I. Eigentliche Moebiussche Dreiecke:

1.) 0 Seiten überstumpf; 0 Winkel überstumpf.
2.) 1 Seite " " ; 2 anliegende Winkel " " .
3.) 2 Seiten " " ; 1 eingeschlossener Winkel " " .
4.) 3 Seiten " " ; 3 Winkel " " .

II. Uneigentliche Moebiussche Dreiecke:

1.) 0 Seiten überstumpf; 3 Winkel überstumpf.
2.) 1 Seite " " ; 1 gegenüberlieg. Winkel " " .
3.) 2 Seiten " " ; 2 gegenüberlieg. Winkel " " .
4.) 3 Seiten " " ; 0 Winkel " " .

Andere als die hier aufgezählten Fälle gibt es nicht, sodaß damit in der Tat über die Art jeder Moebiusschen Dreiecks entschieden ist.

Der Übergang zum allgemeinen Dreieck $a, \ldots \alpha, \ldots$ vom zugehörigen reduzierten aus wird nach dem oben Gesagten vermittelt durch Formeln von der Art:

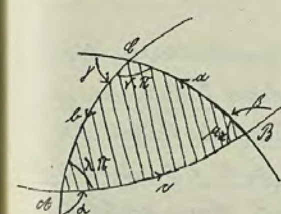
$$a = a_0 + n_1 \cdot 2\pi, \quad b = b_0 + n_2 \cdot 2\pi, \quad c = c_0 + n_3 \cdot 2\pi,$$
$$\alpha = \alpha_0 + r_1 \cdot 2\pi, \quad \beta = \beta_0 + r_2 \cdot 2\pi, \quad \gamma = \gamma_0 + r_3 \cdot 2\pi,$$

und es gilt nun der Satz: Je nachdem die Summe der 6 ganzen Zahlen $n_1 + n_2 + n_3 + r_1 + r_2 + r_3$ gerade oder ungerade ist, behält das allgemeine Dreieck den Charakter des reduzierten Dreiecks als eigentliches oder uneigentliches oder es wechselt ihn. Danach ist die Art eines jeden Dreiecks bestimmt. –



Ich schließe diesen Abschnitt mit einigen Erörterungen über den Flächeninhalt sphärischer Dreiecke. Davon ist in den Studyschen Untersuchungen und auch in der Darstellung von Weber-Wellstein garnicht die Rede; wohl aber kommt dieser Begriff in meinen älteren funktionentheoretischen Untersuchungen über Kreisbogendreiecke zur Geltung. Während bisher das Dreieck nichts als der Inbegriff dreier nur den Cosinus- und Sinus-Sätzen genügenden Winkel und Seiten war, handelt es sich da um bestimmte von diesen Seiten begrenzte Flächenstücke, gewissermaßen um Membrane, die zwischen den drei Seiten mit passenden Winkeln eingespannt sind.

Freilich wird es dabei nicht mehr angebracht sein, die „Außenwinkel" $\alpha, \beta, \gamma$ des Dreiecks in Betracht zu ziehen, wie wir das bisher aus Symmetriegründen taten, sondern wir werden von denjenigen Winkeln reden, die die Membran selbst an den Eckpunkten bildet, und die




wir kurzweg Innenwinkel des Dreiecks nennen wollen; ich bezeichne sie, wie ich es gewohnt bin, mit $\lambda.\pi, \mu.\pi, \nu.\pi$. Auch diese Winkel können unmittelbar als unbeschränkt variable, nur positive Größen angesehen werden, da wir Windungspunkte in den Ecken der Membran nicht ausschließen wollen. Analog seien die absoluten Längen der Seiten mit $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ bezeichnet, die gleichfalls unbeschränkt positiv variable Größen sind. Aber jetzt dürfen nicht mehr, wie früher, alle Seiten und Winkel unabhängig von einander sich beliebig oft „überschlagen", d. h. beliebige additive Vielfache von $2\pi$ enthalten, sondern die Tatsache, daß eine einzige zusammenhängende Membran mit diesen Seiten und Winkeln existiert, drückt sich in gewissen Relationen zwischen den Überschlagungszahlen aus, die ich in meiner Arbeit „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe" (Mathem. Annalen 37; 1888) Ergänzungsrelationen der sphärischen Trigonometrie genannt habe. Sie lauten, wenn $E(x)$ die größte in $x$ enthaltene positive ganze Zahl bezeichnet ($E(x) \leq x$):

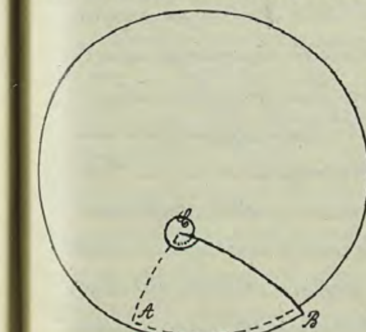
$$E\left(\frac{l}{2}\right) = E\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right)$$
$$E\left(\frac{m}{2}\right) = E\left(\frac{-\lambda+\mu-\nu+1}{2}\right)$$
$$E\left(\frac{n}{2}\right) = E\left(\frac{-\lambda-\mu+\nu+1}{2}\right),$$

und da $E\left(\frac{l}{2}\right)$ z. B. die in der Seite $l \cdot \pi$ enthaltenen Vielfachen von $2\pi$ angibt, so bestimmen diese Relationen gerade die fraglichen Überschlagungszahlen der Seiten $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$, wenn man die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ einschließlich ihrer Überschlagungszahlen kennt. Man sieht ins-



besondere leicht ein, daß bei positiven $\lambda$, $\mu$, $\nu$ höchstens eine der 3 Zahlen $\lambda-\mu-\nu$, $-\lambda+\mu-\nu$, $-\lambda-\mu+\nu$ positiv sein kann; also kann auch nur eines der 3 Argumente der rechten Seiten größer als 1 sein, und da $E(x) = 0$ für $x < 1$, ist nur eine der 3 Seitenüberschlagungszahlen von Null verschieden. Es kann sich also bei einer Dreiecksmembran höchstens eine Seite und zwar die dem größten Winkel gegenüber liegende, überschlagen ($> 2\pi$ sein).

Was den Beweis dieser Ergänzungsrelationen angeht, so verweise ich auf meine autographierte Vorlesung „Über die hypergeometrische Funktion"[1]; da ist übrigens ebenso wie in der Arbeit in Annalen 37 der Ansatz wesentlich weiter gefaßt, als ich es hier angebe, indem solche „sphärischen Dreiecke" betrachtet werden, die von beliebigen nicht notwendig größten Kreisen begrenzt werden. Ich will hier nur mit einem Worte den Gedankengang des Beweises




charakterisieren. Man geht von einem elementaren Dreieck aus, in das sich sicher eine Membran einspannen läßt, und gewinnt aus ihm sukzessive die allgemeinsten zulässigen Membrangestalten, indem man in geeigneter Weise wiederholt kreisförmige Membranscheiben mit Verzweigungspunkten an den Ecken einhängt. Die

[1] W.-S. 1893/94. Ausgearb. v. E. Ritter. – Neudruck. Leipzig 1906, pag. 384 ff.

Figur zeigt als Beispiel – in stereographischer Projektion gedacht – ein Dreieck $A\,B\,C$, das aus einem elementaren durch Einhängung der einen vom größten Kreise $A\,B$ begrenzten Halbkugel entsteht, wodurch denn sowohl die Seite $A\,B$, als der Winkel bei $C$ sich einmal überschlägt; man sieht, daß bei diesem Prozeß die Ergänzungsrelationen erhalten bleiben, und findet schließlich ebenso, daß sie auch für die allgemeinste, durch solche Prozesse aufzubauende Dreiecksmembran gelten.

Wir müssen nun noch genau zusehen, wie sich diese Dreiecke, die der Ergänzungsrelation genügen, in die vorher besprochene allgemeine Theorie einordnen. Sie sind offenbar nur Spezialfälle, da doch im allgemeinen die Überschlagungszahlen der Seiten und Winkel ganz beliebig sind, Spezialfälle, die eben durch die Möglichkeit des Einspannens einer Membran charakterisiert sind. Man kann freilich hier zunächst stutzig werden: Wir haben ja gesehen, daß alle eigentlichen Dreiecke – die auch keineswegs sämtlich den Ergänzungsrelationen zu genügen brauchen – ein Kontinuum bilden, und daß man daher jedes von ihnen durch kontinuierlichen Übergang aus einem Elementardreieck herleiten kann; man sollte doch meinen, daß die in das Elementardreieck einzuspannende Membran dabei nicht verloren gehen kann. Die Aufklärung dieser Schwierigkeit ergibt sich erst, wenn man



auch auf Flächeninhalte das Moebiussche Prinzip der Vorzeichenbestimmung ausdehnt; danach ist dann eine Fläche positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem man sie im positiven (entgegen dem Uhrzeiger) oder negativen Sinne umläuft. Begrenzt ein sich selbst durchdringender Kurvenzug mehrere Flächenstücke, so ist als ganze von ihm begrenzte Fläche demgemäß die algebraische Summe der einzelnen umlaufenen Teile zu rechnen: in Figur 1 z. B. die Differenz, in Fig. 2 die Summe von den durch verschiedene Schraffierung unterschiedenen Teilen. Diese Festsetzungen sind natürlich lediglich der geometrische Ausdruck von dem, was die analytische Definition des Flächeninhalts von selbst liefert.

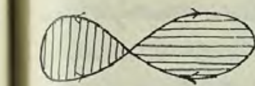


Fig. 1.

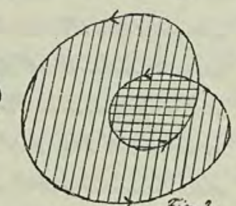
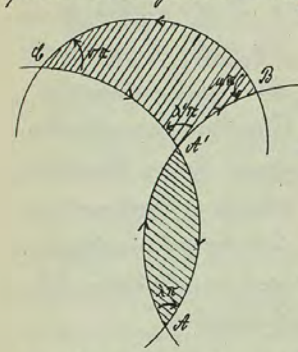


Fig. 2.

Wenden wir dies speziell auf Kreisbogendreiecke an, so zeigt sich in der Tat, daß man einem jeden eigentlichen Dreieck einen Flächeninhalt auf der Kugel zuordnen kann, dessen einzelne Teile nur bei einmaliger Durchlaufung des Dreiecksumfanges teils positiv, teils negativ umlaufen werden, und daher auch mit verschiedenen Vorzeichen in Rechnung zu stellen sind. Die Dreiecke, für die die Ergänzungsrelation gilt, haben alsdann nur das Besondere, daß sie aus einem einzigen im positiven Sinne umlaufenen Membranstück bestehen; diese Eigenschaft verleiht ihnen gerade für die funktionentheoretischen Zwecke, zu denen ich sie früher brauchte, ihre große Bedeutung.

Ich will diese Sachlage nun noch an einem Beispiele näher erläutern. Wir betrachten das in der Figur in stereographischer Projektion dargestellte Dreieck $A\,B\,C$, wo $A$ der von dem Bogen $B\,C$ entferntere Schnittpunkt der größten Kreise $B\,A$, $C\,A$ ist, deren zweiter Schnitt $A'$ heiße.




Überträgt man die allgemeinen Definitionen der Außenwinkel (S. 394) auf ihre Supplemente, die Innenwinkel, so findet man, daß $\mu\pi$ und $\nu\pi$ die Drehung der Dreiecksseite $B\,C$ in $B\,A$ und der $C\,A$ in $C\,B$ messen, und daher in unserem Falle positiv sind; ebenso mißt $\lambda\pi$ die Drehung von $A\,B$ in $A\,C$ und ist daher negativ; wir setzen $\lambda = -\lambda'$, $\lambda' > 0$. Das Dreieck $A'\,B\,C$ bildet dann offenbar ein Elementardreieck mit den Winkeln $\lambda'\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, die sämtlich positiv sind. Umlaufen wir nun den Dreiecksumfang $A\,B\,C$ im angegebenen Sinne, so wird das Elementardreieck $A'\,B\,C$ im positiven, das Kugelzweieck $A\,A'$ aber in negativem Sinne umlaufen, und wir werden als Flächeninhalt des Dreiecks



nach den Moebiusschen Festsetzungen die Differenz dieser beiden Flächenstücke zu rechnen haben. Diese Zerspaltung der Dreiecksmembran in einen positiven und einen negativen Teil, kann man sich gemäß dem Umlaufssinn der Begrenzung anschaulich vielleicht so vorstellen, daß die Membran bei $A'$ tordiert ist, so daß in dem unteren Zweieck die negativ zu rechnende Rückseite zum Vorschein kommt. Es ist leicht, sich hiernach kompliziertere Beispiele zu bilden.

Ich will nun endlich an demselben Beispiele noch zeigen, daß bei dieser allgemeinen Auffassung des Flächeninhalts die elementare Inhaltsformel der sphärischen Trigonometrie bestehen bleibt. Bekanntlich wird der Inhalt eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ auf der Kugel vom Radius 1 angegeben durch den sog. „sphärischen Excess" $(\lambda+\mu+\nu-1)\pi$, wofern $\lambda, \mu, \nu > 0$. Wir wollen uns nun klar machen, daß diese Formel auch für unser Dreieck $A\,B\,C$ richtig bleibt. Zunächst ist nämlich der Inhalt des Elementardreiecks $A'\,B\,C$ sicherlich $(\lambda'+\mu+\nu-1)\pi$; davon haben wir abzuziehen den Inhalt des Kugelzweiecks $A\,A'$ von der Winkelöffnung $\lambda'\pi$, der gleich $2\lambda'\pi$ ist (da der Inhalt eines Kugelzweiecks proportional seinem Winkel ist und für den Winkel $2\pi$ – die Vollkugel – den Wert $4\pi$ erhält.) Wir erhalten also als Inhalt von $A\,B\,C$ in der

Tat:

$$(\lambda' + \mu + \nu - 1)\pi - 2\lambda'\pi = (-\lambda' + \mu + \nu - 1)\pi = \underline{(\lambda + \mu + \nu - 1)\pi}.$$

In ähnlicher Weise würde sich nun wahrscheinlich, wenn man in ein allgemeines eigentliches Dreieck mit beliebigen Winkeln und Seiten passend eine mehrteilige Membran einzuspannen versucht und auf Grund der Vorzeichenregel den Inhalt als algebraische Summe der einzelnen Teile bestimmt, die allgemeine Gültigkeit der Inhaltsformel $(\lambda + \mu + \nu - 1)\pi$ ergeben, wobei natürlich $\lambda\pi, \ldots$ als wirkliche Winkel der Membran, nicht etwa wie früher als Außenwinkel anzusehen sind. Die hiermit verlangte Untersuchung ist nun freilich noch nicht ausgeführt, sie bietet aber gewiß keine sehr großen Schwierigkeiten, und ich würde sehr wünschen, daß sie angestellt würde. Besonders wichtig wäre es dabei, die Rolle der uneigentlichen Dreiecke zu klären.

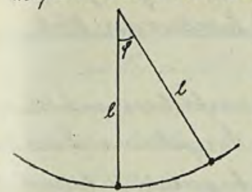
Damit verlasse ich die Trigonometrie und wende mich der zweiten wichtigen Anwendung der goniometrischen Funktionen zu, die auch in den Bereich der Schule fällt:

## B. Lehre von den kleinen Schwingungen, insbesondere Pendelschwingungen.

Ich erinnere zunächst in Kürze an die Ableitung des Pen-



delgesetzes, die wir auf der Universität unter Benutzung der Infinitesimalrechnung zu geben pflegen. Ein Pendel hänge




an einem Faden von der Länge $l$, sein Ausschlagswinkel aus der Gleichgewichtslage sei $\varphi$. Da die vertikal abwärts gerichtete Schwerkraft $g$ wirkt, so schließt man aus den Grundgleichungen der Mechanik leicht, daß die Bewegung des Pendels durch die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

bestimmt wird. Für kleine Ausschläge können wir mit hinreichender Annäherung $\sin\varphi$ durch $\varphi$ ersetzen, und erhalten dann für die sog. unendlich kleinen Pendelschwingungen:

$$(2) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung wird nun bekanntlich durch Kreisfunktionen gegeben, die hier also, wie früher schon betont, gerade vermöge ihrer Differentialeigenschaften hineinspielen (auf das trigonometrische Auftreten des $\sin\varphi$ in (1) kommt es nicht an), und zwar ist das allgemeine Integral

$$\varphi = A\sin\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t + B\cos\sqrt{\tfrac{g}{l}}\cdot t,$$

wo $A$, $B$ willkürliche Konstante sind, oder unter Einführung geeigneter neuer Konstante $C$, $t_0$:

$$(3) \qquad \varphi = C \cdot \cos \sqrt{\tfrac{g}{l}}\,(t - t_0)\,,$$

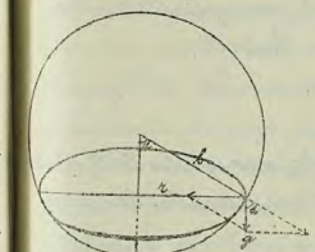
wo $C$ die Amplitude, $t_0$ die Phase der Schwingung heißt; für die Dauer einer Schwingung folgt hieraus der Wert $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Ganz anders aber, als bei diesen einfachen und klaren Betrachtungen, die sich bei näherem Eingehen auf die Sache natürlich auch durchaus anschaulich gestalten lassen, sieht die Behandlung des Pendelgesetzes im Schulunterricht aus, die man die „elementare" nennt. Da will man ja die konsequente Infinitesimalrechnung unter allen Umständen vermeiden, während die Physik gerade hier durch die innerste Natur ihrer Probleme die Verwendung von Infinitesimalmethoden gebieterisch fordert; also verwendet man ad hoc erfundene Verfahren, die Infinitesimalgedanken enthalten, ohne sie beim richtigen Namen zu nennen. Natürlich wird ein solcher Aufbau äußerst kompliziert, wenn er wirklich exakt sein soll; daher trägt man ihn denn tatsächlich vielfach so lückenhaft vor, daß von einem Beweise des Pendelgesetzes eigentlich kaum mehr die Rede sein kann. So entsteht dann die kuriose Erscheinung, daß ein und derselbe Lehrer in der einen Stunde – der Mathematik – an die logische Exaktheit der Schlüsse die allerhöchsten Anforderungen stellt, denen nach seiner noch von der Tradition des 18. Jahrhunderts abhängigen Meinung



die Infinitesimalrechnung nicht genügt, in der nächsten Stunde aber – der Physik – zu den anfechtbarsten Schlüssen, zur kühnsten Verwendung des Unendlichkleinen greift.

Lassen Sie mich zur näheren Erläuterung kurz den Gedankengang einer solchen elementaren Ableitung der Pendelgesetzes darstellen, die in der Tat in Lehrbüchern und im Unterricht verwendet wird. Man geht hier aus von dem konischen Pendel, das ist ein räumlicher Pendel, das sich speziell mit gleichförmiger Geschwindigkeit $v$ auf einem Kreise um die Vertikale als Achse bewegen soll, so daß der Pendelfaden einen Kreiskegel beschreibt; das ist die Bewegung, die die Mechanik als reguläre Praezession bezeichnet.



Die Möglichkeit einer solchen Bewegung nimmt man nun auf der Schule natürlich als durch das Experiment gegeben an und fragt nur noch nach der bei ihr obwaltenden Beziehung zwischen Geschwindigkeit $v$ und dem konstanten Pendelausschlage $\varphi = \alpha$ (Öffnungswinkel des vom Faden beschriebenen Kegels).

Dabei bemerkt man zunächst, daß das Pendel einen Kreis vom Radius $r = l \sin \alpha$ beschreibt, wofür man $r = l \cdot \alpha$ setzen kann, wenn $\alpha$ hinreichend klein genommen wird.

Nun spricht man von der <u>Zentrifugalkraft</u> und leitet die Formel her, daß dieser mit der Geschwindigkeit $v$ umlaufende Punkt die Zentrifugalkraft

$$\frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l \cdot \alpha}$$

ausübt, der zur Aufrechterhaltung der Bewegung eine gleiche, nach dem Mittelpunkt der Kreisbahn hin gerichtete <u>Zentripetalkraft</u> entgegenwirken soll. Als solche kommt aber die in der Kreisebene gelegene Komponente $g \cdot \operatorname{tg} \alpha$ der Schwerkraft in Betracht (vgl. Fig.), wofür man $g \cdot \alpha$ setzen kann, wenn $\alpha$ genügend klein ist; wir erhalten also die gewünschte Beziehung in der Gestalt:

$$\frac{v^2}{l\alpha} = g \cdot \alpha, \text{ oder}$$

$$\underline{v = \alpha \sqrt{g \cdot l}}\ .$$

Die Schwingungsdauer $T$ des Pendels, das ist die Zeit, in der die ganze Kreisperipherie $2\pi r = 2\pi l \alpha$ durchlaufen wird, ergibt sich daher als:

$$\underline{T = \frac{2\pi l \alpha}{v}} = \underline{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}\ ,$$

<u>d. h. das konische Pendel führt – bei hinreichend kleinem Ausschlage $\alpha$ – eine reguläre Präzession von dieser bestimmten von $\alpha$ unabhängigen Dauer aus.</u>

Wollen wir bereits diesen Teil der Ableitung kurz kritisieren, so können wir zunächst die Zulässigkeit der Ersetzung von $\sin \alpha$ und $\operatorname{tg} \alpha$ durch $\alpha$ selbst zugestehen, die wir ja auch in unserer exakten Ableitung (S. 415) brauchten;

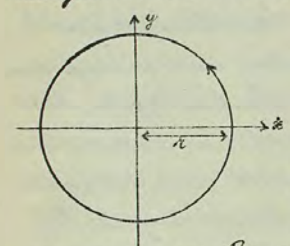


denn sie bewirkt gerade den <u>Übergang von „endlichen" zu „unendlich kleinen" Schwingungen</u>. Hingegen ist darauf hinzuweisen, daß die für die Zentrifugalkraft benutzte Formel „elementar" nur durch allerlei Vernachlässigungen abgeleitet werden kann, deren Berechtigung korrekt eben in der Differentialrechnung begründet liegt. Die <u>Definition der Zentrifugalkraft</u> erfordert nämlich im Grunde sogar den Begriff des <u>zweiten Differentialquotienten</u>, und so muß denn die elementare Ableitung auch diesen einschmuggeln; dabei entstehen, indem man eben nicht klar und praezis aussprechen kann, um was es sich handelt, dem Verständnis die größten Schwierigkeiten, die bei Benutzung der Differentialrechnung gar nicht vorhanden wären. Ich brauche hier um so weniger ins Detail zu gehen, als ich Sie auf einige sehr lesenswerte Programmschriften des verstorbenen Realgymnasialdirektors <u>H. Seeger</u>[1] in Güstrow verweisen kann, in denen u. a. gerade die Herleitungen der Formel für die Zentrifugalkraft in einer unserm Standpunkte durchaus entsprechenden Weise eingehend kritisiert werden.

Nun ist die <u>Herleitung des Pendelgesetzes aber wohl</u>

1) Über die Stellung des hiesigen Realgymnasiums zu einem Beschlusse der letzten Berliner Schulkonferenz (Güstrow 1891, Schulprog. Nr. 649). Über die Stellung des hiesigen Realgymn. zu dem Erlaß des preußischen Unterrichtsministeriums von 1892. (1893, Nr. 653). Bemerkungen über Abgrenzung und Verwertung des Unterrichts in den Elementen der Infinitesimalrechnung (1894, Nr. 658).

keineswegs fertig. Wir haben erst die Möglichkeit einer gleichförmigen Bewegung auf einem Kreise erhalten; legen wir in die Ebene dieses Kreises (d. i. bei unseren Vernachlässigungen die Tangentialebene der Kugel) ein $x$-$y$-Koordinatensystem, so wird diese Bewegung in der Sprache der analytischen Mechanik dargestellt durch die Gleichungen:




$$(4)\quad \begin{cases} x = l\cdot\alpha\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0), \\ y = l\cdot\alpha\cdot\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0). \end{cases}$$

Wir wollen aber die ebenen Schwingungen der Pendels erhalten, d. h. der Pendelpunkt in unserer $x$-$y$-Ebene soll sich auf einer Geraden – der $x$-Achse – bewegen und seine Bewegungsgleichung muß lauten:

$$(5)\quad x = l\cdot\varepsilon\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0),\quad y = 0,$$

damit für den Ausschlagswinkel $\varphi = \frac{x}{l}$ die richtige Gleichung (3) herauskommt. Wir müssen also von den Gleichungen (4) zu (5) gelangen – wohlgemerkt, ohne von den dynamischen Differentialgleichungen Gebrauch machen zu können. Das macht man nun möglich, indem man das Prinzip der Überlagerung kleiner Schwingungen aufstellt, nach dem mit 2 Bewegungen $x, y$ und $x_1, y_1$ auch die Bewegung $x+x_1$, $y+y_1$ möglich ist. Man kann nun die links herum laufende Pendelbewegung (4) mit einer rechts herum laufenden



$$x_1 = l\cdot\alpha\cdot\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0)\qquad y_1 = -l\cdot\alpha\,\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t-t_0)$$

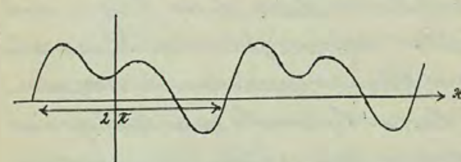
kombinieren; dann ist die Bewegung $x+x_1$, $y+y_1$, wenn man $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ wählt, in der Tat gerade die oszillierende Pendelbewegung (5), die wir ableiten wollten.

Bei einer Kritik dieser Betrachtungen kommt es natürlich vor allem darauf an, wie man das Superpositionsprinzip ohne Differentialrechnung begründen oder doch wenigstens plausibel machen will. Besonders bleibt auch immer der Skrupel bei diesen elementaren Darstellungen, ob die verschiedenen, der Reihe nach vorgenommenen Vernachlässigungen sich nicht schließlich zu einem merkbaren Fehler häufen können, selbst wenn jede einzeln zulässig ist. Näher brauche ich das aller wohl nicht auszuführen, denn diese Fragen sind ja durchweg so elementar, daß sie jeder von Ihnen allein wird durchdenken können, nachdem sie nur einmal angeregt sind. Lassen Sie mich zum Schluß nur noch ausdrücklich betonen, daß es sich hier um einen ganz zentralen Punkt der Unterrichtsprobleme handelt: Einmal tritt hier das Bedürfnis der Berücksichtigung der Infinitesimalrechnung klar zu Tage, dann aber auch die Notwendigkeit einer allgemeinen von der speziellen Dreiecksgeometrie unabhängigen Einführung der goniometrischen Funktionen, die solche allgemeine Anwendungen vorbereitet.

Ich komme nun endlich zur letzten Anwendung der goniometrischen Funktionen, von der ich hier sprechen will:

## C. Darstellung periodischer Funktionen durch Reihen goniometrischer Funktionen (trigonometrische Reihen).

Bekanntlich hat man in der Astronomie, in der mathematischen Physik hundertfach Gelegenheit, periodische Funktionen zu betrachten und der Rechnung zu unterwerfen, und da bietet jene Darstellung das hauptsächliche, ständig gebrauchte Hilfsmittel. Wir denken nur der Bequemlichkeit halber die Einheit so gewählt,




daß die gegebene periodische Funktion $y = f(x)$ die Periode $2\pi$ hat. Die Frage ist dann, ob man ein solches $f(x)$ durch ein Aggregat der Cosinus und Sinus der ganzzahligen Vielfachen von $x$ bis zum ersten, zweiten, ..., allgemein zum $n^{ten}$ hin mit passend gewählten konstanten Faktoren zweckmäßig approximieren kann, d. h. ob man nicht $f(x)$ mit einem hinreichend kleinen Fehler durch einen Ausdruck der Form



$$(1)\qquad \begin{aligned} S_n(x) = \frac{a_0}{2} &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx \end{aligned}$$

ersetzen darf. Den Faktor $\frac{1}{2}$ fügt man dem konstanten Gliede hinzu, um den später abzuleitenden Ausdruck für die Koeffizienten allgemein gültig zu machen.

Ich muß zunächst wieder Klage über die gewöhnliche Darstellung der Lehrbücher führen. Anstatt nämlich das soeben gestellte elementare Problem in den Vordergrund zu stellen scheint ihnen vielfach die daran anschließende theoretische Frage, ob man nicht durch eine unendliche Reihe $f(x)$ genau darstellen kann, das einzige zu sein, was überhaupt Interesse verdient; selbst bei Scheffers, dessen Sinn für elementare Darstellung ich neulich rühmte, ist es so. Eine rühmliche Ausnahme macht Runge in seiner „Theorie und Praxis der Reihen"[1]. Und doch ist jene theoretische Fragestellung an sich für die Praxis durchaus uninteressant, weil man dort selbstverständlich immer nur endlich viele und nicht einmal allzuviele Glieder summieren kann; darüber hinaus gestattet sie aber nicht einmal einen Rückschluß auf die praktische Verwendbarkeit: Man darf aus der Konvergenz einer Reihe keineswegs schließen, daß ihre ersten Glieder die Summe auch nur mit einiger Annäherung darstellen, ebenso wie

[1]) Samml. Schubert 32. Leipzig 1904.

auch umgekehrt die ersten paar Glieder divergenter Reihenentwicklungen zur praktischen Darstellung einer Funktion gut brauchbar sein können. Ich muß das besonders hervorheben, da derjenige, der nur die übliche Darstellung kennt und dann im physikalischen Praktikum etwa endliche trigonometrische Reihen wirklich anwenden muß, sich in der Regel wohl schließlich mit solchen ungenügenden Schlüssen selbst täuscht.

Noch merkwürdiger erscheint diese übliche Übergehung der endlichen trigonometrischen Reihen, wenn man bedenkt, daß sie schon seit langer Zeit vollständig behandelt sind, die maßgebenden Ansätze hat bereits der Astronom Bessel 1815 gemacht. Näheres über Geschichte und Literatur dieser Fragen finden Sie in dem Encyklopaediereferat von Burkhardt über „trigonometrische Interpolation" (Enc. II A 9, pag. 642 ff.). Übrigens stimmen die Formeln, um die es sich hier handelt, im wesentlichen mit den bei den üblichen Konvergenzbeweisen auftretenden überein, nur die Gedanken, die wir an sie anschließen, haben eine andere Färbung und sind geeignet, die Sache mehr in den Besitz des Praktikers zu bringen.

Ich wende mich nun zur näheren Behandlung unseres Ansatzes und habe zunächst über die zweckmäßigste Bestimmung der Koeffizienten $a$, $b$ bei vorgegebener Glie-



derzahl $n$ zu sprechen. Hierfür hat Bessel eine Idee herausgearbeitet, die an die Methode der kleinsten Quadrate anschließt. Der Fehler, den man macht, indem man $f(x)$ an der Stelle $x$ durch die Summe $S_n(x)$ der $2n+1$ trigonometrischen Funktionen ersetzt, ist $f(x) - S_n(x)$, und ein Maß für die Güte der Darstellung im ganzen Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ einer Periodenlänge der $f(x)$ wird die Summe aller Fehlerquadrate, also das Integral:

$$J = \int_0^{2\pi} \left(f(x) - S_n(x)\right)^2 dx$$

sein. Die zweckmäßigste Approximation von $f(x)$ wird also diejenige Summe $S_n(x)$ liefern, für die dieses Integral $J$ ein Minimum wird; aus dieser Forderung hat Bessel die $2n+1$ Koeffizienten $a_0, a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_n$ bestimmt. Notwendige Bedingungen für das Eintreten des Minimums sind aber, da wir $J$ als Funktion dieser $2n+1$ Größen $a_0, \dots b_n$ aufzufassen haben:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial J}{\partial a_0} = 0, \quad \dfrac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \quad \dots \quad \dfrac{\partial J}{\partial a_n} = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial J}{\partial b_1} = 0, \quad \dots \quad \dfrac{\partial J}{\partial b_n} = 0\,; \end{array} \right.$$

da $J$ eine quadratische wesentlich positive Funktion von $a_0, \dots b_n$ ist, sieht man hinterher leicht ein, daß die aus diesen $2n+1$ Gleichungen bestimmten Werte dieser Variablen ein wirkliches Minimum von $J$ liefern.

Differenzieren wir unter dem Integralzeichen, so geben die Gleichungen (2) über in

$$(2.') \begin{cases} \int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\,dx=0, \quad \int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\cos x\,dx=0, \ldots \int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\cos nx\,dx=0, \\ \int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\sin x\,dx=0, \ldots \int_0^{2\pi}(f(x)-S_n(x))\sin nx\,dx=0. \end{cases}$$

Nun ziehen sich aber die Integrale der Produkte von $S(x)$ mit einem cos oder sin sehr zusammen. Man hat nämlich für $r=0,1,\ldots n$:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos rx.\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos rx\,dx + a_1\int_0^{2\pi}\cos x.\cos rx\,dx + \ldots + a_n\int_0^{2\pi}\cos nx.\cos rx.\,dx$$
$$+ b_1\int_0^{2\pi}\sin x.\cos rx\,dx + \ldots + b_n\int_0^{2\pi}\sin nx.\cos rx.\,dx.$$

Nach den bekannten elementaren Integraleigenschaften der goniometrischen Funktionen verschwinden rechts alle Glieder bis auf das Cosinusglied mit dem Index $r$, und dieser selbst nimmt den Wert $a_r.\pi$ an, so daß:

$$\int_0^{2\pi} S_n(x)\cos rx\,dx = a_r.\pi \qquad (r=0,1,\ldots n).$$

Daß dies auch für $r=0$ gilt, haben wir der Hinzufügung des Faktors $\frac{1}{2}$ zu $a_0$ zu danken. Ganz analog ergibt sich weiter

$$\int_0^{2\pi} S_n(x)\sin rx\,dx = b_r.\pi \qquad (r=1,2,\ldots n).$$

Aus diesen einfachen Relationen folgt, daß jede der Gleichungen (2.') nur noch eine der $2n+1$ Unbekannten enthält; wir können ihre Lösung daher sofort hinschreiben:

$$(3) \quad \begin{cases} a_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos rx\,dx & (r=0,1,\ldots n) \\ b_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin rx\,dx & (r=1,\ldots n) \end{cases}$$

Verwenden wir, wie wir es von jetzt an tun wollen, diese Werte der Koeffizienten in $S_n(x)$, so wird $J$ in der Tat ein Minimum, und als sein Wert ergibt sich leicht



$$\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx - \pi\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{r=1}(a_r^2+b_r^2)\right\}.$$

Eine wichtige Bemerkung ist, daß die so erhaltenen Koeffizientenwerte von der speziell angenommenen Anzahl $n$ der Reihenglieder gänzlich unabhängig sind, und daß weiterhin sogar der zu einem Gliede $\cos rx$ oder $\sin rx$ gehörige Koeffizient genau denselben Wert behält, wenn man dieses Glied allein oder zusammen mit beliebigen andern zur Approximation von $f(x)$ nach demselben Prinzip verwendet. Versucht man z. B. $f(x)$ durch ein einziges Cosinusglied $a_r\cos rx$ so gut als möglich anzunähern, d. h. so daß

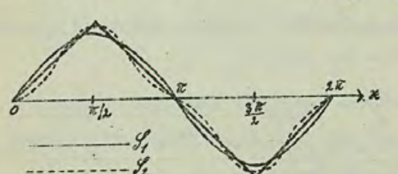
$$\int_0^{2\pi}(f(x)-a_r\cos rx)^2\,dx = \text{Minimum}$$

wird, so erhält man gleichfalls gerade den oben angegebenen Wert von $a_r$. Das macht dieses Annäherungsverfahren für die Praxis besonders bequem; denn will man eine Funktion, deren Verlauf etwa dem Sinus selbst ähnelt, zuerst durch ein Vielfaches von $\sin x$ approximieren, und stellt sich hinterher heraus, daß diese Annäherung noch nicht genau genug wird, so kann man noch weitere Glieder additiv hinzufügen – immer nach dem Prinzip des kleinsten Fehlerquadrates – ohne das erste ändern zu müssen.

Ich habe nun darzulegen, wie die auf diese Weise bestimmten Summen $S_n(x)$ die gegebene Funktion $f(x)$ im einzelnen annähern; für solche Untersuchungen scheint mir das Vorausstellen einer gewissermaßen experimentellen, naturwissenschaftlichen Methode sehr zweckmäßig, daß man nämlich sich zunächst einmal für einige konkrete Fälle richtige Figuren der Näherungskurven $S_n(x)$ entwirft. Das gibt eine lebendige Vorstellung der Sache und wird auch bei einem nicht spezifisch mathematisch veranlagten Menschen Interesse erwecken und das Bedürfnis nach mathematischer Aufklärung entstehen lassen.

In einer früheren Vorlesung (W.-S. 1903/04), in der ich diese Dinge ausführlicher behandelt habe, hat Herr Schimmack, damals mein Assistent, solche Zeichnungen hergestellt, von denen ich Ihnen einige im Original und in Projektionsbildern hier vorführen will:

1.) Die einfachsten Funktionen, für die unsere die Koeffizienten definierenden Integrale überhaupt einen Sinn haben, erhalten wir, wenn wir Kurven aus geradlinigen Stücken zusammensetzen. Es gehe z. B. die Kurve $y = f(x)$ von $0$ bis $\frac{\pi}{2}$ geradlinig unter dem Winkel $45^\circ$ in die Höhe, dann bis $x = \frac{3\pi}{2}$ unter dem gleichen Winkel herunter und endlich bis $x = 2\pi$ wieder unter $45^\circ$ hinauf, und sie werde über dieses Intervall $(0, 2\pi)$ hinaus periodisch fortgesetzt. Be-



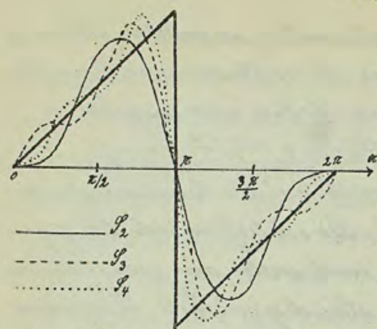



rechnen wir nun hierzu die Koeffizienten, so werden alle $a_\nu = 0$, da $f(x)$ eine ungerade Funktion ist; es bleiben nur Sinusglieder über, und zwar wird, wie ich hier nur angebe:

$$S(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - + \dots\right).$$

In der Figur ist nun der Verlauf der Summen der ersten 1 und 2 Glieder skizziert. Sie schließen sich der gegebenen Kurve $y = f(x)$ mehr und mehr an, indem die Anzahl ihrer Schnitte mit ihr ständig wächst. Besonders bemerkenswert ist, wie die Näherungskurven sich mehr und mehr in die Ecken der Kurve bei $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ hineinpressen, obwohl sie selbst als analytische Funktionen keine Ecke bilden können.

