reelle Punkte P'_1 und P'_2 mit den Koordinaten:

$$(3^a) \begin{cases} P'_1: \xi'_1: \eta'_1: \tau'_1 = \xi_1 - \rho_1 \xi_2 - \rho_2 \eta_2: \eta_1 - \rho_1 \eta_2 - \rho_2 \tau_2: \tau_1 - \rho_1 \tau_2 - \rho_2 \xi_2 \\ P'_2: \xi'_2: \eta'_2: \tau'_2 = \xi_1 + \rho_1 \xi_2 + \rho_2 \eta_2: \eta_1 + \rho_1 \eta_2 + \rho_2 \tau_2: \tau_1 + \rho_1 \tau_2 + \rho_2 \xi_2 \end{cases}$$

Betrachten wir die Gesamtheit der so für alle Werte von ρ_1, ρ_2 entstehenden Punktepaare P'_1, P'_2 , so haben wir ein geometrisches Gebilde, in dem nur noch die Verhältnisse $\xi: \eta: \tau$, d. h. der „geometrische Punkt“ P von Geltung kommt, das also zur Repräsentation von P eben aus geeignet ist. Überdies ist der Zusammenhang mit P in der Tat projektiv, denn transformiert man ξ, η, τ irgendwie reell linear, so erleiden sowohl ξ'_1, η'_1, τ'_1 als auch ξ'_2, η'_2, τ'_2 offenbar die gleiche Substitution.

3) Nun muss die geometrische Natur dieser Gesamtheit von Punktepaaren näher zu untersuchen, bemerken wir zunächst, daß die Punkte P'_1, P'_2 jedenfalls, was auch g sei, auf der Geraden $P_1 P_2$ liegen, da ihre Koordinaten offenbar die Gleichung (2) befriedigen. Lassen wir weiter g alle Geraden, d. h. ρ_1 und ρ_2 alle reellen Werte durchlaufen (wobei es auf einen gemeinsamen reellen Faktor nicht wesentlich ankommt), so durchläuft P'_1 alle reellen Punkte von g und P'_2 stellt jedesmal einen ihm eindeutig zugeordneten zweiten reellen Punkt von g dar;

so entstehen z. B. (für $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0$) P'_1 und P'_2 als zugeordnete Punkte. Die Zuordnung wird übersichtlicher, wenn wir das Verhältnis

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = -\lambda$$

eingeführen; dann wird nämlich

$$(3^b) \begin{cases} \text{für } P'_1: \xi'_1: \eta'_1: \tau'_1 = \xi_1 + \lambda \xi_2: \eta_1 + \lambda \eta_2: \tau_1 + \lambda \tau_2 \\ \text{für } P'_2: \xi'_2: \eta'_2: \tau'_2 = \xi_1 - \lambda \xi_2: \eta_1 - \lambda \eta_2: \tau_1 - \lambda \tau_2 \end{cases}$$

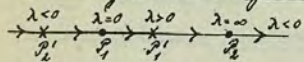
4) Aus diesen Formeln kann man weiter leicht folgern, daß bei variablen λ die Punkte P'_1 und P'_2 gerade die sämtlichen Punktepaare einer Involution auf der Geraden g durchlaufen. Denn führt man auf g ein eindimensionales Koordinatensystem ein, so werden die homogenen Koordinaten eines jeden Punktes P'_1 bzw. P'_2 bekannte lineare Funktionen des Parameters λ , - λ bzw. λ , mit denen die ebenen Koordinaten dieses Punktes aus den ebenen Koordinaten von P_1, P_2 komponiert sind. Daher liefert die Gleichung $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ zwischen den beiden Parametern eine symmetrische bilineare Relation zwischen den linearen Koordinaten von P'_1 und P'_2 , und damit ist gemäß der Definition von P. 275 die Behauptung erwiesen.

5) Die Grundpunkte d. h. die sich selbst entsprechenden Punkte dieser Involution erhalten wir für $\lambda = \pm 1$, also für $\lambda = \pm i$; sie sind beide imaginär, und zwar ist



der eine gerade der Punkt P , von dem wir ausgingen, der andere der Konjugiert imaginäre \bar{P} . Wir haben also bisher lediglich eine neue Darstellung des alten Hauntschen Ansatzes erreicht: Wir haben außer P den Punkt \bar{P} in Betracht gezogen, der P zu einem durch eine reelle quadratische Gleichung bestimmten eindimensionalen Gebilde 2. Grades ergäuzt, und haben dann als reellen Repräsentanten die zugehörige Involution konstruiert. Ich bemerke noch, daß eine solche Involution bestimmt ist, wenn man zwei ihrer Punktepaare, etwa P_1, P_2 und P_1', P_2' kennt; damit diese Involution imaginäre Grundpunkte hat, ist notwendig und hinreichend, daß sich diese Punktepaare, in verschränkter Lage befinden, d. h. daß einer der Punkte P_1', P_2' zwischen P_1 und P_2 , der andere außerhalb von ihnen liegt.

