ELEMENTARMATHEMATIK

VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS.

TEIL II: GEOMETRIE.

VORLESUNG

GEHALTEN IM SOMMERSEMESTER 1908

VON

F. KLEIN.

AUSGEARBEITET VON E. HELLINGER.

ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG 1914

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER.

Vorwort zur ersten Auflage.

In dem Vorwort zu Teil I der vorliegenden Vorlesungen (Arithmetik, Algebra, Analysis) bezeichnete ich es noch als zweifelhaft, ob der der Geometrie gewidmete Teil II so bald werde erscheinen können. Nun ist es doch gelungen, ihn fertig zu stellen, wozu die Arbeitskraft von Herrn Hellinger, wie ich gern hervorhebe, ihr wesentliches Teil beigetragen hat.

Über Entstehung und Zweck der ganzen Vorlesungsserie habe ich hier dem, was in der Vorrede von I gesagt ist, nichts Besonderes mehr hinzuzufügen. Wohl aber scheint ein Wort nötig über die neue Form, welche dieser zweite Teil angenommen hat.

Diese Form ist in der Tat eine ganz andere wie bei Teil I. Ich habe mich entschlossen, vor allen Dingen einen Gesamtüberblick über das Gebiet der Geometrie zu geben, in dem Umfange, wie ich ihn jedem Lehrer an einer höheren Schule wünschen möchte*); die Erörterungen über den geometrischen Unterricht wurden also zurückgedrängt und zum Schluß, soweit noch Raum blieb, nun aber im Zusammenhange, gegeben.

In einem gewissen Maße hat bei der so charakterisierten Neuanordnung der Wunsch mitgewirkt, nicht in eine zu stereotype Form zu verfallen. Es lassen sich aber auch wichtige innere Gründe anführen. Wir haben in der Geometrie keine solchen einheitlichen, dem allgemeinen Stande der Wissenschaft entsprechenden Lehrbücher, wie wir sie für Algebra und Analysis dank dem Vorbilde der französischen Cours besitzen; vielmehr findet man hier diese, dort jene einzelne Seite des vielumfassenden Gegenstandes dargestellt, wie sie gerade von der einen oder anderen Gruppe von Forschern zur Entwicklung gebracht worden ist. Demgegenüber schien es, bei den pädagogischen und allgemein-wissenschaftlichen Zwecken, die ich verfolge, ein wesentliches Erfordernis, eine mehr einheitliche Zusammenfassung zu versuchen.

Ich schließe mit dem Wunsche, daß die beiden einander ergänzenden, nun vollendet vorliegenden Teile der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" in der Lehrerwelt dieselbe freundliche Aufmerksamkeit finden mögen, wie die im Vorjahre von Herrn Schimmack und mir herausgegebenen Vorträge über die Organisation des mathematischen Unterrichts.

Göttingen, Weihnachten 1908. **Klein.**

Vorbemerkung zur zweiten Auflage.

Bei der Durchsicht des Textes für die Neuauflage wurden wie beim ersten Bande nirgendwo wesentliche Änderungen vorgenommen. Nur an einigen Stellen erschien es erwünscht, durch eine etwas eingehendere Darstellung die Lesbarkeit zu erleichtern; auch Literaturnachweise wurden gelegentlich ergänzt. Einige ausführlichere Nachträge dagegen enthalten die „Zusätze" am Schluß des Bandes. Solche Erweiterungen erforderte namentlich der Anhang über den geometrischen Unterricht dank dem reichen Material, das die Arbeiten der internationalen mathematischen Unterrichtskommission seither ergeben haben; Herr Oberlehrer Dr. Weinreich in Göttingen hatte die Freundlichkeit, uns dabei in dankenswerter Weise behilflich zu sein.

Göttingen und Marburg, Herbst 1913. **Klein. Hellinger.**

*) Wer sich für abstraktere Fragen interessiert, sei auf meine schon früher autographierten Vorlesungen über „höhere Geometrie" verwiesen (1893, neuer Abdruck 1907).

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Meine Herren! Die Vorlesung, die ich heute beginne, soll die unmittelbare Fortsetzung und Ergänzung meines Kollegs vom letzten Winter [1] bilden. Hier wie dort ist die Absicht, alles, was Sie in Ihren Studienjahren an Mathematik getrieben haben, soweit es für den künftigen Lehrer nur irgend von Interesse sein kann, zusammenzufassen und insbesondere auch in seiner Tragweite für den Betrieb des mathematischen Schulunterrichts zu erläutern. Im Winter habe ich dieses Programm der Reihe nach für die Arithmetik, Algebra, Analysis durchgeführt; im laufenden Semester soll die Geometrie zu Ehren kommen, die damals beiseite geblieben war. Dabei sollen unsere Betrachtungen natürlich auch unabhängig vom vorigen Kolleg verständlich sein, und ich will übrigens auch den Ton des Ganzen ein wenig anders

1) Erschienen als Teil I dieser autographierten Vorlesungen über „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus." Leipzig (in Kommission bei B. G. Teubner) 1908; 2. Aufl. 1911. Die Zitate („Teil I") beziehen sich auf die 2. Aufl.

nehmen: Im Vordergrund soll das – ich will einmal sagen – enzyklopädische Moment stehen; Sie sollen einen Überblick über das Gesamtgebiet der Geometrie erhalten, in den Sie alle Einzelkenntnisse, die Sie im Laufe Ihres Studiums gewonnen haben, wie in einen festen Rahmen einordnen können, um sie so zu jeder Anwendung bereit zu halten. Erst hinterher wird ganz von selbst auch das Interesse am mathematischen Schulunterricht hervorkommen, von dem ich im Winter immer ausging.

Ich nehme hier noch gern Bezug darauf, daß soeben in den vergangenen Osterferien (1908) hier in Göttingen ein Ferienkursus für Oberlehrer der Mathematik und Physik stattgefunden hat; dort habe ich über meine Wintervorlesung berichtet, und im Anschluß daran sowie an den Vortrag von Professor Behrendsen vom hiesigen Gymnasium ergaben sich sehr interessante angeregte Diskussionen über die Modernisierung des Schulunterrichts in Arithmetik, Algebra und Analysis sowie speziell über die Einführung der Differential- und Integralrechnung auf der Schule.[1] Die Teilnehmer zeigten dabei ein

1) Vgl. das freie Referat von R. Schimmack, Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen" in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht 39 (1908) pg. 513–527 (Auch separat: Leipzig, 1908).

äußerst erfreuliches Interesse an diesen Fragen, wie überhaupt an unseren Bestrebungen Universität und Schule in lebendigen Kontakt zu bringen. Im Sinne dieser Bestrebungen soll auch meine gegenwärtige Vorlesung wirken; hoffen wir, dass sie ihr Teil beiträgt zur Abstellung der alten Klagen, die wir – und leider oft mit Recht – von der Schule her immer hören mußten: Der Hochschulunterricht bringe zwar vieles Spezielle, aber er lasse den angehenden Lehrer durchaus unorientiert über die vielen allgemeinen wichtigen Dinge, die er später tatsächlich brauchen könnte.

Was nun den Stoff der Vorlesung anlangt, so bemerke ich nur, dass ich analog wie im vorigen Semester gelegentlich Hauptsätze aus allen Gebieten der Geometrie, so wie sie Ihnen sonst vorgetragen werden, als bekannt werde voraussetzen müssen, um den Nachdruck auf den Überblick über das Ganze legen zu können; dabei werde ich freilich Ihrer Erinnerung immer soweit durch kurze Angaben nachzuhelfen suchen, dass Sie sich in der Literatur leicht vollständig orientieren können. Demgegenüber will ich – gleichfalls ganz wie im ersten Teil – viel mehr, als es sonst geschieht, auf die historische Entwicklung der Wissenschaft, auf die Leistungen ihrer großen Pfadfinder, hinweisen. Durch Erörterungen dieser Art will ich, wie ich gerne sage, Ihre mathematische Allgemeinbildung fördern: neben die Kenntnis der Details, wie sie die Spezialvorlesungen liefern, soll die Erfassung des sachlichen und historischen Zusammenhanges treten.

Noch eine letzte allgemeine Bemerkung gestatten Sie, um ein Mißverständnis zu vermeiden, wie es die äußere Trennung dieses „geometrischen" Teiles der Vorlesung vom ersten „arithmetischen" sonst vielleicht hervorrufen könnte. Ich vertrete dessen ungeachtet hier wie überhaupt stets in solchen allgemeinen Vorlesungen eine Tendenz, die ich am liebsten mit dem Stichwort „Fusion der Arithmetik und Geometrie" bezeichne – Arithmetik hier im allgemeinen, auf der Schule üblichen Sinne verstanden, wo nicht nur die Lehre von den Zahlen, sondern auch die ganze Algebra und Analysis mit inbegriffen ist. Man gebraucht dies Wort „Fusion" sonst, besonders in Italien, als Schlagwort für Bestrebungen, die sich auf die Geometrie beschränken. Es ist nämlich von altersher auf der Schule wie auf der Uni-

versität üblich, erst die Geometrie der Ebene und dann ganz abgesondert davon die des Raumes zu behandeln; dabei kommt die Raumgeometrie aber leider oft zu kurz, und das edle Organ der Raumanschauung, das wir von Hause aus besitzen, verkümmert. Demgegenüber wollen die „Fusionisten" von vornherein Ebene und Raum gleichzeitig nebeneinander behandeln, um unser Denken nicht erst künstlich auf zwei Dimensionen zu beschränken. Auch diesen Bestrebungen schließe ich mich hier an, denke aber, wie gesagt, gleichzeitig an eine noch weitergehende Fusion: Im vorigen Semester habe ich die abstrakten Erörterungen der Arithmetik, Algebra und Analysis stets durch Figuren und graphische Methoden belebt, die einem die Dinge viel näher bringen und vielfach erst verständlich machen, warum man sich mit ihnen beschäftigt; analog will ich jetzt die Raumanschauung, die natürlich an erster Stelle stehen bleiben muß, von vornherein durch analytische Formeln begleiten, die die praezise Formulierung geometrischer Tatsachen im höchsten Maße erleichtern.

Wie das gemeint ist, werden Sie am besten sehen, wenn ich mich sogleich unserm Gegenstande zuwende; da soll uns zuerst die Betrachtung einer Reihe einfacher geometrischer Grundgebilde beschäftigen.

Erster Hauptteil: Die einfachsten geometrischen Gebilde.

I. Strecke, Flächeninhalt, Rauminhalt als relative Grössen.

Sie sehen bereits an dieser Kapitelüberschrift, dass ich getreu der soeben allgemein ausgesprochenen Absicht von Anfang an die entsprechenden Grössen auf der Geraden, in der Ebene, im Raum nebeneinander behandele; gleichzeitig wollen wir aber auch der allgemeineren Tendenz der Fusion Rechnung tragen, indem wir uns von vornherein prinzipiell des *rechtwinkligen Koordinatensystems* bedienen.

Haben wir nun zunächst eine *Strecke*, so denken wir sie auf die x-Achse gelegt; sind die Abszissen ihrer Endpunkte x_1 und x_2, so ist ihre *Länge* $x_1 - x_2$ und das kann man offenbar als folgende Determinante schreiben:

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ganz analog ist der *Inhalt eines Dreiecks* der

x-y-Ebene, das von den 3 Punkten 1; 2; 3 mit den Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 gebildet wird:

$$(1, 2, 3) = \frac{1}{1.2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix};$$

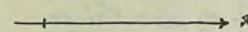
und endlich hat man für den Rauminhalt des Tetraeders aus den 4 Punkten 1; 2; 3; 4 mit den Koordinaten $x_1, y_1, z_1; \dots; x_4, y_4, z_4$:

$$(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{1.2.3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

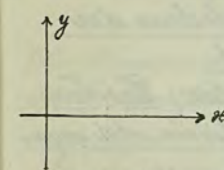
Gewöhnlich sagt man nun, daß die Länge bezw. der Inhalt gleich dem absoluten Werte der angegebenen Größen ist, während doch tatsächlich unsere Formeln noch darüber hinaus ein ganz bestimmtes Vorzeichen liefern, das nur von der Reihenfolge abhängt, in der die Punkte gegeben sind. Wir wollen uns zum Prinzip machen, alle solche Vorzeichen, die die analytischen Formeln liefern, auch in der Geometrie zu verwenden; demgemäß haben wir zu fragen, was bei diesen

Inhaltsbestimmungen denn das Vorzeichen geometrisch bedeuten mag.

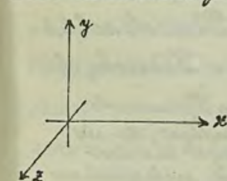
Dafür ist es von Wichtigkeit, wie wir das rechtwinklige Koordinatensystem wählen und darüber wollen wir vorab eine ein für alle Male bindende, an sich natürlich willkürliche Verabredung treffen. Im Falle einer Dimension zunächst möge die positive x-Achse immer nach rechts hin zeigen.



In der Ebene sei die positive x-Achse nach rechts, die positive y-Achse nach oben gerichtet; würde man diese nach unten hin weisen lassen, so ergäbe sich ein wesentlich verschiedenes Koordinatensystem, das zu dem ersten spiegelbildlich ist und das man mit ihm durch bloße Bewegung in der Ebene, ohne in den Raum hinaus zu gehen, nicht zur Deckung bringen kann.



Das räumliche Koordinatensystem möge nun aus jenem ebenen entstehen, indem man eine nach vorn positiv gerichtete z-Achse hinzunimmt; die umgekehrte Richtung ergäbe wieder ein wesentlich verschiedenes Koordinatensystem, das

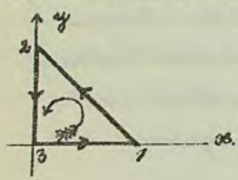


man mit dem unsrigen durch keine Bewegung im Raume zur Deckung bringen könnte.[1]

Indem wir immer an diesen Verabredungen festhalten, werden wir nun die Deutung unserer Vorzeichen in einfachen geometrischen Eigenschaften der durch die gegebene Numerierung bedingten Reihenfolge der Punkte finden.

Für die Strecke (1, 2) ist diese Eigenschaft fast selbstverständlich: Der Ausdruck $x_1 - x_2$ der Länge fällt positiv oder negativ aus, je nachdem der Punkt 1 rechts oder links von 2 liegt.

Beim Dreieck ist das Resultat das: Die Formel liefert für den Inhalt einen positiven oder negativen Wert, je nachdem der Umlaufungssinn, der auf dem Dreiecksumfange von der Ecke 1 über 2 zu 3 führt, dem Uhrzeigersinne entgegengesetzt oder gleich ist. Wir werden das beweisen, indem wir bei einem möglichst bequem gelegenen speziellen Dreieck die Formel direkt ausrechnen, und nach der Kontinuität auf das allgemeine Dreieck schließen: Wir betrachten das Dreieck, das



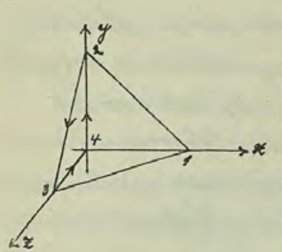
[1] Man unterscheidet diese beiden Systeme als „rechtshändiger" und „linkshändiger", da sie der Stellung der ersten 3 Finger an der rechten und linken Hand entsprechen (Vgl. Teil I, pag. 154).

zur ersten Ecke den Einheitspunkt der x-Achse ($x_1 = 1 \mid y_1 = 0$), zur zweiten den der y-Achse ($x_2 = 0 \mid y_2 = 1$), zur dritten den Nullpunkt ($x_3 = y_3 = 0$) hat; es ist nach unseren Verabredungen über das Koordinatensystem entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne umlaufen, und unsere Formel ergibt für seinen Inhalt tatsächlich den positiven Wert:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = + \frac{1}{2} .$$

Wir können die Ecken dieses Dreiecks nun gewiß in die Ecken jedes andern Dreiecks mit demselben Umlaufungssinn stetig überführen, ohne daß sie dabei jemals alle drei in eine Gerade zu liegen kommen. Dabei ändert sich aber unsere Determinante stetig, und da sie bekanntlich nur verschwindet, wenn die Punkte 1, 2, 3 auf einer Geraden liegen, muß sie bei diesem Prozeß ständig positiv bleiben; damit ist in der Tat bewiesen, daß der Inhalt jedes positiv umlaufenen Dreiecks positiv ist. Durch Vertauschung zweier Ecken ergibt sich sofort, daß jedes im Uhrzeigersinne umlaufene Dreieck unserer Formel zufolge negativen Inhalt bekommt.

Ganz analog können wir nun das Tetraeder



behandeln. Wir gehen aus wieder von einem möglichst bequem gelegenen Tetraeder: zur ersten, zweiten, dritten Ecke möge es bezw. den Einheitspunkt der x-, y-, z-Achse, zur vierten den Anfangspunkt haben. Sein Inhalt ist daher:

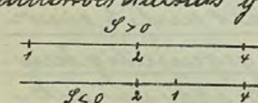
$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{6},$$

und wie vorhin folgt wieder, daß jedes Tetraeder, das man durch stetige Deformation aus ihm herleiten kann, ohne daß die vier Ecken jemals in eine Ebene fallen (d. h. die Determinante verschwindet), positiven Inhalt besitzt. Alle diese Tetraeder kann man aber durch den Umlaufsinn charakterisieren, den das eine Seitendreieck (2, 3, 4) von der Ecke 1 aus betrachtet aufweist, und so ergibt sich folgendes Resultat: *Der durch unsere Formel bestimmte Inhalt des Tetraeders (1, 2, 3, 4) ist positiv, wenn von der Ecke 1 aus betrachtet die Ecken 2, 3, 4 entgegen dem Sinne des Uhrzeigers aufeinander folgen; andernfalls ist er negativ.*

Wir haben so aus den analytischen Formeln tatsächlich geometrische Regeln gewonnen, die jeder Strecke, jedem Dreieck, jedem Tetraeder ein bestimmtes Vorzeichen zuzuordnen gestatten, wenn die Ecken in einer bestimmten Reihenfolge gegeben sind. Damit sind tatsächlich große Vorteile gegenüber der gewöhnlichen Elementargeometrie gewonnen, die Länge und Inhalt als absolute Größen betrachtet; wir werden nämlich allgemeine einfache Theoreme auch da aufstellen können, wo jene Elementargeometrie je nach dem besonderen Aussehen der Figuren zahlreiche Fälle unterscheiden muß.

Lassen Sie mich mit einem ganz primitiven Beispiele beginnen, dem *Schnittverhältnis* dreier Punkte auf einer Geraden, der x-Achse. Bezeichnen wir die drei Punkte, wie es in Rücksicht auf das folgende am bequemsten ist, mit 1, 2 und 4, so ist ihr Schnittverhältnis gegeben durch

$$S = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4},$$



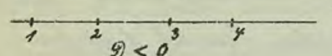
und es ist klar, daß dieses S *positiv oder negativ ist, je nachdem der Punkt 1 außer-*

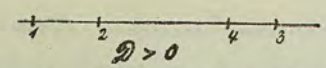
halb oder innerhalb der Strecke (2, 4) liegt. Gibt man, wie in den elementaren Darstellungen üblich, nur den absoluten Wert $|\mathcal{S}| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_4|}$, so muß man stets noch ausdrücklich auf die Figur verweisen oder in Worten hinzufügen, ob man einen Punkt innerhalb oder außerhalb im Sinne hat, und das ist natürlich viel umständlicher. Die Einführung des Vorzeichens trägt also den verschiedenen Möglichkeiten der Anordnung der Punkte auf einer Geraden Rechnung – eine Beziehung, auf die wir im Laufe der Vorlesung noch öfters hinzuweisen haben werden.

Nehmen wir nun einen vierten Punkt 3 hinzu, so können wir das Doppelschnittverhältnis der vier Punkte bilden, das man meist kurz als Doppelverhältnis bezeichnet:

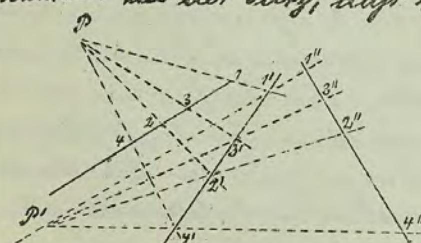
$$\mathfrak{D} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}.$$

Dieser Ausdruck besitzt wiederum ein bestimmtes Vorzeichen, und zwar sieht man unmittelbar, daß $\mathfrak{D} < 0$ ist, wenn die Punktepaare 1 und 3 einerseits und 2, 4 andererseits sich gegenseitig trennen, $\mathfrak{D} > 0$ aber im entgegengesetzten Falle, d. h.





wenn 1 und 3 gleichzeitig außerhalb oder innerhalb der Strecke 2, 4 liegen. So gibt es wieder immer zwei wesentlich verschiedene Arten der Lage, die denselben Absolutwert von $\mathfrak{D}$ liefern, und wenn man nur diesen gibt, muß man die Lagenbestimmung noch ausdrücklich hinzufügen; definiert man z. B. harmonische Punkte durch $|\mathfrak{D}| = 1$, wie es leider auf der Schule noch meist üblich ist, so muß man unbedingt die Forderung getrennter Lage der beiden Punktepaare in die Definition aufnehmen, während wir mit der einen Angabe $\mathfrak{D} = -1$ auskommen. – Besonders nützlich ist die Berücksichtigung des Vorzeichens in der projektiven Geometrie, wo das Doppelverhältnis bekanntlich eine maßgebende Rolle spielt. Wie man weiß, besteht da der Satz, daß 4 Punkte einer Geraden dasselbe Doppelverhältnis haben, wie die aus ihnen durch Projektion von einem beliebigen Zentrum aus auf einer anderen Geraden entstehenden Punkte. Betrachtet man nun das Dop-



pelverhältnis als relative Grösse mit seinem Vorzeichen, so gilt auch die folgende ausnahmslose Umkehrung dieses Theorems: Zwei Punktquadrupel auf zwei Geraden, die das gleiche Doppelverhältnis D haben, lassen sich stets durch Perspektive oder durch wiederholte Perspektive auseinander ableiten – so zum Beispiel in obiger Figur die Quadrupel 1, 2, 3, 4 und 1", 2", 3", 4" durch Projektion aus den Zentren P und P'. Kennt man jedoch nur den absoluten Wert von D, so gilt das entsprechende Theorem nicht in dieser einfachen Form, sondern man müsste noch eine besondere Voraussetzung über die Lage der Punkte aufnehmen.

Ein weit ergiebigeres Feld haben wir vor uns, wenn wir zu Anwendungen unserer Dreiecksformel aufsteigen. Legen wir zunächst einmal in das Innere eines Dreiecks (1, 2, 3) irgendwie einen Punkt 0, und verbinden ihn mit den drei

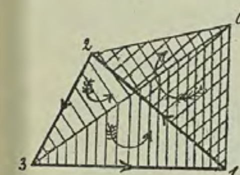
Ecken, so ist die Summe der in elementarem Sinne als absolute Grössen aufgefassten Inhalte der entstehenden Teildreiecke gleich dem Inhalt des Ausgangsdreieckes:

$$|1, 2, 3| = |0, 2, 3| + |0, 3, 1| + |0, 1, 2|.$$

Bei den Verhältnissen der Figur folgen die Ecken in der angegebenen Reihenfolge allemal entgegen dem Uhrzeigersinne aufeinander; die Dreiecksinhalte (1, 2, 3), (0, 2, 3), (0, 3, 1), (0, 1, 2) – im Sinne unserer allgemeinen Definition mit Vorzeichen versehen – sind also sämtlich positiv, und wir können unsere Formel auch schreiben:

$$(1, 2, 3) = (0, 2, 3) + (0, 3, 1) + (0, 1, 2).$$

Ich behaupte aber nun, dass dieselbe Formel auch gilt, wenn 0 ausserhalb des Dreiecks liegt, und überhaupt, wenn 0, 1, 2, 3 irgend vier beliebige Punkte der Ebene sind. In der Tat, wenn wir beispielsweise die nebenstehende Lage nehmen,



ist (0, 2, 3) und (0, 3, 1) entgegen, (0, 1, 2) aber entsprechend dem Uhrzeigersinne umlaufen, so dass unsere Formel für die absolut gerechneten Inhalte ergeben würde:

$$|1, 2, 3| = |0, 2, 3| + |0, 3, 1| - |0, 1, 2|;$$

die Richtigkeit dieser Gleichung aber bestätigt die Figur sofort.

Allgemein werden wir unsere Behauptung aus der analytischen Definition beweisen, wobei wir in unserer Formel einen bekannten Satz der Algebra bezw. Determinantenlehre erkennen werden. Wir nehmen der Bequemlichkeit halber – was offenbar keine wesentliche Spezialisation ist – O als Koordinatenanfang $x = 0$, $y = 0$ und tragen für die 4 Dreiecksinhalte die betr. Determinanten ein; dann ist also zu beweisen, wenn wir noch überall den Faktor $\frac{1}{2}$ fortlassen, daß für beliebige Werte $x_1, \ldots y_3$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} .$$

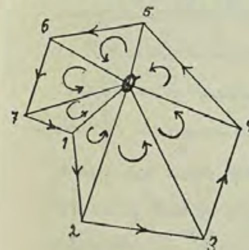
Der Wert jeder Determinante rechts wird nicht geändert, wenn wir die zweite und dritte 1 der letzten Kolonne durch Nullen ersetzen, da diese Elemente bei Entwicklung nach Unterdeterminanten der ersten Zeile nur in die mit den beiden Nullen multiplizierten Unterdeterminanten eingehen; vertauschen wir in den beiden letzten Determinanten die Zeilen noch zyklisch, was bei Determinanten dritter und überhaupt ungerader Ordnung ja erlaubt ist, so können wir unsere Gleichung schreiben:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Das ist aber eine identisch richtige Gleichung: rechts

stehen lediglich die Unterdeterminanten der letzten Kolonne der linken Determinante, und es liegt sonach nur die bekannte Entwicklung dieser Determinante nach Elementen einer Kolonne vor. Damit ist unser Satz mit einem Schlage für alle möglichen Lagen der 4 Punkte bewiesen.