2.) Es gehe die Kurve $f(x)$ von $0$ an bis $x = \pi$ geradlinig unter $45^\circ$ aufwärts, springe dann unstetig bis auf $-\pi$ und gehe von da wiederum unter $45^\circ$ bis $x = 3\pi$ aufwärts; so bestehe sie aus lauter parallelen durch die Punkte $x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ der $x$-Achse gelegten Strecken. Schalten wir an den Unstetigkeitsstellen die vertikalen, die Enden jener Strecken verbindenden Strecken ein, so wird die unstetige Funktion durch einen stetigen Linienzug repräsentiert; er sieht aus wie die m-Striche, die Sie alle am Anfange Ihres Schreibunterrichtes geübt haben. Wiederum ist die Funktion ungerade, so

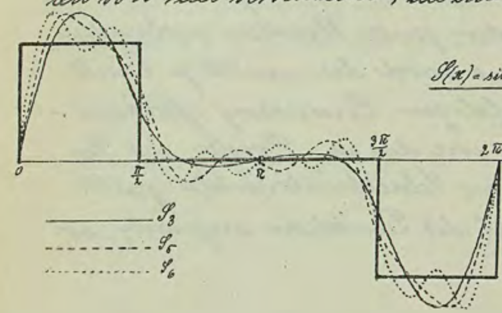



daß die Cosinusglieder fortfallen, und die Reihenentwicklung lautet:

$$S(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + - \cdots\right).$$

Die Figur stellt die Summen der ersten 2, 3, 4 Glieder dar; auch hier ist besonders interessant, wie sie die Unstetigkeiten von $f(x)$ nachzumachen bestrebt sind, indem sie bei $x = \pi$ z. B. mit immer steilerem Abfall durch Null hindurchgehen.

3) Das letzte Beispiel sei eine Kurve, die für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ gleich $\frac{\pi}{2}$, für $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{2}$ gleich 0 und für $\frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ endlich gleich $-\frac{\pi}{2}$ ist, und die weiterhin periodisch fortgesetzt wird. Schalten wir an den Unstetigkeitsstellen wieder vertikale Stücke ein, so erhalten wir einen hakenförmigen Zug. Wiederum sind nur die Sinuskoeffizienten von Null verschieden, da eine ungerade Funktion vorliegt, und zwar wird:




$$S(x) = \sin x + 2\cdot\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + 0 + \frac{\sin 5x}{5} + 2\cdot\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + 0 + \frac{\sin 9x}{9} + \cdots.$$

Hier ist das Gesetz der Koeffizienten nicht mehr so



einfach, als bisher, und demgemäß ist auch die Aufeinanderfolge der Näherungskurven, von denen die 3., 5., 6. gezeichnet ist, nicht mehr so übersichtlich, wie in den vorhergehenden Fällen. –

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie groß allgemein der Fehler an einer bestimmten Stelle $x$ ist, den wir bei Ersetzung von $f(x)$ durch die Summe $S_n(x)$ machen; bisher haben wir uns nur mit dem <u>Integral</u> dieses Fehlers über das ganze Intervall beschäftigt. Wir wollen jetzt die Integrationsvariable in den Integralen (3) (S. 426) für die Koeffizienten $a_\nu$, $b_\nu$ mit $\xi$ zum Unterschiede von der als fest betrachteten Stelle $x$ bezeichnen. Dann können wir unsere endliche Reihensumme (1) schreiben:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi\cdot f(\xi)\cdot\Big\{\frac{1}{2} + \cos x\cos\xi + \cos 2x\cos 2\xi + \cdots + \cos nx\cos n\xi$$
$$+ \sin x\sin\xi + \sin 2x\sin 2\xi + \cdots + \sin nx\sin n\xi\Big\},$$

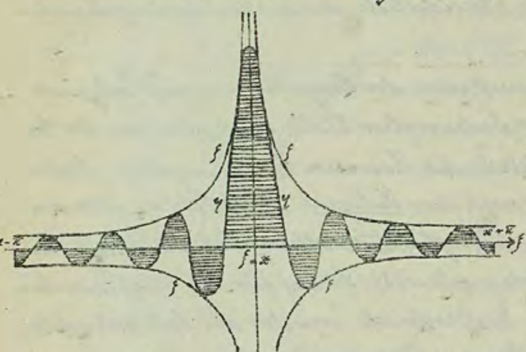
oder, wenn wir je zwei über einander stehende Summanden zusammenziehen:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\xi\cdot f(\xi)\Big\{\frac{1}{2} + \cos(x-\xi) + \cos 2(x-\xi) + \cdots + \cos n(x-\xi)\Big\}.$$

Die in der Klammer stehende Reihe kann man nun leicht summieren, am bequemsten vielleicht durch Übergang zur komplexen Exponentialfunktion; man erhält so – auf Details kann ich hier nicht eingehen –, wenn wir noch benutzen, daß wir wegen der Periodizität der Integranden die Integration auch von $-\pi$ bis $+\pi$ erstrecken können:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\xi \cdot f(\xi)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi - x)}.$$

Um über den Wert dieses Integrales ein Urteil zu gewinnen,




zeichnen wir uns zunächst die Kurven

$$\xi = \pm\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\xi - x)}$$

über dem Intervalle $x - \pi \leq \xi \leq x + \pi$ der $\xi$-Achse; sie haben daselbst offenbar einen hyperbelähnlichen Verlauf. Zwischen diesen Kurvenästen oszilliert nun die Kurve

$$y = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi - x)} = \xi \cdot \sin\frac{2n+1}{2}(\xi - x)$$

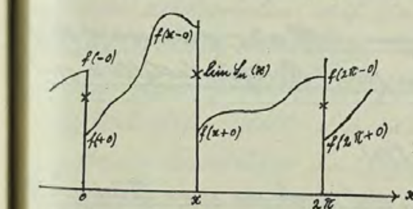
hin und her, und zwar um so öfter, je größer $n$ ist; bei $\xi = x$ nimmt sie einen gleichzeitig mit $n$ wachsenden Wert $\left(y = \frac{2n+1}{2\pi}\right)$ an. Denken wir uns nun der Einfachheit halber $f(\xi) = 1$, so wird $S_n(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} y \cdot d\xi$ einfach den Flächeninhalt darstellen, den die $y$-Kurve mit der $\xi$-Achse einschließt (in der Figur schraffiert). Man sieht aber unmittelbar, wenn man einiges Gefühl für Kontinuität hat, daß bei hinreichend großem $n$ die Beiträge der Oszillationen rechts sowohl wie links, die abwechselnd positiv und negativ sind, sich kompensieren werden, und daß allein der Beitrag des sehr hohen schmalen Mittel-



stückes übrig bleibt; der aber geht, wie man sich leicht klar macht, mit wachsendem $n$ richtig in den Wert $f(x) = 1$ über. Genau ebenso liegen allgemein die Dinge, wenn $f(x)$ irgend eine nicht allzu unstetige Funktion ist, die speziell bei $x = \xi$ stetig verläuft.

Genau solche Überlegungen liegen nun, zu praezisen Abschätzungen ausgestaltet, dem Dirichletschen Konvergenzbeweise für die unendliche trigonometrische Reihe zu Grunde.

Diesen Beweis hat Dirichlet zum ersten Mal in Bd. 4 des Crellesschen Journals von 1829 publiziert [1]; später (1837) hat er eine populärere Darstellung in dem Repertorium der Physik von Dove und Moser gegeben.[2] Man findet den Beweis heutzutage in den meisten Lehrbüchern wiedergegeben, und ich brauche daher hier nicht




näher darauf einzugehen. Nur die Bedingungen, denen die Funktion $f(x)$ genügen muß, um durch eine unendliche trigonometrische Reihe darstellbar zu sein, muß ich noch nennen. $f(x)$ sei wieder

1) abgedruckt in Dirichlets Werken Bd. I (Berlin 1889) pg. 117.

2) „Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen." Abgedruckt Werke Bd. I pag. 133-160 und Ostwalds Klassiker Nr. 116 (Leipzig 1900).

im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gegeben und darüber hinaus periodisch fortgesetzt; Dirichlet macht dann folgende beiden Annahmen, die man heute schlechtweg als Dirichletsche Bedingungen bezeichnet:

a.) f(x) sei abteilungsweise stetig, d. h. es weise im Intervalle $(0, 2\pi)$ nur eine endliche Anzahl von Sprüngen auf.

b.) f(x) sei abteilungsweise monoton, d. h. man kann das Intervall $(0, 2\pi)$ in eine endliche Anzahl von Teilintervallen teilen, in deren jedem $f(x)$ entweder nicht wächst oder nicht abnimmt – mit andern Worten f(x) besitze nur endlich viele Maxima und Minima; dadurch sind Funktionen vom Typus $\sin \frac{1}{x}$, wo sich unendlich viele Extrema an der Stelle $x = 0$ häufen, beispielsweise ausgeschlossen.

Unter diesen Bedingungen stellt also, das beweist Dirichlet, die unendliche Reihe an jeder Stetigkeitsstelle $x$ genau den Wert $f(x)$ dar:

$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = f(x).$$

Dirichlet zeigt aber noch weiter, daß auch an einer Sprungstelle $x$ die Reihe konvergiert und zwar gegen das arithmetische Mittel der beiden Werte, in die $f(x)$ übergeht, wenn man sich von rechts und links der Sprungstelle nähert; oder, wie man gewöhnlich schreibt:



$$\lim_{n=\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

In der Figur sind solche Sprungstellen und die in Frage kommenden Werte markiert.

Diese Dirichletschen Bedingungen für $f(x)$ sind nur ausreichend, keineswegs aber notwendig, damit $f(x)$ durch die Reihe $S(x)$ dargestellt werde; es genügt aber andrerseits nicht, bloß Stetigkeit von $f(x)$ zu fordern, vielmehr kann man sich Beispiele stetiger Funktionen konstruieren, bei denen sich unendlich viele Oszillationen so stark häufen, daß die Reihe $S(x)$ divergiert. –

Nach diesen mehr theoretischen Erörterungen will ich jetzt noch von der praktischen Seite der trigonometrischen Reihen etwas sprechen, und verweise da zunächst für die eingehendere Behandlung der Fragen, die hier anknüpfen, auf das schon oben (S. 423) hervorgehobene Buch von Runge. Sie finden dort die Frage der numerischen Berechnung der Reihenkoeffizienten ausführlich behandelt, d. h. die Frage, wie man für eine gegebene Funktion die Integrale für $a_\nu$, $b_\nu$ am zweckmäßigsten rasch ausrechnet.

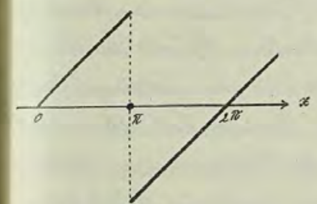
Man hat auch besondere mechanische Apparate zur Berechnung dieser Koeffizienten konstruiert, die man harmonische Analysatoren nennt. Dieser Name geht auf die Beziehung zurück, die die Entwicklung einer

Funktion $y = f(x)$ in trigonometrische Reihen bekanntlich zu der Akustik besitzt: sie entspricht ja genau der Zerlegung eines beliebigen Tones $y = f(x)$ (wo $x$ die Zeit, $y$ die Amplitude der Tonschwingung ist) in „reine Töne", d. h. reine Cosinus- und Sinusschwingungen. Unsere Sammlung besitzt einen von Coradi in Zürich gebauten Analysator, der die Koeffizienten von je 6 Sinus- und Cosinusgliedern $(\nu = 1, \ldots 6)$ zu bestimmen gestattet, im ganzen also 12 Koeffizienten; der Koeffizient $\frac{a_0}{2}$ muß noch durch ein Planimeter gesondert bestimmt werden. Michelson (in Chicago) und Stratton haben einen Apparat konstruiert, der gar 160 Koeffizienten $(\nu = 1, 2, \ldots 80)$ zu bestimmen gestattet; er ist in dem Rungeschen Buche beschrieben. Der Apparat kann auch umgekehrt eine gegebene trigonometrische Reihe von 160 Gliedern summieren, d. h. aus den gegebenen Koeffizienten $a_\nu$, $b_\nu$ die Funktion $f(x)$ herstellen; diese Aufgabe ist natürlich gleichfalls praktisch von höchster Bedeutung.

Der Michelson-Strattonsche Apparat hat nun zum ersten Male die Aufmerksamkeit auf ein sehr interessantes, eigentlich ganz elementares Phänomen gelenkt, das merkwürdiger Weise bis dahin unbeachtet geblieben war; Gibbs hat es 1899 zum ersten Male



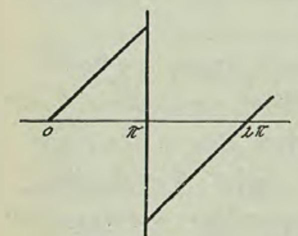
in der „Nature"[1] zur Sprache gebracht, und man nennt es daher das Gibbssche Phänomen. Lassen Sie mich darüber noch einiges sagen! Der Dirichletsche Satz gibt den Wert der unendlichen trigonometrischen Reihe bei festgehaltenem $x$ als $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ an; in dem oben an zweiter Stelle behandelten Beispiele – um einen konkreten Fall ins Auge zu fassen –, stellt also die so aufgefaßte Reihensumme die nebenstehend angedeutete Funktion mit den isolierten Punkten bei $\pi, 3\pi, \ldots$ dar.




Nun hatten wir uns aber die trigonometrische Approximation bereits in anderer Weise verdeutlicht, als es dieses Dirichletsche Verfahren tut, das $x$ festhält und $n$ ins Unendliche wachsen läßt: Wir hatten gerade $n$ festgehalten, $S_n(x)$ bei variablem $x$ betrachtet, und so der Reihe nach die sukzessiven Annäherungskurven $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, … gezeichnet. Man wird jetzt fragen, was aus diesen Kurven wird, wenn $n$ ins Unendliche läuft, oder, arithmetisch gesprochen: Gegen welche Werte häufen sich die Werte $S_n(x)$, wenn man bei variablem $x$ $n$ ins Unendliche wachsen läßt. Es ist an –

1) Bd. 59 (1898) pg. 200 – Scientific papers II (New York 1906), pg. 158.

schaulich, daß jetzt die Grenzfunktion <u>nicht</u>, wie vorhin, <u>isolierte Punkte</u> aufweisen kann, sondern einen <u>zusammenhängenden Kurvenzug</u> darstellen muß. Man hält es nun zunächst für wahrscheinlich, daß dieser Kurvenzug gerade aus den stetigen Ästen von $y = f(x)$ zuzüglich der die Stellen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ an den Unstetigkeitsstellen verbindenden vertikalen Stücke bestehen wird, in unserem Beispiele also die $\text{n}$-förmige Kurve, die wir früher (S. 430) zeichneten. In der Tat aber zeigt sich, <u>daß das vertikale Stück der Grenzkurve noch stets um ein endliches Stück über bezw. unter $f(x+0)$ und $f(x-0)$ hinausgeht</u>, so daß die Grenzkurve das hier skizzierte merkwürdige Aussehen hat.



Diese aufgesetzten Türmchen hat man eben zum ersten Male an den vom Michelsonschen Apparat gezeichneten Kurven, also geradezu <u>experimentell</u> beobachtet; man hat sie anfänglich wohl auf Ungenauigkeiten des Apparates zurückgeführt, bis endlich <u>Gibbs</u> sie als notwendig erkannte. Ist allgemein $D$ die Größe des Sprunges $(= |f(x+0) - f(x-0)|)$, so hat Gibbs gezeigt, daß die aufgesetzte Verlängerung gleich



$$-\frac{D}{\pi}\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\,0{,}28\,D = 0{,}09\,D$$

ist. Was die Begründung dieser Aussage anlangt, so genügt es, sie für eine einzige unstetige Funktion, etwa die des Beispiels, nachzuweisen, da alle andern Funktionen mit gleichem Sprunge aus ihr durch Addition stetiger Funktionen hervorgehen müssen; hier ist der Beweis aber nicht eben sehr schwierig, sondern er ergibt sich aus der direkten Betrachtung der Integralformel für $S_n(x)$ (S. 432). Übrigens kann man an der Skizze der Annäherungskurven (S. 430) ganz deutlich verfolgen, wie die Gibbssche Spitze entsteht.

Auf die vielen weiteren sehr interessanten Feinheiten im Verhalten der Annäherungskurven einzugehen, würde mich hier zu weit führen; ich verweise aber gern auf die inhaltreiche und gut lesbare Arbeit von <u>Fejér</u> in <u>Bd. 64 der Mathem. Ann.</u> (pg. 273, 1907).

Ich möchte damit die speziellen Erörterungen über trigonometrische Reihen abbrechen, um einen sachlich und historisch hier sehr nahe liegenden Exkurs anzuschließen:

## <u>Exkurs über den allgemeinen Funktionsbegriff.</u>

Wir müssen uns in dieser Vorlesung umso eher damit beschäftigen, als unsere Schulreform ja ganz wesentlich unter dem Zeichen der Hervorkehrung dieses so wichtigen Begriffes im Schulunterricht steht.

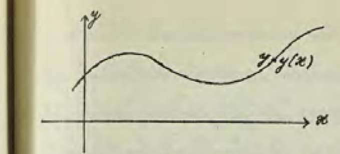
Folgen wir wiederum der historischen Entwicklung, so haben wir zunächst zu bemerken, daß sich bei den älteren Autoren, wie Leibniz und den Bernoullis, der Funktionsbegriff immer nur an einzelnen Beispielen, den Potenzen, trigonometrischen Funktionen u. dgl. findet. Allgemeinen Formulierungen begegnen wir zuerst im 18. Jahrhundert.

1) Bei Euler, ums Jahr 1750 – um nur runde Zahlen zu nennen – finden sich 2 verschiedene Erklärungen des Wortes Funktion:

a.) In seiner „Introductio" definiert er als Funktion $y$ von $x$ jeden „analytischen Ausdruck" in $x$, d.h. jeden Ausdruck, der aus Potenzen, Logarithmen, trigonometrischen Funktionen u. dgl. zusammengesetzt ist; genau umschreibt Euler die hier zugelassenen Ausdrücke nicht. Im Übrigen hat er bereits die geläufige Einteilung in algebraische und transzendente Funktionen.

b.) Daneben wird aber bei ihm eine Funktion $y(x)$ auch dadurch definiert, daß in einem $x$-$y$-Koordinatensystem eine Kurve beliebig, „libero manus ductu" gezeichnet ist. Einen Zusammenhang



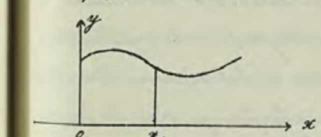



beider Definitionen stellt Euler nicht her.

2) Lagrange schränkt um 1800 in seiner „Théorie des fonctions analytiques" den Funktionsbegriff stark ein, auf sog. „analytische Funktionen", die durch eine Potenzreihe in $x$ definiert sind. Der moderne Sprachgebrauch hat das Wort „analytische Funktionen" in dieser Bedeutung beibehalten, wobei man sich freilich bewußt sein muß, daß es sich hier nur um eine spezielle Klasse der in der Analysis wirklich vorkommenden Funktionen handelt. Nun ist durch eine Potenzreihe

$$y = \mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

eine Funktion zunächst nur innerhalb des Konvergenzbereiches, also in einer gewissen Umgebung von $x = 0$, definiert. Man hat aber bald eine Methode gefunden, den Definitionsbereich der Funktion darüber hinaus auszudehnen: liegt etwa $x_1$ noch im Konvergenzgebiete von $\mathfrak{P}$, und setzt man $\mathfrak{P}(x)$ in eine nach Potenzen von $(x - x_1)$ fortschreitende Potenzreihe um:




$$y = \mathfrak{P}_1(x - x_1),$$

so kann diese möglicher Weise über jenen Bereich hinaus konvergieren, und so $y$ in einem ausgedehnteren Gebiete definieren, das man durch Wiederholung dieses Verfahrens event. noch mehr erweitern kann. Dieser Prozeß der „analytischen Fortsetzung" ist ja jedem, der sich etwas mit komplexer Funktionentheorie beschäftigt hat, wohl bekannt.

Bemerken Sie übrigens besonders, daß jeder einzelne Koeffizient der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ und damit die ganze Funktion $y$ bestimmt ist, wenn man den Verlauf der Funktion $y$ längs eines beliebig kleinen Stückes der $x$-Achse, etwa in der Umgebung von $x=0$, kennt; denn damit kennt man die Werte aller Ableitungen von $y$ für $x=0$ und hat dann bekanntlich

$$y(0)=\alpha_0,\quad y'(0)=\alpha_1,\quad y''(0)=2\alpha_2,\ \ldots\ .$$

Eine analytische Funktion im Sinne von Lagrange ist also durch ihr kleinstes Stück in ihrem Gesamtverlauf völlig bestimmt. Diese Eigenschaft steht durchaus im Gegensatz zum Verhalten einer Funktion im Sinne der zweiten Eulerschen Definition: da läßt jedes Stück einer Funktion sich noch nach freier Willkür fortsetzen.

3.) Die Fortbildung des Funktionsbegriffes knüpft weiterhin an J. J. Fourier an, einen der zahlreichen bedeutenden Mathematiker, die am Anfange des 19. Jahrhunderts in Paris wirkten. Sein Hauptwerk ist die „Théorie analytique de la Chaleur"[1], die 1822 erschien;

[1] Abgedruckt in Fourier, Oeuvres, T. I (Paris 1888).



die erste Mitteilung über die hier entwickelten Theorieen hat er bereits 1807 der Pariser Akademie vorgelegt. Dieses Werk ist die Quelle der so weitreichenden und viel angewendeten Methode der heutigen mathematischen Physik, die man kurz als Zurückführung aller Probleme auf die Integration partieller Differentialgleichungen bei vorgegebenen Randwerten, auf eine sog. „Randwertaufgabe", charakterisieren kann. Fourier behandelt so speziell das Problem der Wärmeleitung, das in einem einfachen Falle etwa so lautet: Der Rand einer ebenen kreisförmigen Platte wird dauernd in einem gegebenen Temperaturzustande erhalten, der eine Teil beispielsweise auf dem Gefrierpunkt, der andere auf dem Siedepunkt; welcher stationäre Temperaturzustand bildet sich durch den eintretenden Wärmeleitungsprozeß schließlich aus?


Hier stellen sich also Randwerte ein, die in den einzelnen Teilen des Randes unabhängig von einander willkürlich gegeben werden können, und daher tritt naturgemäß gegenüber Lagrange wieder die zweite Eulersche Definition des Funktionsbegriffes in den Vordergrund.

4.) Diese Definition bleibt auch bei Dirichlet in den neulich erwähnten Arbeiten im Grunde bestehen, nur wird sie in die Sprache der Analysis übersetzt, oder – um ein moderen Wort zu gebrauchen – arithmetisiert. Und das ist in der Tat nötig, denn natürlich kann eine Kurve, wie fein man sie auch zeichnet, nie völlig exakt im Sinne der Praezisionsmathematik eine Zuordnung der Werte $x$ und $y$ definieren; der Strich muß ja immer eine gewisse Dicke haben, und dadurch ist es bedingt, daß man die einander entsprechenden Längen $x$, $y$ nur auf eine beschränkte Anzahl von Dezimalstellen genau wird messen können.

Dirichlet formuliert nun den arithmetischen Inhalt der Eulerschen Definition folgendermaßen: „Ist in einem Intervalle jedem einzelnen Werte $x$ durch irgend welche Mittel ein bestimmter Wert $y$ zugeordnet, dann soll $y$ eine Funktion von $x$ heißen." Hat er so auch schon diesen ganz allgemeinen Funktionsbegriff, so denkt er doch immer in allererster Linie an stetige oder nicht allzu unstetige Funktionen, wie man dies damals allgemein tat. Man hielt komplizierte gehäufte Unstetigkeiten wohl für denkbar, glaubte aber kaum, daß sie irgend Interesse verdienen könnten. Dieser Standpunkt kommt schon darin zum Ausdruck, daß Dirichlet immer von der Reihenentwicklung „ganz willkürlicher Funktionen" spricht (genau wie Fourier „fonctions entièrement arbitraires" gesagt hatte), wenn er auch seine „Dirichletschen Bedingungen,"



denen diese Funktionen genügen müssen, sehr präzis formulierte. (vgl. S. 434)

5.) Wir müssen nun berücksichtigen, daß in dieser Zeit, etwa um 1830, die allgemeinere Entwicklung der Theorie der Funktionen eines komplexen Argumentes einsetzt und in den nächsten ungefähr 3 Dezennien allmählich Gemeingut der Mathematiker wird. Diese Entwicklung knüpft sich vor allem an die Namen Cauchy, Riemann und Weierstraß; die ersten beiden gehen bekanntlich von den nach ihnen benannten partiellen Differentialgleichungen aus, denen reeller und imaginärer Teil $u$, $v$ der komplexen Funktion

$$f(x + iy) = u + iv$$

genügen, während Weierstraß die Funktion durch eine Potenzreihe und den Inbegriff ihrer analytischen Fortsetzungen definiert und damit gewissermaßen wieder an Lagrange anknüpft.

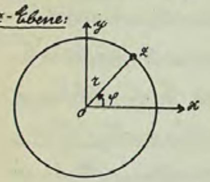
Nun ist aber das Merkwürdige, daß dieser Übergang ins Komplexe einen Ausgleich und Zusammenhang zwischen den beiden oben betrachteten Arten des Funktionsbegriffes schafft; ich will das hier noch kurz skizzieren.

Wir setzen $z = x + iy$ und betrachten die Potenzreihe

$$(1) \qquad f(z) = u + iv = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots ,$$

die bei kleinen $z$ konvergieren möge und dann in Weierstraßscher Terminologie ein Element einer analytischen Funktion definiert. Wir betrachten ihre Werte auf einem

z-Ebene:




kleinen Kreise mit dem Radius $r$ um $z = 0$, der ganz im Konvergenzbereiche gelegen sei, d. h. wir setzen $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in die Potenzreihe ein:

$$f(z) = c_0 + c_1 r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + c_2 r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \dots ;$$

spalten wir die Koeffizienten in reellen und imaginären Teil:

$$c_0 = \frac{\alpha_0 - i\beta_0}{2}, \quad c_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad c_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \dots ,$$

so ergibt sich für den reellen Teil von $f$:

$$(2) \quad \begin{cases} u = u(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 r\cos\varphi + \alpha_2 r^2 \cos 2\varphi + \dots \\ \qquad\qquad + \beta_1 r\sin\varphi + \beta_2 r^2 \sin 2\varphi + \dots ; \end{cases}$$

das negative Vorzeichen der imaginären Teile in den $c$ war gewählt, damit wir hier durchweg positive Zeichen erhalten. Die Potenzreihe für $f(z)$ liefert also unmittelbar für die Werte des reellen Teiles $u$ auf unserm Kreise, aufgefaßt als Funktion des Winkels $\varphi$, eine trigonometrische Reihendarstellung genau der früheren Art, deren Koeffizienten $\alpha_0$, $r^\nu \alpha_\nu$, $r^\nu \cdot \beta_\nu$ sind.

Natürlich werden diese Werte $u$ durchaus analytisch



im Sinne von Lagrange von $\varphi$ abhängen, solange der Kreis $(r)$ gänzlich innerhalb des Konvergenzbereiches der Potenzreihe (1) verläuft. Läßt man ihn aber mit dem „Konvergenzkreis" der Reihe (1), der ihr gesamtes Konvergenzgebiet begrenzt, zusammenfallen, so wird die Reihe (1) und daher auch die Reihe (2) auf ihm nicht mehr notwendig konvergieren müssen; indessen kann es vorkommen, daß die Reihe (2) auch dann noch konvergiert, und in diesem Falle können die Randwerte $u(\varphi)$ nichtanalytische Funktionen in Dirichlets Sinne werden.

Gibt man nämlich umgekehrt auf dem Kreise $(r)$ irgend eine „willkürliche" Werteverteilung $u(\varphi)$, die nur den „Dirichletschen Bedingungen" genügt, so läßt sie sich in eine trigonometrische Reihe der Gestalt (2) entwickeln, und damit sind die Größen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots$ und daher auch (bis auf die willkürliche additive Konstante $-\frac{i\beta_0}{2}$) die Koeffizienten der Potenzreihe (1) bestimmt. Es läßt sich nun zeigen, daß diese Potenzreihe innerhalb des Kreises $(r)$ auch wirklich konvergiert, und daß der Realteil der durch sie bestimmten analytischen Funktion die Werte $u(\varphi)$ zu Randwerten auf dem Kreise $(z)$ hat.

Die Beweise für diese Tatsachen sind in den Untersuchungen über das Verhalten von Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreise enthalten, auf die ich hier natürlich nicht eingehen kann. Wohl aber mögen diese Bemerkungen genügen, um zu zeigen, wie auf diesem Wege der Fourier-Dirichletsche und der Lagrangesche Funktionsbegriff gewissermaßen vollkommen zur Deckung kommen, indem die Willkür, die für den Verlauf der trigonometrischen Reihe $u(\varphi)$ längs des ganzen Kreises besteht, durch die Potenzreihe in die nächste Umgebung des Nullpunktes konzentriert wird.

6.) Nun ist aber die moderne Wissenschaft bei diesen Begriffsbildungen natürlich nicht stehen geblieben, denn die Wissenschaft als solche ruht nie, wenn auch der einzelne Forscher ermüden mag. Man hat sich da im Gegensatz zu dem, was ich oben als Dirichlets Standpunkt charakterisiert habe, beim Studium der reellen Funktionen in den letzten 3 Dezennien gerade auf möglichst unstetige Funktionen geworfen, die insbesondere über die Dirichletschen Bedingungen wesentlich hinausgehen; da hat man denn die merkwürdigsten Funktionstypen gefunden, die die unangenehmsten Singularitäten „zu scheußlichen Klumpen geballt" enthalten. Es handelt sich hier vor allem darum, zu untersuchen, wie weit die für vernünftige Funktionen geltenden Sätze bei solchen Abnormitä-



ten noch erhalten bleiben.

7.) Endlich schließt hier eine noch weitergehende ganz moderne Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes an. Bisher war eine Funktion stets definiert an jeder Stelle des Kontinuums aller reellen oder komplexen Werte $x$, oder doch wenigstens an jeder Stelle eines ganzen Intervalles, bezw. Bereiches. Seitdem aber der von G. Cantor geschaffene Mengenbegriff mehr und mehr in den Vordergrund tritt, wobei das Kontinuum aller $x$ nur als ein naheliegendes Beispiel einer „Menge" von Punkten gilt, zieht man nun auch Funktionen heran, die nur mehr für die Stellen $x$ irgend einer beliebigen Menge definiert zu sein brauchen, und nennt überhaupt allgemein $y$ eine Funktion von $x$, wenn jedem Elemente einer Menge von Dingen (Zahlen oder Punkten) $x$ ein Element einer Menge $y$ zugeordnet ist.

Einen Unterschied dieser neuesten Entwicklung der älteren gegenüber will ich hier sogleich hervorheben: Die unter 1.) bis 5.) aufgezählten Begriffsbildungen sind überwiegend in Hinblick auf Anwendungen in der Natur entstanden und ausgebaut worden; man denke nur an den Titel des Fourierschen Werkes! Die neueren unter 6.) und 7.) erwähnten Untersuchungen sind aber Produkte rein mathematischen Forschungstriebes, der nicht auf die Bedürfnisse der Naturerklärung bedacht ist, und sie haben bisher auch wohl noch keine direkte Anwendung gefunden. Ein Optimist wird natürlich meinen, daß zweifellos einmal die Zeit für solche Anwendung kommen wird.

Stellen wir endlich wieder unsere gewohnte Frage, was die Schule von allen diesen Dingen aufnehmen soll, was der Lehrer und was der Schüler wissen sollte.

Ich möchte da zuerst aussprechen, daß es nicht nur zu entschuldigen, sondern ganz in der Ordnung ist, wenn die Schule gegenüber den neuesten Fortschritten unserer Wissenschaft immer eine gewisse Spanne Zeit, sagen wir vielleicht 3 Dezennien, zurückbleibt, wenn also, wie man vielleicht sagen kann, eine gewisse Hysteresis stattfindet. Die bestehende Hysteresis ist aber leider viel bedeutender, sie umfaßt mehr als ein Jahrhundert, indem die Schule meist die ganze Entwicklung von Euler an ignoriert; so bleibt für die Reformarbeit also noch ein genügend großes Feld. Und was wir an Reformen verlangen, das ist wirklich recht bescheiden, wenn Sie es mit dem heutigen Stande der Wissenschaft vergleichen: Wir wollen nur, daß der allge-



meine Funktionsbegriff in der einen oder andern Eulerschen Auffassung den ganzen mathematischen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe; er soll gewiß nicht durch abstrakte Definitionen eingeführt, sondern an elementaren Beispielen, wie man sie schon bei Euler massenhaft findet, dem Schüler als lebendiges Besitztum überliefert werden. Für den Lehrer der Mathematik freilich scheint darüber hinaus noch zum mindesten die Kenntnis der Elemente der komplexen Funktionentheorie wünschenswert, und wenn ich das gleiche Verlangen auch hinsichtlich der neuesten mengentheoretischen Begriffsbildungen nicht stellen möchte, so möge es doch unter den vielen Lehrern immer wenigstens eine kleine Zahl solcher geben, die selbständig arbeitend sich auch mit diesen Dingen beschäftigen! –

Diesen letzten Erörterungen möchte ich nun noch einige Worte anfügen über die wichtige Rolle, die die Lehre von den trigonometrischen Reihen in dieser ganzen Entwicklung gespielt hat. Ausführliche literarische Angaben hierüber finden Sie in Burkhardts „Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen" (besonders in der 2. und 3. Lieferung), jenem „Riesenbericht", wie wir ihn im engeren Kreise wohl nennen, der schon seit 7 Jahren in einzelnen Lieferungen in Bd. X der Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung[1] erscheint; er vereinigt in über 9000 Zitaten eine solche Menge Literatur, wie sie wohl nirgends anders zu finden ist.

Der erste, der auf die Darstellung allgemeiner Funktionen durch trigonometrische Reihen kam, war Daniel Bernoulli, der Sohn der Johann Bernoulli. Er bemerkte um 1750 beim akustischen Problem der schwingenden Saite, daß sich die allgemeine Saitenschwingung durch Überlagerung der dem Grundton und den reinen Obertönen entsprechenden Sinusschwingungen darstellen läßt; das involviert gerade die Entwicklung der die Saitenform darstellenden Funktion in eine trigonometrische Reihe.

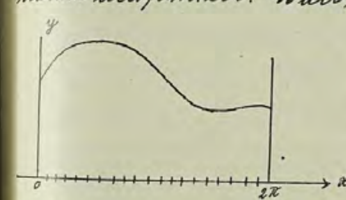
Obwohl man in der Kenntnis dieser Reihen bald Fortschritte machte, wollte doch niemand so recht glauben, daß man durch solche Reihen willkürliche, graphisch gegebene Funktionen darstellen könne. Dem lag wohl eine unbestimmte Vorstellung von Überlegungen zu Grunde, wie sie uns heute in der Mengenlehre durchaus geläufig sind; man mag von vornherein angenommen haben – ohne es natürlich präzis aussprechen zu können – daß die „Menge" aller willkür-

[1] Abgeschlossen als Heft 2 dieses Bandes in 2 Halbbänden (Leipzig 1908).



lichen Funktionen, selbst wenn man Sprungstellen ausschließt, größer sei als die „Menge" aller möglichen Systeme von Zahlwerten $a_0, a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$, die die Gesamtheit aller trigonometrischen Reihen repräsentiert.

Allein die präzisen Begriffsbildungen der modernen Mengenlehre haben hier Klarheit geschaffen und gezeigt, daß jener Vorurteil falsch war. Lassen Sie mich diesen wichtigen Punkt schon an dieser Stelle etwas näher ausführen. Man kann leicht erkennen, daß




man den gesamten Verlauf einer etwa in dem Intervalle $(0, 2\pi)$ ganz willkürlich definierten stetigen Funktion bereits kennt, wenn man nur ihre Werte an allen rationalen Stellen dieses Intervalles kennt; denn da diese das Intervall überall dicht erfüllen, können wir jede irrationale Stelle $x$ durch rationale Stellen beliebig approximieren, und wegen der Stetigkeit der Funktion muß sich dabei der Wert $f(x)$ als Limes der Funktionswerte an den approximierenden Stellen ergeben. Dazu kommt aber weiterhin, daß die Menge aller rationalen Zahlen „abzählbar" ist, d. h. daß man sie sämtlich in eine Reihe bringen kann, wo auf ein bestimmter erster ein bestimmter zweiter, dritter, u. s. f.

Element folgt. Daraus ergibt sich aber, daß eine willkürliche stetige Funktion geben nichts heißt, als eine abzählbare Reihe von Konstanten – die Funktionswerte an den so geordneten rationalen Stellen – geben; genau in der gleichen Weise, durch die abzählbare Reihe der Konstanten $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, wird aber eine bestimmte trigonometrische Reihe gegeben, so daß jenes Bedenken, die Menge der stetigen Funktionen sei von Natur wesentlich größer als die der Reihen, gegenstandslos geworden ist. Ganz analoge Überlegungen gelten auch für die unstetigen nur den Dirichletschen Bedingungen genügenden Funktionen. Wir werden später noch in vollständigerer Weise diese Erörterungen wieder aufnehmen.

Der Mann, der alle solche Bedenken zuerst überwunden hat, war Fourier, und darin liegt seine große Bedeutung in der Geschichte der trigonometrischen Reihen. Er hat zwar natürlich nicht diese mengentheoretische Aufklärung gegeben, aber er hatte als erster den Mut, an die allgemeine darstellende Kraft der Reihen zu glauben, und, auf diesen Glauben gestützt, hat er sie durch wirkliche Ausrechnung einiger charakteristischer Beispiele unstetiger Funktionen, so wie wir sie neulich etwa betrachteten, unzweifelhaft dargetan. Die eigentlichen allgemeinen Konvergenzbeweise gab erst, wie



schon erwähnt, später Dirichlet, der übrigens ein Schüler Fouriers war. Das Auftreten Fouriers aber hat wie eine Revolution gewirkt: Daß man durch Reihen analytischer Funktionen solche willkürliche, verschiedenen analytischen Gesetzen in verschiedenen Teilintervallen gehorchende Funktionen darstellen könne, das war den Mathematikern damals etwas ganz Neues und Unerwartetes. Zum Dank für die Eröffnung dieser Erkenntnis hat man dann den trigonometrischen Reihen geradezu Fouriers Namen gegeben, der ja auch sehr allgemein Anwendung findet. Freilich enthält jede solche Personalbenennung eine sehr starke Einseitigkeit, wenn nicht gar Ungerechtigkeit.

