



Zweiter Hauptteil: Algebra.

Ich darf damit beginnen, daß ich Ihnen einige Lehrbücher der Algebra nenne, um Sie in der sehr umfangreichen vorhandenen Literatur etwas zu orientieren. Zunächst erwähne ich Ferré's „Cours d'algèbre“, der früher auch bei uns sehr viel benutzt wurde und große Verdienste hat. Heute besitzen wir jedoch zwei große, verbreitete deutsche Lehrbücher: H. Weber's „Lehrbuch der Algebra“¹⁾ und G. Netto's „Vorlesungen über Algebra“²⁾, jeder in 2 Bänden, beide behandeln außerordentlich weitgehend auch die schwierigsten Teile der Algebra und sind überhaupt eigentl. für ein weitergehendes Spezialstudium bestimmt, für das durchschnittliche Bedürfnis der Lehramtskandidaten scheinen sie mir inhaltlich zu umfangreich und wohl auch zu teuer zu sein. Mehr diesem Zwecke angepaßt sind wohl die auch recht bequem lesbaren „Vorlesungen über Algebra“ von G. Bauer³⁾, die kaum über das hinaus gehen, was der Lehrer beherrschen sollte. Nach der praktischen Seite hin, für die numerische Auflösung von Gleichungen, werden sie durch das kleine

1) 2. Aufl. Braunschweig 1898/99.

2) Leipzig 1896 - 1899.

3) Leipzig 1900.

Buch „Gradir der Gleichungen“ unseres Prof. E. Runge¹⁾ ergänzt, das ich Ihnen nur sehr empfehlen kann.

Wenn ich mich nun zum Thema wende, so bemerke ich vorab, daß ich im Rahmen dieser Vorlesung natürlich keine systematische Darstellung der Algebra geben kann; ich kann vielmehr nur einen einseitigen Ausschnitt geben, und da ist es das Zweckmäßigste, wenn ich solche Dinge hervorhebe, die an-
derswo unbillig vernachlässigt werden, und die gerade auch geeignet sind, den Schulunterricht, in besonderer Beleuchtung erscheinen zu lassen. Alle meine algebraischen Darlegungen werden sich um einen Punkt gruppieren, nämlich um die Stimmwendung der graphischen und überhaupt der geometrisch anschaulichen Methoden auf die Lösung von Gleichungen. Damit ist ein äußerst umfassendes und bereicherndes Kapitel bezeichnet, aus dem ich natürlich auch wieder nur eine Reihe der wichtigsten und interessantesten Sachen herausgreifen kann; wir werden dabei mit den verschiedensten Gebieten in organischen Kontak treten, so daß wir da so recht Mathematik im Sinne unserer Entwicklungsreihe D von vorn treiben. Wir behandeln zunächst Gleichungen für reelle Größen,

1) Samml. Schubert 14. - Leipzig 1900.



um dann später die komplexen Größen folgen zu lassen.

I. Reelle Gleichungen mit reellen Unbekannten.

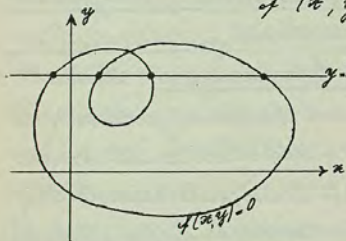
1. Gleichungen mit 1 Parameter.

Wir beginnen mit einem möglichst einfachen Falle, der geometrischer Behandlung zugänglich ist, nämlich mit einer reellen Gleichung für die Unbekannte x , in der noch ein Parameter λ auftritt:

$$f(x, \lambda) = 0.$$

Wir deuten sie geometrisch am einfachsten, indem wir λ durch eine zweite Variable y ersetzen und

$$f(x, y) = 0$$



als Kurve in einer x - y -Ebene auffassen. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit der Parallelen zur Abszissenachse $y = \lambda$ geben die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x, \lambda) = 0$, und wenn

wir uns die Kurve angenähert gezeichnet haben - was bei nicht allen komplizierten f leicht möglich ist, - übersehen wir durch Verschiebung der Parallelen, wie bei Variation von λ die Anzahl der reellen Wurzeln sich ändert. Besonders am Platze ist dieser Ansatz,

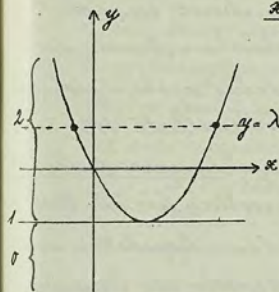
wenn f in λ linear ist, also bei Gleichungen von der Form

$$\varphi(x) - \lambda \psi(x) = 0;$$

denn dann wird unsere Kurve $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ rational und ihre Herstellung daher besonders einfach. In diesen Fällen kann man die Methode auch für die Ausführung der approximativen numerischen Berechnung der Wurzeln vielfach mit Nutzen anwenden.

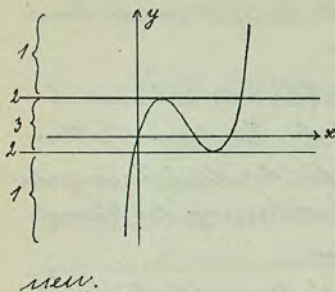
Betrachten wir als Beispiel die quadratische Gleichung

$$x^2 + ax - \lambda = 0.$$



Wir haben denn in der Kurve $y = x^2 + ax$ eine Parabel, und übersehen sofort, für welche Werte von λ die Gleichung 2, 1, 0 reelle Wurzeln hat, entsprechend dem Horizontalen, die die Parabel in 2, 1, 0 Punkten schneiden. Die Vorführung

einer solchen einfachen und anschaulichen Konstruktion scheint mir auch für die oberen Klassen der Schule sehr geeignet. - Als zweites Beispiel gebe ich die kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx - \lambda = 0$, bei der wir eine kubische Parabel $y = x^3 + ax^2 + bx$ zu betrachten haben; sie hat je nach den Werten a, b verschiedener Aussehen. In der Figur ist angenommen, daß



$x^2 + a x + b = 0$ zwei reelle Wurzeln hat; man sieht dann, wie die Parallelen sich in solche scheiden, die in 1, und solche, die in 3 reellen Punkten schneiden, während zwei Grenzlagen mit je 1 Doppelpunkt eintreten können.

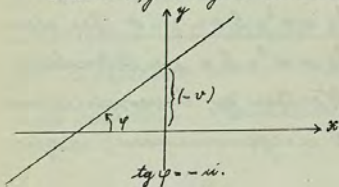
2. Gleichungen mit 2 Parametern.

Treten nun in einer Gleichung mehrere, zunächst zwei, Parameter auf, so ist zum graphischen Ansatz des Problems bereits mehr Raum nötig; dafür ergeben sich aber auch weitergehende und interessantere Resultate. Wir beschränken uns hier von vornherein auf lineares Auftreten der beiden Parameter λ, μ und wollen für die Unbekannte der Gleichung t schreiben; dann handelt es sich also um die Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichung

$$(1) \quad \varphi(t) + \lambda \cdot \chi(t) + \mu \cdot \psi(t) = 0,$$

wo φ, χ, ψ Polynome in t sind.

Sind x, y die gewöhnlichen rechtwinkligen Punktkoordinaten einer Ebene, so wird jede Gerade in ihr dargestellt durch eine Gleichung



Gleichung

$$(2) \quad y + u x + v = 0,$$

und wir können u, v als Koordinaten der Geraden bezeichnen: $(-u)$ ist die trigonometrische Tangente ihres Winkels φ gegen die x -Achse, $(-v)$ der Abschnitt, den sie auf der y -Achse ausschneidet. Indem wir, was später besonders wichtig wird, Punkt und Gerade und entsprechend Punkt- und Geradenkoordinaten als gleichberechtigt ansehen, können wir kurz sagen, die Gleichung $y + u x + v = 0$ bedeutet vereinigte Lage der Geraden $u|v$ und der Punktes $x|y$, d. h. der Punkt liegt auf der Geraden, die Gerade geht durch den Punkt.

Um nun unsere Gleichung (1) geometrisch zu deuten, bringen wir sie mit (2) zur Übereinstimmung; das kann auf 2 wesentlich verschiedene Arten geschehen, die wir nacheinander behandeln:

1^a) Wir setzen:

$$(3^a) \quad y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \quad x = \frac{\chi(t)}{\psi(t)},$$

$$(3^b) \quad u = \lambda, \quad v = \mu.$$

Die Gleichungen (3^a) stellen bei variablem t eine wohlbestimmte rationale Kurve der x - y -Ebene, die sog. „Formkurve“ der Gleichung (1) dar, und da jeder ihrer Punkte durch einen bestimmten Wert von t entsteht, ist auf ihr gleichzeitig eine gewisse Skala von t -Werten bestimmt. Aus (3^b) können wir unmittelbar beliebig viele Punkte der Kurve berechnen und so die Form-

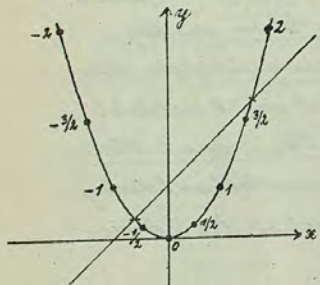


Kurve mit ihrer Skala hinreichend genau etwa auf Millimeterpapier zeichnen. Für jedes bestimmte Parameterpaar λ, μ stellt ferner (3²) eine Gerade der Ebene dar, und (1) bedeutet nach dem oben Gesagten, daß der Punkt t , der Kurve auf dieser Geraden liegt; wir erhalten also alle reellen Wurzeln von (1), indem wir alle reellen Schnitte der Kurve mit dieser Geraden auffassen und ihre Parameterwerte auf der Skala der Kurve ablesen. - Dabei ist die Kurve ein für alle Male durch die Form der Gleichung (1) fest bestimmt ohne Rücksicht auf die speziellen Werte, die die Parameter λ, μ haben mögen. Zu jeder Gleichung mit bestimmten λ, μ gehört dann eine Gerade, die sie gewissermaßen repräsentiert, und zwar kommen dabei sämtliche Geraden der Ebene in Betracht, nicht wie früher (S. 204) nur die horizontalen.

Zur näheren Erläuterung diese die quadratische Gleichung

$$t^2 + \lambda t + \mu = 0.$$

Die Kurve ist hier durch

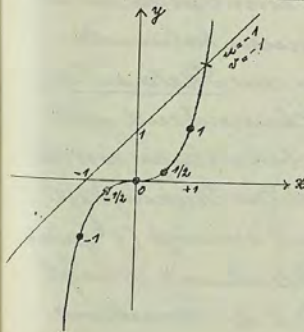


$y = t^2, x = t$ oder $y = x^2$, dargestellt, d. h. sie ist die nebenstehend gezeichnete Parabel mit der angedeuteten Skala, an der man die reellen Wurzeln unserer Gleichung als Schnitte mit der Geraden $y + \lambda x + \mu = 0$

somit ablesen kann. So ergibt die Figur, daß die Wurzeln von $t^2 - t - 1 = 0$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 2 bzw. $-\frac{1}{2}$ und -1 liegen. Der wesentliche Vorteil gegen die früher auf S. 205 dargestellte Methode ist, daß wir jetzt mit ein und derselben Parabel alle quadratischen Gleichungen lösen können, indem wir nur alle Geraden der Ebene heranziehen. Hat man also viele verschiedene quadratische Gleichungen approximativ aufzulösen, so wird sich die Anwendung dieses neuen Verfahrens als recht zweckmäßig erweisen.

Ähnlich kann man die sämtlichen kubischen Gleichungen behandeln, die man ja bekanntlich stets durch eine lineare Transformation auf die „reduzierte Form“

$$t^3 + \lambda t + \mu = 0$$



bringen kann, hier kommt also Kurve die kubische Parabel $y = x^3, x = t$ oder $y = x^3$ in Betracht, die nebenstehend skizziert ist. - Auch diese Methode scheint mir auf der Schule wohl verwendbar; die Schüler haben an eigenen Zeichnungen solcher Kurven gewiß die größte



Freude.

B.) Die zweite Methode der Festlegung von (1) entsteht aus der ersten, indem wir das Prinzip der Dualität anwenden, d. h. Punkt und Liniencoordinaten vertauschen. Dazu schreiben wir (1) in umgekehrter Reihenfolge:

$$v + x \cdot \mu + y = 0$$

und bringen sie so mit (1) zur Übereinstimmung, indem wir setzen

$$(4^a) \quad v = \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)}, \quad u = \frac{\chi(\mu)}{\psi(\mu)},$$

$$(4^b) \quad x = \lambda, \quad y = \mu.$$

(4^a) stellt bei variablem t eine Schar gerader Liniendar, die eine wohlbestimmte Kurve umhüllen, die, Korvenkurve von (1) in der neuen Festlegung; es ist eine rationale Klassenkurve, insofern sie in Geradenkoordinaten durch rationale Funktionen eines Parameters dargestellt ist. Jede Tangente und somit auch ihr Berührungspunkt entsteht durch einen bestimmten Wert von t , so daß wir wiederum eine Skala auf der Korvenkurve erhalten. Indem wir hinreichend viele Tangenten gemäß (4^a) zeichnen, bekommen wir Kurve und Skala mit jeder gewünschten Genauigkeit. Jeder Parameterpaar λ, μ bestimmt vermöge (4^b) einen Punkt der $x-y$ -Ebene, und die Gleichung (1) sagt nunmehr aus, daß die Tangente t der Korvenkurve

(4^a) durch diesen Punkt geht; wir erhalten also alle reellen Wurzeln von (1), indem wir die Parameterwerte t ablesen, die zu allen durch den Punkt $x = \lambda \mid y = \mu$ gehenden Tangenten der Korvenkurve gehören. - Wiederum ist die Korvenkurve durch die Form der Gleichung (1) völlig bestimmt; jede bestimmte Gleichung mit festen Werten der Parameter λ, μ wird durch einen gewissen Punkt der Ebene bzw. dessen Lage zur Kurve repräsentiert.

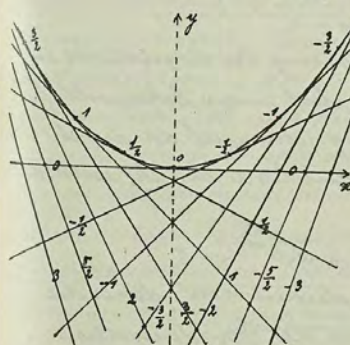
Wir betrachten zur Erklärung wieder die selben Beispiele. Zur quadratischen Gleichung

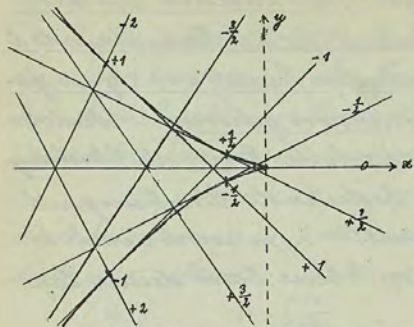
$$t^2 + \lambda t + \mu = 0$$

gehört als Korvenkurve die Umhüllungskurve der Geraden

$$v = t^2, \quad u = t,$$

und das ist wiederum eine Parabel mit dem Scheitel im Nullpunkt. Die Figur, die man sich natürlich auf Millimeterpapier entwerfen wird, zeigt sogleich die reellen Wurzeln der Gleichung $t^2 + \lambda t + \mu = 0$ als Parameter der Tangenten von Punkte λ, μ aus an die





Parabel.

Für die kubische Gleichung $t^3 + \lambda t + \mu = 0$ wird die Formkurve $v = t^3, u = t$ eine Kurve 3. Klasse, die im Nullpunkte eine Spitze hat, wie das die Figur näher andeutet.

Wir können diese Methode noch etwas anders darstellen. Betrachten wir nur die sog. trinomische Gleichung

$$t^m + \lambda t^n + \mu = 0,$$

so ist das Tangentensystem der Formkurve durch die den Parameter t enthaltende Gleichung

$$f(t) = t^m + \lambda t^n + \mu = 0$$

dargestellt. Um nun die Gleichung der Formkurve in Punktkoordinaten zu finden, hat man bekanntlich die Gleichung der Tangentensystems mit der durch Differentiation nach dem Parameter t aus ihr entstehenden Gleichung

$$f'(t) = m t^{m-1} + n \lambda t^{n-1} = 0$$

zusammenzustellen und t zu eliminieren; denn die Formkurve wird als Enveloppe des Geradensystems

durch die Schnitte je zweier aufeinander folgender Geraden (für t und $t + dt$) gebildet. Trücken wir, statt t zu eliminieren, aus beiden Gleichungen x, y durch t aus, so folgt:

$$(5^a) \quad x = -\frac{\mu}{\lambda} t^{m-n}, \quad y = \frac{m-n}{\lambda} t^m,$$

und das ist die Punktgleichung unserer Formkurve.

Für die Formkurven der als Beispiel behandelten quadratischen und kubischen Gleichung erhalten wir so:

$$x = -2t, \quad y = t^2 \text{ bzw.}$$

$$x = -3t^2, \quad y = 2t^3,$$

das sind in der Tat die oben gezeichneten Kurven.

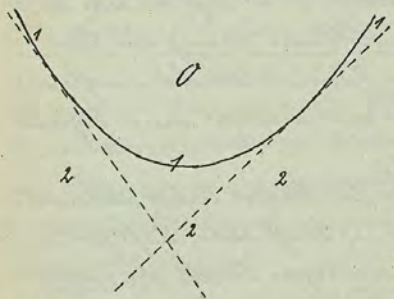
Ich weise ausdrücklich darauf hin, daß diese Methode von Prof. Reunge in seinen Vorlesungen und Übungen praktisch gehandhabt wird, und daß sie sich als besonders zweckmäßig für die wirkliche Lösung von Gleichungen erweist. Auch im Schulunterricht dürfte die Berücksichtigung der einen oder anderen dieser Figuren gelegentlich sich empfehlen.

Vergleichen wir nun die beiden bisher entwickelten Methoden miteinander, so zeigt sich, daß für einen bestimmten, sehr wichtigen Zweck die zweite einen wesentlichen Vorteil bietet - dann nämlich, wenn man eine anschauliche Vorstellung aller Gleichungen eines bestimmten Typus erhalten will, die



eine gegebene Anzahl reeller Wurzeln besitzen: Solche Gesamtheiten werden bei der ersten Methode durch Systeme von Geraden, bei der zweiten aber durch Gebiete von Punkten repräsentiert, und diese können wir kraft einer Eigenart unserer geometrischen Anschauung oder Gewöhnung nun einmal wesentlich leichter auffassen, als jene.

Was wir in dieser Richtung alles erreichen können, will ich sogleich an Beispiele der quadratischen Gleichung näher ausführen; da gehen von allen Punkten innerhalb der Parabel keine, von allen außerhalb aber zwei reelle Tangenten aus, so daß diese Gebiete die Mannigfaltigkeiten aller Gleichungen mit 0 bzw. 2 Wurzeln repräsentieren. Für alle Punkte der Parabel selbst gibt es nur eine einzige, doppelt zählende

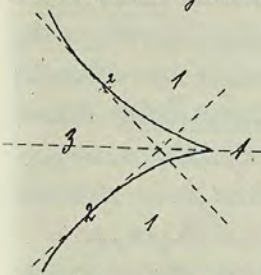


we nennen können.

Bei der kubischen Gleichung gehen von einem

Tangente; die Normkurve selbst ist übrigens auch allgemein der Ort der Punkte, deren Koordinaten x, y Gleichungen mit 2 zusammenfallenden Wurzeln liefern, so daß wir sie auch die Diskriminantenkurve

Punkte innerhalb des Hakens der Normkurve 3 reelle Tangenten aus sie; denn für einen Punkt der Mittellinie ist das aus Symmetriegründen klar, und die Anzahl



keann sich nicht ändern, wenn man den Punkt variiert, ohne die Kurve zu überschreiten.

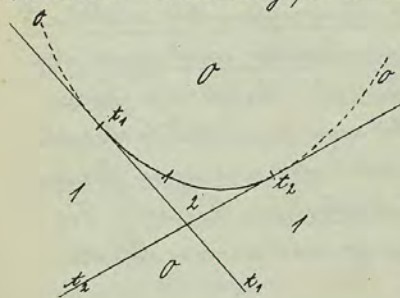
Kommt x, y auf die Kurve, so fallen zwei Tangenten zusammen, und rückt er in das Gebiet außerhalb der Kurve, so werden sie imaginär und es bleibt nur eine reelle Tangente übrig. Demnach repräsentiert das Gebiet innerhalb des Kurvenhakens die sämtlichen kubischen Gleichungen mit 3 verschiedenen reellen Wurzeln, das außerhalb die Gleichungen mit nur einer reellen Wurzel, und endlich die Kurvenpunkte selbst die Gleichungen mit einer einfachen und einer doppelt zählenden reellen Wurzel. Durch die Spitze der Kurve schließlich geht nur eine dreifach zählende Tangente; sie entspricht der einzigen Gleichung $t^3 = 0$ mit einer einzigen dreifachen Wurzel. Die Figur läßt diese Gruppierung mit einem Blick übersehen.

Die Figuren werden nun noch viel amüsanter



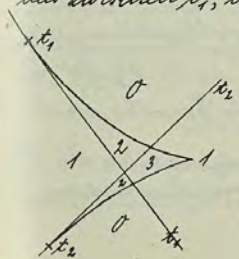
und liefern wesentlich mehr, wenn wir, wie in der ob-
gebraucht auch sonst üblich, für die Wurzeln noch Ein-
schränkungen einführen, insbesondere nach allen
reellen Wurzeln fragen, die in einem gegebenen In-
tervalle $t_1 \leq t \leq t_2$ liegen; diese Frage wird bekann-
tlich allgemein durch den Hurwitzschen Satz beant-
wortet. Wir können nun unsere Figuren leicht so
vervollständigen, daß sie eine befriedigende, übersicht-
liche Lösung auch dieser allgemeinen Frage geben.
Wir nehmen dazu einfach die den Parameterwer-
ten t_1, t_2 entsprechenden Tangenten zu der Vor-
kurve hinzu und betrachten die entstehende Zerlegung
der Ebene in Felder.

Machen wir das zunächst wieder für die qua-
dratische Gleichung, so kommt es darauf an, die
Zahl der Tangenten fest-
zustellen, die den Bogen
der Parabel zwischen t_1
und t_2 berühren. Durch
jeden Punkt des Drei-
ecks zwischen diesem
Parabelbogen und den
beiden Tangenten gehen
offenbar deren 2; überschneidet der Punkt eine der Tangen-



ten t_1, t_2 , so berührt eine Tangente durch ihn die Pa-
rabel außerhalb des Bogens (t_1, t_2) und geht also für un-
sere Zwecke verloren. Durch jeden Punkt in dem nichel-
förmigen von der Parabel und je einer Tangente begrenz-
ten Streifen ferner geht keine den Bogen (t_1, t_2) be-
rührende Tangente, und innerhalb der Parabel gibt
es überhaupt keine reellen Tangenten. Die beiden Para-
belbogen $t \leq t_1$ und $t \geq t_2$ sind also für die entstehende
Teilung der Ebene unwesentlich; es bleiben nur die in
der Figur ausgezogenen Linien, von denen wir
durch die angegebenen Zahlen eine genaue Über-
sicht über die Mannigfaltigkeiten der quadratischen
Gleichungen erhalten, die 2, 1, 0 reelle, zwischen t_1
und t_2 gelegene Wurzeln haben.

Genau so verfahren wir bei der kubischen Gleichung.
Nehmen wir etwa $t_1 > 0, t_2 < 0$. Wir ziehen wiederum die
Tangenten mit diesen Parameterwerten und brauchen nur
die Gebietsunterteilung zu betrachten, die durch sie und
das zwischen t_1, t_2 gelegene Stück der Vorankurve hervor-
gerufen wird. In dem viereckigen Gebiet
an der Spitze gibt es dann für jeden
Punkt wirklich noch drei dem Bogen
zwischen t_1, t_2 berührende reelle Tan-
genten. Berücksichtigt man, daß kein





Überschreiten jeder Tangente, beim Überschreiten der Kurve 2 Tangenten dieser Art verloren gehen, wie unmittelbar ersichtlich ist, so entsteht das skizzierte Bild der Gebiete, die Gleichungen mit 3, 2, 1, 0 reellen Wurzeln t_1 und t_2 gelegenen Wurzeln entsprechen. Wenn den ungeheuren Nutzen der graphischen Methode einzusehen, brauchen Sie nur einmal zu versuchen, diese Beurteilung der kubischen Gleichungen in abstracto zu schildern, ohne irgendwie an die Raumanschauung zu appellieren; das wird eine ganz unverhältnismäßig große Zeit erfordern. Auch der Beweis, der hier durch einen Blick auf die Figur klar ist, wird dann nicht einfach sein.

Was nun die Beziehung dieser geometrischen Methode zu den bekannten algebraischen Kriterien von Steiner, Cartesius, Budan-Fourier angeht, so will ich hier nur bemerken, daß für Gleichungen unserer Art die geometrische Methode sie alle umfaßt. Näher ausgeführt finden Sie diese interessanten Beziehungen in meiner Arbeit „Geometrisches zur Abzählung der Wurzeln algebraischer Gleichungen“ in W. Fuchs' Katalog mathematischer Modelle.¹⁾ Ich bemerke gern

¹⁾ Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (Wien 1892), sowie Nachtrag dazu (Wien 1893).

die Gelegenheit, Sie auf diesen Katalog hinzuweisen, der, anlässlich der von der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1893 in Brno veranstalteten Ausstellung herausgegeben, noch heute das beste Hilfsmittel zur Orientierung auf dem Gebiete mathematischer Modelle ist.

3. Gleichungen mit 3 Parametern λ, μ, ν .

Ich will Ihnen nun endlich noch zeigen, wie sich ganz entsprechende Betrachtungen auch über Gleichungen mit 3 Parametern anstellen lassen, nur müssen wir da statt der Ebene den dreidimensionalen Raum heranziehen. Es mag genügen, wenn ich mich sogleich auf die spezielle vorgledrige Gleichung

$$(1) \quad \lambda^m + \lambda t^m + \mu t^n + \nu = 0$$

beziehe; das Verfahren ist auf andere Gleichungsformen sofort übertragbar.

Wir stellen neben diese Gleichung die Bedingung der Raumgeometrie, daß ein Punkt $(x|y|z)$ und eine Ebene mit den Ebenenkoordinaten $u|v|w$ in vereinigt Lage sich befinden (d. h. daß die Ebene den Punkt enthält):

$$(2) \quad z + u x + v y + w = 0 \quad \text{oder}$$

$$(3) \quad w + x u + y v + z = 0.$$

Die Gleichung wollen wir nun in der einen oder anderen Reihenfolge mit (1) identifizieren und erhalten dann

genau wie vorher zwei einander duale Deutungen.

Zunächst setzen wir also

$$(2^a) \quad z = t^k, \quad x = t^m, \quad y = t^n;$$

dadurch ist eine gewisse Raumkurve, die Vorankurve der vorliegenden Gleichung, versehen mit einer Skala der Werte t bestimmt. Ferner betrachten wir die durch die Parameterwerte bestimmte Ebene:

$$(2^b) \quad u = \lambda, \quad v = \mu, \quad w = \nu;$$

dann besagt (1), daß die reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung identisch sind mit den Parameterwerten der reellen Schnitte der Vorankurve (2^a) mit der Ebene (2^b).

Gehen wir nun dualistisch vor, so ist zu nehmen:

$$(3^a) \quad w = t^k, \quad u = t^m, \quad v = t^n;$$

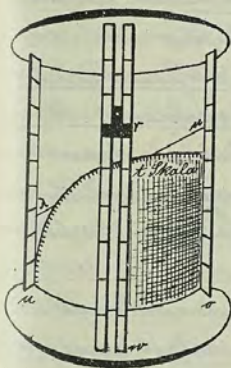
dies stellt für variables t einfach unendlich viele Ebenen dar, die wir als Schnittungsebenen einer bestimmten wiederum mit einer Skala von Parameterwerten t versehenen Raumkurve auffassen können; wir können sie gemäß ihrer Definition durch Ebenenkoordinaten als „Klassen-Vorankurve“ der vorigen durch ihre Punkte festgelegten „Ordnungs-Vorankurve“ entgegenstellen. Betrachten wir jetzt neben ihr den Punkt

$$(3^b) \quad x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = \nu,$$

so folgt, daß die reellen Wurzeln von (1) identisch sind mit den Parameter derjenigen Schnittungsebenen, an die Klassen-Vorankurve (3^a), die durch den Punkt (3^b) gehen.

Es kommt nun darauf an, beide Deutungen an konkreten Beispielen näher darzulegen; wir besitzen in unserer Sammlung für beide Modelle, die ich Ihnen jetzt vorführen will.

Die erste Darstellung hat Prof. Kehlme in Stuttgart zur Konstruktion eines Apparates zur numerischen Aufklärung von Gleichungen benutzt. Es ist ein Apparat



singgestellt, an dem Platten 3 mit Skalen versehen vertikale Platten auf-fallen, und in das wir die als Schnitten ausgeschnittenen Vorankurven der auf 4 Glieder reduzierten Gleichungen 3, 4, oder 5. Grades einsetzen können. Hier ist abweichend von unserer Auseinandersetzung kein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde gelegt, sondern das Koordinatensystem ist gerade so bestimmt, daß die zugehörigen Ebenenkoordinaten, d. h. die Koeffizienten u, v, w der in der Form (1) angesetzten



Ebenengleichung, gerade die Abschnitte sind, die die betr. Ebene auf den Skalen der 3 Vertikalstäbe hervorruft und die man dort ablesen kann. Um nun eine Fixierung einer bestimmten Raumebene $u = \lambda$, $v = \mu$, $w = r$ zu ermöglichen, ist an dem vorderen w -Stabe ein Visier angebracht, das man auf die Stelle r der Skala einstellt, während man die Stellen λ , μ der Skala der u -bzw. v -Stäbe durch einen gespannten Faden verbindet. Die Visierstrahlen nach diesem Faden bilden dann unsere Ebene, und man kann deren Schnitte mit der Vorwurfskurve als scheinbare Schnitte des Fadens mit der Schablone, während man durch das Visierloch blickt, unmittelbar beobachten, ihre Parameterwerte, das sind die gesuchten Wurzeln der Gleichung, liest man gleichzeitig an der auf der Schablone angebrachten t -Skala der Vorwurfskurve ab. Ob der so geschilderte Apparat wirklich praktisch brauchbar ist, hängt natürlich wesentlich von seiner sorgfältigen mechanischen Ausführung ab.

Für die zweite Methode haben wir ein unlängst vom Herrn Hartenstein als Staatsexamensarbeit angefertigtes Modell. Es bezieht sich auf die sog. reduzierte Form der Gleichung 4. Grades:

$$(4) \quad t^4 + \lambda t^3 + \mu t + r = 0,$$

auf die man bekanntlich jede biquadratische Gleichung unmittelbar bringen kann. Ich will für sie jene Methode noch einmal ein wenig modifiziert darstellen, wie ich das für die dreiparametrische Gleichung oben bereits tat (S. 212): Wir haben ein System von einfach unendlich vielen Ebenen zu betrachten, deren Ebenenkoordinaten in (3^{te}) gegeben sind, und deren Punktgleichungen sich also im vorliegenden Falle schreiben würden:

$$f(t) = t^4 + \alpha t^3 + \gamma t + \varepsilon = 0.$$

Das Hüllgebilde dieser Ebenen ist die Gesamtheit der Geraden, die jede Ebene $f(t) = 0$ mit der benachbarten $f(t + dt) = 0$ gemein hat, das ist die abwickelbare Fläche, deren Gleichung man durch Elimination von t aus $f(t) = 0$ und $f'(t) = 0$ erhält. Wir müssen nun aber, um die Vorwurfskurve zu erhalten, das Schmiegebilde der Ebenenschaar betrachten, d. h. den Ort aller Punkte, in denen 3 aufeinanderfolgende Ebenen sich schneiden; das ist bekanntlich die Rückkehrlkurve der abwickelbaren Fläche, deren Koordinaten sich als Funktionen von t aus den 3 Gleichungen $f(t) = 0$, $f'(t) = 0$, $f''(t) = 0$ berechnen. Hier lauten nun diese Gleichungen



-224-

$$\begin{aligned} t^4 + \alpha t^2 + \gamma t + \varepsilon &= 0 \\ 4t^3 + \alpha \cdot 2t + \gamma &= 0 \\ 12t^2 + \alpha \cdot 2 &= 0, \end{aligned}$$

und man findet aus ihnen:

$$(5) \quad \alpha = -6t^2, \quad \gamma = 8t^3, \quad \varepsilon = -3t^4;$$

das ist die Frankengleichung der Klassenwurmkurve von (4), deren Ebenengleichung nach (3^{te}) lautet:

$$(6) \quad w = t^4, \quad u = t^2, \quad v = t.$$

Beide Darstellungen sind in t vom vierten Grade; die Wormkurve hat also sowohl die Ordnung als auch die Klasse 4.

Um uns nun über sie näher zu orientieren, betrachten wir einige einfache Flächen, die sich durch sie legen lassen. Zunächst genügen die Ausdrücke (5) identisch in t der Gleichung

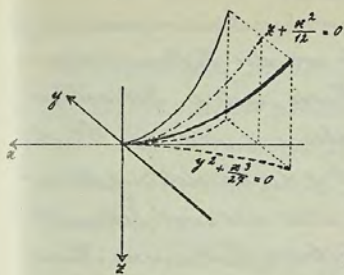
$$x + \frac{x^2}{12} = 0,$$

d. h. unsere Wormkurve liegt auf dem durch diese Gleichung dargestellten parabolischen Zylinder 2. Grades, dessen Erzeugende der y -Achse parallel sind. Ebenso aber besteht die Relation:

$$\frac{y^2}{3} + \frac{\alpha^3}{27} = 0,$$

so daß auch dieser einfache kubische Zylinder, dessen Erzeugende der α -Achse parallel sind, durch unsere Wormkurve geht; sie ist übrigens der gemein-

-225-



te im Endlichen gelegene Schnitt beider Zylinder. Man kann sich danach leicht ein ungefähres Bild des Verlaufes der Wormkurve machen: sie wird eine zur α - β -Ebene symmetrisch gelegene doppelt gekrümmte Kurve mit einer Spitze im Ursprung.

Fernerhin geht noch folgende Fläche 2. Grades:

$$\frac{x \cdot z}{6} - \frac{3y^2}{24} = 0$$

durch unsere Wormkurve, denn auch diese Gleichung wird durch (5) identisch in t befriedigt. Aus ihr und der Gleichung des kubischen Zylinders stellen wir noch folgende lineare Kombination her, die wiederum eine durch die Wormkurve gehende besonders wichtige Fläche dritten Grades darstellt.

$$\frac{x \cdot z}{6} - \frac{y^2}{16} - \frac{\alpha^3}{216} = 0.$$

Betrachten wir jetzt die abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkurve die Wormkurve ist, und die wir von dieser ausgehend, als Urbegriff aller ihrer Tangenten definieren können. Für eine beliebige Raumkurve

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

wird bekanntlich die Tangente im Punkte t durch die Gleichungen



* $-y'(t) + p y'(t)$, $y = y(x) + p \cdot y'(t)$, $z = z(t) + p x'(t)$
 gegeben (wo p ein Parameter), denn ihre Richtungsversinus gegen die Achsen verhalten sich wie die Differentialquotienten der Koordinaten der Kurve nach t . Betrachten wir noch t als variabel, so haben wir in diesen Gleichungen mit den 2 Parametern t, p die Darstellung der abwickelbaren Tangentenfläche; alles das sind bekannte Überlegungen der Raumgeometrie. Für unsere Kurve (5) speziell erhalten wir also die folgende Darstellung der Tangentenfläche, wenn wir ihre Koordinaten zum Unterschiede von den Kurvenkoordinaten mit X, Y, Z bezeichnen:

$$(7) \quad \begin{cases} X = -6(t^2 + 2pt) \\ Y = 8(t^3 + 3pt^2) \\ Z = -3(t^4 + 4pt^3) \end{cases}$$

Diese Fläche ist es nun, die Sie in dem genannten Modell des Herrn Hartenstein dargestellt sehen, und zwar sind ihre geraden Linien als Fäden ausgespannt.

Die Parameterdarstellung der Fläche liefert bereits die besten Stützpunkte für ihre Behandlung und wirkliche Herstellung; wir folgen eigentlich nur einer alten Gewohnheit, wenn wir noch nach der Gleichung der Fläche selbst fragen. Wir erhalten sie, in-

denn wir aus (7) t und p eliminieren. Das einfachste Verfahren dazu will ich Ihnen hier angeben, ohne daß ich jedoch an dieser Stelle im einzelnen ausführen kann, wie man darauf kommt, und was die einzelnen Schritte ihrem inneren Wesen nach bedeuten. Wir bilden nämlich aus den Formeln (7) die Kombinationen:

$$\begin{aligned} Z + \frac{X^2}{12} &= 12p^2 t^2 \\ \frac{X \cdot Z}{6} - \frac{Y^2}{16} - \frac{X^3}{216} &= 8p^3 t^3, \end{aligned}$$

die beide auf der Kurve selbst ($p=0$) verschwinden, und gleich 0 gesetzt, zwei der schon oben aufgeführten durch die Fläche gelegten speziellen Flächen darstellen. Zwischen diesen Gleichungen können wir leicht das Produkt $p \cdot t$ eliminieren und finden als Gleichung der abwickelbaren Fläche:

$$\left(Z + \frac{X^2}{12} \right)^3 - 27 \left(\frac{X \cdot Z}{6} - \frac{Y^2}{16} - \frac{X^3}{216} \right)^2 = 0;$$

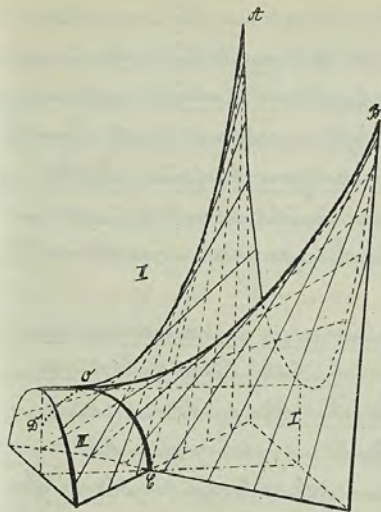
sie ist also eine Fläche 6. Ordnung.