Wir können nun diese Formel sofort dahin verallgemeinern, daß sie den <u>Inhalt beliebiger Polygone</u> gibt. Denken Sie dabei etwa an eine Aufgabe der Geodäsie: Es sei der Flächeninhalt eines Grundstückes mit geradlinigen Seiten zu bestimmen, nachdem man die Koordinaten der Ecken $1, 2, \ldots, n-1, n$ gemessen hat. Wer nicht gewohnt ist, mit Vorzeichen zu operieren, der wird sich die Gestalt des Polygons danach skizzieren müssen, es etwa durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen und dann je nach der besonderen Gestalt – speziell in Rücksicht

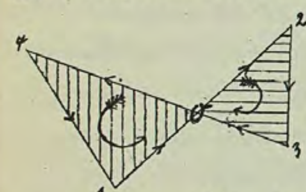


darauf, welche Winkel überstumpf sind – den Inhalt als Summe oder Differenz der einzelnen Dreiecksinhalte bestimmen müssen. Wir können jetzt aber sofort eine allgemeine Formel angeben, die das Richtige ganz mechanisch liefert, ohne einen Blick auf die Figur zu verlangen: Ist O irgend ein Punkt der Ebene, etwa der Koordinatenanfang, so ist der Inhalt unseres im Sinne $1\ 2, \dots n$ umlaufenen Polygons:

$$(1,2,3,\dots n) = (0,1,2)+(0,2,3)+\dots+(0,n-1,n)+(0,n,1)$$

wo die Dreiecke mit dem durch den angegebenen Umlaufssinn bestimmten Vorzeichen zu nehmen sind; die Formel liefert P positiv oder negativ je nachdem der Sinn $1, 2, \dots n$ das Polygon entgegen oder entsprechend dem Uhrzeigersinn umläuft. Die Angabe dieser Formel mag hier genügen, Sie werden sich den Beweis leicht selbst zurecht legen können.

Ich möchte hier lieber noch auf einige besonders interessante Fälle eingehen, die beim Feldmessen freilich nicht vorkommen können, nämlich auf Polygone, die sich selbst überschlagen, wie etwa dieses Viereck. Wollen wir hier überhaupt



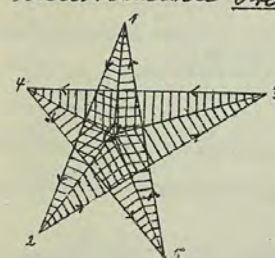
von einem bestimmten Inhalt reden, so wird er nur der Wert sein können, den unsere Formel liefert; wir haben nur zu überlegen, was dieser Wert geometrisch bedeutet. Zunächst macht man sich leicht

klar, daß er selbstverständlich unabhängig von der speziellen Lage von O ist. Legen wir O also, möglichst bequem, in den Ueberschlagungspunkt des Vierecks, so werden die Dreiecke $(0,1,2)$ und $(0,3,4)$ Null, und es bleibt

$$(1,2,3,4) = (0,2,3)+(0,4,1);$$

das erste Dreieck hat negativen, das zweite positiven Inhalt, und also ist der Inhalt unseres sich überschlagenden Vierecks, wenn wir ihm den Umlaufssinn $(1,2,3,4)$ zuschreiben, gleich dem absoluten Inhalt des entgegen dem Uhrzeiger umlaufenen Teiles $(0,4,1)$ vermindert um den des im Uhrzeigersinne umlaufenen Teiles $(0,2,3)$.

Als zweites Beispiel betrachten wir das nebenstehende Sternfünfeck. Legen wir O in den



mittleren Teil, so sind in der Summe

$$(0,1,2)+(0,2,3)+\dots+(0,5,1)$$

alle Teildreiecke positiv umlaufen; ihre Summe bedeckt den Inhalt des fünfeckigen Kernes unserer Figur doppelt, jeden der 5 Zipfel einfach. Halten wir wieder den einmaligen Umlauf auf unserem Polygon $(1,2,3,4,5,1)$.

daneben, so sehen wir, daß jeder Teil entgegen dem Uhrzeigersinne, und zwar der bei der Inhaltsbestimmung doppelt zu rechnende zweimal, der einfach zu rechnende einmal umlaufen wird.

Aus diesen beiden Beispielen abstrahieren wir sogleich die folgende *allgemeine Regel*: *Für jedes geradlinige sich beliebig oft überschlagende ebene Polygon liefert unsere Formel als Inhalt die algebraische Summe der einzelnen Flächenstücke, die der Polygonzug begrenzt, wobei jedes Stück so oft in Rechnung zu stellen ist, als es bei einmaliger Durchlaufung des Umfanges (1, 2, 3 ... n, 1) umlaufen wird, und zwar jedesmal mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem es entgegengesetzt oder entsprechend dem Uhrzeigersinne umlaufen wird.* Auch diesen Satz mögen Sie selbst allgemein bestätigen; es bietet keinerlei Schwierigkeiten! Um so mehr empfehle ich Ihnen, sich diese interessanten Inhaltsformeln an einzelnen Beispielen ganz zu eigen zu machen. –

Wir wollen nun, meine Herren, von Polygonen zu *krummlinig begrenzten Flächenstücken* übergehen. Wir betrachten also irgend eine ge-

schlossene Kurve, die sich noch beliebig oft überschlagen kann; wir geben auf ihr einen *bestimmten Umlaufungssinn*, und fragen, welchen Inhalt sie begrenzt. Naturgemäß finden wir ihn, wenn

Fig. 1.

wir die Kurve durch Polygone mit sehr vielen sehr kleinen Seiten annähern und den Grenzwert der in der soeben erörterten Weise bestimmten Polygon-Inhalte bilden. Sind $P(x|y)$ und $P_1(x+dx|y+dy)$ zwei benachbarte Eckpunkte eines solchen Näherungspolygones auf unserer Kurve, so setzt sich sein Inhalt aus Elementardreiecken (O, P, P_1) zusammen, also aus lauter Summanden:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x+dx & y+dy & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

In der Grenze geht diese Summe über in das längs der Kurve im gegebenen Sinne erstreckte Linienintegral:

$$\frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx),$$

und dadurch ist der von der Kurve begrenzte Flächeninhalt definiert. Wollen wir das geometrisch interpretieren, so können wir das für Polygone ausgesprochene Resultat sofort übertragen: Jedes von der Kurve umschlossene Flächenstück kommt in dem Integrale so oft positiv zur Geltung, als es entgegen dem Uhrzeigersinne, und so oft negativ, als es im Uhrzeigersinne umlaufen wird, während man die Kurve einmal im vorgeschriebenen Sinne durchläuft. Bei einem Oval wie in Fig. 1 erhalten wir demnach durch das Integral einfach den positiv gerechneten umschlossenen Flächeninhalt. In Fig. 2 ist der äußere Teil einmal, der innere zweimal positiv gerechnet, in Fig. 3 der linke negativ, der rechte positiv, so daß im ganzen ein negativer Inhalt

Fig. 2.

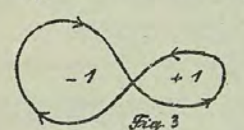


Fig. 3

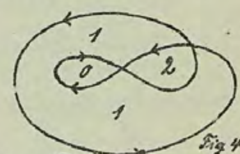


Fig. 4

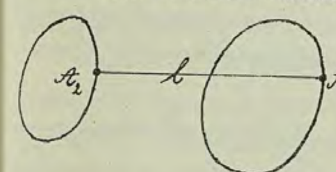
herauskommt; in Fig. 4 ist gar ein Teil garnicht zu rechnen, da er einmal positiv, einmal negativ umlaufen ist. Natürlich können so auch Kurven vom Inhalt Null entstehen, wenn man z. B. die Kurve der Fig. 3 symmetrisch zum Überschlagungspunkt annimmt; das hat nichts Absurdes, wenn man bedenkt, daß diese ganze Inhaltsbestimmung nur auf zweckmäßigen Verabredungen beruht.

Wie zweckmäßig aber diese Begriffsbestimmungen sind, will ich Ihnen jetzt zeigen, indem ich Ihnen das

Polarplanimeter von Amsler

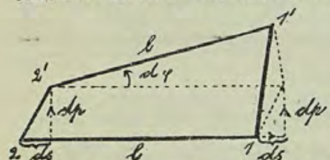
vorführe; dieser in der Praxis sehr viel gebrauchte, höchst sinnreiche Apparat, der 1854 von dem Schaffhausener Mechaniker Jakob Amsler konstruiert wurde, führt in der Tat die Bestimmung von Flächeninhalten gerade in dem erörterten Sinne aus. Lassen Sie mich zunächst den theoretischen Teil der Konstruktion darstellen!

Wir denken uns eine Stange A_1A_2 von der



Länge l so über die Ebene hingeführt, daß A_1 und A_2 je eine geschlossene Kurve beschreiben und die Stange selbst wieder in ihre Ausgangslage zurückkehrt; wir wollen den Inhalt der Fläche bestimmen, die sie dabei überstreicht, und zwar rechnen wir dabei naturgemäß in einer sogleich näher festzusetzenden Weise die einzelnen Teile dieser Fläche positiv oder negativ, je nachdem sie von der Stange im einen oder anderen Sinne durchfahren werden. Wir ersetzen zu diesem

Ende entsprechend dem bei jeder Integration vorzunehmenden Grenzprozeß die kontinuierliche Bewegung durch eine Folge beliebig kleiner ruckweise „Elementarbewegungen" aus einer Lage 1 2 in eine benachbarte 1' 2'. Die während der Bewegung tatsächlich überstrichene Fläche ist dann gleich dem Grenzwert der Summe aller bei diesen Elementarbewegungen beschriebenen „Elementarvierecke" (1, 1', 2', 2), und zwar kommt – wie leicht zu sehen – der



Sinn der Bewegung der Stange gerade richtig zur Geltung, wenn jeder Elementarviereck mit dem gerade diesem Umlaufungssinne 1, 1', 2', 2 entsprechenden Vorzeichen genommen wird.

Wir können nun jede Elementarbewegung der Stange $A_1 A_2$ aus drei Schnitten zusammensetzen:

1.) Einer Verschiebung <u>in</u> ihrer Richtung um ein Stück ds,
2.) einer Verschiebung <u>normal</u> zu ihrer Richtung um ein Stück dp;
3.) einer Drehung um das Ende A_2 durch einen Winkel $d\varphi$.

Dabei werden bezw. die Flächen $0 \cdot ds$, $l \cdot dp$, $\frac{l^2}{2} d\varphi$ überstrichen; man wird das Elementarviereck (1, 1', 2', 2) einfach durch die Summe dieser Flächen ersetzen können, da die Abweichungen von höherer Ordnung sind, und beim Grenzübergange (der ja ein einfacher Integrationsprozeß ist) verschwinden. Wesentlich ist, daß diese Summe

$$l \cdot dp + \frac{l^2}{2} \cdot d\varphi$$

auch im Vorzeichen mit dem Vierecksinhalt (1, 1', 2', 2) übereinstimmt, wenn man $d\varphi$ stets entgegen dem Uhrzeigersinne positiv mißt und ebenso dp bei Verschiebung nach der Seite wachsender φ hin positiv nimmt.

Die Integration über den Gesamtverlauf der Bewegung ergibt hieraus für das ganze von $A_1 A_2$ bestrichene Flächenstück den Inhalt

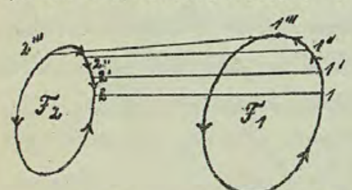
$$J = l \int dp + \frac{l^2}{2} \int d\varphi .$$

Hier stellt $\int d\varphi$ den ganzen Winkel dar, um den sich die Stange gegen ihre Ausgangslage gedreht hat; da wir sie in ihre Ausgangslage zurückführten, so ist, wenn sie sich inzwischen nicht etwa um einen vollen Winkel gedreht hat, $\int d\varphi = 0$, und unser Flächenstücks ist:

$$(1) \qquad \underline{F = l \int dp.}$$

Sollte sich aber, was ja bei passenden Wegkurven von A_1 und A_2 wohl möglich wäre, die Stange ein oder mehrere Male selbst überschlagen haben, ehe sie in die Ausgangslage zurückkehrt, so ist $\int d\varphi$ ein Vielfaches von 2π, und es ist daher für jede volle Umdrehung in positivem Sinne rechts der Wert $+l^2\pi$, für jede in negativem Sinne dagegen der Wert $-l^2\pi$ hinzuzufügen. Wir wollen jedoch der Einfachheit halber diese kleine Komplikation hier bei Seite lassen.

Nun können wir aber weiterhin diesen selben Flächeninhalt F in etwas anderer Weise bestimmen.



Möge die Stange bei der Folge der Elementarbewegungen der Reihe nach die Lagen $1\,2$, $1'2'$, $1''2''$, ... annehmen, so wird F gleich der Summe der Elementarvierecke:

$$F = (1, 1', 2', 2) + (1', 1'', 2'', 2') + (1'', 1''', 2''', 2'') + \cdots,$$

oder, genauer gesagt, gleich dem den Grenzwert dieser Summe darstellenden Integral; dabei ist jedes Elementarviereck genau wie oben mit dem bestimmten hier angedeuteten Umlaufssinn zu nehmen. Nach

unserer früheren Polygonformel haben wir daher, wenn O der irgendwie gelegene Koordinatenanfang ist:

$$\begin{aligned} F = {} & (O, 1, 1') + (O, 1', 2') + (O, 2', 2) + (O, 2, 1) \\ & + (O, 1', 1'') + (O, 1'', 2'') + (O, 2'', 2') + (O, 2', 1') \\ & + (O, 1'', 1''') + (O, 1''', 2''') + (O, 2''', 2'') + (O, 2'', 1'') \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Hier tritt in jeder Zeile an zweiter Stelle dasselbe Dreieck mit entgegengesetztem Umlaufsinn auf, wie in der folgenden an vierter Stelle ($(O, 1', 2') = -(O, 2', 1')$, $(O, 1'', 2'') = -(O, 2'', 1'')$, ...), so daß sich diese Summanden sämtlich fortheben; ferner aber tritt, da sich die Reihe der Elementarvierecke schließt, in der letzten Zeile noch der Summand $(O, 1, 2)$ auf, der sich mit dem $(O, 2, 1)$ der ersten Zeile forthebt. Es bleiben also nur die ersten und dritten Dreiecke jeder Zeile übrig; die ersten geben aber zusammen nach dem früheren gerade das Polygon $(1, 1', 1'', 1''', \ldots)$ und das ist in der Grenze der <u>Inhalt F_1 der vom Stabende A_1 beschriebenen Kurve</u>. Ebenso ergeben die dritten Summanden, wenn man überall ein Minuszeichen heraushebt, $(2, 2', 2'', 2''', \ldots)$, das heißt in der Grenze den <u>Inhalt</u>

F_2 der von A_2 durchlaufenen Kurve. Es folgt also schliesslich

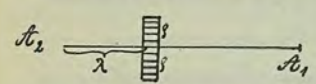
$$(2) \qquad \underline{J = F_1 - F_2,}$$

und dabei können offenbar beide Kurven sich ganz beliebig überschlagen, wenn wir nur F_1 und F_2 unter genauer Beachtung unserer Vorzeichenregel definieren.

In den beiden Formeln (1) und (2) ist nun die geometrische Theorie des Planimeters enthalten. Lassen wir nämlich A_2 auf einer Kurve bekannten Flächeninhaltes F_2 laufen, und den „Fahrstift" A_1 auf der zu messenden Kurve gleiten, so können wir deren Flächeninhalt

$$(2') \qquad F_1 = F_2 + l \int dp$$

sofort bestimmen, wenn wir eine Vorrichtung haben, die $\int dp$ zu messen gestattet. Eine solche Vorrichtung hat nun Amsler – und das ist der zweite, mechanische Teil seiner Erfindung – geschaffen, indem er auf der Stange $A_1 A_2$ als Achse eine Rolle anbrachte, die bei der Bewegung der Stange auf dem Papier abrollt. Ihre Entfernung von A_2 sei λ, ihr Radius ϱ.



Ihr Drehungswinkel ψ während der Bewegung wird sich additiv aus ihren Drehungen $d\psi$ während der Elementarbewegungen zusammensetzen;

ein jedes $d\psi$ wiederum können wir additiv zusammensetzen aus den Drehungen $d\psi_1$, $d\psi_2$, $d\psi_3$ bei den drei einfachen Bewegungen der Stange, aus denen wir jede Elementarbewegung oben (S. 26) komponierten. Bei der Längsverschiebung 1.) zunächst wird sich die Rolle nicht drehen: $d\psi_1 = 0$; bei der Verschiebung 2.) von $A_1 A_2$ normal zu sich um dp rollt ein Stück $dp = \varrho\, d\psi_2$ der Rolle ab, also ist $d\psi_2 = \frac{1}{\varrho} dp$; bei der Drehung 3.) um A_2 durch den Winkel $d\varphi$ endlich muss ein Stück $\lambda\, d\varphi = \varrho\, d\psi_3$ der Rolle abrollen, so dass $d\psi_3 = \frac{\lambda}{\varrho} d\varphi$ wird. Wir erhalten also schliesslich:

$$d\psi = \frac{1}{\varrho} dp + \frac{\lambda}{\varrho} d\varphi .$$

Integrieren wir das über den gesamten Bewegungsvorgang, so ist $\int d\varphi = 0$, wenn $A_1 A_2$ ohne Totaldrehung in seine Ausgangsstellung zurückkehrt, und es wird also der totale Drehungswinkel der Amslerschen Rolle

$$(3) \qquad \underline{\psi = \frac{1}{\varrho} \int dp} .$$

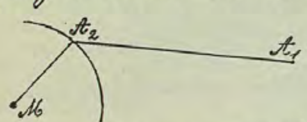
Sollte sich aber die Stange ein- oder mehrmals überschlagen, so treten rechts noch geeignete Vielfache von $2\pi \frac{\lambda}{\varrho}$ hinzu, wovon wir jedoch, wie oben, wieder absehen wollen.

Halten wir nun die Formeln (2.') und (3.) zusammen, so ergibt sich schliesslich

$$F_1 - F_2 = l \cdot \varrho \cdot \varphi$$

d. h. der Unterschied der von den beiden Enden der Stange umfahrenen Flächeninhalte wird durch den Drehungswinkel φ der Rolle gemessen.

Bei der Ausführung des Instrumentes wird man nun zweckmäßig F_2 zu Null machen; das erreichte Amsler in konstruktiv ausgezeichneter Weise dadurch, daß er A_2 an einem Arme befestigt, der um einen festgehaltenen Punkt M drehbar ist. A_2 kann dann



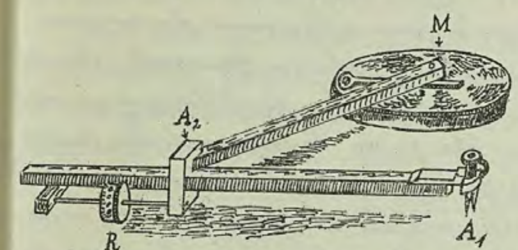
nur auf einer Kreisperipherie hin und her laufen, und daher keinen Inhalt umschließen – wenn wir auf die mögliche Komplikation, daß er den Kreis in dem einen oder andern Sinne, eventuell auch mehrfach, umläuft, keine Rücksicht nehmen wollen. Im Hinblick auf diesen „Pol" M spricht man vom Polarplanimeter. Man verwendet den Apparat nun einfach so, daß man mit dem durch einen „Fahrstift" markierten Punkte A_1 die auszumessende Kurve umfährt, an der Rolle den Winkel φ abliest und dann als umschlossenen Flächeninhalt

$$F_1 = l \cdot \varrho \cdot \varphi$$

hat; die Apparatkonstante $l\varrho$ bestimmt man

durch Ausmessen einer bekannten Fläche, etwa des Einheitsquadrates.

Ich kann Ihnen hier ein Bild des Polarplanimeters projizieren (vgl. nebenst. Skizze); natürlich



müssen Sie sich dann den Apparat selbst ansehen und ihn zu handhaben versuchen, wenn Sie ihn völlig verstehen wollen. Damit der Apparat wirklich zuverlässig funktioniert, muß er selbstverständlich etwas komplizierter aufgebaut sein, als es das theoretische Prinzip allein fordern würde. Ich bemerke in dieser Hinsicht nur noch einiges wenige: Der Punkt M ist an einer schweren Masse festgelegt, und von ihm läuft eine Stange zum Punkte A_2 hinüber; die theoretisch wichtige Stange $A_1 A_2$, von der wir immer sprachen, ist nicht der zweite Metallstab, den Sie am Apparat bemerken, sondern die diesem Stabe parallele ideelle Verlängerung der Achse der neben ihm angebrachten Rolle R, die durch den Fahrstift A_1 geht. Letzterer ist noch von einem Parallelstift begleitet, der ein Eindringen der Spitze von A, ins Papier verhindern soll. Die Rolle ist mit einem Nonius zur feineren Ablesung sowie einem Zählrade für volle Umdrehungen versehen.

Ich möchte jedoch hier statt weitere Einzelheiten aufzuführen noch gern allgemein davor warnen, bei der Betrachtung solcher Apparate über der Theorie die wirkliche praktische Ausführung zu vernachlässigen, wozu der reine Mathematiker leider oft gar zu sehr neigt; das ist eine ebenso unberechtigte Einseitigkeit, wie der entgegengesetzte extreme Standpunkt des Mechanikers, der ohne an der Theorie Interesse zu nehmen in konstruktiven Einzelheiten sich verliert. Hier soll die angewandte Mathematik das Bindeglied herstellen; sie soll insbesondere dem Rechnung tragen, daß die theoretische Formulierung des Prinzipes am Apparat wirklich nie genau zutrifft; denn stets werden z. B. die Gelenke des Apparates etwas schlottern, die Rolle wird auf dem Papier gleiten statt abzurollen, und schließlich ist das Zeichenpapier selbst keine gleichmäßige Ebene und man wird auch nie mit dem Fahrstift ganz genau die Kurve entlang fahren können. In welchem Maße solche Mo-

mente Einfluß haben, auf wieviel Stellen infolgedessen das an der Rolle abgelesene Resultat genau sein kann, das ist natürlich für die Praxis von allergrößter Bedeutung und das hat die angewandte Mathematik zu untersuchen.

Ich will im Anschluß an diesen Exkurs die gegenwärtige Vorlesung abgrenzen gegen zwei frühere Vorlesungen ähnlichen Titels, die gleichfalls autographiert vorliegen: „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien" (S.-S. 1901; ausgearb. v. C. H. Müller);[1] und „Einleitung in die höhere Geometrie" (W.-S. 1892/93 u. S.-S. 1893; ausgearb. v. Fr. Schilling).[2] In der ersten Vorlesung steht nämlich der soeben berührte Unterschied zwischen abstrakter und praktischer Geometrie im Vordergrund; wir haben damals im Seminar geradezu einen Vortrag über die Fehlerquellen beim Amslerschen Polarplanimeter gehabt. In der andern Vorlesung hingegen habe ich die Theorien der abstrakten Geometrie sehr weitgehend aufgebaut, so wie sie der Spezialist braucht, der im Sinne der heutigen

1) Neuer Abdruck. Leipzig 1907.

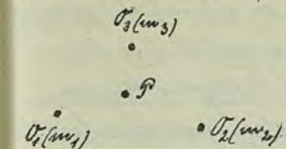
2) 2 Teile. Neuer Abdruck. Leipzig 1907.

Forschung selbständig auf diesem Gebiete arbeiten will. In dem gegenwärtigen Kolleg endlich will ich ein drittes: ich möchte sozusagen das Elementar-theoretische der Geometrie darstellen, das was jeder Lehramtskandidat unbedingt wissen sollte, insbesondere auch das, was für die Anwendungen in Physik und Mechanik von fundamentaler Wichtigkeit ist; auf Dinge, die in jene ersten beiden Gebiete schlagen, werde ich jeweils nur gelegentlich hinweisen können. –

Wenn ich nun wieder zu unsern allgemeinen Betrachtungen über Flächen- und Rauminhalte zurückkehren darf, so will ich zunächst eine historische Notiz nachholen. Ich will Ihnen den Mann nennen, der zuerst das Prinzip der Vorzeichen in der Geometrie konsequent angewendet hat, den großen Geometer A. F. Möbius in Leipzig. Das Buch, in dem er diesen bahnbrechenden Fortschritt macht, ist ein Jugendwerk aus dem Jahre 1827: „Der barycentrische Calcul" 1), eines der Werke, das überhaupt für die neuere Geometrie grundlegend ist; seine Lektüre bietet auch schon der schönen Darstellung wegen besonderen Genuss. Der Titel bezieht sich darauf, daß Möbius von der folgen-

1) Leipzig 1827 = ges. Werke I (Leipzig 1885), pg. 1 f.f.

den mit Schwerpunkten operierenden Betrachtung



ausgeht. In irgend drei feste Punkte O_1, O_2, O_3 der Ebene seien drei Massen m_1, m_2, m_3 gelegt, die positiv oder negativ sein können; dann ist ihr Schwerpunkt P eindeutig bestimmt, und zwar kann er bei Variation von m_1, m_2, m_3 die ganze Ebene überstreichen. Die 3 Massen m_1, m_2, m_3 werden nun als Koordinaten von P aufgefaßt, und es ist klar, daß P nur von den Verhältnissen dieser 3 Größen abhängt; damit ist zum ersten Male das, was wir heute allgemeine Dreieckskoordinaten nennen, in die Geometrie eingeführt. Soviel zur Erklärung des Titels jener Möbiusschen Buches; von seinem sonstigen sehr interessanten Inhalt kommen für uns an dieser Stelle vor allem die §§ 17-20 in Betracht, wo das Vorzeichenprinzip auf die Inhaltsbestimmung von Dreieck und Tetraeder angewandt wird und genau die Definitionen geschaffen werden, die ich Ihnen jetzt vortrug.