Eine zweite Leistung Fouriers muß ich hier zum Schluß noch kurz erwähnen. Er betrachtete nämlich auch den Grenzfall der trigonometrischen Reihen, der eintritt, wenn man die Periode der dargestellten Funktion unendlich groß werden läßt, und da eine Funktion von unendlich großer Periode einfach eine nichtperiodische, längs der ganzen $x$-Achse willkürliche Funktion ist, so gibt das ein Mittel, um auch nichtperiodische Funktionen darzustellen. Dieser Übergang vollzieht sich nun so, daß man zunächst durch eine lineare Transformation des Argumentes der Reihe auch Funktionen mit beliebiger Periode $l$ statt der bestimmten $2\pi$ darstellt und dann $l$ unendlich werden läßt. Dabei geht dann die Reihe über in das sog. Fouriersche Integral.

$$f(x) = \int_0^\infty [\varphi(\nu)\cos\nu x + \psi(\nu)\sin\nu x]\, d\nu,$$

wo $\varphi(\nu)$, $\psi(\nu)$ sich in bestimmter Weise als Integrale von $-\infty$ bis $+\infty$ über die Funktion $f(x)$ ausdrücken. Das Neue ist also, daß der Index $\nu$ kontinuierlich alle Werte von $0$ bis $\infty$, statt nur die Werte $0, 1, 2, \ldots$ durchläuft, und daß entsprechend die Funktionen $\varphi(\nu)\, d\nu$, und $\psi(\nu)\, d\nu$ an Stelle der Koeffizienten $a_\nu$, $b_\nu$ treten.

Wir können nunmehr die elementaren transzendenten Funktionen verlassen, die uns bisher in unseren Betrachtungen über die Analysis beschäftigt hatten und wollen jetzt zu einem neuen letzten Kapitel übergehen.

---

## III Von der eigentlichen Infinitesimalrechnung.

Natürlich setze ich voraus, daß Sie alle differenzieren und integrieren können und beides schon vielfach angewandt haben. Hier sollen uns lediglich allgemeinere Fragen, wie die der logischen und psychologischen Begründung, des Unterrichts u. dgl. beschäftigen.



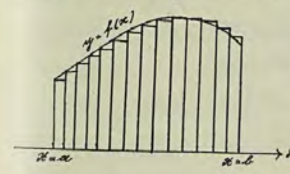
### 1. Allgemeine Ausführungen zur Infinitesimalrechnung.

Eine allgemeine Bemerkung über den Umfang der Mathematik will ich voraus schicken. Sie können von Nichtmathematikern, besonders auch von Philosophen, oft hören, die Mathematik habe lediglich logische Folgen aus klar gegebenen Praemissen zu ziehen; dabei sei es sogar ganz gleich, was diese Praemissen bedeuten, ob sie richtig oder falsch sind – wenn sie sich nur nicht widersprechen. Ganz anders aber wird jeder, der selbst produktiv mathematisch arbeitet, reden. In der Tat urteilen jene Leute nur nach der auskrystallisierten Form, in der man fertige mathematische Theorieen zur Darstellung bringt; der Forscher selbst jedoch arbeitet in der Mathematik wie in jeder Wissenschaft durchaus nicht in dieser streng deduktiven Weise, sondern er benutzt wesentlich seine Phantasie und geht induktiv, auf heuristische Hilfsmittel gestützt, vor. Man kann äußerst zahlreiche Beispiele dafür anführen, daß große Mathematiker die wichtigsten Sätze gefunden haben, ohne sie exakt beweisen zu können. Soll man die große Leistung, die hierin liegt, nicht in Ausschlag bringen, soll man jener Definition zuliebe sagen, daß das keine Mathematik ist, und daß nur die Nachfolger, die schließlich geglättete Beweise der Sätze fanden, Mathematik trieben? Schließlich ist es ja willkürlich, wie man das Wort gebrauchen will, aber ein Werturteil kann nur dahin lauten, daß die <u>induktive Arbeit dessen, der den Satz zum ersten Male aufstellte, gewiß gerade so viel wiegt, wie die deduktive dessen, der ihn zuerst bewies</u>; denn beides ist gleich notwendig. –

Gerade bei der Erfindung und Ausbildung der Infinitesimalrechnung hat nun dieses induktive, nicht auf bündige logische Schlüsse gestützte Vorgehen eine große Rolle gespielt, und <u>das wirksamste heuristische Hilfsmittel war hier sehr häufig die sinnliche Anschauung</u> – ich meine die <u>unmittelbare</u> sinnliche Anschauung mit allen ihren Ungenauigkeiten, für die beispielsweise die Kurve ein hingezeichneter Strich bestimmter Dicke ist, <u>nicht</u> die <u>abstrakte</u> Anschauung, die den Grenzübergang zur exakten eindimensionalen Linie schon als vollzogen postuliert. Ich möchte diese Behauptung bestätigen, indem ich Ihnen kurz darlege, wie die Ideeen der Infinitesimalrechnung sich historisch ausgebildet haben.

Betrachten wir zunächst den <u>Integralbegriff</u>, so ist zu bemerken, daß er historisch beim <u>Problem der Ausmessung von Flächen- und Körperinhalten (Quadratur und Kubatur)</u> beginnt. Die abstrakt logische Definition bestimmt das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, d. i. den Flächeninhalt, der von der Kurve $y = f(x)$, der $x$-Achse und den Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, ja bekanntlich als <u>Limes der Summe lauter dieser Fläche eingezeichneter schmaler Rechtecke</u>, wenn man deren Zahl unter gleichzeitiger unbegrenzter Verkleinerung ihrer Breite unbegrenzt wachsen läßt. Von der sinnlichen Anschauung aus aber liegt es nahe, den in Rede stehenden Flächeninhalt nicht so als scharfen Limes, sondern einfach als <u>Summe von sehr vielen ziemlich schmalen Rechtecken</u> zu definieren, denn einer weiteren Verkleinerung der Rechtecke wird ja ohnehin durch die notwendige Ungenauigkeit der Zeichnung stets ein Ende gesetzt sein.

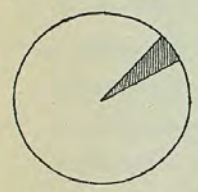





Diese naive Denkweise findet sich nun in der Tat bei den allerbedeutendsten Forschern in der Entstehungsperiode der Infinitesimalrechnung. Da nenne ich zuerst <u>Kepler</u>, der in seiner „<u>Nova stereometria doliorum vinariorum</u>“ [1] sich mit der Körpermessung beschäftigt. Sein Hauptinteresse richtet sich hierbei

[1] Lincii 1615. – Deutsch in Ostwalds Klassikern, Nr. 165 (Leipzig 1908)

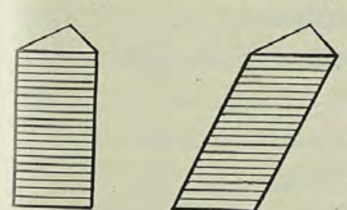
auf die Ausmessung von Fässern und ihre zweckmäßigste Gestaltung. Dabei stellt er sich ganz auf den soeben angedeuteten naiven Standpunkt: Er denkt sich das Faß, wie jeden Körper, in geeigneter Weise aus *zahlreichen dünnen Blättern*, aus Papier etwa, aufgeschichtet und setzt seinen Inhalt der Summe der Inhalte dieser Blätter, deren jeder einen Zylinder bildet, gleich. In ähnlicher Weise verfährt er bei der Berechnung der *einfachen geometrischen Körper*, so z. B. der *Kugel*. Er denkt sie sich aus sehr vielen *kleinen Pyramiden* mit der Spitze im Zentrum zusammengesetzt; dann ist der Rauminhalt nach der bekannten Pyramidenformel gleich $\frac{r}{3}$ mal der Summe aller Grundflächen der kleinen Pyramiden, und indem er die von diesen gebildete Fazettenfläche der Kugeloberfläche $4\pi r^2$ einfach gleich setzt, erhält er die richtige Volumenformel $\frac{4\pi r^3}{3}$. Übrigens betont Kepler ausdrücklich auch den praktischen, heuristischen Wert solcher Betrachtungen, und verweist, was *strenge* mathematische Beweise angeht, auf die komplizierten Betrachtungen des *Archimedes (Exhaustionsmethode)*.



Ähnliche Überlegungen finden sich auch in dem



Buche des Jesuiten *Bonaventura Cavalieri* „*Geometria indivisibilibus continuorum*"[1], dort wo er das heut allgemein nach ihm genannte Prinzip aufstellt: *Zwei Körper sind inhaltsgleich, wenn in gleicher Höhe bei beiden geführte Schnitte gleiche Flächen ergeben.* Von diesem *Cavalierischen Prinzip* ist bekanntlich auf unseren Schulen sehr viel die Rede; man glaubt dadurch die Integralrechnung vermeiden zu können, während es doch tatsächlich ganz ihr angehört. – Die Begründung bei Cavalieri kommt genau darauf hinaus, daß er sich beide Körper aus dünnen übereinandergeschichteten Blättern aufgebaut denkt, die dann nach der Annahme paarweise kongruent sind, d. h. der eine Körper entsteht aus dem andern durch Verschiebung der einzelnen Blätter des Haufens gegeneinander; dabei kann sich der Rauminhalt nicht ändern, da er sich nach wie vor aus den gleichen Summanden aufbaut.



Ganz ähnlich führt die naive Anschauung auf den *Differentialquotienten einer Funktion*, d. h. die Kurventangente. Man ersetzt da – und so hat man es tatsächlich gemacht – die Kurve durch einen ge-

[1] Bononiae 1653, erste Aufl. 1635.

radlinigen Polygonzug, der hinreichend viele auf der Kurve ziemlich dicht gelegene Punkte zu Ecken hat; nach der Natur unserer sinnlichen Anschauung kann man dann bei Betrachtung aus einiger Entfernung die Kurve kaum mehr von dem von diesen Punkten gebildeten Haufen, und noch weniger von dem Polygonzug selbst unterscheiden. Die Tangente der Kurve wird nun kurzweg als Verbindungslinie zweier aufeinander folgender solcher Punkte, also als Verlängerung einer der Polygonseiten definiert. Für den abstrakt logischen Standpunkt bleibt diese Gerade, wenn die Punkte auch noch so dicht gewählt sind, natürlich immer nur eine Sekante der Kurve, und die Tangente ist erst die Grenzlage, der sie sich bei Verkleinerung der Abstandes der beiden Punkte unbegrenzt nähert. Analog wird man auf diesem naiven Standpunkte als Krümmungskreis der Kurve den Kreis auffassen, der durch drei aufeinander folgende Polygonecken geht, während exakt genommen, der Krümmungskreis erst die Grenzlage dieses Kreises bei unbegrenzter Annäherung der drei Punkte ist.

Die überzeugende Kraft, die solchen naiven hodogetischen Betrachtungen inne wohnt, ist für verschied..



Personen natürlich sehr verschieden. Manche – und dazu rechne ich mich selbst – fühlen sich durch sie außerordentlich befriedigt; andere wieder, die einseitig nach der rein logischen Seite veranlagt sind, finden sie durchaus nichtssagend und können sich nicht denken, wie man sie überhaupt als Grundlage mathematischer Betrachtungen auffassen kann.

Übrigens kommen diese naiven Betrachtungsweisen auch heute noch stets dann unwillkürlich zur Geltung, wenn man in der mathematischen Physik, der Mechanik, der Differentialgeometrie irgend einen mathematischen Ansatz zu Stande bringen will. Sie alle wissen, daß sie überall da äußerst zweckmäßig sind. Freilich spottet der reine Mathematiker gern über eine solche naive Darstellung; als ich studierte, sagte man, daß für den Physiker das Differential ein Stück Messing sei, mit dem er wie mit seinen Apparaten umgehe.

In diesem Zusammenhange möchte ich gleich die Leibnizsche Schreibweise rühmen, die ja heute die herrschende ist; denn sie vereinigt mit einem zweckmäßigen Anklang an die naive Anschauung doch auch einen gewissen Hinweis auf den in Wahrheit in den Begriffen enthaltenen abstrakten Grenzprozeß. So erinnert die Leibnizsche Schreibweise $\frac{dy}{dx}$ der Differentialquotienten daran, daß er aus einem Quotienten entsteht, aber das $d$ im Gegensatz zu dem für endliche Differenzen üblichen $\Delta$ zeigt an, daß auch etwas Neues, nämlich der Grenzübergang hinzugekommen ist. Und ebenso deutet das Integralsymbol $\int y\,dx$ auf die Entstehung des Integrales aus einer Summe kleiner Größen hin; dabei ist aber nicht das gewöhnliche Summenzeichen $\Sigma$, sondern ein stilisiertes S (es ist merkwürdiger Weise nicht überall bekannt, daß das $\int$ diese Bedeutung hat) verwendet, das anzeigt, daß hier doch noch ein neuer Prozeß zur Summation hinzugetreten ist. –

Wir müssen nun endlich auf die logische Begründung der Differential- und Integralrechnung näher eingehen und wollen sie sogleich in ihrer historischen Entwicklung betrachten.

1.) Die Hauptidee ist da, wie es ja heute an der Hochschule allgemein gelehrt wird und wie ich Ihnen also wohl nur kurz in Erinnerung zu bringen brauche, daß die Infinitesimalrechnung lediglich eine Anwendung des allgemeinen Grenzbegriffes ist: Der Differentialquotient ist definiert als Grenzwert der Quotienten entsprechender endlicher Zuwächse von Variabler und Funktion:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

– vorausgesetzt, daß dieser Limes existiert. –, und keineswegs



ist er ein Quotient, in dem $dy$ und $dx$ selbständige Bedeutung haben. Ebenso ist das Integral definiert als Grenzwert einer Summe:

$$\int_a^b y\,dx = \lim_{\Delta x_i = 0} \sum_{(i)} y_i \cdot \Delta x_i \,,$$

wo die $\Delta x_i$ endliche Teile des Intervalles $a \leqq x \leqq b$, die $y_i$ beliebige Funktionswerte darin bedeuten, und alle $\Delta x_i$ gleichzeitig gegen Null zu konvergieren haben; keineswegs aber hat $y \cdot dx$ etwa als Summand einer Summe reale Bedeutung. Diese Bezeichnungen werden nur aus den soeben erörterten Zweckmäßigkeitsgründen beibehalten.

2) Die so gekennzeichnete Auffassung findet sich bereits in recht präziser Form bei Newton selbst ausgesprochen. Ich verweise da auf eine Stelle in seinem Hauptwerk, den „Principia philosophiae naturalis“ [1] von 1687: „Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites, ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant, et quos propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, nunquam vero transgredi neque prius attingere quam quantitates diminuentur in infinitum.“ Übrigens vermeidet Newton in diesem Werke den Infinitesimalkalkul in der Darstellung durchaus, obgleich er ihn gewiß zur Ableitung

[1] Reprinted for W. Thomson and H. Blackburn (Glasgow 1871), pag. 38.

seiner Resultate benutzt hat. Denn die grundlegende Schrift, in der er seine Methode der Infinitesimalrechnung entwickelt, hatte er bereits 1671 verfaßt, obwohl sie erst 1736 erschien; sie trägt den Titel „Methodus fluxionum et serierum infinitarum"[1].

Dort entwickelt Newton, ohne weiter auf prinzipielle Erörterungen einzugehen, den neuen Kalkul an zahlreichen Beispielen. Er knüpft dabei an eine Vorstellung des täglichen Lebens an, die den Grenzübergang sehr nahe legt; hat man nämlich eine Bewegung $x = f(t)$ auf der $x$-Achse in der Zeit $t$, so hat jedermann einen bestimmten Begriff davon, was die Geschwindigkeit einer solchen Bewegung ist, und wenn man dem nachgeht, so sieht man, daß im Grunde der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ damit gemeint ist. Diese Geschwindigkeit, mit der sich die Variable $x$ in der Zeit ändert, macht Newton als ihre „Fluxion $\dot{x}$" zur Grundlage seiner Betrachtungen. Er denkt sich alle Variablen $x$, $y$ von dieser einen Urvariablen $t$, der Zeit, abhängig; der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ erscheint demgemäß als Quotient zweier Fluxionen $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, was wir heute ausführlicher $\left(\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\right)$ schreiben würden.

3) An diese Newtonsche Ideenbildung schließt eine große Reihe von Mathematikern des 18. Jahrhunderts an,

[1] J. Newtoni Opuscula. T. I. (Lausannae 1744), pag. 29.



die die Infinitesimalrechnung mit mehr oder weniger Praezision auf dem Grenzbegriff aufbauen. Lassen Sie mich da nur einige Namen herausgreifen: C. Maclaurin in seinem „Treatise of fluxions"[1], das als Lehrbuch jedenfalls einen breiten Wirkungskreis hatte, ferner d'Alembert in der großen französischen Encyclopédie méthodique, endlich Kästner hier in Göttingen in seinen Vorlesungen und Büchern. Schließlich gehört wohl auch Euler vorwiegend in diese Entwicklungsreihe, wiewohl bei ihm vielleicht auch andere Tendenzen zum Vorschein kommen.

4) Eine ganz wesentliche Lücke blieb bei allen diesen Darstellungen noch auszufüllen, ehe von einem konsequenten Systeme der Infinitesimalrechnung die Rede sein konnte: Wohl hatte man die Definition des Differentialquotienten als Grenzwert, aber es fehlte ein Mittel, mit dem man umgekehrt aus seinem Werte den Zuwachs der Funktion in einem endlichen Intervalle abschätzen konnte. Das gestattet erst der sog. Mittelwertsatz, und es ist das große Verdienst Cauchys, diese zentrale Stellung voll erkannt und demgemäß den Mittelwertsatz an die Spitze der Differentialrechnung gestellt zu haben; es ist nicht zuviel gesagt, wenn man Cauchy deshalb als Begründer der exakten Infinitesimalrechnung im modernen Sinne

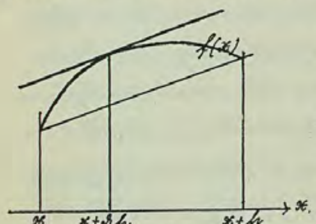
[1] Edinburgh 1742.

feiert. Als grundlegende Werke kommen hier, auf seinen Pariser Vorlesungen beruhend, in Betracht: „Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal“ 1) sowie die zweite Auflage, von der nur der erste Teil „Leçons sur le calcul differentiel“ 2) erschienen ist.

Der Mittelwertsatz lautet bekanntlich: Ist $f(x)$ eine stetige Funktion mit stetigem Differentialquotienten $f'(x)$, so gibt es zwischen $x$ und $x+h$ stets eine Stelle $x+\vartheta h$, so daß

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x+\vartheta h), \quad (0 \leq \vartheta \leq 1).$$

Hier tritt dieses den Mittelwertsätzen eigentümliche $\vartheta$ auf, das dem Anfänger zuerst häufig so wunderbar erscheint. Geometrisch ist dieser Satz durchaus anschaulich; er besagt nur, daß zwischen den Punkten $x$ und $x+h$ der Kurve es einen Punkt $x+\vartheta h$ gibt, in dem die Kurventangente parallel der die Punkte $x$ und $x+h$ verbindenden Sekante ist.




5) Wie beweist man nun den Mittelwertsatz exakt arithmetisch, ohne an die geometrische Anschauung zu appellieren? Ein solcher Beweis hat natürlich nur den Sinn, den Satz auf die vorher abstrakt in präzisester Form aufzustellenden arithmetischen Definitionen von Variabeler, Funktion, Stetig-

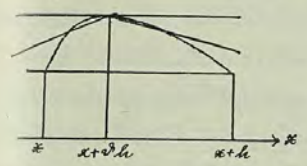
1) Paris 1823 = Oeuvres complètes, Sér. II, T. IV (Paris 1899)

2) Paris 1829 = Oeuvres complètes, Sér. II, T. IV (Paris 1899)



keit etc. zurückzuführen. Daher ist ein vollständig strenger Beweis erst durch Weierstraß und seine Nachfolger erreicht, denen wir überhaupt die moderne arithmetische Auffassung des Zahlenkontinuums verdanken. Ich will hier nur die charakteristischen Momente der Betrachtung hervorheben:

Zunächst kann man den Satz leicht auf den Fall zurückführen, daß die unseren Bogen begrenzende Sekante horizontal ist, d. h. daß $f(x) = f(x+h)$; es ist dann die Existenz einer Stelle mit horizontaler Tangente zu zeigen.




Dazu wird der berühmte Weierstraßsche Satz angewandt, daß jede in einem Intervalle stetige Funktion daselbst an mindestens je einer Stelle das Maximum und das Minimum ihrer Werte wirklich annimmt. Einer dieser Extremwerte unserer Funktion muß sicher im Innern des Intervalles $(x, x+h)$ liegen, falls nicht der triviale Fall einer Konstanten vorliegt; es sei dies etwa ein Maximum (der Fall des Minimums erledigt sich genau eben so), und es liege an der Stelle $x+\vartheta h$. Dann besitzt $f(x)$ nach rechts und links hin kleinere Werte, d. h. der Differenzenquotient ist nach rechts hin negativ, nach links hin positiv. Der Differentialquotient, der ja nach Voraussetzung an jeder Stelle existieren soll, kann also an der Stelle $x + \vartheta h$ sowohl als Grenze lauter positiver Werte, als auch lauter negativer Werte dargestellt werden, je nachdem man ihn als Grenze eines nach links oder rechts hin genommenen Differenzenquotienten auffaßt. Er kann daher *nur Null* sein, womit die behauptete Existenz der horizontalen Tangente und damit der Mittelwertsatz bewiesen ist.

Parallel mit der bisher geschilderten Entwicklungsreihe, auf der also die heutige wissenschaftliche Mathematik aufbaut, hat sich eine *wesentlich verschiedene Auffassung der Infinitesimalrechnung* durch die Jahrhunderte fortgepflanzt. Sie geht zurück

1.) auf *alte metaphysische Spekulationen über den Aufbau des Kontinuums* aus nicht mehr weiter zerlegbaren, letzten „unendlich kleinen" Bestandteilen. Schon im *Altertum* finden sich Anklänge an solche Vorstellungen, und von den *Scholastikern* und weiterhin den *jesuitischen Philosophen* wurden sie sehr gepflegt. Als charakteristischen Beleg nenne ich den Titel des schon erwähnten Buches *Cavalieris* „Geometria indivisibilibus continuorum", der seine wahre Grundauffassung andeutet; in der Tat kommen approximationsmathematische Anschauungen nur nebenbei bei ihm vor, und tatsächlich betrachtet er den Raum als aus unteilbaren letzten Bestandteilen, den „*Indivisibilia*" zusammengesetzt. Überhaupt wäre es für diesen Zusammenhang wichtig und interessant, die verschiedenen Zergliederungen zu kennen, die der Begriff des Kontinuums im Laufe der Jahrhunderte (und Jahrtausende) erfahren hat.



2.) An solche Ideenbildungen schließt *Leibniz* an, der sich ja mit Newton in den Ruhm der Erfindung der Infinitesimalrechnung teilt. Für ihn ist also *nicht der Differentialquotient als Grenzwert* das Primäre, sondern das *Differential $dx$ der Variabelen $x$ hat bereits reale Existenz als letzter, indivisibler Bestandteil der Abszissenachse*, als eine Größe, die kleiner als jede endliche Größe und doch nicht Null ist („aktual" *unendlich kleine Größe*). Ähnlich werden weiterhin die *Differentiale höherer Ordnung* $d^2x$, $d^3x$, … definiert als unendlich kleine Größen 2^ter^, 3^ter^, … Ordnung, deren jede „gegen die vorangehenden unendlich klein" ist; man hat so eine Reihe qualitativ verschiedener Größensysteme.

Diese Auffassung ist jedoch keineswegs die bei Leibniz allein herrschende, vielmehr kommen gelegentlich auch *approximationsmathematische* Anschauungen hervor; danach wäre das *Differential $dx$ eine endliche, aber so kleine Strecke, daß längs ihr die Kurve nicht* wahrnehmbar von der Tangente abweicht. Jene metaphysischen Spekulationen sind ja gewiß nur Idealisierungen der einfachen hierin enthaltenen psychologischen Tatsachen.

Ganz besonders findet sich bei Leibniz aber noch eine dritte Ideenrichtung vertreten, die wohl vorzugsweise für ihn charakteristisch ist, die formale Auffassung; ich hatte ja schon öfters Gelegenheit, zu betonen, daß wir in Leibniz den Begründer der formalen Mathematik zu sehen haben. Hier ist der Gedanke der: Ganz gleichgültig, was für eine reale Bedeutung die Differentiale haben und ob sie überhaupt eine haben, wenn man nur in geeigneter Weise Rechenregeln für sie definiert und diese richtig handhabt, so muß jedenfalls etwas Vernünftiges, Richtiges herauskommen; Leibniz verweist da immer auf die Analogie mit den komplexen Zahlen, über die er ja ganz entsprechende Vorstellungen hat. Bei diesen Rechenregeln für Differentiale handelt es sich nun hauptsächlich um die Formel

$$f(x+dx) - f(x) = f'(x) \cdot dx\,;$$

der Mittelwertsatz zeigt, daß sie nur richtig ist, wenn man $f'(x+\vartheta \cdot dx)$ statt $f'(x)$ schreibt, aber der Fehler, den man hier macht, ist unendlich klein von höherer (zweiter) Ordnung, und solche Größen soll man – das ist



die hauptsächliche formale Regel – beim Rechnen mit Differentialen vernachlässigen.

Die wichtigsten Publikationen von Leibniz sind in den Acta eruditorum, jener berühmten wissenschaftlichen Zeitschrift, aus den Jahren 1684, 1695 und 1712 enthalten.[1] Im ersten Bande finden Sie unter dem Titel „Nova methodus pro maximis et minimis" (pag. 467 f.f.) überhaupt die erste Veröffentlichung über Differentialrechnung, und zwar entwickelt Leibniz dort lediglich die Regeln des Differenzierens. Die späteren Arbeiten geben auch prinzipielle Erörterungen, in denen vorzugsweise der formale Standpunkt zum Ausdruck kommt. Besonders charakteristisch ist da die kurze Arbeit aus dem Jahre 1712,[2] also aus seinen letzten Lebensjahren; da spricht er geradezu von Sätzen und Definitionen, die nur „toleranter vera" oder französisch „passables" sind: „Rigorem quidem non sustinent, habent tamen usum magnum in calculando et ad artem inveniendi universalesque conceptus valent." Das bezieht er sowohl auf die komplexen Zahlen, als auf das Unendliche; sprechen wir etwa vom Unendlichkleinen, so „commoditati expressionis seu breviloquio mentalis inser-

1) Zum Teil übers. in Ostwalds Klass. Nr. 162 (Hrsg. v. G. Kowalewski, Leipzig 1908)
2) Observatio ..., et de vero sensu Methodi infinitesimalis. pag. 167-169.

vimus, sed non nisi toleranter vera loquimur, quae explicatione rigidantur".

3.) Von Leibniz aus verbreitet sich der neue Kalkül rasch auf dem Kontinent, und wir finden da jede seiner drei Anschauungen vertreten. Ich muss hier zunächst das erste Lehrbuch der Differentialrechnung nennen, das überhaupt erschien, die „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des courbes"[1] vom Marquis de l'Hospital, einem Schüler Johann Bernoullis, der seinerseits die neuen Ideen sich überraschend schnell von Leibniz angeeignet hatte. Hier wird die approximationsmathematische Anschauung vertreten, insbesondere z. B. pg. 11 eine Kurve als Polygon von sehr kleinen Seiten, die Tangente als Verlängerung einer solchen Seite aufgefasst. – In Deutschland wurde Leibnizsche Differentialrechnung besonders verbreitet durch Christian Wolff in Halle, der den Inhalt seiner Vorlesungen in den „Elementa matheseos universae"[2] niedergelegt hat. Er führt die Leibnizschen Differentiale sofort am Anfang der Differentialrechnung ein, betont jedoch ausdrücklich, dass sie keinerlei realen Aequivalent haben. Vielmehr entwickelt er über das für unsere

1.) Paris 1696; 2. éd. 1715.

2.) Zuerst erschienen 1710. – Ed. nov. Hallae, Magdeburgiae 1742. Vgl. pg. 545.



Wahrnehmung unendlich kleine wiederum durchaus approximationsmathematische Ansichten; so führt er als Beispiel an, dass die Höhe eines Berges für die praktische Messung nicht merklich geändert wird, wenn man ein Stäubchen wegnimmt oder hinzutut.

4.) Vielfach findet sich auch die metaphysische Ansicht vertreten, die den Differentialen eine reale Existenz zuschreibt; sie hat besonders auf philosophischer Seite, aber auch unter den mathematischen Physikern stets Anhänger gehabt. Hier nenne ich als einen der hervorragendsten Poisson, der sich in der Vorrede seines berühmten „Traité de mécanique"[1] in sehr krasser Weise dahin äussert, dass die unendlich kleinen Grössen nicht bloss ein Mittel zur Forschung sind, sondern durchaus wirklich existieren.

5.) Wahrscheinlich durch die philosophische Tradition ist diese Auffassung in die populäre Lehrbuchliteratur übergegangen und spielt dort noch heute eine grosse Rolle. Als Beispiel erwähne ich gern das zuerst 1855 erschienene Lehrbuch von Lübsen: „Einleitung in die Infinitesimalrechnung"[2], das lange Zeit hindurch und vielleicht noch heute einen ausserordent-

1.) T. I. (2. Aufl. Paris 1833) pag. 14.

2.) 8. Aufl. Leipzig 1899.

lichen Einfluss auf breite Schichten des Publikums besass; zu meiner Zeit hat gewiss jeder einmal als Schüler oder später das Lübsensche Buch zur Hand genommen, und mancher hat daraus die erste Anregung zu weiteren mathematischen Studien geschöpft. Lübsen definiert zunächst den Differentialquotienten durch den Grenzbegriff, daneben aber stellt er seit der 2. Auflage das, was er für die <u>wahre Infinitesimalrechnung</u> hält – ein <u>mystisches Operieren mit den unendlich kleinen Grössen</u>; die betr. Kapitel sind mit einem Stern versehen, zum Zeichen, dass sie an Material nichts Neues bringen. Hier werden die Differentiale eingeführt als letzte Teile, die etwa beim fortgesetzten Halbieren einer endlichen Grösse in unendlicher nicht angebbarer Anzahl entstehen, und deren jeder „obwohl von der absoluten Null verschieden, doch auch nicht mehr angebbar, sondern eine Infinitesimalgrösse, ein Hauch, ein Augenblick ist" – und dann folgt ein englisches Zitat: „Das Infinitesimale ist der Geist einer abgeschiedenen Grösse". (pag. 59/60.) Und weiter heisst es an einer anderen Stelle (pg. 76): „Die Infinitesimalmethode ist, wie man sieht, sehr subtil, aber richtig. Sollte dies aus dem bisherigen und dem noch folgenden nicht einleuchten, so liegt dies nur an unserer



mangelhaften Darstellung derselben". Es ist gewiss sehr interessant, von diesen Erörterungen näher Kenntnis zu nehmen!

Als Gegenstück dazu lege ich Ihnen noch das verbreitete <u>Lehrbuch der Experimentalphysik</u> von <u>Wüllner</u>[1] vor, in dem im ersten Bande eine kurze Darstellung der Infinitesimalrechnung vorausgedruckt wird; der Gedanke ist dabei der, den Naturwissenschaftlern oder Medizinern, die auf dem Gymnasium nicht erworbene und für die Physik doch unbedingt notwendige Kenntnis der Infinitesimalrechnung zu vermitteln. Dabei beginnt Wüllner (pg. 31) mit der Erklärung, was eine unendlich kleine Grösse $dx$ ist, später folgt dann die natürlich schwierigere Erklärung für das zweite Differential $d^2x$. Lesen Sie einmal diese Einleitung mit dem Auge des Mathematikers, und bedenken Sie dann, welch ein Widersinn darin liegt, dass auf der Schule die Infinitesimalrechnung als zu schwer unterdrückt wird, dass sie aber dann nach einer solchen nicht nur durchaus unbefriedigenden, sondern auch äusserst schwer verständlichen Darstellung auf 10 Seiten begriffen werden soll!

Der Grund, warum solche Betrachtungen neben

1) 6. Aufl. Leipzig 1907.

der mathematisch exakten Grenzmethode sich vielfach so lange erhalten konnten, ist wohl in einem weitverbreiteten Bedürfnis zu suchen, sich über die abstrakt logischen Formulierungen der Grenzmethode hinaus tiefer in das innerste Wesen der stetigen Grössen hineinzufühlen und sich auch bestimmtere Vorstellungen davon zu bilden, als es durch blosses Betonen der psychologischen den Grenzbegriff bestimmenden Momente geschieht. Charakteristisch dafür ist eine Formulierung, die, so viel ich weiss, von dem Philosophen Hegel herrührt, und die früher vielfach in Büchern und Vorlesungen vorgebracht wurde; sie besagt, dass die Funktion $y = f(x)$ das Sein der Dinge, der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ aber das Werden der Dinge darstellt. Sicher liegt etwas ansprechendes darin, nur muss man sich darüber klar sein, dass ein solches Wort die ferneren mathematischen Entwicklungen durchaus nicht fördert, da diese auf präziseren Begriffen aufbauen müssen.

In der neuesten Mathematik sind die „aktual" unendlich kleinen Grössen in ganz anderem Zusammenhange wieder zu Ehren gekommen, nämlich in den geometrischen Untersuchungen Veroneses und dann auch Hilberts in seinen „Grundlagen der Geometrie".[1]

1) 2. Aufl. Leipzig 1903.



Die Idee dabei ist in aller Kürze die: Man betrachtet eine Geometrie, in der durch eine Angabe $x = a$, wo $a$ eine gewöhnliche reelle Zahl ist, nicht nur ein Punkt der x-Achse, sondern unendlich viele bestimmt werden, deren Abszissen sich um endliche Vielfache unendlich kleiner Grössen verschiedener Ordnung $\eta, \zeta, \dots$ unterscheiden; ein Punkt ist also erst bestimmt, wenn man

$$x = a + b\eta + c\zeta + \dots$$

gibt, wo $a, b, c, \dots$ gewöhnliche reelle Zahlen sind. Bei Hilbert wird nun die Sache so gewandt, dass durch geeignete axiomatische Festlegungen über diese so eingeführten Grössen evident wird, dass man widerspruchsfrei mit ihnen operieren kann. Die Hauptsache ist dabei, die Grössenbeziehung von $x$ zu einer zweiten Zahl $x_1 = a_1 + b_1\eta + c_1\zeta + \dots$ geeignet zu bestimmen. Man setzt dazu zunächst natürlich fest, dass $x >$ oder $< x_1$, wenn $a >$ oder $< a_1$; ist aber $a = a_1$, so soll der zweite Koeffizient über das Grössenverhältnis entscheiden, derart dass $x \gtrless x_1$, wenn $b \gtrless b_1$, und wenn auch $b = b_1$ ist, so sollen die $c$ entscheiden, u. s. f. Sie werden das am klarsten auffassen, wenn Sie mit den hingeschriebenen Buchstaben keinerlei Vorstellung weiter zu verbinden versuchen.

Es ergibt sich nun, dass man mit den Dingen nach diesen und den weiter hinzuzufügenden Regeln ganz analog operieren kann, wie mit endlichen Zahlen; nur ein wesentlicher Satz fällt fort, der im System der gewöhnlichen reellen Zahlen gilt, daß man zu 2 positiven Zahlen $e$, $\alpha$ stets eine endliche ganze Zahl $n$ so bestimmen kann, daß $n \cdot e > \alpha$, wie klein auch $e$ und wie groß $\alpha$ sei. Hier ergeben hingegen die angeführten Definitionen unmittelbar, daß ein beliebiges endliches Vielfache $n \cdot \eta$ von $\eta$ immer noch kleiner ist als jede positive endliche Zahl $\alpha$, und diese Eigenschaft ist es eben, die $\eta$ als unendlich kleine Größe charakterisiert. Ebenso ist stets $n \cdot \xi < \eta$, d. h. $\xi$ ist eine unendliche kleine Größe höherer Ordnung, als $\eta$.

Man nennt nun dieses Zahlensystem ein Nichtarchimedisches, da man jenes Theorem über endliche Zahlen als Archimedisches Axiom bezeichnet, weil Archimedes es als nicht beweisbare resp. nicht weiter bewiesene grundlegende Annahme über die endlichen Zahlen hervorhebt; daß die Gültigkeit dieses Axioms aufhört, ist charakteristisch für das Auftreten aktual unendlich kleiner Größen. Übrigens ist der Name Archimedisches Axiom wie die meisten Personalbezeichnungen historisch ungenau; das Axiom ist mehr als ein halbes Jahrhundert vor Archimedes bereits von



Euklid hervorgehoben worden, und auch der soll es nicht erfunden, sondern wie sehr viele seiner Sätze von Eudoxus von Rhodus übernommen haben. – Das Studium der nichtarchimedischen Größen, die man besonders als Koordinaten zum Aufbau einer „nichtarchimedischen Geometrie" verwendet, verfolgt den Zweck einer tieferen Erkenntnis der Aussagen über Stetigkeit und gehört zu der großen Gruppe der Untersuchungen über die logische Abhängigkeit der verschiedenen Axiome der gewöhnlichen Geometrie und Arithmetik; man konstruiert dazu stets solche künstliche Zahlsysteme, für die nur ein Teil aller Axiome gilt und schließt dann auf die logische Unabhängigkeit der andern Axiome von diesen.

Es liegt nun natürlich die Frage nahe, ob man nicht auf solche Zahlensysteme gestützt der traditionellen Begründung der Infinitesimalrechnung mit unendlich kleinen Größen eine durchaus exakte, modernen Ansprüchen genügende Gestaltung geben, d. h. gewissermaßen auch eine nichtarchimedische Analysis aufbauen könnte. Die erste und hauptsächlichste Aufgabe wäre da, den Mittelwertsatz $f(x+h)-f(x)=h \cdot f(x+\vartheta h)$ aus den hier vorauszusetzenden Axiomen zu beweisen. Ich will einen Fortschritt in dieser Richtung nicht geradezu als unmöglich bezeichnen; bisher ist aber jedenfalls von keinem der vielen Leute, die sich mit aktual unendlich kleinen Größen beschäftigen, dazu etwas Positives geleistet worden.

