ELEMENTARMATHEMATIK VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS.

TEIL I: ARITHMETIK, ALGEBRA, ANALYSIS.

VORLESUNG

GEHALTEN IM WINTERSEMESTER 1907—08

VON

F. KLEIN.

AUSGEARBEITET VON E. HELLINGER.

ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG 1911.
IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die neue Autographie, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum und ganz besonders den Lehrern der Mathematik an unseren höheren Schulen unterbreite, ist als eine erste Fortsetzung jener Vorträge „über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen“, speziell über „die Organisation des mathematischen Unterrichts“ gedacht, die ich im vorigen Jahre mit Herrn Schimmack zusammen im Teubnerschen Verlag habe erscheinen lassen. An die damals gegebene Übersicht über die verschiedenen Formen der Unterrichtsaufgabe, die dem Mathematiker gestellt sein kann, sollen sich jetzt, allgemein zu reden, Entwicklungen über den Unterrichtsstoff selbst schließen, in denen ich bemüht bin, dem Lehrer — oder auch dem reiferen Studenten — Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete, unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb, vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen. Und dieses nicht, wie etwa Weber-Wellstein tun, in Form einer systematisch geordneten Darstellung, sondern in freien Exkursen, wie sie sich unter den wechselnden Anregungen der Umgebung in der wirklich gehaltenen Vorlesung tatsächlich gestaltet haben.

Auf das so bezeichnete Programm — das nachstehend nur erst für die Gebiete der Arithmetik, Algebra und Analysis durchgeführt wird — wurde schon in der Vorrede zu Klein-Schimmack (April 1907) hingewiesen; ich hatte damals gehofft, daß Herr Schimmack trotz mancher Hindernisse doch vielleicht die Zeit finden würde, die Bearbeitung meiner Vorträge für den Druck wieder übernehmen zu können. Aber ich habe ihn selbst sozusagen daran gehindert, indem ich seine Arbeitskraft für die uns gemeinsam interessierenden pädagogischen Fragen fortgesetzt nach anderen Seiten in Anspruch zu nehmen hatte. Jedenfalls zeigte sich bald, daß der Plan unausführbar war, falls anders die Arbeit in kurzer Zeit zu Ende geführt werden sollte, wie dies doch im Interesse einer tatsächlichen Einwirkung auf die heute im Vordergrunde stehenden Unterrichtsfragen erwünscht schien. Ich habe also wieder, wie in früheren Jahren, zu dem bequemeren Mittel der Autographierung meiner Vorträge gegriffen, zumal sich mein jetziger Assistent, Herr Dr. Ernst Hellinger, als eine hierfür ausgezeichnet qualifizierte Hilfskraft erwies. Man wolle dabei von der Arbeit, die Herr Dr. Hellinger zu erledigen hatte, nicht gering denken. Denn es ist auch so noch ein weiter Weg von der durch allerlei zufällige Umstände bedingten mündlichen Darlegung des Dozenten zu der schriftlichen, hinterher noch wesentlich abgeglichenen, lesbaren Darstellung. Nur daß die Genauigkeit der Ausführungen und die Gleichmäßigkeit der Auseinandersetzungen nicht so weit getrieben wird, als es nach unseren Gewohnheiten bei der Drucklegung unerläßlich scheint.

Ich scheue etwas davor zurück, in bestimmte Aussicht zu stellen, daß nun noch weitere Fortsetzungen dieser Veröffentlichungen über den mathematischen Unterricht folgen sollen, jedenfalls für das Gebiet der Geometrie;*) — ich will vielmehr mit dem Wunsche schließen, daß sich die vorliegende Autographie als nützlich erweisen möge, indem sie manchen Lehrer an unseren höheren Schulen veranlaßt, über die zweckmäßige Darbietung des von ihm zu behandelnden Lehrstoffes in neuer Weise selbständig nachzudenken. Nur eine solche Anregung will meine Schrift geben, keinen ausgeführten Lehrgang, dessen Festlegung ich vielmehr den an der Schule wirkenden Herren durchaus überlasse. Es ist ein Mißverständnis, wenn man an einzelnen Stellen vorauszusetzen scheint, ich habe mich je in einem anderen Sinne betätigt. Insbesondere der Lehrplan der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (der sog. „Meraner" Lehrplan) ist nicht etwa von mir, sondern unter bloßer Mitwirkung meinerseits von hervorragenden Vertretern der Schulmathematik ausgearbeitet worden.

Was schließlich die Art der im folgenden eingehaltenen Darstellung betrifft, so genügt wohl, wenn ich hervorhebe, daß ich, wie bei früheren Gelegenheiten, auch hier bemüht war, überall geometrische Anschaulichkeit mit der durch die arithmetischen Formeln ermöglichten Präzision zu verbinden, und daß es mir besonderes Vergnügen gemacht hat, dem historischen Werdegang der Theorien nachzugehen, um von da aus die Besonderheiten der verschiedenartigen, im heutigen Unterricht unvermittelt nebeneinander herlaufenden Darstellungsweisen zu verstehen.

Göttingen, Ende Juni 1908. **Klein.**

Vorbemerkung zur zweiten Auflage.

Um das Erscheinen dieser neuen Auflage an Stelle der vergriffenen ersten nicht zu sehr zu verzögern, mußte sie in allen wesentlichen Punkten eine ungeänderte Wiedergabe der ersten Auflage bleiben. So wurde bei der Durcharbeitung des Textes nur die Darstellung an manchen Stellen geglättet, einige wenige Versehen wurden berichtigt, mitunter auch in den Literaturnachweisen kurze Ergänzungen eingefügt. Ein wenig ausführlichere Nachträge zu einigen in der Vorlesung berührten Fragen enthalten die „Zusätze" am Schluß des Bandes; insbesondere sind in ihnen auch — ohne den Anspruch auf Vollständigkeit — kurze Berichte über neuere Literatur und über den Fortgang der in der Vorlesung erwähnten Unterrichtsreformbestrebungen gegeben. Die Ausführung hat dabei wieder in den Händen von Herrn Dr. Hellinger, gegenwärtig Privatdozent in Marburg, gelegen.

Göttingen, März 1911. **Klein.**

*) Die „Geometrie" als zweiter Teil der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" hat glücklicherweise schon im Jahre 1909 ausgegeben werden können.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Einleitung.

Meine Herren! In den letzten Jahren hat sich unter den Universitätslehrern der mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer ein weitgehendes Interesse an einer zweckmäßigen, allen Bedürfnissen gerecht werdenden Ausbildung der Kandidaten des höheren Lehramts entwickelt. Diese Erscheinung ist erst recht neuen Datums; in einer ganzen langen Zeitperiode vorher trieb man an den Universitäten ausschließlich hohe Wissenschaft ohne Rücksicht darauf zu nehmen, was der Schule Not tat, und ohne sich überhaupt um die Herstellung einer Verbindung mit der Schulmathematik zu sorgen. Doch was war die Folge einer solchen Praxis? Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er nun plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er aber diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die herkömmliche Unterrichtstradition aufnehmen, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die jedoch auf seinen Unterricht keinen Einfluß hat.

Diese *doppelte Diskontinuität*, die gewiß weder der Schule noch der Universität jemals Nutzen gebracht hat, bemüht man sich neuerdings endlich aus der Welt zu schaffen, einmal indem man den Unterrichtsstoff der Schulen mit neuen der modernen Entwicklung der Wissenschaft und der allgemeinen Kultur angepaßten Ideeen zu durchtränken sucht – wir werden noch vielfach darauf einzugehen haben – andererseits aber durch geeignete Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer im Universitätsunterricht. Und da scheinen mir eines der wichtigsten Hilfsmittel solche *zusammenfassende Vorlesungen* zu sein, wie ich sie heute vor Ihnen beginne. Ich wende mich damit keinesfalls an den Anfänger, sondern setze voraus, daß

Ihnen allen der Hauptinhalt der wichtigsten mathematischen Disziplinen bekannt ist. Ich werde vielfach von Problemen der Algebra, der Zahlentheorie, der Funktionentheorie u. s. w. zu reden haben, ohne auf Einzelheiten eingehen zu können; Sie müssen diese Dinge also schon einigermaßen kennen, wenn Sie meinen Auseinandersetzungen folgen wollen. Mein Zweck hier wird stets sein, Ihnen den *gegenseitigen Zusammenhang der Fragen der Einzeldisziplinen* vorzuführen, der in den Spezialvorlesungen nicht immer genügend zur Geltung kommt, sowie insbesondere ihre *Beziehungen zu den Fragen der Schulmathematik* zu betonen. Dadurch, so hoffe ich, wird Ihnen das sehr erleichtert werden, was ich doch als eigentliches Ziel Ihres akademischen Studiums bezeichnen möchte: *daß Sie dem großen Wissensstoff, der Ihnen hier zukommt, einst in reichem Maße lebendige Anregungen für Ihren eigenen Unterricht entnehmen können.*

Lassen Sie mich Ihnen nun einige Dokumente vorlegen, die aus neuester Zeit stammend das Interesse weiter Kreise an den Fragen der Lehrerausbildung bekunden und für uns wertvolles Material bieten. Da habe ich vor allem der Vorträge auf der letzten Naturforscherversammlung in Dresden am 16. September 1907 zu gedenken, wo wir von der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte aus „Vorschläge für die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften" vorgelegt haben. Sie finden diese Vorschläge als letzten Abschnitt in dem Gesamtbericht der Kommission [1], die seit 1904 den ganzen Komplex der mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsfragen behandelt und jetzt ihre Tätigkeit abgeschlossen hat; ich bitte Sie sehr, sowohl von diesen Vorschlägen, als auch von den andern Teilen des genannten sehr interessanten Berichtes Kenntnis zu nehmen. – Kurz nach der Dresdener Versammlung fand eine ähnliche Debatte auf der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Basel am 25. September statt, wo nun freilich die mathematisch-naturwissenschaftliche Reformbewegung nur mehr als ein Glied in der Kette der parallel laufenden Bewegungen auch in philologischen Kreisen zu Worte kam. Neben einem Referate

1) Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, hrsg. von A. Gutzmer (Leipzig und Berlin 1908).

von mir über unsere mathematischen Reformbestrebungen sprachen P. Wendland (Breslau) über die die Altertumswissenschaften betreffenden Fragen, Al. Brandl (Berlin) über neuere Sprachen und endlich A. Harnack (Berlin) über Geschichte und Religion; die 4 Vorträge sind in einer Broschüre [1] vereinigt erschienen, auf die ich Sie nachdrücklich hinweise. Ich halte das hiermit angebahnte gemeinsame Vorgehen unserer Wissenschaften mit den Philologen für äußerst ersprießlich, da es freundliche Beziehungen und wechselseitiges Verstehen zwischen zwei einander sonst fremd, wenn nicht gar feindlich gegenüberstehenden Gruppen schafft. Ein solches gutes Verhältnis wollen wir stets zu fördern suchen, mag auch, wenn wir unter uns sind, gelegentlich einmal ein schärferes Wort über die Philologen fallen – was ja auch auf der Gegenseite wohl vorkommen soll. Bedenken Sie dabei stets über den Fachpartikularismus hinaus, daß gerade Sie dazu berufen sind, später an der Schule mit den Philologen zum Besten der Allgemeinheit zusammenzuwirken, und daß dazu notwendig gegenseitige Schätzung und gegenseitiges Verständnis gehört.

1) Universität und Schule. Vorträge ... gehalten von F. Klein, P. Wendland, Al. Brandl, A. Harnack. (Leipzig 1907).

Neben diesen Zeugnissen von über die Grenzen unseres Faches hinausgreifenden Bestrebungen möchte ich Ihnen nun noch einige Bücher nennen, die sich in der gleichen Richtung speziell auf mathematischem Gebiete bewegen und die daher für unsere Vorlesung sehr wichtig sein werden. Ich habe zum ersten Male vor drei Jahren eine Vorlesung ähnlicher Tendenz gehalten; mein damaliger Assistent, Herr R. Schimmack, hat den Gegenstand weiter durchgearbeitet, und kürzlich ist ein erster Teil jener Vorlesung [1] im Druck erschienen. Hier ist die Rede von den verschiedenen Arten der Schulen, einschl. der Hochschulen, von dem allgemeinen Betriebe des mathematischen Unterrichts auf ihnen, von ihrem gegenseitigen Ineinandergreifen u. dgl.; ich werde im folgenden gelegentlich auf die hier niedergelegten Dinge verweisen, ohne sie zu wiederholen. Um so ausführlicher werde ich jetzt, gewissermaßen als Fortsetzung dieser Auseinandersetzungen über die Organisation des mathematischen Unterrichts den gesamten mathematischen Stoff, der für den Schulun-

1) F. Klein, Vorträge über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen. Bearbeitet von R. Schimmack. Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig 1907. – Weiterhin zitiert als „Klein – Schimmack.“

terricht nur irgend in Betracht kommt, behandeln. Wenn ich mich dabei öfters auf den Unterrichtsbetrieb an der Schule beziehe, so liegen dem nicht nur vage Vorstellungen, wie die Sache etwa sein könnte, oder gar eigene weit zurückliegende Schulerinnerungen zu Grunde, sondern ich stehe ständig mit Herrn Schimmack in Verbindung, der jetzt am hiesigen Gymnasium wirkt, und der mich über den gegenwärtigen, gegenüber früheren Jahren in der Tat wesentlich weiter entwickelten Stand des Unterrichts fortlaufend informiert. In diesem Wintersemester werde ich „die drei großen A“, das ist Arithmetik, Algebra und Analysis behandeln, während die Geometrie einer Fortsetzung des Kollegs im nächsten Sommer vorbehalten bleibt. Ich bemerke hierzu, daß die auf höheren Schulen übliche Sprache jene drei Fächer unter dem einen Wort „Arithmetik“ zusammenfaßt, wie wir denn überhaupt noch öfters Abweichungen des mathematischen Sprachgebrauches der Schulen von dem der Hochschulen finden werden. Nur der lebendige Kontakt, das sehen Sie an diesem kleinen Beispiele, kann da eine Verständigung herbeiführen!

An zweiter Stelle nenne ich Ihnen nun das Werk, das unter den Publikationen der letzten Jahre am meisten eine der meinigen ähnliche Tendenz verfolgt, die dreibändige „Enzyklopädie der Elementarmathematik" von H. Weber und J. Wellstein; für dieses Semester kommt wesentlich der von H. Weber bearbeitete erste Band in Betracht: „Enzyklopädie der elementaren Algebra und Analysis."[1] Gewisse Unterschiede, die zwischen diesem Werke und dem Plane meiner Vorlesung obwalten, will ich sogleich näher bezeichnen. Bei Weber-Wellstein wird der gesamte Aufbau der Elementarmathematik systematisch und logisch entwickelt in der gereiften Sprache, die der fortgeschrittene Studierende aufnehmen kann; davon, wie diese Dinge im Schulunterricht wirklich vorkommen, ist nicht die Rede. Die Darstellung auf der Schule muss nämlich, um ein Schlagwort zu gebrauchen, psychologisch, nicht systematisch sein. Der Lehrer muss sozusagen ein wenig Diplomat sein, er muss auf die seelischen Vorgänge im Knaben Rücksicht nehmen, um sein Interesse packen

[1] 2. Auflage. Leipzig 1906. (3. Auflage 1909). – Zitiert als „Weber - Wellstein I"

zu können, und das wird ihm nur gelingen, wenn er die Dinge in anschaulich faßbarer Form darbietet. Erst auf den obersten Klassen ist auch eine abstraktere Darstellung möglich. Um ein Beispiel zu geben: das Kind kann es unmöglich verstehen, wenn man die Zahlen axiomatisch als Dinge ohne Bedeutung, mit denen man nach vereinbarten formalen Regeln operiert, erklärt; vielmehr verbindet es mit den Zahlen stets durchaus reale Begriffe, sie sind nichts als Anzahlen von Nüssen, Äpfeln und ähnlichen guten Dingen, und nur in solcher konkreten Form kann und wird sie ihm der Anfangsunterricht darbieten. Was aber hier selbstverständlich ist, sollte man – mutatis mutandis – auch sonst beherzigen: man sollte im ganzen Unterricht, auch auf der Hochschule, die Mathematik stets verknüpft halten mit allem, was den Menschen gemäß seinen sonstigen Interessen auf seiner jeweiligen Entwicklungsstufe bewegt, und was nur irgend in Beziehung zur Mathematik sich bringen läßt. Das ist es ja, was die neueren Bestrebungen zur Hervorhebung der angewandten Mathematik auf der Universität vor allem auch bezwecken; auf der

Schule hatte man diese Forderung nie in so hohem Maße vernachlässigt, wie auf der Universität. Gerade diese „psychologischen Momente" will ich in meiner Vorlesung mit besonderem Nachdruck stets zur Geltung zu bringen suchen.

Ein weiterer Gegensatz zwischen Weber-Wellstein und mir bezieht sich auf die Abgrenzung des Inhalts der Schulmathematik: Weber und Wellstein sind da „konservativ", ich „fortschrittlich" gesinnt. Diese Dinge sind ausführlich im Klein-Schimmack behandelt. Wir, man nennt uns wohl die „Reformer", wollen in den Mittelpunkt des Unterrichts den Funktionsbegriff stellen, als denjenigen Begriff der Mathematik der letzten 200 Jahre, der überall, wo man mathematisches Denken braucht, eine zentrale Rolle spielt. Ihn wollen wir so früh als möglich im Unterricht herauszuarbeiten beginnen, unter steter Benutzung der graphischen Methode, der Darstellung eines jeden Gesetzes im x-y-Systeme, die heute bei jeder praktischen Verwendung der Mathematik selbstverständlich benutzt wird. Um diese Neuerung zu ermöglichen, würden wir vieles aus dem traditionellen Unterrichtsstoff aufgeben, was ja an sich oft

recht interessant sein mag, aber seiner allgemeinen Bedeutung nach im Zusammenhang mit der ganzen modernen Kultur weniger wesentlich erscheint. Vor allem wird eine starke Ausbildung der Raumanschauung dabei stets eine Hauptsache bleiben müssen. Nach oben hin aber soll der Unterricht soweit in die Anfänge der Infinitesimalrechnung hineingehen, daß etwa der Naturwissenschaftler oder Versicherungsfachmann das mathematische Rüstzeug, das er auf alle Fälle braucht, bereits von der Schule mitbringt. Diesen relativ modernen Ideeen gegenüber hält Weber-Wellstein im wesentlichen an der alten Stoffbegrenzung fest; mein Zweck in dieser Vorlegung ist natürlich der, die neue Auffassung zu propagieren.

An dritter Stelle habe ich Ihnen noch ein sehr amusantes Buch des wie Weber und Wellstein in Straßburg wirkenden Max Simon zu nennen, das gerade in neuer Auflage erschienen ist: „Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik."[1] Simon befindet sich viel-

[1] 2. Auflage. München 1908. Sonderausgabe aus Baumeisters Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen.

fach in Übereinstimmung mit unsern Tendenzen, es gibt aber auch viele Gegensätze, und da er eine ausgesprochen subjektive, temperamentvolle Persönlichkeit ist, kleidet er diese Gegensätze oft in sehr lebhafte Worte. Um ein Beispiel zu nennen, so verlangen die Vorschläge der Unterrichtskommission des Naturforschertages schon auf Quinta eine Stunde geometrische Propädeutik, während man zur Zeit damit erst auf Quarta beginnt. Es ist nun eine seit langer Zeit erörterte Frage, welcher Modus der bessere ist, auch die Ausführung auf der Schule hat öfters gewechselt; aber Simon erklärt die Stellungnahme der Kommission, über die man also doch jedenfalls streiten kann, rundweg für „schlimmer als ein Verbrechen", ohne dieses Urteil auch nur im mindesten zu begründen. Solche Stellen ließen sich noch manche finden. – Als Vorläufer des genannten Buches erwähne ich noch Simons „Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis."[1]

Lassen Sie uns nach dieser kurzen Einleitung nun jetzt zu unserem eigentlichen Gegenstande

1.) Leipzig 1906.

übergehen, den wir nach den drei bereits genannten Fächern gliedern wollen.

Erster Hauptteil: Arithmetik.

I. Das Rechnen mit den natürlichen Zahlen.

Das erste ist da natürlich, daß wir mit der Grundlage aller Arithmetik, dem Rechnen mit positiven ganzen Zahlen beginnen. Zuerst legen wir uns hier, wie stets im Verlaufe der Vorlesung, die Frage vor, wie man diese Dinge an der Schule treibt; dann wird die weitere Untersuchung folgen, was, vom höheren Standpunkte aus betrachtet, in ihnen aller enthalten ist.

1. Einführung der Zahlen auf der Schule.

Ich begnüge mich da mit kurzen Andeutungen, und Sie werden sich an der Hand dieser wohl auch noch erinnern, wie Sie selbst einst rechnen lernten. Bei solchen Auseinandersetzungen kann natürlich meine Absicht keineswegs die sein, Sie in die Praxis des Unterrichts wirklich einzuführen, wie dies die Seminare an den höheren Schulen tun sollen; ich bringe vielmehr nur das Material heran, an dem wir uns für unsere Kritik orientieren wollen.

Die Aufgabe, die Eigenschaften der ganzen Zahlen und das Rechnen mit ihnen der Auffassung der Kinder nahe zu bringen und sie bis zur vollen Beherrschung des Stoffes zu führen, ist äußerst schwierig und erfordert die Arbeit mehrerer Jahre, von dem ersten Schuljahre an bis in die Sexta und Quinta des Gymnasiums hinein. Die Art des Unterrichtsbetriebes, wie er auf diesem Gebiete heut überall bei uns gehandhabt wird, kann ich vielleicht am besten durch die Stichworte anschauungsmäßig und genetisch charakterisieren, d. h. das ganze Lehrgebäude wird auf Grund bekannter anschaulicher Dinge ganz allmählich von unten an aufgebaut; hierin liegt ein präziser Gegensatz gegen den meist auf Hochschulen üblichen logischen und systematischen Unterrichtsbetrieb.

Den gesamten Unterrichtsstoff gliedert man etwa in folgender Weise, ohne daß das freilich genau und einheitlich feststeht: Das ganze erste Jahr wird durch das Rechnen im Zahlenkreise von 1 bis 20 ausgefüllt, davon ungefähr das erste Halbjahr durch das Rechnen im Gebiet von 1 bis 10. Die Zahlen erscheinen zunächst als Zahl-bilder aus Punkten oder als Anzahlen aller möglichen, den Kindern ohne weiteres geläufigen Gegenstände. Das Addieren und Multiplizieren wird alsdann anschauungsgemäß abgeleitet und eingeprägt. – Auf der zweiten Stufe wird der Zahlenkreis von 1 bis 100 behandelt, und hier wird dann erst mit vollem Nachdruck die Einführung der arabischen Ziffern mit Stellenwert und das dezimale System geübt. Nebenbei sei hier bemerkt, daß die Bezeichnung „arabische Ziffern", wie so viele ähnliche in der Wissenschaft, historisch unrichtig ist: diese Schreibweise rührt in der Tat von den Indern, nicht von den Arabern her. Ein weiteres Hauptziel der zweiten Stufe ist auch die Kenntnis des „Einmaleins." Was 5×7 oder 3×8 ist, muß man stets, auch „im Schlafe" wissen, und so muß der Schüler bis zu diesem Grade sicheren Beherrschens das Einmaleins auswendig lernen, freilich erst nachdem er es sich an realen Gegenständen anschaulich klar gemacht hat. Dazu dient vorzugsweise die Ihnen allen wohl bekannte sog. Rechenmaschine, die man besser etwas weniger großartig Rechenbrett nennt; sie besteht aus 10 übereinander

ander befestigten Drähten, auf denen je 10 Kugeln frei verschiebbar angebracht sind. Indem man diese Kugeln geeignet zusammenschiebt, liest man das Resultat der Multiplikation, und auch seine dezimale Schreibweise sofort ab. – Die dritte Stufe endlich bringt das Rechnen mit mehrstelligen Zahlen auf Grund der bekannten einfachen Regeln, deren Allgemeingültigkeit dem Schüler einleuchtet oder doch einleuchten sollte. Freilich genügt diese Evidenz meist wohl noch nicht, um dem Knaben die Regeln völlig zu eigen zu machen; recht oft muß ihr wohl noch mit dem bekannten autoritativen Mittel Nachdruck gegeben werden: „So ist es, und weißt Du das nicht, dann geht es Dir schlecht!".

Noch eine Seite dieses ganzen Unterrichts will ich hier hervorheben, weil sie im Hochschulunterricht gerade meist vernachlässigt zu werden pflegte. Es werden nämlich von vorherein die Anwendungen des Rechnens im praktischen Leben aufs stärkste betont. Die Zahlen werden von Anfang an an konkreten Beispielen des praktischen Lebens vorgeführt, gar bald rechnet der Schüler mit Münzen, Maßen, Gewichten, und die im täglichen Leben so wichtige Frage „*was kostet das?*", bildet den Angelpunkt eines großen Teiles des Unterrichtsmaterials. Das steigert sich denn bald zu den sog. *eingekleideten Aufgaben*, wo zum Ansatz der Rechnung bereits eine selbständige Überlegung nötig ist; es führt zu den Aufgaben der *Regeldetri*, der *Mischungsrechnung* etc. Zu den Worten *anschaulich* und *genetisch*, mit denen wir vorhin diesen Unterricht charakterisierten, können wir als drittes charakteristisches Schlagwort also die „*praktischen Anwendungen*" stellen.

Sollen wir das *Ziel des Rechenunterrichtes* zum Schluß noch in kurzen Worten zusammenfassen, so würden wir sagen: *er erstrebt eine klare Sicherheit in der Handhabung der Rechenregeln auf Grund paralleler Entwicklung der verschiedenen in Betracht kommenden geistigen Qualitäten, ohne daß etwa dabei die logischen Zusammenhänge als solche besonders herauspräpariert werden.*

Ich mache Sie hier nebenbei gerne auf einen Gegensatz aufmerksam, der auf der Schule häufig eine fatale Rolle spielt, nämlich den *Ge-*

gensatz zwischen seminaristisch[1] *und akademisch gebildeten Lehrern*. In oder nach Quinta tritt im Rechenunterricht an Stelle des seminaristisch vorgebildeten Lehrers der Akademiker, und infolgedessen tritt häufig für die Schüler eine *bedauerliche Diskontinuität* ein. Die armen Jungen müssen plötzlich vielfach mit ganz neuen Ausdrücken operieren und die bisher gelernten sind nun streng verpönt. Ein kleines Beispiel sind die verschiedenen Multiplikationszeichen, das ×, das der Elementarlehrer, der Punkt, den der Akademiker mit Vorliebe gebraucht. Dieser Gegensatz ist nur dadurch zu überbrücken, daß die Akademiker sich mehr um den seminaristischen Kollegen kümmern und eine Verständigung mit ihm suchen. Es wird Ihnen dies leichter gelingen, wenn Sie bedenken, welchen Respekt man vor den *Leistungen des Volksschullehrerstandes* haben muß. Stellen Sie sich nur vor, eine wie große *methodische Durchbildung* dazu gehört, um immer wieder Hunderttausenden dummer, durchaus unvorgebildeter

1) Das bezieht sich auf die „Seminare" zur Ausbildung von Volksschullehrern, die mit den oben erwähnten „Seminaren an höheren Schulen" nicht das mindeste zu tun haben.

Kinder die Lehren des Rechnens beizubringen! Versuchen Sie das mit Ihrer akademischen Bildung, Sie werden keine großen Erfolge erzielen!

Verfolgen wir nach dieser Abschweifung den Unterrichtsstoff weiter, so haben wir festzustellen, daß von Quarta an und besonders in der Tertia das Rechnen in das vornehmere Gewand der Mathematik sich zu kleiden beginnt, wofür zunächst der Übergang zur Buchstabenrechnung charakteristisch ist. Man bezeichnet mit a, b, c oder auch x, y, z irgend welche, zunächst immer nur positive ganze Zahlen und vollzieht nun die Regeln und Operationen des Rechnens an diesen durch Buchstaben symbolisierten Zahlbegriffen, womit man vom konkreten anschaulichen Inhalt der Zahlen abgeht. Hierin ist ein so großer Schritt der Abstraktion getan, daß man wohl behaupten kann, die eigentliche Mathematik setze mit dem Buchstabenrechnen ein. Freilich darf dieser Übergang an der Schule sich durchaus nicht plötzlich vollziehen, sondern der Schüler muß allmählich an so starkes Abstrahieren gewöhnt werden.

Für diesen Unterricht erscheint es nun unbedingt nötig, daß der Lehrer die logischen Gesetze

und Grundlagen des Rechnens und der Theorie der ganzen Zahlen selbst genau kennt, wenn er sie natürlich auch dem Schüler keineswegs unmittelbar darbieten kann. Beschäftigen wir uns demgemäß weiterhin etwas näher mit ihnen.

2. Die fundamentalen Gesetze des Rechnens.

Historisch hat man natürlich lange addiert und multipliziert, ohne sich über die Grundgesetzen dieser Operationen Rechenschaft zu geben. Erst in den zwanziger und dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts haben vor allem englische und französische Mathematiker die Fundamentaleigenschaften jener Operationen herausgearbeitet, worüber ich nähere Notizen hier jedoch nicht mitteilen will; wollen Sie mehr darüber erfahren, so empfehle ich Ihnen hier, wie ich es noch oft werde tun können, die große Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen [1], sowie die zum Teil den Charakter einer zweiten vervollständigten Auflage tragende französische Bearbeitung: Encyclopédie des sciences mathematiques

1.) Leipzig, bei B. G. Teubner, von 1898 an; Bd. I ist vollständig erschienen, Bd. II - VI im Erscheinen begriffen.

pures et appliquées.[1] Wenn überhaupt ein mathematisches Buch, so sollte diese Encyklopädie auf jeder Schulbibliothek vorhanden sein, weil der mathematische Lehrer durch sie in den Stand gesetzt wird, seine Arbeiten nach jeder ihn möglicherweise interessierenden Richtung hin vorzutreiben. Für uns kommt an dieser Stelle in Betracht der erste Artikel des ersten Bandes:[2] H. Schubert, „Grundlagen der Arithmetik", dessen französische sehr vervollständigte Bearbeitung von Jules Tannery und Jules Molk herrührt.

Ich will Ihnen nun, um zu unserm Thema zurückzukehren, die 5 Grundgesetze wirklich aufzählen, auf die sich die Addition zurückführen läßt:

1.) $a + b$ ist stets wieder eine Zahl, d.h. die Addition ist unbeschränkt ausführbar (im Gegensatz zur Subtraktion, die es im Bereiche der positiven Zahlen nicht ist).

2.) $a + b$ ist eindeutig bestimmt.

3) es gilt das Gesetz der Assoziativität:

$$(a+b)+c = a+(b+c),$$

1.) Paris (Gauthier-Villars) und Leipzig (Teubner) von 1904 an; Bd. I, II ist im Erscheinen begriffen.

2.) Arithmetik und Algebra, red. von W. Fr. Meyer (1896-1904). Franz. Ausg. red. von J. Molk

so daß man die Klammern auch überhaupt fortlassen kann.

4) es gilt das Gesetz der Kommutativität:

$$a+b = b+a.$$

5.) es gilt das Gesetz der Monotonie:

aus $b > c$ folgt $a+b > a+c$.

Diese Eigenschaften sind sämtlich ohne weiteres einleuchtend, wenn man den anschaulichen Anzahlbegriff vor Augen hat; sie müssen aber formal herausgeschält werden, um die spätere Entwicklung logisch stützen zu können.

Was ferner das Multiplizieren anlangt, so gelten zunächst 5 genau analoge Gesetze:

1) $a . b$ ist stets eine Zahl.

2) $a . b$ ist eindeutig bestimmt.

3) Assoziativität: $a . (b . c) = (a . b) . c = a . b . c$.

4) Kommutativität: $a . b = b . a$.

5) Monotonie: Aus $b > c$ folgt $a . b > a . c$.

Einen Zusammenhang mit der Addition gibt endlich ein weiteres Gesetz:

6.) Das Gesetz der Distributivität:

$$a . (b+c) = a . b + a . c.$$

Daß das gesamte Rechnen sich lediglich auf diesen 11 Gesetzen aufbaut, macht man sich leicht klar.

Es mag genügen, wenn ich das nur an einem einfachen Beispiele zeige, etwa an der Multiplikation von 7 mit 12. Man hat nach dem Distributivitätsgesetz:

$$7 \cdot 12 = 7 \cdot (10+2) = 70 + 14,$$

und wenn wir 14 in 10 + 4 zerlegen (die „Zehnerübertragung" ausführen), mit Hilfe des assoziativen Gesetzes der Addition:

$$= 70 + (10+4) = (70+10) + 4 = 80 + 4 = 84.$$

Sie erkennen in dieser Überlegung genau die einzelnen Schritte des gewöhnlichen dekadischen Ziffernrechnens wieder. Mögen Sie kompliziertere Beispiele sich selbst überlegen! Wir wollen hier nur zusammenfassend aussprechen, *daß das gewöhnliche Ziffernrechnen in fortwährender Anwendung jener 11 Grundgesetze unter steter Benutzung der für die Einer (im Einsundeins und Einmaleins) gedächtnismäßig eingeprägten Resultate besteht.*

Wo gelangen nun aber die *Monotoniesätze* zur Anwendung? Im gewöhnlichen formalen Rechnen kommen sie freilich nicht vor, wohl aber bei etwas andersartigen Aufgaben. Ich erinnere hier an das, was man bei dezimaler Schreibweise *abgekürzte*

Multiplikation und Division nennt. Das ist eine Sache von größter praktischer Wichtigkeit, die nur leider auf der Schule sowie unter den Studierenden lange noch nicht hinlänglich bekannt ist, obwohl sie gelegentlich schon auf Quinta besprochen wird. Nehmen Sie an, um wieder nur ein Beispiel zu geben, Sie hätten 567 . 134 auszurechnen, und es sind in beiden Zahlen die Einer, durch physikalische Messungen etwa, nur sehr ungenau bekannt. Da wird es unnötige Arbeit sein, das Produkt *genau* zu bestimmen, da Sie seinen genauen Wert doch nicht garantieren können; wohl aber wird es wichtig sein, die *Größenordnung* des Produktes zu kennen, d. h. zu wissen, zwischen welchen Zehnern oder Hunderten sein genauer Wert liegt. Diese Abschätzung liefert Ihnen nun das Monotoniegesetz in der Tat unmittelbar; denn aus ihm folgt, daß die gesuchte Zahl zwischen 560 . 134 und 570 . 134 oder zwischen 560 . 130 und 570 . 140 liegt. Die weitere Durchführung dieser Überlegungen überlasse ich wieder Ihnen selbst; jedenfalls sehen Sie, *daß die Monotoniegesetze bei dem „abgekürzten Rechnen" fortgesetzt zur Geltung kommen.*

Im wirklichen Schulunterricht wird natürlich, wie schon betont, von einer systematischen Darlegung aller dieser Grundgesetze nicht die Rede sein können. Erst wenn die Schüler das Zahlenrechnen anschaulich erfaßt haben und sicher beherrschen, wird der Lehrer bei Gelegenheit des Überganges zum Buchstabenrechnen wenigstens die Gesetze der Assoziativität, Kommutativität, Distributivität aus zahlreichen evidenten Zahlenbeispielen herauspräparieren und explizit aussprechen können.