Über die Bedeutung dieser Formel mache ich für die mit dem Gegenstande näher Vertrauten noch folgende Bemerkungen: Die in den beiden Klammern stehenden Ausdrücke sind nichts, als die Invarianten der zu Grunde liegenden biquadratischen Gleichung in reduzierter Form:

$$t^4 + x t^2 + y t + z = 0,$$

die in der Theorie der elliptischen Funktionen eine so große Rolle spielen und die man dort allgemein mit g_2 und g_3 bezeichnet. Die linke Seite unserer Flächengleichung $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ ist bekannter Weise die Diskriminante der biquadratischen Gleichung, die durch ihr Verschwinden das Auftreten einer Doppelpunktlinie anzeigt. Unsere abwickelbare Fläche ist also nichts als die Diskriminantenfläche der biquadratischen Gleichung, d. h. die Gesamtheit der Punkte, für die diese eine doppelte Wurzel hat.

Nach diesen theoretischen Erörterungen hat die Konstruktion eines Fadenmodells unserer Fläche prinzipiell keine Schwierigkeit mehr: man bestimme aus der Parameterdarstellung (*) etwa die Punkte, an denen die darzustellenden Tangenten gewisse feste Ebenen durchstoßen, und spanne dann zwischen diese durch einen Holz- oder Pappkasten realisierten Ebenen passende Fäden ein. Daß das Modell, dann aber auch wirklich schön und brauchbar wird, daß es den ganzen interessierenden Verlauf der Fläche und ihrer Rückkehrkurve übersichtlich darstellt, wie wir es hier vor uns sehen, das



ist nur durch längere Versuche und sehr große Geschicklichkeit erreichbar. Die nebenstehende Skizze stellt die Fläche mit ihren Geraden dar, o, p, d ist die Rückkehrkurve (vgl. die Fig. 2.225).

Wir nehmen nun an dem Modell eine Doppelkurve (C, O, D) wahr, längs deren sich zwei Blätter der Fläche durchsetzen; sie ist einfach die folgende Parabel der

$ox - z$ -Ebene:

$$y = 0 \quad z - \frac{x^2}{4} = 0.$$

Von dieser Parabel erscheint aber nur die eine Hälfte (C, O), und zwar die für $x < 0$, als Durchdringungseiler Blätter, während die andere isoliert im Raume verläuft. Diese Erscheinung ist keineswegs überraschend für den, der gewohnt ist, die Theorie der algebraischen Flächen mit konkreten geometrischen Vorstellungen zu begleiten; da ist es nämlich ganz geläufig, daß re-



elle dste von Doppelkurven sowohl als Schnitte reeller Hau-
tel erkennbar sein, als auch isoliert im Raume verlau-
fen können, wo man sie dann als reelle Schnitte imagi-
narer Abantel der Fläche aufzufassen hat; die entspre-
chende ebene Erscheinung, daß es neben den als Schnitte
reeller Kurvenzweige auftretenden gewöhnlichen Doppel-
punkten algebraischer Kurven auch die als Schnitte ima-
ginarer Teile scheinbar isoliert liegenden Doppelpunkte
gibt, kennt ja jeder.

Vorgegenwartigen wir uns nun im einzelnen was
die so gewonnene Fläche mit ihrer Rückkehrkurve,
der Vorankurve, alles uns leisten kann. Wir denken uns
die Vorankurve mit ihrer Skala versehen, oder besser,
wir schreiben jeder ausgespannten Tangente ihren Pa-
rameterwert t an, der auch ihrem Berahrungspunkt
zugehört. Gibt uns nun jemand eine biquadratische
Gleichung mit bestimmten Koeffizienten x, y, z , so ha-
ben wir nur von dem zugehörigen Raumpunkte $(x|y|z)$
an die Vorankurve die Schmiegungeebenen, oder - was
dasselbe ist - an die Diskriminantenfläche, die Tan-
gentialebenen zu legen, um in den Parametern der
Berahrungspunkte mit der Kurve bzw. der Tangenten
dasselbst die reellen Wurzeln zu haben. Da die Schmie-
gungeebene die Kurve berührt und schneidet, so projiz-

iert sich von $(x|y|z)$ aus betrachtet, jeder Berahrungs-
punkt einer Schmiegungeebene als scheinbarer Wendepunkt
der Kurve - und umgekehrt. Die reellen Wurzeln der
biquadratischen Gleichung sind also schließlich die Pa-
rameter der scheinbaren Wendepunkte der Vorankurve
bei Betrachtung von Raumpunkte $(x|y|z)$ aus.

Nun ist es freilich für den in der Betrachtung raum-
licher Kurven nicht sehr Geübten recht schwer, am Modell
die Schmiegungeebenen bzw. scheinbaren Wendepunkte
der Kurve wirklich zuverlässig zu erkennen. Mit un-
mittelbarer Deutlichkeit aber erläutert das Modell den
nächsten, wichtigsten Punkt, die Einteilung samt-
licher biquadratischen Gleichungen nach der Anzahl
ihrer reellen Wurzeln. Sehen wir zu, was wir da iber-
haupt für Fälle aus der abstrakten Betrachtung der
Gleichungen erwarten dürfen. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die 4 Wur-
zeln der reellen biquadratischen Gleichung (4), so ist
wegen der Verschwindens des Koeffizienten von t^3 not-
wendig $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. Was die Realität dieser Wur-
zeln angeht, so sind offenbar folgende 3 Hauptfälle mög-
lich:

- I. 4 reelle Wurzeln.
- II. 2 reelle, 2 konjugiert komplexe Wurzeln.
- III. 0 reelle, 2 Paare konjugiert komplexer Wurzeln.



Liegen nun zwei Gleichungen des Typus I mit den Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bzw. $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ vor, so kann man jedenfalls $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch lauter reelle voneinander verschiedene Wertesysteme der Summe Null stetig bezüglich in $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ überführen; entsprechend geht dann die eine Gleichung stetig durch lauter Gleichungen desselben Typus in die zweite über, d. h. alle Gleichungen des Typus I bilden ein zusammenhängendes Kontinuum, und dasselbe gilt auch für die andern beiden Typen. Aus unserem Modell muß sich das so zeigen, daß der Raum in 3 in sich zusammenhängende Teile zerfällt, deren Punkte den Gleichungen je eines Typus entsprechen.

Betrachten wir nun die Übergangsfälle zwischen diesen 3 Typen: I geht in II über durch Gleichungen, die 1 getrennte reelle und eine doppelzählende reelle (d. h. 2 zusammenfallende) Wurzeln haben, was wir symbolisch durch $2 + (2)$ andeuten wollen; ebenso haben wir zwischen II und III den Übergangsfall einer reellen Doppelwurzel und zweier komplexer Wurzeln, was (2) andeuten möge. Beiden Typen müssen in unserem räumlichen Bilde Stücke der Diskriminantenfläche selbst entsprechen, die ja alle Gleichungen mit zusammenfallenden Wurzeln überhaupt repräsentiert, und zwar überlegt man ähnlich wie vorher, daß jedem ein in sich zusammenhän-

gender Stück der Fläche entsprechen muß. Diese beiden Gruppen $2 + (2)$ und (2) gehen nun wiederum in einander über durch Fälle mit 2 reellen Doppelwurzeln, symbolisch: $(2) + (2)$; die Punkte, für die so zwei Paare von Wurzeln zusammenrücken, müssen gleichzeitig zwei Häuteln der Diskriminantenfläche, also dem nicht isolierten Ort ihrer Doppelkurve angehören. Demnach zerfällt die Diskriminantenfläche in zwei durch einen Ort der Doppelkurve von einander getrennte Teile, deren einer $2 + (2)$ die Raumgebiete I und II trennt, während der andere (2) die Gebiete II, III scheidet. Um nun zu sehen, wie die Kurve dazu liegt, bemerken wir, daß für einen Punkt dieser wegen ihrer Eigenschaft als Rückkehrkurve 3 reelle Tangentialebenen in eine (die Schmiegungelebene) zusammenfallen, so daß wir den Fall einer dreifachen und einer einfachen reellen Wurzel: $1 + (3)$ haben; dieser kann nur aus $2 + (2)$ entstehen, indem noch eine der einfachen Wurzeln der Doppelwurzel gleich wird, und so folgt, daß die Rückkehrkurve ganz auf dem ersten Teile $2 + (2)$ der Fläche verlaufen muß. Nur in der Spitze der Rückkehrkurve ($x = y = z = 0$) haben wir eine vierfache reelle Wurzel, und das kann auch durch Zusammenrücken der beiden Doppelwurzeln aus dem Falle $(2) + (2)$ entstehen. In der Tat liegt die Spitze 0 der Rückkehrkurve gleich-



zeitig auch auf der Doppelkurve. Was endlich den isolierten Ast der Doppelkurve anlangt, so verläuft er gänzlich im Raunteil III, und ist dadurch ausgezeichnet, daß je 2 der dort vorhandenen komplexen Wurzeln zu einer komplexen Doppelwurzel zusammenfallen, beide Doppelwurzeln sind natürlich einander konjugiert.

Sie finden nun alle hier aufgezählten möglichen Fälle an unserem Modell genau realisiert. In der Skizze (S. 229) bildet das Innere der Fläche rechts von der Doppelkurve den Raunteil I, links den Teil II, das Äußere aber den Teil III. Sie werden sich danach an der Hand des folgenden Schemas für die Zahl und Vielfachheit der reellen Wurzeln, die den Punkten der einzelnen Raum-, Flächen- und Kurventeile entsprechen, leicht völlig orientieren können; es bedeutet darin die nicht eingeklammerte Zahl die Anzahl der einfachen reellen Wurzeln, während jede vielfache Wurzel, wie bisher durch ihre in Klammern geschlossene Vielfachheit angedeutet ist:

	I.	II.	III.
Raunteil:	4	2	0
Diskr. - Fläche:	$2 + (2)$	(2)	
Kurvenkurve:	$1 + (3)$		
Doppelkurve:		$(2) + (2)$	$(1 \text{ imag. Doppelw.})$
Spitze:		(4)	

I. Gleichungen im Gebiete komplexer Größen.

Wir lassen nun die Beschränkung auf reelle Größen fallen und wollen weiterhin im Gebiete komplexer Größen operieren; natürlich kommt es uns dabei wieder nur auf die Hervorhebung solcher Dinge an, die sich mehr, als das sonst geschieht, geometrisch anschaulich darstellen lassen. Ich kann da bald mit dem wichtigsten Theorem der Algebra beginnen.

H. Der Fundamentalsatz der Algebra.

Das ist bekanntlich der Satz, daß jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades im allgemeinen n Wurzeln hat, oder genauer gesagt, daß jedes Polynom $f(x)$ n^{ten} Grades sich in n Linearfaktoren zerlegen läßt.

Zur Grunde besitzen alle Beweise dieses Satzes die geometrische Interpretation der komplexen Größen $x + iy$ in der $x-y$ -Ebene. Ich will Ihnen hier den Gedankengang des ersten Gaußschen Beweises von 1799 angeben, der sich ganz anschaulich einkleiden läßt; freilich ist die ursprüngliche Darstellung bei Gauß anders, als ich sie hier gebe. - Liegt das Polynom $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ vor, so können wir schreiben:



$$f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y),$$

wo u, v reelle Polynome der beiden reellen Veränderlichen x, y sind. Der Grundgedanke des Cauchy'schen Beweises ist nun, die beiden Kurven

$$u(x,y) = 0 \text{ und } v(x,y) = 0$$

in der x - y -Ebene zu betrachten, und zu zeigen, daß sie mindestens einen Punkt gemeinsam haben müssen; für diesen Schnitt (x, y) ist dann $f(x+iy) = 0$, womit die Existenz einer Wurzel der Gleichung $f = 0$ bewiesen ist. In diesem Punkte erweist es sich als genügend, den Verlauf beider Kurven ins Unendliche hin, d. h. in beliebig weiter Entfernung vom Nullpunkt zu untersuchen.

Wird der absolute Betrag r von z sehr groß, so können man in $f(z)$ die niederen Potenzen von z gegen z^n vernachlässigen; führt man in der x - y -Ebene Polarkoordinaten r, φ ein, d. h. setzt man

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

so wird nach der Moivre'schen Formel

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

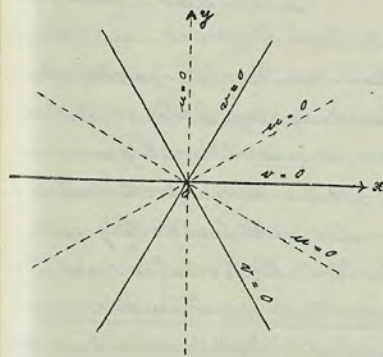
und dies ist also der Ausdruck, dem sich $f(z)$ asymptotisch nähert. Fern entnehmen wir sofort, daß u und v sich asymptotisch den Funktionen

$$r^n \cos n\varphi \text{ bzw. } r^n \sin n\varphi$$

nähern, und daher wird der schließliche Verlauf der Kurven $u = 0, v = 0$ ins Unendliche in erster Annäherung dargestellt durch:

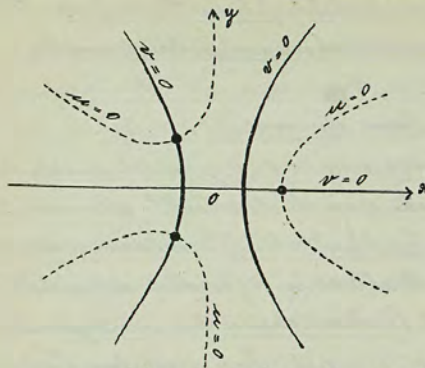
$$\cos n\varphi = 0 \text{ bzw. } \sin n\varphi = 0.$$

Nun wird die Kurve $\sin n\varphi = 0$ gebildet durch diejenigen n Geraden durch den Nullpunkt, die mit der x -Achse die Winkel $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}$ bilden, während $\cos n\varphi = 0$ aus den n Halbierungsgraden der entstehenden Winkel besteht (nebstehend für $n = 3$ gerechnet).



Im zentralen Teil der Figur können die wahren Kurven $u = 0, v = 0$ von diesen Geraden natürlich wesentlich abweichen; jedenfalls müssen sie weiterhin nach außen asymptotisch sich ihnen nähern, und wir können

ihren Verlauf schematisch gerade so darstellen, daß wir außerhalb eines großen Kreises jene Geraden beibehalten und sie innen irgendwie verbinden. Ganz gleichgültig aber, wie dieser innere Verlauf sein mag, die ins Unendliche verlaufen-

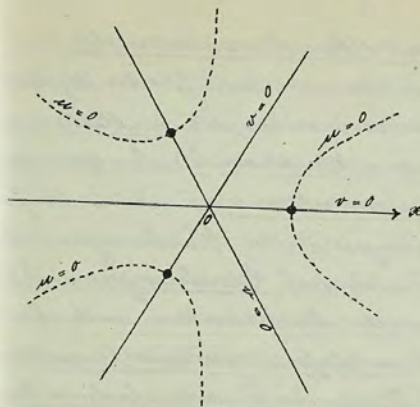


den Äste u, v müssen jedenfalls beim Umlaufen der Figur alternieren, und daraus ist anschaulich ganz klar, daß sie sich innerhalb mindestens einmal überkreuzen müssen. In der Tat kann man das - und das

ist der Inhalt des Gaußschen Beweises - mit Hilfe der Stetigkeitseigenschaften der Kurven exakt schließen; der wesentliche Gedankengang aber ist im vorigen dargelegt. Hat man so eine Wurzel gewonnen, so kann man von $f(z)$ einen Linearfaktor abspalten, und den Schluss für das entstehende Polynom $(n-1)$ ten Grades wiederholen. So fortschreitend findet man schließlich in der Tat die Linearfaktoren bzw. die Existenz von n Wurzeln.

Das Schlußverfahren wird Ihnen viel deutlicher werden, wenn Sie sich spezielle Beispiele wirklich durchkonstruieren. Ein einfachstes Beispiel wäre

$$f(z) = z^3 - 1 = 0;$$



da wird offenbar $u = r^3 \cos 3\varphi - 1, v = r^3 \sin 3\varphi$, so daß $v = 0$ einfach aus drei Geraden besteht, während $u = 0$ 3 hyperbelartige Äste besitzt. Sie sehen an der Zeichnung in der Tat die 3 Schritte der beiden Kurven, die die drei Wurzeln unserer Gleichung geben.

Ich kann Ihnen die Durchführung weiterer komplizierterer Beispiele nur sehr empfehlen.

Diese kurzen Andeutungen über den Fundamentalsatz mögen hier, wo ich ja keine Vorlesung über Algebra halte, genügen. Lassen Sie sie mich noch mit dem Hinweis abschließen, daß die Bedeutung der Zulassung komplexer Zahlen in der Algebra gerade darin besteht, daß sie den allgemeinen ausnahmslosen Ausspruch des Fundamentalsatzes gestatten; bei Beschränkung auf reelle Größen könnte man nur sagen, daß die Gleichung n ten Grades entweder n Wurzeln hat, oder weniger oder auch gar keine.



B. Gleichungen mit 1 komplexen Parameter.

Den Rest der Zeit, der uns nun noch für die obgebra bleibt, wollen wir dazu verwenden, die sämtlichen (auch die komplexen) Lösungen komplexen Gleichungen in anschaulicher Weise zu diskutieren, so wie wir das früher für die reellen Lösungen reeller Gleichungen taten. Dabei wollen wir uns aber auf Gleichungen mit einem komplexen Parameter beschränken und oben-dreien noch annehmen, daß dieser nur linear auftritt; dann wird das Studium einer einfachen konformen Abbildung alles ergeben, was wir wünschen.

Es sei $z = x + iy$ die Unbekannte, $w = u + iv$ der Parameter, dann ist also der Typus der zu betrachtenden Gleichung:

$$(1) \quad \varphi(z) - w \cdot \psi(z) = 0,$$

wo φ, ψ Polynome in z sind, der Exponent der höchsten in ihnen auftretenden Potenzen von z sei n . Nach dem Fundamentalsatz hat diese Gleichung für jeden bestimmten Wert von w n im allgemeinen verschiedene Wurzeln z . Umgekehrt aber folgt aus (1)

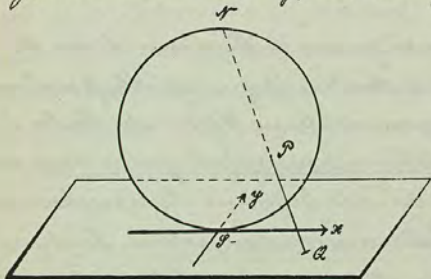
$$(2) \quad w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

d. h. w ist eine eindeutige rationale Funktion von z , die - wie man sagt - vom Grade n ist. Wollten wir nun

als geometrischer Äquivalent der Gleichung (1) einfach die durch diese Funktion entstehende konforme Abbildung zwischen der komplexen z - und w -Ebene verwenden, so würde die Vieldeutigkeit des z als Funktion von w die Übersicht stören; wir machen es also, wie stets in der Funktionentheorie üblich: Wir denken uns die w -Ebene in n übereinander gelegten Exemplaren (Blättern) vorhanden und verbinden diese n Blätter in geeigneter Weise durch Verzweigungspunkte zu einer n -blättrigen Riemannschen Fläche, wie Ihnen das aus dem stufenweisen der Lehre von den algebraischen Funktionen ja allen bekannt ist. Dann vermittelt unsere Funktion eine eindeutige in allgemeiner konformer Beziehung zwischen den Punkten der Riemannschen Fläche über der w -Ebene einerseits und der schlichten z -Ebene andererseits.

Bevor wir nun zum genaueren Studium dieser Abbildung übergehen, ist es zweckmäßig einige Voraussetzungen zu treffen, welche die gar nicht im Wesen der Sache begründete Annahmestellung unendlich großer Werte von w und z beseitigen und das bequeme Aussprechen ausnahmslos geltender Sätze ermöglichen sollen. Da diese Voraussetzungen nicht so allgemein benutzt werden, wie es wohl wünschenswert wäre, so sei ein Wort mehr über

sie gestattet. Es kann uns nämlich hier nicht genü-
gen, daß man einfach symbolisch von einem unend-
lich fernen Punkte der komplexen Ebene spricht, denn
das löst gänzlich die konkrete Vorstellung vormissen,
und man kann obendrein immer erst durch besondere
Überlegungen oder Verabredungen herausbekommen was
einer bestimmten Eigenschaft eines endlichen Punktes
bzw. unendlich fernen analog ist. Wir erhalten aber
alles, was wir wünschen, wenn wir ein fix alle Male die
Gaußsche Ebene als Repräsentanten der komplexen Zahl-
ebene durch die „Riemannsche Kugel“ ersetzen. Wir den-
ken uns dann einfach auf dem Nullpunkt der Zahlenebene
eine berührende Kugel vom Durchmesser 1 mit ihrem Südpol
P aufgesetzt und durch stereographische Projektion vom
dem gegenüberliegenden Nordpol V auf die Ebene bezogen.
Jedem Punkt $A(x|y)$ der Ebene entspricht dabei eindeu-



mit bestimmten Koordinaten x, y ; wir können daher P als

den zweiten Schnitt P
des Strahles V A mit der
Kugel und umgekehrt
entspricht jedem Punkte
P der Kugel - mit Aus-
nahme von V selbst -
eindeutig ein Punkt A

Repräsentanten der Zahl $x + iy$ ansehen. Rückt man aber
P irgendwie in den Nordpol V, so entfernt sich A stets
ins Unendliche, und umgekehrt, wie sich auch A ins
Unendliche der Ebene entfernt, der entsprechende Punkt
P nähert sich immer dem einen bestimmten Punkte V.
Es erscheint also naturgemäß, diesen Punkt V, dem kei-
ne endliche komplexe Zahl zugeordnet ist, als einzigem
Repräsentanten aller unendlich großen $x + iy$ d. h. als
konkretes Abbild des sonst nur symbolisch eingeführten
unendlich fernen Punktes der Zahlenebene anzusehen
und ihm schlechthweg die Marke ∞ zuzuordnen. Hin-
durch ist im geometrischen Bilde völlige Gleichberech-
tigung aller endlichen und des unendlich fernen
Punktes erzielt.

Wir wollen nun, um zur geometrischen Deutung un-
serer algebraischen Beziehung (1) zurückzukehren, auch
die w -Ebene durch eine w -Kugel ersetzen, dann
wird unsere Funktion durch eine Abbildung der z -Kugel
auf die w -Kugel dargestellt, und diese ist, wie die
Abbildung der beiden Ebenen, konform, da nach ei-
nem bekannten Satze auch die stereographische Abbil-
dung der Ebene auf die Kugel konform ist. Dabei wer-
den einer Stelle der w -Kugel im allgemeinen n ver-
schiedene Stellen der z -Kugel entsprechen; um eine ein-



eindeutige Beziehung zu erreichen, denken wir uns daher wiederum in Exemplars der w -Kugel übereinander bzw. ineinander gelegt und verbinden sie durch Verzweigungspunkte in geeigneter Weise zu einer w -blättrigen Riemannschen Fläche über der w -Kugel. Diese Vorstellung hat keine größere Schwierigkeit, als die einer Riemannschen Fläche über der Ebene. Damit ist endlich die algebraische Gleichung (1) geometrisch gedeutet als eindeutige in allgemeiner Konformale Beziehung der Riemannschen Fläche über der w -Kugel einerseits und der schlichten z -Kugel andererseits; in diese Darstellung sind offenbar auch unendliche Werte von z und w , die einander oder endlichen Werten entsprechen, mit einbezogen.

Wollen wir nun diese neu eingeführten geometrischen Hilfsmittel voll ausnützen können, so müssen wir auch in der Algebra einen entsprechenden Schritt tun, um die Abnahmestellung des Unendlichen in den Formeln zu beseitigen, und dieser Schritt ist die Einführung der homogenen Variablen. Wir setzen nämlich

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

und betrachten z_1 und z_2 als 2 unabhängige komplexe Veränderliche, die nur beide endlich bleiben und nie-

mals gleichzeitig verschwinden sollen. Jeder bestimmte Wert von z wird dann von unendlich vielen Wertsystemen (z_1, z_2) geliefert, wo z ein willkürlicher konstanter Faktor ist; alle Wertsysteme (z_1, z_2) , die sich nur um einen solchen Faktor unterscheiden, werden wir daher als ein und dieselbe „Stelle“ im Gebiet der beiden homogenen Variablen ansehen. Dann gehört auch umgekehrt jeder solchen Stelle ein bestimmter Wert z zu, mit einer Ausnahme: der Stelle (z_1, z_2) beliebig $(z_2 = 0)$ entspricht kein endliches z ; nähert man sich ihr aber von anderen Stellen aus, so wird das entsprechende z selbst unendlich groß. Diese eine Stelle wird also als arithmetischer Äquivalent des einen unendlichfernen Punktes der z -Ebene bzw. z -Kugel mit der Marke $z = \infty$ anzusehen sein.

In derselben Weise setzen wir natürlich auch $w = \frac{w_1}{w_2}$, und wir werden nun die „homogene“ Gleichung zwischen den „homogenen“ Variablen z_1, z_2 und w_1, w_2 aufstellen, die der Gleichung (1) entspricht; sie lautet, wenn wir den Bruch in (1) mit z_2^n erweitern:

$$(3) \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{z_2^n \varphi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{z_2^n \psi\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\varphi(z_1, z_2)}{\psi(z_1, z_2)}$$

Hierin sind $\varphi(z_1, z_2)$, $\psi(z_1, z_2)$ ganze rationale Funktionen von z_1 und z_2 , da $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ das $z = \frac{z_1}{z_2}$ hoch-



stens in der n ten Potenz enthalten, und außerdem sind es sogar homogene Polynome (Formen) der Dimension n , denn jeder Term z^i von $q(z)$ oder $\psi(z)$ wird durch das Erweitern in den Term $z^i \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = z_1^{n-i} z_2^i$ der Dimension n verwandelt.

Wir kommen jetzt dazu, unter konsequenter Verwendung der beiden eingeführten Hilfsmittel - der Representation auf der komplexen Kugel und der homogenen Variablen - die funktionale Abhängigkeit, die unsere Gleichung (1) zwischen z und w statuiert, in allen ihren Einzelheiten zu studieren. Wir werden diese Aufgabe gelöst haben, wenn wir uns eine vollkommene Vorstellung der konformen Abbildung zwischen der z -Kugel und der Riemannschen Fläche über der w -Kugel machen können.

Da haben wir nun vor allem nach der Art und der Lage der Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche zu fragen; ich erinnere hier bald daran, daß ein μ -facher Verzweigungspunkt ein solcher ist, an dem $\mu + 1$ Blätter zusammenhängen. Da w eine eindeutige Funktion von z ist, kennen wir die Verzweigungspunkte, wenn wir die ihnen entsprechenden Punkte der z -Kugel kennen, die ich schlechtweg merkwürdige oder bemerkenswerte Punkte der z -Kugel zu

nennen pflege. Auch ihnen entspricht eine gewisse Multiplicität, gleich der Vielfachheit der zugehörigen Verzweigungspunkte. Ich will nun die Sätze, die die Bestimmung dieser Punkte ermöglichen, ohne ausführlichen Beweis angeben; ich nehme dabei an, daß die hier in Betracht kommenden eigentlich recht einfachen Funktionentheoretischen Tatsachen Ihnen im allgemeinen geläufig sind, wenn auch nicht gerade in der homogenen Darstellung, die ich hier bevorzuge. Die abstrakten Dinge, die ich Ihnen demgemäß zunächst vorzutragen haben, werden später an einer Reihe von Beispielen konkrete anschauliche Gestalt gewinnen.

Zunächst eine kleine Rechnung, die uns das Analogen des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ in homogenen Koordinaten liefern soll! Wir bilden das Differential der Gleichung (3)

$$(3') \quad \frac{w_2 dw_1 - w_1 dw_2}{w_1^2} = \frac{q dw_1 - q' dw_2}{q^2}$$

Man ist

$$dq = q_1 dx_1 + q_2 dx_2$$

$$d\psi = \psi_1 dx_1 + \psi_2 dx_2,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$q_1 = \frac{\partial q(z_1, z_2)}{\partial z_1}, \quad q_2 = \frac{\partial q(z_1, z_2)}{\partial z_2}$$

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi(z_1, z_2)}{\partial z_1}, \quad \psi_2 = \frac{\partial \psi(z_1, z_2)}{\partial z_2}$$



andererseits ist nach dem Eulerschen Theorem für ho-
mogene Funktionen vom Grade n :

$$q_1 \cdot z_1 + q_2 \cdot z_2 = n \cdot q$$

$$q_1 \cdot z_1 + q_2 \cdot z_2 = n \cdot \varphi$$

daher wird auf der rechten Seite von (3!):

$$q \, d\varphi - \varphi \, dq = \begin{vmatrix} dq_1 \, dz_1 + q_1 \, dz_2 \\ q_1 \, z_1 + q_2 \, z_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{n} \begin{vmatrix} q_1 \, dz_1 + q_2 \, dz_2 & q_1 \, dz_1 + q_2 \, dz_2 \\ q_1 \, z_1 + q_2 \, z_2 & q_1 \, z_1 + q_2 \, z_2 \end{vmatrix}$$

und das ist nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten:

$$= \frac{1}{n} \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dz_1 & dz_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

Daher geht (3!) über in:

$$\frac{w_1 \, dw_1 - w_2 \, dw_2}{w_1^2} = \frac{z_2 \, dz_1 - z_1 \, dz_2}{n \cdot q^2} (q_1 q_2 - q_1 q_2)$$

Damit haben wir die Grundformel der homogenen Theorie unserer Gleichung gewonnen, und als maßgebender Ausdruck für alles folgende tritt die Funktionaldeterminante $q_1 q_2 - q_1 q_2$ der Formen q, φ auf. Ist auf diesem Faktor steht rechts das Differential von $z = \frac{w_1}{w_2}$, links das von $w = \frac{w_1}{w_2}$, und da für endliche z und w die merkwürdigen Punkte bekanntlich aus $\frac{dw}{dz} = 0$ folgen, erscheint folgender Satz plausibel, auf dessen genauen Beweis ich hier allerdings eben nicht eingehen: Jede μ -fache Knullstelle der Funktionaldeterminante ist ein

merkwürdiger Punkt der Multiplizität μ , d. h. ihm entspricht ein μ -facher Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche über der w -Kugel. Der Hauptzug dieser Regel vor dem sonst formulierten besteht darin, daß sie endliche und unendliche Werte von z und w in eine Aussage zusammenfaßt. — Auch über die Anzahl der merkwürdigen Punkte gestattet sie eine präzise Angabe. Es sind nämlich die 4 Ableitungen Formen der Dimension $n-1$, und daher ist die Funktionaldeterminante eine Form der Dimension $2n-2$. Ein solches Polynom hat unter Berücksichtigung der Vielfachheit immer genau $2n-2$ Nullstellen. Sind also a_1, a_2, \dots, a_r die merkwürdigen Punkte der z -Kugel (d. h. $q_1 q_2 - q_1 q_2 = 0$ für $z_1 = z_2 = a_1, a_2, \dots, a_r$), und sind bezüglich $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ ihre Multiplizitäten, so ist deren Summe

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = 2n - 2.$$

Diesen Punkten entsprechen verzweigte der Konformen Abbildung die r Verzweigungspunkte

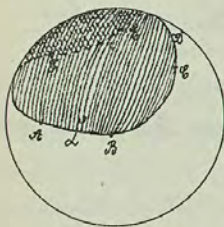
$$a_1, a_2, \dots, a_r$$

der Riemannschen Fläche über der w -Kugel, die auf der Fläche notwendig getrennt liegen müssen, und um die herum bez. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ Blätter im Zyklus zusammenhängen. Es ist aber zu bemerk, daß wög-
licherweise verschiedene dieser Verzweigungspunkte über



derselben Stelle der w -Kugel liegen können, da sich ruhig aus $w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ für $z = \alpha_1, \dots, \alpha_r$ verschiedene Werte derselbe Wert von w ergeben kann; über einem solchen Punkte verlaufen dann verschiedene von einander getrennte Serien von Blättern, deren jede in sich zusammenhängt. Jede solche Stelle der w -Kugel nennen wir eine Verzweigungsstelle, und bezeichnen sie fortlaufend mit A, B, C, \dots , die Anzahl dieser Verzweigungsstellen kann also kleiner sein als r .

Wir wollen nun die Riemannsche Fläche, von der wir nach den bisherigen Angaben nur sehr verschwommene Vorstellungen haben können, so zurecht machen, daß sie eine übersichtlichere Gestalt annimmt.



Dazu legen wir durch die Verzweigungsstellen A, B, C, \dots auf der w -Kugel irgend eine in sich zurücklaufende, sich nicht durchdringende Kurve ζ möglichst einfacher Gestalt, und unterscheiden die eine der beiden durch sie entstehenden Kugelkalotten durch Schnaffierung von der andern. In allen später von uns zu behandelnden Beispielen werden die A, B, C, \dots sämtlich reell sein, wir werden dann natürlich als Kurve ζ den Horizontalkreis der reellen

Kalotten nehmen, so daß jedes unserer beiden Teilgebiete eine Halbkugel ist.

Man durchdringen sich - um weiter vom allgemeinen Falle zu reden - je zwei zusammenhängende Blätter der Riemannschen Fläche längs eines zwei Verzweigungspunkte verbindenden Verzweigungsschnittes; bekanntlich bleibt die Riemannsche Fläche ihrem Wesen nach un geändert, wenn man diese Schnitte beliebig auf ihr verschiebt und nur ihre Endpunkte festhält, d. h. dieselben Blätter längs anderer dieselben Verzweigungspunkte verbindender Kurven miteinander zusammenhängen läßt. In dieser Variabilität liegt die große Allgemeinheit, aber zugleich auch die große Schwierigkeit der Idee der Riemannschen Fläche. Um nun unserer Fläche eine bestimmte der konkreteren Vorstellung leicht zugängliche Gestalt zu geben, verschieben wir alle Verzweigungsschnitte so, daß sie sämtlich über jener oben festgelegten Kurve ζ durch alle Verzweigungsstellen liegen; dabei können ganz über denselben Teile von ζ mehrere Verzweigungsschnitte verlaufen, über anderen brauchen auch gar keine Schnitte zu liegen.

Man nehme nunmehr schneiden wir den ganzen Blätterkomplex, d. h. jedes einzelne Blatt längs dieser Kurve ζ auf; da wir alle Verzweigungsschnitte vorher über ζ ver-



legt haben und sie damit sämtlich durchschneiden, zerfällt unsere Riemannsche Fläche in je n von Verzweigungen ganz frei über jeder der beiden durch ξ geschiedenen Kugelkalotten ausgebreitete „Halbblätter“. Entsprechend der obigen Unterscheidung der Kugelkalotten werden wir auch Kurve n schraffierte und n nichtschraffierte Halbblätter unterscheiden. Und nun können wir den Aufbau der ursprünglichen Riemannschen Fläche so beschreiben: Jedes schraffierte Halbblatt war auf ihr von lauter nichtschraffierten Halbblättern umgeben, mit denen es längs der über $A B, A C, \dots$ gelegenen Stücke von ξ zusammenhängt, und ebenso war jedes nichtschraffierte Halbblatt längs solcher Kurvenstücke von lauter schraffierten umgeben. Mehr als 2 Halbblätter aber können nur an einem Verzweigungspunkte zusammenstoßen, und zwar liegen um einen μ -fachen Verzweigungspunkt genau $\mu + 1$ schraffierte und $\mu + 1$ nichtschraffierte Halbblätter alternierend herum.

Da die ξ -Kugel mittels unserer Funktion $w(\xi)$ eindeutig auf die Riemannsche Fläche über der w -Kugel abgebildet ist, können wir diese Zusammenhangsverhältnisse sofort auf sie übertragen: Wegen der Stetigkeit entsprechen den $2n$ Halbblättern der Fläche bzw. $2n$ zusammenhängende ξ -Bereiche, die wir als schraffierte bzw. nichtschraffierte Halbbereiche bezeichnen; sie werden von einander getrennt durch die n Bilder, die die n -deutige Funktion $\xi(w)$ von jedem der Stücke $A B, A C, \dots$ der Kurve ξ auf der ξ -Kugel entwirft. Jeder schraffierte Halbbereich stößt längs solcher Bildkurven von ξ an lauter nichtschraffierte, jeder nichtschraffierte an lauter schraffierte an; nur in einem μ -fachen merkwürdigen Punkte laufen mehr als 2 Halbbereiche, und zwar je $\mu + 1$ schraffierte und nichtschraffierte zusammen.

Diese Gebietsenteilung der ξ -Kugel soll uns nun dazu dienen, den Verlauf der Funktion $\xi(w)$ für einige einfache und charakteristische Beispiele bis in alle Einzelheiten zu verfolgen. Ich beginne mit einem möglichst einfachen Beispiele.