Ich muß nun noch erwähnen, daß Möbius als alter Mann diese Resultate noch durch eine kapitale Entdeckung ergänzt hat, in der Arbeit

„Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders" 1) aus dem Jahre 1865. Dort hat er nämlich gezeigt, daß es Polyeder gibt, denen man auf keine Weise einen bestimmten Rauminhalt beilegen kann, während man doch, wie wir früher sahen, für jedes sich noch so kompliziert durchsetzende Polygon der Ebene einen bestimmten Flächeninhalt definieren kann. Auf diese merkwürdige Erscheinung müssen wir nun noch eingehen.

Ich gehe dabei von der früher aufgestellten Formel für den Inhalt des Tetraeders aus:

$$(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir die Determinante nach Unterdeterminanten der letzten Kolonne, so kommt das – genau wie wir es früher (S. 18f) beim Dreieck sahen – darauf hinaus, daß wir unser Tetraeder in 4 andere zerlegen, die seine 4 Seiten zu Grundflächen und den Koordinatenanfang 0 zur Spitze haben. Nach den Vorzeichenregeln der Determinantentheorie

1) Berichte über die Verh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. (math.-phys. Kl.), Bd. 17 (1865), pg. 31. = ges. Werke II (Leipzig 1886) pg. 473.

ergibt sich dabei diese Formel, wenn wir auf zyklische Reihenfolge von 1, 2, 3, 4, achten:

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3, 4) - (0, 3, 4, 1) + (0, 4, 1, 2) - (0, 1, 2, 3);$$

daß dabei Minuszeichen auftreten, während beim Dreieck nur Pluszeichen vorkamen, hat darin seinen Grund, daß Determinanten gerader Ordnung bei zyklischer Vertauschung ihr Zeichen wechseln, Determinanten ungerader aber nicht. Natürlich können wir durch geeignete Zeilenvertauschungen auch hier die Minuszeichen fortschaffen, müssen aber dann auf die zyklische Reihenfolge verzichten, z. B.:

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3, 4) + (0, 4, 3, 1) + (0, 4, 1, 2) + (0, 2, 1, 3).$$

Um die hierin enthaltene Gesetzmäßigkeit zu durchschauen, denken wir uns die Tetraederoberfläche etwa aus Papier ausgeschnitten, und in die Ebene 2, 3, 4 hineingeklappt, wodurch die Ecke 1 drei verschiedene Lagen erhält.

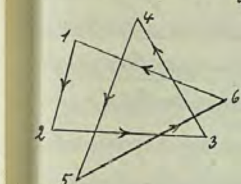
Dann gehen in die letzte Formel die Ecken jeder Seitendreiecks in einer Reihenfolge ein, die einem Umlauf entgegen dem Sinne des Uhrzeigers in der Figur entspricht, also dem gleichen Sinne in allen Dreiecken.

Dieser können wir natürlich auch ohne jene Umklappung für die ursprüngliche Figur aussprechen. Da gehört jede der 6 Kanten 2 Seitendreiecken an, und man sieht, daß bei Umlaufung aller Dreiecke im angegebenen Sinne jede Seite das eine Mal im einen, das andere Mal im andern Sinne durchlaufen wird; durch diese Regel, die Möbius das Kantengesetz genannt hat, ist offenbar ein Umlaufssinn aller Seitendreiecke bestimmt, wenn man ihn in einem Dreieck willkürlich festlegt. Und nun besagt unsere Formel: Ein Tetraeder (1, 2, 3, 4) kann als Summe von 4 Teiltetraedern mit derselben ersten Ecke O aufgefaßt werden, indem man je 3 Ecken in der Reihenfolge auf O folgen läßt, wie sie sich durch Fortsetzung des Umlaufungssinnes (2, 3, 4) nach dem Möbiusschen Kantengesetz ergibt.

Ganz wie wir früher (S. 20) die Zerlegungsformel für Dreiecke zur Definition des Inhaltes beliebiger Polygone verallgemeinerten, werden wir jetzt von dem letzten Resultat aus zur Definition des Rauminhalts beliebiger Polyeder aufzusteigen suchen. Hierbei müssen wir sowohl zulassen, daß die Seiten eines einzelnen das Polyeder begrenzenden Polygons sich durchdringen, als auch, daß die Flächen verschiedener solcher Polygone sich irgendwie durchsetzen. Man wird nun

irgend einen Hilfspunkt O hinzunehmen und zunächst einmal den Inhalt einer einzelnen Pyramide definieren, die von O aus ein Seitenpolygon projiziert.

Dazu muß man erst auf ihrer Grundfläche,

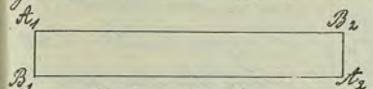


(es sei etwa die Seitenfläche (1, 2, 3, 4, 5, 6) des Polyeders) einen Umlaufungssinn haben; dann hat dies Polygon nach dem früheren einen bestimmten Inhalt, und wir werden wie in der Elementargeometrie den Rauminhalt der Pyramide (O, 1, 2, 3, 4, 5, 6) gleich dem Produkte dieser Grundfläche in die Höhe, dividiert durch 3 setzen und nur ein positives oder negatives Vorzeichen hinzufügen, je nachdem der Umlauf (1, 2, 3, 4, 5, 6) von O aus entgegen oder übereinstimmend mit dem Uhrzeigersinn erscheint. Man sieht unmittelbar, daß diese Definition die früheren das Tetraeder betreffenden Festsetzungen als Spezialfall enthält; man kann sie übrigens naturgemäß aus jenen herleiten, indem man das Polygon, wie zu seiner eigenen Inhaltsbestimmung, durch eine Summe passend umlaufener Dreiecke ersetzt und die Pyramide als Summe der diese Dreiecke projizierenden Tetraeder definiert.

Um nun das allgemeine Polyeder als Summe solcher Teilpyramiden darstellen zu können, wird man auf jeder Seitenfläche einen bestimmten Umlaufssinn festlegen müssen, und dafür kann nach dem Vorausgeschickten nur das Kantengesetz maßgebend sein: Man bestimme für ein Polygon den Umlaufungssinn beliebig und setze ihn dann so fort, daß jede Kante in beiden angrenzenden Polyederflächen in verschiedenem Sinne durchlaufen wird. Läßt sich diese Bestimmung auf der ganzen Oberfläche widerspruchslos durchführen, so ist der Polyederinhalt als Summe der Teilpyramiden von O nach den so umlaufenen Begrenzungspolygonen bestimmt, und man sieht leicht, daß diese Bestimmung eindeutig und von der Lage von O unabhängig ist.

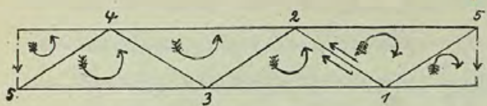
Nun ist es aber äußerst merkwürdig, daß sich dies Kantengesetz nicht notwendig für jede geschlossene Polyederoberfläche widerspruchslos durchführen läßt, und daß es so Polyeder gibt, bei denen jede bestimmte Vorzeichendefinition versagt und denen man daher auf keine Weise einen bestimmten Inhalt zuordnen kann. Dies ist die grosse Entdeckung, die Möbius 1865 publiziert hat. Er geht da von dem später sog. Möbiusschen Blatt aus, das man so erhält: An einem lan-

gen schmalen Rechteck $A_1\ B_1\ A_2\ B_2$ aus Papier

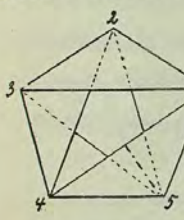


hefte man, indem man es einmal tordiert, die schmalen Seiten $A_1\ B_1$, $A_2\ B_2$ so zusammen, daß A_1 auf A_2, B_1 auf B_2 fällt; dabei kommt offenbar die Vorderseite des Blattes mit der Rückseite in Berührung, so daß eine Fläche mit nur einer Seite entsteht. Etwas drastisch gesagt: ein Maler, der das Blatt einmal herum austreichen soll, würde gerade doppelt soviel Farbe brauchen, als er nach der Länge des Blattes vermutet; denn hat er einmal die Länge des Blattes angestrichen, so ist er gerade der Ausgangsstelle gegenüber angelangt und muß noch einmal herumgehen, ehe er wirklich zu ihr zurückkommt.

Statt dieses gekrümmten Blattes kann man sich auch eine (nicht geschlossene) Polyederfläche mit lauter ebenen Teilen derselben Eigenschaft herstellen, indem man das Rechteck etwa mit einer Dreiecksteilung versieht und längs deren Kanten knickt; für die entstehende Dreieckszone läßt sich dann bereits das Kantengesetz nicht mehr durchführen. Man braucht dazu mindestens 5 Dreiecke, die man wie in der Figur anzuordnen hat; dabei sind die Halbdreiecke rechts und links bei der Zusammenfaltung



zu einem Dreieck (4, 5, 1) vereinigt. Setzt man da den positiven Umlaufssinn von (1, 2, 3) nach links hin nach dem Kantengesetz fort, so hat man der Reihe nach die Sinne (3, 2, 4), (3, 4, 5), (5, 4, 1), (5, 1, 2), und so wird 1 2 schliesslich wieder im <u>selben</u> Sinne durchlaufen, wie bei (1, 2, 3), entgegen dem Kantengesetz. Von oben gesehen erscheint das gefaltete Blatt als eine fünfeckige Figur, deren Diagonalen die 5 Seiten 1 3, 3 5, 5 2, 2 4, 4 1 werden, wie nebenstehend skizziert.



Aus dieser Dreieckszone stellt nun Möbius weiter sofort ein <u>geschlossenes Polyeder</u> her, indem er ihre freien Kanten - eben jene 5 Diagonalen - mit irgend einem, am besten symmetrisch in der Mittellinie der Figur gelegenen Raumpunkte O durch Dreiecke verbindet, mit andern Worten, eine überschlagene fünfseitige Pyramide aufsetzt. Auf diesem geschlossenen aus 10 Dreiecken begrenzten Polyeder läßt sich das Kantengesetz natürlich gleichfalls nicht durchführen, und man kann daher bei ihm von einem Inhalt

nicht sprechen. [1]

Damit beende ich die Behandlung der Inhaltszahlen und will nun zu der Betrachtung <u>weiterer geometrischer Elementargrößen</u> übergehen. Wie uns bisher der Name Möbius leitete, so werden wir jetzt an die Gedanken des grossen Stettiner Geometers <u>Hermann Graßmann</u> anschliessen, die er zuerst 1844 in seiner „<u>linealen Ausdehnungslehre</u>" [2] niedergelegt hat. Dies Buch ist wie das Möbiussche äusserst ideenreich aber im Gegensatz zu ihm ganz ungewöhnlich dunkel und undurchsichtig geschrieben, so daß es Jahrzehnte lang unbeachtet und unverstanden blieb; erst als man anderweitig auf ähnliche Gedankengänge gekommen war, erkannte man sie nachträglich in Graßmanns Buch wieder. Wollen Sie einen Eindruck von dieser abstrakten Schreibweise erhalten, so betrachten Sie nur die Kapitelüberschriften der Einleitung dieses Buches; sie lauten: Ableitung des Begriffes der reinen Mathematik, Ableitung des Begriffes der

1) Man vergleiche die Anwendung dieses einseitigen Polyeders in der graphischen Statik in meiner Arbeit: „Über Selbstspannungen ebener Diagramme," Math. Ann., 47 S. 433.
2) Leipzig 1844 = Ges. math. u. phys. Werke 1,1 (Leipzig 1894) pg. 1.- 2. Aufl. Leipzig 1878.

Ausdehnungslehre, Darlegung des Begriffes der Ausdehnungslehre, Form der Darstellung – dann folgt noch „Uebersicht der allgemeinen Formenlehre", und erst nachdem man sich durch diese allgemeinsten Darlegungen durchgekämpft hat, kommt man zu der immer noch sehr schwer verständlichen rein begrifflichen Darstellung des eigentlichen Stoffes. Erst in einer späteren Neubearbeitung, der „<u>Ausdehnungslehre</u>"¹) von 1862 benutzt Graßmann eine ein wenig leichter zugängliche bestimmte analytische Darstellung mit Koordinaten. Das Wort „Ausdehnungslehre" übrigens hat sich Graßmann neu gebildet, um anzudeuten, daß sich seine Entwicklungen auf beliebig viele Dimensionen beziehen, während „Geometrie" für ihn nur die Anwendung dieser neuen ganz abstrakten Disziplin auf den gewöhnlichen Raum von 3 Dimensionen ist. Dies neue Wort hat sich jedoch nicht eingebürgert, sondern man spricht heutzutage kurzweg von <u>n-dimensionaler Geometrie.</u>

Wir wollen hier von der uns geläufigen analytischen Koordinatendarstellung aus die Graßmannschen Begriffe kennen lernen, indem wir uns zunächst auf die ebene Geometrie beschränken,

¹) Berlin 1862 = Werke 1, 2 (Leipzig 1896).

überschreiben wir das nächste Kapitel:

II. Das Graßmannsche Determinantenprinzip für die Ebene.

Wir knüpfen wieder an die Grundlage der Erörterungen des ersten Kapitels an; da hatten wir aus den Koordinaten dreier Punkte uns die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

gebildet und als doppelten Inhalt eines Dreiecks, d. h. als Inhalt eines Parallelogrammes gedeutet. Nunmehr wollen wir außerdem auch die aus den Koordinaten zweier bezw. eines Punktes gebildeten Schemata

$$\underline{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{bezw.} \quad \underline{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

betrachten, die wir <u>Matrizen</u> nennen; jede solche Matrix soll die <u>Gesamtheit der Determinanten repräsentieren, die sich aus ihr durch Fortlassen einer bezw. zweier Kolonnen ergeben</u>. So erhalten wir aus der ersten Matrix durch Fortlassen der ersten bezw.

zweiten Kolonne die zweizeiligen Determinanten

$$\mathcal{Y} = y_1 - y_2 \quad , \quad \mathcal{X} = x_1 - x_2$$

und durch Fortlassen der dritten ebenso

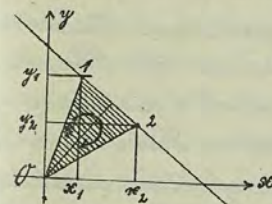
$$\mathcal{N} = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad ;$$

die Bezeichnungen sind so gewählt, wie es sich für die Raumgeometrie als zweckmäßig erweisen wird. Wir haben zu untersuchen, was für ein geometrisches Gebilde durch diese 3 Determinanten $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{N}$ festgelegt wird; dieses Gebilde werden wir dann mit derselben Berechtigung wie bisher den Dreiecksinhalt als eine neue geometrische Elementargröße auffassen. Bei der zweiten einzeiligen Matrix entstehen als einzeilige Determinanten neben der Zahl 1 die Koordinaten x_1, y_1 selbst; sie bestimmen den Punkt mit diesen Koordinaten als einfachste Elementargröße und verlangen also keine weitere Untersuchung mehr.

Es wird danach jetzt verständlich sein, wenn ich sogleich das Graßmannsche Prinzip allgemein ausspreche: Es sollen in der Ebene wie im Raume alle Matrizen (mit weniger Zeilen als Kolonnen) betrachtet werden, deren jede Zeile aus den Koordinaten eines Punktes und einer 1 gebildet ist; es soll sodann untersucht werden, welche geometrischen

Gebilde durch die Determinanten festgelegt sind, die man aus ihnen durch Wegstreichen hinreichend vieler Kolonnen erhält. Wir werden in diesem Prinzip, das hier gewissermaßen willkürlich aufgestellt wird und sich nun allmählich als ein zweckmäßiger Wegweiser durch die Menge der geometrischen Grundgebilde erweist, später einen naturgemäßen Ausfluß eines großen die ganze geometrische Systematik umfassenden Ideenkreises erkennen.

Doch nun wieder zum konkreten ebenen Problem: Was ist an der Figur zweier Punkte 1, 2 gegeben, wenn man die Determinanten $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{N}$ kennt? Offenbar bleibt alsdann in der Lage der Punkte noch *eine* Freiheit, da sie vollständig erst durch 4 Größen bestimmt sind, und zwar erhält man dann und nur dann dasselbe Wertetripel $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{N}$, wenn 1 der End-, 2 der Anfangspunkt einer Strecke von bestimmter Länge und Richtung ist, die auf einer bestimmten Geraden sonst beliebig verschoben werden kann; den die Richtung andeutenden Pfeil denken wir uns hier wie im folgenden stets so gesetzt, daß er vom Anfangspunkt 2 nach dem End-



punkt 1 zeigt.

Daß durch X, Y, N zunächst die Verbindungsgerade 1 2 bestimmt ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß man ihre Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

auch schreiben kann

$$Y . x - X . y + N = 0;$$

hieraus sieht man noch darüber hinaus, daß *diese Gerade bereits durch die Verhältnisse $X : Y : N$ bestimmt ist*. Weiter aber entnehmen wir unseren früheren Betrachtungen über Streckenlängen und Dreiecksinhalte, daß X und Y die Projektionen der Strecke (1, 2) mit der Richtung von 2 nach 1 auf die x- und y-Achse, N aber den doppelten Inhalt des Dreiecks (0, 1, 2) mit diesem Umlaufssinne darstellt; offenbar sind daher die einzigen Lageänderungen der Punkte 1, 2, bei denen diese drei Größen sämtlich ungeändert bleiben, die Verschiebungen der Strecke (1, 2) unter Erhaltung ihrer Länge und ihres Sinnes längs ihrer Geraden. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Graßmann nannte eine solche Strecke bestimmter Richtung und Länge auf bestimmter

ter Geraden einen *Linienteil*; in der deutschen Physik ist der Name *Vektor* üblicher und zwar genauer „*linienflüchtiger Vektor*" – von einem Vektor schlechtweg oder einem „*freien Vektor*" spricht man, wenn der Strecke jede Parallelverschiebung (unter Erhaltung von Länge und Sinn) auch aus ihrer Geraden heraus gestattet ist. *Ein linienflüchtiger Vektor, bestimmt durch die Matrix $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$ bezw. die Determinanten X, Y, N ist also das erste geometrische Elementargebilde, das wir nach dem Graßmannschen Prinzip in Betracht ziehen.*

Ich bemerke hier sogleich, daß die Größen X, Y für sich einen *freien Vektor* bestimmen, da sie auch bei Parallelverschiebung der Strecke aus sich heraus ungeändert bleiben – ganz analog wie die 2 Größen aequivalenten Verhältnisse $X : Y : N$ nur die *unbegrenzte Gerade* bestimmen, nicht die Länge der Strecke auf ihr. Der freie Vektor und die unbegrenzte Gerade sind also zwei Nebengebilde, auf die wir hier stoßen; das Prinzip, das für die Einführung solcher Nebengebilde maßgebend ist, wird erst später entwickelt werden.

Diese Begriffsbildungen spielen in der Mechanik bei den *Elementen der Statik* eine äußerst wichtige Rolle; sie haben sich dort schon von altersher ganz naturgemäß von selbst dargeboten. Es kommt hier zunächst, solange wir in der Ebene operieren in Betracht die Statik ebener starrer Systeme. Man kann da nämlich den Linienteil für die geometrische Behandlung als vollständiges Aequivalent der am System angreifenden Kraft auffassen, deren Angriffspunkt man eben wegen der Starrheit des Körpers beliebig in der Kraftrichtung verschieben kann. Stellen Sie sich hier die Kraft ganz im Sinne der alten Mechaniker vor:

Am Punkte 2 ist ein Seil angebracht, an dem ein durch die Länge der Strecke 1 2 repräsentierter Zug ausgeübt wird; ich hebe gern als ein Beispiel der lebendigen Denkweise der alten Mechaniker im Gegensatz zu der abstrakten modernen Darstellung hervor, daß man früher immer eine an dem Seile ziehende Hand mit abzubilden pflegte.[1] Von den Koordinaten des Linienteils heißen nun X, Y die Komponenten der Kraft, N das Drehmoment um den Anfangspunkt O; denn aus der Gleichung der Gera-

[1] vgl. z. B. die Tafeln in Varignon, Nouvelle mécanique ou statique. Paris 1775.

den folgt als ihr Abstand von O $p = \frac{N}{\sqrt{X^2+Y^2}}$, und daher ist N tatsächlich gleich dem Produkt aus p in die Länge $\sqrt{X^2+Y^2}$ der Strecke, d. i. die Größe der Kraft. Die 3 Größen zusammen kann man die Koordinaten der Kraft nennen; die analytische Definition ergibt für sie – und das ist besonders wichtig – in jedem Falle wohlbestimmte Vorzeichen, die man natürlich wie früher auch geometrisch deuten kann. Hierbei ist freilich anzumerken, daß wir in Rücksicht auf die Symmetrie der Formeln von der in der Mechanik meist gebräuchlichen Bestimmung des Vorzeichens des Drehmomentes abgewichen sind; sonst verwendet man nämlich die aus den Koordinaten des Anfangspunktes 2 und den beiden Koordinaten X, Y des freien Vektors gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X & Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix},$$

die offenbar unserem N entgegengesetzt gleich ist. Diese kleine Diskrepanz wird indessen, nachdem sie einmal hervorgehoben ist, zu Verwechslungen wohl kaum Anlaß geben.

Die erste Aufgabe der Mechanik starrer Körper ist nun, ein beliebiges System solcher Kräfte X_i, Y_i, N_i ($i = 1, 2, \dots n$) zu einer Resultante zusammenzusetzen; das kommt analytisch darauf hinaus, den linienflüchtigen Vektor mit den Koordinaten $\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\sum_{i=1}^{n} Y_i$, $\sum_{i=1}^{n} N_i$ zu bilden. Die *graphische Statik* entwickelt zur geometrischen Lösung dieser Aufgabe ihre sehr eleganten Methoden; bei 2 Kräften benutzt man einfach den bekannten Parallelogrammsatz, während man sonst mit „Kräftepolygon" und „Seilpolygon" vorgeht, und im allgemeinen zu jedem Kräftesystem einen eindeutig bestimmten linienflüchtigen Vektor als Resultante findet. Es gibt indessen Ausnahmen, z. B. schon, wenn das Kraftsystem aus zwei parallelen, entgegengesetzt gleichen, in verschiedenen Geraden wirkenden Kräften X, Y, N_1 und $-X, -Y, N_2$ $(N_1 \neq -N_2)$ besteht; die Resultante hat die Komponenten $0, 0, N_1 + N_2$, das sind Zahlenwerte, die offenbar niemals Koordinaten eines Linienteiles sein können. Die elementare Darstellung weiß mit dieser Erscheinung nichts rechtes anzufangen, sie muß daher immer mit dem Auftreten solcher nicht weiter reduzierbaren sog. „*Kräftepaare*" rechnen, die die Einfachheit und Allgemeingültigkeit der Theoreme störend beeinträchtigen. Man kann jedoch diese scheinbaren Ausnahmen nun auch leicht unserm

System einordnen, wenn man davon ausgeht, daß unsere früheren Formeln – rein formal auf die Komponenten $0, 0, N_1 + N_2$ angewandt – für die Intensität der Resultierenden $\sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ und für ihren Abstand vom Anfangspunkt $p = \frac{N_1 + N_2}{0} = \infty$ ergeben würden. Läßt man also bei einer gewöhnlichen Kraft den Abstand p vom Anfangspunkt O so unendlich und ihre Intensität $\sqrt{X^2 + Y^2}$ so Null werden, daß das Produkt $p \cdot \sqrt{X^2 + Y^2}$, das Drehmoment, endlich bleibt, so gehen die Komponenten gerade in jene Ausnahmewerte über, und *man darf daher die Resultierende $0, 0, N_1 + N_2$ eines Kräftepaares als unendlich kleine, unendlich entfernt wirkende Kraft von endlichem Drehmoment ansprechen*. Diese Fiktion ist für die fortschreitende Wissenschaft äußerst bequem und nützlich, sie entspricht ja ganz der sonst gebräuchlichen Einführung unendlich ferner Elemente in der Geometrie. Vor allem aber können wir auf Grund dieser Erweiterung des Begriffes der Kraft den *ausnahmslos* gültigen Satz aussprechen, *daß beliebig viele Kräfte in jedem Falle eine Kraft zur Resultierenden haben*, während die elementare Darstellung hierbei stets noch die Alternative des Kräftepaares mitschleppen muß.

Ich will nun unsere Erörterungen dadurch vervollständigen, daß ich das *Verhalten unserer Elementargrößen bei Transformationen des rechtwinkligen Koordinatensystems* untersuche; das wird uns dann ein wertvolles Klassifikationsprinzip liefern, durch welches die Graßmannsche Systematik erst ihre feinere Ausführung erhält.

Die *Formeln der Koordinatenänderung*, d.h. die Ausdrücke der Koordinaten x', y' eines Punktes in Bezug auf die neue Lage der Achsen durch die ursprünglichen Koordinaten x, y lauten bekanntlich für die vier fundamentalen Transformationen des rechtwinkligen Koordinatensystems:

1.) *Parallelverschiebung:*

$$(A_1) \quad \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \; ; \end{cases}$$

2.) *Drehung um den Winkel φ:*

$$(A_2) \quad \begin{cases} x' = x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y' = -x \sin\varphi + y \cos\varphi \; ; \end{cases}$$

3.) *Spiegelung an der x-Achse:*

$$(A_3) \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \; ; \end{cases}$$

4.) *Veränderung des Maßstabes:*

$$(A_4) \quad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

Setzt man Transformationen dieser vier Arten für alle möglichen Werte der Parameter a, b, φ, λ miteinander zusammen, so entstehen die Gleichungen für den *allgemeinsten möglichen Übergang von einem rechtwinkligen Koordinatensysteme zu einem andern* bei gleichzeitigem Wechsel des Maßstabes; die Zusammensetzung aller möglichen Verschiebungen und Drehungen entspricht den sämtlichen *eigentlichen Bewegungen* des Koordinatensystems innerhalb der Ebene. Die Gesamtheit aller dieser Transformationen bildet eine „*Gruppe*", d.h. irgend 2 von ihnen zusammengesetzt geben wieder eine Transformation derselben Gesamtheit; die speziellen Transformationen (A), aus denen man alle andern zusammensetzen kann, heißen die *Erzeugenden der Gruppe*.