Zu Ihrer Orientierung bemerke ich noch, daß das Wort „*unendlich klein*" seit Cauchy in den modernen Lehrbüchern in einem anderen Sinne gebraucht wird. Man sagt dann nämlich nie, daß eine Größe unendlich klein *ist*, sondern nur, daß sie unendlich klein *wird*, und meint damit nur eine bequeme Ausdrucksweise dafür, daß sie unbegrenzt gegen Null abnimmt.

Ich muß nun noch der *Reaktion* gedenken, die diese Begründung der Infinitesimalrechnung auf unendlich kleine Größen hervorgerufen hat. Man empfand bald das Mystische, Unbewiesene in diesen Vorstellungen, und daher entstand vielfach das *Vorurteil*, als sei die Differentialrechnung ein *besonderes philosophisches System*, das man nicht beweisen, nur glauben könne, oder geradezu grob gesagt – Schwindel. Einer der schärfsten Kritiker in diesem Sinne ist der Philosoph *Berkeley*, der in dem kleinen Buche „The analyst"[1] die in der Mathematik seiner Zeit herrschenden Unklarheiten in sehr amüsanter *Darstellung* angriff. Er geht davon aus, daß

1) London 1734.



man sich gegenüber den Prinzipien und Methoden der Mathematik dieselbe Freiheit der Kritik bewahren müsse, die die Mathematiker hinsichtlich der Geheimnisse der Religion anwenden, und greift dann alle Methoden der neuen Analysis, den Fluxionskalkul sowie das Operieren mit Differentialen, aufs heftigste an; er kommt zu dem Schlusse, daß der gesamte Aufbau der Analysis unklar und durchaus unverständlich ist.

Ähnliche Anschauungen haben sich gerade auch auf philosophischer Seite vielfach bis in die Gegenwart erhalten; da kennt man eben immer nur das Operieren mit Differentialen und hat die neuerdings ja zu völliger Strenge ausgebildete Grenzmethode nicht mehr aufgenommen. Als Beispiel lassen Sie mich nur eine Stelle aus *Baumanns „Raum, Zeit und Mathematik"*[2] aus den sechziger Jahren zitieren: „so verwerfen wir die logische und metaphysische Rechtfertigung, die Leibniz dem Kalkul gegeben hat, aber diesen Kalkul selbst tasten wir nicht an. Wir halten ihn für eine geniale Erfindung, die sich praktisch bewährt hat, für eine Kunst mehr als eine Wissenschaft; rein logisch ist er nicht

1) Bd. II. (Berlin 1869), pag. 55.

zu konstruieren, aus den Elementen der gewöhnlichen Mathematik ergibt er sich nicht ..."

Aus dieser Reaktion gegen die Differentiale ist nun auch der schon mehrfach erwähnte Versuch von Lagrange in seiner „Théorie des fonctions analytiques" von 1797 zu erklären, der uns nun wieder in neuer Beleuchtung erscheint. Lagrange will da nicht nur die unendlich kleinen Größen, sondern auch jeden Grenzübergang aus der Theorie entfernen, indem er sich auf solche Funktionen beschränkt, die durch Potenzreihen definiert sind:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 . x^3 + \dots,$$

und für diese die „abgeleitete Funktion $f'(x)$" – charakteristischer Weise vermeidet er das Wort Differentialquotient und das Zeichen $\frac{dy}{dx}$ – durch eine neue Potenzreihe

$$f'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots$$

rein formal definiert. Konsequent spricht er dann auch nicht von Differentialrechnung, sondern von einem „Derivationskalkul". Dauernd befriedigen freilich konnte diese Darstellung nicht. Denn einmal ist der hier verwendete Funktionsbegriff, wie wir ja kürzlich erst ausführlicher darlegten, viel zu eng; vor allem aber machen solche durchaus forma-



len Definitionen eine tiefere Erfassung des Wesens des Differentialquotienten oder Integrales unmöglich, und tragen dem, was wir psychologische Momente nannten, gar keine Rechnung; warum man sich gerade mit so eigentümlich abgeleiteten Reihen beschäftigt, lassen sie gänzlich unerörtert. Endlich aber kommt man ohne Grenzbetrachtungen nur dann aus, wenn man die Konvergenz dieser Potenzreihen vollkommen außer Acht läßt; sowie man sie in Rücksicht ziehen will – und das wird zur wirklichen Verwendung der Reihen natürlich nötig –, so muß man doch wieder ebendenselben Grenzbegriff heranziehen, zu dessen Vermeidung eigentlich das ganze System ersonnen ist.

Ich schließe damit diese kurze historische Skizze der Entwicklung der Infinitesimalrechnung ab, in der ich mich naturgemäß darauf beschränken mußte, nur immer die bedeutendsten leitenden Männer hervorzuheben. Gewiß müßte sie eigentlich durch ein eingehendes Studium der ganzen Literatur jener Periode vertieft werden. Viele interessante Hinweise dazu können Sie in dem Vortrage von Max Simon auf der Frankfurter Naturforscherversammlung von 1896: „Zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung" finden. –

Wenn wir nun zum Schluß noch kurz einen Blick auf die Stellung des Schulunterrichts zu der Infinitesimalrechnung werfen, so sehen wir jenen ganzen historischen Entwicklungsgang sich dort gewissermaßen widerspiegeln. Wo man früher an der Schule Infinitesimalrechnung trieb, da hatte man – das tritt wenigstens in den Lehrbüchern klar zu Tage und mag wohl im Unterricht nicht anders gewesen sein – keineswegs eine deutliche Vorstellung des exakten wissenschaftlichen Aufbaus mit Hilfe der Grenzmethode; diese trat höchstens mehr oder weniger verschwommen auf, während vielmehr das Operieren mit unendlich kleinen Größen und manchmal auch eine Derivationsrechnung im Sinne von Lagrange im Vordergrunde stand. Natürlich entbehrte dieser Unterricht nicht nur der Strenge, sondern auch der Verständlichkeit, und man kann es wohl verstehen, wenn sich allmählich eine sehr starke Abneigung gegen das Vorbringen der Infinitesimalrechnung auf der Schule verbreitete. Sie gipfelte in den siebziger und achtziger Jahren geradezu in einem behördlichen Verbot dieses Unterrichts, selbst auf den Realanstalten.

Freilich hat das nicht gehindert, wie ich ja schon früher gelegentlich andeutete, daß die Grenz-



methode auf der Schule doch gehandhabt wurde, wo man sie notwendig brauchte; nur vermied man den Namen, oder glaubte wohl gar gelegentlich auch, daß man etwas anderes treibe. Ich hebe da nur drei Beispiele hervor, deren Sie sich wohl auch meist von Ihrer Schulzeit her erinnern werden:

a.) Die bekannte Berechnung des Kreisumfanges und Inhaltes durch Approximation des Kreises mittels ein- und umgeschriebener regulärer Polygone ist ja offenbar nichts als eine Integration. Sie stammt bekanntlich bereits aus dem Altertum, von Archimedes, und diesem klassischen Alter hat sie es auch zu verdanken, daß sie sich auf der Schule erhalten hat.

b.) Der physikalische, speziell der mechanische Unterricht braucht notwendig die Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung und ihre Anwendung bis hin zu den Fallgesetzen. Deren Ableitung ist aber dem Wesen nach genau identisch mit der Integration der Differentialgleichung $s'' = g$ durch die Funktion $s = \frac{1}{2} g t^2 + a t + b$, wo $a, b$ Integrationskonstanten sind. Dieses Problem muß die Schule unter dem Druck der Anforderungen der Physik lösen, und die Methoden, die sie anwendet, sind natürlich nur verkleidete, mehr oder weniger exakte Integrationsmethoden.

c.) An vielen norddeutschen Schulen wird *Theorie der Maxima und Minima* getrieben nach einem Verfahren, das man da nach *Schellbach* benennt, jenem hervorragenden mathematischen Pädagogen, von dem Sie alle wohl schon gehört haben. Es besteht darin, daß man

$$\lim_{x=x_1}\left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\right)=0$$

setzt, um die Extrema der Funktion $y=f(x)$ zu erhalten – das ist genau die Methode der Differentialrechnung, nur daß das Wort Differentialquotient nicht gebraucht wird. Schellbach selbst hat diese Einkleidung gewiß nur gebraucht, da die Differentialrechnung auf der Schule verboten war, und er diese Ideeen doch nicht missen wollte; seine Schüler aber übernahmen die Sache unverändert, benannten sie nach ihm, und so werden heute – es geschieht tatsächlich noch – den Schülern Sachen, die Leibniz und Newton besessen haben, unter dem Namen Schellbach vorgeführt!

Lassen Sie mich nun endlich noch charakterisieren, wie sich unsere *Reformtendenzen* zu diesen Dingen stellen, die ja jetzt in Deutschland wie auch an-



derswo, besonders in Frankreich, mehr und mehr an Boden gewinnen und hoffentlich den mathematischen Unterricht der nächsten Dezennien beherrschen werden. *Wir wollen, daß die Begriffe, die durch die Symbole $y=f(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\int y\,dx$ bezeichnet werden, mit diesen Bezeichnungen den Schülern geläufig gemacht werden, und zwar nicht als eine neue abstrakte Disziplin, sondern im organischen Aufbau innerhalb des Gesamtunterrichts, wobei man von den allereinfachsten Beispielen an langsam aufsteigen möge.* So beginne man auf Obertertia und Untersekunda etwa die Funktionen $y=ax+b$ (für bestimmte Zahlwerte $a, b$) und $y=x^2$ ausführlich zu betrachten, auf *Millimeterpapier* zu zeichnen, und lasse daran langsam die Begriffe der Steigung und des Flächeninhalts entstehen. Auf der Oberstufe mag man dann die so gewonnenen Kenntnisse resumieren, wobei sich denn von selbst ergibt, *daß man die Grundlagen oder Anfänge der Infinitesimalrechnung vollständig besitzt.* Die Hauptsache dabei ist, dem Schüler klar zu machen, daß hier durchaus nichts Mystisches vorliegt, sondern einfache Dinge, die ein jeder verstehen kann.

Die unabweisbare Notwendigkeit solcher Reformen liegt darin begründet, daß sie die mathematischen Begriffsbildungen betreffen, die heutzutage die Anwendungen der Mathematik auf alle möglichen Gebiete durchaus beherrschen, und ohne welche alle Studien an der Hochschule, schon die einfachen Studien über Experimentalphysik gänzlich in der Luft schweben. Ich kann mich hier mit diesen kurzen Andeutungen begnügen, zumal dieser Gegenstand gerade im Klein-Schimmack (zitiert S. 6) ausführliche Berücksichtigung gefunden hat. –

Um diese allgemeinen Betrachtungen nun wieder durch etwas Konkretes zu ergänzen, will ich jetzt noch einen speziellen besonders wichtigen Gegenstand der Infinitesimalrechnung eingehender behandeln:

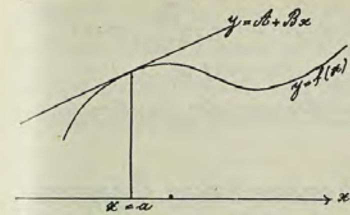
## 2. Der Taylorsche Lehrsatz.

Ich werde dabei in ähnlichem Sinne wie früher bei den trigonometrischen Reihen von der usuellen Behandlung in den Lehrbüchern abweichen, indem ich die für die Praxis wichtige endliche Reihe und die anschauliche Erfassung der Sachlage durch Figuren in den Vordergrund stelle. So bekommt alles ein ganz elementares, leicht faßliches Ansehen.

Wir gehen von der Frage aus, ob man den Verlauf einer beliebigen Kurve $y = f(x)$ nicht auf ein Stück



hin durch möglichst einfache Kurven zweckmäßig approximieren kann.




Das Nächstliegende ist, in der Umgegend eines Punktes $x = a$ die Kurve durch ihre geradlinige Tangente

$$y = A + Bx$$

zu ersetzen, wie man das in der Physik und in anderen Anwendungen tut, so oft man bei einer Reihenentwicklung die höheren Potenzen der unabhängigen Variablen „wegwirft". Man kann nun in ähnlicher Weise noch bessere Approximationen erreichen, wenn man Parabeln 2ter, 3ter, ... Ordnung:

$$y = A + Bx + Cx^2, \quad y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3, \ldots$$

oder – analytisch gesprochen – Polynome höheren Grades verwendet; gerade Polynome sind besonders zweckmäßig, da sie sich am bequemsten berechnen lassen. Wir werden diese Kurven speziell so legen, daß sie sich an der Stelle $x = a$ möglichst eng an die gegebene Kurve anschmiegen, d. h. daß sie Schmiegungsparabeln sind. Die quadratische Parabel z. B. wird also nicht nur in der Ordinate, sondern auch in 1ter und 2ter Ableitung mit $y = f(x)$ übereinstimmen (d. h. „oskulieren"), die kubische Parabel auch in der dritten Ableitung u. s. f. Eine einfache Rechnung ergibt dann als analytischen Ausdruck der $n$ten Schmiegungsparabel:

$$y = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\dots n}(x-a)^n,$$
$$(n = 1, 2, 3, \dots)$$

und das sind gerade die ersten $n$ Glieder der Taylorschen Reihe.

Die Untersuchung, ob und wieweit diese Polynome brauchbare Näherungskurven darstellen, leiten wir wieder wie bei den trigonometrischen Reihen (S. 428) durch eine mehr experimentelle Betrachtung ein; ich kann Ihnen sogleich einige Zeichnungen der ersten Schmiegungsparabeln einfacher Kurven projizieren, die gleichfalls Herr Schimmack entworfen hat.[1] Es sind da zunächst folgende 4 Funktionen mit ihren Schmiegungsparabeln an der Stelle 0 dargestellt, die bei $x = -1$ sämtlich singulär sind:

1.) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots,$

2.) $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - + \dots,$

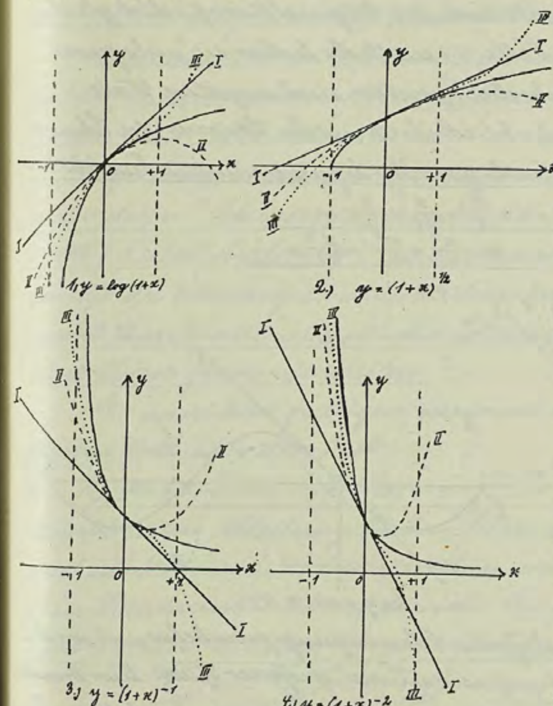
3.) $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + - \dots,$

4.) $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + - \dots.$

1.) Vier von diesen Figuren hat Herr Schimmack seinem Bericht über den Göttinger Ferienkursus Ostern 1908 beigegeben („Über die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen". Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht 39 (1908), p. 513 ff.; auch separat, Leipzig 1908).



Die sukzessiven Schmiegungsparabeln nähern sich im Intervalle $(-1, +1)$ der Originalkurve mit steigender Ordnung immer besser, biegen aber auffälliger Weise rechts von $x = +1$ in demselben Maße stärker abwechselnd nach oben und unten von ihr ab.

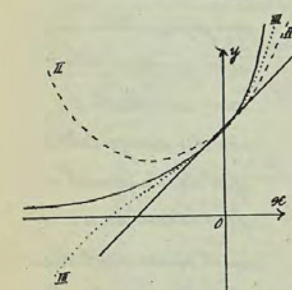



Am singulären Punkte $x = -1$ nehmen in den Fällen 1.), 3.) 4.), wo die Originalfunktion unendlich groß wird, die sukzessiven Schmiegungsparabeln immer größere Werte an; im Falle 2.), wo der dargestellte Ast der Originalfunktion bei $x = -1$ mit einer vertikalen Tangente abbricht, greifen alle Parabeln noch über diesen Punkt hinaus, nähern sich aber doch in ihm selbst noch mehr und mehr der Original-Kurve, indem sie dort immer steiler verlaufen. An der symmetrisch gelegenen Stelle $x = +1$ kommen in den ersten beiden Fällen die Schmiegungsparabeln der Originalkurve noch näher und näher; im Falle 3.) sind sie abwechselnd gleich 1 und 0, während die Originalkurve selbst gleich $\frac{1}{2}$ wird, und im Falle 4.) endlich haben sie unbegrenzt wachsende abwechselnd positive und negative Werte.

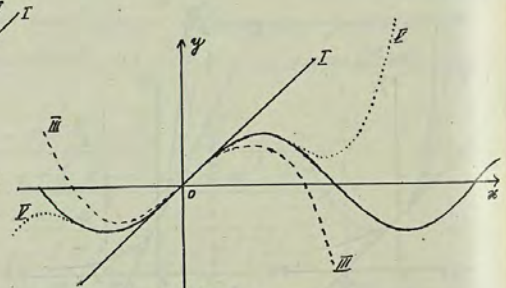
Fernerhin habe ich hier noch Skizzen der Schmiegungsparabeln von 2 ganzen transzendenten Funktionen:

$$5.)\qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\,,$$

$$6.\qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\,.$$




5.) $y = e^x$




6.) $y = \sin x$

Sie bemerken da, daß die Schmiegungsparabeln mit wachsender Ordnung auf ein immer größeres Stück hin brauchbare Annäherungen an die Originalkurve darstellen. Be-



sonders anschaulich sehen Sie bei $\sin x$, wie die Parabeln sich bemühen, immer mehr Oszillationen der Sinuskurve mitzumachen.

Ich weise besonders darauf hin, daß das Zeichnen solcher Kurven in ganz einfachen Fällen vielleicht auch für die Schule geeigneten Stoff darstellt.

Nachdem wir so Erfahrungsmaterial gesammelt haben, müssen wir an die mathematische Betrachtung gehen. Wir haben da zunächst die praktisch äußerst wichtige Frage nach der Genauigkeit, mit der allgemein die $n^{te}$ Schmiegungsparabel die Originalkurve darstellt (Restabschätzung), und daran schließt sich naturgemäß der Übergang zu unendlichem $n$ an: Kann man nicht durch eine unendliche Potenzreihe die gegebene Kurve genau darstellen?.

Es wird hier genügen, wenn ich nur den geläufigsten Satz über den Rest

$$R_n(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right\}$$

angebe; seine Ableitung finden Sie in allen Büchern, und ich komme überdies späterhin noch vom allgemeinen Standpunkte darauf zurück: Es gibt zwischen $a$ und $x$ einen Mittelwert $\xi$, so daß $R_n$ darstellbar ist als

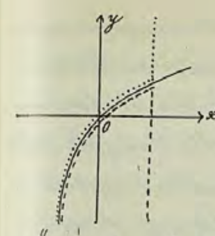
$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \qquad (a \leqq \xi \leqq x).$$

Die Frage des Überganges zur unendlichen Reihe ist nun unmittelbar darauf zurückgeführt, ob dieser $R_n(x)$ mit unendlich wachsendem $n$ den Limes 0 hat, oder nicht.

Für unsere Beispiele entnimmt man hieraus, wie Sie gleichfalls überall nachlesen können, daß zunächst bei 5.) und 6.) die unendliche Reihe für alle $x$ konvergiert. Bei 1.) bis 4.) ergibt sich, daß die unendliche Reihe zwischen $-1$ und $+1$ gegen die Originalfunktion konvergiert, außerhalb dieses Intervalles aber divergiert. Für $x = -1$ haben wir im Falle 2.) Konvergenz gegen den Funktionswert, bei 1.) 3.) 4.) wird der Grenzwert der Reihe unendlich ebenso wie der Funktionswert, so daß man eigentlich auch von Konvergenz reden könnte; man gebraucht aber traditionell dieses Wort nicht bei Reihen mit bestimmt unendlichem Grenzwerte. Für $x = +1$ endlich haben wir Konvergenz in den ersten beiden, Divergenz in den letzten beiden Beispielen. All das steht in schönster Übereinstimmung mit den Ergebnissen unserer Figuren.

Wir können nun aber, wie schon ähnlich bei den trigonometrischen Reihen, auch nach den Grenzwerten fragen, denen die Annäherungsparabeln als Kurven aufgefaßt zustreben; die können ja bei $x = \pm 1$ nicht so plötzlich abbrechen. Für $\log(1+x)$ skizziere ich Ihnen diese Grenzkurve hier,



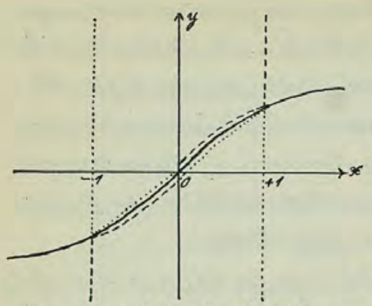



und zwar haben die geraden und ungeraden Parabeln für sich verschiedene Grenzlagen, die jedesmal aus der Logarithmuskurve zwischen $-1$ und $+1$ und dem bei $x = +1$ ansetzenden unteren bezw. oberen Stücke der Vertikalen $x = +1$ besteht. Ähnlich ist es in den andern drei Fällen.

Die theoretische Betrachtung der Taylorschen Reihe findet ihre Vollendung erst beim Übergang zu komplexen Variablen, denn nur dann kann man das plötzliche Aufhören der Konvergenz der Potenzreihen an ganz regulären Stellen der Funktion verstehen. In unsern 4 Beispielen freilich mag man diese Erscheinung an der Stelle $x = +1$ hinreichend damit erklärt finden, daß man sagt, eine Reihe kann nach rechts hin nicht weiter konvergieren, als nach links, und links muß an der Stelle $x = -1$ die Konvergenz wegen der Singularität aufhören. Diese Überlegung kann aber bereits im folgenden Falle nicht mehr Platz greifen. Die Taylorsche Entwicklung einer für alle reellen $x$ regulär verlaufenden Astes von arc tg $x$

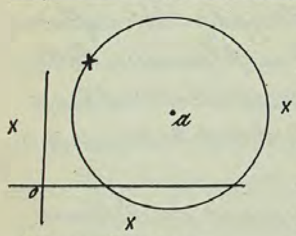
$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots$$

konvergiert nur im Intervalle $(-1, +1)$, und die Schmiegungsparabeln konvergieren alternierend gegen den gestrichelten und den punktierten Zug. Das plötzliche




Aufhören der Konvergenz an den durchaus regulären Stellen $x = \pm 1$ ist hier bei Beschränkung auf reelle Variable durchaus nicht mehr zu verstehen.

Die Aufklärung ist erst in dem grossen Theoreme vom Konvergenzkreis enthalten, das die schönste funktionentheoretische Leistung Cauchys ist: Markiert man sich alle singulären Stellen der analytischen Funktion $f(x)$ in der komplexen $x$-Ebene, wenn $f(x)$ eindeutig ist, bezw. auf der zu $f(x)$ gehörigen Riemannschen Fläche, falls $f(x)$ mehrdeutig ist, so konvergiert die zu einer regulären Stelle $x = a$ gehörige Taylorsche Reihe im Innern des grössten Kreises, den man auf dem betr. Blatte der Riemannschen Fläche um

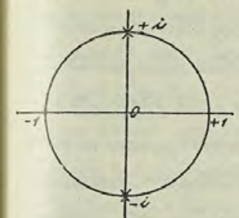



$a$ so legen kann, dass kein singulärer Punkt in seinem Innern liegt (so dass also mindestens ein singulärer Punkt auf seiner Peripherie liegt); die Reihe konvergiert ferner für keine Stelle ausserhalb dieses Kreises.

Unser Beispiel $\operatorname{arc\,tg} x$ hat nun bekanntlich $x = \pm i$ zu



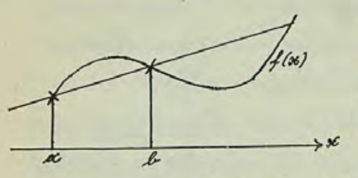
singulären Stellen, und der Konvergenzkreis der Entwicklung nach Potenzen von $x$ ist daher der Einheitskreis um $x = 0$; die Konvergenz muss also bei $x = \pm 1$ aufhören,




da die reelle Achse an diesen Stellen den Konvergenzkreis verlässt.

Was endlich die Konvergenz der Reihe auf dem Einheitskreise selbst angeht, so muss ich mich hier mit einem Hinweis begnügen, der an den früher angedeuteten Zusammenhang von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen anknüpft: sie hängt davon ab, ob der reelle und der imaginäre Teil der Funktion auf dem Konvergenzkreise mit den Singularitäten, die er daselbst notwendig besitzt, in eine konvergente trigonometrische Reihe entwickelt werden kann oder nicht. –

Ich möchte nun diese Erörterungen über den Taylorschen Satz dadurch beleben, dass ich seine Beziehungen zu den Problemen der Interpolation und Differenzenrechnung auseinandersetze. Auch dort betrachtet man nämlich die Aufgabe, eine gegebene Kurve durch eine Parabel zu approximieren; statt sich ihr aber in einem Punkte möglichst gut anzuschmiegen, soll sie sie in einer Anzahl von vornherein gegebener Punkte schneiden, und die Frage ist wieder, wie weit diese „*Interpolationsparabel*" eine leidliche Annäherung gibt. Im einfachsten Falle heißt das also, daß man die Kurve nicht mehr durch ihre Tangente, sondern durch eine *Sekante* ersetzt; analog wird man weiterhin die durch 3 Punkte der gegebenen Kurve gehende quadratische Parabel, die durch 4 ihrer Punkte gehende kubische Parabel und so fort diskutieren.



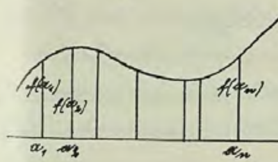

Diese Fragestellung der Interpolation ist durchaus naturgemäß und wird ungeheuer oft von jedermann angewendet, z. B. bei der Benutzung numerischer Logarithmentafeln. Da nimmt man nämlich gerade an, daß die Logarithmuskurve zwischen 2 der in der Tafel angegebenen Werte geradlinig verläuft und interpoliert „linear" in der bekannten durch die Einrichtung der „Differenzentäfelchen" erleichterten Weise; wird das nicht scharf genug, so wendet man wohl auch quadratische Interpolation an.

*Von der so umschriebenen allgemeinen Aufgabe ist nun die Bestimmung der Schmiegungsparabeln beim Taylorschen Satz ein spezieller Fall*, indem einfach die Schnitte der Interpolationsparabeln in einen Punkt zu-



sammenrücken. Freilich ist, da bei der Ersetzung der Kurve durch diese Schmiegungsparabeln das Wort „Interpolation" im eigentlichen Sinne nicht mehr am Platze, aber man wird ja auch stets das „*Extrapolieren*" in die Aufgabe der *Interpolation* mit einschließen; man wird z. B. die Sekante nicht nur *zwischen* ihren Schnitten sondern auch *außerhalb* mit der Kurve vergleichen. Daher erscheint für das ganze Verfahren das umfassende Wort *Approximation* wohl zweckmäßiger.

Ich will nun die *wichtigsten Interpolationsformeln* angeben. Wir wollen zunächst die Parabel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmen, die die Funktion in $n$ willkürlich angenommenen Punkten $a_1, a_2, \dots a_n$ schneidet, d. h. deren Ordinaten in diesen Punkten gleich $f(a_1), f(a_2), \dots f(a_n)$ sind. Diese Aufgabe wird nun gelöst durch die *Lagrangesche Interpolationsformel*:




$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} y = {} & \frac{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)} \cdot f(a_1) \\ & + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)} \cdot f(a_2) \\ & + \dots\dots\dots\dots ; \end{aligned} \right.$$

es treten so im ganzen $n$ Glieder mit den Faktoren $f(a_1)$,

$f(a_2), \dots f(a_n)$ auf, und im Zähler fehlen der Reihe nach die Faktoren $(x-a_1), (x-a_2), \dots (x-a_n)$. Die Richtigkeit dieser Formel kann man sofort verifizieren: Einmal ist jeder Summand von $y$ und daher $y$ selbst ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in $x$, und dann verschwinden für $x = a_1$ beispielsweise alle Brüche vom zweiten an, während der erste 1 wird, so daß wir $y = f(a_1)$ erhalten; ebenso wird $y = f(a_2)$ für $x = a_2$ etc.

Aus dieser Formel ergibt sich durch Spezialisierung die Newtonsche Formel, die historisch freilich wesentlich älter ist. Sie bezieht sich auf den Fall, daß die gegebenen Abszissen $a_1, \dots a_n$ äquidistant sind.

Hier ist dann die Bezeichnungsweise der Differenzenrechnung sehr von Vorteil, und wir wollen diese daher zunächst einführen.

$\Delta x$ sei irgend ein Zuwachs von $x$ und $\Delta f(x)$ der entsprechende Zuwachs von $f(x)$, so daß:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x).$$

Nun ist $\Delta f(x)$ wiederum eine Funktion von $x$, die bei Veränderung von $x$ um $\Delta x$ eine bestimmte Differenz besitzen wird, die „zweite Differenz" $\Delta^2 f(x)$:

$$\Delta f(x+\Delta x) - \Delta f(x) + \Delta^2 f(x),$$

und ebenso setzen wir weiterhin



$$\Delta^2 f(x+\Delta) = \Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x), \quad \text{u. s. f.}$$

Diese Bezeichnungen sind genau denen der Differentialrechnung analog, nur daß es sich hier um bestimmte endliche Größen handelt und von Grenzprozessen nicht die Rede ist.

Aus den angeschriebenen Definitionen der Differenzen folgt nun unmittelbar für die Werte von $f$ an den sukzessiven äquidistanten Stellen:

$$(2)\quad \begin{cases} f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x), \\ f(x+2\Delta x) = f(x+\Delta x) + \Delta f(x+\Delta x) \\ \qquad = f(x) + 2\Delta f(x) + \Delta^2 f(x), \\ f(x+3\Delta x) = f(x+2\Delta x) + \Delta f(\Delta + 2\Delta x) \\ \qquad = f(x) + 3\Delta f(x) + 3\Delta^2 f(x) + \Delta^3 f(x), \\ f(x+4\Delta x) = f(x) + 4\Delta f(x) + 6\Delta^2 f(x) + 4\Delta^3 f(x) + \Delta^4 f(x); \end{cases}$$

in dieser einfachen Weise drücken sich auch weiter die Werte an äquidistanten Stellen durch die sukzessiven Differenzen an der ersten Stelle $x$ aus, wobei die Binomialkoeffizienten als Faktoren eingehen.

Nun lautet die Newtonsche Formel für die zu den $n$ äquidistanten Punkten

$$a_1 = a, \; a_2 = a + \Delta x, \dots \; a_n = a + (n-1)\Delta x$$

gehörige Interpolationsparabel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die also daselbst mit $f(x)$ gleiche Ordinaten hat:

$$(3)\quad \begin{cases} y = f(a) + \dfrac{(x-a)}{1!}\dfrac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \dfrac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\dfrac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2} \\ \quad + \dots + \dfrac{(x-a)(x-a-\Delta x)\dots(x-a-(n-2)\Delta x)}{(n-1)!}\dfrac{\Delta^{n-1} f(a)}{(\Delta x)^{n-1}} \end{cases}$$

In der Tat ist das einmal ein Polynom $(n-1)^{ter}$ Ordnung in $x$; weiter aber reduziert sich für $x = a$ $y$ auf $f(a)$, für $x = a + \Delta x$ fallen alle Glieder vom zweiten an fort, und es bleibt $y = f(a) + \Delta f(a)$, was nach (2) gerade $f(a + \Delta x)$ ist, und so geht das fort: Die Tabelle (2) ergibt, daß das Polynom an allen $n$ Stellen gerade die richtigen Werte annimmt.

Wollen wir eine dieser Interpolationsformeln nun aber wirklich mit Vorteil anwenden, so müssen wir etwas über die Genauigkeit wissen, mit der sie $f(x)$ darstellt, d. h. wir müssen eine Restabschätzung kennen. Die hat nun Cauchy 1840 gegeben [1], und ich möchte sie hier noch ableiten. Es sei $x$ irgend ein Wert zwischen den Werten $a_1, a_2, \dots a_n$ (wir legen die allgemeinere Lagrangesche Formel zu Grunde) oder außerhalb von ihnen (Inter- oder Extrapolation); wir bezeichnen mit $P(x)$ den Wert der durch die Formel gegebenen Interpolationsparabeln $(n-1)^{ter}$ Ordnung, mit $R(x)$ den Rest:

$$(4) \qquad f(x) = P(x) + R(x).$$

Nach der Definition des $P(x)$ verschwindet $R$ sicher für $x = a_1, a_2, \dots a_n$, und wir setzen demgemäß

[1] Comptes Rendus XI, pg. 175 ff = Oeuvres, I Ser. T. V. (Paris 1885) pg. 422.



$$R(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{n!}\,\psi(x).$$

Das Herausziehen des Faktors $n!$ erweist sich als bequem; es zeigt sich dann nämlich, daß in völliger Analogie mit dem Restgliede der Taylorschen Reihe $\psi(x)$ gleich dem Werte der $n^{ten}$ Ableitung von $f(x)$ an einer irgendwie zwischen den $n+1$ Punkten $a_1, a_2, \dots a_n, x$ gelegenen Stelle $\xi$ ist. Diese Behauptung, daß die Abweichung des $f(x)$ vom Polynom $(n-1)^{ter}$ Ordnung von dem Gesamtverlauf der Funktion $f^{(n)}(x)$ abhängt, wird ganz plausibel, wenn man bedenkt, daß $f(x)$ im Falle identisch verschwindenden $f^{(n)}(x)$ gleich jenem Polynom wird.

Was nun den Beweis dieser Restformel betrifft, so gelingt er durch folgenden Kunstgriff: Man bilde als Funktion einer neuen Variablen $z$:

$$F(z) = f(z) - P(z) - \frac{(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)}{n!}\,\psi(x),$$

wobei man also in $\psi(x)$ die Variable $x$ als Parameter stehen läßt. Nun ist $F(a_1) = F(a_2) = \dots = F(a_n) = 0$, da ex definitione $P(a_1) = f(a_1)$, $P(a_2) = f(a_2)$, $\dots P(a_n) = f(a_n)$ ist. Ferner ist auch $F(x) = 0$, da für $z = x$ der letzte Summand in $R(x)$ übergeht und die rechte Seite wegen (4) verschwindet. Wir kennen also $n+1$ Nullstellen $z = a_1, a_2, \dots a_n, x$ von $F(z)$. Nun wenden wir eine erweiterte Form des Mittelwertsatzes an, die sich durch wiederholte Anwendung des gewöhnlichen Theorems (S. 468) ergibt:

Verschwindet eine samt ihren ersten $n$ Differentialquotienten stetige Funktion an $n+1$ Stellen, so verschwindet ihr $n^{\text{ter}}$ Differentialquotient an mindestens einer Stelle des alle Nullstellen enthaltenden Intervalles. Also gibt es, sofern $f(x)$, und daher auch $F(x)$, $n$ stetige Ableitungen hat, eine Stelle zwischen den äussersten der Werte $a_1, \dots a_n, x$, an der

$$F^{(n)}(\xi) = 0;$$

nun ist aber

$$F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \psi(x),$$

da das Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $P$ die $n^{\text{te}}$ Ableitung $0$ hat, und von dem letzten Summanden nur das höchste Glied $\frac{1}{n!}\, x^n \cdot \psi(x)$ eine nicht verschwindende $n^{\text{te}}$ Ableitung liefert. Also haben wir schliesslich

$$F^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - \psi(x) = 0, \text{ oder } \psi(x) = f^{(n)}(\xi),$$

und das gerade war zu beweisen.

Ich gebe nun speziell die Newtonsche Interpolationsformel mit ihrem Restglied ausdrücklich an:

$$(5.)\ \begin{cases} f(x) = f(a) + \dfrac{x-a}{1!}\,\dfrac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \dfrac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\,\dfrac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2} + \dots \\ \quad + \dfrac{(x-a)\cdots(x-a-(n-2)\Delta x)}{(n-1)!}\,\dfrac{\Delta^{(n-1)} f(a)}{(\Delta x)^{n-1}} + \dfrac{(x-a)\cdots(x-a-(n-1)\Delta x)}{n!}\, f^{(n)}(\xi), \end{cases}$$

wo $\xi$ ein Mittelwert in dem die $n+1$ Punkte $a, a+\Delta x, a+2\Delta x, \dots a+(n-1)\Delta x, x$ enthaltenden Intervalle ist. Diese Formel ist nun in der Tat für die Anwendungen geradezu unentbehrlich. Ich habe auf die lineare Interpolation bei Benutzung der Logarithmentafel schon hingewiesen; für $f(x) = \log x$ und $n = 2$ ergibt (5):



$$\log x = \log a + \frac{x-a}{1!}\,\frac{\Delta \log a}{\Delta x} - \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!}\,\frac{M}{\xi^2},$$

(denn es ist $\frac{d^2 \log x}{dx^2} = -\frac{M}{x^2}$, wenn $M$ der Modulus des Logarithmensystems ist), und wir haben so einen Ausdruck für den Fehler, den wir bei linearer Interpolation zwischen den beiden der Tafel zu entnehmenden Logarithmen von $a$ und $a+\Delta x$ machen. Speziell hat dieser Fehler verschiedenes Zeichen, je nachdem $x$ zwischen $a$ und $a+\Delta a$ oder ausserhalb liegt. Diese Formel sollte doch eigentlich jeder kennen, der mit Logarithmentafeln zu tun hat!