1. Die „reine“ Gleichung.

Dies ist die allgemein bekannte Gleichung

$$(1) \quad \xi^n = w,$$

deren Lösung man bekanntlich formal durch Einführung des Wurzelzeichens angibt: $\xi = \sqrt[n]{w}$, ohne daß damit natürlich für die Erkenntnis des funktionalen Zusammenhangs von ξ und w viel gewonnen ist. Wir verfolgen nun ganz nach der allge-



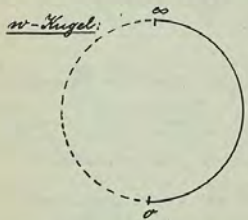
meiner Vorschrift: Wir führen homogene Variable ein:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^n}{z_2^n},$$

und bilden die Funktionaldeterminante der Nenners und Nenners der rechten Seite:

$$\begin{vmatrix} w_1^{n-1} & 0 \\ 0 & w_2^{n-1} \end{vmatrix} = w_1^{n-1} \cdot w_2^{n-1}.$$

Sie hat ersichtlich $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$, oder - inhomogen geschrieben - $z = 0$ und $z = \infty$ je zur $(n-1)$ -fachen Stelle, womit bereits sämtliche merkwürdigen Punkte von der Gesamtmultiplizität $2n-2$ bekannt sind. Nach unserem allgemeinen Theorem liegen daher an den vermög $w = z^n$ entsprechenden Stellen $w = 0$ und $w = \infty$ die einzigen Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche über der w -Kugel, und zwar haben beide die Multiplizität $n-1$, so daß an jedem alle n Blätter im Zyklus zusammenhängen. Wir markieren uns nun weiter auf der w -Kugel den



w -Kugel: Meridian der reellen Zahlen als Kurve L und schneiden nach entsprechender Verschiebung der Verzweigungsschnittstelle alle Blätter der Riemannschen Fläche längs dieses Meridians auf; wir denken uns von den $2n$ Halbkugeln, in die die Fläche so zerfällt, je-

dermal die über der hinteren Hälfte der w -Kugel gelegen, die also w -Werten mit positiv imaginärem Teile entspricht, schraffiert. Auf dem Meridianschnitt wollen wir wohl stets den Halbmernidian der positiven reellen Zahlen (in der Figur ausgezogen) und den der negativen (gestrichelt) unterscheiden.

Nunmehr haben wir die Bilder dieser Meridian-Kurve L auf der z -Kugel zu untersuchen, die dort die charakteristische Teilung in Halbbereiche hervorruft. Auf dem positiven Halbmernidian ist $w = z^n$, wo z reell von 0 bis ∞ läuft; dafür wird nach einer bekannten Formel der komplexen Zahlen:

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right), \text{ wo } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

und das durchläuft für die verschiedenen Werte von k die n Halbmernidiane der z -Kugel, die mit dem Halbmernidian der positiven reellen Zahlen die Winkel $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$ bilden. Diese Kurven entsprechen also der ausgezogenen Hälfte von L . Analog haben wir auf dem negativen Halbmernidian der w -Kugel zu setzen $w = -z^n = z^n e^{i\pi}$, wo wiederum $0 \leq z \leq \infty$, und dann ergibt sich

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \right), \text{ wo } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

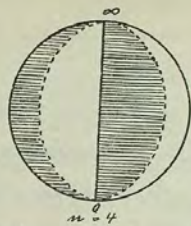
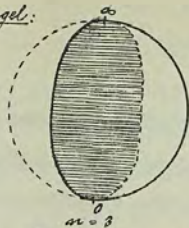
dem entsprechen aber die n Halbmernidiane der z -Kugel mit den „geographischen Längen“ $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{n}$, die



also die Winkel der vorigen halbieren. Demnach wird die \mathbb{Z} -Kugel in $2n$ vom Nordpol nach dem Südpol reichende kongruente Zweiecke zerlegt - etwa wie man eine Apfelsine zu verschneiden pflegt. Diese Teilung genügt genau der allgemeinen Theorie; insbesondere stopfen wir in den merkwürdigen Punkten - den beiden Polen - nicht als 2 Halbbereiche, und zwar $2n$ entsprechend der Multiplizität $w-1$ zusammen.

War nun die Schraffierung der Bereiche angeht, so brauchen wir sie nur für einen Bereich festzulegen; die übrigen sind dann alternierend zu schraffieren und freizulassen. Man bemerken wir, wenn wir die schraffierte Hälfte der w -Kugel (die Hinterseite also) betrachten, daß das ausgezogene Stück der Begrenzung zur Linken, das gestrichelte zur Rechten liegt; da es sich um eine konforme Abbildung ohne Winkelumlegung handelt, muß jeder schraffierte Gebiet der \mathbb{Z} -Kugel dieselbe Lageeigenschaft haben, daß ein ausgezogenes Begrenzungstück links, ein gestricheltes rechts liegt. Wir beherrschen danach die Gebietseinteilung der \mathbb{Z} -Kugel vollkommen; übrigens ist noch ein charakteristischer Unterschied der Verteilung der Gebiete auf beide \mathbb{Z} -Halbkugeln zu bemerken, je nachdem w gerade oder ungerade ist, wie das aus den beiden Figuren für die

\mathbb{Z} -Kugel:



ersten Fälle $n = 3, 4$ klar zu sehen ist. - Ich weise hier noch ausdrücklich darauf hin, wie notwendig der Übergang zur komplexen Kugel für das volle Verständnis der Sachlage ist; in der komplexen \mathbb{Z} -Ebene hätte man eine Einteilung in gradlinig begrenzte vom Nullpunkt ausstrahlende Ektoren, und es wäre keineswegs so anschaulich, daß $\mathbb{Z} = \infty$ als merkwürdiger Punkt bzw. $w = \infty$ als Verzweigungspunkt die gleiche Bedeutung hat wie $\mathbb{Z} = 0$ bzw. $w = 0$.

Damit ist die Grundlage für die genaue Kenntnis der funktionalen Zusammenhanges zwischen \mathbb{Z} und w geschaffen; wir hätten jetzt nur noch die konforme Abbildung eines jeden der $2n$ Kugelzweiecke auf die eine oder die andere w -Halbkugel zu studieren. Darauf will ich jedoch hier nicht näher eingehen; jedem, der sich überhaupt mit konformer Abbildung beschäftigt hat, ist ja dieser Fall als einer der einfachsten außerordentlich anschaulichen Beispiele durchaus geläufig. Wie man



dann von hier aus Methoden zur numerischen Berechnung von ξ gewinnen kann, werden wir später noch zu erörtern haben (S. 48, 5).

Hier wollen wir nur noch die wichtige Frage nach der gegenseitigen Beziehung der einzelnen gleichartigen Gebiete der ξ -Kugel erledigen. Bekanntlich sagt: $w = \xi^n$ nimmt den gleichen Wert an je einer Stelle jeder der n schraffierten Gebiete an; lassen sich die zugehörigen Werte ξ nicht einfach durch einander ausdrücken? In der Tat bemerken wir sofort, daß für $\xi' = \xi \cdot \varepsilon$, wo ε irgend eine n te Einheitswurzel ist, $\xi'^n = \xi^n$ wird, d. h. $w = \xi^n$ nimmt an allen n Stellen

$$(2) \quad \xi' = \varepsilon^v \cdot \xi = \varepsilon^{\frac{2\pi i v}{n}} \cdot \xi \quad (v = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

den gleichen Wert an. Diese n Stellen ξ' müssen sich also gerade auf alle n schraffierten Bereiche verteilen, wenn ξ in einem der schraffierten Bereiche angenommen ist, und sie müssen gleichzeitig je einen dieser Bereiche durchlaufen, wenn ξ seinen Bereich durchläuft, und gleiches gilt von den nichtschraffierten Bereichen. Nun bedeutet jede der Substitutionen (2) geometrisch eine Drehung der ξ -Kugel um die vertikale Achse q, ∞ durch einen Winkel $v \cdot \frac{2\pi}{n}$, da in der komplexen Ebene bekanntlich obmultiplikation mit $\varepsilon^{\frac{2\pi i v}{n}}$ eine Drehung um den Nullpunkt durch jenen Winkel darstellt. Also

gehen entsprechende Punkte unserer Kugelgebiete, wie diese Gebiete selbst, durch jene n Drehungen um die vertikale Achse ineinander über.

Hätten wir von vornherein also nur ein schraffiertes Teilgebiet der Kugel bestimmt, so würde uns diese Bemerkung alle gleichartigen Teilgebiete liefern. Dabei ist lediglich die Eigenschaft der Substitutionen (2) bemerkt, daß sie die Gleichung (1) in sich selbst (d. h. $\xi^n = w$ in $\xi'^n = w$) überführen, und daß ihre Stanzahl mit der Gradzahl übereinstimmt. In den folgenden Beispielen werden wir stets von vornherein solche lineare Substitutionen angeben können, und wir werden von der dadurch ermöglichten wesentlichen Vereinfachung der Bestimmung der Gebietsteilung steti Gebrauch machen.

Wir wollen uns nun noch an dem vorliegenden Beispiele einen wichtigen allgemeinen Begriff klar machen, nämlich den Begriff der Reduzibilität für Gleichungen, die einen Parameter w rational enthalten; von der Reduzibilität von Gleichungen mit rationalen Koeffizienten hatten wir schon früher gelegentlich der Konstruktion des regulären Sechsecks gesprochen (S. 125 ff.) Eine Gleichung $f(\xi, w) = 0$ (etwa unser Beispiel $\xi^n - w = 0$), wo $f(\xi, w)$ ein Polynom in



z ist, dessen Koeffizienten rationale Funktionen von w sind, heißt reduzibel in Bezug auf den Parameter w , wenn sich f in ein Produkt zweier Polynome desselben Art zerlegen läßt:

$$f(z, w) = f_1(z, w) \cdot f_2(z, w);$$

andernfalls heißt sie irreduzibel in Bezug auf w . Die ganze Verallgemeinerung gegen den früheren Begriff, ist hierbei die, daß wir als „Rationalitätsbereich“, in dem wir operieren und dem wir die Koeffizienten der zusammenfassenden Polynome entnehmen wollen, statt der Gesamtheit der rationalen Zahlen die Gesamtheit der rationalen Funktionen des Parameters w zu Grunde legen - daß wir also von einer rein zahlentheoretischen zu einer funktionentheoretischen Auffassung übergehen.

Veranschaulichen wir uns jede Gleichung $f(z, w) = 0$ durch ihre Riemannsche Fläche, so können wir ein einfaches Kriterium für die Reduzibilität in diesem neuen Sinne aufstellen. Ist nämlich die Gleichung reduzibel, so muß jedes ihr genügende Wertesystem z, w entweder $f_1(z, w) = 0$ oder $f_2(z, w) = 0$ genügen; man werde die Lösungen von $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ durch deren Riemannsche Flächen repräsentiert, die miteinander nichts zu tun haben und insbesondere nicht zusammenhängen können. Also muß die zu einer reduziblen Gleichung

der Gleichung $f(w, z) = 0$ gehörige Riemannsche Fläche, in mindestens zwei getrennte Stücke zerfallen.

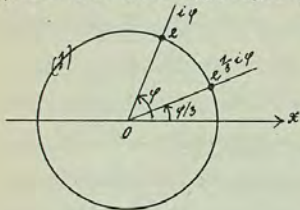
Danach können wir jetzt sofort behaupten, daß die Gleichung $z^n - w = 0$ gewiß irreduzibel im funktionentheoretischen Sinne ist. Denn bei ihrer Riemannschen Fläche, die wir genau kennen, hängen ja an jedem Verzweigungspunkte alle n Blätter im Laufkreis zusammen, und obendrein ist die ganze Fläche auf die zusammenhängende unzerchnittene z -Kugel abgebildet, von einem Zerfallen kann also nicht die Rede sein.

Im Anschluß hieran können wir eines der schon früher (§ 102) berührten populären Probleme der Mathematik erledigen, nämlich das der Teilung eines beliebigen Winkels φ in n gleiche Teile, insbesondere - für $n = 3$ - das der Trisektion des Winkels. Die Aufgabe ist hier die, eine exakte Konstruktion mit Zirkel und Lineal anzugeben, die für jeden beliebigen Winkel φ die Dreiteilung leistet; für eine Reihe spezieller Werte φ lassen sich ja solche Konstruktionen leicht angeben. Ich will Ihnen hier noch den Gedankengang des Beweises für die Unmöglichkeit der Winkeltrisektion im beschränkten Sinne vortragen und bitte Sie dabei, sich des Unmöglichkeitsbeweises für die Konstruktion des regulären Siebenecks mit Zirkel und Lineal zu erinnern



(vgl. S. 123 ff.). Genau wie damals werden wir nämlich auch hier das Problem auf eine irreduzible kubische Gleichung zurückführen und dann schließen, daß diese nicht durch eine Folge von Quadraturwurzeln lösbar ist; nur wird jetzt in die Gleichung ein Parameter - der Winkel φ - eingehen, während früher die Koeffizienten ganze Zahlen waren, und demgemäß muß die funktivtheoretische Irreduzibilität an Stelle der zahlen-theoretischen auftreten.

Von die Gleichung des Problems aussetzen, denken wir uns in der w -Ebene den Winkel φ an die



positive reelle Halbachse angetragen; dann schneidet sein freier Schenkel den Einheitskreis in dem Punkte

$$w = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Unsere Aufgabe kommt darauf hinaus, eine von speziellen Werte von φ unabhängige, aus einer endlichen Anzahl von Anwendungen des Zirkels und Lineals bestehende Konstruktions zu finden, die jedesmal den Schnitt des Einheitskreises mit dem Schenkel des Winkels $\frac{\varphi}{3}$ liefert, d. h. den Punkt:

$$z = e^{i\frac{\varphi}{3}} = \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3}.$$

Dies z genügt der Gleichung

$$(3) \quad z^3 = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

und das analytische Äquivalent unserer geometrischen Aufgabe ist (vgl. S. 123), diese Gleichung durch eine endliche Anzahl übereinander geschichteter Quadraturwurzeln aus rationalen Funktionen von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ zu lösen - denn diese Größen sind die Koordinaten des Punktes w , von dem wir bei unserer Konstruktion ausgehen wollen.

Wir haben nun zuerst zu zeigen, daß die Gleichung (3) irreduzibel im funktivtheoretischen Sinne ist. Freilich hat diese Gleichung nicht genau die oben bei der Begriffsklärung angenommene Form, denn statt des rational eingehenden komplexen Parameters w treten die beiden Funktionen \cos , \sin eines reellen Parameters φ ihrerseits rational auf. Wir werden in naturgemäßer Fortbildung unseres Begriffes hin das Polynom $z^3 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ reduzibel nennen, wenn es sich in Polynome in z zerpalten läßt, deren Koeffizienten gleichfalls rationale Funktionen von $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ sind, und dafür können wir ein ganz ähnliches Kriterium wie vorher angeben. Lassen wir nämlich φ in (3) alle reellen Werte durchlaufen, so durchläuft $w = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ den Einheitskreis der w -Ebene, dem verwege der stereographischen Projektion auf der



w -Kugel der Äquator entspricht, die über diesem auf der Riemannschen Fläche der Gleichung $z^3 = w$ liegende in einem Zuge alle 3 Blätter durchlaufende Kurve wird durch Gleichung (3) auf dem Einheitskreis der z -Kugel eindeutig abgebildet und kann daher gewissermaßen als ihr „eindimensionales Riemannsches Gebilde“ angesprochen werden. Ebenso können wir aber offenbar jeder Gleichung der Form $f(z, \cos \varphi, \sin \varphi) = 0$ ein solcher Riemannsches Gebilde einordnen, indem wir solche Exemplare der Einheitskreise mit der Bogenlänge φ nehmen, als die Gleichung Wurzeln hat, und sie entsprechend dem Zusammenhange der Wurzeln auseinanderheften. Man folgt weiter genau wie früher, daß die Gleichung (3) nur dann reduzibel sein kann, wenn ihr eindimensionales Riemannsches Gebilde in getrennte Teile zerfällt, und das ist offenbar nicht der Fall. Damit ist die Irreduzibilität unserer Gleichung (3) bewiesen.

Man kann läßt sich aber der frühere Beweis, daß eine durch eine Folge von Quadraturregeln lösbare kubische Gleichung mit rationalen Zahlenkoeffizienten reduzibel ist, wörtlich auf den vorliegenden Fall der funktionentheoretisch irreduziblen Gleichung (3) übertragen (s. S. 169 ff.); man braucht nur statt

„rationaler Zahlen“ stets „rationale Funktionen von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ “ zu setzen. Damit ist dann unsere Behauptung, daß die Treiteilung des Winkels für willkürliches φ nicht durch eine endliche Anzahl von einander ungen des Winkels und Einheitskreis ausführbar ist, vollständig bewiesen; die Bemühungen der Winkeltreiteilungslente müssen also immer vergeblich bleiben!

Für höhere nunmehr zur Behandlung einer ein wenig komplizierteren Beispiele:

2. Die Fiedergleichung.

Diese Gleichung, deren Name später zu erklären sein wird, lautet:

$$(1) \quad w = \frac{1}{2} \left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}} \right).$$

Ihr Grad ist, wie sich nach Multiplikation mit z^{2n} ergibt, $2n$. Durch Einführung homogener Variablen erhalten wir

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2n} + z_2^{2n}}{z_1^{2n} \cdot z_2^{2n}},$$

wo in der Tat Formen z_1 der Dimension n im Zähler und z_2 im Nenner auftreten. Die Funktionaldeterminante dieser Formen ist

$$\begin{vmatrix} 2n \cdot z_1^{2n-1} & 2n \cdot z_2^{2n-1} \\ z_1^{2n-1} \cdot z_2^{-n} & z_2^{2n-1} \cdot z_1^{-n} \end{vmatrix} = 4z_1^{2n-1} z_2^{n-1} (z_1^{2n} - z_2^{2n});$$

sie hat zunächst $z_1 = 0$ und $z_2 = 0$ je $2n-1$ -fachen



-266-

Nullstelle; die übrigen $2n$ Nullstellen ergeben sich aus:

$$z_1^{2n} - z_2^{2n} = 0 \text{ oder } \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \pm 1.$$

Führen wir neben der früher bereits benutzten n -ten Einheitswurzel

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

noch die folgende n -te Wurzel aus -1 ein:

$$\varepsilon' = e^{\frac{4\pi i}{n}},$$

so werden die letzten $2n$ Nullstellen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \varepsilon^v \text{ und } \frac{z_1}{z_2} = \varepsilon' \cdot \varepsilon^v \quad (v = 0, 1, \dots, n-1);$$

die zugehörigen Werte $z = \frac{z_1}{z_2}$ haben also sämtlich den Betrag 1 und liegen daher auf dem (dem Einheitskreise der z -Ebene entsprechenden) Äquator der z -Kugel, und zwar um gleiche Winkelabstände $\frac{2\pi}{n}$ von einander entfernt. Wir haben daher als merkwürdige Punkte auf der z -Kugel:

den Südpol $z = 0$ und den Nordpol $z = \infty$ je mit der Multiplizität $n-1$,

die $2n$ Äquatorialpunkte $z = \varepsilon^v, \varepsilon' \cdot \varepsilon^v$ je mit der Multiplizität 1.

Die Summe aller Multiplizitäten ist $2 \cdot (n-1) + 2n \cdot 1 = 4n-2$, wie es das allgemeine Theorem von §. 249 für den Grad $2n$ auch verlangt. Vermöge der Gleichung (1) entspricht den merkwürdigen Punkten $z = 0, \infty$ auf der w -Kugel die Stelle $w = \infty$, ferner allen Punkten

-267-

$z = \varepsilon^v$ die Stelle $w = +1$ und endlich allen $z = \varepsilon' \cdot \varepsilon^v$ die $w = -1$. Es gibt demnach nur 3 Verzweigungsstellen

$\infty, +1, -1$ auf der w -Kugel, aber es liegen über
 $w = \infty$ 2 Verzweigungspunkte der Multiplizität $n-1$;
 $w = +1$ n Verzweigungspunkte der Multiplizität 1;
 $w = -1$ n Verzweigungspunkte der Multiplizität 1.

Von den $2n$ Blättern der Riemannschen Fläche hängen daher aus Punkte $w = \infty$ 2 getrennte Serien von je n Blättern im Zyklus zusammen, bei $w = +1$ und $w = -1$ aber immer n Serien von je 2 Blättern. Im einzelnen wird der Verlauf dieser Blätter anschaulich werden, wenn wir die entsprechende Einteilung der z -Kugel in Halbbereiche studieren.

Dazu ist es, wie oben bemerkt, gut, die linearen Substitutionen zu kennen, die unsere Gleichung (1) in sich überführen. Zunächst bleibt sie, genau wie die reine Gleichung, ungeändert bei den n Substitutionen

$$(2^{0v}) \quad z' = \varepsilon^v \cdot z \quad (v = 0, 1, \dots, n-1), \text{ wo } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

da für diese bereits $z'^n = z^n$ ist. Ebenso führen sie aber auch die weiteren n Substitutionen

$$(2^{1v}) \quad z' = \frac{\varepsilon^v}{z} \quad (v = 0, 1, \dots, n-1)$$

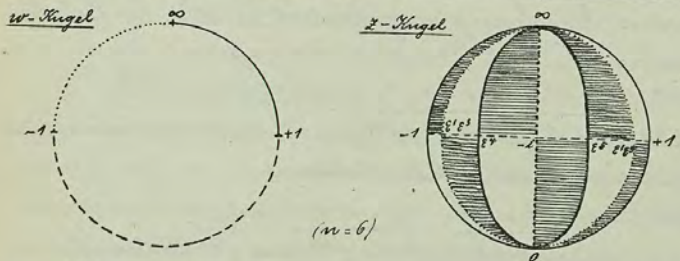
in sich über, da sie lediglich z^n und $\frac{1}{z^n}$ vertauschen.

Wir kennen damit $2n$ lineare Substitutionen der Gleichung



nung (1) in sich, genau so viel also, als ihr Grad beträgt. Kennt man für irgend einen Wert w_0 von w also eine Wurzel z_0 der Gleichung, so kennt man ohne weiteres $2n$ Werte z^r , z_0 und $\frac{z^r}{z_0}$ ($r = 0, 1, \dots, n-1$), für die (1) denselben Wert $w = w_0$ liefert, d. h. man kennt alle Wurzeln der Gleichung, wenn man nur einmal die n^{te} Einheitswurzel ϵ sich verschafft hat.

Man gehen wir an die Untersuchung der Einteilung der z -Kugel hervor, wie sie einer Zerschneidung der Riemannschen Fläche über der w -Kugel längs des reellen Meridians entspricht; wir unterscheiden dabei auf dem reellen Meridian der w -Kugel ähnlich wie im vorigen Beispiel die durch die 3 Verzweigungsstellen hervorgehenden Segmente von $+1$ bis ∞ (ausgezogen), von ∞ bis -1 (punktirt) und von -1 bis $+1$ (gestrichelt). Jedem dieser drei Segmente entsprechen auf der z -Kugel $2n$ verschiedene



diese Kurvenstücke, die aus einem von ihnen durch die

z in linearen Substitutionen (2) hervorgehen; es genügt daher immer eines von ihnen aufzufinden. Übrigens müssen alle diese Kurvenstücke die merkwürdigen Punkte $z = 0, \infty, \epsilon^r, \epsilon^s, \epsilon^t$ verbinden, die wir uns zunächst auf der z -Kugel markieren; ihr Bild hat genau wie im früheren Falle einen etwas verschiedenen Typus, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es mag hier genügen, wenn wir uns einen bestimmten Fall, etwa $n = 6$, vor Augen stellen; die Figur stellt in orthogonaler Projektion die Vorderseite der z -Kugel dar, und es sind von den auf dem Äquator in Abständen von je 60° äquidistant liegenden Punkten ϵ^r von links an $\epsilon^3 = -1, \epsilon^4, \epsilon^5, \epsilon^6 = 1$, von den in der Mitte zwischen ihnen liegenden ϵ^1, ϵ^2 aber $\epsilon^1, \epsilon^3, \epsilon^1, \epsilon^4 = -i, \epsilon^1, \epsilon^5$ sichtbar.

Sobald behauptet man, daß der Quadrant $+1 < z < \infty$ des Meridians der reellen z dem ausgezogenen Teile $+1 < w < \infty$ des reellen w -Meridians entspricht. In der Tat, setzen wir $z = r$ und lassen r reell von 1 bis ∞ laufen, so läuft $w = \frac{1}{2} (z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}) = \frac{1}{2} (r^{2n} + \frac{1}{r^{2n}})$ ebenfalls reell und ständig wachsend von 1 bis ∞ . Aus dieser einen entziehen n weitere ausgezogene Kurven der z -Kugel durch die n linearen Substitutionen (2ⁿ), das sind aber, wie wir aus dem vorigen Beispiele wissen, die Kugeldrehungen um die vertikale Achse ($0, \infty$) durch die Winkel $\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$,



wir erhalten so die n Viertelmeridiane vom Nordpol ∞ nach den Punkten ε^r der Äquators. Eine weitere ausgezogene Kurve erhalten wir, wenn wir etwa die Substitution $z' = \frac{1}{z}$ anwenden, und zwar geht dadurch der Meridianquadrant von $+1$ nach ∞ in den unteren rechten Meridianquadranten von $+1$ nach 0 über. Überwerfen wir auch diesen allen n Drehungen ($1^{\frac{2\pi}{n}}$) - die Zusammensetzung dieser mit $z' = \frac{1}{z}$ gibt alle Substitutionen ($1^{\frac{2\pi}{n}}$) - so treten noch die n den Südpol mit den Äquatorialpunkten ε^r verbindenden Viertelmeridiane hinzu, womit wir in der Tat die gewünschten $2n$ ausgezogenen dem ausgezogenen w -Meridianquadranten entsprechenden Kurven haben. Für $n = 6$ speziell erfüllen sie die 3 ganzen Meridiane, die aus dem reellen Meridian durch die Drehungen um $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ hervorgehen.

Sinn können wir weiter einsehen, daß die Gesamtheit der Werte $z = \varepsilon^r \cdot x$, wo x wieder reell von $+1$ bis ∞ läuft, dem punktierten Teile des reellen w -Meridians entspricht; denn die Gleichung (1) liefert dafür

$$w = (\varepsilon^r)^n \frac{1}{z} \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) = -\frac{1}{z} \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right),$$

und das läuft wirklich stets abnehmend von -1 bis $-\infty$. $z = \varepsilon^r \cdot x$ stellt aber den Meridianquadranten von ∞ nach dem Äquatorialpunkt ε^r dar, und wenn wir auf ihn wiederum die Substitutionen ($1^{\frac{2\pi}{n}}$), ($1^{\frac{4\pi}{n}}$) an-

wenden, so ergibt sich genau wie vorher, daß dem punktierten Teile des reellen w -Meridians die sämtlichen oberdiagonalen Quadranten von den Polen nach den Äquatorialpunkten ε^r entsprechen, die also die Winkel der vorhin verwendeten Meridiane halbieren.

Es bleiben noch die dem gestrichelten Halbmeridian $-1 < w < +1$ entsprechenden $2n$ Kurvenstücke zu suchen, ich beweise, daß es gerade die von den Punkten ε^r und $\varepsilon^r \cdot \varepsilon^r$ auf dem Äquator der z -Kugel hervorgehenden Abschnitte sind. In der Tat repräsentiert der Äquator die Punkte vom absoluten Betrage 1, und wird daher durch $z = e^{i\varphi}$ dargestellt, wo φ reell von 0 bis 2π läuft. Daher ist das zugehörige

$$w = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi} \right) = \cos(n\varphi);$$

das bleibt in der Tat stets reell und absolut unter 1, und zwar nimmt es gerade einmal alle Werte zwischen $+1$ und -1 an, wenn φ einen Bogen von der Länge $\frac{\pi}{n}$ durchläuft - d. h. einen der Abschnitte, von denen wir sprechen.

Die so bestimmten Kurven zerlegen die z -Kugel in $2 \cdot 2n$ - übrigens dreiecksförmige - Halbbereiche, die von je einer Kurve der 3 Arten begrenzt werden und je einem Halbblatt der Riemannschen Fläche entsprechen; nur an einem merkwürdigen

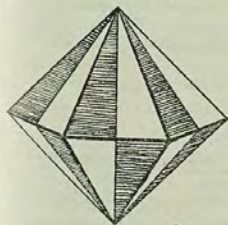


Punkte stoßen mehrere Bereiche zusammen und zwar, wie es nach der Tabelle der Vielfachheiten (S. 266) sein muß, an Nord- und Südpol je 2. n, an jedem Punkte ε^+ und ε^- je 2. l. Um festzustellen, welche von diesen Bereichen zu schraffieren sind, bemerken wir, daß die Begrenzung der hinteren w-Halbkugel positiv durchlaufen aus einer ausgezogenen, einer gestrichelten, einer punktierten Kurve besteht; wegen der Konformität der Abbildung haben wir daher alle Halbbereiche, bei denen die drei Teile der Begrenzung in selbigen Sinne aufeinander folgen, zu schraffieren, alle andern freizulassen.

Damit haben wir das vollständige geometrische Bild der durch unsere Gleichung repräsentierten Abhängigkeit zwischen α und w erhalten; man kann es noch weiter ausführen, indem man die konforme Abbildung der einzelnen Dreiecksbereiche auf die w-Halbkugel näher untersucht, was wir uns hier indessen wieder sparen wollen. Für beschreibe uns noch resümierend den vorzugsweise berücksichtigten Fall $w=6$: Die Kugel ist da in 12 schraffierte und 12 nicht-schraffierte Dreiecke geteilt, von denen in unserer Figur je 6 zu sehen sind. An jedem Pole stoßen je 6 von jeder Art, an 12 äquidistanten Punkten des Äquators je 2 zusammen; jeder Bereich ist auf ein

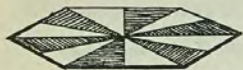
gleichartigen Halbblatt der Preamannschen Fläche konform abgebildet, die entsprechend der Gruppierung der Halbbereiche zu je 6 von jeder Art über der Verzweigungsstelle ∞ und zu je zwei von jeder Art über den Verzweigungsstellen ± 1 zusammenhängen.

Ein bequemes zu handhabendes und wegen der Analogie mit dem folgenden besonders wertvolles Bild der Kugelteilung erreicht man so: Man verbindet geradlinig immer 2 benachbarte um $\frac{2\pi}{n}$ abstehende Teilpunkte auf dem Äquator mit einander (etwa alle ε^+), und ferner jeden von ihnen mit jedem der beiden Pole. So entsteht eine der Kugel eingeschriebene Doppelpyramide mit n (sinn Beispiele der Figur 6) Seitenflächen auf jedem Mantel: Projiziert man die Kugelteilung von Zentrum aus auf sie,



so erscheint jeder Seitendreieck durch seine Höhe in eine schraffierte und eine nichtschraffierte Hälfte geteilt. Repräsentieren wir durch diese Doppelpyramide die Kugelteilung und damit unsere Funktion, so leistet sie uns ganz ähnliche Dienste, wie es in dem folgenden Beispielen die regulären Polyeder tun werden. Wir erreichen vollständige Analogie mit diesem, wenn wir uns die Doppelpyramide in ihre

Grundfläche zusammengedrückt denken, und das entstehende doppelt bedeckte reguläre n -Eck (Sechseck) betrachten,



dessen beide Seiten durch die Verbindungslinien ihres Mittelpunktes mit den Ecken und Mitten der Kanten in je $2n$ Dreiecke geteilt sind. Ich habe dieses Gebilde immer ganz als Tieder der bekannten 5 regulären Polyeder, die man seit Plato kennt, angesehen; es erfüllt nämlich alle Bedingungen, durch die man ein reguläres Polyeder gewöhnlich definiert, indem es lauter kongruente Kanten (die Kanten des n -Ecks) und lauter kongruente Ecken (seine Ecken) besitzt - der einzige Unterschied ist, daß es keinen eigentlichen Körper begrenzt, sondern den Rauminhalt \emptyset umschließt. So ist also der Platonsche Satz, daß es nur 5 reguläre Polyeder gibt, nur dann richtig, wenn man die im Beweise natürlich stets stillschweigend benutzte Forderung eines eigentlichen Körpers auch in die Definition aufnimmt.

Vom Tieder ausgehend erhält man offenbar unsere Kugelteilung, indem man außer seinen Ecken auch die Mittelpunkte seiner Kanten und Seitenflächen vom Zentrum aus auf die Kugel projiziert, wobei zu beachten ist, daß der Projektionsstrahl nach dem Mittelpunkte einer Seitenfläche senkrecht auf dieser stehen muß. So

kann das Tieder gleichfalls als Repräsentant der durch unsere Gleichung gegebenen Funktionsbeziehung zwischen w und z angesehen werden und daher der kurze, schon anfangs gebrauchte Name „Tiddergleichung“.

Im Anschluß hieran behandeln wir nun die Gleichungen, die - wie bereits angedeutet - analog in erster Beziehung zu den Platonischen regulären Körpern stehen:

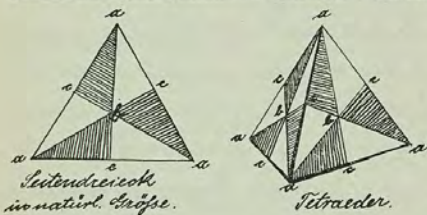
3. Die Tetraeder-, Oktaeder-, und Ikosaedergleichung.

Wir werden übrigens sehen, daß wir die beiden letzten mit dem gleichen Rechte auch als Würfel- und Dodekaedergleichung bezeichnen könnten, so daß in der Tat alle 5 Körper untergebracht sind. Wir wollen hier den umgekehrten Weg einschlagen wie im vorigen Beispiele: Wir leiten zuerst, von dem regulären Körper ausgehend, eine Gebietsenteilung der Kugel her und stellen alsdann die zugehörige algebraische Gleichung auf, die in jener Figur ihre geometrische Vorausschauung findet. Ich werde mich dabei aber vielfach auf Erläuterungen beschränken müssen und verweise deshalb gleich zu Anfang auf mein Buch: „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“, in dem Sie die ganze umfangreiche Theorie mit 1) Leipzig 1884; weiterhin zitiert als „Ikosaeder“.

allen ihren Beziehungen systematisch dargestellt finden.

Ich will übrigens alle drei Fälle parallel behandeln und beginne mit der Herleitung der Ecken- und Seiten-Teilung der Kugel für

1) das Tetraeder. Wir teilen jedes der 4 gleichseitigen Seitendreiecke des Tetraeders durch die 3 Höhen in 6 Teil-
dreiecke, von denen je 3 einander kongruent sind, wäh-
rend 2 nicht kongruente spiegelbildlich symmetrisch
sind. Wir erhalten so eine Verteilung der ganzen
Tetraederoberfläche in 24 Dreiecke, die sich in 2 Gruppen



Seitendreieck
in natürl. Größe.

Tetraeder.

von je 12 untereinander kon-
gruenten Dreiecken glie-
dern, derart, daß zwei
Dreiecke verschiedener Grup-
pen spiegelbildlich sym-
metrisch sind; die eine

Gruppe von Dreiecken mögen wir durch Schraffurung aus-
zeichnen. Was die Ecken dieser 24 Dreiecke angeht, so kön-
nen wir 3 Arten unterscheiden, so daß jedes Dreieck je ei-
ne Ecke jeder Art hat:

a) die 4 Ecken des Ausgangstetraeders, an denen je 3
schraffierte und 3 nichtschraffierte Dreiecke zusammen-
stoßen;

b) die 4 Mittelpunkte der Seitenflächen, die wiederum

ein reguläres Tetraeder (das Gegentetraeder) bilden; an ih-
ren stoßen gleichfalls je 3 Dreiecke jeder Art zusammen.

c) die 6 Halbierungspunkte der Kanten, die ein reguläres
Oktaeder bilden; an ihnen stoßen je 2 Dreiecke jeder Art zu-
sammen.

Projizieren wir diese Dreiecksteilung vom Mittelpunkt
des Tetraeders aus auf die umgeschriebene Kugel, so wird
diese in 2. 12 von größten Kreisen begrenzte Dreiecke ge-
teilt, die wechselweise kongruent bzw. symmetrisch
sind. Um jede Ecke der Art a, b, c, liegen bezw. 6,
6, 4 gleiche Winkel herum, und da die Summe der Win-
kel um einen Punkt herum auf der Kugeloberfläche 2π
beträgt, hat jedes unserer sphärischen Dreiecke den Winkel
 $\frac{\pi}{3}$ an einer Ecke a und b sowie $\frac{\pi}{2}$ an einer Ecke c.

Keine charakteristische Eigenschaft dieser Kugeltei-
lung ist, daß sie - ebenso wie das Tetraeder selbst - durch
eine Anzahl von Drehungen der Kugel um ihren Mit-
telpunkt in sich selbst übergeführt wird. Sie können
sich dies an einem Modelle des Tetraeders mit seiner Teil-
lung, wie ich es Ihnen aus unserer Sammlung hier
vorführe, leicht im einzelnen klar machen; für den
Vortrag mag es genügen, wenn ich die Anzahl der mög-
lichen Drehungen abzähle, wobei die Ruhe als „iden-
tische Drehung“ stets mitgerechnet wird. Fassen wir eine

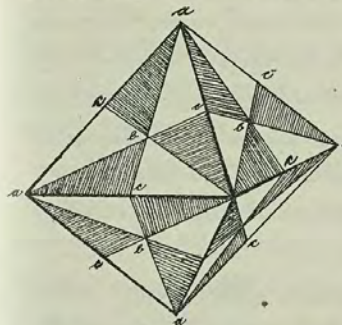


bestimmte Ecke des Ausgangstetraeders ins Auge, so können wir sie durch eine Drehung in jede Tetraederecke (auch in sich selbst) überführen, was 4 Möglichkeiten ergibt; halten wir sie aber in einer dieser Lagen fest, so können wir das Tetraeder noch auf 3 verschiedene Arten mit sich selbst zur Deckung bringen, indem wir nämlich um die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit jener festen Ecke, als Achse durch einen Winkel von 0° , 120° oder 240° drehen. Das gibt insgesamt 4 · 3 = 12 Drehungen, die das Tetraeder oder die entsprechende Dreiecksteilung der unbeschriebenen Kugel in sich überführen. Durch diese Drehungen kann man ein einmal vorgegebenes schraffiertes (oder nichtschraffiertes) Dreieck in jedes andere schraffierte (bzw. nichtschraffierte) Dreieck überführen, und die einzelne Drehung ist bestimmt, wenn man auch dieses letztere gibt. — Diese 12 Drehungen bilden offenbar das, was man eine Gruppe G_{12} von 12 Operationen nennt, d. h. wenn man zwei von ihnen nacheinander vornimmt, resultiert wiederum eine der 12 Drehungen.