3. Die logischen Grundlagen der ganzen Zahlen.

Während der Schulunterricht zu schwierigeren Fragen natürlich noch viel weniger wird aufsteigen können, setzt die Fragestellung der heutigen mathematischen Forschung hier erst eigentlich ein: Wie begründet man denn diese genannten Grundgesetze, wie begründet man den Zahlbegriff überhaupt? Hierüber will ich Ihnen eine Orientierung zu geben suchen, getreu der Absicht dieser Vorlesung, die Dinge des Schulunterrichts durch Betrachtung von einem höheren Standpunkte aus in neue Beleuchtung zu setzen. Und ich tue dies um so lieber, als gerade diese modernen Gedanken auf Sie

während Ihres akademischen Studiums ohnehin von allen Seiten eindringen, ohne daß Ihnen aber über ihre psychologische Wertung stets auch das Nötige gesagt wird.

Was zunächst den Zahlbegriff selbst angeht, so ist seine Wurzel äußerst schwer aufzudecken. Am glücklichsten fühlt man sich vielleicht noch, wenn man sich entschließt, von diesen allerschwierigsten Dingen ganz die Hand zu lassen. Für nähere Angaben über diese von den Philosophen stets sehr lebhaft diskutierten Fragen verweise ich wieder auf den zitierten Artikel der französischen Encyklopädie und beschränke mich auf einige ganz kurze Bemerkungen. Eine sehr verbreitete Auffassung ist die, daß der Zahlbegriff eng mit dem Zeitbegriff, dem zeitlichen Nacheinander zusammen hängt; unter den Philosophen sei Kant, unter den Mathematikern Hamilton als ihr Vertreter genannt. Andere wieder meinen, daß die Zahl mehr mit der Raumanschauung zu tun habe, sie führen den Zahlbegriff auf die gleichzeitige Anschauung verschiedener nebeneinander befindlicher Gegenstände zurück. Eine dritte Richtung endlich sieht in den Zahlenvorstellungen die Äußerungen einer besonderen

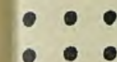
Fähigkeit des Geistes, die unabhängig neben oder gar über der Anschauung von Raum und Zeit steht. Ich glaube, daß diese Auffassung gut gekennzeichnet wird, wenn man mit Prof. Minkowski in der Anzeige seines neuen Buches über „diophantische Approximationen" auf die Zahlen das Faustzitat anwendet:

„Göttinnen thronen hehr in Einsamkeit,
Um sie kein Ort, noch weniger eine Zeit." –

Während bei diesem Problem mehr Fragen der Erkenntnistheorie und Psychologie in Betracht kommen, handelt es sich bei dem weiteren der Begründung unserer 11 Gesetze wesentlich um Fragen der Logik. Wir wollen hier 4 Auffassungen scheiden:

1, Für die erste, als deren Repräsentanten ich etwa Kant nennen will, sind diese Rechenregeln unmittelbare notwendige Ergebnisse der Anschauung, wobei dieses Wort im weitesten Sinne als „innere Anschauung" oder Intuition aufzufassen ist; keineswegs ist die Meinung dabei, daß die Mathematik durchweg sich auf die experimentell kontrollierbaren Tatsachen der äußeren groben Erfahrung stützt. Um ein einfachstes Beispiel zu

nennen, wird das Kommutativgesetz begründet durch Berufung auf die nebenstehende Figur, die aus zweimal



je drei Punkten gebildet ist; man kann die sämtlichen Punkte offenbar auch zu 3 Gruppen von je zweien zusammenfassen, d.h.: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Wendet man nun ein, daß bei einigermaßen großen Zahlen diese unmittelbare Anschauung zur Vermittlung der Erkenntnis nicht mehr ausreicht, so wird zur Ergänzung der Satz von der vollständigen Induktion hinzugenommen. Gilt ein Satz für kleine Zahlen, und folgt aus seiner Gültigkeit für eine Zahl n allemal auch die für $n+1$, so ist er allgemein für jede Zahl richtig. Dieser Satz, dessen Ursprung ein echt intuitiver ist, hilft in der Tat gerade über die Schranke hinweg, an der die konkrete Anschauung versagt. Das ist mehr oder minder auch der Standpunkt von Poincaré in seinen bekannten philosophischen Schriften.

Wenn wir die Bedeutung dieser Frage nach der Begründung unserer 11 Grundgesetze des Rechnens uns klar machen wollen, so müssen wir bedenken, daß mit der Arithmetik in letzter Linie auch die gesamte Mathematik auf ihnen beruht. Es ist also nicht zuviel behauptet, wenn man sagt, daß bei der auseinandergesetzten Auffassung der Rechenregeln die Sicherheit des ganzen Lehrgebäudes der Mathematik schließlich auf der Anschauung im allgemeinsten Sinne beruht.

2) An zweiter Stelle ist nun eine Modifikation dieses ersten Standpunktes zu nennen; sie besteht darin, daß man versucht, jene 11 Grundgesetze in eine größere Zahl kleinerer Schritte zu zerlegen, von denen man dann nur die einfachsten direkt der Anschauung zu entnehmen braucht, während sich die andern aus ihnen logisch ohne weitere Hinzuziehung der Anschauung erschliessen lassen. Während sonst die Möglichkeit rein logischen Operierens erst nach Aufstellung der 11 Gesetze beginnt, kann es hier schon früher, nach jenen einfacheren Sätzen, einsetzen: Die Grenze zwischen Anschauung und Logik wird zu Gunsten der letzteren verschoben. Bahnbrechend für dieses Vorgehen ist Hermann Graßmann in seinem „Lehrbuch der Arithmetik"[1] von 1861. Als Beispiel da-

[1] mit dem Zusatz „für höhere Lehranstalten" (Berlin 1861) - Die einschlägigen Kapitel sind abgedruckt in „H. Graßmanns gesammelten mathematischen und physikalischen Werken" (Herausggb. v. F. Engel), Bd. II 1. (Leipzig 1904) pag. 295 - 349.

raus erwähne ich nur, daß das Gesetz der Kommutativität sich aus dem Assoziativitätsgesetz mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion ableiten läßt. - Neben dem Graßmannschen Buche ist wegen der Präzision seiner Darstellung insbesondere ein Buch des Italieners Peano zu nennen: „Arithmetices principia nova methodo exposita."[1] Denken Sie aber nicht nach diesem Titel, daß das Buch lateinisch geschrieben ist! Es ist vielmehr im wesentlichen in einer eigenen symbolischen Sprache des Verfassers abgefaßt, die jeden einzelnen logischen Schritt des Beweises als solchen hervorheben und gesondert ausdrücken soll. Peano will so eine Garantie gewinnen, daß er auch wirklich nur die von ihm explizit aufgestellten Grundsätze verwendet und kein weiteres Material aus der Anschauung mehr heranbringt; er will die Gefahr vermeiden, die der Gebrauch der geläufigen Sprache durch das Hineinspielen zahlreicher unkontrollierbarer Ideenassoziationen und Erinnerungen an die Anschauung mit sich bringt. Nehmen Sie übrigens davon Kenntnis, daß Peano das Haupt einer in Italien sehr ausgedehnten Schule ist, die die Prämissen jedes einzelnen Zweiges der Mathematik ebenso in kleine

[1] Augustae Taurinorum (Torino) 1889.

Teile zerschneiden und mit dem Hilfsmittel einer „Begriffsschrift" exakt auf ihre logischen Zusammenhänge untersuchen will.

3) Wir kommen nun zu einer *modernen Weiterbildung dieser Ideeen*, von der übrigens Peano bereits beeinflußt ist; ich meine diejenige Behandlung der Grundlagen der Zahlenlehre, die den *Mengenbegriff* voranstellt. Die allgemeine Idee der Menge – Sie werden sich von ihrem weiten Umfange eine Vorstellung machen können, wenn ich Ihnen sage, daß sowohl die Reihe aller ganzen Zahlen als auch der Inbegriff aller Punkte einer Strecke spezielle Beispiele von Mengen sind – diese allgemeine Idee hat bekanntlich zuerst *Georg Cantor* in Halle zum Gegenstande systematischer mathematischer Spekulation gemacht, und die von ihm geschaffene *Mengenlehre* besitzt ja jetzt in hohem Maße das Interesse der jüngeren mathematischen Generationen. Ich werde später noch versuchen Ihnen einen Einblick in die Mengenlehre zu verschaffen; hier möge es genügen, wenn ich die Tendenz der auf ihrem Boden erwachsenen neuen Grundlegung der Zahlenlehre etwa mit folgenden wenigen Worten charakterisiere: *Es sollen die Eigenschaften der ganzen Zahlen und der auf sie*

bezüglichen Operationen auf allgemeine Eigenschaften der Mengen und der bei diesen statthabenden abstrakten Beziehungen zurückgeführt werden, damit so eine eindringendere Begründung auf möglichst allgemeiner Grundlage entsteht. Als Bahnbrecher auf diesem Wege habe ich hier noch *Richard Dedekind* zu nennen, der in seiner kleinen inhaltsreichen Schrift „*Was sind und was sollen die Zahlen?*" [1] zuerst eine solche Begründung der ganzen Zahlen gegeben hat. Wesentlich an diese Darstellung schließt *H. Weber* in dem 1. Abschnitt von Weber-Wellstein I (zitiert S. 8) an; freilich wird dabei die Ableitung recht abstrakt und bietet immer noch gewisse große Schwierigkeiten, so daß Weber in einem Anhange zum Bande III [2] eine elementarere, nur endliche Mengen benutzende Darstellung versucht hat, die auch neuerdings in die 3. Auflage von Band I eingearbeitet ist. Auf diese möchte ich jeden, den solche Fragen interessieren, ganz besonders hinweisen.

4) Zum Schluß endlich habe ich die *rein formale Theorie der Zahlen* anzuführen, die wohl bis auf *Leibniz* zurückgeht, und die neuerdings wieder besonders von

1) Braunschweig 1888.

2) Angewandte Elementarmathematik. Bearb. von H. Weber, J. Wellstein, R. H. Weber. – Leipzig 1907.

Hilbert in den Vordergrund gebracht worden ist; für die Arithmetik kommt da sein Vortrag „*Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik*" auf dem Heidelberger Kongreß von 1904 in Betracht.[1] Die Grundauffassung ist hier diese: Hat man einmal die 11 Grundgesetze des Rechnens, so kann man mit den Buchstaben a, b, c,..., die ja eigentlich beliebige ganze Zahlen vertreten, auch rechnen, ohne im Sinne zu behalten, daß sie eine reale Bedeutung als Zahlen haben, oder deutlicher gesagt: Es seien die a, b, c,... Dinge ohne jede Bedeutung oder Dinge, von deren Bedeutung wir nichts wissen; nur das sei ausgemacht, daß man sie gemäß jenen 11 Grundgesetzen miteinander verknüpfen darf, ohne daß jedoch diese Operationen eine uns bekannte reale Bedeutung zu haben brauchen; man kann dann offenbar genau ebenso mit den a, b, c,... operieren, wie man es gemeinhin mit den realen Zahlen tut. Dabei entsteht nur die Frage, *ob man bei diesem Operieren nicht auch einmal auf Widersprüche kommen kann*. Sagt man nun gewöhnlich, die Anschauung zeigt uns die Existenz *von Zahlen*, für welche die genannten Regeln gelten,

1) Verhandlungen des 3. internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904 (Leipzig 1905). pag. 174 f.f.

in diesen Regeln können sich also unmöglich Widersprüche finden, so ist jetzt, nachdem wir von der realen Bedeutung der Zeichen absehen, eine solche Berufung auf Anschauliches nicht mehr zulässig. *Vielmehr entsteht das ganz neue Problem, logisch zu beweisen, daß man bei beliebigem Operieren mit unseren Zeichen auf Grund der 11 Grundgesetze niemals zu einem Widerspruche kommen kann, d. h. daß jene 11 Gesetze logisch verträglich, konsistent sind.* Sagten wir also früher bei der Auseinandersetzung des ersten Standpunktes, daß die Sicherheit der Mathematik auf der Existenz anschaulicher Dinge beruht, für die ihre Sätze zutreffen, so wird der Anhänger dieses formalen Standpunktes *die Sicherheit der Mathematik darin begründet finden, daß ihre Grundgesetze rein formal und ohne Rücksicht auf ihren anschaulichen Inhalt betrachtet ein logisch widerspruchsfreies System bilden.*

Ich habe nun dieser Auseinandersetzung noch einige Bemerkungen anzufügen:

a) Hilbert hat in seinem Heidelberger Vortrag zwar alle diese Gesichtspunkte angedeutet, aber noch keineswegs vollständig durchgeführt. Nachher hat er sie nur noch in einer Vorlesung etwas weiter verfolgt, seitdem aber nicht mehr bearbeitet. Wir können also sagen, dass hier erst ein Programm vorliegt.

b.) Die Tendenz, die Anschauung vollkommen zurückzudrängen und wirklich rein logische Untersuchungen zu erhalten, scheint mir restlos doch nicht durchführbar. Ich meine, man muss einen Rest, freilich ein Minimum, von Anschauung immer zurückbehalten; muss man doch auch bei abstraktester Formulierung mit den Symbolen, mit denen man operiert, stets noch eine gewisse Anschauung verknüpfen, schon um sie nur immer wiedererkennen zu können, und sei es auch, dass man bloss an das Aussehen der Buchstaben denkt.

c.) Nehmen wir aber selbst an, das gestellte Problem sei einwandfrei erledigt, die Widerspruchslosigkeit der 11 Grundgesetze rein logisch gezeigt. Dann greift doch noch eine Bemerkung Platz, auf die ich am meisten Wert legen möchte. Man muss sich nämlich klar machen, dass durch Betrachtungen dieser Art die eigentliche Arithmetik, die Lehre von den wirklichen ganzen Zahlen, weder begründet wird noch überhaupt begründet werden kann. Es ist unmöglich, auf rein logischem Wege zu zeigen, dass die Gesetze, deren Widerspruchslosigkeit da dargetan ist, wirklich für die uns anschaulich so wohlbekannten Zahlen

gelten, dass die unbestimmten Dinge, von denen da die Rede ist, den realen Zahlen und dass die Verknüpfungen, die da vorkommen, den realen Prozessen der Addition und Multiplikation in ihrer intuitiv klaren Bedeutung gleich gesetzt werden dürfen. Was geleistet ist, ist vielmehr, dass die gewaltige in ihrer Kompliziertheit unangreifbare Aufgabe der Begründung der Arithmetik in zwei Teile gespalten und dass der erste, das rein logische Problem der Aufstellung unabhängiger Grundsätze oder Axiome und ihre Untersuchung auf Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit, der Behandlung zugänglich gemacht wird. Der zweite mehr erkenntnistheoretische Teil des Problemes, der gewissermaßen die Anwendungen jener logischen Untersuchungen auf reale Verhältnisse darstellt, ist damit noch nicht einmal in Angriff genommen, obwohl er natürlich zur wirklichen Durchführung einer Begründung der Arithmetik gleichfalls müsste erledigt werden. Dieser zweite Teil stellt ein äusserst tiefliegendes Problem für sich vor, dessen Schwierigkeiten auf allgemein erkenntnistheoretischem Boden liegen. Ich kann seine Stellung vielleicht am deutlichsten durch die etwas paradoxe Behauptung bezeichnen, dass jeder, der nur rein logische Untersuchungen als reine Mathematik gelten läßt, konsequenter Weise diesen zweiten Teil des Problems der Begründung der Arithmetik und damit die Arithmetik selbst der angewandten Mathematik zurechnen müßte.

Ich muß das hier so deutlich ausführen, da gerade an dieser Stelle so häufig Mißverständnisse einsetzen, indem viele die Existenz des zweiten Problemes einfach übersehen. Das ist bei Hilbert selbst keineswegs die Meinung und weder Zustimmungen noch Widersprüche, die von dieser Annahme ausgehen, können bestehen. Thomae in Jena hat auf die Leute, die sich ganz ausschließlich mit jenen abstrakt logischen Untersuchungen über Dinge, die nichts bedeuten, und Sätze, die nichts aussagen, beschäftigen und darüber nicht nur jenes zweite Problem, sondern oft auch die ganze weitere Mathematik vergessen, das hübsche Wort „gedankenlose Denker" geprägt. Natürlich kann sich dieses Spottwort nicht auf Persönlichkeiten beziehen, die diese Untersuchungen neben so vielen andersartigen treiben.

Im Zusammenhang mit diesem kurzen Überblick über die Grundlegung der Arithmetik will ich noch einige allgemeine Dinge vorbringen. Man hat vielfach gemeint, daß man die Mathematik

durchaus deduktiv unterrichten könne oder gar müsse, indem man eine definitive Reihe von Axiomen an die Spitze stellt und daraus alles rein logisch herleitet. Dies Verfahren, welches man so gern durch die historische Autorität des Euklid stützt, ist jedenfalls nicht dem historischen Werdegang der Mathematik selbst entsprechend. Tatsächlich hat sich die Mathematik entwickelt, wie ein Baum, der nicht von den feinsten Verästelungen der Wurzeln beginnend lediglich nach oben wächst, der vielmehr erst in dem Maße, wie er nach oben hin seine Zweige und Blätter immer mehr ausbreitet, auch nach unten zu seine Wurzeln tiefer und tiefer treibt. Genau so hat die Mathematik – um wieder ohne Bild zu sprechen – auf einem gewissen etwa dem gesunden Menschenverstande entsprechenden Standpunkte ihre Entwicklung begonnen, und von da aus ist man je nach den Forderungen der Wissenschaft selbst und nach den gerade vorherrschenden Interessen bald nach der einen Seite zu neuen Erkenntnissen fortgeschritten, bald nach der andern in der Untersuchung der Prinzipien immer weiter gegangen. Beispielsweise stehen wir selbst doch hinsichtlich der Grundlagen heute auf einem anderen Standpunkte als die Forscher vor wenigen Jahrzehnten, und auch das was wir heute als letzte Prinzipien angeben würden, wird man gewiß in einiger Zeit überholt haben, indem man die letzten Wahrheiten immer feiner zergliedert und auf immer Allgemeineres zurückführt. Auch hinsichtlich der prinzipiellen Untersuchungen in der Mathematik gibt es also keinen letzten Abschluß und daher auch rückwärts keinen ersten Anfang, der dem Unterricht eine absolute Grundlage liefern könnte.

Eine weitere Bemerkung möge noch das Verhältnis zwischen logischem und anschaulichem Betriebe der Mathematik, zwischen reiner und angewandter Mathematik betreffen. Ich habe bereits betont, daß auf der Schule die Anwendungen den Rechenunterricht von Anfang an begleiten, daß der Schüler die Regeln nicht nur verstehen, sondern auch wirklich etwas damit machen lernt. So sollte es normaler Weise auch stets im Betriebe der Mathematik bleiben! Gewiß müssen die rein logischen Zusammenhänge sozusagen das feste Skelett im Organismus der Mathematik bleiben, das ihr die eigentümliche Festigkeit und Sicherheit erteilt. Aber das Lebendige der Mathematik, die wichtigsten Anregungen, ihre Wirksamkeit nach außen hin beruhen durchaus auf den Anwendungen, d. h. auf den Wechselbeziehungen jener rein logischen Dinge zu allen andern Ge-

bieten. Die Anwendungen aus der Mathematik verbannen wäre also ebenso, als wollte man das Wesen der lebenden Tiere im Knochengerüst allein finden, ohne Muskeln, Nerven und Gefäße zu betrachten.

Vielfach wird freilich bei der wissenschaftlichen Forschung eine Arbeitsteilung zwischen der reinen und angewandten Wissenschaft stattfinden, aber für die Aufrechterhaltung des Zusammenhanges muß dann doch anderweitig gesorgt werden, wenn unsere Verhältnisse gesund bleiben sollen. Und jedenfalls, und das sei hier besonders betont, für die Schule ist eine solche Arbeitsteilung, eine weitgehende Spezialisierung der einzelnen Lehrers unmöglich. Denken Sie sich, um die Sache kraß auszudrücken, an einer Schule etwa einen Lehrer angestellt, der Zahlen nur als bedeutungslose Symbole behandelt, einen zweiten, der es versteht, aus diesen bedeutungslosen Symbolen die anschaulichen Zahlen herauszupräparieren, einen dritten, vierten, fünften endlich, der die Anwendung dieser Zeichen in der Geometrie, der Mechanik, der Physik kennt; und nun werden diese verschiedenen Lehrer nebeneinander auf den Schüler losgelassen. Sie sehen, daß eine solche Unterrichtsorganisation unmöglich ist; weder werden die Dinge so an das Verständnis der Schülers herangebracht werden können, noch werden sich die einzelnen Lehrer untereinander auch nur verstehen können. Die Bedürfnisse des Schulunterrichts selbst verlangen eben eine gewisse Vielseitigkeit des einzelnen Lehrers, eine umfangreiche Orientierung im Gebiete der reinen und angewandten Mathematik im weitesten Sinne und schließen so ein erwünschtes Korrektiv gegen zu weit gehende Zersplitterung der Wissenschaft ein.

Ich verweise hier noch einmal auf unsere oben genannten Dresdener Vorschläge, um den letzten Bemerkungen eine praktische Wendung zu geben. Da empfehlen wir geradezu die angewandte Mathematik, welche in die Lehramtsprüfung seit 1898 als besonderes Fach eingesetzt ist, als notwendigen Bestandteil jeder normalen mathematischen Ausbildung, so daß die Lehrbefähigungen für reine und angewandte Mathematik stets kombiniert erscheinen. Daneben aber sei erwähnt, was die Unterrichtskommission in dem sog. „Meraner Lehrplan"[1] als Ziel des mathematischen Unterrichts auf Oberprima hinstellt; es ist ein dreifaches:

1) Reformvorschläge für den math. und naturw. Unterricht, überreicht der Vers. d. Naturforscher u. Ärzte zu Meran. (Leipzig 1905). – Vgl. auch den Abdruck im Gesamtbericht der Kommission, pag. 93 [zitiert S. 4] sowie in Klein-Schimmack, pag. 208 [zitiert S. 6].

1.) ein wissenschaftlicher Überblick über den systematischen Aufbau der Mathematik.

2.) eine gewisse Fertigkeit in der vollständigen numerischen und graphischen Behandlung von Einzelaufgaben.

3.) eine Einsicht in die Bedeutung des mathematischen Denkens für die Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt.

Das sind alles Formulierungen, denen ich mich aus voller Überzeugung anschließe.

4. Praxis des Rechnens mit ganzen Zahlen.

Den letzten vorwiegend abstrakten Erörterungen will ich jetzt, meine Herren, konkretere Dinge folgen lassen, indem ich mich der Exekutive des numerischen Rechnens zuwende. Von der zur Orientierung geeigneten Literatur werde ich vor allem wieder den einschlägigen Encyklopädieartikel über „Numerisches Rechnen" von R. Mehmke nennen. (Encykl. Bd. I Teil 2, F.) Ich werde Ihnen am besten einen allgemeinen Überblick über die hierher gehörigen Gegenstände verschaffen können, wenn ich in Kürze die Disposition dieses Artikels wiedergebe. Er zerfällt zunächst in zwei Teile, nämlich A.) die Lehre vom genauen Rechnen, und B.) die Lehre vom genäherten Rechnen. Unter A) gehören alle Methoden, die das genaue Rechnen mit großen ganzen Zahlen erleichtern sollen, so bequeme Anordnungen der Rechenschemata, Produkt- und Quadrattafeln, insbesondere aber die bald eingehender zu besprechenden Rechenmaschinen. Unter B) hingegen finden Sie alles Rechnen behandelt, das nur die Größenordnung der Resultate, d. h. seine ersten geltenden Ziffern liefern soll, insbesondere Logarithmentafeln und Verwandtes, den Rechenschieber, der ja eigentlich nur eine graphische Logarithmentafel in besonders geeigneter Anordnung ist, endlich auch die zahlreichen wichtigen graphischen Methoden. – Neben diesem Referat kann ich Ihnen noch das kleine Buch von J. Lüroth „Vorlesungen über numerisches Rechnen"[1] empfehlen, das in angenehmer Darstellung von einem Kenner des Gebietes geschrieben, eine rasche Orientierung gibt.

Von allem, was sich auf das Rechnen mit ganzen Zahlen bezieht, will ich Ihnen nun genauer nur die Rechenmaschine vorführen, die Sie in sehr vielen verschiedenen sinnreichen Konstruktionen heute in jedem größeren Bankhause oder Bureau in Anwendung finden, und die also für die Praxis in der Tat

1) Leipzig 1900.

von größter Bedeutung ist. Wir besitzen in unserer mathematischen Sammlung eine der verbreiteten Typen, die „Brunsviga", die von der Firma Grimme, Natalis und Comp. in Braunschweig vertrieben wird. Es ist eine der kompendiösesten und einfachsten Maschinen, und wenn sie auch keineswegs die beste ist, so besitzt sie doch den großen Vorzug verhältnismäßiger Billigkeit; sie kostet etwa 200 – 300 Mark. Ihre Konstruktion stammt von dem russischen Mathematiker Odhner, und ist ursprünglich unter dem Namen Arithmometer bekannt. Diese Maschine will ich Ihnen hier als ein typisches Beispiel etwas näher erläutern, andere Konstruktionen finden Sie in den genannten Büchern beschrieben. Meine Beschreibung kann Ihnen freilich ein wirkliches Verständnis der Maschine nur dann vermitteln, wenn Sie sie nachher ganz genau in der Nähe betrachten und sich von ihrem Funktionieren durch eigene Benutzung überzeugen; die Maschine steht Ihnen dazu nach der Vorlesung stets zur Verfügung.

Was zunächst das äußere Ansehen der Brunsviga angeht, so zeigt sie schematisch etwa folgendes Bild: An einem größeren festen Kasten, der „Trommel", ist unten ein kleineres längliches Gehäuse angebracht, der „Schlitten", der gegen die Trommel hin und her verschiebbar ist; an der rechten Seite ragt aus der Trommel eine Kurbel hervor, die mit der Hand gedreht wird. An

Fig. 1.

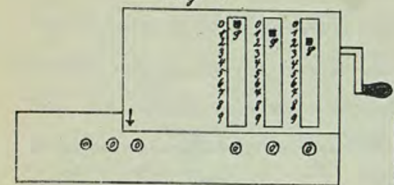
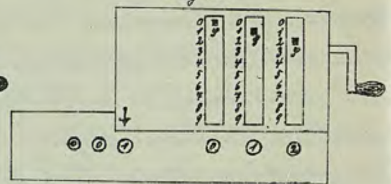


Fig. 2.



Vor Nach

der ersten Kurbeldrehung

der Trommel sind nebeneinander eine Reihe von Schlitzen angebracht, und an jedem stehen der Reihe nach von oben nach unten die Ziffern 0, 1, 2, … 9; ein aus jedem Schlitz hervorragender Stift S kann nach Belieben auf eine dieser Ziffern eingestellt werden. Jedem dieser Schlitze entspricht auf dem Schlitten eine Öffnung, unter der eine Ziffer erscheinen kann.

Ich denke, daß die Einrichtung der Maschine Ihnen am besten klar werden wird, wenn ich Ihnen die Ausführung einer bestimmten Rechenoperation und die Art, wie die Maschine sie zu Stande bringt, beschreibe. Ich wähle dafür die Multiplikation.

Das Verfahren ist folgendes: Zunächst stelle man vermöge der aus der Trommel hervorragenden Stifte den Multiplikandus ein, d. h. man stelle von rechts beginnend

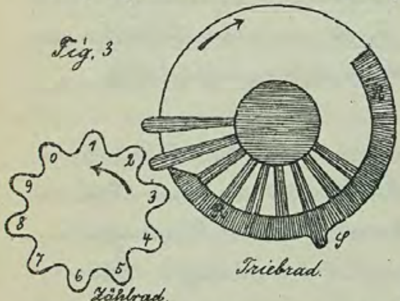
den ersten Hebel auf die im Einer, den zweiten auf die im Zehner stehende Ziffer des Multiplikanden u. s. f. Ist 12 der Multiplikand, so wird der erste Hebel auf 2, der zweite auf 1 zu stellen sein; alle andern bleiben in der Nullstellung (vgl. Fig. 1).

Nunmehr drehe man die Kurbel einmal rechts herum. Dann erscheint unter den Löchern des Schlittens der Multiplikand – in unserm Falle also eine 2 im ersten Loche rechts, eine 1 im zweiten, während überall sonst Nullen stehen bleiben. Gleichzeitig aber läßt ein Zählwerk, dessen Ziffern in einer Reihe von Löchern links am Schlitten zum Vorschein kommen, eine 1 erscheinen, zum Zeichen, daß wir einmal die Kurbel gedreht haben (Fig. 2). Hat man nun überhaupt einen einziffrigen Multiplikator, so drehe man die Kurbel so oft, als dieser angibt; es wird dann der Multiplikator links auf dem Schlitten angegeben, während das Produkt rechts am Schlitten in Erscheinung tritt.

Wie erzielt nun der Apparat dieses Resultat? Zunächst ist links auf dem Schlitten unter dem Loche des Zählwerkes ein Zählrad angebracht, dessen Umfang in gleichen Abständen die Ziffern 0, 1, 2, … 9 trägt. Ein Zahngetriebe bewirkt, daß dieses Rad bei jeder Umdrehung der Kurbel um ein Zehntel seines Umfanges verschoben wird, so daß eine unter dem Loch des Schlittens jeweils sichtbare Ziffer in der Tat die Anzahl der Kurbeldrehungen, also den Multiplikator, angibt.

Was nun das Zustandekommen des Produktes anlangt, so befindet sich unter jedem Loche der rechten Seite des Schlittens ein analog gebautes Zählrad. Wie aber kommt es, daß jetzt bei ein und derselben Kurbeldrehung im obigen Falle das eine um 1 Einheit, das andere gleichzeitig um 2 Einheiten weiterspringt? Hier setzt die konstruktive Eigentümlichkeit der Brunsviga ein. Unter jedem Schlitze der Trommel befindet sich nämlich auf der Kurbelachse eine flache Radscheibe (Triebrad), auf der 9 in radialer Richtung verschiebbare Zähne angebracht sind. Durch den nach außen ragenden Stift S, von dem oben die Rede war, läßt sich nun ein auf dem Umfang der Radscheibe aufgesetzter Ring R gegen diese drehen, und zwar so, daß je nach der Marke, auf die man S außen am Schlitz einstellt, 0, 1, ... oder 9 der beweglichen Zähne nach außen springen (in Fig. 3 zwei Zähne). Diese Zähne greifen direkt in die Zählräder unter den entsprechenden Öffnungen der Schlitten-

Fig. 3



Zählrad. Triebrad.

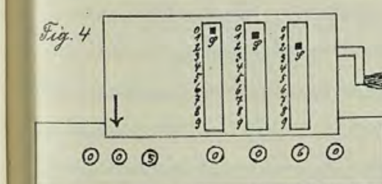
ein, und bei einer Kurbeldrehung verschiebt daher jedes Triebrad das entsprechende Zählrad des Schlittens um soviele Einheiten, als bei ihm Zähne vorspringen, d. h. als man außen mittelst des zugehörigen Stiftes S eingestellt hatte. Demnach muß in der Tat im obigen Beispiel, wenn wir von der Nullstellung ausgehen, nach einer Kurbeldrehung das Einerrad auf 2, das Zehnerrad auf 1 springen, also 12 erscheinen. Bei einer zweiten Kurbeldrehung wird das Einerrad wieder um 2, das Zehnerrad wieder um eine Einheit weitergeführt, so daß 24 erscheint, und ebenso finden wir bei 3 oder 4 Kurbeldrehungen richtig $36 = 3 . 12$ bezw. $48 = 4 . 12$.

Nun drehen wir aber ein fünftes Mal: Wieder muß nach der gegebenen Erklärung das Einerrad um 2 Einheiten weiter, also wieder zurück auf 0, das Zehnerrad um eins weiter auf 5 springen, und wir hätten das falsche Resultat 50, statt des richtigen $60 = 5 . 12$. Drehen wir die Kurbel wirklich, so zeigt der Schlitten in der Tat kurz vor Vollendung der Drehung die Zahl 50; führen wir aber die Drehung ganz aus, so springt noch im letzten Moment die 5 in eine 6 über, so daß das richtige Ergebnis dasteht. Hier ist also noch etwas in Tätigkeit getreten, was wir bisher noch nicht beschrieben hatten, und was bei den Rechenmaschinen der eigentlich feinste Punkt aller Konstruktionen ist: die sogenannte Zehnerübertragung. Ihr Prinzip ist folgendes: Geht eines der Zählräder des Schlittens (wie im Beispiel das Einerrad) durch Null, so drückt es einen sonst seitlich gestellten und unwirksamen Zahn des nächsten Triebrades (für die Zehner) in eine Stellung, in der er in sein zugehöriges Zählrad (Zehnerrad) eingreift, so daß dieser um eine Einheit mehr vorgeschoben wird, als es ohnehin geschehen wäre. Die Details dieser Konstruktion können Sie nur durch Betrachtung des Apparates selbst genau verstehen. Ich brauche hier um so weniger näher darauf einzugehen, als gerade für die Zehnerübertragung die verschiedensten Prinzipien bei den einzelnen Systemen sich angewandt finden, doch empfehle ich Ihnen die genaue Betrachtung unserer Maschine als eines Beispieles einer äußerst sinnreichen Konstruktion sehr. Unsere Sammlung enthält die wichtigsten Konstruktionsteile der Brunsviga – die bei der fertigen Maschine so gut wie unsichtbar sind – noch einmal in einzelnen Exemplaren, so daß Sie danach ein vollständiges Bild der Einrichtung gewinnen können.

Die Wirksamkeit der Maschine, soweit wir sie bisher kennen gelernt haben, können wir im wesentlichen dadurch mit einem Worte charakterisieren, daß wir sie als Additionsmaschine bezeichnen, die zu der rechts auf dem Schlitten bereits stehenden Zahl bei jeder Kurbeldrehung einmal die auf der Trommel eingestellte Zahl addiert.