Ich will hier auf die Anwendungen nicht mehr weiter eingehen, vielmehr auf die grosse Analogie zwischen der Newtonschen Interpolationsformel und der Taylorschen Formel Ihre Aufmerksamkeit lenken. Diese Analogie hat einen tatsächlichen Untergrund: Man kann aus der Newtonschen Formel den Taylorschen Satz mit Restglied in einfachster Weise durchaus exakt ableiten, ganz entsprechend dem Grenzübergange von Interpolations- zu Schmiegungsparabeln. Lässt man nämlich, bei festem $x$, $a$ und $n$, $\Delta x$ gegen Null konvergieren, so gehen, da ja $f(x)$ $n$-mal differenzierbar sein sollte, die in (5) auftretenden $n-1$ Differenzenquotienten in die entsprechenden Differentialquotienten über:

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x), \quad \lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = f''(x), \; \ldots \; .$$

In das letzte Glied können mit abnehmendem $\Delta x$ andere und andere Werte $\xi$ eingehen; da aber alle andern Glieder rechts bestimmte Grenzwerte haben und die linke Seite während des ganzen Grenzprozesses den festen Wert $f(x)$ beibehält, müssen auch diese Werte $f^{(n)}(\xi)$ gegen einen bestimmten Wert konvergieren, der obendrein wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ wiederum ein Wert dieser Funktion an einer zwischen $a$ und $x$ gelegenen Stelle ist; bezeichnen wir diese wieder mit $\xi$, so erhalten wir also:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$
$$(a \leqq \xi \leqq x).$$

Damit haben wir den Taylorschen Satz mit Restglied vollständig bewiesen und ihn zugleich der allgemeinen Lehre von der Interpolation in schönster Weise eingeordnet.

Mir scheint diese Ableitung des Taylorschen Satzes, die ihn in einen größeren Zusammenhang sehr einfacher Fragen bringt und den Grenzübergang äußerst glatt erledigt, wohl die beste überhaupt mögliche zu sein. Aber nicht alle Mathematiker, denen diese Betrachtungen geläufig sind – merkwürdiger Weise sind sie aber vielfach und vielleicht sogar bei den Verfassern



von Lehrbüchern noch unbekannt – denken so; sie sind gewohnt, einem jeden Grenzübergang nur mit dem ernstesten Gesicht gegenüberzutreten und würden daher einen direkten Beweis des Taylorschen Satzes dieser Verknüpfung mit der Differenzenrechnung vorziehen.

Ich muß hier aber hervorheben, daß die geschichtliche Quelle der Entdeckung des Taylorschen Satzes tatsächlich die Differenzenrechnung ist. Ich erwähnte schon, daß ihn Brook Taylor in seinem „Methodus incrementorum"[1] zuerst aufgestellt hat; er leitet dort zunächst die Newtonsche Formel her, natürlich ohne Restglied, und läßt in ihr dann gleichzeitig $\Delta x = 0$ und $n = \infty$ werden; dann erhält er richtig aus ihren ersten Gliedern die ersten Glieder seiner neuen Reihe,

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \frac{d f(a)}{d x} + \frac{(x-a)^2}{2!} \frac{d^2 f(a)}{d x^2} + \cdots,$$

deren Fortsetzung nach demselben Gesetz ins Unendliche ihm nun selbstverständlich ist, – ohne daß er im Mindesten auf ein Restglied oder auf Konvergenzbetrachtungen eingeht. Hierin liegt nun tatsächlich ein Grenzübergang von unerhörter Kühnheit. In den ersten Gliedern, wo $x-a-\Delta x$, $x-a-2\Delta x$, ... vorkommt, ist ja allerdings keine Schwierigkeit weiter, da mit $\lim \Delta x = 0$

1) Londini 1715; pag. 21–23.

diese endlichen Vielfachen von $\Delta x$ natürlich auch verschwinden. Aber weiterhin kommen mit wachsendem $n$ noch Glieder in immer wachsender Anzahl, die Faktoren $x - a - k\Delta x$ mit immer wachsenden Werten $k$ enthalten, und man hat ohne weiteres gar kein Recht, sie alle ebenso zu behandeln, wie die ersten, und gar zu schließen, daß sie in eine konvergente Reihe übergehen.

Hier operiert also Taylor im Grunde mit unendlich kleinen Größen (Differentialen) in sozusagen noch viel leichtsinnigerer Weise als es die Leibnizianer jemals taten; es ist interessant, sich zu vergegenwärtigen, daß er als ganz junger Mann von 29 Jahren noch unter den Augen Newtons von dessen Grenzmethode abwich. Freilich gelang ihm dadurch auch diese Entdeckung allerersten Ranges.

Eine ausgezeichnete kritische Darstellung der ganzen Entwicklung dieses Theorems finden Sie übrigens in Alfred Pringsheims Arbeit „Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes".[1] Ich möchte hier noch über die übliche Unterscheidung der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe sprechen. Bekanntlich wird in allen Lehrbüchern der für $a = 0$ entstehende

[1] Bibliotheca mathematica (3. Folge) I (1900) pg. 433–479.



Spezialfall der Taylorschen Reihe

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

als Maclaurinsche Reihe selbständig aufgeführt, und manch' einer mag denken, daß die präzise Unterscheidung beider Reihen etwas sehr Wichtiges sei. Daß mathematisch nichts hinter dieser Unterscheidung steckt, sieht jeder sofort, der nur etwas von der Sache versteht; weniger bekannt ist, daß sie auch historisch ein vollkommener Unsinn ist. Da hat nämlich die zweifellose Priorität Taylor mit seinem allgemeinen Satze in der soeben angedeuteten Herleitung. Obendrein hebt er aber noch ausdrücklich an einer späteren Stelle seines Buches (pag. 27) die spezielle Gestalt der Reihe für $a = 0$ hervor und bemerkt, daß man sie mit Hilfe der heute sogenannten Methode der unbestimmten Koeffizienten auch direkt aufstellen kann. Diese Ableitung hat nun Maclaurin 1742 in seinem schon früher (S. 467) genannten „Treatise of fluxions" übernommen[1], indem er aber ausdrücklich Taylor zitiert und nicht den mindesten Anspruch erhebt, etwas Neues zu bringen. Aber das Zitat hat man wahrscheinlich nicht beachtet und den Verfasser des Lehrbuches auch für den Urheber des Satzes ge-

[1] Edinburgh 1742; Vol. II. pag. 610.

halten; so entstehen ja sehr häufig Irrtümer. Erst später ging man wieder auf Taylor zurück und benannte nun wenigstens die allgemeine Form nach ihm. – Es ist schwer, wenn nicht gar unmöglich, gegen solche einmal fest eingenistete Absurditäten anzukämpfen; man kann immer nur in dem kleinen Kreis derer, die historische Interessen besitzen, Aufklärung verbreiten.

Ich knüpfe an diese Auseinandersetzungen gern noch einige Bemerkungen allgemeinen Inhalts an, die unsere Erörterungen über die Infinitesimalrechnung beenden mögen:

### 3. Historische und paedagogische Betrachtungen.

Ich möchte zuerst darauf hinweisen, daß das von Taylor geknüpfte Band zwischen Differenzen- und Differentialrechnung noch lange Zeit gehalten hat: Noch in den analytischen Entwicklungen Eulers gehen beide Disziplinen stets Hand in Hand und die Formeln der Differentialrechnung erscheinen als Grenzfälle ganz elementarer Beziehungen, die in der Differenzenrechnung statthaben. Diese so naturgemäße Verbindung wird erst durch die wiederholt erwähnten formalen Definitionen der Lagrangeschen Deriva-



tionskalküls aufgehoben. Ich möchte Ihnen hier ein Sammelwerk aus dem Ende des 18. Jahrhunderts vorlegen, das ganz auf Lagrangeschem Boden stehend alle damals bekannten Tatsachen der Infinitesimalrechnung zusammenfaßt, den „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" von Lacroix.¹) Als charakteristische Probe aus diesem Werke gebe ich die Definition des Differentialquotienten (I, pg. 145): Eine Funktion $f(x)$ ist definiert durch eine Potenzreihe; durch Umordnung mit Hülfe des Binomischen Satzes gewinnt man:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \tfrac{1}{2} h^2 f''(x) + \dots .$$

Nun bezeichnet Lacroix einfach das in $h$ lineare Glied dieser Reihe mit $df(x)$, und indem er für $h$ selbst $dx$ schreibt, hat er für den Differentialquotienten, oder – wie er auch sagt – Differentialkoeffizienten:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

So ist diese Formel auf eine vollständig veräußerlichte, allerdings nicht angreifbare Weise herausgebracht. – In diesen Gedankenkreisen konnte Lacroix natürlich die Differenzenrechnung als Ausgangspunkt nicht mehr benutzen; sie erscheint ihm aber doch für

¹) 3. Bd. Paris 1797–1800. (2. éd. 1810–1813).

die Praxis zu wichtig, als daß er sie weglassen wollte, und so ergreift er denn den Ausweg, sie in ganz selbständiger, übrigens sehr ausführlicher Darstellung hinterher im dritten Bande zu bringen, ohne daß gedankliche Brücken von ihr zur Differentialrechnung führten.

Dieser „große Lacroix" ist historisch besonders bedeutsam als eigentliches Quellenwerk der vielen im 19. Jahrhundert entstandenen Lehrbücher der Infinitesimalrechnung; in erster Linie ist hier Lacroix' eigentliches Lehrbuch, der sog. „Kleine Lacroix"[1] zu nennen.

Seit den zwanziger Jahren des Jahrhunderts sind diese Lehrbücher natürlich neben Lacroix auch durch die in Cauchys Werken wieder zu Ehren gekommene Grenzmethode stark beeinflußt. Es kommen da zunächst die vielen französischen Lehrbücher in Betracht, die meist als Cours d'analyse de l'école polytechnique auf den direkten Hochschulunterricht zugeschnitten waren. Von ihnen hängen auch direkt oder indirekt die deutschen Lehrbücher, mit alleiniger Ausnahme vielleicht von Schlömilch, ab. Ich will aus dieser Menge von Büchern hier nur Serret's „Cours de calcul différentiel et intégral" hervorheben, der zuerst 1869 in Paris erschien; er wurde 1884

1) Traité élémentaire du calcul diff. et intégr. 2. Bd. Paris 1797.



von A. Harnack ins Deutsche übersetzt und gehört seitdem auch bei uns zu den verbreitetsten Lehrbüchern. Durch die Aufeinanderfolge verschiedener Bearbeiter waren manche Ungleichmäßigkeiten hineingekommen; die vor Kurzem erschienene neue Auflage[1] ist aber von G. Scheffers in Charlottenburg einer durchgreifenden Neubearbeitung unterzogen und wieder zu einem einheitlichen Werke abgeglichen worden. Ich nenne noch gern ein ganz neues französisches Buch, den zweibändigen „Cours d'analyse mathématique" von Goursat[2], der nach vielen Richtungen reichhaltiger als Serret ist und insbesondere auch eine große Reihe ganz moderner Entwicklungen enthält; dabei ist er recht lesbar geschrieben.

In allen diesen modernen Lehrbüchern geht der Differentialquotient und das Integral durchaus wieder auf den Grenzbegriff zurück, von Differenzenrechnung und Interpolation ist überhaupt nicht mehr die Rede; so mag man dann freilich die Dinge schärfer sehen, aber man tauscht dafür – wie beim Mikroskop – eine beträchtliche Verengung des Gesichtskreises

1) seit 1906: J.-A. Serret und G. Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Bd. I (4. Aufl., Leipzig 1908), Bd. II. (3. Aufl., 1907), Bd. III (3. Aufl., 1909).

2) Paris 1902 – 1907.

ein. So überläßt man jetzt überhaupt die Differenzenrechnung ganz den praktischen Rechnern, die sie anwenden müssen, insbesondere den Astronomen, und der Mathematiker erfährt nichts von ihr.

Im Anschluß hieran möchte ich als Abschluß meiner Darlegungen über Infinitesimalrechnung nun noch einmal 4 Punkte aufführen, durch deren Hervorhebung meine Ausführungen sich von den üblichen Darstellungen der Lehrbücher besonders unterscheiden:

1) Veranschaulichung abstrakter Betrachtungen durch anschauliche konkrete Figuren (Näherungskurven bei Fourierschen und Taylorschen Reihen.)

2.) Betonung der Verbindung mit den Nachbargebieten, wie der Differenzen- und Interpolationsrechnung, und schließlich auch den Untersuchungen der Philosophen.

3.) Hervorhebung des geschichtlichen Werdeganges.

4.) Vorführung einiger Proben der populären Literatur zur Kennzeichnung der Verschiedenheit der hiervon beeinflußten Anschauungen des großen Publikums von denen der Fachmathematiker.

Mir scheint es äußerst wichtig, daß gerade die Lehramtskandidaten von all dem Kenntnis haben.



So wie Sie in die Praxis treten, kommt die populäre Auffassung an Sie heran, und wenn Sie da nicht orientiert sind, wenn Sie nicht über die anschaulichen Elemente der Mathematik, sowie über ihre lebendigen Beziehungen zu allen Nachbargebieten Bescheid wissen, wenn Sie vor allen Dingen nicht die historische Entwicklung kennen, so verlieren Sie allen Boden unter Ihren Füßen; Sie ziehen sich dann entweder auf den Boden der orthodoxesten Mathematik zurück und werden an der Schule nicht verstanden, oder aber Sie unterliegen dem Ansturm, geben das auf, was Sie auf der Hochschule gelernt haben und fallen auch in Ihrem Unterricht der überlieferten Routine anheim. Auf diesem Gebiete der Infinitesimalrechnung gerade ist die Diskontinuität zwischen Schule und Universität, von der ich schon öfters sprach, am größten; ich hoffe, daß meine Darlegungen zu ihrer Beseitigung beitragen und Ihnen für Ihre spätere Lehrpraxis ein nützliches Rüstzeug an die Hand geben.

Damit verlasse ich die eigentliche herkömmliche Analysis und will nun anhangsweise noch einige Theorieen der modernen Mathematik besprechen, auf die schon früher gelegentlich Bezug genommen wurde und über die, wie ich glaube, der Lehrer auch einigermaßen orientiert sein sollte.

---



# Anhang.

## I. Transzendenz der Zahlen $e$ und $\pi$.

An erster Stelle möchte ich da von den Zahlen $e$ und $\pi$ sprechen und insbesondere den Beweis geben, daß beides transzendente Zahlen sind.

Das Interesse für die Zahl $\pi$ stammt – in geometrischer Form – bereits aus dem Altertum, und zwar war damals schon der Unterschied zwischen der Aufgabe ihrer approximativen Berechnung und derjenigen ihrer exakten theoretischen Konstruktion durchaus geläufig; man besaß auch bereits gewisse Grundlagen für die Lösung beider Aufgaben. Die erste hat ja bekanntlich Archimedes durch ein Verfahren der Approximation des Kreises durch ein- und umgeschriebene Polygone wesentlich gefördert, die zweite spitzte sich bald auf die Frage zu, ob man $\pi$ mit Zirkel und Lineal konstruieren könne, und das versuchte man auf alle möglichen Arten, ohne den Grund des ständigen Mißlingens – die Unlösbarkeit der Aufgabe – zu erkennen; was von den ersten dieser Versuche erhalten ist, hat Rudio [1] kürzlich publiziert. Die

[1] Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates. – Leipzig 1908.

„Quadratur des Zirkels" gehört aber noch heute zu den populärsten Aufgaben, und unzählige Leute – ich sprach ja schon früher davon – versuchen ihr Heil damit, ohne zu wissen oder zu glauben, daß sie die moderne Wissenschaft längst erledigt hat.

In der Tat sind heute diese alten Probleme vollständig gelöst. Man bezweifelt ja oft, ob die menschliche Erkenntnis überhaupt fortschreiten kann, und es mag wirklich auf manchem Gebiete zweifelhaft sein. In der Mathematik aber gibt es sicherlich Fortschritte; und hier haben wir ein Beispiel davon!

Die Grundlagen, auf der die moderne Lösung dieser Probleme fußt, stammen bereits aus der Zeit von Newton bis Euler. Für die numerisch-approximative Bestimmung von $\pi$ lieferten die unendlichen Reihen ein ausgezeichnetes Hilfsmittel, die eine allen Ansprüchen genügende Genauigkeit möglich machten. Das weitestgehende Resultat hat da ein Engländer namens Sharp erreicht, der $\pi$ auf 600 Dezimalen berechnete; dabei liegt wohl nur ein sozusagen sportsmäßiges Interesse an einer Rekordleistung vor, denn für die Anwendungen wird man eine solche Genauigkeit nie brauchen. – Was nun die theoretische Seite angeht, so greift in derselben Periode die Zahl $e$,



die Basis der natürlichen Logarithmen, zuerst in die Untersuchungen ein. Man entdeckt die wunderbare Relation $e^{i\pi} = -1$, und man entwickelt in der Integralrechnung ein Hilfsmittel, das, wie wir sehen werden, für die endgültige Lösung auch dieses Problems wichtig ist.

Den entscheidenden Schritt zur Erledigung der Aufgabe hat bekanntlich Hermite getan, indem er 1874 die Transzendenz von $e$ bewies. Es gelang ihm aber nicht, auch für $\pi$ den Transzendenzbeweis zu erbringen; das glückte erst Lindemann im Jahre 1882.

Hier liegt nun eine wesentliche Verallgemeinerung der klassischen Problemstellung vor; dort handelt es sich nur darum, $\pi$ mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, und das kommt, wie wir wissen (vgl. S. 123) analytisch darauf hinaus, $\pi$ durch eine Folge von Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen darzustellen. Nun wird aber nicht nur die Unmöglichkeit dieser Darstellung behauptet, sondern noch darüber hinaus, daß $\pi$ und ebenso $e$ transzendent, d. h. überhaupt durch keine irgendwie geartete algebraische Relation mit ganzen Zahlen verknüpft sind. Mit andern Worten, $e$ oder $\pi$ kann unmöglich Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$$

sein, wie groß auch die ganzen Zahlen $a_0, \dots a_n$ und der Grad $n$ sein mögen. Ganze rationale Koeffizienten, das ist dabei die Hauptsache; es genügt auch zu sagen: rationale, da man sie stets durch Multiplikation mit dem Generalnenner auf ganzzahlige zurückführen kann. –

Ich gehe nun sogleich zu dem

Beweise der Transzendenz von $e$

über, und schließe mich dabei der wesentlich vereinfachten Darstellung an, die Hilbert in Bd. 43 der mathem. Annalen (1893) gegeben hat.

Es ist zu zeigen, daß die Annahme einer Gleichung

(1) $\quad a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = 0, \text{ wo } a_0 \neq 0,$

mit ganzzahligen $a_0, \dots a_n$ zu einem Widerspruch führt; der wird sich in den einfachsten Eigenschaften der ganzen Zahlen zeigen. Wir werden dabei aus der Zahlenlehre nur die elementarsten Teilbarkeitsgesetze voraussetzen, insbesondere, daß jede positive, ganze Zahl auf eindeutige Weise in Primfaktoren zerlegt werden kann, und daß es unendlich viele Primzahlen gibt.

Der Plan unseres Beweisganges ist dieser: Wir werden ein Verfahren angeben, $e$ und seine Potenzen durch rationale Zahlen ganz besonders gut anzunähern,



derart, daß

(2) $\quad e = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M}, \; e^2 = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M}, \dots e^n = \frac{M_n + \varepsilon_n}{M},$

wo $M, M_1, M_2, \dots M$ ganze Zahlen und $\frac{\varepsilon_1}{M}, \frac{\varepsilon_2}{M}, \dots \frac{\varepsilon_n}{M}$ außerordentlich kleine Brüche sind. Dann geht die angenommene Gleichung (1) nach Multiplikation mit $M$ über in:

(3) $\{a_0 M + a_1 M_1 + a_2 M_2 + \dots + a_n M_n\} + \{a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + \dots + a_n \varepsilon_n\} = 0.$

Die erste Klammer der linken Seite ist eine ganze Zahl, und wir werden nachweisen, daß sie sicher nicht Null ist; den zweiten Summanden aber werden wir dadurch, daß wir $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ hinreichend verkleinern, jedenfalls zu einem echten Bruch machen können. Dann haben wir den offenbaren Widerspruch, daß eine ganze von Null verschiedene Zahl $a_0 M + a_1 M_1 + \dots + a_n M_n$, vermehrt um einen von 1 verschiedenen echten Bruch $a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n$ Null ergeben soll; daraus folgt die Unmöglichkeit der Gleichung (1.).

Eine wichtige Anwendung wird dabei der Schluß finden, daß eine ganze Zahl, die durch irgend eine bestimmte Zahl nicht teilbar ist, von Null verschieden ist (denn Null ist durch jede Zahl teilbar). Wir werden nämlich zeigen, daß $M_1, \dots M_n$ durch eine gewisse Primzahl $p$ teilbar sind, $a_0 M$ aber sicherlich nicht; also ist $a_0 M + a_1 M_1 + \dots + a_n M_n$ nicht durch $p$ teilbar und daher von Null verschieden.

Das Haupthilfsmittel zur Durchführung der so angedeuteten Beweisidee ist nun die Benutzung eines gewissen bestimmten Integrales, das von Hermite in diese Betrachtungen eingeführt wurde, und das wir daher als Hermitesches Integral bezeichnen können; in seiner Bauart liegt der Schlüssel zum ganzen Beweise. Es ist das folgende Integral, das, wie wir sehen werden, tatsächlich einen ganzzahligen Wert hat, und durch das wir $M$ definieren werden:

$$(4) \quad M = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\{(z-1)(z-2)\dots(z-n)\}^p e^{-z}}{(p-1)!}\,dz,$$

wo $n$ der Grad unserer angenommenen Gleichung (1), $p$ aber eine später noch näher zu bestimmende Primzahl ist. Daraus werden wir auch die gewünschte Approximation (2) der Potenzen $e^\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots n)$ erhalten, indem wir das Integrationsintervall des Integrales $M \cdot e^\nu$ durch den Punkt $\nu$ zerlegen und demgemäß setzen:

$$(4^a) \quad M_\nu = e^\nu \int_\nu^\infty \frac{z^{p-1}\{(z-1)\dots(z-n)\}^p e^{-z}}{(p-1)!}\,dz,$$

$$(4^b) \quad \varepsilon_\nu = e^\nu \int_0^\nu \frac{z^{p-1}\{(z-1)\dots(z-n)\}^p e^{-z}}{(p-1)!}\,dz \;.$$

Gehen wir nun an die wirkliche Ausführung des Beweises!

1) Ich gehe von der aus den Anfängen der Theorie der $\Gamma$-Funktion wohlbekannten Formel



$$\int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z}\,dz = \Gamma(\rho)$$

aus, die wir hier nur für ganzzahliges $\rho$ brauchen, wo $\Gamma(\rho) = (\rho-1)!$ ist, und die ich in dieser Beschränkung hier auch ableiten will. Man findet durch Integration nach Teilen:

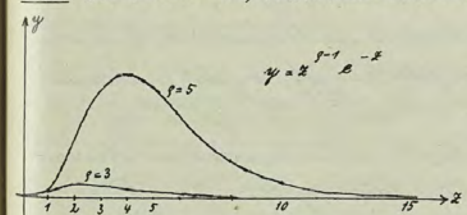
$$\int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z}\,dz = \left[-z^{\rho-1}e^{-z}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (\rho-1) z^{\rho-2} e^{-z}\,dz$$
$$= (\rho-1)\int_0^\infty z^{\rho-2} e^{-z}\,dz \;.$$

Rechts steht nun wieder ein Integral genau derselben Form wie links, nur daß der Exponent von $z$ verkleinert ist; wendet man diese Formel also wiederholt an, so muß man bei ganzzahligem $\rho$ schließlich auf $z^0$ kommen, und da $\int_0^\infty e^{-z}\,dz = 1$ ist, folgt schließlich

$$(5) \quad \int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z}\,dz = (\rho-1)(\rho-2)\dots 3.\,2.\,1 = (\rho-1)!$$

Das Integral ist also bei ganzzahligem $\rho$ eine ganze Zahl, die mit wachsendem $\rho$ außerordentlich rasch wächst.

Um uns dies Resultat auch geometrisch anschaulich zu machen, zeichnen wir uns über einer $z$-Achse




den Verlauf der Funktion $z^{\rho-1}e^{-z}$ für verschiedene Werte $\rho$; dann wird der Integralwert durch den bis ins Unendliche hin unter der Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt dargestellt. Je mehr $\rho$ wächst, desto enger schließt sich die Kurve bei $z=0$ der Abszissenachse an, desto rascher aber steigt sie auch von $z=1$ an empor; ihr Maximum erreicht sie für jedes einzelne $\rho$ bei $z=\rho-1$, also mit wachsendem $\rho$ immer weiter rechts, und der Wert des Maximums wächst auch selbst mit wachsendem $\rho$. Rechts vom Maximum überwiegt der Faktor $e^{-z}$, und die Kurve fällt ab, um sich schließlich aufs innigste der $z$-Achse wieder anzuschmiegen. So ist es verständlich, daß der Inhalt – unser Integral – zwar immer endlich bleibt, aber doch mit wachsendem $\rho$ stark wächst.

2.) Mit dieser Formel können wir nun unser Hermitesches Integral (4) leicht auswerten. Entwickeln wir seinen Integranden nach dem polynomischen Lehrsatz:

$$\{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)\}^p = \{z^n + - \cdots + (-1)^n n!\}^p$$
$$= z^{np} + - \cdots + (-1)^n (n!)^p ,$$

wobei immer nur das höchste und niederste (d. h. von $z$ freie) Glied in $z$ hervorgehoben ist, so geht es über in:

$$M = \frac{(-1)^n (n!)^p}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{p-1} e^{-z}\,dz + \sum_{\rho=p+1}^{np+p} \frac{C_\rho}{(p-1)!} \int_0^\infty z^{\rho-1} e^{-z}\,dz .$$

$C_\rho$ sind ganzzahlige Konstante, die sich aus dem oben angewandten polynomischen Satze ergeben. Nun können wir auf jedes dieser Integrale die Formel (5) anwenden und erhalten:



$$M = (-1)^n (n!)^p + \sum_{\rho=p+1}^{np+p} C_\rho \frac{(\rho-1)!}{(p-1)!}$$

Der Summationsindex $\rho$ ist stets größer als $p$ und daher ist $\frac{(\rho-1)!}{(p-1)!}$ eine ganze Zahl, die noch obendrein $p$ als Faktor enthält, und wir können diesen Faktor aus der ganzen Summe herausziehen:

$$M = (-1)^n (n!)^p + p\{C_{p+1} + C_{p+2}(p+1) + C_{p+3}(p+1)(p+2) + \cdots\} .$$

Nun muß sich $M$ hinsichtlich seiner Teilbarkeit durch $p$ genau so verhalten wie der erste Summand $(-1)^n (n!)^p$. Da $p$ aber Primzahl ist, wird dieser sicher dann nicht durch $p$ teilbar sein, wenn $p$ in keinem einzelnen seiner Faktoren $1, 2, \ldots n$ enthalten ist, und das ist gewiß der Fall, wenn $p > n$ ist. Dieser Bedingung können wir, weil es unendlich viele Primzahlen gibt, tatsächlich noch auf unendlich viele Arten genügen, und wir haben dann erreicht, daß $(-1)^n (n!)^p$ und daher auch $M$ sicher nicht durch $p$ teilbar ist.

Da ja $a_0 \neq 0$ angenommen werden konnte, können wir gleichzeitig auch erreichen, daß $a_0$ nicht durch $p$ teilbar ist, indem wir nur $p$ auch größer als $a_0$ wählen; das ist nach dem soeben Gesagten ohne weiteres möglich. Dann ist auch das Produkt $a_0 \cdot M$ nicht durch $p$ teilbar, und das strebten wir ja zunächst an.

3.) Wir haben nun die in $(4^a)$ (S. 524) definierten

Zahlen $M_r$ $(r = 1, 2, \dots n)$ zu untersuchen. Nehmen wir den Faktor $e^r$ unters Integralzeichen, und führen die neue Integrationsvariable $\xi = z - r$ ein, die von $0$ bis $\infty$ läuft, wenn $z$ von $r$ bis $\infty$ variiert, so wird

$$M_r = \int_0^\infty \frac{(\xi+r)^{p-1}\{(\xi+r-1)(\xi+r-2)\dots\xi\dots(\xi+r-n)\}^p e^{-\xi}}{(p-1)!}\,d\xi .$$

Das hat nun eine ganz analoge Form wie das vorhin betrachtete $M$, und wir können es ganz analog behandeln. Multiplizieren wir die Faktoren des Integranden aus, so ergibt sich ein Aggregat von Potenzen mit ganzzahligen Koeffizienten, unter denen die niederste $\xi^p$ ist. Das Integral des Zählers ist also eine ganzzahlige Kombination der Integrale

$$\int_0^\infty \xi^p e^{-\xi}\,d\xi, \quad \int_0^\infty \xi^{p+1} e^{-\xi}\,d\xi, \dots \int_0^\infty \xi^{(n+1)p-1} e^{-\xi}\,d\xi,$$

und da diese nach (5) bez. gleich $p!, (p+1)!, \dots$ sind, so ist es gleich $p!$, multipliziert mit einer ganzen Zahl $A_r$; also ist jedes

$$M_r = \frac{p!\,A_r}{(p-1)!} = p \cdot A_r \quad (r = 1, 2, \dots n)$$

tatsächlich eine ganze durch $p$ teilbare Zahl.

Damit im Verein mit dem Resultat von Nr. 2.) sind die Grundlagen für den oben (S. 523f) angegebenen Schluß gegeben: $a_0 M + a_1 M_1 + \dots + a_n M_n$ ist gewiß nicht durch $p$ teilbar und daher von Null verschieden.

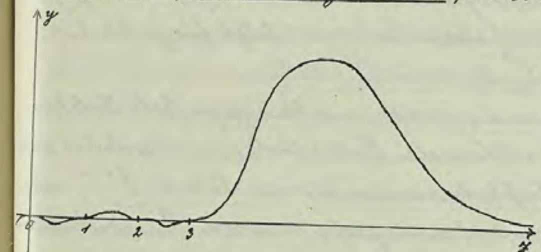
4.) Der zweite Teil des Beweises bezieht sich auf die Summe $a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n$, wo nach ($4^b$):



$$\varepsilon_r = \int_0^r \frac{z^{p-1}\{(z-1)(z-2)\dots(z-n)\}^p e^{-z+r}}{(p-1)!}\,dz ,$$

und wir haben nun zu zeigen, daß diese $\varepsilon_r$ bei geeigneter Wahl von $p$ hinreichend klein werden; zu dem Zwecke machen wir sogleich Gebrauch davon, daß wir $p$ beliebig groß werden lassen können, denn die einzigen Bedingungen, denen die Primzahl $p$ bisher unterworfen wurde ($p > n$, $p > a_0$) lassen sich noch durch beliebig große Primzahlen befriedigen.

Machen wir uns zunächst ein geometrisches Bild vom Verlaufe des Integranden; er wird bei $z = 0$ die




$z$-Achse berühren, bei $z = 1, 2 \dots n$ sie aber immer berühren und schneiden (da $p$ ungerade). Wie wir bald näher sehen werden, erhebt sich im ganzen Intervalle $(0, n)$ die Kurve des Nenners $(p-1)!$ wegen nur wenig über die $z$-Achse, wenn wir nur $p$ hinreichend groß nehmen, und also ist es plausibel, daß die Integrale $\varepsilon_r$ sehr klein werden. Für $z > n$ wächst der Integrand übrigens wieder beträchtlich und verläuft asymptotisch wie die früher betrachtete Kurve $z^{\rho-1} e^{-z}$ (für $\rho = (n+1)p$); so kommt der mit

$p$ außerordentlich rasch wachsende Wert $M$ des ganzen von $0$ bis $\infty$ erstreckten Integrales zu Stande.

Bei der tatsächlichen Abschätzung können wir uns nun mit einem ganz rohen Verfahren begnügen. Es seien $G$ und $g_\nu$ die Maxima der absoluten Beträge der Funktionen $z(z-1)\ldots(z-n)$ und $(z-1)(z-2)\ldots(z-n)\,e^{-z+\nu}$ im Intervalle $(0, n)$:

$$\left.\begin{aligned} |z(z-1)\ldots(z-n)| &\leq G \\ |(z-1)(z-2)\ldots(z-n)\,e^{-z+\nu}| &\leq g_\nu \end{aligned}\right\} \text{für } 0 \leq z \leq n \quad .$$

Da das Integral einer jeden Funktion absolut nie größer ist, als das Integral ihres Betrages, folgt für jedes $\varepsilon_\nu$:

$$(6) \qquad |\varepsilon_\nu| \leq \int_0^\nu \frac{G^{p-1} g_\nu}{(p-1)!}\, dz = \frac{G^{p-1} g_\nu \cdot \nu}{(p-1)!}$$

Nun sind $G$, $g_\nu$ und $\nu$ von $p$ unabhängige feste Zahlen, die im Nenner stehende Fakultät $(p-1)!$ wächst aber bekanntlich schließlich rascher als die Potenz $G^{p-1}$, oder genauer: für hinreichend große $p$ wird $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ kleiner als jede vorgegebene noch so kleine Zahl. Wir können wegen (6) also, wenn wir nur $p$ genügend groß wählen, tatsächlich auch jedes $\varepsilon_\nu$ beliebig klein machen.

Daraus folgt unmittelbar, daß man auch die Summe von $n$ Termen $a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n$ beliebig klein machen kann; tatsächlich haben wir:

$$|a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n| \leq |a_1||\varepsilon_1| + |a_2||\varepsilon_2| + \cdots + |a_n||\varepsilon_n|, \text{ und nach (6):}$$
$$\leq (|a_1|\cdot 1\cdot g_1 + |a_2|\cdot 2\, g_2 + \cdots + |a_n|\cdot n\cdot g_n)\cdot \frac{G^{p-1}}{(p-1)!}\,,$$



und da die Klammer einen festen von $p$ unabhängigen Wert hat, so können wir vermöge des Faktors $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$ die ganze rechte Seite und damit auch $|a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n|$ so klein machen, als wir wollen, insbesondere auch kleiner als 1.

Damit haben wir aber den oben (S. 523) in Aussicht gestellten Widerspruch gegen das Bestehen der Gleichung (3):

$$\{a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n\} + \{a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n\} = 0$$

abgeleitet, daß nämlich nach ihr eine nicht verschwindende ganze Zahl vermehrt um einen echten Bruch Null ergeben müßte. Also kann diese Gleichung nicht bestehen und die Transzendenz von $e$ ist bewiesen. –

Wenden wir uns nun dem

Beweise der Transzendenz von $\pi$

zu, der zwar etwas schwieriger als der vorhergehende Beweis, aber doch immer noch recht einfach ist. Man muß eben nur – und das ist die Kunst der mathematischen Erfindung – die Sache am richtigen Ende anfassen.

Die Problemstellung Lindemanns war folgende: Bisher ist gezeigt, daß eine Gleichung $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^\nu = 0$ nicht bestehen kann, wenn die Koeffizienten $a_\nu$ und die Exponenten $\nu$ von $e$ gewöhnliche ganze rationale Zahlen sind; sollte man ähnliches nicht auch für beliebige algebraische

$a_\nu$ und $\nu$ zeigen können? Das gelang ihm nun in der Tat, und zwar lautet der allgemeinste Lindemannsche Satz über die Exponentialfunktion: Eine Gleichung $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{b_\nu} = 0$ kann nicht bestehen, wenn die $a_\nu$ beliebige, die $b_\nu$ lauter von einander verschiedene algebraische Zahlen sind. Die Transzendenz von $\pi$ ist dazu dann nur ein Korollar; denn es besteht bekanntlich die Gleichung $1 + e^{i\pi} = 0$, und wäre $\pi$ eine algebraische Zahl, so wäre es auch $i\pi$, und das Bestehen dieser Gleichung würde jenem Lindemannschen Satze widersprechen.

Ich will hier ausführlich nur einen gewissen Spezialfall des Lindemannschen Satzes beweisen, der die Transzendenz von $\pi$ bereits umfaßt. Ich folge dabei wiederum im Wesen der Sache Hilberts Beweisführung in Bd. 43 der Math. Ann., die gegen Lindemann wesentlich vereinfacht und eine genaue Verallgemeinerung der vorhergehenden Betrachtungen für $e$ ist.

Den Ausgangspunkt bildet die Relation:

$$(1) \qquad 1 + e^{i\pi} = 0 .$$

Genügt nun $\pi$ irgend einer algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten, so genügt auch $i\pi$ einer solchen Gleichung; es seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die sämtlichen Wurzeln dieser letzten Gleichung, $i\pi$ selbst



mit einbegriffen, dann ist wegen (1) jedenfalls auch

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\ldots(1+e^{\alpha_n}) = 0 .$$

Indem wir ausmultiplizieren, erhalten wir:

$$(2) \quad 1 + (e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \ldots + e^{\alpha_n}) + (e^{\alpha_1+\alpha_2} + e^{\alpha_1+\alpha_3} + \ldots + e^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}) + \ldots + (e^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n}) = 0 .$$

Nun könnten einige der hier auftretenden Exponenten zufällig Null sein; jedesmal, wenn das eintritt, enthält die linke Summe einen positiven Summanden 1, und alle diese fassen wir mit der bereits auftretenden 1 zu einer ganzen positiven, von Null sicher verschiedenen Zahl $a_0$ zusammen; die übrig bleibenden von Null sicher verschiedenen Exponenten bezeichnen wir kurz mit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_N$ und schreiben demgemäß statt (2):

$$(3) \quad a_0 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_N} = 0, \text{ wo } a_0 \neq 0 .$$

Nun sind aber die $\beta_1, \ldots \beta_N$ Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung. Denn aus der Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten für $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ kann man in bekannter Weise eine ebensolche Gleichung für die sämtlichen zweigliedrigen Summen $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \ldots$ herleiten, ebenso eine solche für die dreigliedrigen $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \ldots$ und so fort, und schließlich ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ selbst rational, genügt also einer linearen ganzzahligen Gleichung. Durch Multiplikation aller dieser Gleichungen erhalten wir wiederum eine Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten, die vielleicht einige Wurzeln Null hat und deren übrige Wurzeln die $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\nu$ sind; indem wir die den ersteren entsprechende Potenz der Unbekannten weglassen, bekommen wir für die $\nu$ Größen $\beta$ eine ganzzahlige Gleichung genau $\nu^{\text{ten}}$ Grades mit von 0 verschiedenem Konstanten Term:

$$(4)\quad b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_\nu z^\nu = 0, \text{ wo } b_0, b_\nu \neq 0 .$$

Was wir nun beweisen wollen und was nach dem vorangehenden die Transzendenz von $\pi$ umfaßt, ist dieser spezielle Fall des Lindemannschen Satzes: Eine Gleichung der Form (3) mit ganzzahligem nichtverschwindendem $a_0$ kann nicht bestehen, wenn die $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\nu$ die $\nu$ Wurzeln einer Gleichung (4) $\nu^{\text{ten}}$ Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten sind.