Jede dieser 12 Drehungen wird, wenn wir die Kugel als α -Kugel auffassen, durch eine lineare Transformation der α dargestellt, und die, so entstehenden 12 linearen Transformationen werden die

dem Oktaeder zugehörige Gleichung in sich überführen. Ich bemerke zum Vergleich, daß man, wie Sie sich überzeugen mögen, die 2 in linearen Substitutionen der Erdergleichung als Gesamtheit der Drehungen des Tetraeders in sich deuten kann.

2.) Wir wollen jetzt das Oktaeder ähnlich behandeln und können uns dabei etwas kürzer fassen. Wir teilen jedes der 8 Seitendreiecke genau wie vorher in 6 Teildreiecke und erhalten eine Teilung der gesamten Oktaederoberfläche in 24 einander kongruente schraffierte und 24 wiederum untereinander kongruente, den ersteren



aber spiegelbildlich symmetrische nicht schraffierte Dreiecke. Wiederum können wir 3 Arten von Ecken unterscheiden:

a, die 6 Oktaederecken, an denen je 4 Dreiecke jeder Art zusammenstoßen.

b, die 8 Mittelpunkte der Seiten, die die Ecken eines Würfels bilden; an ihnen stoßen je 3 Dreiecke jeder Art zusammen.

c, die 12 Mittelpunkte der Kanten, an denen je 2 Dreiecke jeder Art liegen.

Sehen wir durch zentrale Projektion auf die unendliche Kugel über, so erhalten wir eine Einteilung in 24 kongruente bzw. symmetrische sphärische Dreiecke, deren jeder die Winkel $\frac{\pi}{2}$ an der Ecke a, $\frac{\pi}{3}$ an der Ecke b und $\frac{\pi}{2}$ an der Ecke c besitzt. Da die Ecken b einen Würfel bilden, überzeugt man sich leicht, dass man genau dieselbe Einteilung erhalten würde, wenn man von einem Würfel ausginge und seine Ecken, Seiten- und Kantenmitten auf die Kugel projizierte; wir brauchen also den Würfel in der Tat nicht besonders zu berücksichtigen.

Genau wie vorher macht man sich nun klar, dass das Oktaeder sowohl, wie diese Gebietereinteilung der Kugel durch 24 Drehungen in sich übergeführt wird, die eine Gruppe G_{24} bilden; jede einzelne Drehung ist wieder dadurch bestimmt, dass sie ein vorgegebenes schraffiertes Dreieck in ein bestimmtes anderes schraffiertes überführt.

3. Wir kommen endlich zum Ikosaeder. Auch hier haben wir dieselbe Einteilung jedes der 20 Seitendreiecke zu Grunde zu legen und erhalten im ganzen 60 schraffierte und 60 nichtschraffierte Teil-dreiecke. Die 3 Arten von Ecken sind:

a, die 12 Ikosaederecken, an denen je 5 Dreiecke

jeder Art liegen.

b, die 20 Seitenmittelpunkte, die die Ecken eines regulären Pentagondodekaeders bilden, an ihnen liegen je 3 Dreiecke jeder Art.

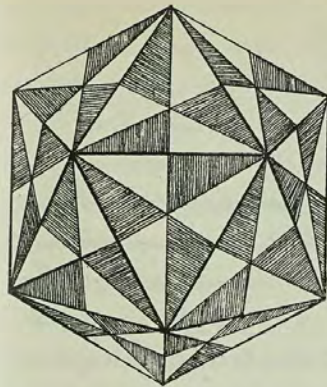
c, die 30 Kantenmittelpunkte, wo je 2 Dreiecke jeder Art zusammenstoßen.

Auf die Kugel übertragen erhält daher jedes Dreieck an

den Ecken a, b, c bzw. die Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. Aus der Eigenschaft der Ecken b kann man wieder schließen, dass dieselbe Figur aus dem regulären Dodekaeder hervorgehen würde.

Endlich wird das Ikosaeder und die zugehörige Kugelteilung durch eine Gruppe G_{60} von 60 Drehungen der Kugel um den Mittelpunkt in sich übergeführt. Auch diese Drehungen wie die der Oktaeders mögen Sie sich an einem Modelle, wie ich es Ihnen hier zeige, recht klar machen. —

Ich stelle noch einmal, meine Herren, die Winkel der sphärischen Dreiecke zusammen, die sich in den 3 betrachteten Fällen ergeben haben, und füge





auch das Dieder hinzu:

- Dieder: $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$;
- Tetraeder: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$;
- Oktaeder: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$;
- Icosaeder: $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Der Naturwissenschaftler - ich variire hier ein bekanntes Scherzwort von Kummer - würde danach sogleich schließen, daß er auch weiterhin Kugelteilungen analoger Eigenschaften mit Winkeln wie $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ gäbe. Der Mathematiker darf natürlich solche Analogieschlüsse nicht anwenden, und seine Vorsicht erweist sich hier als berechtigt, denn in der Tat bricht die Reihe der möglichen Kugelteilungen unserer Art mit den aufgezählten ab. Natürlich hängt diese Betrachtung genau damit zusammen, daß es keine weiteren regulären Polyeder gibt. Wir können ihren letzten Grund in einer Eigenschaft der ganzen Zahlen angeben, die eine Reduktion auf einfachere Gründe nicht mehr gestattet. Es zeigt sich nämlich, daß die Winkel eines jeden unserer Dreiecke ganzzahlige Teile von π sein müssen, etwa $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{z}$, derart, daß die Keiner der Ungleichung:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z} > 1$$

genügen; der Satz ist nun der, daß hierfür nur die oben angegebenen ganzzahligen Lösungen existieren. Diese Un-

gleichung können wir übrigens leicht verstehen, denn sie drückt nur aus, daß die Winkelsumme im sphärischen Dreieck größer ist als π .

Sobald ich hier übrigens noch erwähnen, wie gewiß manchem von Ihnen bekannt ist, daß eine sinngemäße Verallgemeinerung der Theorie doch über diesen scheinbar zu engen Rahmen hinausführt: Die Theorie der automorphen Funktionen zieht Einteilungen der Kugel in unendlich viele Dreiecke mit einer Winkelsumme kleiner als π in Betracht.

4. Fortsetzung: Aufstellung der Gleichungen.

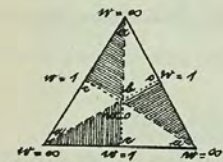
Wir kommen jetzt zum zweiten Teil unserer Aufgabe, diejenige Gleichung der Form

$$(1) \quad \varphi(z) - w \varphi(z) = 0 \quad \text{oder} \quad w = \frac{\varphi(z)}{\varphi(z)}$$

aufzustellen, die zu einer jeden unserer 3 Kugelteilungen gehört, d. h. vermöge deren die beiden Halbkugeln der w -Kugel auf die 2, 12 bzw. 2, 24 bzw. 2, 60 Teildreiecke der z -Kugel abgebildet werden. Jedem Werte w sollen also im allgemeinen 12 bzw. 24 bzw. 60 Werte z - je einer in einem Teildreieck der zugehörigen Art - entsprechen, und daher muß die gesuchte Gleichung in den 3 Fällen die Grade 12, 24, 60 haben, für die wir allgemein φ schreiben wollen. Nun stößt jeder Teilbereich an 3 merk-



würdige Punkte, also muß es in jedem Falle 3 Verzweigungsstellen auf der w -Kugel geben, und diese legen wir, wie es üblich ist, nach $w = 0, 1, \infty$; als Schnittkurve L durch diese 3 Punkte, deren 3 Segmente den Grenzlinien der z -Dreiecke entsprechen sollen, verwenden wir wieder den Meridian der reellen Zahlen.



Wir setzen ferner fest, wie oben stehend skizziert, daß in jedem der 3 Fälle dem Punkte $w = 0$ die Mittelpunkte der Seitenflächen (oben b. in der früheren Zeichnung), dem Punkte $w = 1$ die Kantenhalbpunkte (oben c) und dem Punkte $w = \infty$ die Polpole (oben a) entsprechen. Dann entsprechen die Dreieckseiten in der durch die Linien der Figur angedeuteten Weise den 3 Segmenten des w -Oberidians, und die schraffierten Dreiecke entsprechen der hinteren, die nichtschraffierten der vorderen Halbkugel. Die Gleichung (1) soll also nun gemäß diesen Zuordnungen die z -Kugel auf eine über der w -Kugel ausgebreitete V -blättrige Riemannsche Fläche mit Verzweigungspunkten bei $0, 1, \infty$ einindeutig abbilden.

Man könnte die Existenz dieser Gleichung aus allgemeinen funktionentheoretischen Theoremen leicht

a priori deduzieren, ich will jedoch hier die entsprechenden Kenntnisse nicht voraussetzen und ziehe daher einen mehr empirischen Aufbau der einzelnen Gleichungen vor, der uns vielleicht auch eine lebhaftere Anschauung der Einzelfälle verschafft.

Wir denken uns die Gleichung (1) in homogenen Variablen geschrieben:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\Phi_w(z_1, z_2)}{\Psi_w(z_1, z_2)},$$

wo Φ_w, Ψ_w homogene Polynome der Dimension V in z_1, z_2 sind ($V = 12, 24$ oder 60). Bei dieser Schreibweise der Gleichung erscheinen die Stellen $w_1 = 0$ und $w_2 = 0$ (d. i. $w = 0, \infty$) der w -Kugel ausgezeichnet; da neben ihnen aber für uns stets gleichberechtigt der dritte Verzweigungspunkt $w = 1$ (homogen: $w_1 = w_2 = 0$) in Betracht kommt, erweist es sich als zweckmäßiger auch die folgende Form der Gleichung explizit zu berücksichtigen:

$$\frac{w_1 - w_2}{w_2} = \frac{X_w(z_1, z_2)}{Y_w(z_1, z_2)},$$

wo $X_w = \Phi_w - \Psi_w$ gleichfalls eine Form von Dimension V ist. Beide Gestalten fasse ich gern in die stetige Proportion zusammen:

$$(2) \quad w_1 : w_1 - w_2 : w_2 = \Phi_w(z_1, z_2) : X_w(z_1, z_2) : \Psi_w(z_1, z_2),$$

wir haben darin eine die 3 Verzweigungspunkte durchaus gleichmäßig berücksichtigende völlig homogene Schreibweise der Gleichung (1).



Unsere Aufgabe ist jetzt, die Formen Φ_w, X_w, Y_w zu bilden, und zu diesem Ende wollen wir sie sogleich in Beziehung zu unserer z -Kugelteilung setzen. Wir entnehmen aus (2) sofort, daß für $w_1 = 0$ $\Phi_w(z_1, z_2) = 0$ wird, d. h. der Stelle $w = 0$ entsprechen auf der w -Kugel die 4 Nullstellen der Form Φ_w . Andererseits sollen nach unseren Festsetzungen der Verzweigungsstelle $w = 0$ die Mittelpunkte der Polyederflächen (Ecken b der Teilung) entsprechen, deren es in jedem Falle $\frac{4}{3}$ gibt; in jedem von ihnen stoßen aber je 3 auf die einzelnen Halbkugeln einfach abgebildete schraffierte und nichtschraffierte Dreiecke zusammen, so daß er als Wurzel unserer Gleichung dreifach zu rechnen ist. Also liegen diese Punkte jeder mit der Vielfachheit 3 die sämtlichen $w = 0$ entsprechenden Stellen und damit die sämtlichen Nullstellen von Φ_w ; Φ_w hat also lauter dreifache Nullstellen und muß daher die dritte Potenz einer Form $\varphi(z_1, z_2)$ des Grades $\frac{4}{3}$ sein:

$$\Phi_w = (\varphi_{4/3}(z_1, z_2))^3.$$

Genau ebenso folgt nun weiterhin, daß der Stelle $w = 1$ bzw. $w_1 = w_2 = 0$ die Nullstellen von $X_w = 0$ entsprechen, und daß diese identisch sind mit den doppelt gezählten $\frac{4}{3}$ Kantenmittelpunkten des Polyeders (Ecken c unserer Teilung); also muß X_w ein volles Quadrat einer Form der Dimension $\frac{4}{3}$ sein:

$$X_w = (\chi_{4/3}(z_1, z_2))^2.$$

Endlich korrespondieren $w = \infty$ die Nullstellen von Y_w , und diese müssen daher identisch sein mit den Ecken der Ausgangspolyeders (Ecken a der Teilung); an diesen aber stoßen in den einzelnen Fällen 3, 4 oder 5 Dreiecke zusammen, so daß wir erhalten:

$$Y_w = (\psi_{v/3}(z_1, z_2))^r, \text{ wo } v = 3, 4 \text{ oder } 5.$$

Unsere Gleichung (2) muß also notwendig die Form haben:

$$(3) \quad w_1 : w_2 : w_3 = \varphi(z_1, z_2)^3 : \chi(z_1, z_2)^2 : \psi(z_1, z_2)^r,$$

wo die Gradzahlen und Exponenten von φ, χ, ψ und die Werte des Grades N der Gleichung aus folgender kleinen Tabelle hervorgehen:

Tetraeder: $\varphi_4^3, \chi_6^2, \psi_4^3; N = 12.$

Oktaeder: $\varphi_6^3, \chi_{12}^2, \psi_6^4; N = 24.$

Icosaeder: $\varphi_{20}^3, \chi_{30}^2, \psi_{12}^5; N = 60.$

Nun will ich noch kurz zeigen, daß sich auch die früher behandelte Dreiergleichung diesem Schema (3) einreihen läßt. Wir müssen uns bloß erinnern, daß wir damals auf der w -Kugel die 3 Verzweigungsstellen nach $-1, +1, \infty$ statt wie zuletzt nach $0, +1, \infty$ gelegt hatten, so daß wir wirkliche Analogie mit (3) erst erreichen, wenn wir die Dreiergleichung in die Form

$$w_1 + w_2 : w_1 - w_2 : w_3 = \Phi : X : Y$$



zu setzen versuchen. Man erhalten wir aber aus der früher benutzten Dieder-Gleichung (S. 265)

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{z_1^{2m} + z_2^{2m}}{z_1^m z_2^m + z_1^m z_2^m}$$

durch eine einfache Umkehrung

$$w_1 + w_2 : w_1 - w_2 : w_1 - (z_1^{2m} + z_2^{2m}) : (z_1^m z_2^m + z_1^m z_2^m) = (z_1^m z_2^m - z_1^{2m} z_2^m) : (z_1^m z_2^m + z_1^m z_2^m) \\ = (z_1^m + z_2^m)^2 : (z_1^m - z_2^m)^2 : 2(z_1 z_2)^m ;$$

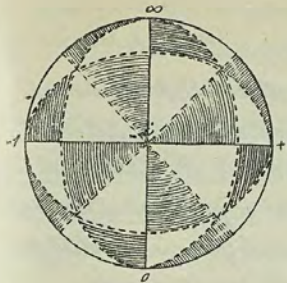
wir können also in der Tat der obigen Tabelle hinzufügen:

Dieder: $\varphi_m^i, \chi_m^i, \psi_m^i; \psi = 2m.$

Die aus dieser Form der Gleichung sofort abzulesenden merkwürdigen Punkte samt ihren Vielfachheiten stimmen mit den früher festgestellten (vgl. S. 266) überein.

Wir können nun daran, die Formeln φ, χ, ψ in den drei neuen Fällen wirklich zu berechnen. Ich will dabei näher nur auf das Oktaeder eingehen, wo sich die Verhältnisse am einfachsten gestalten, und auch hier aber werde ich, um im Rahmen eines kurzen Überblicks zu bleiben, manches bloß andeuten und in Resultaten mitteilen können; jedem, der sich darüber erfahren will, ist eine ausführliche Darstellung in meinem Buche über das Ikosaeder ja leicht zugänglich. Wir denken uns der Einfachheit halber das Oktaeder so der z -Kugel eingeschrieben, dass die 6 Ecken nach

$$z = 0, \infty, +1, +i, -1, -i$$



fallen. Dann lassen sich die 24 linearen Substitutionen von z , die die Drehungen des Oktaeders darstellen, d. h. die genannten 6 Punkte miteinander vertauschen, recht einfach angeben: Wir beginnen mit den 4 Drehungen, bei denen die Ecken 0 und ∞ fest bleiben:

$$(4^a) \quad z' = i^k z \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Weiter können wir, etwa durch die Substitution $z' = \frac{1}{z}$ (d. i. eine Drehung um die horizontale Achse $(+1, -1)$ durch 180° , die jeden Oktaedereckpunkt wieder in einen solchen überführt) den Punkt 0 nach ∞ bringen; wenn wir sodann noch die 4 Drehungen (4^a) an, so erhalten wir die 4 neuen Substitutionen:

$$(4^b) \quad z' = \frac{i^k}{z} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Ebenso werfen wir nun der Reihe nach jeden der weiteren 4 Eckpunkte $z = 1, i, -1, -i$ durch die Substitutionen $z' = \frac{z+1}{z-1}, \frac{z+i}{z-i}, \frac{z-1}{z+1}, \frac{z-i}{z+i}$, die ersichtlich gleichfalls die 6 Oktaederecken in einander überführen, nach ∞ und erhalten, wenn wir noch jedesmal wiederum die 4 Drehungen (4^a) darauf setzen, weitere 4 $\cdot 4 = 16$ Substitutionen des Oktaeders:



$$(4^c) \quad \left\{ \begin{array}{l} z^1 = i \frac{Kz-1}{z-1}, \quad z^1 = i \frac{Kz-1}{z+1}, \\ z^1 = i \frac{Kz+1}{z-1}, \quad z^1 = i \frac{Kz+1}{z+1} \end{array} \right. \quad (K=0, 1, 2, 3).$$

Damit haben wir sämtliche 24 gesuchten Substitutionen gefunden, und man kann nun auch direkt durch Rechnung bestätigen, einmal dass sie wirklich die 6 Oktaeder-
ecken in sich überführen, und dann, dass sie eine Gruppe G_{24} bilden, d. h. dass die Stufenanfolge zweier beliebiger von ihnen wieder eine der Substitutionen (4) ergibt.

Jede will nun zunächst die Form ψ_6 bilden, die in den 6 Oktaederecken einfach verschwindet: der Punkt $z=0$ gibt den Faktor z , $z=\infty$ den Faktor z_2 , an den 4 Stellen ± 1 und $\pm i$ verschwindet die Form $z^4 - z_2^4$ einfach, so dass wir schließlich erhalten:

$$(5^a) \quad \psi_6 = z \cdot z_2 (z^4 - z_2^4).$$

Schwieriger ist die Bildung der Formen φ_8 und χ_{12} , die die Werten der Seitenflächen bzw. die Kantenhalbierungspunkte in einfachen Nullstellen haben; ich gebe sie hier ohne Ableitung an¹⁾:

$$(5^b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_8 = z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8 \\ \chi_{12} = z_1^{12} - 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12} \end{array} \right.$$

Weniger bleibt natürlich in allen diesen 3 Formen ein konstanter Multiplikator unbestimmt. Bedenken $\varphi_8, \psi_6, \chi_{12}$ die Formen genau in der Formierung (5), so müssen wir¹⁾, vgl. Oktaeder, pag. 54.

daher in die Oktaedergleichung (3) noch unbestimmte Konstante c_1, c_2 hineinnehmen und sie schreiben:

$$w_1: w_2: w_3: w_4 = \varphi_8^3: c_1 \chi_{12}^2: c_2 \psi_6^4.$$

Wir müssen noch die c so bestimmen, dass diese zwei Gleichungen tatsächlich nur eine Gleichung zwischen z und w darstellen, und das ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$\varphi_8^3 - c_2 \psi_6^4 = c_1 \chi_{12}^2$$

identisch in z, z_2 gilt. Nun lässt sich diese Relation in der Tat durch Konstante c_1, c_2 erfüllen; es besteht nämlich, wie man durch Ausrechnen bestätigen kann, die Identität:

$$\varphi_8^3 - 108 \psi_6^4 = \chi_{12}^2,$$

so dass die Oktaedergleichung (3) lautet:

$$(6) \quad w_1: w_2: w_3: w_4 = \varphi_8^3: \chi_{12}^2: 108 \psi_6^4.$$

Diese Gleichung bildet gewiss die Punkte $w=0, 1, \infty$ bezüglich auf die Seitenmitten, Kantenmitten, Ecken des Oktaeders mit der richtigen Vielfachheit ab, da ja die Formen φ, χ, ψ entsprechend gebildet sind; ferner wird sie durch die 24 Oktaedersubstitutionen (4) in sich übergeführt, denn diese transformieren die Nullstellen jeder der Formen φ, χ, ψ in sich und ändern die Formen daher nur je um einen multiplikativen Faktor, und die Rechnung ergibt, dass bei der Quotientenbildung diese Faktoren



sich gerade wegheben.

Zu zeigen bleibt nur noch, daß die Gleichung wirklich jedes schraffierte oder nichtschraffierte Dreieck der \mathbb{R} -Kugel konform auf die hintere oder vordere w -Halbkugel abbildet. Wir wissen nun schon, daß den 3 Ecken eines jeden Dreiecks die Punkte $0, 1, \infty$ des reellen w -Horizontals entsprechen; ferner aber hat die Gleichung für jeden Wert von w 24 Wurzeln z , und da diese sich auf 24 gleichartige Dreiecke verteilen müssen, kann w innerhalb eines Dreiecks einen und denselben Wert höchstens einmal annehmen. Würden wir nun noch zeigen können, daß w längs der 3 Dreiecksseiten überhaupt reell bleibt, so kann man leicht weiter schließen, daß jede Seite auf ein Segment des reellen w -Horizontals eineindeutig abgebildet wird, und daß weiterhin das ganze Dreiecksinnere konform und eineindeutig auf die eine Halbkugel bezogen ist. Sie werden sich diese Schlußkette, bei der vorwiegend die Stetigkeit und Analytizität der abbildenden Funktion $w(z)$ benutzt wird, leicht selbst ausführen können. Ich will hier nur auf dem einzigen spezifischen Schritt des Beweises, dem Nachweis der Realität von w auf den Dreiecksseiten, eingehen.

Es ist bequemer, bald die Behauptung in der Form zu beweisen, daß w auf allen die Oktaederseite hervorruhenden größten Kreisen reell ist. Das sind nun erstens

die 3 aufeinander senkrechten Kreise durch je 4 der 6 Oktaedercken, die den Oktaederkanten entsprechen (Hauptkreise, in der Fig. S. 289 ausgezogen), und ferner die 6 den Höhen der Seitendreiecke entsprechenden Kreise, die die Winkel der Hauptkreise halbieren (Nebenkreise, in der Figur gestrichelt). Durch die Oktaedersubstitutionen läßt sich jeder Hauptkreis in jeden andern und ebenso jeder Nebenkreis in jeden andern überführen; es genügt also, zu zeigen, daß w auf einem Hauptkreise und einem Nebenkreise durchweg reell ist, da er auf dem andern dann genau dieselben Werte annehmen muß. — Nun befindet sich unter den Hauptkreisen der Horizontals der reellen Zahlen z , und auf diesem ist selbstverständlich der aus (6) zu entnehmende Wert

$$w = \frac{w_2}{w_1} = \frac{q_2^3}{108q_1^4}$$

reell, da q und ψ reelle Polynome in z , und z_2 sind. Von den Nebenkreisen bevorzugen wir ebenso den einen durch 0 und ∞ gehenden, der mit dem reellen Horizontals den Winkel 45° bildet und auf dem also z die Werte $z = e^{\pm \frac{i\pi}{4}}$ annimmt, wo r reell von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft; auf ihm ist jedenfalls $z^4 = e^{\pm i\pi} r^4 = -r^4$ reell, und da nach (5) in q_2 selbst und in die vierte Potenz von ψ_2 nur die vierten Potenzen von z , und z_2 eingehen, so ist nach der zuletzt benutzten Formel wiederum w reell.



Wir stehen damit am Ende unseres Beweisganges. Die Gleichung (6) bildet in der Tat die Halbchenen der α -Kugel bzw. einer über ihr ausgebreiteten Ramanuschen Fläche konform auf die zum Oktaeder gehörige Dreiecksteilung der α -Kugel ab, und wir beherrschen daher umgekehrt die durch diese Gleichung gegebene Abhängigkeit zwischen α und ω geometrisch so vollkommen, wie in den früheren Beispielen.

Die Behandlung des Tetraeders und Ikosaeders geht nach genau dem gleichen Gedankengange vor sich; ich gebe hier nur die Resultate an, die sich wiederum bei möglichster einfacher Lage der Teilung auf der α -Kugel ergeben. Oben erhält als Tetraedergleichung¹⁾:

$$\begin{aligned} w_1: w_2: w_3: w_4 &= \{z_1^4 - 2\sqrt{3}z_1^2z_2^2 + z_2^4\}^3 \\ &: -12\sqrt{3}\{z_1z_2(z_1^4 - z_2^4)\}^2 \\ &: \{z_1^4 + 2\sqrt{3}z_1^2z_2^2 + z_2^4\}^3 \end{aligned}$$

und als Ikosaedergleichung²⁾:

$$\begin{aligned} w_1: w_2: w_3: w_4 &= \{-(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228(z_1^{15}z_2^5 - z_1^5z_2^{15}) - 494z_1^{10}z_2^{10}\}^3 \\ &: -\{z_1^{20} + z_2^{20} + 522(z_1^{15}z_2^5 - z_1^5z_2^{15}) - 1005(z_1^{10}z_2^{10} + z_1^5z_2^{15})\}^2 \\ &: 1728\{z_1^{10}z_2^{10}(z_1^{10} + 11z_1^5z_2^5 - z_2^{10})\}^5, \end{aligned}$$

d. h. diese Gleichungen bilden die ω -Halbkugeln auf die schraffierten und nichtschraffierten Dreiecke der zum Tetraeder bzw. Ikosaeder gehörigen Einteilung der α -Kugel konform ab.

1) s. Ikosaeder, pag. 60. 57.

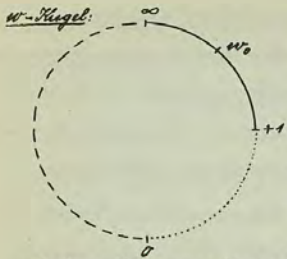
2) *loc. cit.* pag. 60. 56.

5. Über die Auflösung der Normalgleichungen.

Wir wollen nun weiterhin noch etwas von den gemeinsamen Eigenschaften der Gleichungen handeln, die wir bisher als Beispiele der vorab entwickelten allgemeinen Theorie diskutiert hatten, und die wir unter dem Namen Normalgleichungen zusammenfassen wollen. Natürlich kann ich auch hier die Sachlage immer nur an den einfachsten Fällen auseinandersetzen, indem ich für alles Weitergehende auf mein Ikosaederbuch verweise.

Zunächst bemerke ich, daß die äußerst einfache Natur aller unserer Normalgleichungen darin begründet ist, daß sie genau so viele lineare Substitutionen in sich besitzen, als ihr Grad beträgt, d. h. daß alle ihre Wurzeln lineare Funktionen einer einzigen von ihnen sind, und daß wir ferner in den Kugelteilungen ein äußerst anschauliches geometrisches Bild aller in Betracht kommenden Verhältnisse haben. Wie einfach sich dadurch vieles, was sonst bei Gleichungen so hohen Grades äußerst kompliziert liegt, gestaltet, will ich hier an einer bestimmten Fragestellung für die Ikosaedergleichung zeigen.

Es sei ein reeller Wert w_0 gegeben, etwa auf dem Segment $(1, \infty)$ des reellen w -Meridians, wir



fragen nach den 60 Wurzeln z der
 Ikosaedergleichung für $w = w_0$. Un-
 sere Theorie der Abbildung ergibt so-
 fort, daß je eine von ihnen auf einer
 der 60 entsprechenden (in der Fig. von
 S. 284 ausgezogenen) Dreiecksseiten der
 z -Kugelteilung liegen muß. Damit
 ist bereits das erledigt, was man in der Gleichungstheorie
 Separation der Wurzeln nennt und was meist eine sehr
 mühevolle Arbeit ist, die der numerischen Berechnung der
 Wurzeln vorangehen muß: die Aufgabe nämlich, getrennte
 Intervalle anzugeben, in denen sicher immer nur 1 Wur-
 zel liegt. - Wir können aber auch weiterhin sofort ange-
 ben, wieviele der 60 Wurzeln reell sind. Berücksichtigen
 wir nämlich, daß bei der oben angegebenen Form der Iko-
 saedergleichung das Ikosaeder so in die z -Kugel gelegt
 gedacht ist, daß der reelle Meridian über je 4 Ecken
 jeder Art a, b, c , läuft, so zeigt sich (vgl. Fig. S. 281 und
 S. 284), daß gerade 4 ausgezogene Dreiecksseiten in dem
 reellen Meridian fallen, so daß es gerade 4 reelle Wur-
 zeln gibt. Dasselbe gilt, wenn w in einer der andern
 beiden Gegenseite des reellen w -Meridians fällt, so
 daß überhaupt für jeder reelle w die Ikosaedergleichung
 4, vgl. Ikosaeder, pag. 55.

4 reelle und 56 imaginäre Wurzeln hat.

Ich will jetzt unger über die wirkliche numerische Be-
 rechnung der Wurzeln unserer Normalgleichungen sagen.
 Vor allem kommt uns da natürlich wieder zu Hilfe, daß
 wir immer nur 1 Wurzel der Gleichung zu berechnen
 brauchen, während die andern durch die linearen Sub-
 stituirten folgen. Übrigens mache ich darauf aufmerk-
 sam, daß die numerische Berechnung einer Wurzel
 eigentlich ein Problem der Analysis, nicht der Algebra
 ist, da sie notwendig die Anwendung unendlicher Pro-
 zesse erfordert, um die im allgemeinen irrationalen Wur-
 zelwerte mit beliebiger Annäherung darzustellen.

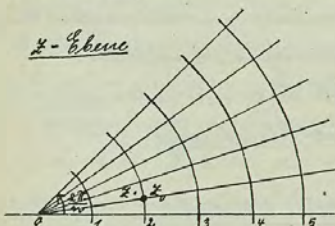
Ausführlicheres will ich hier nur über das ab-
 vereinfachte Beispiel, die reine Gleichung

$$w = z^n$$

sagen, wobei ich wieder in direktem Kontakt mit der Schul-
 mathematik komme, denn auch da wird diese Frage -
 die Berechnung von $\sqrt[n]{w}$ - wenigstens für die ersten Werte
 von n und für positive reelle Werte $w = r$ traktiert. Die
 Methode zur Berechnung der Quadrat- und Kubik-
 wurzel, wie sie Hansen allein von der Schule her ge-
 läufig ist, beruht im Grunde auf folgendem: Man un-
 tersucht, welchen Platz in der Reihe der Quadrate bzw.
 Kuben der ganzen natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... der Pa-

dekand $w = r$ hat, macht dann im Anschluss an die dekadiale Schreibweise dieselbe Probe mit den Zehnteln des best. Intervalles, dann mit den Hunderteln und, fährt so fort, wobei man natürlich eine beliebige Genauigkeit erreichen kann.

Wir wollen hier ein rationelleres Verfahren anwenden, bei dem wir außer beliebigen ganzzahligen n auch beliebige komplexe Werte von w zulassen. Da wir nur eine Lösung der Gleichung zu bestimmen brauchen, wollen wir speziell den Wert $z = \sqrt[n]{w}$ aufsuchen, der innerhalb des an die reelle Achse an-



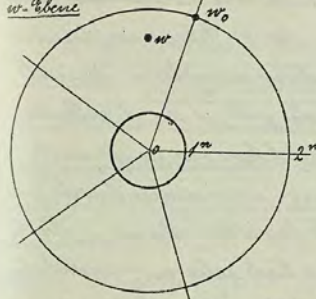
getragenen Winkelraumes $\frac{2\pi}{n}$ liegt. Wir beginnen - zunächst in genauer Verallgemeinerung der vorhin angedeuteten elementaren Methode - damit, daß wir diesen Winkelraum in etwa r gleiche Teile teilen (in der Figur $r = 5$) und die Teilungsgeraden mit den Kreisen um den Nullpunkt mit ganzzahligen Radien $n = 1, 2, 3, \dots$ schneiden. So werden bei einmal fest gewählten r innerhalb des Winkelraumes alle Punkte

$$z = r \cdot e^{\frac{2i\pi k}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r)$$

markiert, zu denen wir die entsprechenden w -Werte

$$w = z^n = r^n \cdot e^{2i\pi \frac{k}{n}}$$

sofort in der w -Ebene markieren können. Sie bilden dort die Ecken eines ähnlichen, aber die ganze w -Ebene bedeckenden Netzes, das aus den Kreisen mit den Radien $1, 2, 3, \dots$ sowie den gegen die reelle Achse um $0, \frac{2\pi}{r}, \frac{4\pi}{r}, \dots, \frac{(r-1)2\pi}{r}$ geneigten Strahlen besteht. Der gegebene Wert w muß nun in irgend einer Masche dieses Netzes liegen; es sei w_0 die ihm zunächst liegende Ecke dieser Masche. Einen Wert z_0 von $\sqrt[n]{w_0}$ kennen wir als eine Ecke des Ausgangsnetzes in der z -Ebene; dann ist der gesuchte Wurzelwert



$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{w_0 + (w - w_0)} = \sqrt[n]{w_0} \sqrt[n]{1 + \frac{w - w_0}{w_0}} = z_0 \left(1 + \frac{w - w_0}{w_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Die rechte Seite entwickeln wir nun nach dem Binomischen Satze, den wir ruhig als bekannt ansehen dürfen, da wir uns ja ohnehin im Grunde im Gebiet der Analysis befinden:

$$z = z_0 \left\{ 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{w - w_0}{w_0} + \frac{1 - n}{2n^2} \left(\frac{w - w_0}{w_0}\right)^2 + \dots \right\}$$

Über die Konvergenz dieser Reihe können wir sofort entscheiden, wenn wir sie als Taylorische Entwicklung der analytischen Funktion $\sqrt[n]{w}$ betrachten und den Satz anwenden, daß diese in dem Kreis um w_0 durch den nächsten singulären Punkt konvergiert. Da $\sqrt[n]{w}$ nur 0 und ∞ zu



singulären Punkten hat, ist also unsere Entwicklung dann und nur dann konvergent, wenn w innerhalb des Kreises um w_0 durch den Willkürpunkt liegt, und das können wir jedenfalls erreichen, indem wir weit in der z -Ebene von einem ähnlichen Polze mit engeren Wurzeln ausgehen. Damit aber die Konvergenz auch wirklich gut, d. h. die Reihe zur numerischen Berechnung brauchbar sei, muß noch obendrein $\frac{w-w_0}{w_0}$ klein genug sein, was man durch weitere Vorengerung des Kreises gewiß bewirken kann. - Der Verfahren empfiehlt sich in der Tat sehr zur wirklichen Ausführung der numerischen Wurzelberechnung.

Nur ist das Bemerkenswert, daß sich die numerische Auflösung der weiteren Normalgleichungen der regulären Körper durchaus nicht wesentlich schwieriger gestaltet, wie ich freilich hier nur als Tatsache berichten will. Wendet man nämlich genau das oben auseinandergesetzte Verfahren auf unsere Normalgleichungen an, indem man vor der Abbildung zweier benachbarter Dreiecke auf die w -Kugel ausgeht, so treten an Stelle der binomischen Reihe andere Reihen auf, die jedoch in der Analysis gleichfalls wohlbekannt und dem praktischen Gebrauche leicht zugänglich sind: nämlich die hypergeometrischen Reihen. Ich habe selbst im Jahre 1874 in einer Arbeit in Bd. XII der mathem. Annalen

(„Weitere Untersuchungen über die Theorie des Kosäeders“, pag. 375) die hier in Betracht kommenden Reihen numerisch aufgestellt.

6. Uniformisierung der Normalgleichungen durch transcendente Funktionen.

Ich will nun noch auf eine andere Methode zur Lösung unserer Normalgleichungen eingehen, die durch das systematische Hineinziehen transcendenter Funktionen charakterisiert ist. Man versucht nämlich, statt in jedem Einzelfalle mit Reihenentwicklungen in der Umgebung einer bekannten Lösung vorzugehen, sämtliche der Gleichung genügende Wertepaare w, z einfach alle Male als eindeutige analytische Funktionen einwählbarveränderlichen darzustellen, oder - wie man sagt - die Gleichung zu uniformisieren. Gelingt es nun dabei Funktionen zu verwenden, die man leicht tabulieren kann oder von denen man gar schon numerische Tafeln besitzt, so kann man die numerische Lösung der Gleichung ohne neue Rechenarbeit erhalten. Ich gehe auf dieser Eingreifen der transcendente Funktionen nun so lieber ein, als es in einigen Fällen in den Schulunterricht hineinspielt und dort häufig noch einen unklaren, fast mysteriösen Charakter behält; der Grund dafür liegt darin, daß



man noch immer an altüberlieferten, unvollkommenen Auffassungen auch da haftet, wo die moderne Funktionentheorie komplexer Variabler längst Klarheit geschaffen hat.

Ich will diese allgemeinen Andeutungen nun zunächst wieder an der reinen Gleichung näher ausführen. Sie wissen, daß man schon auf der Schule die positive Lösung von $x^n = r$ für positives reelles r stets logarithmisch berechnet, indem man sie in der Gestalt $x = e^{\frac{\log r}{n}}$ schreibt, unter $\log r$ den positiven Hauptwert versteht; die Logarithmentafel ergibt zuerst diesen Wert, dann in umgekehrter Richtung x als „Kumens“ zu $\frac{\log r}{n}$, übrigens benutzt man bekanntlich statt e gewöhnlich 10 als Basis. Diese Lösung überträgt sich allgemein sofort auch auf komplexe Werte: Man befriedigt die Gleichung

$$x^n = w,$$

indem man x gleich dem allgemeinen komplexen Logarithmus $\log w$ setzt, und dann tatsächlich w und x als eindeutige analytische Funktionen von x erhält:

$$w = e^{nx}, \quad x = e^{\frac{w}{n}}.$$

Hierbei kommen in Betracht der Vieldeutigkeit von $x = \log w$ - wir werden später noch genauer von dieser Funktion zu reden haben - für dasselbe w

in der Tat genau n Werte x heraus. x nennt man die uniförmigere Variable.