Endlich will ich noch im allgemeinen diejenige Einrichtung der Maschine schildern, die ein bequemes Operieren auch mit mehrziffrigen Multiplikatoren gestattet. Wollen wir etwa 15.12 rechnen, so müßten wir nach dem bisher auseinandergesetzten Verfahren 15-mal drehen, und außerdem müßte, falls man weiterhin am linken Zählwerk des Schlittens den Multiplikator fixiert haben wollte, auch dort eine Zehnerübertragung angebracht sein. Beides wird durch folgende Einrichtung vermieden: Wir führen zunächst die Multiplikation mit 5 aus, so daß auf dem Schlitten links 5, rechts 60 erscheint. Nun verschieben wir den Schlitten um eine Stelle rechts, so daß sein Einerzählrad ausgeschaltet wird, sein Zehnerzählrad aber unter den Einerschlitz der Trommel kommt, u.s.f., während von dem am linken Ende befindlichen Zählwerk statt des Einerrades das Zehnerrad mit dem von der Kurbel ausgehenden Zahngetriebe in Verbindung kommt. Drehen

Fig. 4



wir jetzt also die Kurbel einmal herum, so erscheint links eine 1 an der Zehnerstelle, so daß wir nun 15 lesen; rechts aber wird nicht wie vorhin $\left\{\begin{array}{r}60\\+12\end{array}\right.$ addiert, sondern $\left\{\begin{array}{r}60\;\\+12.\end{array}\right.$, oder mit andern Worten 60 + 120, indem die 2 auf das Zehner–, die 1 auf das Hunderterzählrad übertragen wird. Wir erhalten also richtig 180 = 15.12. Dieses Verfahren ist, wie Sie sehen, eigentlich *die genaue maschinelle Übersetzung des beim schriftlichen Multiplizieren üblichen Verfahrens*, bei dem man die Produkte der einzelnen Ziffern des Multiplikators in den Multiplikanden, jedes um eine Stelle gegen das vorangehende verschoben, untereinander schreibt und addiert. *Genau so multipliziert man hier ganz allgemein mit mehrstelligen Zahlen, indem man nach gewöhnlicher Multiplikation mit den Einern den Schlitten um 1, 2, ... Stellen nach rechts schiebt, und dann jeweils die Kurbel so oft dreht, als die Zehner, Hunderter, ... des Multiplikators angeben.*

Wie man andere Aufgaben mit der Maschine rechnet, mögen Sie sodann direkt am Apparat sehen; hier genüge die Bemerkung, *daß die Subtraktion und Division auf Drehung der Kurbel im entgegengesetzten Sinne beruht.*

Lassen Sie mich zusammenfassend nur noch be-

merken, *daß das theoretische Prinzip der Maschine ganz elementar ist, und nur eine praktische Realisation der Regeln darstellt, die man beim numerischen Rechnen ohnehin anwendet.* Daß die Maschine freilich wirklich zuverlässig funktioniert, daß alle Teile unbedingt sicher ineinandergreifen, ohne daß Sperrungen eintreten, daß die Zahlenrädchen sich nicht weiter drehen, als notwendig, u. s. f. – das ist die große Leistung des Konstrukteurs und des ausführenden Mechanikers.

Sehen wir uns noch einen Moment die *allgemeine Bedeutung der Tatsache an, daß es solche Rechenmaschinen wirklich gibt*, die dem Mathematiker die rein mechanische Arbeit des numerischen Rechnens abnehmen, und die es schneller und sogar in höherem Maße fehlerfrei ausführen – denn die Flüchtigkeitsfehler menschlichen Rechnens können der Maschine nicht unterlaufen. Wir werden in der Existenz einer solchen Maschine geradezu eine Bestätigung dafür erblicken können, *daß für das Rechnen nicht die Bedeutung der ganzen Zahlen in Betracht kommt, sondern allein die formalen Rechenregeln*; denn nur diese kann die Maschine befolgen – so ist sie eben eingerichtet –, eine intuitive Anschauung von der *Bedeutung* der Zahlen kann sie unmöglich haben. So werden wir es auch nicht als Zufall auffassen wollen, daß ein Mann wie *Leibniz*, der ebenso ein abstrakter Denker ersten Ranges, wie ein Mann von hervorragendster praktischer Begabung war, gleichzeitig der *Vater der rein formalen Mathematik* und der *Erfinder der ersten Rechenmaschine* ist; seine Maschine ist uns noch heute als eins der kostbarsten Besitztümer des Kästnermuseums in Hannover erhalten. Ist es auch historisch nicht beglaubigt, so möchte ich doch annehmen, daß Leibniz mit der Erfindung der Rechenmaschine nicht nur praktische Zwecke verfolgte, sondern daß er damit auch geradezu den rein formalen Charakter der mathematischen Exekutive in helles Licht setzen wollte.

Gewiß aber hat Leibniz mit der Konstruktion der Rechenmaschine den *Wert des mathematischen Denkens* nicht herabsetzen wollen, und doch zieht man jetzt aus der Existenz der Rechenmaschine gelegentlich solche Schlüsse. Kann die Tätigkeit einer Wissenschaft, so sagt man wohl, auch durch eine Maschine geleistet werden, so kann an dieser Wissenschaft nicht sehr viel daran sein, und ihr kommt nur eine ganz untergeordnete Stellung zu. Es genügt wohl aber, solchen Argumenten ent-

gegenzuhalten, daß der Mathematiker, wenn er selbst mit Zahlen und Formeln operiert, keineswegs bloß ein minderwertiges Abbild der fehlerlosen Maschine ist, daß er keineswegs nur der „gedankenlose Denker" von Thomae ist; vielmehr stellt er sich selbst seine Probleme zu bestimmten interessanten und nützlichen Zwecken und führt sie in immer wieder neuer und eigenartiger Weise zur Lösung. Nur gewisse in gleicher Form stets wiederkehrenden Operationen läßt er sich von der Maschine abnehmen, und eben gerade der Mathematiker ist es – das darf man doch am wenigsten vergessen – der sie sich zur Entlastung erfunden hat, und der ihr zu seinen vernünftigen Zwecken die Aufgaben stellt, die sie lösen soll.

Lassen Sie mich diesen Abschnitt mit dem Wunsche abschließen, daß bei der großen Bedeutung der Rechenmaschine auch weitere Kreise genau mit ihr bekannt würden, als das heute leider noch der Fall ist. Vor allem sollte natürlich jeder Lehrer der Mathematik mit ihr vertraut sein, und es müßte sich gewiß auch ermöglichen lassen, *daß jedem Primaner unserer höheren Lehranstalten einmal eine solche Rechenmaschine vorgeführt wird!*

II. Die ersten Erweiterungen des Zahlbegriffes.

Wir wollen damit überhaupt die ganzen Zahlen verlassen, um in einem neuen Kapitel die Erweiterung des Zahlbegriffes zu behandeln. Auf der Schule pflegt man auf diesem Gebiete der Reihe nach die folgenden Schritte zu tun:

1.) Einführung der Brüche und Bruchrechnen.
2.) Behandlung der negativen Zahlen, im Anschluss an die Anfänge des Buchstabenrechnens.
3.) Mehr oder minder ausführliche Darlegung des Begriffes der Irrationalzahl an Beispielen bei verschiedenen Anlässen, wobei dann allmählich die Vorstellung des Kontinuums aller reeller Zahlen entsteht.

Es bleibt der Willkür überlassen, in welcher Reihenfolge man die ersten beiden Punkte behandeln will; lassen Sie uns hier die negativen Zahlen vor den Brüchen erörtern.

1. Die negativen Zahlen.

Eine auf die Terminologie bezügliche Bemerkung sei zunächst, daß man auf der Schule positive und negative Zahlen als „relative Zahlen" im Gegensatz zu den „absoluten" (positiven) zusammenfaßt, während auf der Universität dieser Sprachgebrauch nicht

üblich ist. Übrigens sagt man auf der Schule neben relativen Zahlen auch „algebraische Zahlen",[1] eine Bezeichnung, die wir hier bekanntlich in ganz anderem Sinne verwenden.

Was nun die Entstehung und Einführung der negativen Zahlen anlangt, so kann ich mich bei der Anführung von Tatsachenmaterial kurz fassen; diese Dinge sind Ihnen doch wohl geläufig, oder Sie werden sich zum mindesten an der Hand meiner Andeutungen leicht näher über sie orientieren können. Ausführlichere Darstellungen finden Sie beispielsweise außer im Weber-Wellstein auch in recht angenehmer Form in H. Burkhardts „algebraischer Analysis";[2] dieses Buch ist übrigens auch seines mäßigen Umfanges wegen zur Anschaffung geeignet.

Zur Entstehung der negativen Zahlen gibt nun bekanntlich die Forderung Anlaß, die Subtraktion zu einer in allen Fällen ausführbaren Operation zu machen. Ist $a < b$, so ist $a - b$ im Gebiete der natürlichen ganzen Zahlen ein „Nonsens"; wohl aber existiert eine Zahl $c = b - a$, und man setzt nun

$$a - b = -c,$$

---

1) Siehe etwa Mehler, Hauptsätze der Elementarmathematik (19. Aufl. – Berlin 1895) pg. 77.
2) Leipzig 1903.

und bezeichnet dies als *negative Zahl*. Damit verknüpft sich von Anfang an die Deutung aller ganzen Zahlen durch die *Skala* $-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4$ *der aequidistanten Punkte einer vom Nullpunkt aus nach beiden Seiten ausgedehnten Geraden*, der „*Abszissenachse*." Dieses Bild kann man wohl heute als Gemeingut aller Gebildeten betrachten, und man darf wohl annehmen, daß es seine Verbreitung hauptsächlich der allbekannten Thermometerskala dankt. Ein anschauliches und vielbenutztes Bild der negativen Zahlen bildet auch die *kaufmännische Bilanz* mit ihrem Rechnen mit Besitz und Schulden.

Wir wollen uns hierbei aber doch sogleich auch ausdrücklich vergegenwärtigen, was für *ein prinzipiell außerordentlich schwieriger Schritt* auf der Schule mit dieser Einführung der negativen Zahlen getan wird. War der Schüler vorher stets gewöhnt, sich unter den Zahlen und weiterhin auch unter den Buchstaben, mit denen er operierte, konkrete Anzahlen vorzustellen, und beim Addieren etc. die entsprechenden real mit Anzahlen möglichen Operationen vor Auge zu haben, so wird das jetzt ganz anders. Er bekommt er mit etwas neuem, den „negativen Zahlen," zu tun, die mit dem anschaulichen Bilde der Anzahl nichts mehr zu schaf-

fen haben, und soll doch ganz ähnlich wie mit Anzahlen mit ihnen operieren, obwohl die Operationen noch viel weniger die alte anschaulich klare Bedeutung haben. Man hat eben hier zum ersten Male den *Übergang von der sachlichen Mathematik zur formalen* vollzogen, zu dessen vollständiger Erfassung ein hoher Grad von Abstraktionsfähigkeit gehört.

Sehen wir nun im einzelnen zu, was aus den *Rechenoperationen* nach Einführung der negativen Zahlen wird. Zunächst ist klar, daß *Addition und Subtraktion wesentlich verschmelzen*: Die Addition einer positiven Zahl ist die Subtraktion der entgegengesetzt gleichen negativen. Max Simon macht hierzu die amüsante Bemerkung, daß gerade durch die Einführung der negativen Zahlen, die doch zum Zwecke der ausnahmslosen Durchführbarkeit der Subtraktion geschieht, die Subtraktion als selbständige Operation zu existieren aufhört. Für diese neue die Subtraktion mit umfassende Operation der Addition im Gebiete der positiven und negativen Zahlen gelten nun unverändert die *alten 5 formalen Gesetze*, die ich in Stichwörtern kurz wieder zusammenstelle (vgl. S. 22 f):

1) *Ausnahmslose Durchführbarkeit.*
2) *Eindeutigkeit.*

3) *Assoziativität.*
4) *Kommutativität.*
5) *Monotonie.*

Dabei ist zu 5.) zu bemerken, daß $a < b$ jetzt, kurz gesagt, bedeutet, daß bei der geometrischen Darstellung a links von b liegt, so daß also z. B. $-2 < -1$, $-3 < +2$ ist.

Bei der *Multiplikation* weiterhin ist der Hauptpunkt die sog. *Vorzeichenregel*, daß $a \cdot (-c) = (-c) \cdot a = -(a \cdot c)$, und $(-c)(-c') = +(c \cdot c')$ ist; besonders die letzte: „Minus mal minus gibt plus" bildet häufig einen gefährlichen Stein des Anstoßes. Auf das innere Wesen dieser Regel müssen wir sogleich noch zurückkommen; wir wollen sie hier nur in den einen Satz zusammenfassen, der das Produkt einer Reihe positiver und negativer Zahlen definiert: *Der absolute Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkte der absolut genommenen Faktoren; sein Vorzeichen ist positiv oder negativ, je nachdem eine gerade oder ungerade Zahl von Faktoren negativ ist.* Nach dieser Festsetzung hat die Multiplikation im Gebiete der positiven und negativen Zahlen wiederum die folgenden Eigenschaften:

1) *Ausnahmslose Durchführbarkeit.*
2) *Eindeutigkeit.*
3) *Assoziativität.*

4) *Kommutativität.*
5) *Distributivität in Bezug auf die Addition.*

Nur beim *Gesetz der Monotonie* findet sich jetzt eine Abweichung; an seine Stelle tritt folgendes Gesetz:

6) *Ist $a > b$, so wird $a \cdot c \gtreqless b \cdot c$, je nachdem $c \gtreqless 0$.*

Fragen wir uns nun, ob diese Gesetze, wiederum rein formal betrachtet, *widerspruchslos* sind. Wir müssen zuerst sagen, daß ein Beweis der Widerspruchslosigkeit auf rein logischem Wege hier bisher natürlich noch viel weniger geführt werden konnte, als bei den ganzen Zahlen. Nur eine Zurückführung in dem Sinne ist gelungen, daß die vorliegenden Gesetze sicher dann widerspruchslos sind, wenn die Gesetze für die ganzen Zahlen keinen Widerspruch enthalten. Bis dies aber durch Führung eines logischen Widerspruchslosigkeitsbeweises für die ganzen Zahlen vervollständigt worden ist, wird man *die Widerspruchslosigkeit unserer Gesetze allein darin begründet* finden können, *daß es anschauliche Dinge mit anschaulichen Verknüpfungen gibt, die jene Gesetze erfüllen.* Wir nannten als solche eben schon die *Reihe der ganzzahligen Punkte der Abszissenachse* und haben nur nachzutragen, was die Rechenoperationen dort bedeuten: Die Addition $x' = x + a$ ordnet jedem Punkte x bei festem a einen andern Punkt x'

so zu, daß die unendliche Gerade einfach um ein Stück a in sich verschoben wird und zwar nach rechts oder links, je nachdem a positiv oder negativ ist. Analog stellt die Multiplikation $x' = a \cdot x$ eine Ähnlichkeitstransformation der Geraden in sich dar, und zwar für $a > 0$ eine reine Dehnung, für $a < 0$ eine mit einer Umlegung um den Nullpunkt verbundene Dehnung.

Ich möchte jetzt erörtern, wie alle diese Dinge denn eigentlich historisch entstanden sind. Man darf nicht etwa denken, daß die negativen Zahlen die ausschließliche Erfindung eines klugen Mannes sind, der zugleich mit ihnen womöglich auch ihre Widerspruchslosigkeit etwa an der Hand der geometrischen Deutung herausgearbeitet hat; vielmehr hat sich in einer langdauernden Entwickelung die Benutzung der negativen Zahlen den Mathematikern gleichsam von selbst aufgedrängt, und erst als man schon lange mit ihnen operierte, im 19. Jahrhundert, traten jene Betrachtungen über ihre Widerspruchslosigkeit hinzu.

Lassen Sie mich der Geschichte der negativen Zahlen die Bemerkung vorausschicken, daß die alten Griechen sicher keine negativen Zahlen besaßen, so daß man ihnen hier einmal gewiß nicht die

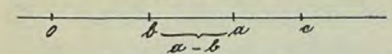
erste Stelle einräumen kann, wie das viele Leute sonst so gern tun. Hingegen muß man wohl die Inder als die ersten Erfinder ansprechen, die ja auch unser Ziffernsystem und insbesondere die Null geschaffen haben. In Europa kamen die negativen Zahlen zur Zeit der Renaissance allmählich in Gebrauch, als man gerade den Übergang zur Buchstabenrechnung vollzogen hatte. Ich will hierbei nicht unerwähnt lassen, daß die Vollendung der Buchstabenrechnung zuerst erreicht worden sein soll von Vieta in seiner Schrift „in artem analyticam isagoge."[1)]

Man besitzt auf diesem Standpunkte die sog. Klammerregeln für die Rechnung mit positiven Zahlen, die natürlich in unseren früher aufgezählten Grundformeln enthalten sind, wenn man noch die entsprechenden Gesetze für die Subtraktion hinzunimmt; ich gehe aber gern wenigstens an 2 Beispielen noch etwas näher auf sie ein, um vor allem die Möglichkeit äußerst einfacher anschauungsmäßiger Beweise für sie darzutun, – Beweise, die eigentlich nur aus der Figur und aus dem Wörtchen „Siehe!" zu bestehen brauchten, wie das bei den alten Indern Sitte war:

1) Es sei $a > b$ und $c > a$. Dann ist $a - b$ eine

1) Tours 1591.

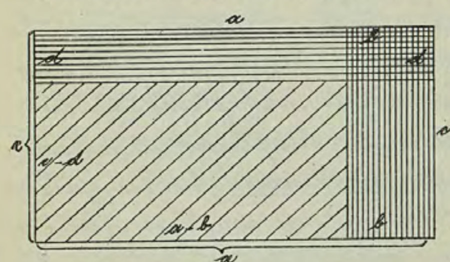
positive Zahl und kleiner als c, also muss $c-(a-b)$ als positive Zahl existieren. Deuten wir die Zahl auf der Abszissenachse und bemerken, dass die Strecke



zwischen den Punkten b und a die Länge $a-b$ hat, so lehrt ein Blick auf die obige Figur: Zieht man von c die Strecke $a-b$ ab, so erhält man dasselbe, als wenn man erst die ganze Strecke a abzieht, und dann den Teil b wieder hinzufügt; d. h.:

$$(1.) \qquad \underline{c-(a-b) = c-a+b.}$$

2.) <u>Es sei $a > b$ und $c > d$</u>; dann sind auch $a-b$ und $c-d$ positive ganze Zahlen. Wir wollen das Produkt $(a-b).(c-d)$ untersuchen; dazu zeichnen wir uns das Rechteck mit den Seiten $a-b$ und $c-d$,



dessen Inhalt die gesuchte Zahl $(a-b).(c-d)$ ist, als Teil des Rechtecks mit den Seiten a und c. Um aus diesem jenes erste zu erhalten, nehmen wir zunächst das obere horizontal schraffierte Rechteck $a.d$, sodann das rechts gelegene vertikal schraffierte $b.c$ fort; dabei haben wir aber das kleine kreuzweis schraffierte Rechteck $b.d$

einmal zu viel weggenommen, so dass wir es nachträglich noch hinzufügen müssen. Darin ist aber bereits die bekannte Formel ausgesprochen:

$$(2) \qquad \underline{(a-b)(c-d) = ac-ad-bc+bd.} \ –$$

Als wichtigster psychologischer Moment, das auf dieser Basis der Buchstabenrechnung zur Einführung der negativen Zahlen Anlass gab, kommt die allgemeine Eigentümlichkeit der menschlichen Natur in Betracht, <u>dass wir unwillkürlich geneigt sind, nach Regeln, die für spezielle Fälle abgeleitet und gültig sind, auch unter anderen allgemeineren Umständen zu verfahren</u>. Als „<u>Prinzip von der Permanenz der formalen Gesetze</u>“ ist dies für die Arithmetik zuerst von <u>Hermann Hankel</u> in seiner „<u>Theorie der komplexen Zahlsysteme</u>“ [1] als leitender Gesichtspunkt klar in Anspruch genommen worden; dieses äusserst interessante Buch kann ich Ihnen nur dringend zur Kenntnisnahme empfehlen. Das genannte Prinzip würde für den uns gerade interessierenden Übergang zu negativen Zahlen aussagen, dass man wünscht in Formeln wie (1) und (2) die ausdrücklichen Voraussetzungen über das Grössenverhältnis der a, b vergessen zu dürfen und sie auch auf andere Fälle anzuwenden. Wendet man so (2) z. B. auf $a = c = 0$ an, wofür

---

1.) Leipzig 1867.

ja die Formel keineswegs bewiesen ist, so hat man $(-b)\cdot(-d) = +bd$, d. i. *die Zeichenregel der Multiplikation negativer Zahlen*. In dieser Weise kann man in der Tat fast unbewußt auf alle die Regeln, die wir jetzt, der gleichen Überlegung folgend, als *nahezu notwendige Annahme* bezeichnen müssen, *notwendig, insofern man für die neuen Begriffe die Gültigkeit der alten Regeln haben will*. Freilich war den alten Mathematikern bei diesen Begriffsbildungen recht unwohl zu Mute, und ihr schlechtes Gewissen trat in Namen wie *erdachte Zahlen*, *falsche Zahlen* etc. zu Tage, die sie den negativen Zahlen gelegentlich gaben. Aber trotz aller Bedenken finden die negativen Zahlen im 16. und 17. Jahrhundert wegen ihrer sich immer klarer zeigenden Anwendbarkeit mehr und mehr allgemeine Anerkennung; sehr viel dazu beigetragen hat ohne Zweifel die Entwicklung der analytischen Geometrie. Freilich, die Bedenken blieben bestehen und mußten bestehen bleiben, so lange man im Grunde doch immer wieder nach einer Deutung innerhalb der Anzahlbegriffes suchte, und die führende Rolle der formalen Gesetze bei den Neubildungen nicht klar erkannt hatte; im Zusammenhange damit standen die sich immer wiederholenden Versuche, die Vorzeichen-

regeln zu beweisen. Die einfache Aufklärung, die dann erst das 19. Jahrhundert brachte, ist die, *daß von logischer Notwendigkeit des ganzen Ansatzes, also von Beweisbarkeit der Zeichenregel nicht die Rede sein kann; es kann sich vielmehr nur darum handeln, die logische Zulässigkeit des Ansatzes zu erkennen*, während er im Übrigen willkürlich ist und durch *Zweckmäßigkeitsgründe*, wie jenes Permanenzprinzip, reguliert wird.

Es ist bei dieser Betrachtung der auch sonst oft sich darbietende Gedanke nicht zu unterdrücken, *daß die Dinge manchmal vernünftiger zu sein scheinen, als die Menschen*. Bedenken Sie nur, wie hier einer der größten Fortschritte in der Mathematik, die Einführung der negativen Zahlen und das Operieren mit ihnen, nicht durch bewußtes logisches Überlegen eines Einzelnen geschaffen worden ist, sondern wie er durch intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst langsam organisch herangewachsen ist, wobei es fast aussieht, als ob die Menschen von den Buchstaben gelernt haben. Die vernünftige Überlegung, daß man da wirklich etwas Richtiges, mit der strengen Logik Verträgliches gemacht hat, tritt erst viel später ein. Überhaupt kann die reine Logik bei solchen neuen Begriffsbildungen immer nur *regulierend* einwirken, und *wie das allein* leitende Prinzip abgeben, denn der einzigen von ihr gestellten Notforderung der Widerspruchsfreiheit genügen natürlich stets noch eine große Menge von Begriffssystemen.

Wollen Sie nun noch Literatur über Fragen der Geschichte der negativen Zahlen finden, so empfehle ich Tropfkes „Geschichte der Elementarmathematik" [1] als eine ausgezeichnete Materialsammlung, die sehr viele Einzelheiten über die Entwicklung der elementaren Begriffe, Anschauungen und Benennungen in übersichtlicher Darstellung enthält.

Sehen wir nun noch kritisch zu, wie man die negativen Zahlen auf der Schule tatsächlich darzustellen pflegt, so ist zunächst zu sagen, daß da häufig Fehler vorkommen, indem man entsprechend jenen bereits gekennzeichneten Bestrebungen der älteren Mathematiker immer wieder die logische Notwendigkeit der Zeichenregeln zu beweisen versucht. Besonders gern gibt man die heuristische Herleitung der $(-b)(-d) = +bd$ aus der Formel für $(a-b)(c-d)$ als Beweis aus, indem man völlig außer Acht läßt, daß die Gültigkeit dieser Formel tatsächlich zunächst durchaus an die Ungleichungen $a > b$, $c > d$ geknüpft

1) 2 Bände. Leipzig 1902/1903.

ist. [1] So wird denn der Beweis geradezu erschlichen, und das psychologische Moment, das nur vermöge des Permanenzprinzipes zum Ansatz hinleitet, mit einem logischen beweisenden Moment verwechselt. Natürlich kann das der Schüler, dem es so zum ersten Male dargeboten wird, unmöglich begreifen, aber glauben muß er es schließlich doch; und wenn, wie es wohl vielfach vorkommt, die Wiederholung auf der höheren Stufe nicht die nötige genauere Ergänzung gibt, dann mag sich bei manchem die Überzeugung festsetzen, daß die Sache etwas Mystisches, Unbegreifliches ist.

Gegenüber dieser Praxis möchte ich doch allgemein die Forderung aufstellen, keinerlei Versuche zum Erschleichen unmöglicher Beweise zu machen; man sollte vielmehr den tatsächlichen Verhältnissen entsprechend den Schüler an einfachen Beispielen überzeugen oder womöglich es ihn selbst finden lassen, daß gerade diese auf dem Permanenzprinzip beruhenden Festsetzungen geeignet sind, einen gleichförmig bequemen Algorithmus zu liefern, während jede andere Festsetzung immer zu zahlreichen Fallunterscheidungen bei allen Regeln zwingen würde. Freilich darf man das Kei-

1) Vgl. z. B. E. Heis, Samml. von Beispielen und Aufgaben a. d. Arithmetik u. Algebra. 106.-108. Aufl. (Köln 1904), pag. 46.

neswegs überstürzen, sondern muß dem Schüler zu der Revolution seines Denkens, die sich durch diese Erkenntnis in ihm vollzieht, Zeit lassen. Und während es leicht verständlich ist, daß andere Festsetzungen unzweckmäßig sind, sollte man doch das so sehr Wunderbare der Tatsache, daß es eine allgemein zweckmäßige Festsetzung wirklich gibt, für den Schüler klar verständlich hervorheben; es sollte ihm deutlich werden, daß dies keineswegs von vornherein selbstverständlich ist.

Ich schließe damit meine Darlegungen über die Theorie der negativen Zahlen ab und lade Sie nunmehr, meine Herren, zu ähnlichen Betrachtungen über die zweite Erweiterung des Anzahlbegriffes ein:

2. Die gebrochenen Zahlen.

Gehen wir von der *Behandlung der Brüche auf der Schule* aus. Hier hat der Bruch $\frac{a}{b}$ von Anfang an eine *durchaus konkrete Bedeutung*; nur daß gegenüber dem anschaulichen Bilde der ganzen Zahl ein *Wechsel des Substrates eingetreten ist*: Man ist nämlich von der *Anzahl* zum *Maß*, von der Betrachtung *zählbarer Dinge* zu der *meßbarer Dinge* übergegangen. Mit einer gewissen Einschränkung gibt das System der *Münzen* oder das der *Gewichte*, vollkommen das System al-

ler *Längen* ein Beispiel *meßbarer Mannigfaltigkeiten*. Es sind die Beispiele, an denen auch jedem Schüler der Begriff des Bruches beigebracht wird: was $\frac{1}{3}$ Meter oder $\frac{1}{2}$ Pfund ist, das zu begreifen wird keinem große Schwierigkeiten machen. Die *Beziehungen $=, >, <$* zwischen Brüchen lassen sich nun aus der nämlichen konkreten Anschauung heraus sofort entwickeln, ebenso die Operationen der *Addition* und *Subtraktion*. Die *Multiplikation* läßt sich alsdann durch eine leichte Modifikation ihrer ursprünglichen Bedeutung verständlich machen: *Eine Zahl mit $\frac{a}{b}$ multiplizieren heißt sie mit der ganzen Zahl a (nach der alten Definition) multiplizieren und alsdann mit b dividieren*, oder auch: *das Produkt entsteht aus dem Multiplikanden gerade so, wie $\frac{a}{b}$ aus 1.* Die *Division* durch einen Bruch wird dann als *inverse Operation der Multiplikation definiert*: *$a : \frac{2}{3}$ ist die Zahl, die mit $\frac{2}{3}$ multipliziert a ergibt.* – Diese Begriffsbildungen der Bruchrechnung kombinieren sich nun noch mit der Einführung der negativen Zahlen, so daß man schließlich über den *Inbegriff aller „rationalen Zahlen"* verfügt. – Ich kann auf die Details dieses ganzen Aufbaues, der auf der Schule natürlich eine lange Zeit in Anspruch nimmt, hier nicht eingehen. *Wir wollen ihn lieber sogleich mit der in der modernen Mathe* matik ausgebildeten Darstellung vergleichen und als Beispiele für diese die zitierten Bücher von Weber-Wellstein [1] und Burkhardt [2] heranziehen.

Bei Weber-Wellstein treten vorwiegend die formalen Gesichtspunkte, die aus der Mannigfaltigkeit der verschiedenen möglichen Deutungen das notwendig Gemeinsame herauspräparieren, in Erscheinung. Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist ein Symbol, ein „Zahlenpaar" mit dem nach gewissen Regeln gerechnet werden soll; diese Regeln, die in Wahrheit in der vorhin angedeuteten Weise naturgemäß aus der Bedeutung der Brüche entstanden sind, haben hier den Charakter willkürlicher Verabredungen. So erscheint z. B. das, was für den Schüler ein anschaulicher Satz über das Erweitern bezw. Kürzen der Brüche ist, hier in der Gestalt einer Definition der Gleichheit: Zwei Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ heißen gleich, wenn $ad = bc$. Ähnlich wird das Größer und Kleiner definiert, ähnlich wird festgesetzt, daß als Summe zweier Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ der Bruch $\frac{ad+bc}{bd}$ bezeichnet werden möge, u. s. f. Dann wird bewiesen, daß die so definierten Operationen in dem neu entstandenen Zahlkreise formal genau die Eigenschaften der Addition und Multiplikation für ganze

1) zitiert S. 8. 2.) zitiert S. 57.

Zahlen besitzen, d. h. den mehrfach aufgezählten 11 Fundamentalgesetzen genügen.

Nicht ganz so formal, wie diese hier natürlich nur in den wesentlichsten Grundzügen referierte Darstellung von Weber-Wellstein geht Burkhardt vor. Er faßt den Bruch $\frac{a}{b}$ als Aufeinanderfolge zweier Operationen im Gebiete der ganzen Zahlen auf: Einer Multiplikation mit a und einer Division mit b, wobei ihm eine willkürlich angenommene ganze Zahl das Objekt darstellt, auf das diese Operationen anzuwenden sind. Nimmt man zwei solche „Operationspaare" $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ nacheinander vor, so soll das der Multiplikation der Brüche entsprechen, und man erkennt leicht, daß die so resultierende Operation nichts als Multiplikation mit $a \cdot c$ und Division mit $b \cdot d$ bedeutet, so daß man damit die Regel $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ der Bruchmultiplikation aus einer klaren Bedeutung der Brüche gewonnen, nicht aber durch bloße willkürliche Verabredung festgesetzt hat. Ebenso kann man natürlich die Division deuten und behandeln. Addition und Subtraktion hingegen lassen aus diesen Vorstellungen keine so einfache Deutung zu, die Formel $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ bleibt also auch bei Burkhardt eine Verabredung, für die er nur Plausibilitätsgründe heranbringt.

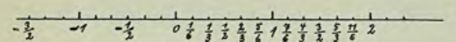
Vergleichen wir nun die alte Schuldarstellung mit der so geschilderten modernen Auffassung. Bei dieser bleiben wir – sowohl in der einen, wie der anderen Ausführung – trotz der Erweiterung des Zahlbegriffes eigentlich ganz auf dem Boden der ganzen Zahlen stehen: Es wird nur vorausgesetzt, daß der Inbegriff der ganzen Zahlen anschaulich erfaßt oder daß die Regeln des Operierens mit ihnen bekannt sind; die neuen als Zahlenpaare bezw. Operationen mit ganzen Zahlen definierten Dinge fügen sich ganz diesem Rahmen ein. Die Schuldarstellung hingegen beruft sich durchaus auf die neu hinzutretende Anschauung der meßbaren Größen, die ein unmittelbar intuitives Bild der Brüche liefert. Wir erfassen diesen Unterschied am besten, wenn wir uns ein Wesen vorstellen, das nur die Idee der ganzen Zahlen, aber keine Anschauung von meßbaren Größen besitzt: Die Schuldarstellung müßte ihm dann vollkommen unverständlich bleiben, während es die Betrachtungen von Weber – Wellstein oder Burkhardt wohl begreifen könnte.

Welche der beiden Auffassungen ist nun die bessere? Was leisten beide? Die Antwort hierauf wird ähnlich lauten, wie neulich, als wir die analoge Frage für die verschiedenen Auffassungen der ganzen Zahlen selbst

stellten: Sicher ist die moderne Darstellung reinlicher, aber andererseits ist sie auch ärmer. Denn von dem, was der traditionelle Lehrgang einheitlich gibt, liefert sie eigentlich nur die eine Hälfte: die abstrakte, in sich logisch vollständige Einführung gewisser arithmetischer Begriffe – „Brüche" genannt – und des Operierens mit ihnen. Aber unerörtert bleibt dabei eine davon gänzlich unabhängige und nicht minder wichtige Frage: Kann man die so abgeleitete theoretische Doktrin auf die uns vorkommenden anschaulichen meßbaren Größen auch wirklich anwenden? Man könnte das wieder ein Problem der „angewandten Mathematik" nennen, das eine durchaus selbständige Behandlung zuläßt; freilich ist dabei recht fraglich, ob diese Trennung auch paedagogisch zweckmäßig ist. Bei Weber – Wellstein kommt diese Spaltung des Problemes in zwei Teile übrigens sehr charakteristisch zum Ausdruck: nach der abstrakten Einführung der Bruchrechnung, auf die wir bisher allein Bezug nahmen, widmet er einen eigenen (den fünften) Abschnitt – „Verhältnisse" betitelt – der Frage, wie man die rationalen Zahlen auf die Außenwelt wirklich anwendet; dabei ist seine Darstellung freilich auch mehr begrifflich als anschaulich.

Ich schließe nunmehr diese Erörterungen über

Brüche mit noch einer allgemeinen Bemerkung über die Gesamtheit der rationalen Zahlen, wobei ich mich der Anschaulichkeit halber der Darstellung auf der geraden Linie bediene. Auf dieser denken wir uns alle



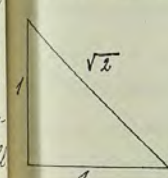
Punkte mit rationalen Abszissen markiert; wir bezeichnen sie kurz als rationale Punkte. Man sagt dann, daß die Gesamtheit dieser rationalen Punkte auf der Abszissenachse „überall dicht" liegt, und meint damit, daß in jedem noch so kleinen Intervalle noch unendlich viele rationale Punkte liegen. Schärfer kann man, um nichts dem Inbegriff der rationalen Punkte Fremdes hineinzubringen, diese Definition dahin fassen, daß zwischen je zwei rationalen Punkten noch stets ein weiterer rationaler Punkt liegt. Eine Folge davon ist, daß man aus der Gesamtheit der rationalen Punkte durchaus im Endlichen gelegene Teile ausscheiden kann, die weder ein kleinstes, noch ein größtes Element enthalten; ein Beispiel bildet die Gesamtheit aller rationalen Punkte zwischen 0 und 1, diese Punkte selbst nicht mit einbegriffen; denn in ihr gibt es zu jeder rationalen Zahl noch eine zwischen dieser und 0 gelegene, also kleinere, und ebenso eine zwischen ihr und 1 gelegene, also größere Zahl

Diese Begriffsbildungen gehören in ihrer systematischen Ausbildung bereits der Cantorschen Mengenlehre an; wir werden in der Tat später den Inbegriff der rationalen Zahlen mit den hier erwähnten Eigenschaften als wichtiges Beispiel einer Menge verwenden.