Bevor wir nun zusehen, wie diese einzelnen Transformationen unsere Determinanten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{N}$ verändern, will ich *2 allgemeine Prinzipien* aussprechen, die ich bei diesen grundlegenden geometrischen Erörterungen von altersher mit besonderem Nachdruck an die Spitze gestellt habe; mögen sie auch in dieser Allgemeinheit zunächst etwas dunkel klingen, so sollen sie doch bei den konkreten Erörterungen sogleich ganz deutlich werden. Das eine ist, daß die geometrischen Eigenschaften irgend welcher Figuren stets sich in Formeln aussprechen müssen, die nicht geändert werden, wenn man das Koordinatensystem abändert, d. h. die Koordinaten sämtlicher Punkte der Figur gleichzeitig einer unserer Transformationen unterwirft; und umgekehrt muß auch jede Formel, die in diesem Sinne invariant gegen die Gruppe dieser Koordinatentransformationen ist, eine geometrische Eigenschaft darstellen. Als einfachste Beispiele, wie sie jeder kennt, sei da nur an den Ausdruck der Entfernung oder des Winkels in der Figur zweier Punkte oder zweier Geraden erinnert; von diesen und vielen andern ähnlichen Formeln wird ja im folgenden immer wieder zu handeln sein. Hier nur noch zur Verdeutlichung auch ein ganz triviales Beispiel für nicht invariante Formeln: die Gleichung $y = 0$ für die aus einem Punkt $x \mid y$ der Ebene bestehende Figur sagt aus, daß dieser Punkt auf der x-Achse liegt, die doch eigentlich eine ganz willkürliche dem Wesen der Figur fremde nur ihrer bequemen Beschreibung dienende Zutat ist. So wird jede nicht invariante

Gleichung irgend eine Beziehung der Figur zu äußeren willkürlich hinzugefügten Dingen, insbesondere dem Koordinatensystem, aber keine geometrischen Eigenschaften der Figur selbst darstellen.

Das zweite Prinzip bezieht sich darauf, daß man ein System von analytischen Größen hat, die aus den Koordinaten mehrerer Punkte 1, 2, ... gebildet sind – wie z. B. unsere 3 Größen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{N}$. Hat dies System die Eigenschaft, daß es sich bei allen unseren Koordinatentransformationen in bestimmter Weise in sich selbst transformiert, d. h. daß sich das aus den neuen Koordinaten der Punkte 1, 2, ... in gleicher Weise gebildete Größensystem allein durch die aus den alten Koordinaten gebildeten Größen ausdrückt (ohne daß man die Koordinatenwerte selbst hinzunehmen muß), so sagen wir, es definiert ein neues geometrisches d. h. ein vom Koordinatensystem unabhängiges Gebilde; ja wir werden sogar alle analytischen Ausdrücke geradezu nach der Art klassifizieren, wie sie sich bei Koordinatentransformationen verhalten und zwei Serien von Ausdrücken, die sich in gleicher Weise transformieren, auch geometrisch als gleichwertig, d. h. als gleichartige geometrische Gebilde definierend, ansehen.

Das alles wollen wir nun sogleich an dem von den Grassmannschen Elementargrößen gelieferten Material näher erläutern. Wir unterwerfen dazu unsere beiden Punkte $x_1 | y_1$, $x_2 | y_2$ der gleichen Koordinatentransformation; beginnen wir mit der Parallelverschiebung (A_1) und setzen also:

$$x_1' = x_1 + a \qquad x_2' = x_2 + a$$
$$y_1' = y_1 + b, \qquad y_2' = y_2 + b$$

Vergleichen wir die Koordinaten des Linienteils vor und nach der Transformation:

$$X = x_1 - x_2, \quad Y = y_1 - y_2, \quad N = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$
$$X' = x_1' - x_2', \quad Y' = y_1' - y_2', \quad N' = x_1' y_2' - x_2' y_1',$$

so ergibt sich unmittelbar:

$$(B_1) \quad \begin{cases} X' = X \\ Y' = Y \\ N' = N + b X - a Y. \end{cases}$$

Ganz genau so erhält man als Transformationsformeln:

2.) bei der Drehung (A_2):

$$(B_2) \quad \begin{cases} X' = X \cos\varphi + Y \sin\varphi \\ Y' = -X \sin\varphi + Y \cos\varphi \\ N' = N. \end{cases}$$

3.) bei der Spiegelung (A_3):

$$(B_3) \quad \begin{cases} X' = X \\ Y' = -Y \\ N' = -N \end{cases}$$

4.) bei der Maßstabänderung (A_4):

$$(B_4) \quad \begin{cases} X' = \lambda X \\ Y' = \lambda Y \\ N' = \lambda^2 N \end{cases}$$

In den letzten Formeln (B_4) tritt das hervor, was man in der Physik <u>Dimension</u> nennt, nämlich der Exponent der Potenz von λ, mit der sich die einzelne Größe multipliziert: X, Y haben die Dimension 1 einer Linie, N die 2 eines Flächeninhalts.

Wir bemerken zunächst, indem wir diese 4 Formelgruppen überblicken, daß der durch die 3 Determinanten $X, Y; N$ definierte Linienteil tatsächlich unserer allgemeinen Definition der geometrischen Größe genügt: die neuen Koordinaten X', Y', N' drücken sich allemal lediglich durch die alten X, Y, N aus.

Aber noch mehr: Betrachten wir überall nur die beiden ersten Gleichungen. In sie geht N gar nicht ein; die beiden ersten Koordinaten X', Y' des Linienteils im neuen Koordinatensystem sind also lediglich von den ursprünglichen Werten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ dieser Koordinaten abhängig, und zwar ändern sie sich bei Parallelverschiebungen garnicht, bei allen andern Transformationen stehen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ zu $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}'$ in genau derselben Beziehung wie die alten Koordinaten x, y eines Punktes zu den neuen x', y'. Wir können also dem soeben ausgesprochenen zweiten Prinzip gemäß behaupten, *daß bereits die zwei Koordinaten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ vom Koordinatensystem unabhängig ein geometrisches Gebilde festlegen*, und wir wissen ja bereits, daß dies Gebilde der *freie Vektor* ist; wir haben hier also das früher angekündigte systematische Prinzip gefunden, das die Einführung dieses Gebildes neben dem Linienteil veranlaßt.

Auf demselben Gebiete liegt noch folgende Betrachtung: Da in allen 4 Formelgruppen $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{N}'$ *homogene* lineare Funktionen von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{N}$ sind, so ergibt sich durch Division je zweier Gleichungen, daß die Verhältnisse $\mathfrak{X}' : \mathfrak{Y}' : \mathfrak{N}'$ auch nur von den Verhältnissen $\mathfrak{X} : \mathfrak{Y} : \mathfrak{N}$ abhängen. *Also müssen auch diese Verhältnisse $\mathfrak{X} : \mathfrak{Y} : \mathfrak{N}$* ohne Rücksicht auf die wirklichen Werte der drei Größen *ein geometrisches Gebilde unabhängig vom Koordinatensystem bestimmen*, und in der Tat erwähnten wir ja schon

früher dieses Gebilde, die *unbegrenzte Gerade*.

Wenden wir nun unsere Formeln (B) speziell auf ein „*Kräftepaar*" an, für das ja $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = 0$ zu setzen ist; sie ergeben dann natürlich $\mathfrak{X}' = \mathfrak{Y}' = 0$, während in den 4 einzelnen Fällen

$$
\begin{array}{ll}
(C_1) & \mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \\
(C_2) & \mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \\
(C_3) & \mathfrak{N}' = -\mathfrak{N} \\
(C_4) & \mathfrak{N}' = \lambda^2 \mathfrak{N}
\end{array}
$$

wird. Indem wir den üblichen Ausdruck *Invariante* für eine Größe benutzen, die bei den Operationen einer Transformationsgruppe sich höchstens um einen Faktor ändert, und die Invariante noch eine *absolute* oder *relative* nennen, je nachdem dieser Faktor 1 ist oder nicht, können wir die Formeln (C) in die Worte fassen: *Das Drehmoment eines Kräftepaares ist eine relative Invariante gegenüber allen rechtwinkligen Koordinatentransformationen der Ebene.*

Vergleichen wir damit das Verhalten der am Anfang unserer Betrachtungen studierten geometrischen Elementargröße, der *Dreiecksinhaltes*

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

bei unsern Koordinatentransformationen. Die Verschiebung (A_1) ändert diese Determinante nicht, da sie nur zu den Elementen der ersten Kolonne a, zu denen der zweiten b, d. h. das a-fache bezw. b-fache der Elemente der letzten Kolonne addiert:

$$(D_1) \qquad \Delta' = \Delta .$$

Ebenso ergibt sich ganz leicht bei den andern drei Arten von Transformationen

$$(D_2) \qquad \Delta' = \Delta$$
$$(D_3) \qquad \Delta' = -\Delta$$
$$(D_4) \qquad \Delta' = \lambda^2 \Delta ,$$

was man natürlich alles auch aus der geometrischen Bedeutung des Dreiecksinhaltes unmittelbar schließen könnte. Diese Formeln stimmen nun aber genau mit (C) überein: Ein Dreiecksinhalt und so schließlich jeder Flächeninhalt (der ja als Summe von Dreiecken darstellbar ist) verhält sich bei beliebigen Koordinatentransformationen genau so, wie das Drehmoment eines Kräftepaares. Nach unserm zweiten allgemeinen Prinzip haben wir beide Dinge daher geometrisch als gleichwertig anzusehen, und wir können uns den Sinn dieser Aussage in folgender Weise verdeutlichen: Haben wir irgend ein Kräftepaar mit dem Drehmoment N in der Ebene

und definieren wir irgendwie einen Dreiecksinhalt $\Delta = N$, so bleibt bei jeder Koordinatentransformation diese Gleichung erhalten, d. h. wir können das Drehmoment eines Kräftepaares unabhängig vom Koordinatensystem durch den Flächeninhalt eines Dreiecks oder Parallelogrammes oder sonst einer Figur versinnlichen. Wie diese Zuordnung geometrisch zu geschehen hat, werden wir später bei den ganz analogen, nur etwas komplizierteren und daher lehrreicheren Verhältnissen im Raume sehen.

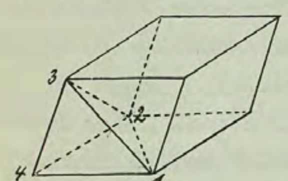
Ich will damit die Ebene verlassen, wo diese Begriffsbildungen ja eine nahezu triviale Einfachheit haben. Allen analytischen Formeln läßt sich unmittelbar ihre gute geometrische Bedeutung zuweisen, wobei von selbst auch die volle analytische Allgemeinheit in die Geometrie hineinkommt; eine wesentliche Voraussetzung ist dabei immer, wie noch einmal betont sei, daß ein für alle Mal die richtigen Verabredungen über Vorzeichen der geometrischen Gebilde getroffen sind.

III. Das Graßmannsche Prinzip für den Raum.

Wir wollen nun die entsprechenden Untersuchungen für den Raum in völliger Analogie zu den vorhergehenden Betrachtungen durchführen und gehen daher aus von den Matrizen, die aus den Koordinaten von 1, 2, 3 oder 4 Punkten gebildet sind

$$|x_1\, y_1\, z_1\, 1|, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Determinanten der ersten Matrix stellen die Punktkoordinaten selbst dar und erfordern keine weiteren Erörterungen. Die vierte Matrix ist bereits eine vierreihige Determinante und gibt, wie wir wissen, den sechsfachen Tetraederinhalt (1, 2, 3, 4), den wir analog den folgenden Benennungen als <u>Raumteil</u> bezeichnen können; wir dürfen sie übrigens auch einfach als Inhalt des Parallelepipeds mit den Kanten 41, 42, 43 aussprechen, das Graßmann <u>Spath</u> nennt (das Wort Spath ist der Bergbausprache – Kalkspath! – entnommen).



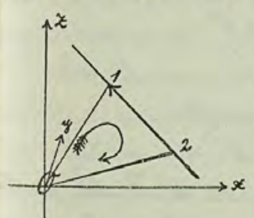
Die <u>neuen Gebilde</u> liefert die zweite und die dritte Matrix. Die zweireihige Matrix stellt den Inbegriff der folgenden <u>6 Determinanten zweiter Ordnung</u> dar, die sich durch Wegstreichen je zweier Kolonnen bilden lassen:

$$(1)\ \begin{cases} X = x_1 - x_2, \quad Y = y_1 - y_2, \quad Z = z_1 - z_2, \\ L = y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad M = z_1 x_2 - z_2 x_1, \quad N = x_1 y_2 - x_2 y_1, \end{cases}$$

und ebenso repräsentiert die dreireihige Matrix folgende <u>4 Determinanten dritter Ordnung</u>:

$$(2)\ \begin{cases} L = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \\ P = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Was nun die 6 Determinanten (1) anlangt, so können wir aus den entsprechenden Erörterungen für die Ebene leicht entnehmen, daß X, Y, Z die Projektionen der Strecke von 2 nach 1 auf die Koordinatenachsen sind, L, M, N aber die doppelten Inhalte der Projektionen des Dreiecks (0, 1, 2), mit diesem Umlaufungssinne genommen, in die Koordinatenebenen. Alle diese Größen bleiben offenbar ungeändert, wenn man die Strecke (1, 2) unter Erhaltung ihrer Länge und ihres Sinnes längs ihrer Geraden verschiebt; sie stellen also das dar, was wir wieder einen <u>Linienteil oder linienflüchtigen Vektor</u> des Raumes nennen



werden. X, Y, Z bleiben selbst noch ungeändert, wenn man den Vektor aus seiner Geraden heraus paralle mit sich verschiebt, und bestimmen also für sich g nommen einen <u>freien Vektor</u>; ähnlich bleiben d fünf Verhältnisse $X : Y : \ldots : N$ ungeändert, wenn m Länge und Sinn des Linienteils auf der festgehal tenen Geraden beliebig verändert, sie bestimmen also bereits die <u>unbegrenzte Gerade</u>.

Die 4 Determinanten (2) bestimmen vor allem einmal die Ebene der 3 Punkte 1, 2, 3; denn deren Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

kann man offenbar schreiben:

$$\Lambda x + M y + N z + P = 0,$$

so daß bereits die Verhältnisse $\Lambda : M : N : P$ die <u>unbegrenzte Ebene</u> festlegen. Weiterhin aber sehen wir sofort, daß Λ, M, N gleich den Inhalten der Projekti nen des Dreiecks (1, 2, 3) in die Koordinatenebenen stets mit diesem bestimmten Umlaufssinne genom men, sind, und daß P gleich dem 6-fachen Vo lumen des Tetraeders (0, 1, 2, 3) ist, wiederum m

dem dieser Reihenfolge der Ecken entsprechenden Vorzeichen. Diese 4 Größen bleiben nun offenbar dann und nur dann unverändert, wenn man das Dreieck (1, 2, 3) derart in seiner Ebene verschiebt und deformiert, daß nur sein Inhalt und sein Umlaufungssinn ungeändert bleibt, und sie bestimmen also ein Dreieck von dieser Beweglichkeit, das Graßmann einen <u>Ebenenteil</u> oder eine <u>Plangröße</u> nennt. Die drei ersten Koordinaten Λ, M, N des Ebenenteil bleiben auch dann ungeändert, wenn man noch die Dreiecksebene parallel mit sich verschiebt; sie bestimmen also ein frei im Raume parallel mit sich verschiebbares Dreieck nach Inhalt und Umlaufssinn, eine sog. <u>freie Plangröße.</u>

Wollen wir nun mit dem <u>Linienteil</u> uns näher beschäftigen, so haben wir zuerst zu bemerken, daß er im Raume durch 5 frei variable Parameter festgelegt wird, da seine beiden Endpunkte zusammen 6 Koordinaten haben, aber der eine Endpunkt noch längs einer Geraden beliebig bewegt werden kann. Also können die 6 Koordinaten X, Y, Z, L, M, N des Linienteils, die wir oben definierten, keine von einander unabhängigen Größen sein, sondern sie müssen einer Bedingung gemägen. Wir leiten diese am einfachsten aus der Determinantenlehre her, die uns ja überhaupt stets der Schlüssel zu unseren Theorien ist. Wir betrachten die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

die gewiß identisch verschwindet, da zwei Zeilen Element für Element übereinstimmen. Wir entwickeln sie als Summe von Produkten entsprechender Unterdeterminanten der ersten und letzten beiden Zeilen: der erste Summand enthält die beiden durch Umrahmung angedeuteten Unterdeterminanten, ist also einfach gleich $N \cdot Z$, und analog ergibt sich für die ganze Determinante der Wert $2(N \cdot Z + M \cdot Y + L \cdot X)$; also besteht die Identität

$$(3.) \qquad X \cdot L + Y \cdot M + Z \cdot N = 0$$

als notwendige Bedingung für die 6 Koordinaten eines jeden Linienteils. Man kann sich leicht überzeugen, daß das Bestehen der Gleichung (3) zwischen 6 Größen auch gerade hinreicht, damit man sie durch die Formel (1) als Koordinaten eines Linienteils darstellen kann; ich brauche auf die Durchführung

dieser ganz elementaren Ueberlegung hier wohl nicht erst einzugehen.

Ich will nun wieder zur Anwendung dieser Begriffe auf die Mechanik übergehen. Als Repräsentanten einer am starren räumlichen Körper angreifenden Kraft haben wir genau wie in der Ebene (S. 52) einen Linienteil, der Angriffslinie, Größe und Richtung der Kraft darstellt. Von den Koordinaten des Linienteils heißen X, Y, Z die Komponenten der Kraft parallel zu den Koordinatenachsen, L, M, N ihre Drehmomente um diese.[1] Die 3 Komponenten X, Y, Z legen die Richtung der Kraft bezw. des Linienteils fest, deren Richtungscosinus gegen die Achsen sich wie $X : Y : Z$ verhalten; man erhält sie als Diagonale des Parallelepipeds, das die auf den Koordinatenachsen abgetragenen Stücke X, Y, Z zu Kanten hat. Durch dieselbe Konstruktion kann man aus den drei Größen L, M, N eine bestimmte Richtung gewinnen, die Richtung der Achse des resultierenden Drehmomentes heißt. Die Bedingungsgleichung (3) bedeutet nun nach einer bekannten Formel der Raumgeometrie nichts, als daß die Richtung der Kraft und die der

1) Wiederum haben wir hier das entgegengesetzte Vorzeichen, als man es in der Mechanik gewöhnlich gebraucht (vgl. S. 53)

Achse der resultierenden Drehmomentes aufeinander senkrecht stehen. Genau wie in der Ebene werden wir auch hier als „Kräftepaar" den Grenzfall in den Begriff des Linienteils einschließen, daß $X = Y = Z = 0$ ist, während L, M, N nicht sämtlich verschwinden; ein einfacher Grenzübergang ergibt, daß man darunter eine unendlich weite, unendlich kleine Kraft zu verstehen hat, deren Drehmomente endlich bleiben. Die elementare Theorie scheut wieder diese Sprechweise und kennt das Kräftepaar nur als Zusammenwirken zweier gleich großer paralleler, aber entgegengesetzt gerichteter Kräfte längs verschiedener Geraden: X, Y, Z, L_1, M_1, N_1 und $-X, -Y, -Z, L_2, M_2, N_2$, die zusammen in der Tat gerade solche Koordinaten $0, 0, 0, L_1 + L_2, M_1 + M_2, N_1 + N_2$ ergeben, wie wir sie soeben annahmen.

Wir haben nun von der Zusammensetzung eines Systems irgendwie gegebener Kräfte am starren Körper

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i,\ L_i,\ M_i,\ N_i \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

zu sprechen. Auf dieses Problem pflegt man in elementaren Büchern und Vorlesungen lange Zeit zu verwenden, während wir es hier sehr schnell werden erledigen können, da unsere analytischen Formeln alle die in der schwerfälligen elementaren Darstel-

lung beim Nichtgebrauch der Vorzeichenregeln nötig werdenden Fallunterscheidungen erübrigen. Das Grundprinzip der Zusammensetzung ist, daß wir die Summen

$$\Xi = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad H = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} L_i, \quad M = \sum_{i=1}^{n} M_i, \quad N = \sum_{i=1}^{n} N_i$$

bilden und sie als Koordinaten des Kraftsystemes oder nach einem von Plücker eingeführten zweckmäßigen Ausdruck, als Koordinaten der Dyname bezeichnen; wir unterscheiden dabei wieder die drei Komponenten längs der Achsen und die drei Drehmomente um die Achsen. Nun wird aber diese Dyname im allgemeinen keine Einzelkraft sein, denn die 6 Summen werden nicht notwendig wieder der für die Koordinaten eines einzelnen Linienteils geltenden Bedingung

$$\Xi \cdot \Lambda + H \cdot M + Z \cdot N = 0$$

genügen. Das ist also gegenüber der Ebene das Neue, daß sich ein System von Kräften am starren Körper nicht notwendig wieder auf eine Kraft reduziert.

Um nun vom Wesen einer Dyname eine konkrete Vorstellung gewinnen zu können, wollen wir sie in möglichst übersichtlicher Weise als Resultierende weniger, vielleicht nur zweier Kräfte darzustellen versuchen. In der Tat kann man jede Dyname auffassen als Resultierende einer Einzelkraft und eines Kräftepaares, dessen Achse der Wirkungsgeraden jener Einzelkraft, der sog. Zentralachse der Dyname, parallel ist, und diese Zerlegung ist nur auf eine Art möglich. Diese Theorie hat ihre erste klassische Darstellung gefunden in Poinsots Éléments de statique, die 1804 zum ersten Male erschienen sind und seitdem zahlreiche neue Auflagen [1] erlebt haben; man spricht daher auch wohl von der Poinsotschen Zentralachse. Übrigens behandelt Poinsot die Theorie sehr umständlich elementargeometrisch an der Hand von Figuren, wie sich das bis heute im elementaren Unterricht erhalten hat.

Um nun das ausgesprochene Theorem zu beweisen, bemerken wir, daß jede Einzelkraft, die nach Abzug eines Kräftepaares aus der Dyname entsteht, jedenfalls die Komponenten Ξ, H, Z haben muß; also müssen die Drehmomente unseres Kräftepaares $\Xi : H : Z$ sein, wenn anders seine Achse der Zentralachse parallel ist. Wir haben seine 6 Koordinaten also anzusetzen als

1) 12 éd. par J. Bertrand. Paris 1877.

$$0,\ 0,\ 0,\ k\cdot\Xi,\ k\cdot H,\ k\cdot Z,$$

wo k ein noch zu bestimmender Parameter ist. Zu unserer gegebenen Dyname Ξ, H, Z, Λ, M, N wird dies Kräftepaar ergänzt durch die Dyname

$$\Xi,\ H,\ Z,\ \Lambda-k\cdot\Xi,\ M-k\cdot H,\ N-k\cdot Z,$$

und der Satz wäre bewiesen, wenn man k so bestimmen könnte, daß das eine Einzelkraft wird. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Koordinaten der Bedingung (3) genügen, d. h.: daß

$$\Xi(\Lambda-k\Xi)+H(M-kH)+Z(N-k\cdot Z)=0.$$

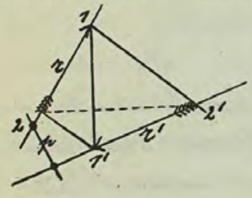
Hieraus folgt eindeutig

$$k=\frac{\Xi\Lambda+HM+ZN}{\Xi^2+H^2+Z^2},$$

denn den Nenner können wir von 0 verschieden annehmen, da sonst bereits ein Kräftepaar statt einer eigentlichen Dyname vorläge. Erteilt man k diesen Wert, den Plücker Parameter der Dyname nennt, so hat man in der Tat die gewünschte Zerlegung der Dyname in Kräftepaar und Einzelkraft erhalten, und der Beweisgang läßt zugleich die Eindeutigkeit dieser Zerlegung erkennen.

Nun ist die Frage, was man für geometrische Vorstellungen mit dieser Zerlegung verbinden kann. Auch diese Untersuchungen gehen wieder auf Möbius zurück, und zwar auf sein Lehrbuch der Statik [1] von 1837. Da stellt er voran die Frage nach den Achsen, in Bezug auf die die Dyname das Drehmoment Null hat, die sog. Nullachsen; das System aller dieser Nullachsen bezeichnet er als Nullsystem und in diesem Zusammenhang hat dieses Ihnen gewiß bekannte Wort seine Wurzel.

Wir müssen nun erst den hier zur Verwendung kommenden allgemeinen Begriff des Drehmomentes oder Momentes definieren. Es seien zunächst zwei Linienteile (1, 2) und (1', 2') im Raume



gegeben. Wir bilden aus ihren 4 Ecken das Tedraeter (1, 2, 1', 2'), dessen Rauminhalt

$$\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \end{vmatrix}$$

ist. Diese Determinante rechnen wir nun so als Summe von Produkten der Unterdeterminanten der ersten und letzten beiden Zeilen aus, wie wir das oben mit der identisch verschwindenden Determinante (S. 70) taten, und erhalten

[1] Leipzig 1837 = Werke III (Leipzig 1887).

$$\frac{1}{6}(X\cdot L' + Y M' + Z\cdot N' + L\cdot X' + M\cdot Y' + N Z'),$$

wo $X', \dots N'$ die Koordinaten des Linienteiles (1', 2') sind. Die hier auftretende bilineare Kombination der Koordinaten der beiden Linienteile

$$\underline{X L' + Y M' + Z N' + L X' + M Y' + N Z'}$$

nennen wir das Moment der einen Linienteiles in Bezug auf den andern; es ist gleich dem 6-fachen Inhalt des von den Endpunkten beider Linienteile gebildeten Tetraeders und ist daher eine vom Koordinatensystem unabhängige geometrische Größe. Sind r und r' die Längen der Linienteile, φ ihr Winkel und p der kürzeste Abstand (gemeinsames Lot) ihrer beiden Geraden, so sieht man elementargeometrisch leicht ein, daß das Moment gleich $r\cdot r'\cdot p\cdot \sin\varphi$ ist, wenn man über das Vorzeichen von φ passend verfügt.