Der Beweis gliedert sich nun genau so, wie der frühere Beweis der Transzendenz von $e$. Wie wir dort die ganzzahligen Potenzen $e^1, e^2, \dots e^n$ besonders gut durch rationale Zahlen annähern konnten, wird es sich hier um eine möglichst gute Approximation der in (3) auftretenden Potenzen von $e$ handeln, und wir werden in genau der alten Bezeichnung schreiben:

$$(5)\quad e^{\beta_1} = \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M},\ e^{\beta_2} = \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M},\ \dots e^{\beta_\nu} = \frac{M_\nu + \varepsilon_\nu}{M};$$

dabei ist der Nenner $M$ wieder eine gewöhnliche ganze Zahl, aber die $M_1, \dots M_\nu$ werden nicht mehr ganze rationale, son-



dern ganze algebraische Zahlen sein, und die $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_\nu$, die im allgemeinen jetzt gleichfalls komplexe Zahlen sein können, werden wenigstens ihren absoluten Beträgen nach sehr klein sein; darin liegt die gegen früher auftretende Komplikation. Die Summe aller $M_1, \dots M_\nu$ wird aber wiederum eine ganze rationale Zahl darstellen, und zwar werden wir es so einrichten können, daß der erste Summand der Gleichung

$$(6)\quad \{a_0 M + M_1 + M_2 + \dots + M_\nu\} + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_\nu\} = 0 ,$$

in die (3) vermöge (5) nach Multiplikation mit $M$ übergeht, eine nichtverschwindende ganze rationale Zahl wird, während der zweite Summand jedenfalls absolut genommen kleiner als 1 ist; das ist genau der früher benutzte Widerspruch, und damit ist die Unmöglichkeit von (6) und (3) gezeigt und unser Beweis geführt. Im einzelnen wird wieder gezeigt, daß $M_1 + M_2 + \dots + M_\nu$ durch eine gewisse Primzahl $p$ teilbar ist, $a_0 \cdot M$ aber nicht, woraus dann in alter Weise das Nichtverschwinden des ersten Summanden in (6) folgt; weiter wird dann $p$ so groß gewählt, daß der zweite Summand in (6) beliebig klein wird.

1.) Es wird sich nun zunächst darum handeln, $M$ durch eine geeignete Verallgemeinerung des Hermiteschen Integrals zu definieren. Sie beruht auf der Bemerkung, daß der Faktor $(z-1)\ldots(z-n)$ der Hermiteschen Integrals gerade die Exponenten der Potenzen von $e$ in der hypothetischen algebraischen Gleichung zu Nullstellen hat; demgemäß ersetzen wir ihn jetzt durch das mit den Exponenten von (3), d. h. den Lösungen von (4) gebildete Produkt.

(7) $(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_\nu) = \frac{1}{b_\nu}\{b_0 + b_1 z + \cdots + b_\nu z^\nu\}$.

Als wesentlich wird sich aber nun erweisen, daß wir noch eine geeignete Potenz von $b_\nu$ als Faktor hinzufügen, was sich früher erübrigte, da $(z-1)\ldots(z-n)$ ohnehin ganzzahlig war; wir setzen jetzt also schließlich

(8) $M = \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!}\{b_0 + b_1 z + \cdots + b_\nu z^\nu\}^p \, b_\nu^{(\nu-1)p-1}$.

2.) Entwickeln wir nun, genau wie früher, den Integranden von $M$ nach steigenden Potenzen von $z$, so liefert das niederste Glied, das zu $z^{p-1}$ gehört:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} z^{p-1} dz}{(p-1)!} b_0^p b_\nu^{(\nu-1)p-1} = b_0^p b_\nu^{(\nu-1)p-1},$$

wo das Integral nach der schon oben stets benutzten $\Gamma$-Formel (S. 525) ausgewertet ist. Alle weiteren Summanden haben aber im Integranden $z^p$ oder noch höhere Potenzen stehen; sie enthalten daher sämtlich den Faktor $\frac{p}{(p-1)!}$ mit ganzen Zahlen multipliziert und sind also durch $p$ teilbar. Daher ist $M$ selbst sicherlich eine durch $p$ nicht teilbare ganze Zahl, wenn je-



ner erste Summand $b_0^p \cdot b_\nu^{(\nu-1)p-1}$ nicht durch $p$ teilbar ist, d. h. sofern die Primzahl $p$ weder Teiler von $b_0$ noch von $b_\nu$ ist. Wegen $b_0 \neq 0$, $b_\nu \neq 0$ kann man $p$ gemäß dieser Bedingung bestimmen, am einfachsten, indem man annimmt:

$$p > b_0 \text{ und } p > b_\nu .$$

Da nun $a_0 \neq 0$ ist, kann man es sofort auch erreichen, daß $a_0 \cdot M$ nicht durch $p$ teilbar ist, indem man etwa, wie früher, noch weiterhin

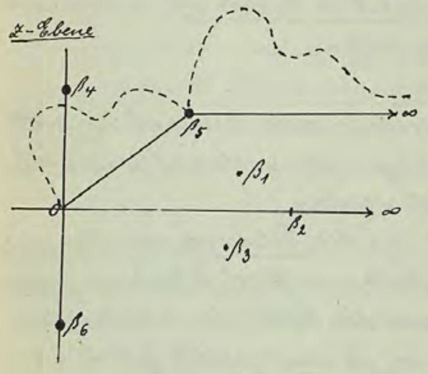
$$p > a_0$$

bestimmt. Weil es unendlich viele Primzahlen gibt, kann allen diesen Bedingungen noch auf unendlich mannigfache Art genügt werden.

3.) Nun müssen wir an die Bildung von $M_r$ und $\varepsilon_r$ herantreten. Hierbei tritt eine Modifikation gegen das frühere ein, da die an die Stelle der $r$ tretenden $\beta_r$ komplex sein können, ja einer sicher gleich $i\pi$ ist. Wollen wir also eine dem früheren analoge Zerlegung des Integrales $M$ vornehmen, so müssen wir uns erst über den Integrationsweg durch das Komplexe verständigen. Da ist nun glücklicherweise der Integrand unseres Integrales eine im Endlichen überall eindeutige reguläre analytische Funktion der Integrationsvariablen $z$, die nur bei $z = \infty$ eine singuläre (und zwar eine wesentlich singuläre)

Stelle hat. Statt reell von 0 nach $\infty$ zu integrieren, können wir auch irgend einen andern von 0 nach $\infty$ gehenden Integrationsweg benutzen, wenn er nur schließlich wenigstens asymptotisch parallel der reellen positiven Halbachse ins Unendliche einläuft; das ist nötig, damit das Integral überhaupt einen Sinn behält.

Wir denken uns nun die $\nu$ Punkte $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\nu$ markiert und bemerken speziell, daß wir $\mathfrak{M}$ auch erhalten, wenn wir erst geradlinig von 0 nach einem der Punkte $\beta_r$, dann geradlinig auf einer Parallelen zur reellen Achse ins Unendliche integrieren.




Nach diesem Wege können wir nun $\mathfrak{M}$ in die beiden charakteristischen Teile zerlegen: Der geradlinige Weg von 0 nach $\beta_r$ wird das mit wachsendem $p$ beliebig klein werdende $\varepsilon_r$ liefern, die Parallele von $\beta_r$ nach $\infty$ aber die ganze algebraische Zahl $\mathfrak{M}_r$:

$$(8^a) \quad \varepsilon_r = e^{\beta_r} \int_0^{\beta_r} \frac{e^{-z} z^{p-1}\,dz}{(p-1)!} (b_0 + b_1 z + \cdots + b_\nu z^\nu)^p \, b_\nu^{(\nu-1)p-1},$$

$$(8^b) \quad \mathfrak{M}_r = e^{\beta_r} \int_{\beta_r}^{\infty} \frac{e^{-z} z^{p-1}\,dz}{(p-1)!} (b_0 + b_1 z + \cdots + b_\nu z^\nu)^p \, b_\nu^{(\nu-1)p-1}$$



Durch diesen Ansatz ist in der Tat (5) befriedigt. Daß wir dabei speziell geradlinige Wege benutzen, geschieht lediglich aus Bequemlichkeitsrücksichten; ein beliebiger krummer Weg von 0 nach $\beta_r$ muß natürlich genau denselben Wert $\varepsilon_r$ liefern, nur kann man aus dem geradlinigen Wege die beste Abschätzung dieses Wertes herleiten. Ebenso können wir statt der Horizontalen von $\beta_r$ nach $\infty$ auch eine beliebige sich nur asymptotisch einer Horizontalen nähernde Kurve verwenden; aber auch das wäre nur unnötig unbequem.

4) Ich stelle die Abschätzung der $\varepsilon_r$ voran, bei der sich nichts gegen früher ändert, wenn man nur benutzt, daß der Betrag eines komplexen Integrales nie größer ist als das Maximum des absoluten Betrages des Integranden, multipliziert mit der Länge des Integrationsweges, die in unserm Falle $|\beta_r|$ ist. Die so entstehende obere Grenze von $\varepsilon_r$ ist dann gleich dem Produkt einiger von $p$ unabhängiger Faktoren in $\frac{G^{p-1}}{(p-1)!}$, wo $G$ das Maximum von $|z(b_0 + b_1 z + \cdots + b_\nu z^\nu) b_\nu^{\nu-1}|$ in einem Gebiete bezeichnet, das alle vom Nullpunkt nach den Punkten $\beta_r$ führende Strecken enthält; daraus schließt man, wie oben (S. 530), daß man durch Vergrößerung von $p$ jedes $\varepsilon_r$ und daher auch $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\nu$ dem Betrage nach beliebig klein, insbesondere auch kleiner als 1

machen kann.

5.) Erst bei der Untersuchung der $\mathfrak{M}_r$ werden wesentlich neue Überlegungen nötig, die freilich auch durchaus Verallgemeinerungen der früheren sind, und nur dem Umstande Rechnung tragen, daß statt rationaler jetzt algebraische ganze Zahlen auftreten. Wir wollen bald die ganze Summe

$$\sum_{r=1}^{\nu} \mathfrak{M}_r = \sum_{r=1}^{\nu} e^{\beta_r} \int_{\beta_r}^{\infty} \frac{e^{-z} z^{\mu-1}\,dz}{(\mu-1)!} \{b_0 + b_1 z + \cdots + b_\nu z^\nu\}^\mu \, b_\nu^{(\nu-1)\mu-1}$$

in Betracht ziehen. Ersetzen wir hier in jedem Summand vermöge (7) (S. 536) das Polynom in $z$ durch das Produkt der Faktoren $(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_\nu)$ und führen die neue Integrationsvariable $\xi = z - \beta_r$ ein, die wegen der für $z$ angenommenen Integrationsweges reell von $0$ nach $\infty$ läuft, so erhalten wir:

$$\sum_{r=1}^{\nu} \mathfrak{M}_r = \sum_{r=1}^{\nu} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}\,d\xi}{(\mu-1)!} (\xi+\beta_r)^{\mu-1}(\xi+\beta_r-\beta_1)^\mu \cdots \xi^\mu \cdots (\xi+\beta_r-\beta_\nu)^\mu \, b_\nu^{\nu\cdot\mu-1},$$

$$(9) \qquad \sum_{r=1}^{\nu} \mathfrak{M}_r = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi}\,d\xi}{(\mu-1)!} \xi^\mu \cdot \Phi(\xi),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(9') \quad \Phi(\xi) = \sum_{r=1}^{\nu} b_\nu^{\nu\mu-1} (\xi+\beta_r)^{\mu-1}(\xi+\beta_r-\beta_1)^\mu \cdots (\xi+\beta_r-\beta_{r-1})^\mu (\xi+\beta_r-\beta_{r+1})^\mu \cdots (\xi+\beta_r-\beta_\nu)^\mu .$$

Diese Summe $\Phi(\xi)$ ist, wie jeder ihrer $\nu$ Summanden, ein Polynom in $\xi$. In jedem der Summanden ist offenbar eine der $\nu$ Größen $\beta_1, \ldots \beta_\nu$ ausgezeichnet; in der Summe $\Phi(\xi)$ aber, bez. wenn wir sie als Polynom in $\xi$ ausgerechnet denken, in den Koeffizienten der einzelnen



$\xi$-Potenzen, treten diese $\nu$ Größen wieder gleichberechtigt auf, d. h. jeder dieser Koeffizienten ist eine symmetrische Funktion von $\beta_1, \ldots \beta_\nu$; das Ausmultiplizieren der einzelnen Faktoren auf Grund des polynomischen Lehrsatzes läßt aber weiterhin erkennen, daß diese Funktionen ganze rationale Funktionen von $\beta_1, \ldots \beta_\nu$ und zwar mit ganzzahligen rationalen Koeffizienten sind. Nach einem bekannten Satze der Algebra sind aber rationale symmetrische Funktionen mit rationalen Koeffizienten der sämtlichen Wurzeln einer rationalzahligen Gleichung stets rationale Zahlen, und da die $\beta_1, \ldots \beta_\nu$ die sämtlichen Wurzeln der Gleichung (4) sind, sind die Koeffizienten von $\Phi(\xi)$ tatsächlich rationale Zahlen.

Wir brauchen aber noch darüber hinaus ganze rationale Zahlen, und die liefert uns die noch als Faktor von $\Phi(\xi)$ auftretende Potenz von $b_\nu$. Wir können diese nämlich gerade auf alle auftretenden linearen Faktoren verteilen und schreiben:

$$(9'') \quad \Phi(\xi) = \sum_{r=1}^{\nu} (b_\nu\xi + b_\nu\beta_r)^{\mu-1} (b_\nu\xi + b_\nu\beta_r - b_\nu\beta_1)^\mu \cdots \cdots (b_\nu\xi + b_\nu\beta_r - b_\nu\beta_\nu)^\mu .$$

Analog wie vorhin sind die Koeffizienten von $\xi$, wenn wir dies Polynom ausgerechnet denken, ganze rationale symmetrische Funktionen der Produkte $b_\nu\beta_1, b_\nu\beta_2, \ldots b_\nu\beta_\nu$ mit ganzen rationalen Koeffizienten. Nun sind aber diese $\nu$ Produkte Wurzeln derjenigen Gleichung, die aus (4) hervorgeht, wenn wir $z$ durch $\frac{z}{b_\nu}$ ersetzen:

$$b_0 + b_1 \frac{z}{b_\nu} + \cdots + b_{\nu-1}\left(\frac{z}{b_\nu}\right)^{\nu-1} + b_\nu \cdot \left(\frac{z}{b_\nu}\right)^{\nu} = 0\;;$$

durch Multiplikation mit $b_\nu^{\nu-1}$ geht das über in

$$(10)\quad b_0 b_\nu^{\nu-1} + b_1 b_\nu^{\nu-2} \cdot z + \cdots + b_{\nu-2} b_\nu z^{\nu-2} + b_{\nu-1} z^{\nu-1} + z^{\nu} = 0,$$

d. i. eine Gleichung, die durchweg ganzzahlige Koeffizienten und dabei 1 als höchsten Koeffizienten hat. Man nennt solche algebraische Zahlen, die einer ganzzahligen Gleichung mit dem höchsten Koeffizienten 1 genügen, ganze algebraische Zahlen, und es besteht folgende Verschärfung des oben genannten Satzes: Rationale ganze ganzzahlige symmetrische Funktionen der sämtlichen Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung mit dem höchsten Koeffizienten 1 (also ganzer algebraischer Zahlen) sind selbst ganze rationale Zahlen. Sie finden auch diesen Satz in den Lehrbüchern der Algebra, und wenn er vielleicht nicht überall in dieser präzisen Fassung angegeben ist, so werden Sie sich doch durch Verfolgung der Beweise leicht von seiner Richtigkeit überzeugen können.

Nun genügten die Koeffizienten des Polynoms $\Phi(\xi)$ tatsächlich den Voraussetzungen dieses Satzes und also sind sie ganze rationale Zahlen, die wir mit $A_0, A_1, \ldots A_{\nu\cdot p-1}$ bezeichnen mögen; wir haben also nach (9):



$$\sum_{\nu=1}^{\nu} M_\nu = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}\xi^{p}\,d\xi}{(p-1)!}\left(A_0 + A_1\xi + \cdots + A_{\nu\cdot p-1}\xi^{\nu\cdot p-1}\right).$$

Damit sind wir aber wesentlich am Ziele. Denn führen wir die Integrationen im Zähler auf Grund unserer $\Gamma$-Formel (S. 525) aus, so ergeben sich die Faktoren $p!, (p+1)!, (p+2)!, \ldots$, da jedes Glied die $p^{te}$ oder eine höhere Potenz von $\xi$ als Faktor enthält, und nach Division durch $(p-1)!$ bleibt überall gewiss noch ein Faktor $p$ stehen, während die andern Faktoren ganze Zahlen (die $A_1, A_2, \ldots$) sind; also ist $\sum_{\nu=1}^{\nu} M_\nu$ eine durch $p$ sicherlich teilbare ganze Zahl.

Nun war aber (S. 537) $\alpha_0 \cdot M$ nicht durch $p$ teilbar, also ist $\alpha_0 M + \sum_{\nu=1}^{\nu} M_\nu$ notwendig eine durch $p$ nicht teilbare ganze Zahl und ist daher insbesondere sicherlich von Null verschieden. Also kann auch tatsächlich die Gleichung (6)

$$\left\{\alpha_0 M + \sum_{\nu=1}^{\nu} M_\nu\right\} + \left\{\sum_{\nu=1}^{\nu} \varepsilon_\nu\right\} = 0$$

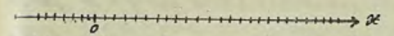
nicht bestehen, denn eine nicht verschwindende ganze Zahl kann sich mit der nach Nr. 4.) (S. 539) sicher absolut kleiner als 1 bleibenden $\sum_{\nu=1}^{\nu} \varepsilon_\nu$ nicht zu Null ergänzen. Damit ist aber der oben (S. 534) ausgesprochene Spezialfall des Lindemannschen Satzes und die in ihm enthaltene Transzendenz von $\pi$ bewiesen. –

Ich will nun hier noch einen weiteren interessanten Spezialfall des allgemeinen Lindemannschen Satzes hervorheben, daß nämlich in der Gleichung $e^{\beta} = b$ die Zahlen $b$ und $\beta$ nicht gleichzeitig algebraisch sein können, mit der einzigen trivialen Ausnahme $\beta = 0$, $b = 1$; mit andern Worten, die Exponentialfunktion eines algebraischen Argumentes $\beta$ sowie der natürliche Logarithmus einer algebraischen Zahl $b$ sind mit jener einzigen Ausnahme stets transzendent. In dieser Aussage ist für $\beta = 1$ die Transzendenz von $e$, für $b = -1$ die von $\pi$ (wegen $e^{i\pi} = -1$) mit enthalten. Der Beweis dieses Theorems läßt sich durch genaue Verallgemeinerung der letzten Betrachtungen führen, indem man von $b - e^{\beta}$ statt wie zuletzt von $1 + e^{\alpha}$ ausgeht; man hat dann nur neben sämtlichen Wurzeln der algebraischen Gleichung für $\beta$ auch alle Wurzeln der Gleichung für $b$ zu berücksichtigen, um zu einer (3) analogen Gleichung zu kommen, und deshalb braucht man mehr Bezeichnungen, und der Beweis wird scheinbar unübersichtlicher; wesentlich neue Gedanken werden aber nicht nötig. Ganz analog läßt sich auch der Beweis des allgemeinsten Lindemannschen Satzes führen. –

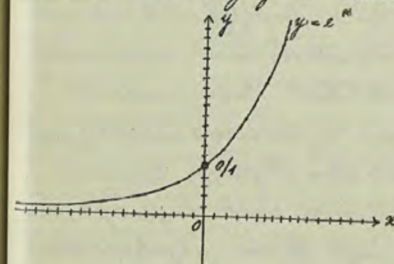
Ich will auf diese Beweise hier nicht mehr eingehen, sondern möchte Ihnen lieber die Bedeutung des letzten Theorems über die Exponentialfunktion möglichst anschaulich machen. Denken wir uns auf einer



Abszissenachse alle Punkte mit algebraischen Abszissen $x$




markiert. Wir wissen, daß schon die rationalen und erst recht alle algebraischen Zahlen die Abszissenachse überall dicht erfüllen, und man könnte zunächst meinen, daß wenigstens die algebraischen Zahlen alle reellen Punkte $x$ erschöpfen. Und nun ergibt eben unser Satz, daß das nicht der Fall ist, daß auf der $x$-Achse zwischen den algebraischen Zahlen noch unbegrenzt viele andere, transzendente Zahlen Platz finden, von denen wir in $e^{\text{algebr. Zahl}}$ sowie $\log(\text{algebr. Zahl})$ sowie in jeder algebraischen Funktion dieser transzendenten Zahlen unbegrenzt viele Beispiele besitzen. – Vielleicht noch sinnfälliger wird die Sache, wenn wir unsere Gleichung in der Bezeichnung $y = e^{x}$ schreiben und in einer $x$-$y$-Ebene als Kurve deuten.




Markieren wir nun auf der $x$-Achse sowohl als auf der $y$-Achse alle algebraischen Zahlen, und fassen alle Punkte $x/y$ der Ebene auf, die sowohl algebraisches $x$, als auch algebraisches $y$ haben, so wird die ganze $x$-$y$-Ebene mit diesen „algebraischen Punkten" überall dicht bedeckt. Trotz dieser dichten Verteilung enthält die Exponential-

Kurve $y = e^x$ keinen einzigen algebraischen Punkt außer dem $x = 0, y = 1$, denn sonst ist nach unserem Satze in $y = e^x$ ja gewiß stets mindestens eine der Größen $x, y$ transzendent. Dieser Verlauf der Exponentialkurve ist gewiß eine höchst merkwürdige Tatsache!

Die gedankliche Bedeutung dieser Sätze, die die Existenz einer großen Menge nicht nur nicht rationaler, sondern nicht einmal durch algebraische Operationen aus ganzen Zahlen darstellbarer Zahlen enthüllen, für unsere Vorstellungen über das Zahlenkontinuum ist ungeheuer. Wie hätte wohl Pythagoras eine solche Entdeckung gefeiert, wenn ihm das Irrationale schon eine Hekatombe wert schien!

Merkwürdig ist nur, wie wenig diese Fragen der Transzendenz im allgemeinen aufgefaßt und assimiliert werden, obgleich sie so einfach sind, wenn man sie nur einmal durchgedacht hat. Immer wieder muß man beim Examen die Erfahrung machen, daß der Kandidat nicht einmal den Begriff „Transzendenz" erklären kann; meist wird einfach gesagt, eine transzendente Zahl genüge keiner algebraischen Gleichung – und das ist natürlich ganz falsch, wie das Beispiel $x - e = 0$ zeigt. Die Hauptsache, daß die Gleichungskoeffizienten rational sein müssen, ist eben



weggelassen!

Wenn Sie nun unsere Transzendenzbeweise noch einmal durchdenken, so müssen Sie eigentlich diese einfachen, elementaren Schlüsse als Ganzes bequem auffassen und sich dauernd zu Eigen machen können. Gedächtnismäßig braucht man sich eigentlich nur das Hermitesche Integral zu merken; dann wickelt sich alles durchaus naturgemäß ab. Ich möchte hier noch besonders betonen, daß wir bei diesen Beweisen im Sinne unserer ganzen Grundideeen ruhig den Integralbegriff – geometrisch zu reden den Flächeninhalt – als seinem Wesen nach durchaus elementar gebraucht haben, und ich glaube, daß das wesentlich zur übersichtlichen Gestaltung des Beweises beigetragen hat. Vergleichen Sie etwa die Darstellung in Bd. I von Weber-Wellstein, oder auch in meiner eigenen kleinen Schrift „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie"[1], wo im Sinne der älteren Schulbücher das Integralzeichen vermieden und sein Gebrauch durch Abschätzung von Reihenentwicklungen ersetzt wird, so werden Sie zugeben, daß dort der Beweisgang bei weitem nicht so anschaulich und leicht aufzufassen ist.

Die letzten Erörterungen über die Verteilung der al-

1) zitiert S. 135.

gebraischen Zahlen innerhalb der reellen Zahlen führen uns naturgemäß zu dem zweiten modernen Gebiete, auf das ich schon wiederholt im Laufe der Vorlesung hinzuweisen hatte, und über das nun einige eingehendere Darlegungen folgen mögen:

---

## II. Die Mengenlehre.

Die Untersuchungen des Begründers dieser Theorie, Georg Cantor in Halle, gehen gerade von Betrachtungen über die Existenz transzendenter Zahlen aus [1]; sie lassen diese Tatsache in einem ganz andern Lichte erscheinen, als wir sie bisher sahen.

Wenn der kurze Überblick über die Mengenlehre, den ich Ihnen hier geben will, etwas Besonderes hat, so soll es das sein, daß die Behandlung konkreter Beispiele mehr in den Vordergrund tritt als die ganz allgemeinen abstrakten Betrachtungen, durch die die Mengenlehre sonst vielfach eine schwer faßliche, abschreckende Form erhalten mag.

### 1. Die Mächtigkeit von Mengen.

Demgemäß erinnere ich zunächst daran, daß wir in

1/ vgl. Bd. 77 der Journ. f. d. r. u. a. Mathemat. (1873).



unseren Entwicklungen wiederholt mit verschiedenen charakteristischen Gesamtheiten von Zahlen zu tun gehabt haben, die wir jetzt kurzweg Zahlenmengen nennen werden. Wenn ich mich nur auf reelle Zahlen beschränke, so waren es:

1) die positiven ganzen Zahlen;
2) die rationalen Zahlen;
3) die algebraischen Zahlen;
4) die sämtlichen reellen Zahlen.

Jede dieser Mengen enthält unendlich viele Zahlen. Die Frage ist nun zunächst, ob man nicht trotzdem in bestimmtem Sinne die Größe oder den Umfang dieser Mengen vergleichen kann, d. h. ob man nicht das „Unendlich" der einen größer, gleich oder kleiner als das der andern nennen kann. Es ist das große Verdienst von Cantor, diese zunächst ganz unbestimmte Frage durch Aufstellung präziser Begriffe geklärt und beantwortet zu haben, und zwar kommt hier vor allem sein Begriff „Mächtigkeit" oder „Kardinalzahl" in Betracht: Zwei Mengen haben „gleiche Mächtigkeit" (sind „aequivalent"), wenn sich ihre Elemente eineindeutig einander zuordnen lassen, d. h. wenn man die eine Menge so auf die andere abbilden kann, daß jedem ihrer Elemente umkehrbar eindeutig ein Element der andern ent-

*spricht*. Ist eine solche Abbildung nicht möglich, so haben die Mengen „*verschiedene Mächtigkeit*"; dabei zeigt sich, daß wie man auch die Elemente einander zuzuordnen versucht, immer noch Elemente einer und derselben von beiden Mengen übrig bleiben, die dann „*die größere Mächtigkeit*" hat.

Das wollen wir sofort an den 4 aufgeführten Beispielen erläutern. Es liegt vielleicht zunächst die Annahme nahe, daß die Mächtigkeit der ganzen Zahlen kleiner sei, als die der rationalen, diese kleiner als die der algebraischen und diese wiederum kleiner als die aller reellen Zahlen – denn jede dieser Mengen entsteht ja aus der vorangehenden durch Hinzufügung neuer Elemente. Aber dieser Schluß ist durchaus unberechtigt, denn wenn auch *jede endliche Menge stets mächtiger ist als irgend ein Teil von ihr*, so darf man diesen Satz doch *keineswegs auf unendliche Mengen* übertragen; schließlich sind ja solche Abweichungen auch nicht einmal so wunderbar, da man ja eben auf ein ganz neues Gebiet übergegangen ist. Wir wollen uns sogleich an einem ganz einfachen *Beispiel* klarmachen, *daß ein Teil einer unendlichen Menge mit ihr tatsächlich gleiche Mächtigkeit haben kann*, indem wir die Menge aller positiven ganzen Zahlen neben die aller geraden



Zahlen stellen:

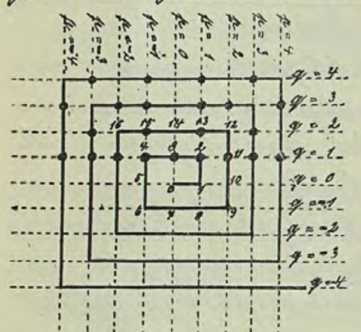
$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots, \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & \ldots\,. \end{array}$$

Dann ist die durch Doppelpfeile angedeutete Zuordnung offenbar von der oben geschilderten Art, daß jedem Element der einen Menge ein und nur ein Element der andern zugehört; *nach Cantors Definition hat daher die Menge der positiven ganzen Zahlen die gleiche Mächtigkeit wie ihre Teilmenge der geraden Zahlen*.

Die Untersuchung der Mächtigkeiten unserer 4 Mengen ist also nicht so einfach abgetan, um so wunderbarer ist das einfache Resultat, Cantors große Entdeckung von 1873: *Die drei Mengen der ganzen positiven, der rationalen und der algebraischen Zahlen haben die gleiche Mächtigkeit, die Menge aller reellen Zahlen aber hat eine davon verschiedene größere Mächtigkeit*. Man nennt eine Menge, deren Elemente man der Reihe der ganzen positiven Zahlen eineindeutig zuordnen kann (die also mit dieser gleiche Mächtigkeit hat), *abzählbar*; dann lautet jener Satz: *Die Menge der rationalen sowie die der algebraischen Zahlen ist abzählbar, die Gesamtheit aller reellen Zahlen aber ist nicht abzählbar*.

Führen wir zunächst den *Beweis für die ratio-*

nalen Zahlen, der gewiß vielen von Ihnen bekannt ist. Jede rationale Zahl – wir mögen die negativen bald mit hinzunehmen – ist eindeutig in der Form $\frac{p}{q}$ darstellbar, wo $p$ und $q$ teilerfremd sind, und $q$ etwa stets positiv sei (während $p$ auch negativ sein kann). Um alle diese Brüche $\frac{p}{q}$ in eine Reihe zu bringen, denken wir uns in einer $p$-$q$-Ebene zunächst alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten $p$, $q$ markiert und bringen zunächst einmal diese in eine abzählbare Reihe, wie er der spiralartige Weg in nebenstehender Figur andeutet.

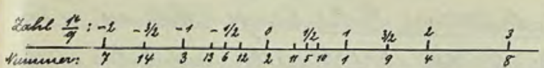



Danach können wir alle diese Wertepaare $(p/q)$ numerieren, so daß jedem nur eine Zahl zukommt und alle ganzen Zahlen erschöpft werden (5. Fig.). Lassen wir jetzt aus dieser Reihenfolge alle die Wertepaare fort, die nicht den oben ausgesprochenen Bedingungen (Teilerfremdheit und $q > 0$) genügen, und numerieren nur alle übrig bleibenden, (in der Figur durch starke Punkte markierten) für sich, so erhalten wir eine Reihe, die so beginnt:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \underline{6} & \underline{7} & \underline{8} & \underline{9} & \underline{10} & \underline{11} \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1/2 & -1/2 & -2 & 3 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \; \ldots \;, \end{array}$$



und die jeder rationalen Zahl genau eine ganze positive, jeder ganzen genau eine rationale zuordnet; damit ist die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen bewiesen. Übrigens wird durch diese Anordnung der rationalen Zahlen in eine abzählbare Reihe ihre natürliche Rangordnung nach der Größe von Grund auf zerstört; das zeigt nebenstehende Skizze, in der an die rationalen Punkte der Abszissenachse ihre Ordnungsnummern in jener künstlichen Reihenfolge angeschrieben sind. –




Wir kommen jetzt zweitens zu den algebraischen Zahlen, und auch hier will ich mich auf die reellen beschränken, obwohl die Betrachtung der komplexen nicht wesentlich schwieriger wäre. Jede reelle algebraische Zahl $\omega$ genügt einer reellen ganzzahligen Gleichung:

$$a_0 \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \omega + a_n = 0,$$

die wir irreduzibel annehmen wollen, d. h. wir lassen alle etwa abtrennbaren rationalen Faktoren und auch etwaige gemeinsame Teiler der ganzen Zahlen $a_0, a_1, \ldots a_n$ fort; wir setzen noch fest, daß $a_0$ etwa stets positiv sein möge. Dann genügt bekanntlich jeder algebraische $\omega$ nur einer einzigen so normierten irreduziblen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, und umgekehrt gehören zu jeder solchen Gleichung als Wurzeln höchstens $n$ reelle algebraische Zahlen, vielleicht aber weniger oder gar keine. Würden wir nun alle diese algebraischen Gleichungen in eine abzählbare Reihe bringen können, so wären damit auch offenbar ihre Wurzeln und daher auch alle reellen algebraischen Zahlen abgezählt.

Das ist nun Cantor dadurch gelungen, daß er jeder Gleichung eine bestimmte positive Zahl, ihre „Höhe“

$$N = n - 1 + a_0 + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

zuordnete, und die Gleichungen in eine abzählbare Folge von Klassen teilte, je nachdem die Höhe $N = 1, 2, 3, \dots$ ist. In jeder einzelnen dieser Klassen muß nach der Definition von $N$ sowohl die Gradzahl $n$ als auch jeder der Koeffizienten seinem absoluten Betrage nach unter der endlichen Grenze $N$ bleiben, so daß jeder Klasse überhaupt nur endlich viele Gleichungen und daher insbesondere auch nur endlich viele irreduzible Gleichungen angehören können; die Koeffizienten kann man durch Ausprobieren aller möglichen Lösungen der Gleichung für $N$ leicht ermitteln, und man kann den Anfang der Reihe der Gleichungen für die niedersten $N$ in der Tat sofort hinschreiben.

Nun bestimmen wir für jede bestimmte Höhe $N$ die reellen Wurzeln der endlich vielen zugehörigen irre-



duziblen Gleichungen, deren es nur eine endliche Anzahl geben kann, und ordnen sie ihrer natürlichen Größe nach; dann nehmen wir zuerst die so geordneten Zahlen der Höhe 1, dann die der Höhe 2, und so fort und numerieren sie in dieser Reihenfolge. Damit ist in der Tat die Menge aller reellen algebraischen Zahlen abgezählt, denn wir kommen so zu jeder reellen algebraischen Zahl und brauchen andererseits auch sämtliche positiven ganzen Zahlen als Nummern auf. In der Tat kann man mit genügender Geduld etwa die 7563te Zahl des angegebenen Schemas ermitteln oder zu einer noch so komplizierten vorgegebenen algebraischen Zahl die zugehörige Nummer bestimmen.

Auch hier wird durch die Abzählung wieder die natürliche Rangordnung durchaus zerstört, wenn sie auch innerhalb der Zahlen gleicher Höhe erhalten bleibt; z. B. haben zwei einander so nahe liegenden Zahlen wie $\frac{2}{5}$ und $\frac{2001}{5000}$ die weit auseinanderliegenden Höhen 7 bezw. 7001, während $\sqrt{5}$ als Wurzel von $x^2 - 5 = 0$ dieselbe Höhe 7 hat, wie $\frac{2}{5}$. –

Bevor wir nun zu dem letzten Beispiele übergehen, schalte ich gern einen kleinen Hilfssatz ein, der uns noch weitere abzählbare Mengen liefert und uns gleichzeitig mit einem auch später zu benutzenden Beweis-verfahren bekannt macht. Sind zunächst zwei abzählbare Mengen gegeben:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \text{ und } b_1, b_2, b_3, \ldots,$$

so ist die aus ihnen durch Verschmelzung entstehende Menge aller a und aller b offenbar wieder abzählbar; denn man kann sie in dieser Reihenfolge schreiben:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$$

und damit sofort der Reihe der ganzen Zahlen ein-eindeutig zuordnen. Ebenso geben natürlich auch 3, 4, …, überhaupt endlich viele abzählbare Mengen vereinigt wiederum eine abzählbare Menge.

Nicht ganz so selbstverständlich aber erscheint – und diese Tatsache soll unseren Hilfssatz ausmachen –, daß auch die Vereinigung abzählbar unendlich vieler abzählbarer Mengen wiederum eine abzählbare Menge liefert. Um das zu beweisen, bezeichnen wir mit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Elemente der ersten, mit $b_1, b_2, b_3, \ldots$ die der zweiten, mit $c_1, c_2, c_3, \ldots$ die der dritten Menge und so fort und denken uns diese einzelnen Mengen untereinander geschrieben; dann brauchen wir nur die sämtlichen Elemente in der Reihenfolge aufzufassen, die die sukzessiven Querlinien im folgenden Schema andeuten:



$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\
d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

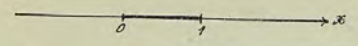
Die so entstehende Anordnung:

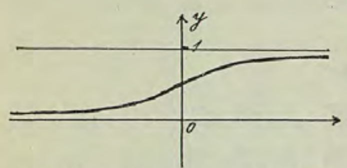
$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots \\
a_1 & a_2 & b_1 & a_3 & b_2 & c_1 & a_4 & b_3 & c_2 & d_1 & a_5 & \ldots
\end{array}$$

dringt schließlich zu jeder der Zahlen $a, b, c, \ldots$ vor und ordnet ihr eine und nur eine bestimmte Nummer zu, womit die Behauptung bewiesen ist. Man könnte das, an jenes Schema anknüpfend, eine „Abzählung nach Querlinien" nennen. –

Die große Mannigfaltigkeit abzählbarer Mengen, die wir so kennen gelernt haben, könnte zunächst die Meinung hervorrufen, daß überhaupt alle unendlichen Mengen abzählbar sind. Demgegenüber beweisen wir nun den zweiten Teil des Cantorschen Satzes, daß das Kontinuum aller reellen Zahlen gewiß nicht abzählbar ist; wir bezeichnen es kurz mit $C_1$, da wir später noch von mehrdimensionalen Kontinuis zu reden haben werden.

$C_1$ ist zunächst definiert als Gesamtheit aller endlichen reellen Werte $x$, wo wir $x$ etwa als Abszisse auf einer Achse uns vorstellen mögen. Wir wollen nun zuerst zeigen, daß die Menge aller inneren Punkte der Einheitsstrecke $0 < x < 1$ genau die gleiche Mächtigkeit hat. Deuten wir nämlich die erste Menge auf einer $x$-Achse, die zweite auf einer dazu senkrechten $y$-Achse, so




wird eine eineindeutige Abbildung zwischen ihnen vermittelt durch eine monoton ansteigende Kurve der skizzierten Art, die nach links $y = 0$, nach rechts $y = 1$ zur Asymptote hat (etwa wie ein Ast von $y = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$). Wir werden also für das $\mathfrak{C}_1$ die Menge aller Zahlen zwischen 0 und 1 setzen dürfen, was fortan geschehen soll.