Ich gehe nunmehr zu der dritten Ausdehnung des Zahlbereiches über:

3. Die irrationalen Zahlen.

Wir wollen uns hier nicht erst mit der Frage aufhalten, wie dies Gebiet auf der Schule gewöhnlich behandelt wird, denn über einige Beispiele kommt man da meist nicht weit hinaus; wir gehen besser sogleich auf die geschichtliche Entwicklung ein. Historisch liegt der Ursprung des Begriffes der irrationalen Zahlen jedenfalls in der geometrischen Anschauung und dem geometrischen Bedürfnis. Denken wir uns die Abszissenachse, wie soeben erörtert, überall dicht mit der Menge der rationalen Punkte besetzt; dann gibt es noch weitere Punkte, wie das zuerst Pythagoras in etwa folgender Weise gezeigt



haben soll: Hat man ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei Katheten der Länge 1, so ist die Hypotenuse gleich $\sqrt{2}$, und das ist gewiß keine rationale Zahl; denn setzt man $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, wo a und b teilerfremd gemacht sein mögen, so kommt man leicht mit bekannten Gesetzen der Teilbarkeit ganzer Zahlen in Widerspruch. Trägt man nun die so geometrisch konstruierte Strecke auf der Abszissenachse von 0 an ab, so erhält man also einen nichtrationalen, in jener überall dichten Bedeckung noch nicht enthaltenen Punkt. Ferner aber war den Pythagoräern gewiß auch schon bekannt, daß ebenso in den meisten Fällen die Hypotenuse $\sqrt{m^2+n^2}$ eines rechtwinkligen Dreiecks mit den ganzzahligen Katheten m, n irrational sein wird; diese außerordentlich wesentliche Erkenntnis war wohl das Opfer von 100 Ochsen wert, durch das sie Pythagoras gefeiert haben soll, und über das so gern schlechte Witze gemacht werden. Wir wissen auch, daß sich die Schule des Pythagoras mit Vorliebe mit der Aufsuchung aller jener speziellen Wertepaare m, n beschäftigte, für die sich rechtwinklige Dreiecke mit drei rationalen Seiten ergeben (sog. pythagoräische Zahlen); das einfachste Beispiel einer dieser Zahlentripel, auf die wir noch näher zurückkommen werden, ist 3, 4, 5.

Die späteren griechischen Mathematiker studierten nun neben diesen einfachsten Irrationalitäten auch immer kompliziertere; so finden sich bei Euklid Ty-

pen wie $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ u. dergl. Allgemein kann man aber sagen, daß sie sich im wesentlichen auf solche Irrationalitäten beschränkten, die man durch wiederholtes Quadratwurzelziehen gewinnt und demgemäß geometrisch mit Lineal und Zirkel konstruieren kann; die allgemeine Idee der Irrationalzahl besaßen sie aber wohl noch nicht.

Ich muß diese Bemerkung jedoch noch etwas näher praezisieren, um Mißverständnisse zu vermeiden. Sie soll nur besagen, daß die Griechen kein Verfahren besaßen, das arithmetisch die allgemeine irrationale Zahl aus den rationalen herzustellen, zu definieren gestattete, so wie wir es als Erträgnis moderner Entwicklung sogleich kennen lernen werden. Trotzdem aber war ihnen von einer anderen Seite her der Begriff der allgemeinen reellen nicht notwendig rationalen Zahl geläufig, nur hatte die Sache ein ganz anderes Aussehen, als bei uns, da sie Buchstaben für allgemeine Zahlen nicht benutzten. Sie betrachteten nämlich – Euklid stellt das ja systematisch so dar – Verhältnisse zweier beliebiger Strecken, und operierten mit ihnen eigentlich genau so, wie wir heute mit der beliebigen reellen Zahl umgehen; es finden sich da sogar Definitionen bei Euklid, die ganz an die moderne Theorie der Irrationalzahl anklingen. Übrigens ist im Namen noch immer ein Unterschied gegen die ganze natürliche Zahl; diese heißt ἄριθμος, während das Streckenverhältnis, die beliebige reelle Zahl, λόγος genannt wird.

Eine Bemerkung über das Wort „irrational" sei dem noch angefügt. Es beruht wahrscheinlich auf einer irrtümlichen Übersetzung des griechischen „ἄλογος" ins Lateinische. Dies griechische Wort sollte wahrscheinlich „nicht aussprechbar" bedeuten und besagen, daß die neuen Zahlen bezw. Streckenverhältnisse nicht wie die rationalen durch ein Verhältnis zweier ganzen Zahlen angegeben werden können;[1)] erst das Mißverständnis des Übersetzers hat daraus das „unvernünftig" gemacht, das dem Namen der Irrationalzahl jetzt anzuhaften scheint.

Die allgemeine Idee der Irrationalzahl ist wohl erst am Ende des 16. Jahrhunderts im Gefolge der Einführung der Dezimalbrüche aufgetreten, deren Gebrauch sich damals in Verbindung mit dem Entstehen der Logarithmentafeln einbürgerte. Verwandelt man eine rationale Zahl in einen Dezimalbruch, so kann man neben endlichen auch unendliche Dezimalbrüche erhalten, die jedoch unter allen Umständen periodisch werden;

---

1) s. Tropfke, Bd. I, pag. 163.

das einfachste Beispiel dafür ist $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, d. i. ein Dezimalbruch, dessen einziffrige Periode 3 sogleich hinter dem Komma beginnt. Nun hindert nichts, sich einen aperiodischen Dezimalbruch zu denken, dessen Ziffern nach sonst irgend einem bestimmten Gesetz fortschreiten, und jeder Mensch wird ihn unwillkürlich als bestimmte und dann natürlich nicht rationale Zahl betrachten. Damit ist aber der Allgemeinbegriff der Irrationalzahl bereits gegeben – gewissermaßen durch die Betrachtung der Dezimalbrüche von selbst eingeführt. Historisch ging es demgemäß auch hier in der Tat so, wie wir es früher bei den negativen Zahlen ausführlich geschildert haben: Der Kalkül zwang zur Einführung der neuen Begriffe, und ohne daß man viel über deren Wesen und Begründung nachdachte, operierte man eben mit ihnen, zumal sie sich vielfach als äußerst nützlich erwiesen.

Erst in den sechziger Jahren des 19. Jahrhunderts brach sich das Bedürfnis nach praeziser arithmetischer Formulierung der Grundlagen der Irrationalzahlen Bahn, und es waren die Vorlesungen von Weierstraß aus jenen Jahren, in denen das zuerst geschah. Eine allgemeine Grundlegung gab 1872 G. Cantor in Halle, der Begründer der Mengenlehre, und gleichzeitig unabhängig

R. Dedekind in Braunschweig. Den Dedekindschen Standpunkt will ich hier in ein paar Worten erläutern. Wir denken uns im Besitze des Inbegriffs der rationalen Zahlen, wollen aber jede Raumanschauung, die uns den Begriff der Kontinuität der Zahlenreihe ohne weiteres aufzwingt, ausschließen. Um von dieser Grundlage aus zu einer *rein arithmetischen Definition der Irrationalzahl* zu gelangen, bildet sich Dedekind den Begriff des *Schnittes im Gebiete der rationalen Zahlen*. Ist nämlich r irgend eine rationale Zahl, so teilt sie die Gesamtheit aller rationalen Zahlen in 2 Teile A, B, derart, *daß jede Zahl aus A kleiner als jede aus B ist, und daß eine jede rationale Zahl zu einer von beiden Klassen gehört*: A ist die Gesamtheit aller rationalen Zahlen, die kleiner als r sind, B die aller größeren, wobei man r selbst ebensowohl zu A, als zu B rechnen kann; es bleibt gleichgültig, welche dieser beiden Möglichkeiten man wählt. Neben diesen „*eigentlichen Schnitten*" gibt es nun noch „*uneigentliche Schnitte*", das sind *Verteilungen aller rationalen Zahlen auf 2 Klassen derselben Eigenschaften, die nur nicht durch eine rationale Zahl hervorgerufen werden*, d. h. bei der weder in A eine größte noch in B eine kleinste Zahl enthalten ist. Ein *Beispiel* solcher uneigentlichen Schnitte liefert uns

z. B. $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ oder überhaupt *jeder unendliche aperiodische Dezimalbruch*: wir können nämlich von jeder rationalen Zahl sofort entscheiden, ob sie kleiner oder größer als der betr. unendliche Dezimalbruch ist, und rechnen nun jede kleinere Zahl zu A, jede größere zu B; dann ist einmal sicher jede Zahl aus A kleiner als jede aus B, und andererseits kann es weder in A eine größte, noch in B eine kleinste rationale Zahl geben, da zwischen jeder rationalen Zahl und dem unendlichen Dezimalbruch noch unendlich viele andere rationale Zahlen liegen.

Gemäß dieser Überlegung *definiert* nun Dedekind, was vom rein logischen Standpunkte natürlich als „*willkürliche Festsetzung*" angesehen werden muß: *Ein jeder Schnitt im Gebiete der rationalen Zahlen heiße eine rationale oder irrationale Zahl, je nachdem er eigentlich oder uneigentlich ist.* Daran schließt sich sofort eine *Definition der Gleichheit*: *2 Zahlen heißen gleich, wenn sie im Gebiete der rationalen Zahlen denselben Schnitt hervorbringen.* Aus dieser Definition kann man geradezu *beweisen*, daß z. B. $\frac{1}{3}$ dem unendlichen Dezimalbruch $0,333\ldots$ gleich ist. Man wird, wenn man sich einmal auf diesen Boden stellt, in der Tat einen Beweis dafür, d. h. eine Zurückführung auf die angegebene Definition, verlangen müssen, obwohl das dem naiv an die Sache

Herantretenden natürlich ganz unnötig scheint. Dieser Beweis ergibt sich übrigens leicht, indem man sich überlegt, daß jede rationale Zahl unterhalb $\frac{1}{3}$ von dem unendlichen Dezimalbruch schließlich überschritten wird, während er keine rationale Zahl, die größer als $\frac{1}{3}$ ist, jemals erreichen kann. Die entsprechende Definition in den Weierstraßschen Vorlesungen erscheint in folgender Form: 2 Zahlen heißen gleich, wenn sie sich um weniger unterscheiden, als jede noch so kleine vorgegebene Größe; man sieht leicht den Zusammenhang mit der vorigen. Besonders anschaulich wird diese letztere Definition, wenn man sich überlegt, warum 0,999... gleich 1 ist; der Unterschied ist eben sicher kleiner als 0,1, kleiner als 0,01 u. s. f., also nach der Definition strikte gleich Null.

Fragt man sich nun, warum man diese Irrationalzahlen ins System der gewöhnlichen Zahlen aufnehmen und unterschiedslos mit ihnen rechnen kann, so ist der Grund in der Gültigkeit der Monotoniegesetze der elementaren Rechnungsoperationen zu suchen. Das Prinzip ist folgendes: Hat man Irrationalzahlen zu addieren, multiplizieren et c., so schließe man sie enger und immer enger zwischen rationale Grenzen ein und mache mit diesen Grenzen die gleichen

Operationen; dann wird eben wegen der Gültigkeit der Monotoniesätze gleichzeitig auch das Resultat in immer engere Grenzen eingeschlossen.

Es ist wohl nicht nötig, daß ich auf diese Dinge hier näher eingehe, da Ihnen bequem lesbare Darstellungen in sehr vielen Lehrbüchern, besonders wiederum bei Weber-Wellstein und Burkhardt, leicht zugänglich sind. Dort mögen Sie auch über die Definition der Irrationalzahl Ausführlicheres nachlesen, als ich hier andeuten konnte.

Ich möchte lieber wiederum auf das zu sprechen kommen, was Sie in den Büchern meist nicht finden, auf die Frage nämlich, wie man nach dieser Voranstellung der arithmetischen Theorie zu den Anwendungen in den andern Gebieten übergehen kann; insbesondere kommt hier die analytische Geometrie in Betracht, die der naiven Anschauung gerade umgekehrt als Quelle der Irrationalzahlen erscheint, und die es psychologisch genommen in der Tat auch ist. Betrachten wir die Abszissenachse, auf der der Nullpunkt und auch die rationalen Punkte wie oben schon festgelegt sein mögen, so lautet der Vordersatz, auf dem diese Anwendung beruht: Zu jeder rationalen oder irrationalen Zahl gibt es einen Punkt, der sie als Abszisse hat, zu jedem Punkt der Geraden ge-

hört umgekehrt als Abszisse eine rationale oder irrationale Zahl. Einen solchen obersten Satz, der an der Spitze einer Disziplin steht, und aus dem alles folgende rein logisch entwickelt wird, während er selbst nicht logisch bewiesen werden kann, nennt man ein *Axiom*. Er muß je nach der Veranlagung dem einzelnen Mathematiker entweder als *intuitiv einleuchtend* erscheinen, oder als *mehr oder minder willkürliche Verabredung* akzeptiert werden. Das vorliegende Axiom über die eineindeutige Korrespondenz der reellen Zahlen einerseits und der Punkte der Geraden andererseits wird gewöhnlich als *Cantorsches Axiom* bezeichnet, da *G. Cantor* der erste war, der es ausdrücklich formuliert hat (in den Mathem. Annal. Bd. 5, 1872).

Es ist hier die Stelle, überhaupt von der *Natur der Raumanschauung* ein Wort zu sagen. Man belegt eigentlich *zweierlei Verschiedenes* mit dieser Bezeichnung: einmal die *sinnlich unmittelbare, die empirische Anschauung* des Raumes, die wir durch Messen kontrollieren können, dann aber die *abstrahierte innere Raumanschauung*, man kann vielleicht sagen, die uns innewohnende *Idee des Raumes*, die über die Ungenauigkeit der sinnlichen Wahrnehmung hinausgeht. Ein analoger Unterschied besteht ja überhaupt für

jede Anschauung, wie ich schon bei der Begründung des Anzahlbegriffes andeutete (vgl. S. 28f) und man kann ihn dort vielleicht am besten so aufweisen: Was eine kleine Zahl, wie 2 oder 5 oder auch noch 7 bedeutet, ist uns unmittelbar klar, während wir von größeren Zahlen, etwa 2503, keine so unmittelbare Anschauung mehr haben; hier ist vielmehr an ihrer Stelle die *innere Anschauung der geordneten Zahlreihe*, die wir uns aus den ersten Zahlen durch vollständige Induktion bilden, eingetreten. In der Raumanschauung nun liegt es so: Betrachten wir z. B. den Abstand zweier Punkte, so können wir ihn nur mit einer gewissen *beschränkten Genauigkeit* abschätzen und messen, denn unser Auge kann Strecken, deren Unterschied unter einer gewissen Grenze liegt, nicht mehr als verschieden auffassen; das ist die Tatsache der Schwelle, die in der ganzen Psychologie eine so große Rolle spielt. Diese Erscheinung bleibt auch dem Wesen nach bestehen, wenn wir unser Auge durch die denkbar schärfsten Hilfsmittel unterstützen; denn es gibt physikalische Eigenschaften, die einen gewissen Genauigkeitsgrad zu überschreiten nicht gestatten. Die Optik lehrt nämlich, daß die Wellenlänge des Lichtes, die bekanntlich mit der Farbe variiert, von der Größenordnung $\frac{1}{1000}$ mm (= 1 Mikron) ist; sie zeigt ferner, daß Gegenstände, deren Dimensionen gegen diese Größe klein sind, auch mit den besten Mikroskopen nicht mehr deutlich gesehen werden können, weil dann nur noch Beugungen des Lichtes eintreten, aber kein optisches Bild mit genauen Reproduktionen der Einzelheiten mehr entworfen wird. Die Folge davon ist die Unmöglichkeit, auf optischem Wege feinere Längenmessungen vorzunehmen als mit einer Genauigkeit von 1 Mikron, so daß bei Längenangaben in mm stets nur die ersten 3 Dezimalen eine gesicherte Bedeutung haben können. Ebenso werden wir bei allen physikalischen Beobachtungen und Messungen stets auf solche nicht zu überschreitende Schwellenwerte stoßen, die die äußerste Grenze der möglichen Genauigkeit bestimmen. Angaben jenseits dieser Grenze haben keinen Sinn mehr, und sind ein Zeichen von Unwissenheit oder gar Schwindel. Solche übertrieben genaue Zahlen findet man, beiläufig gesagt, öfters in den Reklameschriften von Badeorten, wo der Salzgehalt der Quellen auf eine Anzahl von Dezimalen angegeben ist, deren genaue Bestimmung durch Wägung einfach unmöglich ist.

Gegenüber dieser Eigenschaft der empirischen Raumanschauung, an eine beschränkte Genauigkeit geknüpft zu sein, hat die abstrakte oder ideale Raumanschauung

eine unbegrenzte Genauigkeit und geht darin nach dem Cantorschen Axiom mit den arithmetischen Definitionen der Zahlbegriffes genau parallel.

Gemäß dieser Einteilung unserer Anschauung wird es nahe liegen, auch die Mathematik in zwei Teile zu teilen, die man als Approximations- und Praezisionsmathematik bezeichnet hat. Wollen wir diesen Unterschied an der Deutung einer Gleichung $f(x) = 0$ erläutern, so handelt es sich in der Approximationsmathematik genau wie in unserer tatsächlichen empirischen Anschauung nicht darum, daß der Wert $f(x)$ genau gleich 0 ist, sondern nur darum, daß sein Betrag $|f(x)|$ unter der erreichbaren Schwelle der Genauigkeit bleibt; die Schreibweise $f(x) = 0$ soll also nur eine Abkürzung für die Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ sein, mit der man es tatsächlich zu tun hat. Erst die Praezisionsmathematik hat die Gleichung $f(x) = 0$ wirklich genau zu erfüllen. Da in den Anwendungen nur die Approximationsmathematik eine Rolle spielt, kann man etwas kraß ausgedrückt, auch sagen, daß man lediglich diese Disziplin braucht, während die Praezisionsmathematik bloß zum Vergnügen derer, die sich mit ihr beschäftigen, da ist und im übrigen für die Entwicklung der Approximationsmathematik eine bequeme Stütze abgibt.

Ich schließe hier, um wieder auf unser eigentliches Thema zurückzukommen, die Bemerkung an, daß die Begriffsbildung der Irrationalzahl sicherlich nur in die Präzisionsmathematik gehört. Denn die Behauptung, daß zwei Punkte um eine irrationale Zahl von Metern von einander abstehen, kann unmöglich realen Sinn haben, da doch, wie wir sahen, alle Dezimalstellen hinter der sechsten keine reale Bedeutung mehr haben. Für die Praxis kann man also irrationale Zahlen unbedenklich durch rationale ersetzen. Dem scheint freilich zunächst zu widersprechen, daß man in der Krystallographie von dem Gesetze der rationalen Indizes spricht, oder daß man in der Astronomie als wesentlich verschiedene Fälle unterscheidet, ob die Umlaufszeiten zweier Planeten rationales oder irrationales Verhältnis haben. In der Tat aber zeigt sich in dieser Ausdrucksweise nur wieder die Vieldeutigkeit unserer Sprache, denn man meint hier rational und irrational in einem ganz andern, als dem bisher benutzten, in einem approximationsmathematischen Sinne. In dieser Bedeutung sagt man nämlich, daß zwei Größen ein rationales Verhältnis haben, wenn sie sich wie zwei kleinere ganze Zahlen verhalten, etwa wie $\frac{3}{7}$, während man ein Verhältnis $\frac{2021}{7053}$ schon irrational nennen würde; wie groß Zähler und Nenner hier-

bei sein müssen, ist verschieden und von dem Zweck der Anwendung abhängig. Alle diese interessanten Beziehungen habe ich in einer Vorlesung im Sommersemester 1901 behandelt, die 1902 autographiert wurde und jetzt im Neudruck vorliegt: „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien." (Ausgearb. v. C. H. Müller).[1]

Mit einem Worte will ich nun zum Schluß noch darauf eingehen, wie ich mir die Behandlung dieser Dinge auf der Schule wünsche. Hier ist eine genaue Theorie der Irrationalzahl dem Interesse und der Fassungskraft der meisten Schüler gemäß kaum am Platze. Der Knabe wird sich meist mit Angaben von beschränkter Genauigkeit gern zufrieden geben, eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ mm schon bewundernd anstaunen und gar nach unbeschränkter Genauigkeit gewiß kein Verlangen tragen; es genügt also für diesen Durchschnitt, wenn man die Irrationalzahl an Beispielen nur im allgemeinen anschaulich macht, und so geschieht es wohl auch meistens. Freilich werden einzelne spezifisch veranlagte Schüler wohl über dieses Maß hinaus eine nähere Einsicht verlangen, und hier ist es eine lohnende Aufgabe der pädagogischen Kunst des Lehrers, mit den erwünschten weiteren Andeutungen nicht zurückzuhalten,

1) Neuer Abdruck. Leipzig 1907.

ohne die Interessen der Mehrheit zu verletzen.

III. Von den besonderen Eigenschaften der ganzen Zahlen.

Wir beginnen jetzt ein neues Kapitel, das der eigentlichen Lehre von den ganzen Zahlen, der Zahlentheorie oder Arithmetik in engerem Sinne, gewidmet sein soll. Ich will zunächst tabellarisch an die einzelnen Fragen erinnern, mit denen diese Wissenschaft in den Schulunterricht eingreift:

1.) Das erste Problem der Zahlentheorie ist das der Teilbarkeit: Ist eine Zahl durch eine andere teilbar oder nicht?

2.) Man kann einfache Regeln angeben, die über die Teilbarkeit einer beliebigen Zahl durch kleinere Zahlen, wie 2, 3, 4, 5, 9, 11 etc. leicht entscheiden lassen.

3.) Es gibt unendlich viele Primzahlen, das sind Zahlen, die keinen eigentlichen Teiler (außer 1 und sich selbst) haben: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

4.) Man beherrscht die Teilbarkeitsverhältnisse beliebiger Zahlen, wenn man ihre Zerlegung in Primfaktoren kennt.

5.) Bei der Verwandlung rationaler Brüche in Dezimalbrüche spielt die Zahlentheorie eine Rolle; sie zeigt, warum der Dezimalbruch periodisch werden muß und wie groß seine Periode wird.

Während das alles auf Quinta und Quarta herankommt, tritt später die Zahlentheorie nur mehr sporadisch auf, und zwar kommt allenfalls folgendes in Betracht:

6.) Nicht auf jeder Schule, aber doch gelegentlich ist von Kettenbrüchen die Rede.

7.) Mitunter treten im Unterricht auch diophantische Gleichungen auf, das sind Gleichungen mit mehreren auf ganzzahlige Werte beschränkten Unbekannten. Als Beispiel hebe ich die pythagoräischen Zahlen hervor, von denen schon einmal gelegentlich gesprochen wurde (vgl. S. 78); es handelt sich da bekanntlich um die ganzzahligen Lösungstripel der Gleichung:

$$a^2+b^2=c^2.$$

8.) In enger Beziehung zur Zahlentheorie steht das Problem der Kreisteilung, obwohl dieser Zusammenhang auf der Schule kaum jemals herausgearbeitet wird. Soll man den Kreis in n gleiche Teile teilen, natürlich immer unter alleiniger Verwendung von Lineal und Zirkel, so geht das ganz leicht für $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Für $n = 7$ gelingt es aber nicht mehr, und daher bleibt man auf der Schule respektvoll davor stehen; freilich spricht man es wohl nicht immer scharf aus, daß diese Konstruktion für $n = 7$ wirklich unmöglich ist – eine Tatsache, deren Grund in tieferen zahlentheoretischen Überlegungen liegt. Um Mißverständnisse, wie sie leider sehr häufig sind, zu vermeiden, betone ich ausdrücklich, daß es sich hier wieder nur um ein *Problem der Praezisionsmathematik* handelt, das für praktische Anwendungen ohne jede Bedeutung ist. In der Praxis wird man auch selbst in solchen Fällen, wo eine „exakte" Konstruktion möglich ist, diese kaum benutzen, vielmehr kann man viel zweckmäßiger auf dem Boden der Approximationsmathematik durch einfaches, geschickt angeordnetes Probieren den Kreis in jede beliebige Anzahl gleicher Teile teilen, wobei man jede praktisch mögliche Genauigkeit bequem erreichen kann. In dieser Weise verfährt natürlich jeder Mechaniker, der Instrumente mit geteilten Kreisen zu bauen hat.

9.) Noch an einer Stelle wird auf der Schule die höhere Zahlentheorie hart gestreift, nämlich bei der an die *Quadratur des Kreises* anschließenden *Berechnung von π*. Man pflegt da nach irgend einem Verfahren die ersten Dezimalen von π zu bestimmen, und erwähnt bei-

läufig gewiß den *modernen Beweis für die Transzendenz von π, der das alte Problem der Quadrateur des Kreises mit Zirkel und Lineal in negativem Sinne erledigt*. Ich werde am Schluß der Vorlesung ausführlich auf diesen Beweis zurückkommen; hier formuliere ich nur die Behauptung exakt dahin, *daß die Zahl π keiner algebraischen Gleichung genügt, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind*:

$$a\pi^n + b\pi^{n-1} + \ldots + k\pi + l = 0;$$

die *Ganzzahligkeit* der Koeffizienten ist besonders wesentlich, und gerade hierdurch gehört das Problem auch der Zahlentheorie an. – Natürlich handelt es sich auch hier lediglich um eine *Aufgabe der Praezisionsmathematik*, denn nur für sie hat der zahlentheoretische Charakter von π Bedeutung; dem Appoximationsmathematiker genügt die Bestimmung der ersten Dezimalen, die ihm die praktische Ausführung der Quadratur des Kreises mit jeder überhaupt möglichen Genauigkeit gestattet.

Damit wäre die Stellung der Zahlentheorie auf der Schule geschildert; fragen wir weiter, wie es im *Universitätsunterricht* und in der *wissenschaftlichen Forschung* um sie steht. Ich möchte da die selbständig arbeitenden Mathematiker hinsichtlich ihres Verhaltens zur Zahlentheorie in zwei Klassen teilen, die ich vielleicht als *Enthusiasten* und *Indifferente* unterscheiden kann. Für jene gibt es keine Wissenschaft, die so schön und wichtig wäre, keine, die so klare und präzise Beweise und Theoreme von völlig einwandfreier Strenge enthielte, wie die Zahlentheorie; „wenn die Mathematik die Königin der Wissenschaften ist, so ist die Zahlentheorie die Königin der Mathematik", sagt Gauß einmal. Den Indifferenten andererseits liegt die Zahlentheorie ganz fern, sie kümmern sich wenig um ihre Entwicklungen und gehen ihr wohl gar aus dem Wege. Die Mehrzahl der Studierenden dürfte in ihrem Verhalten mit dieser zweiten Richtung übereinstimmen.

Den Grund dieser merkwürdigen Spaltung glaube ich im folgenden finden zu können. Einmal ist die Zahlentheorie jedenfalls grundlegend für alle tiefer gehenden mathematischen Forschungen; außerordentlich häufig stößt man, von ganz verschiedenen Gebieten ausgehend, zuletzt auf relativ einfache arithmetische Tatsachen. Andererseits aber ist die reine Zahlentheorie eine äußerst abstrakte Sache, und die Gabe, so Abstraktes mit Genuß auffassen zu können, ist nicht sehr häufig; die daraus schon folgende Teilnahmlosigkeit dürfte der Umstand noch vergrößern, daß die zahlentheoretischen Lehrbücher sich meist befleißigen, auch in der Darstellung so abstrakt zu sein, wie nur irgend möglich. Ich glaube, daß die Zahlentheorie viel zugänglicher werden und

viel mehr allgemeines Interesse finden würde, wenn man sie in Verbindung mit anschaulichen Elementen und geeigneten Figuren vortragen wollte; wenn ihre Sätze auch logisch von diesen Hilfsmitteln unabhängig sind, so dürfte doch das Verständnis durch sie sehr erleichtert werden. Das habe ich in Vorlesungen aus den Jahren 1895/96 [1)] versucht, und ähnliche Ziele verfolgt auch das neue Buch von H. Minkowski über „Diophantische Approximationen". [2)] Meine Vorlesung hat einen mehr elementaren einführenden Charakter, während Minkowski sehr bald speziellere Probleme in weitgehender Weise behandelt.

Was zahlentheoretische Lehrbücher anlangt, so werden Sie vielfach mit dem ausreichen, was Sie zwischendurch in den Lehrbüchern der Algebra finden. Unter der großen Zahl der eigentlichen zahlentheoretischen Bücher möchte ich besonders das erst vor kurzem erschienene kleine Buch von Bachmann „Grundlagen der neueren Zahlentheorie" [3)] nennen. –

Die spezielleren zahlentheoretischen Erörterungen

---

1) Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie; (Ausg. v. A. Sommerfeld und Ph. Furtwängler). Neuer Abdruck. Leipzig 1907.

2) Mit dem Zusatz: Eine Einführung in die Zahlentheorie. Leipzig 1907.

3) Sammlung Schubert Nr. 53. Leipzig 1907.

will ich an die oben aufgeführten einzelnen Punkte anschliessen, und ich will besonders darauf sehen, die Sache immer möglichst anschaulich gestalten; natürlich kommt dabei immer nur hervor, was für den Lehrer wissenswert ist, keineswegs aber in einer Form, in der er es direkt den Schülern weitergeben kann. Ich berufe mich für die Notwendigkeit solcher Ausführungen besonders auf Examenserfahrungen, die mir zeigen, daß sich die zahlentheoretischen Kenntnisse der Lehramtskandidaten vielfach nur auf Schlagwörter beschränken, ohne daß ein eingehenderes Wissen damit verbunden ist. Daß π „transzendent" ist, kann mir jeder Kandidat sagen, was dieses Wort aber bedeutet, wissen sehr viele nicht, einmal erhielt ich sogar die Antwort, daß eine transzendente Zahl weder rational noch irrational ist! Ebenso finde ich recht häufig Kandidaten, die wohl wissen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, aber von dem Beweis keine Ahnung haben, obgleich er doch so einfach ist.

Ich will nun in der Tat mit diesem Beweise beginnen, indem ich die Bekanntschaft mit den in den ersten beiden Punkten unserer Aufzählung enthaltenen, ganz einfachen Dingen bei Ihnen ohne weiteres voraussetze. Geschichtlich bemerke ich vorab, daß

der Beweis von Euklid herrührt, dessen „Elementa" (griechisch στοιχεῖα) ja nicht nur das System der Geometrie, sondern in geometrischer Sprache auch algebraische und arithmetrische Dinge enthalten. Der Euklidische Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen verläuft nun so: Wäre die Folge der Primzahlen endlich, so mögen sie sämtlich $2, 3, 5, \ldots p$ sein; dann ist die Zahl $N = (1\cdot 2\cdot 3\cdot 5 \cdots p) + 1$ sicher weder durch 2, noch durch $3, 5, \ldots$, noch schließlich durch p teilbar, denn stets läßt sie bei der Division den Rest 1; daher muß sie entweder selbst eine Primzahl sein, oder es gibt außer $2, 3, \ldots p$ noch andere größere Primzahlen. Beides widerspricht der Voraussetzung, womit der Beweis geführt ist. –

Was nun den vierten Punkt, die Zerlegung in Primfaktoren, anlangt, so will ich Ihnen hier eine der älteren Primfaktorentafeln vorlegen: Chernac, Cribum arithmeticum,[1.)] ein großes sehr verdienstvolles Tabellenwerk, das historisch um so mehr Beachtung verdient, als es in hohem Maße korrekt ist. Der Name der Tafel knüpft an das aus dem Altertum überlieferte Sieb des Eratosthenes an; es liegt dabei die Vorstellung zu Grunde, daß man aus der Reihe aller

1.) Daventriae 1811.

Zahlen sukzessive die „aussiebt", die durch 2, 3, 5, ... teilbar sind, sodaß schließlich nur die Primzahlen übrig bleiben. Chernac gibt nun von allen nicht durch 2, 3 oder 5 teilbaren Zahlen die Zerlegung in Primfaktoren an, und zwar bis 1 020 000; dabei sind alle Primzahlen durch einen horizontalen Strich gekennzeichnet, und damit sind wohl überhaupt zum ersten Male die Primzahlen in diesen Grenzen angegeben. Man hat übrigens im 19. Jahrhundert die Bestimmung aller Primzahlen noch viel weiter, bis zu neun Millionen, ausgedehnt.

Ich wende mich nun dem fünften Punkte zu, der Verwandlung rationaler Brüche in Dezimalbrüche. Die eingehende Theorie finden Sie da bei Weber-Wellstein, ich will hier nur das Prinzip der Sache an einem einfachen typischen Beispiel erörtern: wir betrachten den Bruch $\frac{1}{p}$, wo p eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl ist, und werden zeigen, daß $\frac{1}{p}$ gleich einem unendlichen periodischen Dezimalbruch wird, und daß die Ziffernanzahl δ seiner Periode der kleinste Exponent ist, für den 10^δ durch p geteilt den Rest 1 läßt, oder zahlentheoretisch gesprochen: δ ist der kleinste Exponent, der der „Kongruenz" genügt:

$$10^\delta \equiv 1 \pmod p.$$

Der Beweis erfordert zunächst die Erkenntnis, daß

diese Kongruenz überhaupt stets lösbar ist, und die vermittelt uns der sog. kleine Fermatsche Satz, daß nämlich für jede zu 10 teilerfremde Primzahl p

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

ist; auf den Beweis dieses fundamentalen Satzes, der zum ständigen Werkzeug eines jeden Mathematikers gehört, will ich hier nicht erst eingehen. Weiterhin müssen wir noch aus der Zahlentheorie entnehmen, daß der in Frage stehende kleinste Exponent δ entweder $p-1$ selbst oder ein Teiler von $p-1$ ist. Dies können wir auf unser p anwenden und haben also, daß $\frac{10^\delta - 1}{p}$ eine ganze Zahl N ist, so daß daher:

$$\frac{10^\delta}{p} = \frac{1}{p} + N.$$

Denken wir nun sowohl $\frac{1}{p}$, als auch $\frac{10^\delta}{p}$ in einen Dezimalbruch verwandelt, so müssen in beiden die entsprechenden Dezimalstellen übereinstimmen, da ihre Differenz eine ganze Zahl ist. Da aber $\frac{10^\delta}{p}$ aus $\frac{1}{p}$ entsteht, indem man das Komma um δ Stellen nach rechts rückt, ergibt sich, daß die Dezimalstellen von $\frac{1}{p}$ bei dieser Operation ungeändert bleiben, d. h. aber nichts als daß der Dezimalbruch $\frac{1}{p}$ durch fortgesetzte Wiederholung derselben „Periode" von δ Ziffern entsteht. Um nun zu erkennen, daß es keine kleinere Periode von $\delta' < \delta$ Ziffern gibt, brauchen wir nur zu zeigen, daß die

Ziffernanzahl δ' *jeder* Periode der Kongruenz $10^{\delta'} \equiv 1$ genügen muß; denn wir wissen ja, daß δ die *kleinste* Lösung dieser Kongruenz war. Dieser Beweis ergibt sich aber durch einfache Umkehrung des vorigen Gedankenganges: Aus der Annahme folgt, daß $\frac{1}{p}$ und $\frac{10^{\delta'}}{p}$ in den Dezimalstellen übereinstimmen, also ist $\frac{10^{\delta'}}{p} - \frac{1}{p}$ eine ganze Zahl & und daher $10^{\delta'} - 1$ durch p teilbar, d. h. in der Tat $10^{\delta'} \equiv 1 \pmod{p}$. Damit ist der Beweis vollständig geführt.