6.) Zur vollständigen Lösung unserer gegenwärtigen Aufgabe fehlt nun nur noch ein Mittel diesen gemeinsamen Repräsentanten von P und \bar{P} in einen Repräsentanten von P allein (oder von \bar{P} allein) zu verwandeln, und dieser hat v. Haunt erst 1856 durch einen sehr feinen Gedanken gefunden. Der Punkt P_1 mit den Koordinaten $\xi_1 + \lambda \xi_2 : \eta_1 + \lambda \eta_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2$ durchläuft nämlich die Gerade g in einer ganz bestimmten Richtung, wenn wir



λ von 0 durch positive reelle Werte

nach $+\infty$ und dann wieder durch negative zurück nach 0 laufen lassen. Man überzeugt sich leicht, daß man auf genau denselben Sinn auf g geführt würde, wenn man von dem mit einem beliebigen λ multiplizierten Koordinaten von P ausginge, d. h. den Punkt $\xi_1 + \lambda \xi_2$ et. c. betrachtete, und daß ferner bei reeller projektiver Transformation von P die Pfeilrichtung des Bildpunktes durch dieselbe Transformation aus der soeben bestimmten hervorgeht. Wir treffen daher eine unseiner Stufenforderungen genügende Festsetzung, wenn wir ein für alle Male dem ursprünglichen Punkte P mit den Koordinaten $\xi_1 + i \xi_2$ et. c. diese Pfeilrichtung zuordnen. Da der Konjugiert imaginäre Punkt \bar{P} die Koordinaten $\xi_1 + i(-\xi_2)$ et. c. hat, so ist ihm danach der Bewegungssinn des Punktes $\xi_1 + \lambda(-\xi_2)$ et. c. bei positiv wachsendem λ , also gerade der entgegengesetzte Sinn der Geraden g zuzuordnen, und damit ist die gewünschte Unterscheidung erreicht: Wir unterscheiden, kurz gesagt, einfach zwischen $+i$ und $-i$, indem wir zwischen der positiven und der negativen Durchlaufung der reellen λ -Werte unterscheiden.

Damit haben wir schließlich, um es zu resumieren, folgende Regel für die eindeutige und projektiv invariante Bildung eines dem imaginären Punkt $\xi_1 + i \xi_2 : \eta_1 + i \eta_2 :$

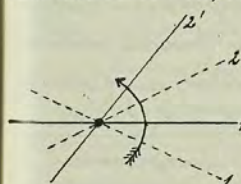


$\xi_1 + i \xi_2$ repräsentierenden reellen geometrischen Figur geworden: Man konstruiere die Punkte $P_1 (\xi_1 : \eta_1 : \tau_1)$ und $P_2 (\xi_2 : \eta_2 : \tau_2)$, die Gerade g durch sie und diejenige Punktkonvolution auf g (bzw. noch ein weiteres ihrer Punktepaare), in der immer die Punkte $P_1 (\xi_1 + \lambda \xi_2 : \eta_1 + \lambda \eta_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2)$ und $P_2' (\xi_1 - \frac{1}{\lambda} \xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda} \eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda} \tau_2)$ gepaart sind; man füge endlich den Pfeil bei, der der Bewegungsrichtung von P_1' bei positiv wachsendem λ entspricht.

7.) Es bleibt nun nur noch zu überlegen, daß auch umgekehrt jede solche reelle Figur bestehend aus einer Geraden, 2 Punktepaaren P_1, P_2 und P_1', P_2' in verschränkter Lage (bzw. einer Punktkonvolution ohne reelle Doppelpunkte) auf ihr sowie einer Pfeilrichtung einen und nur einen imaginären Punkt repräsentiert. In der That kann man leicht - ich brauche wohl auch darüber nicht im einzelnen auszuführen - durch Hinzufügung eines passenden reellen konstanten Faktors den Koordinaten von P_2 solche Werte ξ_2, η_2, τ_2 erteilen, daß die Koordinaten von P_1' und P_2' proportional $\xi_1 + \lambda \xi_2 : \eta_1 + \lambda \eta_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2$ und $\xi_1 - \frac{1}{\lambda} \xi_2 : \eta_1 - \frac{1}{\lambda} \eta_2 : \tau_1 - \frac{1}{\lambda} \tau_2$ sind, oder, was dasselbe ist, daß die Doppelpunkte der gegebenen Involution die Koordinaten $\xi_1 \pm i \xi_2, \dots$ haben; über das Vorzeichen von λ , das darauf noch