Geben wir nun statt des Linienteiles (1, 2) eine unbegrenzte Gerade, so werden wir unter dem Moment des Linienteils (1', 2') in Bezug auf sie verstehen sein Moment im vorigen Sinne, in Bezug auf einen in der unbegrenzten Geraden liegenden Linienteil von der Länge $r = 1$, also den Ausdruck $r' p \sin\varphi$. Das geht aus dem vorigen Ausdruck durch Division mit $r = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ hervor, so daß schließlich das Moment einer Linienteiles $\mathcal{X}', \mathcal{Y}', \mathcal{Z}', \mathcal{L}', \mathcal{M}', \mathcal{N}'$ in Bezug auf eine unbegrenzte den Linienteil $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ enthaltende Gerade gleich wird:

$$\frac{\mathcal{X}\mathcal{L}' + \mathcal{Y}\mathcal{M}' + \mathcal{Z}\mathcal{N}' + \mathcal{L}\mathcal{X}' + \mathcal{M}\mathcal{Y}' + \mathcal{N}\mathcal{Z}'}{\left|\sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2}\right|};$$

dieser Ausdruck hängt in der Tat nur von den Verhältnissen der 6 Größen $\mathcal{X}, \dots \mathcal{N}$ sowie einem ihnen gemeinsamen Vorzeichen ab, so daß er völlig bestimmt ist, wenn nur die unbegrenzte Gerade und eine Richtung auf ihr gegeben ist. Dies Moment eines Linienteiles ist nun genau das, was man in der Statik Drehmoment der durch den Linienteil repräsentierten Kraft um die Gerade als Achse nennt, wobei man nur wiederum (vgl. S. 71) vielfach abweichender Vorzeichen verwendet.

Wir wollen nun zu dem Momente oder Drehmomente eines Kräftesystemes, einer Dyname $\Xi = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i, \dots N = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}_i'$ aufsteigen; wir werden darunter naturgemäß die Summe der Momente der Einzelkräfte verstehen, also den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{X}\cdot\mathcal{L}_i' + \mathcal{Y}\cdot\mathcal{M}_i' + \mathcal{Z}\cdot\mathcal{N}_i' + \mathcal{L}\cdot\mathcal{X}_i' + \mathcal{M}\cdot\mathcal{Y}_i' + \mathcal{N}\cdot\mathcal{Z}_i'}{\left|\sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2}\right|}$$

$$= \frac{\mathcal{X}.\Lambda + \mathcal{Y}.M + \mathcal{Z}.N + \mathcal{L}\cdot\Xi + \mathcal{M}\cdot H + \mathcal{N}\cdot Z}{\left|\sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2}\right|}.$$

Identifiziert man hierin die unbegrenzte Gerade $\mathcal{X}, \dots \mathcal{N}$ der Reihe nach mit den 3 positiven Achsen, so nimmt der Ausdruck die Werte Λ, M, N an, womit die für diese Größen früher (S. 71) eingeführten Bezeichnungen gerechtfertigt sind.

Nun können wir die oben angegebene Möbiusche Fragestellung angreifen. Eine gegebene Dyname $\Xi, H, \dots N$ hat in Bezug auf eine Gerade $\mathcal{X}:\mathcal{Y}:\dots:\mathcal{N}$ das Moment 0 (diese ist Nullachse), wenn

$$\Lambda\mathcal{X} + M\mathcal{Y} + N\mathcal{Z} + \Xi\mathcal{L} + H\mathcal{M} + Z\mathcal{N} = 0,$$

und also ist das Nullsystem der Dyname die Gesamtheit der durch diese Gleichung dargestellten Geraden $\mathcal{X}:\mathcal{Y}:\dots:\mathcal{N}$. Das ist aber die allgemeinste lineare homogene Gleichung für die 6 Größen $\mathcal{X}, \dots \mathcal{N}$, da die Koeffizienten $\Lambda, \dots Z$ als Koordinaten einer Dyname 6 durchaus willkürliche Größen sein können. Genau solche Gesamtheiten gerader Linien, die durch eine willkürliche lineare homogene Gleichung definiert sind, hat Plücker – neben Möbius der bahnbrechende Pfadfinder in der analytischen Geometrie des 19. Jahrhunderts – in einem Zusammenhange, über den wir später noch ausführlicher zu reden haben werden – unter dem Namen lineare Komplexe der Betrachtung unterworfen. Das Möbiusche Nullsystem ist also mit dem Plückerschen linearen Komplex genau identisch.

Wir wollen uns nun von diesem Nullsystem ein möglichst deutliches Bild zu machen suchen, wobei freilich von einer geometrischen „Gestalt" im eigentlichen Sinne dieses Wortes keine Rede sein kann, da die Nullgeraden den ganzen Raum unendlich oft überdecken; trotzdem wird sich ihre Gruppierung sehr einfach auffassen lassen. Wir wollen dabei, was ganz im Sinne der in dieser Vorlesung immer einzuschlagenden Methode liegt, das Koordinatensystem in eine möglichst bequeme Lage bringen, und das ist erreicht, wenn wir die Zentralachse unserer Dyname als z-Achse wählen. Da die Dyname, wie wir wissen, sich als Resultierende einer Einzelkraft längs der Zentralachse und eines Kräftepaares mit zu ihr paralleler Achse darstellt, müssen bei dieser Wahl der z-Achse 4 Koordinaten Ξ, H, Λ, M der Dyname verschwinden, während Z die Größe der Einzelkraft, N das Drehmoment des Kräftepaares um seine Achse darstellt. Der Parameter der Dyname ist daher

$$k = \frac{\Xi\Lambda + HM + ZN}{\Xi^2 + H^2 + Z^2} = \frac{N}{Z}.$$

Die Gleichung des linearen Komplexes hat in diesem neuen Koordinatensystem einfach die Form

$$N\mathfrak{Z} + Z\mathfrak{N} = 0$$

oder nach Division durch Z

$$(1) \qquad k\cdot\mathfrak{Z} + \mathfrak{N} = 0.$$

Diese Gestalt legen wir der Diskussion zu Grunde. Sind $P_1(x_1|y_1|z_1)$ und $P_2(x_2|y_2|z_2)$ zwei Punkte auf einer Geraden $\mathfrak{X}:\mathfrak{Y}:\mathfrak{Z}:\mathfrak{L}:\mathfrak{M}:\mathfrak{N}$ des Nullsystemes, so ist ja $\mathfrak{Z} = z_1 - z_2$ und $\mathfrak{N} = x_1 y_2 - x_2 y_1$, und daher ergibt (1) für die Koordinaten je zweier Punkte einer Nullgeraden die Bedingung:

$$(2) \qquad k(z_1 - z_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

Halten wir nun P_2 fest, so ist das eine Gleichung für die Koordinaten x_1, y_1, z_1 aller Punkte P_1, die mit P_2 auf einer Geraden des Nullsystems liegen; schreiben wir der Deutlichkeit halber an Stelle von x_1, y_1, z_1 laufende Koordinaten x, y, z, so erkennen wir, daß alle jene Punkte P_1 eine Ebene mit der Gleichung

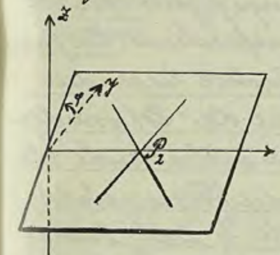
$$(2') \qquad y_2 x - x_2 y + k\cdot z = k z_2$$

erfüllen. Diese Ebene geht durch den Punkt P_2 selbst hindurch, da die Gleichung durch $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$ befriedigt wird. Wir haben damit gezeigt, daß durch jeden Raumpunkt P_2 unendlich viele Nullgeraden gehen, die ein die Ebene (2'.) erfüllendes ebenes Strahlenbüschel bilden. Unsere Aufgabe wird gelöst sein, wenn wir uns von der Lage dieser jedem Punkte P_2 zugehörenden Ebene („Nullebene") ein deutliches Bild machen können:

Nun haben die beiden in die Gleichung (2) eingehenden Ausdrücke $N = x_1 y_2 - y_1 x_2$, $Z = z_1 - z_2$ die Eigenschaft, bei Parallelverschiebungen des Raumes parallel der z-Achse sowie bei Drehungen um diese ungeändert zu bleiben; denn die Verschiebungen ändern x und y, also auch N gar nicht und lassen die Differenz $z_1 - z_2$ ungeändert, die Drehungen aber betreffen die z-Koordinaten, also auch Z garnicht und lassen N als Flächeninhalt in der x-y-Ebene ungeändert. Also wird die Gleichung (2) und daher auch das durch sie bestimmte Nullsystem bei Drehungen des Raumes um die Zentralachse – denn das ist ja die Bedeutung der z-Achse – und Verschiebungen längs ihr in sich übergeführt.

Dieser Satz erleichtert nun unsere Aufgabe ungemein: Wissen wir nur, welche Ebene im Nullsysteme jedem Punkt der positiven x-Halbachse zugehört, so kennen wir damit ganz von selbst auch die jedem beliebigen Raumpunkte zugehörige Nullebene;

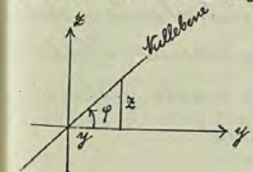
denn durch Verschiebung jener Halbachse längs der z-Achse und Drehung um sie, kann man jeden Raumpunkt mit einem ihrer Punkte zur Deckung bringen, wobei dann nach unserem Satze die zugehörigen Nullebenen ineinander übergehen müssen. Mit anderen Worten: Die Nullebenen der Punkte einer jeden zur Zentralachse senkrechten Halbstrahles haben zu diesem und der Zentralachse eine von der speziellen Wahl des Strahles unabhängige Lage.



Indem wir uns nun auf die x-Achse beschränken, setzen wir $y_2 = z_2 = 0$ und erhalten aus (2') als Gleichung der zum Punkte P_2 mit der Abszisse x_2 gehörigen Ebene:

$$k z - x_2 y = 0 \, ;$$

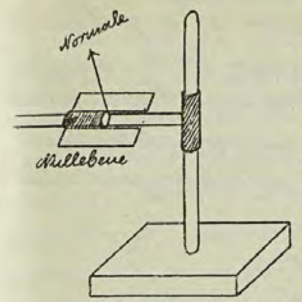
sie geht durch die x-Achse selbst hindurch, da die Gleichung durch $y = z = 0$ identisch befriedigt ist. Indem wir die Gleichung $\frac{z}{y} = \frac{x_2}{k}$ schreiben, schließen wir, daß der Neigungswinkel φ der Ebene gegen die Horizontalebene (y-x-Ebene) die trigonometrische Tangente



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{k}$$

hat, und dadurch ist jetzt die Lage unserer Ebene völlig bestimmt; nebenstehend ist ihre Spur in der vertikalen y-z-Ebene skizziert.

Wir können das Resultat nach dem oben gesagten bald auch ganz unabhängig vom speziell gewählten Koordinatensystem aussprechen: Zu jedem im Abstande r von der Zentralachse liegenden Punkte gehört im Nullsystem eine das Lot von diesem Punkte auf die Zentralachse enthaltende Ebene, deren Neigungswinkel gegen die Horizontalebene die trigonometrische Tangente $\frac{r}{k}$ hat; bewegt man den Punkt also auf irgend einem zur Zentralachse senkrechten Halbstrahle, so liegt die zugehörige Ebene des Nullsystems für $r = 0$ selbst horizontal, und richtet sich mit wachsendem r nach der einen oder anderen Seite hin auf (je nachdem $k \gtrless 0$), um mit unbegrenzt wachsendem r schließlich asymptotisch sich der vertikalen Lage zu nähern. Ich kann Ihnen diese Verhältnisse an einem Schillingschen Modelle näher erläutern; hier ist an einem beweglichen, um die Zentralachse drehbaren und verschiebbaren Arme ein ebenes Blatt angebracht, das bei Verschiebung nach außen hin sich in richtiger Weise aufrichtet.



(3)

Wir wollen jetzt noch besonders die Normalenrichtung auffassen, die zu der Ebene durch den Punkt P_2 gehört; ihre Richtungscosinus gegen die drei Achsen verhalten sich bekanntlich wie die Koeffizienten der Ebenengleichung (2'), d. h. wie
$y_2 : (-x_2) : k$.
Diese selbe Richtung können wir auch dem Punkte P_2 als Bewegungsrichtung einer gewissen unendlich kleinen Schraubenbewegung des Raumes zugeordnet denken. Drehen wir nämlich den ganzen Raum wie einen starren Körper um die z-Achse durch den endlichen Winkel ω und verschieben ihn gleichzeitig parallel der z-Achse um ein Stück c, so wird jeder Punkt x, y, z übergeführt in die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\omega - y \sin\omega \\ y' &= x \sin\omega + y \cos\omega \\ z' &= z + c \end{aligned}$$

gegebene neue Lage. Gehen wir von dieser endlichen Schraubung zu einer unendlichkleinen über, indem wir ω durch die unendlichkleine Größe $-d\omega$ ersetzen und gleichzeitig $c = k\,d\omega$ annehmen; das Minuszeichen bedeutet, daß die Drehung in der x-y-Ebene negativ, d. h. daß der Schraubungssinn bei $k > 0$ negativ ist (Linksschraubung). Wir haben nun Größen zweiter und höherer Ordnung in $d\omega$ zu vernachlässigen, also $\cos d\omega = 1$, $\sin d\omega = d\omega$ zu setzen und erhalten daher:

$$\begin{aligned} x' &= x + y\,d\omega \\ y' &= -x\,d\omega + y \\ z' &= z + k\,d\omega . \end{aligned}$$

Die Inkremente der Koordinaten eines bestimmten Punktes P_2 bei dieser unendlich kleinen Schraubung sind also

$$\delta x_2 = y_2\,d\omega, \quad \delta y_2 = -x_2\,d\omega, \quad \delta z_2 = k\,d\omega,$$

d. h. er wird in der Richtung

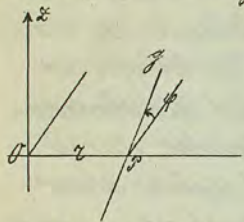
$$\delta x_2 : \delta y_2 : \delta z_2 = y_2 : (-x_2) : k$$

verschoben; das ist in der Tat genau die Normalenrichtung (3). Nimmt man also mit dem Raume eine solche unendlich kleine Schraubung um die Zentralachse vor, daß die Verschiebung das k-fache des (negativ genommenen) Drehwinkels ist, so ist die im Nullsystem mit dem Parameter k zu jedem Raumpunkte gehörige Ebene normal zu dem von ihm durchlaufenen Bogenstück.

Da die Vorstellung der Schraubenbewegung eine sehr anschauliche ist, kann man sich hiernach ein lebendiges Bild von der Anordnung der Ebenen des Nullsystems machen. Je weiter z. B. ein Punkt von der Zentralachse absteht, um so länger ist die Horizontalprojektion $r\,d\omega$ des Bogenelementes, das er durchläuft, um so flacher verläuft daher dieses selbst, da seine Höhe $k \cdot d\omega$ konstant ist, – um so steiler steht also die zum Bogenelement normale Ebene des Nullsystemes. Setzt man unendlich viele solche unendlich kleine Schraubungen zu einer kontinuierlichen Schraubenbewegung des Raumes zusammen, so durchläuft jeder Punkt in der Entfernung r von der Zentralachse eine Schraubenlinie, deren Neigung gegen die Horizontale die trigonometrische Tangente $-\frac{k}{r}$ hat, und deren Ganghöhe daher stets denselben von r unabhängigen Wert $2k\pi$ hat; die Normalebenen dieser Schraubenlinien sind die Ebenen des Nullsystemes.

Wir wollen jetzt zum Schluß, nachdem wir bisher nur von den Ebenen des Nullsystemes gesprochen haben, uns auch ein unmittelbar anschauliches Bild von den Nullachsen selbst zu machen suchen. Nehmen wir irgend eine Nullachse g und

Konstruieren ihre kürzeste Entfernung von der Zentralachse, d. i. die gemeinsame Senkrechte, die die Zentralachse in O und g in P treffen möge.



Dann gehört PO als senkrechter Halbstrahl von P auf die Zentralachse dem Nullsystem an, und daher muss OPg die zu P gehörige Ebene des Nullsystems sein. Da aber g senkrecht auf PO steht, muss es mit der Horizontalen denselben Winkel φ bilden, wie jene Nullebene, d. h. es ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{k}$, wo $r = OP$. Wir erhalten also alle Nullachsen, indem wir durch jeden Punkt P eines jeden auf der Zentralachse senkrechten Halbstrahles dasjenige Lot auf ihm errichteten, dessen Neigungswinkel gegen die Horizontale die trigonometrische Tangente $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{k}$ besitzt, wo r der Abstand des P von der Zentralachse ist.

Noch ein wenig anschaulicher können wir diese Konstruktion so darstellen: Wir stellen uns den Kreiszylinder mit dem Radius r um die Zentralachse als Achse her und zeichnen auf ihm alle Schraubenlinien, die die aus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{k}$ bestimmte Neigung φ gegen die Horizontale haben; dann ist offenbar die Gesamtheit der Tangenten

dieser Schraubenlinien identisch mit der Gesamtheit der Nullachsen im Abstand r von der Zentralachse und durch Variation von r erhält man sämtliche Nullachsen. Diese Schraubenlinien werden nach außen hin offenbar immer steiler; sie haben in jedem Punkte die zugehörige Nullebene zur Schmiegungsebene und verlaufen daher senkrecht zu den vorhin erwähnten Schraubenlinien, die in jedem Punkte normal zu der Nullebene stehen.

Wir können es nach diesen Erörterungen, die einen doppelten Zusammenhang des Nullsystems mit den Schrauben gelehrt haben, verstehen, dass man diese ganze Theorie auch kurzweg als Schraubentheorie bezeichnet hat; diese Bezeichnung hat besonders Sir Robert Ball in seiner „theory of screws"[1] angewandt, wo er in der Tat alle mit einer gegebenen Dyname an einem starren Körper in Zusammenhang stehenden geometrischen Verhältnisse behandelt.

Lassen Sie uns nun zu unseren systematischen Entwicklungen zurückgehen. Wir hatten nach dem

[1] A study in the dynamics of a rigid body. Dublin 1876.

Graßmannschen Prinzip als die 4 geometrischen Elementargebilde des Raumes den *Punkt*, den *Linienteil*, den *Ebenenteil* und den *Raumteil* erhalten. Genau wie in der Ebene ist es unsere nächste Aufgabe, das Verhalten dieser Gebilde bei Transformationen des rechtwinkligen Koordinatensystems zu untersuchen und sie gemäß dem früher ausgesprochenen allgemeinen Prinzip danach zu klassifizieren.

IV. Klassifikation der räumlichen Elementargebilde nach ihrem Verhalten bei rechtwinkeligen Koordinatentransformationen.

Vor allem müssen wir nun natürlich einen Überblick über alle möglichen Transformationen eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems gewinnen; sie sind überhaupt fundamental für die gesamte Raumgeometrie, so daß wir schon deshalb in dieser Vorlesung nicht an ihnen vorbei gehen könnten. Die allgemeinste in Betracht kommende Änderung des Koordinatensystems setzt sich wie in der Ebene zusammen aus 1.) Parallelverschiebung; 2.) Drehung um den Anfangspunkt; 3.) Spiegelung; 4.) Änderung des Maßstabes.

Die Gleichungen der *Parallelverschiebung* sind natürlich:

$$(A_1) \qquad x' = x + a \qquad y' = y + b \qquad z' = z + c \,.$$

Die Gleichungen der *Drehung* haben jedenfalls die Form

$$(A_2) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases} ;$$

auf die Bestimmung der Koeffizienten, die hier wesentlich komplizierter ist als in der Ebene, werden wir sogleich besonders eingehen. Die Zusammensetzung aller möglichen Transformationen dieser beiden Arten entspricht den sämtlichen *eigentlichen Bewegungen* des räumlichen Koordinatensystems.

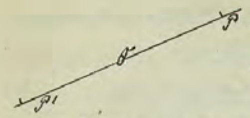
Die *Spiegelung* können wir, wie in der Ebene an einer Achse, so hier *an einer Koordinatenebene*, etwa der x-y-Ebene, vornehmen, und erhalten:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z \,.$$

Wir können die Formel aber auch symmetrischer gestalten, indem wir *drei* Minuszeichen verwenden:

$$(A_3) \qquad x' = -x \qquad y' = -y \qquad z' = -z \;;$$

das ist eine *Spiegelung am Anfangspunkte* O selbst, die man auch wohl als *Inversion* bezeichnet: Jeder Punkt P wird durch den Endpunkt P' der über O hinaus um sich selbst verlängerten Strecke PO ersetzt.



In der Ebene stellt $x' = -x$, $y' = -y$ keine Spiegelung, sondern eine Drehung um 180^0 dar, und so ist überhaupt die Inversion am Anfangspunkt nur in Räumen ungerader Dimensionszahl eine Spiegelung, bei gerader Dimensionszahl aber eine Drehung.

Die Maßstabänderung endlich wird einfach durch

$$(A_4) \qquad \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \\ z' = \lambda z \end{cases} \quad , \text{wo } \lambda > 0$$

dargestellt; für $\lambda < 0$ enthält diese Transformation auch eine Spiegelung.

Wir haben uns nun noch mit den Formeln der Drehung näher zu beschäftigen. Die allgemeine Drehung um den Anfangspunkt O hängt bekanntlich von 3 Parametern ab, da einmal die drei Richtungscosinus der Drehungsachse zwei unabhängige Größen repräsentieren und dann der Drehwinkel willkürlich ist. Eine symmetrische Darstellung aller Drehungen durch 3 unabhängige Parameter liefert die Quaternionentheorie, wie ich das in der Vorlesung vom Wintersemester gelegentlich ausgeführt habe;[1] übrigens hat schon Euler die entsprechenden Formeln aufgestellt. Hier will ich die Dar-

1.) siehe Teil I S. 164 ff.

stellung geben, die man gewöhnlich auch in den Lehrbüchern der Mechanik findet, und die die 9 Richtungscosinus der neuen Achsen gegen die alten benutzt. Wir gehen von der angegebenen Gestalt (A_2) der Transformationsgleichungen aus:

$$(1.) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases} .$$

Betrachten wir einen Punkt x, $y = 0$, $z = 0$ der alten x-Achse, so hat er in Bezug auf das neue System die Koordinaten $x' = a_1 \cdot x$, $y' = a_2 \cdot x$, $z' = a_3 \cdot x$, d. h. a_1, a_2, a_3 sind die Cosinus der Winkel der drei neuen Achsen gegen die alte x-Achse, und ebenso sind b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3 ihre Richtungscosinus gegen die y- und z-Achse.

Diese 9 Koeffizienten der Transformationsgleichungen sind nun durchaus nicht unabhängig von einander. Man kann die Beziehungen zwischen ihnen leicht aus der soeben angegebenen Deutung erhalten, oder auch von der bekannten Relation aus, die bei jeder „orthogonalen Substitution", d. h. bei jeder Drehung oder Spiegelung mit festbleibendem O besteht:

$$(2) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 ,$$

und die die Invarianz der Entfernung von O aussagt; wir schlagen hier den zweiten Weg ein:

α.) Indem wir (1) in (2) einsetzen, erhalten wir durch Koeffizientenvergleichung folgende 6 Relationen zwischen den 9 Größen $a_1, \dots c_3$:

$$(3.)\quad \begin{cases} a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 & b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 \quad c_1^2+c_2^2+c_3^2=1 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0 & c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0 \quad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \end{cases}$$

β.) Multiplizieren wir nun die drei Gleichungen (1) mit den drei Größen a, bezw. b, bezw. c und addieren so folgt auf Grund von (3) ihre Auflösung in der Gestalt:

$$(4.)\quad \begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' \; ; \end{cases}$$

das ist ersichtlich die sog. transponierte lineare Substitution zu (1), die durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen des Koeffizientenschemas entsteht.

γ.) Andererseits ergibt sich nach den Regeln der Determinantentheorie als Lösung der Gleichungen (1)

$$x = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x' & b_1 & c_1 \\ y' & b_2 & c_2 \\ z' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ et c., wo } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

die Determinante des Gleichungssystemes ist. Der Koeffizient von x' hierin muß derselbe sein, wie in der

ersten Gleichung (4), d.h.

$$(5.)\quad \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 ,$$

und ebenso muß jeder Koeffizient der orthogonalen Substitution gleich sein der zugehörigen Unterdeterminante des Koeffizientenschemas, dividiert durch die Determinante Δ.

δ.) Wir wollen nun diese Determinante Δ des Koeffizientensystems selbst berechnen, und bilden dazu nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten ihr Quadrat:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^2+a_2^2+a_3^2 & b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3 & c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3 \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & b_1^2+b_2^2+b_3^2 & c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3 \\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & c_1^2+c_2^2+c_3^2 \end{vmatrix},$$

wobei die Kolonnen der ersten mit den Kolonnen der zweiten Determinante multipliziert sind. Nach den Formeln (3) ist die Produktdeterminante einfach gleich

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 ,$$

so daß schließlich

$$\Delta = \pm 1$$

folgt. Um nun für eine dieser beiden Möglichkeiten zu entscheiden, bedenken wir, daß wir bisher nur die Relation (2) benutzt haben, die bei Drehung und Spiegelung gleichmäßig erfüllt ist. Unter allen diesen orthogonalen Transformationen sind nun die Drehungen dadurch ausgezeichnet, daß sie durch kontinuierliche Variation der Koeffizienten aus der „identischen Transformation" $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ hervorgehen, entsprechend einer stetigen Bewegung des Koordinatensystems aus der ursprünglichen in die neue Lage; dementgegen entsteht das, was wir allgemein Spiegelung nennen, aus der einen Inversion $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$ durch kontinuierliche Abänderung, während sich die Inversion nicht stetig aus der identischen Transformation erzeugen läßt. Nun ist die Determinante eine stetige Funktion der Koeffizienten und muß sich also stetig ändern, wenn wir die identische Transformation kontinuierlich in irgend eine Drehung überführen; bei dieser Ausgangstransformation hat sie aber den Wert

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1,$$

und da sie, wie wir sahen, überhaupt nur $+1$ oder -1 sein kann, muß sie notwendig stets $+1$

bleiben, denn ein plötzlicher Übergang in -1 würde eine Unstetigkeit bedeuten. Bei jeder Drehung ist also die Determinante

$$(6) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +1,$$

und ganz ebenso ergibt sich, daß bei jeder Spiegelung $\Delta = -1$ ist.