Ich gebe Ihnen noch einige möglichst einfache instruktive *Beispiele* dazu an, aus denen Sie ersehen mögen, daß δ die verschiedensten Werte, kleiner und gleich $p-1$, wirklich annehmen kann. Bemerken Sie zuerst, daß für

$$\frac{1}{3} = 0,33\ldots$$

die Ziffernanzahl der Periode $\delta = 1$ ist, und in der Tat ist bereits $10^1 \equiv 1 \pmod{3}$. Ferner finden Sie für

$$\frac{1}{11} = 0,0909\ldots$$

$\delta = 2$, und entsprechend $10^1 \equiv 10$, $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$. Der Höchstwert $\delta = p-1$ tritt bei

$$\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\ldots$$

auf ($\delta = 6$); in der Tat sind modulo 7 $10^1 \equiv 3$, $10^2 \equiv 2$, $10^3 \equiv 6$, $10^4 \equiv 4$, $10^5 \equiv 5$ und erst $10^6 \equiv 1$. –

Ich will weiter in ähnlicher Weise über den *sechsten Punkt* meiner Aufzählung, *die Kettenbrüche*, spre-

chen. Dabei werde ich aber nicht die übliche abstrakte arithmetische Darstellung geben, die Sie anderwärts, z. B. in Weber-Wellstein, bevorzugt finden, sondern ich will Ihnen gerade an diesem Beispiel zeigen, ein wie klares und leicht verständliches Aussehen zahlentheoretische Dinge durch eine *geometrisch-anschauliche Darstellung* erhalten. Übrigens lenken wir mit dieser Verwendung geometrischer Hilfsmittel in der Zahlentheorie eigentlich nur in die alten Bahnen von *Gauß* und *Dirichlet* wieder ein; erst die neueren Mathematiker, etwa von 1860 an, haben die geometrischen Methoden wieder aus der Zahlentheorie verbannt. Natürlich kann ich hier nur die *wichtigsten Gedankengänge und Theoreme ohne Beweise* kurz angeben, wobei ich auch annehme, daß Sie der elementaren Theorie der Kettenbrüche nicht ganz fremd gegenüberstehen; eine eingehende Darstellung enthält übrigens meine autographierte zahlentheoretische Vorlesung.

Sie wissen, wie die *Kettenbruchentwicklung einer gegebenen positiven Zahl* ω entsteht: Wir sondern die größte ganze positive in ω enthaltene Zahl n_0 ab, indem wir schreiben:

$$\omega = n_0 + r_0, \quad \text{wo } 0 \leq r_0 < 1,$$

behandeln $\frac{1}{r_0}$ ebenso wie ω:

$$\frac{1}{r_0} = n_1 + r_1, \quad \text{wo } 0 \leq r_1 < 1,$$

und gehen ebenso weiter:

$$\frac{1}{r_1} = n_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < 1,$$
$$\frac{1}{r_2} = n_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Der Algorithmus bricht nach endlich vielen Schritten ab, wenn ω rational ist, und ist andernfalls unbegrenzt fortsetzbar. In jedem Falle schreiben wir kurz als „Kettenbruchentwicklung" von ω:

$$\omega = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots}}}$$

Als Beispiel führe ich die Kettenbruchentwicklung für π an:

$$\pi = 3{,}14159265\ldots = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cdots}}}}$$

Bricht man den Kettenbruch nach dem 1ten, 2ten, 3ten ... Teilnenner ab, so erhält man rationale Brüche, die Näherungsbrüche von ω:

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0}, \quad n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1}, \quad n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots\ldots;$$

sie stellen außerordentlich gute Näherungswerte für die Zahl ω dar, und zwar gibt – genauer gesagt – jeder einzelne von ihnen die beste Annäherung, die man mit ir-

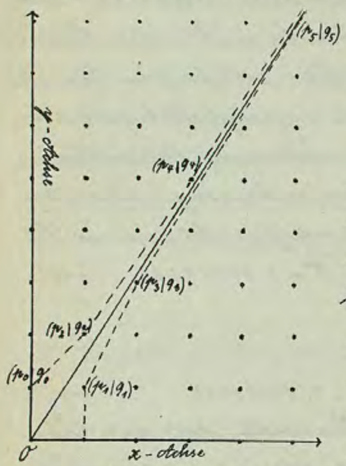
gend einem rationalen Bruch von nicht größerem Nenner überhaupt erzielen kann. Diese Eigenschaft macht die Kettenbruchtheorie überall da praktisch wichtig, wo es sich darum handelt, Irrationalzahlen oder Brüche mit sehr großen Nennern (etwa Dezimalbrüche mit vielen Stellen) durch möglichst einfache Brüche – soll heißen Brüche mit möglichst kleinen Nennern – möglichst gut zu approximieren. Wie gut die Annäherung tatsächlich wird, sehen Sie aus folgender Umrechnung der ersten Näherungsbrüche von π in Dezimalbrüche, wenn Sie sie mit der Dezimalentwicklung $\pi = 3{,}14159265\ldots$ vergleichen:

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7} = 3{,}14285\ldots\ldots,$$
$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106} = 3{,}141509\ldots, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots.$$

Sie bemerken übrigens in diesem Beispiele, daß die Näherungsbrüche immer abwechselnd kleiner und größer als π sind; das ist bekanntlich auch allgemein der Fall, so daß also durch die Kettenbruchentwicklung ω alternierend von unten und oben in immer engere Grenzen eingeschlossen wird.

Wir wollen nun diese Dinge durch geometrische Bilder beleben. Wir denken uns dazu im positiven Quadranten der x-y-Ebene – wenn wir uns auf die Betrachtung positiver Zahlen beschränken wollen –

alle Punkte mit ganzzahligen Koordinatenwerten markiert, die ein sog. Punktgitter bilden. Betrachten wir dieses Gitter, ich möchte fast sagen diesen „Sternhimmel" von Punkten einmal vom Koordinatenanfangspunkt O



aus. Der Leitstrahl von O nach dem Punkte $(x = a \mid y = b)$ hin hat die Gleichung

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

und umgekehrt liegen auf jedem solchen Strahle $\frac{x}{y} = \lambda$ mit rationalem $\lambda = \frac{a}{b}$ unendlich viele ganzzahlige Punkte $(m \cdot a \mid m \cdot b)$, wo m eine beliebige ganze Zahl ist. Man sieht daher von O aus in allen rationalen Richtungen und nur in diesen Punkte unseres Gitters, das Gesichtsfeld ist überall dicht, aber doch nicht vollständig und kontinuierlich mit „Sternen" erfüllt; man mag geneigt sein, diesen Anblick mit der Milchstrasse zu vergleichen. – Auf einem irrationalen Strahle $\frac{x}{y} = \omega$, wo ω irrational ist, liegt also außer O selbst kein einziger ganzzahliger Punkt, was an sich schon recht bemerkenswert ist. Offenbar aber macht eine solche Gerade, wie wir in Erinnerung an Dedekinds

Definition der Irrationalzahl sagen können, einen Schnitt im Gebiete aller ganzzahligen Punkte, indem sie einen links und einen rechts gelegenen Punkthaufen scheidet. Fragen wir nun, wie diese beiden Punkthaufen sich gegen unsern Strahl $\frac{x}{y} = \omega$ abgrenzen, so ergibt sich eine äusserst interessante Beziehung zur Kettenbruchentwicklung von ω. Markieren wir nämlich zu jedem der Näherungsbrüche $\frac{p_r}{q_r}$ den Punkt $(x = p_r \mid y = q_r)$, wo p_r und q_r teilerfremd sind, so müssen die Strahlen nach diesen Punkten den Strahl $\frac{x}{y} = \omega$ immer besser abwechselnd von oben und unten approximieren, in demselben Maße, wie die $\frac{p_r}{q_r}$ den Wert ω approximieren; darüber hinaus findet man folgendes Theorem, wenn man die bekannten zahlentheoretischen Eigenschaften der p_r, q_r benutzt: Denken wir uns in alle ganzzahligen Punkte Stifte oder Stecknadeln gesteckt, wie etwa bei dem sog. chinesischen Billard, und umschlingen wir den Stifthaufen rechts und links des ω-Strahles mit je einem Faden, den wir straff anziehen, so sind die Ecken der entstehenden die beiden Punkthaufen begrenzenden konvexen Fadenpolygone gerade unsere Punkte $(p_r \mid q_r)$, die die Zähler und Nenner der sukzessiven reduzierten Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von ω zu Koordinaten haben, und zwar gehören zu dem linken Polygon die

Näherungsbrüche mit geradem, zu dem rechten die mit ungeradem Index. Damit hat man eine neue, und, wie man wohl sagen muß, äußerst anschauliche geometrische Definition der Kettenbruchentwicklung. Die obige Figur ist für den Fall

$$\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

entworfen, d. i. die Irrationalität des regulären Zehnecks; hier sind die ersten Ecken der beiden Polygone:

links: $p_0 = 0 \mid q_0 = 1$; $p_2 = 1 \mid q_2 = 2$; $p_4 = 3 \mid q_4 = 5$; ...
rechts: $p_1 = 1 \mid q_1 = 1$; $p_3 = 2 \mid q_3 = 3$; $p_5 = 5 \mid q_5 = 8$; ...

Für ν wachsen die Werte p_ν, q_ν weit rascher, so daß man in concreto die Figur kaum wird entwerfen können. Den Beweis unseres Theorems, auf den ich hier nicht weiter mehr eingehen kann, finden Sie ganz ausführlich in meiner genannten autographierten Vorlesung dargestellt. –

Ich gehe nun zur Behandlung des siebenten Punktes, der pythagoräischen Zahlen, über; hier werden wir die Raumanschauung in etwas anderer Form benutzen. Statt der Gleichung

$$(1) \qquad a^2 + b^2 = c^2,$$

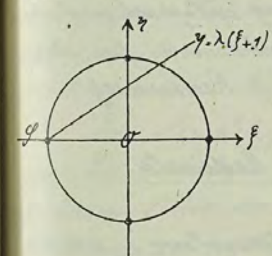
deren ganzzahlige Lösungen gesucht werden, betrachten wir, indem wir

$$(2) \qquad \frac{a}{c} = \xi, \quad \frac{b}{c} = \eta$$

setzen, die Gleichung

$$(3) \qquad \xi^2 + \eta^2 = 1$$

und haben nun die Aufgabe, alle rationalen Zahlenpaare ξ, η zu bestimmen, die ihr genügen. Wir gehen demgemäß von der Vorstellung aller rationalen Punkte ξ, η (d. h. aller Punkte mit rationalen Koordinaten ξ und η) aus, die die ξ-η-Ebene überall dicht erfüllen. Nun stellt $\xi^2 + \eta^2 = 1$ den Einheitskreis in dieser Ebene um den Nullpunkt dar,



und unsere Aufgabe kommt auf die Frage hinaus, wie sich dieser Kreis zwischen den überall dicht liegenden rationalen Punkten hindurchwindet, insbesondere, welche dieser Punkte er enthält. Einige solcher Punkte kennen wir von Haus aus, nämlich die Schnittpunkte mit den vier Achsen, von denen wir vorzugsweise den Punkt $S(\xi = -1 \mid \eta = 0)$ betrachten wollen. Wir denken uns nun sämtliche Strahlen durch S, die durch die Gleichung:

$$(4) \qquad \eta = \lambda(\xi + 1)$$

dargestellt werden, und nennen den einzelnen Strahl *rational* oder *irrational*, je nachdem der Parameter λ rational ist oder nicht. Nun gilt der Doppelsatz, *daß jeder rationale Punkt des Kreises aus S durch einen rationalen Strahl projiziert wird und daß jeder rationale Strahl (4) den Kreis in einem rationalen Punkte schneidet*. Die erste Hälfte ist wohl unmittelbar klar. Die zweite beweisen wir durch direkte Rechnung, indem wir (4) in (3) einsetzen; wir erhalten dann für die Abszisse des Schnittpunktes die Gleichung

$$\xi^2 + \lambda^2(\xi+1)^2 = 1, \quad \text{oder}$$

$$(1+\lambda^2)\,\xi^2 + 2\lambda^2\xi + \lambda^2 - 1 = 0.$$

Eine Lösung $\xi = -1$ dieser Gleichung entsprechend dem Schnitte S kennen wir von vornherein; für die andere ergibt sich durch eine kleine Rechnung:

$$(5^{a}) \qquad \xi = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2},$$

und aus (4) folgt als zugehörige Ordinate:

$$(5^{b}) \qquad \eta = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},$$

d. h. der zweite Schnitt ist bei rationalem λ in der Tat ein rationaler Punkt. Unser nunmehr vollständig bewiesener Doppelsatz läßt sich auch dahin aussprechen, *daß alle rationalen Punkte des Kreises durch die Formeln (5) bei beliebigem rationalem λ dargestellt sind*. Damit ist unsere Aufgabe gelöst,

und wir haben nur noch den Übergang zu den ganzen Zahlen zu machen. Wir setzen dazu

$$\lambda = \frac{n}{m},$$

wo n, m ganze Zahlen sein mögen, und erhalten aus (5):

$$\xi = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \qquad \eta = \frac{2mn}{m^2+n^2}$$

als Inbegriff aller rationalen Lösungen von (3). Sämtliche ganzzahligen Lösungen der ursprünglichen Gleichung (1), d. h. *alle pythagoräischen Zahlen sind also in der Form*

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

gegeben, und zwar erhält man bereits u. a. alle teilerfremden Lösungen, wenn m, n alle Paare teilerfremder ganzer Zahlen durchläuft. Wir haben damit eine sehr anschauliche Ableitung dieses sonst so abstrakt erscheinenden Resultates erhalten. —

Im Anschluß hieran will ich noch auf den „*großen Fermatschen Satz*" zu sprechen kommen. Es liegt ganz im Sinne der alten Geometer, wenn man die Fragestellung der pythagoräischen Zahlen aus der Ebene in den Raum von 3 und mehr Dimensionen in folgender Weise überträgt: Ist es möglich, daß die Summe der Kuben zweier ganzer Zahlen wieder ein Kubus, oder daß die Summe zweier Biquadrate wieder ein Biquadrat ist u. s. f., oder allgemein: *Ist für* beliebiger ganzzahliger n die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

in ganzen Zahlen lösbar? Diese Frage hat Fermat eben durch das nach ihm benannte Theorem verneinend beantwortet: Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ist für keinen ganzzahligen Wert von n außer für $n = 2$ in ganzen Zahlen lösbar. Gestatten Sie zunächst einige historische Notizen: Fermat lebte von 1601 bis 1665 und war in Toulouse Parlamentsrat, also Jurist. Er beschäftigte sich aber viel und in fruchtbarster Weise mit mathematischen Fragen, so daß man ihn mit zu den größten Mathematikern rechnen darf. Fermats Name verdient unter den Begründern der analytischen Geometrie, der Infinitesimalrechnung, der Wahrscheinlichkeitsrechnung an hervorragender Stelle genannt zu werden; besonders bedeutend jedoch sind seine zahlentheoretischen Leistungen. Alle seine Resultate auf diesem Gebiet sind als Randbemerkungen zu seinem Handexemplar des Diophant hinterlassen, des großen antiken Zahlentheoretikers, der wahrscheinlich um 300 n. Chr., also etwa 600 Jahre nach Euklid, in Alexandria lebte; sie wurden in dieser Gestalt erst 5 Jahre nach Fermats Tode von seinem Sohne veröffentlicht – er selbst hat nichts publiziert, sondern seine Arbeiten nur

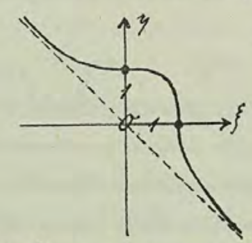
durch einen umfangreichen Briefwechsel mit den Bedeutendsten seiner Zeitgenossen bekannt gemacht. In jener Diophantausgabe steht nun auch der große Satz, der uns jetzt beschäftigt, und dazu schreibt Fermat, „er habe einen wirklich wunderbaren Beweis gefunden, doch sei der Rand zu eng um ihn zu fassen".[1] Es ist bis heute nicht gelungen einen Beweis dieses Satzes zu finden!

Um uns über seinen Inhalt etwas näher zu orientieren, fragen wir wie bei $n = 2$ zunächst nach den rationalen Lösungen der Gleichung

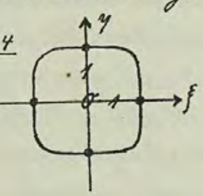
$$\xi^n + \eta^n = 1,$$

d. h. nach der Lage der dadurch dargestellten Kurven zu der Gesamtheit der rationalen Punkte der ξ-η-Ebene. Für $n = 3$ und $n = 4$ haben sie ungefähr das hier skizzierte Aussehen; sie enthalten jedenfalls

$n = 3$



$n = 4$



die Punkte $\xi = 0,\ \eta = 1$ und $\xi = 1,\ \eta = 0$ bezw. $\xi = 0,\ \eta = \pm 1$

1) vgl. die Fermatausgabe der Pariser Akademie: Oeuvres de Fermat, T. I (Paris 1891), pag. 291 und T. III (1896), pag. 241.

und $\xi = \pm 1$, $\eta = 0$. Die Fermatsche Behauptung besagt nun, daß diese Kurven – im Gegensatz zu dem vorhin betrachteten Kreise – sich durch die überall dicht liegende Menge der rationalen Punkte hindurchschlängeln, ohne sonst auch nur noch einen einzigen zu treffen.

Das Interesse dieses Satzes beruht vor allem darauf, daß alle Anstrengungen einen vollständigen Beweis von ihm zu finden bisher vergeblich waren. Was Beweisversuche anlangt, ist vor allem Kummer zu nennen, der das Problem sehr wesentlich förderte, indem er es mit der Theorie der „algebraischen" Zahlen in Verbindung brachte, insbesondere zunächst mit der Theorie der „Kreisteilungszahlen". Unter Benutzung der n^{ten} Einheitswurzel $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ kann man nämlich $z^n - y^n$ in n Linearfaktoren spalten und erhält für die Fermatsche Gleichung:

$$x^n = (z-y)(z-\varepsilon y)(z-\varepsilon^2 y)\dots(z-\varepsilon^{n-1}y),$$

d. h. es soll die n^{te} Potenz der ganzen Zahl x in n Faktoren zerlegt werden, die aus 2 ganzen Zahlen y, z und der Zahl ε in der angedeuteten Weise aufgebaut sind. Für solche Zahlen entwickelte nun Kummer ganz ähnliche Theorieen, wie man sie für die gewöhnlichen ganzen Zahlen von altersher kennt, und die auf den Begriffen der Teilbarkeit, der Faktorenzerlegung

etc. beruhen; man spricht demgemäß von ganzen algebraischen Zahlen und hier speziell von Kreisteilungszahlen, wegen der Beziehung der Zahl ε zur Kreisteilung. Der Fermatsche Satz ist also für Kummer ein Theorem über die Faktorenzerlegung im Bereiche der algebraischen Kreisteilungszahlen, und aus deren Theorie versucht er einen Beweis für ihn abzuleiten. Das ist ihm nun in der Tat für eine sehr große Anzahl von Werten n geglückt, insbesondere z. B. für alle Werte von n unter 100; unter den größeren Zahlen jedoch fanden sich Ausnahmewerte, für die ihm und auch den neueren Mathematikern, die seine Untersuchungen fortführten, der Beweis bis jetzt nicht gelungen ist. Ich muß mich hier natürlich mit diesen Andeutungen begnügen, nähere Angaben über den Stand des Problemes finden Sie in der mathematischen Encyklopädie, Bd. I 2, pag. 714, am Ende des Referates von Hilbert über die „Theorie der algebraischen Zahlkörper". Hilbert selbst gehört zu denen, die die Kummerschen Untersuchungen fortgesetzt und ausgedehnt haben.

Daß freilich Fermats „wunderbarer Beweis" in dieser Richtung gelegen hat, kann kaum angenommen werden; denn es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß er mit algebraischen Zahlen operieren konnte zu einer Zeit, wo man noch nicht einmal sicher über das Imaginäre Bescheid wußte, und wo die Zahlentheorie selbst noch recht unentwickelt war und erst gerade durch Fermat weitgehende Anregungen bekam. Andererseits ist auch nicht wohl anzunehmen, daß ein Mathematiker vom Range Fermats einen Fehler in seinem Beweise begangen hat, wenngleich solche Fehler auch schon bei den größten Mathematikern vorgekommen sind. Wir müssen also wohl glauben, daß ihm der Beweis durch einen besonders glücklichen einfachen Gedanken gelungen ist. Da wir aber nicht den mindesten Anhalt für die Richtung haben, in der man diesen Gedanken suchen könnte, so *ist ein vollständiger Beweis des Fermatschen Satzes wahrscheinlich nur durch systematische Weiterführung der Arbeiten Kummers zu erwarten.*

Diese Fragen sind zur Zeit besonders aktuell, da, wie in Ihren Kreisen wohl auch genugsam besprochen wird, unsere Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften jetzt einen *Preis von 100 000 Mark für die Erledigung des Fermatschen Satzes* zur Verfügung hat. Er ist ein Legat des vor etwa einem Jahre (1906) verstorbenen Mathematikers *Wolfskehl in Darmstadt*, der sich wahrscheinlich sein Leben lang mit dem Fer-

matschen Satz beschäftigt hat, und nun aus seinem großen Vermögen diese Stiftung hinterlassen hat für den Glücklichen, der entweder den Fermatschen Satz allgemein beweist, oder ihn durch Angabe eines einzigen Gegenbeispieles widerlegt. Freilich wäre auch eine solche Widerlegung keine ganz einfache Sache, da der Satz für Exponenten unter 100 ja schon bewiesen ist, und man also mit ungemein großen Zahlen zu rechnen anfangen muß.

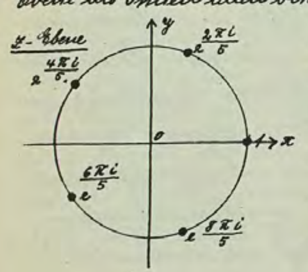
Wie der Mathematiker, der die Sache und die Anstrengungen von Kummer und seinen Nachfolgern bei ihren Beweisversuchen kennt, über die Schwierigkeit der Gewinnung dieses Preises denken muß, geht aus meinen vorigen Erörterungen hervor. Das *große Publikum* ist freilich anderer Meinung. Seit im Spätsommer dieses Jahres (1907) die Nachricht von dem Preise durch die Zeitungen ging – die übrigens nicht zur Veröffentlichung autorisiert waren – ist bei uns schon ein ungeheurer Stoß von „Beweisen" eingelaufen; Leute aller Berufsstände, Ingenieure, Volksschullehrer, Geistliche, ein Bankier, viele Damen u. s. f. sind an diesen Einsendungen beteiligt. Allen gemeinsam ist nur das, daß sie *keine Ahnung von der ernsten mathematischen Bedeutung des Problemes* haben, daß sie auch nicht den Versuch machen, sich darüber zu informieren, sondern durch einen plötzlichen Einfall die Sache zu machen versuchen, wobei natürlich ausnahmslos etwas ganz Verkehrtes herauskommt. Ein besonders abschreckender Beispiel aus diesem Wust von Unsinn herauszugreifen kann ich mir nicht versagen: Ein Mann, dem das Zeichen > unbekannt ist, liest statt

$$x^n + y^n = z^n \; (n > 2) \text{ Folgendes:}$$

$$x^n + y^n = z^n . \; (n + 2)$$

und kann nun natürlich schon für $n = 1$, d.h. für $x + y = z$. 3 Lösungen sofort angeben; das schickt er ein und hält die Mathematiker für so dumm, daß sie darauf einen Preis von 100 000 Mark aussetzen! –.

Ich schließe damit die Erörterungen über den Fermatschen Satz und komme zum achten Punkt meiner Aufzählung, dem Probleme der Kreisteilung. Ich darf wohl hierbei bereits das Operieren mit komplexen Zahlen $x + iy$ und ihre Darstellung in der komplexen x-y-Ebene als Ihnen allen bekannt benutzen, obwohl wir systematisch



erst später darauf eingehen werden. Es handelt sich nun um das Problem, den Kreis in n gleiche Teile zu teilen oder ein reguläres n-Eck zu konstruieren. Wir identifizieren nun diesen Kreis mit dem Einheitskreis um den Nullpunkt

der komplexen x-y-Ebene und nehmen $x + iy = 1$ als ersten der n Teilpunkte; dann genügen die den n Ecken zugehörigen komplexen Zahlen

$$z = x + iy = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \qquad (k = 0, 1, \ldots n-1)$$

nach dem Moivreschen Satze der Gleichung

$$z^n = 1,$$

und damit ist die Aufgabe der Kreisteilung auf die Lösung dieser einfachen algebraischen Gleichung zurückgeführt. Da sie stets die rationale Wurzel $z = 1$ hat, ist $z^n - 1$ durch $z - 1$ teilbar, und für die übrigen $n - 1$ Wurzeln bleibt die sog. Kreisteilungsgleichung

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z^2 + z + 1 = 0,$$

eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, bei der alle Koeffizienten gleich $+1$ sind.

Aus dem Altertum stammt das Interesse für die Frage, welche regulären Polygone man mit Lineal und Zirkel konstruieren kann. Es war auch im Altertum schon bekannt, daß das für die Eckenanzahlen $n = 2^h, 3, 5$ (bei beliebigem ganzzahligen h) und ebenso für die zusammengesetzten Werte $n = 2^h \cdot 3$, $n = 2^h \cdot 5$, $n = 2^h \cdot 3 \cdot 5$ möglich ist. Auf diesem Punkte blieb das Problem bis zum Ende des 18. Jahrhunderts stehen, wo sich der junge Gauß mit ihm beschäftigte. Er fand, daß noch weiterhin für alle Primzahlen von der Form

$p = 2^{(2^\mu)} + 1$

die Kreisteilung mit Lineal und Zirkel möglich sei, aber für keine anderen. Für die ersten Werte $\mu = 0, 1, 2, 3$ ergibt diese Formel in der Tat Primzahlen und zwar

$$3,\ 5,\ 17,\ 257;$$

davon sind die ersten beiden Fälle bereits bekannt, während die beiden andern wesentlich Neues liefern. Besonders berühmt ist das reguläre Siebzehneck, dessen Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal von Gauß zum ersten Mal bewiesen ist. Übrigens ist nicht allgemein bekannt, für welche μ die obige Formel Primzahlen liefert. Auf Details will ich auch hier wieder nicht eingehen, sondern lieber das allgemeine Milieu und die Bedeutung dieser Entdeckung schildern. Näheres über das reguläre Siebzehneck finden Sie bei Weber-Wellstein.

Ich möchte Sie hier besonders auf das im 57. Bande der mathematischen Annalen (1903) abgedruckte Gaußsche Tagebuch aufmerksam machen; das ist ein kleines unscheinbares Heft, das Gauß von 1796, kurz vor seinem 19. Geburtstage, beginnend geführt hat. Gerade die erste Eintragung bezieht sich auf die Möglichkeit der Konstruktion des 17-Ecks (März 1796); mit dieser frühzeitigen bedeutenden Entdeckung reifte in Gauß erst der

Entschluß, sich endgültig der Mathematik zu widmen. Die Durchsicht dieses Tagebuchs muß jeden Mathematiker aufs höchste interessieren, da er auch weiterhin die Entstehung von Gauß' hervorragenden Arbeiten in der Zahlentheorie, den elliptischen Funktionen u. s. f. genau verfolgen läßt.

Die Publikation jener ersten großen Entdeckung von Gauß erfolgte in einer kurzen Mitteilung in der „Jenaer Literaturzeitung" vom 1. Juli 1796, veranlaßt von Gauß' Lehrer und Gönner, dem Hofrat Zimmermann zu Braunschweig, und von diesem mit einer kurzen persönlichen Note begleitet.[1] Den Beweis hat Gauß erst später in der grundlegenden zahlentheoretischen Schrift, den „Disquisitiones arithmeticae"[2] von 1801 veröffentlicht; dort findet sich auch zum ersten Mal der in jener Note noch fehlende negative Teil des Satzes, daß für andere Primzahlen als die in der Form $2^{2^\mu}+1$ enthaltenen die Kreisteilung nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. Von diesem wichtigen Unmöglichkeitsbeweise will ich Ihnen hier einen Fall vorführen – um so lieber, als im großen Publikum so wenig Verständnis für Beweise dieser Art vorhanden ist. Die moderne Mathematik hat durch solche Un-

1) Abgedruckt gleichfalls in Math. Ann. 57 (1903), pag. 6.
2) Abgedruckt Werke Bd. I (1870).

möglichkeitsbeweise eine ganze Reihe berühmter Probleme erledigen können, um deren Lösung sich seit dem Altertum zahlreiche Mathematiker vergeblich bemüht haben; ich erinnere neben der Konstruktion des Siebenecks nur an die Dreiteilung des Winkels oder die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal. Trotzdem aber gibt es massenhaft Leute, die sich immer wieder mit diesen Aufgaben beschäftigen, ohne von höherer Mathematik eine Ahnung zu haben und ohne die Problemstellung des Unmöglichkeitsbeweises auch nur zu kennen oder zu verstehen; ihren Kenntnissen gemäß, die sich meist auf Elementargeometrie beschränken, probieren sie es in der Regel mit dem Ziehen von Hilfslinien und Hilfskreisen und häufen die schließlich so, daß kein Mensch sich mehr aus dem Gewirr herausfindet und dem Autor den Fehler seiner Konstruktion direkt nachweisen kann. Ein Hinweis auf den arithmetischen Unmöglichkeitsbeweis hilft auch meist nichts, da jene Leute höchstens einer direkten Berücksichtigung und Widerlegung ihrer Beweise zugänglich sind. Jedes Jahr bringt jedem nur einigermaßen bekannten Mathematiker eine ganze Menge solcher Zusendungen, und auch an Sie werden einst, wenn Sie im Leben stehen, solche Beweise herantreten; es ist gut, wenn Sie von vorn-

herein auf diese Erlebnisse vorbereitet sind und wissen, woran Sie sich zu halten haben. Vielleicht kann es Ihnen dann von Nutzen sein, wenn Sie einen bestimmten Unmöglichkeitsbeweis in möglichst einfacher Form beherrschen.

So möchte ich Ihnen denn jetzt den Beweis dafür ausführlich vortragen, daß das Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Es ist bekannt, daß jede Konstruktion mit Zirkel und Lineal ihr rechnerisches Aequivalent in einer Folge übereinandergestellter Quadratwurzeln findet, und daß man umgekehrt jeden solchen Quadratwurzelausdruck durch Schneiden von Geraden und Kreisen geometrisch realisieren kann; Sie werden sich das leicht selbst überlegen können. Wir können unsere Behauptung also analytisch so formulieren, daß die für das Siebeneck charakteristische Gleichung 6ten Grades

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

nicht durch eine Folge von endlich vielen Quadratwurzeln gelöst werden kann. Das ist nun eine sog. reziproke Gleichung, die mit z gleichzeitig auch immer $\frac{1}{z}$ zur Wurzel hat; man sieht das deutlich, wenn man sie in der Form schreibt:

$$(1) \qquad z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0 .$$

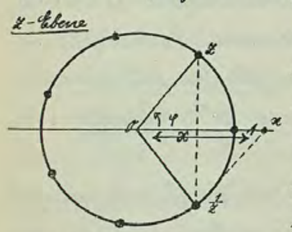
Eine solche Gleichung kann man sofort auf eine Gleichung von der halben Gradzahl reduzieren, wenn man

$$z + \frac{1}{z} = x$$

als neue Unbekannte einführt; eine leichte Rechnung ergibt für x die kubische Gleichung:

$$(2) \qquad x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

und man sieht unmittelbar, dass die Gleichungen (1) und (2) gleichzeitig durch Quadratwurzeln lösbar sind oder nicht. Übrigens kann man x sofort in direkte geometrische Beziehung zur Konstruktion des Siebenecks bringen; man erkennt nämlich, wie man an der Figur des Einheitskreises in der komplexen Ebene verfolgen möge, leicht folgendes: Bezeichnet



man mit $\varphi = \frac{2\pi}{7}$ den Zentriwinkel des regulären Siebenecks und berücksichtigt, dass $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ und $\frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ die $z = 1$ zunächst gelegenen Ecken des Siebenecks sind, so ist $x = z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$, und daher kann man nach Kenntnis von x das Siebeneck sofort konstruieren.

Wir haben nun zu zeigen, dass die kubische Gleichung (2) nicht durch Quadratwurzeln auflösbar ist. Dieser Beweis zerfällt in einen arithmetischen und einen algebraischen Teil, und wir beginnen mit dem ersteren, der sich naturgemäss unserem zahlentheoretischen Zusammenhange einfügt. Wir zeigen zunächst, dass die kubische Gleichung (2) irreduzibel ist, d. h. dass ihre linke Seite nicht in Faktoren mit rationalzahligen Koeffizienten gespalten werden kann. Bemerken wir vorab, dass ein Polynom dritten Grades, wenn überhaupt, so in einen quadratischen und einen linearen Faktor zerfallen muss:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x^2 + \beta x + \gamma)(x + \alpha);$$

zu beweisen ist also, dass eine solche Zerlegung unmöglich ist, wofern α, β, γ rationale Zahlen sein sollen.

Der erste wesentliche Schritt dazu ist der Nachweis, dass, wenn überhaupt eine solche rationale Zerlegung unserer ganzzahligen Polynoms möglich ist, die α, β, γ sogar ganze rationale Zahlen sein müssen. Das ist ein spezieller Fall des von Gauss in den Disquis. arithm. aufgestellten allgemeinen wichtigen Lemma: Zerfällt ein Polynom von der Gestalt $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ mit ganzzahligen Koeffizienten a in ein Produkt zweier Polynome der Gestalt $\varphi(x) = x^r + b_1 x^{r-1} + \ldots + b_r$ mit rationalen Koeffizienten b, so sind diese Koeffizienten b notwendig gleichfalls ganze rationale Zahlen. Wir wollen den Beweis hier nur für den für uns in Betracht kommenden konkreten Fall führen, zumal das genaue Durchdenken eines solchen allgemeinen Satzes an einem bestimmten Beispiel stets sehr nützlich ist.

Wir beginnen damit, daß wir die drei rationalen Brüche α, β, γ auf ihren Generalnenner n bringen, und demgemäß die angenommene Zerlegung schreiben:

$$(3) \quad x^3 + x^2 - 2x - 1 = \left(x^2 + \frac{b}{n}\, x + \frac{c}{n}\right)\left(x + \frac{a}{n}\right),$$

wo jetzt a, b, c, n ganze Zahlen sind. Zu zeigen ist, daß $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}$ gleichfalls ganz sind, d. h. daß a, b, c sämtlich durch n teilbar sind. Indem wir die rechte Seite von (3) ausmultiplizieren, und mit der linken vergleichen, finden wir, daß die 3 Verbindungen:

$$(4^{\underline{a}}) \ \frac{a+b}{n}, \quad (4^{\underline{b}}) \ \frac{a\,b}{n^2} + \frac{c}{n}, \quad (4^{\underline{c}}) \ \frac{a\,c}{n^2}$$

notwendig ganze Zahlen sein müssen. Der einfache zum Ziele führende Gedanke ist nun der, daß man an Stelle von n irgend einen Primfaktor r von n in Betracht zieht, und zwar möge er mit der Multiplizität k in n enthalten sein; es sei also $n = n_1 \cdot r^k$, wo n_1 nicht mehr den Primfaktor r als Teiler enthält. Aus (4) folgt dann durch Multiplikation mit n_1 bezw. n_1^2, daß auch die Werte

$$(5^{\underline{a}}) \ \frac{a+b}{r^k}, \quad (5^{\underline{b}}) \ \frac{a\,b}{r^{2k}} + \frac{c\,n}{r^k}, \quad (5^{\underline{c}}) \ \frac{a\,c}{r^{2k}}$$

ganze Zahlen sind. Könnten wir nun hieraus folgern, daß auch

$$(6) \qquad a, b, c \text{ teilbar durch } r^k$$

sind, so können wir den Faktor r^k aus den Koeffizienten der Zerlegung (3) in Zähler und Nenner fortheben, und auf alle weiteren Primfaktoren des übrigbleibenden Nenners n_1 das gleiche Verfahren anwenden; so folgt dann in der Tat schliesslich, daß alle Primfaktoren von n und damit auch n selbst in a, b, c enthalten sind, womit unser Satz bewiesen wäre.