Nun enthalten unsere Tafeln aber nur die reellen Logarithmen reeller Zahlen, so daß die angegebene Lösung sich unmittelbar numerisch nicht verwerten läßt. Man kann aber mit Hilfe einiger einfacher Eigenschaften des Logarithmus die Berechnung auf die Herleitung der jedem zugänglichen trigonometrischen Tafeln reduzieren. Setzt man nämlich

$$w = u + iv = \sqrt{u^2 + v^2} \left(\sqrt{\frac{u}{u^2 + v^2}} + i \sqrt{\frac{v}{u^2 + v^2}} \right),$$

so hat der erste Faktor als positive reelle Zahl einen reellen, der zweite als Größe vom absoluten Betrage 1 bekanntlich einen rein imaginären Logarithmus $i\varphi$ (d. h. er ist gleich $e^{i\varphi}$), und zwar ergibt sich φ aus

$$(a) \quad \sqrt{\frac{u}{u^2 + v^2}} = \cos \varphi, \quad \sqrt{\frac{v}{u^2 + v^2}} = \sin \varphi.$$

Wir erhalten also $x = \log w = \log \sqrt{u^2 + v^2} + i\varphi$, und daher wird die Wurzel der Gleichung

$$x = e^{\frac{w}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log \sqrt{u^2 + v^2}} \cdot e^{\frac{i}{n} \varphi}, \quad \text{d. h. es ist}$$

$$(b) \quad x = \sqrt[n]{u + iv} = e^{\frac{1}{n} \log \sqrt{u^2 + v^2}} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right).$$

Da φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist, liefert diese Formel auch sämtliche n Wurzelwerte. Man kann nun mit Hilfe der gewöhnlichen Logarithmen und trigonometrischen Tafeln zunächst φ aus (a) und sodann nach (b) x bestimmen. Wir haben



diese „trigonometrische Lösung“ hier auf ganz natürlichen Wege von den Logarithmen komplexer Zahlen aus erhalten, steht man aber auf dem Standpunkte, daß es solche nicht gibt, und will doch diese trigonometrische Lösung ableiten – auf der Schule schlägt man diesen Weg ein –, so muß sie als etwas durchaus Fremdartiger und Unverständlicher erscheinen.

Man ergibt sich besonders an einer Stelle der Schulunterrichts die Notwendigkeit, Wurzeln aus nichtreellen Zahlen zu ziehen, und zwar bei der sog. Cardanischen Lösung der Gleichung dritten Grades; darüber schalte ich hier gerne einige Bemerkungen ein. Ist die kubische Gleichung in der reduzierten Form vorgelegt:

$$(1) \quad x^3 + px - q = 0,$$

so sagt die Formel der Cardanus bekanntlich aus, daß ihre 3 Wurzeln x_1, x_2, x_3 in folgendem Ausdruck enthalten sind:

$$(2) \quad x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Da jede Kubikwurzel dreiwertig ist, hat dieser Ausdruck an sich 9 im allgemeinen verschiedene Werte; darunter sind x_1, x_2, x_3 dadurch bestimmt, daß das Produkt der beiden in ihnen verwendeten Kubikwurzeln $-\frac{q}{3}$ ist. Ersetzt man nun die Gleichungskoeffizienten p, q in bekannter Weise durch ihre Ausdrücke als symmetrische

Funktionen von x_1, x_2, x_3 und berücksichtigt, daß der Koeffizient von x^2 verschwindet, d. h. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ist, so erhält man:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2}{108},$$

d. h. der Radikand der Quadratwurzel ist hier auf einen negativen Faktor gleich der Diskriminante der Gleichung. Hieraus ergibt sich sofort, daß er negativ ist, wenn alle 3 Wurzeln reell sind, positiv jedoch nur, wenn eine Wurzel reell und die beiden anderen konjugiert komplex sind. Gerade in dem auscheinend einfachsten Falle einer kubischen Gleichung, mit durchweg reellen Wurzeln verlangt die Cardanische Formel also das Sturzziehen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl und sodann einer Kubikwurzel aus einer komplexen Größe.

Dieser Durchgang durch das Komplexe mußte den alten Algebristen zu einer Zeit, wo man noch weit von einer Theorie der komplexen Zahlen entfernt war – 150 Jahre, bevor Gauß die Deutung in der Zahlenebene lehrte! – natürlich als etwas ganz Unmögliches erscheinen. Man sprach von „Casus irreducibilis“ der kubischen Gleichung und sagte, daß hier eben die Cardanische Formel keine vernünftige, brauchbare Lösung mehr gebe. Und als man später entdeckte, daß man



gerade in diesem Falle die kubische Gleichung in einen einfachen Zusammenhang mit der Winkeldreiteilung bringen können und so als Ersatz für die „versagende“ Cardanische Formel eine ganz im Reellen verlaufende „trigonometrische Lösung“ erhielt, da glaubte man etwas ganz Neues, gar nicht mit der alten Formel zusammenhängendes gefunden zu haben. Auf diesem Standpunkte steht leider heute noch im allgemeinen der elementare Unterricht!

Tun gegenüber möchte ich hier nachdrücklich betonen, daß diese trigonometrische Lösung nichts ist, als die Anwendung des vorhin auseinandergesetzten allgemeinen Verfahrens zur Berechnung der Wurzeln aus komplexen Radikanden. Sie ergibt sich also in naturgemäßer Weise, wenn man die Cardanische Formel bei komplexen Radikanden der Kubikwurzel ebenso zur numerischen Rechnung bequem zurecht macht, wie man es bei reellen auch auf der Schule stets tut. Im einzelnen gestaltet sich das so: Wir nehmen also an

$$\frac{q}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

wenn insbesondere $p < 0$ nötig ist. Schreiben wir dann die erste in (2) eingehende Kubikwurzel:

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}},$$

so bemerken wir, daß ihr absoluter Betrag (als positive Ku-

bikwurzel aus dem Betrage $\sqrt{-\frac{p^3}{27}}$ des Radikanden) gleich $|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}|$ ist, da aber ihr Produkt mit der zweiten Kubikwurzel gerade gleich $-\frac{p}{3}$ sein soll, so muß diese in jedem Falle ihr konjugiert komplexer Wert sein, und beider Summe - die Lösung der kubischen Gleichung - ist daher einfach gleich ihrem doppelten reellen Teil:

$$x_1, x_2, x_3 = 2 \operatorname{Re} \left(\sqrt[3]{\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \right)$$

Nun wenden wir genau das allgemeine Verfahren von S. 303 an. Wir schreiben den Radikanden der Kubikwurzel unter Abtrennung des absoluten Betrages

$$\sqrt[3]{\frac{p^3}{27}} \left\{ \frac{\frac{q}{2}}{|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}|} + i \frac{|\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}|}{|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}|} \right\}$$

und bestimmen φ aus den Gleichungen

$$\cos \varphi = \frac{\frac{q}{2}}{|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}|}, \quad \sin \varphi = \frac{|\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}|}{|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}|},$$

dann wird die Kubikwurzel, da die positive dritte Wurzel aus $|\sqrt{-\frac{p^3}{27}}|$ gleich $|\sqrt{-\frac{p}{3}}|$ ist:

$$|\sqrt{-\frac{p}{3}}| \cdot (\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3}),$$

und wir erhalten daher, wenn wir noch berücksichtigen, daß φ nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist:

$$x_k = |\sqrt{-\frac{p}{3}}| \cdot \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{3} \quad (k=0, 1, 2).$$

Das ist aber genau die übliche Form der trigonometrischen Lösung.



Gestatten Sie bei dieser Gelegenheit noch eine Bemerkung über den Ausdruck „casus irreducibilis“. Hier ist „irreducibilis“ in ganz anderem Sinne gebraucht, als es heute üblich ist und als wir es in dieser Vorlesung schon öfters gebraucht haben; es soll besagen, daß die Lösung der kubischen Gleichung nicht auf Kubikwurzeln reeller Zahlen zurückführbar ist - was mit der modernen Bedeutung des Wortes nicht das mindeste zu tun hat. Sie sehen, wie gerade auf diesem Gebiete durch die unglückselige Bezeichnung sowohl wie durch die allgemeine Furcht vor den komplexen Zahlen für eine Menge von Mißverständnissen zum mindesten die Möglichkeit geschaffen wird. Mögen meine Worte dazu beitragen, sie wenigstens in Ihren Kreisen zu verhüten!

Orientieren wir uns nun noch in aller Kürze darüber, wie sich die Uniformisierung durch transzendenten Funktionen bei den weiteren Formelgleichungen gestaltet. Zunächst die Diedergleichung:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w.$$

Hier haben wir einfach zu setzen:

$$w = \cos \varphi,$$

damit die Gleichung - wie sich sofort aus der Moirreschen Formel ergibt - identisch befriedigt wird durch

$$z = \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}.$$

Für alle Werte $\varphi + 2k\pi$ und $2k\pi - \varphi$ denselben Wert w ergeben, liefert diese Formel in der Tat zu jedem w $2n$ Wurzeln z , die wir auch schreiben können:

$$z = \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Bei den Gleichungen des Oktaeders, Tetraeders, Icosaeders endlich reicht man mit diesen „elementaren“ transzendenten Funktionen nicht mehr aus, wohl aber läßt sich eine ganz analoge Lösung durch elliptische Modulfunktionen geben. Obgleich man das nicht mehr zur elementaren Mathematik rechnen kann, will ich doch für das Icosaeder wenigstens die bezüglichen Formeln angeben; sie stehen nämlich in engster Beziehung zu der Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch elliptische Funktionen, von der in den Lehrbüchern immer andeutungsweise die Rede ist, und über die ich so dann noch einige aufklärende Worte sagen will. Die Icosaedergleichung hatte die Form (vgl. S. 294)

$$w = \frac{q_{20}(z)^3}{q_{12}(z)^5}.$$

Wir identifizieren nun w mit der absoluten Invariante J aus der Theorie der elliptischen Funktionen und fassen diese als Funktion des Periodenquotienten $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ (in Fuchs'scher Bezeichnung $\frac{iK'}{K}$) auf, d. h. wir setzen:

$$w = J(\omega) = \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)},$$

wo g_2 und Δ gewisse eine große Rolle spielende transzen-



denen Formeln (-4)ten bzw. (-12)ten Dimension in ω_1 und ω_2 sind. Führen wir noch die allgemein benutzte Abkürzung Jacobis

$$q = e^{i\pi\omega} = e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}}$$

ein, so werden die Wurzeln z der Ikosaedergleichung durch folgenden Quotienten von \mathcal{D} -Funktionen dargestellt:

$$z = -\frac{\frac{1}{2}\mathcal{D}_2(\pi\omega, q^5)}{\mathcal{D}_2(\pi\omega, q^5)}$$

Berücksichtigt man die Unendlichvielfachigkeit der aus der ersten Gleichung sich ergebenden Funktion w (ω), so zeigt sich, daß diese Formel zu ein und demselben w in der Tat gerade alle 60 Wurzeln der Ikosaedergleichung liefert. Natürlich kann man diese bei Verwendung einer bestimmten Werte von w auch erhalten, indem man auf dem letzten Ausdruck die 60 Ikosaedersubstitutionen anwendet. So ist also z. B.

$$z' = -\frac{1}{z} = q \frac{\frac{1}{2}\mathcal{D}_2(\pi\omega, q^5)}{\mathcal{D}_2(\pi\omega, q^5)}$$

gleichfalls eine richtige Lösung unserer Gleichung. Auf diese Formel, die Schreibers gelegentlich benützt, kommt Herr Worgeustern in seiner kürzlich erschienenen Dissertation ¹⁾ zu sprechen und behauptet, meine Formel für z sei dementsgegen falsch, während doch eben aus den Grundeigenschaften der Ikosaedergleichung gerade folgt,

1) Beiträge zur numerischen Lösung der Gleichungen 5. Grades. (Halle 1907), pag. 44. 45.

daß beide Formeln für z und z' entweder gleichzeitig richtig oder gleichzeitig falsch sein müssen.

7. Auflösbarkeit durch Wurzelzeichen.

Eine Frage in der Theorie der Normalgleichungen habe ich bisher noch nicht berührt. Bringen unsere Normalgleichungen denn überhaupt algebraisch etwas wesentlich Neues, und lassen sie sich nicht aufeinander oder insbesondere auf eine Folge reiner Gleichungen zurückführen? Mit anderen Worten: Kann man die Lösung z der Gleichungen etwa durch eine endliche Anzahl übereinandergestellter Wurzelzeichen aus w aufbauen?

Was nun zunächst die Gleichungen der Dieder-, Tetraeders-, Oktaeders anlangt, so läßt die algebraische Theorie in der Tat leicht erkennen, daß man sie auf reine Gleichungen reduzieren kann. Es mag genügen, wenn ich das hier nur für die Diedergleichung ausführe:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2w.$$

Setzt man nämlich

$$z^n = f,$$

so geht die Gleichung über in

$$f^2 - 2wf + 1 = 0;$$

hieraus folgt sofort

$$f = w \pm \sqrt{w^2 - 1}, \text{ und daher} \\ z = \sqrt[n]{w \pm \sqrt{w^2 - 1}},$$



womit die gewünschte Lösung durch Wurzelzeichen gelungen ist.

Demgegenüber ist für die Khosadergleichung eine solche Auflosung durch Wurzelzeichen nicht möglich, so daß durch sie also eine wesentlich neue algebraische Funktion definiert wird. Ich will Ihnen dafür einen besonders anschaulichen Beweis vortragen, den ich neuerdings in Bd. 61 der Heathen. Annalen angegeben habe,¹⁾ und der auf der Betrachtung des uns ja wohlbekannten funktionentheoretischen Aufbaues der Khosaderfunktion $\xi(w)$ beruht. Ich brauche dabei aus der Algebra nur folgenden bekannten Hilfssatz von Abel voraussetzen, dessen Beweis Sie in jedem Lehrbuche der Algebra nachlesen können: Läßt sich eine algebraische Gleichung durch eine Folge von Wurzelzeichen auflösen, so ist jede auftretende Wurzelgröße als rationale Funktion sämtlicher n Wurzeln der Ausgangsgleichung darstellbar.

Wenden wir das nun speziell auf die Khosadergleichung an! Angenommen, ihre Wurzel ξ sei durch eine Folge von Wurzelzeichen aus rationalen Funktionen der Gleichungskoeffizienten, d. h. aus rationalen Funktionen

¹⁾ pag. 389-391: „Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Khosadergleichung durch Wurzelzeichen.“

von w darstellbar - wir wollen zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt -, so ist also jede auftretende Wurzelgröße gleich einer rationalen Funktion der 60 Wurzeln:

$$R(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{60}).$$

Da aber alle Wurzeln der Khosadergleichung aus irgend einem ξ von ihnen durch lineare Substitutionen hervorgehen, so können wir für diesen letzten Ausdruck auch einfach eine rationale Funktion $R(\xi)$ von ξ allein setzen. Betrachten wir nun diesen $R(\xi)$ als Funktion von w , indem wir für ξ die 60-wertige Khosaderfunktion $\xi(w)$ eingesetzt denken. Da jeder Umlauf in der w -Ebene, der ξ zu seinem Ausgangswert zurückführt, notwendig auch $R(\xi)$ wieder in seinen Ausgangswert überführt, kann R nur an den Stellen $w = 0, 1, \infty$ verzweigt sein, wo $\xi(w)$ es ist, und die Anzahl der an jeder dieser Stellen jedesmal im Zyklus zusammenhängenden Blätter der Riemannschen Fläche von $R(\xi(w))$ muß ein Teiler der entsprechenden Anzahl für $\xi(w)$ sein, die, wie wir wissen, an den drei Stellen bezüglich gleich 3, 2, 5 ist. Jede rationale Funktion $R(\xi)$ einer Khosaderwurzel und damit jede in der angenommenen Auflosung auftretende Wurzelgröße kann also als Funktion von w betrachtet, wenn überhaupt, so nur an den Punkten $w = 0, w = 1, w = \infty$ verzweigt sein, und



zwar müssen gegebenenfalls bei 0 immer 3 Blätter, bei 1 immer 2 und bei ∞ immer 5 Blätter ihrer Nennnummern Fläche zusammenhängen, der 3, 2, 5 außer 1 keine anderen Teiler haben.

Gegen diesen Satz wollen wir nun einen Widerspruch herleiten, indem wir die innerste Wurzelgröße betrachten, die in dem hypothetisch angewonnenen Ausdruck für unser $\xi(w)$ auftritt. Sie muß jedenfalls aus einer rationalen Funktion $P(w)$ gezogen sein, und wir können ihren Exponenten als Primzahl p voraussetzen, da wir jede andere Wurzelgröße sofort aus solchen mit Primzahlexponenten aufbauen können. Überdies darf $P(w)$ keine p -te Potenz einer rationalen Funktion $q(w)$ von w sein, denn sonst wäre unsere Wurzelgröße überhaupt überflüssig, und wir könnten unsere Betrachtungen auf das nächste wirklich notwendige Wurzelzeichen beziehen.

Wir wollen nun ansehen, was für Verzweigungen dies $\sqrt[p]{P(w)}$ besitzen kann; dazu ist es am bequemsten homogen zu schreiben:

$$P(w) = \frac{g(w_1, w_2)}{h(w_1, w_2)},$$

wo g, h Formen gleicher Dimension der homogenen Variablen w_1, w_2 ($w = \frac{w_1}{w_2}$) sind. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra können wir g und h in Linearfaktoren spalten und finden:

$$P(w) = \frac{L^{\alpha} m^{\beta} w^{\gamma} \dots}{L'^{\alpha'} m'^{\beta'} w'^{\gamma'} \dots},$$

wo wegen der Gleichheit der Dimensionen von Zähler und Nenner

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = \alpha' + \beta' + \gamma' + \dots$$

ist. Wir können sicher nicht alle Exponenten $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ durch p teilbar sein, da sonst P eine volle p -te Potenz wäre, da ferner die Summe $\alpha + \beta + \dots - \alpha' - \beta' - \dots$ gleich Null und daher durch p teilbar ist, kann nicht bloß eine dieser Zahlen nicht durch p teilbar sein, sondern mindestens 2 müssen diese Eigenschaft haben. Die Nullstellen der entsprechenden Linearfaktoren müssen also sicherlich beider solche Verzweigungsstellen von $\sqrt[p]{P(w)}$ sein, an denen immer je p Blätter im Zyklus zusammenhängen. Damit ist aber der Widerspruch mit dem zuerst ausgesprochenen Satz gewonnen, der ja für $\sqrt[p]{P(w)}$ gleichfalls gelten muß: Denn dort haben wir ja alle möglichen Verzweigungen aufgezählt, und unter ihnen sind nicht 2 mit der gleichen Sturzahl zusammenhängender Blätter enthalten. Also war unsere Annahme falsch, und die Kosadergleichung ist jedenfalls durch Wurzelziehen nicht lösbar.

Dieser Beweis beruht wesentlich darauf, daß die für das Kosader charakteristischen Zahlen 3, 2, 5 keine gemeinsamen Teiler haben. Lovie nämlich ein solcher



gemeinsamer Teiler auftritt, wie etwa bei den Zahlen $3, 2, 4$ des Oktaeders, sind sofort rationale Funktionen $P(x(w))$ möglich, die an 2 Stellen gleichartige Verzweigung aufweisen, z. B. eine solche mit je 2 zusammenhängenden Blättern bei 1 und ∞ , und diese sind dann wirklich als Wurzeln aus einer rationalen Funktion $P(w)$ darstellbar. So kommt beim Oktaeder und ebenso beim Tetraeder (mit den Zahlen $3, 2, 3$) und beim Dieder ($2, 2, n$) die Auflösbarkeit durch Wurzelzeichen zu Stande.

Fels möchte hier allgemein darauf hinweisen, wie wenig der in weiten mathematischen Kreisen herrschende Sprachgebrauch mit den Fortschritten der Erkenntnis Schritt hält. Man gebraucht heute das Wort „Wurzel“ fast allgemein in zweierlei Sinne: einmal für die Lösung jeder algebraischen Gleichung und dann prägnant für die Lösung einer reinen Gleichung. Dieser Missbrauch stammt natürlich noch aus der Zeit, wo man sich nur mit reinen Gleichungen beschäftigte; heute ist er, wenn nicht geradezu schädlich, so doch zum mindesten recht unbequem; nehmen Sie nur die Formulierung, daß die „Wurzeln“ einer Gleichung nicht durch „Wurzelzeichen“ darstellbar sind. Wesentlich mehr zu Mißverständnissen Anlaß gibt wohl eine andere aus

den Anfängen der Algebra noch häufig gebliebene Bezeichnung, daß man nämlich algebraische Gleichungen, die nicht durch Wurzelzeichen lösbar, d. h. nicht auf reine Gleichungen reduzierbar sind, „nicht algebraisch lösbar“ nennt. Das steht zu der modernen Bedeutung des Wortes „algebraisch“ in schärfstem Widerspruche. Heute muß man algebraisch lösbar eine Gleichung dann nennen, wenn man sie auf eine Kette möglichst einfacher Gleichungen zurückführen kann, bei denen man die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern, den Zusammenhang der verschiedenen Wurzelwerte untereinander et. c. so vollständig beherrscht, wie man das von altersher bei der reinen Gleichung tut; reine Gleichungen aber brauchen das durchaus nicht zu sein. In diesem Sinne werden wir die Kwadratergleichung als durchaus algebraisch lösbar bezeichnen können, denn unsere ganzen Darlegungen zeigten ja, daß wir ihre Theorie in einer allen Ansprüchen genügenden Weise ausbauen können. Daß sie mit Wurzelzeichen nicht lösbar ist, verleiht ihr vielleicht ein ganz besonderes Interesse, da sie so als geeignete Normalgleichung erscheint, auf die man weitere Gleichungen zurückzuführen versucht wird, um so auch ihre Lösung vollständig zu beherrschen.



Diese letzte Bemerkung führt uns nun zu dem letzten Abschnitt dieses Kapitels, in dem wir einen Überblick über solche Zurückführungen gewinnen wollen.

5. Zurückführung allgemeiner Gleichungen auf die Normalgleichungen.

Es zeigt sich nämlich, daß man die allgemeinste Gleichung

3. Grades auf die Triedergleichung für $n = 3$,

4. Grades auf die Tetraeder- oder Oktaedergleichung,

5. Grades auf die Kuboctaedergleichung

zurückführen kann. Dies Resultat ist der neueste Triumph der regulären Körper, die ja seit dem Beginn der mathematischen Geschichte immer wieder eine wichtige Rolle gespielt haben.

Um Ihnen den Sinn meiner allgemeinen Behauptung näher zu bringen, will ich sie im einfachsten Falle, für die Gleichung dritten Grades etwas eingehender ausführen, ohne indessen die Formeln vollständig zu beweisen. Wir setzen die kubische Gleichung wieder in der reduzierten Form voraus:

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0.$$

Sind x_1, x_2, x_3 ihre Lösungen, so suchen wir eine solche rationale Funktion z von ihnen zu bilden, die bei

den 6 Vertauschungen dieser 3 Größen gerade die 6 linearen Substitutionen der Trieder für $n = 3$ erleidet, d. h. die Werte

$$z, \varepsilon \cdot z, \varepsilon^2 \cdot z, \frac{1}{z}, \frac{\varepsilon}{z}, \frac{\varepsilon^2}{z} \quad (\text{wobei } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}})$$

annimmt; man sieht leicht, daß

$$(2) \quad z = \frac{x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3}{x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3}$$

diesen Bedingungen genügt. Die Triederfunktion $z^3 + \frac{1}{z^3}$ dieser Größe, muß also bei allen Vertauschungen der x_i un- geändert bleiben, da sie die 6 linearen Substitutionen der z un- geändert lassen; sie ist also eine bekannte Tatsache der Algebra zufolge als rationale Funktion der Koeffizien- ten von (1) darstellbar, und zwar ergibt die Rechnung:

$$(3) \quad z^3 + \frac{1}{z^3} = -27 \frac{q^2}{p^3} - 2.$$

Hat man nun aber umgekehrt diese Triedergleichung gelöst und ist z eine ihrer Wurzeln, so kann man aus (2) mit Hilfe der bekannten Relationen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -p, \quad x_1 x_2 x_3 = -q$$

die 3 Werte x_1, x_2, x_3 rational durch z, p, q ausdrücken, und zwar findet man:

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{2q}{p} \cdot \frac{z(1+z)}{1+z^3}, \\ x_2 = -\frac{3q}{p} \cdot \frac{\varepsilon z(1+\varepsilon z)}{1+z^3}, \\ x_3 = -\frac{3q}{p} \cdot \frac{\varepsilon^2 z(1+\varepsilon^2 z)}{1+z^3} \end{cases}$$

Sowie man also die Triedergleichungen (3) gelöst hat, geben



diese Formeln unmittelbar die Lösung der Kubischen Gleichung (4).

Gaux ähnlich läßt sich nun die Reduktion der allgemeinen Gleichung vierten und fünften Grades gestalten. Die Gleichungen werden natürlich etwas länger, aber prinzipiell nicht schwieriger; neu ist nur, daß der Parameter in der Normalgleichung, der soeben sich rational durch die Gleichungskoeffizienten ausdrückte ($2w = -27 \frac{q}{p} - 2$) noch Quadratwurzeln enthält. Sie finden diese Theorie für die Gleichung fünften Grades bzw. das Icosaeder ganz ausführlich im 2. Teile meiner Vorlesungen über das Icosaeder dargestellt und zwar so, daß nicht etwa bloß die Formeln berechnet werden, sondern immer die inneren Gründe für das Zustandekommen der Gleichungen hervorgekehrt werden.

Lassen Sie mich endlich noch ein Wort über die Stellung dieser Entwicklungen zu der gewöhnlich gegebenen Theorie der Gleichungen 3^{ten}, 4^{ten}, 5^{ten} Grades sagen. Was zunächst die gewöhnlichen Lösungen der Kubischen und biquadratischen Gleichung angeht, so kann man sie aus unsern Formeln natürlich durch geeignete Umrechnungen erhalten, wenn man die Lösung der Gleichungen des Diederers, Oktaeders, Tetraeders durch Wurzelzeichen benutzt. Bei den Gleichungen fünften Grades aber be-

schränkt man sich in den Lehrbüchern leider meist auf die Feststellung des negativen Resultates, daß man sie durch eine Folge von Wurzelzeichen nicht lösen kann, und dann kommt dann allenfalls noch die dunkle Andeutung, daß die Lösung durch elliptische Funktionen - genau müßte es heißen: „elliptische Modulfunktionen“ - möglich wird. Ich möchte an dieser Darstellung tadeln, daß sie eine ganz schiefe Gegenüberstellung gibt und das wahre Verständnis der Sachlage eher hindert, als fördert. In der That muß es, wie wir auf Grund des jetzt gewonnenen Überblickes resumieren können, so heißen, wenn wir einen algebraischen und analytischen Teil unterscheiden:

1, Die allgemeine Gleichung 5. Grades läßt sich zwar nicht auf reine Gleichungen zurückführen, wohl aber gelingt - und das ist das eigentliche Problem der algebraischen Lösung - ihre Reduktion auf die Icosaedergleichung als einfachste Normalgleichung.

2, Die Icosaedergleichung ihrerseits läßt sich durch elliptische Modulfunktionen lösen, und das ist das zur numerischen Berechnung verwendbare völlige Analogon der Lösung reiner Gleichungen mit Logarithmen. Damit ist die vollständige Lösung des Problems der Gleichung 5. Grades gegeben, man darf eben nur, wenn etwas auf dem gewöhnlichen Wege nicht geht, nicht bald



renigieren und bei der Feststellung der Unmöglichkeit bleiben, sondern man muß nur das richtige Ende finden, an dem sich die Sache aufassen und weiter fördern läßt. Der mathematische Gedanke als solcher hat nie ein Ende, und sagt Ihnen jemand, meine Herren, daß an einer Stelle das mathematische Verständnis aufhört, so seien Sie überzeugt, daß da die eigentlich interessante Fragestellung mit einemmal aufhört.

Und so möge zum Schluss noch angedeutet sein, daß diese Theorien mit der Gleichung fünften Grades nicht etwa aufhören; man kann vielmehr auch für Gleichungen sechsten und höheren Grades ganz analoge Entwicklungen aufstellen, wenn man nur reguläre Körper in höheren Dimensionen horausieht. Wollen Sie darüber sich näher orientieren, so mögen Sie meine Arbeit „Über die Auflösung der allgemeinen Gleichung 5. und 6. Grades“ (Zer. v. f. reine u. angew. Math. 129 [1905], pag. 157 ff. und Math. Ann. 61, pag. 50 ff. - 1905) einsehen.

Dritter Hauptteil: Analysis.

Wir wollen uns nun in der zweiten Hälfte des Semesters damit beschäftigen, einzelne von unserem Hauptpunkte aus wichtige Kapitel der Analysis ähnlich zu behandeln, wie im vorhergehenden die Arithmetik und Algebra. Das wichtigste wird sein, daß wir von den elementaren transzendenten Funktionen reden, die ja im Schulunterricht eine große Rolle spielen: der Exponentialfunktion bzw. dem Logarithmus und den trigonometrischen Funktionen; beginnen wir mit dem ersten!

I. Logarithmus und Exponentialfunktion.

Zunächst möchte ich Ihnen an den Ihnen allen bekannten Gang der Schule und seine Fortsetzung erinnern, der sich der sog. algebraischen Analysis anschließt.

1. Systematik der algebraischen Analysis.

Man geht da von der Potenz $a = b^x$ aus und nimmt die bekannte Heigerung von ganzzahlig positivem Exponenten x zu ganzzahlig negativem und schließlich



zur gebrochenen c vor; damit ist auch der Begriff der Wurzel dem allgemeinen Potenzbegriff zugeordnet. Ohne auf das Potenzen näher einzugehen, will ich nur die Multiplikationsregel hervorheben:

$$b^a \cdot b^{a'} = b^{a+a'}$$

die die Multiplikation zweier Zahlen auf die Addition der Exponenten zurückführt. Die Möglichkeit einer solchen Reduktion, die bekanntlich für das logarithmische Rechnen grundlegend ist, ist formal davon begründet, daß die Grundgesetze der Multiplikation und Addition weitgehend übereinstimmen, daß nämlich beide Operationen sowohl kommutativ, als auch assoziativ sind.

Die Umkehrung der Operationen des Potenzen liefert den Logarithmus: Man nennt c den Logarithmus von a zur Basis b :

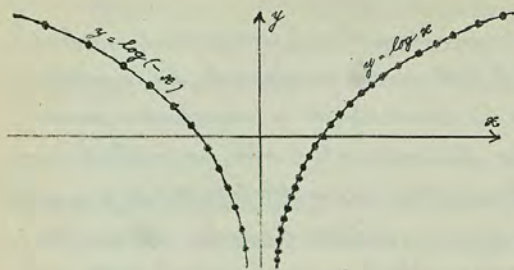
$$c = \log_b a$$

Hierbei ergeben sich aber bereits eine Reihe unserer Schwierigkeiten, über die man meistens hinweggeht, ohne sie recht aufzuklären, und die wir gerade deshalb hier besonders deutlich machen wollen. Der Requenslichkeit halber führen wir sogleich für a und c , deren gegenseitige Abhängigkeit wir studieren wollen, die für Variable geläufigen Bezeichnungen x , y ein, so daß unsere Grundgleichungen sind:

$$x = b^y, \quad y = \log_b x$$

Vor allem ist nun darauf aufmerksam zu machen, daß man die Basis b stets positiv annimmt; bei negativem b würde nämlich x für ganzzahliges y abwechselnd, positiv und negativ werden, für rationaler y aber gar vielfach imaginär, und die Gesamtheit dieser Wertepaare x , y würde keinen stetigen Kontinuum bilden können. Aber auch für $b > 0$ kann man nicht ohne anscheinend ganz willkürliche Festsetzungen auskommen. Denn für rationaler $y = \frac{m}{n}$ (wo m , n teilerfremd seien), ist bekanntlich $x = b^{\frac{m}{n}}$ als $\sqrt[n]{b^m}$ definiert und hat daher n Werte, von denen selbst wenn wir uns auf reelle Zahlen beschränken, für gerades n noch 2 Werte in Betracht kommen; die Festsetzung ist nun die, daß x stets gleich dem positiven Wurzelwert, dem sog. Hauptwert sein soll.

Lassen Sie nun einmal an der Hand des bekannten Bildes der Logarithmuskurve $y = \log x$, das ich für den Moment der größeren Deutlichkeit halber hier wohl bereits besitzen darf, überlegen, daß diese Festsetzung und ihre Zweckmäßigkeit durchaus nichts Selbstverständliches sind. Durchläuft y die überall dicht liegende Menge der rationalen Zahlen, so bilden die positiven Hauptwerte $x = b^y$ eine überall dichte Menge auf unserer Kurve. Würden wir nun bei geradem Kon-



vor x von y allemal
auch die zugehörigen
negativen Werte x un-
kennbar, so erhalten
wir eine, man möchte
sagen „halt so dichte“,
aber immer noch
„überall dichte“ Punkt-
menge auf dem Spiegel-

bilde unserer Kurve in Bezug auf die y -Achse ($y = \log(-x)$).
Es ist nun so unmittelbar durchaus nicht zu begreifen, von-
nun, wenn man jetzt sämtliche reellen, auch irrationa-
len Werte y erlaubt, sich gerade die Hauptwerte rechts
zu einer kontinuierlichen, durchaus regulär verlaufen-
den Kurve ergänzen lassen, und ob und warum nicht
auch die negativen linken Werte eine ähnliche vervoll-
ständigung gestatten. Wir werden später sehen, daß
wir das nur mit tieferen funktionentheoretischen Hilf-
mitteln voll werden verstehen können, mit Hilfsmit-
teln, die der Schule nicht zu Gebote stehen können.
Und darum verrichtet man dort eben auf das innere
Verständnis der Sache und begnügt sich meist mit
der für den Schüler freilich auch recht überzeugenden
autoritativen Feststellung, daß man nun einmal $b > 0$

und für y die positiven Hauptwerte nehmen muß, und daß
alles andere falsch ist; hierauf begründet sich dann der
Satz, daß der Logarithmus eine eindeutige nur für posi-
tive Argumente definierte Funktion ist.

Hat man die Theorie soweit gefördert, so bekommt der
Schüler die Logarithmentafel in die Hand, und muß jetzt
die Logarithmen zum praktischen Rechnen gebrauchen
lernen; freilich mag es auch heute noch einzelne Lehrende
geben, - in meiner Schülzeit war das die Regel - wo nicht
viel davon gesagt wird, wie eine solche Tafel denn berech-
net wird. Das wäre ein schmerzlicher Utilitarismus, der je-
dem höheren Unterrichtsprinzip Hohn spricht, und den
wir selbstverständlich auf schärfste verurteilen müssen.
Gewiß aber wird man heute doch schon in den meisten
Fällen von der Berechnung der Logarithmen sprechen
und an vielen Schulen zu diesem Zwecke auch wohl die
Lehre von den natürlichen Logarithmen und der Reihen-
entwicklung heranziehen.

Was unsere angeht, so ist bekanntlich die Basis
des natürlichen Logarithmensystems:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818 \dots$$

Diese Definition von e wird meistens, besonders auch nach
französischem Muster in den großen Lehrbüchern der Ana-
lysis, unvermittelt an die Spitze gestellt, wobei dann



freilich gerade das eigentlich wertvolle, das Verständnis vermittelnde Element fehlt: eine Erklärung, warum man gerade diesen unerklärlichen Grenzwert als Basis verwendet und die entstehenden Logarithmen natürliche nennt. Ebenso tritt die Reihenentwicklung vielfach ganz unvermittelt auf; man setzt einfach formal an:

$$\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

berechnet die Koeffizienten a_0, a_1, \dots aus den bekannten Eigenschaften der Logarithmen und zeigt allenfalls noch für $|x| < 1$ die Konvergenz. Unwörtlich aber bleibt dabei wiederum, wie man denn überhaupt davon kommt, bei einer Funktion und gar noch bei einer so willkürlich zusammengestrickelten, wie es der Logarithmus nach der Schuldefinition ist, die Möglichkeit einer Potenzreihenentwicklung auch nur zu vermuten.

2. Die historische Entwicklung der Theorie.

Wollen wir nun alle die inneren Zusammenhänge finden, die wir hier vermissen, und die tieferen Gründe kennen lernen, warum jene auscheinend willkürlichen Festsetzungen zu einem vernünftigen Resultate führen müssen - kurz wollen wir wirklich zu einem vollen Verständnis der Theorie des Logarithmus vordringen, so wird es am besten sein, wenn wir den historischen

Wiedegang einmal in großen Zügen verfolgen; Sie werden sehen, daß er keineswegs jener Schulform entspricht, sondern daß diese sich zu ihm wie eine von recht ungünstigen Standpunkte aus genommene Projektion verhält.

Wir haben da zunächst aus dem 16. Jahrhundert einen deutschen Mathematiker, den Schwaben Michael Stifel zu nennen, der 1544 in Nürnberg seine Arithmetica integra erscheinen ließ; das ist also in der Zeit der ersten Beginne der modernen Algebra, ein Jahr bevor der Cardanus schon genanntes Werk gleichfalls in Nürnberg erschien. Ich kann Ihnen dieses Buch, wie auch die meisten der weiterhin zu erwähnenden aus unserer sehr reichhaltigen Universitätsbibliothek hier vorlegen. Sie finden dort zum ersten Male das Rechnen mit Potenzen von beliebigen rationalen Exponenten und besonders betont auch die Multiplikationsregel, ja Stifel gibt sogar (pag. 250) gewissermaßen die erste numerische Logarithmentafel, die überhaupt existiert, und die freilich sehr rudimentär ist: sie enthält lediglich die ganzen Zahlen von -3 bis 6 als Exponenten neben die zugehörigen Potenzen $\frac{1}{8}$ bis 64 von 2 gestellt. Freilich scheint Stifel eine Vorstellung von der Bedeutung der hiermit beginnenden Entwicklung gehabt zu haben; er bemerkt nämlich, daß man über diese



merkwürdigen Zahlenbeziehungen ein ganzes eigenes Buch schreiben könnte.