Die Formel (5) nimmt jetzt die einfache Gestalt an

$$(7) \qquad a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

und so ist jeder Koeffizient im Schema der Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems gleich der zugehörigen Unterdeterminante. –

Wir kommen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe festzustellen, wie sich die Koordinaten unserer Elementargebilde, des Linienteils X, Y, Z, L, M, N, des Ebenenteils Λ, M, N, P und schließlich der Raumteiles T bei den vier Arten der Änderung der rechtwinkligen Koordinatensystemes verhalten. Um Verwechslungen vorzubeugen, mache ich darauf aufmerksam, daß wir Λ, M, N inzwischen in ganz anderer Bedeutung als Koordinaten einer Dyname benutzt haben; von nun an bezeichnen sie wieder die dreireihigen Determinanten aus der Koordinatenmatrix dreier Punkte.

Die Transformationsformeln sämtlich hinzuschreiben, würde zu viel Raum beanspruchen und schließlich auch langweilig sein; ich will daher nur einige Punkte hervorheben, die besonderes Interesse verdienen. Zunächst bemerke ich, wie Sie selbst leicht bestätigen werden, daß in allen Transformationsformeln der Koordinaten eines Linienteils die ersten drei Koordinaten $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}'$ im neuen System sich allein durch $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ ausdrücken, ohne daß die $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ eingehen; also muß dem früher (S. 59) ausgesprochenen allgemeinen Prinzip zufolge der Inbegriff der 3 Größen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ bereits für sich ein vom Koordinatensystem unabhängiges, geometrisches Gebilde bestimmen: es ist der freie Vektor, den wir ja schon erwähnten (S. 68). Ebenso transformieren sich auch bei der Plangröße die drei Koordinaten Λ, M, N für sich, ohne Rücksicht auf die vierte P, so daß auch sie eine geometrische von den Koordinaten unabhängige Bedeutung haben: sie stellen die gleichfalls schon genannte freie Plangröße dar (S. 69).

Wir wollen nun speziell ausrechnen, wie sich

die drei Koordinaten des freien Vektors $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ bei unseren Transformationen $(A_1), \dots (A_4)$ (S. 91) verhalten; wir setzen dazu nur in $\mathfrak{X}' = x_1' - x_2'$ etc. für die $x_1', \dots$ die oben aufgestellten Ausdrücke durch x, y, z ein und erhalten dann ohne weiteres:

1.) bei Parallelverschiebung:

$$(B_1) \qquad \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \quad \mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} \; ;$$

2.) bei Drehung:

$$(B_2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}' = a_1 \mathfrak{X} + b_1 \mathfrak{Y} + c_1 \mathfrak{Z} \\ \mathfrak{Y}' = a_2 \mathfrak{X} + b_2 \mathfrak{Y} + c_2 \mathfrak{Z} \\ \mathfrak{Z}' = a_3 \mathfrak{X} + b_3 \mathfrak{Y} + c_3 \mathfrak{Z} \end{cases} ;$$

3.) bei Inversion:

$$(B_3) \qquad \mathfrak{X}' = -\mathfrak{X} \quad \mathfrak{Y}' = -\mathfrak{Y} \quad \mathfrak{Z}' = -\mathfrak{Z} \; ;$$

4.) bei Maßstabänderung:

$$(B_4) \qquad \mathfrak{X}' = \lambda \mathfrak{X} \quad \mathfrak{Y}' = \lambda \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{Z}' = \lambda \mathfrak{Z} \; .$$

Bei Verschiebung des Koordinatensystems ändern sich also die Koordinaten des freien Vektors garnicht, sonst aber verhalten sie sich genau wie die Punktkoordinaten selbst.

Damit wollen wir nun die Transformationsformeln für ein Kräftepaar vergleichen, die wir aus den Transformationsformeln der Koordinaten eines Linienteils erhalten, indem wir nachträglich $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0$ setzen; es wird dann natürlich $\mathfrak{X}' = \mathfrak{Y}' = \mathfrak{Z}' = 0$, und für die Drehmomente in Bezug auf die neuen Achsen ergeben sich die Formeln:

1.) bei Verschiebung:

$$(\mathfrak{C}_1) \qquad \underline{L' = L \qquad M' = M \qquad N' = N} \; ;$$

2.) bei Drehung:

$$(\mathfrak{C}_2) \qquad \underline{\begin{cases} L' = a_1\, L + b_1\, M + c_1\, N \\ M' = a_2\, L + b_2\, M + c_2\, N \\ N' = a_3\, L + b_3\, M + c_3\, N \end{cases}} \; ;$$

3.) bei Inversion:

$$(\mathfrak{C}_3) \qquad \underline{L' = L \qquad M' = M \qquad N' = N} \; ;$$

4.) bei Maßstabänderung:

$$(\mathfrak{C}_4) \qquad \underline{L' = \lambda^2 \cdot L \quad M' = \lambda^2 \cdot M \quad N' = \lambda^2 \cdot N} \; .$$

Die Koordinaten eines Kräftepaares ändern sich also bei Verschiebung des Koordinatensystems und bei Inversion nicht, sie verhalten sich bei Drehung wie Punktkoordinaten und multiplizieren sich bei Maßstabänderung mit dem Faktor λ^2, d. h. sie haben die Dimension 2 (eines Flächeninhalts), während der freie Vektor, wie die Punktkoordinaten, die Dimension 1 hat.

Die Herleitung der Formeln $(\mathfrak{C}_1)$, $(\mathfrak{C}_3)$, $(\mathfrak{C}_4)$ macht gar keine Schwierigkeit; nur für $(\mathfrak{C}_2)$ sind vielleicht einige Erläuterungen angebracht. Man hat nämlich aus den Drehungsformeln $(\mathfrak{A}_2)$:

$$L' = \begin{vmatrix} y_1' & z_1' \\ y_2' & z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 \,, & a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 \,, & a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 \end{vmatrix} .$$

Multiplizieren wir die letzte Determinante aus, so ergeben sich $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$ Glieder, von denen sich offenbar dreimal je 2 ($a_2 x_1 \cdot a_3 x_2 - a_3 x_1 \cdot a_2 x_2$ etc.) gegenseitig fortheben; die überbleibenden 12 Terme fassen sich zu folgender Summe von Determinantenprodukten zusammen:

$$L' = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} .$$

Die ersten Faktoren sind nach der Formel (7) für die Unterdeterminanten des Koeffizientensystems einer Drehung (S. 97) gerade gleich a_1, b_1, c_1, während die zweiten Faktoren gleich L, M, N sind; damit ist in der Tat die angegebene Formel für L' gewonnen, und ebenso folgen die beiden andern Formeln für M' und N'.

Als dritten Objekt ziehen wir endlich die freie Plangröße heran; ganz ähnliche einfache Rechnungen, die ich Ihnen wohl selbst überlassen darf, führen zu dem Ergebnis, daß sich die Komponenten Λ, M, N der freien Plangröße in allen Fällen genau so wie die Koordinaten L, M, N eines Kräftepaares transformieren.

Fassen wir der besseren Übersicht halber diese Ergebnisse in eine kleine Tabelle zusammen; sie gibt die transformierten ersten Koordinaten an, aus denen die andern durch zyklische Vertauschung entstehen:

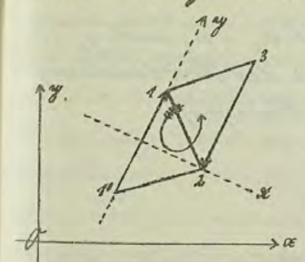
	Verschiebung	Drehung	Inversion	Maßstabänderung
freier Vektor	$\mathfrak{X}$	$a, \mathfrak{X}+b, \mathfrak{Y}+c, \mathfrak{Z}$	$-\mathfrak{X}$	$\lambda \mathfrak{X}$
Kräftepaar	$\mathfrak{L}$	$a, \mathfrak{L}+b, \mathfrak{M}+c, \mathfrak{N}$	$\mathfrak{L}$	$\lambda^2 \mathfrak{L}$
freie Plangröße	Λ	$a, \Lambda+b, M+c, N$	Λ	$\lambda^2 \Lambda$

Damit haben wir nun die präzise Grundlage für eine Reihe geometrischer Aussagen gewonnen, die in den Lehrbüchern vielfach garnicht oder doch nur beiläufig und in einer Form herauskommen, in der man ihren einfachen geometrischen Inhalt nicht so leicht auffassen kann. Häufig werden die verschiedenen geometrischen Gebilde, die wir hier betrachten, durchaus nicht in dieser reinlichen Weise getrennt, wie wir es für erforderlich halten, und daher fallen dann eine ganze Reihe interessanter Beziehungen vollkommen fort. So sind z. B. schon bei Poinsot die Begriffe Kräftepaar („couple") und freie Plangröße („aire") stets von vornherein mit einander verkoppelt, was natürlich das Verständnis notwendig erschwert; für uns hier zeigt erst der Vergleich der letzten beiden Zeilen unserer Tabelle nach einem früher ausgesprochenen allgemeinen Prinzip, <u>daß Kräftepaar und freie Plangröße als geometrische Grundbegriffe der</u>

<u>selben Art anzusehen sind</u>, weil sie sich bei allen Änderungen der rechtwinkligen Koordinatensystems genau übereinstimmend verhalten. Machen wir uns den Inhalt dieser Aussage näher klar: Ist etwa ein Kräftepaar $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ gegeben und ordnen wir ihm eine Plangröße Λ, M, N durch

$$\Lambda = \mathfrak{L}, \qquad M = \mathfrak{M}, \qquad N = \mathfrak{N}$$

zu, (oder machen wir dasselbe in umgekehrter Reihenfolge, von Λ, M, N ausgehend), so bleibt diese Übereinstimmung der Koordinaten bei jeder Koordinatentransformation erhalten und muß sich daher auch rein geometrisch ohne Benutzung der Koordinatensystemes beschreiben lassen. Zu diesem Ende wollen wir von der Plangröße Λ, M, N ausgehen und werden nun am bequemsten das Koordinatensystem so spezialisieren, daß $\Lambda = M = 0$ wird;



dann stellt die freie Plangröße ein parallel der x-y-Ebene oder speziell in ihr liegendes Dreieck (1, 2, 3) dar, derart daß N gleich dem doppelten Dreiecksinhalt d. h. gleich dem Inhalte des Parallelogramms (1, 1', 2, 3) wird, das mit dem durch diesen Umlaufssinn bestimmten Vorzeichen zu versehen ist. Ich behaupte nun, daß das zugehörige Kräftepaar mit den Momenten $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{M} = 0$, $\mathfrak{N} = N$ aus zwei gegenüberliegenden Parallelogrammseiten (1, 1') und (2, 3) mit den Pfeilspitzen in 1 und 2 zusammengesetzt werden kann. Zum Beweise lege ich das Koordinatensystem in der x-y-Ebene noch bequemer, nämlich die y-Achse in die Gerade 1 1' und die x-Achse durch den Punkt 2 (in der Figur punktiert gezeichnet). Dann haben zunächst die beiden Linienteile (1, 1') und (2, 3) und daher auch das aus ihnen zusammengesetzte Kräftepaar die Drehmomente $\mathfrak{L} = 0$ und $\mathfrak{M} = 0$. Ferner ist für den Linienteil (1, 1') auch das dritte Drehmoment Null, so daß schließlich $\mathfrak{N}$ gleich dem Drehmoment von (2, 3) wird:

$$\mathfrak{N} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 \cdot y_3 \,,$$

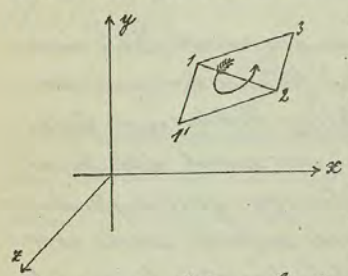
(denn nach unserer Annahme ist $x_2 = x_3$ und $y_2 = 0$). Andererseits ist aber für diese Lage des Koordinatensystemes die dritte Koordinate der Plangröße

$$N = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_2 \cdot y_3$$

(d. h. gleich Grundlinie y_3 mal Höhe x_2 des Parallelogrammes); also ist tatsächlich, auch im Vorzeichen, $\mathfrak{N} = N$ und damit ist unsere ganze Behauptung bewiesen.

Wir können dieses Resultat sofort auch allgemein ohne Rücksicht auf ein spezielles Koordinatensystem aussprechen: *Eine durch ein Parallelogramm von bestimmtem Umlaufssinne repräsentierte freie Plangröße, sowie das Kräftepaar, das aus zwei gegenüberliegenden Parallelogrammseiten mit je einer jenem Umlaufssinne entgegen gerichteten Pfeilspitze besteht, sind geometrisch aequivalente Gebilde, d. h. sie haben in Bezug auf jedes Koordinatensystem gleiche Komponenten.* Dieser Satz gestattet also sowohl ein Kräftepaar durch ein Parallelogramm, als auch ein solches durch ein Kräftepaar jederzeit zu ersetzen.

Wir brauchen uns jetzt um die zweite Zeile unserer Tabelle (S. 102) nicht mehr zu kümmern und wollen die erste und dritte, also *freien Vektor* und *freie Plangröße* vergleichen. Da sehen wir zuerst, daß beide sich bei Verschiebungen und Drehungen genau gleich verhalten, daß aber ein Unterschied auftritt, sowie wir Spiegelungen oder gar Maßstabänderungen hinzunehmen. Um das im einzelnen zu verfolgen, denken wir in dem uns geläufigen (rechtshändigen) Koordinatensystem eine Plangröße Λ, M, N gegeben und koppeln mit ihr einen freien Vektor durch die Gleichungen $\mathfrak{X} = \Lambda$, $\mathfrak{Y} = M$, $\mathfrak{Z} = N$; diese Gleichungen werden zwar bestehen bleiben, wenn wir uns auf Bewegungen des Koordinatensystems beschränken, aber bei Spiegelungen oder Maßstabänderungen werden sie sich modifizieren, und wenn wir sie geometrisch aussprechen wollen, werden wir daher ohne Benutzung des Sinnes des Koordinatensystems und des Maßstabes nicht auskommen. In der Tat, legen wir das Koordinatensystem wieder wie vorhin so, daß $\Lambda = M = 0$, und daß N gleich dem Inhalt des Parallelogrammes (1, 1', 2, 3) der x-y-Ebene wird; bei den Verhältnissen der Figur ist dann $N > 0$. Der Vektor $X = 0$, $Y = 0$, $Z = N$ hat dann die positive Richtung der z-Achse. Das kann man unabhängig von der speziellen Lage des Koordinatensystems



offenbar so aussprechen: *Um bei rechtshändigem Koordinatensystem zu einer gegebenen freien Plangröße den freien Vektor mit den gleichen Koordinaten zu erhalten, errichte man in ihrer Ebene ein Lot nach der Seite, von der aus die Umlaufsrichtung des repräsentierenden Parallelogrammes dem Uhrzeiger entgegen gerichtet erscheint und trage auf ihm eine Strecke gleich dem Inhalt des Parallelogrammes ab.* Die Übereinstimmung der Koordinaten

dieses Vektors und der Plangröße bleibt erhalten, wie man auch das Koordinatensystem verschiebt und dreht; sie hört indessen auf, sowie man Maßstabänderungen oder Inversionen vornimmt; mißt man z. B. in Dezimetern statt vorher in Zentimetern, so geht die Maßzahl des Inhalts in ihren 100ten Teil über, die Maßzahl der als Vektor abgetragenen Strecke aber nur in ihren 10ten Teil, und ebenso wird bei Inversion der Vektor das Vorzeichen wechseln, nicht aber die Plangröße.

Die freie Plangröße und Vektor kann man also nur dann völlig identifizieren, wenn man sich ein für alle Male auf einen bestimmten Sinn des Koordinatensystems und eine bestimmte Längeneinheit festlegt; eine solche Beschränkung bleibt natürlich jedem einzelnen für seinen Gebrauch unbenommen, nur muß er ihrer Willkürlichkeit sich immer bewußt bleiben, um sich mit anderen verständigen zu können. Alle diese Dinge sind, wie Sie sehen, äußerst klar und einfach, und doch muß man immer wieder auf sie zurückkommen, da in der heutigen Physik die historische Entwicklung vielfach eine gewisse Verwirrung zurückgelassen hat. Ein Wort daher noch über die

Geschichte dieser Sachen.

Graßmanns Ausdehnungslehre von 1844 hat wegen ihrer schon hervorgehobenen schwer lesbaren Darstellung auf unsere Physik und Mechanik sehr wenig eingewirkt. Viel mehr Einfluß hat da über England die von *W. R. Hamilton* in Dublin um dieselbe Zeit inaugurierte Entwicklung gewonnen; Hamilton ist der Erfinder der *Quaternionen*, über die ich in der Wintervorlesung ja ausführlich gesprochen habe.[1] Hier brauche ich nur zu erwähnen, daß er auch das *Wort Vektor* geschaffen hat für das, was wir *freier Vektor* nannten, während er den Begriff des linienflüchtigen Vektors nicht ausdrücklich gebraucht. Ferner aber kennt er *keinen Unterschied zwischen freier Plangröße und freiem Vektor*, indem er eben von vornherein eine bestimmte Festsetzung über Sinn und Maßstab der Koordinaten getroffen denkt. Dieser Gebrauch ist nun in die Physik übergegangen, und man hat lange Zeit da eigentliche Vektoren und Plangrößen nicht unterschieden. Freilich machte sich allmählich bei feineren Untersuchungen doch die Notwendigkeit einer Scheidung je nach dem *Verhalten der gleichmäßig als Vektoren bezeichne-*

1) siehe Teil I, S 142 ff.

ten Gebilde bei Inversionen geltend, und dazu hat man denn die Adjektive „*polar*“ und „*axial*“ benutzt: *Ein polarer Vektor ändert sein Vorzeichen bei Spiegelungen, ist also genau mit unserem freien Vektor identisch, ein axialer ändert es nicht, und stimmt daher mit unserer freien Plangröße überein*, (wobei wir auf die „Dimension“ nicht achten). Die Physik mußte also hier – und sie tut es noch heute in den üblichen Darstellungen – hinterher eine gewissermaßen überraschende Unterscheidung konstatieren, die sich bei unserer allgemeinen Auffassung ganz naturgemäß von vornherein ergibt. Um es zum Schluß noch ganz präzise an einem Beispiele auszusprechen: Die Aussage, daß die elektrische Erregung ein polarer Vektor ist, bedeutet, daß sie durch 3 Größen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gemessen wird, die sich nach der ersten Zeile unserer Tabelle (S. 102) transformieren; und daß die magnetische Feldstärke ein axialer Vektor ist, soll besagen, daß ihre 3 Bestimmungsstücke sich nach dem Schema der letzten Zeile der Tabelle substituieren. Dabei lasse ich freilich noch dahingestellt, wie es mit der Dimension dieser Bestimmungsstücke steht, denn das würde uns zu weit in die Physik hinein führen.

Hamilton hat nun neben dem Worte Vektor auch das Wort Skalar geschaffen, das noch heute gleichfalls in der Physik eine große Rolle spielt. Ein Skalar ist nichts als eine Invariante aller unserer Koordinatentransformationen, d. i. eine Größe, die unabhängig von allen Aenderungen des Koordinatensystems ist. Dabei muß man wieder genau sagen, welche Transformationen man zulassen will, und danach kann man verschiedene Schattierungen des Skalarbegriffes unterscheiden. Betrachten wir zuerst als Beispiel den Raumteil oder Tetraederinhalt

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} ;$$

er geht, wie man leicht durch Rechnung bestätigt

bei	Verschiebung	Drehung	Inversion	Maßstabänderung
über in	T	T	$-T$	$\lambda^3\, T$

Eine solche Größe, die bei Verschiebungen und Drehungen ungeändert bleibt, bei Spiegelung aber ihr Vorzeichen ändert, nennt man einen Skalar zweiter Art, während ein Skalar erster Art auch bei Inversion absolut ungeändert bleiben soll. Dabei ist die aus der vierten Kolonne

sich ergebende Dimension wieder bei Seite gelassen.

Wir können nun leicht auch Skalare erster Art bilden; die einfachsten Beispiele sind $X^2+Y^2+Z^2$, wo X, Y, Z die Koordinaten eines freien Vektors sind, und $\Lambda^2+M^2+N^2$, wo Λ, M, N die Koordinaten einer freien Plangröße sind. Daß diese Größen in der Tat bei allen Bewegungen und Spiegelungen (nicht bei Maßstabänderungen) ungeändert bleiben, ist aus der Tabelle von S. 102 sofort zu entnehmen, wenn wir noch die Gleichungen (3) (S. 94) für die Koeffizienten der Drehung berücksichtigen; es muß ihnen daher auch eine rein geometrische Bedeutung zukommen, und wir wissen in der Tat, daß sie das Quadrat der Länge des Vektors bezw. des Flächeninhalts des Ebenenteiles darstellen. –

Wir wollen nun zusehen, wie man durch Kombination aus gegebenen Grundgebilden (Vektoren und Skalaren beider Arten) weitere Gebilde derselben Gattungen gewinnen kann. Zunächst ein ganz einfaches Beispiel: T sei ein Skalar zweiter Art, also etwa ein Tetraederinhalt, und X, Y, Z seien die Koordinaten eines polaren Vektors; wir betrachten das Größentripel $T.X, T.Y, T.Z$. Bei Bewegungen werden sich diese drei Größen genau so transformieren, wie die Vektorkomponenten X, Y, Z selbst; bei Inversion aber bleiben sie ungeändert, da beide Faktoren das Zeichen wechseln. Also stellen die drei Größen einen axialen Vektor dar, und ebenso erkennt man, daß man von einem axialen Vektor Λ, M, N ausgehend einen polaren $T \cdot \Lambda,\ T \cdot M,\ T \cdot N$ erhält.

Nun wollen wir 2 polare Vektoren X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 vornehmen und allerlei charakteristische Kombinationen aus ihnen bilden, wobei wir zunächst rein analytisch verfahren. Wir untersuchen das Verhalten der neu gebildeten Größen bei Koordinatentransformationen und schließen daraus, was für eine Art geometrischer Größen sie vorstellen.

1.) Wir beginnen mit den 3 Summen:

$$X_1 + X_2,\ Y_1 + Y_2,\ Z_1 + Z_2\ ;$$

sie transformieren sich offenbar genau in derselben Weise, wie die Vektorkomponenten selbst, und stellen daher einen neuen polaren Vektor dar, der mit jenen beiden gegebenen Vektoren in einer vom Koordinatensysteme unabhängigen rein geometrischen Beziehung steht.

2.) Die bilineare Kombination beider Vektorkomponenten

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

bleibt, wie die Rechnung ergibt, bei allen Bewegungen und Spiegelungen ungeändert und stellt also einen Skalar erster Art vor, der als solcher wiederum rein

geometrisch sich definieren lassen muß.

3.) Die 3 Unterdeterminanten der aus den Komponenten gebildeten Matrix

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

verhalten sich, wie leicht auszurechnen, genau wie die Koordinaten einer freien Plangröße oder eines axialen Vektors; auch dieser muß unabhängig vom Koordinatensystem mit den gegebenen Vektoren verknüpft sein.

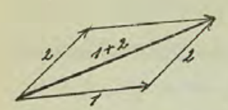
4.) Wir betrachten endlich 3 polare Vektoren und bilden aus ihren 9 Komponenten die Determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}\ ;$$

sie bleibt bei allen Bewegungen ungeändert, wechselt aber bei Spiegelungen das Vorzeichen, so daß sie einen Skalar zweiter Art definiert.

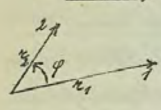
Ich gebe nunmehr die geometrische Deutung dieser Gebilde an; die Beweise werden Sie sich leicht selbst ergänzen können, nachdem einmal das Resultat ausgesprochen ist, wenn Sie nur immer von passend spezialisierter Lage des Koordinatensystemes ausgehen.

Zu 1.) Die Deutung der hier definierten sog. Summe der beiden Vektoren ist allbekannt; läßt

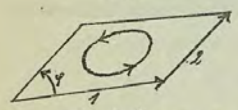


man die beiden Vektoren von demselben Punkt ausgehen, so stellt sie die Diagonale des von ihnen gebildeten Parallelogrammes, von jenem Punkte weg gerichtet, dar (Regel vom „Kräfteparallelogramm").

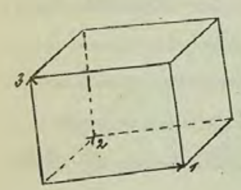
Zu 2.) Haben die Vektoren die Länge r_1, r_2 und bilden ihre Richtungen den Winkel φ, so ist jene bilineare Kombination gleich $r_1 \cdot r_2 \cos\varphi$.



Zu 3.) Wir betrachten wiederum das Parallelogramm, dessen Seiten den Vektoren 1 und 2 parallel sind, und denken es in dem durch die Aufeinanderfolge der Sinne der Vektoren 1 und 2 gegebenen Sinne umlaufen, so hat man eine vollständig bestimmte frei Plangröße, und das ist gerade die oben durch ihre drei Koordinaten definierte. Uebrigens ist der absolute Betrag ihres Flächeninhaltes durch $r_1 \cdot r_2 \,|\sin\varphi|$ gegeben.