Um nun den gewünschten Schluß (6) zu ziehen, nehmen wir zuerst an, daß a nur durch eine niedere Potenz r^{k_1} (wo $0 \leqq k_1 < k$) teilbar wäre. Dann folgt aus $(5^{\underline{c}})$, daß c sicher mindestens durch r^k und sogar durch eine höhere Potenz teilbar ist, denn sonst könnte das Produkt unmöglich durch die Potenz $2k > k + k_1$ teilbar sein. Daher ist der zweite Summand der ganzen Zahl $(5^{\underline{b}})$ eine ganze Zahl, und deswegen muß es auch der erste $\frac{a\,b}{\cdot 2k}$ sein; nach dem gleichen Schluß wie soeben ergibt sich daraus weiter, daß b gewiß durch die Potenz r^k teilbar ist. Nun aber würde aus $(5^{\underline{a}})$ folgern, daß auch a durch r^k teilbar ist, weil sowohl $a+b$ als auch b es ist – und das steht im Widerspruch mit unserer Annahme.

Also ist diese falsch, und a muß gewiß durch r^k teilbar sein. Danach folgt aus $(5^{\underline{a}})$, genau wie zuletzt, daß auch b durch r^k teilbar ist; in $(5^{\underline{b}})$ ist nunmehr $a \cdot b$

durch r^{2k} teilbar, also ist auch der zweite Summand $\frac{c \cdot n_1}{r^k}$ eine ganze Zahl, und da nach Voraussetzung n_1 nicht mehr durch r teilbar ist, muß der ganze Nenner r^k in c als Teiler enthalten sein. Damit ist die Behauptung (6) und, wie oben ausgeführt, auch das Gaußsche Lemma für unseren Fall bewiesen.

Es kommt also jetzt nur noch die Möglichkeit einer ganzzahligen Zerlegung

$$(7) \quad x^3 + x^2 - 2x - 1 = (x^3 + \beta x + \gamma)(x + \alpha)$$

in Betracht, wo α, β, γ ganze Zahlen sind. Um noch diese ad absurdum zu führen, genügt es, die konstanten Glieder beiderseits zu vergleichen

$$-1 = \alpha \cdot \gamma$$

Eine solche Zerlegung der Einheit in ein Produkt ganzer Zahlen ist aber nur möglich, wenn $\alpha = \pm 1$ und $\gamma = \mp 1$. Dann würde aber in (7) die rechte Seite für $x = -\alpha = \mp 1$ verschwinden; die linke Seite aber verschwindet offenbar für keinen der beiden Werte $x = -1$ oder $x = +1$. So sind wir wiederum zu einem Widerspruch gekommen, aus dem wir auf die Unmöglichkeit der ganzzahligen Zerlegung (7) schließen. Also ist überhaupt auch eine Zerlegung in rationale Faktoren unmöglich, und die behauptete Irreduzibilität der kubischen Gleichung (2) ist bewiesen.

Der zweite Teil des Beweises wird jetzt darin bestehen, zu zeigen, daß eine irreduzible kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten nicht durch Quadratwurzeln lösbar ist; er ist wesentlich algebraischer Natur, doch wollen wir ihn des Zusammenhanges wegen gleich hier miterledigen. Wir wollen die Behauptung so positiv wenden: Ist eine kubische Gleichung mit rationalen Koeffizienten A, B, C:

$$(8) \quad f(x) \equiv x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

durch Quadratwurzeln lösbar, so hat sie sicher eine rationale Wurzel, d. h. sie ist reduzibel; denn die Existenz einer rationalen Wurzel α ist gleichbedeutend mit der Existenz eines rationalen Faktors $x - \alpha$ von $f(x)$ und also mit der Reduzibilität.

Diesem Beweise muß (das ist der wichtigste Punkt) eine Klassifikation aller durch Quadratwurzeln gebildeten Ausdrücke vorangehen, genauer gesagt, aller Ausdrücke, die aus endlich vielen Quadratwurzeln und rationalen Zahlen durch rationale Operationen aufgebaut sind; ein konkretes Beispiel ist:

$$\alpha = \frac{\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{c}}{\sqrt{d + \sqrt{e} + \sqrt{f}}},$$

wo $a, b, \ldots f$ rationale Zahlen sind. Natürlich reden wir immer nur von solchen Wurzeln, die sich nicht rational ausziehen lassen; alle andern denken wir ein für alle Male fortgeschafft.

Jeder solche Ausdruck ist eine rationale Funktion einer gewissen Anzahl von Quadratwurzeln, in unserm Beispiel von dreien, und wir wollen zunächst eine einzige solche Quadratwurzel betrachten, deren Radikand übrigens noch einen beliebig komplizierten Aufbau haben kann. Unter ihrer „Ordnung" verstehen wir die größte in ihr auftretende Anzahl übereinandergestellter Wurzelzeichen; so haben z. B. die im Zähler von α auftretenden Wurzeln die Ordnung 2 bezw. 1, die im Nenner stehende die Ordnung 3.

Bei einem allgemeinen Quadratwurzelausdruck fassen wir nun die Ordnungszahlen der verschiedenen „einfachen Quadratwurzelausdrücke" der eben betrachteten Art auf, aus denen er sich rational aufbaut, und bezeichnen die größte unter ihnen als Ordnung μ der vorgelegten Ausdruckes; in unserm Beispiele ist $\mu = 3$. Nun können aber mehrere „einfache Quadratwurzelausdrücke" der Ordnung μ in unserm Ausdruck auftreten, und ihre Anzahl n, die „Gliederzahl", fassen wir als zweite charakteristische Anzahl auf; sie ist so bestimmt gedacht, daß keiner der n einfachen Ausdrücke μ^{ter} Ordnung mehr sich durch die andern

mit Hilfe von Ausdrücken niederer Ordnung rational darstellen läßt. Beispielsweise hat also der Ausdruck erster Ordnung

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

nicht 3 als Gliederzahl, sondern nur 2, da $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ ist. Der oben angeführte Ausdruck α dritter Ordnung hat die Gliederzahl 1.

Wir haben damit jedem Quadratwurzelausdruck 2 endliche Zahlen μ, n zugeordnet, die wir in dem Symbole (μ, n) als „Charakteristik" oder „Rang" des Wurzelausdruckes zusammenfassen. Von 2 Wurzelausdrücken verschiedener Ordnung schreiben wir dem niederer Ordnung auch den niederen Rang zu, von zweien gleicher Ordnung aber dem geringerer Gliederzahl. Die Ausdrücke niedersten Ranges sind demgemäß die der Ordnung Null und das sind selbst rationale Zahlen.

Nun sei eine Wurzel x_1 der kubischen Gleichung (8) durch Quadratwurzeln darstellbar, und zwar durch einen Ausdruck vom Range (μ, n); indem wir eines der n Glieder μ^{ter} Ordnung $\sqrt{R}$ bevorzugen, schreiben wir ihn

$$x_1 = \frac{\alpha + \beta\sqrt{R}}{\gamma + \delta\sqrt{R}},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ höchstens noch $n-1$ Glieder μ^{ter} Ordnung enthalten, und R die Ordnung $\mu - 1$ besitzt. Nun ist $\gamma - \delta\sqrt{R}$ jedenfalls von Null verschieden; denn aus $\gamma - \delta\sqrt{R} = 0$ folgt entweder $\delta = \gamma = 0$, was offenbar unmöglich ist, oder $\sqrt{R} = \gamma : \delta$, d. h. $\sqrt{R}$ wäre durch die andern $(n-1)$ Glieder μ-ter Ordnung, die in x_1 auftreten, rational darstellbar und daher überflüssig. Wir können also mit $\gamma - \delta\sqrt{R}$ erweitern, und finden

$$x_1 = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{R})(\gamma - \delta\sqrt{R})}{\gamma^2 - \delta^2 R} = P + Q\sqrt{R},$$

wo P, Q rationale Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, R$ sind, also höchstens $n-1$ Glieder μ^{ter} und sonst nur solche $(\mu-1)^{ter}$ Ordnung enthalten, d. h. höchstens den Rang $(\mu, n-1)$ besitzen. Setzen wir diesen Wert von x_1 in (8) ein, so ergibt sich:

$$f(x_1) = (P + Q\sqrt{R})^3 + A(P + Q\sqrt{R})^2 + B(P + Q\sqrt{R}) + C = 0,$$

und wenn wir die Potenzen ausführen, folgt eine Relation von der Gestalt:

$$f(x_1) = M + N\sqrt{R} = 0,$$

wo M, N Polynome in P, Q, R, also rationale Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, R$ sind. Wäre $N \neq 0$, so folgte $\sqrt{R} = -\frac{M}{N}$, d. h. $\sqrt{R}$ ließe sich rational durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und R darstellen, also durch höchstens $n-1$ Glieder μ^{ter} und andere $(\mu-1)^{ter}$ Ordnung; das ist aber, wie oben schon bemerkt, unmöglich. Also folgt not-

wendig

$$N = 0 \text{ und daher auch } M = 0.$$

Daraus schließen wir aber weiter, daß auch

$$x_2 = P - Q\sqrt{R}$$

eine Wurzel der kubischen Gleichung (8) ist; denn der Vergleich mit den letzten Gleichungen gibt sogleich:

$$f(x_2) = M - N\sqrt{R} = 0.$$

Nun geht der Beweis sehr einfach und amüsant zu Ende: Ist x_3 die dritte Wurzel, so ist bekanntlich

$$x_1 + x_2 + x_3 = -A, \text{ also ist}$$

$$x_3 = -A - (x_1 + x_2) = -A - 2P$$

von demselben Range als P und daher sicher von niederem Range als x_1.

Ist nun x_3 etwa bereits rational, so ist unser Theorem bewiesen. Wenn aber nicht, so können wir es zum Ausgangspunkt derselben Schlußreihe machen, und es ergibt sich, daß bei den andern Wurzeln der höhere Rang nur Schein gewesen sein muß, daß insbesondere eine von ihnen in Wahrheit einen noch niederen Rang hat, als x_3. So gehen wir nun weiter unter den 3 Wurzeln immer hin und her und erkennen dabei jedesmal, daß ihr Rang tatsächlich eine Stufe geringer ist, als wir vorher geglaubt haben. Wir müssen daher notwendig schließlich auf eine Wurzel mit der Ordnung $\mu = 0$ kommen, d. h. wir erkennen tatsächlich die Existenz einer rationalen Wurzel der kubischen Gleichung. Dann können wir unsere Schlußweise in der Tat nicht fortsetzen; die beiden andern Wurzeln müssen übrigens entweder gleichfalls rational sein, oder die Gestalt $P \pm Q\sqrt{R}$ haben, wo P, Q, R rationale Zahlen sind. Damit ist aber auch erwiesen, daß $f(x)$ in einen quadratischen und einen linearen rationalen Faktor zerfällt, und daher reduzibel ist. Jede irreduzible kubische Gleichung, und insbesondere unsere Gleichung des regulären Siebenecks ist also durch Quadratwurzeln nicht lösbar, und damit ist der Beweis vollendet, daß sich das reguläre Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt.

Sie sehen, wie einfach und durchsichtig dieser Beweis verläuft, und wie wenig Kenntnisse er eigentlich voraussetzt; immerhin verlangt einiges, besonders die Erörterungen über Klassifikation der Wurzelgrößen doch ein gewisses Maß schwieriger mathematischer Abstraktion: Ob der Beweis also einfach genug ist, um einen der früher charakterisierten mathematischen Laien von der Vergeblichkeit seiner Versuche einer elementargeometrischen Lösung zu überzeugen, das wage ich nicht zu entscheiden; immer-

hin sollte man doch versuchen, einem solchen Manne diesen Beweisgang langsam und klar auseinanderzusetzen.

Zum Schluß will ich noch einige Literatur über die Fragen der regulären Polygone sowie überhaupt die bei dieser Gelegenheit berührten allgemeinen Fragen der geometrischen Konstruierbarkeit nennen. Zunächst kommt da wiederum Weber-Wellstein I (Abschn. 18 und 19), dann aber die kleine Festschrift „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ 1.) in Betracht, die ich 1895 gelegentlich einer Oberlehrerversammlung in Göttingen herausgegeben habe. Als einen sehr viel ausführlicheren und umfangreicheren Ersatz dieser im Buchhandel vergriffenen Schrift kann ich den soeben erschienenen Teil der deutschen Übersetzung des von F. Enriques in Bologna herausgegebenen Sammelwerkes „Fragen der Elementargeometrie“ 2.) nennen, in dem Sie sich genau über alle einschlägigen Fragen orientieren können.

Ich verlasse damit die zahlentheoretischen Erörterungen, indem ich den letzten Punkt, die Transzendenz von π für den Schluß der Vorlesung aufspare, um nunmehr im nächsten Kapitel über die letzten Erweiterungen des Zahlbegriffes systematisch zu sprechen.

1.) Ausgearb. v. F. Tägert. Leipzig 1895.

2.) Teil II: „Die geometr. Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit“. Deutsch v. H. Fleischer (Leipzig 1907).

VI. Die komplexen Zahlen.

1. Die gewöhnlichen komplexen Zahlen.

Lassen Sie mich einige wenige geschichtliche Daten vorausschicken. Zum ersten Male sollen die imaginären Zahlen 1545 bei Cardano allerdings mehr beiläufig bei der Auflösung der kubischen Gleichung aufgetreten sein. In der weiteren Entwicklung können wir wieder die gleiche Bemerkung machen, wie bei den negativen Zahlen, daß sich nämlich die imaginären Zahlen ohne und selbst gegen den Willen des einzelnen Mathematikers beim Operieren immer wieder von selbst einstellten und erst ganz allmählich in dem Maße, in dem sie sich als nützlich erwiesen, weitere Verbreitung fanden. Freilich war den Mathematikern dabei recht wenig wohl zu Mute, die imaginären Zahlen behielten lange einen etwas mystischen Anstrich, so wie sie ihn heute noch für jeden Schüler haben, der zum ersten Male von jenem merkwürdigen $i = \sqrt{-1}$ hört. Ich erwähne als Beleg gern eine sehr charakteristische Äußerung von Leibniz aus dem Jahre 1702, die etwa so lautet: „Die imaginären Zahlen sind eine feine und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein". Im 18. Jahr-

hundert wird zwar das Begriffliche noch keineswegs aufgeklärt, dafür wird aber vor allem durch Euler die grundlegende Bedeutung der imaginären Zahlen in der Funktionentheorie erkannt; er stellt 1748 jene wunderbare Relation auf:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

durch die die innerliche Verwandtschaft der in der elementaren Analysis auftretenden Funktionsarten erkannt wird. Das 19. Jahrhundert endlich hat die begrifflich klare Erfassung des Wesens der komplexen Zahlen gebracht. Da ist zunächst die geometrische Interpretation hervorzuheben, auf die mehrere Forscher um die Jahrhundertwende etwa gleichzeitig geführt wurden. Es genügt wohl, wenn ich unter ihnen den hervorhebe, der gewiß am tiefsten in das Wesen der Sache eingedrungen ist, und der auch die nachhaltigste Wirkung auf das Publikum ausgeübt hat, unseren Gauß; er hat sich, wie das schon erwähnte Tagebuch unwiderleglich beweist, schon 1797 im vollen Besitz jener Interpretation befunden, aber sie freilich erst sehr viel später der Öffentlichkeit übergeben. Die zweite Errungenschaft des 19. Jahrhunderts ist die Schaffung einer rein formalen Begründung der komplexen Zahlen, die sie auf reelle Zahlen zurückführt; sie geht auf Arbeiten englischer Mathematiker in den dreißiger Jahren zurück, auf die ich hier nicht genauer eingehen kann; näheres darüber finden Sie in dem schon (S. 65) zitierten Buche von Hankel.

Über diese beiden heut noch herrschenden Begründungsarten will ich nun Einiges ausführen. Stellen wir uns zunächst auf den rein formalen Standpunkt, nach dem nicht die Bedeutung der Dinge, sondern die innere Widerspruchslosigkeit der Operationsregeln die Richtigkeit der Begriffsbildungen gewährleistet. Die Einführung der komplexen Zahlen gestaltet sich dann folgendermaßen, wobei jede Spur von etwas Geheimnisvollen schwindet:

1) Die komplexe Zahl $x + iy$ ist die Zusammenstellung zweier reeller Zahlen x, y, ein „Zahlenpaar", über das die weiterhin aufzuführenden Festsetzungen getroffen werden.

2.) Zwei komplexe Zahlen $x + iy$, $x' + iy'$ heißen gleich, wenn $x = x'$, $y = y'$ ist.

3.) Addition und Subtraktion wird definiert durch

$$(x + iy) \pm (x' + iy') = (x \pm x') + i(y \pm y').$$

Dann gelten alle Regeln der Addition, wie man leicht bestätigt; nur das Monotoniegesetz kann in der ursprünglichen Auffassung nicht mehr festgehalten werden, da die komplexen Zahlen von Hause aus nicht dieselbe ein-

fache Anordnung besitzen, in der die natürlichen oder die reellen Zahlen ihrer Größe nach erscheinen; auf die modifizierte Fassung, die man dem Monotoniegesetz demgemäß geben muß, gehe ich der Kürze halber nicht ein.

4.) Für die Multiplikation setzen wir fest, daß man wie mit gewöhnlichen Buchstaben rechnet, nur daß stets $i^2 = -1$ gesetzt wird; insbesondere wird also:

$$(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Dann gelten gleichfalls, wie leicht zu sehen, alle Gesetze der Multiplikation mit Ausnahme des Monotoniegesetzes.

5.) Die Division ist als inverse Operation der Multiplikation definiert; insbesondere wird, wie die Probe ergibt:

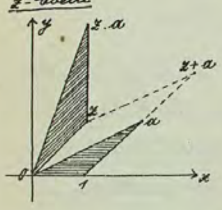
$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Diese Zahl existiert stets außer für $x = y = 0$ d. h. es bleibt die schon im Gebiete der reellen Zahlen bestehende Ausnahmestellung der Division durch Null bestehen.

Nach alledem folgt, daß das Rechnen mit komplexen Zahlen unmöglich zu Widersprüchen führen kann, da es ja hier völlig auf die reellen Zahlen und die bekannten Operationen mit ihnen zurückgeführt ist – und die wollen wir für den Moment als widerspruchslos anerkennen.

Gewiß wird man auch neben dieser rein formalen Betrachtung noch eine geometrische oder sonst anschauliche Deutung der komplexen Zahlen und der Operationen mit ihnen wünschen, in der man eine anschauliche Begründung ihrer Widerspruchslosigkeit sehen kann. Das leistet jene Gaußsche Interpretation, die – wie Ihnen wohl allen geläufig ist, und wie wir es auch schon erwähnten – den Inbegriff der Punkte $(x \mid y)$ der Ebene eines x-y-Koordinatensystemes als Deutung der Gesamtheit der komplexen Zahlen $x+iy$ auffaßt. Das Summe zweier Zahlen z, a folgt dann durch die bekannte Parallelogrammkonstruktion aus den entsprechenden beiden Punkten und dem Nullpunkt 0, während sich das Produkt $z \cdot a$ unter

z-Ebene



Hinzunahme des Einheitspunktes 1 $(x=1 \mid y=0)$ durch Anlegen eines zu $a\,0\,1$ ähnlichen Dreieckes an $0\,z$ ergibt. Kurz gesagt wird die Addition $z' = z + a$ durch einer Parallelverschiebung der Ebene in sich, die Multiplikation $z' = z \cdot a$ durch eine Ähnlichkeitstransformation, d.h. Drehung und Streckung bei festem Nullpunkte dargestellt. Aus der Anordnung der den Zahlen entsprechenden Punkte in der Ebene ergibt sich übrigens so-

fort auch, was hier an Stelle der Monotonieregeln der reellen Zahlen zu treten hat. Diese Andeutungen genügen wohl, um Ihnen die Sachlage vollständig ins Gedächtnis zurückzurufen.

Ich will hier nicht unterlassen, Sie auf die Stelle bei Gauß hinzuweisen, an der diese Begründung der komplexen Zahlen durch ihre geometrische Deutung mit vollem Nachdruck ausgesprochen wird, und durch die sie wohl zuerst zu allgemeiner Geltung gelangte. In einer Arbeit vom Jahre 1831 beschäftigt sich Gauß mit der Theorie besonders der ganzen komplexen Zahlen $a+ib$, wo a, b ganze reelle Zahlen sind, und überträgt auf sie die Sätze der gewöhnlichen Zahlentheorie über Primfaktoren, quadratische und biquadratische Reste etc. Solche Verallgemeinerungen der Zahlentheorie haben wir früher schon gelegentlich bei dem großen Fermatschen Satze erwähnt. In der Selbstanzeige [1] dieser Abhandlung äußert er sich nun über das, was er „wahre Metaphysik der imaginären Zahlen" nennt. Er begründet die Berechtigung zum Operieren mit komplexen Zahlen durchaus damit, daß man ihnen und den Operationen mit ihnen jene anschauliche geometrische Deutung geben kann; er stellt sich also

1) siehe Werke, Bd. II (Göttingen 1876), pag. 175.

keineswegs auf den formalen Standpunkt. Im übrigen sind diese längeren, sehr schön geschriebenen Auseinandersetzungen von Gauss äusserst lesenswert. Ich erwähne hier nur noch, dass Gauss statt des Wortes „imaginär" das klarere „Komplex" in Vorschlag bringt, das sich ja in der Tat auch vielfach eingebürgert hat.

2. Höhere komplexe Zahlen, insbesondere Quaternionen.

Kann man nun – diese Frage liegt jedem, der sich gründlich mit komplexen Zahlen beschäftigt hat, nahe – nicht auch andere, höhere komplexe Zahlen mit mehr neuen Einheiten, als dem einen i, bilden und mit ihnen vernünftig rechnen? In dieser Richtung haben zuerst um das Jahr 1840 unabhängig von einander H. Grassmann in Stettin und W. R. Hamilton in Dublin positive Resultate gewonnen; besonders mit der Erfindung Hamiltons, der Quaternionenrechnung, wollen wir uns im folgenden etwas eingehender beschäftigen. Zunächst noch kurz die allgemeine Problemstellung!

Die gewöhnlichen komplexen Zahlen $x + iy$ können wir auffassen als aus den 2 verschiedenen „Einheiten" 1 und i mittels der reellen Parameter x, y in der Form

$$x \cdot 1 + y \cdot i$$

gebildete lineare Kombinationen. Ebenso betrachten wir jetzt beliebig viele, etwa n, von einander verschiedene Einheiten $e_1, e_2, \dots e_n$ und bezeichnen als das aus ihnen gebildete „höhere komplexe Zahlensystem" die Gesamtheit der mit n beliebigen reellen Zahlen $x_1, x_2, \dots x_n$ gebildeten Kombinationen:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n .$$

Es versteht sich ziemlich von selbst, dass man 2 solche komplexe Zahlen, etwa x und

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

dann und nur dann gleich nennen wird, wenn die Koeffizienten der einzelnen Einheiten, die sog. „Komponenten" der Zahl, paarweise übereinstimmen:

$$x_1 = y_1 , \quad x_2 = y_2 , \dots \quad x_n = y_n .$$

Ebenso naheliegend ist die Definition der Addition und Subtraktion, die diese Operationen einfach auf das Addieren und Subtrahieren der Komponenten zurückführt:

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1) e_1 + (x_2 \pm y_2) e_2 + \dots + (x_n \pm y_n) e_n .$$

Schwieriger und interessanter wird die Sache erst bei der Multiplikation. Wir werden da natürlich zunächst nach den allgemeinen Regeln des Buchstabenrechnens verfahren, indem wir jeden i^{ten} Term von x mit jedem k^{ten} von y multiplizieren $(i, k, = 1, 2, \dots n)$

$$x \cdot y = \sum_{(i,k=1,\dots n)} x_i \, y_k \, e_i \, e_k .$$

Damit das aber wiederum eine Zahl unseres Systems ist,

ist es nötig, eine Regel zu besitzen, die die Produkte $e_i \cdot e_k$ wiederum als komplexe Zahlen des Systems, d. h. als lineare Kombination der Einheiten darstellt; man muss also n^2 Gleichungen der Form

$$e_i\, e_k = \sum_{(l=1,\dots n)} c_{ikl} \cdot e_l \quad (i, k = 1, \dots n)$$

besitzen; dann wird in der Tat

$$x \cdot y = \sum_{(l=1,\dots n)} \Big\{ \sum_{(i,k=1,\dots n)} x_i\, y_k\, c_{ikl} \Big\}\, e_l$$

stets wiederum eine Zahl des Systems. In der Festlegung dieser Multiplikationsregel, d. h. des Schemas der Koeffizienten c_{ikl} liegt das Charakteristische eines jeden besonderen komplexen Zahlensystems.

Definiert man nun weiter naturgemäss die Division als inverse Operation der Multiplikation, so zeigt es sich, dass bei diesem allgemeinen Ansatze die Division nicht immer eindeutig ausführbar zu sein braucht, auch wenn der Divisor nicht verschwindet; denn die Bestimmung von y aus $x \cdot y = z$ geschieht durch Auflösung der n linearen Gleichungen $\sum_{(i,k)} x_i\, y_k\, c_{ikl} = z_l$ nach den n Unbekannten $y_1, \dots y_n$, und diese haben, falls ihre Determinante verschwindet, entweder gar keine oder unendlich viele Lösungen; im gleichen Falle können auch alle $z_l = 0$ sein, ohne dass alle y_k verschwinden müssen, d. h. das Produkt zweier Zahlen kann verschwinden, ohne dass ein Faktor Null ist. Nur durch geschickte

spezielle Wahl der Grössen c_{ikl} kann man hier Übereinstimmung mit dem Verhalten der gewöhnlichen Zahlen erzielen; freilich ergibt die nähere Untersuchung, dass man, falls $n > 2$ ist, dafür die Abweichung von einer der anderen Rechenregeln notwendig in Kauf nehmen muss; dafür wählt man dann eine solche, die in dem in Betracht kommenden Zusammenhange weniger wichtig erscheint.

Alle diese allgemeinen Erörterungen verfolgen wir nun näher am Beispiele der Quaternionen, die wegen ihrer Anwendungen in der Physik und Mechanik wohl das wichtigste höhere komplexe Zahlensystem darstellen. Wie der Name zeigt, sind es viergliedrige Zahlen ($n = 4$); als Abart schliessen sie die dreigliedrigen Vektoren ein, die heute wohl allgemein bekannt sind, und von denen man auch vielleicht gar gelegentlich auf der Schule spricht.

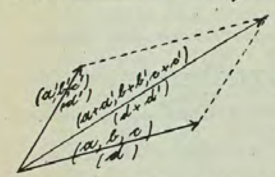
Als erste der 4 Einheiten, aus denen wir die Quaternionen zusammensetzen, verwenden wir (wie bei den gewöhnlichen komplexen Zahlen) die gewöhnliche reelle Einheit 1. Die drei anderen Einheiten pflegt man nach Hamilton mit i, j, k zu bezeichnen, so dass die allgemeine Form der Quaternion ist:

$$q = d + i\,a + j\,b + k\,c\,,$$

wo a, b, c, d reelle Parameter, die Koeffizienten der Quaternion sind. Man nennt die erste, mit 1 multiplizier–

te Komponente d, die dem reellen Teil der gemeinen komplexen Zahl entspricht, den „skalaren Bestandteil" der Quaternion, den Inbegriff $a\,i + b\,j + c\,k$ der drei anderen Glieder ihren vektoriellen Bestandteil.

Hinsichtlich der Addition der Quaternionen können wir den obigen allgemeinen Erörterungen kaum mehr etwas besonderes hinzufügen, und geben daher sogleich eine naheliegende geometrische Deutung an, die auf die Ihnen bekannte Deutung der Vektoren zurückgeht. Wir stellen uns nämlich die dem vektoriellen Bestandteil von q entsprechende Strecke mit den Projektionen a, b, c auf die Koordinatenachsen vor und denken sie noch mit einem dem skalaren Bestandteil d gleichen Gewichte behaftet. Dann vollzieht sich die Addition von q und $q' = d' + i\,a' + j\,b' + k\,c'$ so, daß man der nach dem bekannten Parallelogrammgesetz der Vektoraddition gebildeten Resultante der beiden Strecken die Summe der Gewichte als Gewicht anschreibt, denn das ist dann in der Tat der Repräsentant der Quaternion.



(1) $\quad q + q' = (d + d') + i\,(a + a') + j\,(b + b') + k\,(c + c')$.

Zu spezifischen Eigenschaften der Quaternionen kommen wir erst, wenn wir uns der Multiplikation zu-

wenden, und zwar müssen sie, wie wir allgemein sahen, in den Festsetzungen über die Produkte der Einheiten enthalten sein. Ich gebe Ihnen also zunächst an, welchen Quaternionen Hamilton die 16 Produkte von je 2 Einheiten gleich setzt: Das erste ist, daß wir, wie ja schon die Bezeichnung andeutet, mit der ersten Einheit 1 wie mit der reellen Zahl 1 rechnen wollen, also:

(2^a) $\quad 1^2 = 1,\; i \cdot 1 = 1 \cdot i = i,\; j \cdot 1 = 1 \cdot j = j,\; k \cdot 1 = 1 \cdot k = k$.

Als wesentlich neu aber setzen wir für die Quadrate der andern 3 Einheiten fest

(2^b) $\quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$,

und für ihre binären Produkte:

(2^c) $\quad j \cdot k = +i,\quad k \cdot i = +j,\quad i \cdot j = +k$,

während bei umgekehrter Stellung der Faktoren gelten soll:

(2^d) $\quad k \cdot j = -i,\quad i \cdot k = -j,\quad j \cdot i = -k$.

Hierbei fällt sofort ins Auge, daß das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht mehr erfüllt ist, und diese Unannehmlichkeit ist es, die man eben hinnehmen muß, um die Eindeutigkeit der Division, bezw. den Satz, daß ein Produkt nur verschwinden kann, wenn ein Faktor verschwindet, zu retten. Daß dieser Satz und obendrein alle andern Gesetze der Addition und Multiplikation mit jener einen Ausnahme in der Tat erhalten bleiben, und daß jene einfachen Festsetzungen also äußerst zweckmäßig sind, das werden wir sogleich zeigen.

Zunächst wollen wir das Produkt zweier allgemeinen Quaternionen

$$p = d + ia + jb + kc \text{ und } q = w + ix + jy + kz$$

$$q' = p \cdot q = (d + ia + jb + kc) \cdot (w + ix + jy + kz)$$

bilden, unter Beachtung dieser Reihenfolge der Faktoren. Multiplizieren wir Glied für Glied aus, ersetzen die Produkte der Einheiten aus unserer Multiplikationstabelle und ziehen sodann die Glieder mit gleichen Einheiten wieder zusammen, so ergibt sich:

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned} q' = pq = w' + ix' + jy' + kz' = &(dw - ax - by - cz) \\ &+ i(aw + dx + \underline{bz - cy}) \\ &+ j(bw + dy + \underline{cx - az}) \\ &+ k(cw + dz + \underline{ay - bx}). \end{aligned}\right\}$$

Die Komponenten der Produktquaternion sind also bestimmte einfache bilineare Kombinationen der Komponenten der beiden Faktoren. Vertauscht man die Reihenfolge der Faktoren, so wechseln die 6 durch Unterstreichen hervorgehobenen Terme ihr Vorzeichen, so daß $q \cdot p$ im allgemeinen von $p \cdot q$ wesentlich verschieden ist, und zwar nicht etwa bloß im Vorzeichen, wie das für die Produkte der einzelnen Einheiten gilt.

Während das Kommutativgesetz also nicht erfüllt ist, gelten das distributive und assoziative Gesetz unverändert. Denn bilden wir nur zunächst einmal $p(q + q_1)$, andererseits $pq + pq_1$ durch formales Ausmultiplizieren, ohne noch die Produkte der Einheiten zu ersetzen, so müssen wir notwendig Übereinstimmendes erhalten; daran kann sich auch nichts ändern, wenn wir nun auf beiden Seiten nachträglich die Multiplikationstabelle benutzen. Das assoziative Gesetz ferner muß, wie man leicht einsieht, allgemein gelten, wenn es nur für die Multiplikation der Einheiten gilt. Das wiederum entnimmt man unmittelbar der Multiplikationstabelle, wie ich nur an dem Beispiel

$$(ij)k = i(jk)$$

zeigen will; in der Tat hat man

$$(ij)k = k \cdot k = -1 \text{ und}$$

$$i(jk) = i \cdot i = -1 .$$

Nun gehen wir zur Division über. Es wird da genügen, zu zeigen, daß es zu jeder Quaternion $p = d + ia + jb + kc$ eine völlig bestimmte zweite q gibt, so daß

$$p \cdot q = 1 ;$$

wir werden zweckmäßig dieses q mit $\frac{1}{p}$ bezeichnen, und darauf dann die allgemeine Division leicht zurückführren können. Um dieses q zu bestimmen, setzen wir in den Ausdruck (3) $q' = 1 = 1 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$ ein und erhalten durch Gleichsetzen der Komponenten die folgenden 4 Gleichungen für die 4 unbekannten Komponenten x, y, z, w von q:

$$\begin{aligned} dw - ax - by - cz &= 1 \\ aw + dx - cy + bz &= 0 \\ bw + cx + dy - az &= 0 \\ cw - bx + ay + dz &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösbarkeit eines solchen Gleichungssystems hängt bekanntlich von seiner Determinante ab, und hier liegt speziell eine sog. schiefsymmetrische Determinante vor, bei der symmetrisch zu der (von links oben nach rechts unten gehenden) Hauptdiagonale liegende Elemente entgegengesetzt gleich sind, während die Elemente der Hauptdiagonale unter sich gleich sind. Die Determinantentheorie lehrt solche Determinanten besonders einfach zu berechnen, und zwar findet man hier:

$$\begin{vmatrix} d, & -a, & -b, & -c \\ a, & d, & -c, & b \\ b, & c, & d, & -a \\ c, & -b, & a, & d \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2;$$

man kann sich davon auch durch direktes Ausrechnen überzeugen. In diesem Umstande, daß die Determi-

nante gerade gleich einer Potenz der Quadratsumme der 4 Komponenten von p wird, beruht die eigentliche Feinheit der Hamiltonschen Festsetzungen, denn nun folgt, daß die Determinante immer von 0 verschieden ist, außer wenn gleichzeitig $a = b = c = d = 0$ ist, und daher sind mit diesem einzigen selbstverständlichen Ausnahmefalle ($p = 0$) die Gleichungen eindeutig auflösbar, und die reziproke Quaternion q ist eindeutig bestimmt. Setzt man

$$T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

eine Größe, die als „Tensor von p" in der Theorie eine große Rolle spielt, so bestätigt man leicht direkt, daß jene eindeutige Lösung durch

$$x = -\frac{a}{T^2}, \quad y = -\frac{b}{T^2}, \quad z = -\frac{c}{T^2}, \quad w = \frac{d}{T^2}$$

gegeben ist, so daß wir als Endresultat erhalten:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{d + ia + jb + kc} = \frac{d - ia - jb - kc}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Führt man analog wie bei gewöhnlichen komplexen Zahlen den konjugierten Wert von p:

$$\bar{p} = d - ia - jb - kc$$

ein, so können wir die letzte Formel auch schreiben

$$\frac{1}{p} = \frac{\bar{p}}{T^2}, \text{ oder}$$

$$p \cdot \bar{p} = T^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

Formeln, die als unmittelbare Verallgemeinerungen gewisser Eigenschaften der gemeinen komplexen Zahlen erscheinen. Da auch umgekehrt p die zu $\bar{p}$ konjugierte Zahl ist, ist übrigens auch

$$\bar{p} \cdot p = T^2,$$

so daß in diesem speziellen Falle Kommutativität herrscht.