Ich will nun für die Nichtabzählbarkeit der $\mathfrak{C}_1$ den Beweis vortragen, den Cantor 1891 auf der Naturforscherversammlung in Halle gegeben hat; er ist übersichtlicher und verallgemeinerungsfähiger als der ursprünglich 1873 publizierte. Die Hauptsache dabei ist ein höchst einfaches Verfahren, das sog. „Diagonalverfahren", das zu jeder angenommenen abzählbaren Anordnung aller reellen Zahlen eine sicher in ihr nicht enthaltene reelle Zahl liefert; das ist ein Widerspruch



und daher kann das $\mathfrak{C}_1$ nicht abzählbar sein.

Wir schreiben alle unsere Zahlen $0 < x < 1$ des $\mathfrak{C}_1$ als Dezimalbrüche; sie seien sämtlich in eine abzählbare Reihe gebracht:

$$\begin{array}{llllll} x_1 & = & 0, & a_1 & a_2 & a_3 \; \ldots \\ x_2 & = & 0, & b_1 & b_2 & b_3 \; \ldots \\ x_3 & = & 0, & c_1 & c_2 & c_3 \; \ldots \\ \ldots & & & \ldots & & \ldots \; , \end{array}$$

wo die $a, b, c$ Ziffern $0, 1, \ldots 9$ in jeder möglichen Auswahl und Reihenfolge sind. Man muß sich nun zunächst darüber klar werden, daß die Dezimalbruchschreibweise nicht völlig eindeutig bestimmt ist, da ja z. B. $0{,}999\ldots = 1{,}000\ldots$ ist, und da man überhaupt jeden abbrechenden Dezimalbruch auch mit lauter Neunen schließen kann; das ist ja eine der ersten Voraussetzungen beim Rechnen mit Dezimalbrüchen (vgl. S. 84). Um nun hier eine eindeutige Bezeichnung zu erreichen, setzen wir ein für alle Male fest, daß wir nur unendliche nicht abbrechende Dezimalbrüche verwenden, also statt abbrechender stets solche einführen, die mit lauter Neunen schließen. Solche Brüche mögen die oben in dem abzählbaren Schema stehenden alle bereits sein.

Um nun einen von allen Zahlen des Schemas verschiedenen Dezimalbruch $x'$ zu bilden, heben wir die in der oben markierten Diagonale (daher der Name des Verfahrens) stehenden Ziffern $a_1, b_2, c_3, \ldots$ hervor und setzen an die erste Stelle von $x'$ eine von $a_1$ sicher verschiedene Ziffer $a_1'$, an die zweite eine von $b_2$ verschiedene $b_2'$, an die dritte eine von $c_3$ verschiedene $c_3'$ und so fort:

$$x' = 0,\, a_1'\, b_2'\, c_3' \ldots .$$

Diese Bedingungen für $a_1', b_2', c_3' \ldots$ lassen uns aber offenbar noch genügend Freiheit, dafür zu sorgen, daß $x'$ wirklich ein echter Dezimalbruch, nicht etwa gleich $0{,}999\ldots = 1$ wird, und daß es nicht etwa hinter einer endlichen Stelle abbricht; wir können ja sogar $a_1', b_2', c_3', \ldots$ durchweg von 9 und 0 verschieden annehmen. Dann ist aber $x'$ sicherlich von $x_1$ verschieden, da die ersten Ziffern nicht übereinstimmen und zwei nicht abbrechende Dezimalbrüche nur dann gleich sein können, wenn alle Ziffern übereinstimmen; ebenso ist $x' \neq x_2$ wegen der zweiten, $x' \neq x_3$ wegen der dritten Ziffer, und so ist überhaupt $x'$, das doch ein ganz vernünftiger Dezimalbruch ist, von allen Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ des abzählbaren Schemas verschieden. Also ist der gewünschte Widerspruch erreicht und die Nichtabzählbarkeit des

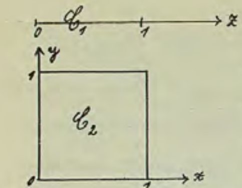


Kontinuums $C_1$ bewiesen.

Durch diesen Satz ist nun a priori die Existenz transzendenter Zahlen gesichert, denn die Gesamtheit der algebraischen Zahlen war abzählbar, und kann daher das nichtabzählbare Kontinuum aller reellen Zahlen nicht erschöpfen. Während alle früheren Erörterungen uns aber immer nur abzählbar unendlich viele transzendente Zahlen kennen lehrten, folgt hier, daß ihre Mächtigkeit tatsächlich größer ist, so daß wir jetzt erst die richtige allgemeine Einsicht bekommen; freilich beleben jene speziellen Beispiele ihrerseits wieder das hier etwas abstrakte Bild.

Nachdem wir so das eindimensionale Kontinuum erledigt haben, wird die Untersuchung des zweidimensionalen nahe liegen; da hatte gewiß jedermann geglaubt, daß die Ebene mehr Punkte enthielte als die Gerade, und daher erregte es das größte Aufsehen, als Cantor zeigte,[1] daß die Mächtigkeit des zweidimensionalen Kontinuums $C_2$ genau gleich der des eindimensionalen $C_1$ sei. Nehmen wir für das $C_2$ das Quadrat von der Seitenlänge 1, sowie für $C_1$ die Einheitsstrecke, so sollen also die Punkte beider eineindeutig aufeinander bezo-

1) Journ. f. d. r. u. a. Math., Bd. 84 (1878).




gen werden können. Daß diese Behauptung so paradox aussieht, liegt wohl daran, daß man sich zunächst von der Vorstellung einer gewissen Stetigkeit der Zuordnung nicht frei machen kann, aber in der Tat ist die Beziehung, die wir herstellen wollen, so unstetig, ja – wenn Sie wollen – so unorganisch, wie nur möglich; sie zerstört eben alles, was dem ebenen bezw. linearen Gebilde als solchem charakteristisch ist, mit Ausnahme der „Mächtigkeit", so etwa, als ob man alle Punkte des Quadrates in einen Sack tut und aufs gründlichste durcheinanderrüttelt.

Die Menge der Quadratpunkte stimmt nun überein mit der Menge aller Dezimalbruchpaare:

$$x = 0,\ a_1\, a_2\, a_3 \ldots,\quad y = 0,\ b_1\, b_2\, b_3 \ldots,$$

die wir wieder sämtlich nicht abbrechend annehmen wollen; wir schließen dabei also die Randpunkte, für die eine der Koordinaten $x$, $y$ verschwindet, d. h. die beiden an $0$ anstoßenden Seiten, aus, während die anderen mit berücksichtigt werden; man kann sich leicht nachträglich überlegen, daß dies an der Mächtigkeit nichts ändert. Die Grundidee des Cantorschen Beweises ist jetzt, diese beiden Dezimalbrüche zu einem neuen Dezimalbruch $z$ zu verschmelzen, aus dem man rückwärts $x$, $y$ eindeutig herstellen kann, und der genau einmal alle Werte $0 < z \leq 1$ durchläuft, wenn der Punkt $x|y$ einmal das Quadrat durchläuft; deutet man $z$ als Abszisse, so hat man damit tatsächlich die gewünschte eineindeutige Beziehung des Quadrates $C_2$ und der Einheitsstrecke $C_1$, wobei entsprechend den Festsetzung über jener auch bei dieser nur der Endpunkt $z = 1$ mitgerechnet wird.



Man wird nun diese Verschmelzung zuerst so versuchen, daß man setzt

$$z = 0,\ a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3 \ldots,$$

woraus in der Tat durch Abtrennen der geraden und ungeraden Dezimalstellen eindeutig $x$ und $y$ zu erhalten ist. Doch da erhebt sich ein Einwand aus der zweideutigen Schreibweise der Dezimalbrüche: Dieses $z$ durchläuft nämlich durchaus nicht das ganze $C_1$, wenn wir für $x|y$ alle Paare nicht abbrechender Dezimalbrüche, also alle Punkte des $C_2$ nehmen; denn $z$ ist dann zwar stets nicht abbrechend, aber es gibt nicht abbrechende Werte $z$, wie z. B.

$$z = 0,\ c_1\, c_2\, 0\, c_4\, 0\, c_6\, 0\, c_8 \ldots,$$

die man nur aus einem abbrechenden $x$ oder $y$ erhält, im Beispiel

$$x = 0{,}c_1\,000\ldots, \quad y = 0{,}c_2\,c_4\,c_6\,c_8\ldots$$

Diese Schwierigkeit kann man am besten durch einen von J. König in Budapest vorgeschlagenen Kunstgriff beseitigen. Er versteht nämlich unter den $a$, $b$, $c$ nicht schlechtweg die Ziffern, sondern gewisse Ziffernkomplexe, man könnte vielleicht sagen „Moleküle" des Dezimalbruches, zu denen er unter Hervorhebung der Rolle der Nullen jede geltende von 0 verschiedene Ziffer des Dezimalbruches mit allen ihr direkt vorangehenden Nullen zusammenfaßt; dann muß jeder nicht abbrechende Dezimalbruch auch unendlich viele Moleküle haben, da immer wieder von Null verschiedene Ziffern kommen, und umgekehrt. Beispielsweise sind in

$$x = 0{,}\,3208007000302405\ldots$$

als Moleküle zu nehmen: $a_1 = [3]$, $a_2 = [2]$, $a_3 = [08]$, $a_4 = [007]$, $a_5 = [0003]$, $a_6 = [02]$, $a_7 = [4]$, ...

Nun mögen in der obigen Regel für den Zusammenhang von $x|y$ mit $z$ die $a$, $b$, $c$ in der Tat solche Moleküle bedeuten. Dann gehört jedem Paare $x|y$ wiederum ein nicht abbrechender $z$ eindeutig zu, das seinerseits rückwärts $x$ und $y$ bestimmt. Jetzt zerfällt aber jeder $z$ rückwärts in ein $x$ und $y$ mit je unendlich



vielen „Molekülen", und entsteht daher genau einmal, wenn wir $x|y$ alle Paare nicht abbrechender Dezimalbrüche durchlaufen lassen; damit sind aber tatsächlich Strecke und Quadrat eineindeutig aufeinander abgebildet, d. h. sie haben dieselbe Mächtigkeit.

Natürlich kann man in ganz analoger Weise zeigen, daß auch das Kontinuum von 3, 4, ... Dimensionen die gleiche Mächtigkeit besitzt, wie das eindimensionale. Merkwürdiger ist aber, daß auch das Kontinuum $C_\infty$ von unendlich vielen, soll heißen von abzählbar unendlich vielen Dimensionen die gleiche Mächtigkeit besitzt; von diesem unendlichdimensionalen Raum ist ja jetzt hier in Göttingen besonders viel die Rede. Er ist definiert als Gesamtheit der Wertesysteme, die abzählbar unendlich viele Veränderliche

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,\ \ldots$$

annehmen können, wenn eine jede für sich alle reellen Werte durchläuft. Dies ist eigentlich nur eine neue Ausdrucksweise für eine in der Mathematik längst gebräuchliche Begriffsbildung; man hat ja immer die Gesamtheit aller Potenzreihen oder trigonometrischen Reihen betrachtet, wo die abzählbar unendlich vielen Koeffizienten eigentlich doch nichts als ebensoviele unabhängige Veränderliche sind, die freilich stets noch an gewisse Konvergenzbedingungen geknüpft erscheinen.

Wir wollen uns wiederum auf den „Einheitswürfel" des $C_\infty$ beschränken, d. h. auf die Gesamtheit aller an die Bedingung $0 < x_n \leqq 1$ geknüpften Punkte, und wollen nachweisen, daß man sie eineindeutig den Punkten der Einheitsstrecke $0 < x \leqq 1$ des $C_1$ zuordnen kann. (Dabei sind der Bequemlichkeit halber wieder alle Randpunkte, für die eine der Koordinaten $x_n$ verschwindet bezw. der Randpunkt $x = 0$ weggelassen, die andern mitgerechnet). Wir gehen, wie oben, von der Dezimalbruchdarstellung der Koordinaten im $C_\infty$ aus:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0,\ a_1\ a_2\ a_3\ \ldots \\ x_2 = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ \ldots \\ x_3 = 0,\ c_1\ c_2\ c_3\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

wobei diese Dezimalbrüche einmal sämtlich in der nichtabbrechenden Gestalt geschrieben seien, und weiterhin die $a, b, c \ldots$ „Dezimalbruchmoleküle" im oben festgelegten Sinne bedeuten sollen, d. h. Ziffernkomplexe, die mit einer von Null verschiedenen Ziffer endigen und vorher nur Nullen enthal-



ten. Nun müssen wir alle diese unendlich vielen Dezimalbrüche zu einem neuen zusammenfassen, der rückwärts seine Bestandteile wieder erkennen läßt, oder um im chemischen Bilde zu bleiben: wir haben eine so lose Legierung aller dieser Molekularaggregate zu bilden, daß wir leicht wieder aus ihr die Komponenten abtrennen können. Das gelingt nun sofort durch das schon früher (S. 557) angewandte „Querlinienverfahren"; wir schreiben in der durch die sukzessiven Linien im obigen Schema bereits angedeuteten Reihenfolge:

$$x = 0,\ a_1\ a_2\ b_1\ a_3\ b_2\ c_1\ a_4\ b_3\ c_2\ d_1\ a_5\ \ldots,$$

womit jedem Punkt des $C_\infty$ eindeutig ein Punkt des $C_1$ zugeordnet ist. Umgekehrt erhalten wir so jeden Punkt $x$ des $C_1$, denn wir können aus seiner nicht abbrechend geschriebenen Dezimalbruchdarstellung nach dem angegebenen Schema in eindeutiger Weise unendlich viele nicht abbrechende Dezimalbrüche $x_1, x_2, x_3, \ldots$ herleiten, aus denen er durch das angegebene Verfahren entsteht. Es ist so in der Tat die eineindeutige Abbildung des Einheitswürfels im $C_\infty$ auf die Einheitsstrecke des $C_1$ gelungen.

Unser bisheriges Resultat ist, daß es jedenfalls zweierlei von einander verschiedene Mächtigkeiten gibt:

1.) die der abzählbaren Mächtigkeiten.

2.) die aller Kontinua $C_1, C_2, C_3, \ldots$ einschl. $C_\infty$.

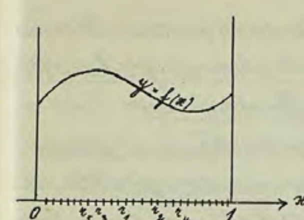
Es erhebt sich natürlich sofort die Frage, ob es nicht auch noch größere Mächtigkeiten gibt, und da kann man nun in der Tat nicht nur durch abstrakte Betrachtungen sondern durchaus innerhalb des Rahmens der Begriffe, die man in der Mathematik ohnehin stets gebraucht, eine weitere größere Mächtigkeit aufweisen, nämlich

3., die aller möglichen reellen Funktionen $f(x)$ eines reellen $x$.

Es genügt dabei, die Variable auf das Intervall $0 < x < 1$ zu beschränken. Zunächst wird man da natürlich an die Menge der stetigen Funktionen $f(x)$ denken, aber da gilt gerade noch der bemerkenswerte Satz, daß die Gesamtheit aller stetigen Funktionen noch die Mächtigkeit des Kontinuums hat, also der Gruppe 2.) zugehört. Zu einer neuen größeren Mächtigkeit kommen wir erst, wenn wir auch durchaus unstetige Funktionen der denkbar allgemeinsten Art zulassen, d. h. jeder Stelle $x$ den Funktionswert ganz beliebig und ohne jede Rücksicht auf die Nachbarwerte zuordnen.–

Ich will zunächst die zweite Behauptung über die Menge der stetigen Funktionen beweisen;






das wird auf eine Wiederholung und Verschärfung von Überlegungen herauskommen, die wir schon früher (S. 453) anstellten, um die Entwickelbarkeit „willkürlicher" Funktionen nach trigonometrischen Reihen plausibel zu machen. Da hatte ich bereits gezeigt, daß

a.) eine stetige Funktion $f(x)$ bestimmt ist, wenn man nur die Werte $f(r)$ an allen rationalen Stellen $r$ kennt.

b.) Wir wissen nun, daß man alle rationalen Werte $r$ in eine abzählbare Reihe $r_1, r_2, r_3, \ldots$ bringen kann.

c.) Daher ist $f(x)$ bestimmt, wenn man die abzählbar unendlich vielen Größen $f(r_1), f(r_2), f(r_3), \ldots$ kennt. Übrigens können diese Werte natürlich nicht ganz beliebig angenommen werden, wenn wir eine eindeutige stetige Funktion erhalten wollen; die Menge aller möglichen Wertsysteme der $f(r_1), f(r_2), \ldots$ enthält aber jedenfalls eine Teilmenge, die von gleicher Mächtigkeit mit der Menge aller stetigen Funktionen ist.

d.) Nun können die Größen $f_1 = f_1(r_1), f_2 = f(r_2), \ldots$ als Koordinaten eines $C_\infty$ aufgefaßt werden, da sie ja abzählbar unendlich viele kontinuierlich veränderliche Größen darstellen; nach dem vorhin bewiesenen Satze ist also die Gesamtheit ihrer möglichen Wertsysteme von der Mächtigkeit des Kontinuums.

e.) Als Teilmenge dieser auf das Kontinuum eineindeutig abbildbaren Menge ist daher die Menge aller stetigen Funktionen eineindeutig abbildbar auf eine Teilmenge des Kontinuums.

f.) Wir können nun aber leicht einsehen, daß auch umgekehrt das gesamte Kontinuum eineindeutig abbildbar ist auf eine Teilmenge der stetigen Funktionen. Dazu brauchen wir nur die durch $f_1 = f_2 = \dots = k$ definierten Funktionen $f(x) = k = \text{Const.}$ zu betrachten, wo $k$ ein reeller Parameter ist; durchläuft $k$ das Kontinuum $C_1$, so durchläuft $f(x) = k$ in der Tat eine auf $C_1$ eineindeutig abgebildete Teilmenge aller stetigen Funktionen.

g.) Nun müssen wir den sog. Äquivalenzsatz benutzen, der von F. Bernstein und E. Schröder ungefähr gleichzeitig bewiesen worden ist: Ist von zwei Mengen jede einem Teile der andern äquivalent, so sind diese beiden Mengen auch einander äquivalent. Dieser Satz ist äußerst plausibel; der ausführliche Beweis würde uns hier zu weit führen.



h.) Das Kontinuum $C_1$ und die Menge der stetigen Funktionen stehen nun nach e.) und f.) gerade in der im Äquivalenzsatz vorausgesetzten Beziehung; also sind sie von gleicher Mächtigkeit, und damit ist unser Satz bewiesen. –

Gehen wir nunmehr zu dem interessanten Beweise für unsere zweite Behauptung über, daß die Menge aller möglichen, „wirklich ganz willkürlichen" Funktionen eine größere Mächtigkeit besitzt, als das Kontinuum; es ist eine genaue Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens:

a.) Angenommen, unsere Behauptung sei falsch, d. h. die Menge aller Funktionen sei eineindeutig auf das Kontinuum $C_1$ abbildbar; es möge bei dieser Abbildung jeder Stelle $x = r$ aus $C_1$ die Funktion $f(x, r)$ von $x$ entsprechen, so daß während $r$ das Kontinuum durchläuft, $f(x, r)$ alle möglichen Funktionen von $x$ darstellt. Wir wollen diese Annahme dadurch ad absurdum führen, daß wir eine von sämtlichen Funktionen $f(x, r)$ sicherlich verschiedene Funktion $F(x)$ tatsächlich konstruieren.

b.) Dazu bilden wir nur die „Diagonalfunktion" des Schemas der $f(x, r)$, d. i. die Funktion, die an jeder Stelle $x = x_0$ den Wert hat, welchen die dem gleichen Parameterwerte $r = x_0$ zugeordnete Funktion $f(x, x_0)$ an der Stelle $x = x_0$ annimmt, also den Wert $f(x_0, x_0)$. Als Funktion von $x$ geschrieben, ist das daher einfach die Funktion $f(x, x)$.

c.) Nun bilden wir eine Funktion $F(x)$, die an jeder Stelle $x$ von diesem $f(x, x)$ verschieden ist:

$$F(x) \neq f(x, x) \text{ für jedes einzelne } x.$$

Das können wir auf äußerst mannigfaltige Weise tun, da wir ja durchaus unstetige Funktionen zulassen, deren Wert an jeder Stelle ganz willkürlich bestimmt werden kann; ein Beispiel wäre etwa $F(x) = f(x, x) + 1$.

d.) Dieses $F(x)$ ist nun in der Tat von jeder einzelnen der Funktionen $f(x, r)$ verschieden; denn wäre $F(x) = f(x, r_0)$ für irgend ein bestimmtes $r = r_0$, so müsste die Übereinstimmung speziell auch an der Stelle $x = r_0$ stattfinden, also $F(r_0) = f(r_0, r_0)$ sein. Das widerspricht aber gerade der Annahme c.) über $F(x)$.

Damit ist die Annahme a.) widerlegt, daß die Funktionen $f(x, r)$ alle Funktionen erschöpfen können, und unsere Behauptung ist bewiesen.

Es ist interessant, diesen Beweis mit dem ganz analogen für die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums zu vergleichen. Wie wir dort die Dezimalbrüche alle in einem abzählbaren Schema angeordnet annahmen, so betrachten wir hier das Funktionsschema $f(x, r)$; dem Hervorheben der Diagonalelemente dort entspricht hier die Herstellung der Diagonalfunktion $f(x, x)$, und beides findet die gleiche Verwendung zur Bildung eines neuen in dem Schema noch nicht enthaltenen Dezimalbruches, bezw. einer neuen Funktion.



Sie werden sich nun leicht vorstellen können, daß man durch ähnliche Betrachtungen zu unendlichen Mengen immer höherer Mächtigkeit aufsteigen kann, noch über die drei bisher gewonnenen verschiedenen Mächtigkeiten hinaus. Das Bemerkenswerteste an diesem ganzen Resultaten ist eigentlich doch das, daß es überhaupt bleibende Unterschiede und Abstufungen in den verschiedenen unendlichen Mengen gibt, obwohl wir sie doch mit den denkbar schärfsten Mitteln behandelten, die alle ihre Besonderheiten, wie Anordnung u. dgl. zerstörten und nur ihre Einzelelemente, ihre Atome gewissermaßen, als ganz unabhängig von einander existierende, beliebig durcheinander zu würfelnde Dinge bestehen ließen; und wichtig ist auch, daß wir 3 dieser Abstufungen schon innerhalb der in der Mathematik auch sonst geläufigen Dinge, der ganzen Zahlen, Kontinua und Funktionen, feststellen konnten.

Ich schließe damit den ersten Teil meiner mengentheoretischen Erörterungen, in dem ich über den Mächtigkeitsbegriff sprach. In ähnlicher konkreter Weise, nur etwas kürzer noch, will ich Ihnen jetzt einiges aus einem weiteren Teil der Mengenlehre mitteilen:

## 2. Anordnung der Elemente einer Menge.

Hier tritt nun gerade das in den Vordergrund, was wir bisher prinzipiell vernachlässigten, die Frage nämlich, wie sich die einzelnen Mengen der gleichen Mächtigkeit durch die gegenseitigen Anordnungsbeziehungen, die ihre Elemente von Haus aus besitzen, von einander unterscheiden; die allgemeinsten bisher zugelassenen eineindeutigen Abbildungen zerstörten ja alle diese Beziehungen – denken Sie nur an die Abbildung des Quadrates auf die Strecke! Ich möchte die Bedeutung gerade dieses Abschnittes der Mengenlehre besonders betonen; kann es doch unmöglich der Zweck der Mengenlehre sein, die in der Mathematik von altersher geläufigen Unterschiede durch Einführung neuer allgemeinster Begriffe aufzuheben, vielmehr soll und kann sie dazu beitragen, jene Unterschiede durch



Hervorhebung allgemeiner Begriffe in ihrem tiefsten Wesen zu erfassen.

Wir wollen nur hier die Begriffe der verschiedenen möglichen Anordnungen lediglich an bestimmten, allbekannten Beispielen klar machen. Beginnen wir mit den abzählbaren Mengen, so kennen wir drei grundverschieden angeordnete Erscheinungsformen, so verschieden, daß die Übereinstimmung ihrer Mächtigkeit, wie wir sahen, ein besonderes und keineswegs selbstverständliches Theorem bildete; es sind dies

1.) die Menge der positiven ganzen Zahlen;
2.) die Menge aller (negativen und positiven) ganzen Zahlen;
3.) die Menge aller rationalen Zahlen und die aller algebraischen Zahlen.

Alle diese Mengen haben in der Anordnung ihrer Elemente zunächst die eine gemeinsame Eigenschaft, der zufolge man sie als einfach geordnet bezeichnet: Es ist von je 2 Elementen stets entschieden, welches dem anderen vorangeht, d. h. – algebraisch gesprochen – welches das kleinere und welches das größere ist; und ferner geht von 3 Elementen $a, b, c$, wenn $a$ dem $b$ und $b$ dem $c$ vorangeht, auch stets $a$ dem c voran (wenn $a < b$ und $b < c$, so auch $a < c$).

Doch nun die charakteristischen Unterschiede: Bei 1.) existiert ein erstes Element (die Null), das allen andern vorangeht, aber kein letztes, das auf alle andern folgt, bei 2.) existiert weder ein erstes noch ein letztes; beiden gemein ist aber, daß auf jedes Element ein bestimmtes anderes folgt, und daß ebenso jedem Element ein bestimmtes anderes vorangeht. Im Gegensatz dazu liegen, wie wir schon früher gelegentlich sahen (S. 76), bei 3.) zwischen je zwei Elementen immer noch unendlich viele andere, (wir nannten das, die Elemente liegen „überall dicht"), so daß es insbesondere unter allen zwischen $a$, $b$ gelegenen rationalen oder algebraischen Zahlen (wenn man $a$, $b$ selbst nicht hinzurechnet) weder eine kleinste noch eine größte gibt. Die Arten der Anordnung dieser drei Beispiele, ihre Anordnungstypen (das Cantorsche Wort Ordnungstypen scheint mir nicht so bezeichnend) sind also sämtlich verschieden, obwohl ihre Mächtigkeit die gleiche ist; man könnte hieran, und das tun die Mengentheoretiker tatsächlich, die Frage nach den sämtlichen überhaupt möglichen Anordnungstypen der abzählbaren Mengen knüpfen. —

Gehen wir nun zur Betrachtung der Mengen von



der Mächtigkeit des Kontinuums über, so kennen wir eine einfach geordnete Menge im Kontinuum $C_1$ aller reellen Zahlen, daneben haben wir aber in den zwei- und mehrdimensionalen Typen $C_2$, $C_3$, ... Beispiele einer andern, als der einfachen Ordnung; beim $C_2$ beispielsweise sind nicht mehr eine, sondern 2 Relationen nötig, um die gegenseitige Lage zweier Punkte zu bestimmen.

Die Hauptsache wird nun hier sein, den Begriff der Stetigkeit des eindimensionalen Kontinuums zu analysieren; die Erkenntnis, daß er tatsächlich nur in einfachen Eigenschaften der dem $C_1$ eigentümlichen Anordnung beruht, ist die erste große Leistung der Mengenlehre für die Aufklärung der herkömmlichen mathematischen Begriffe. Man findet nämlich alle Stetigkeitseigenschaften des Kontinuums darin begründet, daß es eine einfach geordnete Menge mit folgenden beiden Eigenschaften ist:

1.) Teilen wir die Menge in irgend zwei Teile $A$, $B$ derart, daß jedes Element zu einem der beiden Teile gehört und alle Elemente aus $A$ allen aus $B$ vorangehen, so hat entweder $A$ ein letztes oder $B$ ein erstes Element. Erinnern wir uns an die Dedekindsche Definition der Irrationalzahlen (vgl. S. 82 ff) so können wir das auch kurz so aussprechen, daß jeder „Schnitt" in unserer Menge tatsächlich durch ein Element von ihr hervorgerufen wird.

2) *Zwischen 2 beliebigen Elementen der Menge liegen immer noch unendlich viele andere.*

Diese zweite Eigenschaft hat das Kontinuum mit der abzählbaren Menge aller rationalen Zahlen gemein, die erste aber macht den wesentlichen Unterschied beider aus. Alle einfach geordneten Mengen, die diese beiden Eigenschaften besitzen, nennt man in der Mengenlehre *stetig*, denn man kann tatsächlich alle Sätze für sie beweisen, die für das Kontinuum vermöge seiner Stetigkeit gelten.

Ich deute gern noch an, daß man diese Stetigkeitseigenschaften noch etwas anders formulieren kann, indem man die *Cantorschen Fundamentalreihen* an die Spitze stellt. Eine Fundamentalreihe ist eine einfach geordnete abzählbare Reihe solcher Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ der Menge, von denen in der Menge jedes dem folgenden vorangeht oder auch jedes dem nächsten nachfolgt:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots \quad \text{oder} \quad a_1 > a_2 > a_3 > \ldots \, .$$

Ein Element $a$ der Menge heißt nun *Grenzelement*



*der Fundamentalreihe, wenn – bei der ersten Art – zwar jedes vor $a$ gelegene Element schließlich von Elementen der Fundamentalreihe überschritten wird, aber kein hinter $a$ gelegenes Element*; analog ist es bei der zweiten Art. Hat nun in einer Menge jede Fundamentalreihe ein Grenzelement, so heißt sie *abgeschlossen*; ist umgekehrt jedes Element Grenzelement einer Fundamentalreihe, so heißt sie *in sich dicht*. Die Stetigkeit bei Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums besteht nun wesentlich in der Vereinigung dieser beiden Eigenschaften.

Ich erinnere hier beiläufig daran, daß wir bei der Grundlegung der Differential- und Integralrechnung auch von einem andern, dem „*Veronese'schen*" *Kontinuum* gesprochen hatten, das aus dem gewöhnlichen durch Hinzunahme der aktual unendlich kleinen Größen entsteht; dies bildet zwar auch eine einfach geordnete Menge, insofern über die Aufeinanderfolge je zweier Elemente bestimmt entschieden ist, aber es besitzt natürlich einen *ganz andern Ordnungstypus als das gewöhnliche* $\mathcal{C}_1$; schon der Satz, daß jede Fundamentalreihe ein Grenzelement hat, besteht da nicht mehr. –

Wir kommen nun zu der wichtigen Frage, *wel-*

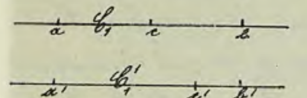
che Abbildungen denn den Unterschied der verschieden-dimensionalen Kontinua $C_1, C_2, \ldots$ erhalten; wir wissen ja, daß die allgemeinste eineindeutige Abbildung hier jeden Unterschied verwischt. Da besteht nun der wichtige Satz, daß die Dimensionenzahl des Kontinuums invariant ist gegenüber allen eineindeutigen und stetigen Abbildungen, d. h. daß es unmöglich ist ein $C_m$ und $C_n$ für $m \neq n$ eineindeutig und stetig aufeinander abzubilden. Man würde geneigt sein, diesen Satz ohne weiteres als selbstverständlich hinzunehmen, aber wir müssen uns erinnern, daß die naive Anschauung auch die Möglichkeit einer eineindeutigen Abbildung des $C_2$ auf das $C_1$ überhaupt auszuschließen schien und sehen uns so zur Vorsicht gegenüber ihren Aussagen veranlaßt.

Ich will hier nur den einfachsten Fall näher behandeln, wo es sich um die Beziehung der ein- und zweidimensionalen Kontinuum handelt, und werde dann nur kurz andeuten, welche Schwierigkeiten der Ausdehnung dieses Beweises auf den allgemeinsten Fall entgegenstehen. Wir beweisen also daß eine eineindeutige, stetige Beziehung zwischen dem $C_1$ und dem $C_2$ nicht möglich ist; dabei ist jedes Wort wesentlich: daß wir die Stetigkeit nicht weg-



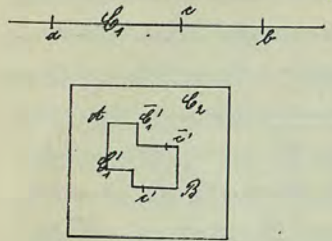
lassen dürfen, wissen wir ja, aber daß auch die Eineindeutigkeit nicht wegbleiben darf, lehrt das Beispiel der manchem von Ihnen gewiss bekannten „Peanokurve."

Zunächst ein Hilfssatz: Zwei eindimensionale Kontinua $C_1$, $C_1'$ mögen stetig aufeinander abgebildet sein,




derart daß jedem Elemente von $C_1'$ sicher ein und nur ein Element von $C_1$ und jedem Elemente von $C_1$ höchstens ein Element von $C_1'$ entspricht; sind dann $a$, $b$ zwei Elemente auf $C_1$, denen in $C_1'$ tatsächlich zwei Elemente $a'$, $b'$ bez. entsprechen, so entspricht auch jedem zwischen $a$, $b$ gelegenen Elemente $c$ von $C_1$ wirklich ein Element $c'$ von $C_1'$, das zwischen $a'$, $b'$ liegt. Diese Behauptung entspricht dem bekannten Satze, daß eine stetige Funktion $f(x)$, die an den Stellen $x = a'$, $b'$ zwei Werte $a$, $b$ annimmt, auch jeden zwischen $a$ und $b$ gelegenen Wert $c$ an einer Stelle $c'$ zwischen $a'$ und $b'$ annimmt; sie kann tatsächlich in genauer Verallgemeinerung dieses Satzes allein aus dem oben definierten Stetigkeitsbegriff bewiesen werden, wenn man auch noch die Stetigkeit einer Abbildung stetiger Mengen durchaus analog zur bekannten Definition der Stetigkeit einer Funktion definiert, was allein auf Grund des Anordnungsbegriffes gelingt. Es ist hier nicht der Ort, diese Andeutungen weiter auszuführen.

Nun führen wir unsern Beweis so: Es sei die eindimensionale Strecke $C_1$ und das




Quadrat $C_2$ eineindeutig und stetig aufeinander bezogen. Zwei Elementen $a$, $b$ auf $C_1$ mögen dabei die Elemente $A$, $B$ von $C_2$ entsprechen. Wir können nun diese $A$, $B$ innerhalb der Menge $C_2$ durch 2 von einander verschiedene Wege verbinden, z. B. die gezeichneten Treppenwege $C_1'$, $\bar{C}_1'$. Dabei brauchen wir keinerlei spezielle Eigenschaften des $C_2$, wie eine Koordinatenbestimmung u. dgl. vorauszusetzen, sondern müssen lediglich den Begriff der doppelten Ordnung des $C_2$ benutzen. Dann wird aber jedenfalls sowohl $C_1'$ als $\bar{C}_1'$ ein einfach geordnetes eindimensionales Kontinuum genau wie $C_1$, und in Folge der vorausgesetzten eineindeutigen stetigen Beziehung zwischen $C_1$ und $C_2$ muss jedem Elemente von $C_1'$ oder $\bar{C}_1'$ genau ein Punkt auf $C_1$, jedem Elemente von $C_1$ aber höchstens einer auf $C_1'$ oder $\bar{C}_1'$ entsprechen. Also sind gerade die Voraussetzungen unseres Lemma gegeben, und es folgt, dass jedem Punk-



te $c$ in $C_1$ zwischen $a$ und $b$ sowohl ein Punkt $c'$ auf $C_1'$, als auch ein Punkt $\bar{c}'$ auf $\bar{C}_1'$ entsprechen muss – das aber widerspricht der vorausgesetzten Eineindeutigkeit der zwischen $C_1$ und $C_2$ bestehenden Abbildung. Also kann diese Abbildung nicht möglich sein, und der Beweis ist geführt.

Will man nun diesen Beweis auf 2 beliebige Kontinua $C_m$, $C_n$ übertragen, so muss man vorher wissen, wie denn die einer $C_m$ eingelagerten Kontinua von 1, 2, 3, ... $m-1$ Dimensionen allgemeinster Natur beschaffen sein können; sowie $m$ und $n \geqq 2$ sind, kommt man da nicht mehr mit der Verwendung des Begriffes „zwischen" aus, wie soeben im einfachsten Falle. Vielmehr wird man auf äusserst schwierige Untersuchungen geführt, die noch als erste Fälle die schon sehr schweren, erst in neuester Zeit etwas geklärten, für die Geometrie fundamentalen Fragen nach den allgemeinsten stetigen eindimensionalen Punktmengen in der Ebene umfassen – insbesondere die Frage, wann man eine solche Punktmenge als Kurve ansprechen kann. –

Ich schliesse damit die speziellen Erörterungen über Mengenlehre, um noch einige allgemeine Bemerkungen anzufügen. Zunächst ein Wort darüber, welche allgemeinen Ideeen sich Cantor über die Stellung der Mengenlehre zur Geometrie und Analysis gebildet hat; durch sie erscheint die Bedeutung der Mengenlehre in besonderem Lichte. Durch die ganze Geschichte der Mathematik wie auch durch alle philosophischen Spekulationen über ihr Wesen zieht sich bekanntlich der Unterschied zwischen der diskreten Größe der Arithmetik und der kontinuierlichen, stetigen der Geometrie. Neuerdings ist die diskrete Größe als am einfachsten begreiflich besonders in den Vordergrund gerückt worden, indem man die ganzen natürlichen Zahlen als gegebene einfachste Begriffe ansah, von ihnen aus in bekannter Weise die rationalen und irrationalen Zahlen herleitete, und so schließlich den ganzen Apparat zur Beherrschung der Geometrie durch die Analysis, die analytische Geometrie, gewann; man kann die Tendenz dieser modernen Entwicklung als die einer Arithmetisierung der Geometrie bezeichnen: die geometrische Stetigkeitsidee wird auf die Idee der ganzen Zahlen zurückgeführt. So haben wir es auch in dieser Vorlesung in der Hauptsache gehalten.

Dieser einseitigen Bevorzugung der ganzen Zahlen gegenüber will nun Cantor – wie er mir selbst



gelegentlich bei der Naturforscherversammlung in Cassel 1903 sagte – geradezu die „wahre Fusion von Arithmetik und Geometrie" in der Mengenlehre erreichen, d. h. die Lehre von den ganzen Zahlen einerseits ebenso wie die Theorie der verschiedenen Punktkontinua andererseits und noch vieles andere zu nebeneinander stehenden gleichberechtigten Kapiteln einer allgemeinen Lehre von den Mengen machen. –

Noch einiges Allgemeine über die Beziehungen der Mengenlehre zur Geometrie will ich hier anfügen: Wir hatten in der Mengenlehre betrachtet:

1) Die Mächtigkeit der Mengen als das, was bei jeder eineindeutigen Abbildung erhalten blieb.