Nun aber die Logarithmen im praktischen Rechnen wirklich zur Geltung bringen zu können, dazu fehlte Tafel noch ein wichtiges Hilfsmittel, die Decimalbrüche, und erst als man diese besaß - nach 1600 - war die Möglichkeit zur Ausbildung wirklicher Logarithmentafeln gegeben. Die erste Tafel rührt von dem Schotten John Napier (oder Keper) her, der 1550 - 1614 lebte, dem eigentlichen Erfinder der Logarithmen, der übrigens auch das Wort geprägt hat; sie erschien 1614 zu Edinburgh unter dem Titel „mirifici logarithmorum canonis descriptio“, und solche Registrierung sie erregte, sehen Sie aus dem schon am Anfang ihrer vorgedruckten Versen, in denen derselbe den Nutzen die Vortrefflichkeit der Logarithmen besingen. Übrigens wurde Keper's Verfahren zur Berechnung der Logarithmen erst nach seinem Tode als „mirifici logarithmorum canonis constructio“ ¹⁾ publiziert.

Unabhängig von Keper hatte der Schweizer Johst Bürgi (1552 - 1632) eine Tafel berechnet, die er aber erst 1620 zu Prag unter dem Titel „Progressstabilen“ erscheinen ließ. Wir Höttinger nehmen an Bürgi ein besonderes Land.

1) Augsburg 1620. Neudrucke Paris 1895.

männliches Interesse nehmen, da er lange in Cassel gelebt hat, überhaupt ist Cassel und speziell die alte Herrnwaide darüber für die Entwicklung der Arithmetik, Astronomie, Optik vor Erfindung der Infinitesimalrechnung eine äußerst wichtige Stätte, so wie dann später Hannover als Wohnort von Leibniz wichtig wird. Wir haben also hier in unserer Nähe auch lange vor Gründung der Universität für unsere Wissenschaft historisch bedeutsamen Proden.

Es ist nun sehr lehrreich, den Gedankengang von Keper und Bürgi sich näher anzusehen. Beide gehen von den Werten $x = b^y$ für ganzzahlige y aus und wollen es nun so einrichten, daß die Zahlen x möglichst dicht liegen, um so dem schließlichen Ziele - jeder Zahl x einen Logarithmus zuzuordnen - möglichst nahe zu kommen; das erreicht man heute auf der Schule durch den Übergang zu gebrochenen Werten y , von dem vorher die Rede war. Keper und Bürgi vermeiden aber alle jene Schwierigkeiten, die sich auf diesem Wege ergeben, indem sie mit der Intuition des Beweis die Lücke gleich am nichtigen Ende anfassen. Sie haben nämlich den einfachen und gleichlichen Gedanken, die Basis b sehr nahe an der Einheit zu wählen, denn dann riicken in der Tat auch bereits die successiven ganzzahligen Potenzen von b sehr nahe aneinander. Bürgi nimmt



$$b = 1,0001,$$

während Keper einen Wert unterhalb 1 verwendet:

$$b = 1 - 0,0000001 = 0,9999999,$$

also noch näher an die 1 heran geht. Der Grund für diese Abweichung Kepers vom heutigen Usus ist der, daß er von vornherein die Anwendung auf trigonometrische Rechnungen im Auge hat; da handelt es sich ja vor allem um die Logarithmen echter Brüche (Sinus und Cosinus), die für $b > 1$ negativ, für $b < 1$ aber positiv werden. Beiden Forschern gemeinsam ist aber die Hauptsache, daß sie nur ganzzahlige Potenzen dieser b verwenden und damit um die Vielfdeutigkeit, die nur vorhin gemeint, vollkommen herumkommen.

Berechnen wir nun im birgischen Systeme die Potenzen für zwei benachbarte Exponenten y und $y+1$:

$$x = (1,0001)^y, \quad x + \Delta x = (1,0001)^{y+1}.$$

Durch Subtraktion folgt

$$\Delta x = (1,0001)^y (1,0001 - 1) = x \frac{1}{10^4}$$

oder, wenn wir an Stelle der Differenzen 1 der beiden Exponentenwerte allgemein Δy schreiben:

$$(1 \frac{\Delta y}{x}) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10^4}{x}.$$

Wir haben so eine Differenzengleichung für die birgischen Logarithmen, die Birgi selbst bei der Berechnung seiner Tafel direkt anwendet: Hat er den zu einem y ge-

hörigen Wert x bestimmt, so erhält er den jeweils folgenden zu $y+1$ gehörigen durch Addition von $\frac{x}{10^4}$. - Ebenso ergibt sich, daß die Keper'schen Logarithmen der Differenzengleichung

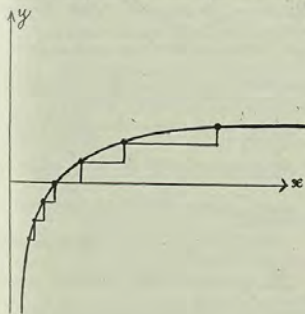
$$(1 \frac{1}{x}) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \frac{10^4}{x}$$

genügen.

Um die nahe Verwandtschaft beider Systeme zu erkennen, brauchen wir nur das eine Mal statt der Zahlen y die Zahlen $\frac{y}{10^4}$, das andere Mal die $-\frac{y}{10^4}$ zu betrachten (d. h. das Terzimalkommata der Logarithmen versetzen); bezeichnen wir die neuen Zahlen dann wieder schlechtweg mit y , so ergibt sich jedesmal eine der gleichen Differenzengleichung

$$(2) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

genügende Zahlenreihe, in der die y einmal in Schritten von 0,0001, das andere Mal von $-0,0000001$ fortschreiten.



Wollen wir uns der Rechenlichkeit halber bereits erlauben, das Bild der stetigen Exponentialkurve zu besitzen, - eigentlich sollen wir es ja durch unsere Erörterungen erst gewinnen - so können wir uns die jeiner Keper'schen bzw. birgischen Zahlenreihe entsprechenden Punkte (x, y) mit einem Worte



anschaulich vor Augen stellen als die Bögenpunkte einer in die Exponentialkurve

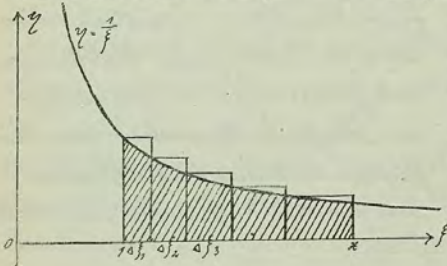
(3) $x = (1,0001)^{10000 y}$ bzw. $x = (0,9999999)^{10000000 y}$
eingezichneten Kette der konstanten Stufenhöhe $\Delta y = 0,0001$
bzw. $\Delta y = 0,0000001$ - wie dies in der Figur schematisch angedeutet ist.

Eine andere geometrische Deutung, bei der wir die Exponentialkurve noch nicht voraussetzen brauchen, die uns vielmehr den naturgemäßen Weg zu ihr zeigen wird, erhalten wir, wenn wir die Differenzgleichung (2) durch folgende Summengleichung ersetzen (gewissermaßen sie "integrieren"):

$$(4) \quad y = \sum_1^x \frac{\Delta f}{f}$$

wobei während der Summation f kontinuierlich von 1 bis x um solche Stufen wächst, daß das zugehörige $\Delta y = \frac{\Delta f}{f}$ stets konstant, gleich 10^{-4} bzw. 10^{-7} wird, was also $\Delta f = \frac{f}{10^4}$ bzw. $-\frac{f}{10^7}$ ergibt. Dies Verfahren kann man nun in der Tat sehr leicht geometrisch aussprechen:

Man zeichne in einer f - y -Ebene die Hyperbel $y = \frac{1}{f}$ und konstruiere auf



der f -Achse von Punkte $f=1$ aus beginnend alle Punkte, die man nach dem Fortschreitensgesetz $\Delta f = \frac{f}{10^4}$ (um etwa bei der bürgerlichen Formulierung zu bleiben) sukzessive erreicht.

Über jedem der so entstehenden Intervalle zeichne man das Rechteck mit der Höhe $\frac{1}{f}$, das den über f liegenden Hyperbelpunkt zur Ecke hat und den konstanten Inhalt $\Delta f \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{10^4}$ besitzt. Der bürgerliche Logarithmus von x ist sodann nach (4) gerade die Summe aller dieser zwischen 1 und x gelegenen der Hyperbel eingeschriebenen Rechtecke. Analoges gilt für den Naperschen Logarithmus.

Von dieser letzten Deutung aus wird man nun unmittelbar zum natürlichen Logarithmus geführt, indem man statt der Rechtecksumme direkt den von der Hyperbel selbst zwischen den Ordinaten $f=1$, $f=x$ umschlossenen Flächeninhalt verwendet (in der Figur schraffiert); in der Formel drückt sich das bekanntlich aus:

$$\log_{nat} x = \int_1^x \frac{df}{f}$$

Das war nun in der Tat auch der historische Weg und zwar trat man den entscheidenden Schritt definitiv um 1650, als die analytische Geometrie bereits Gemeingut der Mathematiker war und die Infinitesimalrechnung mit den Bestrebungen zur Quadratur der bekannten Kurven einsetzte.

Natürlich müssen wir, wenn wir diese Definition des natürlichen Logarithmus akzeptieren, uns vor allem überzeugen, daß es auch wirklich die Fundamenteigenschaften besitzt, die Multiplikation der Numeri durch die stadi-



tion der Logarithmen zu ersetzen, - oder, modern gesprochen, wir müssen nachweisen, daß die durch den Hyperbelinhalt definierte Funktion

$$f(x) = \int_1^x \frac{x dx}{x}$$

das einfache Additionstheorem besitzt:

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2).$$

In der Tat sind bei Variation von x_1, x_2 die Zuwächse beider Seiten nach der Integraldefinition $\frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2}$ bzw. $\frac{d(x_1 \cdot x_2)}{x_1 \cdot x_2}$ also einander gleich; daher können sich $f(x_1) + f(x_2)$ und $f(x_1 \cdot x_2)$ nur um eine Konstante C unterscheiden, und diese ergibt sich gleich 0, wenn wir $x_1 = 1$ setzen (da ja $f(1) = 0$).

Wollen wir aber die „Basis“ der so gewonnenen Logarithmen erkennen, so brauchen wir nur zu bemerken, daß der Übergang von der Rechtecksreihe zum Hyperbelinhalt sich so vollziehen läßt, daß man auf der Ordinatenachse immer um $\Delta f = \frac{1}{n}$ statt um $\Delta f = \frac{1}{10}$ vorwärts geht und n beliebig groß werden läßt; das heißt aber nichts, als daß man die Bürgische Wertefolge $x = (1,0001)^{10000} y$ durch $x = (1 + \frac{1}{n})^{ny}$ ersetzt, wo n, y alle ganzen Zahlen durchläuft. Nach der allgemeinen Potenzdefinition kann man das auch so aussprechen, daß x die y te Potenz von $(1 + \frac{1}{n})^n$ ist, und demgemäß erscheint es plausibel, daß nach Ausführung des Grenzüberganges lim $(1 + \frac{1}{n})^n$

die Basis wird, also gerade der Grenzwert, den man gemeinhin als Definition von e an die Spitze stellt. Übrigens ist es interessant zu bemerken, daß die Bürgische Basis $(1,0001)^{10000} = 2,718146 \dots$ mit e bereits auf 3 Dezimalen übereinstimmt.

Lassen Sie nun aber noch ansehen, wie die historische Entwicklung der Theorie des Logarithmus nach Neper und Bürgi weiterging! Ich habe da an erster Stelle zu erwähnen, daß

1) der schon früher (S. 191) genannte Aberrator sich als einer der ersten prinzipiell der Definition der natürlichen Logarithmen durch den Hyperbelinhalt bedient; in seinem Buche „Logarithmotechnica“ sowie in einigen Abhandlungen in den Philosophical Transactions der Londoner Akademie von 1667 und 1668 zeigt er eigentlich von demselben Gedankengange aus, den ich soeben in moderner Sprache dargestellt habe, daß $f(x) = \int_1^x \frac{x dx}{x}$ sich von dem gewöhnlichen Logarithmus mit der Basis 10 - wie man sie damals bereits zum Rechnen gebrauchte - nur um einen konstanten Faktor unterscheidet, den sog. Modul des Logarithmensystems. Übrigens hat er auch die Bezeichnung „natürlicher Logarithmus“ oder auch „hyperbolischer Logarithmus“ bereits selbst eingeführt.¹⁾ Die größte Leistung Aberrators aber ist die Auf-

¹⁾ Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London III (1668). pag. 761.



stellung der Potenzreihe für den Logarithmus, die er - dem *im* me nach - aus der Integraldarstellung durch dividieren und gliedweise Integration erhält; ich habe das ja schon früher (S. 191) als bahnbrechenden Fortschritt der Mathematik aufführen können.

2.) In jener Zusammenhänge habe ich gleichfalls bemerkt, daß *Newton* diese Ideen *Mercator*s aufgriff und durch zwei neue äußerst wertvolle Zusätze bereicherte: dem allgemeinen binomischen Satz und die Methode der Reihenumkehrung. Das findet sich bereits in einer Jugendarbeit *Newtons* „*de analysi per aequationes numero terminorum infinitas*“, ¹⁾ die erst spät gedruckt wurde, aber von 1669 an schon handschriftlich verbreitet war. Dort ²⁾ leitet *Newton* aus der *Mercator*schen Reihe für $y = \log nat x$ zum ersten Male durch Umkehr die Exponentialreihe ab:

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$$

Als Zahl, deren natürlicher Logarithmus $y = 1$ ist, ergibt sich hieraus

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

und nun kann man mit Hilfe der Funktionsgleichung der Logarithmus leicht exakt schließen, daß für

1) *N. Newton, Opuscula, Tom. I. (Lausannae 1744). op. 1. -* Zuerst erschienen 1711.
2) *loc. cit. pag. 20.*

jeder rationale y im *Reich* der gewöhnlichen Potenzdefinition x einer der Werte von e^y ist, und zwar der positive, wie wir das später noch näher auszuführen haben werden. Die Funktion $y = \log nat x$ ist also in der Tat das, was man nach der gewöhnlichen Definition den Logarithmus von x zur Basis e nennen würde, wobei hier e durch die Reihe, nicht als $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ definiert ist.

3.) Einen bequemeren Weg zur Ableitung der Exponentialreihe konnte *Brook Taylor* einschlagen, nachdem er in seinem Werke „*Methodus incrementorum*“ ¹⁾ die nach ihm benannte allgemeine Reihenentwicklung aufgestellt hatte, von der wir später noch viel zu sprechen haben werden. Er brauchte dann nur aus der in der Integraldefinition des Logarithmus enthaltenen Relation

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$$

für die inverse Funktion zu schließen:

$$\frac{dx}{dy} = e^y$$

und konnte als Spezialfall seiner allgemeinen Reihe die Exponentialreihe sofort hinschreiben. -

Wir haben früher (S. 194) gesehen, wie auf diese produktive Epoche die Kritische, fast möchte ich sagen die Periode des moralischen Sammers, folgte, wo man vor allem die neu gewonnenen Resultate sicher

1) *Londini 1715.*



zu fundieren und das möglichen Weise Falsche abzutrennen suchte. Wir müssen nun näher zusehen, wie sich die Hauptvertreter dieser Richtung, Euler und Lagrange, zu der Exponentialfunktion und dem Logarithmus verhalten haben.

Beginnen wir mit Eulers „Introductio in analysin infinitorum“.¹⁾ Lassen Sie mich vorab die außerordentliche, bewunderungswürdige analytische Geschicklichkeit Eulers in allen seinen Entwicklungen rühmen, dabei aber bemerken, daß er noch keine Spur der Strenge besitzt, die man heute zu postulieren gewöhnt ist.

Euler stellt nun an die Spitze seiner Entwicklungen den binomischen Satz

$$(1+k)^l = 1 + \frac{l}{1} k + \frac{l(l-1)}{1 \cdot 2} k^2 + \frac{l(l-1)(l-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^3 + \dots$$

für ganzzahligen Exponenten l ; für nichtganzzahlige Exponenten betrachtet Euler das Binom in der Introductio überhaupt nicht. Diese Entwicklung specialisiert er für den Ausdruck

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny}$$

wo n, y ganzzahlig ist; läßt er dann n -unter Aufrechterhaltung dieser Bedingung - zur Grenze ∞ übergehen, und nimmt in der Reihenentwicklung dessen Grenzprozess in jedem einzelnen Gliede vor, so er-

1) Lamouche 1748. Caput IV, pag. 85 ff.

hält er die Exponentialreihe

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots,$$

wo $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ definiert ist. Ob freilich die einzelnen Schritte dieser Verfahren auch im heutigen Sinne streng berechtigt sind, ob z. B. die Summe der Grenzwerte der Reihenglieder wirklich den Grenzwert der Reihensumme liefert, darüber macht sich Euler weiter keine Sorge.

Diese Ableitung der Exponentialreihe ist, wie Ihnen bekannt ist, für sehr zahlreiche Lehrbücher der Infinitesimalrechnung in ihrem Gedankengange vorbildlich geblieben, wobei man allerdings je länger je mehr die einzelnen Schritte für sich herausgearbeitet und auf den Nachweis ihrer exakten Gültigkeit Gewicht gelegt hat. Wie sehr bestimmend übrigens Eulers Buch für die ganze Entwicklung dieser Dinge geworden ist, sehen Sie daraus, daß der Gebrauch der Buchstaben e für jene ausgezeichnete Zahl von ihm ausgeht:

„Ponamus autem brevitate gratia pro numero hoc e , 71828... constanti litteram e ...“ heißt es auf pag. 90.

Ich darf hier vielleicht sogleich erwähnen, daß eine ganz analoge Ableitung der Sinus- und Cosinusreihe von Euler unmittelbar im Anschluß hieran gegeben wird. Er geht an diesem Ende von der Entwicklung von $\sin q$ nach Potenzen von $\sin \frac{q}{n}$ aus.



und läßt n gegen ∞ konvergieren. Daß das in der Tat nichts als Grenzübergang vom Binom aus ist, sieht man, wenn man die fragliche Potenzentwicklung der „Moivre'schen Formel“

$\cos \varphi + i \sin \varphi = (\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n})^n = (\cos \frac{\varphi}{n})^n + i (\sin \frac{\varphi}{n})^n$
ermittelt. Übrigens benützt Euler bei dieser Gelegenheit¹⁾ auch das erste Mal den Buchstaben n für die Zahl, für die er seitdem stets benützt wird.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung des Lagrange'schen Werkes, der „Théorie des fonctions analytiques“²⁾, wiederum ist zuerst zu betonen, daß Konvergenzfragen bei Lagrange höchstens ganz beiläufig behandelt werden. Ich berichtete bereits (S. 195), daß Lagrange nur solche Funktionen betrachtet, die durch Potenzreihen gegeben sind, und ihre Differentialquotienten rein formal durch abgeleitete Potenzreihen definiert. Daher ist für ihn die Taylor'sche Reihe

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

einfach das Resultat einer formalen Umordnung der ursprünglich nach Potenzen von $x+h$ fortgeschrittenen Reihe $f(x+h)$; will er sie dann freilich auf eine bestimmte Funktion wirklich anwenden, so muß er

1) loc. cit. pag. 93.

2) Paris 1797. - Abgedruckt in Lagrange, Oeuvres. T. IX. (Paris 1891); vgl. der. Chap. III (pag. 34 ff.).

genau gewonnen immer vorher zeigen, daß diese Funktion zu den „analytischen“ gehört, d. h. daß sie sich überhaupt in eine Potenzreihe entwickeln läßt.

Man beginnt Lagrange mit der Betrachtung der Funktion $f(x) = x^n$ für rationales n und bestimmt $f'(x)$ als Koeffizienten von h in der Entwicklung von $(x+h)^n$, indem er die ersten beiden Glieder wirklich ausgerechnet denkt; nach demselben Gesetz erhält er sofort auch $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., und die binomische Entwicklung von $(x+h)^n$ ergibt sich als Spezialfall der Taylor'schen Reihe für $f(x+h)$. Übrigens bemerke ich ausdrücklich, daß Lagrange den Fall irrationaler Exponenten n nicht weiter behandelt, sondern ihn als selbstverständlich mit erledigt betrachtet, wenn er alle rationalen Werte berücksichtigt hat; es ist interessant, sich das zu vergegenwärtigen, da man doch heute auf die genaue Herausarbeitung solcher Übergänge das größte Gewicht legt.

Diese Resultate verwendet Lagrange zu einer analogen Behandlung der Funktion $f(x) = (1+b)^x$; indem er die Binomialreihe für $(1+b)^{x+h}$ umordnet, findet er nämlich $f'(x)$ als Koeffizient von h , bestimmt sodann nach demselben Gesetz $f''(x)$, $f'''(x)$, ... und setzt damit endlich die Taylor'sche Reihe für



$f(x+h) = (1+h)^{x+h}$ an: Für $x=0$ ist er damit im Besitze der gewünschten Exponentialreihe. -

Ich möchte nun, meine Herren, diesen historischen Überblick, in dem ich natürlich immer nur die Namen allerersten Ranges nennen konnte, dadurch abschließen, daß ich noch kurz aufführe, was im 19. Jahrhundert an wesentlich neuen Wendungen hervorkam. Da habe ich an erster Stelle

1) die genauen Begriffsbildungen über die Übergänge unendlicher Reihen und anderer unendlicher Prozesse zu nennen. Allen voran geht da Gauß mit seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe von 1812 („Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{x \cdot b}{1 \cdot a} x + \dots$ “); ihm folgt Abels Arbeit über die binomische Reihe von 1826 („Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{n} x + \dots$ “)²⁾, während Cauchy in den zwanziger Jahren in seinem „Cours d'analyse“³⁾ zum ersten Male allgemeine Betrachtungen über Reihenkonvergenz anstellt. Das Resultat dieser Arbeiten für die hier in Betracht kommenden Reihen ist, daß alle früheren Entwicklungen jeweils im Kom-

1) Boumout. societ. reg. Gotting. recent. Vol. II 1813 = Werke Bd. III pag. 125.

2) Crelles Journal f. d. v. u. a. Mathem. Vol. I. pag. 311. = Ostwalds Klass. Nr. 71.

3) P. 1 Analyse algébrique. Paris 1821 = Ouvres, Ser. I, T. III (Paris 1898).

vorgewiesene richtig sind, wobei die genauen Beweise freilich sehr kompliziert werden. Für die nähere Ausführung solcher Beweise in moderner Gestalt verweise ich wiederum auf Burkhardts algebraische Analysis, oder auch auf Weber-Wellstein.

2.) Obwohl wir später erst ausführlich davon zu reden haben werden, muß ich hier schon die exakte Begründung der Infinitesimalrechnung durch Cauchy erwähnen; durch sie wird nämlich jener Behandlung der Logarithmus im 17. Jahrhundert volle mathematische Exaktheit verliehen.

3.) Endlich ist noch die Entstehung der Theorie aufzuführen, die allein erst zum vollen Verständnis der Logarithmus- und Exponentialfunktion verhelfen kann, der Theorie der Funktionen komplexer Argumente, kurzweg häufig „Funktionentheorie“ genannt. Zuerst vollkommen überblickt hat die Grundzüge dieser Theorie wiederum Gauß, wenn er auch wenig oder gar nichts darüber publiziert. Für uns interessant ist vor allem ein Brief vom 18. Dezember 1811 an Bessel, der freilich viel später veröffentlicht wurde (Werke Bd. VIII, pag. 90); hier wird nämlich mit wunderbarer Klarheit die Bedeutung des Integralen $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ in der komplexen Ebene geschildert und erklärt, inwiefern es eine

unendlich vieldeutige Funktion darstellt. - Der Ruhm, die komplexe Funktionentheorie gleichfalls selbständig geschaffen und zuerst bekannt gemacht zu haben, gehört übrigens wiederum Cauchy.

Das Ertragsvermögen dieser Entwicklung im Beginn des 19^{ten} Jahrhunderts für unseren speziellen Gegenstand wäre etwa, daß die Einführung der natürlichen Logarithmen von der Hyperbelquadratur aus auch genau die gleiche Stärke besitzt, wie jede andere Methode, während sie oben-denn, wie wir bereits sahen, an Einfachheit und Überschaubarkeit allen voransteht.

3. Einiges über den Schulbetrieb.

Freilich ist diese moderne Entwicklung, merkwür-
digerweise an dem Betriebe des Schulunterrichts in der Hauptsache spurlos vorbeigegangen, worauf ich ja schon öfters hinwies. Dort hilft man sich heute immer noch trotz aller Schwierigkeiten und Unvollkommenheiten mit algebraischer Analysis und vermeidet jeden Infinitesimalkalkül, obwohl doch eben die Lehren des 18. Jahrhunderts vor diesem längst gegenstandslos geworden ist. Der Grund dafür ist wohl darin zu suchen, daß der mathematische Schulbetrieb und die vorwärtsgelende Forschung vom Beginn des 19. Jahrhunderts an

gänzlich außer Kontakt gestanden, das ist eigentlich um so wunderbarer, als überhaupt erst in den ersten Jahrzehnten eben dieses Jahrhunderts die Ausbildung spezifisch mathematischer Lehramtskandidaten beginnt. Ich habe ja auf diese Diskontinuität, die hier lange bestand und jede Reform der Schultradition hinderte, schon in der Einleitung hingewiesen: Man kümmerte sich auf der Schule immer recht wenig darum, wie die Hochschule die gegebenen Übsätze etwa weiter ausbauen kann, und begnügte sich daher vielfach mit Definitionen, die vorläufig vielleicht ausreichen, weitergehenden Insprü-
chen gegenüber aber versagen. Und umgekehrt gibt sich die Hochschule wieder häufig keine besondere Mühe, genau an das auf der Schule Gegebene anzuschließen, sondern sie baut ihr eigenes System auf und nur ein-
zelnes wird mit dem nicht immer zutreffenden Hin-
weis: „Das habt ihr auf der Schule schon gehabt“ abgetan.

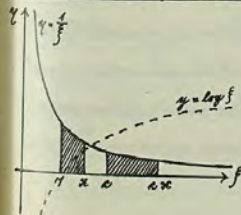
Dem gegenüber ist doch die Beurteilung interes-
sant, daß solche Hochschullehrer, die für weitere Klei-
ne - Naturwissenschaftler und Techniker - Vorlesungen zu halten haben, von sich aus in dieser Praxis zu einer ganz ähnlichen Einführung der Logarithmen ge-
kommen sind, wie ich sie hier empfehle. Ich will

Ihnen da besonders Scheffers, Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik⁴⁾ neu; da finden Sie pag. 331-350 eine sehr ausführliche Theorie des Logarithmus und der Exponentialfunktion, die ganz mit unsemr Aufbau übereinstimmt, und derselbe pag. 351-404 eine ähnliche Theorie der trigonometrischen Funktionen anschreibt. Ich empfehle Ihnen sehr, von diesem Buche Kenntnis zu nehmen; es ist für den Leserkreis, an den es sich wendet, äußerst geeignet, in dem es den Stoff in sehr ausführlicher, bequem lesbarer und auch dem weniger Begabten leicht zugänglicher Weise darbietet. Beachten Sie nur die große pädagogische Geschicklichkeit, die Scheffers besitzt, wenn er etwa - um ein Beispiel herauszugreifen - immer wieder darauf hinweist, wie wenig an neuen Formeln man in der ganzen Logarithmenlehre auswendig zu lernen braucht, während man alles andere nur einmal verstanden haben muß, um es dann, wenn man es braucht, bequem nachschlagen zu können; dadurch ermuntert er seinen Leser immer aufs neue auch bei der ausserordentlich so großen Fülle der neuen Stoffes zum Stuharren. - Für unsern gegenwärtigen Zusammenhang sei übrigens noch darauf hingewiesen, daß Schef-

4) Leipzig 1905.

fers überall die Darstellung der Schule ab gegeben vorliegend annimmt, jedoch völlig unabhängig von ihr seine Entwicklungen aufführt, da er voraussetzt, daß ein großer Teil der Schulkenntnisse doch schon wieder vergessen ist. Es liegt ihm jedoch ganz ferne, Vorschläge zur Reform der Schulunterrichts selbst zu machen, wie ich das tue. -

Ich möchte nun hier noch einmal ganz kurz zusammenfassen, wie ich mir die Einführung des Logarithmus auf der Schule auf jenem einfacher und natürlicheren Wege etwa denken würde: Der oberste Grundsatz wäre, daß die wichtige Quelle zur Einführung neuer Funktionen die Quadratur bekannter Kurven ist. Das entspricht, wie ich zeigte, einmal dem historischen Sachverhalt, ebenso aber auch dem Vorgehen in den höheren Teilen der Mathematik (vgl. z. B. die elliptischen Funktionen). Im Vorfeld dieses allgemeinen Prinzips geht man nun von der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ aus und bezeichnet den Flächeninhalt des unter ihr gelegenen Flächenelementes von der Ordinate $\xi = 1$ bis zu der $\xi = x$ als Logarithmus von x . Indem man die



Endordinate sich bewegen läßt, kann man aus der geometrischen Anschauung heraus die Änderung des Inhalts mit x qualitativ leicht übersehen und daher die Kurve $y = \log x$ ihrem un-

gefährten Verlaufe nach zeichnen.

Nun nun die Funktionsgleichung des Logarithmus möglichst einfach zu gewinnen, kann man etwa davon ausgehen, daß:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_1^{cx} \frac{dx}{x},$$

wie sich durch die Transformation $x \rightarrow cx$ der Integrationsvariablen ergibt; d. h. der Flächeninhalt zwischen den Ordinaten 1 und x ist derselbe, wie zwischen den dem das c -fache vom Nullpunkt entfernten c und cx . Diese Tatsache kann man aber leicht geometrisch sehr anschaulich machen, indem man überlegt, daß die Größe des Flächenstückes erhalten bleibt, wenn man es unter der Hyperbel entlang schiebt, und es dabei nur in dem Maße ausdehnt, wie die Höhe verringert wird. Nach diesem Satze aber ergibt sich sofort das Additionstheorem:

$$\int_1^{x_1} \frac{dx}{x} + \int_1^{x_2} \frac{dx}{x} = \int_1^{x_1} \frac{dx}{x} + \int_{x_1}^{x_1 \cdot x_2} \frac{dx}{x} = \int_1^{x_1 \cdot x_2} \frac{dx}{x}$$

Ich würde sehr wünschen, daß man diesen Weg recht bald einmal im Schulunterricht praktisch erproben möchte; wie sich dabei die Durchführung im einzelnen zu gestalten hat, das muß natürlich der erfahrene Schulmann entscheiden. Im Wiener Lehrplan haben wir übrigens noch nicht gewagt, diesen Weg als Vorzug vorzuschlagen.

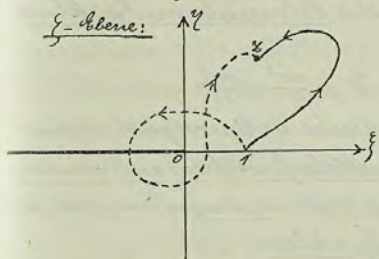
4. Der Standpunkt der Funktionentheorie

Wir wollen nun nun endlich noch darüber orientieren, wie die moderne Funktionentheorie komplexer Variabler den Logarithmus behandelt; hier werden wir erst volle Stiefklärung über alle die früher berührten Schwierigkeiten erhalten.

Wir führen fortan statt y und x komplexe Variable $w = u + iv$ und $z = x + iy$ ein; dann wird

1) der Logarithmus definiert durch das Integral

$$\log z = \int_1^z \frac{dz}{z},$$



wobei der Integrationsweg irgend einem von $z = 1$ nach $z = z$ führenden Kurve der komplexen z -Ebene ist.

2) Je nachdem der Integrationsweg den Punkt $z = 0$ keinmal, einmal, zweimal, ... umläuft, nimmt das Integral unendlich viele verschiedene Werte an, sodaß $\log z$ eine unendlichvieldeutige Funktion wird. Kein bestimmter Wert, der Hauptwert $[\log z]$, wird festgelegt, wenn wir die Ebene etwa längs der negativen reellen Achse aufschneiden und dem Integrationswege das Überschreiten dieser Querschnitte verbieten; willkürlich bleibt dabei nur, ob man die negativen reellen Werte selbst von oben oder unten erreichen lassen will, und je nach der Entscheidung



darüber erhält ihr Logarithmus den imaginären Bestandteil $+i\pi$ oder $-i\pi$. Aus dem Hauptwert ergibt sich der allgemeine Wert des Logarithmus durch Addition eines beliebigen Vielfachen von $2i\pi$:

$$(2) \quad \log z = [\log z] + 2k i \pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

3) Aus der Integraldefinition von $w = \log z$ folgt, daß die Umkehrfunktion $z = \varphi(w)$ der Differentialgleichung $\frac{dz}{dw} = z$

genügt, aus der sich dann die Potenzreihenentwicklung von φ sofort herstellen läßt:

$$z = \varphi(w) = 1 + \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots$$

Da diese Reihe für jedes endliche w konvergiert, kann man schließen, daß diese Umkehrfunktion eine eindeutige Funktion ist, die nur für $w = \infty$ singular wird, also eine „ganze“ transzendente Funktion.

4) Genau wie im Reellen kann man aus der Integraldefinition das Additionstheorem des Logarithmus herleiten, aus dem für die Inverse die Gleichung

$$(3) \quad \varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) = \varphi(w_1 + w_2)$$

folgt. Ebenso ergibt sich aus (2)

$$(4) \quad \varphi(w + 2k i \pi) = \varphi(w), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

d. h. $\varphi(w)$ ist eine einfache periodische Funktion mit der Periode $2i\pi$.

5) Es sei $\varphi(1) = e$. Dann folgt aus (3), daß für jeden

rationalen Wert $w = \frac{m}{n}$ $\varphi(w)$ einem der n in gewöhnlicher Weise definierten Werte $\sqrt[n]{e^m}$ gleich ist:

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{e^m} = e^{\frac{m}{n}}$$

Es ist nun sichtlich - und diesen Gebrauch wollen wir uns anschließen - mit $e^w = e^{\frac{m}{n}}$ schlechterege stets diesen einen Wert $\varphi(w)$ zu berechnen, so daß dann e^w eine wohl bestimmte eindeutige Funktion, eben die unter 3) definierte, darstellt.

6) Was werden wir nun im allgemeinsten Sinne unter der Potenz b^w mit beliebiger Basis b für eine Funktion zu verstehen haben? Die Festsetzungen werden natürlich so zu treffen sein, daß die formalen Potenzregeln erhalten bleiben. Setzen wir also, um b^w auf das soeben definierte e^w zurückzuführen, b gleich $e^{\log b}$, so $\log b$ die unendlich vielen Werte

$$\log b = [\log b] + 2k i \pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

hat, so wird notwendig:

$$b^w = (e^{\log b})^w = e^{w \log b} = e^{w([\log b] + 2k i \pi)} = e^{w[\log b]} \cdot e^{2k i \pi w} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

und das stellt für die verschiedenen Werte von k unendlich viele durchaus unzusammenhängende Funktionen dar. Wir haben so das merkwürdige Ergebnis, daß die Werte des allgemeinen Exponentialausdrucks b^w , so wie sie sich durch die Prozesse des Potenzierens und Radizierens ergeben, gar nicht einer einheitlichen Funktion angehören, sondern unendlich vielen verschiedenen Funktionen von w , deren



jede durchaus eindeutig ist.

Die Werte dieser Funktionen stehen freilich in mancherlei Beziehung zu einander. Insbesondere sind sie alle gleich, sowie w eine ganze Zahl ist, und es gibt nur endlich viele (und zwar n) verschiedene unter ihnen, wenn w eine rationale Zahl der Form $\frac{m}{n}$ ist, wo m und n teilerfremd sind; diese Werte sind $e^{\frac{m}{n} [\log 2]}$ $e^{\frac{m}{n} k \log 2}$ für $k=0, 1, \dots, n-1$, also, wie es ja auch sein muß, die n Werte von $\sqrt[n]{2^m}$.

4) Man erst können wir recht einsehen, wie unangelegentlich die herkömmliche Systematik ist, die von Potenzen und Radizieren aus zur eindeutigen Exponentialfunktion aufsteigen will; sie begibt sich geradezu in ein Labyrinth, in dem sie sich mit ihren sog. „elementaren“ Hilfsmitteln unmöglich zurecht finden kann, zumal sie immer an reelle Größen sich gebunden hält. Sie werden das deutlich erkennen, wenn Sie auf Grund der jetzt gewonnenen allgemeinen Einsicht einmal die Verhältnisse bei negativen b durchdenken. An dieser Stelle will ich nur noch darauf hinweisen, daß wir jetzt die Zweckmäßigkeit der früher willkürlich erscheinenden Definition der Hauptwerte ($b > 0$ und $b^{\frac{m}{n}} > 0$; vgl. S. 325) wirklich verstehen können: sie liefert lauter Werte der einen unserer

$$[b^w] = e^{w [\log b]}$$

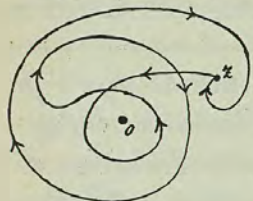
Hingegen gehören die gleichfalls überall dicht liegenden negativen reellen Werte $b^{\frac{m}{n}}$ bei geradem n ganz verschieden von unseren unendlich vielen Funktionen an; sie können sich daher unmöglich zu einer stetigen analytischen Kurve zusammenschließen.