Wir erkennen nun sofort auch die Lösung des allgemeinen Problems der Division: Aus

$$p \cdot q = q'$$

folgt durch Multiplikation mit $\frac{1}{p}$:

$$q = \frac{1}{p} \cdot q' = \frac{\bar{p}}{T^2} \cdot q',$$

während die vertauschte Gleichung

$$q \cdot p = q'$$

die im allgemeinen verschiedene Lösung

$$q = q' \cdot \frac{1}{p} = q' \cdot \frac{\bar{p}}{T^2}$$

hat. –

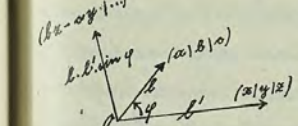
Wir haben uns nun die Frage vorzulegen, ob es eine geometrische Deutung der Quaternionen gibt, in der diese Operationen samt ihren Gesetzen als etwas Naturgemäßes erscheinen. Um auf diese zu kommen, beginnen wir mit dem speziellen Falle, in dem beide Faktoren in einfache Vektoren übergehen, d. h. wo die skalaren Teile $w = d = 0$ sind. Dann reduziert sich die allgemeine Multiplikationsformel (3) auf:

$$q' = p \cdot q = (ia + jb + kc)(ix + jy + kz)$$
$$= -(ax + by + cz) + i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx),$$

d. h. das Produkt zweier auf einen Vektor sich reduzierender

Quaternionen besteht aus einem skalaren und einem vektoriellen Anteil. Wir können diese Anteile nun leicht mit den verschiedenen Arten der bei uns in Deutschland üblichen Vektormultiplikation in Verbindung bringen. Diese bei uns ungleich mehr als der Quaternionenkalkül verbreiteten Begriffe gehen auf Graßmann zurück, wiewohl das Wort Vektor selbst englischen Ursprungs ist. Die beiden Arten des Vektorproduktes, mit denen man gewöhnlich operiert, bezeichnet man jetzt meist als inneres (skalares) Produkt $ax + by + cz$ (d. i. also bis aufs Vorzeichen der skalare Teil des obigen Quaternionenprodukts) und äußeres (vektorielles) Produkt $i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx)$, (d. i. also der vektorielle Bestandteil desselben). So wollen wir denn auch beide Teile für sich geometrisch deuten.

Wir tragen beide Vektoren (a, b, c) und (x, y, z) als Strecken vom Anfangspunkte 0 ab; sie reichen dann bis zu den Punkten $(a \mid b \mid c)$ bezw. $(x \mid y \mid z)$

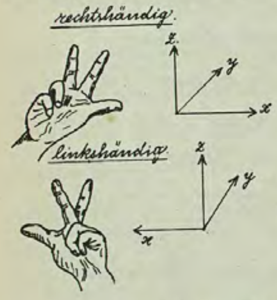


und haben die Längen $l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, bezw. $l' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ist φ der Winkel zwischen beiden Strecken, so ist nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie, auf die ich hier wohl nicht einzugehen brauche, das innere Produkt

$$a x + b y + c z = l \cdot l' \cdot \cos \varphi .$$

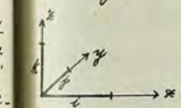
Das äußere Produkt ist selbst ein Vektor, der, wie man ebenso leicht einsieht, auf der Ebene von l und l' senkrecht steht, und ferner ergibt sich als seine Länge der einfache Ausdruck $l . l' . \sin \varphi$.

Wesentlich ist nun noch die Entscheidung über den Sinn des Produktvektors, d. h. die Frage, nach welcher Seite der durch l, l' bestimmten Ebene hin er abzutragen ist. Dieser Sinn ist verschieden je nach dem Koordinatensystem, das man zu Grunde legt. Man kann nämlich, wie Sie wohl wissen, 2 verschiedene nicht kongruente, d. h. nicht zur Deckung zu bringende rechtwinkliche Koordinatensysteme angeben, indem man die x- und z-Achse etwa beibehält, den Sinn der y-Achse aber umkehrt. Diese Systeme sind dann spiegelbildlich symmetrisch zu einander, so wie rechte und linke Hand, und in der Tat kann man sie demgemäß durch folgende einfache Gedächtnisregel auseinanderhalten:



x-, y- und z-Achse liegen bei dem einen Systeme so wie der ausgestreckte Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand, bei dem andern, wie die gleichen

Finger der linken Hand. Diese zweierlei Systeme werden in der Literatur durcheinander gebraucht; in den verschiedenen Ländern, in verschiedenen Disziplinen und schließlich bei verschiedenen Autoren herrscht verschiedener Usus. – Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, daß $p = i$, $q = j$ ist (das sind die auf der x- und y-Achse abgetragenen Einheitsstrecken), so ist wegen $i . j = k$ das äußere Vektorprodukt gleich der auf der z-Achse abgetragenen Einheitsstrecke.



Man kann nun weiter i, j in beliebige Vektoren p, q so stetig überführen, daß k in den Vektorbestandteil von $p . q$ stetig übergeht, ohne dazwischen zu verschwinden, und daher müssen auch stets der erste Faktor, der zweite und das Vektorprodukt zueinander liegen wie die x-, y-, und z-Achse des Koordinatensystems, also rechtshändig oder linkshändig, je nachdem man das Koordinatensystem einmal gewählt hat.

Ich will hier doch noch einige Worte über die leidige Frage der Bezeichnungsweise in der Vektoranalysis hinzufügen. Es werden nämlich nebeneinander eine große Menge verschiedener Zeichen für jede der Vektoroperationen gebraucht, und leider ist es bisher nicht gelungen, eine einzige allgemein verbindliche Bezeichnungsweise zu schaffen. Wir haben vor

4 Jahren auf der Naturforscherversammlung zu Kassel (1903) eine Kommission zu diesem Zwecke eingesetzt; ihre Mitglieder konnten sich aber nicht einmal untereinander völlig einigen und, da jeder doch den guten Willen hatte von seinem ursprünglichen Standpunkte den anderen einen Schritt entgegenzukommen, war der einzige Erfolg der, daß ungefähr 3 neue Bezeichnungen entstanden! Eine wirkliche Einigung aller bei solchen Dingen in Betracht kommenden Kreise auf ein und dieselbe Sprech- und Schreibweise scheint mir nach diesen und ähnlichen Erfahrungen überhaupt nur möglich zu sein, wenn äußerst gewichtige materielle Interessen dahinter stehen. Nur unter einem solchen Drucke konnte 1881 in der Elektrotechnik das einheitliche Maßsystem nach Volt, Ampère, Ohm allgemeine Annahme finden, und dann in der Folge durch die staatliche Gesetzgebung festgelegt werden, da die Industrie als Grundlage aller ihrer Bezeichnungen eine derartige Einheit der Bezeichnung dringend brauchte. Hinter der Vektorrechnung stehen so starke materielle Interessen noch nicht, und daher wird man sich vorläufig wohl oder übel damit abfinden müssen, daß jeder einzelne Mathematiker bei der ihm gewohnten Bezeichnung bleibt, die er als bequemste oder gar-

wenn er etwas dogmatisch veranlagt ist - als die allein richtige empfindet.

3. Quaternionenmultiplikation und Drehstreckungen des Raumes.

Gehen wir nun nach diesem Exkurs zur geometrischen Deutung der Multiplikation allgemeiner Quaternionen über und schicken noch folgende Untersuchung voran: Ersetzen wir in dem Produkt $q' = p \cdot q$ die Quaternionen p und q durch ihre konjugierten $\bar{p}$, $\bar{q}$, d. h. geben wir a, b, c, x, y, z das entgegengesetzte Vorzeichen, so bleibt in der S. 148 gegebenen Darstellung des Produktes der skalare Teil ungeändert, und nur die nicht unterstrichenen Faktoren von i, j, k wechseln das Zeichen; vertauschen wir aber gleichzeitig noch die Reihenfolge der Faktoren, so wechseln auch die unterstrichenen Faktoren das Zeichen, und demnach ergibt $\bar{q} \cdot \bar{p}$ gerade den konjugierten Wert $\bar{q}'$ zu $q' = p \cdot q$:

$$\underline{\text{Ist } q' = p \cdot q, \text{ so ist } \bar{q}' = \bar{q} \cdot \bar{p}}.$$

Multiplizieren wir diese beiden Quaternionengleichungen miteinander, so ergibt sich:

$$q' \cdot \bar{q}' = p \cdot q \cdot \bar{q} \cdot \bar{p}.$$

Dabei ist die Reihenfolge der Faktoren wesentlich, wohl aber können wir das Assoziativitätsgesetz anwenden und schreiben:

$$q' \cdot \bar{q}' = p \cdot (q \cdot \bar{q}) \cdot \bar{p} .$$

Da nun, wie wir oben sahen (S. 151.),

$$q \cdot \bar{q} = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

ist, ergibt sich:

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = p\,(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)\,\bar{p} .$$

Hier ist nun der mittlere Faktor der rechten Seite ein Skalar, und für die Multiplikation eines jeden Skalars M mit einer Quaternion gilt das Kommutative Gesetz, da $M \cdot p = Md + i(Ma) + j(Mb) + k(Mc) = pM$.
Also ist insbesondere

$$w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = p\bar{p}\,(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) ,$$

und da $p \cdot \bar{p}$ das Quadrat des Tensors von p ist:

(I) $\underline{w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)}$,

<u>d. h. der Tensor eines Quaternionenproduktes ist gleich dem Produkt der Tensoren der Faktoren</u>. Natürlich kann man diese Formel auch durch direkte Rechnung erhalten, wenn man die Ausdrücke für w', x', y', z' der Multiplikationsformel von S. 148 entnimmt.

Nunmehr wollen wir die <u>Quaternion q als die Strecke vom Nullpunkte eines vierdimensionalen Raumes zum Punkte $(x \mid y \mid z \mid w)$ desselben deuten</u> – ganz analog zu der Deutung des Vektors im dreidimensionalen

Raume. Man hat es wohl heute nicht mehr nötig, sich zu entschuldigen, wenn man den vierdimensionalen Raum benutzt, wie man das zur Zeit, als ich studierte, stets tun mußte; Sie wissen alle, daß irgend eine metaphysische Meinung nicht dahinter steckt, sondern daß der mehrdimensionale Raum einfach ein unserer tatsächlichen Raumvorstellung analoges, bequemes Mittel mathematischer Ausdrucksweise ist. Halten wir nun den Faktor p, d. h. die Größen d, a, b, c fest, so stellt die Quaternionengleichung

$$q' = p \cdot q$$

eine gewisse <u>lineare Transformation</u> der Punkte $(x \mid y \mid z \mid w)$ des vierdimensionalen Raumes in die $(x' \mid y' \mid z' \mid w')$ dar, indem sie jedem vierdimensionalen Vektor q einen anderen q' linear zuordnet; die expliziten Gleichungen der Transformation, d. h. die Ausdrücke für x', y', z', w' als (ganze) lineare Funktionen von x, y, z, w, ergeben sich durch Vergleichung der Koeffizienten aus der Produktdarstellung von S. 148.
Aus der <u>Tensorengleichung (I)</u> sehen wir aber, daß dabei der Abstand $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$ eines jeden Punktes vom Nullpunkt mit ein und demselben Konstanten Faktor $T = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ multipliziert wird, und

ferner sahen wir oben (S. 150), daß die Determinante der linearen Transformation sicher positiv ist.

Es ist nun aus der analytischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes bekannt, daß eine lineare Transformation der x, y, z, die die Eigenschaft hat, $x^2+y^2+z^2$ genau in sich selbst zu transformieren, (d. h. die „orthogonal" ist), und die obendrein noch eine positive Determinante besitzt, daß diese eine Drehung des Raumes um den Koordinatenanfang darstellt, und daß man jede Drehung so erhält. Führt aber die lineare Transformation $x^2+y^2+z^2$ nur bis auf einen Faktor T^2 in sich über und ist die Determinante wiederum positiv, so wird eine Drehung in Verbindung mit einer Streckung des ganzen Raumes auf das T-fache bei festem Koordinatenanfang, also eine sog. Drehstreckung, dargestellt.

Was nun dem dreidimensionalen Raume recht ist, ist dem vierdimensionalen billig: Wir werden sagen, daß unsere lineare Transformation in genau demselben Sinne eine Drehstreckung des vierdimensionalen Raumes bei festem Anfangspunkt darstellt. Wir können aber leicht sehen, daß hier nicht die allgemeinste mögliche Drehstreckung vorliegt. Denn unsere Transformation enthält nur 4 willkürliche Parameter in den Kom-

ponenten a, b, c, d von p, während wir sogleich zeigen wollen, daß die allgemeinste Drehstreckung des vierdimensionalen Raumes R_4 deren 7 enthält. Damit nämlich die allgemeine lineare Transformation eine Drehstreckung wird, muß die Identität bestehen:

$$x'^2+y'^2+z'^2+w'^2 = T^2(x^2+y^2+z^2+w^2);$$

wir erhalten daraus durch Koeffizientenvergleichung 10 Bedingungen, da die linke Seite nach Ersetzung der $x', \ldots w'$ durch ihre Ausdrücke in den $x, \ldots w$ in eine quadratische Form von 4 Variablen übergeht und daher $\frac{4\cdot 5}{2} = 10$ Terme enthält. Da aber T noch willkürlich ist, sind das nur $10 - 1 = 9$ Bedingungen für die 16 Koeffizienten der linearen Transformation, so daß in der Tat noch $16 - 9 = 7$ Parameter willkürlich bleiben.

Man kann trotzdem, und das ist das merkwürdige, durch Quaternionenmultiplikation auch die allgemeinste Drehstreckung herausbringen. Ist nämlich $\pi = \delta + i\alpha + j\beta + k\gamma$ eine weitere konstante Quaternion, so zeigt man genau wie vorhin, daß auch $q' = q\cdot\pi$ (was sich von der früheren Formel nur durch Vertauschung der Reihenfolge unterscheidet) eine Drehstreckung des R_4 ist, und daher ist auch die Zusammensetzung beider

$$q' = p \cdot q \cdot \pi = (d + i a + j b + k c) \cdot q \cdot (\delta + i \alpha + j \beta + k \gamma)$$

eine solche. Diese Transformation enthält nur genau 7 – nicht 8 – willkürliche Parameter, da sie ungeändert bleibt, wenn man a, b, c, d mit derselben reellen Zahl multipliziert und gleichzeitig $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch sie dividiert; es erscheint also plausibel, daß sie die allgemeine Drehstreckung des vierdimensionalen Raumes darstellt, und dieser schöne Satz ist tatsächlich von Cayley bewiesen worden. Ich will das freilich hier nur historisch berichten, um mich nicht zu sehr ins Detail dieser Deutung zu verlieren. Die Formel findet sich in Cayleys Arbeit „On the homographic transformation of a surface of the second ordre into itself"[1] von 1854 sowie in einigen anderen seiner Abhandlungen.[2]

Diese Cayleysche Formel hat nun auch den großen Vorzug, daß sie die Zusammensetzung zweier Drehstreckungen in äußerst einfacher Weise übersehen läßt. Wird nämlich eine zweite Drehstreckung durch die Gleichung

$$q'' = w'' + i x'' + j y'' + k z'' = p' \cdot q' \cdot \pi'$$

dargestellt, wo p', π' weitere bestimmte gegebene Quaternionen sind, so erhalten wir, indem wir hier den obi-

1.) abgedruckt in Cayley, Collected mathematical papers, Vol. II (Cambridge 1889) pag. 133.

2.) vgl. z. B. „Recherches ultérieures sur les déterminants gauches" (loc. cit. pag. 214).

gen Wert von q' eintragen:

$$q'' = p' \cdot (p \cdot q \cdot \pi) \cdot \pi',$$

und nach dem assoziativen Gesetze der Multiplikation:

$$q'' = (p' \cdot p) \cdot q \cdot (\pi \cdot \pi') \quad \text{oder}$$

$$q'' = r \cdot q \cdot \rho, \quad \text{wo } r = p' \cdot p, \; \rho = \pi \cdot \pi'$$

bestimmte neue Quaternionen sind. Wir haben so den Ausdruck der Drehstreckung, die q in q'' überführt, genau in der alten Form, und zwar entstehen vorderer und hinterer Multiplikator von q durch Quaternionenmultiplikation aus den beiden vorderen bezw. hinteren Multiplikatoren in den Darstellungen der zusammensetzenden Drehstreckungen, wobei die Reihenfolge wesentlich ist. –

Sie werden nun vielleicht, meine Herren, mit dieser vierdimensionalen Deutung unzufrieden sein und etwas handgreiflicheres, in die gewöhnliche dreidimensionale Raumanschauung passendes verlangen. Nun gut, aus den bisher angegebenen Formeln wollen wir denn durch einfache Spezialisierung Formeln für die gleichen dreidimensionalen Operationen erhalten, und in diesen gerade beruht die große Bedeutung der Quaternionenmultiplikation für die gewöhnliche Physik und Mechanik; ich sage ausdrücklich der gewöhnlichen, um einer Weiterentwicklung dieser Dirziplinen, nach der auch die vorigen Deutungen direkt anwendbar werden, nicht vorzugreifen. Und diese ist vielleicht näher, als Sie denken mögen; neuere Untersuchungen der Elektrodynamik, wie sie in dem sog. *Prinzip der Relativität* zum Ausdruck kommen, sind eigentlich nichts, als konsequente Benutzung der Drehstreckungen eines vierdimensionalen Raumes, und sie werden auch neuerdings von Prof. *Minkowski* geradezu in diesem Sinne dargestellt und ausgebaut.

Aber bleiben wir nun bei 3 Dimensionen. Da wird eine Drehstreckung einen Punkt $(x|y|z)$ so in $(x'|y'|z')$ transformieren, daß

$$x'^2+y'^2+z'^2 = M^2(x^2+y^2+z^2)$$

wird, wobei M die lineare Streckung einer jeden Länge bedeutet. Da die allgemeine lineare Transformation der x, y, z in die x', y', z' $3.3=9$ Koeffizienten enthält, und die linke Seite nach Einführung dieser Ausdrücke in eine quadratische Form von x, y, z mit $\frac{3.4}{2}=6$ Termen übergeht, so stellt unsere Identität bei willkürlichem M $6-1=5$ Bedingungen dar, und alle ihr genügenden linearen Substitutionen enthalten noch $9-5=$ *4 willkürliche Parameter* (vgl. die analoge Überlegung S. 161). Hat eine dieser Substitutionen *positive Determinante*, so stellt sie, wie schon erwähnt, (S. 160) eine *Drehung*

des Raumes um den Anfangspunkt verbunden mit einer Streckung im Verhältnis $1:M$ dar; ist aber die Determinante *negativ*, so entspricht die Substitution einer solchen *Drehstreckung, zusammengesetzt noch mit einer Spiegelung des Raumes*, wie sie durch $x'=-x$, $y'=-y$, $z'=-z$ gegeben wird. Übrigens kann man leicht zeigen, daß die Determinante nur die beiden Werte $\pm M^3$ annehmen kann.

Um diese Verhältnisse nun durch Quaternionen darzustellen, reduzieren wir natürlich zunächst die Unbestimmten q, q' auf ihren *vektoriellen Bestandteil*:

$$q' = ix'+jy'+kz', \quad q = ix+jy+kz,$$

das sind die dreidimensionalen Vektoren vom Koordinatenanfang nach dem Punkt vor, bezw. nach Ausführung der Transformation. Dann ist die Behauptung, *daß die allgemeine Drehstreckung des dreidimensionalen Raumes entsteht, wenn wir in der früheren Formel p und π konjugiert nehmen, also setzen*:

$$(1)\left\{\begin{array}{l} q' = p.q.\bar{p}, \text{ oder ausgeschrieben:} \\ ix'+jy'+kz' = (d+ia+jb+kc)(ix+jy+kz)(d-ia-jb-kc). \end{array}\right.$$

Um das zu beweisen, müssen wir vor allem zeigen, daß der skalare Teil des rechten Produktes verschwindet, also q' in der Tat ein *Vektor* wird. Dazu multiplizieren wir zunächst $p \cdot q$ nach den Quaternionenregeln aus, und finden:

$$q' = \{-ax - by - cz + i(dx + bz - cy) + j(dy + cx - az) + k(dz + ay - bx)\} \cdot \{d - ia - jb - kc\};$$

nach abermaliger Quaternionenmultiplikation ergibt sich tatsächlich für den skalaren Teil von q' der Wert 0, während seine drei Vektorkomponenten die Ausdrücke erhalten:

$$(2)\left\{\begin{aligned} x' &= (d^2+a^2-b^2-c^2)x + 2(ab-cd)y + 2(ac+bd)z \\ y' &= 2(ab+cd)x + (d^2+b^2-c^2-a^2)y + 2(bc-ad)z \\ z' &= 2(ac-bd)x + 2(bc+ad)y + (d^2+c^2-a^2-b^2)z. \end{aligned}\right.$$

Daß diese Formeln in der Tat eine Drehstreckung darstellen, ergibt sich, wenn wir zu (1) die nach früherem (S. 158) zugehörige Tensorengleichung bilden:

$$x'^2+y'^2+z'^2 = (d^2+a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)(d^2+a^2+b^2+c^2), \text{ oder}$$

$$\underline{x'^2+y'^2+z'^2 = T^4 \cdot (x^2+y^2+z^2)},$$

wo $T = \sqrt{d^2+a^2+b^2+c^2}$ den Tensor von p bedeutet. Danach ist (s. S. 164 f) unsere Transformation eine eigentliche Drehstreckung, falls ihre Determinante positiv ist – andernfalls ist sie noch mit einer Spiegelung verbunden; die lineare Streckung ist in jedem Falle $M = T^2$. Die Determinante kann, wie oben bemerkt, nur die beiden Werte

$\pm M^3 = \pm T^6$ haben. Betrachten wir die Transformation für alle möglichen Parameterwerte a, b, c, d, die zu demselben – notwendig von 0 verschiedenen – Tensorwert T gehören, so muß die Determinante stets den Wert $+T^6$ haben, wenn sie ihn nur für ein spezielles Wertsystem der $a, \ldots d$ hat; denn als stetige Funktion der a, b, c, d kann sie nicht sprungweis ohne Zwischenwerte anzunehmen in den Wert $-T^6$ übergehen. Ein solches spezielles Wertsystem ist aber $a = b = c = 0$, $d = T$, denn dafür läßt (2) sofort den Determinantenwert $\begin{vmatrix} d^2, & 0, & 0 \\ 0, & d^2, & 0 \\ 0, & 0, & d^2 \end{vmatrix} = d^6 = +T^6$ erkennen. Also haben wir immer positives Zeichen, und daher ist (1) tatsächlich stets eine eigentliche Drehung nebst Streckung. Eine Drehstreckung verbunden mit Spiegelung ist hinterher ebenso einfach darzustellen, indem man nur $\bar{q}' = p \cdot q \cdot \bar{p}$ schreibt; denn das ist genau die Zusammensetzung der vorigen Transformation mit der Spiegelung $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$.

Wollen wir nun erkennen, daß auch umgekehrt jede Drehstreckung in der Form (1) bezw. (2) enthalten ist, so haben wir zunächst zu bemerken, daß diese Formel in der Tat die nach der obigen Abzählung dazu nötigen 4 willkürlichen Parameter in a, b, c, d enthält. Daß man aber durch passende Bestimmung dieser Parameter wirklich jeden Wert der linearen Streckung $M = T^2$

und jede Lage der Drehachse sowie jeden Wert des Drehwinkels erzielen kann, kann man sofort den folgenden Formeln entnehmen. Es seien ξ, η, ζ die Richtungskosinusse der Drehungsachse, deren Quadratsumme bekanntlich

$$(3) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

ist, und ω sei der Drehwinkel (Amplitude der Drehung). Dann gelten – behaupte ich – die Relationen

$$(4) \quad \begin{cases} d = T \cdot \cos\frac{\omega}{2}\,; \\ a = T \cdot \xi \cdot \sin\frac{\omega}{2},\; b = T \cdot \eta \cdot \sin\frac{\omega}{2};\; c = T \cdot \zeta \cdot \sin\frac{\omega}{2}, \end{cases}$$

die wegen (3) von selbst die Bedingung

$$d^2 + a^2 + b^2 + c^2 = T^2$$

befriedigen, und offenbar zu jedem beliebig gegebenen T; ξ, η, ζ; ω in der Tat passende a, b, c, d liefern.

Um nun die Gleichungen (4) zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß sich aus ihnen bei bekannten a, b, c, d leicht die 4 Größen ω, ξ, η, ζ bestimmen, und zwar so, daß (3) erfüllt ist; denn durch Addition der Quadrate der Gleichungen (4) folgt, da T der Tensor von $p = d + ia + jb + kc$ ist,

$$1 = \cos^2\frac{\omega}{2} + \sin^2\frac{\omega}{2}\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

und daraus sofort (3). Für die Bestimmung von ξ, η, ζ genügen daher die aus (4) folgenden Gleichungen:

$$(4') \qquad \underline{a : b : c = \xi : \eta : \zeta},$$

die aussagen, daß der Punkt $(a\,|\,b\,|\,c)$ auf der Drehachse der Transformation liegt. Diese Tatsache läßt sich aber leicht verifizieren, indem wir in (2) $x = a$, $y = b$, $z = c$ einsetzen; wir erhalten dann:

$$x' = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,a = T^2 a,$$
$$y' = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,b = T^2 b,$$
$$z' = (d^2 + a^2 + b^2 + c^2)\,c = T^2 c,$$

d. h. der Punkt $(a\,|\,b\,|\,c)$ bleibt auf seiner Verbindungsgeraden mit dem Anfangspunkt liegen, und das gerade charakterisiert ihn als Punkt der Drehachse. – Es fehlt nun nur noch der Nachweis, daß der in (4) definierte Winkel ω wirklich die Drehungsamplitude ist. Dies erfordert jedoch umständlichere Betrachtungen, die ich hier einfach durch die Angabe ersparen kann, daß unsere Transformationsformeln (2) für $T = 1$ vermöge (4) gerade in die Formeln übergehen, die Euler für die Drehung eines Koordinatensystems um eine Achse ξ, η, ζ durch den Winkel ω aufgestellt hat. Sie finden das näher ausgeführt beispielsweise in Klein – Sommerfeld, „Theorie des Kreisels", Heft 1[1] (§ 7, pag. 55 ff), wo explizite auf die Quaternionentheorie Bezug genommen wird, oder in Baltzers „Theorie und Anwendung der Determinanten"[2] (§ 14, pg. 187).

1) Leipzig 1897. 2) 5. Aufl. Leipzig 1881.

Wir wollen hier endlich noch den kurzen bequemen Ausdruck explizit hinschreiben, den die Quaternionenrechnung für die Drehung um die Achse ξ, η, ζ durch den Winkel ω, verbunden mit einer Streckung um T^2 ergibt, und den wir durch Eintragen der Formeln (4) in (1) erhalten:

$$(5)\quad ix'+jy'+kz' = T^2\left\{\cos\frac{\omega}{2}+\sin\frac{\omega}{2}(i\xi+j\eta+k\zeta)\right\}\cdot\{ix+jy+kz\}\cdot\left\{\cos\frac{\omega}{2}-\sin\frac{\omega}{2}(i\xi+j\eta+k\zeta)\right\}.$$

Damit sind die ganzen Eulerschen Drehungsformeln in einer Gestalt kondensiert, die sich dem Gedächtnis leicht einprägt: Es ist der Vektor $ix+jy+kz$ vorn und hinten mit konjugierten Quaternionen vom Tensor 1, sog. Versoren („Dreher" im Gegensatz zu Tensor = „Strecker") zu multiplizieren, während noch als skalarer Faktor der Betrag der Streckung hinzutritt.

Wir wollen uns nun noch überzeugen, daß diese Formel bei Reduktion auf 2 Dimensionen genau die bekannte Darstellung einer Drehstreckung der x-y-Ebene durch die Multiplikation zweier komplexen Zahlen liefert (vgl. S. 140). Dazu brauchen wir nur in (5) die Drehungsachse in die z-Achse zu legen ($\xi=\eta=0$, $\zeta=1$) und erhalten sodann für $z=z'=0$:

$$ix'+jy' = T^2\left(\cos\frac{\omega}{2}+k\sin\frac{\omega}{2}\right)(ix+jy)\left(\cos\frac{\omega}{2}-k\sin\frac{\omega}{2}\right),$$

und durch geeignetes Ausmultiplizieren unter Beachtung der Multiplikationsregeln für die Einheiten:

$$\begin{aligned} ix'+jy' &= T^2\left\{\cos\frac{\omega}{2}(ix+jy)+\sin\frac{\omega}{2}(jx-iy)\right\}\left\{\cos\frac{\omega}{2}-k\sin\frac{\omega}{2}\right\}\\ &= T^2\left\{\cos^2\frac{\omega}{2}(ix+jy)+2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}(jx-iy)-\sin^2\frac{\omega}{2}(ix+jy)\right\}\\ &= T^2\{(ix+jy)\cos\omega+(jx-iy)\sin\omega\}\\ &= T^2(\cos\omega+k\sin\omega)(ix+jy). \end{aligned}$$

Multiplizieren wir das noch beiderseits hinten mit $(-i)$, so erhalten wir

$$x'+ky' = T^2(\cos\omega+k\sin\omega)(x+ky),$$

und das ist in der Tat genau die Multiplikationsformel zweier gemeiner komplexer Zahlen mit ihrer Deutung als Drehung um die Amplitude ω und Streckung um den Betrag T^2, nur daß k an Stelle der sonst mit i bezeichneten imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ geschrieben ist.

Wir wollen nun noch, um wieder in den dreidimensionalen Raum zurückzukehren, die Formel (1) so modifizieren, daß sie eine reine Drehung ohne Streckung darstellt; dazu müssen wir x', y', z' durch $x'\cdot T^2$, $y'\cdot T^2$, $z'\cdot T^2$, also q' durch $q'\cdot T^2$ ersetzen, und wenn wir bedenken, daß $p^{-1}=\frac{1}{p}=\frac{\bar{p}}{T^2}$ ist, so erhalten wir als Formel der reinen Drehung

$$(6)\quad ix'+jy'+kz' = p\cdot(ix+jy+kz)\cdot p^{-1}.$$

Es ist keine Spezialisation, wenn man hierin p als Quaternion vom Tensor 1 annimmt:

$$p = \cos\frac{\omega}{2} + \sin\frac{\omega}{2}(i\xi + j\eta + k\zeta), \text{ wo } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

und daher entsteht die Formel (6) auch aus (5), indem man T gleich 1 setzt. In dieser Gestalt erscheint die Formel 1845 zuerst bei Cayley.[1] – Genau wie früher für den vierdimensionalen Raum gestaltet sich auch hier die Zusammensetzung zweier Drehungen äußerst einfach. Haben wir eine zweite Drehung

$$ix'' + jy'' + kz'' = p'(ix' + jy' + kz')\,p'^{-1}, \text{ wo}$$
$$p' = \cos\frac{\omega'}{2} + \sin\frac{\omega'}{2}(i\xi' + j\eta' + k\zeta')$$

(Achse ξ', η', ζ' und Amplitude ω'), so folgt wiederum

$$ix'' + jy'' + kz'' = p' \cdot p \cdot (ix + jy + kz) \cdot p^{-1} \cdot p'^{-1}$$

als Darstellung der resultierenden Drehung, so daß sich deren Achse und Drehwinkel ξ'', η'', ζ'' bezw. ω'' aus

$$p'' = \cos\frac{\omega''}{2} + \sin\frac{\omega''}{2}(i\xi'' + j\eta'' + k\zeta'') = p' \cdot p$$

ergeben. Damit haben wir einen einfachen knappen Ausdruck der an sich ziemlich kompliziert aussehenden Formeln für die Zusammensetzung zweier Drehungen. Gleichzeitig aber haben wir andererseits, da wir jede Quaternion bis auf einen reellen Faktor (ihren Tensor) als Versor einer Drehung auffassen können, ein einfaches geometrisches Aequivalent der Quaternionenmultiplikation in der Zusammensetzung der Drehungen; die Nichtkommutativität der Quaternionenmultiplikation entspricht alsdann dem bekannten Umstande, daß die Reihenfolge zweier Drehungen um einen Punkt in der Tat im allgemeinen nicht vertauscht werden darf, ohne daß sich das Ergebnis ändert.

1) On certain results relating to quaternions (Coll. math. pap. Vol. I. (1889), pag. 123).

Wollen Sie übrigens Näheres über die historische Entstehung der hier behandelten Deutung und Anwendung der Quaternionen sowie der Theorie der Drehungen eines Koordinatensystems wissen, so verweise ich Sie auf das eine der außerordentlich wertvollen Referate von Cayley selbst über Dynamik: „Report on the progress of the solution of certain special problems of dynamics."[1]

Ich schließe mit einigen allgemeinen Betrachtungen über Wert und Verbreitung der Quaternionen. Man muß da wohl die eigentliche Quaternionenmultiplikation von dem allgemeinen Quaternionenkalkul unterscheiden. Die erstere ist jedenfalls etwas äußerst Nützliches, wie aus den vorangehenden Erörterungen zur Genüge hervorgeht. Der allgemeine Kalkul hingegen, wie ihn Hamilton in Aussicht nahm, be-

1) Collect. math. papers. Vol. IV, pag. 552 ff. (Cambridge 1891)

trachtet Additionen, Multiplikationen, Divisionen von Quaternionen in beliebiger Folge, d. h. er studiert die Algebra der Quaternionen, und indem man unendliche Prozesse hinzunimmt, kann man geradezu auch zu einer Funktionentheorie der Quaternionen aufsteigen; natürlich wird hier wegen des Fehlens des kommutativen Gesetzes alles ganz anders, als in der Theorie der gewöhnlichen komplexen Variablen. Man darf aber wohl behaupten, daß diese allgemeinen weitgehenden Ideeen Hamiltons sich nicht bewährt haben, d. h. daß sie mit andern Disziplinen der Mathematik und der Anwendungen nicht in Berührung und lebendigen Ideeenaustausch getreten sind und daher auch weniger allgemeines Interesse gefunden haben.