Zu 4.) Verlegt man die 3 Vektoren an einen Punkt, so bilden sie 3 Kanten eines Parallelepipeds; sein Inhalt – mit einem geeignet bestimmten Vorzeichen – wird jenem durch die Determinante definierten Skalar zweiter Art gleich.



Lassen Sie mich nun davon sprechen, in welcher Form diese Prozesse sonst in der Literatur auftreten, wo man nicht, wie wir es hier tun, die Untersuchung des Verhaltens gewisser analytischer Ausdrücke gegenüber Koordinatentransformationen, d. h. eine rationelle und einfache Invariantentheorie an die Spitze stellt. Man hat da in der Mechanik und Physik nach dem Vorgange von Graßmann und Hamilton eine besondere Sprechweise ausgebildet, die sog. Vektoralgebra und Vektoranalysis, die jene Neubildung von Vektoren und Skalaren aus gegebenen Vektoren mit den elementaren Rechenoperationen mit gewöhnlichen Zahlen vergleicht.

Das erste ist, wie schon angedeutet, daß man die unter No 1 aufgeführte Operation schlechtweg als Addition der beiden Vektoren 1 und 2 bezeichnet. Die Berechtigung dieser Benennung findet man in der Gültigkeit gewisser formaler Gesetze, die die Addition der gewöhnlichen Zahlen charakterisieren, so insbesondere des kommutativen und des assoziativen Gesetzes: Das erste besagt, daß die Definition der „Summe" unabhängig von der Reihenfolge ist, in der man die beiden Vektoren 1, 2 verwendet, das zweite, daß die Addition der Summe von 1 und 2 zu einem Vektor 3 dasselbe Resultat ergibt, wie die Addition von 1 zur Summe von 2 und 3. – In sehr viel freierer Weise hat man die unter 2 und 3 definierten Operationen Multiplikation genannt und zwar unterscheidet man sie als innere oder skalare (Nr. 2) und äußere oder vektorielle Multiplikation (Nr. 3). Hier trifft nämlich die wichtige Eigenschaft zu, die man als Distributivität der Multiplikation in Bezug auf die Addition bezeichnet, und die in der Gleichung $a_1(a_2+a_3) = a_1 a_2 + a_1 a_3$ enthalten ist; in der Tat hat man ja für die innere Multiplikation

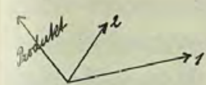
$$X_1(X_2+X_3)+Y_1(Y_2+Y_3)+Z_1(Z_2+Z_3)=(X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2)+(X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3),$$

und ähnlich einfach ist die analoge Eigenschaft für die äußere Multiplikation zu zeigen. Was die andern formalen Gesetze der Multiplikation angeht, – ich habe in der letzten Wintervorlesung [1] ausführlich von ihnen gehandelt –, so will ich nur noch erwähnen, daß für die innere Multiplikation auch das kommutative Gesetz gilt ($a \cdot b = b \cdot a$), für die äußere aber nicht; denn die kleinen Determinanten der das äußere Produkt definierenden Matrix wechseln bei Vertauschung der Vektoren 1 und 2 ihr Vorzeichen.

Ich möchte hier noch bemerken, daß man vielfach

[1] s. Teil I, pag. 23.

das äußere Produkt zweier polarer Vektoren schlechtweg als „Vektor" definiert, ohne seinen axialen Charakter hinreichend zu betonen. Natürlich können wir auch sofort auf Grund der oben (S. 106) gegebenen allgemeinen Zuordnung die freie Plangröße durch einen Vektor ersetzen und erhalten folgende Regel: Das äußere Produkt zweier Vektoren 1 und 2 ist ein Vektor 3 von der Länge $r_1 r_2 |\sin\varphi|$, der auf der Ebene von 1 und 2 senkrecht steht und so gerichtet ist, daß 1 zu 2 zu 3 liegt, wie die positive x-, y-, und z-Achse.



Man darf aber keinesfalls vergessen, daß diese Definition von der Art des Koordinatensystems und dem Maßstab ganz wesentlich abhängt.

Warum sich diese Sprechweise der Vektoranalysis so eingebürgert hat, kann ich nicht ganz verstehen, es mag aber wohl damit zusammenhängen, daß vielen Leuten solche formale Analogieen mit den gewöhnlichen von altersher üblichen Rechenoperationen großes Vergnügen machen. Jedenfalls sind diese Namen für die Vektoroperationen wenigstens leidlich allgemein angenommen; was aber eine weitgehende Divergenz der Meinungen hervorgerufen hat, das ist die Festlegung einer bestimmten symbolischen Schreibweise für diese Operationen und insbesondere für die verschiedenen Arbeiten der Multiplikation. Ich habe Ihnen schon in der vorhergehenden Vorlesung [1] erzählt, wie weit man trotz aller Bemühungen hier von einer Einigung entfernt ist. Unterdessen hat man neuerdings auf dem Mathematikerkongreß in Rom gar eine internationale Kommission eingesetzt, die eine einheitliche Bezeichnungsweise vorschlagen soll; aber ob innerhalb der Kommission überhaupt eine Einigung zu Stande kommen wird, und ob dann die Gesamtheit der Mathematiker solche Vorschläge auch annehmen wird, das muß man erst abwarten. Es ist nun einmal ungeheuer schwer, eine größere Zahl einzelner Menschen, die nur möglichst bequem ihrer Gewohnheit folgen wollen, unter einen Hut zu bringen, wenn nicht die zwingende Gewalt einer Legislative oder materieller Interessen dahinter steht. – Ich ziehe es hier vor, von der Bezeichnungsweise der Vektoranalysis garnicht zu reden – sonst schaffe ich unversehens noch eine neue!

Ich möchte diesen Exkurs nicht abschließen,

1) Teil I, pag. 155 f.

ohne mit allem Nachdruck darauf hinzuweisen, daß für unseren allgemeinen Standpunkt die Fragestellungen der gewöhnlichen Vektoranalysis nur einen Ausschnitt darstellen aus einer Fülle allgemeiner Probleme. Denn z. B. die linienflüchtigen Vektoren, die gebundenen Plangrößen, die Schrauben und Dynamen finden in der Vektoranalysis zunächst keine Berücksichtigung. Aber auch schon für das wirkliche Verständnis der Operationen der Vektoralgebra selbst ist es notwendig, sie in einem größeren Zusammenhang zu sehen; erst dann kommt das ihnen innewohnende Prinzip, die Definition geometrischer Größen durch ihr Verhalten gegen die einzelnen Arten rechtwinkliger Koordinatentransformationen, klar zum Ausdruck. – Was Literatur zu all diesen Fragen anlangt, so nenne ich Ihnen einmal die Arbeit, in der ich letzthin unser allgemeines Klassifikationsprinzip erneut dargestellt und speziell auf die oben berührte Schraubentheorie angewandt habe: „Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball", [1] sowie andererseits die Encyklopaediereferate von E. Timerding („Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers", Enc. IV, 2) und M. Abraham

1) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 47, pag. 237 ff. und Math. Ann. 62, pag. 419.

(„Geometrische Grundbegriffe der Mechanik deformierbarer Körper"; Enc. IV, 14).

V. Erzeugnisse der Grundgebilde.

Damit ist das beendet, was ich hier über die Elementargebilde der Geometrie sagen wollte, und ich habe nun noch über die höheren Gebilde zu reden, die sich aus ihnen zusammensetzen lassen. Ich will das in historischer Form tun, damit Sie ein gewisses Bild der Entwicklung der Geometrie in den verschiedenen Jahrhunderten bekommen.

A.) Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts benutzte man als Elementargebilde im wesentlichen nur Punkte, andere kamen wohl gelegentlich, nie aber systematisch vor. Als Erzeugnisse von Punkten betrachtete man Kurven und Flächen sowie allgemeinere aus Stücken verschiedener Kurven und Flächen bestehende Konfigurationen. Lassen Sie uns ganz kurz überlegen, wie mannigfach das damit bezeichnete Gebiet ist:

1.) Im elementaren Unterricht und manchmal auch in der Anfangsvorlesung über analytische Geometrie sieht es so aus, als ob sich die ganze Geometrie auf Gerade und Ebene, Kegelschnitte und Flächen

zweiter Ordnung beschränkte. Natürlich ist das ein recht ärmlicher Standpunkt, und schon das Wissen der alten Griechen erstreckte sich zum Teil weiter auf einzelne höhere Kurven, die sie als „geometrische Örter" betrachteten; freilich waren diese Dinge wohl noch nicht in den regulären Unterricht eingedrungen.

2.) Vergleichen wir damit den Stand der Kenntnis um 1650, als die analytische Geometrie mit Fermat und Descartes einsetzte. Man unterschied damals geometrische und mechanische Kurven; erstere waren besonders Kegelschnitte, aber auch einzelne höhere Kurven der Art, die man heute algebraische Kurven nennt; mit der zweiten Benennung meinte man Kurven, die man durch irgend einen Mechanismus definierte, z. B. Zykloiden, die durch das Abrollen eines Rades entstehen; sie fallen unter unsere „transzendenten Kurven."

3.) Beide Arten von Kurven ordnen sich dem Begriff der analytischen Kurve unter, den man später allgemein aufstellte; das sind Kurven, deren Koordinaten x, y sich als analytische Funktionen eines Parameters t, d. h. kurzweg als Potenzreihen in t darstellen lassen.

4.) Neuerdings hat man vielfach Betrachtungen über nichtanalytische Kurven angestellt, deren Koordinaten $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sich nicht mehr in Potenzreihen entwickeln lassen, z. B. stetige Funktionen ohne Differentialquotienten sind; hiermit ist dann ein allgemeinerer Kurvenbegriff gegeben, von dem jene analytischen Kurven nur ein besonders einfacher Spezialfall sind.

5) Endlich ist in neuester Zeit durch die Entwicklung der Mengenlehre, von der wir ja im vorigen Semester [1] sprachen, noch ein früher gar nicht gekanntes Objekt hinzugetreten, nämlich die Punktmengen. Das sind Gesamtheiten von unendlich vielen Punkten, Punkthaufen, die nicht gerade eine Kurve bilden, aber doch durch ein bestimmtes Gesetz definiert sind. Will man in unserer konkreten Anschauung etwas diesen Punktmengen ungefähr entsprechendes finden, so mag man z. B. an die Milchstraße des Sternhimmels denken, in der man ja bei genauerem Hinsehen immer mehr Sterne erblickt – natürlich ist bei diesem Bilde das exakte Unendlich der abstrakten Punktmengenlehre durch das Unendlich der Approximationsmathematik ersetzt. –

Für die mit dieser kurzen Aufzählung umschriebenen Disziplinen, insbesondere die Infinitesimalgeometrie, die Punktmengenlehre, wird im Rahmen dieser Vorlesung leider kein Raum mehr bleiben, obgleich sie natürlich gleichfalls wichtige Teilgebiete der Geometrie sind. Sie werden indessen in besondern Vorlesungen und Büchern häufig eingehend gelehrt, so daß wir uns hier mit diesem Hinweis auf ihre Stellung innerhalb der gesamten Geometrie begnügen können, um uns ausführlicher lieber mit anderwärts seltener behandelten Dingen beschäftigen zu können.

[1] vgl. Teil I S. 578 ff.

Vorher knüpfte ich an diese Aufzählung gern eine Erörterung über den Unterschied zwischen analytischer und synthetischer Geometrie, der ja in die Auffassung jener Gebiete immer wieder hineinspielt. Ihrer ursprünglichen Bedeutung nach sind Synthese und Analyse verschiedene Arten der Darstellung: Die Synthese beginnt mit den Einzelheiten und setzt daraus allgemeinere und schließlich allgemeinste Begriffe zusammen, die Analyse im Gegenteil stellt das Allgemeinste an die Spitze und zergliedert es feiner und immer feiner in seine Einzelheiten. Genau in diesem Sinne ist der Unterschied auch in den Bezeichnungen synthetische und analytische

Chemie verstanden. Auch in Schulgeometrie redet man entsprechend von einer *Analysis geometrischer Konstruktionen*: Man nimmt da an, das gesuchte Dreieck sei gefunden und zergliedert es nun in seine einzelnen Stücke. In der höheren Mathematik haben diese Worte aber merkwürdiger Weise einen ganz anderen Sinn angenommen: Da ist die *synthetische Geometrie die, die die Figuren als solche ohne Hinzunahme von Formeln studiert, während die analytische Geometrie sich konsequent der Formeln, speziell des x-y-z-Koordinatensystems bedient.* Richtig verstanden aber besteht freilich zwischen beiden Arten von Geometrie nur ein *gradueller Unterschied*, je nachdem man *mehr die Formeln* oder *mehr die Figuren* voranstellt; analytische Geometrie, die ganz von geometrischer Vorstellung abstrahiert, kann man kaum mehr Geometrie nennen, und die synthetische Geometrie kommt nicht weit, wenn sie nicht zum präzisen Ausdruck ihrer Resultate eine zweckmäßige Formelsprache heranzieht. Nach dieser Erkenntnis haben wir im vorigen gehandelt, wenn wir von Anfang an die Formeln benutzten und dann nach ihrer geometrischen Deutung fragten.

Doch auch in der Mathematik neigen, wie

überall, die Menschen zur Parteibildung, und so entstanden *Schulen reiner Synthetiker und reiner Analytiker*, die auf absolute „Reinheit der Methode" den Hauptwert legten, und die also einseitiger waren, als es die Natur der Sache verlangt. Da verloren sich denn die analytischen Geometer oft in ein blindes Rechnen ohne alle geometrischen Vorstellungen, während die Synthetiker in einer gekünstelten Vermeidung jeder Formel alles Heil sahen und dabei doch schließlich nichts taten, als daß sie eine eigene von der gewöhnlichen abweichende Formelsprache entwickelten. Solche Uebertreibungen der zu Grunde liegenden sachlichen Prinzipien in wissenschaftlichen Schulen führen allemal zu einem *gewissen Versteinerungsprozess* und eine neue, die Wissenschaft wesentlich weiter fördernde Anregung kommt dann meist von „Outsidern". So haben hier in der Geometrie erst die Funktionentheoretiker z. B. den Unterschied zwischen analytischen und nicht nicht-analytischen Kurven klar herausgebracht, der weder bei den wissenschaftlichen Vertretern, noch bei den Lehrbüchern der beiden Schulen jemals hinreichend zur Geltung kam. Und ebenso haben erst die Physiker die Vektoranalysis recht in den Gang gebracht, wenn sich auch die Grundbegriffe schon bei Graßmann finden; ist doch in geometrischen Lehrbüchern heute noch von Vektoren als selbständigen Dingen häufig kaum die Rede!

Man hat dafür plädiert, die Geometrie als selbständigen Lehrgegenstand von der Mathematik abzutrennen und überhaupt die Mathematik für den Lehrbetrieb in ihre einzelnen Disziplinen aufzulösen; in der Tat hat man besonders in ausländischen Universitäten eigene Professuren für Geometrie, Algebra, Differentialrechnung etc. geschaffen. Ich möchte aus den letzten Erörterungen gerade die Folgerung ziehen, daß sich die Aufrichtung so enger Schranken nicht empfiehlt, sondern daß nach Möglichkeit eine lebendige Wechselwirkung der verschiedenen in einer Wissenschaft zusammenwirkenden Interessenzweige zugelassen werden soll, indem jeder einzelne sich im Prinzip als Vertreter der gesamten Mathematik fühlt. Ich rede sogar, derselben Idee folgend, auch möglichst lebendigen Beziehungen der Mathematiker zu den Vertretern der verschiedensten anderen Wissenschaften das Wort.

Beenden wir damit diesen Exkurs und betrachten, der geschichtlichen Entwicklung weiter

nachgehend

B. den gewaltigen Impuls, den die geometrische Forschung von 1800 an erhielt, wo die sog. neuere Geometrie in den Vordergrund trat. Wir nennen sie heut lieber projektive Geometrie, da in ihr die Operation des Projizierens – wir werden später ausführlich von ihr zu reden haben – eine Hauptrolle spielt; die Bezeichnung „neuere" ist zwar heute noch vielfach im Gebrauche, aber eigentlich natürlich längst veraltet, da seither viele abermals „neuere" Tendenzen dazu gekommen sind. Als den ersten bahnbrechenden Forscher habe ich hier J. V. Poncelet zu nennen, der 1822 seinen „Traité des propriétés des figures"[1] erscheinen ließ.

In der weiteren Entwicklung dieser projektiven Geometrie spielte auch wieder von vornherein der Unterschied zwischen synthetischer und analytischer Richtung eine Rolle; als Vertreter der ersteren nenne ich von deutschen Forschern J. Steiner und Ch. v. Staudt, als Vertreter der zweiten neben A. F. Möbius vor allem J. Plücker. Ich lege Ihnen hier gern die Fundamentalwerke auch dieser Männer vor, die ja heute noch lebendig nachwirken: Es sind Steiners „systematische

1) 2. éd. Paris 1865/66.

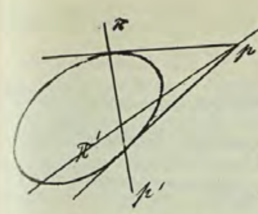
Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander"[1], Staudts „Geometrie der Lage"[2], Möbius „barycentrischer Calcul"[3] und endlich Plückers „Analytisch-geometrische Entwicklungen".[4] –

Soll ich nun die wichtigsten leitenden Gesichtspunkte dieser „neueren" Geometrie hervorheben, so nenne ich an erster Stelle

1.) als Hauptleistung von Poncelet die Gedankenwendung, daß er zum ersten Male neben dem Punkt auch andere Gebilde als gleichberechtigt hervortreten läßt, und zwar wird innerhalb der Ebene dem Punkt die unbegrenzte Gerade, im Raume aber die unbegrenzte Ebene entgegengestellt und bemerkt, daß man in einem großen Teile der geometrischen Sätze stets das Wort „Punkt" mit „Gerade" bezw. mit „Ebene" vertauschen kann. Das ist die Aussage der Prinzipes der Dualität.

Poncelet knüpft seine Entwicklungen an die „théorie des polaires réciproques", die Polarentheorie der Kegelschnitte an. In Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt gehört bekanntlich jedem Punkt p

1.) Berlin 1832 = Ges. Werke Bd. I (Berlin 1881). p. 284 ff.
2.) Nürnberg 1846.
3.) Zitiert S. 36.
4.) 2 Bde. Essen 1828. 1831.



eine Gerade π als Polare zu, die etwa als Verbindungsgerade der Berührungspunkte der Tangenten von p aus definiert ist; umgekehrt gehört dann auch jeder Geraden π ein Pol p zu, und es besteht die „Reziprozitätsbeziehung", daß die Polare π' eines auf π gelegenen Punktes p' durch p geht. Aus dieser speziellen Zuordnung von Geraden und Punkten sowie der analogen Beziehung von Punkten und Ebenen im Raume in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung erschloß nun Poncelet, daß man in der Tat alle Sätze der Geometrie, die sich nur auf Lageneigenschaften, das Ineinanderliegen von Punkten, Geraden, Ebenen beziehen, in der oben bezeichneten Weise „dualisieren" darf. Ein berühmtes Beispiel ist der Pascalsche Satz über das dem Kegelschnitte eingeschriebene Sechseck, der durch Dualisierung in den Brianchonschen Satz über das ihm umgeschriebene Tangentensechseck übergeht.

2.) In der Folge hat man sehr bald das Dualitätsprinzip tiefer aufgefasst, indem man es von der Polarentheorie ablöste und es als einen Ausfluß des ganzen eigenartigen Aufbaues der projektiven Geometrie erkannte. Diese schöne Systematik tritt zuerst bei

Steiner auf; Sie müssen nur lesen, wie er in der Vorrede seiner „systematischen Entwicklung" 1/ in begeisterten Worten schildert, wie erst die projektive Geometrie Ordnung in das Chaos der geometrischen Sätze bringt und wie sich in ihr alles in naturgemäßester Weise aneinanderreiht.

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung noch oft von dieser Systematik zu reden haben; einen kurzen Überblick über sie möchte ich schon jetzt geben. Dabei wird das Prinzip der Dualität darin zum Ausdruck kommen, daß in die Grundbegriffe und Grundsätze („Axiome") der Geometrie stets Punkt und Ebene bezw., wenn wir uns auf die Ebene beschränken, Punkt und Gerade, ganz symmetrisch eingehen, d. h. daß diese Axiome und also auch die aus ihnen logisch abzuleitenden Sätze stets paarweise dualistisch sind. Die sog. „Maßbeziehungen" der elementaren Geometrie wie Entfernung, Winkel et c. treten zunächst in dieser Systematik gar nicht auf; wir werden später sehen, wie sie sich nachträglich einordnen.

Des Näheren gestaltet sich der Aufbau so:

a.) Drei Arten von Gebilden werden als einfachste zu Grunde gelegt: der Punkt, die (unbegrenzte) Gerade,

1.) loc. cit. pg. 233.

die (unbegrenzte) Ebene.

b.) Zwischen diesen Grundgebilden bestehen folgende Beziehungen (Verknüpfungssätze oder „Axiome der Verknüpfung" genannt), deren ausnahmslose Gültigkeit durch geschickte später noch näher zu erörternde Einführung uneigentlicher (unendlichferner) Elemente erreicht wird: 2 Punkte bestimmen eine Gerade, 3 nicht zufällig in einer Geraden gelegene Punkte eine Ebene; 2 Ebenen bestimmen eine Gerade, 3 nicht durch eine Gerade gehende Ebenen aber einen Punkt.

c.) Wir bilden nun die linearen Grundgebilde (d. h. diejenigen, die analytisch durch lineare Gleichungen definiert sind):

A.) Die Grundgebilde 1. Stufe aus je ∞^1 Elementen:

α.) die Gesamtheit der Punkte einer Geraden: gerade Punktreihe.

β.) die Gesamtheit der Ebenen durch eine Gerade: Ebenenbüschel.

γ.) die Geraden durch einen Punkt in einer Ebene: (ebenes) Strahlenbüschel.

B.) Grundgebilde 2. Stufe aus je ∞^2 Elementen:

α.) Die Ebene als Ort ihrer Punkte: Punktfeld.

α'.) Die Ebene als Ort ihrer Geraden: Geradenfeld.

β.) Die Ebenen durch einen festen Punkt: Ebenenbündel.

β'.) Die Geraden durch einen festen Punkt: Geradenbündel.

C.) Grundgebilde 3. Stufe von je ∞^3 Elementen:

α.) Der Raum als Ort seiner Punkte: Punktraum.

β.) Der Raum als Ort seiner Ebenen: Ebenenraum.

In diesem ganzen Aufbau ist in der Tat überall vollkommene Dualität offenbar, und man kann auch weiterhin von den damit gegebenen Grundlagen aus das ganze Gebäude der projektiven Geometrie auf zwei zueinander duale Arten aufführen, indem man einmal von den Punkten, das andere Mal von den Ebenen ausgeht.

3.) Das läßt sich wieder bequemer darstellen, wenn wir weiterhin den analytischen Weg einschlagen und dazu zunächst einmal zusehen, wie das Prinzip der Dualität bei Plücker erscheint. Man kann die Gleichung einer geraden Linie, wenn das konstante Glied nicht gerade Null ist, bekanntlich schreiben:

$$u x + v y + 1 = 0 .$$

Die Gerade ist bestimmt, wenn man die Werte der Koeffizienten u, v kennt, die übrigens bei dieser Schreibweise ganz symmetrisch mit den laufenden Koordinaten x, y auftreten; es ist nun Plückers Gedanke, diese u, v als „Koordinaten der

Geraden" mit den Punktkoordinaten x, y als gleichberechtigt anzusehen und sie unter Umständen statt dieser als variabel gelten zu lassen. Bei dieser neuen Auffassung sind x, y feste Werte, und unsere Gleichung drückt die Bedingung aus, daß eine variable Gerade durch einen festen Punkt $x \mid y$ geht: sie ist die Gleichung dieses Punktes in Geradenkoordinaten. Schließlich braucht man auch keines von beiden Gebilden in der Ausdrucksweise zu bevorzugen und kann ganz unentschieden lassen, welches Größenpaar man als konstant und welches man als variabel ansieht: dann stellt die Gleichung die Bedingung für „vereinigte Lage" von Punkt und Gerade dar. Das Prinzip der Dualität beruht nun darauf, daß jene Gleichung in x, y einerseits und u, v andererseits genau symmetrisch ist, und in dieser Eigenschaft liegt alles, was wir vorhin als die in den Sätzen der Verknüpfung liegende Dualität aussprachen. Im Raume tritt natürlich an Stelle der Geradengleichung die Ebenengleichung

$$u x + v y + w z + 1 = 0 ,$$

und man kann alle weiteren Betrachtungen ganz analog führen.

Infolge dieser Betrachtungen kann man die Geometrie analytisch sowohl so entwickeln, daß man x, y,

z, als auch so, daß man u, v, w als grundlegende Variable auffasst, wobei sich die Worte Punkt und Ebene einfach vertauschen. So entsteht der bekannte *doppelte Aufbau der Geometrie*, den Sie in vielen Lehrbüchern in der Gestalt ausgeprägt finden, daß links und rechts von einem vertikalen Striche die zueinander dualen Theoreme stehen. Werfen wir rasch einen Blick auf die so entstehenden immer *einander dualen höheren Gebilde*, wodurch wir gewissermaßen eine Fortsetzung des obigen in sich dualen Schemas der linearen Gebilde erhalten.

Wir beginnen damit, daß wir *x, y, z als bestimmte Funktionen φ, χ, ψ eines Parameters t* auffassen; dadurch wird eine *Raumkurve* dargestellt, die speziell (wenn die Funktionen φ, χ, ψ identisch einer linearen Gleichung mit konstanten Koeffizienten genügen) eine *ebene Kurve* sein kann, oder endlich, (wenn sie zwei solche lineare Gleichungen befriedigen), in eine *Gerade* ausartet. Setzen wir ebenso u, v, w gleich Funktionen von t, so erhalten wir eine *einfach unendliche Aufeinanderfolge von Ebenen*, die wir uns am bequemsten durch die von ihnen umhüllte *abwickelbare Fläche* vergegenwärtigen. Den beiden aufgeführten Spezialfällen entspricht hier, daß alle Ebenen durch einen Punkt gehen, d. h. daß sie einen *Kegel* umhüllen, oder daß sie gar alle durch eine

feste Gerade gehen.