2) Die Anordnungstypen der Mengen, die die Ordnungsbeziehungen der Elemente berücksichtigen. Hier konnten wir den Stetigkeitsbegriff, die verschiedenen mehrfachen Anordnungen oder verschiedendimensionale Kontinua u. dgl. charakterisieren, und so gehören hier schließlich überhaupt die Invarianten stetiger Abbildungen hin. Auf die Geometrie übertragen gibt das aber überhaupt die seit Riemann Analysis situs genannte Disziplin, jenes abstrakteste Kapitel der Geometrie, das nur die bei den allgemeinsten stetigen eineindeutigen Abbildungen invarian-

ten Eigenschaften der geometrischen Gebilde behandelt. Übrigens hat schon Riemann das Wort Mannigfaltigkeit in einem sehr allgemeinen Sinne gebraucht; dies Wort benutzt auch Cantor zuerst und ersetzte es erst später durch das kürzere und daher bequemere Wort „Menge", das ja auf denselben Sprachstamm zurückgeht. Heut ist das Wort „Menge" so eingebürgert, daß jeder für ganz unmodern gilt, der noch „Mannigfaltigkeit" sagt.

3) Wollen wir nun weiter zur konkreten Geometrie übergehen, so kommen Unterschiede wie zwischen metrischer und projektiver Geometrie herein. Hier genügt es nicht zu wissen, daß etwa die Gerade eindimensional, die Ebene zweidimensional ist, sondern man wird Figuren konstruieren oder vergleichen wollen, wobei man etwa über einen festen Maßstab verfügen oder doch wenigstens Gerade in der Ebene, Ebenen im Raume legen will. Für jedes dieser konkreten Gebiete wird natürlich eine spezielle Axiomatik zu den allgemeinen Anordnungseigenschaften hinzutreten müssen. Das bedeutet also eine weitere Entwicklung der Lehre von den einfach, zweifach, ... geordneten kontinuierlichen Mengen.

Es kann nicht meine Absicht sein, hier nä-



her auf diese Dinge einzugehen, die in dem geometrischen Kolleg des nächsten Semesters ohnehin behandelt werden müssen. Nur Literatur will ich noch nennen, in der Sie sich etwas informieren können; da kommen natürlich vor allem die einschlägigen Referate der mathematischen Encyklopädie in Betracht: Enriques, Prinzipien der Geometrie (III. A. B. 1) und v. Mangoldt, die Begriffe „Linie" und „Fläche" (III A. B. 2) für die spezielle Axiomatik, sowie Dehn-Heegaard, Analysis situs (III A B 3). Der letztere Artikel ist recht abstrakt geschrieben; er beginnt mit den allgemeinsten, von Dehn selbst aufgestellten Formulierungen der Begriffe und Grundtatsachen der Analysis situs, aus denen dann alles andere rein logisch deduziert wird. Das steht ganz im Gegensatz zu der induktiven Darstellungsmethode, die ich immer empfehle; er setzt, soll er voll verstanden werden, eigentlich einen sehr hoch stehenden Leser voraus, der das Gebiet schon so gründlich induktiv durchgearbeitet hat wie der Autor.

Was Literatur über die Mengenlehre angeht, so habe ich vor allem auf den der deutschen Mathematikervereinigung erstatteten Bericht von A. Schoenflies: „die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten"[1], zu verweisen, der erste Teil erschien im

1) 2. Teile. Leipzig 1900 und 1908.

Band VIII der Jahresberichte der D. M. V., während der zweite erst kürzlich – in der Form eines zweiten Ergänzungsbandes zu den Jahresberichten – erschienen ist. Dies Buch ist tatsächlich ein Referat über die gesamte Mengenlehre, in dem Sie über zahlreiche Einzelheiten Bescheid finden können. Daneben wäre noch das erste und einzige systematische Lehrbuch der Mengenlehre zu nennen; „The theorie of sets of points" [1] von W. H. Young und seiner schon S. 400 genannten Frau G. Ch. Young. –

Zum Schluss dieser Betrachtungen über Mengenlehre haben wir nun wieder die Frage zu stellen, mit der wir unser ganzes Kolleg begleiteten: Was kann man davon auf der Schule gebrauchen? Man sollte die Frage hier beinahe für überflüssig halten, denn eigentlich muss doch jeder Mensch zugeben, dass man dem Schüler mit derart abstrakten und schwierigen Dingen nicht so bald kommen dürfe. Aber diese Erkenntnis herrscht doch nicht allgemein, wie ich nur durch ein Beispiel belegen will. Kurze Zeit nachdem Cantor mit seiner Theorie hervorgetreten war, schrieb ein Freund von ihm, Friedrich Meyer – übrigens selbst ein hervorragender Mathematiker – seine „Elemente der Arithme-

1) Cambridge 1906.



tik und Algebra", [1] in denen er den gesamten arithmetisch-algebraischen Lehrstoff der Schule zusammenfassend systematisch darstellen wollte. Hierbei wird nun die Mengenlehre durchaus vorangestellt und alles andere auf sie aufgebaut: auf der ersten Seite wird mit der allgemeinen Idee der Mächtigkeit einer Menge begonnen, auf Seite 6 wird das Symbol $\omega$ für die Mächtigkeit der abzählbar unendlichen Menge $(1, 2, 3, \ldots)$ eingeführt, und auf Seite 21 endlich ist der Verfasser in seiner Deduktion bis zur Tabelle des kleinen Einmaleins gelangt! Im weiteren Verlauf bringt das Buch eine gewaltige Menge Stoff, aber Auswahl und Gruppierung ist geradezu entgegengesetzt den Vorschlägen, die unsere Reformtendenzen ergeben würden. Von Infinitesimalrechnung findet sich natürlich keine Spur, aber auch die Raumanschauung und überhaupt „genetische" Methoden kommen durchaus nicht zu ihrem Recht. Vielmehr enthält die Vorrede den charakteristischen Ausspruch, dass die Analysis und Arithmetik jetzt „der geometrischen Krücken" nicht mehr bedürfe, nachdem durch die Mengenlehre eine rein logische Begründung der Kontinuums ermöglicht sei.

Wir können natürlich von unserm mathematisch-

1) 2. Aufl. Halle 1885.

pädagogischen Standpunkte aus einen Unterricht nicht billigen, der so abstrakt und rein deduktiv vorschreitet wie dieses Buch 1). Wenn auch vielleicht einmal ein mathematisch und logisch besonders veranlagter junger Mann dadurch gefördert und angeregt werden könnte – der wesentliche Zweck unseres Schulunterrichtes ist es doch, nicht nur solche besondere Talente auszubilden, sondern den Durchschnitt wesentlich zu fördern, und dazu *kann man meiner Meinung nach kein unzweckmäßigeres Mittel finden, als ein solches abstraktes, systematisches Verfahren.*

Ich möchte nun meine Ansicht über diesen Punkt zu präzisieren, *das biogenetische Grundgesetz* heranziehen, daß das Individuum in seiner Entwicklung in abgekürzter Reihe alle Entwicklungsstadien der Gattung durchläuft; solche Gedanken sind ja heute nachgerade Bestandteile der allgemeinen Bildung eines jeden geworden. Dies Grundgesetz, denke ich, sollte auch der mathematische Unterricht, wie jeder Unterricht überhaupt, im allgemeinen wenigstens befolgen: *Er sollte, an die natürliche Veranlagung der Jugend anknüpfend, sie langsam auf denselben Wege zu höheren Dingen und schließlich auch zu abstrakten Formulierungen führen,*

1) Vgl. den „Zusatz", S. 613.



*auf dem sich die ganze Menschheit aus ihrem naiven Urzustande zu höherer Erkenntnis emporgerungen hat!* Es ist nötig, diese Forderung immer wieder zu stellen, denn immer wieder gibt es Leute, die nach Art der mittelalterlichen Scholastiker ihren Unterricht mit den allgemeinsten Ideeen beginnen und diese Methode als die allein wissenschaftliche rechtfertigen wollen. Und doch ist auch diese Begründung nicht wahr: *Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, daß er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber, ihm von Anfang an mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht springen.*

Ein wesentliches Hindernis der Verbreitung einer solchen naturgemäßen und wahrhaft wissenschaftlichen Unterrichtsmethode ist wohl der *Mangel an historischen Kenntnissen*, der so vielfach sich geltend macht. Um ihn zu bekämpfen, habe ich besonders gern zahlreiche *historische Momente* in meine Darstellung verflochten. Lernen Sie daraus, wie langsam alle mathematischen Ideeen erst entstanden sind, wie sie fast stets in mehr divinatorischer Gestalt auftauchen und erst in langer Entwicklung die starre und auskrystallisierte Form der systematischen Darstellung annahmen! Möge diese Erkenntnis einst – mit diesem Wunsche möchte ich meine

Vorlesung schliessen – nachhaltigen Einfluss auf die Gestaltung Ihres eigenen Unterrichts an der Schule gewinnen!

---



## Zusätze zur 2. Auflage.

### Zu S. 4: Neuere Kommissionen zum Studium von Unterrichtsfragen.

Das Interesse an Unterrichtsfragen aller Art ist auch in den letzten Jahren in weiten Kreisen ständig gewachsen; es dokumentiert sich besonders auch darin, daß eine ganze Reihe großer Verbände und ad hoc eingesetzter Kommissionen auf breitester Basis die gegenwärtige Lage und die Probleme des Unterrichtes studieren. Soll ich in aller Kürze einen Überblick über diese Organisationen geben, so hätte ich zuerst den „deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ zu nennen – statt dieses langen Titels haben wir uns aus den Anfangsbuchstaben den Namen „Damnu“ gebildet –; ihn hat die Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte in Verbindung mit zahlreichen andern an den verschiedenen Seiten jenes Unterrichtes interessierten Verbänden eingesetzt, um die von ihrer früheren „Unterrichtskommission“ geschaffenen Reformpläne weiterhin auszubauen und ihre Durchführung zu betreiben.[1] Neben ihm wirkt speziell

[1] Vgl. „Schriften des D. A. f. m. u. n. U.“ (Leipzig, Teubner, 1908 ff.), von denen bisher 6 Hefte erschienen sind.

für die Fragen des technischen Unterrichtes der vom Verein deutscher Ingenieure eingesetzte „Deutsche Ausschuß für technisches Schulwesen" („Datsch").[1]

Speziell uns als Mathematiker interessiert eine weitere Kommission, die internationalen Charakter hat, und deren Bildung auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Rom (1908) von dem Amerikaner D. E. Smith angeregt wurde; diese „Internationale mathematische Unterrichtskommission" („Imuk") soll dem nächsten internationalen Mathematikerkongreß, der 1912 in Cambridge tagen wird, über den Stand des mathematischen Unterrichts in allen Kulturländern Bericht erstatten, und sie hat zu diesem Zwecke in allen in Betracht kommenden Ländern die Bearbeitung der gesamten zu dem Gebiet des mathematischen Unterrichts gehörigen Fragen aufgenommen. Die offiziellen Veröffentlichungen dieser Kommission, die aus Delegierten aller Kulturstaaten besteht, finden in der Genfer Zeitschrift „L'Enseignement Mathématique" Platz; andererseits veröffentlichen die für die einzelnen Länder aus den Delegierten und einem „nationalen Beirat" gebildeten Unterausschüsse selbständig die Resultate ihrer Arbeiten.

Ich möchte hier besonders auf die Arbeiten unseres

1) Vgl. „Abhandlungen und Berichte über technisches Schulwesen". Veranl. u. hrsgg. v. D. A. f. t. Sch. Bisher erschien Bd. I. (Leipzig, Teubner, 1910).



deutschen Unterausschusses verweisen, der einmal in der „Zeitschrift für mathemat. u. naturwiss. Unterricht" fortlaufend kurze „Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die I. M. U. K."[1] erscheinen läßt, andrerseits aber in den „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die I. M. U. K."[2] auch ausführlichere Darstellungen herausgibt. Hier wird in zahlreichen einzelnen Heften, von denen eine ganze Reihe bereits vorliegen, die gegenwärtige Lage des mathematischen Unterrichts nach allen Seiten hin monographisch behandelt; die Hefte sind nach ihrem Inhalt zu Bänden gruppiert, die folgende Gebiete umfassen sollen:

Bd. I. behandelt Organisation, Lehrstoff und Lehrverfahren der höheren Schulen Norddeutschlands, sowie die Staatsprüfung und die praktische Ausbildung ihrer Lehrkräfte.

Bd. II. erörtert die gleichen Fragen für Mittel- und Süddeutschland.

Bd. III. enthält Berichte allgemeiner Art über den höheren mathematischen Unterricht: Die bisherige Entwicklung der Reformbewegung; die Stellung der Mathematik im Unterricht anderer Gebiete (Physik, Zeichnen

1) Auch separat: Leipzig, Teubner von 1909 an.
2) Hrsg. v. F. Klein. Leipzig, Teubner von 1909 an.

et c.); das mathematische Universitätsstudium, u. s. f.

Bd. IV gibt Berichte über den mathematischen Unterricht an den verschiedenen Arten der technischen Mittel- und Hochschulen.

Bd. V endlich soll über die Stellung der Mathematik an den Volksschulen handeln.

Diese auf sorgfältigen Spezialstudien beruhenden Arbeiten sind ausgezeichnet geeignet, die in meiner Vorlesung enthaltenen Exemplifikationen auf den gegenwärtigen Unterricht nach vielen Seiten hin zu ergänzen und zu vertiefen. Vor allem möchte ich in dieser Hinsicht die beiden ersten Hefte von Band I nennen, die von W. Lietzmann herrühren und in erster Linie die preußischen Verhältnisse betreffen: „Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher"[1] und „Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den höheren Knabenschulen in Preußen."[2] Hier findet man einerseits eine wertvolle Übersicht über die Lehrbuchliteratur, andererseits aber auch einen auf Grund der Programme und der Beondres zahlreicher Anstalten erstatteten Bericht darüber, wie sich der mathematische

1) Leipzig, 1909.
2) Leipzig, 1910.



Unterricht heute wirklich gestaltet.

Was die Arbeiten der Unterkommissionen der anderen Länder anlangt, so genügt es wohl auf die Berichte zu verweisen, die jüngst auf der von der Imuk veranstalteten ersten internationalen Zusammenkunft in Brüssel (9. u. 10. August 1910) erstattet worden sind; sie sind im dritten Rundschreiben des Hauptausschusses von dessen Generalsekretär H. Fehr (s. Enseign. mathém. 12 (1910), S. 353 ff.) zusammengefaßt, das W. Lietzmann in Heft V der „Berichte und Mitteil." (= Zeitschr. f. math. Unterr. 41 (1910), S. 594) deutsch bearbeitet hat.

---

Zu S. 12: Neuere Literatur zum mathematischen Unterricht.

Zu den im Text genannten Büchern sind seither unter dem Einfluß des allgemeinen Interesses an der Ausgestaltung des Mathematikunterrichts eine große Anzahl neuer Darstellungen hinzugekommen, aus der nur einige wenige Proben herausgenommen sein mögen: An erster Stelle eine neue „Didaktik des mathematischen Unterrichts"[1] von A. Höfler in Wien, dem Hauptvertreter der Unterrichtsreform in Oesterreich; hier sind in Übereinstimmung mit unseren Meraner Lehrplänen ins Einzelne gehende Weisungen für die Ausgestaltung des Unter-

1) Leipzig, 1910.

nichts gegeben.

Daneben wären einige Handbücher zu nennen, die den Unterrichtsstoff der Schule dem Lehrer in wissenschaftlicher Durcharbeitung darbieten wollen: Zunächst das „Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer“[1] von H. Schwering, das sich in enger Beziehung zum Schulunterricht hält, weiter das „Handbuch des mathematischen Unterrichts“[2] von W. Killing und H. Hovestadt, von dem einstweilen nur der erste die Geometrie behandelnde Band erschienen ist, und endlich die umfangreicheren „Grundlehren der Mathematik für Studierende und Lehrer“ von E. Netto, C. Färber, W. F. Meyer und H. Thieme; in den 4 Bänden dieses Werkes, von denen bisher zwei, die „Elemente der Geometrie“[3] von H. Thieme und die „Arithmetik“[4] von C. Färber, erschienen sind, soll auf breiter Grundlage das gesamte Material des Schulunterrichts wissenschaftlich streng und für den Schulunterricht verwendbar dargestellt werden.

Gern nenne ich hier auch noch die Übersetzungen zweier französischer Werke, zumal uns ja gerade die Franzosen in der Durchführung moderner Ideeen im mathe-

1) Leipzig 1907.

2) Bd. I. Leipzig 1910.

3) Bd. I. des zweiten Teiles, Leipzig 1909.

4) Bd. II des ersten Teiles, Leipzig 1911.



matischen Unterricht um mehrere Jahre voraus sind: Ich meine einmal die Borelschen Elementarbücher, die P. Stäckel als „Elemente der Mathematik“ in 2 Bänden[1] deutsch bearbeitet hat, andererseits die „Elemente der Mathematik“ von Jules Tannery[2]. Während die ersteren den Unterrichtsstoff für die unteren Klassen in sehr interessanter und moderner Weise darbieten, wollen Tannerys Elemente jedem, der nur die herkömmliche „Elementarmathematik“ kennt, die hauptsächlichsten Methoden und Ideeen der „höheren Mathematik“ zugänglich machen.

---

Zu S. 117: Zum großen Fermatschen Satze.

Die Versuche, den großen Fermatschen Satz zu beweisen oder vielmehr den Wolfskehlschen Preis zu erhalten, den die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften nun im Juni 1908 öffentlich ausgeschrieben hat,[3] werden von mathematischen Laien ebenso unermüdlich wie erfolglos fortge-

1) I. Arithmetik und Algebra (Leipzig 1908); II Geometrie (1909).

2) Deutsch v. P. Klaess. Leipzig 1909.

3) Die ausführlichen Bedingungen für die Preisbewerbung sind veröffentlicht in den Nachrichten d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen 1908, pg. 103 f. und in vielen mathematischen Zeitschriften abgedruckt (vgl. z. B. Math. Ann. 66, S. 143; Journ. f. Mathem. 134, S. 313).

setzt; für alle diese Arbeiten, die haufenweise, auch im Buchhandel erscheinen, gilt das im Text Gesagte, so daß sie zu der Lösung des Problemes in Wahrheit nicht den mindesten Beitrag liefern. Was da an Verkehrtheiten zu Tage gefördert wird, kann man in den kritischen Besprechungen solcher „Beweise" sehen, die das „Archiv für Mathematik und Physik" jetzt regelmäßig in größerer Zahl bringt; diese Massenabschlachtungen sind recht amüsant zu lesen, so traurig es eigentlich ist, daß sie notwendig sind.

Aber auch die ernsthafte mathematische Arbeit ist durch diese Dinge wieder angeregt worden, sich mit dem Fermatschen Satz zu beschäftigen, und hier sind in der Tat bereits einige Fortschritte zu verzeichnen, wenn man auch von einer Lösung des Problemes noch recht weit entfernt ist. Einmal hat A. Wieferich [1] das äußerst einfache Kriterium abgeleitet, daß die Fermatsche Gleichung $x^p + y^p = z^p$ für einen ungeraden Primzahlexponenten $p$ nur dann in zu $p$ primen ganzen Zahlen lösbar sein kann, wenn $2^{p-1}$ durch $p^2$ teilbar ist; kürzere Beweise und Erweiterungen dieses Satzes haben dann G. Frobenius [2] und D. Mirimanoff [3] gegeben.

1) Journ. f. Mathem. 136 (1909), S. 293.
2) Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad., Berlin, 2. Dez. 1909 und 24. Febr. 1910, sowie Journ. f. Math. 137 (1910), S. 314.
3) L'Enseign. Mathém., 15. Nov. 1909. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, 24. Jan. 1910.; Journal f. Math. 139 (1911), S. 309.



Andererseits sind noch die Noten von F. Bernstein [1], E. Hecke [2] und Ph. Furtwängler [3] zu nennen, die von der Theorie der algebraischen Zahlkörper ausgehen.

---

Zu S. 123 f.f.: Zum Unmöglichkeitsbeweise für die Konstruktion des regulären Siebenecks.

Eine einfachere Darstellung des Beweises haben im Anschluß an die erste Auflage P. Montel und F. Marotte in der „Revue de l'Enseignement des Sciences," 3. Année (1909), S. 49 gegeben. Im Text ist die alte Darstellung beibehalten, um auf das Gaußsche Lemma zu exemplifizieren. Hier sei jedoch noch angedeutet, wie man auch ohne dieses zeigen kann, daß die Gleichung $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ die Wurzel $\pm 1$ haben müßte, wenn sie reduzibel wäre. Denn dann müßte sie eine rationale Wurzel $x = \frac{p}{q}$ haben, wo $p$ und $q$ teilerfremd; das hieße aber $p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3 = 0$, und also wäre $p^3$, und mithin auch $p$ selbst durch $q$ teilbar. Ebenso folgt aber, daß $q^3$ und also $q$ durch $p$ teilbar ist, und daher muß $p = \pm q$ und die Wurzel $x$ in der Tat $\pm 1$ sein.

---

1) Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch., Göttingen, math.-phys. Kl. 1910, S. 482 u. S. 507.
2) Ebenda, 1910, S. 420.
3) Ebenda 1910, S. 554.

Zu S. 163: <u>Drehstreckungen des vierdimensionalen Raumes und die Lorentztransformationen der modernen Elektrodynamik.</u>

Wie im Text schon angedeutet, steht der Begriff der Drehstreckungen eines vierdimensionalen Raumes $R_4$ in engster Beziehung zu den Grundlagen des „Relativitätsprinzipes" in der Elektrodynamik, das ja seit einigen Jahren die Physiker auf das lebhafteste beschäftigt; es sind nämlich – und das mag hier noch kurz dargelegt werden – die „Lorentztransformationen", auf deren Studium jene Untersuchungen beruhen, nichts als Drehungen eines gewissen $R_4$, und sie lassen sich sogar gerade durch Quaternionenformeln in bequemster Weise darstellen.

Bekanntlich versteht man unter einer Lorentztransformation eine solche lineare homogene Substitution der drei Raumkoordinaten $x, y, z$ und der Zeit $t$ mit reellen Koeffizienten:

$$(1)\quad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t, \end{cases}$$

die die quadratische Form $x^2+y^2+z^2-c^2\cdot t^2$ (wo $c$ die Lichtgeschwindigkeit ist) in sich transformiert:

$$(2)\quad x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2,$$

und für die obendrein der letzte Koeffizient



$$(3)\quad \frac{\partial t'}{\partial t} = a_{44} > 0$$

ist. Dabei ist der Kürze halber von einer Verschiebung des Anfangspunktes $x = y = z = t = 0$, die noch hinzukommen könnte, abgesehen.

Es ist nun leicht im Quaternionenkalkül eine Substitution anzugeben, die der Bedingung (2) genügt, wenn man von der Realität der Koeffizienten und der Ungleichung (3) zunächst absieht. Man braucht dazu nämlich nur solche Quaternionen zu betrachten, deren Komponenten nicht mehr reelle, sondern gemeine komplexe mit der gewöhnlichen imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ (die dann von den spezifischen Quaternioneneinheiten $i, j, k$ wohl zu unterscheiden ist) gebildete Zahlen sind. Wir bemerken zunächst, daß die so gebildeten Quaternionen

$$(\mathrm{I}\,a)\quad \begin{cases} q = \sqrt{-1}\cdot c\cdot t + ix + jy + kz, \\ q' = \sqrt{-1}\cdot c\cdot t' + ix' + jy' + kz', \end{cases}$$

zu Tensoren gerade die Quadratwurzeln aus den quadratischen Formen (2) haben; man kann daher genau wie im Text (S. 158–162) beweisen, daß die Formel

$$(\mathrm{I}\,b)\quad q' = \frac{p\cdot q\cdot \pi}{M}$$

eine (2) genügende lineare Substitution darstellt, wenn $p$ und $\pi$ beliebige Quaternionen, auch mit komplexen Komponenten, bedeuten und $M$ die Quadratwurzel aus dem Produkt ihrer Tensoren ist.

Um nun reelle Koeffizienten zu erhalten und die Bedingung (3) zu befriedigen, hat man nur $p$ und $\pi$ in gewisser Weise konjugiert anzunehmen, und zwar erhält man durch Einführung passender Parameter folgende höchst einfache rationale Formeln:[1] Es seien $A, A', \dots D, D'$ acht reelle Größen, die an die Gleichung

$$(\mathrm{II}^a) \qquad AA' + BB' + CC' + DD' = 0$$

und an die Ungleichung

$$(\mathrm{II}^b) \qquad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 > A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2 \, .$$

geknüpft sind; dann ist

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{aligned} p &= (D + \sqrt{-1}\,D') + i(A + \sqrt{-1}\,A') + j(B + \sqrt{-1}\,B') + k(C + \sqrt{-1}\,C') \\ \pi &= (D - \sqrt{-1}\,D') - i(A - \sqrt{-1}\,A') - j(B - \sqrt{-1}\,B') - k(C - \sqrt{-1}\,C') \\ M &= (A^2 + B^2 + C^2 + D^2) - (A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) \end{aligned} \right. .$$

In den Formeln (I) mit den Bedingungen (II) ist die Darstellung sämtlicher Lorentztransformationen gegeben.

Minkowski selbst hat übrigens in seinen Arbeiten an Stelle des Quaternionenkalküls die Cayleysche Matrizensymbolik benutzt, die neben den Lorentztransformationen selbst auch die zu ihrer Gruppe gehörigen Invarianten darzustellen erlaubt.[1]

1) Siehe meinen Vortrag „Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe" im Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), S. 299.



---

Zu S. 222 ff.: Zur Diskriminantenfläche der biquadratischen Gleichung.

Das Hartensteinsche Fadenmodell ist indessen im Verlage von M. Schilling in Leipzig erschienen (Serie XXXIII, Nr. 2, 3); das eine Modell zeigt die Diskriminantenfläche, das andere außerdem noch 2 ihrer Tangentialebenen, was eine den ebenen Figuren von S. 216, 217 entsprechende Raumeinteilung liefert. Man vergleiche die zum Modell gehörige Abhandlung von R. Hartenstein: „Die Diskriminantenfläche der Gleichung vierten Grades". (Leipzig, Schilling, 1909).

---

Zu S. 322: Zu den Gleichungen sechsten Grades.

Die Auflösung der Gleichungen sechsten Grades gemäß den im Text angeführten Prinzipien der Reduktion der Gleichung 6. Grades auf die Ikosaedertheorie wurde im Zusammenhang mit meiner gesamten Arbeit von 1905

1) „Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern". Nachr. d. K. Ges. d. Wissensch. Göttingen, math.-phys. Kl. 1908, S. 53 = Mathem. Ann. 68, S. 472.

erfolgreich angegriffen von P. Gordan in zwei Arbeiten in Bd. 61 (1905; pag. 50) und 68 (1910; pag. 1) der mathem. Annalen. Eine vereinfachte und weitergehende Behandlung des Problems enthält eine demnächst in den math. Ann. erscheinende Arbeit von A. B. Coble.

---

Zu S. 328 ff.: Zur Geschichte der Logarithmen.

Im Grunde genommen treten die natürlichen Logarithmen schon vor Neper gelegentlich eines äußerst wichtigen Fortschrittes der Kartographie auf: man kann die Entdeckung der „Merkatorprojektion" durch Gerhard Mercator (um 1550) geradezu als graphische Vorentdeckung der Logarithmen bezeichnen.[1] Es mag hier genügen auf Kap. III des zweiten Hauptteils im zweiten Bande dieser Autographie zu verweisen, wo der Zusammenhang der Merkatorprojektion mit der Logarithmusfunktion dargelegt wird. Will man ohne deren Kenntnis die Merkatorprojektion durch einen geeigneten Grenzübergang ableiten, so tritt der Logarithmus implizite von einem ganz ähnlichen Gesichtspunkte aus auf, wie bei Neper aus Bürgi.

Was die Entwicklungen von Neper und Bürgi selbst

1) nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. Koppe (Berlin).



anlangt, so sind im Text nur ihre leitenden Grundgedanken angegeben; zur vollständigen Berechnung ihrer Tafeln haben sie natürlich neben der Bestimmung der sukzessiven Potenzen von $1+\frac{1}{10^4}$ bzw. $1-\frac{1}{10^7}$ aus der Differenzengleichung auch Interpolationsmethoden verwandt. Außerdem aber hat Neper bereits die Idee des Grenzüberganges zum eigentlichen natürlichen Logarithmus d. h. – in modernerer Ausdrucksweise – zu der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ gehabt, indem er eine Bewegung betrachtet, deren Geschwindigkeit proportional dem Abstand vom Ausgangspunkt wächst; auch diese Vorstellung hat er bei der Berechnung seiner Tafeln verwendet. Eine eingehende Darstellung findet man bei M. Koppe, „Die Behandlung der Logarithmen und der Sinus im Unterricht" (Progr. d. Andreas-Realgymnas., Berlin 1893) sowie in einer Arbeit desselben Autors in den Sitzungsber. d. Berliner mathemat. Gesellsch., Bd. 3 (1904), S. 48.

---

Zu S. 349: Zum Schulbetrieb der Logarithmenlehre.

Ähnliche Modifikationen des herkömmlichen Unterrichtsganges werden auch anderwärts empfohlen. So definiert Jules Tannery in seinen oben genannten „Elementen der Mathematik"[1] von vornherein den Logarithmus durch den

1) zitiert S. 599.

Hyperbelinhalt (pag. 265), und derselbe Ansatz wird, wie Tannery ebenda zitiert, schon 1903 von Bradshaw herangezogen; diese Betrachtungsweise ist ja in der Tat eine genaue Konsequenz der in der „höheren" Mathematik geltenden Auffassung.

Berücksichtigung der Neper-Bürgischen Definition im Unterricht unter steter Veranschaulichung an konkreten Beispielen empfiehlt beispielsweise M. Koppe in seinem soeben genannten Programm von 1893.

---

Zu S. 416 ff: Zur Lehre von den Pendelschwingungen.

Eine kritische Besprechung der „elementaren" Behandlungen der Pendellehre ist in der sehr interessanten Studie von H. E. Timerding: „Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern"[1] enthalten (pag. 49 ff.). Hier finden sich überhaupt ausführliche Untersuchungen der im Physikunterricht traditionell zur Geltung kommenden mathematischen Methoden; immer aufs neue zeigt sich dabei, wie sehr die künstliche Fernhaltung der Infinitesimalrechnung vom elementaren Unterricht alle Betrachtungen erschwert, ja häufig eine befriedigende

1) Bd. III, Heft 2 der oben (S. 595) zitierten „Abhandl. der Imuk." (Leipzig u. Berlin 1910).



Darstellung ganz unmöglich macht.

---

Zu S. 458 ff.: Zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung.

In seiner soeben (S. 608) genannten Schrift „Die Mathematik in den physikalischen Lehrbüchern" gruppiert Timerding die wesentlichsten Methoden und Auffassungen, die in der Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung hervortreten, und die auch in unserer Darstellung zur Geltung kommen, folgendermaßen:

1) Das Exhaustionsverfahren, wie es Euklid und Archimedes ausgebildet haben. Das ist – wie hier noch ergänzend zum Text bemerkt sei – eine Methode, die z. B. die Bestimmung des Kreisinhaltes (und in analoger Weise die Lösung ähnlicher Probleme der Infinitesimalrechnung) gestattet, indem sie die Approximation der Kreisfläche durch die Flächen ein- und umgeschriebener Polygone von wachsender Seitenzahl genau verfolgen läßt. Der wesentliche Unterschied gegen die moderne Auffassung besteht darin, daß die Existenz einer Inhaltszahl des Kreises – oder, in der Sprache der Alten, des „Verhältnisses" (λόγος, vgl. S. 79 f.) zwischen Kreisinhalt und Quadrat des Radius – als et-

war ganz Selbstverständliches stillschweigend hingenommen wird, während die moderne Infinitesimalrechnung gerade auf diese anschauliche Evidenz verzichtet und vielmehr auf Grund des abstrakten Grenzbegriffes die Inhaltszahl als Grenzwert der Maßzahlen eingeschriebener Polygone definiert. Gibt man aber einmal die Existenz der Fläche zu, so ist das Exhaustionsverfahren ein auch modernen Ansprüchen genügendes, völlig exaktes Verfahren zur Approximation der Inhaltszahl durch rationale Zahlen, wenn es auch jedesmal auf den besondern Fall zugeschnitten und daher etwas schwerfällig ist.

2.) <u>Die Indivisibelnlehre</u>, wie sie etwa bei <u>Cavalieri</u> entwickelt wird. (s. S. 470 f.). Nach ihr heißt z. B. der von der Kurve $y = y(x)$ über der Abszissenachse begrenzte Flächeninhalt direkt die Summe aller einzelnen Ordinaten $y$; es ist eine Konsequenz dieser Auffassung, wenn Leibniz in seinem ersten Manuskript über Integralrechnung (1675) $\int y$ schreibt, noch nicht $\int y\,dx$.

3.) <u>Das Approximationsverfahren</u>, das Timerding an den Namen <u>Huygens</u> anschließt; es sind dieselben Betrachtungen, die wir bei Kepler (S. 469 f.) und de l'Hospital (S. 474) gefunden haben.

4.) <u>Die Fluxionsrechnung Newtons</u>, die auf der unmittelbaren Anschaulichkeit des Begriffes der Geschwin-



digkeit beruht. (s. S. 466).

5.) Endlich folgt nun die <u>Methode der eigentlichen Differential- und Integralrechnung</u>, die den Grenzbegriff voranstellt, und die definitiven Leibnizschen Bezeichnungen verwendet.

---

Zu S. 482 ff.: <u>Zur Auseinandersetzung über die Grundlagen der Infinitesimalrechnung.</u>

Es sind vielleicht hier noch einige weitere Worte zu den Meinungsverschiedenheiten über die Grundlagen der Infinitesimalrechnung am Platze, die man auch heute noch vielfach findet, sowie man über den engen Kreis der Fachmathematiker hinausgeht. Ich glaube, man kann hier die Grundlagen einer Verständigung in ganz ähnlichen Betrachtungen finden, wie wir sie im Text hinsichtlich der Grundlegung der Arithmetik anstellten (S. 35 ff.).

Man muß in jeder mathematischen Disziplin die innere logische Folgerichtigkeit ihres Aufbaues streng scheiden von der Frage nach der Berechtigung irgend welcher Anwendungen dieser „axiomatisch" und sozusagen „willkürlich" hergestellten Begriffe und der Sätze über sie auf Dinge unserer äußeren oder inneren Wahrnehmung. <u>Georg</u>

Cantor unterscheidet einmal [1] entsprechend bei ganzen Zahlen die immanente Realität, die ihnen auf Grund ihrer logischen Definierbarkeit zukommt von der transienten Realität, die sie vermöge ihrer Anwendbarkeit auf wirkliche Dinge haben.

Bei der Infinitesimalrechnung wird das erste Problem voll erledigt durch die auf dem Grenzbegriff basierten Theorieen, wie sie die mathematische Wissenschaft ja jetzt in logisch geschlossener Weise entwickelt hat; die zweite Fragestellung gehört ganz der Erkenntnistheorie an, und der Mathematiker trägt nur zu ihrer präzisen Formulierung bei, indem er den ersten Teil abtrennt und erledigt – zu ihrer Lösung können rein mathematische Arbeiten ihrer Natur nach keinen direkten Beitrag liefern (vgl. die ganz analogen Ausführungen zur Arithmetik S. 36 ff.). Die ganzen Streitigkeiten über die Begründung der Infinitesimalrechnung leiden nun darunter, daß diese beiden ganz getrennten Teile des Problemes gerade hier nicht scharf genug geschieden werden; in Wahrheit ist der erste rein mathematische Teil hier gerade so gut fundiert wie in allen andern Disziplinen der Mathematik, und die Schwierigkeiten liegen hier so gut wie dort im zwei-

1) Mathem. Ann., Bd. 21 (1883), S. 562.



ten, philosophischen Teil. Der Wert eindringender Untersuchungen nach dieser zweiten Seite hin tritt natürlich durch solche Überlegung besonders hervor; nur erscheint es geboten, sie auf eine genaue Kenntnis der Resultate der rein mathematischen Arbeit über das erste Problem zu basieren.

---

Zu S. 548 ff: **Zur Mengenlehre.**

Zu S. 570: Nach einer soeben veröffentlichten Arbeit von A. Korselt (Mathem. Ann. 70 (1911), S. 294) findet sich in dem Schröderschen Beweise des Aequivalenzsatzes ein Fehler, so daß in der Tat der erste Beweis des inhaltlich von G. Cantor herrührenden Satzes von Bernstein gegeben ist.

Zu S. 579 ff: Einen direkten Beweis für die Invarianz der Dimensionenzahl, d. h. für die Unmöglichkeit einer stetigen eineindeutigen Abbildung der $C_m$ und $C_n$ (für $m \neq n$) hat ganz kürzlich L. E. J. Brouwer (Mathem. Ann. 70 (1911), S. 161) gegeben; in demselben Annalenheft (S. 166) ist ein weiterer Beweis von H. Lebesgue enthalten.

Zu S. 590: Entgegen einer Bemerkung in der ersten Auflage im Anschluß an die F. Meyerschen „Elemente der Arithmetik und Algebra" wird von verschiedenen Seiten betont, [1] daß Friedrich Meyer selbst ein hervorragender Lehrer war, der auf die Gesamtheit seiner Schüler einen großen fördernden Einfluß ausgeübt hat. In der Tat zeigt er sich auch in seiner recht lesenswerten Programmarbeit „Mitteilungen aus dem mathematischen Lehrplan des Stadtgymnasiums zu Halle a. S." [2] als ein enthusiastischer Paedagoge, der den psychologischen Momenten des Unterrichtes viel Verständnis und Interesse entgegenbringt; freilich will er als begeisterter Humanist der alten Richtung den überkommenen Lehrstoff durchaus beibehalten und steht natürlich allen späteren Reformtendenzen noch fern. Jedenfalls hatte sein Unterricht also durchaus nicht das abstrakte, systematische Aussehen seiner Lehrbücher; es wird allerdings aus dem Programm nicht ersichtlich, wie weit er im Unterricht auf dieses Buch Bezug genommen hat.

---

1) Vgl. die Besprechung von W. Lorey, Deutsche Literaturzeitung 1909, pag. 3129.

2) 1891. Progr. Nr. 230.