Aber in der Mathematik ist es wie sonst im menschlichen Leben: neben der ruhigen, objektiven Ansicht der Majorität treten leidenschaftliche individuelle Überzeugungen auf. So haben auch die Quaternionen enthusiastische Anhänger und leidenschaftliche Gegner. Erstere, die man hauptsächlich in England und Amerika findet, haben zur Verbreitung ihrer Ideeen seit 12 Jahren sogar das moderne Mittel der Begründung eines „Weltbundes zur Beförderung der Quaternionenlehre" ergriffen, dessen Präsident ge-

genwärtig Sir Robert Ball ist, und der als durchaus internationale Institution von dem Japaner Kimura, der in Amerika studiert hatte, gegründet worden ist; sie versprechen sich von einem intensiven Betrieb der Quaternionen ganz besondere Förderung der Mathematik. Demgegenüber wollen die anderen wieder von den Quaternionen garnichts hören, und lehnen damit auch die so nützliche Multiplikation ab; sie gehen von der Ansicht aus, daß alles Rechnen mit Quaternionen schließlich doch auf das Rechnen mit den 4 Komponenten herauskommt, und daß die Einheiten und ihre Multiplikationstafel dabei überflüssiger Luxus sind. Ich glaube, daß beide Parteien gleich weit von dem richtigen Mittelwege abweichen.

4. Die komplexen Zahlen im Unterricht.

Damit verlasse ich die Quaternionentheorie, und schließe unser Kapitel mit einigen Bemerkungen über die Rolle, die diese Begriffe im Schulunterricht spielen. Quaternionen auf der Schule vorzubringen, fällt wohl keinem Menschen ein, wohl aber wird auf die gemeinen komplexen Zahlen $x + iy$ immer die Rede kommen. Es ist vielleicht nicht uninteressant, wenn ich Ihnen statt langer Erörterungen, wie man es macht und wie man es machen sollte, an der Hand von drei

Büchern aus verschiedenen Zeitepochen einmal darlege, wie sich der Unterricht historisch entwickelt hat.

Ich lege Ihnen zunächst ein Buch von Kästner vor, der in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts in Göttingen die maßgebende Stelle einnahm. Damals trieb man auf der Universität noch diejenigen elementarmathematischen Dinge, die dann später, in den dreißiger Jahren des 19. Jahrhunderts etwa, auf die Schule übergingen, und so hielt auch Kästner populärmathematische Vorlesungen, an denen auch Nichtmathematiker in großer Zahl teilnahmen. Sein Lehrbuch, das diesen Vorlesungen zu Grunde lag, heißt „mathematische Anfangsgründe", und es kommt für uns hier die 2. Abteil. des 3. Teiles: „Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen" 1) in Betracht. Da beginnt auf S. 20 die Behandlung der imaginären Größen etwa mit diesen Worten: „Wer eine Wurzel geraden Exponentens aus einer „verneinten" Größe (so sagte man damals statt „negativ") zu ziehen fordert, der fordert etwas Unmögliches, denn es gibt keine verneinte Größe, die eine solche Potenz wäre." Das ist in der Tat ganz korrekt, aber nun geht er auf S. 34 weiter: „Solche Wurzeln heißen unmöglich oder imaginär," und ohne

1) 3. Aufl. Göttingen 1794.

daß die Berechtigung der Sache viel untersucht wird, wird ganz ruhig wie mit gewöhnlichen Zahlen mit ihnen operiert, obwohl doch ihre Existenz noch eben bestritten wurde – gleichsam als ob durch die Benennung das Unvernünftige plötzlich brauchbar würde. Sie erkennen hier noch einen Reflex des Leibnizschen Standpunktes, daß die imaginären Zahlen eigentlich etwas ganz Törichtes sind, aber doch unbegreiflicher Weise zu brauchbaren Resultaten führen.

Kästner hat übrigens sehr amüsant geschrieben, wie er ja auch als Epigrammatist bekanntlich in der Literatur einen Namen hat. So verbreitet er sich, um ein Beispiel für viele anzuführen, in der Einleitung dieses Bandes über den Ursprung des Wortes Algebra, das ja, wie der Artikel „Al" anzeigt, aus dem Arabischen kommt. Ein Algebrist soll nach Kästner ein Mann sein, der Brüche „ganz macht", also etwa rationale Funktionen behandelt und auf einen Nenner bringt etc.; ursprünglich soll sich das auch auf die Tätigkeit eines Wundarztes bezogen haben, der gebrochene Knochen heilt. Kästner führt dafür den Donquichote an, der zu einem Algebristen geht, um sich seine Rippenbrüche wieder einrenken zu lassen; ob sich Cervantes freilich damit wirklich dem Sprachgebrauch ausschließt, und ob nicht etwa nur eine Satire in der Stelle liegt, mag unentschieden bleiben.

Ein zweites Buch hier ist eine ganze Reihe von Jahren jünger und stammt von dem Berliner Professor M. Ohm: „Versuch eines vollständig konsequenten Systemes der Mathematik" [1]; es ist ein Buch ähnlicher Tendenz, wie das Kästnersche und war einstmals sehr verbreitet. Ohm steht aber dem modernen Standpunkte schon viel näher, indem er das Prinzip der Erweiterung des Zahlbereiches deutlich ausspricht; gerade wie die negativen Zahlen, so sagt er etwa, muß das $\sqrt{-1}$ als neues Ding den reellen Zahlen hinzugefügt werden. Die geometrische Deutung freilich hat auch er noch nicht, wie sein Buch denn in der Tat vor der entscheidenden Publikation von Gauß (1831) liegt.

Endlich lege ich Ihnen noch eines aus der großen Reihe moderner Schulbücher vor, das sehr viel benutzt wird: Bardeys Aufgabensammlung [2]. Hier tritt zunächst das Prinzip der Erweiterung hervor, und in der Folge wird auch die geometrische Deutung

1) 9 Bände. Berlin 1828. Bd. I (Arithm. u. Algebra), pg. 276.
2) Neue Ausgabe, besorgt von F. Pietzker und O. Presler. (5. Aufl. Leipzig 1907.) pg. 96 ff.

auseinandergesetzt. Dies mag wohl heute in der Tat der allgemeine Standpunkt des Schulunterrichts sein, wenn auch an vereinzelten Stellen die Entwicklung vielleicht noch auf der vorangehenden Stufe stehen geblieben ist; und es scheint mir auch die der Schule am meisten angemessene Behandlung zu sein: Ohne den Schüler durch systematische Darlegungen zu ermüden, und ohne natürlich auf logisch abstrakte Erörterungen sich einzulassen, erläutere man die komplexen Zahlen als Erweiterung des bekannten Zahlbegriffes, und vermeide dabei gewiß jeden mystischen Anstrich; vor allem aber gewöhne man den Schüler auch bald an die geometrisch-anschauliche Deutung in der komplexen Ebene!

Wir stehen damit, meine Herren, am Ende des ersten Hauptteils unserer Vorlesung, der der Arithmetik gewidmet war. Bevor ich mich zu ähnlichen Erörterungen über die Algebra und die Analysis wende, möchte ich einen längeren historischen Exkurs einfügen, der auch auf den allgemeinen gegenwärtigen Unterrichtsbetrieb sowie auf das, was wir an ihm bessern wollen, neues Licht fallen lassen wird.

Zwischenstück: Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt.

Lassen Sie mich von der Bemerkung ausgehen, daß wir in der Entwicklungsgeschichte der Mathematik bis in die Gegenwart sehr deutlich zwei verschiedene Entwicklungsreihen unterscheiden können, die sich bald gegenseitig ablösen, bald gleichzeitig unabhängig nebeneinander herlaufen, bald endlich auch sich wechselseitig durchdringen. Es ist schwer, den Unterschied, den ich hier im Sinne habe, in prägnante Worte zu fassen, da keine der geläufigen Einteilungen recht paßt; Sie werden ihn jedenfalls am besten an einem konkreten Beispiele verstehen, wenn ich Ihnen nämlich darlege, wie man im Sinne jeder der beiden Entwicklungsreihen die elementaren Kapitel des Systemes der Analysis wirklich aufzubauen hätte.

Folgen wir der einen Entwicklungsreihe, die wir kurzweg als Entwicklungsreihe A bezeichnen mögen, so kommt folgendes System heraus, das heute an den Schulen sowie in den elementaren Lehrbüchern meist das herrschende ist:

1.) An der Spitze steht die formale Lehre von den Gleichungen, also das Operieren mit ganzen rationalen Funktionen und die Behandlung der Fälle, in denen alge-

braische Gleichungen durch Wurzelzeichen lösbar sind.

2.) Aus der systematischen Verfolgung des Potenzbegriffes und seiner Umkehrungen entstehen die Logarithmen, die sich beim numerischen Rechnen als sehr fruchtbringend erweisen.

3.) Während die analytischen Entwicklungen bis hierhin ganz getrennt von der Geometrie gehalten wurden, macht man nun eine Anleihe bei dieser, die die ersten Definitionen einer zweiten Art transzendenter Funktionen, der trigonometrischen, liefert; deren weitere Theorie wird sodann als neue gesonderte Disziplin ausgebaut.

4.) Es folgt nunmehr die sog. „algebraische Analysis", die die Entwicklungen der einfachsten Funktionen in unendliche Reihen lehrt; es kommen in Betracht das allgemeine Binom, der Logarithmus und seine Inverse, die Exponentialfunktion, sowie die trigonometrischen Funktionen; auch die allgemeine Lehre von den unendlichen Reihen und dem Operieren mit ihnen gehört hierhin. Dabei entstehen dann die überraschenden Zusammenhänge zwischen den genannten elementaren Transzendenten, insbesondere die berühmte Eulersche Formel:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x .$$

Sie erscheinen um so wunderbarer, als die durch sie in Beziehung gesetzten Funktionen vorher von ganz verschiedenen Gebieten aus definiert worden sind.

5.) Über die Schulmathematik hinaus schließt sich an diesen Aufbau als konsequente Fortsetzung an die Weierstraßsche Theorie der Funktionen komplexen Argumentes, die von den Potenzreihen ausgeht. –

Stellen wir dem nun ebenso in kurzer Zusammenfassung das Schema der zweiten Entwicklungsreihe B entgegen; hier herrscht allgemein der Gedanke der analytischen Geometrie, der eine Fusion der Zahl- und Raumanschauung will. Demgemäß beginnt man

1.) mit der graphischen Darstellung der einfachsten Funktionen, der Polynome und rationalen Funktionen einer Variablen. Die Schnittpunkte der so erhaltenen Kurven mit der Abszissenachse setzen die Nullstellen der Polynome in Evidenz, und hieran schließt sich naturgemäß die Lehre von der numerischen Auflösung der Gleichungen durch Näherung an.

2.) Das geometrische Kurvenbild gibt die naturgemäße anschauliche Quelle für die Idee des Differentialquotienten sowohl wie des Integrales; zu ersterer führt

die Steigung der Kurve, zu letzterer der Flächeninhalt, den die Kurve mit der Abszissenachse begrenzt.

3.) In allen Fällen, in denen der Integrationsprozeß (oder Quadraturprozeß im eigentlichen Sinne des Wortes) mit den rationalen Funktionen nicht explizit durchführbar ist, gibt er aus sich heraus zur Entstehung neuer Funktionen Anlaß, die so auf eine durchaus natürliche und einheitliche Art eingeführt werden. So definiert die Quadratur der Hyperbel den Logarithmus:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x$$

während die Quadratur des Kreises sich leicht auf

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

also auf die Inversen der trigonometrischen Funktionen zurückführen läßt. Sie wissen, daß derselbe Gedankengang weiterhin zu neuen höheren Funktionsklassen, insbesondere den elliptischen Funktionen führt.

4.) Die Entwicklung aller so gewonnenen Funktionen in unendliche Potenzreihen geschieht wiederum nach einem einheitlichen Prinzip, dem Taylorschen Lehrsatze.

5.) Als höhere Fortführung dieses Ansatzes erscheint dann die Cauchy-Riemannsche Theorie der analytischen Funktionen komplexen Arguments, die auf den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen oder dem Cauchyschen Integralsatze basiert ist. –

Versuchen wir nun, das Resultat dieses Überblickes in bestimmte Worte zu fassen, so können wir vielleicht sagen, daß bei A eine partikularistische Auffassung der Wissenschaft zu Grunde liegt, die das Gesamtgebiet in eine Reihe gegeneinander wohl abgegrenzter Teile zerlegt und in einem jeden für sich mit einem Minimum von Hilfsmitteln unter möglichster Vermeidung von Anleihen in den Nachbargebieten auszukommen sucht; das Ideal ist ein schön auskrystallisierter logisch in sich geschlossener Aufbau jedes der einzelnen Gebiete. Demgegenüber legt der Anhänger von B gerade auf eine organische Verknüpfung der Einzelgebiete und auf die zahlreichen Anregungen, die sie sich gegenseitig gewähren, das Hauptgewicht, und er bevorzugt demgemäß die Methoden, die ihm das gleichzeitige Verständnis mehrerer Gebiete unter einheitlichem Gesichtspunkte erschließen; sein Ideal ist die Erfassung der gesamten mathematischen Wissenschaft als eines Ganzen.

Man kann wohl nicht im Zweifel sein, welche der beiden Richtungen mehr Leben in sich hat, welche den Schüler – soweit er nicht spezifisch abstrakt

mathematisch veranlagt ist – mehr packen kann. Betrachten Sie, um sich das recht zu vergegenwärtigen, nur das Beispiel der Funktionen e^x und $\sin x$, über die wir gerade in dieser Richtung später noch viel zu reden haben werden! Im System A – und leider schließt man sich dem gerade hierin auf der Schule fast ausschließlich an – treten beide Funktionen ganz heterogen auf: e^x bezw. der Logarithmus erscheint als bequemes Hilfsmittel beim numerischen Rechnen, $\sin x$ aber entsteht in der Dreiecksgeometrie. Wie soll man da verstehen, daß beide in so einfacher Weise zusammenhängen, und noch mehr, daß sie sich in den verschiedensten Gebieten, die weder mit der Technik des numerischen Rechnens, noch mit der Geometrie das mindeste zu tun haben, immer wieder ganz von selbst als naturgemäßer Ausdruck der dort obwaltenden Gesetze darbieten? Wie weit diese Anwendungsmöglichkeiten gehen, zeigen die Namen „Zinseszinsfunktion" oder „Gesetz des organischen Wachstums", die man e^x wohl beigelegt hat, zeigt andererseits die Tatsache, daß $\sin x$ überall da, wo von Schwingungen die Rede ist, eine zentrale Rolle spielt. Im Systeme B aber erscheint dies alles ganz verständlich und der von Anfang an hervorgehobenen Bedeutung der Funktionen ganz angemessen: Hier entstehen ja e^x und $\sin x$ aus derselben Quelle, der Quadratur einfacher Kurven, und man wird von da aus bald – wir werden das später noch sehen – auf die Differentialgleichungen einfachsten Typus $\left(\frac{de^x}{dx} = e^x \text{ bezw. } \frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x\right)$ geführt, die allen jenen Anwendungen naturgemäß zu Grunde liegen.

Zum vollen Verständnis der Entwicklung der Mathematik müssen wir aber noch eines dritten Momentes gedenken, das neben und innerhalb der Entwicklungsreihen A und B sehr häufig eine grosse Rolle spielt. Es handelt sich da um das, was man mit einem durch Entstellung des Namens eines arabischen Mathematikers entstandenen Worte als Algorithmus bezeichnet; das ist im Grunde schliesslich jedes geordnete, formale Rechnen, insbesondere Buchstabenrechnen. Welch einen grossen Anteil an der Entwicklung der Wissenschaft das algorithmische Verfahren als eine gewissermaßen selbständig vorwärtstreibende, den Formeln innewohnende Kraft unabhängig von der Absicht und Einsicht der jeweiligen Mathematiker und oft sogar ihr entgegen gehabt hat, das haben wir schon wiederholt betont; auch in den Anfängen der Infinitesimalrechnung hat, wie wir noch gelegentlich sehen werden, der

Algorithmus häufig zu neuen Begriffen und Operationen gedrängt, noch ehe man sich über ihre Zulässigkeit Rechenschaft geben konnte. Selbst auf höheren Stufen der Entwicklung können diese algorithmischen Momente Nützliches leisten und haben es tatsächlich getan, so daß man sie geradezu als den Untergrund der mathematischen Entwicklung bezeichnen kann; es heißt also unhistorisch denken, wenn man, wie es heute manchmal Mode ist, diese Momente als bloß formale Entwicklungen geringschätzig bei Seite schiebt. –

Ich möchte nunmehr den Gegensatz dieser verschiedenen mathematischen Arbeitsrichtungen durch die Geschichte der Mathematik wirklich genauer verfolgen, wobei ich mich natürlich auf die Erwähnung nur der allerwichtigsten Züge der Entwicklung beschränken muß. Hierbei wird der durchgreifende Unterschied zwischen A und B innerhalb des ganzen Gebietes der Mathematik noch klarer werden als in der obigen auf die Analysis beschränkten Zusammenstellung.

Beginnen wir mit den alten Griechen, so finden wir eine scharfe Trennung der reinen und angewandten Mathematik, die auf Plato und Aristoteles zurückgeht. Zur reinen Mathematik gehörte u. a. vor allem der bekannte Euklidische Aufbau der Geometrie; in der angewandten wurde besonders das numerische Rechnen, die sog. Logistik ausgebildet (λόγος = allgemeine Zahl; vgl. S. 80) Freilich wurde die Logistik recht gering angesehen, und Sie wissen, dass sich dies Vorurteil noch bis heute vielfach erhalten hat – allerdings meist nur bei Leuten, die selbst nicht numerisch rechnen können. Diese geringere Geltung der Logistik mag besonders auch darauf zurückzuführen sein, dass sie im Anschluss an die Trigonometrie und die Bedürfnisse des praktischen Vermessungswesens entwickelt wurde, das nun einmal von altersher dem Menschen gewöhnlich nicht vornehm genug erscheint; doch mag sie demungeachtet in der allgemeinen Wertschätzung etwas gehoben worden sein dadurch, dass auch die Astronomie ohne sie nicht auskommen kann, und die hat, wiewohl der Geodäsie verwandt, doch im Gegensatz zu ihr immer für eine der vornehmsten Disziplinen gegolten. – Sie sehen bereits aus diesen wenigen Bemerkungen, dass der griechische Wissenschaftsbetrieb mit seiner strengen Scheidung der einzelnen Gebiete, deren jedes dann in dem bekannten starren logischen Gefügl dargestellt wurde, ganz der Entwicklungsreihe A angehört. Trotzdem waren den Griechen auch Betrachtungen im Sinne von B nicht fremd, und sie mö-

gen bei ihnen zu heuristischen Zwecken und zur ersten Mitteilung ihrer Entdeckungen ihre grosse Rolle gespielt haben, wenn ihnen auch für die endgültige Darstellung die Form ot wieder unentbehrlich zu sein schien; das zeigt ganz besonders die kürzlich entdeckte Schrift des Archimedes,[1] in der dieser seine Körperberechnungen in durchaus modern anmutender Weise darlegt.

Neben den Griechen spielen im Altertum mathematisch besonders noch die Inder als Schöpfer unseres modernen Ziffernsystems und später die Araber als seine Überlieferer eine Rolle; auch die ersten Anfänge des Buchstabenrechnens finden sich bei ihnen. Diese Fortschritte gehören offenbar der algorithmischen Entwicklungsreihe C an. –

Gehen wir nun bald zur Neuzeit über, so können wir zunächst von etwa 1500 an die mathematische Renaissance datieren, die eine ganze Reihe grosser Entdeckungen hervorgebracht hat. Ich nenne als Beispiel die formale Auflösung der kubischen Gleichung; (Cardanische Formel), die in der 1545 in Nürnberg erschienenen „Ars magna" des Cardano enthalten ist, einem höchst bedeutsamen Werke, das überhaupt die Keime der

[1] vgl. Heiberg und Zeuthen, eine neue Schrift des Archimedes (Leipzig 1907; Sonderabdruck aus Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. VIII).

modernen, über das Schema der antiken Mathematik hinausführenden Algebra enthält; freilich ist das wohl nicht Cardanos persönliches Verdienst, denn er soll seine berühmte Formel ebenso wie anderes nicht selbst erfunden, sondern anderen Autoren entlehnt haben.

Von 1550 an steht dann das trigonometrische Rechnen im Vordergrund; getragen durch die Bedürfnisse der Astronomie, für die ich nur den Namen Kopernikus nennen will, erscheinen die ersten grossen trigonometrischen Tafelwerke. Von etwa 1600 an schliesst sich hieran unmittelbar die Entwicklung der Logarithmen; die ersten Logarithmentafeln, die der Schotte Napier (oder Neper) aufstellte (1614), enthalten geradezu nur die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen. Wir sehen in diesen 100 Jahren also genau den Entwicklungsgang, wie er dem Schema A entspricht. –

Wir kommen nun zu der eigentlichen Neuzeit, dem weiteren Verlaufe des siebzehnten Jahrhunderts. Hier tritt durchaus die Richtung B in den Vordergrund. 1637 erscheint die analytische Geometrie des Descartes, die die für alles folgende grundlegende Verbindung zwischen Zahl und Raum schafft; dies Werk ist im Neudruck [1] bequem zugänglich. Im Anschluss hieran treten sogleich

1) R. Descartes, la géométrie. Nouv. éd., Paris 1886.

die 2 grossen Probleme des 17ten Jahrhunderts, das Tangentenproblem und das Quadraturproblem, das sind die Probleme des Differenzierens und Integrierens, auf. Zur Entwicklung der eigentlichen Differential- und Integralrechnung fehlt von hier nur noch die Erkenntnis, dass beide Probleme ganz nahe zusammenhängen, dass das eine die Umkehrung des andern ist; das scheint der Kern der grossen Fortschrittes zu sein, der am Ende des Jahrhunderts gemacht wurde.

Vorher aber, im Laufe des Jahrhunderts, entsteht noch die Lehre von den unendlichen Reihen, insbesondere den Potenzreihen, und zwar nicht etwa als selbständige Disziplin im Sinne der heutigen algebraischen Analysis, sondern in engsten Verbindung mit dem Quadraturproblem. Nicolaus Mercator (Latinisierung der deutschen Namens Kaufmann; ca. 1620–1687), der übrigens nicht mit dem etwa 100 Jahre älteren Erfinder der Mercatorprojektion identisch ist, hat hier Bahn gebrochen; er hatte die kühne Idee, zur Reihenentwicklung von $\log(1+x)$ den Bruch $\frac{1}{1+x}$ auszudividieren, und die entstehende Reihe gliedweise zu integrieren:

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1-x+x^2-+\dots)\,dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -+ \dots$$

Das ist genau der Inhalt seiner Überlegung, wenn er auch natürlich nicht unsere einfachen Zeichen $\int$, dx, … benutzte, sondern eine schwerfälligere Sprache redete. Dieses

Prozesses bemächtigte sich bald von 1660 an J. Newton (1642–1726), der sich die Reihe für das allgemeine Binom gebildet hatte; gewiß verfuhr er dabei nur nach Analogieschlüssen aus den bekannten einfachsten Fällen, ohne einen strengen Beweis zu besitzen und ohne auch nur die Grenzen der Gültigkeit dieser Reihenentwicklung zu kennen – was wiederum ein Eingreifen des algorithmischen Moments C darstellt. Indem er diese Reihe auf $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$ anwendet, erhält er nach dem Mercatorschen Verfahren die Reihe für $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$. Durch sehr geschickte Umkehrung dieser Reihe sowie der für $\log x$ findet er dann auch die Reihen für $\sin x$ und e^x. Als Abschluß dieser Kette von Entdeckungen ist endlich Brook Taylor (1685–1731) zu nennen, der 1714 sein allgemeines Prinzip für die Potenzreihenentwicklung von Funktionen findet.

Das Entstehen der eigentlichen Infinitesimalrechnung am Ende des 17. Jahrhunderts, auf das schon kurz hingewiesen wurde, ist bekanntlich G. W. Leibniz (1646–1716) und Newton zu danken. Bei Newton ist die grundlegende Idee die Vorstellung des Fließens; beide Variable x, y werden als Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ der Zeit t aufgefaßt, und während die Zeit dahinfließt, „fließen" sie gleichfalls ständig. Demgemäß

heißt die Variable bei Newton geradezu fluens, und was wir Differentialquotient nennen, bezeichnet er als Fluxion $\dot{x}, \dot{y}$. Sie sehen, wie hier alles durchaus auf Anschauung begründet ist.

Ähnliches gilt für die Darstellung von Leibniz, dessen erste Publikation 1684 erschien. Er bezeichnet selbst geradezu als seine größte Entdeckung das Prinzip der Stetigkeit in allem Naturgeschehen, den Satz: „Natura non facit saltum"; auf diese Auffassung stützt er seine mathematischen Entwicklungen, wiederum ein für das System B typischer Zug. Übrigens spielt daneben bei Leibniz sehr stark der Einfluß des Algorithmus (C) hinein; von ihm rühren die algorithmisch so wertvollen Bezeichnungen dx und $\int f(x)\,dx$ her.

Im Ganzen aber ergibt sich als Resultat dieses Überblickes, daß die großen Entdeckungen des 17. Jahrhunderts vorwiegend der Entwicklungsreihe B angehören. –

Im 18. Jahrhundert nimmt diese Entdeckungsperiode zunächst in derselben Richtung ihren Fortgang; als glänzendste Namen sind da L. Euler (1707–1783) und J. L. Lagrange (1736–1813) zu nennen. Es entwickeln sich so, um es nur ganz kurz zu nennen, die Lehre von den Differentialgleichungen im allgemeinsten Sinne, einschl. der Variationsrechnung, sowie der Ausbau der analytischen Geometrie und der analytischen Mechanik. Überall haben wir hier ein erfreuliches Fortschreiten, ganz wie in der Geographie nach der Entdeckung Amerikas die neuen Länder zuerst einmal nach allen Richtungen erforscht und durchquert wurden. Aber genau wie hier von exakten Vermessungen noch lange nicht die Rede war, wie man in der allerersten Zeit sogar über die allgemeine Lage des neuen Erdteils ganz falsche Vorstellungen hatte (glaubte doch Columbus zuerst, den Osten Asiens gefunden zu haben!), so war man auch in jenen der Mathematik im Erdteil der Infinitesimalkalkuls neu eroberten Gebieten zunächst von einer zuverlässigen logischen Orientierung noch recht weit entfernt; ja sogar über ihre Beziehungen zu den alten wohlbekannten Disziplinen gab man sich mitunter Täuschungen hin, indem man die Infinitesimalrechnung für etwas Mystisches hielt, das überhaupt keine genaue logische Analyse gestattete.

Auf wie schwankenden Boden man hier stand, das ward erst recht deutlich, als man in Lehrbüchern die neuen Gebiete allgemeinverständlich darstellen wollte; da zeigte sich denn bald, daß die bisher allein herrschende Forschungsrichtung B hier nicht mehr weiter helfen konnte, und Euler war es, der sie zuerst verließ. Er

hatte wohl zwar noch keine eigentlichen inneren Bedenken gegen die Infinitesimalrechnung, aber sie macht doch seiner Meinung nach dem Anfänger zu viele Schwierigkeiten und Skrupel; aus diesem paedagogischen Grunde hält er es für ratsam, ihr in einem besonderen Lehrbuche, seiner „Introductio in analysin infinitorum" von 1748, diejenige Disziplin voranzustellen, die wir heute algebraische Analysis nennen; dahin verweist er insbesondere die Lehre von den unendlichen Reihen und sonstigen unendlichen Prozessen, die er dann hinterher beim Aufbau der Infinitesimalrechnung als Fundament benutzt.

Einen viel radikaleren Weg schlägt fast 50 Jahre später Lagrange in seiner „Théorie des fonctions analytiques" von 1797 ein; er kann seine Skrupel über die bisherige Begründung der Infinitesimalrechnung nur dadurch beseitigen, daß er sie als allgemeine Disziplin ganz verwirft und sie lediglich als Inbegriff formaler Regeln über gewisse spezielle Funktionen bestehen läßt. Er betrachtet nämlich ausschließlich solche Funktionen, die durch Potenzreihen gegeben sind:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

und diese nennt er analytische Funktionen, soll heißen Funktionen, die in der Analysis vorkommen und mit denen man da wirklich etwas anfangen kann. Der Differentialquotient einer solchen $f(x)$ wird dann rein formal durch eine zweite Potenzreihe definiert, wie wir später genau sehen werden, und mit dem gegenseitigen Zusammenhang solcher Potenzreihen hat sich die Differential- und Integralrechnung zu beschäftigen. Durch diese Beschränkung auf formale Betrachtungen wurde für die damalige Zeit freilich eine Reihe von Schwierigkeiten beseitigt.

Man sieht, daß dies Vorgehen von Euler und Lagrange wieder ganz der Richtung A angehört, indem er die anschauliche genetische Entwicklung durch einen streng in sich abgeschlossenen Gedankenkreis ersetzt. Diese beiden Werke haben nun auf den Schulunterricht den größten Einfluß gehabt, und wenn die Schule heute unendliche Reihen behandelt, oder durch Potenzentwicklung nach der sog. Methode der unbestimmten Koeffizienten Gleichungen löst, die Aufnahme der eigentlichen Differential- und Integralrechnung aber ablehnt, so steht sie noch ganz unter der Nachwirkung von Euler und Lagrange. –

Das 19. Jahrhundert, zu dem wir jetzt endlich kommen, beginnt ganz wesentlich mit einer festen Begründung der höheren Analysis durch Konvergenzkriterien, um die man sich vorher noch nicht gekümmert

hatte; im 18. Jahrhundert herrscht da noch der paradiesische Zustand, wo man gut und böse, konvergent und divergent nicht unterschied, und selbst in Eulers Introductio kommen konvergente und divergente Reihen friedlich nebeneinander vor. Aber bald am Anfang des neuen Jahrhunderts geben Gauß (1777 - 1855) und Abel (1802 - 1829) die ersten scharfen Konvergenzuntersuchungen, und Cauchy (1789 - 1857) entwickelt in Vorlesungen und Büchern in den zwanziger Jahren die erste exakte Begründung der Infinitesimalrechnung im modernen Sinne. Er gibt nicht nur die scharfe Definition des Differentialquotienten und Integrales als Grenzwert endlicher Quotienten bezw. Summen, wie man dies vorher auch gelegentlich schon getan hatte, sondern er baut auf ihr unter Hervorhebung des Mittelwertsatzes zum ersten Male ein konsequentes Lehrgebäude der Infinitesimalrechnung auf; wir werden später noch ausführlich darauf zurückkommen. – Diese Theorieen liegen wohl gleichfalls im Sinne von A, da sie das Gebiet systematisch logisch, isoliert von anderen durcharbeiten; sie haben indessen auf die Schule keinen Einfluß mehr gewonnen, obgleich sie durchaus geeignet sind, die alten Vorurteile gegen die Differential- und Integralrechnung zu zerstören.

Aus der weiteren Entwicklung des 19. Jahrhunderts will ich nur ganz weniges hervorheben; zunächst nenne ich einige in der Richtung B liegende Fortschritte: Neuere Geometrie, mathematische Physik sowie Funktionentheorie komplexer Veränderlicher nach Cauchy und Riemann. Die Führer bei der Entstehung dieser 3 großen Gebiete waren zunächst die Franzosen. Es ist hier der Ort, auch über den Stil der mathematischen Darstellung ein Wort zu sagen. Bei Euklid finden Sie alles nach dem Schema „Voraussetzung, Behauptung, Beweis" gegliedert, wozu eventuell noch die „Determination" (Abgrenzung des Gebietes, innerhalb dessen die Betrachtungen gelten) tritt; in weiten Kreisen können Sie die Meinung finden, daß die Mathematik sich immer in diesem Vierschritt bewegt. Aber gerade in der Periode, von der wir soeben reden, bildet sich besonders bei den Franzosen eine neue Kunstform der mathematischen Darstellung aus, die man als künstlerisch gegliederte Deduktion bezeichnen kann; Werke von Monge oder, um ein neueres Buch zu nennen, der „Traité d'analyse" von Picard lesen sich geradezu wie ein gut geschriebener, spannender Roman. Das ist der der Manier B angepaßte Stil, während die Euklidsche Darstellung der Manier A durchaus wesensverwandt ist.

Von Deutschen, die auf den genannten Gebieten Großes leisteten, nenne ich noch Jacobi (1804 – 1851) und Riemann (1826 – 1866) und füge aus neuerer Zeit Clebsch (1833 – 1872) und den Norweger Lie (1842 – 1899) hinzu. Sie alle gehören wesentlich der Richtung B an, nur ist gelegentlich ein algorithmischer Einschlag bei ihnen bemerkbar.

Mit Weierstraß (1815 – 1897) tritt von 1860 an, wo er seine Vorlesungen in Berlin beginnt, die Denkweise A wieder mehr in den Vordergrund; die Weierstraßsche Funktionentheorie habe ich ja schon unter A aufgeführt. In gleicher Weise gehören die neueren Untersuchungen über Axiome der Geometrie dem Typus A an; es handelt sich hier um Untersuchungen ganz in Euklidscher Manier, die sich ihr auch in der Art der Darstellung wieder etwas nähern. –

Wir beenden damit diese kurze historische Übersicht; manches, was ich hier nur kurz andeutete, werden wir späterhin noch ausführlicher zu besprechen haben. Als Ergebnis dürfen wir jedenfalls die Erkenntnis mitnehmen, daß in den Jahrhunderten mathematischer Geschichte unsere beiden hauptsächlichen Forschungsrichtungen gleichmäßig zur Geltung kommen, daß eine jede von ihnen, und manchmal gerade ihre Aufeinanderfolge die großen Fortschritte der Wissenschaft zu Stande bringt. Die Mathematik wird sich also nur dann gleichmäßig nach allen Seiten hin fortentwickeln können, wenn keine der beiden Arten der Untersuchungen vernachlässigt wird; möge jeder Mathematiker in der ihm zusagenden Richtung arbeiten!

Der Schulunterricht aber steht leider – ich deutete es bereits an – heute, wie schon seit langer Zeit unter einseitiger Herrschaft der Richtung A; eine jede Bewegung zur Reform des mathematischen Unterrichts muß also für eine stärkere Hervorhebung der Richtung B eintreten. Dabei denke ich vor allem an das Durchdringen der genetischen Unterrichtsmethode, an eine stärkere Betonung der Raumanschauung als solcher und besonders an die Voranstellung des Funktionsbegriffs unter Fusion der Raum- und Zahlvorstellung! In den Dienst dieser Tendenz stelle ich auch die gegenwärtige Vorlesung, und das um so mehr, als in den elementarmathematischen Werken, die wir sonst immer zu Rate ziehen, in Weber-Wellstein, Tropfke, M. Simon, fast ausschließlich die Richtung A vertreten ist; ich hatte dieses Gegensatzes ja auch bereits in der Einleitung der Vorlesung gedacht.

Und nun, meine Herren, genug von diesen

Zwischenbetrachtungen; lassen Sie uns zum nächsten großen Abschnitt der Vorlesung übergehen!