Ich möchte nun noch einige tiefer gehende Bemerkungen über die funktionentheoretische Natur des Logarithmus aufzählen. Da $w = \log x$ bei jedem Umlauf um $x = 0$ einen additiven Zuwachs von $2\pi i$ erfährt, hat die zugehörige unendlichvielblättrige Riemannsche Fläche daselbst einen Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung, derart, daß man bei jedem Umlauf aus einem Blatte in das nächste kommt; man kann durch Übergang zur Kugel leicht erkennen, daß $x = \infty$ ein zweiter Verzweigungspunkt genau desselben Art der Fläche ist - andre gibt es nicht. Wir können nun nunmehr das anschaulich klar machen, was man die uniformisierende Kraft des Logarithmus nennt, und wovon wir schon gelegentlich bei Lösung gewisser algebraischer Gleichungen sprachen (S. 303f.). Hat man nämlich, um die Ideen zu fixieren, eine rationale Potenz $x^{\frac{m}{n}}$, so wird sie wegen

$$x^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n} \log x}$$

eine eindeutige Funktion von $w = \log x$, sie wird - wie man sagt - durch den Logarithmus uniformisiert. Nun

dies zu verstehen, denken wir uns über der z -Ebene außer der Riemannschen Fläche des Logarithmus auch diejenige von $z^{\frac{1}{n}}$ ausgeleitet: es wird eine n -blättrige Fläche, deren Verzweigungsstellen gleichfalls bei $z=0$ und $z=\infty$ liegen, vorjeweils alle n Blätter im Zyklus zusammen hängen.

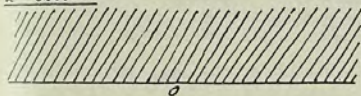


Fassen wir uns nun irgend einen geschlossenen Weg in der z -Ebene auf, auf dem der Logarithmus wieder zu seinem Ausgangswert zurückkehrt, der also auch auf dieser unendlichblättrigen Fläche geschlossen ist, so sieht man leicht, daß er jedenfalls auch geschlossen bleiben muß, wenn man ihn auf die n -blättrige Fläche von $z^{\frac{1}{n}}$ überträgt; aus dieser geometrischen Betrachtung entnehmen wir sofort, daß $z^{\frac{1}{n}}$ allernachst dann zum Ausgangswert zurückkehrt, wenn $\log z$ es tut, und daß es daher durch den Logarithmus uniformisiert wird. Ich mache diese kurzen Andeutungen um so lieber, als wir hier den einfachsten Fall der in der modernen Funktionentheorie eine so große Rolle spielenden Uniformisierungsprobleme vor uns haben.

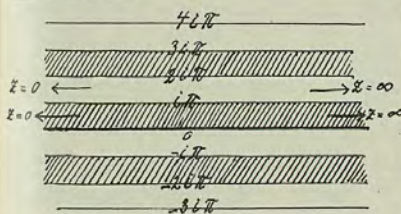
Wir wollen uns nun die Natur der Funktionsverhältnisse $w = \log z$ durch die Betrachtung der konformen Abbildung der z -Ebene (bzw. Riemannschen Fläche)

auf der w -Ebene noch klarer machen; um nicht zu weit auszuholen zu müssen, wollen wir hier auf die an sich natürlich vorzunehmende Betrachtung der entsprechenden Äquivalenzmengen verzichten. Wir zerlegen, wie früher, die z -Ebene durch die Stiche der reellen Achse in eine schraffierte (obere) und eine nichtschraffierte Halbebene; dann muß eine jede in der w -Ebene unendlich viele Bilder haben, da $\log z$ unendlichvieldertig ist, und alle diese Bilder müssen sich schicht nebeneinanderlegen, da die Umkehr-

z -Ebene:



w -Ebene:



funktion $z = e^w$ eindeutig ist. In einzelnen entsteht so eine Einteilung der w -Ebene in Parallelstreifen von der Breite 2π , die durch Parallelen zur reellen Achse hervorgerufen wird; diese Streifen sind abwechselnd zu schraffieren und frei zu lassen (der erste oberhalb der reellen Achse ist schraffiert) und stellen demgemäß abwechselnd konforme Abbilder der oberen und unteren Halbebene dar, während die Grenzparallelen den Teilen der reellen z -Achse entsprechen. Was die Zuordnung im einzelnen angeht,



so bemerke ich hier nur, daß z alleinmal nach ∞ geht, wenn w innerhalb eines Streifens nach links hin zur Unendliche konvergiert, während es nach ∞ geht, wenn w nach rechts hin zur Unendliche nicht, bei $w = \infty$ ist eine wesentlich singuläre Stelle der Umkehrfunktion e^{wz} .

Ich möchte hier nicht unterlassen, auf die Beziehung zum Picardschen Satze hinzuweisen, der ja einer der interessantesten Sätze in der neueren Funktionentheorie ist. Es sei $\alpha(w)$ eine ganze transzendente Funktion, d. h. eine Funktion, die nur eine in $w = \infty$ gelegene wesentlich singuläre Stelle besitzt (wie z. B. e^{wz}). Die Frage ist, ob und wie viele Werte z es geben kann, die an keiner endlichen Stelle w angenommen werden, denen sich $z(w)$ vielmehr nur nähert, wenn w in geeigneter Weise nach ∞ läuft. Der Picardsche Satz sagt nun aus, daß eine Funktion in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle höchstens zwei verschiedene Werte nicht annehmen kann, daß also eine ganze transzendente außer $z = \infty$, das sie ja notwendig ausläßt, höchstens noch einen Wert nicht annehmen darf. e^{wz} ist ein Beispiel einer Funktion, die wirklich außer ∞ noch einen Wert, nämlich $z = 0$ ausläßt: in einem jeden Parallelstreifen unserer Teilung nähert sich zwar e^{wz} bei den angegebenen Grenzübergängen jenen beiden Werten, wird ihnen

aber an keiner endlichen Stelle gleich. Eine Funktion, die außer $z = \infty$ keinen Wert ausläßt, ist sin w .

Zum Schlusse dieser Auseinandersetzungen will ich noch einen schon wiederholt berührten Punkt, unter Verwendung dieser geometrischen Halbpunktstretten, nämlich den Grenzübergang von der Potenz zur Exponentialfunktion, der an die Formel knüpfte:

$$e^{wz} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{wz}{n}\right)^n$$

oder, wenn wir $wz = r$ setzen:

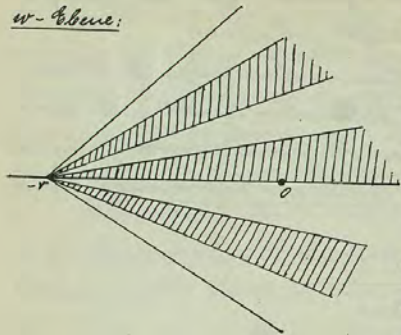
$$e^r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Betrachten wir dazu die Funktion vor dem Grenzübergange:

$$f_r(w) = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n,$$

deren funktionentheoretisches Verhalten als Potenz uns wohl bekannt ist. Sie hat zu „unerkwändigen Punkten“ die Punkte $w = -r$ und $w = \infty$, an denen die Basis 0 bzw. ∞ wird, und bildet die f_r -Halbebenen konform ab auf Sektoren der w -Ebene mit den Punkten $w = -r$ als Scheitel und der Winkelöffnung von je $\frac{2\pi}{n}$; ist r keine ganze Zahl, so kann die Folge dieser Sektoren die w -Ebene endlich- oder gar unendlich oft überdecken, entsprechend der dann auftretenden Vieldeutigkeit von f_r . Konvergiert nun r gegen Unendlich, so nicht der Scheitelpunkt $-r$ der Sektorenteilung unbegrenzt nach links,

w-Ebene:



und es ist durchaus anschaulich, wie die rechts von $-r$ gelegenen Sektoren in die der Grenzfunktion e^w entsprechenden Parallelstreifen der w -Ebene übergehen, wodurch jene Limesdefinition von e^w geometrisch erläutert ist, man kann durch eine leichte

Rechnung bestätigen, daß die Breite der Sektoren am Punkte $w=0$ in die Streifenbreite 2π der Parallelteilung übergeht.

Nun stellt sich aber sofort ein Knäuel ein: Lassen wir r ins Unendliche laufen, so passiert es nicht nur ganzzahlige, sondern auch rationale und irrationale Werte, für die f_r mehrdeutig wird und denen daher mehrblättrige Flächen entsprechen; wie können diese in die zur eindeutigen Funktion e^w gehörige schlichte Ebene übergehen? Läßt man z. B. r durch lauter gebrochene Werte mit dem Nenner n gegen ∞ konvergieren, so hat jeder $f_r(w)$ eine n -blättrige Riemannsche Fläche. Wir wollen, um diesen Grenzprozeß zu verfolgen, für einen Moment die w -Kugel betrachten, sie ist für jedes der $f_r(w)$ mit n Blättern überdeckt, die an den Verzweigungs-

w-Kugel:



punkten $-r$ und ∞ zusammenhängen; der Verzweigungsschnitt sei, wie in der Figur angedeutet, längs der kleineren Oberhalbstückes zwischen ihnen gelegt. Geht nun r gegen ∞ , so rücken die Verzweigungspunkte zusammen und der Verzweigungsschnitt verschwindet; damit wird die Brücke, über die die n Blätter zusammenhängen, abgebrochen, und es kommen se getrennt liegende Blätter und entsprechend n verschiedene eindeutige Funktionen heraus, von denen nur die eine unser e^w ist. - Lassen wir nun r alle reellen Werte durchlaufen, so treten im allgemeinen unendlichblättrige Flächen auf, deren Zusammenhang in der Grenze gelöst wird; die Werte auf je einem Blatte dieser Flächen konvergieren gegen das eindeutige e^w , das auf der schlichten Kugel ausgebreitet ist, während die Wertfolgen auf den andern Blättern im allgemeinen gar keine Grenzwerte haben. Damit ist der gewiß recht komplizierte und wunderbare Grenzübergang von der vieldeutigen Potenz zur eindeutigen Exponentialfunktion erst völlig geklärt.

Als allgemeine Moral aller dieser letzten Betrachtungen können wir vielleicht noch aussprechen, daß ein vollständiges inneres Verständnis solcher Probleme nur beim Übergang ins komplexe Gebiet möglich ist. Wäre das nicht

Grund genug, auch auf der Schule Komplexe Funktionentheorie zu treiben? Was Lison z. B. hat in der Tat ähnliche Forderungen befürwortet. Ich glaube aber nicht, daß man den Durchschnitt der Schüler selbst in Prima soweit führen kann und meine schon deshalb, man sollte die in solche Betrachtungen auslaufende Methodik der algebraischen Analysis im Unterricht überhaupt zu Gunsten des oben entwickelten einfacheren und naturgemäßen Weges aufgeben. Freilich wünsche ich um so mehr, daß der Lehrer alle in Betracht kommende funktionentheoretischen Zusammenhänge völlig beherrscht, denn er muß hinreichend über dem Stoff stehen, den er vorzutragen hat, und muß die Klippen und Vertiefen genau kennen, an denen er seine Schüler vorbeiführt.

Nach diesen ausführlichen Betrachtungen werden wir uns vielfach kürzer fassen können, wenn wir nunmehr entsprechend von den goniometrischen Funktionen handeln.

II. Die goniometrischen Funktionen.

Bemerken wir vorweg, daß wir diesen Namen statt des sonst vielfach üblichen „trigonometrische Funktionen“ vorziehen, weil die Dreieckslehre nur eine spezielle Anwendung dieser in der gesamten Mathematik höchst wichtigen

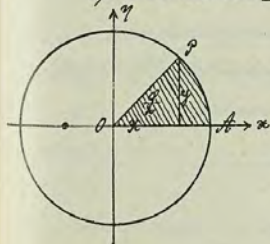
Funktionen ist; ihre inneren Funktionen, die genau dem Logarithmus entsprechen, während sie selbst der Exponentialfunktion analog sind, werden wir zyklometrische Funktionen nennen.

1. Theorie der goniometrischen Funktionen.

Wir knüpfen die theoretischen Betrachtungen an die Frage an, wie man die goniometrischen Funktionen auf der Schule am naturgemähesten wird einführen können? Ich denke, daß man auch da unser allgemeiner Prinzip, von der Flächenquadratur auszugehen, am besten anzuwenden wird; das übliche Verfahren, das mit der Regenmessung beginnt, scheint mir nicht so unmittelbar anschaulich zu sein und hat vor allem nicht den Vorzug, daß man höhere und weitere Gebiete gleich einfach und einheitlich damit beherrschen kann.

Erlauben Sie mir, mich bald wieder der analytischen Geometrie zu bedienen; ich gehe dann aus

1) von dem Einheitskreise



$$x^2 + y^2 = 1$$

und betrachte den Lehner, der von den Radienvektoren nach den Punkten $A(x=1 | y=0)$ und $P(x | y)$ gebildet wird. Um mit den üblichen Bezeichnungen in Übereinstimmung zu



Kommen, bezeichne ich seinen Flächeninhalt mit $\frac{1}{2}$ (denn dann ist der Bogen α P im üblichen Bogenmaß gleich φ).

3.) Unter dem goniometrischen Funktionen Cosinus und Sinus von φ verstehen wir nun die Längen der Koordinaten x und y des Grenzpunktes P unseres Sektors $\frac{1}{2}$:

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi.$$

Der Ursprung dieser Bezeichnung wird dabei freilich nicht klar, doch den kennt man überhaupt nicht recht; wahrscheinlich ist das Wort „sinus“ durch eine missverständliche Übersetzung eines arabischen Wortes ins Lateinische entstanden.¹⁾ Da wir nicht vom Bogenmaß ausgingen, können wir die inversen Funktionen - d. h. den doppelten Sektor als Funktion der Koordinaten - nicht gut, wie bei uns üblich, als „arcus“ bezeichnen; wohl aber liegt es nahe, analog dieser Wortbildung $\frac{1}{2}$ die „Area“ des Sinus bzw. Cosinus, d. h. eben die zu ihm gehörige Fläche, zu nennen und zu schreiben.

$$\varphi = 2 \text{ area sin } x = \text{arc sin } x, \quad \varphi = 2 \text{ area cos } x = \text{arc cos } x.$$

Dann kann indessen auch die gleichfalls recht zweckmäßige in England übliche Schreibweise:

$$\varphi = \cos^{-1} x, \quad \varphi = \sin^{-1} y$$

verwendet.

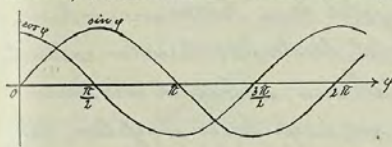
1) Vgl. Tropfke, Bd. II, pag. 212.

3.) Die weiteren goniometrischen Funktionen

$$\text{tang } \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \text{ctg } \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi},$$

in der älteren Trigonometrie auch \sec und cosec , werden als einfache Verbindungen jener beiden Grundfunktionen definiert. Ihre Einführung geschieht nur mit Rücksicht auf die Kürze der für das praktische Rechnen zu verwendenden Formeln; theoretische Bedeutung haben sie für uns nicht.

4.) Verfolgen wir die Koordinaten von P mit wachsender φ , so können wir uns qualitativ sofort die \cos - und



\sin -Kurve in einem rechtwinkligen Koordinatensystem darstellen. Wir erhalten die bekannten Wellen-

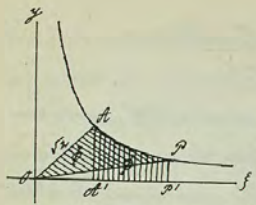
linien, die eine gewisse Periode 2π haben; dabei ist die Zahl π definiert als Inhalt des ganzen Einheitskreises (nicht, wie sonst, als Länge des Halbkreises).

Mit diesen Definitionen wollen wir nun noch einmal genau unsere Einführung der Logarithmus bzw. der Exponentialfunktion vergleichen. Da lagten wir zu Grunde

1.) eine gleichseitige Hyperbel, bezogen auf das Koordinatensystem ξ, η ihrer Asymptoten:

$$\xi \cdot \eta = 1;$$

die Halbachse dieser Hyperbel ist $O A = \sqrt{\xi}$, während



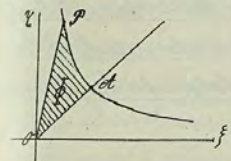
vorhin der Kreis dem Radius 1 hatte.
Wir betrachten nun den Inhalt der Portion zwischen der festen zu $\xi = 1$ gehörigen Ordinate Ob' und der beweglichen PP' ; heiße er Φ , so setzen wir $\Phi = \log \xi$, und daher drücken sich die Koordinaten von P durch Φ folgendermaßen aus:

$$\xi = e^\Phi, \quad \eta = e^{-\Phi}.$$

Sie bemerken eine gewisse Analogie mit dem Obigen, die vorläufig allerdings durch eine zweifache Umstimmung gestört wird: Einmal ist Φ jetzt kein Sektor, wie vorhin, dann aber drücken sich jetzt beide Koordinaten rational durch die eine Funktion e^Φ aus, während wir beim Kreise 2 Funktionen sind, wo einführen mußten. Wir werden nun aber sehen, daß diese Schwierigkeiten leicht zu beseitigen sind.

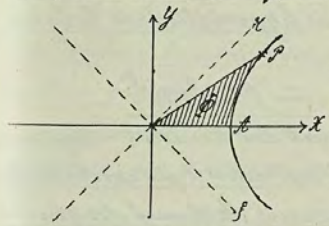
2) Zunächst bemerken wir, daß das Dreieck $OP'P$ den von der speziellen Lage von P unabhängigen Inhalt $\frac{1}{2} \cdot OP' \cdot P'P = \frac{1}{2} \xi \cdot \eta = \frac{1}{2}$ hat; insbesondere ist es also gleich dem Dreieck $Ob'A$, und wenn wir dieses zu Φ hinzunehmen, jenes aber abziehen, so erkennen wir, daß Φ als Inhalt eines Hyperbelsektors ObP zwischen den Radienvektoren nach dem Scheitel Ob und nach einem beweglichen Hyperbelpunkte P definiert werden kann -

genau wie vorhin beim Kreise; Fern im Vorzeichen noch bestehender Unterschied, (von 0 aus gesehen läuft der Bogen ObP vorhin nach links, jetzt nach rechts) beseitigen wir, indem wir die Hyperbel an Ob spiegeln d. h. ξ und η vertauschen; dann erhalten wir also als Koordinaten von P :



Wir erhalten also als Koordinaten von P :
 $\xi = e^{-\Phi}, \quad \eta = e^\Phi.$

3) Endlich führen wir statt der Asymptoten die Hauptachsen der Hyperbel als Koordinatenachsen ein, indem wir die Figur um 45° drehen. Nennen wir die neuen Koordinaten x, y , so sind die Gleichungen dieser Transformationen



indem wir die Figur um 45° drehen. Nennen wir die neuen Koordinaten x, y , so sind die Gleichungen dieser Transformationen

$$x = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}};$$

dadurch geht die Hyperbelgleichung über in $x^2 - y^2 = 2$, und der Sektor Φ erhält genau die Lage, wie vorhin beim Kreise. Die neuen Koordinaten von P sind folgende Funktionen von Φ

$$x = \frac{e^\Phi + e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{e^\Phi - e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}.$$

4) Es bleibt nur noch übrig, die ganze Figur im Ver-



hällung $1: \sqrt{2}$ zu verkleinern, damit die Halbachse der Hyperbel gleich 1 statt gleich $\sqrt{2}$ wird, genau wie vorher 1 der Kreisradius war. Dann hat in völliger Übereinstimmung mit dem vorigen der fragliche Faktor den Inhalt $\frac{1}{2} \Phi$, und wenn wir die neuen Koordinaten einfach wie der x, y nennen, werden sie gleich folgende Funktionen von Φ :

$$x = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}, \quad y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2},$$

die der Relation (Hyperbelgleichung) genügen:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Diese Funktionen nennt man hyperbolischen Cosinus und Sinus und schreibt sie

$$x = \cosh \Phi = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}, \quad y = \sinh \Phi = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2}.$$

Behandelt man also - das ist das Resultat - Kreis- und gleichseitige Hyperbel von der Halbachse 1 in wörtlich derselben Weise, so wird man das eine Mal auf die gewöhnlichen goniometrischen, das andere Mal auf die hyperbolischen Funktionen geführt, die einander völlig entsprechen. -

Es ist Ihnen bekannt, daß man sich dieser Funktionen \cosh und \sinh in vielen Fällen mit Vorteil bedient. Trotzdem aber haben wir hier, was die Behandlung der Hyperbel angeht, im Grunde einen Rückschnitt gemacht: während wir zuerst die Koordinaten ξ, η durch eine einzige

Funktion e^{Φ} rational darstellen konnten, brauchen wir jetzt deren 2, die durch eine algebraische Relation (die Hyperbelgleichung) verbunden sind. Es wird daher der Versuch nahe liegen, lieber einmal umgekehrt die goniometrischen Funktionen ganz entsprechend den ursprünglichen Entwicklungen für die Hyperbel zu behandeln; dies geht in der That ganz leicht, wenn man nur den Durchgang durchs Komplexe nicht scheut, und führt zur Aufstellung einer einzigen fundamentalen Funktion, durch die sich $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ ähnlich rational ausdrücken, wie $\cosh \Phi$ und $\sinh \Phi$ durch e^{Φ} , und die daher in der Theorie der goniometrischen Funktionen eigentlich die zentrale Rolle zu spielen berufen ist:

1) Wir führen dann zunächst in der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 1$ (wo $x = \cos \varphi, y = \sin \varphi$) die neuen Koordinaten

$$x + iy = \xi, \quad x - iy = \eta$$

ein, dann geht sie über in

$$\xi \cdot \eta = 1.$$

2) Die gewünschte zentrale Funktion ist nun, genau wie oben unter 1) bei der Hyperbel, die zweite Koordinate η ; bezeichnen wir sie mit $f(\varphi)$, so ist wegen der Transformationsgleichungen:

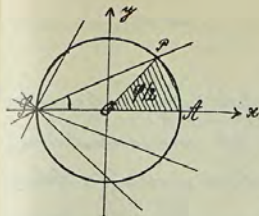
$$\eta = f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \xi = \frac{1}{f(\varphi)} = \cos \varphi - i \sin \varphi.$$

3) Aus den letzten Gleichungen ergibt sich sofort:

$\cos \varphi = \frac{f+y}{2} = \frac{f(\varphi) + (f(\varphi))^{-1}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{-f+y}{2i} = \frac{f(\varphi) - (f(\varphi))^{-1}}{2i}$,
 wodurch wir völlige Analogie mit den früheren Beziehungen
 zwischen $\cos \varphi$, $\sin \varphi$, e^{φ} erreicht haben. Kehrt man so
 von vorherigen die Analogie der Kreis- und Hyperbelfunktion
 neu hervor, so verliert die große Eulersche Entdeckung,
 daß $f(\varphi) = e^{\varphi}$ ist, das Ueberraschende, das sie sonst an
 sich hat.

Setzt man nicht eine ähnliche Reduktion von $\cos \varphi$ und
 $\sin \varphi$ auf eine Fundamentalfunktion auch möglich, wenn
 man im reellen Gebiet bleibt? Man gelangt in der That
 dann, wenn man unsere Figuren mit den Augen der
 projektiven Geometrie betrachtet. Wir können nämlich
 bei der Hyperbel die Koordinate φ , die uns die Funda-
 mentalfunktion liefert, definieren als Parameter in ei-
 nem Bündel von Parallelen $y = \text{konst.}$, das von projek-
 tiven Hauptpunkte aus in seiner Beziehung zur Hyper-
 bel betrachtet nichts ist, als ein Strahlenbündel mit
 einem (hier speziell einem der unendlich fernen) Hyperbel-
 punkte als Scheitel. Indem wir nun beim Kreise oder
 der Hyperbel allgemein den Parameter irgend eines solchen
 Bündels als Funktion des Flächeninhalts auffassen, wer-
 den wir zu einer anderen Fundamentalfunktion
 kommen - auch auf reellen Wege.

Wir betrachten dann beim Kreise das Bündel



durch den Punkt $P(-1, 0)$:

$$y = \lambda(x+1),$$

von λ der Parameter, wir hatten schon
 bei anderer Gelegenheit (§ 110) für
 die Koordinaten des Schnittpunktes P des zu
 λ gehörigen Strahles mit dem Kreise

ausgerechnet:

$$x = \cos \varphi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y = \sin \varphi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},$$

so daß

$$\lambda = \lambda(\varphi) = \frac{y}{x+1}$$

tatsächlich eine geeignete reelle Fundamentalfunktion ist.
 Da übrigens $\angle PPO = \frac{1}{2} \angle POA$, und $\angle POA = \varphi$ ist, folgt sofort,
 daß $\lambda = \tan \frac{\varphi}{2}$ ist; diese eindeutige Darstellung von $\cos \varphi$ und
 $\sin \varphi$ durch $\tan \frac{\varphi}{2}$ wird bei trigonometrischen Rechnun-
 gen vielfach gebraucht.

Der Zusammenhang von λ mit der früheren Fundamen-
 talfunktion $f(\varphi)$ folgt aus der letzten Formel sofort in der
 Gestalt:

$$\lambda = \frac{y}{x+1} = \frac{\frac{1}{2} \frac{f-f^{-1}}{f+f^{-1}}}{\frac{1}{2} \frac{f^2-1}{f^2+1}} = \frac{1}{2} \frac{f(\varphi)-1}{f(\varphi)+1},$$

oder umgekehrt:

$$f(\varphi) = x + iy = \frac{1-\lambda^2 + 2i\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

Die Einführung von λ kommt also schließlich einfach auf die
 Bestimmung einer linear gebrochenen Funktion von $f(\varphi)$ he-
 raus, die längs der reellen Kreisprojektion reell ist, dadurch vor-

den die Formeln zwar reell, aber dafür etwas komplizierter, als bei direkter Verwendung von $f(\varphi)$.

Ob man freilich den Vorteil der Realität gegen diesen Nachteil eintauschen will, das hängt davon ab, wie weit der einzelne mit komplexen Größen umzugehen versteht. Ich bemerke in dieser Hinsicht nur, daß die Physiker jetzt schon lange zum Gebrauch komplexer Größen übergegangen sind, besonders z. B. in der Optik, sowie sie mit Schwingungsgleichungen zu tun haben. Aber auch die Techniker, vor allem die Elektrotechniker mit ihren Vektordiagrammen beginnen sich neuerdings mit Vorteil der komplexen Größen zu bedienen. Man darf also wohl sagen, daß sich die Benutzung komplexer Größen in weiteren Kreisen endlich einzubürgern beginnt, wenn auch freilich zur Zeit noch die große Masse an der Beschränkung auf das Reelle festhält.

Wenn wir nunmehr, meine Herren, kurz den weiteren Aufbau der Theorie der goniometrischen Funktionen überblicken sollen, so haben wir zuerst zu nennen:

1) das Additionstheorem

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi$$

und eine analoge Formel für $\cos(\varphi + \psi)$. Daß diese Formeln relativ komplizierter aussehn, als bei der Exponentialfunktion, liegt natürlich nur darin begründet, daß wir hier

eben nicht die wahre Elementarfunktion vor uns haben; für diese, unser $f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ergibt sich genau die für e^{φ} geltende höchst einfache Formel

$$f(\varphi + \psi) = f(\varphi) \cdot f(\psi).$$

2) Von hier aus gelangt man zu den Ausdrücken der Funktionen der Vielfachen und Teile eines Winkels, von denen ich nur die beiden Formeln

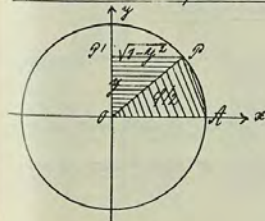
$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{1 - \cos \varphi}}{2}, \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{1 + \cos \varphi}}{2}$$

hervorhebe, die bei der Berechnung der ersten trigonometrischen Tafeln von großer Bedeutung gewesen sind. Die eleganteste Zusammenfassung der hierhin gehörigen Beziehungen ist gegeben in der „Moirreschen Formel“

$$f(n\varphi) = (f(\varphi))^n, \quad \text{wo } f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Moire, der ein Franzose war und in London in der Umgebung Newtons lebte, hat diese Formel 1730 in seinem Buche „Miscellanea analytica“ publiziert.

3) Von unserer ursprünglichen Definition von $\varphi = \sin \varphi$ aus kann man natürlich leicht eine Integraldarstellung der Inversen $\varphi = \sin^{-1} y$ ableiten. Der Sektor $\frac{\varphi}{2}$ (OP^2) des



Einheitskreises mit dem horizontal schraffierten Dreieck OP^2 zusammen wird von den Parallelen $y = 0$, y zur Abszissenachse und der Kurve $x = \sqrt{1 - y^2}$ begrenzt und hat daher den Inhalt



$\int_0^y \sqrt{1-y^2} dy$, da jenes Dreieck den Inhalt $\frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot 1^2 - \frac{1}{2} y \sqrt{1-y^2}$ hat, ist also

$$\int_0^y \sqrt{1-y^2} dy = \frac{1}{2} y \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \varphi.$$

Hieraus folgt durch einfache Umformung:

$$\varphi = \sin^{-1} y = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Man kann man, ganz wie beim Logarithmus, indem man den Integranden nach dem Binomischen Satze entwickelt und dann nach oberen Gedanken gliedweise integriert, die Potenzreihe für $\sin^{-1} y$ ableiten und daraus durch die Methode der Reihenumkehr die Sinusreihe selbst erhalten; so ist auch - ich sprach ja schon davon (S. P. 192) - Newton selbst vorgegangen.

4) Ich möchte hier lieber einmal den kürzeren Weg einschlagen, den Taylor's große Entdeckung eröffnet hat. Da schließt man zunächst aus der genannten Integralformel für den Differentialquotienten der Sinus selbst:

$$\frac{d \sin \varphi}{d \varphi} = \frac{dy}{d \varphi} = \sqrt{1-y^2} = \cos \varphi,$$

und ganz analog folgt

$$\frac{d \cos \varphi}{d \varphi} = -\sin \varphi.$$

Man ergibt sich sofort aus dem Taylor'schen Satze

$$\sin \varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \dots,$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \dots$$

Man sieht leicht, dass diese Reihen für jedes endliche, auch komplexe x konvergieren, und daher $\sin x$ und $\cos x$ sin

ganzem komplexen Gebiete als eindeutige, ganz transzendente Funktionen definiert sind.

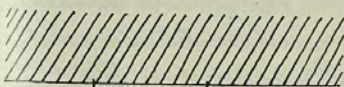
5) Vergleichen wir diese Reihen mit der Reihe von e^{φ} , so ergibt sich unmittelbar, dass die Fundamentalfunktion

$$f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i \varphi}$$

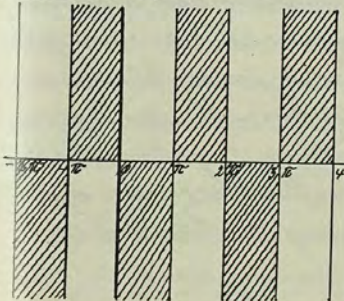
ist; dieser Schluss wird unabweisend erst möglich durch die Erkenntnis, dass $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ ebenso wie e^{φ} eindeutige ganze Funktionen sind.

6) Wir haben nun noch den Verlauf der komplexen Funktionen $\sin w$, $\cos w$ zu beschreiben. Dazu bemerke ich zuerst, dass die inversen Funktionen $w = \sin^{-1} z$ und $w = \cos^{-1} z$ je eine unendlichblättrige Riemannsche Fläche

z -Ebene:



w -Ebene: ($z = \cos w$)



mit den Verzweigungsstellen

$-1, +1, \infty$ liefern, und zwar

liegen über $z = \pm 1$ je unend-

lich viele Verzweigungspunkte

weiter, über $z = \infty$ aber zwei

unendlich hoher Ordnung.

Nun den Verlauf der Blätter

im Einzelnen besser zu verfol-

gen, betrachten wir wieder die

Verteilung der w -Ebene in

Gebiete, die der (schraffierten)

oberen und der (unschraffierten)



unteren x -Halbebene entsprechen. Für $z = \cos w$ entsteht sie durch die reelle Achse und die durch die Punkte $w = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ gelegten Parallelen zur imaginären Achse, wobei - wie aus der Figur ersichtlich - die entstehenden Dreiecksgebiete, die sämtlich ins Unendliche reichen, abwechselnd zuschnappen und freilassen sind. An den Punkten $w = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ (die $y = +1$ entsprechen) und den Punkten $w = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$ (die $y = -1$ entsprechen) stoßen immer 4 Dreiecke zusammen, entsprechend den 4 Halbblättern der Riemannschen Fläche, die an jedem der entsprechenden über den Stellen $z = \pm 1$ liegenden Verzweigungspunkte zusammenhängen. Galt man innerhalb einer Dreiecks nach oben oder unten ins Unendliche, so nähert sich $\cos w$ beliebig dem Werte $z = \infty$; daß 2 getrennte Scharen von je unendlichvielen Dreiecken ins Unendliche reichen, entspricht also genau dem Umstande, daß auf der Riemannschen Fläche bei $z = \infty$ 2 getrennte Scharen von unendlichvielen Blättern untereinander zusammenhängen. - Für $z = \sin w$ gilt ganz analoges, nur ist die Figur in der w -Ebene um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben zu denken. - In den Figuren bestätigen sich auch unsere früheren Angaben über die Natur des wesentlich singulären Punktes bei $w = \infty$, wie wir sie gelegentlich der Erwähnung des Picard'schen Satzes machten (S. 355).

2. Trigonometrische Tafelwerke.

Ich beende damit den kurzen Überblick über die Theorie der trigonometrischen Funktionen und Kränze auf das zu sprechen, was für die Praxis die Hauptsache ist, nämlich auf die trigonometrischen Tafeln; ich will dabei auch gleichzeitig über die Logarithmentafeln sprechen, die ich bis hierhin zurückgestellt habe, da die Tabulierung der Logarithmen von Anfang an bis heute mit der der trigonometrischen Tabellen Hand in Hand geht. Wie die Logarithmentafeln in ihrer heutigen Form zu Stande gekommen sind, das ist eine gerade auch für den Schulmathematiker gewiß außerordentlich wichtige und interessante Frage. Ich kann nun natürlich an dieser Stelle die äußerst langwierige Entwicklung der Tafelwerke Ihnen nicht vollständig vorführen, sondern ich will nur einige wenige der markantesten Erscheinungen herausgreifen, um Ihnen einen ungefähren historischen Überblick zu vermitteln. Über die andern, gleichfalls vielfach sehr wichtigen Werke, die das Bild ergänzen, mögen Sie sich etwa bei Tropfke oder, was Logarithmentafeln angeht, in dem sehr ausführlichen Nachwort in Hechtmanns Referat über numerisches Rechnen (Encykl. I. F.) orientieren.

An erster Stelle habe ich die Gruppe von H. Rein trigonometrischen Tafeln



zu nennen, wie sie sich vor Erfindung der Logarithmen entwickelt haben. Man besaß solche Tafeln schon im Altentum und zwar ist uns als erste

1) die Lehrertafel des Ptolemäus überliefert, die er für astronomische Zwecke um Jahr 150 n. Chr. zusammengestellt hat. Sie befindet sich in seinem Werke, "Geogale syntaxis", in dem er auch das nach ihm genannte Welt-system entwickelt, und das ich Ihnen im "Lehrdruck" hier vorlege. Auf dem Kunzige über die Straber ist uns dieses Werk unter dem vielgebrauchten Titel "Almagest" überkommen, der eine mit dem arabischen Artikel "al" versehen Entstellung des griechischen Titels sein mag. Die Tafel schreitet von 30 zu 30 Minuten fort und gibt nicht direkt den Sinus des Winkels α , sondern die zu seinem Bogen gehörige Sehne (also $2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$). Die Werte der Sehnen sind in dreistelligen Sexagesimalbrüchen angegeben, also in der Form $\frac{a}{60} + \frac{b}{3600} + \frac{c}{216000}$, wo a, b, c ganze Zahlen zwischen Null und 59 sind; für uns das schwierigste ist aber, daß diese a, b, c natürlich in griechischen Zahlzeichen, das sind Zusammensetzungen von griechischen Buchstaben, geschrieben sind. Weiterhin finden sich noch die Werte der Differenzen, die eine Interpolation pro Minute erlauben. Worüber gibt beispielsweise Tropfke in Vol. II

1) ed. Heiberg. Leipzig 1898/1903

S. 116 eine Übersetzung eines Stückes der Tafel in moderne Schreibweise, an der Sie sich näher orientieren wollen. - Was die Berechnung dieser Tafel angeht, so hat Ptolemäus vor allem das ihm in der Gestalt der Sätze von Schuennicke (des "ptolemäischen" Satzes) bekannte Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen, speziell auch die oben angegebene Formel für $\sin \frac{\alpha}{2}$, benutzt (also außer rationalen Operationen die Operation des Quadraturwurzels), und er hat dann noch ein Interpolationsverfahren angewendet.