willkürlich bleibt, verfähre man so, daß die Bewegungsrichtung des Punktes $\xi_1 + \lambda \xi_2 : \eta_1 + \lambda \eta_2 : \tau_1 + \lambda \tau_2$ bei von 0 aus positiv wachsendem λ dem Sinne des gegebenen Pfeiles entspricht. Dann wird dem Punkte P mit den Koordinaten $\xi_1 + i \xi_2, \dots$ auf Grund der vorangehenden Entwicklungen tatsächlich gerade die gegebene Involution mit der gegebenen Pfeilrichtung als reeller Repräsentant entsprechen; man überzeugt sich weiterhin leicht, daß man auf die gleichen Koordinatenverhältnisse, d. h. auf denselben Punkt P geführt wird, wenn man von einem andern Punktepaar der Involution ausgeht. -

Nachdem wir so unser Problem für den Punkt erledigt haben, können wir die Lösung nach dem Prinzip der Dualität sofort auch auf die Gerade übertragen. Da-



nach wird eine komplexe Gerade im reellen eindeutig repräsentiert durch einen reellen Punkt, zwei dem Strahlenbüschel durch ihn entstehende Strahlenpaare in verschränkter Lage

(bzw. eine Strahleninvolution ohne reelle Doppelpunkte) sowie endlich einen bestimmten Nulllauf im Bündel.

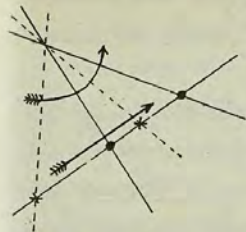
Diese Darstellungen gestatten es, und davon liegt ihr großer Wert, auch alle Beziehungen zwischen komplexen



Elementen oder zwischen komplexen und reellen Elementen durch greifbare Eigenschaften durchaus reeller geometrischer Figuren darzustellen. Um das an einem konkreten Beispiele deutlich zu machen, will ich Ihnen darlegen, was es in dieser Repräsentation heißt, daß ein (reeller oder komplexer) Punkt P auf einer (reellen oder komplexen) Geraden g liegt. Wir haben da natürlich 4 Fälle zu unterscheiden:

- 1, reeller Punkt und reelle Gerade;
- 2, reeller Punkt und imaginäre Gerade;
- 3, imaginärer Punkt und reelle Gerade;
- 4, imaginärer Punkt und imaginäre Gerade.

Der Fall 1, bedarf keiner besonderen Erläuterung; hier haben wir die Grundbeziehung der reellen Geometrie vor uns. - Im Falle 2, muß durch den gegebenen reellen Punkt neben der gegebenen imaginären Geraden notwendig auch die konjugiert imaginäre gehen, und daher muß er mit dem Scheitel des Strahlenbüschels identisch sein, das wir zur Darstellung der imaginären Geraden benutzen. Ebenso muß im Falle 3, die reelle Gerade identisch mit dem Träger der geradlinigen Punktinvolution sein, die den gegebenen imaginären Punkt repräsentiert. - Am interessantesten ist der Fall 4,; bei ihm muß offen-



bar der konjugiert imaginäre Punkt auch auf der konjugiert imaginären Geraden liegen, und daraus folgt leicht, daß jedes Punktepaar der P darstellenden Punktinvolution auf einem Strahlenpaar der g repräsentierenden Geraden involutions liegen muß; d. h. diese beiden repräsentierenden Involutionen müssen perspektiv zu einander liegen; überdies ergibt sich noch, daß die Pfeile der beiden Involutionen gleichfalls perspektiv liegen.

In dieser Weise bekommt man überhaupt das volle Abbild der allgemeinen analytischen Geometrie der Ebene mit komplexen Koordinaten, wenn man der Gesamtheit der reellen Punkte und Geraden der Ebene die Gesamtheit der in Rede stehenden Involutionen mit Pfeilrichtung als neue Elemente adjungiert. Es mag hier genügen, wenn ich nur im großen Umrissen andeute, wie sich der Aufbau dieses reellen Bildes der komplexen Geometrie gestalten würde. Ich folge dabei derjenigen Anordnung, in der man die ersten Lätze der elementaren Geometrie jetzt gewöhnlich darzustellen pflegt. Man beginnt da

- 1, mit dem Existenzsätzen, die die Existenz der so



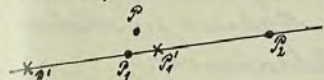
eben ausgedeuteten Elemente einer gegen die gewöhnliche Geometrie erweiterten Reiches genau zu umschreiben hätten.

2.) Hierauf folgen die Sätze der Verknüpfung, die aussagen, daß auch in dem in 1.) definierten erweiterten Bereiche durch λ Punkte genau 1 Gerade geht, und daß λ Gerade genau einen Punkt gemein haben. Man hat dabei je nach der Realität der gegebenen Elemente ganz wie soeben jedesmal 4 Fälle zu unterscheiden, und es ist sehr amüsant, sich genau durchzuüberlegen, in welchen reellen Konstruktionen mit Punkt- und Geradeninvolutionsen jene komplexen Beziehungen ihr Abbild finden.

3.) Was nun die Geometrie der Anordnung angeht, so treten hier gegenüber den reellen Verhältnissen völlig neue Umstände auf; insbesondere bilden die sämtlichen reellen und komplexen Punkte auf einer festen Geraden und ebenso die sämtlichen Strahlen durch einen festen Punkt je ein zweidimensionales Kontinuum. Jederseits ist ja auch von der Funktionentheorie her gewohnt, die Gesamtheit der Werte einer komplexen Variablen durch die sämtlichen Punkte einer Ebene darzustellen.

4.) Was die Sätze der Stetigkeit angeht, so will ich

hier nur hervorheben, wie sich die in beliebiger Nähe eines reellen Punktes liegenden komplexen Punkte repräsentieren werden. Man hat dann durch den reellen Punkt P (oder durch einen reellen Nachbarnpunkt) eine reelle Gerade zu legen und auf dieser zwei solche Punktepaare P_1, P_2 und P'_1, P'_2 in verschränkter Lage zu betrachten, daß zwei Punkte P_1, P'_1 derselben Paare nahe



aneinander und an P liegen; läßt man nun P_1 und P'_1 zu-

sammensinken, so zerfällt die durch jene Paare bestimmte Involution aus, d. h. ihre beiden vorher komplexen Doppelpunkte fallen mit $P_1 \equiv P'_1$ zusammen. Jeder der beiden durch die Involution (mit dem einen oder anderen Pfeile) dargestellten imaginären Punkte geht also stetig in einen Punkt in der Nähe von P oder gar in P selbst über. Man muß sich in diese Stetigkeitsvorstellungen natürlich erst besonders hineinarbeiten, um sie mit Nutzen gebrauchen zu können. -

Ist dieser ganze Aufbau auch, verglichen mit der gewöhnlichen reellen Geometrie, recht unständlich und beschwerlich, so kann er doch unvergleichlich viel mehr leisten; insbesondere kann er algebraische Gebilde als Gesamtheit ihrer reellen und komplexen Elemente zu voller geometrischer Anschaulichkeit erheben, und man



Kann mit ihm zu den Figuren selbst Punkte wie dem Fundamentalsatz der Algebra oder das Bezout'sche Theorem, daß 2 Kurven m^{ter} und n^{ter} Ordnung im allgemeinen gerade $m \cdot n$ komplexe Punkte gemein haben, sich anschaulich deutlich machen. Zu diesem Ziele müßte man die Stenografie freilich viel genauer anschaulich durcharbeiten, als das bisher wohl geschrieben ist; übrigens findet sich alles wesentliche Material zu solchen Untersuchungen bereits in der Literatur vor.

In den meisten Fällen dürfte allerdings die Anwendung dieser geometrischen Zeichnung bei allen ihren theoretischen Vorzügen doch solche Komplikationen mit sich bringen, daß man sich mit ihrer prinzipiellen Nützlichkeit zufrieden geben und sich tatsächlich auf den unternannten Standpunkt zurückziehen wird: ein komplexer Punkt ist der Subbegriff imaginärer Koordinatenwerte, mit dem man in gewisser Weise ebenso operieren kann, wie mit reellen Punkten. Tatsächlich hat sich diese von allen prinzipiellen Erörterungen absehbare Heranziehung imaginärer Elemente namentlich immer, dann als fruchtbar erwiesen, wenn man mit den imaginären Kreispunkten und dem Kugelkreise zu tun hatte. Zuerst hat, wie schon gesagt, Plücker das Imaginäre in diesem Sinne benutzt; ihm sind andere französi-

sche Geometer, so namentlich Chasles und von jetzt lebenden Darboux, darin nachgefolgt; in Deutschland hat besonders Lie von dieser Auffassung des Imaginären mit großem Erfolge Gebrauch gemacht.

Mit diesem Exkurs über das Imaginäre beschließe ich auch den ganzen 2. Hauptteil dieser Vorlesung, und wende mich einem neuen Abschnitt zu.