Betrachten wir zweitens *x, y, z als Funktionen zweier Parameter t, t'*, so erhalten wir eine *allgemeine Fläche*, die speziell in eine *Ebene* ausarten kann; das duale dazu ist die *Gesamtheit der zweifach unendlich vielen eine Fläche umhüllenden Ebenen*, deren Ausartung das durch einen festen Punkt gehende *Ebenenbündel* ist.

Schreiben wir das Resultat in eine kleine Tabelle zusammen:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\chi(t) \\ z=\psi(t) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \underline{\text{Kurve}} \\ (\underline{\text{ebene Kurve}}) \\ (\underline{\text{Gerade}}) \end{array} \qquad \left| \qquad \left.\begin{array}{l} u=\varphi(t) \\ v=\chi(t) \\ w=\psi(t) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \underline{\text{Abwickelb. Fläche}} \\ (\underline{\text{Kegel}}) \\ (\underline{\text{Gerade}}) \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t,t') \\ y=\chi(t,t') \\ z=\psi(t,t') \end{array}\right\} \begin{array}{l} \underline{\text{Fläche}} \\ (\underline{\text{Ebene}}) \end{array} \qquad \left| \qquad \left.\begin{array}{l} u=\varphi(t,t') \\ v=\chi(t,t') \\ w=\psi(t,t') \end{array}\right\} \begin{array}{l} \underline{\text{Fläche}} \\ (\underline{\text{Punkt}}) \end{array} \right.$$

Das genüge als Beispiel eines solchen dualen Schemas, wie man sie lange Zeit hindurch gern weiter ausgebildet hat. –

4) Bereits bei *Plücker* findet sich eine sehr *wesentliche Weiterbildung dieses ganzen Ansatzes*. Genau so, wie er die 3 Koeffizienten der Ebenengleichung als variable Ebenenkoordinaten ansieht, erfaßt er die Idee, *ganz allgemein die Konstanten, von denen irgend ein geometrisches Gebilde abhängt* – z. B. die 9 Koeffizienten der

Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung – *als variable Koordinaten dieser Gebilder anzusehen und zu untersuchen, was irgend welche Gleichungen zwischen ihnen bedeuten mögen*. Von „Dualität" im eigentlichen Sinne ist jetzt freilich nicht mehr die Rede; sie beruhte auf der speziellen Eigenschaft der Ebenengleichung (S. 133) symmetrisch in Koeffizienten und Koordinaten zu sein.

Plücker selbst hat diesen Gedanken besonders für die *Geraden des Raumes* ausgeführt. Eine Raumgerade ist in Punktkoordinaten durch 2 Gleichungen bestimmt, die Plücker schreibt:

$$\begin{cases} x = r \cdot z + \varrho \\ y = s \cdot z + \sigma \end{cases} .$$

Die *4 Konstanten r, s, ϱ, σ* dieser Gleichungen werden dann als *Koordinaten der Geraden im Raum* zu bezeichnen sein; es ist leicht festzustellen, wie sie mit den früher (S. 68 ff.) benutzten, nach dem Graßmannschen Prinzip aus zwei Punkten der Geraden hergeleiteten Bestimmungsstücken $\mathfrak{X} : \mathfrak{Y} : \ldots \mathfrak{N}$ zusammenhängen. Nun betrachtet Plücker zunächst *eine Gleichung* $f(r, s, \varrho, \sigma) = 0$ zwischen den vier Koordinaten; sie scheidet aus den sämtlichen vierfach unendlich vielen Geraden dreifach unendlich viele aus, die er einen *Linienkomplex* nennt; den einfachsten Fall eines solchen, den *linearen Kom-*

plex, hatten wir neulich bereits besprochen (S. 79 ff.). *Zwei Gleichungen* $f(r, s, \varrho, \sigma) = 0$, $g(r, s, \varrho, \sigma) = 0$ bestimmen eine *Linienkongruenz* oder *Strahlensystem*; das erste Wort soll besagen, daß es sich um die Geraden handelt, in denen die beiden Komplexe $f = 0$, $g = 0$ übereinstimmen. Endlich bestimmen *3 Gleichungen* $f = g = h = 0$ derselben Art einfach unendlich viele Geraden, die eine gewisse Fläche überdecken: *Linienfläche oder Regelfläche*.

Diese Darstellung hat Plücker in seinem Werke: „*Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*"[1] von 1868/69 gegeben; er starb vor nun genau 40 Jahren, als die Drucklegung des ersten Teiles dieses Werkes fast beendet war, und ich durfte mir als sein damaliger Assistent die Sporen mit der Herausgabe des zweiten Teiles verdienen.

Das allgemeine Plückersche Prinzip, irgendwelche Gebilde als Raumelemente, ihre Konstanten als Koordinaten zu verwenden, hat auch weiterhin zu interessanten Entwicklungen Anlaß gegeben. So hat der große norwegische Mathematiker *Sophus Lie*, der lange in Leipzig gewirkt hat, mit seiner *Kugelgeometrie* großen Erfolg gehabt; hier wird die Kugel

1) Abt. 1. 2. Leipzig 1868 u. 69.

als Raumelement benutzt, die wie die Gerade von 4 Parametern abhängt. Ich erwähne ferner noch aus neuester Zeit Studys „Geometrie der Dynamen", [1] wo an den uns bereits geläufigen Begriff der Dyname eine ganze Reihe hierher gehöriger interessanter Untersuchungen geknüpft werden.

C.) Ueber diese im vorigen behandelte, neuere Geometrie", die im Grunde doch auf der Hervorhebung der unbegrenzten Geraden und der unbegrenzten Ebene als Raumelement beruht, hinaus geht die von Graßmann 1844 eingeleitete Entwicklung, die den begrenzten Linienteil, Ebenenteil, Raumteil voranstellt und ihnen Koordinaten nach dem „Determinantenprinzip" beilegt; wir haben ja ausführlich davon gesprochen. Das Schöne daran ist, daß so den Bedürfnissen der Mechanik und Physik in ungleich wirksamerer Weise entsprochen wird als es z. B. durch die Liniengeometrie und das Prinzip der Dualität geschieht. – Natürlich sind diese verschiedenen Richtungen keineswegs so scharf getrennt, wie ich das hier der besseren Uebersicht halber darstelle; in der Tat verhält es sich nur so, daß Plücker mehr auf die unbegrenzte Gerade, Graßmann mehr auf den Linienteil

1.) Leipzig 1903.

Gewicht legte, während bei jedem auch das andere Moment gelegentlich vorkommt. Namentlich Study könnte eigentlich ebenso wie in der vorigen Rubrik auch in dieser angeführt werden.

Nun habe ich aber zu betonen, daß sich Graßmann keineswegs auf unmittelbar anwendbare Dinge beschränkt hat, vielmehr ging er frei schaffend weit darüber hinaus. Das Wichtigste ist, daß er allgemein n Punktkoordinaten $x_1, x_2, \dots x_n$ statt dreier x, y, z einführte und so zur Geometrie des Raumes R_n von n Dimensionen aufstieg, deren eigentlicher Schöpfer er ist. Nach seinem allgemeinen Prinzip betrachtet er in einem solchen höheren Raume die Matrizen aus den Koordinaten von $2, 3 \dots n+1$ Punkten, deren Unterdeterminanten ihm dann eine ganze Reihe fundamentaler, dem Linienteil und Ebenenteil entsprechender Grundgebilde des R_n liefern. Ich erwähnte schon, daß Graßmann die so entstehende abstrakte Disziplin als Ausdehnungslehre bezeichnet.

Diese Auffassung des R_n hat in neuerer und neuester Zeit eine Ausdehnung dahin erfahren, daß man unendlich viele Koordinaten $x_1, x_2, x_3, \dots$ (in infin.) in Betracht zieht, und demgemäß vom unendlich-dimensionalen Raume R_∞ spricht; gerade hier in Göttrugen ist ja jetzt viel davon die Rede. Daß solche Betrachtungen einen Sinn haben, erkennen Sie, wenn Sie etwa nur an das Operieren mit Potenzreihen denken: Eine Potenzreihe ist festgelegt durch den Inbegriff ihrer unendlich vielen Koeffizienten und kann insofern durch einen Punkt im R_∞ gedeutet werden.

Das Merkwürdige und heut bei den Mathematikern allgemein Anerkannte ist dabei nur, daß eine solche geometrische Sprechweise bei n und sogar bei unendlich vielen Variablen einen wirklichen Nutzen gewährt; die Sachen werden dadurch viel lebendiger, als wenn man bei abstrakt analytischen Ausdrücken bliebe, und man eignet sich bald eine gewisse Gewandheit im Gebrauche jener geometrischen Vorstellungen an, als ob man im R_n oder R_∞ zu Hause wäre. Was freilich in Wahrheit hinter dieser Erscheinung steckt, ob dabei gar eine natürliche Veranlagung des Menschen zu Tage tritt, die nur durch die Begrenztheit unserer Erfahrung für gewöhnlich allein in 2 und 3 Dimensionen ausgebildet wird, das mögen die Psychologen und Philosophen entscheiden!

Wenn ich Sie hier aber auch über die Rolle der Mathematik in der allgemeinen Kultur orientieren soll, so muß ich noch mit einem Worte die Wendung berühren, die diese mehrdimensionale Geometrie 1873 durch den Leip-

ziger Astronomen <u>Zöllner</u> erhielt; hier liegt einer der seltenen Fälle vor, daß eine mathematische Sprechweise ins allgemeine Bewußtsein überging – Redensarten mit der „vierten Dimension" gebraucht ja heutzutage jeder Mensch. Diese <u>Popularisierung der „vierten Dimension"</u> ging von Versuchen aus, die der Taschenspieler <u>Slade</u> Zöllner vormachte; Slade gab sich als spiritistischer Medium aus, das in direkten Verkehr mit den Geistern stünde, und seine Vorführungen bestanden unter anderem darin, daß er Gegenstände verschwinden und wieder auftauchen ließ. Zöllner glaubte an diese Experimente und stellte zu ihrer Erklärung eine physikalisch-metaphysische Theorie auf, die jene Verbreitung erlangt hat: Für das wirkliche physikalische Geschehen soll ein vier- oder mehrdimensionaler Raum in Betracht kommen, von dem wir kraft unserer Veranlagung aber nur einen dreidimensionalen Ausschnitt $x_4 = 0$ wahrnehmen können; ein besonders veranlagtes Medium, das etwa mit außerhalb dieses unseres Raumes lebenden Wesen in Verbindung steht, kann beliebig Gegenstände aus ihm entfernen, die uns dann unsichtbar werden, oder sie wieder zurückbringen. Man macht sich diese Verhältnisse gern am Bilde von Wesen klar, die an eine zweidimensionale Fläche gebunden sind und nur innerhalb dieser ihre Wahrnehmungen machen können; man denke z. B. an die Lebensweise gewisser Tiere, wie der Milben. Nimmt man aus der Fläche, in der diese Wesen leben, einen Gegenstand fort, so scheint er für sie, (so denkt man sich die Sache) gänzlich zu verschwinden, und ganz analog stellt sich Zöllner Slates Experimente vor. Man hat sich vielfach die Existenz dieser zweidimensionalen Wesen näher ausgemalt; besonders amüsant ist das in einer anonym erschienenen englischen Schrift „Flatland" [1] geschehen. Da schildert der Autor ganz genau das Aussehen einer zweidimensionalen Welt; die einzelnen Wesen unterscheiden sich durch ihre geometrische Gestalt, die um so komplizierter ist, je höher organisiert sie sind. Reguläre Polygone sind die höchsten Wesen, die Frauen, von denen der Autor eine sehr geringe Meinung hat, haben einfach die Gestalt eines Striches, und so geht das weiter.

Ich brauche hier wohl nicht ausdrücklich auszuführen, daß die mathematisch aufgefaßte mehrdimensionale Geometrie mit Zöllners metaphysischen Betrachtungen nichts zu schaffen hat; die Mathematik erweist sich hier, um ein modernes Wort zu gebrauchen, als reine

1) A romance of many dimensions. By a Square. London 1884. Der Autor verfolgt hier im Grunde den Zweck, die Möglichkeit einer mehrdimensionalen Geometrie begreiflich zu machen.

normative Wissenschaft, die die formal möglichen Verknüpfungen der Dinge betrachtet und ganz unabhängig von naturwissenschaftlichen oder metaphysischen Ereignissen besteht.

Nach diesem Exkurs möchte ich nun noch etwas näher auf die höheren Gebilde eingehen, die sich als Erzeugnisse der Graßmannschen Elementargebilde – insbesondere der Vektoren – den im Vorangehenden aufgeführten Erzeugnissen von Punkten, Ebenen et c. an die Seite stellen lassen. Wir kommen hier zu der weiteren Ausgestaltung der eigentlichen Vektoranalysis, die namentlich durch Hamilton ja eines der wertvollsten Instrumente der Mechanik und Physik geworden ist; ich lege Ihnen Hamiltons in Deutsche übertragene „Elemente der Quaternionen" [1] sowie die „Vektor Analysis" [2] des gleichfalls sehr verdienten Amerikaners J. W. Gibbs hier vor.

Der neue Gedanke, der hier namentlich zu den uns schon bekannten Begriffsbildungen von Vektor und Skalar hinzukommt, ist der, diese Größen an die Punkte des Raumes anzuknüpfen: Man ordnet jedem Raumpunkte $(x \mid y \mid z)$ einen bestimmten Skalar zu:

$$S = f(x, y, z),$$

1) Deutsch von P. Glan. 2 Bde. Leipzig 1882/84.
2) Ed. by E. B. Wilson. New-York 1901.

und spricht dann von einem *Skalarfeld*; andererseits heftet man jedem Raumpunkte einen bestimmten Vektor an:

$$\mathfrak{X}=\varphi(x,y,z), \quad \mathfrak{Y}=\chi(x,y,z), \quad \mathfrak{Z}=\psi(x,y,z)$$

und nennt das ein *Vektorfeld.*

Hierdurch sind zwei der wichtigsten geometrischen Grundbegriffe bezeichnet, die man in der modernen Physik überall benutzt; es genügt wohl, wenn ich durch ganz wenige Stichproben an ihre große Verbreitung erinnere: Die Dichte einer *Massenverteilung*, die *Temperatur*, die *potentielle Energie* eines kontinuierlich ausgedehnten Systemes, immer als Funktion des Ortes aufgefaßt, sind Beispiele von Skalarfeldern. Das *Kraftfeld*, in dem an jedem Punkte eine bestimmte Kraft angreift, ist das typische Beispiel eines Vektorfeldes; weitere Beispiele sind in der Elastizitätslehre das *Feld der Verschiebungen* eines deformierten Körpers, wo jedem Punkte die Strecke seiner Verschiebung zugehört, ähnlich in der Hydrodynamik das *Geschwindigkeitsfeld*, endlich in der Elektrodynamik das *elektrische und magnetische Feld*, in dem jedem Punkte ein bestimmter elektrischer und ein magnetischer Vektor zugeordnet ist.

Hamilton hat nun gezeigt, wie man diese Felder in einfachster Weise den Methoden der Differential- und Integralrechnung zugänglich machen kann.

Dabei ist die eine zu Grunde liegende Bemerkung, daß die *Differentiale*

$$dx, \quad dy, \quad dz,$$

deren Verhältnisse eine Fortschreitungsrichtung durch einen Raumpunkt bestimmen, einen *freien Vektor* darstellen, d. h. *daß sie sich bei Koordinatentransformationen wie Vektorkomponenten verhalten.* Das folgt leicht daraus, daß sie durch Grenzübergang aus den Koordinaten einer kleinen Strecke durch den Punkt x, y, z entstehen.

Wichtiger, aber auch schwerer aufzufassen, ist die zweite Bemerkung, *daß auch die Symbole der partiellen Differentiation $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ den Charakter von Vektorkomponenten haben*, d. h. daß beim Uebergang zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensysteme x', y', z' die neuen Symbole $\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}$ sich aus den alten ergeben wie die transformierten Koordinaten eines Vektors (und zwar eines *polaren* Vektors).

Das soll sogleich deutlicher werden, wenn wir es etwa für eine Drehung des Koordinatensystemes

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{cases}$$

wirklich durchrechnen. Diese Drehungsformeln sind, wie wir früher ausführlich darlegten (S. 94), dadurch charakterisiert, daß ihre Auflösung einfach durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen des Koeffizientensystems gegeben wird:

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' . \end{cases}$$

Haben wir nun irgend eine Funktion von x, y, z, so können wir sie mittels (2) auch als Funktion von x', y', z' darstellen, und nach den bekannten Regeln partieller Differentiation wird

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y'}$$
$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z'} .$$

Die Ableitungen von x, y, z nach x', y', z' kann man sofort aus (2) entnehmen und erhält:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} + c_1 \frac{\partial}{\partial z}$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + c_2 \frac{\partial}{\partial z}$$
$$\frac{\partial}{\partial z'} = a_3 \frac{\partial}{\partial x} + b_3 \frac{\partial}{\partial y} + c_3 \frac{\partial}{\partial z} ,$$

und der Vergleich mit (1) ergibt in der Tat Uebereinstimmung mit den Transformationsformeln der Punktkoordinaten, also auch der Vektorkomponenten.

Eine wesentlich einfachere Rechnung würde ebenso

zeigen, daß bei Verschiebung des Koordinatensystems die 3 Symbole sich überhaupt nicht ändern, daß sie bei Inversion aber das Vorzeichen wechseln, womit die Behauptung bewiesen ist. Freilich haben wir dabei Maßstabänderungen nicht berücksichtigt, d.h. auf die Dimension keine Rücksicht genommen; tun wir das noch, so ergibt sich, daß unsere Symbole die Dimension -1 haben, da die Differentiale der Koordinaten im Nenner auftreten.

Mit diesem Hamiltonschen Vektorsymbol $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ wollen wir nun die Operationen vornehmen, die wir früher mit Vektoren vorgenommen haben. Ich schicke die Bemerkung voraus, daß man das Resultat der Anwendung der Operation $\frac{\partial}{\partial x}$ auf eine Funktion $f(x, y, z)$, also $\frac{\partial f}{\partial x}$, symbolisch als Produkt von $\frac{\partial}{\partial x}$ und f bezeichnen kann, da die formalen Gesetze der Multiplikation, soweit sie für das folgende in Betracht kommen, insbesondere die Distributivität mit der Addition $\left(\frac{\partial(f+g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)$ für diese Zusammensetzung gelten.

Es sei nun ein Skalarfeld $\varphi = f(x, y, z)$ gegeben, und wir wollen im soeben festgelegten Sinne diesen Skalar mit den Komponenten der Hamiltonschen Vektorsymbols multiplizieren, d.h. wir bilden den Vektor

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} .$$

Wir haben früher gesehen (S. 111), daß das Produkt eines Skalars in einen Vektor wiederum ~~wieder~~ ein Vektor ist, und da beim Beweise dieses Satzes nur solche Eigenschaften der Multiplikation heranzuziehen sind, die bei unserer symbolischen Multiplikation auch bestehen, folgt, daß jene 3 partiellen Ableitungen des Skalarfeldes einen Vektor definieren, der noch vom Punkt x, y, z abhängt, also ein Vektorfeld; dieses Vektorfeld hängt mit dem Skalarfeld in einer vom speziell gewählten Koordinatensysteme unabhängigen Weise zusammen. Man nennt dieses Vektorfeld, noch mit negativem Zeichen versehen, mit einem aus der Meteorologie stammenden Worte den Gradienten des Skalarfeldes. So finden Sie z. B. in den bekannten Wetterkarten der Zeitungen als Skalarfeld S den Luftdruck an jedem Orte dargestellt, indem die Kurven S = Const. ausgezogen und die zugehörigen Werte v. S angeschrieben sind; der Gradient gibt dann die Richtung der schnellsten Abnahme des Luftdruckes an und zeigt stets normal zu jenen Niveaukurven.

Aus 3 Vektorkomponenten X, Y, Z kann man nun stets (vgl. S. 111) einen Skalar $X^2 + Y^2 + Z^2$ bilden; danach erhalten wir hier aus dem Gradienten eines Skalars ein neues Skalarfeld

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

das mit jenem und daher auch mit dem ursprünglichen Skalarfelde in einer vom Koordinatensysteme unabhängigen Weise zusammenhängen muß; dieser Skalar ist bekanntlich gleich dem Quadrat der Länge des Gradienten oder, wie man sagt, gleich dem Quadrat des Gefälles des Skalarfeldes f.

Unter Anwendung desselben Satzes wollen wir weiter aus dem Vektorsymbol $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ selbst einen symbolischen Skalar bilden, indem wir jede Komponente symbolisch mit sich selbst multiplizieren, d. h. die durch sie bezeichnete Operation zweimal anwenden. Das gibt dann die Operation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

die also skalaren Charakter hat, d. h. bei Koordinatentransformationen invariant bleibt. „Multiplizieren" wir dieses skalare Symbol mit einem Skalarfeld f, so ergibt sich notwendig wieder ein Skalarfeld:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

das mit jenem ersten in einer vom Koordinatensysteme unabhängigen Weise zusammenhängt. Denkt man sich im Feld eine Flüssigkeit strömen, deren Dichte anfänglich gleich 1 ist und deren Geschwindigkeit an jedem Orte durch den Gradienten von f gegeben sein soll, so nimmt an jeder Stelle im ersten Zeitmoment dt die

Dichte der Flüssigkeit um einen Betrag zu, der gleich jenem Skalar multipliziert mit $d\,t$ ist. Man nennt daher $-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$ die <u>Divergenz des Gradienten von f.</u>

Man bezeichnete früher nach einer von <u>Lamé</u> herrührenden Ausdrucksweise ein Skalarfeld $S = f(x, y, z)$ auch wohl als eine <u>Punktfunktion</u> <u>(fonction de point)</u> und nannte dann das erste damit verbundene Skalarfeld $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ den <u>ersten Differentialparameter</u>, das zweite $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ den <u>zweiten Differentialparameter</u>. –

Wir wollen nun in ähnlicher Weise unser Vektorsymbol $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ mit einem gegebenen <u>(polaren) Vektorfelde</u>

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \chi(x, y, z), \quad Z = \psi(x, y, z)$$

kombinieren, und zwar mit Hilfe der beiden Arten von Multiplikation zweier Vektoren, die wir kennen gelernt haben:

a.) Durch <u>innere Multiplikation</u> entsteht ein Skalar, der hier bei der bereits geläufigen Deutung der symbolischen Multiplikation mit $\frac{\partial}{\partial x}$ heißen wird:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} .$$

Er ist natürlich wiederum von x, y, z abhängig, stellt also ein <u>skalares Feld</u> dar, das mit dem gegebenen Vektorfelde in einer vom Koordinatensysteme unabhängigen Beziehung steht; er heißt in dem vorhin definierten Sinne seine <u>Divergenz</u>.

b.) Die <u>äußere Multiplikation</u> liefert die Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} ,$$

deren drei Determinanten zu lesen sind als:

$$\underline{\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}} .$$

Sie definieren nach dem früheren eine <u>Plangröße</u> oder einen <u>axialen Vektor</u> bezw. ein <u>axiales Vektorfeld</u>, und der Zusammenhang der beiden Vektorfelder ist wieder unabhängig von der Wahl des Koordinatensystemes. Nach Maxwell nennt man dieses Vektorfeld den <u>Curl</u> des gegebenen, wofür man jetzt in Deutschland wohl auch das auf die gleiche germanische Wurzel zurückgehende deutsche Wort <u>Quirl</u> gebraucht; gelegentlich sagt man dafür auch wohl <u>Rotor</u>. –

So haben wir jetzt durch <u>systematische geometrische Untersuchung</u> alle die Größen erhalten, die der Physiker bei seinen Untersuchungen der verschiedensten Vektorfelder stets zur Hand haben muß. Es ist <u>reine Geometrie</u>, was wir hier treiben; das muß ich um so mehr betonen, als man diese Dinge vielfach als zur Physik gehörig ansieht und sie demgemäß in den physikalischen, statt in den geometrischen Büchern und Vorlesungen behandelt. Das ist aber sachlich durchaus unbegründet und nur als ein Residuum der historischen Entwicklung zu verstehen; denn die Physik musste sich hier seiner Zeit erst das Rüstzeug schaffen, das sie notwendig brauchte und in der Mathematik nicht fertig vorfand.

Es waltet hier dasselbe Missverständnis ob, auf das ich Sie schon im vorigen Semester auf dem Gebiete der Analysis mehrfach aufmerksam machen musste. Die Physik hat im Laufe der Zeit allerlei mathematische Bedürfnisse entwickelt und dadurch der mathematischen Wissenschaft vielfach äusserst wertvolle Anregungen gegeben. Der mathematische Unterricht aber, so wie er besonders auf Schulen noch meist erteilt wird, berücksichtigt diese Aenderungen nicht; er geht in den alten seit Jahrhunderten eingefahrenen Gleisen weiter fort und überlässt es der Physik, sich ihre Hilfsmittel mühsam selbst zurechtzumachen, obwohl ihm deren mathematische Verarbeitung vielfach einen viel geeigneteren Stoff abgeben würde als die herkömmlichen Gegenstände. Sie sehen, meine Herren, auch im geistigen Leben gibt es ein Trägheitsgesetz; alles geht auf seiner alten Bahn geradlinig weiter und jeder Aenderung, jedem Uebergang auf neue moderne Wege wird ein grosser Widerstand entgegengesetzt. –

Ich verlasse damit den ersten Hauptteil, der uns die verschiedensten Arten geometrischer Gebilde, die

Objekte der Geometrie, kennen gelehrt hatte. Nunmehr soll uns eine besondere Methode beschäftigen, die für die genauere Erforschung dieser Gebilde von grösster Bedeutung ist.