2.) Wir gehen nun über 1000 Jahre weiter bis zu der Zeit, wo im Oberrheinland trigonometrische Tabellen das erste Mal berechnet werden. Das ist vor allem zu nennen Regiomontanus (1436-1476), der eigentlich Johannes Müller hieß und seinen lateinischen Namen nach seiner Heimatstadt Königsberg (bei Heilbrunnhausen) annahm. Er hat verschiedene trigonometrische Tabellen berechnet, in denen sich deutlich der Übergang von dem Resten des Sexagesimalsystems zum reinen Dezimalsystem zeigt. Man gab damals nicht, wie heute, die trigonometrischen Linien als Brüche für den Radius 1 an, sondern berechnete sie für Kreise von sehr großen Radien, so daß sie dann - bei Erhaltung der gleichen Genauigkeit - zu ganzen Zahlen wurden; diese großen Zahlen selbst freilich schneidet man damals schon dezimal, aber in der Wahl des Radius fanden



sich noch lange Stücklänge an das Sexagesimalsystem: In der ersten Tafel der Regionmontan ist der Radius gleich 6000000 angenommen und erst in der zweiten zum ersten Male gleich einer rein decimalen Zahl 10000000, womit der vollständige Anschluss an das reine Decimalsystem gewonnen ist; durch einfaches Einfügen eines Kommas erscheint die Zahl dieser Tafeln im heutigen Sinne als Decimalbruch. Diese Tafeln der Regionmontan sind erst lange nach seinem Tode gedruckt worden, und zwar in dem Werke seines Lehrers G. Peurbach, „Tractatus super propositiones Ptolemaei de sinibus et chordis“¹⁾. Beachten Sie übrigens, daß auch dieses Werk, wie so viele andere grundlegende mathematische Werke - Cardanus und Klügel hatten wir schon kennen gelernt, und weitere werden wir sogleich sehen - in den vierziger Jahren des 16. Jahrhunderts in Nürnberg gedruckt wurde. Übrigens hatte Regionmontan selbst auch meist in Nürnberg gelebt.

3) Ich lege Ihnen weiter ein Werk von größter allgemeiner Bedeutung vor: „Opus Hoppernikus, de revolutionibus orbium coelestium“²⁾, das Buch in dem das „Hoppernikanische Weltsystem“ entwickelt wird. Hoppernikus lebte 1473 - 1543 in Thorn, dieses sein Hauptwerk erscheint

1) Norimbergae, ap. Jo. Petreium 1541.

2) Norimbergae, ap. Jo. Petreium 1543.

aber wiederum in Nürnberg nur zwei Jahre nach Regionmontan, dessen Tafel Hoppernikus wohl nicht zur Hand hatte; daher mußte er sich zur Durchföhrung seiner Theorie selbst die kleine Sinustafel berechnen, die Sie hier finden.

4) Doch diese Tafeln genigten dem Bedürfnis der Astronomen wohl keineswegs, und so sehen wir einen Schüler und Freund des Hoppernikus bald an ein viel größer angelegtes Werk herangehen. Es ist Rhätikus, was wiederum ein künstlich latinisierter diemal nach dem Heimatlande (Vorarlberg) gewählter Name ist; er lebte 1514 - 1596 und war Professor an Wittenberg. Sie müssen das alles immer auch auf dem Hintergrund der allgemeinen Geschichte beachten; so sind wir hier im Zeitalter der Reformation und wissen ja, daß damals Wittenberg und ebenso auch die freie Reichsstadt Nürnberg Hauptzentren des geistigen Lebens geworden waren. Doch allmählich verschiebt sich während der Reformationskämpfe der Schwerpunkt des politischen und geistigen Lebens immer mehr von den Städten nach den Fürstentümern hin, und während bisher alles in Nürnberg gedruckt wurde, erscheint das gewaltige Tafelwerk des Rhätikus unter protektoriärer Unterstützung des Kurfürsten von der Pfalz und trägt danach seinen Namen „Opus palatinum“¹⁾

1) Heidelbergae 1576.



es kam erst kurz nach dem Tode des Rhätikus heraus. Diese Tafel ist sehr viel vollständiger als die vorigen; sie enthält die Werte der trigonometrischen Linien 10-stellig von $10''$ zu $10''$; freilich finden sich in ihr noch recht viele Fehler.

5.) Eine sehr vervollkommnete Neuauflage dieser Tafel gibt weiterhin Pitiscus aus Grünberg in Schlesien (1561-1613), Kaplan des pfälzischen Kurfürsten, heraus; es ist der wieder mit fürstlichen Gelde gedruckte Thesaurus mathematicus¹⁾, der die trigonometrischen Zahlen in Intervallen von $10''$ und $15''$ stellig enthält. Das Werk ist wesentlich fehlerfreier und auch kompakter gedruckt, als das des Rhätikus.

Wir müssen uns vergegenwärtigen, daß alle diese Tafeln im wesentlichen immer nur mit der Halbierungsfornel und durch Interpolation berechnet sind, da man damals noch nicht die unendlichen Reihen für sich und wo besaß; dann bekommen wir erst den richtigen Respekt vor dem ungeheuren Fleiß und der Arbeit, die in diesen gewaltigen Werken steckt. -

Unmittelbar hieran schließt die Entwicklung der zweiten Gruppe, der

Arithmetisch-trigonometrischen Tafeln,

1) Frankfurt 1613.

und es ist ein merkwürdiges Zusammentreffen, eine Ironie der Geschichte gewissermaßen: Kein Falor, nachdem mit Pitiscus die Tafeln der trigonometrischen Linien eine gewisse Vervollständigung erreicht haben, erscheinen die ersten Logarithmen und machen jene eigentlich überflüssig, indem fortan jeder statt der Sinus und Cosinus selbst, so gleich ihre Logarithmen benützt. Diese erste Logarithmentafel habe ich schon genannt, es ist die

1.) „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ Keplers aus dem Jahre 1614. Kepler hatte damit in allererster Linie die Erleichterung der trigonometrischen Rechnungen im Auge, so sehr, daß er gar nicht erst die Logarithmen der natürlichen Zahlen angab, sondern von vornherein die siebenstelligen Logarithmen der trigonometrischen Linien in Intervallen von je einer Minute.

2.) Die wirkliche Ausgestaltung der Logarithmentafeln in der heute üblichen Form knüpft an den Engländer Henry Briggs (1556-1630) an, der mit Kepler in Verbindung stand. Er hat den großen Vorteil erkannt, den Logarithmen mit der Basis 10 für das praktische Rechnen haben, indem sie sich unserer decimalen Schreibweise besser anpassen, und so führt er denn diese Basis an Stelle der Keplerschen ein; das gibt dann die „künstlichen Logarithmen“, die man auch



wohl nach Briggs selbst nennt. Zur Berechnung dieser Logarithmen hat Briggs eine Reihe interessanter Methoden ausgebildet, die die Bestimmung jeder einzelnen Logarithmus mit beliebiger Genauigkeit gestatten. Briggs' Werk führt den Titel „Arithmetica logarithmica“¹⁾; in ihm sind übrigens die Logarithmen der natürlichen Zahlen selbst zusammengestellt, nicht mehr wie bei Naper die der Winkel-funktionen. Freilich ist Briggs mit seinen Rechnungen nicht durchgekommen; er gibt nur die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 20000 und 90000 bis 100000 an, diese aber auf 14 Stellen. Werkwürdig enthält nämlich gerade die ältesten Tafeln, die meisten Stellen, während man sich in der Neuzeit für die meisten Zwecke mit sehr wenigen Stellen begnügt; ich kann nie darauf noch zurück. Briggs hat weiterhin noch die krümmlichen Logarithmen der trigonometrischen Linien berechnet und 10-stellig in Intervallen von 10" in seiner „Trigonometria britannica“²⁾ erscheinen lassen.

3) Die Lücke in Briggs' Tafel hat zuerst der Holländer Adriaan Vlacq ergänzt, der in Ganda bei Leyden lebte und Mathematiker, Buchdrucker und Buchhändler.

1) Londini 1624.

2) Goudae 1633.

er war. Er gibt eine zweite Auflage des Briggs'schen Werkes¹⁾ heraus, die nun die Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000 auf nur noch 10 Stellen enthält. In ihr haben wir die Haupttafel aller unserer heutigen Tafeln für die Logarithmen der ganzen Zahlen zu sehen.

Was nun die weitere Entwicklung der Tafeln angeht, so kann ich hier nur noch ganz allgemein die Punkte angeben, in denen in der Folgezeit der Fortschritt gegen die genannten ersten Stufen besteht.

a) Zuerst greift da ein Fortschritt der Theorie wesentlich ein, indem man in den logarithmischen Reihen ein äußerst brauchbares neues Hilfsmittel zur Berechnung der Logarithmen erhielt. Davon wußten die Berechner jener ersten Tafeln noch nichts. Naper hatte, wie wir früher sahen, seine Logarithmen durch Verwendung der Differenzgleichung, also durch successive Addition von $\frac{\Delta x}{x}$ berechnet und daneben sich auch der Interpolation bedient. Bei Briggs tritt als wichtigstes Hilfsmittel das Quadratwurzelzeichen auf; er bemerkt, daß man gleichzeitig mit den Logarithmen von a und b jedesmal auch den $\log \sqrt{a \cdot b} = \frac{1}{2} (\log a + \log b)$ kennt; so hat wohl auch Vlacq gerechnet.

b) Wesentliche Fortschritte werden auch in einer zweck-

1) Novus Briggsii arithmetica logarithmica. Ed. sec. aucto per Adr. Vlacq. - Goudae 1628.



wichtigere Druckanordnung der Tafeln erzielt, die es ermöglicht, unser Material in übersichtlicher Form auf engem Raume zu vereinigen.

2.) Vor allem wird die Korrektheit der Tafeln beträchtlich gesteigert, indem die in den älteren Tafeln, besonders in den letzten Lücken noch vielfach enthaltenen Fehler durch sorgfältige Nachprüfung ausgemerzt worden.

Unter der großen Menge der Tafeln, die so entstanden, brauche ich wohl nur die allerberühmteste zu nennen,

4.) den „Thesaurus logarithmorum completus“ (Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln), den der österreichische Artillerieoffizier Vega 1794 in Leipzig erscheinen ließ. Das Original ist selten geworden, es erschien jedoch 1886 in Florenz ein phototypischer Abdruck. Der Thesaurus enthält die 10-stelligen Logarithmen der natürlichen Zahlen und der trigonometrischen Funktionen in einer Anordnung, die seitdem typisch geworden ist; so sehen Sie z. B. schon die kleinen zur Vereinfachung des Interpolierens bestimmten Entfernungstafelchen.

Wenn wir nun zum 19. Jahrhundert nur soender, so bemerken wir eine weitgehende Popularisierung der Logarithmen, die einmal damit zusammenhängt, daß

in den zwanziger Jahren die Logarithmen auf der Hand eingeführt worden, dann damit, daß sie mehr und mehr Anwendung in der physikalischen und technischen Praxis finden. Dabei mußten sie sich freilich eine beträchtliche Kürzung ihrer Stellenzahl gefallen lassen, denn sowohl der Bedürfnis der Schule, als auch der Praxis drängte auf den Gebrauch nicht aller voluminöser Tafeln, sondern zumal 3 oder 4 Stellen für die bei den meisten praktischen Zwecken nötige Genauigkeit vollkommen ausreichen. Freilich hatten wir zu meiner Schulkzeit noch 4-stellige Tafeln, und man verteidigte diese Stellenzahl wohl damit, daß der Schüler so einen Eindruck von der „Größe der Zahlen“ bekommen müsse. Heute ist man allgemein utilitaristischer gesinnt und benutzt stets durchweg drei- oder vier-, höchstens 5-stellige Tafeln. Drei beliebig herausgegriffene moderne Tafeln lege ich Ihnen heute noch vor. Ein ist eine kleine handliche Tafel von Schubert,¹⁾ die vierstellig ist; Sie finden da al lehand Hilfsmittel, wie zwei farbigen Druck, Wiederholung der Überschriften oben und unten an jeder Seite u. dgl. angewandt, um Missverständnisse bei der Benutzung möglichst auszuschließen. Noch viel raffinierter eingerichtet ist eine moderne amerikanische 4-stellige Tafel und 4-stellige Tafel... (Samml. Götsche, Leipzig 1888).



Tafel von Huntington, wo z. B. die Blätter mit verschiedenen Vorsprünge und Ausschnitten versehen sind, die ein sofortiges Aufschlagen der gewünschten Seite ermöglichen sollen u. s. f. Endlich führe ich Ihnen hier noch einen Rechenchieber vor, der ja bekanntlich nichts als eine dreistellige Logarithmentafel in der allerbequemsten Gestalt eines mechanischen Rechenapparates darstellt. Sie alle kennen gewiß dieses Instrument, das ja heutzutage jeder Ingenieur für seine Rechnungen ständig bei sich führt.

Wir sind nun aber noch nicht am Ende der Entwicklung angelangt, sondern können ziemlich klar übersehen, wie sie weiter gehen wird. Nämlich die Benutzung der Rechenmaschine, von der wir auch hier sprachen, mehr und mehr aus, und sie macht die Logarithmentafel überflüssig, da sie ein viel rascheres und sicheres direktes Multiplizieren gestattet. Freilich ist die Maschine heute noch so teuer, daß nur große Rechnungsbüros sie sich anschaffen können, aber wenn sie erst einmal wesentlich verbilligt sein wird, wird eine neue Phase des numerischen Rechnens beginnen. Was die Trigonometrie angeht, werden dann die alten Tafeln von Petiscus, die bei ihrer Geburt sobald unmodern wurden, erst recht zu Lehren kommen: sie liefern direkt die trigonometrischen

1) G. V. Huntington, four place tables, abridg. edit. (Cambridge Mass. 1907).

Werte, mit denen die Rechenmaschine unter Vermeidung des Umweges über die Logarithmen unmittelbar bequem zu rechnen gestattet.

3. Anwendungen der goniometrischen Funktionen.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, uns einen Überblick über die Anwendung der goniometrischen Funktionen zu verschaffen; wir ziehen da 3 Gebiete in Betracht:

A.) die Trigonometrie, die ja überhaupt den Ausgangspunkt der Behandlung der goniometrischen Funktionen gab;

B.) die Akustik, wo insbesondere die Lehre von den kleinen Schwingungen ein weiteres Anwendungsgebiet darstellt;

C.) die Darstellung periodischer Funktionen durch trigonometrische Reihen, die ja bekanntlich bei den verschiedensten Fragen eine sehr wichtige Rolle spielt.

Wenden wir uns sogleich dem ersten Gegenstand zu:

A. Trigonometrie, insbesondere sphärische Trigonometrie.

Wir haben hier eine uralte Wissenschaft vor uns, die schon in Ägypten in hoher Blüte stand, gefördert durch die Anforderungen zweier wichtiger Wissenschaften: der Geodäsie, die die Lehre von Erden und der Astronomie, die die sphärischen Dreiecke brauchte. Für die Geschichte der Trigonometrie



metrie haben wir eine reichhaltige Bibliographie in St. v. Brunn-mühle, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie¹⁾ über die praktische Seite der Trigonometrie, informiert man sich am besten in Ch. Hammers, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie²⁾, über die theoretische in dem zweiten Bande der oft genannten Encyclopädie der Elementarmathematik von Weber-Wellstein.³⁾

Ich kann im Rahmen dieser Vorlesung natürlich nicht die ganze Trigonometrie systematisch entwickeln, das ist Sache spezieller Studien; übrigens wird ja hier in Vorlesungen die praktische Trigonometrie in den regelmäßigen Vorlesungen über Geodäsie und sphärische Astronomie ausgiebig berücksichtigt. Viel mehr möchte ich lediglich über ein sehr interessantes Kapitel der theoretischen Trigonometrie zu Ihnen sprechen, das trotz seines hohen Alters noch heute nicht als abgeschlossen gelten kann, sondern noch immer viele unbearbeitete Fragen und Probleme relativ elementaren Charakters enthält, deren Bearbeitung mir nicht unlohnend erscheint: ich meine die sphärische Trigonometrie. Sie finden diesen Gegenstand gerade auch in Weber-Wellstein sehr ausführlich behan-

1) 2 Bände. Leipzig 1900 u. 1903.

2) Stuttgart 1906.

3) Encyclopädie der element. Geometrie. Bearb. v. H. Weber, F. Wellstein, W. Jacobsthal. 2. Aufl. (Leipzig 1907).

delte, und zwar kommen dort namentlich die Gedanken zur Geltung, die Stüdy in seiner fundamentalen Arbeit Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen¹⁾ entwickelt hat. Ich will Ihnen im folgenden einen Überblick über alle hierhin gehörigen Theorien zu geben versuchen und insbesondere auch auf die noch offenen Fragestellungen hinweisen.

Die elementare Auffassung einer sphärischen Dreiecks bedarf kaum der näheren Erläuterung: drei Punkte der Kugel bestimmen (wenn nicht gerade 2 von ihnen



diametral entgegengesetzt liegen) genau ein Dreieck, in dem jeder der 3 Winkel und jede Seite zwischen 0 und π liegt. Es erweist sich aber bei weitergehenden Untersuchungen bald als zweckmäßiger, die Seiten und Winkel als unbeschränkt veränderliche Größen anzunehmen, die auch größer als π oder 2π oder Vielfache davon werden können; man hat dann von Seiten, die sich überschlagen, und Winkeln, die sich mehrfach um ihren Scheitel winden, zu reden. Dabei wird es nötig, über die Vorzeichen dieser Größen bzw. den Sinn, in dem man sie zu messen hat, bestimmte Verabredungen

¹⁾ Abhandl. der math.-phys. Klasse der K. Sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften. Bd. IX. Nr. II (Leipzig 1895).



zu treffen. Es ist nun das Verdienst des großen Leipziger Geometers Weibull, wie überhaupt in der Geometrie, so auch in der sphärischen Trigonometrie das Prinzip der Vorzeichen konsequent zur Geltung gebracht zu haben, womit erst den allgemeinen Untersuchungen mit unbeschränkt veränderlichen Größen Bahn gebrochen war; besonders kommt hier die Arbeit, Entwicklung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in größtmöglicher Allgemeinheit in Betracht.

Diese Vorzeichenbestimmungen beginnen damit, daß man einen bestimmten Drehungssinn festlegt, in dem man nun jeden Punkt A der Kugel den Winkel positiv messen will; ist das für einen beliebigen Kugelpunkt



geschehen, so überträgt sich denselbe Kom nach der Stetigkeit sofort auch auf alle anderen Kugelpunkte. Wir mögen etwa, wie es üblich ist, dem bei Betrachtung von der Oberseite der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Umlaufssinn als positiv nehmen. Ebenso müssen wir zweitens jedem größten Kreise der Kugel einen Durchlaufungssinn zuordnen, nur können wir hier nicht mit Fortsetzung für einen Kreis

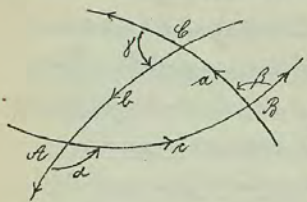
1) Berichte über die Verhandl. der K. Sachs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Klasse. Bd. 12. (1860) - Ges. Werke I (Leipzig 1886), pag. 74 ff.

und stetigen Übergang zu allen anderen auskommen, da man jeden Kreis mit jedem andern auf zwei wesentlich verschiedene Arten zur Deckung bringen kann. Wir werden daher jedem in Betracht kommenden Kreise einmal einen Sinn zuordnen und auch einen und demselben Kreis gewisse Maßzahlen als zwei verschiedene Gebilde betrachten, je nachdem wir ihm den einen oder anderen Sinn beigelegt haben. Nach diesen Festsetzungen läßt sich jedem größten Kreise unendlich ein Pol P zuordnen, nämlich derjenige seiner beiden Pole im elementaren Sinne, vor dem er sich im Sinn als positiv erscheint; ebenso gehört umgekehrt jedem Punkte eindeutig ein „Polkreis“ mit bestimmtem Umlaufssinne zu. Damit ist der in der Trigonometrie so wichtige, Polarisierungsprozeß völlig eindeutig festgelegt.

Sind nun drei Punkte A, B, C auf der Kugel gegeben, so sind noch einige Angaben nötig, ehe ein sphärisches Dreieck mit diesen Ecken eindeutig bestimmt ist. Zunächst muß auf jedem der 3 größten Kreise durch A, B, C ein Sinn festgelegt sein und angegeben werden, wie oft man auf ihm in diesem Sinne herumlaufen muß, ehe man von B nach C, von C nach A, von A nach B gelangt. Tre so bestimmten Längen a, b, c, die beliebige reelle Größen sein können,



heissen Seiten des sphärischen Dreiecks; natürlich sind sie auf die Kugel von Radius 1 bezogen gedacht. Die Winkel werden dann so definiert: α entsteht durch diejenige Drehung im positiven Sinne, die aus dem in O verminderten positiven Sinne B A den von ihm ausgehenden positiven Sinne O B macht, wobei noch additiv hinzutretenden



Vielfache von π willkürlich gegeben werden dürfen, und analoges gilt für die anderen Winkel. Betrachten wir ein gewöhnliches Elementardreieck, wie nebenstehend angedeutet, und legen die Richtungen der Seiten so fest, daß a, b, c kleiner als π werden, so werden, wie man sieht, die Winkel α, β, γ nach unserer neuen Definition die stumpfen Winkel des Dreiecks, nicht wie bei der elementaren Festsetzung seine Innenwinkel.

Dies hierbei, bei Ersetzung der gewöhnlich gewessenen Dreieckswinkel durch ihre Supplemente, die Formeln der sphärischen Trigonometrie sich symmetrischer und übersichtlicher gestalten, ist eine altbekannte Erscheinung. Den tieferen Grund dafür können wir im folgenden erblicken: Der oben erwähnte Polaritätsverfug gibt zu jedem auf Grund der Möbiusschen Vereinbarung

gen festgelegten Dreiecke völlig eindeutig ein anderes Dreieck, das, Polardreieck des ersten, und man sieht leicht ein, daß dasselbe bei Zugrundelegung unserer neuen Definitionen einfach die Winkel des Ausgangsdreiecks zu Seiten und dessen Seiten zu Winkeln hat. Folglich muß jede auf Grund dieser Beziehung ausgesprochene Formel der sphärischen Trigonometrie auch gelten, wenn wir in ihr a, b, c bzw. mit α, β, γ vertauschen, so daß stets eine einfache Symmetrie vorhanden sein muß. Bei der elementaren Winkel- und Seitenmessung hingegen besteht nicht diese einfache Symmetrie, sondern die Beziehung zwischen Dreieck und Polardreieck hängt davon ab, wie man im einzelnen Fälle Winkel und Seiten annimmt und über die Doppeldeutigkeit des Poles einer ohne Hülfskreis gegebenen Kreises entscheidet.

Es ist nun klar, daß von den so definierten 6 Bestimmungsstücken des sphärischen Dreiecks nur drei unabhängig von einander kontinuierlich variabel sein können, etwa zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie stellen eine Anzahl von Relationen zwischen ihnen, oder - genauer gesagt - von algebraischen Relationen zwischen ihrem 16 Cosinus und Sinus dar, durch die nur 3 dieser 16 Größen willkürlich variabel gelassen werden können, wäh-



rend die anderen 9 algebraisch von ihnen abhängen; indem wir zu den \cos und \sin übergehen, leiten wir schließlich auf die Festlegung der additiv hinzu tretenden Vielfachen von 2π Verzicht. Fassen wir die Trigonometrie überhaupt als Subgriff aller möglichen solchen algebraischen Relationen auf, so werden wir moderner Denkweise entsprechend ihre Aufgabe auch so fassen können: Wir deuten die Folgen

$$x_1 = \cos a, x_2 = \cos b, x_3 = \cos c, x_4 = \cos d, x_5 = \cos \beta, x_6 = \cos \gamma,$$

$$y_1 = \sin a, y_2 = \sin b, y_3 = \sin c, y_4 = \sin d, y_5 = \sin \beta, y_6 = \sin \gamma$$

als Koordinaten eines zwölfdimensionalen Raumes R_{12} ; die Gesamtheit aller derjenigen seiner Punkte, die wirklich möglichen sphärischen Dreiecken a, \dots, γ entsprechen, stellt eine dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit M_3 dieses R_{12} dar, und diese M_3 in R_{12} soll studiert werden.

Damit ist die sphärische Trigonometrie der allgemeinen analytischen Geometrie mehrdimensionaler Räume eingeordnet.

Diese M_3 muß nun verschiedene einfache Symmetrien besitzen. So hatte der Polarisierungsprozeß ergeben, daß man durch Vertauschung von a, b, c mit a, β, γ stets wieder ein sphärisches Dreieck erhält; in unsere neue Sprechweise übertragen heißt das, daß man aus jedem Punkte der M_3 einen weiteren ihr angehörigen erhält, indem man $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ beziehungsweise mit

$x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6$ vertauscht. Weiterhin existieren zu jedem Dreieck, entsprechend der Zerlegung des Raumes in 8 Oktanten durch die Ebenen der 3 größten Kreise, 7 Nebenprodukte, deren Stücke aus denen des ursprünglichen durch Vorzeichenwechsel und Addition von 2π hervorgehen; das gibt zu jedem Punkte der M_3 7 weitere Punkte deren Koordinaten x_1, \dots, y_6 durch Vorzeichenwechsel entstehen. Die Gesamtheit dieser Symmetrien führt schließlich zu einer gewissen Gruppe von Vertauschungen und Vorzeichenwechseln der Koordinaten des R_{12} , die die M_3 in sich transformiert.

Die wichtigste Frage ist nun die nach den algebraischen Gleichungen, denen die Koordinaten der Punkte von M_3 genügen und die die Gesamtheit der trigonometrischen Formeln bilden. Da immer $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ ist, haben wir zunächst einmal die 6 quadratischen Relationen:

$$(1) \quad x_i^2 + y_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

die - geometrisch gesprochen - 6 Zylinderflächen zweiter Ordnung $F^{(2)}$ durch die M_3 darstellen.

Weitere 6 Formeln gibt der Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie, der in unserer Bezeichnung heißt:

$$\cos a = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos d,$$

woraus durch Polarisieren entsteht:

$$\cos d = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a;$$

diese Gleichungen nebst 4 weiteren durch zyklische Ver-



tauschung von a, b, c und α, β, γ entstehenden Formeln bestimmen im ganzen 6 kubische Flächen $F^{(3)}$ durch die H_3 :

$$(1) \ x_1 = x_2 x_3 - y_2 y_3, \ x_4, \ x_5 = x_6 x_7 - y_5 y_7, \ x_8 = x_9 x_{10} - y_8 y_{10},$$

$$(2) \ x_4 = x_5 x_6 - y_5 y_6, \ x_1, \ x_2 = x_3 x_4 - y_3 y_4, \ x_7 = x_8 x_9 - y_7 y_9.$$

Sichtlich können wir noch den Sinussatz heranziehen, der sich durch das Verschwinden der Unterdeterminanten folgender Matrix ausdrückt:

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha, & \sin \beta, & \sin \gamma \\ \sin \alpha, & \sin \beta, & \sin \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ y_4, & y_5, & y_6 \end{vmatrix}$$

oder ausgeschrieben:

$$(3) \ y_2 y_6 - y_3 y_5 = y_3 y_4 - y_1 y_6 = y_1 y_5 - y_2 y_4 = 0.$$

Das stellt 3 quadratische $F^{(2)}$ dar, von denen allerdings nur 2 linear unabhängig sind. - Es haben wir im Ganzen 15 Gleichungen für unsere H_3 im R_{12} aufgestellt.

Um reichen zur Festlegung einer dreidimensionalen Gebilde im R_{12} im allgemeinen keineswegs 12 - 3 - 9 Gleichungen hin, da schon in der gewöhnlichen Geometrie der R_3 bekanntlich keineswegs jede Raumkurve als solcher Schnitt zweier algebraischer Flächen darstellbar sein braucht, das einfachste Beispiel ist da die Raumkurve dritter Ordnung, zu deren Festlegung mindestens drei Gleichungen notwendig sind. Man sieht auch in unserem Falle leicht, daß die 9 Gleichungen (1) und (2) die H_3 noch nicht festlegen; es kann nämlich be-

kanntlich aus dem Sinussatz der Sinussatz, nur bis auf ein Vorzeichen hergeleitet werden, das man dann durch geometrische Überlegungen zu bestimmen pflegt. Man wird nun zu wissen wünschen, welche und wieviele der trigonometrischen Gleichungen denn eigentlich unsere H_3 vollkommener bestimmen. Überhaupt möchte ich hier 4 bestimmte Fragen formulieren, auf die die bisherige Literatur keine präzise Antwort zu geben scheint; es könnte sich wohl lohnen, sie eingehend zu untersuchen, und das dürfte auch nicht einmal besonders schwer sein, wenn man sich nur eine gewisse Geschicklichkeit in der Handhabung der Formeln der sphärischen Trigonometrie angeeignet hat. Meine Fragen sind:

- 1) Was ist die Ordnung der H_3 ?
- 2) Welcher sind die niedersten Gleichungen, durch die sich die H_3 rein darstellen läßt?
- 3) Welcher ist das volle System der unabhängigen die H_3 darstellenden Gleichungen, d. h. der Gleichungen $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$, aus denen die Gleichung jeder anderen durch H_3 gehenden Fläche mit ganzen rationalen Faktoren m_1, \dots, m_n linear in der Form $m_1 f_1 + \dots + m_n f_n = 0$ komponierbar ist? Hieran können mehr Gleichungen nötig sein, als unter 2) verlangt.
- 4) Welche algebraischen Identitäten (sog. Syzygien)



bestehen zwischen diesen n Formeln f_1, \dots, f_n ?

Man kann sich über diese Dinge an Untersuchungen orientieren, die in genau derselben Richtung von nur wenig verschiedener Fragestellung ausgehend bereits vorliegen. Sie sind in der Göttinger Dissertation von Fil. Chisholm¹⁾ (der jetzigen Frau Young) von 1894 enthalten, die übrigens die erste von einer Dame in Preußen angefertigte Doktorarbeit ist. Von den verschiedenen Sätzen der Fil. Chisholm ist namentlich der bemerkenswert, daß sie als unabhängige Koordinaten die Cotangenten der halben Winkel und Seiten verwendet; denn da $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ (und ebenso natürlich $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$) eine Fundamentalfunktion ist, durch die sich $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ eindeutig ausdrücken, lassen sich die sämtlichen trigonometrischen Gleichungen als algebraische Relationen zwischen $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \dots, \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ schreiben. Die sphärischen Dreiecke bilden daher jetzt eine dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit db_3 im sechsdimensionalen Räume R_6 , der $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, \dots, \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ zu Koordinaten hat. Von dieser db_3 sagt Fil. Chisholm, daß sie von der Ordnung 8 ist, und als voller Schnitt dreier Flächen 2. Grades (quadratischer Gleichungen) des R_6 darstellbar ist, und sie unter Vollgebrauch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie. Göttingen 1895.

nicht auch die weiteren Fragen, die sich hier im Sinne der oben fixierten Gesichtspunkte anschließen. -

Man nennt die Gruppe von Formeln der sphärischen Trigonometrie, über die ich bisher sprach, und die Sinus und Cosinus der Seiten und Winkel verknüpfen, Formeln erster Stufe und stellt ihnen eine wesentlich verschiedene Formelgruppe als Formeln zweiter Stufe entgegen. Das sind algebraische Gleichungen zwischen den trigonometrischen Funktionen der halben Winkel und Seiten, und man wird daher bei ihrem Studium am besten die 12 Größen

$$\cos \frac{\alpha}{2}; \sin \frac{\alpha}{2}, \dots, \cos \frac{\gamma}{2}, \sin \frac{\gamma}{2}, \dots$$

als Koordinaten eines neuen zwölfdimensionalen Raumes R_{12} betrachten, in dem die sphärischen Dreiecke wiederum eine dreidimensionale algebraische Mannigfaltigkeit db_3 bilden. Vor allem kommen hier jene eleganten Formeln in Betracht, die am Anfang des vorigen Jahrhunderts fast gleichzeitig unabhängig von einander von Delambre (1807), von Holmboe (1808), und endlich von Gauß 1809 (in der „Theoria motus corporum coelestium“, S. 54¹⁾) publiziert worden sind. Es sind 12 Formeln, die durch zyklische Vertauschung aus:

$$\frac{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \pm \frac{\cos \frac{b-c}{2}}{\cos \frac{a}{2}}, \quad \frac{\sin \frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \mp \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$$

¹⁾ Abgedruckt Werke, Bd. IV. (Leipzig 1906) pag. 67.



$$\frac{\cos \frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \mp \frac{\cos \frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad \frac{\cos \frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \pm \frac{\sin \frac{\beta+\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

entstehen. Das Wesentliche und Neue an ihnen den Formeln erster Stufe gegenüber ist nun das doppelte Vorzeichen, wobei denn es sich so verhält: Für ein und dasselbe Dreieck gelten in sämtlichen 12 Formeln gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen, und es gibt Dreiecke sowohl der einen als der andern Art. Die H_3 der sphärischen Dreiecke in dem vorhin definierten R_{12} wird also durch zwei ganz verschiedene Systeme von je 12 kubischen Gleichungen bestimmt und zerfällt daher in zwei getrennte algebraische Mannigfaltigkeiten: H_3 , für die das eine, und H_3 , für die das andere Vorzeichen gilt. Durch diese unerklärliche Erscheinung erhalten jene Formeln die größte Bedeutung für die Theorie der sphärischen Dreiecke, und werden viel mehr, als bloße Umformungen der alten Gleichungen, die höchstens zur Vereinfachung der trigonometrischen Rechnung dienen. Delambre und Wallersteins betrachteten die Formeln nur von diesem praktischen Standpunkte, erst Gauß hatte eine tiefere Einsicht, denn er weist ausdrücklich auf die Möglichkeit einer Vorzeichenveränderung hin, „wenn man die Idee der sphärischen Dreiecke in größter Allgemeinheit auffaßt“, es scheint mir darum wohl

berechtigt, die Formeln nach Gauß zu nennen, wenn er die Priorität der Veröffentlichung auch nicht besitzt.

Die ganze Tragweite dieser Erscheinung hat aber erst Study erkannt und in seiner zitierten Arbeit von 1894 entwickelt. Sein Hauptresultat läßt sich am bequemsten aussprechen, wenn man den 6-dimensionalen Raum R_6 betrachtet, der die Werte $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ selbst, als unbeschränkte Variable aufgefaßt, zu Koordinaten hat, wir nennen sie transzendente Bestimmungsstücke des Dreiecks im Gegensatz zu den algebraischen Bestimmungsstücken $\cos a, \dots$ oder $\cos \frac{a}{2}, \dots$, da jene transzendente, diese aber algebraische Funktionen der gewöhnlichen räumlichen Koordinaten der Dreiecksseiten sind. In diesem R_6 zeichnet sich die Gesamtheit aller sphärischen Dreiecke als die „transzendente Mannigfaltigkeit“ $H_3^{(6)}$ ab, deren Bild im R_{12} die vorhin betrachtete algebraische H_3 war. Da diese aber in zwei Stücke zerfällt und die abbildenden Funktionen $\cos \frac{a}{2}, \dots$ eindeutige stetige Funktionen der transzendenten Koordinaten sind, muß auch die transzendente $H_3^{(6)}$ in zwei getrennte Stücke zerfallen. Der Studysche Satz lautet nun: Die transzendente $H_3^{(6)}$ der überhaupt bei einem sphärischen Dreieck allgemeinsten Art auftretenden Werte $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ zerfällt entsprechend dem dop-



petten Vorzeichen in den Gaußschen Formeln in zwei von ein-
 ander getrennte Stücke, von denen jedoch jedes ein in
 sich zusammenhängendes Kontinuum darstellt. Das
 Wesentliche dabei ist das Ausschließen jeder weiteren Zer-
fallens; man kann also nicht etwa durch weiteres Ver-
 folgen der trigonometrischen Formeln zu ähnlichen eben-
 so tief greifenden Einteilungen der sphärischen Dreiecke
 gelangen. Man nennt nun die Dreiecke der ersten,
 dem oberen Zeichen der Gaußschen Formeln entspre-
 chenden Stücke eigentliche Dreiecke, die des anderen
uneigentliche, und kann alsdann den Studyschen Satz
 auch kurz so aussprechen, daß die Gesamtheit aller sphä-
rischen Dreiecke in ein Kontinuum der eigentlichen und
eines der uneigentlichen Dreiecke zerfällt. Sie finden
 übrigens nähere Ausführungen dazu und einen Beweis des
 Satzes im Weber-Wellstein; ¹⁾ ich gebe hier nur in mög-
 lichst übersichtlicher Weise die Resultate an.

Ich muß da Näheres über den Unterschied beider
 Dreiecksarten sagen: Geben wir irgend ein sphärisches
 Dreieck, d. h. ein „zulässiges Wertesystem“ der $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$,
 deren \cos und \sin den Formeln erster Stufe genügen,
 und die daher einen Punkt der $M_3^{(2)}$ darstellen; wie
 können wir entscheiden, ob es sich um ein eigentliches
 1) Ad. I, pag. 385 ff. (S 47).

oder uneigentliches Dreieck handelt? Wir bilden dann zu-
 nächst die kleinsten positiven Reste $\alpha_0, b_0, c_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ der
 gegebenen Zahlen in Bezug auf den Modul 2π :

$$0 \leq \alpha_0 < 2\pi, \dots, 0 \leq \alpha_0 < 2\pi, \dots$$

$$\alpha_0 = \alpha \pmod{2\pi}, \dots, \alpha_0 = \alpha \pmod{2\pi}, \dots$$

Ihre \cos und \sin stimmen mit denen von $\alpha, \dots, \alpha, \dots$ über-
 ein, so daß sie wiederum ein sphärisches Dreieck reprä-
 sentieren, das wir das dem ursprünglichen zugehörige re-
duzierte oder Hoebnussche Dreieck nennen wollen, da
 Hoebnus selbst auf Veränderlichkeit der Stücke über 2π
 hinaus wohl nicht einging. Nun wollen wir zunächst
 durch eine kleine Tabelle entscheiden, wann ein
Hoebnussches Dreieck eigentlich und uneigentlich
ist; Sie finden diese in etwas weniger übersicht-
 licher Form im Weber-Wellstein (pag. 352, 349, 380), der
 auch (pag. 348, 349) Figuren für die Typen ei-
 gentlicher und uneigentlicher Dreiecke gibt. Wir nen-
 nen, wie das üblich ist, einen Winkel über-
stumpft, wenn er zwischen π und 2π liegt, und
 wenden diese Bezeichnung der Kürze halber
 auch auf die Seiten des sphärischen Dreiecks
 an. Dann haben wir im ganzen je 4 ty-
 pische Fälle beider Arten aufzuzählen: