C. Autographierte Vorlesungshefte.

[Math. Annalen Bd. 45 (1894).]

Riemannsche Flächen.

(Doppelvorlesung Winter 1891/92, Sommer 1892.)

Den Ausgangspunkt bildet hier selbstverständlich diejenige Auffassung der Riemannschen Theorie, welche ich seinerzeit in meiner Schrift über Riemann (Leipzig 1882) [vgl. die vorstehende Abh. XCIX] skizziert und bald darauf in Bd. 21 der Annalen [siehe die unten folgende Abh. CIII] noch weiter ausgeführt habe. Das Wesentliche ist, daß die Riemannsche Fläche (oder irgendein mit ihr äquivalenter Bereich) als *Definition* der zugehörigen Funktionen gilt. Ich brauche hierauf an gegenwärtiger Stelle kaum zurückzukommen, nachdem einerseits meine Auffassungsweise in den von Herrn Fricke bearbeiteten Vorlesungen über Modulfunktionen ausführlich dargelegt ist, nachdem andererseits Herr Picard in seinem neuen Traité d'analyse einen entsprechenden Standpunkt eingenommen hat. Ebensowenig führe ich hier aus (was ebenfalls bereits in den „Modulfunktionen" zur Geltung kommt), daß mit der genannten Auffassung zugleich eine neue Grundlage für die Darstellung der algebraischen Funktionen in homogener Form gegeben ist[1]). Ich habe im Anschluß daran in meiner Vorlesung u. a. eine homogene Formulierung der Theorie der zu einer gegebenen Riemannschen Fläche gehörigen *Minimalflächen* gegeben, wobei sich diese Theorie sehr viel symmetrischer gestaltet als bei den sonstigen Darstellungen und systematisch in die übrigen Betrachtungen eingefügt erscheint.

An die hiermit bezeichneten Entwicklungen knüpft sich nun als zweiter Teil der Vorlesung eine *historische Übersicht über die Theorie der algebraischen Kurven*, — wobei es sich in erster Linie darum handelt, überall hervorzukehren, wie sich die einzelnen Begriffsbestimmungen und Sätze vom Standpunkte der Riemannschen Theorie aus darstellen. Ich brauche hier auf die einzelnen Momente der historischen Darstellung um so weniger

[1]) [Siehe zu allen diesen Punkten die Vorbemerkungen auf S. 479ff. Im übrigen verweise ich auf die ausführlichere Darstellung in der Autographie selbst. K.]

einzugehen, als ja ein ausführlicher Bericht über denselben Gegenstand von seiten der Herren Brill und Noether demnächst in den Berichten der deutschen mathematischen Gesellschaft publiziert werden soll[2]); dort werden zweifellos auch einzelne Ungenauigkeiten meiner Darstellung korrigiert sein. Andererseits überspringe ich alle diejenigen Formulierungen, welche bereits in den „Modulfunktionen" ihre Stelle gefunden haben. So mögen nur folgende Punkte genannt werden:

Eine jedenfalls wichtige Frage ist, wie man am einfachsten zu einer gegebenen ebenen algebraischen Kurve eine zugehörige Riemannsche Fläche konstruiert. Ich erinnere in dieser Hinsicht zunächst an das Verfahren, welches ich in Math. Annalen Bd. 7 und 10 gegeben habe (1874, 1876) [vgl. die Abh. XXXVII und XL in Bd. 2 dieser Ausgabe], wo ich den Ort der reellen Punkte der imaginären Kurventangenten als Riemannsche Fläche auffaßte („projektive Fläche"). Die verschiedenen Realitätstheoreme, welche man für die Singularitäten der ebenen algebraischen Kurven besitzt, erfahren von hier aus eine neue Beleuchtung. Ich gebe sodann eine zweite Konstruktion, die in analytischer Form schon bei früheren Autoren auftritt, aber hier wohl zum ersten Male geometrisch ausgeführt wird („metrische Fläche"). Einem imaginären Kurvenpunkte wird hier derjenige reelle Punkt der Ebene zugeordnet, der mit ihm und dem einen Kreispunkte der Ebene auf einer Geraden liegt. Dabei fallen die Verzweigungspunkte der Fläche in die Brennpunkte der Kurve. Es sind dies diejenigen Flächen, welche neuerdings Herr Loud einer eingehenden Betrachtung unterzogen hat (vgl. Annals of Mathematics, Bd. 8, 1893).

Eine weitere Frage ist die nach der Bedeutung der speziell kurventheoretischen Methoden, also des Noetherschen Fundamentalsatzes, des Restsatzes usw. für die Riemannsche Auffasung. Ich stelle hier mehr die Probleme, als daß ich sie erledige. Es handelt sich immer darum, die Theoreme, von der Formel abgelöst, nach ihrer funktionentheoretischen Bedeutung zu begreifen. Es würde mir wichtig scheinen, die verschiedenen hier nur angedeuteten Ansätze weiter auszuführen. Insbesondere ist meine Ansicht, daß überall da, wo die Moduln des algebraischen Gebildes in Betracht kommen, die Riemannsche Behandlung den Theoremen einen höheren Grad von Sicherheit verleiht. Man kann bei der üblichen algebraisch-geometrischen Behandlung fast bei jedem Schritte Einwürfe formulieren, dahingehend, daß notwendige Abhängigkeiten der zu kombinierenden Gleichungen vielleicht nicht erkannt sind. Es mag nicht schwierig sein, auf den einzelnen derartigen Einwurf zu antworten, etwa durch Diskussion

[2]) [Dies ist in Bd. 3 der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (1894) geschehen.]

eines numerischen Beispiels. Dagegen scheint es fast unmöglich und jedenfalls äußerst umständlich, dieses Verfahren bei längeren Beweisen, überall wo es nötig wäre, in Anwendung zu bringen. Ganz anders die Beweismethoden, welche an die Riemannschen Existenzsätze anknüpfen. Ihnen haftet nur, höchst bedauerlicherweise, eine andere Beschränkung an: sie sind bis auf weiteres nur auf eindimensionale algebraische Gebilde anwendbar und können noch in keiner Weise auf mehrdimensionale algebraische Gebilde ausgedehnt werden.

An dritter Stelle sei eines Beispiels gedacht, welches ich für die hiermit entwickelte Auffassung in der Theorie der Raumkurven gebe. Bei seinen interessanten Untersuchungen über die Brill-Noetherschen Spezialgruppen gebraucht Herr Castelnuovo gelegentlich die Annahme, es sei möglich, eine C_{m+p} des R_m vom Geschlechte p in eine rationale C_m desselben Raumes und p geradlinige Sekanten dieser C_m zerfallen zu lassen. Indem ich mir als Abbild der Raumkurve eine $(m+p)$-blättrige Riemannsche Fläche über der Ebene gegeben denke, vermag ich in der Tat den hier erforderlichen Beweis zu führen. Es handelt sich nur darum, die Fläche durch Verschiebung ihrer Verzweigungspunkte so ausarten zu lassen, daß sich p einfache Blätter von ihr abtrennen. Allerdings wird hier von dem Riemannschen Existenzsätzen in einer Weise Gebrauch gemacht, die in den explizite vorliegenden Beweisen desselben nicht vorgesehen ist. Das Problem ist, die Stetigkeit der durch eine Riemannsche Fläche definierten Funktionen bei stetiger Abänderung der Fläche zu beweisen. Ich hoffe, daß dieser Gegenstand binnen kurzem von anderer Seite seine Erledigung finden wird[3]).

Es folgt ein letzter Teil der Vorlesung. Ich kann mich hier wieder sehr kurz fassen, weil ich den Gegenstand später (Math. Annalen Bd. 42) in einer eigenen Abhandlung dargelegt habe. [Gemeint ist die Arbeit, welche bereits in Bd. 2 dieser Ausgabe als Nr. XLII abgedruckt ist.] Schon in meiner Schrift über Riemann hatte ich die Theorie der Kurvengestalten an die Theorie der „symmetrischen“ Riemannschen Flächen angeknüpft. Dies habe ich nun hier nach verschiedenen Richtungen ausgeführt und insbesondere durch Diskussion der Perioden der zugehörigen Abelschen Integrale eine Menge von Theoremen über die Realität von Berührungskurven usw. entwickelt.

Göttingen, im März 1894.

[3]) [Dies ist in den Arbeiten von Ritter in den Bänden 45 (1894) und 46 (1895) der Math. Annalen geschehen; insbesondere wird dort (auf S. 247—248 des Bandes 46) die Berechtigung meiner Auffassung des Verfahrens von Castelnuovo ausdrücklich bewiesen. K.]

Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen.

Die Benennung „automorphe Funktionen“ für diejenigen Funktionen (insbesondere die eindeutigen von einer Veränderlichen), welche bei gewissen linearen Substitutionen der unabhängigen Variablen ungeändert bleiben, wird im Texte der folgenden Nummern CI bis CV noch nicht gebraucht; sie ist erst 1890 in meiner Arbeit *Zur Theorie der allgemeinen Laméschen Funktionen*[1]) eingeführt worden, und seitdem wohl allgemein, auch international, angenommen[2]). Das einfachste Beispiel bilden selbstverständlich die einfach- oder doppelt-periodischen Funktionen; dann kommen die rationalen Funktionen, die aus der Theorie der regulären Körper erwachsen. Mit ihrer Betrachtung begann meine eigene Arbeit an der Theorie der automorphen Funktionen im Jahre 1874. Diese niederen Fälle sollen im Folgenden durchweg beiseite bleiben; die Geschichte der periodischen und doppeltperiodischen Funktionen ist ja an sich hinreichend bekannt, und außerdem finden sich zahlreiche Angaben darüber im ersten Abschnitte des vorliegenden Bandes, während über die algebraischen Fälle der zweite Abschnitt des zweiten Bandes dieser Gesamtausgabe zusammenhängend Auskunft gibt. Im folgenden wird daher nur von den höheren transzendenten Fällen die Rede sein. Die geschichtliche Entwicklung ihrer Theorie bis zum Jahre 1912 und insbesondere die Vorgeschichte sind auf Grund des damals gedruckt vorliegenden Materials sehr zuverlässig von R. Fricke in seinem Artikel in der Enzyklopädie der Math. Wissenschaften (II B 4) dargestellt. Wenn ich an gegenwärtiger Stelle darauf zurückkomme, so geschieht es einmal, weil inzwischen einige neue Quellen erschlossen sind, dann aber, weil ich auch den subjektiven Zusammenhängen, so wie sie mir entgegengetreten sind, Ausdruck geben möchte. Zugleich gibt dies die beste Einleitung zu der Korrespondenz zwischen H. Poincaré und mir in den entscheidenden Jahren 1881 und 1882, die weiterhin folgt und selbst als ein Beitrag zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen gelten mag. Dafür werden hernach die historischen Exkurse und persönlichen Bemerkungen, die seinerzeit an verschiedenen Stellen dem Texte der Abhandlungen in Fußnoten beigegeben waren, bei dem gegenwärtigen Wiederabdruck fortbleiben, bzw. durch Rückverweise auf diese Vorbemerkungen hier und den genannten Briefwechsel ersetzt werden.

Daß Gauss und Riemann die Figuren der Dreiecksfunktionen und speziell der Modulfunktion $\varkappa^2(\omega)$ bereits gekannt haben, ist schon in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 256, erwähnt. Hinzugefügt sei, daß Riemann den handschriftlichen Nachlaß von Gauss und also vermutlich die Figuren, welche R. Fricke aus demselben in Bd. 8 von Gauss' Werken (S. 103—105) zusammengestellt hat, kannte, als er 1858/59 die berühmte Vorlesung hielt, über welche die von Noether und Wirtinger herausgegebenen Nachträge zu Riemanns Ges. math. Werken (siehe daselbst S. 69–94) Auskunft geben. In einem gewissen Maße sagt Riemann es selbst in der Einleitung seiner Abhandlung über die P-Funktion (Ges. math. Werke, Nr. IV, 1. Aufl., S. 62 ff., 2. Aufl. S. 67 ff.), worauf

[1]) Siehe Göttinger Nachrichten vom Jahre 1890, S. 94 = Abh. LXIV in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 549.

[2]) Auch die Benennung *Stigma* für einen Verzweigungspunkt *relativ* zu einer (ein- oder mehrblättrigen, ebenen oder auch frei im Raume gelegenen) Riemannschen Fläche kommt in den folgenden Abhandlungen noch nicht vor; an welcher Stelle sie zum ersten Male steht, kann ich nicht angeben, sie empfiehlt sich aber durch ihre Prägnanz.

mich in freundlicher Weise Herr Schlesinger aufmerksam machte. Außerdem ist aus dem Bericht Scherings über den 3. Band von Gauss' Werken[3]) und dem heftigen Angriffe K. Hattendorffs gegen denselben[4]) bekannt, daß Riemann ursprünglich im Auftrage der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften die Herausgabe von Gauss' Untersuchungen über elliptische Funktionen übernommen hatte, und daß Schering erst nachträglich an seine Stelle trat (wobei in Bd. 3 der Gaussausgabe dann freilich die Figuren, welche die zu $\varkappa^2(\omega)$ gehörigen Doppeldreiecke vorstellen, in unkenntlicher Form wiedergegeben sind). Man wird also die betreffenden, ursprünglich jedenfalls von der Reduktionstheorie der binären quadratischen Formen ausgehenden, Gaussischen Ergebnisse nicht bloß als eine historisch merkwürdige Tatsache, sondern als eine Quelle von nachwirkender Kraft anerkennen müssen.

Aber auch Riemanns Forschungen sind nicht bloß hinterher bekannt geworden. Nicht nur waren Exemplare der Nachschriften seiner Vorlesungen, wie wir sie jetzt auf der Göttinger Universitätsbibliothek besitzen, im engeren Kreise seiner Schüler verbreitet, sondern es kann kein Zweifel sein, daß Riemann 1858/59 bei Gelegenheit einer ausführlichen Bezugnahme mit Weierstrass mit diesem über seine einschlägigen Untersuchungen gesprochen hat. Wir wissen, daß Weierstrass in einer im Sommer 1863 über Abelsche Funktionen gehaltenen Vorlesung — vielleicht also auch schon in früheren Vorlesungen — von der Theorie der linearen Differentialgleichungen gehandelt hat, natürlich, seiner Grundauffassung entsprechend, von der explizite hingeschriebenen Differentialgleichung beginnend; er hat sich fernerhin auch mannigfach mit der konformen Abbildung geradlinig und kreisförmig begrenzter Polygone auf die Halbebene beschäftigt und mit beiden Untersuchungsrichtungen jüngere Forscher angeregt, nämlich Fuchs und Schwarz. Ich berufe mich auf die Äußerungen, welche die beiden in dieser Hinsicht in ihren ersten einschlägigen Veröffentlichungen niedergelegt haben[5]). Es wäre um so mehr wünschenswert, diese Zusammenhänge klarzustellen, als Fuchs und Schwarz auch späterhin, wie es scheint, keine eigentliche wissenschaftliche Fühlung miteinander hatten. Uns interessiert an dieser Stelle insbesondere, daß Schwarz in seiner großen Abhandlung über die hypergeometrische Reihe in Crelles Journal, Bd. 75 (1872/73) (= Ges. math. Abhandlungen, Bd. 2, S. 211—259) die Theorie der eindeutigen Dreiecksfunktionen mit kreisförmiger natürlicher Grenze entwickelte und damit die wesentlichste Eigenschaft der Modulfunktion $\varkappa^2(\omega)$ zu allgemeiner Kenntnis brachte, woran ich und andere dann später angeknüpft haben.

Übrigens hat Riemann ja auch die andere Art automorpher Funktionen, die entstehen, indem man einen von Vollkreisen begrenzten Bereich der Ebene an diesen Kreisen fortgesetzt symmetrisch reproduziert[6]). Die Prüfung der Originalblätter hat ergeben, daß Webers Mitteilungen den Vorbereitungen zu einer im Sommer 1858 gehaltenen Vorlesung entnommen sind. Und zwar geht Riemann dabei zunächst von der Aufgabe aus, für ein von mehreren Kugeln gebildetes Konduktorsystem das Gleichgewicht elektrostatischer Ladungen zu bestimmen. Hierfür war die Benutzung des Symmetrieprinzipes in den Arbeiten von W. Thomson vorgebildet, die als Briefe an Liouville in dessen Journal von 1845 an erschienen[7]). Also auch hier sind die mathematischen Entwicklungen aus physikalischen Anregungen erwachsen.

[3]) Math. Annalen, Bd. 1, S. 139/140 (datiert vom 6. Dezember 1868); abgedruckt in Bd. 1 der Ges. math. Werke von E. Schering als Nr. IX, S. 153/154.

[4]) „*Die elliptischen Funktionen in dem Nachlasse von Gauss. Ein Beitrag zu einem Schreib- und Druckfehler-Verzeichnisse.*" (Hannover, bei Schmorl und von Seefeld 1869).

[5]) Siehe z. B. Ges. math. Werke von L. Fuchs, Bd. 1, S. 111/112, 159/160 und Ges. math. Abhandlungen von H. A. Schwarz, Bd. 2, S. 65, 76/77, 80.

[6]) Siehe das von H. Weber bearbeitete Fragment XXV in der ersten (1876 erschienenen) bzw. XXVI in der zweiten (1892 erschienenen) Auflage der Ges. math. Werke von Riemann.

[7]) Diese sind in dem Buche „*Reprint of papers on electrostatics and magnetism*" by Sir William Thomson als Nr. XIV auf S. 144 ff. abgedruckt.

Auf dieselben Funktionen ist dann unabhängig in seiner Berliner Dissertation 1875 Herr Schottky gekommen. Von seinem physikalischen Ausgangspunkte ist schon oben auf S. 573, die Rede gewesen. Im übrigen sind die Schicksale der Schottkyschen Arbeit, wie sie sich nach persönlicher Mitteilung des Verfassers ergeben, so merkwürdig, daß ich gern die Gelegenheit ergreife, sie hier mitzuteilen. Es erfolgten nach einander drei verschiedene Redaktionen:

a) Eine lateinische Fassung, die nicht publiziert ist, sondern nur der Philosophischen Fakultät in Berlin vorgelegen hat,

b) Eine deutsche Bearbeitung, welche 1875 in Berlin als Dissertation gedruckt wurde,

c) Die umgearbeitete Darstellung in Crelles Journal, Bd. 83 (1877).

Bei Niederschrift von a) hat der Verfasser noch keine Fühlung mit Weierstrass gehabt, dafür aber ganz seiner freien Ideenbildung folgen können. Aus dem Gutachten, daß Weierstrass über a) seinerzeit für die Fakultät abgegeben hat und von dem ich durch die Freundlichkeit von Herrn Schottky eine Abschrift vor Augen habe, scheint mit Gewißheit hervorzugehen, daß Schottky hier, freilich nur auf Grund einer Konstantenzählung, das „Rückkehrschnitttheorem"[8]) für den besonderen, von ihm betrachteten Fall ausgesprochen hat, d. h. die Möglichkeit, einen von $p+1$ regulären Randkurven begrenzten ebenen Bereich auf einen von $p+1$ Vollkreisen begrenzten Bereich konform abzubilden (also das Rückkehrschnitttheorem für den obersten orthosymmetrischen Fall, wie ich mich ausdrücke).

Die Redaktion b) ist dann durch eine erste Fühlungnahme mit Weierstrass bedingt. Bei der umfassenden Beherrschung ausgedehnter Teile der Mathematik und seiner stark ausgeprägten Persönlichkeit, die sich zu bestimmten Beweisgängen durchgearbeitet hatte, übte Weierstrass auf jüngere Forscher je nachdem einen außerordentlich fördernden, oder auch, wo ihm die Gedankengänge fremdartig waren, einen hemmenden Einfluß. Ich könnte in diesem Zusammenhange auf Weierstrass' Stellungnahme zu meinen ersten Ideen über die Verwandtschaft zwischen Cayleyscher Maßbestimmung und Nicht-Euklidischer Geometrie zurückverweisen (vgl. Bd. 1 dieser Ausgabe, S. 51). Schottky scheint ähnliche Erfahrungen gemacht zu haben, so daß er in b) sich bloß auf die Konstantenzählung beschränkt, ohne ihre Tragweite für das Fundamentaltheorem anzudeuten (siehe S. 55—56 in b).) Die physikalische Ideenbildung aber, von der doch der Autor ausgegangen war, wird gänzlich ausgeschaltet und durch Zitate auf die das Existenzproblem der konformen Abbildungen betreffenden Arbeiten von Schwarz ersetzt.

In c) endlich ist auch noch besagte Konstantenzählung weggeblieben.[9]) Statt dessen finden sich wertvolle, vorher nicht publizierte, Angaben über die verschiedenen Normalformen, die Weierstrass bei den Gebilden $p > 2$ unterschied; bei $p = 3$ trennt sich neben dem hyperelliptischen Falle noch ein weiterer von dem allgemeinen Falle ab[10]). Vielleicht liegt hier die Quelle des Mißtrauens, welches Weierstrass gegen das Fundamentaltheorem schon in dem einfachsten hier vorliegenden Falle hatte. Die

[8]) Der Ausdruck ist unten in Nr. CI, S. 623 erklärt.

[9]) Dagegen hat Schottky in c) (S. 330 daselbst), wiederum auf Grund bloßer Konstantenzählung, den Satz ausgesprochen, daß sich jedes ebene, von $p+1$ Randkurven begrenzte, Gebiet umkehrbar eindeutig konform auf die Vollebene mit Ausnahme von $p+1$ geradlinigen, zur x-Achse parallelen Strecken abbilden läßt. Bereiche der letzteren Art spielen in der modernen Literatur unter dem Namen *Schlitzbereiche* bekanntlich eine wichtige Rolle.

[10]) Über die Weierstrassischen Normalformen vergleiche man neben der genannten Stelle die gleichfalls von Schottky nach einer Vorlesung von Weierstrass ausgearbeitete Note *Über Normalformen algebraischer Gebilde* in Bd. 3 der Math. Werke von Weierstrass, S. 297 ff.; ferner die Angaben von Brill und Noether in ihrem *Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit*, Jahresber. der Deutschen Mathem. Vereinigung, Bd. 3 (1894), S. 431 ff.

Wurzel des Fundamentaltheorems ist der Satz, den ich in meiner Schrift über Riemann (Abh. XCIX, S. 558—559) angab, daß die sämtlichen Gebilde desselben p ein Kontinuum bilden. Hiergegen hat Schwarz in einem ersten an mich gerichteten Briefe (vom 1. Februar 1882) lebhaft protestiert. Er vertritt dort die Auffassung, daß die genannten Gebilde, entsprechend den verschiedenen von Weierstrass aufgestellten Normalformen, in ebenso viele getrennte Scharen zerfallen. Ob dies Weierstrass' eigene Auffassung gewesen ist, bleibt nach dem Wortlaut des Briefes unklar, scheint aber nicht unwahrscheinlich. Jedenfalls hat Schwarz damals die Fallunterscheidungen, die doch nur aus der Voranstellung bestimmter Anforderungen an die Gestalt der verschiedenen Normalgleichungen erwachsen, als etwas Absolutes genommen. — Übrigens finden sich bei Schottky auch Fälle, wo die begrenzenden Vollkreise durch Kreisbogenpolygone ersetzt sind; es wird dann untersucht, wie sich die konforme Abbildung eines solchen Bereiches auf die Hälfte einer orthosymmetrischen Riemannschen Fläche mit $p+1$ Symmetrielinien gestaltet.

Nun setzt 1877 die moderne Entwicklung der Lehre von den elliptischen Modulfunktionen ein. Gleich am 4. Februar wurde bei der Academia dei Lincei die tief eindringende Arbeit von H. J. St. Smith vorgelegt, von der im ersten Abschnitte des vorliegenden Bandes mehrfach die Rede gewesen ist[11]); sie war schon, wie der Verfasser mitteilt, 1874 der Pariser Akademie, aber offenbar vergeblich, unterbreitet worden. Übrigens findet sich die wichtige Angabe, daß $\varkappa^2(\omega)$, $\varkappa(\omega)$, $\sqrt{\varkappa(\omega)}$, $\sqrt[4]{\varkappa(\omega)}$, um in meiner in Nr. LXXXVII, S. 171 des vorliegenden Bandes eingeführten Sprechweise zu reden, Hauptmoduln der zu ihnen gehörigen Gruppen von ω-Substitutionen sind, bereits in dem sechsten zahlentheoretischen Bericht von H. J. St. Smith vom Jahre 1865[12]). — Meine eigenen einschlägigen Veröffentlichungen beginnen mit dem oben unter Nr. LXXXI abgedruckten Briefe an Brioschi. Etwa um dieselbe Zeit erschien in Crelles Journal, Bd. 83, ein vom November 1876 datierter Brief von Fuchs an Hermite unter dem Titel: *Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques des deux premières espèces.* (Abgedruckt als Nr. XXIV in Bd. 2 der Ges. math. Werke von L. Fuchs.) Hier wird, um das Positive vorweg zu nehmen, zum ersten Male der Grund aufgedeckt, warum die Größe $\varkappa^2$ als Funktion des Verhältnisses η zweier Perioden η_1 und η_2 eines elliptischen Integrales zweiter Gattung (in der Bezeichnung der „Modulfunktionen") betrachtet, eine unendlich vieldeutige Funktion wird, während sie doch als Funktion des Verhältnisses ω zweier Perioden eines Integrales erster Gattung eindeutig ist[13]). Was aber die Behandlung der Modulfunktion $\varkappa^2(\omega)$ betrifft, so muß ich an der von mir einst geäußerten Ansicht festhalten, daß der Verfasser den Gegenstand nicht eigentlich gefördert hat, weil er nicht bis zur Erfassung der Dreiecke der ω-Ebene, die der Halbebene des $\varkappa^2$ entsprechen, vorgedrungen ist, und sich bei der Behandlung der natürlichen Grenze, welche durch die reelle Achse der ω-Ebene gebildet wird, einer ungenauen Ausdrucksweise bedient hat. Trotzdem hat dieser Brief nach verschiedenen Seiten eine Wirkung ausgeübt: Er hat das Interesse der heranwachsenden französischen Forscher E. Picard und H. Poincaré auf das Problem der Modulfunktionen, welches lange in Frankreich geruht hatte, zurückgelenkt; er hat überdies Dedekind auf den Plan gerufen und

[11]) Vgl. das Zitat in Fußnote [6]) auf S. 7 des vorliegenden Bandes.

[12]) Siehe Reports of the British Association for 1865, S. 322 ff.; abgedruckt als Nr. X in Bd. 1 der Collected mathematical papers of H. J. St. Smith, S. 289 ff. Vgl. daselbst besonders Artikel 125.

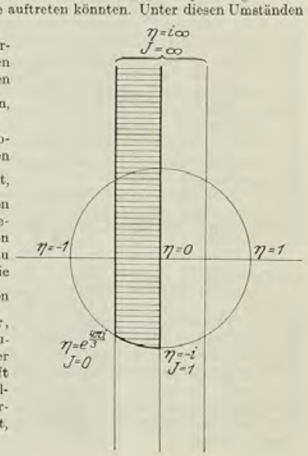
[13]) Es scheint nützlich, folgende Bemerkung hinzuzufügen, die ich in meinen Vorlesungen wiederholt gab, die aber, soviel ich weiß, in der gedruckten Literatur nirgends vorkommt. Das Periodenverhältnis des Integrals zweiter Gattung $\eta = \eta_1 : \eta_2 = -\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_2} : \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_1}$ bildet die obere Halbebene des J auf das nebenstehende

ihn zu dem ebenfalls in Crelles Journal, Bd. 83, abgedruckten, Anfang September 1877 erschienenen Schreiben an Borchardt veranlaßt, in welchem er den ihm lange bekannten Sachverhalt, wie er sich im Anschluß an Gauss und Riemann unter Voranstellung der zahlentheoretischen Gesichtspunkte darbietet, in klassisch durchsichtiger Form darlegte. — Wie sich dann hier meine eigenen Arbeiten über elliptische Modulfunktionen anschlossen und weiter entwickelten, ist im ersten Abschnitte des vorliegenden Bandes ausführlich zur Sprache gebracht. Von Resultaten soll an dieser Stelle nur die ausführliche Theorie der Fundamentalpolygone hervorgehoben werden, bei der das Zusammengehen gruppentheoretischer und funktionentheoretisch-geometrischer Überlegungen in allgemeinster Weise überzeugend hervortrat.

Es wird nicht überraschen, daß ich im Anschluß daran (explizite in der Einleitung zu meiner Vorlesung von Sommer 1879) an mein altes Problem erneut herantrat: *Alle diskontinuierlichen Gruppen einer Variablen, bzw. die zugehörigen automorphen Funktionen aufzustellen.* Bei meinen betreffenden Überlegungen habe ich, wie ich hier besonders betonen möchte, von Anfang an von den Vorstellungen der Nicht-Euklidischen Geometrie Gebrauch gemacht; und zwar geschah dies nicht nur in der Weise, daß ich in der Ebene einen Cayleyschen Fundamentalkegelschnitt benutzte (vgl. die Abh. XV, XVI (1871) in Bd. 1 dieser Ausgabe), sondern ich zog sogleich die Riemannsche $x+iy$-Kugel als Fundamentalfläche einer räumlichen Nicht-Euklidischen Maßbestimmung heran (vgl. Abh. LI (1875/76) in Bd. 2 dieser Ausgabe). Aber es stellten sich mir zwei Hinderungen entgegen, die ich offen angebe, weil es mir scheint, daß damit dem Fortschritt der Wissenschaft und der Erkenntnis der Irrungen, in die man gelegentlich hineingerät, am besten gedient ist:

a) Ich kannte damals die Riemann-Schottkyschen Untersuchungen noch nicht, welche automorphe Funktionen mit unendlich vielen zerstreut liegenden Punkten als Grenze des Definitionsbereiches ergeben hatten, glaubte vielmehr, daß die unendlich vielen Grenzpunkte notwendig eine Kurve erfüllen müßten, von der ich annahm, daß sie analytisch sei da ich überzeugt war, daß bei vernünftig analytisch gestellten Problemen keine nichtanalytischen Gebilde auftreten könnten. Unter diesen Umständen

Dreieck der η-Ebene ab. Der Beweis ergibt sich sofort, wenn man aus der linearen Differentialgleichung, der die normierten Perioden $H_1 = \frac{\eta_1}{\sqrt[12]{\Delta}}$, $H_2 = \frac{\eta_2}{\sqrt[12]{\Delta}}$ genügen, entnimmt, daß der Quotient η die Halbebene J auf ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ abbildet und beachtet, daß zufolge der Legendreschen Relation $\omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1 = 2\pi i$ bei Umläufen des J jeweils ω und η dieselbe lineare Substitution erleiden. Die Sache ist der Art nach genau die gleiche wie in der Ikosaedertheorie die Abbildung durch $-\frac{\partial f}{\partial \zeta_2} : \frac{\partial f}{\partial \zeta_1}$, vgl. die schon oft genannte Dissertation von O. Fischer, Leipzig (1885). — Hier ist es nun anschaulich klar, wie die η-Ebene bei symmetrischer Reproduktion der η-Dreiecke unendlich oft überdeckt wird, so daß $J(\eta)$ eine unendlich vieldeutige Funktion wird, deren Verhalten man, bei aller seiner Wunderlichkeit, vollkommen überblickt.



wurde es mir, auf Grund meiner Kenntnis der W-Kurven (vgl. Abh. XXVI in Bd. 1 dieser Ausgabe), nicht schwer, zu zeigen, daß diese Kurve ein Kreis sein müsse. So kam es, daß ich zunächst nur Gruppen mit Grenzkreis in Betracht zog.

b) Die Untersuchung der besonderen Resolventen siebenten und elften Grades (siehe oben Nr. LXXXIII, S. 82—85) hatte mich gelehrt, daß unter Umständen auch unsymmetrische Polygone durch symmetrische Wiederholung eines Ausgangsbereiches entstehen können. Ich habe mich nun damals vergeblich abgemüht, zu zeigen, daß man in ähnlicher Weise alle Gruppen mit Grenzkreis erhalten müsse, wenn man von der symmetrischen Reproduktion eines Kreisbogenpolygones ausgeht, dessen Seiten gegen den Grenzkreis normal sind und dessen Winkel aliquote Teile von π sind. Mir fehlte eben noch die Einsicht darein, wie sich die symmetrischen Riemannschen Gebilde in die Gesamtheit der übrigen einordnen; ich habe die bezügliche Sachlage erst 1881 in meiner Schrift über Riemann (Nr. XCIX in diesem Bande) klargestellt[14]).

Hierzu ist zu bemerken, daß das Mißverständnis a) in anderer Form auch bei H. Poincaré aufgetreten ist und ihn zunächst nur zur Aufstellung solcher automorpher Funktionen gelangen ließ, bei denen ein Hauptkreis festbleibt. Er hatte, wie er mir gelegentlich erzählte, kurzweg den Analogieschluß gemacht: Da bei den eindeutigen Funktionen der regulären Körper ein Punkt im Innern der $x+iy$-Kugel festbleibt, und bei den doppeltperiodischen Funktionen ein Punkt auf der Kugel, so wird dies bei den zu konstruierenden neuen automorphen Funktionen ein Punkt des Kugeläußeren sein, dessen Polarebene dann aus der $x+iy$-Kugel den festbleibenden Hauptkreis ausschneidet. Es hat mir in meiner Korrespondenz mit H. Poincaré (siehe unten meinen Brief 3 vom 19. Juni 1881, daselbst Punkt 7.) besonderes Vergnügen gemacht, H. Poincaré ein Gegenbeispiel vorzuführen, das ich mir aus den Schottkyschen Darlegungen, die ich inzwischen hatte kennen lernen, dadurch abgeleitet hatte, daß ich die Spiegelkreise, die Schottky getrennt liegend voraussetzt, aneinander rücken ließ, so daß ein ebenes Kreisbogenpolygon mit lauter Winkeln gleich Null entstand, dessen symmetrische Reproduktion in jedem Falle eindeutige automorphe Funktionen liefert, die aber, allgemein zu reden, eine nicht analytische Grenzkurve besitzen (vgl. unten Abh. CIII, Abschnitt III, § 15, S. 689/690). — Dagegen ist H. Poincaré dem entsprechenden Ansatze b) von vornherein entgangen, weil er nicht, wie wir in Deutschland, so viel mit dem Prinzip der Symmetrie gearbeitet hatte, sondern in naiver Weise den Fall der doppeltperiodischen Funktionen zu verallgemeinern suchte, deren Periodenparallelogramm sich doch auch nur dann aus symmetrischen Hälften aufbauen läßt, wenn es ein Rechteck oder ein Rhombus ist.

Offenbar hatte der junge H. Poincaré einen starken Anstoß von seinem Lehrer Hermite empfangen; in der Tat hat er mehrfach an dessen Arbeiten angeknüpft, ich nenne nur Hermites Untersuchungen über die verallgemeinerte Lamésche Differentialgleichung (von der in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 573/574, 594/595 die Rede gewesen ist), durch die in Frankreich das Interesse an der Lösung linearer Differentialgleichungen durch *eindeutige* Funktionen geweckt wurde, ferner Hermites Untersuchungen über die Reduktion der ganzzahligen indefiniten ternären quadratischen

[14]) In der Note vom 8. August 1881 in den Comptes rendus, Bd. 93, S. 301—303 (= Oeuvres de H. Poincaré, Bd. 2, S. 29—31) und in § 11 seiner großen Arbeit *Sur les groupes des équations linéaires*, Acta Mathematica, Bd. 4 (1883/84), S. 246 ff. (= Oeuvres, Bd. 2, S. 341 ff.) beweist H. Poincaré einen Satz, der auch darauf abzielt, die symmetrischen Gruppen vorzugsweise zu verwerten. Ist $y=f(x)$ eine algebraische Funktion von x, so führt er eine rationale Funktion $X=R(x)$ ein, in bezug auf die $y=F(X)$ nur reelle Verzweigungspunkte hat. Für die Gleichung $y=F(X)$ gelingt es dann leicht, eine uniformisierende Variable η vom Grenzkreistypus herzustellen, von der er dann zeigt, daß sie auch $y=f(x)$ uniformisiert. Jede algebraische Gleichung läßt sich also durch Untergruppen symmetrischer Gruppen uniformisieren; aber dies ist nicht die einfachste Uniformisierung, da überflüssige Stigmata eingeführt werden.

Formen, die Poincaré später mit der nichteuklidischen Geometrie und der Theorie der automorphen Funktionen in Verbindung brachte (womit er den Gedankenkreis meiner Arbeiten von 1871—1874 (vgl. Bd. 1 dieser Ausgabe, Abh. XV—XIX) aufgriff). Übrigens dürfte auch Hermite H. Poincarés Aufmerksamkeit auf die Arbeiten von Fuchs gelenkt haben, mit dem H. Poincaré sich bald in Verbindung setzte. Hierüber sind wir jetzt durch die Veröffentlichung seines Briefwechsels mit Fuchs in Bd. 38 der Acta Mathematica (1921) des näheren unterrichtet. Fuchs veröffentlichte 1880 in den Göttinger Nachrichten und in Crelles Journal zwei Abhandlungen mit dem gemeinsamen Titel: *Über eine Klasse von Funktionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten entstehen*[15]). Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Jacobischen Umkehrproblems, wobei übrigens nur einige wenige brauchbare Fälle übrig bleiben, welche relativ elementaren Charakter besitzen[16]). Aber zwischendurch kommt er beiläufig auf die Frage, wann der Quotient $y_1:y_2$ zweier Partikularlösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung eindeutig umkehrbar sein möchte. Er findet als notwendige Bedingung das nach dem Früheren nicht überraschende Resultat, daß die Abbildung bei geeigneter Zerschneidung der Ebene der unabhängigen Variablen nur Randwinkel enthalten dürfe, welche aliquote Teile von 2π sind. Diese Bedingung hält Fuchs a. a. O. auch für ausreichend. Ich habe in Bd. 21 der Math. Annalen (1882/83) (= der unten abgedruckten Abh. CIII) seinerzeit darauf aufmerksam gemacht, daß hier eine Verwechselung der eindeutigen Funktionen mit den unverzweigten Funktionen vorliegt; die beiden Funktionsarten decken sich keineswegs, sobald man Funktionen mit natürlichen Grenzen in Betracht zieht. Genau dieselbe Bemerkung macht H. Poincaré in seinem zweiten Brief an Fuchs vom 12. Juni 1880 und sucht nun nach Fällen, wo neben der Unverzweigtheit auch Eindeutigkeit besteht. (Vgl. übrigens auch die Briefe 17 und 18 des unten folgenden Briefwechsels zwischen H. Poincaré und mir.) H. Poincaré hatte damals von der gesamten deutschen vorangehenden Literatur keinerlei Kenntnis, wie sich des Näheren aus seiner sogleich abzudruckenden Korrespondenz mit mir ergibt. Aber die Bemerkung von Fuchs wirkte wie ein zündender Funke auf die latent in ihm vorhandene Produktivität. Indem er die Analogie der regulären Körper vor Augen hatte, findet er zunächst die transzendenten Fälle der eindeutigen Dreiecksfunktionen wieder (Brief an Fuchs vom 19. Juni 1880), also genau das, was uns von Schwarz her seit 1872 geläufig und übrigens schon Gauss und Riemann bekannt war. Diese Dreiecksfunktion nennt er „la fonction fuchsienne“. Aber schon im vierten Briefe vom 30. Juli 1880 setzt er an Stelle der Dreiecke geeignete Bereiche mit Hauptkreis und bildet den Pluralis „les fonctions fuchsiennes“. An dieser Personalbenennung hat er dann trotz meinem Einspruche nichts mehr ändern wollen, andererseits aber alle die anderen eindeutigen automorphen Funktionen, auf die ich ihn aufmerksam machte, „fonctions kleinéennes“ genannt. Ich denke wohl, daß ich das Richtige traf, indem ich den Gegenvorschlag machte, alle Personalbenennungen zu unterlassen und dafür die überragende Bedeutung von Riemann (und wie ich heute sagen würde, von Gauss) hervorhob. Die ganze Sachlage wird aus der nachfolgend abgedruckten Korrespondenz zwischen H. Poincaré und mir, neben die man die oben erwähnten Briefe aus Acta Mathematica, Bd. 38, halten möge, deutlich sein.

H. Poincaré hat in seiner Schrift „Science et méthode“ (Paris, Flammarion 1908, S. 50 ff.[17])) gelegentlich erzählt, wie er mitten in fremdartiger Umgebung zur ersten

[15]) Göttinger Nachrichten vom Jahre 1880, S. 170—176; Crelles Journal, Bd. 89 (1880), S. 151—169; abgedruckt als Nr. XXX bzw. XXXI in Bd. 2 der Ges. math. Werke von L. Fuchs. Vgl. daselbst auch die Abhandlungen Nr. XXXII bis XXXIVa.

[16]) Vgl. die von mir veranlaßte zusammenfassende Darstellung von Kempinski in Bd. 47 der Math. Annalen (1896).

[17]) Die uns interessierende Stelle ist abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. LVII—LVIII. — In der deutschen Übersetzung von F. und L. Lindemann (Leipzig 1914) steht sie auf S. 41—44.

Konzeption seiner allgemeinen „fonctions fuchsiennes“ gekommen ist. Dies hat insbesondere die Psychologen interessiert, weil es zeigt, wie die produktive Ideenbildung in dem dazu veranlagten Individuum unbewußt weiter arbeitet, um plötzlich, dem Nächstbeteiligten selbst überraschend, an das Tageslicht zu treten. Ich möchte demgegenüber nicht zurückbleiben und folgendes von mir berichten:

1. Das Theorem von Bd. 19 der Math. Annalen (Nr. CI unten), d. i. das allgemeine Rückkehrschnittheorem, habe ich in Borkum im September 1881, als ich an meiner Schrift über Riemann (Abh. XCIX) arbeitete, während eines Spazierganges gefunden, ohne daß ich eigentlich nach einem Satz in der Richtung gesucht hätte. Mein Beweis, der sich mir mit überzeugender Deutlichkeit aufdrängte, war der, daß ich in der Vorstellung irgendwelchen Abänderungen der Riemannschen Fläche bzw. ihres Querschnittsystems immer nachkommen konnte; er hatte also durchaus intuitiven, nicht recht in Worte zu fassenden Charakter. Das ist, was ich in Bd. 19 als irreguläre Methoden bezeichnet habe. Darum habe ich auch bis zum Januar 1882 gewartet, ehe ich das Theorem veröffentlichte. Im übrigen handelte es sich um die Grundlagen des Kontinuitätsbeweises, auf welchen ich unten auf S. 731 ff. zurückkomme.

2. Das Theorem in Bd. 20 der Math. Annalen (Nr. CII unten), d. i. das Grenzkreistheorem für Riemannsche Flächen mit $p > 0$ ohne Stigmata oder nur mit parabolischen Stigmaten, ist unter besonders erschwerenden Verhältnissen zustande gekommen. Ich habe mich in einer Vorlesung von 1916 darüber ungefähr folgendermaßen geäußert.

„Ostern 1882 war ich zur Erholung meiner Gesundheit an die Nordsee gereist und zwar nach Norderney. Ich wollte dort in Ruhe einen zweiten Teil meiner Schrift über Riemann schreiben, nämlich die Existenzbeweise für die algebraischen Funktionen auf gegebenen Riemannschen Flächen in neuer Form ausarbeiten. Ich habe es dort aber nur acht Tage lang ausgehalten, denn die Existenz war zu kümmerlich, da heftige Stürme jedes Ausgehen unmöglich machten und sich bei mir starkes Asthma einstellte. Ich beschloß, schleunigst in meine Heimat Düsseldorf überzusiedeln. In der letzten Nacht vom 22. zum 23. März, die ich wegen Asthmas auf dem Sofa sitzend zubrachte, stand plötzlich um $2^1/_2$ Uhr das Grenzkreistheorem, wie es durch die Figur des Vierzehnecks in Bd. 14 der Math. Annalen (die „Hauptfigur“ auf S. 126 in diesem Bande) ja eigentlich schon vorgebildet war, vor mir. Am folgenden Vormittag in dem Postwagen, der damals von Norden bis Emden fuhr, durchdachte ich das, was ich gefunden hatte, noch einmal bis in alle Einzelheiten. Jetzt wußte ich, daß ich ein großes Theorem hatte. In Düsseldorf angekommen, schrieb ich es gleich zusammen, datierte es vom 27. März, schickte es an Teubner und ließ Abzüge der Korrekturen an Poincaré und Schwarz und beispielsweise an Hurwitz gehen.“

Ich bringe diese Äußerung hier zum Abdruck, weil ich die Auffindung des genannten Theorems, die offenbar auch mit einer inneren Anstrengung verbunden gewesen ist, welche bis an die Grenzen der Leistungsfähigkeit reichte, immer als bestes Resultat meiner mathematischen Produktivität angesehen habe. Es ist interessant, wie Hurwitz, Poincaré und Schwarz auf die Übersendung der Korrekturen antworteten. Hurwitz erkannte die Aufstellung des Theorems sofort rückhaltlos an; Schwarz dagegen äußerte anfangs Zweifel, schon bei der Konstantenzählung, brachte dann aber bald neue und vereinfachende Gedanken für einen Beweis hinzu, von denen er mir den einen bereits mitteilte, als ich ihn am 11. April 1882 in Göttingen besuchte. Das Grenzkreistheorem faßte er auf als konforme Abbildung einer unendlich vielfachen Überdeckung der gegebenen Riemannschen Fläche, der jetzt so genannten Überlagerungsfläche, auf das Innere eines Kreises. Später wies er noch einen anderen Weg zum Beweise, indem er den direkten Nachweis der Existenz des zum Grenzkreis gehörigen Nicht-Euklidischen Bogenelementes auf der Riemannschen Fläche selbst forderte. – H. Poincaré antwortete durch seinen unten als Nr. 18 abgedruckten Brief vom 4. April 1882 und durch eine Note in den Comptes rendus vom 10. April (abgedruckt in Bd. 2 seiner Oeuvres, S. 41 ff.), deren Beginn ich hier wörtlich anführe: „Je voudrais exposer

ici quelques résultats nouveaux et les réunir à des théorèmes anciens, de façon à en faire un ensemble comprenant, comme cas particuliers, les résultats obtenus par M. Klein par d'autres considérations, et exposés par lui dans deux notes récentes (Math. Annalen, Bd. 19 u. 20).“ Dieser Satz scheint kaum geeignet, den tatsächlichen Sachverhalt aufzuklären; was neu an der Poincaréschen Note ist, besteht darin, daß er statt parabolischer Stigmata beliebige elliptische Stigmata zuläßt, wodurch er zu einer Verschmelzung mit seinen früheren Theoremen für $p = 0$ gelangt; das Rückkehrschnittheorem von Bd. 19 wird hingegen überhaupt nicht berührt, so daß von einem „ensemble comprenant, comme cas particuliers, les résultats de M. Klein“ schlechterdings nicht die Rede sein kann. Auch ist H. Poincaré später auf die Begründung des Rückkehrschnittheorems nie mehr zurückgekommen. Ich war ihm mit der Publikation des Grenzkreistheorems für $p > 0$ einfach zuvorgekommen. Ich sage ausdrücklich mit der Publikation, denn es ist mir kein Zweifel, daß Poincaré in jener Zeit selbst nach einem ähnlichen Theorem suchte. Wie weit er von sich aus gekommen war, hat er mir nie klar mitgeteilt. Ich habe nicht den geringsten Wunsch, dem außerordentlichen Erfindungstalent von H. Poincaré irgend etwas abzubrechen. Daher will ich ausdrücklich angeben, daß Poincaré 1883 (nachdem ich ihm in meinem unten folgenden Briefe Nr. 22 vom 14. Mai 1882 den allgemeinen Schwarzschen Gedanken der Überlagerungsfläche einer geschlossenen Riemannschen Fläche mitgeteilt hatte und nachdem er vielleicht auch mit Schwarz selber, der Ostern 1883 nach Paris gereist war, gesprochen hatte) eine letzte Verallgemeinerung des Grundtheorems fand, dahingehend, daß man jede analytische Funktion durch Funktionen, die nur innerhalb eines Grenzkreises existieren, uniformisieren könne. In der damals gedruckten Arbeit [18]) finden sich allerdings noch Unvollkommenheiten, die H. Poincaré jedoch 1907 zu beseitigen vermochte [19]). Ist eine algebraische Fläche gegeben, so gestattet die Überlagerungsfläche unendlich viele eindeutige Transformationen in sich, und die uniformisierenden Funktionen verwandeln sich dementsprechend in die linear polymorphen [20]), wie ich sie in meiner Note betrachtete. (Vgl. unten Nr. CII, Fußnote [4]), S. 628).

3. Es bleibt noch das allgemeine Fundamentaltheorem von Bd. 21 der Math. Annalen (Abh. CIII unten), wie es entsprechend der „Ineinanderschiebung“ der verschiedenartigen dort betrachteten automorphen Figuren entsteht. Dies Theorem hat sich mir Anfang Sommer 1882 so selbstverständlich dargeboten, daß ich kein bestimmtes Datum zu nennen weiß. (Vgl. übrigens meinen unten folgenden Brief 20 an H. Poincaré vom 7. Mai 1882.)

Ich habe übrigens gleich im Sommer 1882 über den ganzen Komplex der Fragen, die mich damals beschäftigten, Spezialvorträge gehalten, welche E. Study für mich ausarbeitete [21]). Diese Vorträge sind die Grundlage für die Darstellung in den Math. Annalen, Bd. 21 (1882/83, Abh. CIII unten) gewesen, die ich im wesentlichen während eines Ferienaufenthaltes in Tabarz hergestellt habe. Aber es hatte sich wieder ein quälendes Asthma eingestellt, und das Resultat war eine tiefgehende Erschöpfung, die ich wohl nie ganz überwunden habe. Ich habe schon in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 258, geschildert, daß ich erst ganz allmählich wieder zu einiger Leistungsfähigkeit kam, aber diese nach anderer Seite richtete, weil das Zentrum meines produktiven Denkens sozusagen zerstört war. Immerhin habe ich erreicht, daß meine Arbeit seitens der Teubnerschen Buchdruckerei, der ich hier nachträglich meinen besten Dank dafür sagen will, am 28. November 1882 versandt werden konnte, während das erste Heft der Acta Math., das nur die vorbereitenden Überlegungen H. Poincarés enthielt, erst im Dezember erschien. Dabei werde ich wieder nicht verschweigen, daß der Druck der

[18]) Siehe Bulletin de la Société Mathématique de France, tome IX., S. 112 ff.

[19]) *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*, Acta Math., Bd. 31 (1907/08).

[20]) Diese Bezeichnung für solche Funktionen auf Riemannschen Flächen, die bei geschlossenen Umläufen sich linear transformieren, ist von Fricke auf S. 1 des 2. Bandes der „Automorphen Funktionen“ eingeführt worden.

[21]) Es fanden in der Zeit vom 6. Juli bis zum 4. August 15 Vorträge statt.

ersten Poincaréschen Arbeit selbstverständlich vorher vollendet war. Nörlund gibt in dieser Hinsicht in dem von ihm herausgegebenen zweiten Bande der gesammelten Werke H. Poincarés für die fünf großen in den Acta Mathematica veröffentlichten Abhandlungen über automorphe Funktionen folgende Daten an:

I) *Théorie des groupes fuchsiens,* Acta Math., Bd. 1:
abgeschlossen (spätestens) Juli 1882,
gedruckt September 1882.

II) *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* Acta Math., Bd. 1:
abgeschlossen am 23. Oktober 1882,
gedruckt am 29. November 1882.

III) *Mémoire sur les groupes kleinéens,* Acta Math., Bd. 3:
abgeschlossen am 19. Mai 1883,
gedruckt am 8. September 1883.

IV) *Sur les groupes des équations linéaires,* Acta Math., Bd. 4:
abgeschlossen am 20. Oktober 1883,
gedruckt am 9. Februar 1884.

V) *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes,* Acta Math., Bd. 5:
abgeschlossen am 30. Mai 1884,
gedruckt vom 22. Juli bis zum 11. September 1884.

Bei dieser Gelegenheit sei auch gleich ein Aufsatz H. Poincarés in Bd. 19 der Math. Annalen erwähnt, von dem unten im Briefwechsel mehrfach die Rede ist und der den Arbeiten in den Acta Math. vorausgeht:

Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires, Math. Annalen, Bd. 19:
datiert vom 17. Dezember 1881,
ausgegeben am 13. März 1882.

Für den Vergleich mit meiner Abh. CIII kommen wesentlich nur die unter I) und IV) genannten Arbeiten H. Poincarés in Betracht, worüber hinter Nr. CV auf S. 731 ff. noch nähere Ausführungen folgen werden. —

Meine Abhandlung aus Bd. 21 der Math. Annalen (Abh. CIII) enthält vielfach noch ungenaue und vorläufige Ausdrucksweisen, auch sind einige Fragestellungen erst mehr aufgeworfen als eigentlich beantwortet. Das ist nicht verwunderlich, wenn man die Kürze der Zeit, die für die Redaktion zur Verfügung stand, in Betracht zieht und neben die Fülle des zu bewältigenden Stoffes hält, zumal die ganze Theorie damals erst jung war und ihr zahlreiche Hilfsmittel, die heute den Mathematikern geläufig sind, noch fehlten. Ein beträchtlicher Teil der genaueren Durcharbeitung der Einzelheiten wurde in der Folge bereits geleistet. Ich nenne in dieser Hinsicht nur meinen eigenen Aufsatz aus Bd. 40 der Math. Annalen (1891/92, Nr. CIV unten), die lange Aufsatzserie von E. Ritter in den Math. Annalen, Bde. 41—47 (1892—1896), sodann zahlreiche, in den Göttinger Nachrichten und den Math. Annalen erschienene, Aufsätze von R. Fricke, die als Vorarbeiten zu dem zweibändigen Werke: Fricke-Klein, „*Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*" (Leipzig 1897 bis 1912) dienten, das eine umfassende Darstellung des Gesamtgebietes gibt und im folgenden kurz als „Automorphe Funktionen" zitiert werden wird. Den ersten Band, der die gruppentheoretischen Fragen behandelt, brachte Fricke 1897 heraus. 1901 folgte die erste Lieferung des zweiten Bandes; sie gibt die Ritterschen Untersuchungen in vervollständigter und vereinfachter Form wieder. Zum Abschlusse gelangte er erst 1911/12, nachdem von verschiedenen Autoren seit 1907 Beweise für die Fundamentaltheoreme geliefert worden waren. Eingehender werde ich über das Buch auf S. 742 ff. berichten. Trotz den erreichten Fortschritten muß aber das unbefangene Urteil lauten, daß die Theorie der automorphen Funktionen heute keineswegs abgeschlossen ist und der künftigen Forschung noch ein weites Feld bietet. K.

Briefwechsel zwischen F. Klein und H. Poincaré in den Jahren 1881/1882.

[Vorbemerkung.

Die hier folgende Korrespondenz zwischen F. Klein und H. Poincaré wurde schon vor etwa einem halben Jahr (Sommer 1922) der Redaktion der Acta Mathematica zur Veröffentlichung in Bd. 39 dieser Zeitschrift übergeben. Sie wird im Einverständnis mit ihr hier vorweg abgedruckt, da sich für das Erscheinen jenes Bandes noch kein bestimmter Termin angeben läßt und ohne Zweifel der unveränderte Wortlaut der Briefe eine bessere Einsicht in das gegenseitige Verhältnis der beiden Forscher vermittelt, als ein noch so zuverlässiges zusammenhängendes Referat es ermöglichen könnte.

Von den Briefen H. Poincarés liegen dem Abdruck die Originale zugrunde, von denen F. Kleins Abschriften, die Herr Nörlund nach den im Besitze der Redaktion der Acta Mathematica befindlichen Originalen hat anfertigen lassen und Herrn Klein in freundlicher Weise zur Verfügung gestellt hat, wofür ihm an dieser Stelle besonders gedankt sei. Der Abdruck erfolgt wortgetreu nach den Vorlagen, bis auf die Orthographie und die Beseitigung einiger offensichtlicher Flüchtigkeitsfehler. Einschaltungen und Fußnoten in eckigen Klammern rühren, wie immer in dieser Ausgabe, von den Herausgebern her.]

1. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, 12. Juni 1881.

Sehr geehrter Herr!

Ihre 3 Noten in den Comptes Rendus: „Sur les fonctions fuchsiennes"[1]) die ich erst gestern, und auch da nur flüchtig kennen lernte, stehen in so engem Zusammenhange mit den Überlegungen und Bestrebungen, mit denen ich mich in den letzten Jahren beschäftigte, daß ich Ihnen deshalb schreiben muß. Ich möchte mich zunächst auf die verschiedenen Arbeiten beziehen, die ich in den Bänden 14, 15, 17 der Mathematischen Annalen[2]) über elliptische Funktionen veröffentlichte. Es handelt sich bei den ellip-

[1]) [Comptes rendus, Bd. 92, S. 333—335 (vom 14. Februar 1881), S. 395—398 (vom 21. Februar 1881), S. 859—861 (vom 4. April 1881). Abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 1—10.]

[2]) [Siehe im vorliegenden Bande die Nummern LXXXII bis LXXXVII. (Erschienen 1878/79).]

tischen Modulfunktionen natürlich nur um einen speziellen Fall der von Ihnen betrachteten Abhängigkeitsverhältnisse; aber ein näherer Vergleich wird Ihnen zeigen, daß ich sehr wohl allgemeine Gesichtspunkte hatte. Ich möchte Sie in dieser Hinsicht auf einige besondere Punkte aufmerksam machen:

Bd. 14, S. 128 [= S. 30/31 im vorliegenden Bande] handelt von denjenigen algebraischen Funktionen, die sich durch Modulfunktionen darstellen lassen, ohne mit den doppeltperiodischen Funktionen zusammenzuhängen. — Dann folgt, zunächst am speziellen Falle, die wichtige Theorie der Fundamentalpolygone.

Bd. 14, S. 159—160 [= S. 64 im vorliegenden Bande][3]) ist davon die Rede, daß man hypergeometrische Reihen als eindeutige Funktionen geeigneter Modulfunktionen darstellen kann.

Zu Bd. 14, S. 428ff. gehört eine Tafel [S. 126 im vorliegenden Bande], welche die Aneinanderlagerung von Kreisbogendreiecken mit den Winkeln $\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ erläutert (was also ein Beispiel der von Halphen betrachteten[4]) partikulären Funktionenklasse ist), wobei ich inzwischen bemerken muß, daß schon in Crelles Journal Bd. 75 [1872/73] Hr. Schwarz den Fall $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ erläuterte[5]).

Bd. 17. S. 62ff. [= S. 169ff. im vorliegenden Bande] bringe ich sodann in knapper Übersicht die gereifteren Anschauungen, mit denen ich mir in der Zwischenzeit die Theorie der elliptischen Modulfunktionen zurecht gelegt hatte.

Diese Anschauungen selbst habe ich nicht publiziert, ich habe sie aber im Sommer 1879 am Münchener Polytechnikum vorgetragen. Mein Gedankengang, der mit dem jetzt von Ihnen eingeschlagenen nun vielfach zusammentrifft, war damals dieser:

1. Periodische und doppeltperiodische Funktionen sind nur Beispiele für eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich. Es ist Aufgabe der modernen Analysis, alle diese Funktionen zu bestimmen.

2. Die Anzahl dieser Transformationen kann eine endliche sein; dies gibt die Gleichungen des Ikosaeders, Oktaeders, . . ., die ich früher betrachtete (Math. Annalen Bd. 9 [1875/76], Bd. 12 [1877] [= Abh. LI und Abh. LIV in Bd. 2 dieser Ausgabe]) und von denen ich bei Bildung dieses ganzen Ideenkreises ausging.

[3]) [Vgl. auch Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 581/82.]

[4]) [Siehe Comptes rendus, Bd. 92, S. 856—858, (4. April 1881) = Oeuvres de G. H. Halphen, Bd. 2, S. 471—474. — Vgl. auch die Angaben in Bd. 1 der „Modulfunktionen“, S. 129.]

[5]) [Abgedruckt in den Ges. math. Abhandlungen von H. A. Schwarz, Bd. 2, S. 211—259; siehe insbesondere S. 240.]

3. Gruppen von unendlich vielen linearen Transformationen, die zu brauchbaren Funktionen Anlaß geben, (groupe discontinu nach Ihrer Bezeichnung) erhält man *zum Beispiel*, wenn man von einem Kreisbogenpolygon ausgeht, dessen Kreise einen festen Kreis rechtwinkelig schneiden und dessen Winkel genaue Teile von π sind.

4. Man sollte sich mit allen solchen Funktionen beschäftigen (wie Sie das in der Tat jetzt beginnen), um aber konkrete Ziele zu erreichen, beschränken wir uns auf Kreisbogendreiecke und insbesondere auf elliptische Modulfunktionen.

Ich habe mich seitdem vielfach, auch in Gesprächen mit anderen Mathematikern, mit diesen Fragen beschäftigt, aber abgesehen davon, daß ich noch zu keinem definitiven Resultate gekommen bin, gehört das am Ende nicht hierher. Ich will mich auf das beschränken, was ich publiziert oder vorgetragen habe. Vielleicht hätte ich mich schon früher mit Ihnen oder einem Ihrer Freunde, wie z. B. Herrn Picard[6]), in Verbindung setzen sollen. Denn der Ideenkreis, in welchem sich Ihre Arbeiten seit 2—3 Jahren bewegen, ist mit dem meinigen in der Tat äußerst enge verwandt. Es wird mich freuen, wenn dieser mein erster Brief Anlaß zu einer fortgesetzten Korrespondenz geben sollte. Ich bin freilich im Augenblicke durch andere Verpflichtungen von diesen Arbeiten abgedrängt, aber habe um so mehr Anlaß, in einigen Monaten zu denselben zurückzukehren, als ich für nächsten Winter eine Vorlesung über Differentialgleichungen angezeigt habe.

Herrn Hermite wollen Sie mich bestens empfehlen. Ich dachte lange daran, mit ihm briefliche Verbindung zu suchen, und würde das, wie ich nicht zweifele zu meinem größten Vorteile, schon längst ausgeführt haben, wenn ich nicht in der Sprache ein gewisses Hemmnis gefunden hätte. Ich bin, wie Sie vielleicht wissen, lange genug in Paris gewesen, um französisch sprechen und schreiben zu sollen; in der Zwischenzeit aber ist letztere Fähigkeit durch Nichtgebrauch nur zu sehr verkümmert.

Hochachtungsvoll

Prof. Dr. F. Klein.

Adresse: Leipzig, Sophienstraße 10/II.

2. H. Poincaré an F. Klein.

[Caen, le] 15 Juin [1881].

Monsieur,

Votre lettre me prouve que vous aviez aperçu avant moi quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans la théorie des fonctions fuchsiennes.

[6]) Würden Sie Herrn Picard, obgleich es ein untergeordneter Punkt ist, vielleicht gelegentlich auf Math. Annalen, Bd. 14, S. 122, § 8 [= S. 24/25 im vorliegenden Bande] aufmerksam machen!

Je n'en suis nullement étonné; car je sais combien vous êtes versé dans la connaissance de la géométrie non-euclidienne qui est la clef véritable du problème qui nous occupe.

Je vous rendrai justice à cet égard quand je publierai mes résultats; j'espère pouvoir me procurer d'ici là les tomes 14, 15 et 17 des Mathematische Annalen qui n'existent pas à la bibliothèque Universitaire de Caen. Quant à la communication que vous avez faite au Polytechnicum de Münich, je vous demanderai de vouloir bien me donner quelques détails à ce sujet, afin que je puisse ajouter à mon mémoire une note vous rendant pleine justice; car sans doute, je ne pourrai me procurer directement votre travail.

Comme je ne pourrai sans doute me procurer *immédiatement* les Mathematische Annalen, je vous prierais aussi de vouloir bien me donner quelques explications sur quelques points de votre lettre.

Vous parler de

Die elliptischen Modulfunktionen.

Pourquoi ce pluriel? Si la fonction modulaire est le carré du module exprimé en fonction du rapport des périodes, il n'y en a qu'une; il faut donc entendre autrement l'expression Modulfunktionen.

Que voulez-vous dire par ces fonctions algébriques qui sont susceptibles d'être représentées par des fonctions modulaires? Qu'est-ce aussi que la

Theorie der Fundamentalpolygone?

Je vous demanderai aussi de m'éclairer sur les points suivants:

Avez-vous trouvé tous les Kreisbogenpolygone qui donnent naissance à un groupe discontinu?

Avez-vous démontré l'existence des fonctions qui correspondent à chaque groupe discontinu?

J'ai écrit à M. Picard pour lui communiquer votre remarque.

Je me félicite, Monsieur, de l'occasion qui me met en rapport avec vous; j'ai pris la liberté de vous écrire en français; car vous me dites que vous connaissez cette langue.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération,

Poincaré.

3. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, 19. Juni 1881.

Geehrter Herr!

Als ich gestern Ihren willkommenen Brief erhielt, sandte ich Ihnen umgehend Separatabzüge von denjenigen auf unser Thema bezüglichen

Arbeiten zu, von denen ich solche überhaupt noch besitze. Lassen Sie mich heute diese Sendung durch einige Zeilen erläutern. Mit dem *einen* Briefe wird es freilich nicht abgetan sein, sondern wir werden viel korrespondieren müssen, bis wir wechselseitig volle Fühlung gewonnen haben. Ich möchte heute folgende Punkte hervorheben.

1. Unter den übersandten Arbeiten fehlen die drei wichtigsten aus dem 14-ten Bande der Math. Annalen [Abh. LXXXII bis LXXXIV im vorliegenden Bande], desgleichen meine Untersuchungen über das Ikosaeder in Bd. 9 und 12 [Abh. LI und LIV in Bd. 2 dieser Ausgabe], sowie meine zweite Arbeit über lineare Differentialgleichungen (die auch Herrn Picard unbekannt scheint) ebenfalls in Bd. 12 [Abh. LIII in Bd. 2 dieser Ausgabe]. Ich bitte Sie, sich dieselben irgendwo zu verschaffen. Separatabzüge sandte ich verschiedene nach Paris, z. B. an Hermite.

2. An meine eigenen Arbeiten schließen sich die meiner Schüler Dyck[7]) und Gierster[8]). Ich benachrichtigte beide, Ihnen Separatabzüge zuzustellen. Eine auf dieselben Theorien bezügliche Doktordissertation von Herrn Hurwitz[9]) wird eben gedruckt und Ihnen in einigen Wochen zukommen.

3. Seit vorigem Herbst ist einer Ihrer Landsleute hier, dessen Namen Sie vermutlich kennen, da er zusammen mit Picard und Appell studierte: Mr. Brunel (Adr. Liebigstr. 38/II). Vielleicht interessiert es Sie, auch mit ihm in Korrespondenz zu treten; er wird Ihnen von den hiesigen Seminareinrichtungen und von der Rolle, welche eben dort die eindeutigen Funktionen mit linearen Transformationen in sich gespielt haben, besser erzählen können, als ich selbst.

4. Ich habe Sommersemester 1879 von Herrn Gierster ein Heft meiner Vorlesung ausarbeiten lassen. Im Augenblicke ist dasselbe verliehen, doch werde ich dasselbe nächster Tage zurückbekommen und mit Herrn Brunel zusammen durchgehen, worauf wir Ihnen Bericht erstatten.

5. Die Benennung „fonctions fuchsiennes“ weise ich zurück, so gut ich verstehe, daß Sie durch Fuchssche Arbeiten zu diesen Ideen mit veranlaßt wurden. Im Grunde basieren alle solche Untersuchungen auf Riemann. Für meine eigene Entwickelung war die eng verwandte Betrachtung von Schwarz in Bd. 75 des Borchardtschen Journals [abgedruckt in Ges. math. Abh., Bd. 2, S. 211 ff.] (die ich Ihnen dringend empfehle, wenn Sie dieselbe noch nicht kennen sollten) von maßgebender Bedeutung. Die Arbeit von Herrn Dedekind über elliptische Modulfunk-

[7]) [Vgl. Fußnote [24]) auf S. 122/123, ferner S. 136 und S. 166 im vorliegenden Bande.]

[8]) [Vgl. S. 5 und Fußnote [8]) auf S. 78 des vorliegenden Bandes.]

[9]) [Vgl. Fußnote [2]) auf S. 137 im vorliegenden Bande.]

tionen in Borchardts Journal Bd. 83 erschien erst, als ich mir über die geometrische Repräsentation der Modulfunktionen bereits klar war (Herbst 1877). Zu diesen Arbeiten stehen die von Fuchs vermöge ihrer ungeometrischen Form in bewußtem Gegensatze. Ich bestreite nicht die großen Verdienste, welche Herr Fuchs um andere Teile der Lehre von den Differentialgleichungen hat, aber gerade hier lassen seine Arbeiten um so mehr im Stich, als das einzige Mal, wo er in einem Briefe an Hermite die elliptischen Modulfunktionen erläuterte (Borchardts Journal Bd. 83 [(1876/77); abgedruckt in Fuchs' Ges. math. Werken, Bd. 2, Nr. XXIV, S. 87ff.]), ein fundamentaler Fehler unterlief, den dann Dedekind l. c. nur zu sanft monierte.

6. Man kann eine Funktion mit linearen Transformationen in sich insbesondere so definieren, daß man die *Halbebene* auf ein Kreisbogenpolygon, welches beliebig vorgegeben ist, abbildet. Dies ist dann freilich ein nur spezieller Fall der allgemeinen (ich weiß im Augenblicke nicht, ob Sie sich nur auf diesen speziellen Fall beschränken). Die Gruppe der linearen Transformationen ist dann dadurch partikularisiert, daß sie in einer doppelt so großen Gruppe von Operationen enthalten ist, welche neben linearen Transformationen auch Spiegelungen (Transformationen durch reziproke Radien) umfaßt. In diesem Falle ist die Existenz der Funktion durch ältere Arbeiten von Schwarz, resp. Weierstrass, sichergestellt, sofern man nicht auf die allgemeinen Riemannschen Prinzipien rekurrieren will. Siehe Schwarz in Borchardts Journal, Bd. 70, Abbildung der Halbebene auf Kreisbogenpolygone[10]).

7. Auch in diesem speziellen Falle habe ich bislang durchaus nicht alle „groupes discontinus" aufgestellt; ich habe nur gesehen, daß es sehr viele gibt, bei denen kein fester Grundkreis existiert, bei denen also die Analogie mit der nicht-euklidischen Geometrie (die mir übrigens in der Tat sehr geläufig ist) nicht zutrifft. Nehmen Sie z. B. ein beliebiges Polygon, begrenzt von *irgend*welchen sich berührenden Kreisen:

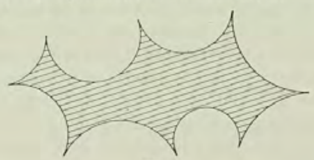


Fig. 1.

[10]) [Gemeint ist die Abhandlung *Über einige Abbildungsaufgaben* (datiert vom Februar 1869); abgedruckt in Bd. 2 der Ges. math. Abhandlungen von H. A. Schwarz, S. 65—83.]

so wird die Vervielfältigung durch Symmetrie ebenfalls zu einer groupe discontinu führen.

8. Die übrigen Fragen Ihres Briefes finden wohl schon durch die übersandten Arbeiten ihre Beantwortung, insbesondere die nach dem Pluralis der „Modulfunktionen" und in der Hauptsache auch die nach den „Fundamentalpolygonen".

In der Hoffnung, recht bald wieder von Ihnen zu hören,

Ihr ganz ergebener

F. Klein.

4. H. Poincaré an F. Klein.

Caen, le 22 Juin 1881.

Monsieur,

Je n'ai pas encore reçu les envois que vous m'annoncez et que je ne tarderai sans doute pas à voir arriver à leur adresse. Mais je ne veux pas attendre ce moment pour vous remercier de vos promesses, ainsi que de votre lettre que j'ai lue avec le plus grand intérêt. Aussitôt après l'avoir reçue, j' ai couru à la bibliothèque pour y demander le 70e volume de Borchardt; malheureusement ce volume était prêté et je n'ai pu y lire le mémoire de M. Schwarz. Mais je crois pouvoir le reconstituer d'après ce que vous m'en dites et y reconnaître certains résultats que j'avais trouvés sans me douter qu'ils avaient fait l'objet de recherches antérieures. Je crois donc comprendre que les fonctions fuchsiennes que les recherches de M. Schwarz et les vôtres permettent de définir sont celles dont je me suis occupé plus particulièrement dans ma note du 23 Mai. Le groupe particulier dont vous me parlez dans votre dernière lettre me semble fort intéressant et je vous demanderai la permission de citer ce passage de votre lettre dans une communication que je ferai prochainement à l'Académie et où je chercherai à généraliser votre résultat[11]).

Quant à la dénomination de fonctions fuchsiennes, je ne la changerai pas. Les égards que je dois à M. Fuchs ne me le permettent pas. D'ailleurs, s'il est vrai que le point de vue du savant géomètre d'Heidelberg est complètement différent du vôtre et du mien, il est certain aussi que ses travaux ont servi de point de départ et de fondement à tout ce qui s'est fait depuis dans cette théorie. Il n'est donc que juste que son nom reste attaché à ces fonctions qui y jouent un rôle si important.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération,

Poincaré.

[11]) [Vgl. Comptes rendus, Bd. 92, S. 1484—1487 (27. Juni 1881); abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 19—22.]

5. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, 25. Juni 1881.

Geehrter Herr!

Schreiben Sie mir doch bitte umgehend eine Karte, ob meine Sendung von Separatabzügen auch jetzt noch nicht eingetroffen ist; ich brachte sie selbst heute vor 8 Tagen auf die Post. Über F. würden Sie sich anders ausdrücken, wenn Sie die Literatur völlig kennten. Die Lehre von der Abbildung der Kreisbogenpolygone steht völlig unabhängig von der F. Arbeit in t. 66[12]); das Gemeinsame ist nur, daß beide Betrachtungsweisen durch Riemann angeregt sind.

Hochachtungsvoll

Prof. Dr. F. Klein.

6. H. Poincaré an F. Klein.

Caen, le 27 Juin 1881.

Monsieur,

Au moment où j'ai reçu votre carte, j'allais précisément vous écrire pour vous remercier de votre envoi et vous en annoncer l'arrivée. S'il a été retardé c'est par suite d'une erreur de la poste qui l'a envoyé d'abord à la Sorbonne, puis au Collège de France, bien que l'adresse eût été parfaitement bien mise.

En ce qui concerne M. Fuchs et la dénomination de fonctions fuchsiennes, il est clair que j'aurais pris une autre dénomination si j'avais connu le travail de M. Schwarz; mais je ne l'ai connu que par votre lettre, après la publication de mes résultats de sorte que je ne peux plus changer maintenant le nom que j'ai donné à ces fonctions sans manquer d'égards envers M. Fuchs.

J'ai commencé la lecture de vos brochures qui m'ont vivement intéressé, principalement celle qui a pour titre „*Über elliptische Modulfunktionen*"[13]). C'est au sujet de cette dernière que je vous demanderai la permission de vous adresser quelques questions.

1° Avez-vous déterminé les *Fundamentalpolygone* de tous les *Untergruppen* que vous appelez *Kongruenzgruppen* et en particulier de ceux-ci:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \mod n.$$

2° Dans mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes, j'ai partagé les groupes fuchsiens d'après divers principes de classification et entre autres

[12]) [Gemeint ist die Arbeit *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten*, Crelles Journal, Bd. 66 (1865/66), S. 121 ff.; abgedruckt als Nr. VI in Bd. 1 der Ges. math. Werke von L. Fuchs, S. 159 ff.]

[13]) [Im vorliegenden Bande unter dem Titel *Zur [Systematik der] Theorie der elliptischen Modulfunktionen* als Nr. LXXXVII abgedruckt. S. 169 ff.]

d'après la valeur d'un nombre que j'appelle leur genre. De même vous partagez les *Untergruppen* d'après un nombre que vous appelez leur *Geschlecht*. *Le genre* (tel que je l'entends[14])) et le *Geschlecht* sont ils un seul et même nombre? Je n'ai pu le savoir, par ce que je ne sais pas ce que c'est que le *Geschlecht im Sinne der Analysis situs*. Je vois seulement que ces nombres s'annulent à la fois. Auriez-vous donc l'obligeance de me dire ce que c'est que ce Geschlecht im Sinne der Analysis situs ou, si cette définition est trop longue pour être donnée dans une lettre, dans quel ouvrage je pourrais la trouver. Dans votre dernière lettre, vous me demandiez si je ne suis renfermé dans le cas particulier où „Die Gruppe der linearen Transformationen ist dadurch partikularisiert, daß sie in einer doppelt so großen Gruppe von Operationen enthalten ist, welche neben linearen Transformationen auch Spiegelungen umfaßt." Je ne me suis pas renfermé dans ce cas, mais j'ai supposé que toutes les transformations linéaires conservaient un certain cercle fondamental. Je pense d'ailleurs pouvoir aborder par une méthode analogue le cas le plus général.

A ce propos, il me semble que tous les Untergruppen relatifs aux fonctions modulaires ne rentrent pas dans ce cas spécial.

Au sujet de ce groupe discontinu dont vous me parlez et que l'on obtient par des Spiegelungen et par la Vervielfältigung d'un polygone limité par des arcs de cercle se touchant deux à deux il me semble qu'il y a une condition supplémentaire dont vous n'avez pas parlé bien qu'elle ne vous ait sans doute pas échappé; deux arcs de cercle quelconques prolongés, ne doivent pas se couper. Serait-ce abuser de votre complaisance que de vous poser encore une question.

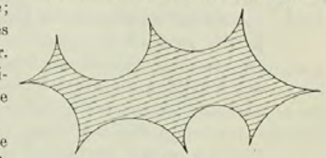


Fig. 2.

Vous dites: in diesem Falle ist die Existenz der Funktion durch Arbeiten von Schwarz sichergestellt, et vous ajoutez: *sofern man nicht auf die allgemeinen Riemannschen Prinzipien rekurrieren will*. Qu'entendez-vous par là?

J'ai écrit dernièrement à M. Hermite; je lui ai fait part succinctement du contenu de vos lettres, et je lui ai envoyé les compliments dont vous m'aviez chargé pour lui.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma reconnaissance et de mon respect,

Poincaré.

[14]) [Vgl. Comptes rendus, Bd. 92, S. 860—861, 1199, 1276 bzw. Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 9, 13, 18.]

7. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, den 2. Juli 1881.

Geehrter Herr!

Lassen Sie mich die verschiedenen Fragen, die Sie in Ihrem willkommenen Briefe vom 27. Juni stellen, so gut es gehen will, umgehend beantworten.

1. Die Fundamentalpolygone der Kongruenzgruppen

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{n}$$

habe ich bei $n = 5$ (wo durch Zusammenbiegen der Kanten das Ikosaeder entsteht) und bei $n = 7$ im 14. Bande [der Math. Annalen = Abhandlungen LXXXII bis LXXXIV im vorliegenden Bande] ausführlich beschrieben. Der allgemeine Fall $n =$ Primzahl bildet den Gegenstand einer Arbeit von *Dyck*[15]), die eben im Druck ist. Wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, habe ich die Sache nicht erledigt.

2. „Geschlecht im Sinne der Analysis situs" wird jeder geschlossenen Fläche beigelegt. Dasselbe ist gleich der Maximalzahl solcher in sich zurückkehrender Schnitte der Fläche, die man ausführen kann, ohne die Fläche zu zerstücken. Wenn jetzt die betreffende Fläche als Bild der Wertsysteme w, z einer algebraischen Gleichung $f(w, z) = 0$ betrachtet werden kann, so ist ihr Geschlecht eben auch das Geschlecht der Gleichung. Ihr „genre" und mein „Geschlecht" sind also *materiell dieselben Zahlen*, es liegt bei mir nur vermutlich eine freiere Auffassung der Riemannschen Fläche und der auf sie gegründeten Definition von p zu Grunde.

3. Es gibt innerhalb der Gruppe der Modulfunktionen allerdings Untergruppen, welche ein unsymmetrisches Fundamentalpolygon besitzen, dahin gehören, wie ich in [Math. Annalen] Bd. 14 [= Abh. LXXXIII im vorliegenden Bande] nachwies, insbesondere diejenigen Untergruppen, welche den singulären Resolventen der Modulargleichung für $n = 7$ und $n = 11$ entsprechen.

4. Daß sich bei dem Polygon

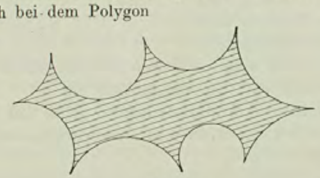


Fig. 3.

die Kreise rückwärts verlängert nicht schneiden dürfen, wenn eine eindeutige Funktion entstehen soll, ist mir in der Tat wohl bekannt. Gerade auf

[15]) [Vgl. das Zitat und die Ausführungen auf S. 166/167 des vorliegenden Bandes.]

diesen Punkt muß man meines Erachtens die Aufmerksamkeit richten, wenn man beweisen will, daß sich die Koordinaten w, z des Punktes einer beliebigen algebraischen Kurve als eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich angeben lassen. Ich werde Ihnen angeben, wie weit ich in dieser Frage gekommen bin. Nach den Arbeiten von Schwarz, resp. Weierstrass, kann man die Halbebene immer so auf ein Kreisbogenpolygon abbilden:

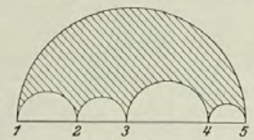


Fig. 4.

daß die Punkte I, II, III, IV, V, welche den 1, 2, 3, 4, 5 auf der Begrenzung der Halbebene entsprechen, beliebige Lage haben. Nun seien I, II, III, IV, V ... die Verzweigungspunkte einer algebraischen Funktion $w(z)$; und diese algebraische Funktion möge *keine anderen* Verzweigungspunkte besitzen. Dann sind offenbar w und z eindeutige Funktionen der gewollten Art von denjenigen Hilfsvariabeln, in deren Ebene das gezeichnete Polygon liegt. *Wenn also alle Verzweigungspunkte einer algebraischen Funktion $w(z)$ auf einem Kreise der z-Ebene liegen, so ist die Frage ohne weiteres zu bejahen.* Wie aber, wenn das nicht der Fall ist? Da komme ich unter Umständen auf solche Polygone:

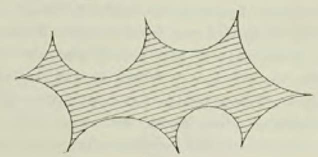


Fig. 5.

wie ich sie das vorige Mal nannte. Findet keinerlei Symmetrie statt, so komme ich wenigstens[16]) auf einen analog gestalteten Fundamentalraum, dessen Kanten unter Winkeln = Null zusammenstoßen und übrigens paarweise durch gewisse lineare Substitutionen zusammengehören. *Aber ich kann nicht beweisen, daß dieser Fundamentalraum mit seinen Wieder-*

[16]) Durch Aufstellung zugehöriger Differentialgleichungen des von mir behandelten Typus $\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = R(z)$.

holungen zusammen nur einen Teil der komplexen Ebene überdeckt. Und an dieser Schwierigkeit finde ich mich nun schon lange aufgehalten.

5. Übrigens bekommt man merkwürdige andere Beispiele von diskontinuierlichen Gruppen, wenn man beliebig viele einander nicht schneidende Kreise annimmt und nun an ihnen durch reziproke Radien spiegelt. Ich habe dabei den Teil der Ebene, der gleichzeitig außerhalb aller Kreise liegt, und der also das halbe Fundamentalpolygon vorstellt, der Deutlichkeit halber schraffiert. Diese Gruppen werden gelegentlich von *Schottky* betrachtet (Borchardts Journal Bd. 83), ohne daß dort ihre prinzipielle Bedeutung hervorgehoben würde[17]).

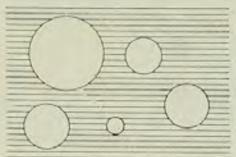


Fig. 6.

6. Riemanns Prinzipien geben zunächst keinen Weg, um eine Funktion, deren Existenz man erschließt, wirklich zu bilden. Man ist daher geneigt, sie als unsicher zu betrachten, so gewiß es auch sein mag, daß die Resultate, welche aus ihnen folgen, richtig sind. Demgegenüber haben Weierstrass und Schwarz bei der von mir berührten Frage der Abbildung von Kreisbogenpolygonen wirkliche Bestimmungen der in Betracht kommenden Konstanten durch konvergente Prozesse gegeben. Will man Riemannsche Prinzipien gebrauchen, so kann man folgenden sehr allgemeinen Satz aufstellen. Es sei ein Polygon gegeben, mit einer oder auch mehreren getrennten Peripherien. Das Polygon kann ein mehrblättriges sein, dessen Blätter durch Verzweigungspunkte verbunden sind. Jede Peripherie besteht aus einer Anzahl von Stücken; jedes Stück gehe durch eine bestimmte lineare Substitution in eins der übrigen über. Dann kann man immer eine Funktion konstruieren, welche im Inneren des Polygons beliebige vorgeschriebene Unstetigkeiten hat, und deren reeller Teil gewisse vorgegebene Periodizitätsmoduln erhält, wenn man von einem Stücke der Begrenzung durch das Innere des Polygons zum zugehörigen Stücke übergeht. Unter diesen Funktionen sind insbesondere solche, welche im Inneren des Polygons durchweg eindeutig sind und auf je zwei entsprechenden Punkten des Randes denselben Wert aufweisen[18]). Der Beweis läßt sich genau demjenigen nachbilden, den Riemann in § 12 des ersten Teils seiner Abelschen Funktionen für das besondere Polygon gegeben hat, das aus p übereinander geschichteten Parallelogrammen besteht, die durch $2p-2$ Verzweigungspunkte verbunden sind. Dieser Satz, den ich mir übrigens erst in den letzten Tagen völlig zurechtlegte, schließt, soviel ich sehe, alle die Existenzbeweise, von denen Sie in Ihren Noten sprechen, als spezielle Fälle oder leichte Folgerungen ein. Übrigens ist mein Satz, wie manches, was ich heute schreibe, noch ungenau formuliert; ich müßte zu ausführlich sein, wenn ich das vermeiden wollte; Sie werden leicht meine Meinung erkennen.

[17]) [Vgl. Fußnote [10]) auf S. 626 unten und S. 578 oben.]

[18]) [Damit der Satz gültig ist, muß zu den Voraussetzungen noch die hinzukommen, daß das Polygon keine „*hyperbolischen oder loxodromischen Zipfel*" hat. Vgl. deswegen die unten folgende Nr. CIV.]

7. Lassen Sie mich noch eine Bemerkung über eine andere Ihrer Veröffentlichungen[19]) hinzufügen. Sie sprechen davon, daß die Θ-Funktionen, die aus der Umkehr der algebraischen Integrale an Kurven vom Geschlechte p entstehen, nicht die allgemeinen ihrer Art sind. Daß eben diese Überlegungen in Deutschland allgemein gekannt sind, können Sie nicht wissen; eine ganze Anzahl jüngerer Mathematiker arbeitet daran, die Bedingungen zu finden, durch welche sich die sogenannten Riemannschen Θ-[Funktionen] von den allgemeinen unterscheiden. Dagegen wunderte mich, daß Sie die Konstantenzahl der Riemannschen Θ gleich $4p+2$ angeben, während es doch $3p-3$ sein muß. Haben Sie Riemann, die betr. Entwickelungen, nicht gelesen? Und ist Ihnen die ganze Diskussion, welche *Brill* und *Noether* im 7. Bande der Math. Annalen [1874], S. 300 bis 307 zum Abschluß bringen, unbekannt?

In der Hoffnung, bald wieder von Ihnen zu hören, bin ich

Ihr hochachtungsvoll ergebener

F. Klein.

8. H. Poincaré an F. Klein.

Caen, 5 Juillet 1881.

Monsieur,

J'ai reçu votre lettre que j'ai lue avec le plus vif intérêt. Je vous demande mille pardons de la question que je vous ai posée au sujet du Geschlecht im Sinne der Analysis Situs. J'aurais pu vous éviter la peine de m'y répondre, puisque je trouvais l'explication à la page suivante de votre mémoire. Vous vous rappelez sans doute que, dans une de mes dernières lettres, je vous demandais l'autorisation d'en citer une phrase dans une communication où je me proposais de généraliser vos résultats Vous ne m'avez pas répondu à ce sujet et j'ai pris votre silence pour un acquiescement. J'ai fait cette communication en deux fois, dans les séances du 27 Juin et du 4 Juillet[20]).

Vous trouverez que nous nous sommes rencontrés sur quelques points. Mais la citation que j'ai faite de votre phrase vous sera, je pense, une garantie suffisante.

[19]) [*Sur les fonctions abéliennes.* Comptes rendus, Bd. 92, S. 958/959 (18. April 1881).]

[20]) [Siehe Comptes rendus, Bd. 92, S. 1484—1487 und Bd. 93, S. 44—46; abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 19—22 und S. 23—25.]

Permettez-moi, Monsieur, encore une question; où trouverai-je les travaux de MM. Schwarz et Weierstrass dont vous me parlez, d'abord au sujet de ce théorème que:

„Man kann immer die Halbebene so auf ein Kreisbogenpolygon abbilden:

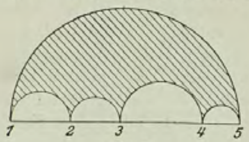


Fig. 7.

daß die Punkte I, II, III, IV, V, welche den 1, 2, 3, 4, 5 auf der Begrenzung der Halbebene entsprechen, beliebige Lage haben."

Ce théorème ne m'était pas inconnu, car je l'ai démontré dans ma communication du 23 Mai[21]). Mais où le trouverai-je dans les travaux de mes devanciers? Est-ce au Tome 70 de Crelle? Où trouverai-je aussi les développements dont vous me parlez dans la phrase suivante:

„Demgegenüber haben Weierstrass und Schwarz bei der von mir berührten Frage der Abbildung von Kreisbogenpolygonen wirkliche Bestimmungen der in Betracht kommenden Konstanten durch konvergente Prozesse gegeben."

Le théorème que vous me dites avoir découvert m'a beaucoup intéressé. Il est clair que, comme vous me le dites, votre résultat contient, comme cas particulier, „alle meine Existenzbeweise". Mais il arrive après.

J'arrive à votre remarque relative aux fonctions abéliennes. Quand j'ai parlé de $4p+2$ constantes, il ne s'agissait pas du nombre des modules. J'ai dit ceci: „Une relation algébrique de genre p peut toujours être ramenée au degré $p+1$. Une relation de degré $p+1$ et de genre p dépend de $4p+2$ paramètres; car une relation *générale* de degré $p+1$ dépend de

$$\frac{(p+1)(p+4)}{2} \text{ paramètres.}$$

Mais il y a:

$$\frac{p(p-1)}{2} - p \text{ points doubles.}$$

Il reste donc $4p+2$ paramètres indépendants. J'ai ainsi, non le nombre des modules, mais une limite supérieure de ce nombre, ce qui me suffisait pour mon objet.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma respectueuse considération,

Poincaré.

21) [Siehe Comptes rendus, Bd. 92, S. 1198—1200; abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 12—15.]

9. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, 9. Juli 1881.

Geehrter Herr!

In vorläufiger Beantwortung Ihres Briefes habe ich etwa Folgendes zu sagen:

1. Es ist mir ganz recht, daß Sie jene Stelle aus meinem Briefe zitiert haben. Bislang besitze ich nur erst Ihre Note vom 27. Juni[22]). Über die Benennung, die Sie dieser Funktionenklasse erteilt haben, war ich einigermaßen erstaunt; denn ich habe ja nichts weiter getan als die Existenz dieser Gruppen bemerkt. Was mich angeht, so werde ich weder von „fuchsiennes" noch von „kleinéennes" Gebrauch machen, sondern bei meinen „Funktionen mit linearen Transformationen in sich" bleiben.

2. Was ich über den Wert der Riemannschen Prinzipien sagte, war nicht scharf genug. Es ist kein Zweifel, daß das „Dirichletsche Prinzip", als überhaupt nicht konklusiv, verlassen werden muß. Man kann es aber vollständig durch strengere Beweisführung ersetzen. Sie finden das näher ausgeführt in einer Arbeit von Schwarz, die ich eben erst in diesen Tagen (zwecks meiner Vorlesung) genauer ansah, und in der Sie auch die Angaben über Konstantenbestimmungen finden, die in Borchardts Journal (Von Arbeiten in Borchardts Journal müssen Sie jedenfalls Bd. 70 [1868/69], 74 [1870/72], 75 [1872/73] ansehen) nur angedeutet sind; dieselbe steht in den Berliner Monatsberichten 1870, S. 767—795[23]).

3. Der allgemeine Existenzbeweis, von dem ich das vorige Mal sprach, gilt natürlich auch für Gruppen, die aus irgendwelchen analytischen (nicht notwendig linearen) Substitutionen zusammengesetzt sind. Es ist merkwürdig, daß in diesem Sinne jede Operationsgruppe Funktionen definiert, die bei ihr ungeändert bleiben. Die „groupes discontinus" haben nur das voraus, daß bei ihnen zugehörige *eindeutige* Funktionen existieren, was allerdings sehr wesentlich ist. Würde man die höheren Fälle durch *eindeutige* Funktionen von *mehreren* Veränderlichen beherrschen können, wie man es in dem besonderen bei Riemann in § 12 [seiner Abelschen Funktionen] behandelten Falle vermöge des Jacobischen Umkehrproblems zu tun pflegt?

So viel für heute. Ich habe mittlerweile mit Herrn Brunel meine älteren Sachen, namentlich auch die Vorlesungshefte von 1877—78 und

22) [Siehe Comptes rendus, Bd. 92, S. 1484—1487; abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 19—22.]

23) [Alle diese Arbeiten von Schwarz sind abgedruckt in Bd. 2 seiner Ges. math. Abhandlungen. Siehe daselbst S. 65ff., 84ff., 175ff., 211ff. und 144ff.]

78—79 (die ich damals habe ausarbeiten lassen) durchgegangen und wird Herr Brunel Ihnen demnächst darüber schreiben.

Hochachtungsvoll

Ihr ergebener

Prof. Dr. F. Klein.

10. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, 4. Dez. 1881
Sophienstraße 10[II].

Sehr geehrter Herr!

Nachdem ich lange über die uns gemeinsam interessierenden Fragen nur beiläufig nachgedacht habe, habe ich heute früh Gelegenheit genommen, die verschiedenen Mitteilungen, wie Sie sie der Reihe nach in den Comptes rendus veröffentlicht haben, im Zusammenhange zu lesen. Ich sehe, daß Sie nun wirklich zu einem Beweise gekommen sind (8. August)[24]: „que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes" und „que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire". Indem ich Ihnen dazu gratuliere, daß Sie so weit gekommen sind, möchte ich Ihnen einen Vorschlag machen, der Ihren und meinen Interessen auf gleiche Weise gerecht wird. Ich möchte Sie bitten, mir für die Mathematischen Annalen einen kurzen oder einen längeren Aufsatz zu schicken, oder, wenn Sie keine Zeit zur Ausarbeitung eines solchen finden, mir einen *Brief* zu schicken, in welchem Sie in großen Zügen Ihre Gesichtspunkte und Resultate angeben. Ich selbst würde dann diesen Brief mit einer Anmerkung begleiten, in welcher ich darlegte, wie sich von mir aus die ganze Sache stellt, und wie gerade das Programm, welches Sie jetzt ausführen, als hodegetisches Prinzip meinen Arbeiten über Modulfunktionen zugrunde lag. Natürlich würde ich diese Anmerkung Ihnen vor dem Druck zur Begutachtung zustellen. — Eine solche Publikation würde zweierlei erreichen: einmal würde, was Ihnen vermutlich erwünscht ist, das Leserpublikum der Math. Annalen auf Ihre Arbeiten mit Entschiedenheit aufmerksam gemacht werden; andererseits würden, auch dem allgemeineren Publikum gegenüber, Ihre Arbeiten in derjenigen Verbindung mit den meinigen stehen, die nun einmal tatsächlich vorhanden ist. Sie werden zwar, wie Sie mir schreiben, diese Beziehungen in Ihrem ausführlichen Mémoire auseinandersetzen; aber bis dahin vergeht viele Zeit, und es liegt mir daran, daß es auch in den Annalen gesagt wird.

[24]) [Siehe Comptes rendus, Bd. 93, S. 301—303; abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 29—31.]

Ich selbst habe mittlerweile eine kleine Schrift über „Riemanns Theorie"[25]) fertiggestellt, die Ihnen vielleicht interessant ist, weil sie diejenige Konzeption der Riemannschen Fläche gibt, mit der R. selbst meines Erachtens eigentlich gearbeitet hat[26]). Vielleicht hat Ihnen Herr Brunel davon erzählt. Ich habe mich sodann in letzter Zeit mit den verschiedenen Existenzbeweisen beschäftigt, welche man an Stelle des Dirichletschen Prinzips gesetzt hat, und habe mich überzeugt, daß die Methoden von *Schwarz* in den Berliner Monatsberichten, 1870, S. 767ff.[27]) allerdings vollkommen ausreichen, um z. B. den allgemeinsten Satz zu beweisen, von dem ich gelegentlich im Sommer schrieb.

Hochachtungsvoll

F. Klein.

11. H. Poincaré an F. Klein.

Paris, 8 Décembre 1881,
rue Gay-Lussac 66.

Monsieur,

Je vous remercie infiniment de l'offre obligeante que vous voulez bien me faire et je suis tout disposé à en profiter. Je vous enverrai prochainement la lettre que vous me demandez; je vous prierai pourtant de me dire quelle place vous pouvez lui consacrer dans les Annales. Je sais que la clientèle de votre journal est nombreuse et que l'étendue que vous pouvez permettre à chaque travail est forcément limité et je ne voudrais pas abuser de votre bienveillance. Quand je saurai quelle longueur je puis donner à ma lettre, je vous l'écrirai immédiatement.

J'aurai prochainement l'honneur de vous envoyer diverses notes relatives à la théorie générale des fonctions, si vous voulez bien les accepter.

J'ai lu dernièrement le mémoire de Schwarz dans les Monatsberichte et ses démonstrations m'ont paru rigoureuses.

Veuillez agréer, Monsieur, mes remerciements et l'expression de ma grande considération,

Poincaré.

[25]) [Abh. XCIX im vorliegenden Bande.]

[26]) Eine kleine betr. Notiz aus den Math. Annalen hier beiliegend: [Es handelte sich um die Notiz: *Über die konforme Abbildung von Flächen* aus Bd. 19, S. 159/160. (Datiert vom Oktober 1881, ausgegeben am 10. November 1881.) Sie ist im vorliegenden Bande nicht abgedruckt, weil ihr Inhalt nur ein Auszug (betreffend symmetrische Riemannsche Flächen) aus der Schrift über Riemann (Abh. XCIX oben) ist].

[27]) [Vgl. die Fußnoten [23]) auf S. 601 und [21]) auf S. 643/644.]

12. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, 10. Dezember 1881.

Sehr geehrter Herr!

Es freut mich, daß meine Aufforderung Ihnen angenehm war; voilà une loi de réciprocité. Was nun Ihre Anfrage angeht, so will ich vor allen Dingen antworten, daß mir Ihr Aufsatz um so gelegener kommt, je *rascher* er kommt. Trifft er noch bis zum 20-sten dss. ein, so bringe ich ihn noch in das 4-te Heft des eben erscheinenden 19-ten Annalenbandes; er wird dann bis Anfang März (spätestens) publiziert sein. Was nun den Umfang angeht, so will ich, da Sie es wünschen, etwa einen *Druckbogen* (16 Seiten) in Vorschlag bringen. Das ist Raum genug, um das Wesentliche deutlich zu sagen, und doch wieder auch für den flüchtigen Leser nicht zu viel. Ich möchte Sie dann bitten, namentlich auch über die *Methoden* Ihrer Beweise die erforderlichen Angaben zu machen, also über die Art, wie Sie die in Betracht kommenden Funktionen wirklich bilden usw. Doch alles das beurteilen Sie besser, als ich es hier vorschreiben könnte.

Noch eins! Ist Ihre Adresse jetzt dauernd in Paris? Und wie ist die gegenwärtige Adresse von Picard? Ich würde glücklich sein, wenn ich auch vom letzteren einen Beitrag für die Annalen haben könnte.

Hochachtungsvoll
Ihr ergebener
F. Klein.

13. H. Poincaré an F. Klein.

Paris, le 17 Décembre 1881,
rue Gay-Lussac 66.

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous adresser le petit travail en question[28]; je n'ai pas, comme vous me le demandiez, exposé succinctement mes méthodes de démonstration. Je n'aurais pu le faire sans dépasser de beaucoup les limites que vous m'aviez fixées. Je sais bien que ces limites n'avaient rien d'absolu. Mais d'un autre côté je ne crois pas qu'une démonstration puisse être résumée; on ne peut en retrancher sans lui enlever sa rigueur et une démonstration sans rigueur n'est pas une démonstration. Je préfèrerais donc vous adresser de temps en temps une série de courtes lettres où je démontrerai successivement les résultats énoncés où du moins les principaux. Ces lettres, vous en feriez, ce que bon vous semblerait.

[28]) [*Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires.* Math. Annalen, Bd. 19, S. 553—564. (Ausgegeben am 13. März 1882.) Abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 92—104.]

J'habite en effet Paris, je suis maître de conférences à la Faculté des Sciences.

Voici l'adresse de Picard:

Professeur Suppléant à la Faculté des Sciences
rue Michelet 13
Paris.

Je vous donne par la même occasion celle d'Appell.

Maître de conférences à l'École Normale Supérieure
rue Soufflot 22
Paris.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

Poincaré.

14. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, 13. Januar 1882.

Sehr geehrter Herr!

Ich habe Ihnen noch nicht persönlich für die Übersendung Ihrer Arbeit gedankt, mit der Sie mich in der Tat in hohem Grade verpflichtet haben. — Wir sind jetzt so weit, daß in den allernächsten Tagen gedruckt wird. Sie werden eine Korrektur bekommen, die ich Sie bitte, nach Durchsicht

„An die Teubnersche Buchdruckerei
Leipzig"

zurückzuschicken. Wollen Sie dabei insbesondere auch die Erklärung durchsehen, welche ich Ihrer Arbeit in dem früher bereits bezeichneten Sinne hinzugefügt habe[29]), und in der ich, soviel an mir ist, gegen die beiden Benennungen „fuchsiennes" und „kleinéennes" protestiere, bezüglich letzterer Schottky zitiere und übrigens Riemann als denjenigen bezeichne, auf den alle diese Untersuchungen zurückgehen. Ich habe mich bemüht, diese Erklärung so maßvoll als möglich zu halten, bitte Sie aber, mir umgehend zu schreiben, wenn Sie noch eine Abänderung wünschen. Dem Verdienste Ihrer Untersuchungen trete ich damit in keiner Weise zu nahe. — Hierüber hinaus habe ich nun aber noch eine eigene kleine Arbeit redigiert, die gleich hinter der Ihrigen abgedruckt werden soll[30]). Dieselbe bringt, auch ohne Beweis, einige auf dem betr. Gebiete liegende

[29]) [Siehe Math. Annalen, Bd. 19, S. 564; abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 104/105.]

[30]) [Gemeint ist die unten folgende Note CI („*Das Rückkehrschnitttheorem*").]

Resultate, vor allem dieses: *Daß man jede algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$, sobald man auf der zugehörigen Riemannschen Fläche p unabhängige Rückkehrschnitte gezogen hat, in einer und nur einer Weise durch $w = \varphi(\eta)$, $z = \psi(\eta)$ auflösen kann, wo η eine diskontinuierliche Gruppe von der Art erfährt, wie Sie sie damals im Anschluß an meinen Brief zur Sprache gebracht haben.* Dieser Satz ist darum so schön, weil diese Gruppe genau $3p - 3$ wesentliche Parameter hat, also ebensoviele, als die Gleichungen des gegebenen p *Moduln* besitzen. Hieran knüpfen sich weitere Überlegungen, die mir interessant scheinen. Um Ihnen dieselben möglichst vollständig mitzuteilen, habe ich die Druckerei angewiesen, Ihnen auch von meiner Arbeit die Korrektur zuzuschicken, die Sie dann ruhig für sich behalten wollen.

Was die *Beweise* angeht, so ist das eine mühselige Sache. Ich operiere immer mit Riemannschen Anschauungen resp. „geometria situs". Das ist schwer ganz deutlich zu redigieren. Ich werde mir alle Mühe geben, dieses mit der Zeit zu tun. Mittlerweile wird es mir sehr erwünscht sein, mit Ihnen hierüber und auch über Ihre Beweise zu korrespondieren. Seien Sie überzeugt, daß ich die Briefe, welche Sie mir in dieser Hinsicht in Aussicht stellen, mit größtem Interesse studieren und dementsprechend eingehend beantworten werde. Wenn Sie wünschen, dieselben in irgendeiner Form zu publizieren, so stehen Ihnen die Math. Annalen selbstverständlich zur Verfügung.

Hochachtungsvoll

Ihr ergebener

F. Klein.

15. H. Poincaré an F. Klein.[31])

Monsieur,

J'ai reçu les épreuves de Teubner, et je vais les lui renvoyer. J'ai lu votre note et je ne vois pas qu'il y ait lieu d'y changer quoi que ce soit. Vous me permettrez cependant de vous adresser quelques lignes pour chercher à justifier mes dénominations. J'attends avec impatience le théorème que vous m'annoncez et qui me paraît des plus intéressants.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

Poincaré.

[31]) [Der Brief trägt kein Datum, ist aber offenbar im Januar 1882 geschrieben.]

16. H. Poincaré an F. Klein.

Paris, 28 Mars 1882.

Monsieur,

Vous avez ajouté à mon travail:

„Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires"

une note où vous exposez les raisons qui vous ont fait rejeter mes dénominations. Vous avez eu la bonté de m'en envoyer les épreuves imprimées en me demandant si j'y désirais quelque changement. Je vous remercie de la délicatesse de votre procédé, mais je ne pouvais en abuser pour vous demander de taire la moitié de votre pensée.

Vous comprenez cependant que je ne puis laisser les lecteurs des Annales sous cette impression que j'ai commis une injustice. C'est pourquoi je vous ai écrit, vous vous le rappelez peut-être, que je ne vous demandais aucun changement à votre note, mais que je vous demanderais la permission de vous adresser quelques lignes pour justifier mes dénominations.

Voici ces lignes; peut-être jugerez vous convenable de les insérer[32]). A mon tour, je vous demanderai si vous désirez que je fasse quelque changement à la rédaction de cette petite note. Je suis prêt à faire tous ceux qui n'altèreraient pas ma pensée.

Veuillez excuser mon importunité et me pardonner ce petit plaidoyer pro domo.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée

Poincaré.

Je vous serais obligé si vous voulez bien me dire l'adresse de M. Hurwitz à qui je désirerais faire hommage d'un exemplaire de mon travail.

Je vous serais bien reconnaissant aussi, si vous pouviez m'indiquer les traits généraux de la démonstration par laquelle vous établissez le théorème énoncé dans votre dernier travail:

Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich[33]).

[32]) [Siehe Math. Annalen, Bd. 20, S. 52/53. (Ausgegeben am 22. Mai 1882.) Abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 106/107.]

[33]) [Nr. CI unten.]

17. F. Klein an H. Poincaré.

Düsseldorf, 3. April 1882.
Adr. Bahnstraße 15.

Sehr geehrter Herr!

Ihre Zusendung, die ich gestern über Leipzig erhalten habe, traf mich eben im Begriffe, Ihnen zu schreiben, um nämlich meine neue Annalennote[34]), die als Korrekturexemplar nun wohl bereits in Ihre Hände gekommen ist, mit ein paar Worten zu begleiten. Zugleich erhielt ich die Note von Prof. Fuchs in den Göttinger Nachrichten[35]). Wenn ich zunächst betreffs letzterer zwei Worte sagen darf, so wäre es dies, daß ich sie für ganz verfehlt bezeichnen muß. Ich habe nur behauptet, daß Fuchs nirgends über „fonctions fuchsiennes" publiziert habe. Hiernach ist die zweite der von ihm angezogenen Arbeiten (die ich mir übrigens zwecks näheren Studiums hierher kommen lassen werde) gegenstandslos. Die erste subsumiert sich allerdings unter die „fonctions fuchsiennes", insofern es sich um Modulfunktionen handelt, aber gerade den eigentlichen Charakter der letzteren, der in der Natur der singulären Linie liegt, hat Fuchs, bei seinem Mangel an geometrischer Anschauung, nicht richtig erkannt, wie bereits Dedekind in Bd. 83 von Borchardts Journal (1877) hervorgehoben hat. Was endlich die Insinuation gegen Schluß der Note betrifft, als sei ich wesentlich durch Fuchs' eigene Untersuchungen zu meinen veranlaßt worden, so ist das historisch einfach unrichtig. Meine Untersuchungen beginnen 1874 mit der Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen[36]). Im Jahre 1876 zeigte ich sodann, daß damit das von Fuchs damals aufgeworfene Problem, alle algebraisch integrierbaren linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu bestimmen, eo ipso erledigt sei[37]). Die Sache ist also gerade umgekehrt, wie Fuchs angibt. Nicht seiner Arbeit entnahm ich die Ideen, sondern ich zeigte, daß sein Thema mit *meinen* Ideen behandelt werden müsse.

Mit Ihrer Darlegung bin ich, wie Sie vermuten werden, auch nicht einverstanden. Wenn es sich um die allgemeine Wertschätzung der Fuchsschen Arbeiten handelt, so werde ich gerne bereit sein, irgendeine *neue* Funktionsklasse, auf die noch niemand Hand gelegt hat, nach ihm zu benennen, oder auch z. B. die Funktionen mehrerer Variabeln, die Fuchs in

[34]) [Math. Annalen, Bd. 20, S. 49—51; unten als Nr. CII abgedruckt („*Das Grenzkreistheorem*").]

[35]) [Göttinger Nachrichten (vom 4. März) 1882, S. 81—84; abgedruckt als Nr. XXXVIII in Bd. 2 der Ges. math. Werke von L. Fuchs, S. 285—287.]

[36]) [Vgl. Abh. LI in Bd. 2 dieser Ausgabe, insbesondere die Fußnoten [4]) und [6]) daselbst.]

[37]) [Vgl. Abh. LII und LIII in Bd. 2 dieser Ausgabe.]

Vorschlag bringt[38]). Die Funktionen aber, welche Sie nach Fuchs benennen, gehörten bereits anderen, ehe Sie den Vorschlag zur Benennung machten. Ich bin auch überzeugt, daß Sie gerade diesen Vorschlag nicht gemacht hätten, wenn Sie damals (zu Anfang) die Literatur gekannt hätten. Sie bieten mir sodann, sozusagen zur Entschädigung, die „fonctions kleinéennes" an. So sehr ich Ihre freundliche Absicht dabei anerkenne, so wenig kann ich dies akzeptieren, weil es eben eine historische Unwahrheit impliziert. Wenn meine Arbeit im 19-ten Bande [der Math. Annalen = Nr. CI unten] so scheinen könnte, als hätte ich mich in der Tat jetzt besonders auf die „kleinéennes" geworfen, so mag die neue Arbeit in Bd. 20 [der Math. Annalen = Nr. CII unten] zeigen, daß ich nach wie vor auch die „fuchsiennes" als meine Domäne betrachte.

Doch genug davon. Ich habe Ihre Note umgehend in die Druckerei geschickt und nur die eine Bemerkung hinzugefügt, daß ich für mein Teil an meiner früheren Darlegung festhalte (wobei ich zugleich das Publikum ausdrücklich auf die Note von Herrn Fuchs aufmerksam mache). Sie werden in allernächster Zeit die Korrektur bekommen, und bitte ich sodann, selbige mir hierher (wo ich mich während der Osterferien aufhalte) zuzuschicken, worauf ich in der Druckerei das Nötige veranlassen werde[39]). Was die Stelle über Schottky angeht, so möchte ich sie auf einen nachgelassenen Aufsatz in Riemanns Werken, S. 413 [der ersten Auflage][40]) aufmerksam machen, wo genau entsprechende Ideen entwickelt sind. Es wird allerdings schwer sein, zu konstatieren, wieviel der Herausgeber, Herr Prof. Weber, da hineingetragen hat. Riemanns Werke erschienen 1876, Schottkys Dissertation 1875, später als Aufsatz im Borchardtschen Journal [Bd. 83] 1877. Nun ist aber die Dissertation von 1875 nur ein Teil derjenigen von 1877, und ich kann aus dem Gedächtnisse nicht sagen, ob die eben hier in Betracht kommende Figur bereits in der Ausgabe von 1875 enthalten ist.

Noch muß ich hinzufügen, daß ich nicht beabsichtige, den Streit wegen der *Benennungen* (nachdem ich Ihrer Erklärung die oben bemerkte Fußnote hinzugefügt habe) von mir aus ferner fortzusetzen. Nur wenn ich erneut dazu veranlaßt werden sollte, würde ich eine, dann allerdings sehr ausführliche und sehr offenherzige Darstellung des ganzen Sachverhalts geben. Lassen sie uns lieber darin konkurrieren, wer von uns die ganze hier in Betracht kommende Theorie am meisten zu fördern geeignet ist!

[38]) Sind dieselben wirklich *eindeutig*? Ich verstehe nur, daß sie in jedem Wertsysteme, welches sie erreichen, *unverzweigt* sind. Doch kann ich mich da täuschen.

[39]) Ihre Note kommt unmittelbar hinter die meinige zu stehen!

[40]) [Zum Folgenden vgl. die Ausführungen *Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen*, S. 577ff. oben, wo auch die Zitate ausführlicher gegeben sind.]

Ich meine, an meinem Teile durch meine neue Note einen gewissen Fortschritt erzielt zu haben. Eine Reihe von Theoremen über algebraische Funktionen beweist man vermöge der neuen η-Funktion sofort, z. B. den Satz, den ich in meiner Schrift über Riemann nur erst als wahrscheinlich bezeichnete, daß nämlich eine Fläche $p > 0$ niemals unendlich viele *diskrete* eindeutige Transformationen in sich besitzen kann (vermöge derer sie in eine unendliche Zahl „äquivalenter Fundamentalpolygone" zerlegt erscheinen würde)[41]. — Dann ferner den Satz, daß sich verschiedene von Picard gegebene Sätze von $p = 0$ auf den Fall eines beliebigen p übertragen usw.

Was die Methoden betrifft, durch die ich meine Sätze beweise, so schreibe ich davon, sobald ich dieselben noch mehr abgeklärt habe. Können Sie mir nicht mittlerweile mitteilen, welche die Ideen sind, die Sie eben jetzt verfolgen? Ich brauche kaum hinzuzufügen, daß wir in den Math. Annalen jeden Beitrag, den Sie uns geben wollen, mit Freude abdrucken werden. Es wird sehr viel daran liegen, mit Ihnen in regem Verkehr zu bleiben. Für mich ist die lebendige Verbindung mit gleichstrebenden Mathematikern immer die Vorbedingung zur eigenen mathematischen Produktion gewesen.

Hochachtungsvoll

Ihr ergebener

F. Klein.

Die Adresse von Dr. Hurwitz ist bis auf weiteres:

Hildesheim, Langer Hagen.

18. H. Poincaré an F. Klein.

Paris, 4 Avril 1882.

Monsieur,

Je viens de recevoir votre lettre et je m'empresse de vous répondre. Vous me dites que vous désirez clore un débat stérile pour la science et je ne puis que vous féliciter de votre résolution. Je sais qu'elle ne doit pas vous coûter beaucoup puisque dans votre note ajoutée à ma dernière lettre, c'est vous qui dites le dernier mot, mais je vous en sais gré cependent. Quant à moi, je n'ai ouvert ce débat et je n'y suis entré que pour dire une fois et une seule mon opinion qu'il m'était impossible de taire. Ce n'est pas moi qui le prolongerai, et je ne prendrais de nouveau la parole que si j'y étais forcé; d'ailleurs je ne vois pas trop ce qui pourrait m'y forcer.

[41]) [Diesen Beweis des Satzes hat H. Poincaré später unter Berufung auf die gegenwärtige Briefstelle veröffentlicht in seiner Arbeit *Sur un théorème de M. Fuchs*, Acta Math., Bd. 7 (1884/85), S. 1—32. Vgl. daselbst S. 16.]

Si j'ai donné votre nom aux fonctions kleinéennes, c'est pour les raisons que j'ai dites et non pas comme vous l'insinuez, *zur Entschädigung*; car je n'ai à vous dédommager de rien; je ne reconnaîtrai un droit de propriété antérieur au mien que quand vous m'aurez montré que l'on a avant moi étudié la discontinuité des groupes et l'uniformité des fonctions dans un cas tant soit peu général et qu'on a donné de ces fonctions des développements en séries. Je réponds à une interrogation que je trouve en note à la fin d'une page de votre lettre. Parlant des fonctions définies par M. Fuchs au tome 89 de Crelle, vous dites: „Sind diese Funktionen wirklich eindeutig? Ich verstehe nur, daß sie in jedem Wertsysteme, welches sie erreichen, unverzweigt sind." — Voici ma réponse, les fonctions étudiées par M. Fuchs se partagent en trois grandes classes; celles des deux premières sont effectivement uniformes; celles de la troisième ne sont en général que unverzweigt; elles ne sont uniformes que si on ajoute une condition à celles énoncées par M. Fuchs. Ces distinctions ne sont pas faites dans le premier travail de M. Fuchs; on les trouve dans deux notes additionelles, malheureusement trop concises et inserées l'une au Journal de Borchardt 90, l'autre aux Göttinger Nachrichten.[42])

Je vous remercie beaucoup de votre dernière note que vous avez eu la bonté de m'envoyer. Les résultats que vous énoncez m'interessent beaucoup, voici pourquoi; je les avais trouvés il y a déjà quelque temps, mais sans les publier, par ce que je désirais éclaircir un peu la démonstration; c'est pourquoi je désirerais connaître la vôtre quand vous l'aurez éclaircie de votre côté.

J'espère que la lutte, à armes courtoises, d'ailleurs, à laquelle nous venons de nous livrer à propos d'un nom, n'altèrera pas nos bonnes relations. Dans tous les cas, ne vous en voulant nullement pour d'avoir pris l'offensive, j'espère que vous ne m'en voudrez pas non plus de m'être défendu. Il serait ridicule d'ailleurs, de nous disputer plus longtemps pour un nom, „Name ist Schall und Rauch" et après tout, ça m'est égal, faites comme vous voudrez, je ferai comme je voudrai de mon côté.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

Poincaré.

[42]) [*Auszug aus einem Schreiben des Herrn L. Fuchs an C. W. Borchardt.* Crelles Journal, Bd. 90 (1880/81), S. 71—73 und *Über die Funktionen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen entstehen.* Göttinger Nachrichten (vom 3. Juli) 1880, S. 445—453. Die beiden Noten sind abgedruckt als Nr. XXXIII und Nr. XXXIV in Bd. 2 der Ges. math. Werke von L. Fuchs, S. 219 bis 224 und S. 225—227. — Vgl. auch oben S. 583.]

19. H. Poincaré an F. Klein.

Paris, 7 Avril 1882.

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous renvoyer corrigée l'épreuve de ma lettre. Maintenant que ce petit débat est terminé et je l'espère pour ne plus se renouveler, permettez-moi de vous remercier de la courtoisie dont vous n'avez cessé de faire preuve pendant tout le temps qu'il a duré.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

Poincaré.

20. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, 7. Mai 1882.
Sophienstraße 10.

Sehr geehrter Herr!

Vor kurzem las ich Ihre Note in den Comptes rendus vom 10. April[43]) 1882. Dieselbe hat mich um so mehr interessiert, als ich glaube, daß Ihre jetzigen Betrachtungen mit den meinigen auch der Methode nach eng verwandt sind. Ich beweise meine Sätze durch *Kontinuität*, indem ich die beiden Lemmata voraussstelle: 1. daß zu jeder „groupe discontinu" eine Riemannsche Fläche zugehört, und 2. daß zu der einzelnen zweckmäßig zerschnittenen Riemannschen Fläche immer[44]) nur *eine* solche Gruppe gehören kann (sofern ihr überhaupt eine Gruppe zugehört).

Die Reihenentwicklungen, wie Sie dieselben aufstellen, habe ich bislang noch ganz außer Betracht gelassen. Wie beweisen sie eigentlich die Existenz der Zahl m, für welche $\sum \frac{1}{(\gamma_i \eta + \delta_i)^m}$ absolut konvergiert? Und haben sie für dieselbe eine *genaue* oder nur eine approximative untere Grenze?

Ich selbst habe mittlerweile den betr. Sätzen wieder allgemeinere Gestalt gegeben, und da die Fertigstellung einer Annalennote im Augenblicke, wo ich sehr wenig Zeit habe, sich noch etwas hinausziehen muß, so schreibe ich Ihnen wieder davon. Im Falle meines ersten Satzes wurde die Gesamtkugel η mit Ausnahme unendlich vieler *Punkte* von den wiederholten Reproduktionen des Fundamentalbereiches überdeckt. Im Falle des zweiten Satzes bleibt das Innere einer Kreisfläche, aber nur einer *einzigen*, unbedeckt. Ich habe jetzt die Existenz von Darstellungen konstatiert (die für die einzelne Riemannsche Fläche wieder immer und immer

43) [Comptes rendus, Bd. 94, S. 1038—1040; abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 41—43. Vgl. dazu die Bemerkungen oben auf S. 584/585.]

44) d. h. unter den Beschränkungen des jeweiligen Satzes.

auch nur in einer Weise vorhanden sind), bei welcher *unendlich viele Kreisflächen* ausgeschlossen werden. In dieser Richtung formuliere ich hier nur den allereinfachsten Satz (bei welchem durchaus unverzweigte Darstellung der Riemannschen Fläche vorausgesetzt wird)[45]).

Sei $p = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m$, wo vorab keines der $\mu = 1$ sein mag. So nehme man auf der Riemannschen Fläche m Punkte $O_1, \ldots O_m$, und lege von O_1 in der bekannten Weise $2\mu_1$ Querschnitte A_1, B_1; A_2, B_2; $\ldots A_{\mu_1}, B_{\mu_1}$; von O_2 $2\mu_2$ Querschnitte usw. Andererseits konstruiere man auf der η-Kugel m auseinanderliegende Kreise und innerhalb des von letzteren gemeinsam begrenzten Raumes ein Kreisbogenpolygon, das von $4\mu_1$ Kreisen begrenzt ist, welche auf dem ersten Fundamentalkreise senkrecht stehen, dann ferner von $4\mu_2$ Kreisen, die auf dem zweiten Fundamentalkreise senkrecht stehen, usw. (also ein Kreisbogenpolygon, das m-fachen Zusammenhang hat). Die begrenzenden Kreise werden paarweise in der bekannten Reihenfolge $A_1, B_1, A_1^{-1}, B_1^{-1}, A_2, B_2 \ldots$ zusammengeordnet, und zwar durch lineare Substitutionen des η, bei denen jeweils der betreffende Fundamentalkreis invariant bleibt. Überdies sei das Produkt der betreffenden linearen Substitutionen also etwa: $A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \ldots A_{\mu_1}^{-1} B_{\mu_1}^{-1}$ allemal der Identität gleich. *Dann gibt es immer eine und nur eine analytische Funktion, welche die zerschnittene Riemannsche Fläche auf ein derart beschaffenes Kreisbogenpolygon abbildet.* — Der Fall, daß eines der μ gleich 1 wird, unterscheidet sich nur dadurch, daß dann der zugehörige Fundamentalkreis sich auf einen *Punkt* zusammenzieht und die entsprechenden linearen Substitutionen in diejenigen „parabolischen" übergehen, welche jenen Punkt festlassen. — Doch genug für heute. Wäre es nicht möglich, eine vollständige Kollektion von Separatabzügen Ihrer einschlägigen Arbeiten zu bekommen? Wenn es angeht, beginne ich nach Pfingsten in meinem Seminare eine Reihe von Vorträgen über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich[46]), und möchte dabei meinen Zuhörern eine solche Kollektion zur Verfügung stellen.

Hochachtungsvoll
Ihr
F. Klein.

21. H. Poincaré an F. Klein.

Paris, 12 Mai 1882.

Monsieur,

J'ai bien tardé à vous répondre et je vous prie de m'en excuser, car j'ai été forcé de faire une petite absence. Je crois comme vous que

45) [Vgl. Abh. CIII, Abschnitt IV („*Das allgemeine Fundamentaltheorem*").]

46) [Vgl. oben S. 585.]

nos méthodes se rapprochent beaucoup et diffèrent moins par le principe général que par les détails. Pour les lemmes dont vous me parlez, le premier, je l'ai établi par les considérations des développements en séries et vous, à ce que je pense, à l'aide du théorème dont vous m'avez parlé dans une de vos lettres de l'année dernière. Pour le second lemme, il ne présente pas de difficulté et il est probable que nous l'établissons de la même manière. Une fois ces deux lemmes établis, et c'est en effet par là que je commence, ainsi que vous le faites vous même, j'emploie comme vous la *continuité*, mais il y a bien de manières de l'employer et il est possible que nous différions dans quelques détails.

Vous me demandez comment j'établis la convergence de la série $\sum \frac{1}{(\gamma_i \eta + \delta_i)^{2m}}$. J'en ai donné deux démonstrations mais qui sont toutes deux trop longues pour tenir dans une lettre; je les publierai prochainement. La première est fondée en principe sur ce fait que la surface du cercle fondamental est finie. La seconde, exige la même hypothèse, mais elle est fondée sur la géométrie non-euclidienne. Quelle est maintenant la limite inférieure du nombre m. C'est $m = 2$. Ici si l'on suppose m entier on a une limite exacte. En ce qui concerne les séries rélatives aux fonctions *Zétafuchsiennes*, je n'ai au contraire qu'une limite approximative. Ce qui m'a le plus intéressé dans votre lettre c'est ce que vous me dites au sujet de fontions qui admettent comme espaces lacunaires une infinité de cercles. J'ai rencontré aussi de semblables fonctions et j'en ai donné un exemple dans une ou deux de mes notes. Mais j'y suis arrivé par une voie absolument différente de la vôtre. Il est probable que vos fonctions et les miennes doivent avoir une étroite parenté; cependant il n'est nullement évident qu'elles soient identiques. Je croirais volontiers que votre méthode ainsi que la mienne est susceptible d'une généralisation très étendue et qu'elles conduiraient toutes deux à une grande classe de transcendantes comprenant comme cas particuliers celles que nous avons déjà rencontrées.

Vous me parlez de tirages à part de mes travaux. Voulez-vous parler de mes notes des Comptes rendus. Je n'en ai pas fait faire de tirages à part et il serait malheureusement difficile maintenant d'en obtenir, au moins pour les premières d'entre elles.

Je vous enverrai prochainement et dès que je les aurai reçus les tirages à part de deux travaux plus récents; le premier „sur les courbes définies par les équations différentielles"[47]). Il s'agit d'étudier la forme géométrique des courbes définies par les équations différentielles du 1^{er} ordre. Malheureusement la première partie de ce mémoire est seule imprimée

[47]) [Journal de Liouville, 3. Serie, Bd. 7, S. 375—422 (Nov. und Dec. 1881).]

jusqu'ici et ne contient que les préliminaires. Le second travail a pour objet les formes cubiques ternaires, dont je veux faire l'étude arithmétique. J'ai voulu rappeler dabord certains résultats algébriques qui remplissent la 1^{ere} partie du mémoire. Cette 1^{ere} partie a seule été imprimée dans le 50^{e} cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique[48]), le reste devant paraître dans le 51^{e} cahier[49]). Cette 1^{ere} partie ne vous intéressera donc pas beaucoup. Il y a cependant une étude sur les transformations linéaires et sur certains groupes *continus* contenus dans le groupe linéaire à 3 et 4 variables.

A propos, je ne me souviens plus si je vous ai envoyé ma thèse, ainsi que des travaux plus anciens sur les équations différentielles et un travail sur les fonctions à espaces lacunaires.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

Poincaré.

22. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, 14. Mai 1882.

Sehr geehrter Herr!

In Beantwortung Ihres eben eintreffenden Briefes möchte ich Ihnen mit zwei Worten mitteilen, wie ich die „Kontinuität" verwende. Freilich nur im Prinzip; denn die Ausführung im einzelnen, die bei der Redaktion viel Mühe machen wird, läßt sich jedenfalls mannigfach modifizieren. Ich will mich auf den Fall der durchaus unverzweigten η-Funktion der zweiten Art, wie ich sie in meiner Note nannte, beschränken. Hier handelt es sich vor allem um den Nachweis, daß die beiden zu Vergleich kommenden Mannigfaltigkeiten: die Mannigfaltigkeit der in Betracht kommenden Substitutionssysteme und andererseits die Mannigfaltigkeit der überhaupt existierenden Riemannschen Flächen, nicht nur dieselbe Dimensionenzahl ($6p-6$ reelle Dimensionen) besitzen, sondern daß sie auch *analytische* Mannigfaltigkeiten mit *analytischen* Grenzen sind (im Sinne der von Weierstrass eingeführten Terminologie). Diese beiden Mannigfaltigkeiten sind nun infolge des ersten in meinem vorigen Briefe angeführten Lemmas (1-x)-deutig aufeinander bezogen, wo x dem zweiten Lemma zufolge für die verschiedenen Partien der zweiten Mannigfaltigkeit nur 0 oder 1 sein kann. Nun aber erweist sich jene Beziehung als eine *analytische* und zwar, wie wieder aus den beiden Hilfssätzen folgt, als eine analytische *von nirgends verschwindender Funktionaldeterminante*. Hieraus schließe ich, daß x durchweg 1 sein muß. Gäbe es nämlich einen Übergang von

[48]) [Siehe daselbst S. 199—253 (Februar 1881).]
[49]) [Siehe daselbst S. 45—91 (1882).]

Gebieten mit $x = 0$ zu solchen mit $x = 1$, so würden den Punkten des Übergangsgebietes wegen des analytischen Charakters der Zuordnung bestimmte (wirklich erreichbare) Punkte der anderen Mannigfaltigkeit entsprechen und für diese müßte dann, dem Bemerkten zuwider, die Funktionaldeterminante der Beziehung verschwinden. So weit mein Beweis.

Einen ganz anderen, doch auch auf Kontinuitätsbetrachtungen beruhenden, teilte mir Herr Schwarz mit, als ich ihn neulich (am 11. April) in Göttingen besuchte. Ohne gerade von ihm autorisiert zu sein, meine ich Ihnen doch auch davon schreiben zu sollen. Schwarz denkt sich die Riemannsche Fläche in geeigneter Weise zerschnitten, sodann unendlichfach überdeckt und die verschiedenen Überdeckungen in den Querschnitten so zusammengefügt, daß eine Gesamtfläche entsteht, welche der Gesamtheit der in der η-Ebene nebeneinander zu legenden Polygonen entspricht. Diese Gesamtfläche ist, sofern man von solchen Attributen bei unendlich ausgedehnten Flächen sprechen kann (was eben erläutert werden muß), im Falle der η-Funktion 2. Art (auf die sich Schwarz zunächst beschränkte) *einfach zusammenhängend und einfach berandet*, und es handelt sich also nur darum, einzusehen, daß man auch eine solche einfach zusammenhängende, einfach berandete Fläche in der bekannten Weise auf das Innere eines Kreises abbilden kann. — Dieser Schwarzsche Gedankengang ist jedenfalls sehr schön.

Sie fragen wegen der Separatabzüge. Ich möchte Ihnen da vor allem natürlich nicht lästig fallen, und dies um so weniger, als ich mir ja alle Ihre Publikationen, mit alleiniger Ausnahme Ihrer Thèse, immer verschaffen kann. Aber lieb wäre mir freilich, eine möglichst vollständige Sammlung derselben zu haben. Wenn Sie mir also einige Sachen zuschicken können (ich besitze noch keine derselben), so wird es mir sehr angenehm sein.

Haben sie vielleicht einmal Lies Theorie der Transformationsgruppen gelesen? Lie denkt sich die in seine Gruppen eingehenden Parameter immer als komplexe Größen; es wäre interessant zu sehen, wie sich seine Resultate vervollständigen ließen, wenn man auch solche Gruppen in Betracht zöge, die nur durch *reelle* Wiederholung gewisser unendlich kleiner Operationen entstehen.

Hermite schickte mir vor längerer Zeit eine Nummer seines lithographierten Cours d'Analyse. Wäre es vielleicht möglich (natürlich gegen Bezahlung) das Ganze zu bekommen? Ich würde das für mein Seminar in Anbetracht der Zwecke, die ich eben jetzt verfolge, mit besonderer Freude begrüßen.

Wie immer

Ihr ergebener

F. Klein.

23. H. Poincaré an F. Klein.

Paris, 18 Mai 1882.

Monsieur,

Je n'ai pas besoin de vous dire combien votre dernière lettre m'a intéressé. Je vois clairement maintenant que votre démonstration et la mienne ne peuvent différer que par la terminologie et par des détails; ainsi il est probable que nous n'établissons pas de la même manière le caractère analytique de la relation qui lie les deux Mannigfaltigkeiten dont vous parlez; pour moi, je relie ce fait à la convergence de mes séries, mais il est évident qu'on peut arriver au même résultat sans passer par cette considération.

Les idées de M. Schwarz ont une portée bien plus grande[50]; il est clair que le théorème général en question, s'il était démontré, aurait son application dans la théorie d'un très grand nombre de fonctions et en particulier dans celle des fonctions définies par des équations différentielles *non linéaires*. C'est en étudiant de pareilles équations que j'avais été conduit de mon côté à chercher si une surface de Riemann à une infinité de feuillets pouvait être étendue sur un cercle, et j'avais été amené au problème suivant, qui permettrait de démontrer la possibilité de cette extension:

On donne une équation au différences partielles

$$X_1 \frac{d^2u}{dx^2} + X_2 \frac{d^2u}{dx\,dy} + X_3 \frac{d^2u}{dy^2} + X_4 \frac{du}{dx} + X_5 \frac{du}{dy} = 0$$

et une demi-circonférence $AMBO$. X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont des fonctions données de x et de y; ces fonctions sont analytiques à l'intérieur de la demi-circonférence et cessent de l'être sur son périmètre. Peut-on trouver toujours une fonction u de x et de y satisfaisant à l'équation, analytique à l'intérieur de la demi-circonférence, tendant vers 1 quand le point x, y se rapproche de la demi-circonférence et vers 0 quand il se rapproche du diamètre AOB? Tous mes efforts dans ce sens ont été jusqu'ici infructueux, mais j'espère que M. Schwarz qui a si bien résolu le problème dans le cas le plus simple, sera plus heureux que moi.

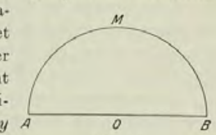


Fig. 8.

Je vous envoie les tirages à part de mes travaux anciens, et j'espère pouvoir vous adresser d'ici peu les autres mémoires plus récents que je vous ai annoncés et dont je ne saurais tarder à recevoir le tirage à part.

[50]) [Vgl. die beiden oben, auf S. 585 genannten Arbeiten H. Poincarés.]

Quant au cours lithographié de M. Hermite il est édité chez Hermann, Libraire des Lycées, rue de la Sorbonne; le prix de l'abonnement est de 12 Francs. Je ne crois pas que l'éditeur envoie de tirage à part à M. Hermite.

Veuillez agréer l'assurance de mes sentiments les plus dévoués et de mon estime sincère,

Poincaré.

24. F. Klein an H. Poincaré.

Leipzig, den 19. Sept. 82.
Sophienstr. 10 II.

Sehr geehrter Herr!

Im Begriffe, meinerseits eine längere Arbeit über die neuen Funktionen abzuschließen[51]), habe ich soeben Ihren Aufsatz in Bd. 19 der Math. Annalen noch einmal durchgesehen. Es ist da ein Punkt, den ich nicht verstehe: Sie sprechen an zwei Stellen (S. 558 Mitte, und S. 560 unten[52])) von „fonctions fuchsiennes", die nur in einem Raume existieren, der von unendlich vielen Kreisen begrenzt ist, welche auf dem Hauptkreise senkrecht stehen. Nun kenne ich sehr wohl solche Funktionen (wie ich Ihnen schon vor einem Vierteljahr schrieb), die unendlich viele Kreise als natürliche Grenze haben. Aber an der zugehörigen Gruppe partizipieren immer solche Substitutionen, welche nur den einzelnen, beliebig herausgegriffenen Begrenzungskreis invariant lassen. Nun definieren Sie „fuchsiennes" als solche Funktionen, deren Substitutionen *sämtlich* reell sind (S. 554 [= S. 93 in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré]), und diese Definition wird durch die Verallgemeinerung auf S. 557 [= S. 96 in Bd. 2 der Oeuvres], wo an Stelle der reellen Achse ein beliebiger Kreis tritt, nicht wesentlich modifiziert. Die von mir gekannten Funktionen fallen also nicht unter Ihre Definition der „fuchsiennes". Ist da ein Mißverständnis auf meiner Seite oder eine Ungenauigkeit des Ausdrucks auf der Ihrigen? Was meine Arbeit angeht, so beschränke ich mich darauf, die geometrische Auffassung darzulegen, vermöge deren ich im Riemannschen Sinne die neuen Funktionen definiert

[51]) [Gemeint ist die unten folgende Abh. CIII.]

[52]) [Bzw. S. 96, Zeile 11 ff. von unten und S. 98, Zeile 5 ff. von oben in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré. — Es handelt sich dort um eine irrtümliche Einführung der „hyperbolischen Zipfel", welche von Klein in dem unten folgenden Aufsatz CIV und von Nörlund in den Anmerkungen 25 und 30 auf S. 621/622 bzw. S. 623 von Bd. 2 der Poincaré-Ausgabe richtiggestellt wurde. H. Poincaré selbst hat seine Behauptung, allerdings in sehr knapper Form, zurückgezogen am Schlusse von § 1 seiner Arbeit *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes*, Acta Math. Bd. 5 (1884), S. 211 = Oeuvres, Bd. 2, S. 404.]

denke. Dabei sind, wie es in der Natur der Sache liegt, viele Berührungspunkte auch mit Ihrer geometrischen Auffassung des Gegenstandes. Die allgemeinste Gruppe, welche ich in Betracht ziehe, erzeuge ich aus einer beliebigen Zahl „isolierter" Substitutionen und aus einer Anzahl von Gruppen „mit Hauptkreis" (der reell oder imaginär sein kann oder auch in einem Punkt ausgeartet) durch „Ineinanderschiebung". Die Theoreme meiner beiden Annalennoten subsumieren sich dann als spezielle Fälle unter einen allgemeinen Satz, der etwa so lautet: *daß zu jeder Riemannschen Fläche mit beliebig vorgegebener Verzweigung und Zerschneidung immer eine und nur eine η-Funktion des betreffenden Typus zugehört.*

Von Mittag-Leffler hörte ich, daß Sie eben auch mit größeren Ausarbeitungen beschäftigt sind. Ich brauche nicht zu sagen, wie sehr es mich interessieren wird, darüber Genaueres zu erfahren. Wenn Sie in einem Monate in Paris sind, werden Sie meinen Freund S. Lie kennen lernen, der eben ein paar Tage bei mir zu Besuch war und der, obwohl selbst bislang nicht Funktionentheoretiker, doch lebhaft sich für die Fortschritte interessiert, die die Funktionentheorie in neuerer Zeit gemacht hat.

Hochachtungsvoll

Ihr

F. Klein.

25. H. Poincaré an F. Klein.

Nancy, le 22 Septembre 1882.

Monsieur,

Voici quelques détails sur ces fonctions dont j'ai parlé dans ma note des Annales et dont la limite naturelle est formée d'une infinité de cercles[53]). Pour plus de simplicité dans l'exposition, je prendrai pour exemple un cas très-particulier. Supposons quatre points $abcd$ sur le cercle fondamental et quatre cercles coupant orthogonalement celui-ci: le 1er en a et en b, le 2^{d} en b et en c; le 3^{e} en c et en d; le 4^{e} en d et en a. On obtient ainsi un quadrilatère curviligne. Considérons deux substitutions (hyperboliques ou paraboliques) la 1^{ere} changeant le cercle ab dans le cercle ad; la 2de changeant le cercle cb dans le cercle cd. Les Wiederholungen de notre quadrilatère vont recouvrir la surface du cercle fondamental, ou une portion seulement de cette surface; mais dans tous les cas le groupe sera évidemment discontinu. On reconnaît aisément que le cercle fondamental ne sera recouvert tout entier que dans un seul cas; lorsque les quatre points $abcd$ seront harmoniques et que les deux sub-

[53]) [Vgl. Fußnote [52]) auf der vorigen Seite.]

stitutions (ab, ad) et (cb, cd) seront paraboliques. On a affaire alors à la fonction modulaire. Dans tous les autres cas, on trouve que les Wiederholungen en question ne recouvrent qu'un domaine limité par une infinité de cercles. Maintenant le plan tout entier peut-être abgebildet sur notre quadrilatère et de telle façon que deux points *correspondants* du périmètre correspondent au même point du plan. Cette Abbildung définit une fonction n'existant que dans le domaine recouvert par les Wiederholungen. Mais ici il faut faire une remarque importante. Le groupe dérivé des deux substitutions (ab, ad) et (cb, cd) peut-être considéré comme engendré d'une autre manière. Considérons quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 coupant tous quatre orthogonalement le cercle fondamental et ne se coupant pas entre eux de façon à être extérieurs les uns aux autres. Soit deux substitutions changeant C_1 en C_2 et C_3 en C_4; le groupe qui en dérive est évidemment discontinu et si les 4 cercles sont convenablement choisis, il peut être identique au groupe dont il a été question plus haut. La portion du plan extérieure aux 4 cercles est une sorte de quadrilatère qui peut être abgebildet sur une surface de Riemann de genre 2 et qui engendre ainsi une fonction existant dans tout le plan. Voilà donc le même groupe donnant naissance à deux fonctions essentiellement différentes. On peut se poser à ce sujet une foule de questions délicates que je ne puis aborder ici.

En résumé, vous voyez qu'il s'agit bien de fonctions n'existant que dans un domaine limité par une infinité de cercles et cependant de „fonctions fuchsiennes" puisque toutes les substitutions du groupe conservent le cercle fondamental. Chacun des cercles de la frontière est conservé par une des substitutions du-groupe, laquelle conserve en même temps le cercle fondamental. Vous savez en effet que toute substitution hyperbolique conserve tous les cercles qui passent par les deux points doubles.

J'apprends avec plaisir que vous préparez un grand travail sur l'objet qui nous intéresse tous deux. Je le lirai avec le plus grand plaisir. Comme vous l'a dit M. Mittag-Leffler je prépare moi-même un travail sur ce sujet; mais vu sa longueur, je l'ai partagé en cinq mémoires [54]):

le 1er qui va paraître cette année, sur les groupes à substitutions réelles, (que j'ai appelés groupes fuchsiens),

le 2d sur les fonctions fuchsiennes; j'en acheverai prochainement la rédaction,

le 3e sur les groupes et fonctions plus générales que j'ai appelées kleinéennes.

[54]) [Ausführliche Zitate sind oben auf S. 586 gegeben.]

Dans le 4e j'aborderai un ordre de questions que j'ai laissées de côté dans le deuxième mémoire; c'est à dire la démonstration de l'existence de fonctions satisfaisant à certaines conditions, par exemple la démonstration de ce fait qu'à toute surface de Riemann correspond une semblable fonction et la détermination des constantes correspondantes.

Enfin dans le 5e je parlerai des fonctions zétafuchsiennes et de l'intégration des équations linéaires.

Je dois retourner à Paris après demain; je serai donc là au moment du passage de M. Lie. Je serais désolé de perdre l'occasion de voir ce célèbre géomètre. Vous avez dû recevoir la première partie de mon travail sur les courbes définies par les équations différentielles. Je vous enverrai prochainement la seconde partie; je vous enverrai en même temps mon mémoire sur les formes cubiques [55]).

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré.

[Schlußbemerkung.

Mit diesem Briefe fand die Korrespondenz seinerzeit ihr Ende. Ich vermochte es nur noch, die Abh. CIII fertigzustellen und mußte mich dann, wegen des Versagens meiner Gesundheit, von der weiteren Mitarbeit an der Theorie der automorphen Funktionen zurückziehen, wie schon oben auf S. 585 und in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 258 ausgeführt wurde. Auf die Übersendung meiner Arbeit habe ich von H. Poincaré keine Antwort mehr erhalten. Auch spätere persönliche Bezugnahme haben die hier berührten Fragen nur wenig geklärt. K.]

[55]) [Vgl. die Zitate in den Fußnoten [48]), [49]) auf S. 615, oben.]

CI. Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich.

(Erste Mitteilung. [Das Rückkehrschnitttheorem.])

[Math. Annalen Bd. 19 (1882).]

Im Anschlusse an die vorstehende Note des Herrn H. Poincaré[1]) will ich einige Sätze veröffentlichen, welche sich auf demselben Gebiete bewegen und der Aufmerksamkeit der Mathematiker nicht unwert erscheinen. Allerdings muß ich gestehen, daß ich den Hauptsatz bislang nur durch gewissermaßen irreguläre Methoden bewiesen habe. Hoffentlich gelingt es mir, dieselben zu ordnen und völlig durchsichtig zu gestalten; ich werde dieselben dann in ausgearbeiteter Form dem Publikum unterbreiten.

Sei eine Riemannsche Fläche gegeben, deren p ich, um nicht immer der Ausnahmestellung der niedersten Fälle gedenken zu müssen, größer als Eins voraussetzen will. So ziehe ich auf derselben irgend p sich selbst und einander nicht schneidende Rückkehrschnitte $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Ich betrachte sodann solche auf der Fläche existierende komplexe Funktionen des Ortes[2]), ξ, welche nirgendwo verzweigt sind, auch nirgendwo Kreuzungspunkte besitzen, und die sich nach Durchlaufung eines beliebigen auf der Fläche konstruierbaren geschlossenen Weges linear $\left(\text{also in der Form } \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}\right)$ reproduzieren. Man zeigt leicht, daß es, von linearen Substitutionen abgesehen, denen man das einzelne ξ unterwerfen mag, allemal genau ∞^{3p-3} derartige Funktionen ξ gibt.[3]) Ich sage nun, *daß unter diesen ξ immer eine und nur eine ausgezeichnete Funktion η existiert, welche von unserer zerschnittenen Fläche eine besonders einfache Abbildung liefert.* Um nicht durch den Wert $\eta = \infty$ behindert zu sein, will ich mir die komplexen

[1]) [Gemeint ist der schon mehrfach erwähnte Aufsatz H. Poincarés in Bd. 19 der Math. Annalen. Vgl. die ausführlichen Zitate auf S. 586 und S. 604 des vorliegenden Bandes.]

[2]) Wegen dieser Redeweise und der sonstigen im Texte zugrunde gelegten Anschauungen vergleiche [die oben abgedruckte Abh. XCIX.]

[3]) [Vgl. hierzu Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 585.]

Werte von η auf einer Kugel gedeutet denken. *Dann überdeckt auf der η-Kugel das Bild unserer zerschnittenen Riemannschen Fläche einen $2p$-fach zusammenhängenden, überall einfach ausgebreiteten Flächenteil.*[1]) — Dieser Flächenteil hat, den verschiedenen Ufern der Rückkehrschnitte $A_1, A_2, \ldots, A_p$ entsprechend, natürlich $2p$ Randkurven; ich will dieselben bzw. mit $A'_1, A'_2, \ldots, A'_p$ und $A''_1, A''_2, \ldots, A''_p$ bezeichnen.

Alles folgende ist nun eine einfache Konsequenz aus dem hiermit gegebenen Hauptsatze.

Zunächst ist deutlich, daß jede Randkurve A'_i aus der zugehörigen A''_i durch eine lineare [hyperbolische oder loxodromische] Substitution von η hervorgeht. Wendet man diese Substitution, im positiven oder negativen Sinne, auf unsere Abbildung an, so legt sich ein zweiter Bereich, der die analytische Fortsetzung des ersten ist, neben diesen. Die beiden Bereiche haben die Randkurve A'_i (oder A''_i) gemein, aber kollidieren übrigens in keiner Weise. *Die unendlich vielen analytischen Fortsetzungen unserer Abbildung überdecken also die η-Kugel nirgends mehrfach.* Je weiter man sie vervielfältigt, um so mehr nähern sie sich gewissen in unendlicher Zahl vorhandenen singulären Punkten, welche sie indes niemals wirklich erreichen.

Es folgt also: *Von den singulären Werten η abgesehen, entspricht jedem η ein und nur ein Punkt unserer Riemannschen Fläche.* Oder, indem wir zu den algebraischen Gleichungen übergehen, welche durch die Riemannsche Fläche definiert werden: *Ist $f(w, z) = 0$ irgendeine algebraische Gleichung, die zu unserer Fläche gehört, so lassen sich w und z als solche eindeutige Funktionen von η darstellen, welche sich bei den linearen Substitutionen, die η erfährt, ungeändert reproduzieren.* Umgekehrt, wenn wir von dem Fundamentalbereiche auf der η-Kugel und den zugehörigen linearen Substitutionen ausgehen und wir konstruieren irgend zwei [hinreichend allgemeine] eindeutige Funktionen w und z von η, die sich bei diesen Substitutionen reproduzieren, und die innerhalb des Fundamentalbereiches nirgendwo eine wesentlich singuläre Stelle besitzen, so besteht zwischen w und z eine algebraische Gleichung, von deren zweckmäßig zerschnittener Riemannscher Fläche der Fundamentalbereich eine konforme Abbildung liefert.

Nun erwachsen aber die linearen Transformationen, denen η unterworfen wird, durch Kombination und Wiederholung aus den p linearen Substitutionen, welche die A'_i in die A''_i überführen. Diese „erzeugenden" Substitutionen sind durch die Gestalt des Fundamentalbereiches an gewisse Ungleichheiten gebunden, aber übrigens unabhängig. Sie enthalten also

[1]) [Für diesen Satz hat Fricke in den „Automorphen Funktionen", Bd. 2, S. 439 den Namen *Rückkehrschnitttheorem* eingeführt. K.]

$3p$ veränderliche Parameter, von denen aber, da η von vornherein durch ein beliebiges $\frac{a\eta+b}{c\eta+d}$ ersetzt werden kann, drei als unwesentlich in Abzug kommen. *Wir werden also zu einer Darstellung sämtlicher Gleichungen $f(w,z)=0$ von gegebenem p geführt, welche genau so viele wesentliche Konstanten enthält, als nach der Riemannschen Theorie Moduln vorhanden sind.* Und es ist also eine Methode gewiesen, um *alle* Gleichungen, welche zu einem gegebenen p gehören, in independenter Weise aufzustellen.

Ich wünsche nun, wie ich es in meiner Schrift [Abh. XCIX] tat[5]), die Aufmerksamkeit insbesondere auf solche Riemannsche Flächen, beziehungsweise Gleichungen zu lenken, welche durch eindeutige Operationen, mögen dieselben nun direkte oder inverse (symmetrische) sein, in sich übergehen. [Dabei soll vorausgesetzt werden, daß aus dem betrachteten System der Rückkehrschnitte ein äquivalentes System wird][6]). Die Anzahl dieser Operationen sei N. Man zeigt, daß η einer jeden solchen Operation entsprechend *lineare* Umformungen erfährt, und *daß also in einem solchen Falle die Gruppe der η-Substitutionen, welche wir seither betrachteten, als ausgezeichnete Untergruppe vom Index N in einer umfassenderen Gruppe linearer Substitutionen enthalten ist*; ein Satz, der sofort umgekehrt werden kann.

Unter den so ausgezeichneten Flächen will ich diejenigen noch näher diskutieren, welche *symmetrisch* sind. Es lassen sich dieselben, wie ich a. a. O. ausführte, durch den Umstand charakterisieren, daß unter den zu ihnen gehörigen algebraischen Gleichungen $f(w,z)=0$ solche sind, welche durchaus *reelle* Koeffizienten besitzen. Als *Kurve* gedeutet möge ein solches f λ reelle Züge aufweisen. Dann hat die Riemannsche Fläche, wie ich mich ausdrückte, λ Übergangskurven. Und zwar hat man nach dem Werte von λ und der Lage der Übergangskurven gegeneinander $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Flächenarten zu unterscheiden, die sich in zwei Hauptklassen einordnen[7]). Bei den Flächen der ersten Klasse kann λ nach Belieben $0, 1, \ldots, p$ sein; die Übergangskurven müssen aber so liegen, daß die Fläche, längs derselben zerschnitten, noch nicht in Stücke zerfällt. Bei den Flächen der anderen Klasse tritt ein solches Zerfallen ein; es ist überdies $0<\lambda\leq p+1$ und die Differenz $p-\lambda$ eine ungerade Zahl.

[5]) [Vgl. S. 564 ff. des Wiederabdrucks.]

[6]) [Zusatz bei dem Wiederabdruck auf Grund einer Berichtigung, die Klein in Bd. 20 der Math. Annalen (1882) in einer Fußnote angab.]

[7]) [Die Benennungen „diasymmetrisch" und „orthosymmetrisch" für die beiden Klassen symmetrischer Flächen wurden später von mir gerade wegen der im Text berührten Verhältnisse eingeführt; siehe Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 172. Vgl. auch Fußnote [58]) auf S. 565/566 im vorliegenden Bande. K.]

Bezüglich dieser symmetrischen Flächen besteht nun [sofern man das Schnittsystem der A sich selbst symmetrisch nimmt[8])] zunächst der allgemeine Satz, *daß den λ Übergangskurven auf der η-Kugel allemal Kreise entsprechen*. Dann aber kann man mit Leichtigkeit angeben, wie man den Fundamentalbereich auf der η-Kugel auszuwählen hat, um jede symmetrische Fläche wenigstens einmal zu erhalten.[9])

Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst eine symmetrische Fläche der ersten Klasse und verlegen auf ihr λ von den p Rückkehrschnitten in die λ Übergangskurven, während wir die übrigen $p-\lambda$, was immer möglich ist, sich selbst symmetrisch wählen. *Dann kann man dem Fundamentalbereiche auf der η-Kugel eine solche Lage geben, daß er in bezug auf den Kugelmittelpunkt sich selbst symmetrisch (also „diametral symmetrisch") ist.* Die beiden Randkurven, welche demselben Rückkehrschnitte A_i entsprechen, sind einander diametral. Und zwar entsprechen sich auf diesen beiden Randkurven im Falle der λ Übergangskurven die diametralen Punkte, während auf den übrigen Randkurvenpaaren die zusammengehörigen Punkte gegen die diametrale Lage um 180° gedreht erscheinen. — Das Wichtige ist nun die evidente Bemerkung, daß rückwärts ein so auf der η-Kugel konstruierter Bereich auch notwendig zu einer symmetrischen Riemannschen Fläche der ersten Klasse mit λ Übergangskurven Anlaß gibt.

Bei der zweiten Klasse symmetrischer Flächen verfahre ich in der Weise, daß ich nur $\lambda-1$ der Rückkehrschnitte $A_1, \ldots, A_p$ mit ebensovielen Übergangskurven zusammenfallen lasse, und die übrigen $p-\lambda+1$ Rückkehrschnitte zu symmetrischen Paaren ordne. *Man kann dann der Abbildung auf der η-Kugel eine solche Gestalt erteilen, daß sie in bezug auf einen Meridian, der ganz im Innern der Abbildung verläuft, symmetrisch („orthogonal symmetrisch") ausfällt. Dieser Meridian repräsentiert diejenige Übergangskurve unserer Riemannschen Fläche, welche nicht als Rückkehrschnitt benutzt wurde.* Den übrigen $\lambda-1$ Übergangskurven entsprechen dann auf der η-Kugel je zwei zu diesem Meridiane symmetrische Kreise, deren symmetrische Punkte zusammengehören. Die übrigen $2(p-\lambda+1)$ Randkurven des Bildes aber treten zu je zwei in der Art zu Paaren zusammen, daß immer zwei Paare und auch die Zuordnungen, vermöge deren die Kurven im Paare verbunden sind, zuein-

[8]) [Vgl. etwa die Ausführungen in Abh. XLII, Bd. 2 dieser Ausgabe.]

[9]) [Die hier folgenden Theoreme kann man sich an den auf S. 565/66, Fußnote [58]) genannten symmetrischen Normalflächen leicht anschaulich klar machen. Man zerschneide die Handhaben nach Vorschrift des Textes längs eines symmetrischen Schnittsystemes und lasse nun die Kugel die Hälften der Handhaben unter ständiger Aufrechterhaltung der Symmetrie und Konformität allmählich einziehen (wie eine Schnecke ihre Fühler). V.]

ander in bezug auf den Meridian symmetrisch sind. — Auch hier wieder gilt die oben bemerkte wichtige, aber evidente Umkehrung.

Unter den letztgenannten Abbildungen ist augenscheinlich diejenige besonders einfach, welche $\lambda = p + 1$ entspricht. Es läßt sich alsdann die ganze auf der η-Kugel in Betracht zu ziehende Figur durch symmetrische Reproduktion eines Ausgangsbereiches gewinnen, der von irgend $p + 1$ sich nicht schneidenden Kreisen begrenzt wird. Dies ist eben diejenige Figur, [welche schon bei Riemann vorkommt, und] welche Herr Schottky, wie ich in meiner Schlußbemerkung zu Herrn H. Poincarés Note hervorgehoben habe,[10]) gelegentlich in Betracht gezogen hat, allerdings ohne ihre prinzipielle Wichtigkeit zu betonen.[11])

Leipzig, den 12. Januar 1882.

---

[10]) [Diese Bemerkung ist aus dem auf S. 577 Zeile 26 ff. angegebenen Grunde nicht abgedruckt.]

[11]) [Gegen den letzten Satz hat seinerzeit Schottky in einem an mich gerichteten, vom Mai 1882 datierten Brief, der in Bd. 20 der Math. Annalen, S. 299 ff. abgedruckt ist, Einspruch erhoben. Zur Sachlage, die ich 1882 nicht kennen konnte, vgl. meine Ausführungen auf S. 578 ff. des vorliegenden Bandes. K.]

CII. Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich.

(Zweite Mitteilung. [Das Grenzkreistheorem.])

[Math. Annalen Bd. 20 (1882).]

Der allgemeine Satz, welchen ich in meiner ersten unter gleichem Titel erschienenen Note (Math. Annalen Bd. 19 [= der vorangehenden Note Nr CI]) mitgeteilt habe, gehört als einzelnes Glied in eine ganze Kette ähnlicher Theoreme, bei denen es sich immer um unendlich viele lineare Substitutionen einer Variablen η handelt, welche einen ursprünglichen, auf der η-Kugel gegebenen Bereich, der das Bild einer zerschnittenen Riemannschen Fläche ist, in der Art reproduzieren, daß je nachdem entweder die Gesamtkugel oder nur eine von einer Ebene begrenzte Kugelkalotte von den Reproduktionen einfach und vollständig überdeckt wird. Ich will dementsprechend einen Augenblick von η-Funktionen der ersten und der zweiten Art sprechen. Dann ist das einfachste Resultat, welches ich bis jetzt in dieser Richtung gewonnen habe, für $p > 1$ durch folgenden Satz gegeben:

Unter allen auf einer Riemannschen Fläche existierenden unverzweigten Funktionen gibt es immer eine und nur eine[1]) *η-Funktion der zweiten Art. Alle anderen unverzweigten Funktionen sind eindeutige Funktionen dieses η.*[2])

Dabei beachte man, daß zu diesen unverzweigten Funktionen nicht nur die zur Riemannschen Fläche gehörigen algebraischen, überhaupt die eindeutigen Funktionen zu rechnen sind, sondern z. B. auch die Integrale erster und zweiter Gattung, sodann die ∞^{3p-3} in meiner vorigen Mitteilung besprochenen ξ-Funktionen usw.

---

[1]) Von linearen Transformationen, denen man η unterwerfen mag, wird dabei natürlich abgesehen.

[2]) [Für diesen Satz hat Fricke in den „Automorphen Funktionen", Bd. 2, S. 284 den Namen *Grenzkreistheorem* eingeführt. K.]

Ich will dabei, um eine Anschauung vom Verlaufe dieser η-Funktion zu geben, an die Figur erinnern, welche meiner Arbeit über Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen (Math. Annalen Bd. 14 (1878/79) [vgl. die „Hauptfigur" in Abh. LXXXIV, oben S. 126]) beigegeben ist. Die betreffende Zeichnung versinnlicht genau die hier in Rede stehende η-Funktion für die dort in Betracht gezogene Fläche $p=3$. Die in bestimmter Weise[3]) zerschnittene Fläche wird durch das in der η-Ebene gelegene Vierzehneck der Figur abgebildet. In ähnlicher Weise kann vermöge der zugehörigen η-Funktion jede Fläche $p=3$ durch ein Kreisbogen-Vierzehneck repräsentiert werden. Nur wird dasselbe im allgemeinen in keiner Weise regulär sein. Die Zerlegung des in der Figur gegebenen Vierzehnecks in 168 schraffierte und ebensoviele nicht schraffierte Kreisbogendreiecke ist nur das Äquivalent dafür, daß die dort in Betracht gezogene Fläche [vom Geschlechte] $p=3$ 168 direkte und ebensoviele inverse eindeutige Transformationen in sich gestattet.[4])

Es kann hier nicht die Aufgabe sein, die Tragweite des hiermit ausgesprochenen Satzes noch besonders zu schildern Ich will nur bemerken, daß für $p=1$ unser η durch einen leicht zu verstehenden Grenzübergang in das zugehörige Integral erster Gattung übergeht, so daß also umgekehrt unser η als die richtige Generalisation jenes Integrals für den Fall eines beliebigen p erscheint.

Es ist übrigens sehr einfach, den vorstehenden Satz noch so zu generalisieren, daß auch solche auf der Riemannschen Fläche existierende Funktionen eindeutig darstellbar werden, welche, in übrigens beliebiger Weise, an *vorgegebenen* Stellen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$ verzweigt sind. *Es gibt nämlich immer eine und nur eine η-Funktion der zweiten Art, welche in $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$ logarithmisch verzweigt ist*[5]), *andere Verzweigungspunkte aber nicht besitzt.*

Der so erweiterte Satz gilt nun auch ungehindert für $p=1$ und, falls $\nu > 2$, für $p=0$. Im letzteren Falle wird unser η mit derjenigen Funktion identisch, welche Herr H. Poincaré in Nr. 10 und 11 seiner Annalenarbeit[6]) benutzt, und die für $\nu=3$ die Modulfunktion[7]) $\omega(\varkappa^2)$

[3]) Nämlich durch sieben, zwei bestimmte Flächenpunkte verbindende Querschnitte.

[4]) Für die im Texte besprochene η-Funktion gilt allgemein, daß sich der Bereich der η-Ebene in linear äquivalente Teilbereiche zerlegt, falls das dargestellte algebraische Gebilde eindeutige Transformationen in sich zuläßt. [Vgl. meinen Brief 17 an H. Poincaré vom 3. April 1882, oben S. 610, sowie dessen Ausführungen in Bd. 7 der Acta Mathematica (1884/85), S. 16ff. K.]

[5]) D. h. so, wie etwa $\log z$ für $z=0$.

[6]) Siehe Math. Annalen, Bd. 19 (1881/82), S. 561, 562. [= Oeuvres de H. Poincaré, Bd. 2, S. 101, 102.]

[7]) ω ist das Periodenverhältnis des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{x\cdot 1-x\cdot 1-\varkappa^2 x}}$.

als speziellen Fall umfaßt, während die gewöhnliche Logarithmusfunktion ein der Annahme $\nu=2$ entsprechender Grenzfall ist. Man kann, wie ich beiläufig bemerken will, mit Hilfe dieser Funktion die allgemeine Aufgabe lösen: zu einer Riemannschen Fläche, die mehrblättrig über der z-Ebene gegeben ist, die zugehörige algebraische Gleichung $f(z, w)=0$ zu finden. Denn ein beliebiges zu verwendendes w wird eine eindeutige Funktion desjenigen auf die z-Ebene bezüglichen η sein, dessen Verzweigungspunkte mit denen der Riemannschen Fläche zusammenfallen, und zwar wird diese eindeutige Funktion bei allen denjenigen linearen Substitutionen des η ungeändert bleiben, die unter jenen Substitutionen, welche z invariant lassen, als bestimmte durch die Gestalt der Riemannschen Fläche definierte Untergruppe enthalten sind.

Düsseldorf, den 27. März 1882.

CIII. Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie.

[Math. Annalen, Bd. 21 (1882/83).]

Es ist jetzt beiläufig ein Jahr, daß ich in dem Schriftchen: „*Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen*“ (Leipzig, B. G. Teubner)[1]) eine Auffassung der Riemannschen Theorie publizierte, bei welcher die Riemannsche *Fläche*, als beliebig im Raume gegebene, geschlossene Fläche, den eigentlichen Ausgangspunkt abgab. Auf einer solchen Fläche existieren, wie ich dort durch physikalische Betrachtungen zeigte, gewisse Potentialfunktionen, und die Wechselbeziehungen zwischen letzteren sind es, welche, in die Sprache der Analysis übersetzt, die gewünschten funktionentheoretischen Resultate ergeben. Die physikalischen Anschauungen sind dabei, wie ich in der Vorrede hervorhob, nur ein vorläufiges Äquivalent für strengere Überlegungen. Ich werde im ersten Abschnitte des Folgenden auf letztere so weit eingehen, daß der Leser imstande ist, sich in der betreffenden Literatur mit Leichtigkeit zurecht zu finden.

Darüber hinaus beabsichtige ich im folgenden zuvörderst (und zwar noch in demselben ersten Abschnitte) eine gewisse Weiterentwicklung des in Betracht kommenden Ideenkreises, auf welche ich übrigens an verschiedenen Stellen meiner Schrift bereits hinwies (Abh. XCIX, S. 555–557 usw.). Es handelt sich darum, den Begriff der Riemannschen Fläche noch frei zu machen von gewissen Zufälligkeiten, die ihm vermöge der früheren Darstellungsweise anhaften. Statt uns die Riemannsche Fläche als *geschlossen* vorzustellen, dürfen wir uns eine *berandete* Fläche, oder auch ein *Aggregat berandeter Flächenstücke* gegeben denken, wofern nur die verschiedenen Randkurvenstücke vermöge irgend eines Gesetzes einander paarweise so zugewiesen werden, daß *in abstracto* eine geschlossene Mannigfaltigkeit vorliegt[2]).

Eine so berandete Fläche denke man sich nun, wie ich im zweiten Abschnitte des Folgenden erläutere, als Stück einer anderen, geschlossenen

[1]) [Vorstehend als Nr. XCIX abgedruckt. Die bei Zitaten daraus angegebene Seitenzahl bezieht sich auf den vorliegenden Band.]

[2]) [Vgl. hier und im folgenden die näheren Ausführungen in Abh. CIV unten.]

Fläche. Es ergibt sich sodann ein wichtiges allgemeines Prinzip, welches ich als *Prinzip der analytischen Fortsetzung* bezeichne. Nur in speziellen Fällen kann dasselbe durch das [schon von Riemann benutzte] von Herrn Schwarz so genannte „Prinzip der Symmetrie“ ersetzt werden. Ich particularisiere diese Ideen, indem ich eine gewöhnliche Kugelfläche (oder Ebene) als Trägerin der berandeten Bereiche auffasse und die Zusammengehörigkeit der einzelnen Begrenzungskanten durch lineare Substitution vermittelt denke. Auf solche Weise entsteht der allgemeine Begriff von *Funktionen mit linearen Transformationen in sich*, und ich gewinne den Übergang zu den Betrachtungen des dritten und vierten Abschnitts, in welchen es sich um die Theorie der *eindeutigen* Funktionen dieser Art handeln soll.

Man kennt die lange Reihe glänzender Publikationen, durch welche neuerdings Herr H. Poincaré die allgemeine Aufmerksamkeit auf diese Funktionen gelenkt hat[3]). Ich meinerseits habe, mit ähnlichen Ideen bereits seit längerer Zeit beschäftigt [vgl. S. 581 ff.], die Poincaréschen Veröffentlichungen durch zwei Noten begleitet[4]), in denen ich bestimmte Theoreme, welche für die *Anwendungen* der neuen Funktionen von hervorragender Wichtigkeit sein dürften, formulierte. Es wird sich im folgenden darum handeln, den allgemeinen Ideengang, der mich zu jenen Theoremen führte, in zusammenhängender und vervollständigter Form darzulegen. Zu diesem Zwecke betrachte ich im dritten Abschnitte eine verhältnismäßig umfassende Klasse von eindeutigen Funktionen mit linearen Transformationen in sich. Ich erläutere ausführlich ihre Art zu existieren, und gebe die Mittel an, um die zugehörigen linearen Substitutionen aus independenten Bestimmungsstücken zu konstruieren. Sodann formuliere ich in Abschnitt IV ein allgemeines Theorem, welches ich seiner Wichtigkeit halber als *Fundamentaltheorem* bezeichne, und das die Resultate meiner beiden vorgenannten Noten als spezielle Fälle in sich schließt. Allerdings kann ich mich zum Beweise nur auf allgemeine Mannigfaltigkeitsbetrachtungen berufen. So sicher es wünschenswert sein wird, die betreffenden Überlegungen genauer durchzuarbeiten, so glaube ich doch alle Punkte, welche bei einer strengen Beweisführung erledigt werden müssen, deutlich bezeichnet zu haben[5]).

[3]) Man sehe Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Bd. 92 (1881, I), S. 333–335, 395–398, 859–861, 957, 1198–1200, 1274–1276, 1484–1487; Bd. 93 (1881, II), S. 44–46, 138–140, 301–303, 581–582; Bd. 94 (1882, I), S. 163–166, 840–843, 1038–1040, 1166–1167; sodann die [oben auf S. 586 ausführlich genannte] Zusammenstellung in Math. Annalen, Bd. 19 (1881/82), S. 553–564. [Die später veröffentlichten Abhandlungen in den Acta Mathematica sind auf S. 586 des vorliegenden Bandes ausführlich zitiert. — Man findet alle diese Publikationen H. Poincarés zusammengestellt in Bd. 2 seiner Oeuvres (erschienen 1916).]

[4]) Math. Annalen, Bd. 19 (1881/82) [= Abh. CI], sowie Bd. 20 (1882) [= Abh. CII].

[5]) [Nähere Ausführungen hierzu folgen unten auf S. 731 ff.]

Vielleicht bringen die in Aussicht stehenden ausführlichen Abhandlungen des Herrn H. Poincaré in dieser Hinsicht bereits die notwendige Ergänzung. Die geometrische Denkweise bei Herrn H. Poincaré, seine Anwendung des Kontinuitätsbegriffes usw. dürften den meinigen sehr nahe stehen[6]). Darüber hinaus aber hat Herr H. Poincaré von vornherein das *analytische Bildungsgesetz* der neuen Funktionen mit Erfolg in Angriff genommen[7]), auch versucht, bei gegebenen algebraischen Irrationalitäten zugehörige eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich durch konvergente Prozesse wirklich herzustellen.

Die *Schlußbemerkungen*, welche ich im fünften Abschnitte des Folgenden gebe, mögen für sich selbst sprechen. Indem ich die Tragweite erörtere, welche unser Fundamentalsatz nach verschiedenen Richtungen hin dürfte beanspruchen können, wünsche ich andere, vielleicht jüngere Mathematiker anzuregen, auf diesem aussichtsreichen Gebiete ihre Kräfte zu versuchen.

Noch darf ich hinzufügen, das ich die Entwicklungen der Abschnitte I und II von Neujahr 1882 bis Ostern und diejenigen der Abschnitte III bis V wenigstens der Hauptsache nach von Pfingsten dieses Jahres ab bis zum Schlusse des Sommersemesters in meinem Seminare zum Vortrag gebracht habe[8]).

Übersicht.

Abschnitt I.

Über die allgemeinste Form der Riemannschen Fläche und die Gruppierung der zugehörigen Existenzbeweise.

[6]) So hat z. B. Herr H. Poincaré genau so, wie ich es 1874 bei meiner Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen getan habe [vgl. Abh. LI (1875/76) in Bd. 2 dieser Ausgabe], seinen ursprünglichen Ausgangspunkt in den Vorstellungsweisen der Nicht-Euklidischen Geometrie genommen.

[7]) [Ritter hat später auf meine Veranlassung die von H. Poincaré benutzten Reihen, die dieser mit den Buchstaben Θ und Z bezeichnet, kurzweg *Poincarésche Reihen* genannt. Siehe etwa Ritter in den Math. Annalen, Bd. 41 (1892/93), S. 56 sowie Frickes und mein Buch „Automorphe Funktionen", Bd. 2, S. 138. K.]

[8]) [Vgl. oben S. 585.]

Abschnitt II.

Das Prinzip der analytischen Fortsetzung.

Abschnitt III.

Eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich.

Abschnitt IV.

Das Fundamentaltheorem.

Abschnitt V.

Abschnitt I.

Über die allgemeinste Form der Riemannschen Fläche und die Gruppierung der zugehörigen Existenzbeweise.

§ 1.

Allgemeiner Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Die Riemannsche Fläche ist zuvörderst, wie schon bemerkt, und insbesondere in meinem Schriftchen [Abh. XCIX] ausgeführt, eine übrigens beliebige[9]),

[9]) Ich drücke mich an dieser Stelle in solch unbestimmter Form aus, weil es keinen Zweck hat, bei der allgemeinen Exposition bereits zwischen analytischen

aber geschlossene Fläche des Raumes. Indem wir uns unter Zugrundelegung irgendwelcher krummliniger Koordinaten p, q das Bogenelement

$$ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$$

berechnet denken, leiten wir aus ihm die partielle Differentialgleichung für die auf unserer Fläche existierenden *Potentialfunktionen* ab:

$$(1) \qquad \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial q} - G\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}}{\partial q} = 0,$$

und es sind die Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung, mit deren wechselseitigen Relationen sich die Riemannsche Funktionentheorie zunächst beschäftigt.

Die Verallgemeinerung nun, deren wir uns in der Folge zu bedienen haben, erwächst am natürlichsten, wenn wir zuvörderst alles in der vorgenannten Definition enthaltene Geometrische abstreifen, um dasselbe später, je nach Bedürfnis, in umgeänderter Gestalt wieder einzuführen.

Statt einer geschlossenen Fläche werden wir uns also überhaupt eine zweidimensionale, geschlossene *Mannigfaltigkeit* vorstellen müssen, statt des Bogenelementes einen irgendwie gegebenen, auf jener Mannigfaltigkeit eindeutigen, definiten Differentialausdruck zweiten Grades.

Wir können sogar in der Verallgemeinerung noch einen Schritt weiter gehen. Die Differentialgleichung (1) bleibt ungeändert, wenn wir den Ausdruck für ds^2 mit einem beliebigen Faktor multiplizieren. Es ist dies das für zwei Dimensionen charakteristische Verhalten, welches zur Folge hat, daß Flächen, die konform aufeinander abgebildet sind, für die Zwecke der verallgemeinerten, hier in Betracht kommenden Potentialtheorie einander gleichwertig sind (Abh. XCIX, S. 521). Es ist daher für unsere Zwecke richtiger, überhaupt nicht von einem bestimmten ds^2, also einem Differential*ausdruck* zweiten Grades, zu sprechen, sondern nur von der Differential*gleichung* zweiten Grades $ds^2 = 0$.

Eine fernere Überlegung bezieht sich auf die Forderung, ds^2 solle *definit* sein. Wir werden hernach Beispiele anführen (§ 5 dieses Abschnittes), bei denen ds^2, allgemein zu reden, nur in einzelnen Bezirken der Riemannschen Mannigfaltigkeit definit ist. Andererseits darf man sich eine Riemannsche Mannigfaltigkeit selbst wieder mit komplexen Elementen ausgestattet denken, wobei der Unterschied zwischen definiten und indefiniten Differentialausdrücken von vornherein als unwesentlich in Wegfall kommt. Doch erwähne ich hier beides nur, um den allgemeinen Begriff so unabhängig wie möglich hinzustellen; im speziellen werden wir fortan an der Forderung eines definiten ds^2 festhalten.

Flächen oder solchen, die aus Stücken analytischer Flächen zusammengesetzt sind, usw. zu unterscheiden. Analoge Bemerkungen könnten im folgenden wiederholt gemacht werden.

Es gilt nun, auf den so umschriebenen Begriff der allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeit alle die Sätze zu übertragen, welche in Abh. XCIX speziell für die geschlossene Riemannsche *Fläche* gewonnen wurden. Insbesondere also werden wir uns an die Vorstellung gewöhnen müssen, daß die auf solcher Mannigfaltigkeit existierenden eindeutigen oder nur durch Periodizität vieldeutigen Potentialfunktionen zu gewissen algebraischen Funktionen und ihren Integralen in der a. a. O. dargelegten Beziehung stehen. Wir haben dann dasjenige Instrument, dessen wir uns im folgenden zur Untersuchung der algebraischen Funktionen und der mit ihnen zusammenhängenden Transzendenten bedienen wollen. Inwieweit die hierbei zugrunde gelegten Anschauungen zuverlässig richtig sind, wird sogleich noch näher erläutert werden.

§ 2.

Rückübertragung auf die gewöhnliche Raumvorstellung.

Ob es möglich ist, jede Riemannsche Mannigfaltigkeit auf eine geschlossene Fläche unseres Raumes im gewöhnlichen Sinne *konform* zu übertragen, steht zuvörderst dahin; was wir darüber wissen, ist eben erst das Resultat der Riemannschen Theorie[10]). Dagegen ist von vornherein kein Zweifel, daß wir allemal die nächste Umgebung einer beliebigen (regulär vorausgesetzten) Stelle unserer Mannigfaltigkeit auf ein *Stück* einer stetig gekrümmten Fläche, und sogar auf ein Stück der Ebene konform werden übertragen können. Es folgt dies aus bekannten Sätzen über die *Existenz* der Lösungen partieller Differentialgleichungen, hier also insbesondere der Gleichung (1), in der Nähe einer beliebigen Stelle.

Die auf solche Weise entstehenden *Flächenkalotten* mit ihren Bogenelementen mögen wir dann geradezu an die Stelle der abstrakten Riemannschen Mannigfaltigkeit treten lassen. *Wir haben dann also statt letzterer ein Aggregat von beliebig vielen Flächenstücken, deren Randkurven in bestimmter Weise Punkt für Punkt paarweise zusammengehören.*

Zugleich verläuft, was wir eine Potentialfunktion u auf der ursprünglichen Riemannschen Mannigfaltigkeit benannten, auf diesem Flächenstück derart, daß es innerhalb des einzelnen Flächenstückes der auf letzteres bezüglichen Differentialgleichung des Potentials genügt (Abh. XCIX, S. 520),

[10]) [Ein Beispiel für eine solche Übertragung gibt die bereits in Nr. C zitierte Theorie der Minimalflächen; es ist leider unmöglich, hier darauf näher einzugehen. K.]

überdies aber in den Randpunkten, in denen man von dem einen Flächenstücke zu einem anderen (oder auch nur zu einem anderen Teile desselben Flächenstückes) übergeht, gewisse *Randbedingungen* befriedigt. Um letztere bestimmt bezeichnen zu können, sei ds das Element der einen Randkurve, dn das Element der zugehörigen, nach dem Inneren des Flächenstückes gerichteten Normale. Dieselbe Bedeutung mögen $d\sigma$ und $d\nu$ an der entsprechenden Stelle für die zweite Randkurve besitzen. Dann wird offenbar, unter ϱ einen von der Stelle abhängigen Proportionalitätsfaktor verstanden, die folgende Relation gelten:

$$(2)\qquad \frac{\partial^{k+l} u}{\partial s^k \cdot \partial n^l} = (-1)^l \cdot \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \sigma}\right)^k \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \nu}\right)^l u$$
$$(k, l = 0, 1, \ldots, \infty),$$

und es geben eben diese unendlich vielen Gleichungen das Gesetz, nach welchem eine auf der einen Flächenkalotte verlaufende Potentialfunktion über die Randkurve hinüber analytisch fortzusetzen ist.

Unsere Vorstellung soll nun im folgenden geradezu die sein, daß wir uns statt der geschlossenen, abstrakten Riemannschen Mannigfaltigkeit ein Aggregat von Flächenkalotten der beschriebenen Art, vielleicht auch nur eine einzelne Kalotte mit zweckmäßig zusammengeordneten Randkurven gegeben denken. Vermöge ihrer inneren Maßverhältnisse [und der Zusammengehörigkeit ihrer Ränder] wird dann eine solche Kalotte genau so gewisse Potentiale (und also komplexe Funktionen des Ortes) definieren, wie es in meiner Schrift [Abh. XCIX] die geschlossene Fläche zuwege brachte. *Und unsere Methode soll sein, geradezu aus der Gestalt geeigneter derartiger Bereiche ausgiebige Schlüsse auf das Verhalten gewisser Klassen analytischer Funktionen zu ziehen.*

Beispiele folgen sofort. Hier nur noch eine kleine Bemerkung. Wir brauchen in keiner Weise auszuschließen, daß die Übertragung der geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit auf die Teilbereiche in *einzelnen Punkten* aufhört, konform zu sein. Um das betreffende Verhalten in einer alle Fälle einschließenden Weise zu bezeichnen, mögen wir verabreden, daß wir die den Randlinien der Teilbereiche entsprechenden Querschnitte auf der geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit jedenfalls durch alle solche Stellen hindurchlegen. Die Randkurven der entsprechenden Teilbereiche werden dann an der betreffenden Stelle eventuell eine Knickung zeigen, indem die aufeinanderfolgenden Elemente der Randkurve statt eines gestreckten Winkels einen anderen einschließen. Die einfache Regel ist dann die, daß wir eine Potentialfunktion an solcher Stelle regulär nennen, wenn sie, auf die ideale Riemannsche Mannigfaltigkeit rückübertragen, auf letzterer regulär verläuft.

§ 3.

Beispiele.

In den Beispielen, die ich hier zu bringen habe, sowie überhaupt bei den Anwendungen, die ich im folgenden beabsichtige, handelt es sich durchweg nur um *eine* Flächenkalotte, und diese eine ist ein Ausschnitt aus der Ebene, bez. aus der Kugelfläche. Diese eine Kalotte ist dann nichts anderes, als dasjenige, was ich bei anderer Gelegenheit als *Fundamentalpolygon*[11]) bezeichnet habe. Sei mir dabei im folgenden, weil vielfach von solchen behandelten Flächenstücken die Rede zu sein hat, welche Ecken überhaupt nicht besitzen, die kleine Abweichung gestattet, daß ich statt Fundamentalpolygon fortan *Fundamentalbereich* sage.

Erstes Beispiel. Als nächstliegendes Beispiel bietet sich das Parallelogramm der doppeltperiodischen Funktionen. Indem die gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms in einfachster Weise zusammengehören, repräsentiert das einzelne Parallelogramm eine geschlossene Mannigfaltigkeit $p = 1$. Die Existenz der doppeltperiodischen Funktionen und ihrer Integrale subsumiert sich also unter die allgemeine, auf beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeiten bezügliche, am Schlusse des § 1 formulierte Anschauung.

Zweites Beispiel. Ein zweites hier anzuführendes Beispiel, das mir immer besonders instruktiv erschienen ist, gibt Riemann in Nummer 12 seiner *Theorie der Abelschen Funktionen* [Gesammelte mathematische Werke, 1. Aufl. S. 114, 2. Aufl. S. 121]. Statt *eines* Parallelogramms betrachtet dort Riemann deren p, übereinandergelegte, irgendwie gestaltete, welche durch $(2p-2)$ Verzweigungspunkte und $(p-1)$ zwischen letzteren verlaufende Verzweigungsschnitte zu einem einheitlichen Ganzen verbunden sind. Jedesmal die gegenüberstehenden Seiten des einzelnen Parallelogrammes sind im gewöhnlichen Sinne zusammengehörig. Riemann macht a. a. O. selber den Schluß, daß auf einem solchen Fundamentalbereiche dieselben Funktionen des Ortes existieren müssen, wie auf einer beliebigen geschlossenen Fläche desselben p.

Drittes Beispiel. In Beispiel 1 ist die geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit ausnahmslos konform auf den Fundamentalbereich übertragen. Dagegen tritt in Beispiel 2 eine Abweichung für die Konformität in den $(2p-2)$ Verzweigungspunkten ein; da aber in diesen Punkten die auf der idealen Riemannschen Mannigfaltigkeit zwischen verschiedenen Fortschreitungsrichtungen gemessenen Winkel gerade verdoppelt werden, so ist es nicht nötig, wie wir es im übrigen am Schlusse des vorigen Paragraphen verabredeten, die Randkurven unseres Fundamentalbereiches

[11]) Zuerst in den Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79). [In der oben abgedruckten Abh. LXXXII S. 35 ff.].

durch diese Stellen hindurchzulegen. Anders ist es mit dem nun zu gebenden dritten Beispiele. Es soll sich jetzt nämlich um denselben Fall handeln, den Herr Schwarz im 75. Bande des Crelleschen Journals (1872/73) [= Ges. math. Abh., Bd. 2, S. 211 ff.] unter etwas anderem Gesichtspunkte behandelt hat. Sei in der Ebene einer komplexen Variablen η zuvörderst ein *Kreisbogendreieck* mit den Ecken a_1, a_2, a_3 und den Winkeln $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}$ gegeben. [l_1, l_2, l_3 brauchen hier noch keine ganzen Zahlen zu sein.] Ein solches Dreieck kann dann (wie Herr Schwarz entwickelt) auf eine Halbebene z konform abgebildet werden, wobei man den Ecken a_1, a_2, a_3 noch drei beliebige Punkte der Begrenzung jener Halbebene, also etwa, wenn wir die Achse der reellen Zahlen als Begrenzung der Halbebene denken, $z = 0, 1, \infty$ entsprechen lassen kann. Ist dies geschehen, so folgt aus dem Prinzip der Symmetrie, daß der zweiten Halbebene z ein beliebiges der drei weiteren Kreisbogendreiecke entsprechend gesetzt werden kann, die sich aus dem ursprünglichen durch Inversion an einer seiner drei Kanten ergeben. Wir wählen als Inversionskreis etwa die Kante $a_2 a_3$ und nennen die Ecke, welche bei der Inversion dem Punkte a_1 entspricht, a_1'. So ist die Sache die, daß wir jetzt ein *Kreisbogenviereck* $a_1 a_2 a_3 a_1'$ vor uns haben und zugehörig eine Funktion z von η kennen, welche auf diesem Kreisbogenviereck jeden Wert einmal und nur einmal annimmt, sofern wir nämlich solche Begrenzungspunkte des Vierecks, die in bezug auf den Kreisbogen a_2, a_3 symmetrisch sind, als identisch erachten. Diese Funktion z von η besitzt im Inneren des Vierecks weder Verzweigungspunkte noch Kreuzungspunkte, und auch nicht auf dem Rande des Vierecks, sofern wir die Eckpunkte ausnehmen. In letzteren aber verläuft nicht z, sondern beziehungsweise $z^{\frac{1}{l_1}}$, $(z-1)^{\frac{1}{l_2}}$ $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{l_3}}$ regulär.

Eben die Existenz der hiermit besprochenen Funktion z folgt nun bei der gegenwärtig zu entwickelnden Anschauung daraus, daß jenes Kreisbogenviereck $a_1 a_2 a_3 a_1'$ vermöge der Zusammengehörigkeit seiner Kanten als Fundamentalbereich eine geschlossene Mannigfaltigkeit vom Geschlechte $p = 0$ repräsentiert. Nur in den Ecken a_1, a_1' bez. a_2 und a_3 ist dabei die Beziehung zwischen der η-Ebene und der geschlossenen Mannigfaltigkeit eine nicht konforme. Auf jeder geschlossenen Mannigfaltigkeit vom Geschlechte Null gibt es eindeutige Funktionen des Ortes, welche jeden Wert nur einmal annehmen (Abh. XCIX, S. 559). Unter ihnen ist unser z inbegriffen, und zwar einfach dadurch charakterisiert, daß es an den drei Stellen a_1 bez. a_1', a_2 und a_3 die Werte $0, 1, \infty$ annimmt.

Diese Art, die Existenz der Funktion z aus dem Hauptsatze des § 1 abzuleiten, erscheint einfacher als das indirekte von Herrn Schwarz gewählte Verfahren[12]). Allerdings hat das letztere sofort den Vorzug, wenn es sich darum handelt, z in der *unbegrenzten* Ebene η zu studieren. Denn während das Prinzip der Symmetrie unmittelbar ausreicht, um den Gesamtverlauf des so verstandenen z zu übersehen, müßten wir zu gleichem Zwecke das erst im folgenden Abschnitte zu entwickelnde Prinzip der analytischen Fortsetzung zu Hilfe nehmen, wir müßten also zwei Schritte machen, wo das Verfahren des Herrn Schwarz mit einem ausreicht.

Viertes Beispiel. An letzter Stelle will ich noch ein Beispiel betrachten, bei welchem der in Betracht zu ziehende Fundamentalbereich keinerlei Eckpunkte besitzt. Es seien in der η-Ebene irgend $2p$ geschlossene und mit keinen Singularitäten versehene, analytische Kurvenzüge gegeben, welche zusammengenommen einen $2p$-fach zusammenhängenden Bereich abgrenzen. So oft wir dann diese Kurvenzüge paarweise durch irgendein analytisches Gesetz zusammenordnen, haben wir jedesmal eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Geschlechte p vor uns. Auf ihr entsprechen jenen $2p$ Begrenzungskurven gewisse p, die Mannigfaltigkeit nicht zerstückende Rückkehrschnitte.

§ 4.

Berechnung der Zahl p.

Der Vollständigkeit halber stelle ich hier diejenigen Sätze zusammen, deren man sich zweckmäßigerweise bedient, wenn man allgemein das Geschlecht p einer Riemannschen Mannigfaltigkeit berechnen will, die in Gestalt eines Fundamentalbereiches gegeben vorliegt. Die betreffenden Regeln sind in der zur Anwendung geeigneten Form wohl zuerst von Herrn C. Neumann in seinen „*Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*" (1. Aufl. Leipzig 1865) gegeben worden. Besitzt eine Fläche ν Randkurven und gestattet überdies μ nicht zerstückende Rückkehrschnitte, so bezeichnet Herr Neumann $2\mu + \nu$ als *Grundzahl* der Fläche[13]). Hinsichtlich der letzteren gelten nun die drei einfachen Regeln:

---

[12]) Auch Herr Dedekind erschließt, Crelles Journal, Bd. 83 (1877), S. 274, die Existenz der fundamentalen elliptischen Modulfunktion (die ein spezieller Fall unseres z ist) aus dem Gesetz der Symmetrie.

[13]) Es ist dies dieselbe Zahl, welche von Herrn Schläfli und mir bei späterer Gelegenheit als „außerordentlicher Zusammenhang" oder auch als „Zusammenhang" schlechthin bezeichnet worden ist (vgl. z. B. Math. Annalen, Bd. 7 [= Abh. XXXVI in Bd. 2 dieser Ausgabe Fußnote [4]) auf S. 64]). Riemanns „Zusammenhang" ist um eine Einheit größer, sobald $\nu = 0$ ist. Die Riemannsche Festsetzung erscheint aus früher dargelegten Gründen nicht zweckmäßig. Da sie aber fast durchgängig im Gebrauche ist, so vermeide ich im Texte, wo immer von geschlossenen Flächen die Rede ist, den Ausdruck „Zusammenhang" überhaupt, wie ich es auch in meiner Schrift getan habe.

1. Jede Punktierung der Fläche, d. h. die Anbringung einer punktförmigen Öffnung an irgendeiner Stelle, erhöht die Grundzahl um 1;

2. Jeder in sich zurücklaufende Schnitt, den man auf der Fläche anbringen mag, läßt die Grundzahl ungeändert;

3. Jeder Querschnitt, d. h. ein Schnitt, der von Randpunkt zu Randpunkt läuft, erniedrigt die Grundzahl um eine Einheit[14]).

Sei jetzt irgendein Fundamentalbereich gegeben. Unter seinen Randkurven markieren wir zuvörderst diejenigen $2\nu'$, welche *keine* Eckpunkte besitzen. Die übrigen Randkurven zerlegen wir in ebensoviele Stücke, als sie Eckpunkte tragen. Die Gesamtzahl dieser Stücke sei $2n$. Sei ferner π die Anzahl derjenigen auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit zu unterscheidenden Stellen, denen Eckpunkte des Fundamentalbereiches entsprechen. Dann wird man von der geschlossenen Mannigfaltigkeit (deren Grundzahl gleich $2p$ ist) im Sinne der Analysis situs zum Fundamentalbereiche gelangen, indem man zuerst an jenen π Stellen Punktierungen ausführt, dann letztere durch n Querschnitte verbindet und endlich ν' Rückkehrschnitte hinzufügt. Bezeichnet man jetzt mit g die Grundzahl des Fundamentalbereiches, so kommt:

$$2p + \pi - n = g,$$

und dies ist die Formel zur Berechnung von p.

Es ist wohl kaum nötig, die Formel an den Beispielen des vorigen Paragraphen noch besonders zu erläutern. Nur finde noch die Bemerkung ihre Stelle, daß die vorgenannten Regeln ungeändert erhalten bleiben, wie schon Herr Neumann zeigte, wenn man statt einer Fläche ein aus N getrennten Flächen bestehendes System in Auge faßt, und als Grundzahl des Systems $\sum g - 2N + 2$ gelten läßt, wo die Summe über die Grundzahlen der einzelnen Bestandteile zu nehmen ist. Diese Bemerkung würde zur Geltung kommen, wenn wir die Riemannsche Mannigfaltigkeit, wie es in § 2 erläutert wurde, durch ein *Aggregat* von Flächenkalotten sollten ersetzen wollen.

§ 5.

Anderweitige geometrische Deutungen.

Indem wir in § 2 die abstrakte Vorstellung von der Riemannschen Mannigfaltigkeit in die konkrete eines geometrisch gegebenen Fundamentalbereiches übersetzten, benutzten wir die Anschauungsweise der gewöhnlichen analytischen Geometrie, insofern wir die Individua jener Mannigfaltigkeit durch *Punkte*, den adjungierten Differentialausdruck zweiten Grades

[14]) [Wenn die in den Regeln 2. und 3. genannten Schnitte die Fläche zerstücken sollten, so ist die im letzten Absatz des gegenwärtigen Paragraphen gegebene verallgemeinerte Definition der Grundzahl in Anwendung zu bringen.]

durch das zugehörige [konventionelle] *Bogenelement* versinnlichten. Es ist in keiner Weise meine Absicht, allgemeinere Arten der geometrischen Deutung, die dem Funktionentheoretiker Schwierigkeit bereiten könnten, im folgenden zu verwenden[15]). Wohl aber sei es dem Geometer gestattet, auf die *Möglichkeit* solcher Deutungen hier beiläufig hinzuweisen. Einmal nämlich zweifele ich nicht, daß man im Laufe der Zeit, je mehr sich funktionentheoretische und geometrische Anschauungen durchdringen werden, von solchen Vorstellungsweisen allgemeinen Gebrauch machen wird. Andererseits ist dies die Stelle, an der die „*neuen Riemannschen Flächen*“, wie ich sie bei Gelegenheit einführte[16]), systematisch einzuordnen sind (siehe auch Abh. XCIX, S. 555—557).

Um mit den letzteren zu beginnen, so bezeichnete ich als die zu einer Kurve gehörige Riemannsche Fläche den geometrischen Ort derjenigen Punkte der Ebene, von denen aus sich imaginäre Tangenten an die Kurve legen lassen, — wobei jeder Punkt so oft zu zählen ist, als die Anzahl dieser Tangenten angibt. Hat die Kurve, wie hier angenommen sei, eine Gleichung mit reellen Koeffizienten, so wird jeder Teil der Ebene von einer notwendig paaren Anzahl von Blättern überdeckt und diese Blätter gehören paarweise als „konjugierte“ zusammen. Wie eine derartige Fläche im allgemeinen gestaltlich verläuft, wurde bei früheren Gelegenheiten ausführlich diskutiert. Dagegen wurde nur erst beiläufig des Differentialausdruckes zweiten Grades gedacht, der nun an die Stelle des Bogenelementes tritt (siehe Math. Annalen, Bd. 9 (1875/76), Fußnote auf S. 31,)[17]). *Derselbe stellt, gleich Null gesetzt, die imaginären Richtungen derjenigen beiden von dem einzelnen Punkte aus an die Kurve verlaufenden Tangenten dar, welche durch den Punkt selbst versinnlicht werden, sofern man ihn in dem eben herausgegriffenen Blatte unserer Fläche, oder aber im konjugierten Blatte, gelegen denkt.* Die hiermit gegebene Deutung durch eine doch nur auf willkürlichem Wege zu erreichende absolute Fixierung des Differentialausdruckes vervollständigen zu wollen, hat für die Riemannsche Theorie, wie in § 1 bemerkt wurde, keinerlei Zweck. *Auch haben wir hier einen Fall, in welchem der zur Verwendung kommende Differentialausdruck zweiten Grades keineswegs durchweg definit zu sein braucht.* Denn wenn unsere Kurve reelle Züge besitzt, so rücken zwei der bezeichneten imaginären Richtungen, sobald man von der kon-

[15]) Daher wird der gegenwärtige Paragraph beim Studium vorliegender Arbeit überschlagen werden können.

[16]) Math. Annalen, Bd. 7 (1874) und Bd. 10 (1876). [= Abhandlungen XXXVIII und XL in Bd. 2 dieser Ausgabe.]

[17]) [Vgl. ferner die Bemerkungen, welche ich in Bd. 2 dieser Ausgabe S. 101 in Fußnote [1]) zugefügt habe. K.]

kaven Seite her auf den reellen Zug zuschreitet, in eine reelle zusammen, um darüber hinaus in zwei getrennte reelle Richtungen verwandelt zu sein. Die einfachste Vorstellung ist dann (siehe a. a. O.), daß längs des reellen Kurvenzuges zwei Blätter unserer Fläche vermöge einer Falte verbunden sind [also mit sehr großer Krümmung stetig ineinander übergehen].

Die Punkte der hier in Rede stehenden Riemannschen Flächen versinnlichen in erster Linie die imaginären *Tangenten* unserer Kurve. Ebensowohl würde man die imaginären Punkte der Kurve (indem man dualistische Übertragung eintreten läßt) durch ein geeignetes Aggregat von geraden Linien repräsentieren können. Ein solches Aggregat bietet der unmittelbaren Vorstellung einige Schwierigkeit, aber theoretisch genommen ist es ebensowohl als Versinnlichung der Riemannschen Mannigfaltigkeit zu gebrauchen, wie die von den Punkten gebildete Fläche.

Ich möchte hier noch ein weiteres Beispiel geben, welches das hiermit besprochene dualistische Gegenstück der soeben betrachteten Riemannschen Flächen als speziellen Fall umfaßt. Man nehme eine beliebige Linienkongruenz (von ∞^2 Linien). Daß auch auf solche Mannigfaltigkeiten die Begriffe der Analysis situs anwendbar sind, erläuterte ich bereits in den Math. Annalen, Bd. 9 (1875/76) [vgl. Abh. XXXVI in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 73 bis 76]. Hier haben wir hinzuzufügen, daß jede solche Linienkongruenz eo ipso einen Differentialausdruck zweiten Grades mit sich führt, der freilich nicht absolut fixiert ist; es ist derjenige, welcher, gleich Null gesetzt, aussagt, daß zwei aufeinanderfolgende Strahlen der Kongruenz sich schneiden[18]). Gibt es nun innerhalb der Kongruenz einen Bereich, in welchem sich *reelle* aufeinanderfolgende Strahlen überhaupt nicht treffen können, in welchem also jener Differentialausdruck definit ist, so repräsentiert uns derselbe, indem wir die Strahlen als Individua gelten lassen, ein Stück einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Das Strahlensystem kann nun insbesondere das Sekantensystem einer Raumkurve sein. Der einzelne Strahl vertritt dann geradezu, indem er doppelt zählt, die beiden Punkte, in denen er der Kurve begegnet. Jene Differentialgleichung läßt sich jetzt einfacher dahin interpretieren, daß sie den Fortschritt zu solchen benachbarten Strahlen bedeutet, welche mit dem gegebenen einen Kurvenpunkt gemein haben. Und hieraus nun erwächst das oben erwähnte dualistische Seitenstück zu meinen „neuen"

[18]) Ich möchte hier beiläufig auf die neuerdings erschienene Dissertation von Herrn Koenigs (*Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, Paris (1882), Annales de l'École Normale Supérieure, ser. 2, Bd. 11) aufmerksam machen. In derselben werden gewisse Ideen, welche von Herrn Lie und mir in Bd. 5 der Math. Annalen betreffs des im Texte erwähnten Differenlialausdruckes zweiten Grades entwickelt worden sind, aufs neue aufgenommen und zum Teil weitergeführt. [Meine diesbezügliche Arbeit ist als Abh. IX in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe abgedruckt. K.]

Riemannschen Flächen, wenn man die Raumkurve in eine ebene Kurve degenerieren läßt. — Ich möchte mir vorbehalten, diese Betrachtungen bei Gelegenheit weiter zu verfolgen.

§ 6.

Literarisches zum Dirichletschen Prinzip.

Wollte man, wie es Riemann getan hat, das von ihm so genannte Dirichletsche Prinzip[19]) als Beweisgrund gelten lassen, so wäre es leicht, den allgemeinen Satz des § 1 für beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeiten oder auch direkt für die Fundamentalbereiche der §§ 2, 3 zu beweisen. In der Tat verfährt Riemann so in Nr. 12 seiner Abelschen Funktionen bei dem oben (§ 3) an zweiter Stelle aufgeführten Beispiele.

Es ist hier nicht der Ort, um die Gründe, welche gegen die Beweiskräftigkeit des Dirichletschen Prinzips sprechen, zusammenzustellen, so sehr ich eine solche Zusammenstellung im Interesse des lernenden mathematischen Publikums für nützlich erachten würde. Auch brauche ich hier nicht auseinanderzusetzen, warum solche physikalische Anschauungen, wie ich sie in meiner Schrift verwandte, in rein mathematischen Fragen nur den Wert *heuristischer* Methoden haben. Man beachte übrigens, daß diese physikalischen Anschauungen bei den allgemeinen in § 2 eingeführten Fundamentalbereichen nur in sehr gezwungener Weise würden festgehalten werden können.

Dagegen wünsche ich hier über die einschlägigen Untersuchungen der Herren C. Neumann und Schwarz kurzen Bericht zu erstatten, insofern ich glaube, daß dieselben lange nicht hinlänglich gekannt und nach ihrer Wichtigkeit gewürdigt sind. Es ist kein Zweifel, daß diese Untersuchungen in allen [zulässigen[20])] Fällen der Anwendung geeignet scheinen, das Dirichletsche Prinzip zu ersetzen, und daß vermöge derselben insbesondere der allgemeine Satz von den auf den Riemannschen Mannigfaltigkeiten existierenden Potentialfunktionen als strenge begründet erachtet werden kann. Und dieses ist für uns hier die Hauptsache. Mag der von den genannten Autoren gelieferte Beweisgang noch so umständlich sein, in ihm liegt die Berechtigung, jenen Fundamentalsatz zu benutzen und mit ihm als einem Instrumente, überall wo es nützlich scheint, zu arbeiten.

Die Untersuchungen der genannten Autoren laufen vielfach parallel[21]).

[19]) [Vgl. hierzu die Ausführungen oben auf S. 492/493.]

[20]) [Vgl. wegen dieses Vorbehalts die in Nr. CIV folgenden Ausführungen.]

[21]) Ich nenne hier von den betr. Publikationen als besonders wichtig:
C. Neumann: Zwei Mitteilungen in den Berichten der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, vom 21. April und 31. Oktober 1870 (zum Teil wieder ab-

Beide beginnen damit, für Stücke der *Ebene*, und also das logarithmische Potential im engeren Sinne, die sogenannte *Randwertaufgabe* zu behandeln, d. h. zu zeigen, daß bei vorgegebenen Randwerten sich auf jedem begrenzten Stücke der Ebene eine zugehörige, im Inneren des Stückes überall endliche und stetige Potentialfunktion finden läßt. Herr Neumann entwickelt zu dem Zwecke eine besondere Näherungsmethode, die von ihm so genannte *Methode des arithmetischen Mittels*, welche für solche Bereiche, die eine durchaus konvexe Begrenzungskurve haben, sowie für deren Ergänzungsbereiche, die gewünschte Potentialfunktion direkt herstellt. Herr Schwarz dagegen beginnt mit Untersuchungen über *konforme Abbildung* und zeigt, daß gewisse, sehr allgemein gestaltete Bereiche sich auf andere konform übertragen lassen, für welche die Randwertaufgabe auf Grund früherer Untersuchungen als erledigt angesehen werden kann. Beiden Autoren gemeinsam sind sodann gewisse *Kombinationsmethoden*, vermöge deren es gelingt, die Randwertaufgabe auch bei solchen Bereichen durchzuführen, welche aus einer Anzahl von Stücken der früher behandelten Art durch Überlagerung entstehen.

Während nun Herr Neumann vermöge der von ihm gewählten Ausgangspunkte in der Lage war, seine Untersuchungen auf den Raum, d. h. das Newtonsche Potential, auszudehnen (was für uns hier nicht weiter in Betracht kommt), hat Herr Schwarz seine Aufmerksamkeit des ferneren insbesondere denjenigen Erweiterungen zugewandt, welche Riemann zwecks seiner funktionentheoretischen Untersuchungen der seinerzeit üblichen Potentialtheorie hinzugefügt hat. Ich meine die Einführung vorgeschriebener Unendlichkeitsstellen oder linearer Unstetigkeiten (Periodizitätsmoduln), sowie die Betrachtung *geschlossener* Mannigfaltigkeiten, mögen diese nun mehrblättrig über der Ebene ausgebreitet sein oder als beliebig gekrümmte Flächen im Raume gelegen vorgestellt werden. Die Erläuterungen, welche Herr Schwarz über diese Fragen gibt (siehe die Abhandlung in den Berliner Monatsberichten von 1870 [= Ges. math. Abh., Bd. 2, S. 167 ff.]) sind allerdings sehr knapp gehalten. Für geschlossene Flächen insbesondere erbringt er explizite nur den Nachweis, daß auf einer beliebigen, aus einer endlichen Anzahl sich nicht berührender sphaerischer Stücke zu-

gedruckt in Bd. 11 der Math. Annalen (1877), S. 558 ff.); sodann das ausführliche Werk: *Untersuchungen über das Logarithmische und Newtonsche Potential* (Leipzig, Teubner 1877).

H. A. Schwarz: *Zur Theorie der Abbildung* (im Jahresbericht des Züricher Polytechnikums, 1869/70) [= Ges. Math. Abhandlungen, Bd. 2, S. 108 ff.]; *Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren*, Züricher Vierteljahrsschrift, Mai 1870 [= Ges. Math. Abhandlungen, Bd. 2, S. 133 ff.]; sowie eine längere Mitteilung an die Berliner Akademie, siehe Monatsbericht vom 10. Oktober 1870 (S. 767—795 des betr. Bandes) [= Ges. Math. Abhandlungen, Bd. 2, S. 144 ff.].

sammengesetzten Fläche *vom Geschlechte Null* vermöge der vorgenannten Kombinationsmethoden ein überall eindeutiges Potential konstruiert werden kann, das einen einzigen, beliebig vorzugebenden algebraischen Unstetigkeitspunkt erster Ordnung besitzt. Alles andere sind Andeutungen. Ich habe es, als ich mich zuerst mit diesen Untersuchungen beschäftigte, nicht ganz leicht gefunden, diese Andeutungen zu ergänzen, und glaube also, daß es manchem Mathematiker nicht unangenehm sein wird, wenn ich in den folgenden beiden Paragraphen hierauf eingehe. Und zwar bringe ich zunächst mit freundlicher Erlaubnis des Verfassers einen Brief von Herrn Schwarz, in welchem derselbe auf meinen Wunsch seine Methode zur direkten Einführung von Periodizitätsmoduln erläutert. Sodann entwickele ich in § 8, wie man in genauem Anschlusse an die physikalischen Betrachtungen meiner Schrift dasselbe Ziel erreichen kann, indem man für Mannigfaltigkeiten von beliebigem p direkt nur die Existenz jenes eben erwähnten Potentials nachweist, das an beliebiger Stelle einen vorgegebenen einfachen algebraischen Unstetigkeitspunkt besitzt und übrigens eindeutig verläuft[22]).

§ 7.

Über die direkte Konstruktion der Integrale erster Gattung[23]).

Herr Schwarz schreibt mir unter dem 1. Februar 1882:

„Sind die Unstetigkeiten, welche man einer Potentialfunktion u auferlegen will, von der Art, daß bei der Überschreitung einer Querschnittlinie die Funktion um eine konstante, vorgeschriebene Größe sich ändern soll, so bedarf das Verfahren, welches in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1870 für die Einführung punktueller Unstetigkeiten eingehalten wurde (vgl. die beiden Beispiele S. 788—790 und 792—794 daselbst [= Ges. math. Abh. Bd. 2, S. 163—166 und 168—170]) nur einer unerheblichen Modifikation, solange der in Betracht zu ziehende Bereich noch *eine* Randlinie besitzt, längs welcher die Funktion u *vorgeschriebene* Werte haben soll.

„Zunächst ist der Satz für einen zweifach zusammenhängenden Bereich T zu beweisen[24]). Durch Q_1 werde aus T der einfach zusammenhängende Bereich T_1, durch Q_2 — welcher Querschnitt mit Q_1 keinen Punkt gemein haben darf —, gehe der Bereich T in den Bereich T_2 über. Man integriere für T_1 $\Delta u = 0$ unter der Bedingung: $u = 0$ am ganzen

[22]) [Vgl. hierzu die auf S. 478, Zeile 9 bis 1 von unten, gegebenen Zitate.]

[23]) [Wieder abgedruckt in Bd. 2 der Gesammelten mathematischen Abhandlungen von H. A. Schwarz, S. 303—306. Dieses Werk soll im gegenwärtigen Paragraphen kurz als Ges. math. Abh. zitiert werden.]

[24]) Wegen der Bezeichnungen und Ausdrucksweisen vergleiche man durchweg den Aufsatz in den Berliner Monatsberichten, überdies die hier beigegebene Fig. 1. — K.

Rande, $u = 1$ an beiden Ufern des Querschnitts Q_1. Es sei q_2 das Maximum aller Werte, welche u längs der ganz innerhalb T_1 liegenden Linie Q_2 annimmt. Ebenso integriere man $\Delta u = 0$ für das Innere von T_2 unter der Bedingung: $u = 0$ am ganzen Rande, $u = 1$ an beiden Ufern von Q_2. Es sei q_1 das Maximum der Werte, welche u längs der ganz innerhalb T_2 liegenden Linie Q_1 annimmt. Sowohl q_1 als q_2 sind kleiner als 1.

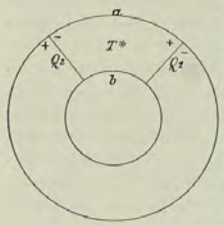


Fig. 1.

„Es seien nun die Werte von u längs der ganzen Begrenzung von T vorgeschrieben, längs Q_1 soll $(u^+ - u^-) = K$ sein.

„Man bestimme für den Bereich T_1 eine Funktion u_1, welche am Rande von T die vorgeschriebenen Werte hat, am negativen Ufer von Q_1 irgendwelche Werte, am positiven Ufer die um K größeren Werte annimmt. Von dieser im Innern von T_1 der Differentialgleichung $\Delta u_1 = 0$ genügenden Funktion denke man sich die Werte längs Q_2 bestimmt und integriere für T_2 die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ durch eine Funktion u_2, welche längs des Randes von T die vorgeschriebenen Werte annimmt (längs der Begrenzungsteile a und b muß natürlich $u_2 = u_1 - K$ sein), welche auf dem negativen Ufer von Q_2 mit $u_1 - K$, auf dem positiven mit u_1 übereinstimmt. Hierauf bestimme man für das Innere von T_1 eine Funktion u_3, so daß $\Delta u_3 = 0$, längs der Begrenzung von T $u_3 = u_1$, längs des negativen Ufers von Q_1 $u_3 = u_2$, längs des positiven Ufers $u_3 = u_2 + K$ ist.

„Auf diese Weise fortschreitend bestimme man eine unendliche Reihe von Funktionen $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$, welche abwechselnd für das Innere von T_1 und das Innere von T_2 erklärt sind.

„Das Maximum (bzw. die obere Grenze) von $|u_1 - u_3|$, d. h. des absoluten Betrages von $u_1 - u_3$, längs Q_1 sei g, so ist der absolute Betrag von $u_1 - u_3$ längs Q_2 sicher nicht großer als $g \cdot q_2$; längs Q_2 ist aber $u_1 - u_3 = u_2 - u_4$ (und zwar auf beiden Ufern), folglich ist $u_2 - u_4$, da diese Differenz am ganzen Rande von T gleich Null ist, dem absoluten Betrage nach an keiner Stelle innerhalb T_2 größer als $g \cdot q_2$, längs Q_1 jedenfalls nicht größer als $g \cdot q_1 \cdot q_2$. Mithin ist $|u_3 - u_5| \overline{\gtrless} g \cdot q_1 q_2$, $|u_4 - u_6| \overline{\gtrless} g \cdot q_1 q_2^2$ usw.

„Hieraus folgt zunächst, daß die Funktionen u_{2n+1} sowohl, als auch die Funktionen u_{2n} sich mit wachsendem Index zwei bestimmten Grenzfunktionen u' und u'' nähern, welche beziehlich für die Bereiche T_1 und T_2 erklärt sind und innerhalb dieser Bereiche die Differentialgleichung

befriedigen. Längs der ganzen Begrenzung Q_1^+, a, Q_2^-, b des Teilbereiches T^* ist $u' = u'' + K$, es besteht daher diese Gleichung auch im Innern von T^*. Längs der ganzen Begrenzung des Teilbereiches $T - T^+$ ist $u' = u''$, es besteht daher auch diese Gleichung im Innern von $T - T^*$.

„Setzt man aber $u = u'$ im Innern von T_1, so ist u'' die analytische Fortsetzung von u^- über Q_1 hinaus; diese Fortsetzung ist aber, wie bewiesen, innerhalb T^* gleich $u' - K$, d. h. gleich $u^+ - K$, also ist die Funktion $u = u'$ die gesuchte.

„Es ist also der Satz für einen *zweifach* zusammenhängenden Bereich, für einen beliebig vorgeschriebenen Periodizitätsmodul und für beliebig vorgeschriebene (im allgemeinen stetige) Randwerte bewiesen.

„Unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Satzes für einen *zweifach* zusammenhängenden Bereich kann man nun den analogen Satz für einen *dreifach* zusammenhängenden Bereich beweisen. Es sei T dreifach zusammenhängend. Man konstruiere einen Querschnitt Q_1, durch welchen T in einen *zweifach* zusammenhängenden Bereich T_1 übergeht. Man konstruiere einen zweiten Querschnitt Q_2, welcher durch kontinuierliche Gestaltänderung auf Q_1 reduzierbar ist, der aber mit Q_1 keinen Punkt gemeinsam hat. Durch Q_2 gehe T in T_2 über.

„Nun kann man, dem bereits bewiesenen Satze zufolge, für die Bereiche T_1 und T_2 die Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ bestimmen, welche *einen* vorgeschriebenen Periodizitätsmodul bereits besitzen und, genau dem vorher angegebenen Verfahren entsprechend, der Funktion u einen zweiten Periodizitätsmodul aufzwingen.

„So kann man fortfahren, solange eben überhaupt noch *eine* Randlinie übrig bleibt, längs welcher die Funktion u *vorgeschriebene* Werte annehmen soll.

„Will man aber auch diese letzte Randlinie fortschaffen, also zu einer geschlossenen Riemannschen Fläche ohne Randlinien übergehen, so kann man nicht auf dieselbe Weise verfahren, weil man bezüglich des Beweises auf Schwierigkeiten stößt.

„Diese Schwierigkeit, welche mir anfänglich viele Mühe gemacht hat, habe ich auf folgende Weise überwunden.

„Aus der Riemannschen Fläche T schneide man eine Kreisfläche mit dem Radius R_1 heraus, die in ihrem Innern keine singuläre Stelle besitzt. Die von T noch übrigbleibende Fläche möge mit T_1 bezeichnet werden. Diese Fläche, welche also jetzt eine Randlinie besitzt, gestattet die Anwendung des bewiesenen Satzes zweifellos. Zu dem Kreise mit dem Radius R_1 konstruiere man nun einen konzentrischen mit *größerem* Radius R_2 und bezeichne das Innere dieses Kreises mit T_2. Die beiden Kreise mit den Radien R_1 und R_2 sollen in demselben Blatte von T liegen; es kann also immer erreicht werden, daß auch der größere Kreis keine singuläre Stelle in seinem Innern enthält.

„Man nehme nun längs $r = R_1$ eine Wertenreihe beliebig an, z. B. $u = 0$, und bestimme für den Bereich T_1 eine Funktion u_1, welche am Rande $r = R_1$ gleich Null ist und an allen Querschnitten die vorgeschriebenen Periodizitätsmoduln besitzt. Eine solche Funktion existiert, läßt sich auch über den Rand von T_1 hinaus fortsetzen, aber von dieser Fortsetzung kann man keinen Gebrauch machen, weil dieselbe für $r < R_1$ nicht eindeutig und stetig bleibt (natürlich $\Delta u_1 = 0$).

„Man bestimme hierauf für das Innere von T_2 eine Funktion u_2, welche längs $r = R_2$ mit u_1 übereinstimmt und für die $\Delta u_2 = 0$ ist. Hierauf bestimme man für das Innere von T_1 eine neue Funktion u_3, für welche $\Delta u_3 = 0$ ist, welche längs $r = R_1$ mit u_2 übereinstimmt und welche im Innern von T_1 an allen Querschnitten die vorgeschriebenen Periodizitatsmoduln besitzt.

„Auf diese Weise fahre man fort.

„Genau dasselbe Verfahren, welches auf S. 792 [= Ges. math. Abh. Bd. 2, S. 168 ff.] dazu angewendet worden ist, der Funktion u eine algebraische Unstetigkeit aufzuzwingen, wird hier dazu benutzt, zu bewirken, daß die Grenzfunktion, der die Funktionen $u_1, u_3, \ldots$ mit wachsendem Index unendlich nahekommen, in dem ganzen Innern des Bereiches T_2 sich eindeutig analytisch fortsetzen läßt.

„Von wesentlichem Einflusse auf die Beweisführung ist hierbei ein Hilfssatz, den ich im 74. Bande des Crelleschen Journals, S. 232 [= Ges. math. Abh. Bd. 2, S. 189—190] erwähnt habe[25]).

[25]) [Daselbst heißt es: „Mitunter ist es nützlich, einen Wert zu kennen, welchen der absolute Betrag $|u(r, \varphi) - u(0)|$ der Differenz $u(r, \varphi) - u(0)$ als Funktion von r nicht überschreiten kann, sobald die Werte $u(r, \varphi) = f(\varphi)$ eine endliche Größe g dem absoluten Betrage nach nicht überschreiten. Man erhält

$$|u(r, \varphi) - u(0)| < |F(z) - F(0)| < \frac{2gr}{1-r};$$

oder

$$u(r, \varphi) - u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\varphi + \psi)\left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos\psi + r^2} - 1\right) d\psi,$$

$$|u(r, \varphi) - u(0)| < \frac{4g}{\pi} \arcsin r.$$

Wenn insbesondere $u(0)$ den Wert 0 hat, so kann der absolute Betrag von $u(r, \varphi)$, als Funktion von r betrachtet, den Wert $\frac{4g}{\pi}\operatorname{arctg} r$ nicht überschreiten. Diese Bestimmung ergibt zugleich die engste Grenze, welche unter den angegebenen Voraussetzungen zulässig ist.“]

„Dieser höchst einfache Hilfssatz leistet in vielen Fällen sehr gute Dienste, besonders für den Fall geschlossener Bereiche.

„Hiermit glaube ich nun hinreichend angedeutet zu haben, wie ich mir etwa den Nachweis der Existenz der überall endlich bleibenden Integralfunktionen zurechtgelegt habe, auf den ich natürlich großes Gewicht legen mußte, wenn anders die von mir angewendete Schlußweise überhaupt geeignet sein sollte, die Sätze zu beweisen, welche Riemann gefunden und ausgesprochen, aber eben nicht bewiesen hat.“

§ 8.

Andere Gruppierung der Existenzbeweise.

Um jetzt einen Augenblick auf die physikalischen Betrachtungen der Abh. XCIX zurückzugehen[26]), so gestaltete sich die Anordnung dort folgendermaßen. Das *erste* Experiment, das ich als realisierbar voraussetzte, bestand darin, daß auf die mit leitendem Materiale bedeckte Riemannsche Fläche an zwei Stellen die beiden Pole einer galvanischen Batterie aufgesetzt wurden. So entstand ein überall eindeutiges Potential mit zwei gegebenen, einander ergänzenden logarithmischen Unstetigkeitspunkten. Sodann ließ ich, an *zweiter* Stelle, die beiden Pole der galvanischen Batterie zusammenrücken, zugleich aber die Intensität des elektrischen Stromes sich ins Unendliche steigern. Dadurch erhielt das nach wie vor überall eindeutige Potential einen einfachen algebraischen Unstetigkeitspunkt. Ein solcher Punkt besitzt eine *Achse* und ein *Moment, M*. Nennt man die geodätische Entfernung eines Punktes der Fläche von jenem Unstetigkeitspunkte r, und φ das Azimuth, unter welchem der geodätische Radiusvektor gegen die Achse geneigt ist, so ist, für sehr kleine Werte von r, der Wert des in Rede stehenden Potentials $\frac{M \cdot \cos\varphi}{r}$. *Eben diese Art von Potential werde ich weiterhin als Elementarpotential bezeichnen, denn es zeigt sich, daß man durch Überlagerung von Elementarpotentialen alle anderen erzeugen kann.* — Endlich mein *drittes* Experiment! Ich traf eine derartige Anordnung, daß eine ganze Kurve auf der Riemannschen Fläche als Sitz einer elektromotorischen Kraft, und zwar einer gleichförmigen elektromotorischen Kraft zu gelten hatte. Lief diese Kurve von einem Endpunkte zu einem zweiten hin, so wurden

[26]) Niveaukurven des logarithmischen Potentials in der Ebene sind in neuerer Zeit auf physikalischem Wege durch Herrn Guébhard in ausgezeichneter Schönheit realisiert worden (Comptes rendus 1881/82). Vielleicht gelingt es den Physikern auch, jene Kurvensysteme, die ich in Abh. XCIX auf beliebiger geschlossener Fläche betrachtete, experimentell herzustellen und dadurch dem näheren Studium zugänglich zu machen. — Auf die Kontroversen einzugehen, welche sich an die Guébhardschen Versuche anschließen, würde den Zweck dieses kurzen Hinweises überschreiten.

diese Punkte einander ergänzende *Wirbelpunkte.* Das zugehörige Potential wird bei Annäherung an einen solchen Punkt dem von geeigneter Anfangsrichtung an gemessenen Azimut φ proportional und ist also unendlich vieldeutig. Kehrt aber die Kurve geschlossen in sich zurück, wobei man voraussetzen muß, daß die Riemannsche Fläche, längs dieser Kurve zerschnitten, nicht etwa in getrennte Teile zerfällt, so entstand ein *überall endliches* Potential. Dasselbe verläuft auf der Fläche durchweg stetig, gewinnt aber bei jeweiliger Überschreitung der benutzten Kurve einen der elektromotorischen Kraft proportionalen Periodizitätsmodul, ist also ebenfalls unendlich vieldeutig.

Man erinnere sich nun einen Augenblick der Grundvorstellungen des Newtonschen Potentials. Jenem eindeutigen Potential mit zwei einander ergänzenden logarithmischen Unstetigkeitspunkten entspricht im Raume die Funktion

$$c\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right),$$

unter r, r', die geradlinigen Abstände von zwei festen Punkten verstanden. Unserer Elementarfunktion aber korrespondiert der Ausdruck:

$$\frac{M\cos\varphi}{r^2},$$

das Potential des magnetischen Moleküls. Nun kann man aus letzterem das vorangeführte, $c\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)$, erzeugen, indem man eine Reihe magnetischer Moleküle desselben Momentes M mit ihren Achsen aneinanderreiht; es entspricht dies der Vorstellung, die wir uns von einem Linearmagneten zu machen pflegen. *Genau so wird man offenbar auf unserer Riemannschen Fläche die eindeutige Potentialfunktion mit zwei einander ergänzenden logarithmischen Unstetigkeitspunkten aus unserer Elementarfunktion ableiten können.* — Aber die mathematische Physik kennt auch eine *Nebeneinander*stellung magnetischer Moleküle desselben Momentes. Man erhält vermöge derselben den Begriff der transversal magnetischen Fläche (Helmholtz) und konstruiert hierdurch unendlich vieldeutige Potentiale, für welche die Kontur der transversal magnetischen Fläche eine Wirbellinie ist. *Genau so wird man auf unserer Riemannschen Fläche die oben genannten unendlich vieldeutigen Potentiale erzeugen können, indem man jeden Punkt derjenigen Kurve, die wir als den Sitz einer gleichförmigen elektromotorischen Kraft bezeichneten, nunmehr als Unstetigkeitspunkt eines Elementarpotentials betrachtet, dessen Achse mit der zugehörigen Kurvennormale zusammenfällt und dessen Moment einer infinitesimalen, dem Bogenelemente proportionalen Größe gleich ist.*

Das Resultat dieser Betrachtungen ist sonach das folgende: *daß nämlich auf beliebiger Riemannscher Mannigfaltigkeit* (also auch auf

beliebig gegebenem Fundamentalbereich), *sobald erst die Existenz des Elementarpotentials festgestellt ist, alle anderen in meiner Schrift in Betracht gezogenen Potentialfunktionen durch Mittel der gewöhnlichen Analysis, nämlich durch bestimmte Integrale*[27]), *hergestellt werden können.*

Die Existenz aber des Elementarpotentials auf beliebiger Riemannscher Mannigfaltigkeit kann fast genau mit denselben Worten dargetan werden, mit welchen Herr Schwarz S. 792—794 seiner Abhandlung in den Berliner Monatsberichten [= Ges. Math. Abh. Bd. 2, S. 167—170] den analogen Beweis für geschlossene Flächen vom Geschlechte Null geführt hat. Man hat sich nur zu erinnern, daß die nächste Umgebung jeder Stelle unserer Mannigfaltigkeit auf ein Stück der Ebene konform übertragen werden kann. Übrigens wird auch bei dem Beweise des Herrn Schwarz eigentlich nirgends darauf Bezug genommen, daß $p = 0$ sein soll. Herr Schwarz betont den letzteren Umstand nur, um aus der Existenz des Elementarpotentials ein bestimmtes Theorem über konforme Abbildung abzuleiten.

§ 9.

Berandete Flächen.

Um den Betrachtungen des § 8 einen gewissen Abschluß zu geben, bespreche ich noch kurz den Fall berandeter Flächen, wobei ich allerdings nichts vorzubringen habe, was nicht den Spezialforschern auf diesem Gebiete bekannt wäre[28]).

Bekanntlich führt man die Theorie berandeter Flächen nach dem Vorgange von C. Neumann (Crelles Journal, Bd. 59 (1861)) auf die sogenannte Greensche Funktion zurück[29]). Wir definieren dieselbe als eine auf der berandeten Fläche eindeutige Potentialfunktion, welche an vorgegebener Stelle wie $\log r$ für $r = 0$ unendlich wird und, überall sonst stetig verlaufend, am Rande den konstanten Wert Null hat. Betrachtet man übrigens die Formeln, deren man sich z. B. bei Erledigung der Randwertaufgabe bedient, genauer, so sieht man, daß es nicht sowohl die Greensche Funktion ist, welche man benutzt, als ein Grenzfall derselben,

[27]) Sofern es sich um die unbegrenzte *Ebene* handelt, hat bereits Herr C. Neumann von derartigen Integralen ausgiebigen Gebrauch gemacht.

[28]) Vgl. z. B. das schon oben genannte Fragment in Riemanns mathematischen Werken [1. Aufl., Nr. XXV, 2. Aufl., Nr. XXVI].

[29]) Ursprünglich hatte Herr Neumann, indem er sich auf die Betrachtung ebener Bereiche beschränkte, von der im Texte genannten Funktion noch $\log r$ in Abzug gebracht (unter r die geradlinige Entfernung von der Unstetigkeitsstelle verstanden). Die im Texte gegebene, übrigens schon von verschiedenen Autoren benutzte Definition scheint zweckmäßiger und muß jedenfalls dann verwandt werden, wenn man, wie hier beabsichtigt, die berandeten Flächenstücke beliebig gekrümmt im Raume verlaufend voraussetzen will.

der sich hinter dem nach der Normale eines Randpunktes genommenen Differentialquotienten der Greenschen Funktion verbirgt. Derselbe repräsentiert eine auf der berandeten Fläche überall sonst eindeutige und stetige, längs des Randes verschwindende Potentialfunktion, welche in einem einzelnen Randpunkte eine einfache algebraische Unstetigkeit hat, deren Achse mit der zugehörigen Randnormale zusammenfällt. Eine gewisse Scheu, Potentialfunktionen am Rande selbst mit Unstetigkeiten auszustatten, mag davon abgehalten haben, diesem Grenzfall einen besonderen Namen beizulegen.

Es ist nun überraschend, zu sehen, wie diese Begriffsbestimmungen sich in die allgemeinen des vorigen Paragraphen einordnen, *sobald wir die berandete Fläche, wie es u. a. in meiner Schrift* [Abh. XCIX, S. 570] *zur Sprache kam, indem wir Vorder- und Rückseite derselben getrennt auffassen und längs der Begrenzungslinie verbunden denken*[30], *als einen besonderen Fall symmetrischer, geschlossener Flächen gelten lassen.* Will man die Potentialfunktionen, welche, auf der Vorderseite der berandeten Fläche verlaufend, längs des Randes den konstanten Wert Null haben, auf die Rückseite der Fläche analytisch fortsetzen, so braucht man nur die einzelnen Potentialwerte (indem man vom Punkte der Vorderseite zum entsprechenden Punkte der Rückseite übergeht) im Vorzeichen umzukehren. So erweist sich dann die Greensche Funktion als besonderer Fall jenes ersten, im vorigen Paragraphen betrachteten Potentials, welches zwei einander ergänzende logarithmische Unstetigkeitspunkte hat. Es ist nur *die* besondere Anordnung getroffen, daß jene beiden Unstetigkeitspunkte an korrespondierenden Stellen der beiden Flächenseiten gelegen sind. *Jener Grenzfall der Greenschen Funktion aber* (auf den es, wie gesagt, eigentlich ankommt) *ist nichts anderes als unsere Elementarfunktion, mit der Maßgabe, daß man, um die Symmetrie der beiden Flächenseiten zu wahren, den Unstetigkeitspunkt auf den Rand und die zugehörige Achse in die Randnormale verlegt hat.*

So ergibt sich also ein merkwürdiges Resultat. Die Theorie der geschlossenen Flächen kann bislang (§ 6) nur so [mathematisch] behandelt werden, daß man die geschlossene Fläche aus einzelnen berandeten Stücken zusammensetzt. Umgekehrt aber gewinnt man die beste Einsicht in die Lehre von den berandeten Flächen, indem man letztere als speziellen Fall der geschlossenen Flächen auffaßt.

[30]) Ich spreche hier nicht weiter von den in Abh. XCIX gleichfalls in Betracht gezogenen Doppelflächen.

Abschnitt II.

Das Prinzip der analytischen Fortsetzung.

§ 1.

Erläuterung des Prinzips an einem Beispiele.

Das allgemeine Prinzip, welches wir hier aufzustellen haben, ist an sich außerordentlich einfach, und nur seiner *Wichtigkeit* halber wird ihm ein besonderer Abschnitt hier gewidmet. Dabei verlasse ich für die Folge die Ausdrucksweise der Potentialtheorie, spreche vielmehr, indem ich mir jedes Potential mit dem konjugierten in bekannter Weise vereinigt denke (Abh. XCIX, S. 521), unmittelbar von den komplexen Funktionen des Ortes. Von den Funktionen, die ich in Abh. XCIX in Betracht zog, will ich hier der Kürze halber nicht die mit Periodizitätsmoduln, sondern nur die eindeutigen ins Auge fassen, bei gegebenem Fundamentalbereiche also nur solche, die in zusammengehörigen Randpunkten übereinstimmende Werte annehmen. Erinnern wir uns noch, daß eine komplexe Funktion des Ortes völlig bestimmt ist, wenn wir ihre Werte längs eines beliebig kleinen Linienstückes kennen.

Dies vorausgeschickt, beginnen wir bei Darlegung unseres Prinzips, der vollen Deutlichkeit wegen, mit demselben Beispiele des einfachen Parallelogramms, das auch in § 2 des vorigen Abschnitts vorangestellt wurde. Wir hatten damals nur ein einzelnes Parallelogramm betrachtet und dessen gegenüberstehende Kanten in einfacher Weise zusammengeordnet. Aber nun beachten wir, daß das Parallelogramm einen Teil der unbegrenzten Ebene ausmacht und wir das in Rede stehende Gesetz (die einfache Parallelverschiebung) als eine die ganze Ebene betreffende Operation auffassen können. Vermöge derselben legt sich neben unser erstes Parallelogramm ein zweites, ihm kongruentes.

Zugleich modifizieren wir in etwas unsere Auffassung. Statt unsere komplexe Funktion des Ortes nur innerhalb des ersten Parallelogramms als bestehend vorauszusetzen, verfolgen wir dieselbe jetzt über das Parallelogramm hinaus in die unbegrenzte Ebene. Wir finden dann sofort: *daß unsere Funktion in dem neukonstruierten, anliegenden Parallelogramm dieselbe Wertverteilung aufweist wie in dem alten.* Denn das neue Parallelogramm liegt genau so gegen die Kante, welche ihm mit dem ersten gemeinsam ist, wie letzteres gegen seine gegenüberstehende Kante; in den entsprechenden Punkten beider Kanten nimmt aber unsere Funktion, nach Voraussetzung, identische Werte an.

Wir wiederholen nun den hiermit gemachten Schluß, indem wir das ursprüngliche Parallelogramm zunächst mit vier neuen Parallelogrammen umgeben, dann jedes von diesen abermals, und so weiter fort, bis die ganze Ebene in bekannter Weise mit einem Netz von Parallelogrammen überdeckt ist. In jedem dieser Parallelogramme verläuft unsere Funktion genau so, wie in jedem anderen. Um uns der gewöhnlichen Sprechweise zu bedienen, mögen wir die unbegrenzte Ebene als das Gebiet einer Variablen η betrachten. Dann haben wir als Resultat: *daß dieselben Funktionen, welche wir als eindeutige Funktionen des Ortes auf unserem Fundamentalbereich definierten, doppeltperiodische Funktionen der Variabeln η sind.* Dieser Satz darf natürlich sofort umgekehrt werden. Er enthält in einfachster Form, was wir jetzt als allgemeines Prinzip zu formulieren haben.

§ 2.

Der allgemeine Fall.

Um nun bei beliebig gegebenem Fundamentalbereiche einen ähnlichen Schluß machen zu können, genügt es offenbar, anzunehmen: daß derselbe ein *Stück* einer anderen, umfassenderen Riemannschen Fläche sei[31]), und daß jene Operationen, welche die Kanten unseres Fundamentalbereichs zusammenordnen, als Transformationen der ganzen Riemannschen Fläche in sich selbst aufgefaßt werden können. Vermöge jeder solchen Operation legt sich dann neben den ursprünglichen Fundamentalbereich ein neuer. Damit die Vorstellung des zu schildernden Prozesses den richtigen Grad der Allgemeinheit erreiche, wollen wir gleich erwähnen, daß dieser neue Bereich möglicherweise an irgendwelchen Stellen über den alten hinübergreift oder auch Verzweigungspunkte in seinem Innern aufweist, die der alte nicht besaß, usw. Unabhängig davon gilt allemal der Satz: *daß jede komplexe Funktion des Ortes, welche auf der durch den ersten Bereich versinnlichten Riemannschen Mannigfaltigkeit eindeutig ist, auf jedem der Nachbarbereiche dieselbe Wertverteilung aufweist, wie auf dem ursprünglichen.*

Um diese Behauptung genauer zu zergliedern, sei η eine komplexe Variable, deren wir uns bedienen, um den einzelnen Punkt auf unserer Riemannschen Fläche zu bezeichnen. Sei ferner $\eta' = \varphi(\eta)$ diejenige Transformation, welche neben den ersten Fundamentalbereich einen zweiten legt, und also aus einer bestimmten Kante (K_1) desselben diejenige (K_2) macht, welche beiden Fundamentalbereichen gemeinsam ist. Sei nun $F(\eta)$ eine Funktion, für welche $F_{K_1} = F_{K_2}$ ist, d. h. welche in entsprechenden Punkten der beiden Kanten übereinstimmende Werte annimmt. Man konstruiere sodann die neue Funktion $F(\eta') = F(\varphi(\eta)) = F'(\eta)$, welche in dem neuen Fundamentalbereiche genau so verläuft,

[31]) Noch allgemeiner wäre es, auch diese Fläche wieder als Fundamentalbereich gegeben zu denken; doch mache ich davon in dieser Arbeit keine Anwendung.

wie $F(\eta)$ in dem alten. Offenbar stimmen die Randwerte F'_{K_2} mit den entsprechenden F_{K_1} überein. Aber letztere sind, wie gesagt, ihrerseits mit den F_{K_2} identisch. *Daher stimmen F und F' überhaupt längs der Kante K_2 überein und sind also dieselben Funktionen.* Und eben dies behauptet in etwas anderer Ausdrucksweise unser Satz.

Es gilt nun, sich die Gesamtheit der Bereiche, welche aus dem ersten durch fortgesetzte Reproduktion entstehen, vorzustellen. Hierzu gibt das im vorigen Paragraphen behandelte Beispiel der doppeltperiodischen Funktionen nur unvollkommene Anleitung. Bezeichnet man nämlich mit S_1 und S_2 die beiden Verschiebungen, vermöge deren sich neben das ursprüngliche Parallelogramm Nachbarparallelogramme legen, so ist $S_1 S_2 = S_2 S_1$. *Im allgemeinen aber ist für eine solche Relation, oder überhaupt für irgendeine Relation zwischen den entsprechenden Operationen $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ gar kein Grund vorhanden.* Die Operationen $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$, zusammen mit ihren inversen $S_1^{-1}, S_2^{-1}, \ldots, S_\nu^{-1}$, umgeben den ursprünglichen Fundamentalbereich mit einem Kranze von 2ν Bereichen. Kombinieren wir nun irgend zwei der Operationen, z. B. $S_i S_k$, so heißt dies, daß wir zunächst auf den anfänglichen Bereich die Operation S_i anwenden, dann aber auf den so gewonnenen Bereich die Operation S_k (die ja nicht nur für die Punkte des ursprünglichen Bereiches, sondern überhaupt für alle Punkte der Riemannschen Fläche, die unsere Bereiche trägt, nach Voraussetzung Bedeutung hat). Wir erhalten so einen Bereich, welcher sich neben den anderen legt, der aus dem Anfangsbereiche durch S_k hervorgeht. — In ähnlicher Weise will jede Zusammenstellung der Symbole $S_1^{\pm}, S_2^{\pm}, \ldots, S_\nu^{\pm}$ gedeutet sein: jeder Zusammenstellung entspricht ein bestimmter Bereich, und auch umgekehrt (solange wir eben keine Relationen zwischen den S voraussetzen) jedem Bereiche nur eine Zusammenstellung. Ich werde weiter unten auf diese Korrespondenz zwischen Bereichen und Operationen noch genauer eingehen (Abschnitt III, § 11) und will hier nur noch auf Herrn Dycks „*Gruppentheoretische Studien*" (Bd. 20 [und Bd. 22] der Math. Annalen [(1882) und (1883)]) verweisen, wo dieselben Verhältnisse in einer nur unwesentlich partikularisierten Form mit besonderer Klarheit, aber allerdings in etwas anderer Bezeichnung, besprochen sind.

Die Sache ist nun die, *daß unsere Funktion $F(\eta)$ sich auf allen diesen (im allgemeinen unendlich vielen) Bereichen gleichförmig reproduzieren wird.* Oder, wenn wir uns der Sprache der Analysis bedienen wollen und die Operationen $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$ uns durch entsprechende Formeln $\eta' = \varphi_1(\eta), \eta' = \varphi_2(\eta), \ldots, \eta' = \varphi_\nu(\eta)$ ersetzt denken: *Unser $F(\eta)$ genügt den Funktionalgleichungen:*

$$F(\varphi_1(\eta)) = F(\varphi_2(\eta)) = \ldots = F(\varphi_\nu(\eta)) = F(\eta),$$

und natürlich den unbegrenzt vielen, die aus ihnen abgeleitet werden können.

Diese analytische Formulierung ist allerdings insofern minder vollkommen als die geometrische, als F, φ im allgemeinen äußerst vieldeutige Funktionen von η sind und daher die vorstehenden Funktionalgleichungen erst dadurch einen bestimmten Sinn bekommen, daß wir ausdrücklich festsetzen, sie sollen dem Übergange jedesmal vom einen Bereiche zum Nachbarbereiche korrespondieren.

Dies ist das Prinzip der analytischen Fortsetzung.

§ 3.

Verbesserte Auffassung des Prinzips. Reguläre und symmetrische Flächen.

Man kann innerhalb der Riemannschen Theorie sozusagen drei Stufen der Entwicklung unterscheiden. Allemal wird der unabhängig Variablen der gewöhnlichen Funktionentheorie eine irgendwie verlaufende Riemannsche Fläche (oder Mannigfaltigkeit) substituiert. Aber an Stelle der abhängig Veränderlichen tritt das eine Mal die einzelne (reelle) Potentialfunktion u, das zweite Mal die komplexe Funktion des Ortes, $u + iv$, endlich das dritte Mal wieder eine Riemannsche Fläche. Wo die gewöhnliche Analysis Abhängigkeiten zwischen zwei Variablen hat, da haben wir jetzt eine konforme Beziehung zwischen zwei Riemannschen Flächen. Es werden also nicht sowohl zwei komplexe Größen, sondern direkt zwei algebraische Gebilde in wechselseitige Abhängigkeit versetzt.

Indem wir hiervon Gebrauch machen, können wir sagen, daß unser Prinzip der analytischen Fortsetzung nichts anderes ist, als eine Schilderung der allgemeinsten konformen Beziehung, welche zwischen zwei Riemannschen Flächen, T_1 und T_2, bestehen kann. Wird T_1 in geeigneter Weise zerschnitten und beginnen wir mit einer von den vielleicht unendlich vielen, unterschiedenen Abbildungen, welche T_1 auf T_2 vermöge des vorausgesetzten konformen Zusammenhanges erfährt, so erscheint das Bild von T_1 als bestimmter Fundamentalbereich, d. h. als ein Bereich mit bestimmter Zusammengehörigkeit der Kanten, über T_2 (oder einen Teil von T_2) ausgebreitet. Die Sache ist dann die, daß es nicht nötig ist, will man die übrigen Abbildungen von T_1 finden, auf T_1 selbst zu rekurrieren. Vielmehr genügt es, jenen ersten Fundamentalbereich ins Auge zu fassen und ihn auf T_2 durch analytische Fortsetzung ins Unbegrenzte zu reproduzieren. Und dieses ist vielleicht der reinste Ausdruck unseres Prinzips.

Indem wir von demselben Gebrauch machen, besprechen wir den besonderen Fall, *daß nämlich T_1 eindeutige Transformationen in sich selbst besitzen mag.* Es zerlegt sich dann T_1 in eine gewisse (vielleicht unendliche) Zahl kleinerer, unter sich äquivalenter Gebiete, und nun ist die Sache offenbar die, daß es genügt, auf T_2 *eine* Abbildung *eines* dieser Gebiete zu kennen, um aus ihr zunächst durch eine geeignete analytische Fortsetzung ein erstes Bild der ganzen Fläche T_1 und weiterhin alle solche Bilder zu erhalten.

Hierbei nun erinnere man sich der Auseinandersetzungen über eindeutige Transformationen einer Riemannschen Fläche in sich, wie ich sie in Abh. XCIX, S. 561 ff. gegeben habe. Neben die direkten Transformationen, die man gewöhnlich allein betrachtet, stellen sich unter Umständen inverse, denen eine konforme Abbildung „mit Umlegung der Winkel" entspricht. Gestattet eine Fläche eine inverse Transformation, welche, einmal wiederholt, zur Identität zurückführt, so heißt die Fläche eine *symmetrische*.

Indem wir uns auf letztere Flächen beschränken, besagt unser allgemeiner Satz, *daß es genügt, auf T_2 nur eine Abbildung der einen symmetrischen Hälfte von T_1 zu kennen, um aus ihr durch analytische Fortsetzung den Gesamtverlauf der Abbildung zu finden.* Die Operationen S_1, S_2, ..., welche dabei zur Reproduktion des Anfangsbereiches dienen, sind dann natürlich selbst von der inversen Art, welcher eine Abbildung von T_2 auf sich selbst mit Umlegung der Winkel entspricht.

So gelangen wir zum *Prinzip der Symmetrie* in seiner allgemeinsten Gestalt und erkennen zugleich seine Stellung gegen unser Prinzip der analytischen Fortsetzung. Wo es am Platze ist, besagt es mehr als das letztere, denn es trägt eben der Symmetrie von T_1 Rechnung. Dafür kommt es aber auch nur bei symmetrischen Flächen T_1 zur Geltung.

§ 4.

Funktionen mit linearen Transformationen in sich.

Die allgemeinsten Funktionen mit linearen Transformationen in sich erwachsen aus den Betrachtungen des § 2, indem man die Funktionen $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$, ... einfach durch *lineare* Ausdrücke in η gegeben sein läßt. So war es in den Beispielen 1, 2, 3 des § 2 im vorigen Abschnitte, und auch das Beispiel 4 daselbst liefert uns Funktionen mit linearen Transformationen in sich, wenn wir die damals nicht näher definierte Zuordnung der $2p$ Randkurven eben durch lineare Substitution vermittelt denken. In allen diesen Fällen ist eine Ebene η (oder eine Kugelfläche η, was auf dasselbe hinauskommt) die Trägerin der unbegrenzt vielen Reproduktionen, und so wollen wir es auch in der Folge, da diese Annahme allgemein genug ist, voraussetzen.

Die angeführten Beispiele zeigen zugleich, daß Funktionen mit linearen Transformationen in sich durchaus nicht *eindeutig* zu sein brauchen. Es ist dies erst eine neue, in den späteren Entwicklungen des vorliegenden Aufsatzes hinzutretende Bedingung. Erst durch sie gewinnt der Begriff von Funktionen mit linearen Transformationen in sich eine engere Umgrenzung. Verzichtet man auf Eindeutigkeit, so gelingt es z. B. sofort, beliebig viele Funktionen zu konstruieren, welche durch irgendwelche vorgegebene lineare Substitutionen in sich übergehen. Für die einzelne solche Substitution konstruiere man nämlich einen Bereich, dessen Begrenzungslinien vermöge der Substitution zusammengeordnet sind. Überdies treffe man die Anordnung so, daß alle diese Bereiche irgendwie übereinander geschichtet erscheinen. Es genügt dann, diese Bereiche durch irgendwelche Verzweigungen zu einem einheitlichen Ganzen zu verbinden. Dann definiert uns das letztere, als Fundamentalbereich aufgefaßt, zugehörige Funktionen der gewollten Art.

Unter diesen allgemeinsten Funktionen mit linearen Transformationen in sich nehmen nun wieder diejenigen eine besondere Stellung ein, deren Fundamentalbereiche auch *inverse* lineare Umformungen in sich selbst gestatten. Insbesondere kann es sein, daß man die Gesamtheit aller äquivalenten Bereiche erhält, indem man den *halben* Ausgangsbereich durch symmetrische Umformungen dieser Art (d. h. Umformungen von der Periode Zwei) reproduziert. Und hier ist es nun, daß die Funktionen einzuordnen sind, welche die Herren Schwarz, Schottky u. a. (auch Riemann selbst [und Gauss]) vermöge des Prinzips der Symmetrie studiert haben. Es gibt zweierlei Arten symmetrischer linearer Umformungen (Abh. XCIX, S. 565). Beide erscheinen in der Ebene als Transformation durch reziproke Radien; aber das eine Mal hat man es mit einem reellen Inversionskreise, das andere Mal mit einem Kreise von imaginärem Radius zu tun. Von den genannten Autoren wurde durchweg nur die erste Art der Symmetrie benutzt. Daher erscheinen ihre Ausgangsbereiche (die halben Fundamentalbereiche) von a priori gegebenen Kreisbogen begrenzt. Insbesondere hat Herr Schwarz solche durchaus schlichte Ausgangsbereiche betrachtet, bei denen sich diese Kreisbögen zu *einem* Linienzuge zusammenfügen und das Geschlecht p des Fundamentalbereichs also den Wert Null hat. Darüber hinaus behandelt Herr Schottky den allgemeineren Fall, daß der, auch wieder schlicht vorausgesetzte Ausgangsbereich von mehreren Kreisbogenpolygonen umgrenzt sei. Das p des Fundamentalbereichs ist dann immer um eine Einheit kleiner als die Zahl der Begrenzungskurven. Herrn Schottkys Figuren ergeben sich aus denen des Herrn Schwarz sozusagen durch den im folgenden Abschnitte (§ 16) zu besprechenden Prozeß der Ineinanderschiebung.

Abschnitt III.

Eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Nach den Entwicklungen des vorigen Abschnitts ist die Bestimmung speziell aller *eindeutigen* Funktionen mit linearen Transformationen in sich sozusagen ein geometrisches Problem. Wir denken uns in der Ebene der komplexen Variablen η einen übrigens beliebigen Fundamentalbereich abgegrenzt, dessen Begrenzungskanten wir paarweise durch gewisse lineare Substitutionen des η zusammenordnen, reproduzieren dann diesen Bereich vermöge jener Substitutionen ins Unendliche und fragen, wie man in allgemeinster Weise die verschiedenen Bestimmungsstücke zu wählen hat, damit in der η-Ebene nirgends eine *mehrfache* Bedeckung durch die Fundamentalbereiche eintrete. — Die hier gewählte negative Ausdrucksweise soll dabei einschließen, daß keineswegs die ins Unendliche vervielfältigten Fundamentalbereiche die ganze Ebene zu überdecken brauchen. Vielmehr werden sich im allgemeinen *natürliche Grenzen* für die Vervielfältigung der Fundamentalbereiche einstellen, über welche hinaus dann auch die zugehörigen eindeutigen Funktionen nicht können fortgesetzt werden.

Es gelingt mir im folgenden nun nicht etwa, und es ist auch nicht mein Zweck, das allgemeine, so präzisierte Problem in voller Allgemeinheit zu erledigen. Vielmehr begnüge ich mich, von einer bestimmten Klasse eindeutiger Funktionen mit linearen Transformationen in sich (auf die sich dann auch das Fundamentaltheorem des Abschnitts IV zunächst beziehen soll) eine möglichst klare Vorstellung und scharfe Definition zu geben. Von dem Wunsche ausgehend, auch denjenigen verständlich zu schreiben, welche sich noch nicht mit dieser Art von Funktionen beschäftigt haben, gehe ich schrittweise und bespreche zunächst in den folgenden Paragraphen die übrigens wohlbekannten Funktionen, welche bei Wiederholung einer einzelnen linearen Substitution ungeändert bleiben (§ 2—4), gebe sodann eine Übersicht über gewisse weitere einfache Fälle unserer Funktionen, die bereits von anderer Seite oder bei früherer Gelegenheit ausführlich behandelt wurden (§ 5—7) und untersuche sodann insbesondere derartige Funktionen, bei denen eine reelle Kreislinie die natürliche Grenze abgibt (§ 8—14). Aus den so gewonnenen Funktionen entstehen sodann durch Variation der Konstanten (§ 15) sowie durch Ineinanderschiebung (§ 16) gewisse allgemeinere, denen zwei weitere Paragraphen gewidmet werden (§ 17—18); sie bezeichnen die Grenze, bis zu welcher die diesmalige Untersuchung vorschreitet. Ich will hier den Wunsch nicht unterdrücken, daß alle diese Dinge von anderer Seite mit größerer Ausführlichkeit möchten durchgearbeitet werden, als es mir seither bei nur zu beschränkter Zeit möglich gewesen ist[32]).

§ 2.

Über die geometrische Bedeutung der einzelnen linearen Substitution.

Was hier über die Bedeutung der einzelnen linearen Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ gesagt werden soll, ist nachgerade ziemlich bekannt[33]). Man wolle sich dabei die betreffenden Figuren jedesmal in der Ebene zeichnen; es ist dann aber nützlich, sich dieselben auf der Kugel vorzustellen. Denn auf der Kugel erscheinen solche Figuren, die wir als gleichberechtigt erachten müssen, auch dem ungeübten Auge viel leichter äquivalent als in der Ebene.

Die erste Unterscheidung, welche wir zu machen haben, bezieht sich auf die sogenannten Fundamentalpunkte der Substitution, welche bei der Substitution ungeändert bleiben. Indem dieselben durch folgende quadratische Gleichung gegeben sind:

$$\gamma\eta^2 + (\delta - \alpha)\eta - \beta = 0,$$

können dieselben entweder getrennt sein, oder, im besonderen Falle, zusammenrücken.

Wir beginnen mit dem allgemeinen Falle und legen durch die beiden Fundamentalpunkte hindurch ein erstes Kreisbüschel, welches ich als Büschel der *Meridiane* bezeichne. Dann konstruieren wir das Büschel der hierzu orthogonalen Kreise, der *Breitenkreise*. Die Ebenen der Breitenkreise schneiden sich (im Raume gedacht) alle längs derjenigen Linie, welche, in bezug auf die Kugel, die konjugierte Polare der Verbindungslinie der Fundamentalpunkte ist. Hierauf führen wir, statt η, eine neue Koordinate ζ derart ein, daß $\zeta = 0$ den einen, $\zeta = \infty$ den anderen Fundamentalpunkt bezeichnet. Setzen wir $\zeta = re^{i\varphi}$, so wird $\varphi = \text{Const.}$ die Gleichung der Halbmeridiane, $r = \text{Const.}$ die Gleichung der Breitenkreise

32) [Die im Texte geforderte Durcharbeitung hat später Fricke geleistet. Seine Ergebnisse hat er zunächst in den Göttinger Nachrichten und in den Math. Annalen der neunziger Jahre veröffentlicht und dann in die „Automorphen Funktionen“ eingearbeitet. Näheres darüber folgt unten auf S. 742 ff.]

33) Ich selbst habe diese Dinge z. B. schon im 9. Bande der Math. Annalen (1875/76) [= Abh. LI in Bd. 2 dieser Ausgabe S. 277 ff.] in ähnlicher Form zur Sprache gebracht. Wegen der einzuführenden Benennung vgl. man Bd. 14 der Math. Annalen (1878/79). [Man sehe die oben abgedruckte Abh. LXXXII, S. 24 ff. — Vgl. auch „Modulfunktionen“, Bd. 1, S. 163/164 und „Automorphe Funktionen“, Bd. 1, S. 65—68.]

sein. Auf dieses kanonische Koordinatensystem bezogen, muß jetzt unsere Substitution notwendig folgende Gestalt annehmen:

$$\zeta' = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \zeta,$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung bezeichnen:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \varrho & \beta \\ \gamma & \delta - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Und nun unterscheide ich, indem ich $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = Re^{i\alpha}$ setze, drei Fälle.

Im ersten Falle sei $R = 1$. Dann bleiben, wie ersichtlich, bei der Transformation alle Breitenkreise ungeändert, die Meridiane aber vertauschen sich in der Art unter sich, daß $\varphi = \text{Const.}$ in $\varphi = \text{Const.} + \alpha$ verwandelt wird. Dies ist, was ich als *elliptische* Substitution bezeichne. Die elliptische Substitution ist *periodisch*, wenn α mit 2π kommensurabel ist; ist α einem ganzzahligen Teile von 2π gleich, so nenne ich die Substitution gelegentlich *primitiv*.

Im zweiten Falle nehmen wir $\alpha = 0$. Dann bleiben umgekehrt die Meridiane ungeändert erhalten, die Breitenkreise aber vertauschen sich untereinander, indem $r = \text{Const.}$ durch $r = R \cdot \text{Const.}$ ersetzt wird. Ich nenne dann die Substitution eine *hyperbolische*.

Der dritte Fall, in welchem $R \gtrless 1$, $\alpha \gtrless 0$ ist, wird am besten verstanden, wenn wir ihn durch eine Aufeinanderfolge einer elliptischen und einer hyperbolischen Substitution ersetzt denken. Ein Punkt $\zeta = re^{i\varphi}$ ist nach der Transformation in $\zeta = rR \cdot e^{i(\varphi+\alpha)}$ übergegangen. Daher bleiben bei unserer Transformation die Kurven:

$$\alpha \cdot \log r - \varphi \cdot \log R = \text{Const.}$$

ungeändert. Diese Kurven sind die gleichwinkligen Trajektorien unserer Meridiane (oder Breitenkreise). Daher spreche ich im vorliegenden Falle von einer *loxodromischen* Substitution. Eine loxodromische Substitution ist ebenso, wie eine hyperbolische, notwendig aperiodisch.

Betrachten wir nun den Grenzfall, in welchem die beiden Fundamentalpunkte der Substitution zusammenfallen! Die Meridiane haben sich dann in solche Kreise verwandelt, welche einander im Fundamentalpunkte berühren. Aber die Breitenkreise, sowie die Scharen zusammengehöriger Loxodromen haben ihrerseits (wie man mit Leichtigkeit findet) je das Nämliche getan, *so daß also der spezifische Unterschied zwischen den dreierlei Kurvenarten in Wegfall kommt.* Wir verstehen die Transformation am besten, indem wir die Kugel vom Fundamentalpunkte aus auf die gegenüberstehende Tangentialebene projizieren. Die Meridiane verwandeln sich dann in Parallelgerade der Ebene, ebenso die Breitenkreise usw.

Sei ζ eine solche lineare Funktion von η, welche im Fundamentalpunkte unendlich wird. Dann schreibt sich unsere Substitution $\zeta' = \zeta + \text{Const.}$ und ist also durch eine bloße *Parallelverschiebung* der Ebene versinnlicht. — Ich nenne diesen (notwendig wieder aperiodischen) Grenzfall den Fall der *parabolischen* Substitution.

§ 3.

Der zur einzelnen Substitution zugehörige Fundamentalbereich.

Um überhaupt Funktionen mit linearen Transformationen in sich zu erhalten, betrachteten wir im vorigen Abschnitte übrigens beliebige Fundamentalbereiche, deren Randkurven allein durch die vorgegebenen Substitutionen paarweise zusammengeordnet werden mußten. Nun wir uns aber hier auf *eindeutige* Funktionen jener Art beschränken, ist die Willkürlichkeit des Fundamentalbereichs eine wesentlich geringere geworden. *Offenbar darf derselbe jetzt in seinem Innern keine zwei Punkte enthalten, welche vermöge der zugehörigen linearen Substitutionen oder irgendeiner aus ihnen zusammenzusetzenden Substitution äquivalent sind.*

Es sei jetzt eine einzelne lineare Substitution vorgelegt. So werden wir zuvörderst die Gruppe linearer Substitutionen bilden, die aus ihr durch positive oder negative Wiederholung hervorgeht, und die Gesamtheit der Lagen aufzufassen suchen, welche ein beliebiger Punkt vermöge der Substitutionen der Gruppe annimmt. Dann werden wir uns diesen Punkt beweglich denken und uns fragen, welchen möglichst großen Bereich derselbe überstreichen mag, ehe er an solche Stellen gelangt, die mit Stellen, welche er früher bereits eingenommen hatte, äquivalent sind. Die Untersuchung zeigt, daß dieser Bereich, von unwesentlichen Verzerrungen abgesehen, jedesmal vollkommen bestimmt ist. *Zu der einzelnen linearen Substitution gehört daher, in dem hier in Betracht kommenden Sinne, jedesmal nur ein Fundamentalbereich* (den wir dann durch die zugehörige Substitution bezeichnen können).

Sei unsere Substitution zuvörderst eine *elliptische*. So ist deutlich, daß dieselbe jedenfalls eine *periodische* sein muß, wenn der zugehörige Fundamentalbereich, wie wir es doch verlangen müssen, eine endliche Flächenausdehnung haben soll. Denn andernfalls überdecken die Punkte, welche aus einem beliebig angenommenen durch fortgesetzte Wiederholung der Substitution entstehen, in immer dichter werdender Aufeinanderfolge einen ganzen Breitenkreis. Wir können überdies annehmen, daß unsere Substitution *primitiv*, d. h. in der Gestalt

$$\zeta' = e^{\frac{2i\pi}{l}} \cdot \zeta$$

darstellbar sei, unter l eine ganze Zahl verstanden. Denn die Gruppe,

welche aus den Wiederholungen unserer periodischen Substitution erwächst — und auf diese *Gruppe* kommt es jetzt bei unseren neuen Überlegungen wesentlich an —, kann immer auch durch Wiederholungen einer primitiven Substitution erzeugt werden. *Den Fundamentalbereich aber, der zu der vorgenannten primitiven Substitution zugehört, erkennt man sofort.* Er ist einfach eine *Sichel* von der Winkelöffnung $\frac{2\pi}{l}$, welche sich, von geeigneten Halbmeridianen begrenzt, vom Punkte $\zeta = 0$ zum Punkte $\zeta = \infty$ hinzieht. Die unwesentlichen Änderungen, welche man an diesem Bereiche noch anbringen kann, bestehen nur darin, daß man den einen Halbmeridian unter Festhaltung seiner Endpunkte verdrehen oder auch innerhalb gewisser Grenzen verzerren kann, sofern nur mit dem anderen Halbmeridian genau die entsprechende Änderung vorgenommen wird.

Wir betrachten ferner die *parabolische* Substitution $\zeta' = \zeta + \text{Const.}$ So bietet sich sofort als zugehöriger Fundamentalbereich in der Ebene ein *Parallelstreifen*, den wir uns der Einfachheit halber geradlinig begrenzt vorstellen können. Wollen wir ihn auf die Kugel übertragen, so haben wir jetzt *eine Sichel von der Winkelöffnung Null, deren beide Ecken in den Fundamentalpunkt der Substitution zusammenfallen.*

Bei der *hyperbolischen* Substitution $\zeta' = R \cdot \zeta$ oder der *loxodromischen* $\zeta' = R e^{i\alpha} \cdot \zeta$ wird die Sache insofern anders, als der zugehörige, im wesentlichen wieder bestimmte Fundamentalbereich *zweifach* zusammenhängend ist. Wir werden jetzt nämlich als Fundamentalbereich etwa den *ringförmigen Raum* erachten, der zwischen zwei Breitenkreisen $r = \text{Const.}$ und $r = R \cdot \text{Const.}$ eingeschlossen ist. Der Unterschied zwischen den zweierlei Substitutionen ist dabei nur der, daß bei den hyperbolischen Substitutionen

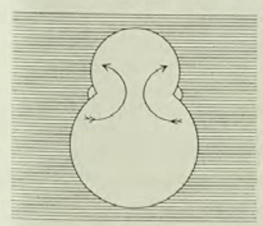


Fig. 2.

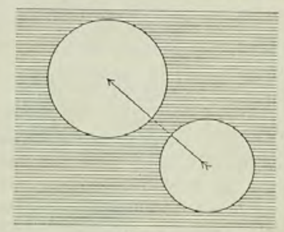


Fig. 3.

solche Punkte der beiden Breitenkreise zusammengeordnet erscheinen, welche auf demselben Halbmeridiane liegen, während bei der loxodromischen Substitution die beiden Kreise gegeneinander sozusagen verdreht erscheinen. Ich unterlasse es zu schildern, wie man den so eingeführten Bereich durch Verzerrung der Begrenzungskurven noch modifizieren kann.

Dagegen möchte ich durch die Figuren 2 und 3 dazu veranlassen, sich die verschiedenen Gestalten vorzustellen, unter denen sich die zuvörderst auf der Kugel gedachten Fundamentalbereiche bei verschiedener stereographischer Projektion auf die Ebene übertragen. So stellt Fig. 2 eine Sichel von der Winkelöffnung $\frac{\pi}{2}$, Fig. 3 einen ringförmigen Fundamentalbereich vor.

§ 4.
Funktionen, welche bei der einzelnen Substitution ungeändert bleiben.

Der Vollständigkeit wegen gebe ich hier die Funktionen explizite an, welche zu den im vorigen Paragraphen bestimmten Fundamentalbereichen hinzugehören. Im Falle der elliptischen oder parabolischen Substitution hat die durch den Fundamentalbereich versinnlichte Riemannsche Mannigfaltigkeit das Geschlecht Null. Daher wird es eine zugehörige Funktion geben, welche jeden Wert im Fundamentalbereich [einmal und] nur einmal annimmt. Als Funktion von ζ betrachtet muß sie im Falle der elliptischen Substitution bei $\zeta = 0$, wie bei $\zeta = \infty$ einen $(l-1)$-fachen Kreuzungspunkt besitzen. Analog im Falle der parabolischen Substitution im Punkte $\zeta = \infty$ einen Kreuzungspunkt unendlich hoher Ordnung. *Solche Funktionen sind offenbar* ζ^l, *beziehungsweise* $e^{\frac{2i\pi\zeta}{\text{Const.}}}$. Alle anderen Funktionen, die im Fundamentalbereiche eindeutig sind und auf der durch den Fundamentalbereich vorgestellten Riemannschen Mannigfaltigkeit keinen wesentlich singulären Punkt haben, drücken sich nach dem Fundamentalsatz über die Mannigfaltigkeiten vom Geschlechte Null durch die beiden angegebenen Funktionen bzw. rational aus. — Bei den hyperbolischen und loxodromischen Substitutionen ist $p = 1$. Will man zugehörige eindeutige Funktionen bilden, so genügt es, auf die Theorie der doppeltperiodischen Funktionen zu rekurrieren. Sei $\zeta' = Re^{i\alpha} \cdot \zeta$ die vorgelegte Substitution. So folgt $\log \zeta' = \log \zeta + \log R + i\alpha$. Wir brauchen also nur eindeutige Funktionen von $\log \zeta$ zu konstruieren, welche die Perioden $\log R + i\alpha$, und überdies, damit sie in ζ eindeutig sind, die Periode $2i\pi$ haben. Daß $p = 1$ ist, drückt sich darin aus, daß alle solche Funktionen[34]) sich durch zwei derselben rational darstellen lassen, zwischen denen eine algebraische Gleichung vom Geschlechte 1 besteht.

Auch können wir den Gesamtverlauf, den diese Funktionen in der Ebene ζ (oder auf der Kugel ζ) nehmen, mit Leichtigkeit übersehen. Bei der elliptischen Substitution zerlegt sich die Ebene einfach durch l Halbmeridiane in l nebeneinanderliegende Sicheln. Die Anzahl dieser Sicheln wird unendlich groß, indem zugleich die beiden Eckpunkte in einen zusammenrücken, wenn die elliptische Substitution zur parabolischen wird. Im Falle der hyperbolischen oder loxodromischen Substitution dagegen bekommen wir unendlich viele einander einschließende ringförmige Bereiche, welche sich auf die beiden Fundamentalpunkte $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$ immer enger zusammendrängen.

[34]) die im Fundamentalbereich keinen wesentlich singulären Punkt haben.

Diese ausführlichen Angaben mögen dazu dienen, damit jedenfalls diese ersten den einzelnen linearen Substitutionen korrespondierenden Fälle vollständig verständlich seien.

§ 5.
Stellung der Gruppentheorie.

Durch die Bemerkungen des § 3 hat sich der Begriff des Fundamentalbereichs gegen den früher gegebenen in etwas verschoben. Statt der einzelnen linearen Substitutionen, welche zwei von den Randstücken des Fundamentalbereichs zusammenordnen, betrachten wir dort die Gruppe linearer Substitutionen, welche aus den genannten durch beliebige Kombination und Wiederholung entsteht, — und es erscheint der zulässige Fundamentalbereich beinahe als Attribut dieser Gruppe. Offenbar hat die Gruppe, welche einem brauchbaren Fundamentalbereiche zugehört, keine unendlich kleine Substitution: sie ist *diskontinuierlich*, wie Herr H. Poincaré es ausdrückt. Wir werden fragen, ob jede diskontinuierliche Gruppe linearer Substitutionen eine und nur eine für uns brauchbare Einteilung der Ebene in Fundamentalbereiche liefert. Wäre es der Fall, so könnten wir unsere ursprüngliche Fragestellung verlassen und die Aufsuchung aller diskontinuierlichen Gruppen linearer Substitutionen als eigentlichen Zielpunkt wählen.

Aber die nähere Betrachtung zeigt, daß da in dreifachem Sinne noch ein Unterschied zu machen ist.

Einmal gibt es, wie ich hier in keiner Weise ausführen kann, diskontinuierliche Gruppen, denen überhaupt kein endlicher Fundamentalbereich zugehört[35]). Die Fundamentalpunkte der zugehörigen linearen Substitutionen sind überall dicht über das ganze Gebiet der komplexen Variablen zerstreut[36]).

[35]) Vgl. die bezügliche Andeutung von Herrn H. Poincaré in Bd. 93 der Comptes Rendus, S. 46. [11. Juli 1881; abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré, S. 25, § 4. — Vgl. auch „Automorphe Funktionen", Bd. 1, S. 62 ff.]

[36]) [H. Poincaré hat aber in seiner auf S. 586 unter III) genannten Arbeit gezeigt, daß in jedem Falle die Gruppe der den linearen Substitutionen entsprechenden räumlichen Kollineationen im Innern der η-Kugel eine brauchbare Raumeinteilung liefert. Die mannigfachen Verhältnisse, die hierbei auftreten können, hat Dyck verfolgt (siehe seine Note in Bd. 35 der Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissen-

Andererseits werden wir sofort solche Gruppen kennen lernen, bei denen das Gebiet der komplexen Variablen durch gewisse natürliche Grenzen in verschiedene Abteilungen zerlegt ist. Innerhalb jeder Abteilung existiert ein zugehöriger Fundamentalbereich. Aber wenn wir ihn vermöge der linearen Substitutionen reproduzieren, die zugehörigen eindeutigen Funktionen mit linearen Transformationen in sich also analytisch fortsetzen, so werden wir nie aus der einmal gewählten Abteilung herausgelangen. Wir werden also sagen müssen, daß ein und derselben diskontinuierlichen Gruppe in diesem Falle verschiedene Arten von Fundamentalbereichen und zugehörigen Funktionen korrespondieren.

Endlich aber gibt es Gruppen linearer Substitutionen, denen überhaupt kein zusammenhängender Fundamentalbereich entspricht, oder bei denen dies doch nicht für alle Teile der Ebene der Fall ist.

Daher scheint es, trotz der neuen Umgrenzung, die der Begriff des Fundamentalbereichs erfahren hat, am richtigsten, daß wir auch im folgenden immer von der Gebietseinteilung ausgehen. Nur wo kein Mißverständnis möglich ist, empfiehlt es sich der Kürze halber, von der zugehörigen diskontinuierlichen Gruppe zu sprechen.

§ 6.

Weitere Beispiele brauchbarer Gebietseinteilungen.[37])

Ich wende mich nun zu der in § 1 bereits in Aussicht genommenen Aufzählung solcher bereits anderwärts studierter, für uns brauchbarer Gebietseinteilungen, deren Betrachtung zum Verständnisse des späteren nützlich sein kann.

1. *Wir nennen zunächst die Figuren der regulären Körper:* Dieder, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder. Die zugehörige Gebietseinteilung erwächst jedesmal durch symmetrische Reproduktion eines Kreisbogendreiecks. Die Winkel desselben sind bez. dem folgenden Schema zu entnehmen:

$$\begin{array}{lll} \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{l}, \quad (l \text{ eine beliebige ganze Zahl}), \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{3}, & \frac{\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{3}, & \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{3}, & \frac{\pi}{5}. \end{array}$$

schaften, S. 61ff. (5. Dezember 1883)) und durch das Beispiel eines Tetraeders, das er nach dem Gesetz der Symmetrie (gemäß der auf die $(x+iy)$-Kugel gegründeten Maaßbestimmung) vervielfältigt, erläutert. Je nachdem, wie die Abmessungen des Tetraeders gewählt sind, kommen dabei die verschiedensten Ergebnisse zutage. K.]

[37] [Zu den in diesem Paragraphen gegebenen Beispielen vgl. „Modulfunktionen", Bd. 1, S. 102ff.]

Die Zahl der unterschiedenen Fundamentalbereiche, und also die Gruppe der zugehörigen Substitutionen ist *endlich*, und dies sind die einzigen endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen, die es gibt (sofern man von den Wiederholungen einer einzelnen periodischen Substitution absieht). Das Geschlecht p ist Null.

2. *Als zweites Beispiel haben wir diejenigen Gebietseinteilungen, welche bei den doppeltperiodischen Funktionen in Betracht kommen.* Und zwar zuvörderst die gewöhnlichen Parallelogramme vom Geschlechte 1, die der Gruppe

$$\eta' = \eta + m\omega_1 + n\omega_2$$

korrespondieren, unter ω_1, ω_2 die Perioden verstanden. Dann ferner, den *geraden* doppeltperiodischen Funktionen entsprechend, Parallelogramme vom Geschlechte Null, wie ein solches durch Fig. 4 [38]) versinnlicht wird:

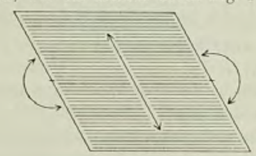


Fig. 4.

die zugehörige Gruppe lautet:

$$\eta' = \pm\eta + m\omega_1 + n\omega_2.$$

Endlich noch die besonderen Figuren, welche sich ergeben, wenn man ein geradliniges Dreieck, das entweder gleichseitig ist, oder die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks oder endlich die Hälfte eines Quadrats vorstellt,

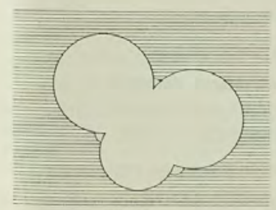


Fig. 5.

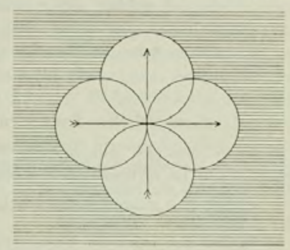


Fig. 6.

[38]) Fig. 5 repräsentiert den halben Fundamentalbereich des Ikosaeders, Fig. 6 ein beliebiges Parallelogramm in solcher Projektion, daß der Unendlichkeitspunkt der Ebene dem Bereiche angehört.

durch Spiegelung ins Unbegrenzte vervielfältigt. Die zugehörigen Substitutionen lauten, unter α eine dritte Einheitswurzel verstanden, bzw:

$$\eta' = \alpha^k \eta + (m + n\alpha)\,\omega_1; \qquad \eta' = \pm\,\alpha^k \eta + (m + n\alpha)\,\omega_1;$$
$$\eta' = i^k\,\eta + (m + ni)\,\omega_1.$$

Zugleich sind die hiermit angeführten Gruppen (von den Wiederholungen einer einzelnen geeigneten Substitution abgesehen) die einzigen diskontinuierlichen Gruppen, welche den Punkt $\eta = \infty$, aber auch keinen anderen Punkt der Ebene ungeändert lassen.

3. *Als drittes Beispiel ziehen wir diejenigen Gebietseinteilungen in Betracht, welche aus der symmetrischen Reproduktion eines Kreisbogendreiecks mit den Winkeln* $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}$ *erwachsen, wo* l_1, l_2, l_3 *ganze Zahlen sind und* $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} < 1$ ist[39]). Es sind dies eben diejenigen Figuren, denen schon Herr Schwarz im 75. Bande von Crelles Journal (1872/73) eine Zeichnung widmete[40]) (Tafel II daselbst [= Ges. Math. Abh. Bd. 2, S. 240]), und die in den letzten Bänden der Math. Annalen von verschiedenen Seiten ausführlich behandelt worden sind[41]). Bei ihnen tritt — für uns hier zum ersten Male — eine *[Curve als] natürliche Grenze* auf. Dieselbe wird von der Kreislinie gebildet, welche zu den drei Begrenzungskreisen des Ausgangsdreiecks (und also jedes anderen aus ihm abgeleiteten Dreiecks) orthogonal ist. Trifft man eine solche Koordinatenbestimmung, daß dieser Kreis als Achse der reellen Zahlen erscheint, so haben die Substitutionen der zugehörigen Gruppe durchaus reelle Koeffizienten. Wir haben hier einen solchen Fall, in welchem die Gruppe weiter reicht als die Überdeckung durch Fundamentalbereiche. Denn letztere finden sich nur auf derjenigen Seite des Grenzkreises, auf welcher wir (zufällig) das Ausgangsdreieck angenommen haben; die Gruppe aber zerlegt auch denjenigen Teil der Ebene, welcher auf der anderen Seite des Grenzkreises liegt, in äquivalente Gebiete.

§ 7.

Geometrischer Exkurs zum vorigen Paragraphen.

Wenn man sich mit linearen Substitutionen einer Variablen η beschäftigt, so ist es bekanntlich in vielen Fällen nützlich, die Kugel, auf

[39]) Läßt man diese Ungleichung fallen, so kommt man genau zu den unter 1. und 2. besprochenen Fällen zurück.

[40]) [Daß sich schon bei Gauss (vgl. Werke, Bd. 8, S. 104) eine Figur zur Dreiecksfunktion $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ findet, ist schon in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 256 und im vorliegenden Bande, S. 577 besprochen. K.]

[41]) [Meine eigenen diesbezüglichen Arbeiten aus den Jahren 1878—79 sind oben als Abh. LXXXII—LXXXVI abgedruckt. K.]

der man die komplexen Werte von η deutet, als Fundamentalfläche einer *Nicht-Euklidischen* Maßbestimmung zu betrachten[42]). Den linearen Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ entsprechen dann die *Bewegungen* des Raumes, den elliptischen insbesondere die reinen *Drehungen*, den loxodromischen die *Schraubenbewegungen* usw. Jeder diskontinuierlichen Gruppe linearer Substitutionen wird eine ebensolche von Bewegungen entsprechen.

Die Beispiele nun, welche wir im vorigen Paragraphen betrachteten, korrespondieren sämtlich solchen Gruppen von Bewegungen, *bei denen je ein bestimmter Raumpunkt festbleibt.* Im Falle der doppeltperiodischen Funktionen ist dieser Punkt *auf* der Kugel gelegen: der Punkt $\eta = \infty$. Bei den regulären Körpern ist es ein Punkt im Kugelinnern, nämlich der Mittelpunkt der Kugel (solange man sich die regulären Körper unverzerrt in ihrer gewöhnlichen Gestalt denkt). Im Falle des dritten Beispiels aber ein Punkt außerhalb, der Pol nämlich jener Ebene, welche aus der Kugel den besprochenen Grenzkreis ausschneidet.

Beschränkt man seine Aufmerksamkeit auf die Winkel, welche die Strahlen oder Ebenen, die durch den festen Punkt hindurchlaufen, im Sinn unserer Nicht-Euklidischen Maßbestimmung miteinander bilden, so darf man den Kegel, der von dem festen Punkte aus sich an die Kugel erstreckt, als Fundamentalgebilde der Maßbestimmung erachten. Wir haben dann in dem ternären, von jenen Strahlen und Ebenen erfüllten Gebiete eine *hyperbolische* oder *elliptische* oder *parabolische* Maßbestimmung[43]), je nachdem der Kegel reell oder imaginär ist oder in eine Doppelebene (d. h., dualistisch zu reden, in zwei konjugiert imaginäre Ebenenbüschel) ausgeartet. Die hiermit bezeichnete Anschauungsweise ist deshalb nützlich, weil sie einen wichtigen Hilfsbegriff an die Hand gibt. Projiziert man nämlich die auf der Kugel ausgebreiteten, unter sich äquivalenten Fundamentalbereiche irgendeiner der von uns betrachteten Gebietseinteilungen von dem zugehörigen festbleibenden Punkte aus, so sind die projizierenden Pyramiden im Sinne der jeweiligen Maßbestimmung unter sich *kongruent.* Insbesondere haben sie alle dieselbe *Winkelöffnung.* Hiernach erkennt man z. B. sofort, daß endliche Gruppen linearer Substitutionen nur möglich sind, wenn der festgehaltene Punkt im Kugelinnern liegt, [und daß dann auch nur endliche Gruppen auftreten]; denn die Gesamtheit der von einem solchen Punkte aus sich erstreckenden Winkel ist endlich.

[42]) Siehe Math. Annalen Bd. 9 (1875/76) [= Abh. LI in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 277].

[43]) Wegen dieser Ausdrucksweise siehe Math. Annalen Bd. 4 (1871): *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* [als Abh. XVI in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe abgedruckt].

Wir werden im folgenden von dieser Hilfsvorstellung in einer Form Gebrauch machen, die sich an die geometrischen Vorstellungen der üblichen Funktionentheorie bequemer anschließt. Die Strahlen und Ebenen, welche durch den festgehaltenen Punkt hindurchlaufen, übertrage man mitsamt der für sie geltenden Maßbestimmung durch Schnitt auf die Kugel, und von dieser, wenn man will, durch stereographische Projektion auf die Ebene η. So haben wir für die Punkte der letzteren eine Maßbestimmung, bei welcher der (reelle oder imaginäre oder ausgeartete) Grenzkreis die unendlich fernen Punkte abgibt, und die geodätischen Linien in diejenigen Kreise übergegangen sind, welche den Grenzkreis orthogonal schneiden. Im Sinne dieser Maßbestimmung sind dann die jeweiligen Fundamentalbereiche, wie wir sie im vorigen Paragraphen betrachteten, *kongruent* und also von gleichem *Flächeninhalt*. Die zugehörigen linearen Substitutionen von η aber bezeichnen ebenso viele im Sinne unserer Maßbestimmung zu verstehende Bewegungen[44]).

§ 8.

Über die allgemeinsten, von uns in Betracht zu ziehenden Gruppen mit reellem Hauptkreise.

Wie im Vorhergehenden bereits angedeutet, werde ich die sämtlichen Gruppen, welche wir in § 6 betrachteten, als *Gruppen mit Hauptkreis* bezeichnen. Dieser Hauptkreis ist im Beispiel 1 imaginär, im Beispiel 2 in einen Punkt ausgeartet, und dies sind, wie schon bemerkt, die einzigen Beispiele von Gruppen mit imaginärem, bez. ausgeartetem Hauptkreis. Dagegen ist es leicht zu sehen, daß es über das dritte Beispiel des § 6 hinaus noch unendlich viele diskontinuierliche Gruppen (resp. Gebietseinteilungen) mit *reellem* Hauptkreise gibt. Statt nämlich ein Kreisbogen-

[44]) Es ist dies dieselbe Art Nicht-Euklidischer Maßbestimmung, von der auch Herr H. Poincaré Gebrauch macht. Läßt man den Grenzkreis mit der Achse der reellen Zahlen zusammenfallen (worauf also die zugehörigen Bewegungen durch diejenigen linearen Substitutionen gegeben sein werden, welche reelle Koeffizienten haben), so ist der Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$, unter c eine reelle Konstante verstanden,

$$= -4\,ic \text{ arc } \sin\left(i\sqrt{\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4\,y_1\,y_2}}\right).$$

[Nimmt man die beiden Punkte unendlich benachbart, so hat man das bei H. Poincaré immer benutzte

$$ds = c\cdot\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}.$$

Soviel ich weiß, tritt diese Form des ds zum ersten Male, gleich für n Veränderliche angeschrieben, bei Beltrami 1868 auf; siehe dessen *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* in Bd. 2, Serie 2 der Annali di Matematica (1868/69); abgedruckt als Nr. XXV in Bd. 1 seiner Opere matematiche. K.]

dreieck zugrunde zu legen, mögen wir ein Kreisbogen*vieleck* in Betracht ziehen, dessen Seiten (verlängert gedacht) sämtlich auf einem Hauptkreise senkrecht stehen, und dessen Winkel, sofern sie nicht Null sind, irgendwelche ganzzahlige Teile von π sind. *Wenn wir ein solches Kreisbogenvieleck symmetrisch reproduzieren, so erhalten wir wiederum eine brauchbare Gebietseinteilung, für welche der Hauptkreis Grenzkreis ist.* Das Geschlecht des Fundamentalbereichs ist, wie im Falle des Kreisbogendreiecks, gleich Null. Ich verweise ferner auf meine Bemerkungen „*Zur [Systematik der] Theorie der elliptischen Modulfunktionen*" im 17. Bande der Math. Annalen (1879/81) [siehe die oben abgedruckte Abh. LXXXVII], sowie insbesondere auf Herrn Dycks „*Gruppentheoretische Studien*" im 20. Bande daselbst (1882). Es wird dort gezeigt, daß in den so erhaltenen Gruppen mit Hauptkreis andere Gruppen als Untergruppen enthalten sind, deren Fundamentalbereich nicht notwendig symmetrisch ist und ein Geschlecht besitzt, welches beliebig von Null verschieden sein kann.

Es ist Herrn H. Poincarés Verdienst, zuerst darauf aufmerksam gemacht zu haben, daß man die allgemeinsten Gruppen mit reellem Hauptkreis in einfacher Weise beschreiben kann[45]). Aber nur für einen Teil seiner Gruppen ist der Hauptkreis selbst die natürliche Grenze der Fundamentalbereiche. Zum Teil erreichen sie denselben nur in einzelnen Punkten[46]), zum Teil überschreiten sie ihn und überdecken die ganze Ebene. Ich werde im Nachstehenden nur solche Fälle betrachten, in denen der Hauptkreis mit der natürlichen Grenze zusammenfällt.

Zur Vereinfachung überlegen wir vorab das Folgende. Ein und dieselbe Gruppe linearer Substitutionen kann in demselben Gebiete der Ebene zu scheinbar sehr verschiedenen Fundamentalbereichen Anlaß geben. Ich erinnere nur an das Beispiel der doppeltperiodischen Funktionen: dasselbe parallelogrammatische System kann auf mannigfachste Weise aus einzelnen Parallelogrammen aufgebaut werden. Um über die verschiedenen dabei auftretenden Möglichkeiten Übersicht zu gewinnen, ist es nützlich, zunächst den Fundamentalbereich durch die geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit (oder Fläche), welche er versinnlicht, zu ersetzen, und dann hinterher zu überlegen, auf welche Weisen man diese Fläche zerschneiden und ihr also einen bestimmten Fundamentalbereich substituieren kann.

Wir kehren also einen Augenblick die Betrachtung um. Statt die Riemannsche Fläche auf die η-Ebene abzubilden, verfolgen wir η als

[45]) Siehe Math. Annalen, Bd. 19 (1881/82), S. 554 [= Oeuvres, Bd. 2, S. 93. — Vgl. zur Sache auch das unten, S. 742ff., folgende Referat über die „Automorphen Funktionen".]

[46]) [Diese Einzelheit ist nicht richtig. Vgl. deswegen die Briefe 24 und 25 der oben abgedruckten Korrespondenz, insbesondere die daselbst in Fußnote [52]) auf S. 618 gegebenen Zitate.]

eine komplexe Funktion des Ortes auf der Riemannschen Fläche. Und hier ist es nun, daß wir die Beschränkungen, die wir im folgenden festhalten wollen, am deutlichsten bezeichnen können.

Offenbar hat η, als Funktion des Ortes auf der Riemannschen Fläche[47]) betrachtet, die Eigenschaft, sich nach Durchlaufung irgend eines geschlossenen Weges in der Gestalt $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ zu reproduzieren. Es kann sein, daß eine derartige, von der Identität verschiedene Substitution sich bereits einstellt, wenn wir nur einen einzelnen Punkt der Riemannschen Fläche umkreisen. Einen solchen Punkt nennen wir einen *Verzweigungspunkt von* η [48]) und bedingen nun zunächst, *daß, gleich dem Geschlechte* p *der Riemannschen Fläche, auch die Zahl* n *dieser Verzweigungspunkte durchaus endlich sein soll.* Dann aber beschränken wir auch noch das Verhalten von η im einzelnen Verzweigungspunkte. Die Bedingung, daß die Umgebung des Verzweigungspunktes in η eindeutig sein soll, läßt noch verschiedene Möglichkeiten offen. *Wir wollen festsetzen, daß* η *sich in der Nähe des einzelnen Verzweigungspunktes verhalten soll, wie* $\sqrt[l_k]{z}$ *in der Nähe von* $z=0$. Hier soll l_k eine ganze Zahl sein, welche ich den *Index* des Verzweigungspunktes nenne, die übrigens in der Grenze auch unendlich werden mag (worauf $\log z$ an die Stelle von $\sqrt[l_k]{z}$ tritt). Die Folge ist dann, *daß* η *bei jeder Umkreisung des Verzweigungspunktes eine elliptische Substitution, und zwar eine primitive elliptische Substitution von der Periode* l_k, *im Grenzfalle aber eine parabolische Substitution erfährt.*

Den Inbegriff der hiermit definierten Attribute (p, n, l_k) bezeichne ich weiterhin als die *Signatur* der η-Funktion.

Indem wir nun insbesondere solche Gebietseinteilungen in der η-Ebene betrachten wollen, deren natürliche Grenze eine Kreislinie ist, wird der einzelne Fundamentalbereich notwendig einfachen Zusammenhang haben. Es wird also darauf ankommen, die Riemannsche Fläche (p, n) auf die eine oder andere Weise in eine einfach zusammenhängende zu zerschneiden. Eine Übersicht über die unbegrenzt vielen Möglichkeiten, welche dabei auftreten, hat an dieser Stelle keinen Zweck. Es wird vielmehr genügen, wenn wir eine kanonische Zerschneidungsart verabreden, die wenigstens in der Hauptsache bestimmt ist. Dies soll im folgenden Paragraphen ge-

[47]) Die Riemannsche Fläche selbst denke ich mir immer [der Einfachheit halber], im Anschlusse an Abh. XCIX ohne eigene Verzweigungspunkte frei im Raume gelegen.

[48]) [Später habe ich, um Verwechslungen mit den Verzweigungspunkten der gewöhnlichen Riemannschen Fläche über die z-Ebene zu vermeiden, statt dessen das Wort *Stigma* gebraucht. Vgl. Fußnote [2]) auf S. 577. K.]

schehen. Der § 10 schildert sodann die Gestalt des entsprechenden Fundamentalbereichs in der η-Ebene. Wir benutzen dabei, um die Ideen zu fixieren, einen Umstand, dessen auch Herr H. Poincaré erwähnt[49]). In der Theorie der doppeltperiodischen Funktionen zeigt man durch einfache geometrische Betrachtung, daß man den Fundamentalbereich, das Parallelogramm, immer geradlinig begrenzt voraussetzen kann. *In ganz ähnlicher Weise beweist man, daß man als Begrenzungskanten des einzelnen Fundamentalbereichs einer Gruppe mit Hauptkreis immer solche Kreisbogen verwenden kann, welche (verlängert gedacht) auf dem Hauptkreise senkrecht stehen.* Indem wir hiervon in § 10 Gebrauch machen, disponieren wir rückwärts über die Gestalt jener Querschnitte, welche in § 9 auf unserer Riemannschen Fläche nur erst der Art und Aufeinanderfolge nach festgelegt waren.

Noch sei bemerkt, daß wir im folgenden bei $p=0$ immer $n \geqq 3$ und bei $p=1$ immer $n \geqq 1$ voraussetzen wollen. Die hiermit ausgeschlossenen Fälle sind im Früheren bereits erledigt und ihre Mitberücksichtigung würde die Ausdrucksweise (zumal bei den Konstantenzählungen) unnötig schwerfällig machen. *Es sind dies nämlich diejenigen Fälle, in denen die Riemannsche Fläche* (p, n) *unendlich viele eindeutige Transformationen [d. h. eine continuierliche Schar von Transformationen] in sich gestattet, welche die vorgegebenen Verzweigungspunkte nicht ändern.* Dem entspricht, wie hier beiläufig bemerkt sei, daß die betreffenden linearen Substitutionen der Variablen η mit unendlich vielen anderen linearen Substitutionen vertauschbar sind.

§ 9.

Kanonische Zerschneidung der Riemannschen Fläche (p, n).

Um die kanonische Zerschneidung der Riemannschen Fläche, die wir im folgenden benutzen werden, herzustellen, beginnen wir mit derjenigen Zerschneidungsart, welche, auf Riemann zurückgehend, auch sonst vielfach verwandt wurde. Zunächst werden wir irgend p die Fläche nicht zerstückende und einander nicht schneidende Rückkehrschnitte $A_1, A_2, \ldots, A_p$ konstruieren. Sodann ergänzen wir jeden derselben in bekannter Weise durch einen Querschnitt B_i, der von einem Punkte des A_i auslaufend [ohne die andern Schnitte zu treffen] zu demselben Punkte von der anderen Seite zurückkehrt. Die p so entstehenden Schnittpunkte (A_i, B_i) verbinden wir des weiteren mit einem beliebigen Punkte O der Fläche durch Stücke c_i und legen endlich von demselben Punkte O aus nach den n Verzweigungsstellen, die beziehungs-

[49]) [Vgl. z. B. Math. Annalen, Bd. 19 (1881/82), S. 554 und Acta Math., Bd. 1 (1882/83), S. 18/19; abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré auf S. 93 bzw. S. 124/125.]

weise $a_1, a_2, \ldots, a_n$ genannt werden mögen, Schnitte L_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Dabei können wir, indem wir noch bei jedem Schnitte zwischen einer positiven und einer negativen Seite unterscheiden, die Aufeinanderfolge der genannten Stücke so wählen, daß bei positiver[50]) Umkreisung der nun einfach zusammenhängenden Fläche die Aufeinanderfolge der Begrenzungsstücke die folgende ist:

$$\begin{gathered} c_1^+ \, A_1^+ \, B_1^- \, A_1^- \, B_1^+ \, c_1^- \\ c_2^+ \, A_2^+ \, B_2^- \, A_2^- \, B_2^+ \, c_2^- \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_p^+ \, A_p^+ \, B_p^- \, A_p^- \, B_p^+ \, c_p^- \\ L_1^+ \, L_1^- \, L_2^+ \, L_2^- \, \ldots \, L_n^+ \, L_n^- \, . \end{gathered}$$

Nachdem alles in dieser Weise geordnet ist, ziehe ich jetzt hinterher — um nämlich an Querschnitten und also an Begrenzungskanten des späteren Fundamentalbereichs zu sparen — die Stücke c_i, indem ich sie immer kürzer mache, schließlich ganz in den Punkt O hinein, so daß zuletzt, außer den L_k, auch die A_i, B_i sämtlich von O auslaufen. *Der Erfolg ist dann einfach der, daß in dem vorstehenden Schema die Stücke c_i^+ überhaupt wegfallen und also nur $4p + 2n$ Begrenzungsstücke übrig bleiben.* Man beachte die Winkel, welche die aufeinanderfolgenden Begrenzungsstücke unserer Fläche miteinander einschließen. Von denselben sind n gleich 2π, nämlich diejenigen, welche in den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von den dort zusammenstoßenden L_k^+, L_k^- gebildet werden. *Die übrigen $4p + n$ aber sind erst zusammengenommen gleich 2π*; denn erst zusammengenommen ergeben sie auf unserer Fläche die ganze Umgebung des Punktes O. Man muß sich von dieser Umgebung eine Vorstellung machen, wie sie für den Fall $p = 2$, $n = 3$ durch Fig. 7 schematisch repräsentiert wird.

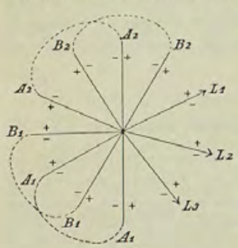


Fig. 7.

Auf der so zerschnittenen Fläche ist nun η eindeutig, und wir können also den Inbegriff der Werte, welche η auf ihr annimmt, als einen Funktionszweig betrachten. Hätten wir keine bestimmte Zerschneidung verabredet, so könnten wir nur von der linearen Substitution reden, welche η bei *Durchlaufung* eines bestimmten geschlossenen Weges erleidet.

[50]) Als positiv nehme ich fernerhin diejenige Richtung, welche dem Drehsinn eines Uhrzeigers entgegen läuft.

Jetzt aber dürfen wir mit Rücksicht auf unseren Funktionszweig von einer solchen Substitution sprechen, die der *Überschreitung* einer unserer Querschnitte korrespondiert. In der Tat wird diese Substitution dieselbe sein, an welcher Stelle auch [auf der zerschnittenen Fläche] wir den einzelnen Querschnitt überschreiten mögen. Wir werden hiernach bestimmte Substitutionen S_i, T_i, resp. U_k haben, welche η erleidet, wenn wir von A_i^-, B_i^-, L_k^- beziehungsweise zu A_i^+, B_i^+, L_k^+ hinüberschreiten. Es sind diese $2p + n$ Substitutionen die *erzeugenden* Substitutionen, aus denen sich alle anderen, die η erfährt, zusammensetzen.

Die hiermit eingeführten Betrachtungen haben die größte Ähnlichkeit mit denjenigen, vermöge deren man die Periodizitätsmoduln algebraischer Integrale zu bestimmen pflegt. Es will beim weiteren Verfolg derselben inzwischen ein wesentlicher Unterschied scharf erkannt sein. Bei den Integralen erscheinen beliebige geschlossene Wege, welche wir auf der Fläche hintereinander durchlaufen mögen, eben weil sie beide einen additiven Periodizitätsmodul liefern, miteinander vertauschbar. Eine solche Vertauschbarkeit tritt aber bei unseren Funktionen im allgemeinen keineswegs ein.

Übrigens finden wir für unsere S_i, T_i, U_k, indem wir die Punkte a_k, O unserer Fläche umkreisen, noch gewisse Relationen. Zunächst, wenn wir um a_k herumgehen, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn wir den Querschnitt L_k überschreiten. Aber η reproduziert sich identisch, wenn wir a_k im ganzen l_k-mal umkreisen, wo l_k der Index des Verzweigungspunktes ist. *Daher kommt:*

$$U_k^{l_k} = 1 \, .$$ [51])

Wir umkreisen nun ferner den Punkt O. Da dieser Punkt durchaus zufällig gewählt ist und für unsere η-Funktion gar keine spezifische Bedeutung hat, so reproduziert sich η dabei jedenfalls identisch. Nun werden bei dieser Gelegenheit die Querschnitte A_i, B_i, L_k, wie Fig. 7 aufweist, in bestimmter Reihenfolge überschritten. Indem wir letztere markieren, gewinnen wir folgende Beziehung, die späterhin als *Fundamentalrelation* bezeichnet sein soll:

$$S_1^{-1} T_1^{-1} S_1^{+1} T_1^{+1} S_2^{-1} T_2^{-1} S_2^{+1} T_2^{+1} \ldots S_p^{-1} T_p^{-1} S_p^{+1} T_p^{+1} U_1^{-1} U_2^{-1} \ldots U_n^{-1} = 1 \, .$$

Hier bezeichnet die Aufeinanderfolge der Buchstaben (von links nach rechts) die hintereinander auszuführenden Operationen.

Vermöge dieser Relationen können wir die Benennung jeder Substitution, die sich aus dem S_i, T_i, U_k zusammensetzt, beliebig modifizieren, wovon noch wiederholt Gebrauch gemacht werden soll.

[51]) [Im Grenzfalle $l_k = \infty$ tritt an Stelle hiervon die Bedingung, daß die Substitution U_k parabolisch ist. B.-H.]

Es muß übrigens hervorgehoben werden, daß diese Relationen das Verhalten von η in den Punkten a_k, bzw. in O keineswegs vollkommen charakterisieren. In nächster Umgebung von a_k sollte sich η verhalten, wie $\sqrt[l_k]{z_k}$ in der Umgebung von $z = 0$. Die Relation $U_k^{l_k} = 1$ würde bestehen bleiben, wenn wir hier $\sqrt[l_k]{z}$ durch irgendeine ganzzahlige Potenz ersetzten. Ebenso würde unsere Fundamentalrelation richtig bleiben, wenn η sich nicht erst bei voller Umkreisung des Punktes O, sondern schon auf einem beliebigen ganzzahligen Teile dieses Weges identisch reproduzierte.

§ 10.

Der kanonische Fundamentalbereich in der η-Ebene.

Indem wir jetzt zur η-Ebene zurückgehen, bemerken wir vorab, daß die linearen Substitutionen, welche η erleidet, in dem von uns zu betrachtenden Falle jedenfalls nicht loxodromisch sind. Denn alle sollen ja einen bestimmten Kreis, den Hauptkreis, ungeändert lassen. Ist nun die Substitution, welche uns vorgelegt wird, *elliptisch*, so wird der Hauptkreis für sie ein Breitenkreis sein, die beiden Fundamentalpunkte der Substitution sind konjugierte Pole in bezug auf den Hauptkreis, und es liegt also der eine, aber auch nur der eine Fundamentalpunkt der Substitution auf derjenigen Seite unseres Hauptkreises, auf der sich unsere Fundamentalbereiche befinden. Wird die Substitution (im Grenzfalle) *parabolisch*, so rücken die beiden Fundamentalpunkte in einen Punkt des Hauptkreises zusammen. — Ist dagegen die vorgelegte Substitution *hyperbolisch*, so wird der Hauptkreis die Bedeutung eines Meridians haben und also durch beide Fundamentalpunkte der Substitution hindurchlaufen.

Wir entwerfen jetzt vermöge unserer η-Funktion (deren Existenz wir hier als vorgegeben betrachten) ein erstes Bild der im vorigen Paragraphen zerschnittenen Fläche, und gewinnen so, was wir als den *kanonischen Fundamentalbereich* in der η-Ebene, und zwar als *ursprünglichen* Fundamentalbereich bezeichnen wollen. Es ist ein einfach zusammenhängendes, nirgends über den Hauptkreis hinausgreifendes[52]), mit $4p + 2n$ Begrenzungslinien und also ebenso viel Ecken versehenes, allgemein zu reden, krummliniges Polygon. Von diesen Ecken entsprechen $4p + n$, die ich als *Ecken erster Art* bezeichnen will, dem Punkte O unserer Riemannschen Fläche; die Konformität der Abbildung erleidet in ihnen keine Unterbrechung und *es beträgt also die Winkelsumme der Ecken erster*

[52]) Alles dieses, weil wir *voraussetzen*, unsere Riemannsche Fläche sei in η eindeutig und der Hauptkreis sei die natürliche Grenze für die Reproduktionen der Fundamentalbereiche.

Art insgesamt 2π. Dagegen bieten die Ecken der *zweiten* Art, die den Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Riemannschen Fläche entsprechen und demnach mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bzw. bezeichnet sein sollen, eine Abweichung von der Konformität. *Der Winkel* 2π, *welcher auf unserer Riemannschen Fläche zwischen* L_k^+ *und* L_k^- *eingeschlossen ist, erscheint in der* η*-Ebene durch* $\frac{2\pi}{l_k}$ *ersetzt.* Die Ecke α_k ist dann zugleich Fundamentalpunkt der elliptischen Substitution U_k. Es geht daraus hervor, *daß unser Fundamentalbereich sich in* α_k *an den Hauptkreis hinan erstreckt, wenn* U_k *parabolisch ist.* Dagegen liegen die $(4p + n)$ Ecken erster Art notwendig immer im Innern des Hauptkreises. Denn da jede von ihnen dem Punkte O entspricht, so müssen sich von jeder derselben aus, wie wir unten noch genauer sehen werden, ganz ähnlich $(4p + n)$ Fundamentalbereiche in der η-Ebene erstrecken, wie vom Punkte O aus auf der Riemannschen Fläche die $(4p + n)$ durch die A_i, B_i, L_k begrenzten Winkelräume. Wir wollen uns die Gestalt der A_i, B_i, L_k jetzt so bestimmt denken, daß die Begrenzungslinien unseres Fundamentalbereiches Kreise werden, welche verlängert gedacht auf dem Hauptkreis senkrecht stehen[53]). Und

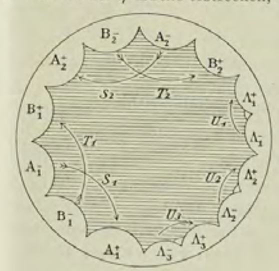


Fig. 8.

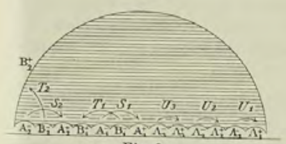


Fig. 9

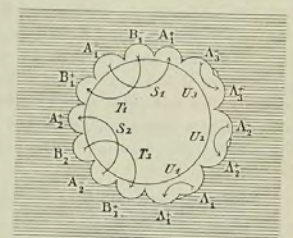


Fig. 10.

zwar sollen die Kreisbogen, welche den verschiedenen Ufern A_i^+, B_k^+, L_k^+ entsprechen, mit den korrespondierenden griechischen Buchstaben $\mathsf{A}_i^+, \mathsf{B}_i^+, \Lambda_k^+$ bezeichnet sein. Die Figuren 8 bis 10 sollen die Aufeinanderfolge und

[53]) [Daß eine solche Bestimmungsweise in der Tat stets möglich ist, folgt noch nicht aus den auf S. 673 erwähnten Angaben von H. Poincaré. Einen erschöpfenden Beweis hat erst Fricke in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1895, S. 360ff. geführt. Vgl. auch „Automorphe Funktionen", Bd. 1, S. 284—320 (insbes. S. 319), sowie das unten auf S. 742ff. folgende Referat über dieses Werk.]

Zusammengehörigkeit dieser Kreisbogenstücke an dem schon oben gewählten Beispiele $p = 2$, $n = 3$ schematisch erläutern. Der Hauptkreis ist in allen Fällen stärker ausgezogen, desgleichen sind die Winkel an den Ecken α_k durch besondere Markierung kenntlich gemacht. Die Pfeile bezeichnen die Zusammengehörigkeit der Kanten, und überdies gibt die Pfeilspitze jedesmal den Sinn, in welchem die durch das beigesetzte Symbol bezeichnete Operation, positiv genommen, wirksam ist. *Durch* $S_i^{+1}, T_i^{+1}, U_k^{+1}$ *geht beziehungsweise* A_i^+ aus A_i^-, B_i^+ *aus* B_i^-, Λ_k^+ *aus* Λ_k^- *hervor.* Unter sich differieren die drei Zeichnungen nur durch ihre Beziehung zum Unendlichkeitspunkte der η-Ebene. Es sind verschiedene stereographische Projektionen einer und derselben auf einer Kugel zu denkenden Figur. Ich habe sie alle drei hergesetzt, weil es im folgenden unerläßlich ist, sich unseren Fundamentalbereich bald in der einen, bald in der anderen Gestalt zu denken.

§ 11.

Die Gruppierung der Fundamentalbereiche.

Man versuche nun, sich ein deutliches Bild davon zu machen, wie sich unser Fundamentalbereich vermöge der erzeugenden Substitution $S_i^{+1}, T_i^{+1}, U_k^{+1}$ vervielfältigt und nach und nach (der Voraussetzung gemäß) die ganze Ebene bis an den Hauptkreis überdeckt. Dabei erinnere man sich der allgemeinen Erläuterungen, die in § 2 des vorigen Abschnitts gegeben wurden, übrigens aber der in § 9 dieses gegenwärtigen Abschnitts aufgestellten Relationen. Um eine bestimmtere Ausdrucksweise zu ermöglichen, *wollen wir jeden Fundamentalbereich vermöge derjenigen linearen Substitutionen benennen, durch welche er aus dem ursprünglichen Fundamentalbereiche hervorgeht.* Der ursprüngliche Fundamentalbereich selbst ist hiernach $= 1$.

Was zuvörderst die Bereiche angeht, die sich an den ursprünglichen längs einer *Kante* anschmiegen, so sind dies offenbar $S_i^{\pm 1}, T_i^{\pm 1}, U_k^{\pm 1}$ selbst. Wir leiten hieraus sofort die folgende allgemeine Regel ab: *daß nämlich der Bereich* Π (unter Π ein beliebiges symbolisches Produkt der S, T, U verstanden) *von den* $S_i^{\pm 1}\Pi$, $T_i^{\pm 1}\Pi$, $U_k^{\pm 1}\Pi$ *unmittelbar umgeben ist.* In der Tat bei der *Operation* Π, die den *Bereich* 1 *in den Bereich* Π überführt, geht $S_i^{\pm 1}$ in $S_i^{\pm 1}\Pi$ über, usw.

Wir suchen nun ferner die Bereiche, welche mit dem ursprünglichen, wo nicht eine Kante, so doch eine *Ecke* gemein haben.

Ist diese Ecke von der zweiten Art, so ist die Sache sehr einfach.

Wir haben, indem wir etwa α_k *in positivem Sinne umkreisen, der Reihe nach die Bereiche:*

$$1,\ U_k,\ U_k^2,\ \ldots,\ U_k^{l_k - 1}.$$

Die Relation $U_k^{l_k} = 1$ entspricht dem Umstande, daß der $(l_k + 1)$-te Bereich wieder der erste ist. — Die Sache muß etwas anders dargestellt werden, wenn l_k unendlich, die Substitution U_k also parabolisch ist. Dann haben wir von 1 ausgehend nach der einen Seite die Bereiche $U_k, U_k^2, U_k^3, \ldots$, nach der anderen U_k^{-1}, U_k^{-2}, usw.

Etwas komplizierter ist die Behandlung der Ecken erster Art. Wir betrachten einen Augenblick nicht den Fundamentalbereich 1 selbst, sondern nur seine Eckpunkte erster Art, und zwar zuvörderst den Eckpunkt $(\mathsf{A}_1^+, \Lambda_n^-)$. Durch S_1^{-1} wird aus ihm $(\mathsf{A}_1^-, \mathsf{B}_1^+)$ [vgl. die Figuren 8 bis 10 auf S. 677]. Hieraus durch T_1^{-1}: $(\mathsf{A}_1^-, \mathsf{B}_1^-)$, sodann durch S_1^{+1}: $(\mathsf{A}_1^+, \mathsf{B}_1^-)$, endlich durch T_1^{+1}: $(\mathsf{A}_2^+, \mathsf{B}_1^+)$. Die weitere Hinzufügung der Operationen $S_2^{-1}, T_2^{-1}, S_2^{+1}, T_2^{+1}$ bringt den Punkt der Reihe nach in folgende Lagen: $(\mathsf{A}_2^-, \mathsf{B}_2^+)$, $(\mathsf{A}_2^-, \mathsf{B}_2^-)$, $(\mathsf{A}_2^+, \mathsf{B}_2^-)$, $(\mathsf{A}_3^+, \mathsf{B}_2^+)$. So fortfahrend kommen wir schließlich, indem wir zwischendurch alle anderen Eckpunkte (A, B) einmal berühren, zu $(\mathsf{B}_p^-, \Lambda_1^+)$. Von hier bringen wir unseren Punkt durch U_1^{-1} nach $(\Lambda_1^-, \Lambda_2^+)$, dann durch U_2^{-1} nach $(\Lambda_2^-, \Lambda_3^+), \ldots$, endlich durch U_n^{-1} zur Anfangslage $(\Lambda_n^-, \mathsf{A}_1^+)$ zurück. *So haben wir aus dem ersten Eckpunkte erster Art alle anderen durch gewisse Operationen hergestellt, die wir* $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots$ *nennen wollen.* Dabei ist:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 1;\\
\pi_1 &= S_1^{-1};\\
\pi_2 &= S_1^{-1} T_1^{-1};\\
\pi_3 &= S^{-1} T_1^{-1} S_1^{+1};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\pi_{4p} &= S_1^{-1} T_1^{-1} S_1^{+1} T_1^{+1} \ldots S_p^{-1} T_p^{-1} S_p^{+1} T_p^{+1};\\
\pi_{4p+1} &= \pi_{4p} U_1^{-1};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\pi_{4p+n-1} &= S_1^{-1} T_1^{-1} \ldots S_p^{+1} T_p^{+1} U_1^{-1} U_2^{-1} \ldots U_{n-1}^{-1}.
\end{aligned}$$

Hier unterscheidet sich jedes π von dem unmittelbar vorhergehenden dadurch, daß rechter Hand ein einzelnes Symbol S, T oder U zugetreten ist. Es gilt dies auch, wenn wir auf π_{4p+n-1} wieder $\pi_0 = 1$ folgen lassen. *Denn zufolge unserer Fundamentalrelation resultiert gerade* 1, *wenn wir dem* π_{4p+n-1} *rechter Hand noch* U_n^{-1} *hinzusetzen.*

Ich sage nun, *daß wir alle Bereiche erhalten, die in positivem Sinne aufeinander folgend im Punkte* $(\mathsf{A}_1^+, \Lambda_n^-)$ *an den ursprünglichen Fundamentalbereich anstoßen, wenn wir einfach die vorstehende Tabelle umkehren.* Mit anderen Worten, ich behaupte, daß folgendes die Tabelle jener Bereiche ist:

$$1,\ \pi_1^{-1},\ \pi_2^{-1},\ \ldots,\ \pi_{4p}^{-1},\ \pi_{4p+1}^{-1},\ \ldots,\ \pi_{4p+n-1}^{-1}.$$

In der Tat: die hiermit aufgezählten Bereiche gehen aus dem ursprünglichen durch eine Operation hervor, welche je aus einer bestimmten Ecke erster Art des ursprünglichen Bereiches die erste Ecke macht: die neuen Bereiche haben also mit dem ursprünglichen diese Ecke gemein. Ferner: Jeder folgende Bereich geht, infolge unserer Tabelle, aus dem vorangehenden dadurch hervor, daß *linker* Hand ein einzelnes Symbol S, T, U zutritt (insofern wir es jetzt mit den inversen Operationen zu tun haben); unsere Bereiche folgen sich also lückenlos. *Insbesondere wird die Fundamentalrelation das Äquivalent dafür, daß der* $(4p+n)$*-te Bereich sich an den ersten unmittelbar anschließt.* Daß aber auch die Aufeinanderfolge der Bereiche in positivem Sinne statthat, zeigt ein Blick auf die Figur. [Siehe S. 677.]

Wir wählen nun eine neue Ecke erster Art des ursprünglichen Bereiches, etwa diejenige, die aus $(\mathsf{A}_1{}^+, \Lambda_n{}^-)$ durch die Operation π' hervorgeht. Wollen wir alle Bereiche haben, die in dieser Ecke zusammenstoßen, so brauchen wir offenbar die π^{-1} der letzten Tabelle rechter Hand nur mit dem Faktor π' zu multiplizieren. Wir erhalten dann die Aufeinanderfolge der gewünschten Bereiche, nur nicht (was übrigens sofort durch zyklische Umstellung zu erreichen ist) mit dem Bereiche 1 beginnend.

Nachdem wir so alle Bereiche bestimmt haben, welche mit dem ursprünglichen eine Ecke gemein haben — ich will sie alle unter der Gesamtbezeichnung P zusammenfassen — erledigen wir die gleiche Aufgabe für einen beliebigen anderen Bereich sofort. Wir brauchen nämlich wieder nur das Symbol Π dieses Bereiches linker Hand mit den einzelnen P zu multiplizieren.

Und nun können wir uns folgende Vorstellung von der Gesamtheit der Fundamentalbereiche in der η-Ebene machen. Wir beginnen mit dem Bereiche 1 und umgeben ihn zuvörderst mit dem Kranze der anstoßenden Bereiche P. Man versteht dies am besten, wenn alle U_k elliptisch sind und also die Zahl der P endlich ist. Hernach betrachte man den Fall, daß einige U_k parabolisch sein mögen, als einen Grenzfall. Um diesen ersten Kranz herum legen wir einen zweiten: das sind diejenigen Bereiche, welche an irgendeinen Bereich P anstoßen, und die wir also mit PP' bezeichnen können. Dann folgt ein dritter Kranz von Fundamentalbereichen $PP'P''$ usw. Und so streben wir je länger je mehr der natürlichen Grenze des Hauptkreises zu, ohne denselben irgendwo anders, als in den Fundamentalpunkten der etwa vorhandenen parabolischen Substitutionen U_k und der mit ihnen gleichberechtigten Substitutionen, wirklich zu erreichen.

§ 12.

Über die zugehörige Substitutionsgruppe.

Wir ergänzen die Schilderung, welche wir nunmehr von dem Verlaufe der η-Funktion gegeben haben, noch durch gewisse Sätze über die zugehörige Substitutionsgruppe.

Wir fanden oben die Relationen $U_k^{l_k} = 1$, wir hatten ferner die Fundamentalrelation. Aus ihnen folgen unendlich viele andere durch Transformation und Kombination[54]. *Ich sage nun zunächst, daß hierüber hinaus zwischen unseren* S_i, T_i, U_k *keine anderen Relationen möglich sind.*

Sei nämlich $R = 1$ eine Relation (wo R ein Aggregat der S, T, U ist), so werden wir dieselbe geometrisch deuten[55], indem wir zunächst alle diejenigen Bereiche in der η-Ebene markieren, welche, mit 1 beginnend, der Reihe nach durch das letzte Symbol von R, durch die Zusammenstellung der *zwei* letzten Symbole, der *drei* letzten Symbole usw. gegeben sind. Von diesen Bereichen hat jeder folgende mit dem vorangehenden eine Kante gemein, und die Aufeinanderfolge ist *geschlossen*, eben weil $R = 1$ ist. Statt von der Aufeinanderfolge der Bereiche werden wir bequemer von einer geschlossenen *Kurve* sprechen, die der Reihe nach jene Bereiche durchsetzt. Und nun ist die Sache die, daß wir diese Kurve, ohne ihre Bedeutung zu ändern, unter der einen Bedingung beliebig verzerren können, daß wir, bei der Verzerrung, die Eckpunkte der Fundamentalbereiche als unüberschreitbare Hindernisse betrachten. Denn eine jede solche Verzerrung hat nur den Erfolg, daß in die Aufeinanderfolge der Symbole, welche wir R nennen, an irgendwelchen Stellen andere Symbolaggregate, die wir r nennen mögen, zusammen mit dem jedesmaligen, unmittelbar dahinter folgenden r^{-1} eingeschaltet werden, wodurch offenbar an der Richtigkeit und dem Wesen der Relation gar nichts geändert wird. *Nun zeigt uns aber die geometrische Anschauung, daß nicht nur der einzelne Fundamentalbereich, sondern auch die Gesamtheit aller Bereiche in unserem Falle eine einfach zusammenhängende Fläche bildet.* Daher

[54]) Ist $R = 1$ eine Relation, π irgendeine Operation der Gruppe, so heißt $\pi R \pi^{-1} = 1$ die transformierte Relation.

[55]) Vgl. hierzu Herrn Dycks „*Gruppentheorethische Studien*" im 20. Bande der Math. Annalen (1882).

können wir, indem wir innerhalb des von unserer Kurve umspannten Flächenstückes einen Punkt markieren, die Kurve durch eine Reihenfolge von Schleifen ersetzen, welche von dem markierten Punkte aus nach den verschiedenen von der Kurve umspannten Eckpunkten von Fundamentalbereichen hinlaufen, um je nach Umkreisung eines einzelnen Eckpunktes zum Ausgangspunkte zurückzukehren. Das heißt aber: unsere Kurve ist mit der aufeinanderfolgenden Umkreisung gewisser Eckpunkte äquivalent. Nun entsprechen die früher aufgestellten Relationen zwischen den S, T, U den Umkreisungen der Eckpunkte des ursprünglichen Fundamentalbereiches. Umkreisen wir die Eckpunkte eines anderen Bereiches, so erhalten wir notwendig — weil dieser Bereich aus dem ursprünglichen durch Transformation hervorgeht — die transformierten Relationen. *Daher ist* $R = 1$ *ohne weiteres mit einem Aggregate solcher transformierter Relationen äquivalent*, und hat also in der Tat keine selbständige Bedeutung, w. z. b. w.

Wir fragen ferner nach denjenigen Substitutionen unserer Gruppe, welche *elliptisch* sind. Man kann diese Frage auf die eben beantwortete zurückführen. Doch ist es noch einfacher, sie direkt zu beantworten. Eine elliptische Substitution unserer Gruppe hat einen ihrer Fundamentalpunkte notwendig in demjenigen Gebiete, welches von unseren Fundamentalbereichen überdeckt wird (siehe oben). Daher stoßen in diesem Punkte verschiedene Fundamentalbereiche zusammen, welche vermöge der elliptischen Substitution äquivalent sind. Mit anderen Worten: *Die elliptische Substitution muß sich in der Gestalt* $\pi U_k^\mu \pi^{-1}$ *darstellen lassen, wo* U_k *eine derjenigen erzeugenden Substitutionen ist, die selber elliptisch sind.*

Zu demselben Resultate führt vermöge einer Hilfsbetrachtung der Fall einer *parabolischen* Transformation. Um uns prägnanter ausdrücken zu können, mögen wir einen Augenblick den Hauptkreis der η-Ebene mit der Achse der reellen Zahlen, den Fundamentalpunkt der parabolischen Substitution mit dem Unendlichkeitspunkte zusammenfallen lassen. Unsere Transformation wird dann die Gestalt $\eta' = \eta + C$ annehmen. Wir zerlegen entsprechend die Ebene η durch gerade Linien, welche zur Achse der reellen Zahlen senkrecht sind, in Parallelstreifen von der Breite C. Ich sage dann, *daß in jedem dieser Streifen notwendig ein Fundamentalbereich vorhanden ist, oder auch eine Anzahl solcher Bereiche, die sich parallel nebeneinander ins Unendliche ziehen.* Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßten wir, wenn wir einen solchen Streifen ins Unendliche verfolgten, auf andere und andere Fundamentalbereiche stoßen. Es würde dann, außer unserer parabolischen Substitution, noch eine zweite Substitution geben müssen, welche den einzelnen Fundamentalbereich in der Weise reproduzierte, daß sich die reproduzierten Bereiche gegen den Punkt $\eta = \infty$ anhäufen. Diese Substitution wird parabolisch oder hyperbolisch sein können, aber $\eta = \infty$ zum Fundamentalpunkte haben. Wir kombinieren sie mit $\eta' = \eta + C$ und erhalten eine Gruppe, welche in unserer diskontinuierlichen Gruppe mit Hauptkreis als Untergruppe enthalten [und also selber diskontinuierlich] ist. Diese Gruppe müßte eine von denen sein, die wir in § 6 des gegenwärtigen Abschnittes an zweiter Stelle aufgezählt haben. Aber keine dieser Gruppen läßt die Achse der reellen Zahlen invariant; es kann also auch keine solche Gruppe in unserer Substitutionsgruppe enthalten sein. — Wir haben dabei außer acht gelassen, daß die zutretende Substitution vielleicht selbst in der Gestalt $\eta' = \eta + C'$ enthalten sein kann (unter C' eine reelle Konstante verstanden). Aber dann wird sie, mit $\eta' = \eta + C$ kombiniert, unsere anfänglichen Parallelstreifen nur in schmalere Streifen zerlegen, und unser eigentlicher Schluß erleidet keine Änderung. Also folgt: *So oft in unserer Gruppe eine parabolische Substitution vorhanden ist, so gibt es auch zugehörige Fundamentalbereiche, welche sich mit einer Ecke bis an den Fundamentalpunkt der parabolischen Substitution erstrecken.* — Wenn aber letzteres bei *einem* Fundamentalbereiche der Fall ist, so reicht auch der ursprüngliche Fundamentalbereich an den Hauptkreis hinan; es gibt also unter den U_k eine parabolische Substitution, und die vorgelegte parabolische Substitution läßt sich in die Gestalt $\pi U_k^\mu \pi^{-1}$ setzen, unter μ eine positive oder negative ganze Zahl verstanden.

Daher, wenn wir zusammenfassen: *Unsere Gruppe enthält keine anderen elliptischen oder parabolischen Substitutionen als diejenigen, die sich in der Gestalt* $\pi U_k^\mu \pi^{-1}$ *schreiben lassen.*

Hieraus folgt insbesondere, daß die erzeugenden Substitutionen S_i, T_i notwendig *hyperbolische* Substitutionen sind Sollte nämlich, wie man vielleicht denken möchte, im einzelnen Falle S_i (oder T_i) einem $\pi U_k^\mu \pi^{-1}$ gleich sein, so wäre dies eine zwischen den erzeugenden Substitutionen bestehende besondere Relation, und eine solche kann, wie eben bewiesen, [nach unseren Voraussetzungen] in keinem Falle statthaben. Wir schließen daraus noch den hübschen Satz, daß von den Begrenzungskreisen des ursprünglichen Polygons die zusammengehörigen A_i^+ und A_i^- (oder auch B_i^+ und B_i^-) einander nie schneiden können. Denn A_i^+ geht aus A_i^- (wie die Figur zeigt) in der Weise vermöge der hyperbolischen Substitution S_i hervor, daß die beiden Fundamentalpunkte von S_i durch A_i^+ (d. h. durch den Vollkreis, der das Stück A_i^+ enthält) und ebenso durch A_i^- voneinander getrennt werden. Übt man aber auf einen so gelegenen Kreis die hyperbolische Substitution aus, so geht er gewiß in einen anderen über, der ihn nicht schneidet.

§ 13.
Umkehr der bisherigen Betrachtungen.

Die Voraussetzung, mit der wir in den letzten drei Paragraphen operiert haben, war die *Existenz* der η-Funktion (p, n, l_k). Wir werden uns jetzt fragen, ob wir den ganzen Gedankengang nicht umkehren und also jede η-Funktion (p, n, l_k) der in Betracht gezogenen Art a priori konstruieren können.

Zu dem Zwecke bemerken wir zunächst, daß mit dem ersten Fundamentalbereiche des § 10 die zugehörigen Substitutionen S, T, U und also der Gesamtverlauf der η-Funktion bereits gegeben sind. Denn jede dieser Substitutionen hängt, bei gegebenem Hauptkreise, von höchstens drei reellen Konstanten ab; sie hat aber zwei Ecken des betreffenden Bereiches in zwei andere bestimmte Ecken desselben Bereiches überzuführen, was zwei komplexe oder vier reelle Bestimmungsstücke abgibt und also zur Fixierung der Substitution jedenfalls ausreicht.

Aber ich sage, *daß bei richtig angenommenem Fundamentalbereiche allemal auch eine brauchbare η-Funktion der vorgegebenen Signatur resultiert.* Als richtig angenommen bezeichne ich dabei einen Bereich, der von Kreisbogen $\mathsf{A}_i^{\pm}$, $\mathsf{B}_i^{\pm}$, $\Lambda_k^{\pm}$ begrenzt, Substitutionen S_i, T_i, U_k gestattet, welche den betreffenden Hauptkreis ungeändert lassen, und dabei nicht nur in den Ecken α_k die vorgeschriebenen Winkel $\frac{2\pi}{l_k}$, sondern auch als Winkelsumme der Ecken erster Art 2π besitzt.

In der Tat: Zuvörderst ist deutlich, daß zwischen den S, T, U in diesem Falle die früher besprochenen Relationen bestehen müssen. Denn diese waren nur eine Folge von dem, was gerade hinsichtlich der Winkel postuliert wurde. Wir reproduzieren daraufhin unseren ersten Bereich vermöge der S, T, U. Es ergibt sich dann zunächst, daß unser ursprünglicher Bereich genau nach dem Schema des § 11 von einem Kranze neuer Bereiche umgeben ist, von denen keiner über ihn hinübergreift. Aber das Gleiche gilt dann notwendig von jedem anderen Bereiche. Daher haben wir jedenfalls, *daß die Riemannsche Fläche (p, n, l_k), welche durch den ersten Bereich vermöge der Zusammengehörigkeit seiner Kanten definiert wird, eine unverzweigte Funktion von η ist.*

Aber wird unsere Riemannsche Fläche infolgedessen in η *eindeutig* sein[56]) und wirklich den vorgegebenen *Hauptkreis* zur natürlichen Grenze haben? Ich behaupte, daß beides in der Tat der Fall ist. Und hier ist

[56]) Funktionen mit natürlicher Grenze können sehr wohl unverzweigt und doch nicht eindeutig sein, wie einfache Beispiele beweisen und im folgenden noch öfter zur Sprache kommt. Man braucht z. B. nur den Bereich, in welchem die Funktion existiert, an irgendeiner Stelle über sich selbst hinübergreifen zu lassen.

es nun, daß ich zum Beweise jene Nicht-Euklidische Maßbestimmung brauche, welche am Ende von § 7 dieses Abschnitts entwickelt wurde. Dabei beschränke ich mich, der Kürze halber, auf den Fall, daß alle Substitutionen U_k *elliptisch* sind. Sollten einige derselben parabolisch sein, so müßte man eine Hilfsbetrachtung anstellen, die derjenigen nicht unähnlich ist, welche wir am Schlusse des vorigen Paragraphen entwickelten.

Im Sinne der erwähnten Maßbestimmung sind alle aus dem ursprünglichen abzuleitenden Fundamentalbereiche kongruent. Wir wollen uns nun zuvörderst die Fundamentalbereiche so angeordnet denken, wie in § 11 gegen Schluß besprochen. Sei δ die kleinste Entfernung, welche von einem Eckpunkte des einzelnen Fundamentalbereiches bis zu einem Punkte einer nicht anstoßenden Begrenzungskante hinreicht. Dann hat jeder der unendlich vielen Ringe, mit denen wir sukzessive den ersten Fundamentalbereich umgeben, eine Breite, die an keiner Stelle unter δ herabsinkt. Jeder Punkt daher, welcher in *endlicher* Entfernung von dem ursprünglichen Fundamentalbereiche angenommen werden mag, wird schließlich von den Reproduktionen des Ausgangsbereiches überdeckt, und nur der Hauptkreis selbst, als Ort der unendlich fernen Punkte, kann die natürliche Grenze der Reproduktionen sein, womit also der erste Teil unserer Behauptung erledigt ist.

Wollen wir jetzt ferner beweisen, daß unsere Riemannsche Fläche (p, n, l_k) in η eindeutig ist, so haben wir zu zeigen, daß bei dem geschilderten Reproduktionsverfahren (bei dem gewiß niemals benachbarte Bereiche übereinandergreifen können) auch nie *entfernte* Bereiche übereinandergreifen. Gesetzt, es gäbe zwei solche Bereiche Π_1 und Π_N, so würden wir zwischen dieselben eine endliche Zahl unmittelbar aufeinanderfolgender Bereiche: $\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{N-1}$ einschalten können. Diese Reihenfolge, welche mit ihren Endgliedern, Π_1 und Π_N, über sich selbst hinübergreift, umspannt, im Sinne unserer Maßbestimmung, jedenfalls nur einen endlichen Teil der Ebene. Nach dem, was eben bewiesen wurde, ist letzterer mit Fundamentalbereichen vollkommen ausgefüllt. Von diesen Fundamentalbereichen müssen aber zwei, welche bez. an Π_1 und Π_N angrenzen, selbst wieder übereinandergreifen. Indem wir sie an die Stelle von Π_1 und Π_N setzen und durch die Reihenfolge derjenigen Fundamentalbereiche verbinden, welche an $\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{N-1}$ von der Innenseite angrenzen, wiederholen wir denselben Schluß für einen Teil der Ebene, der um ein Endliches *kleiner* ist als der gerade betrachtete. Offenbar müssen wir, so fortschreitend, schließlich zu einem Verzweigungspunkte der η-Ebene gelangen. Ein solcher aber ist, wie wir wissen, [gemäß unseren auf der vorigen Seite gemachten Annahmen] unmöglich. Daher war unsere Voraussetzung betreffs der Π_1, Π_N unzulässig.

Hiermit aber ist die Behauptung, welche wir zu Anfang des Paragraphen voranstellten, sofern wir von der Möglichkeit parabolischer U_k absehen, in allen Stücken bewiesen.

§ 14.

Die independenten Bestimmungsstücke der η-Funktion mit Hauptkreis.

Auf Grund der vorangehenden Entwicklungen fragen wir jetzt zunächst, von wievielen Konstanten ein geeigneter Fundamentalbereich (p, n, l_k) abhängen mag, und suchen sodann nach zweckmäßigen Bestimmungsstücken der zugehörigen η-Funktion.

Was die erstere Frage anlangt, so können wir, bei gegebenem Hauptkreis, etwa folgendermaßen vorgehen.

Sei (um die Ideen zu fixieren) $p > 0$. So beginnen wir etwa mit der Konstruktion des ersten Quadrupels von Begrenzungskreisen: A_1^+, B_1^-, A_1^-, B_1^+. Den Kreis A_1^+ und die beiden Eckpunkte auf ihm werden wir beliebig annehmen[57]): vier Konstante. Für B_1^- ist dann schon der erste Eckpunkt gegeben; indem wir B_1^- beliebig durch ihn hindurchlegen und auf B_1^- den zweiten Eckpunkt annehmen, verfügen wir über weitere zwei Konstante. Der Kreis A_1^- ist dann, weil er durch den zweiten Eckpunkt auf B_1^- hindurch muß, bis auf eine Konstante bestimmt. Mit ihm zusammen ist dann aber auch die Substitution S_1^{-1}, durch welche A_1^- aus A_1^+ hervorgeht, fixiert. Denn wir wissen, daß sie zwei Kreise (A_1^+ und A_1^-) und insbesondere deren Schnittpunkte mit B_1^- ineinander überführen muß. Vermöge S_1^{-1} erfahren wir sodann die Lage des zweiten auf A_1^- gelegenen Eckpunktes. Durch diesen muß nun B_1^+ hindurchlaufen, was abermals eine Willkürlichkeit freiläßt. Haben wir über sie verfügt, so kennen wir wieder die zugehörige Substitution (T_1) und aus ihr die Lage des zweiten Eckpunktes auf B_1^+. *Das erste Quadrupel mit seinen Endpunkten hängt also im ganzen von 8 Konstanten ab.*

Bei jedem weiteren Quadrupel A_i^+, B_i^-, A_i^-, B_i^+ ist diese Zahl nur 6. Denn der Anfangspunkt der ersten Seite, der beim ersten Quadrupel willkürlich war, ist bei den folgenden Quadrupeln durch den Endpunkt des jeweils vorangehenden Quadrupels mitgegeben. *So hängen also die p Quadrupel zusammen von $6p + 2$ Konstanten ab.*

Durch den letzten Eckpunkt des letzten Quadrupels legen wir jetzt beliebig den Kreis Λ_1^+ (1 Konst.) und nehmen auf ihm den zweiten Eckpunkt ebenfalls beliebig an (wieder 1 Konst.). Dann ist der Kreis Λ_1^- vollkommen bestimmt, weil er, durch den letzteren Punkt hindurch-

[57]) Es wird aber selbstverständlich daran festgehalten, daß alle Begrenzungskreise auf dem Hauptkreise senkrecht stehen.

gehend, mit Λ_1^+ den Winkel $\frac{2\pi}{l_1}$ bilden soll. Ebenso ist die Substitution U_1 und also auch der zweite Eckpunkt auf Λ_1^- festgelegt. Durch letzteren Punkt hindurch konstruieren wir jetzt Λ_2^+, nehmen auf ihm den zweiten Eckpunkt an, usw. usw. *Die n Paare Λ_k^+, Λ_k^- liefern zusammen, wie man sieht, $2n$ Konstante.*

Von den so aufgezählten $6p + 2n + 2$ Konstanten gehen nun noch drei verloren, weil unser Bereich erstens ein geschlossener sein muß, also der erste Eckpunkt des ersten Quadrupels mit dem letzten Eckpunkte auf Λ_n^- koinzidieren muß (zwei Bedingungen) und überdies als Winkelsumme der $(4p + n)$ Ecken erster Art 2π aufweisen soll (eine Bedingung).

Unser Fundamentalbereich hängt also, bei gegebenem Hauptkreise, definitiv von $6p + 2n - 1$ willkürlichen Konstanten ab.

Aber diese Konstanten sind nicht ohne weiteres Bestimmungsstücke der η-Funktion. Wir müssen nämlich beachten, daß wir die Riemannsche Fläche (p, n, l_k) bei vorgegebener η-Funktion noch in sehr verschiedener Weise kanonisch zerschneiden und also durch einen kanonischen Fundamentalbereich ersetzen können. Die hierin liegende Willkürlichkeit ist eine doppelte. Einmal können wir jenen Punkt O, den wir bei Konstruktion des Schnittsystems auf der Fläche zugrunde legten, beliebig wandern lassen. Dann aber können wir die Art und Reihenfolge der zugehörigen Querschnitte A_i, B_i, L_k in hohem Maße abändern. Den ersteren Umstand müssen wir (da wir hier durchaus *reelle* Bestimmungsstücke abzählen) mit zwei Einheiten in Rechnung stellen. Der zweite Umstand dagegen bringt eine Reduktion der Konstantenzahl nicht mit sich. Denn die Anzahl der bei ihm zu unterscheidenden Möglichkeiten ist nur eine diskrete. Wir wollen sogar für die Folge festsetzen (sofern nicht ausdrücklich das Gegenteil verlangt wird), *daß wir diesen zweiten Umstand ganz außer acht lassen wollen.* Es kommt dies darauf hinaus, daß wir jede η-Funktion so oft zählen, als die zugehörige Riemannsche Fläche in kanonischer Weise zerschnitten werden kann, oder auch — da durch die Zerschneidung jene Substitutionen S_i, T_i, U_k erst fixiert werden, aus denen sich die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen zusammensetzt — so oft zählen, als die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen aus Operationen S_i, T_i, U_k zusammengesetzt werden kann.

Jedenfalls haben wir: *Die einzelne η-Funktion (p, n, l_k) hängt bei gegebenem Hauptkreise von $6p + 2n - 3$ reellen Bestimmungsstücken ab.*

Es bieten sich aber auch sofort diejenigen Größen dar, welche wir zweckmäßigerweise als Bestimmungsstücke einführen. Wir wollen der

Einfachheit halber den Hauptkreis mit der Achse der reellen Zahlen zusammenfallen lassen. Dann hängt jede Substitution S_i oder T_i von drei, jede U_k (insofern sie eine primitive elliptische Substitution von der Periode l_k vorstellt) von zwei reellen und independenten Konstanten ab. *Aber zwischen der S_i, T_i, U_k besteht unsere Fundamentalrelation.* Ich will annehmen, daß $p > 0$ sei[58]). So schreiben wir die Fundamentalrelation, indem wir einige Faktoren von links nach rechts hinübersetzen, in der Art, daß etwa S_1 (oder T_1) beiderseits in der positiven ersten Potenz auftritt. Die Fundamentalrelation liefert uns dann drei lineare Gleichungen zur Bestimmung von S_1 (bzw. T_1). *Daher können wir geradezu* (im Anschluß an die eben getroffene Festsetzung) *die $6p + 2n - 3$ Substitutionskoeffizienten der erzeugenden Substitutionen S_1 (oder T_1), S_2, T_2, ..., S_p, T_p, U_1, U_2, ..., U_n als die willkürlichen Bestimmungsstücke der η-Funktion betrachten.* — Willkürlich sind die Bestimmungsstücke insofern, als sie *innerhalb gewisser Ungleichungen* sich beliebig ändern können. Diese Ungleichungen, deren arithmetische Fixierung hier unerledigt bleibt, finden ihr geometrisches Äquivalent in der Forderung, daß zu den angenommenen S_i, T_i, U_k jedesmal ein zugehöriger kanonischer Fundamentalbereich soll konstruiert werden können.

„Wesentlich" sind übrigens von den genannten $6p + 2n - 3$ Konstanten nur $6p + 2n - 6$.

Denn wir werden weiterhin alle solche η-Funktionen im wesentlichen als identisch betrachten, welche linear voneinander abhängen. Nun verlegten wir bereits den Hauptkreis der η-Funktionen in die Achse der reellen Zahlen. Aber diese selbst geht noch durch dreifach unendlich viele Transformationen in sich über. Indem wir dieselben zu Hilfe nehmen, können wir z. B. bestimmen, daß von den Fundamentalpunkten unserer erzeugenden Substitutionen bestimmte drei in 0, 1, ∞ fallen sollen. Dadurch kommen dann in der Tat von den früher aufgezählten (reellen) Konstanten drei weitere noch in Abzug. Die übrigen $6p + 2n - 6$ bleiben in dem erwähnten Sinne unabhängig.

§ 15.

Die Variation der Konstanten, an einem Beispiele erläutert.

Die Konstanten, welche wir soeben zur Bestimmung der η-Funktion einführten, sind ihrer Bedeutung nach zuvörderst wesentlich *reelle* Größen. Aber es liegt nahe, zu fragen, was die Bedeutung sein mag, wenn wir ihnen gestatten, *komplexe* Werte anzunehmen. Wird der Gruppe, die aus den S_i, T_i, U_k durch Kombination entsteht, auch dann noch eine brauchbare Gebietseinteilung entsprechen? Wir finden, daß dies in der Tat der Fall ist, solange die Umänderung der Konstanten nicht sehr beträchtlich ist[59]). *Es tritt nur an die Stelle des früheren Hauptkreises eine andere, nicht analytische, Begrenzungslinie und die hyperbolischen Substitutionen der Gruppe sind, allgemein zu reden, in loxodromische übergegangen.*

[58]) Den Fall $p = 0$, der auch nicht schwer zu behandeln ist, übergehe ich der Kürze wegen.

Um diese etwas unbestimmt gefaßte Aussage zu verstehen, betrachten wir ein möglichst einfaches Beispiel. Ich wähle hierzu diejenige symmetrische Gruppe, welche aus einem Kreisbogenpolygone, dessen sämtliche Winkel gleich Null sind, durch fortgesetzte Spiegelung entsteht[60]). Sind sämtliche Begrenzungskreise des Polygons gegen einen Hauptkreis senkrecht, so entsteht bei diesem Spiegelungsverfahren gewiß eine brauchbare

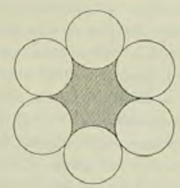


Fig. 11.

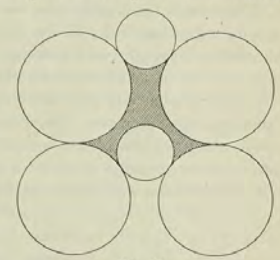


Fig. 12.

Gebietseinteilung, wie dies oben (§ 8) in allgemeinerer Fassung schon bemerkt wurde. Der Hauptkreis, welcher seinerseits bei allen Spiegelungen invariant bleibt, gibt dabei die natürliche Grenze der fortgesetzten Reproduktionen ab. Es mag dieser Fall durch das Kreisbogensechseck der Fig. 11 erläutert sein. Ich habe dabei, um den Vergleich mit den folgenden Fällen zu erleichtern, die Begrenzungskreise über den Hauptkreis hinaus vollständig ausgezogen.

Wir modifizieren jetzt (um bei dem Beispiele der Figur zu bleiben) unser Kreisbogensechseck, zunächst etwa in der Art, wie Fig. 12 angibt. Die Begrenzungskreise haben jetzt keineswegs mehr einen gemeinsamen Orthogonalkreis. Aber die Figur ist der früheren doch dadurch noch

[59]) [Die Änderung der Konstanten muß natürlich so vollzogen werden, daß die elliptischen Substitutionen ihre Periode behalten und die parabolischen Substitutionen parabolisch bleiben. K.]

[60]) [Vgl. die Briefe 3—7 des oben abgedruckten Briefwechsels zwischen F. Klein und H. Poincaré sowie die dort gegebenen Zitate auf die Noten H. Poincarés in den Comptes rendus, in denen er auf die brieflichen Mitteilungen von Klein Bezug nimmt (siehe oben S. 592—598).]

ähnlich, daß nicht aufeinanderfolgende Begrenzungskreise sich überhaupt nicht treffen. *Hieraus folgt unmittelbar, daß die Reproduktionen unseres Polygons, wie in dem früheren Falle einen einfach zusammenhängenden (aber allerdings nicht kreisförmigen) Bereich bedecken, der nirgendwo über sich selbst hinübergreift.* Denn sooft wir an einem der Begrenzungskreise des ursprünglichen Sechsecks oder irgendeines der aus ihm abgeleiteten spiegeln, das Spiegelbild nicht nur der angrenzenden Sechsecke sondern auch aller übrigen Begrenzungskreise fällt in das Innere des spiegelnden Kreises hinein und kollidiert also weder mit dem angrenzenden Sechseck, noch mit irgendeinem früheren, das wir bereits durch anderweitige Spiegelung konstruiert haben mögen. — Was die natürliche Grenze angeht, der diese fortgesetzten Reproduktionen zustreben, so können wir beliebig viele Punkte derselben konstruieren: die Berührungspunkte nämlich aufeinanderfolgender Begrenzungskreise irgendeines an der Figur beteiligten Sechsecks. Diese Grenze ist natürlich in keiner Weise mehr eine *analytische* Kurve[61].

Wie aber, wenn wir das Sechseck weiter deformieren und also den Begrenzungskreisen gestatten, zum Teil übereinanderzugreifen? Unmittelbar aufeinanderfolgende Sechsecke werden sich auch dann noch lückenlos nebeneinanderlegen und die durch den Fundamentalbereich versinnlichte Riemannsche Fläche wird nach wie vor eine *unverzweigte* Funktion jener Variablen η sein, in deren Ebene wir unsere Sechsecke konstruieren. *Aber sie wird, von besonderen Fällen abgesehen, keineswegs mehr eine eindeutige Funktion sein.* Man versuche etwa, sich die Gesamtheit der Reproduktionen des Sechsecks in Fig. 13 vorzustellen. — Ein noch frappanteres (aber weniger übersichtliches) Beispiel würde man erhalten, wenn man dem ursprünglichen Sechsecke selbst bereits eine solche Gestalt erteilt hätte, daß es für sich genommen einen Teil der Ebene doppelt überdeckt.

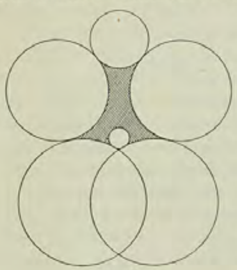


Fig. 13.

[61]) [H. Poincaré gab (Acta Mathematica, Bd. 3 (1883), S. 77—80, = Oeuvres, Bd. 2, S. 285—287) den Satz, daß die Kurve nur in denjenigen ihrer Punkte, die Fixpunkte parabolischer Substitutionen sind, eine bestimmte Tangente, nirgends aber einen bestimmten Krümmungsradius hat. Fricke hat in der Folge den Fall des Kreisbogenvierecks näher untersucht; siehe Math. Annalen, Bd. 44 (1894) und „Automorphe Funktionen", Bd. 1, S. 415 ff.; siehe ferner meine autographierte Vorlesung „*Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*" vom Sommer 1901. Ich gebe hier diese Zitate, weil die in Betracht kommenden merkwürdigen Verhältnisse nicht aus einem künstlichen Ansatz, sondern aus einer ganz elementaren Fragestellung herVorwachsen. K.]

In derselben Weise nun, wie hier im Beispiele, müssen wir uns die Sache allgemein denken. Indem wir die Konstanten einer η-Funktion p, n, l_k, unter Festhaltung dieser Signatur, komplex werden lassen, behalten wir fürs erste noch eine brauchbare Gebietseinteilung. Es greifen nur die fortgesetzten Reproduktionen des ursprünglichen Fundamentalbereichs, sozusagen, über den Hauptkreis hinaus oder bleiben, an anderen Stellen, hinter ihm zurück: die natürliche Grenze aber, der sie zustreben, ist zuvörderst noch eine einheitliche Kontur, welche sich selbst nicht schneidet.

Auf eine genauere Untersuchung der Ungleichungen, denen unsere komplexen Konstanten genügen müssen, damit die natürliche Grenze den angegebenen Charakter behält, gehe ich an dieser Stelle nicht ein[62]). Es muß genügen, die allgemeine Möglichkeit gewisser η-Funktionen bezeichnet zu haben. Wir sehen, daß es bei gegebenen p, n, l_k eine unendliche Anzahl brauchbarer Gebietseinteilungen sozusagen von demselben *Typus* gibt; unter ihnen bilden die Gruppen mit Hauptkreis, die wir seither allein betrachteten, wie ich fortan sagen will, den *Normalfall*. Offenbar sind unter den eindeutig umkehrbaren η-Funktionen derselben Signatur p, n, l_k die hier in Betracht gezogenen dadurch charakterisiert, daß ihnen nicht nur ein *einfach zusammenhängender* Fundamentalbereich eignet, sondern daß auch von der Gesamtheit der Fundamentalbereiche ein *einfach zusammenhängendes* Flächenstück überdeckt wird. Dem entspricht, daß zwischen ihren erzeugenden Substitutionen S_i, T_i, U_k keine anderen Relationen existieren und überhaupt für sie ganz ähnliche Betrachtungen gelten, wie wir sie in § 12 für die Gruppen mit Hauptkreis dargelegt haben.

Wollen wir andere eindeutig umkehrbare η-Funktionen finden, so müssen wir also dafür sorgen, daß entweder bereits der ursprüngliche Fundamentalbereich in der η-Ebene einen mehrfachen Zusammenhang hat, oder doch, daß ein mehrfacher Zusammenhang bei den Reproduktionen

[62]) Was die explizite Formulierung derartiger Ungleichungen betrifft, so möchte ich hier auf die Untersuchungen von Herrn Rausenberger im 20. und 21. Bande der Math. Annalen (1882/83) verweisen. Übrigens subsumieren sich seine Gruppen weder sämtlich unter die hier im Texte betrachteten noch auch unter die anderen, welche im folgenden Paragraphen durch Ineinanderschiebung hergestellt werden. Man kann seine Ausgangsgruppen alle dadurch erhalten, daß man ein Kreisbogendreieck mit *reellen* oder beliebig *imaginären* Winkeln durch Spiegelung vervielfältigt (wobei die reellen Winkel natürlich ganzzahlige Teile von π sein müssen). Hiernach dürfen die reellen Konstanten, welche zur Fixierung der imaginären Winkel dienen, ins Komplexe hinein variiert werden. — Ich erwähne bei der Gelegenheit gerne, daß mir die Korrespondenz mit Herrn Rausenberger, welcher von sich aus zur Inbetrachtnahme der neuen Funktionen geführt worden war, seiner Zeit von Anregung gewesen ist.

desselben resultiert. Ich erläutere im folgenden Paragraphen einen Prozeß, der uns mit unendlich vielen neuen η-Funktionen der ersteren Art versieht. Es sind dies die allgemeinsten η-Funktionen, mit denen ich mich im vorliegenden Aufsatze beschäftigen will, und mit ihrer Besprechung (§ 16—18) schließt daher der gegenwärtige Abschnitt. [In den „Automorphen Funktionen" werden darüber hinaus auch die Fälle letzterer Art mitgenommen, wo Relationen zwischen den erzeugenden Substitutionen der Gruppe existieren, die elliptischen Charakter haben[63].]

§ 16.

Der Prozeß der Ineinanderschiebung.

Neben den Gruppen des vorangehenden Paragraphen, denen wir alle diejenigen zuzählen wollen, die wir in § 6 besprochen haben, kennen wir von früher her noch jene einfachen diskontinuierlichen Gruppen, welche durch Wiederholung einer einzelnen linearen Substitution erzeugt werden. Ist diese Substitution *elliptisch* oder *parabolisch*, so ist der Fundamentalbereich eine Sichel, hat also ebenfalls den Zusammenhang Eins. Dagegen wird der Fundamentalbereich ringförmig und somit zweifach zusammenhängend, wenn die Substitution *hyperbolisch* oder *loxodromisch* ist.

Es gibt nun einen allgemeinen Prozeß, vermöge dessen wir aus irgendwie vorgegebenen brauchbaren Gruppen andere, gleichfalls brauchbare zusammensetzen können, deren Fundamentalbereich einen beliebig hohen Zusammenhang aufweist. *Man grenze nämlich ein Stück der η-Ebene durch mehrere solche Konturen ab, wie sie, einzeln genommen, vermöge der Substitutionen der vorgegebenen Gruppen, als Begrenzung zugehöriger Fundamentalbereiche auftreten können. Kombiniert man dann die auf die verschiedenen Konturen bezüglichen erzeugenden Substitutionen, so entsteht von selbst eine brauchbare Gebietseinteilung, deren erster Fundamentalbereich jenes abgegrenzte Stück ist.*

Ich bezeichne dieses Verfahren als *Ineinanderschiebung*, und erläutere dasselbe zunächst an einigen Beispielen[64].

Wir betrachten zuvörderst etwa (Fig. 14) einen solchen Teil der η-Ebene, welche durch zwei Kreispaare: R_1', R_1'' und R_2', R_2'', begrenzt ist. Die Kreise R_1' und R_1'', sowie R_2' und R_2'' (die in der Figur durch Pfeile verbunden sind) ordnen wir je durch eine hyperbolische oder loxodromische Substitution, S_1 bez. S_2 zusammen, so zwar, daß unser Gebiet ein gemeinsames Stück der beiden ringförmigen, auf letztere Substitutionen

[63]) [Zusatz bei dem Wiederabdruck.]

[64]) Eben hier kommt die Anschauungsweise zur Geltung, welche durch die Figuren 2, 3, 5, 6, 10 auf S. 663, 667, 677 entwickelt werden sollte.

bezüglichen Fundamentalbereiche ist. Dann finden die Gebiete $S_1^{\pm\alpha}$, $S_2^{\pm\beta}$, welche wir aus dem vorgegebenen Bereiche durch positive oder negative Anwendung der einzelnen erzeugenden Substitution ableiten können, gewiß lückenlos nebeneinander Platz: die ersteren sind den aufeinanderfolgenden Werten von α entsprechend alle in R_1', bez. R_1'' eingeschlossen, die anderen in R_2', bez. R_2'', je nach den Werten von $\pm\beta$. *Aber jedes dieser neuen Gebiete trägt in seinem Inneren wieder zwei kreisförmige Öffnungen.* Und in diese Öffnungen hinein legen sich, wiederum in lückenloser Aufeinanderfolge, die Gebiete $S_1^{\pm\alpha} S_2^{\pm\beta}$, bez. $S_2^{\pm\beta} S_1^{\pm\alpha}$; die ersteren sind jeweils in ein bestimmtes $S_2^{\pm\beta}$, die anderen in ein bestimmtes $S_1^{\pm\alpha}$ eingeschlossen. *Innerhalb der so gewonnenen Gebiete finden nun wieder die neuen $S_2^{\pm\beta'} S_1^{\pm\alpha} S_2^{\pm\beta}$ resp. $S_1^{\pm\alpha'} S_2^{\pm\beta} S_1^{\pm\alpha}$ Platz.* Und so geht der Prozeß fort ins Unendliche. Eine Kollision kann niemals eintreten, weil die neu konstruierten Bereiche immer solche Teile der η-Ebene überdecken, welche bis dahin noch nicht benutzt waren. Daher erzielen wir eine in der Tat brauchbare Gebietseinteilung. Alle Substitutionen der zugehörigen Gruppe sind loxodromisch (oder hyperbolisch) und die unendlich vielen, übrigens zerstreut liegenden Fundamentalpunkte dieser Substitutionen sind es, welche als natürliche Grenze des von den Fundamentalbereichen überdeckten Gesamtgebietes zu gelten haben.

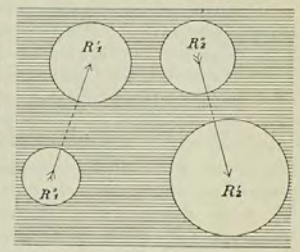


Fig. 14.

Nicht anders ist die Sache, wenn wir als Ausgangsbereich z. B. denjenigen Raum nehmen, der nach Art von Fig. 15 zwei *Sicheln* gemeinsam ist. Die eine mag die Winkelöffnung $\frac{2\pi}{m}$, die andere die Öffnung $\frac{2\pi}{n}$ besitzen, unter m, n ganze Zahlen verstanden; die zugehörigen Substitutionen, welche in der Figur durch Pfeile angedeutet sind, mögen Σ_1, Σ_2 heißen. Wir verfahren dann genau so, wie eben mit den S_1, S_2. Nur haben wir jetzt die Relationen $\Sigma_1^m = 1$, $\Sigma_2^n = 1$ und können dementsprechend die Exponenten $\pm\alpha$, $\pm\beta$ auf den Spielraum von 0 bis $(m-1)$, resp. von 0 bis $(n-1)$ beschränken. Es ist wohl kaum nötig, den ganzen Prozeß hier noch einmal geometrisch zu schildern. In gewissen Eckpunkten

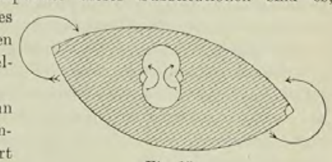


Fig. 15.

laufen nun jedesmal m Sicheln in anderen n zusammen. Die zugehörige Gruppe enthält jetzt unendlich viele elliptische Substitutionen, aber keine anderen als diejenigen, die sich in der Gestalt $\pi\Sigma_1^{\alpha}\pi^{-1}$, oder $\pi\Sigma_2^{\beta}\pi^{-1}$ darstellen. Die natürliche Grenze für die Gesamtheit der Fundamentalbereiche wird wiederum von den Fundamentalpunkten derjenigen hyperbolischen oder loxodromischen Substitutionen gebildet, die an der Gruppe partizipieren. —

Nehmen wir endlich an (wobei ich keine nähere Spezifikation eintreten lassen will), daß irgendeine Gruppe mit reellem Hauptkreis bei dem Ineinanderschiebungsprozesse beteiligt sei[65]). So wird auch dieser Kreis selbst bei den fortgesetzten Reproduktionen des ursprünglichen Fundamentalbereiches unendlich oft vervielfältigt werden. Das Gebiet also, welches von der Gesamtheit der Fundamentalbereiche überdeckt wird, zählt unter den Bestandteilen seiner natürlichen Grenze neben anderen hier nicht näher bezeichneten Stücken jedenfalls unendlich viele Kreislinien. —

Diese Beispiele werden genügen, um den Begriff der Ineinanderschiebung beliebiger Teilgruppen geläufig zu machen. Wir wenden denselben nunmehr auf beliebige Zusammenstellungen der eben aufgezählten uns bekannten Gruppen an. Dabei lassen wir, in Übereinstimmung mit früheren Festsetzungen, nur *die* Beschränkung eintreten, daß immer bloß eine *endliche* Zahl von Teilgruppen kombiniert werden soll. Die neu entstehenden Gruppen, resp. Gebietseinteilungen, ordnen wir nach *Typen*, indem wir alle solche Gruppen zu demselben Typus rechnen, deren einzelne Teilgruppen resp. demselben Typus angehören. Innerhalb des einzelnen Typus bilden diejenigen Gruppen [so wollen wir sagen] den *Normalfall*, welche, neben beliebig vielen isolierten Substitutionen, nur Teilgruppen mit Hauptkreis enthalten.

Es gilt jetzt, die Riemannsche Fläche zu charakterisieren, welche der einzelnen so erzeugten diskontinuierlichen Gruppe entspricht, und zugleich anzugeben, wie sich auf ihr unser η, als komplexe Funktion des Ortes aufgefaßt, verhält.

§ 17.

Die neue η-Funktion auf der zugehörigen Riemannschen Fläche.

Ich will annehmen, daß folgende Gruppen durch Ineinanderschiebung vereinigt wurden: zunächst q Gruppen, welche aus einer einzelnen elliptischen oder parabolischen Substitution, dann ferner r Gruppen, welche aus einer einzelnen hyperbolischen oder loxodromischen Substitution durch Wieder-

[65]) Vielleicht ist es nützlich, auch solche Beispiele durchzudenken, wo der Hauptkreis imaginär oder in einen Punkt ausgeartet ist.

holung erwachsen, endlich aber s Gruppen vom Hauptkreistypus, die also entweder selbst einen Hauptkreis besitzen oder aus einer Gruppe mit Hauptkreis durch Variation der Konstanten abgeleitet wurden. Die einzelne Gruppe unter den letztgenannten mag die Signatur π, ν besitzen (wo ich also die früheren lateinischen Buchstaben durch griechische ersetzt und der Kürze halber die Indizes der einzelnen Verzweigungspunkte fortgelassen habe). Dann ist der Fundamentalbereich in der η-Ebene von $q+2r+s$ verschiedenen Kurven begrenzt. Jede Kurve der ersten Art besteht aus zwei Stücken Q', Q'', welche, für sich genommen, eine Sichel von einer gewissen Winkelöffnung begrenzen[66]). Die $2r$ Kurven zweiter Art gehören paarweise als R' und R'' vermöge der betreffenden hyperbolischen oder loxodromischen Substitution zusammen (vgl. noch einmal Fig. 14). Endlich die s Kurven der letzten Art bestehen nach dem in § 10 geschilderten Schema aus $4\pi+2\nu$ paarweise zusammengehörigen Stücken, die wir kurzweg wieder mit A_i^+, B_i^+, Λ_k^+ bezeichnen mögen. — Den so definierten Fundamentalbereich denken wir uns nun durch eine äquivalente Riemannsche Fläche ersetzt. So entspricht dem Linienpaare Q', Q'' je ein *Einschnitt* Q, der von einem beliebigen Punkte der Fläche beginnend zu einem anderen hinläuft: die beiden Endpunkte des einzelnen Einschnittes sind [einander korrespondierende] Verzweigungspunkte unserer η-Funktion. Den zusammengehörigen R', R'' dagegen korrespondieren gewisse r auf der Fläche verlaufende und dieselbe nicht zerstückende *Rückkehrschnitte* R. Endlich jeder der weiteren Begrenzungskurven (π, ν) entspricht ein ganzes auf der Fläche befindliches *Schnittsystem*, welches in der früher beschriebenen Art einmal aus 2π Querschnitten A_i, B_i besteht, die von einem gewissen Punkte O auslaufend später in denselben wieder einmünden, dann aber aus ν Einschnitten, die von demselben Punkte O aus sich nach ν Verzweigungspunkten der η-Funktion hinziehen. *Hiernach haben wir, unter n die Gesamtzahl der Verzweigungspunkte unserer η-Funktion verstanden, sofort die folgende erste Formel:*

$$n = 2q + \sum \nu.$$

Des ferneren berechnen wir [nach § 4 des ersten Abschnitts] das Geschlecht p der Riemannschen Fläche folgendermaßen. Unser Fundamentalbereich hat als schlichtes Stück der Ebene eine Grundzahl, welche der Anzahl $q+2r+s$ der Begrenzungskurven gleichkommt. Aber die Grundzahl unserer [unzerschnittenen] Riemannschen Fläche, die wir gleich $2p$ setzen,

[66]) Ich nenne diese Stücke Q', Q'' nicht ausdrücklich *Kreisbogen*, weil es mit Rücksicht auf die anderen Begrenzungsstücke bequem [oder auch notwendig] sein kann, ihnen eine andere Form zu erteilen. Ähnliche Bewandtnis hat es mit den R', R'' usw.

wird durch jeden Einschnitt Q um eine Einheit vermehrt und durch jedes Schnittsystem (π, ν) um $(2\pi - 1)$ vermindert. Die Rückkehrschnitte R sind auf die Grundzahl ohne Einfluß. *Daher folgt:*

$$2p = (q + 2r + s) - q + \sum_1^s (2\pi - 1),$$

oder kürzer geschrieben:

$$p = r + \sum_1^s \pi.$$

Wir fragen nun billig, wodurch sich die neue η-Funktion (p, n) von den früheren mit der gleichen Signatur unterscheidet. In dieser Hinsicht betonten wir schon oben, daß jetzt der Fundamentalbereich in der η-Ebene *mehrfach* zusammenhängend ist, während er es früher nicht war. *Infolgedessen gibt es jetzt auf der Riemannschen Fläche (p, n) gewisse geschlossene, sich selbst nicht schneidende Wege, die sich nicht auf einen einzelnen Punkt zusammenziehen lassen und bei deren Durchlaufung sich η trotzdem identisch reproduziert.* Als solche Wege finden wir zunächst diejenigen, die um einen einzelnen Einschnitt Q herumlaufen, dann ferner die Rückkehrschnitte R selbst, endlich diejenigen Kurven, welche das einzelne Schnittsystem (π, ν) umgeben. Von diesen Kurven kann übrigens noch eine weggelassen werden. Denn eine Durchlaufung aller der genannten Kurven hintereinander ist offenbar auf der Fläche mit der Umkreisung eines einzelnen Punktes äquivalent. *Diesem Verhalten entsprechend haben wir jetzt nur* $p + r + \sum_1^s (2\pi + \nu)$ *erzeugende Substitutionen und zwischen ihnen s Relationen vom Typus der früheren Fundamentalrelation.* Denn für die erzeugenden Substitutionen jeder Teilgruppe (π, ν) ergibt sich jetzt eine solche Beziehung, indem wir den zugehörigen Punkt O auf der Riemannschen Fläche umkreisen. Hierzu treten dann noch die weiteren Relationen, welche die Periodizität gewisser elliptischer Substitutionen aussagen.

Wir präzisieren zugleich den Unterschied, der zwischen den hier erzeugten η-Funktionen und den allgemeinsten von derselben Signatur, die eindeutige Umkehrung gestatten, bestehen wird. Dieser Unterschied wurde schon in § 15 angedeutet. Unsere neuen η-Funktionen haben Fundamentalbereiche von beliebig hohem Zusammenhange, aber es entstehen keine neuen Zusammenhänge, wenn wir den Fundamentalbereich vervielfältigen. Es kommt dies darauf hinaus, daß unter den Substitutionen der zugehörigen Gruppe keine anderen elliptisch oder parabolisch sind, als diejenigen, denen auf unserer Riemannschen Fläche eine Umkreisung des einzelnen Verzweigungspunktes entspricht, und daß überhaupt für sie keine anderen

Relationen statthaben als die soeben angegebenen. (Man zeigt dies ganz ähnlich, wie es betreffs der η-Funktion mit Hauptkreis in § 12 geschehen ist.) Für die allgemeinsten eindeutig umkehrbaren η-Funktionen müssen wir aber eine solche Möglichkeit offenhalten. Inzwischen gehen wir auf genauere Untersuchung in der hiermit angedeuteten Richtung an dieser Stelle nicht ein. [Es bleiben also beispielsweise die Gruppen mit zwei multiplikativen Perioden unberücksichtigt, für die man das einfachste Beispiel erhält, indem man eine hyperbolische Substitution $\eta' = \varrho \cdot \eta$ mit einer elliptischen $\eta' = e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot \eta$ kombiniert. Diese Beschränkung geschieht nicht wegen besonderer Schwierigkeiten, die sich sonst einstellen möchten, sondern nur, um die Fülle des Stoffes nicht übermäßig anwachsen zu lassen. In den „Automorphen Funktionen" werden im Prinzip alle hier ausgeschlossenen Möglichkeiten mitgenommen[67]).]

§ 18.

Konstantenzahl des jeweiligen Normalfalles.

Wir bestimmen zum Schlusse noch, wie groß die Anzahl der Konstanten ist, von denen die neue η-Funktion (p, n) im Normalfalle abhängt. Im genauen Anschlusse an die Entwicklungen des § 14 wollen wir dabei jede η-Funktion so oft zählen, als die zugehörige Riemannsche Fläche (p, n) in verschiedener Weise den Vorstellungen des § 16 entsprechend zerschnitten werden kann. *Wir betrachten also geradezu als Bestimmungsstücke der η-Funktion diejenigen Koeffizienten der zugehörigen erzeugenden Substitutionen, welche unabhängig bleiben, nachdem wir die zwischen den Substitutionen bestehenden Relationen identisch erfüllt haben.*

Für die einzelne Gruppe mit Hauptkreis fanden wir in § 14, unter (π, ν) die Signatur der Gruppe verstanden und übrigens unter der Voraussetzung, daß der Hauptkreis mit der Achse der reellen Zahlen koinzidiere, $6\pi + 2\nu - 3$ reelle Bestimmungsstücke. Diesen haben wir jetzt drei weitere hinzufügen, da wir dem einzelnen Hauptkreise zuvörderst eine beliebige Lage erteilen müssen. So kommen auf Rechnung der verschiedenen Gruppen mit Hauptkreis, die wir dem Ineinanderschiebungsprozesse unterworfen haben, $6\sum\pi + 2\sum\nu$ reelle Konstante. Die q elliptischen (oder parabolischen) Substitutionen, welche beim Ineinanderschiebungsprozesse beteiligt sind, bringen ihrerseits $2q$, die r loxodromischen Substitutionen $3r$ Konstante, aber [beidemal] *komplexe* Konstante mit sich. Da wir übrigens durchaus reelle Bestimmungsstücke zählen, werden wir

[67]) [Zusatz bei dem Wiederabdruck.]

beide zusammen als $(4q + 6r)$ in Rechnung stellen. Nun ist, dem vorigen Paragraphen zufolge, $(r + \sum\pi) = p$ und $(2q + \sum\nu) = n$. Daher haben wir im ganzen $6p + 2n$ Konstante. Aber von ihnen werden wir noch sechs Einheiten als unwesentlich in Abzug bringen, indem wir nämlich, wie in § 14, alle derartige η-Funktionen als identisch erachten, welche linear voneinander abhängen, jetzt aber die in $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ enthaltenen Konstanten als komplex betrachten müssen. Daher haben wir schließlich:

Die Anzahl der reellen Konstanten, von denen eine Normalgruppe (p, n) *abhängt, ist, unabhängig von den Typus, welchem die Gruppe angehören mag, gleich* $(6p + 2n - 6)$.

Diese Konstanten müssen natürlich wieder gewissen Ungleichungen genügen. Zu den Ungleichungen, welche wir oben bei der einzelnen Gruppe mit Hauptkreis andeuteten, treten hier weitere, von denen die einen aussagen, daß gewisse einzelne Substitutionen loxodromisch (oder hyperbolisch) sind, während sich die anderen auf die gegenseitige Stellung der Teilgruppen beziehen, die notwendig ist, damit der Prozeß der Ineinanderschiebung Platz greifen kann. Auf eine nähere Diskussion dieser Ungleichungen gehe ich aber hier ebensowenig ein, als es früher bei den analogen Fragen geschehen ist.

Abschnitt IV.

Das Fundamentaltheorem.

§ 1.

Formulierung desselben.

Das allgemeine Theorem, welches ich nunmehr aussprechen werde und das ich wegen seiner Wichtigkeit (die im folgenden Abschnitte noch ausführlicher erläutert werden soll) das *Fundamentaltheorem* nenne, wird durch die eben bestimmte Zahl reeller Konstanten: $(6p + 2n - 6)$ nahegelegt. Es ist dies genau dieselbe Anzahl reeller Konstanten, von der eine beliebige Riemannsche Fläche des Geschlechtes p mit n nach Willkür auf ihr angenommenen Punkten abhängt; man hat sich nur zu erinnern, daß die $3p - 3$ *Moduln*, welche man, der gewöhnlichen Sprechweise nach, der Fläche beilegt, allgemein zu reden, komplexe Größen sind[68]). Die Frage ist, auf welchen Riemannschen Flächen des Geschlechtes p mit n vorgegebenen Verzweigungspunkten von bestimmtem

[68]) Der leichteren Ausdrucksweise wegen schließe ich im Texte wieder die einfachsten Fälle $p = 0, 1$ aus.

Index Normalfunktionen[69]) η von einem gewissen Typus existieren mögen. Der Typus wird festgelegt, indem wir auf unserer Fläche gewisse Paare von Verzweigungspunkten durch Einschnitte Q verbinden, dann irgendwelche, die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnitte R hinzufügen und endlich so viele Schnittsysteme (π, ν) konstruieren, daß die zerschnittene Fläche durchaus schlicht auf ein Stück der Ebene übertragen werden kann. Funktionen η, welche linear voneinander abhängen, will ich der Kürze halber wieder als identisch betrachten. Dann besagt unser Fundamentaltheorem:

Daß auf jeder Riemannschen Fläche (p, n, l_k) *immer eine und nur eine Normalfunktion von beliebig vorgegebenem Typus existiert.*

Zwei Spezialfälle dieses Theorems mögen als besonders wichtig gleich hier hervorgehoben werden.

Der erste Fall sei derjenige, in welchem die Einschnitte Q und die Rückkehrschnitte R überhaupt in Wegfall kommen, die Schnittsysteme (π, ν) aber sich auf ein einziges reduzieren, welches mit (p, n) zu bezeichnen sein wird. Dann ist also das zugehörige η eine Funktion mit festem Hauptkreis. Zugleich können wir von der speziellen Art der Zerschneidung hier durchaus absehen. Denn eine Umänderung des Schnittsystems bedeutet im vorliegenden Falle nur, daß die erzeugenden Substitutionen jener Gruppe, die zu η gehört, in anderer und anderer Weise gewählt werden, nicht aber, daß η selbst modifiziert wird. Daher will ich ein solches η an dieser Stelle als *Hauptfunktion* bezeichnen, übrigens im folgenden durch einen Index I (η_I) kenntlich machen. Wir haben:

Auf jeder Riemannschen Fläche (p, n, l_k) *gibt es eine und nur eine Hauptfunktion.* [*Das Grenzkreistheorem.*]

Es ist dies derjenige Spezialfall des vorhin ausgesprochenen, allgemeinen Fundamentaltheorems, den ich in meiner zweiten Note über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich (Bd. 20 der Math. Annalen, datiert vom 27. März 1882 [= Abh. CII]) mitgeteilt habe. Allerdings wurden dort der Einfachheit halber alle Indizes l_k unendlich gesetzt und also nur von logarithmischen Verzweigungspunkten gesprochen. Daß die Indizes der Verzweigungspunkte irgendwelche sein können, hat Herr H. Poincaré in seiner bezüglichen Note vom 10. April 1882 (Comptes rendus, Bd. 92, S. 1038—1040 [= Oeuvres, Bd. 2, S. 41—43] hervorgehoben. In

[69]) Befindet sich η, wie ich früher sagte, im Normalfall, so nenne ich es hier kurz eine Normalfunktion. [Bei den „Normalfunktionen" werden die natürlichen Grenzen, soweit es keine einzelnen Punkte sind, von Kreislinien gebildet. An diesen kann man dann in einfacher Weise spiegeln und dadurch die Funktion auch jenseits der natürlichen Grenze naturgemäß definieren. Solcherweise beherrscht man, *mit Ausnahme isolierter Punkte*, das ganze η-Gebiet. Hierin scheint die besondere Stellung der Normalfunktionen begründet zu sein. K.]

dem besonderen Falle $p = 0$ hatte Herr H. Poincaré die Existenz der Hauptfunktion schon vor längerer Zeit erkannt, man sehe die aufeinanderfolgenden und immer allgemeiner werdenden Angaben vom 18. April und 8. August 1881 (Comptes rendus Bd. 92, S. 957, 93, S. 301—303 [= Oeuvres, Bd. 2, S. 11 bzw. S. 29—31]) sowie in Nr. 10 seines Annalenaufsatzes (Bd. 19, S. 561 [= Oeuvres, Bd. 2, S. 101], datiert vom 17. Dec. 1881).

Der zweite Spezialfall unseres Fundamentaltheorems, der hier zur Sprache gebracht werden soll, ist derjenige, in welchem die Teilgruppen mit Hauptkreis überhaupt in Wegfall kommen, also, auf der Riemannschen Fläche, nur die Einschnitte Q und im ganzen p Rückkehrschnitte R vorhanden sind. Unser Satz, [*das Rückkehrschnittheorem*], behauptet:

Daß es allemal eine auf der so zerschnittenen Fläche eindeutige, eindeutig umkehrbare η-Funktion gibt, welche bei Überschreitung der Q elliptische Substitutionen von resp. vorgegebener Periode erleidet.

Diese Art von η-Funktion soll weiterhin mit η_{II} bezeichnet werden. Auf ihre Existenz bezieht sich die erste der beiden von mir über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich veröffentlichten Noten (Math. Annalen, Bd. 19, datiert vom 12. Januar 1882 [= Abh. CI]). Ich habe dort nur, um die Sache etwas zu vereinfachen, jene Einschnitte Q, die wir auf der Riemannschen Fläche beliebig vorschreiben können, überhaupt weggelassen und also nur von irgend p auf der Fläche verlaufenden und dieselbe nicht zerstückenden Rückkehrschnitten gesprochen. [Es würde übrigens keine Schwierigkeit haben, das Fundamentaltheorem auch auf solche Gruppen auszudehnen, wie sie nach S. 697 bei uns ausgeschlossen bleiben[70]).]

§ 2.

Ansatz zum Beweise.

Um für das hiermit formulierte Fundamentaltheorem, wo nicht einen expliziten Beweis, so doch die allgemeinen Beweisgründe zu geben, verwende ich Vorstellungen der Mannigfaltigkeitslehre. Wir haben einerseits die Riemannschen Flächen (p, n, l_k), die wir uns nach bestimmtem Typus zerschnitten denken. Sie bilden eine erste Mannigfaltigkeit M_1. Die Gestalt der einzelnen Querschnitte, sowie die Lage jener Punkte O, von denen aus sich die einzelnen Schnitte eines Systemes (π, ν) erstrecken mögen, bringen wir bei dieser Auffassung nicht mit in Rechnung. Wohl aber zählen wir zwei Schnittsysteme auf derselben Fläche, auch wenn sie für die schließlich in Betracht kommende η-Funktion äquivalent sein mögen, allemal dann als unterschiedene Individua von M_1, wenn sie sich

[70]) [Zusatz bei dem Wiederabdruck.]

nicht durch stetige Verschiebung über die Fläche hin zur Deckung bringen lassen. — Wir haben andererseits die Gesamtheit der zu dem betreffenden Typus gehörigen Normalfunktionen η, deren einzelne wir in Übereinstimmung mit dem gerade Gesagten, und übrigens auch mit den früheren Festsetzungen, so oft zählen werden, als die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen in der früher geschilderten Weise aus erzeugenden Substitutionen zusammengesetzt werden kann. Die so gezählten η-Funktionen bilden eine zweite Mannigfaltigkeit, M_2.

Die im vorigen Abschnitte gegebene Konstantenzählung zeigt, daß M_1 und M_2 gleich viele Dimensionen haben (nämlich $6p - 6 + 2n$). Zudem sieht man mit leichter Überlegung, daß jede Mannigfaltigkeit, für sich genommen, ein einziges, zusammenhängendes Ganze bildet. Hinsichtlich der M_2 ist dies auf Grund der früheren Entwicklungen an sich klar. Denn wir können die einzelnen Teilgruppen, die, ineinandergeschoben, unsere Gruppe erzeugen, einzeln so variieren und übrigens in ihrer Stellung derart gegeneinander verschieben, daß eine beliebige andere Gruppe desselben Typus resultiert. Hinsichtlich der M_1 aber beweist man es (wenn man es nicht als bekannt ansehen will) durch folgende Betrachtung der Analysis situs. Es soll möglich sein, jede Fläche (p, n) mit irgend vorgegebener Zerschneidung in jede andere desselben Typus derart kontinuierlich überzuführen, daß die zweierlei Zerschneidungen zur Deckung kommen. Zu dem Zwecke ergänze man die auf den beiden Flächen vorgegebenen Schnittsysteme in der Weise durch weitere an korrespondierenden Stellen eingeschaltete Schnitte, daß zwei einfach zusammenhängende Flächen entstehen, deren Randkurven in genau derselben Reihenfolge aus gewissen, paarweise zusammengehörigen Stücken bestehen. Diese beiden Flächen bilde man jetzt je auf eine Kreisfläche konform ab. Die Peripherie des einzelnen Kreises wird dann in eine Anzahl Stücke zerlegt erscheinen, die paarweise durch irgendein analytisches Gesetz zusammengeordnet sind. Und zwar ist die Aufeinanderfolge der zusammengehörigen Stücke bei beiden Kreisen genau dieselbe. Wir denken uns jetzt, daß der einzelne Kreis (im Sinne der Entwicklungen des ersten, hier vorangehenden Abschnittes) vermöge der Zusammengehörigkeit seiner Peripheriestücke die betreffende Riemannsche Fläche (p, n) als Fundamentalbereich vertritt. Wir haben also nur zu zeigen, daß man, durch allmähliche Änderung der Konstanten, die eine Kreisfläche mitsamt der Zuordnung ihrer einzelnen Peripheriestücke in die andere Kreisfläche und deren Zuordnung überführen kann. Dies aber ist anschauungsmäßig evident.

Auf Grund des hiermit Gesagten stellt sich unsere Aufgabe jetzt folgendermaßen. Aus dem ersten Abschnitte des Früheren wissen wir, daß jedem Individuum in M_2 ein und nur ein Individuum in M_1 entspricht. *Es gilt zu zeigen, daß umgekehrt jedem Individuum von M_1 ein und nur ein Individuum in M_2 korrespondiert.*

Hierzu entwickle ich im folgenden Paragraphen zuvörderst einen Hilfssatz, welcher zeigt, daß niemals *mehrere* Individua in M_2 ein und demselben Individuum in M_1 entsprechen können.

Sodann bringt § 4 die allgemeinen Kontinuitätsgründe, aus denen ich glaube, unser Fundamentaltheorem erschließen zu können.

§ 3.
Hilfssatz, betreffend die Eindeutigkeit der Beziehung.

Ich werde jetzt, wie in Aussicht gestellt, zuvörderst nachweisen, *daß auf einer in bestimmter Weise zerschnittenen Fläche* (p, n, l_k) *immer nur eine zugehörige Normalfunktion* η *existieren kann.* Was die Formulierung dieser Behauptung angeht, so erinnere ich an die frühere Verabredung, derzufolge zwei η-Funktionen, welche linear voneinander abhängen, schlechthin als identisch bezeichnet werden sollen.

Zum Beweise denke man sich die vorgegebene und in bestimmter Weise zerschnittene Riemannsche Fläche auf die Ebenen beider Variablen η, η' (deren Existenz wir hier voraussetzen mögen) simultan abgebildet. Wir erhalten dann in den zweierlei Ebenen zwei erste Fundamentalbereiche, die ausnahmslos konform und zwar in der Weise aufeinander bezogen sind, daß der analytischen Fortsetzung des einen, die durch geeignete lineare Substitution des η bewirkt wird, genau diejenige analytische Fortsetzung des anderen entspricht, welche vermöge der korrespondierenden linearen Substitution des η' resultiert. Indem wir jetzt den Prozeß der analytischen Fortsetzung, so wie er durch die erzeugenden linearen Substitutionen vermittelt wird, beiderseits ins Unbegrenzte verfolgen, werden immer ausgedehntere Teile der Ebene η auf die entsprechenden Teile der Ebene η' durchaus konform bezogen. Es kann dabei niemals eine Vieldeutigkeit entstehen. Denn da η und η' nach Voraussetzung demselben Typus angehören, so bestehen zwischen den erzeugenden Substitutionen der η-Gruppe und zwischen den entsprechenden Substitutionen der η'-Gruppe beziehentlich genau dieselben Relationen; es finden sich also auch in der η-Ebene zwischen den verschiedenen Fundamentalbereichen dieselben Zusammenhänge wie in der η'-Ebene, und umgekehrt.

Nun bedeckt die Gesamtheit der in der einzelnen Ebene gelegenen Fundamentalbereiche ein gewisses Gebiet, welches einmal von unendlich vielen diskreten Punkten, dann aber auch von unendlich vielen Kreislinien begrenzt sein kann. Ich sage jetzt, *daß die konforme Abbildung der beiden durch die unendlich vielen Fundamentalbereiche überdeckten Gebiete keinerlei unstetige Unterbrechung erleidet, wenn man in beide Gebiete jene isolierten Unstetigkeitspunkte und die genannten Kreisperipherien mit aufnimmt,* — d. h. also, wenn man die beiden Gebiete nicht bloß mit *Ausschluß* der Begrenzungen (wie es zunächst gemeint ist), sondern mit *Einschluß* derselben in Betracht zieht. In der Tat scheint dies aus bekannten Sätzen über die Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ zu folgen, wenn man noch hinzunimmt (was durch nichteuklidische Betrachtungen bewiesen werden kann), daß die Gebiete, welche in der η- und der η'-Ebene durch die sukzessiven Fundamentalbereiche überdeckt werden, *gleichmäßig* ihren Begrenzungen zustreben.

Man nehme nun einen Augenblick die beiden Funktionen η_{I} und η_{II} (die wir soeben, in § 1 des gegenwärtigen Abschnittes, auszeichneten) vorweg. *Für beide ist der in diesem Paragraphen zu erbringende Nachweis mit dem nun Gesagten bereits erledigt.* Bei η_{I} nämlich haben wir es überhaupt nicht mit isolierten Grenzpunkten, sondern nur mit *einem* Hauptkreise zu tun. Daher ist eine volle Kreisfläche der η-Ebene auf eine ebensolche der η'-Ebene ausnahmslos konform abgebildet, und dies geschieht, wie man weiß, notwendig durch *lineare* Beziehung. — Bei η_{II} hinwider haben wir nur isolierte Grenzpunkte und keinerlei Hauptkreis. Daher ist das Gebiet, welches von der Gesamtheit der Fundamentalbereiche unter Hinzunahme der Grenzen überdeckt wird, mit der unbegrenzten Ebene identisch. Die vollen Ebenen η und η' sind daher ausnahmslos konform aufeinander bezogen, und wir haben wieder zwischen η und η' auf Grund bekannter Sätze eine notwendig *lineare* Beziehung. Das heißt aber beidemal mit Rücksicht auf die oben getroffene Verabredung, *daß η und η' im wesentlichen identisch sind*, was zu beweisen war.

In den allgemeineren Fällen, wo unendlich viele Hauptkreise an der Begrenzung des Gebietes, sowohl der η- als der η'-Ebene, beteiligt sind, müssen wir noch einen Schritt weiter gehen. *Wir gebrauchen nämlich das Prinzip der Symmetrie in seiner gewöhnlichen, auf eine reelle Kreislinie bezüglichen Form* (siehe § 4 des Abschnittes II). Indem wir jedes der gesamten Gebiete an jedem seiner Begrenzungskreise spiegeln, wissen wir vermöge des erwähnten Prinzips, daß die so erhaltenen Spiegelbilder infolge der ursprünglichen konformen Abbildung einander ebenfalls entsprechen. Jetzt fahren wir mit dem Spiegelungsprozesse, indem wir jeden neu erhaltenen Begrenzungskreis selbst wieder als Inversionskreis benutzen, ins Unendliche fort. So wird allmählich die ganze η-Ebene, wie auch die η'-Ebene, mit Ausnahme wieder von unendlich vielen zerstreut liegenden Punkten, welche die natürliche Grenze bilden, durch die unendlich vielen Spiegelbilder überdeckt. Diese Grenzpunkte nehmen wir schließlich, so, wie sie einander entsprechend in der η- und der η'-Ebene gewonnen werden, in unsere konforme Abbildung mit auf. Hierdurch erleidet, genau wie oben bei dem entsprechenden Prozesse, die konforme Abbildung keinerlei Unterbrechung der Stetigkeit. Daher sind schließlich die Ebenen η und η' ausnahmslos konform aufeinander bezogen, *η und η' hängen also notwendig linear voneinander ab*, und der Beweis, den wir in Aussicht stellten, ist also auch im allgemeinen Falle erbracht.

§ 4.
Kontinuitätsbeweis.

Um weiter vorwärts zu gehen, bedarf ich einer Prämisse, die ich, obgleich sie mir unzweifelhaft richtig scheint, hier nicht in Kürze explizite erledigen kann. Es handelt sich darum, daß die Beziehung zwischen beiden Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 eine *analytische* ist. Ich zweifle nicht, daß man eine solche Behauptung durch Weiterentwicklung jener Existenzbeweise, über welche im ersten Abschnitte Bericht erstattet wurde, also genau im Sinne der Riemannschen Theorie, wird erledigen können. Übrigens bliebe, wenn ein solches Verfahren auf Schwierigkeiten stoßen sollte, immer noch der Rekurs auf die *Formeln*, welche Herr H. Poincaré (wenn ich mich so ausdrücken darf) für die Beziehung zwischen den Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 aufgestellt hat.

Auf Grund dieser Prämisse kommen für die Beziehung der beiden Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 die gewöhnlichen Kontinuitätsvorstellungen zur vollen Geltung. Ich erinnere in diesem Betracht insbesondere an zwei Sätze. Zunächst daran, daß ein System von m analytischen Funktionen von ebensoviel Variablen in der Nähe jeder Stelle, für welche die Funktionaldeterminante weder verschwindet, noch unendlich wird, eindeutig umgekehrt werden kann, — daß aber auch rückwärts, wenn die Umkehr in der Nähe einer Stelle nicht vieldeutig wird, das reguläre Verhalten der Funktionaldeterminante folgt. Dann aber an den Weierstrassischen Satz, daß eine analytische Funktion die obere Grenze derjenigen Werte, deren sie in einem [abgeschlossenen[71])] Bereiche fähig ist, allemal auch wirklich erreicht.

Unsere Aufgabe ist es nun, zu zeigen, daß innerhalb M_1 keine Gebietsteile (sozusagen „Inseln") vorhanden sein können, in welche man

[71]) [Ich füge dies Wort hinzu, um mich mehr dem Sprachgebrauch der heutigen Mathematiker anzupassen. K.]

durch Fortschreiten in M_2 nicht hineingelangte. Hier bietet sich der Vorstellung zunächst eine doppelte Möglichkeit: Es kann sein, daß die Randpunkte eines solchen Gebietes (die Uferpunkte der Insel) noch zu dem zugänglichen Gebiete gehören, es kann aber auch sein, daß man durch Fortschreiten in M_2 überhaupt niemals die Randpunkte erreicht. Aber beides erweist sich vermöge der voraufgeschickten zwei Sätze als unmöglich.

Wäre nämlich das Ufer der Insel zugänglich, so würde dem Uferpunkte in M_2 eine Stelle entsprechen, deren *volle* Umgebung sich nur auf einen *Teil* der Umgebung des Uferpunktes abbilden könnte. Das aber widerspricht dem regulären Verhalten der bezüglichen Funktionaldeterminante, welches seinerseits notwendig ist, weil dem Hilfssatze des vorigen Paragraphen zufolge keinem Punkte von M_1 mehrere Punkte von M_2 entsprechen können.

Unzugänglich hinwiederum kann das Ufer unserer Insel auch nicht sein. Denn das hieße geradezu, daß unser Funktionensystem eine gewisse obere Grenze niemals erreichen könne, und widerspräche also dem Weierstrassischen Satze.

Daher kann von Inseln in M_1, die unzugänglich wären, überhaupt nicht die Rede sein; jedem Punkte in M_1 entspricht ein Punkt in M_2, und unser Fundamentaltheorem ist erwiesen.

Ich brauche kaum auf die Analogie aufmerksam zu machen, welche zwischen dem hiermit geschilderten Beweisgange und einem bekannten Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra statthat[72]).

Abschnitt V.
Vergleich mit den elliptischen Funktionen.

Ein Vergleich der neuen η-Funktionen mit den elliptischen Funktionen liegt von vornherein nahe, und er ist wohl bei allen Bearbeitern, die sich diesen Untersuchungen zugewandt haben, das hodegetische Prinzip gewesen. Wir können einem solchen Vergleiche hier eine um so größere Präzision erteilen, als unser Fundamentaltheorem die in jedem Falle zur Verfügung stehenden Konstanten übersehen läßt. Ich will mich bei der folgenden Darlegung auf jene beiden Funktionsklassen η_{I} und η_{II}, die in § 1 des vorigen Abschnitts bereits ausgezeichnet wurden, beschränken.

[72]) [Die Betrachtungsweise des Textes, welche vielfache Beanstandung gefunden hat, wird unten auf S. 731 ff. noch näher erläutert. Daß sich der Kontinuitätsbeweis, wie er in diesem Paragraphen skizziert ist, in einer, alle Fälle des Fundamentaltheorems umfassenden Weise streng durchführen läßt, wird zur Zeit wohl von keiner Seite mehr bestritten. K.]

Inwieweit die betreffenden Aussagen auch noch für die allgemeineren von uns in Betracht gezogenen Funktionsklassen gültig sind, wird jeder selbst mit Leichtigkeit entscheiden.

Die Theorie der elliptischen Funktionen betrachtet als independente Variable zunächst das eine auf der Riemannschen Fläche vom Geschlechte 1 existierende überall endliche Integral, welches wir mit u bezeichnen und übrigens so normieren wollen, daß es die Perioden 1 und $\frac{iK'}{K}$ besitzt. Darüber hinaus aber ist es die Exponentialfunktion $v = e^{2i\pi u}$, welche bei vielen Entwicklungen zugrunde gelegt wird. *Ich sage nun zunächst, daß es eben diese beiden Funktionen sind, welche, im Falle* $p = 1$, *jenen* η_{I} *und* η_{II} *entsprechen, die auf der Riemannschen Fläche überhaupt keine Verzweigungspunkte besitzen.*

Was den ersten Teil dieser Behauptung angeht, so ist dies so zu verstehen, daß der Hauptkreis der Ebene η_{I} in der Ebene u durch einen einzelnen Punkt, den Unendlichkeitspunkt, ersetzt ist. In der Tat verwandelt sich bei dieser Annahme jener kanonische Fundamentalbereich, den wir in § 10 des dritten Abschnittes für die η_{I}-Funktion konstruierten, in das Parallelogramm der doppeltperiodischen Funktionen. Die erwähnte Umänderung wird dadurch notwendig, daß nun von den erzeugenden Substitutionen der zu η_{I} gehörigen Gruppe nur zwei, S_1 und T_1 existieren, für diese aber die Fundamentalrelation in folgender Form geschrieben werden kann:

$$S_1 T_1 = T_1 S_1,$$

so daß also S_1 und T_1 *vertauschbar* sein müssen.

Der andere auf v bezügliche Teil unserer Behauptung ist aus der konformen Abbildung unmittelbar deutlich. Denn beim Übergange zur v-Ebene verwandelt sich das Periodenparallelogramm der Ebene u (und also das Bild der Riemannschen Fläche $p = 1$) in einen ringförmigen, um den Koordinatenanfangspunkt einfach herumgelegten Bereich, dessen Begrenzungskurven, der Periode $\frac{iK'}{K}$ von u entsprechend, durch die hyperbolische oder loxodromische Substitution:

$$v' = e^{-\frac{2K'}{K}\pi} \cdot v$$

zusammengeordnet sind.

Als nächsten und zuvörderst wichtigsten Zweck der elliptischen Funktionen darf man nun wohl bezeichnen, daß sie gestatten, alle diejenigen komplexen Funktionen des Ortes, welche auf der Riemannschen Fläche $p = 1$ *unverzweigt* sind, als *eindeutige* Funktionen der Größe u darzustellen. Ich erinnere in dieser Beziehung zunächst natürlich an jene algebraischen Funktionen des Ortes, deren irgend zwei, w und z, durch

eine algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$ vom Geschlechte 1 verbunden sind. Ich erinnere ferner an diejenigen Integrale $\int R(w, z) \cdot dz$, welche keine logarithmischen Unstetigkeitspunkte haben (Integrale 2. Gattung). Ich erinnere endlich aber an die modernen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Koeffizienten, wie sich dieselben an Herrn Hermites Behandlungsweise der Laméschen Gleichung anschließen. — Was die Größe v betrifft, so ergeben sich mit ihrer Hilfe ähnliche Darstellungen, nur in beschränkterem Umfange. Auf einem bestimmten auf der Riemannschen Fläche gelegenen Wege reproduziert sich v identisch: es ist derjenige, bei dessen Durchlaufen u die Periode 1 erlangt. Ein Gleiches müssen wir von allen solchen komplexen Funktionen des Ortes verlangen, die in v eindeutig sein sollen. Es ist dies aber auch die einzige Bedingung, welche zu der anderen, daß die Funktionen durchaus unverzweigt sein sollen, hinzutritt.

Genau entsprechende Behauptungen werden nun offenbar bei einer Fläche eines beliebigen p *hinsichtlich unserer* η_{I}, η_{II} *richtig sein.*

Wir dürfen diese Behauptungen sogar noch generalisieren, indem wir η_{I} und η_{II}, statt sie unverzweigt zu nehmen, [von vornherein] mit irgendwelchen vorgegebenen Verzweigungspunkten ausstatten. Nehmen wir diese Verzweigungspunkte, um gleich den äußersten Fall zu betrachten, sämtlich von unendlich hohem Index, so werden alle solche Funktionen auf unserer Riemannschen Fläche, welche nur an den vorgegebenen Stellen verzweigt sind, in η_{I} eindeutig sein. Sollen sie es auch in η_{II} sein, so kommt die Bedingung hinzu, daß sie sich bei Durchlaufung der Rückkehrschnitte $R_1, R_2, \ldots, R_p$, sowie bei Umkreisung der Einschnitte $Q_1, Q_2, \ldots$, die für das einzelne η_{II} charakteristisch sind, identisch reproduzieren müssen.

Wir haben damit denjenigen Gesichtspunkt, den Herr H. Poincaré bei seinen Untersuchungen über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich bisher in erster Linie verfolgt hat. Insbesondere hat er sein Interesse solchen linearen Differentialgleichungen zugewandt, deren Lösungen in dem jeweiligen η eindeutig werden, und so den unbestimmten Ideen, welche Herr Fuchs bei Gelegenheit in dieser Richtung entwickelt hat[73]), das erforderliche Substrat gegeben. Hierzu eine kleine Bemerkung: Die genannten Entwicklungen stehen bei Herrn H. Poincaré so sehr im Vordergrunde, daß es fast aussieht, als bestände das Wesen der neuen Transzendenten in ihrer Bedeutung für die linearen Differentialgleichungen [d. h., um die moderne Ausdrucksweise zu gebrauchen, für die „Uniformisierung" ihrer Lösungen]. Dem muß hier, so wichtig

[73]) [Vgl. die Vorbemerkungen *Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen*, S. 580 ff.]

diese Anwendung ohne Zweifel ist, und so sehr sie dem augenblicklichen Interesse des mathematischen Publikums entgegenkommt, doch widersprochen werden. Die Lösungen linearer Differentialgleichungen sind unter den übrigen Funktionen, welche in η eindeutig werden, immer nur ein einzelnes Beispiel.

Doch kehren wir zu den elliptischen Funktionen zurück! Ich will hier an zweiter Stelle diejenigen Entwicklungen und Betrachtungen hervorheben, welche man unter dem Namen: *Theorie der elliptischen Modulfunktionen* zusammenzufassen pflegt. Es handelt sich bei ihnen darum, die *Konstanten*, welche in den algebraischen Gleichungen vom Geschlechte Eins auftreten, oder auch die Perioden der Integrale 2. Gattung usw. als Funktionen von $\frac{iK'}{K}$ (dem Periodenverhältnisse des Integrals 1. Gattung) oder auch von $e^{-\frac{K'}{K}\cdot\pi}$ (dem Jacobischen q) aufzufassen. Der Gewinn ist zumal wieder der, daß sämtliche Ausdrücke, welche die Theorie zu betrachten hat, in den neuen Variablen, bei zweckmäßiger Einführung derselben, eindeutig werden. Dabei wolle man beachten, *daß die genannten transzendenten Moduln nichts anderes sind als die Koeffizienten derjenigen erzeugenden Substitutionen, welche bei u und v in Betracht kommen*[74]). Hiermit aber bietet sich von selbst die Verallgemeinerung. Die Koeffizienten der erzeugenden Substitutionen der zur jeweiligen η-Funktion gehörigen Gruppe haben wir schon oben als Bestimmungsstücke der η-Funktion betrachtet. *Wir werden dieselben jetzt geradezu als Moduln der Riemannschen Fläche (p, n, l_k) bezeichnen.* Also, wenn wir $n = 0$ nehmen und uns auf die Funktionen η_{I} und η_{II} beschränken, so haben wir einmal $(6p-6)$ reelle, das andere Mal $(3p-3)$ komplexe Größen als Moduln der allgemeinen Riemannschen Fläche vom Geschlechte p. Zu jedem Modulsysteme gehört nur eine Fläche, und die verschiedenen Modulsysteme, welche dieselbe Fläche liefern, setzen sich aus einem beliebigen derselben in charakteristisch einfacher Weise zusammen. *Hiermit haben wir aber nicht nur einen Ausblick auf eine ausgedehnte Theorie neuer Modulfunktionen, sondern es wird überhaupt zum ersten Male, wie es scheint, die Lehre von den Moduln Riemannscher Flächen in einer alle Fälle umfassenden Weise wirklich zugänglich*[75]).

[74]) Genau genommen ist nicht q sondern q^2 ein solcher Koeffizient; in der Tat ist wohl auch q^2 in der Theorie der elliptischen Funktionen als die zunächst wichtige Größe zu betrachten. [Aus diesem Grunde ist in den „Modulfunktionen" für q^2 ein eigener Buchstabe, r, eingeführt.]

[75]) [Fricke spricht dementsprechend geradezu von „automorphen Modulfunktionen", zuerst in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1896, S. 91 ff. Bei Veränderungen des Querschnittsystems erleiden dieselben birationale Transformationen. K.]

Und nun zuletzt noch ein dritter Vergleichspunkt, bei dem es sich allerdings mehr um eine Analogie als um eine Übereinstimmung handelt.

Die Gruppe der doppeltperiodischen Funktionen

$$u' = u + m\cdot 1 + n\cdot\frac{iK'}{K}$$

hat eine besonders einfache Struktur. Infolgedessen ist sie mit allen Substitutionen der Form $u' = \pm u + C$ vertauschbar; überdies sind alle in ihr enthaltenen Untergruppen von endlichem Index mit ihr selbst ähnlich. Funktionentheoretisch führt der erstere Umstand zum *Additionstheoreme* oder zu dem Satze, daß jede Riemannsche Fläche $p = 1$ unendlich viele eindeutige Transformationen in sich selbst besitzt, welche sich auf zwei Scharen verteilen, — der zweite aber zur Lehre von der *Transformation*.

In ersterer Hinsicht ist die Analogie bei den Flächen von höherem p und den zugehörigen η-Funktionen nur eine eventuelle. Ich betrachte zunächst wieder das überall unverzweigte η_{I}. Dann kann man folgendermaßen sagen: Die Gruppe der zu η_{I} gehörigen linearen Substitutionen ist im allgemeinen keineswegs in einer umfassenderen Gruppe mit brauchbarer Gebietseinteilung als ausgezeichnete Untergruppe enthalten. Ebensowenig gestattet die zugehörige Riemannsche Fläche im allgemeinen eindeutige Transformationen in sich selbst. *Wenn aber eines von beiden statthat, so tritt auch notwendig das andere ein*[76]). — Man beweist dies durch Betrachtungen, die den in § 3 des vorigen Abschnittes gegebenen genau parallel laufen. Übrigens kann man bei diesem Satze auch *inverse* Transformationen in Betracht ziehen. Wegen eines Beispiels, das alle diese Verhältnisse erläutert, siehe die „Hauptfigur" auf S. 126 dieses Bandes, bzw. die darauf bezüglichen Bemerkungen in Nr. CII. — Sollen ähnliche Sätze für die überall unverzweigte η_{II}-Funktion aufgestellt werden, so dürfen natürlich nur solche eindeutige Transformationen der Fläche in sich in Betracht gezogen werden, bei denen die Definition des einzelnen η_{II} erhalten bleibt, bei denen also jene Rückkehrschnitte R_1, $R_2, \ldots, R_p$, die zur Festlegung des η_{II} dienen, in äquivalente Rückkehrschnitte übergehen. Ich habe bereits im 19. Bande der Math. Annalen (1881/82) [= Abh. CI] ausgeführt, daß mit Rücksicht auf solche Sätze die überall unverzweigte η_{II}-Funktion besonders geeignet scheint, die Gesamtheit der *symmetrischen* Flächen eines bestimmten p zu definieren.

Der *Transformationstheorie* aber stellen sich jetzt diejenigen Betrachtungen zur Seite, welche aus der zu der η-Funktion gehörigen Gruppe

[76]) Die umfassende Gruppe hat dann notwendig den Hauptkreis der η_{I}-Funktion auch ihrerseits zum Hauptkreise. Es folgt dies schon aus dem Umstande, daß nur *ein* solcher Kreis bei der η_{I}-Funktion vorhanden ist.

linearer Substitutionen irgendeine Untergruppe herausheben und nun solche eindeutige Funktionen von η konstruieren, welche bei den Substitutionen der Untergruppe ungeändert bleiben. Ich will hier nur dasjenige η_I ins Auge fassen, welches an irgend vorgegebenen Stellen logarithmisch verzweigt ist. Dann heißt das Gesagte nichts anderes, als daß wir über einer gegebenen Riemannschen Fläche (p, n) *irgendeine* andere Fläche, welche nur an den gegebenen Punkten verzweigt und übrigens irgendwie verschlungen ist, mit beliebig vielen Blättern ausbreiten und nun die algebraischen Irrationalitäten bestimmen, welche zu dieser neuen Fläche gehören. Wir werden also zu einem Probleme geführt, das in der Riemannschen Theorie von je eine prinzipielle Bedeutung hatte, und erkennen zugleich, daß man dasselbe jedesmal durch Vermittlung einer geeigneten η-Funktion lösen kann.

Leipzig, den 2. Oktober 1882.

CIV. Über den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereichs.

[Math. Annalen Bd. 40 (1891/92).]

Mit den folgenden Erläuterungen knüpfe ich an die Entwicklungen an, welche ich in Bd. 21 der Math. Annalen (Herbst 1882) gab: *Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie* [= der vorstehenden Abh. CIII] und hoffe über gewisse Punkte, die dort nicht ausreichend behandelt sind, Klarheit zu schaffen. Ich schließe daran einige Andeutungen über eine allgemeine geometrische Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die ich bei Gelegenheit auszuführen hoffe.

§ 1.

[Umgrenzung des Begriffes.]

Die Grundanschauung, von der ich [in Abh. CIII] ausging, ist die, daß zur Definition eines algebraischen Gebildes nicht nur eine geschlossene Riemannsche Fläche dienen kann, welche frei im Raume gegeben oder mehrblättrig über eine gegebene Fläche ausgebreitet ist, sondern ebensowohl ein offenes Flächenstück, sofern dessen Ränder durch irgendwelches Gesetz paarweise zusammengeordnet sind. Ein solches Flächenstück nannte ich einen *Fundamentalbereich*.

Natürlich wird man diese allgemeine Formulierung, ehe sie anwendbar wird, noch durch bestimmte Voraussetzungen über die analytische Natur des Flächenstücks usw. näher zu umgrenzen haben. Denken wir uns, wie im folgenden ausschließlich vorausgesetzt wird, unseren Bereich über eine $(x+iy)$-Kugel ausgebreitet, so ist ein Teil dieser Voraussetzungen von selbst erfüllt; wir werden dann aber jedenfalls zufügen wollen (da es sich um ein Äquivalent der gewöhnlichen Riemannschen Fläche handeln soll, die mit einer endlichen Zahl von Blättern über die Kugel ausgebreitet ist, und singuläre Vorkommnisse, die im weiteren Verlaufe der Theorie in Betracht kommen mögen, zunächst ausgeschlossen bleiben können), daß der Bereich keinen Teil der Kugel unendlichfach überdecken soll, und daß er durch eine endliche Zahl von [regulären]

Kurven begrenzt sein soll, von denen je zwei durch eine *analytische* Funktion zusammengeordnet sind.

Aber das ist nicht alles, und eben der nun zu berührende Umstand ist in Abh. CIII, trotzdem er der dort gegebenen Darstellung implizite zugrunde liegt, nicht genügend hervorgehoben worden. Es ist kaum nötig, daß ich erkläre, was ich unter *der Umgebung* eines dem Bereiche angehörigen Punktes verstehe, insbesondere unter einem *endlichen, den Punkt einschließenden Stücke* der Umgebung. Die Forderung, welche befriedigt sein muß, damit unser Bereich als Fundamentalbereich brauchbar sei, und deren Erfülltsein auch ausreicht, um die Brauchbarkeit sicherzustellen, ist dann die:

Es soll möglich sein, um jeden Punkt des Bereiches herum ein endliches, den Punkt einschließendes Stück der Umgebung so abzugrenzen, daß sich dasselbe durch Vermittlung einer analytischen Funktion auf die Fläche eines Kreises übertragen läßt.

Zunächst ist ersichtlich, daß diese Forderung für die Brauchbarkeit des Bereiches notwendig ist. In der Tat: ein brauchbarer Bereich muß sich Punkt für Punkt durch eine analytische Funktion auf eine geschlossene, über der $(x+iy)$-Kugel mit einer endlichen Blätterzahl ausgebreitete Riemannsche Fläche übertragen lassen — das ist die Definition der Brauchbarkeit —, und für jeden Punkt einer solchen Riemannschen Fläche gilt die genannte Forderung von selbst.

Aber nicht minder deutlich ist, daß die Forderung ausreicht. Ist sie nämlich erfüllt, so kann man unseren Bereich mit einer endlichen Zahl von Teilbereichen, deren jeder analytisch auf eine Kreisfläche bezogen werden kann, derart überdecken, daß jeder Punkt der Fläche in das Innere wenigstens eines Teilbereichs hineinfällt. Hierauf nun kann man die Existenz analytischer Funktionen, welche zu unserem Bereiche gehören, durch genau dasselbe kombinatorische Verfahren dartun, durch welches man bei einer gewöhnlichen Riemannschen Fläche die Existenzbeweise erbringt, indem man die Fläche durch eine endliche Zahl von Kreisscheiben in geeigneter Weise überdeckt. (Was diesen letzteren Beweis angeht, so darf ich hier beiläufig auf die Darstellung verweisen, welche Herr **Fricke** davon im ersten Bande unserer „Modulfunktionen", S. 508ff. gegeben hat)[1]).

§ 2.

[Anwendung insbesondere auf linear automorphe Funktionen.]

Wir betrachten nun insbesondere, wie es in Abh. CIII geschieht, solche über der $(x+iy)$-Kugel ausgebreitete, von Kreisen begrenzte Bereiche,

[1]) [Vgl. auch die gerade unserem Falle angepaßte Darstellung bei E. **Ritter** in den Math. Annalen, Bd. 41 (1892/93) oder auch diejenige im ersten Abschnitt des zweiten Bandes der „Automorphen Funktionen".]

deren Kanten durch *lineare* Substitutionen von $(x+iy)$ zusammengeordnet sind, und die also, wenn brauchbar, in allgemeinster Weise *linear-automorphe* Funktionen definieren, wie eben dort auseinandergesetzt ist. Die einzigen Punkte dieser Bereiche, welche im Sinne der gerade gegebenen Regel näher in Betracht gezogen werden müssen, sind deren *Ecken*. Durch sogenannte erlaubte Abänderung[2]) kann man dem Bereiche sofort jeweils eine solche Gestalt geben, daß die Umgebung der einzelnen Ecke, die wir gerade betrachten wollen, nicht weiter zerstückelt ist, sondern als ein zusammenhängender, von zwei Kreislinien begrenzter Sektor erscheint; die beiden Begrenzungskanten dieses Sektors werden dabei durch eine lineare Substitution von $(x+iy)$ zusammengeordnet sein, für welche die Ecke einen Fixpunkt abgibt. Je nach der Art dieser Substitution werden wir *elliptische, parabolische, hyperbolische, loxodromische* Ecken unterscheiden können. Nun gelingt es sofort, ein endliches, die Ecke einschließendes Stück einer elliptischen, parabolischen, loxodromischen[3]) Ecke durch eine analytische Funktion Punkt für Punkt auf eine Kreisfläche zu übertragen. Dagegen zeigen sich bei einer hyperbolischen Ecke Schwierigkeiten, und wenn man näher zusieht, so erkennt man überhaupt die *Unmöglichkeit*, im Falle einer hyperbolischen Ecke die Übertragung zu bewerkstelligen. Daher entsteht der Satz:

daß unser Bereich dann und nur dann als Fundamentalbereich brauchbar ist, wenn derselbe keine hyperbolischen [und keine loxodromischen] Ecken aufweist.

Was den in Rede stehenden Unmöglichkeitsbeweis betrifft, so folgt derselbe, wie mir vor längerer Zeit (um 1883 herum) Herr **Schwarz** bemerkte, mit Leichtigkeit aus den über das Verhalten analytischer Funktionen seit lange bekannten Fundamentalsätzen. Nehmen wir als einfachstes Beispiel eines Bereiches mit hyperbolischen Ecken einen den Koordinatenanfangspunkt O nicht enthaltenden Parallelstreif, dessen beide Begrenzungslinien durch die Ähnlichkeitstransformation $z' = kz$ aufeinander bezogen sein sollen, wie die nebenstehende Figur versinnlicht; ich denke mir dabei $k < 1$, so daß beispielsweise aus dem Punkte A der Figur der Punkt A' durch die Ähnlichkeitstransformation hervorgeht. Unter der Voraussetzung, daß dieser Parallelstreif als Fundamentalbereich brauchbar sei, möge $f(z)$ irgendwelche auf ihm eindeutige algebraische Funktion bezeichnen[4]), welche in der einen

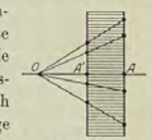


Fig. 1.

[2]) Vgl. auch hier „Modulfunktionen", Bd. 1, S. 191, 313.

[3]) [Dies ist ein Irrtum; bei loxodromischen Ecken ist die Übertragung auf eine Kreisfläche genau so unmöglich, wie bei hyperbolischen. K.]

[4]) D. h. eine Funktion ohne wesentlich singuläre Punkte („Modulfunktionen", Bd. 1, S. 499).

Ecke des Bereichs (die in der Figur nach oben hin unendlich weit liegt) den Wert f_1, in der anderen (nach unten hin unendlich weit liegenden) Ecke den Wert f_2 annehmen möge. Jetzt vervielfältige man unseren Bereich durch immer wiederholte Anwendung der Ähnlichkeitstransformation $z' = kz$. Dabei rückt derselbe, indem er immer schmäler wird, immer mehr nach links auf O hin, und weist schließlich als Grenzlage *die vertikale, durch O gehende Gerade auf*. Aber von den Punkten dieser Geraden entsprechen alle diejenigen, die eine positive Ordinate haben, der Ecke $+\infty$ unseres Streifens, alle diejenigen, die eine negative Ordinate haben, der Ecke $-\infty$; alle übrigen Punkte des ursprünglichen Streifens werden vermöge der wiederholten Transformation in den Punkt O zusammengedrängt. Nach dem *Prinzip der analytischen Fortsetzung* [vgl. Abh. CIII, S. 653ff.] wird daher $f(z)$ längs der positiven Hälfte unserer vertikalen Geraden der Konstanten f_1, längs der negativen Hälfte der Konstanten f_2 gleich werden, in O aber völlig unbestimmt werden. Ein solches Verhalten ist aber bei einer *analytischen* Funktion $f(z)$ unmöglich.

§ 3.

[Von den Irrtümern, zu denen die hyperbolischen Zipfel Anlaß gegeben haben.]

Der hiermit gefundene Satz ist für die Theorie der automorphen Funktionen selbstverständlich fundamental, und daß wir ihn zu Anfang nicht gekannt haben, ist für H. Poincarés und meine bezüglichen Arbeiten verschiedentlich die Quelle von Unrichtigkeiten und Unklarheiten geworden. Von dem Wunsche ausgehend, letztere ein für allemal zu beseitigen, will ich hierüber folgende ausführliche Angaben machen[5]):

1. Als ich im Sommer 1881 zuerst die allgemeine Idee eines „Fundamentalbereichs" und deren Bedeutung für die Theorie der automorphen Funktionen erfaßte, schrieb ich darüber Herrn H. Poincaré, ohne irgendwelche Einzelheiten hinzuzufügen[6]). Herr H. Poincaré bemerkte sofort die Sonderstellung der hyperbolischen Ecken und deduzierte allgemein, was wir soeben im einfachsten Beispiele sahen, daß automorphe Funktionen, deren Fundamentalbereiche hyperbolische Ecken besitzen, natürliche Grenzen aufweisen müssen, die aus einzelnen Kreisbogenstücken bestehen, längs deren die Funktion jeweils konstant ist. Statt aber hieraus auf die Unzulässigkeit der hyperbolischen Ecken zu schließen, glaubte er, eine neue Art automorpher Funktionen gefunden zu haben (Comptes rendus Bd. 93,

[5]) [Nörlund hat in dem von ihm 1916 herausgegebenen zweiten Bande der Oeuvres de H. Poincaré gleichfalls eine Erörterung der bei Poincaré ursprünglich aufgetretenen Unrichtigkeiten gegeben. Vgl. daselbst die Noten 25 und 30 auf S. 621—623.]

[6]) [Siehe oben meinen Brief 7 vom 2. Juli 1881, S. 598, Punkt 6.]

S. 582 [vom 17. Oktober 1881], Math. Annalen Bd. 19, S. 558, 560 [datiert vom 17. Dezember 1881. — Abgedruckt in Bd. 2 der Oeuvres, S. 33 bezw. S. 96, 98, 100.]) Dieser Irrtum konnte um so leichter entstehen, weil die unendlichen Reihen, deren sich H. Poincaré zur Darstellung der automorphen Funktionen bedient, beim Auftreten hyperbolischer Ecken im Ausgangsbereiche gerade so konvergieren wie sonst: ein Paradoxon, welches dadurch seine Auflösung findet, daß für die dargestellten Funktionen die Ausgangsbereiche (welche durch die Zusammenordnung ihrer Kanten die in Betracht kommenden Gruppen linearer Substitutionen definieren) eben keine *Fundamental*bereiche [der betreffenden Gruppen] sind (wie dies wieder durch das Beispiel der vorigen Nummer erläutert werden kann). [Vgl. zu dem Gesagten den letzten Brief von H. Poincaré an mich (vom 22. September 1882), oben S. 619ff. Dyck hat mich bald danach auf den wirklichen Sachverhalt aufmerksam gemacht, aber ich hatte denselben für mich völlig zurückgeschoben[7]).]

2. Zur Zeit, als ich meine Abhandlung in Bd. 21 der Math. Annalen [= Abh. CIII] schrieb (Herbst 1882), war mir unbekannt, daß Herr H. Poincaré die Existenz seiner Funktionen zum Teil auf meine Mitteilung über die Methode der Fundamentalbereiche gestützt hatte; ich habe das erst später aus einer Bemerkung desselben in Bd. 5 der Acta Mathematica (1884) ersehen (vgl. S. 211 daselbst [= S. 404 in Bd. 2 der Oeuvres de H. Poincaré]: „Par une fausse interprétation d'un théorème de Mr. Klein, dont je ne connaissais pas la démonstration"). Ich glaubte vielmehr, H. Poincaré habe die Existenz der betreffenden Funktionen durch seine Bildungsgesetze bewiesen, und hegte dementsprechend keinerlei Zweifel an der Richtigkeit seiner Angaben. Aber indem diese Funktionen in meinen eigenen Betrachtungen keine rechte Stelle hatten, schloß ich dieselben (ohne zwingenden Grund, nur einem richtigen Gefühle folgend) von meiner Darstellung aus. In Abh. CIII ist daher von den betreffenden Funktionen nur ganz beiläufig [unter Bezugnahme auf H. Poincaré] die Rede[8]).

3. Aber die Unklarheit, mit der ich der betreffenden Frage gegenüberstand, kommt weiterhin in meiner Abhandlung zur Geltung, wo es sich um den Kontinuitätsbeweis des von mir sogenannten Fundamentaltheorems handelt (S. 698ff.). Ich koordiniere dort einem Fundamentalbereiche, dessen Kanten in geeigneter Weise durch lineare Substitutionen zusammengeordnet sind, in völlig legitimer Weise eine zerschnittene Riemannsche Fläche, stelle mir dann aber vor, *daß diese Beziehung ungeändert weiter bestehen müsse, wenn man den Bereich in der dort näher auseinandergesetzten Weise beliebig variiert.* Diese Voraussetzung ist irrtümlich; in der Tat kann der Bereich bei der Variierung, wie sofort zu

[7]) [Zusatz bei dem Wiederabdruck].

[8]) Vgl. S. 671 daselbst, Zeile 17 von unten.

sehen, hyperbolische Ecken erhalten und ist dann, wie wir sahen, gewiß nicht als Fundamentalbereich zu brauchen.

4. Es ist Herrn H. Poincarés Verdienst, [hinterher bemerkt zu haben, daß seine ursprünglichen Behauptungen zu Widersprüchen führen,] und zugleich gezeigt zu haben, wie man die in Rede stehende Schwierigkeit durch eine gewisse Abänderung der Gedankenentwicklung vermeiden kann (Acta Mathematica, Bd. 4 (1883/84), S. 236ff. [= Oeuvres, Bd. 2, S. 332ff.]). Die Schwierigkeit betrifft mehr die Form der Darstellung als das Wesen derselben. Man hat das letztere in der Beziehung zu erblicken, welche zwischen einer gewissen diskontinuierlichen Gruppe linearer Substitutionen einer Variablen z und einer zugehörigen Riemannschen Fläche statthat, und es ist nur ein Hilfsmittel der Darstellung, wenn man unter den unendlich vielen Fundamentalpolygonen der genannten Gruppe gerade eines auswählt und dementsprechend die Riemannsche Fläche in bestimmter Weise zerschnitten denkt. Nun ist die Sache die, *daß die Beziehung zwischen Gruppe und Riemannscher Fläche beim Auftreten einer hyperbolischen Ecke im Fundamentalbereich gar keine Diskontinuität erleidet, daß nur die Darstellung dieser Beziehung durch Vermittlung des gerade gewählten Bereiches unbrauchbar wird* [9]). In der Tat entwickelt H. Poincaré a. a. O., daß man bei vorgelegter Gruppe den Fundamentalbereich allemal in „reduzierter" Form wählen kann, d. h. in einer Form, bei welcher die Möglichkeit der hyperbolischen Ecken von vornherein wegfällt [10]).

5. Im übrigen wird man sagen müssen, daß durch die Poincaréschen Darlegungen die Schwierigkeit, welche das Auftreten hyperbolischer Ecken mit sich bringt, mehr umgangen als beseitigt wird. Unser Bereich ist ursprünglich Punkt für Punkt eindeutig auf eine Riemannsche Fläche bezogen, und diese Beziehung bleibt bei kontinuierlicher Abänderung des Bereiches bestehen, bis zu dem Augenblicke, wo die hyperbolischen Ecken auftreten. *Was wird aus der Beziehung in diesem Augenblicke?* Das ist offenbar die Frage, auf die man direkte Antwort wünscht, wie eine solche nun in dem folgenden Paragraphen dieser Darlegung gegeben werden soll.

§ 4.

[Ausartung des Schnittsystems auf der Riemannschen Fläche beim Auftreten hyperbolischer Ecken im Fundamentalbereiche.]

Für unseren Zweck wird es genügen, wenn wir an ein möglichst einfach gewähltes Beispiel anknüpfen. Ich will also dieselbe Gruppe zu-

[9]) Eben darum konvergieren auch, wie oben bereits angedeutet wurde, die Poincaréschen Reihen unabhängig von dem Auftreten hyperbolischer Ecken [bei dem zunächst betrachteten Bereiche].

[10]) [In den „Automorphen Funktionen" ist Fricke den hyperbolischen Zipfeln von vornherein aus dem Wege gegangen, indem er seine „Normalpolygone" zugrunde gelegt hat, bei denen solche niemals auftreten können. Vgl. unten S. 743/744.]

grunde legen, die wir schon in § 2 betrachteten, nämlich die Gruppe aller Wiederholungen der Ähnlichkeitstransformation $z' = kz$. Diese Gruppe will ich dann gar nicht abändern, sondern nur den Bereich, dessen Kanten uns durch ihre Zusammengehörigkeit die Gruppe definieren. Als solchen Bereich wählen wir zunächst den *Ringstreifen* zwischen den beiden um O herumgelegten Kreisen $r = R$ und $r = kR$; man vergleiche die Fig. 2, in der ich ganz ähnlich wie in Fig. 1 zwei zusammengeordnete Punkte durch A und A' bezeichnet habe. Ersichtlich kann man sich die zugehörige ge-

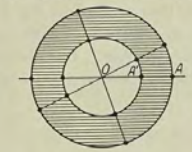


Fig. 2.

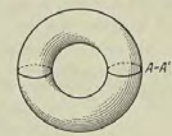


Fig. 3.

schlossene Riemannsche Fläche als eine im Raume gelegene *Ringfläche* vorstellen, auf welcher die beiden Kreise $r = R$ und $r = kR$ gemeinsam eine Breitenkurve liefern, etwa den in Fig. 3 (die nur schematische Bedeutung haben soll) besonders ausgezogenen äußeren Äquatorkreis. Übrigens wollen wir uns vorstellen, daß man den Ringstreifen der Fig. 2 durch

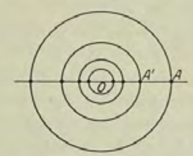


Fig. 4.

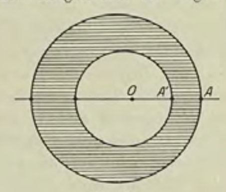


Fig. 5.

wiederholte Anwendung der Substitutionen $z' = k^{\pm 1} \cdot z$ unbegrenzt vervielfältige. Es entsteht so eine Zerlegung der ganzen z-Ebene in unendlich viele einander einschließende Streifen, wie sie durch die Fig. 4 angedeutet sein soll. Ein jeder dieser Streifen ist ein Abbild der in Fig. 3 gegebenen, mit ihrem Schnitt versehenen Ringfläche. Die unendliche Aufeinanderfolge der Streifen kann daher durch eine unendlichmalige Umwicklung der Ringfläche (bei welcher immer aufs neue wieder die Schnittkurve überschritten wird) gedeutet werden. Diese Vorstellungsweise ist bequem, so oft es gilt, irgendwelche in der z-Ebene gezeichnete Kurven auf die Ringfläche zu übertragen, wie wir das sofort auszuführen haben werden. Man verändere jetzt nämlich den Fundamentalbereich, Fig. 2, dadurch, daß man nicht um O, sondern um einen links von O gelegenen Punkt einen Kreis durch A lege, der die erste Begrenzungslinie des neuen Bereiches vorstelle, um dann als zweite Begrenzungslinie den durch A' gehenden Kreis zu wählen, welcher sich aus dem erstgenannten vermöge $z' = kz$ ergibt; man vergleiche die Fig. 5. Hierbei hat sich die Ringfläche der Fig. 3 gar nicht geändert, *nur der auf ihr verlaufende Schnitt ist ein anderer geworden.* Wir werden seinen Verlauf konstruieren, indem wir zusehen, wie die Begrenzungskreise der Fig. 5 die verschiedenen Ringstreifen der Fig. 4 durchsetzen, und übrigens von der eben gegebenen Vorstellungsweise einer unendlichfach umwickelten Ringfläche Gebrauch machen. Das Resultat ist, daß unsere neue Schnittkurve sich um die Ringfläche nach Art der folgenden Figur herumwindet:

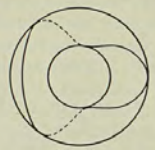


Fig. 6.

(Diese Figur ist so zu verstehen, daß die Schnittkurve teils auf der uns zugekehrten Vorderseite, teils auf der Rückseite der Ringfläche verläuft; die punktierten Stücke beziehen sich auf die Rückseite.)

Die Antwort auf unsere eigentliche Frage werden wir jetzt bekommen, indem wir den Deformationsprozeß, der von Fig. 3 zu Fig. 5 führt, so lange in gleichem Sinne fortgehen lassen, bis die beiden Begrenzungskreise in die durch A und A' gehenden Vertikallinien, der Ringstreifen also in den Parallelstreifen der Fig. 1 verwandelt ist. Bei diesem Deformationsprozeß wird nun die auf unserer Ringfläche verlaufende Schnittkurve eine fortschreitende Abänderung erleiden, die man am leichtesten an Fig. 4 beurteilen wird: sie wird sich wiederholt um unsere Ringfläche herumwinden:

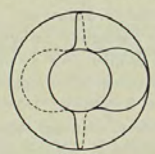


Fig. 7.

so zwar, daß sich diese Windungen im oberen und unteren Teile unserer Figur häufen und zuletzt *unendlich viele Windungen* erhalten, die sich

auf der oberen und unteren Hälfte unseres Ringes derart zusammendrängen, daß die [auf der rechten Seite der Figur begonnene] Schnittkurve auf die linke Seite der Figur überhaupt nicht mehr hinübertritt:

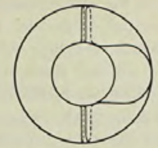


Fig. 8.

Die Folge ist, daß durch unsere Schnittkurve die Ringfläche in eine rechte und eine linke Hälfte zerlegt erscheint, von denen dann nur die erstere dem in Fig. 1 gezeichneten Parallelstreif entspricht. — Also nicht die Riemannsche Fläche artet aus (die bleibt bei unserem ganzen Deformationsprozeß ungeändert), sondern die auf ihr verlaufende Schnittkurve, und zwar so, *daß dadurch ein Teil der Riemannschen Fläche von dem Reste abgeschnürt wird.*

Was so im Beispiele geschieht, wird beim Auftreten hyperbolischer Ecken allgemein der Fall sein. Die Schwierigkeit, um die es sich handelt, erledigt sich einfach dadurch, *daß bei kontinuierlicher Verzerrung einer über eine Riemannsche Fläche hinlaufenden Kurve ein Grenzfall eintreten kann, an dessen Möglichkeit man von Haus aus nicht gedacht hat.* Man ist versucht, diesen Grenzfall als den der *Selbstabsperrung* der Schnittkurve zu bezeichnen[11]).

§ 5.

[Überleitung zu den in Nr. CVI und CVII folgenden Untersuchungen.]

Ich habe noch hinzuzufügen, in welcher Verbindung diese Note mit den Entwicklungen steht, die ich neuerdings in den Math. Annalen über die hypergeometrische Differentialgleichung und über den Hermiteschen Fall der Laméschen Gleichung publiziert habe[12]). Die in Rede stehenden Differentialgleichungen studiere ich dort dadurch, daß ich die Kreisbogenpolygone ins einzelne betrachte, auf welche die Halbebene der unabhängigen Variablen x durch den Quotienten η zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung abgebildet wird. Ich will hier der Kürze halber nur von

[11]) [Vielleicht ist es nützlich, den ganzen Prozeß zeichnerisch so zu verfolgen, daß man die Ecke durch geeignete Transformation ins Endliche wirft. So ist es in den „Automorphen Funktionen", Bd. 1, S. 144 geschehen. K.]

[12]) Math. Annalen Bd. 37 (1890) und Bd. 40 (1892) [als Abh. LXV bez. LXVII in Bd. 2 dieser Ausgabe abgedruckt].

solchen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sprechen, welche rationale Koeffizienten haben. Bei ihnen wird die in Rede stehende Polygonmethode immer dann angewandt werden können, wenn sämtliche singuläre Punkte und alle sonstigen in die Differentialgleichung eingehenden Konstanten reell sind. Wie aber ist es mit den allgemeineren Fällen? Da wird man von vornherein darauf verzichten, die x-Ebene in zwei Hälften zu zerlegen, dieselbe vielmehr nur mit einem solchen *Einschnitte* versehen, der zu sämtlichen singulären Punkten hinführt. Die x-Ebene ist dadurch in ein einfach berandetes Flächenstück verwandelt, und dieses Flächenstück wird, auf die η-Ebene übertragen, *in letzterer eben einen solchen Bereich liefern, dessen Kanten paarweise durch bestimmte lineare Substitutionen des η zusammengehören.* Daher scheint es für die Theorie der in Rede stehenden Differentialgleichungen (wie überhaupt der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Koeffizienten) förderlich, zunächst einmal die mannigfachen Gestalten derartiger Bereiche, wie ihre funktionentheoretische Bedeutung, *independent* in Untersuchung zu ziehen, um später von da aus auf die Theorie der Differentialgleichungen die Anwendung zu machen. Die Polygonmethode, von der wir zunächst sprachen, ordnet sich natürlich, wenn ebenfalls unabhängig geometrisch gefaßt, als besonderes Kapitel unter den hier gemeinten allgemeinen Ansatz ein. — Das einfachste Beispiel, auf welches letzterer Anwendung findet, ist der Fall der hypergeometrischen Differentialgleichung mit beliebigen komplexen Exponentendifferenzen. Wie ich im vorigen Wintersemester in meinen Vorlesungen bemerkte, erscheint es durchaus möglich, diesen Fall bis zu Ende zu diskutieren. Seitdem hat sich auf meinen Wunsch Herr Fr. Schilling mit dieser Frage beschäftigt, der eine zusammenhängende Bearbeitung derselben voraussichtlich bald veröffentlichen wird. Man vergleiche dessen vorläufige Mitteilung in den Göttinger Nachrichten vom 6. Juni 1891: *Über die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle komplexer Argumente*[13]).

Göttingen, im September 1891.

---

[13]) Dieselbe ist in Bd. 39 der Math. Annalen abgedruckt worden. [Zusatz bei der ursprünglichen Korrektur, Februar 1892. — Vgl. die weiteren Arbeiten von Fr. Schilling in Bd. 46 der Math. Annalen (1895), S. 62—76 u. S. 529—538: *Die geometrische Theorie der Schwarzschen s-Funktion für komplexe Exponenten.*]

CV. Über gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung.

[Zuerst erschienen in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1883[1]); wieder abgedruckt mit einem hinzugefügten Anhang in den Math. Annalen, Bd. 23 (1884)].

Die Theorie der elliptischen Funktionen hat bekanntlich einen doppelten Eingang, indem man entweder mit den *doppeltperiodischen Funktionen* oder mit den *Integralen* beginnen kann. Genau dasselbe gilt von gewissen neueren funktionentheoretischen Untersuchungen, auf die ich mich hier zu beziehen habe. Einmal handelt es sich dabei um solche Funktionen z einer Unabhängigen η, welche ungeändert bleiben, wenn man η einem gewissen diskontinuierlichen Systeme linearer Substitutionen unterwirft[2]); das andere Mal mag man das einzelne z als independente Variable betrachten und η durch die Differentialgleichung dritter Ordnung definieren, der es in bezug auf z genügt. Diese Differentialgleichung hat die übrigens wohlbekannte Gestalt:

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = f(z), \tag{1}$$

die dadurch definiert ist, daß sich die allgemeine Lösung aus einer beliebigen Partikularlösung η als willkürliche lineare Funktion $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ zusammensetzt. Der so bezeichnete Zusammenhang zwischen allgemeiner und partikulärer Lösung überträgt sich natürlich auf die verschiedenen Zweige einer und derselben η-Funktion. Läßt man also z in seinem komplexen Gebiete einen geschlossenen Weg beschreiben, d. h. einen solchen Weg, bei dem z selber, wie auch $f(z)$, die rechte Seite von (1), ihren ursprünglichen Wert wiedergewinnen, so wird η, diesem Wege entsprechend, eine gewisse lineare Substitution erfahren. Das Integral $\int f(z)\cdot dz$ wäre auf diesem Wege um einen Periodizitätsmodul gewachsen. Man kann das

---

[1]) Vorgelegt und zum Druck übergeben in der Sitzung am 29. Januar 1883.

[2]) Man vergleiche etwa meinen neuerdings publizierten Aufsatz: „*Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie*", Math. Annalen, Bd. 21 (1882/83) [vorstehend als Abh. CIII abgedruckt], wo auch die anderweitige Literatur ausführlich angegeben ist, [sodann die Ausführungen *Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen* auf S. 577 ff. in diesem Bande].

Wesen der neuen Funktionen geradezu aus dem Gesichtspunkte betrachten, daß man durchweg die Periodizitätsmoduln der Integrale und jene charakteristischen Substitutionen der η-Funktion parallelisiert.

Ich habe mich nun gefragt, ob man die hiermit angedeutete Vergleichung nicht noch einen Schritt weiter treiben kann. Schreiben wir

$$d\eta = f(z)\cdot dz, \tag{2}$$

so heißt dies, daß η jedem Inkremente dz von z entsprechend um eine bestimmte unendlich kleine Größe vermehrt wird. Wir lösen die Differentialgleichung (2), indem wir von bestimmter unterer Grenze ausgehend den hiermit bezeichneten Prozeß unendlich oft wiederholen; eben dieses und nichts anderes besagt das bestimmte Integral

$$\eta = \int_{z_0}^{z} f(z)\cdot dz + \eta_0. \tag{3}$$

Der Periodizitätsmodul aber, den η auf geschlossenem Wege erhält, ist nur ein spezieller Wert dieses Integrals. — Genau entsprechend versuche ich im folgenden die Differentialgleichung (1) aufzufassen. Und zwar werde ich zunächst zeigen, daß man dieselbe so interpretieren kann, als definiere sie einem jeden Differential dz entsprechend eine auf η bezügliche unendlich kleine *lineare Transformation*. Reiht man sodann mehrere Differentiale dz aneinander, so setzen sich die entsprechenden linearen Transformationen als aufeinanderfolgende Operationen zusammen, und *es erwächst also die allgemeine Lösung der Differentialgleichung* (1), *indem man, von einer willkürlichen linearen Funktion beginnend, die letztere mit unendlich vielen durch* (1) *bestimmten infinitesimalen linearen Transformationen komponiert.* Die charakteristischen linearen Substitutionen von η aber, die geschlossenen Wegen entsprechen, sind wieder nur ein spezielles Ergebnis des allgemeinen Lösungsprozesses.

Um die hiermit angedeuteten Anschauungen zu präzisieren, bedürfen wir zunächst, unter η eine beliebige Funktion von z verstanden, des Begriffs *der im Punkte $z = z_\nu$ oskulierenden linearen Funktion.* Ich verstehe darunter diejenige lineare Funktion von z:

$$A_\nu(z) = \frac{a_\nu z + b_\nu}{c_\nu z + d_\nu}, \tag{4}$$

die im Punkte $z = z_\nu$ mit η sowohl dem Werte nach, als auch im ersten und zweiten Differentialquotienten übereinstimmt. Offenbar hat man (wie man durch Reihenentwicklung nach Potenzen von $(z - z_\nu)$ sofort verifiziert):

$$A_\nu(z) = \eta_\nu + \frac{2\eta_\nu'^2 (z - z_\nu)}{2\eta_\nu' - \eta_\nu'' (z - z_\nu)}. \tag{5}$$

Wir bilden uns ferner den Begriff der auf zwei aufeinanderfolgenden Punkte, z_ν und $z_{\nu+1}$, bezüglichen *Übergangssubstitution.* Ich definiere als solche diejenige lineare Substitution, welche entsteht, wenn man in

$$A_\nu^{-1}(z) = \frac{-d_\nu z + b_\nu}{c_\nu z - a_\nu}$$

statt z den Wert

$$A_{\nu+1}(z) = \frac{a_{\nu+1} z + b_{\nu+1}}{c_{\nu+1} z + d_{\nu+1}}$$

einträgt, also in Formel:

$$S_{\nu,\nu+1} = A_\nu^{-1}\cdot A_{\nu+1}. \tag{6}$$

Wir mögen insbesondere die beiden Werte z_ν und $z_{\nu+1}$, wie es im folgenden immer geschehen soll *konsekutiv* nehmen, also

$$z_{\nu+1} = z_\nu + dz_\nu \tag{7}$$

setzen. Ich bezeichne dann die betreffende Übergangssubstitution, die ich in der Weise berechne, daß ich höhere Potenzen von dz_ν vernachlässige, schlechthin mit dem Buchstaben S_ν und nenne sie die zu dem Werte z_ν gehörige *infinitesimale* Übergangssubstitution.

Dies vorausgeschickt sage ich nun zunächst, *daß die Differentialgleichung* (1) *für jeden Punkt z_ν die zu diesem Punkte gehörige infinitesimale Übergangssubstitution der Funktion η bestimmt.*

Zum Beweise wolle man vor allem beachten, daß die Übergangssubstitution ungeändert bleibt, wenn man η, die zugrunde liegende Funktion, durch irgendeine lineare Funktion von η, $T(\eta)$, ersetzt. Denn die beiden oskulierenden linearen Funktionen $A_\nu(z)$, $A_{\nu+1}(z)$ verwandeln sich dann in $T\cdot A_\nu(z)$, $T\cdot A_{\nu+1}(z)$ und $S_{\nu,\nu+1}$ in $(A_\nu^{-1}\cdot T^{-1})\cdot(T\cdot A_{\nu+1})$, was aber nichts anderes ist, als das alte $S_{\nu,\nu+1}$.

Nun hängen alle Lösungen von (1), wie wir wissen, linear voneinander ab. Sie ergeben alle dieselben Übergangssubstitutionen und insbesondere dieselben infinitesimalen Übergangssubstitutionen. Letztere müssen sich also a priori bestimmen lassen. In der Tat, die infinitesimale Übergangssubstitution hängt nach dem früheren von z_ν, dz_ν, η_ν, η_ν', η_ν'' und η_ν''' ab, indem wir nämlich, der Gleichung (7) entsprechend, setzen:

$$\begin{cases} \eta_{\nu+1} = \eta_\nu + \eta_\nu' \cdot dz_\nu, \\ \eta_{\nu+1}' = \eta_\nu' + \eta_\nu'' \cdot dz_\nu, \\ \eta_{\nu+1}'' = \eta_\nu'' + \eta_\nu''' \cdot dz_\nu. \end{cases} \tag{8}$$

Nun gibt es aber keinen anderen aus η_ν, η_ν', η_ν'', η_ν''' zusammengesetzten Ausdruck, der bei allen linearen Umänderungen von η ungeändert bliebe, als

$$\frac{\eta_\nu'''}{\eta_\nu'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta_\nu''}{\eta_\nu'}\right)^2, \tag{9}$$

die linke Seite unserer Differentialgleichung (1). *Die infinitesimale Übergangssubstitution kann also jedenfalls* (evtl. nach geeigneter Zufügung eines Faktors in Zähler und Nenner) *so geschrieben werden, daß sie nur von* z_ν, dz_ν *und dem Ausdrucke* (9) *abhängt.* Das heißt aber ohne weiteres, daß sie für die durch (1) bestimmte η-Funktion von vornherein bekannt ist, was zu beweisen war.

Ich vervollständige diese Überlegung durch wirkliche Berechnung der Übergangssubstitution. Am leichtesten dürfte sich dieselbe so gestalten, daß wir unter allen Lösungen von (1) diejenige, ζ, vorab herausgreifen, für welche die an der Stelle z_ν oskulierende lineare Funktion mit z selbst zusammenfällt, für welche also

$$(10) \qquad \zeta_\nu = z_\nu,\ \zeta'_\nu = 1,\ \zeta''_\nu = 0$$

ist. Da allgemein:

$$\frac{\zeta'''_\nu}{\zeta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''_\nu}{\zeta'_\nu}\right)^2 = \frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2,$$

so wird

$$(11) \qquad \zeta'''_\nu = \frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2$$

zu setzen sein. Wir berechnen jetzt für ζ die im Punkte $z_{\nu+1} = z_\nu + dz_\nu$ oskulierende lineare Funktion. Dieselbe ist nach (5) und (7):

$$= \zeta_{\nu+1} + \frac{2\zeta'^2_{\nu+1}(z - z_\nu - dz_\nu)}{2\zeta'_{\nu+1} - \zeta''_{\nu+1}(z - z_\nu - dz_\nu)},$$

und also nach (8) unter Berücksichtigung der besonderen Werte (10) von $\zeta_\nu, \zeta'_\nu, \zeta''_\nu$:

$$(z_\nu + dz_\nu) + \frac{2(z - z_\nu - dz_\nu)}{2 - \zeta'''_\nu dz_\nu (z - z_\nu - dz_\nu)},$$

oder, unter Wegwerfung höherer Potenzen von dz_ν:

$$\frac{(2 - \zeta'''_\nu z_\nu dz_\nu)z + (\zeta'''_\nu z_\nu^2 dz_\nu)}{(-\zeta'''_\nu dz_\nu)\cdot z + (2 + \zeta'''_\nu z_\nu dz_\nu)}.$$

Dieser Ausdruck ist aber an sich mit der gesuchten Übergangssubstitution identisch. Denn da $S_\nu = A_\nu^{-1}\cdot A_{\nu+1}$, für unser ζ aber A_ν mit z zusammenfällt, so stimmt S_ν ohne weiteres mit dem bezüglichen $A_{\nu+1}$ überein. Tragen wir nun noch für ζ'''_ν seinen oben in Gleichung (11) bestimmten Wert ein, *so haben wir als Definition der Übergangssubstitution* S_ν *die allgemeine Formel:*

$$(12) \qquad S_\nu = \frac{\left\{2 - \left(\frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{2}{3}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2\right) z_\nu dz_\nu\right\} z + \left(\frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2\right) z_\nu^2 dz_\nu}{-\left(\frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2\right) dz_\nu \cdot z + \left\{2 + \left(\frac{\eta'''_\nu}{\eta'_\nu} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''_\nu}{\eta'_\nu}\right)^2\right) z_\nu dz_\nu\right\}}.$$

Was nun die *Lösung* unserer Differentialgleichung (1) auf Grund der hiermit entwickelten Formeln angeht, so denke man sich eine Reihenfolge von Punkten $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots, z_n$ fixiert, die wir allmählich unter Festhaltung der Endpunkte immer dichter werden lassen, indem wir n größer und größer nehmen. Sei $A_0(z)$ eine beliebige lineare Funktion von z, von der wir annehmen, daß sie im Punkte $z = z_0$ die zu berechnende η-Funktion oskuliert, eine Annahme, welche die drei willkürlichen Konstanten fixiert, die in der allgemeinen Lösung von (1) enthalten sind. Dann haben wir der Reihe nach vermöge (6):

$$(13) \qquad \begin{cases} A_1(z) = A_0\cdot S_{0,1}, \\ A_2(z) = A_1\cdot S_{0,1}\cdot S_{1,2}, \\ - - - - - - - \end{cases}$$

schließlich:

$$(14) \qquad A_n(z) = A_0\cdot S_{0,1}\cdot S_{1,2}\ldots S_{n-1,n}$$

oder auch, indem wir n unendlich werden lassen und also die einzelnen Übergangssubstitutionen $S_{\nu,\nu+1}$ durch die *infinitesimalen* S_ν ersetzen:

$$(15) \qquad A_n(z) = A_0\cdot S_0\cdot S_1\cdot S_2\ldots S_n. \quad (\lim n = \infty)$$

Dies ist die gesuchte Lösung. Denn unsere Formel läßt uns $A_n(z)$, jene lineare Funktion, welche η an einer beliebig vorgegebenen Stelle $z = z_n$ oskuliert, aus dem willkürlich angenommenen, auf $z = z_0$ bezüglichen $A_0(z)$, durch Aneinanderreihung von unendlich vielen unendlich kleinen linearen Transformationen berechnen.

Ich komme nicht noch einmal auf den Vergleich dieser Formel mit der Begriffsbestimmung des bestimmten Integrals, der auf der Hand liegt, zurück. Sowie man den Integrationsweg im komplexen Gebiete in hohem Maße abändern kann, ohne den Wert des Integrals zu ändern, so in (15) die Reihenfolge der zwischen z_0 und z_n eingeschalteten Punkte. Und wie das Integral über einen geschlossenen Weg erstreckt einen Periodizitätsmodul liefert, so Formel (15) die auf unsere η-Funktion bezügliche, dem geschlossenen Wege entsprechende charakteristische lineare Substitution.

Was die *Konvergenz* unseres Verfahrens angeht, so braucht dieselbe kaum besonders erläutert zu werden. Denn *materiell* unterscheidet sich unser Verfahren nur unwesentlich von dem gewöhnlichen, eine Differentialgleichung dritter Ordnung zu integrieren. Indem wir aus A_ν vermittels der Übergangssubstitution S_ν das $A_{\nu+1}$ berechnen, erreichen wir ja, von Termen höherer Ordnung in dz_ν abgesehen, jedesmal dasselbe, als wenn wir den Formeln (8) entsprechend

$$\eta_{\nu+1} = \eta_\nu + \eta'_\nu\cdot dz_\nu, \qquad \eta'_{\nu+1} = \eta'_\nu + \eta''_\nu\cdot dz_\nu,$$
$$\eta''_{\nu+1} = \eta''_\nu + \eta'''_\nu\cdot dz_\nu$$

setzen. Es ist nur die *Form* unserer Lösung und die in ihr liegende Auffassung von der *Bedeutung* der Differentialgleichungen (1), welche, wenn überhaupt, einigen Wert beanspruchen dürfte.

Anhang[3]).

Ich lasse noch einige Bemerkungen folgen, welche bestimmt sind, die vorstehenden Erläuterungen mit anderweitigen Untersuchungen in Verbindung zu setzen und Gesichtspunkte anzudeuten, die mir einen gewissen Wert zu besitzen scheinen.

Wird vermöge der gerade entwickelten Betrachtungen die Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = f(z) \tag{16}$$

mit der unmittelbar integrierbaren Differentialgleichung:

$$\eta' = f(z) \tag{17}$$

zusammengeordnet, so gibt es noch eine dritte Differentialgleichung, welche bei analoger Auffassungsweise mit den genannten beiden zusammengehört.

Nach den Untersuchungen von Lie[4]) nämlich lassen sich alle Transformationsgruppen, welche neben einer einzelnen Variabelen kontinuierlich veränderliche Parameter in endlicher Zahl enthalten, auf einen der drei Typen zurückführen:

$$\eta_1 = \eta + C, \tag{18}$$

$$\eta_1 = a\eta + b, \tag{19}$$

$$\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}. \tag{20}$$

Eliminieren wir hier bei (18) oder bei (20) zwischen η und seinen sukzessiven Differentialquotienten auf möglichst einfache Weise die vorkommenden Konstanten, so werden wir gerade zu den Differentialausdrücken

$$\eta' \quad \text{und} \quad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$$

geführt, welche in den linken Seiten von (17) und (16) auftreten. *Entsprechend erwächst die neue hier in Betracht zu ziehende Art von Differentialgleichungen, indem wir aus* (19) *und den beiden Gleichungen, die*

[3]) Hinzugefügt bei dem Abdruck in Bd. 23 der Math. Annalen im Januar 1884.

[4]) Siehe etwa: *Theorie der Transformationsgruppen I*, Math. Annalen, Bd. 16 (1879/80), insbesondere S. 455.

sich aus (19) *durch Differentiation ergeben, die beiden Konstanten a, b eliminieren.* Auf solche Weise entsteht:

$$\frac{\eta_1''}{\eta_1'} = \frac{\eta''}{\eta'};$$

die neuen Differentialgleichungen lauten also:

$$\frac{\eta''}{\eta'} = f(z). \tag{21}$$

Natürlich ist eine solche Differentialgleichung durch zweifache Quadratur vermöge der Formel:

$$\eta = \int dz\, e^{\int f(z)\,dz} \tag{22}$$

aufzulösen. An gegenwärtiger Stelle aber werden wir uns die betreffende Lösung in ähnlicher Weise durch Aufeinanderfolge unendlich vieler unendlich kleiner Operationen (19) konstruiert denken, wie wir dies betreffs der Gleichungen (16) mit Bezug auf unendlich kleine Substitutionen (20) vorstehend erläutert haben. Wir werden also zunächst für eine beliebige Funktion η von z an beliebiger Stelle z_ν eine Kontaktfunktion:

$$\eta = A + B(z - z_\nu) \tag{23}$$

konstruieren (wo A offenbar $= \eta_\nu$, $B = \eta_\nu'$ ist) und nun die *infinitesimale Übergangstransformation* vom Typus (19) suchen, welche diese Kontaktfunktion in die dem Punkte $z_\nu + dz_\nu$ entsprechende überführt. Diese Übergangstransformation kann nur von $\frac{\eta''}{\eta'}$ abhängen, in der Tat finden wir dieselbe:

$$S_\nu = z + \frac{\eta_\nu''}{\eta_\nu'}(z - z_\nu)\,dz_\nu. \tag{24}$$

Die Bedeutung einer Differentialgleichung (21) *ist also diese, daß für die durch sie definierte η-Funktion besagte infinitesimale Übergangstransformation a priori bekannt ist.* Und nun konstruieren wir uns die Lösung von (21), indem wir nach dem Schema (15) (siehe oben) unendlich viele derartige unendlich kleine Transformationen an einander reihen.

Wir wollen jetzt insbesondere annehmen, daß die rechte Seite $f(z)$ unserer Differentialgleichungen eine *algebraische* Funktion von z sei. Indem wir uns sodann die zugehörige Riemannsche Fläche (über der z-Ebene) konstruieren, erhalten wir auf dieser dreierlei η-Funktionen, welche die Eigenschaft haben, sich nach Durchlaufung eines beliebigen geschlossenen Weges je nachdem entweder in der Gestalt (18), oder (19), oder (20), zu reproduzieren. Die Funktionen ersterer Art sind wohlbekannt, es sind die *Integrale algebraischer Funktionen*, oder kurz gesagt: *die Abelschen Integrale.* Von den Funktionen dritter Art habe ich in meiner schon zitierten Arbeit[5]) einen bestimmten einfachen Typus betrachtet, der auf der Riemannschen Fläche keine anderen Singularitäten, als algebraische bezw. logarithmische Verzweigungen darbietet. Ich bezeichnete eine solche Funktion dementsprechend mit der *Signatur* (p, n, l_k), wo p das Geschlecht der Riemannschen Fläche, n die Zahl der Verzweigungspunkte, l_k den Exponenten des einzelnen Verzweigungspunktes angab. In den parallellaufenden Untersuchungen von H. Poincaré treten noch allgemeinere Fälle dieser Funktionen dritter Art auf[6]). *Aber auch die Funktionen zweiter Art sind bereits verschiedentlich behandelt worden.* Hierher gehören die so genannten *Wurzelfunktionen*, auf welche Riemann im zweiten Teile seiner Arbeit über Abelsche Funktionen (Nr. 26, 27) [und in dem Fragmente XXX der ersten, bzw. XXXI der zweiten Auflage seiner Gesammelten math. Werke] eingeht, d. h. algebraische Funktionen des Ortes, welche sich bei Durchlaufung eines beliebigen auf der Riemannschen Fläche geschlossenen Weges mit einer Einheitswurzel multiplizieren. Allgemein und unter prinzipiellen Gesichtspunkten, die ich sogleich zur Sprache bringen muß, hat die Funktionen zweiter Art sodann Herr Prym in Betracht gezogen[7]). Neuerdings endlich hat sich Herr Appell mit diesen Funktionen wiederholt beschäftigt[8]).

Was die prinzipiellen Gesichtspunkte von Herrn Prym angeht, so beziehen sich dieselben auf Folgendes. Bekanntlich hat Riemann gefunden, daß man das einzelne Abelsche Integral auf gegebener Riemannscher Fläche durch seine Unendlichkeitspunkte und die reellen Teile seiner Periodizitätsmoduln im wesentlichen (d. h. von der Integrationskonstante abgesehen) vollständig bestimmen könne. Herr Prym gibt nun (leider ohne Beweis) für solche η-Funktionen zweiter Art, deren beliebigen geschlossenen Wegen entsprechende Multiplikatoren jeweils den absoluten Betrag 1 haben, analoge transzendente Bestimmungsstücke an.

[5]) Math. Annalen, Bd. 21 (1882/83) [= Abh. CIII oben, insbesondere S. 671/72.]

[6]) [Gemeint sind hier offenbar die Funktionen, welche zu den in Abh. CIII, S. 671, Zeile 17 von unten erwähnten Gruppen gehören und die in Wirklichkeit nicht existieren. Vgl. die Briefe 24 und 25 des oben abgedruckten Briefwechsels zwischen H. Poincaré und mir, insbesondere Fußnote [52]) auf S. 618 K.]

[7]) *Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen* $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, Crelles Journal, Bd. 70 (1869). [Vgl. jetzt das im Jahre 1911 bei Teubner gedruckte Werk von Prym und Rost: *Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung*, das ganz der Theorie der η-Funktionen zweiter Art gewidmet ist und in dem übrigens der soeben genannte und einige weitere Aufsätze Pryms aus dem Crelleschen Journal wieder abgedruckt sind. Dort findet man auch die Beweise ausgeführt].

[8]) Siehe Comptes rendus, Bd. 92, S. 960—962 (18. April 1881) und Bd. 95, S. 714—717 (23. Oktober 1882), ferner den Aufsatz: *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce* in Liouvilles Journal, Serie 3, Bd. 9 (1883), S. 5—25.

Wir werden fragen, ob eine entsprechende transzendente Bestimmungsweise nicht auch bei den η-Funktionen dritter Art, insbesondere bei denjenigen von der Signatur (p, n, l_k) möglich sei? Eine solche η-Funktion enthält, wie ich a. a. O. zeigte, sofern man die Riemannsche Fläche und die n-Verzweigungspunkte auf ihr als gegeben ansieht, von den Integrationskonstanten abgesehen, noch $3p - 3 + n$ willkürliche [komplexe] Konstante[9]). Es ist leicht, zu sehen, daß dieselben in der rechten Seite der Differentialgleichung (16) linear auftreten. Andererseits bieten jene „erzeugenden" Substitutionen:

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta},$$

welche den Querschnitten der Riemannschen Fläche und den Umkreisungen der Verzweigungspunkte entsprechen, mit Rücksicht auf die zwischen ihnen bestehende „Fundamentalrelation" und die im Ausgangswerte η enthaltenen drei willkürlichen Konstanten ihrerseits $6p + 2n - 6$ disponible Substitutionskoeffizienten dar. *Wir werden fragen, ob man für diese* $6p + 2n - 6$ *Koeffizienten in einfacher Weise derart* $3p + n - 3$ *Bedingungen aufstellen kann, daß auf gegebener Riemannscher Fläche bei gegebenen Verzweigungspunkten diesen Bedingungen entsprechend, von den Integrationskonstanten abgesehen, immer gerade eine η-Funktion* (p, n, l_k) *existiert.*

Es ist mir, wenn es sich um die *allgemeinsten* derartigen Bedingungen handeln soll, bisher nicht gelungen, eine bestimmte Antwort auf diese Frage zu finden. Wohl aber kann man unendlich viele diskrete Fälle derartiger Bedingungssysteme aufstellen. In der Tat ist z. B. schon die Bedeutung des a. a. O. gegebenen „Fundamentaltheorems"[10]) im Zusammenhange der hier vorgetragenen Betrachtungen gerade diese, uns mit unendlich vielen Fällen brauchbarer Bedingungssysteme bekannt zu machen. Dasselbe besagt z. B., daß auf gegebener Riemannscher Fläche usw. immer *eine* eindeutig umkehrbare η-Funktion (p, n, l_k) existiert, welche lauter *reelle* Substitutionskoeffizienten darbietet, was in der Tat, da es sich um das Null-Sein von $6p + 2n - 6$ rein imaginären Teilen handelt, mit $3p + n - 3$ gewöhnlichen (auf komplexe Zahlen bezüglichen) Bedingungen gleichwertig ist. Ähnlich in allen anderen Fällen.

Auf die hiermit dargelegte Auffassung des Fundamentaltheorems möchte ich Gewicht legen. Denn sie nähert die Betrachtungen von Math. Annalen, Bd. 21 [= Abh. CIII] auf neue Weise dem Riemannschen Ideenkreise an. Es hat nämlich Riemann in einem verwandten Falle eine

[9]) Hierbei sind nur die niedersten Fälle: $p = 0$, $n = 3$ und $p > 1$, $n = 0$ ausgeschlossen.

[10]) Siehe S. 698ff. oben.

Gattung transzendenter Funktionen durch Periodizitätsforderungen zu bestimmen gesucht. Es geschieht dies in dem von Herrn Weber bearbeiteten Fragmente: *Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten*[11]), welches eine Fortsetzung zu der Abhandlung über die Gaussische Reihe[12]) bildet und gleich dieser aus dem Jahre 1857 stammt. Bei der Differentialgleichung der Gaussischen Reihe genügt es, nur die Art der Verzweigungspunkte zu fixieren. In den höheren Fällen aber bleiben hierüber hinaus Konstante disponibel, und es fragt sich Riemann, ob man zu ihrer Fixierung nicht die Koeffizienten der Periodizitätssubstitutionen benutzen könne. Der ganze Ansatz ist dem unsrigen um so ähnlicher, als man die Lösungen der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung in ganz ähnlicher Weise durch Aneinanderreihung unendlich kleiner Operationen aufbauen kann, wie wir dies bei den Differentialgleichungen (16), (17), (21) getan haben. Man muß zu dem Zwecke statt der einen von uns betrachteten Variabeln η nur immer gleichzeitig n linear unabhängige Lösungen:

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

in Betracht ziehen und dann statt der Gruppen (18), (19), (20) die Gesamtheit der homogenen linearen Substitutionen von n Größen verwenden[13]).

Es ist mit diesen letzten Bemerkungen zugleich eine weitere Ausdehnung unserer Betrachtungen indiziert, indem wir nämlich überhaupt statt der Transformationsgruppen (18) bis (20), die sich nur auf eine Variable beziehen, solche mit größerer Variablenzahl zu Grunde legen und nun diejenigen Differentialgleichungen untersuchen können, welche sich durch Elimination der Parameter ergeben. Ich muß mich in diesem Betracht darauf beschränken, wiederholt auf Lie's allgemeine Untersuchungen über Transformationsgruppen, sowie auf Halphen's Theorie der Differentialvarianten zu verweisen[14]).

[11]) Riemanns Gesammelte mathematische Werke, Nr. XXI, S. 357 ff. in der ersten, S. 379 ff. in der zweiten Auflage.

[12]) Ebenda, Nr. IV, S. 62 ff. in der ersten, S. 67 ff. in der zweiten Auflage.

[13]) [Die hier aufgeworfenen Fragestellungen hat später V. Volterra in einer Reihe von Arbeiten eingehend verfolgt. Siehe die Noten *Sulle equazioni differenziali lineari*, Atti della Reale Accad. dei Lincei, Rendiconti, Serie 4, Bd. 3 (1887), S. 393 bis 396 und *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari*, Rendiconti del Circ. mat. di Palermo, Bd. 2 (1888), S. 69—75, ferner die umfangreiche Abhandlung *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* in den Memorie della Società Italiana delle scienze (detta dei XL), Serie 3, Bd. 6 (1886/87) und Serie 3, Bd. 12 (1887/1902). — Vgl. auch die Darstellung in L. Schlesinger: *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* (Leipzig 1908).]

[14]) Siehe insbesondere die Arbeit: *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten*, im Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (Christiania) vom Januar 1883, in der Lie die Stellung seiner Untersuchungen zu denen von Halphen präzisiert.

Zum Kontinuitätsbeweise des Fundamentaltheorems.

Der Abschnitt IV der vorangehenden Arbeit CIII, der von den verschiedenen Fällen des von mir aufgestellten *Fundamentaltheorems*, oder wie ich heute lieber sagen würde, von den verschiedenen Fundamentaltheoremen, und insbesondere ihrem *Kontinuitätsbeweise* handelt, ist nur eine Skizze. Die Theoreme selbst sind in der Zwischenzeit alle in vollem Umfange bestätigt worden, und zwar auf Grund der verschiedenartigsten Beweismethoden; dabei gelangte auch mein Kontinuitätsbeweis zu vollständig einwandfreier Durchführung. Es wäre zu weitläufig, die verschiedenen späteren Beweise hier im einzelnen zu besprechen, ich verweise in dieser Hinsicht auf die Enzyklopädieartikel von R. Fricke (II B 4, Nr. 37—39, 1913) und von L. Lichtenstein (II C 3, Nr. 37—46, 1918/19), sowie auf Frickes Darstellung in Bd. 2 der „Automorphen Funktionen" (1912), S. 439—552, siehe insbesondere daselbst S. 439—446 und S. 548—552. Dagegen möchte ich einige Bemerkungen über die Kontinuitätsmethode folgen lassen, um die Meinung des a. a. O. von mir gegebenen Beweises ganz klar herauszustellen. Die Frage muß sein, ob die Aufeinanderfolge meiner dort angestellten Überlegungen richtig gegliedert ist, und ob für die einzelnen von mir postulierten Grundtatsachen, auf denen mein Gedankengang ruht, in der Zwischenzeit hinreichende Beweise erbracht worden sind. Ich wünsche hier zu zeigen, daß beides im wesentlichen zutrifft, so daß mein Beweisansatz zu Recht besteht. Es werden sich dann von selbst Andeutungen anschließen, welche Entwicklungen weiterhin wünschenswert scheinen.

Bereits aus den oben abgedruckten Briefen 20—23 (siehe S. 612—617) kann man entnehmen, daß auch H. Poincaré 1882 von sich aus den Gedanken gefaßt hatte, die Kontinuität als Beweisprinzip zu verwerten. Bis zur ausführlichen Veröffentlichung seines Beweises in der auf S. 586 oben als IV) zitierten Abhandlung verstrich aber noch ein volles Jahr; offenbar hatte ihn die Durchführung einer Reihe von Einzelheiten lange aufgehalten. Poincarés Beweis unterscheidet sich von meinem in einem wesentlichen Punkte, zu dessen Besprechung jedoch einige allgemeine Erörterungen vorweg genommen werden müssen. Bei uns beiden handelt es sich um den Vergleich zweier gleichdimensionaler Mannigfaltigkeiten; diese sind in meinem Beweise

a) die Mannigfaltigkeit M_1 aller Riemannschen Flächen mit bestimmter Signatur (p, n, l_k), die nach einem bestimmten Typus zu schlichtartigen Flächen zerschnitten sind,

b) die Mannigfaltigkeit M_2 der dem jeweiligen „Normalfalle" angehörigen Fundamentalbereiche von entsprechendem gestaltlichem Typus.

Wie die Dimensionen dieser Mannigfaltigkeiten abzuzählen sind, ist in Abh. CIII wohl hinreichend klar auseinandergesetzt. Auch will ich jetzt annehmen, daß jede von ihnen ein einziges Kontinuum bildet — über diesen Punkt wird hernach noch zu reden sein —. Dagegen werden wir uns zweckmäßigerweise gleich hier über die Grenzen der beiden Mannigfaltigkeiten verständigen. Als Ausartung der Individuen von M_1 sehen wir es an, wenn das p der tragenden Riemannschen Fläche durch Zusammenfallen von Verzweigungspunkten herabsinkt, wenn Stigmata zusammenrücken, oder wenn das Schnittsystem auf der Fläche eine Ausartung erfährt, wofür wir in Nr. CIV ein besonderes Beispiel studierten. Andererseits werden wir von einer Ausartung der Bereiche von M_2 sprechen, wenn Stücke des in Betracht zu ziehenden Bereiches relativ zu anderen unendlich klein werden, oder wenn bei dem Bereich hyperbolische Zipfel auftreten. Man muß bei diesen Angaben sehr vorsichtig sein. Nehmen wir z. B. den Fall eines Kreisbogenvierecks $ABCD$ mit vier Winkeln gleich Null, dessen Seiten alle auf einem festen Kreise senkrecht stehen, und vervielfältigen dasselbe nach dem Prinzip der Symmetrie! Die so entstehenden neuen Vierecke werden bald für das Auge winzig klein, wobei die den vier Ecken A, B, C, D entsprechenden Punkte beliebig dicht zusammenrücken. Trotzdem sind sie, im Sinne der zum Grenzkreis gehörigen Nicht-Euklidischen Geometrie, alle mit dem Ausgangsviereck direkt oder spiegelbildlich kongruent. Wenn man also das ursprüngliche Viereck dadurch variiert, daß man A, B, C, D auf einen Punkt hin zusammenrücken läßt, so ist dies im allgemeinen keine Ausartung desselben; wenn man dagegen nur zwei Punkte (z. B. A und B) oder drei Punkte (z. B. A, B, C) oder zweimal zwei Punkte (z. B. A und B einerseits, C und D anderseits) zusammenrücken läßt, während die übrigen Seitenlängen (also in den Beispielen von eben BC, CD, DA bzw. CD, DA bzw. BC, DA) endliche positive Größe behalten, so sind dies Fälle der Ausartung, die wir demgemäß als „*Grenzen*" von M_2 ansehen. — Diese Grenzen rechnen wir den Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 selbst nicht zu, betrachten dieselben also als offene Mannigfaltigkeiten. Zu beweisen ist, daß die so definierten M_1, M_2 umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen sind. (Vgl. den Text der Abh. CIII, S. 702.)

Ich bespreche jetzt die Kritik, welche H. Poincaré in seiner oben genannten Arbeit an meinem Beweisansatze geübt hat, bzw. seinen eigenen Beweisversuch. Er tadelte, um gleich mit der Hauptsache zu beginnen, in meiner Darstellung den Schluß, daß unzugängliche Uferpunkte von Inseln nicht existieren können (siehe oben S. 705). Damit, daß die Begründung dieses Schlusses in meiner Skizze nicht deutlich genug herausgearbeitet ist, wird er recht haben; indem er aber behauptete, der Schluß sei nur dann beweisbar, wenn es sich um den Vergleich geschlossener Mannigfaltigkeiten handele, irrte er, und hat vermöge seiner großen Autorität durch diesen seinen Irrtum die Entwicklung lange gehemmt, indem die nachfolgenden Mathematiker (bis 1912) seinen Weg für den einzig gangbaren hielten. Seine Auffassung führte ihn dazu, an Stelle der von mir benutzten *offenen Kontinua* M_1, M_2 zwei andere Kontinua zu setzen, die wir (M_1), (M_2) nennen wollen, und die nach seiner Terminologie *geschlossen* sind.

Hier ist zunächst zu bemerken, daß er an keiner Stelle seiner Abhandlung ganz klar sagt, was er unter einer „geschlossenen Mannigfaltigkeit" (*multiplicité fermée*) versteht. Er stellt den Begriff nur in Gegensatz zu „*multiplicité ouverte* présentant un *bord*, une *frontière*". Hiernach sollte man annehmen, daß er an Mannigfaltigkeiten ohne Randpunkte denkt. Aber die bei ihm vorkommenden Mannigfaltigkeiten haben an sich sehr wohl Randpunkte, nur erfüllen diese Randpunkte Gebilde, deren Dimensionenzahl (sofern man von einer solchen bei ihnen überhaupt reden kann, was vom Standpunkte der heutigen Punktmengenlehre jedenfalls nachgeprüft werden müßte) um mindestens *zwei* Einheiten niedriger ist, als die der betrachteten Mannigfaltigkeiten selbst. Indem sich nun Poincaré, wieder in naiver Weise, auf die von Riemann und anderen Forschern gelegentlich ausgesprochene Behauptung stützt, eine q-dimensionale Mannigfaltigkeit könne nur von einer $(q-1)$-dimensionalen begrenzt oder zerschnitten werden — auch diesen Ansatz wird die heutige Punktmengenlehre nicht ohne weiteres gelten lassen —, erklärt er seine Mannigfaltigkeiten schlechtweg für „geschlossen". Korrekter hätte er also sagen müssen: Es ist möglich, (M_1) bzw. (M_2) durch Hinzunahme gewisser Grenzelemente, die ihrer Natur nach (M_1) und (M_2) nicht angehören, zu geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu ergänzen."

Welches sind nun die von H. Poincaré betrachteten (M_1), (M_2)? Für die Erklärung ist es einfacher, die Definition von (M_2) voranzustellen. Für jede einzelne

Gruppe von η-Substitutionen läßt sich auf die verschiedenste Weise ein System erzeugender Substitutionen und dem entsprechend um so mehr auf die verschiedenste Weise ein Fundamentalbereich auswählen. Unter allen diesen Fundamentalbereichen, die zu ein- und derselben Gruppe gehören, denkt sich Poincaré einen als „reduzierten" ausgezeichnet, genau so, wie man in der Theorie der elliptischen Funktionen unter allen Periodenparallelogrammen, die ein und derselben elliptischen Funktion zugehören, dasjenige als reduziertes auszuwählen pflegt, bei dem das Periodenverhältnis ω im Fundamentalbereich der Modulgruppe (vgl. Fig. 8 auf S. 24 dieses Bandes) liegt. Entsprechend wäre auf jeder Riemannschen Fläche, die in Vergleich gezogen wird, ein ganz bestimmtes Schnittsystem als „reduziertes" auszuzeichnen; statt dessen kann man natürlich die Fläche auch ganz unzerschnitten lassen, wie es in der Tat H. Poincaré tut. Um zusammenzufassen, vergleicht H. Poincaré also

a) die Mannigfaltigkeit (M_1) der unzerschnittenen Riemannschen Flächen mit bestimmter Signatur (p, n, l_k)

mit

b) der Mannigfaltigkeit (M_2) der „reduzierten" dem jeweiligen Normalfalle angehörenden Fundamentalbereiche von der gleichen Signatur und bestimmtem Typus. (Bei ihm kommt übrigens, aus sogleich zu erörterndem Grunde, nur der Grenzkreistypus vor; von den übrigen Fällen ist überhaupt nicht die Rede.)

An Stelle von b) kann man natürlich auch sagen:

Mit der Mannigfaltigkeit aller η-Gruppen von dem betreffenden Typus, die dem Normalfalle angehören.

(M_1) und (M_2) sind demnach Teilkontinua von M_1 bzw. M_2.

Der Kern des Poincaréschen Gedankenganges liegt nun in der genauen Untersuchung der (M_2) und ihrer Grenzelemente, die hinzuzufügen sind, um sie zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit zu machen[1]). In den einfachsten Fällen überblickt man den Sachverhalt ohne Mühe; z. B. läßt sich in dem schon oben herangezogenen Beispiele der elliptischen Funktionen die Mannigfaltigkeit M_2 darstellen durch die Gesamtheit aller ω-Werte mit positivem imaginären Teile, also gewiß eine offene Mannigfaltigkeit, während (M_2) durch die Gesamtheit der Punkte dargestellt wird, die in dem Fundamentalbereich der schon oben erwähnten Fig. 8 auf S. 24 liegen; diese ist aber vermöge der Ränderzuordnung, sofern man $\omega = i\infty$ hinzunimmt, eine geschlossene Mannigfaltigkeit. Zugleich läßt sich an diesem Beispiel eine andere wesentliche Bemerkung machen: während man den Punkten der reellen ω-Achse, d. i. der Grenze von M_2 im allgemeinen keine bestimmten Grenzpolygone (d. h. also hier ausgeartete Parallelogramme) zuordnen kann, ist das bei den Grenzpunkten, die zugleich dem reduzierten Bereich angehören, also den Grenzpunkten von (M_2), durchaus der Fall. Dem Punkte $\omega = i\infty$ von (M_2) — dies ist in unserem Beispiele der einzige Grenzpunkt von (M_2) — entspricht ein Periodenparallelogramm, dessen eine Seite im Verhältnis zur anderen unendlich groß geworden ist, d. h. ein halber Parallelstreifen. Man beachte ferner, daß bei unserem Beispiele die Mannigfaltigkeit der reduzierten Grenzpolygone eine um *zwei* Einheiten geringere Dimensionenzahl hat, als die Mannigfaltigkeit (M_2) selbst. Die entsprechenden Behaup-

[1]) Die Untersuchung von (M_1) berührt H. Poincaré nur in wenigen Zeilen. Daß (M_1) ein Kontinuum bildet, wird stillschweigend angenommen, daß es sich aber zu einer „geschlossenen" Mannigfaltigkeit ergänzen läßt, stützt er auf die oben erwähnte Behauptung Riemanns über die Grenzen q-dimensionaler Mannigfaltigkeiten. Damit zwei Stigmata zusammenfallen, oder zwei Verzweigungspunkte verschmelzen, sind jedesmal zwei reelle Bedingungen nötig. Die Randelemente, die man hinzunehmen muß, um (M_1) zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit zu machen, sind also Riemannsche Flächen von veränderten Signaturen, und erfüllen eine Mannigfaltigkeit, deren Dimensionenzahl um *zwei* kleiner ist, als die von (M_1).

tungen mutatis mutandis versucht nun H. Poincaré allgemein darzutun und ferner nachzuweisen, daß die „reduzierten Grenzpolygone“ in jedem Falle brauchbare Fundamentalbereiche von anderer Signatur sind, und daß sie den oben genannten Riemannschen Flächen von veränderter Signatur, also den Grenzelementen von (M_1), umkehrbar eindeutig entsprechen. In diesem Nachweise liegt die Hauptschwierigkeit seines Ansatzes. Daß er sie vollständig überwunden hat, kann man nicht behaupten. Denn erstens mußte er sich auf das Grenzkreistheorem beschränken, weil ihm bei den übrigen Fundamentaltheoremen die Fülle der möglichen Ausartungen des Fundamentalbereichs so unübersehbar schien, daß er noch 1910 äußerte, er halte aus diesem Grunde bei ihnen einen Kontinuitätsbeweis für aussichtslos! Zweitens verlangt er, und das charakterisiert die Unzulänglichkeit seines Beweises, was die Untersuchung der Grenzpolygone angeht, eine „discussion spéciale à chaque cas particulier“. In der Tat begnügte er sich auch damit, diese in den allerniedersten Fällen durchzuführen. Fricke hat in den „Automorphen Funktionen“ einige weitere niedere Fälle sehr eingehend behandelt und gezeigt, wie außerordentlich subtil schon bei diesen elementarsten Beispielen die Ränder der Mannigfaltigkeiten (M_1) und (M_2) und ihre Zuordnung betrachtet werden müssen, um den Kontinuitätsbeweis (im Sinne Poincarés) einwandfrei zu Ende zu führen.

Das Heranziehen der Grenzmannigfaltigkeiten kann ich, wegen der Unbestimmtheit, in der die allgemeinen Möglichkeiten bleiben, nicht für einen Vorteil halten. Die modernen Untersuchungen über die Existenz einer konformen Abbildung eines beliebigen einfach zusammenhängenden Flächenstückes auf eine Kreisfläche erledigen auch diese Aufgabe zunächst nur für das Innere der beiden Bereiche und gehen erst hinterher auf die außerordentlich mannigfachen Verhältnisse ein, welche für die Beziehung der beiderseitigen Randpunkte vorliegen können, ziehen aber letztere nicht als Begründung für die Existenz einer Abbildung überhaupt heran.

Aber auch im übrigen ist H. Poincarés Darstellung keineswegs einwandfrei. Vor allen Dingen muß gesagt werden, daß sie nicht in sich konsequent ist. Um gleich das Wichtigste zu nennen: Während ich *analytische* Abhängigkeit zwischen den beiden zu vergleichenden Mannigfaltigkeiten postuliere, so beweist H. Poincaré aus seinen Θ-Reihen nur deren *Stetigkeit*. (Das gleiche — sogar in größerer Allgemeinheit — hat in Verfolg meiner Riemannschen Ansätze später E. Ritter in den Math. Annalen, Bde. 45, 46 (1894/95) geleistet, worauf beiläufig verwiesen sei.) Will man auf Grund bloßer Stetigkeitsbetrachtungen argumentieren, so bedarf man im weiteren Verlaufe des von Poincaré noch als selbstverständlich angesehenen, aber erst später von Brouwer bewiesenen Satzes von der Invarianz des q-dimensionalen Gebietes bei jeder umkehrbar eindeutigen stetigen Abbildung. Aber mehr als das, indem er sich auf Beispiele beschränkt, macht er dabei doch von Fall zu Fall von dem analytischen Charakter der Beziehung zwischen den Mannigfaltigkeiten Gebrauch. Daß er auch sonst verschiedentlich sich auf stillschweigend gemachte Annahmen oder unbewiesene naive Vorstellungsweisen stützt, ist schon oben erwähnt worden.

Eine wesentliche Bereicherung der Hilfsmittel zum Kontinuitätsbeweise des Grenzkreistheorems boten die eingehenden Untersuchungen R. Frickes über das Kontinuum der Grenzkreispolygone von bestimmter Signatur bzw. dasjenige der entsprechenden Grenzkreisgruppen. Hierüber werde ich unten auf S. 743 ff. nähere Angaben folgen lassen.

Die entscheidende Wendung trat aber erst 1911/12 durch das Einsetzen der Untersuchungen von Brouwer und Koebe ein. (Ich halte um so mehr an der alphabetischen Reihenfolge fest, als die gegenseitige Beziehung der beiden Forscher nicht ganz geklärt ist.)[2]) Brouwer gelang es, indem er den Satz von der Invarianz

[2]) Hier sind folgende Veröffentlichungen der beiden zu nennen: Zunächst das Referat ihrer Vorträge in dem Bericht „*Zu den Verhandlungen betreffend automorphe Funktionen, Karlsruhe, am 27. Sept. 1911*“ in den Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Ver-

der Dimensionenzahl und dann den allgemeineren von der Invarianz des Gebietes bei beliebiger umkehrbar eindeutiger stetiger Abbildung streng bewies[3]), eine unentbehrliche Grundlage für den Kontinuitätsbeweis zu legen, sofern man auf den Nachweis des analytischen Charakters der zwischen den zu vergleichenden Mannigfaltigkeiten bestehenden Abhängigkeit verzichten will. Koebe konnte anderseits mit Hilfe seines „Verzerrungssatzes“ die von Poincaré an meiner Darstellung von 1882 gerügte Lücke ausfüllen, womit mein ursprünglicher Beweisansatz der offenen Kontinua gegenüber der schwierigen Poincaréschen Betrachtung der Grenzen wieder zu Ehren kam. So konnte Koebe auch das Rückkehrschnittheorem und das allgemeine Fundamentaltheorem mit Hilfe der Kontinuitätsmethode fassen, wie es meiner Absicht in Abh. CIII entsprach. Im übrigen hat Brouwer in der in [2]) unter I. zitierten Note die wesentlichen Punkte des Kontinuitätsbeweises so klar zusammengestellt, daß es mir zweckmäßig erscheint, vor der Erörterung weitererer Einzelheiten diese Zusammenstellung hier wörtlich abzudrucken; unter $\varkappa$ versteht Brouwer dabei eine „Klasse von diskontinuierlichen linearen Gruppen mit einer bestimmten charakteristischen Signatur“.

1. Die Klasse $\varkappa$ enthält zu jedem ihr angehörigen kanonischen System von Fundamentalsubstitutionen *ohne Ausnahme* eine durch $6p-6+2n$ reelle Parameter eineindeutig und stetig darstellbare Umgebung.
2. Bei stetiger Änderung der Fundamentalsubstitutionen innerhalb der Klasse $\varkappa$ ändert sich die entsprechende kanonisch zerschnittene Riemannsche Fläche ebenfalls stetig.
3. Zwei verschiedene kanonische Systeme von Fundamentalsubstitutionen der Klasse $\varkappa$ können nicht der selben zerschnittenen Riemannschen Fläche entsprechen.
4. Wenn eine Folge von kanonisch zerschnittenen mit n Punkten signierten Riemannschen Flächen vom Geschlechte p gegen eine kanonisch zerschnittene

einig., Bd. 21 (1912), S. 153 ff. (vgl. hierzu eine Anmerkung von Brouwer in Bd. 21 der Amsterdamer Proceedings, S. 707, Fußnote [2])); sodann zwei Noten von Brouwer in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1912:

I. *Über die topologischen Schwierigkeiten des Kontinuitätsbeweises der Existenztheoreme eindeutig umkehrbarer polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen.*
(Auszug aus einem Briefe an R. Fricke; vorgelegt am 13. Januar 1912), a. a. O., S. 603—606.

II. *Über die Singularitätenfreiheit der Modulmannigfaltigkeit.*
(Vorgelegt am 22. Juni 1912), a. a. O., S. 803—806.

Ferner folgende Arbeiten von Koebe:

I. *Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung. (Voranzeige.)*
Göttinger Nachrichten vom Jahre 1912, S. 879—896. (Vorgelegt ebenfalls am 13. Januar 1912.)

II. *Zur Begründung der Kontinuitätsmethode.*
Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 64 (1912), S. 58—62. (Vorgelegt am 19. Februar 1912, druckfertig erklärt am 6. Juni 1912.)

III. *Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven IV.*
Math. Annalen, Bd. 75 (1914), S. 42—129.

In einer Reihe späterer Aufsätze, deren Aufzählung zu weit führen würde, ist Koebe auf die Kontinuitätsmethode und ihre mannigfachen Anwendungen zurückgekommen.

[3]) *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl*, Math. Annalen, Bd. 70 (1910/1911), S. 161—165 und *Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets*, Math. Annalen, Bd. 71 (1911/1912), S. 305—313.

mit n Punkten signierte Riemannsche Fläche vom Geschlechte p konvergiert und wenn jeder Fläche der Folge ein kanonisches System von Fundamentalsubstitutionen der Klasse $\varkappa$ entspricht, so entspricht der Limesfläche ebenfalls ein kanonisches System von Fundamentalsubstitutionen der Klasse $\varkappa$.

5. Die kanonisch zerschnittenen mit n Punkten signierten Riemannschen Flächen vom Geschlechte p bilden bei Zugrundelegung des Riemannschen Klassenbegriffes eine stetige Mannigfaltigkeit, welche zu jeder ihr angehörigen Fläche *ohne Ausnahme* eine durch $6p-6+2n$ reelle Parameter eineindeutig und stetig darstellbare Umgebung enthält.
6. Im r-dimensionalen Raume ist das eineindeutige und stetige Bild eines r-dimensionalen Gebiets wiederum ein Gebiet.

Der Satz 1. ist an sich klar, da man die an gewisse analytische Gleichungen und Ungleichungen gebundenen Koeffizienten der erzeugenden Substitutionen sicherlich durch die angegebene Zahl unabhängiger Parameter darstellen kann. Ich habe in Abh. CIII darüber hinaus als selbstverständlich angesehen, was für den Kontinuitätsbeweis selber nicht benötigt wird, daß die Mannigfaltigkeit M_2 ein einziges Kontinuum bildet, eine Auffassung, gegen die Koebe (Göttinger Nachrichten v. J. 1912, S. 884, Fußnote [2]) und Math. Annalen, Bd. 75, S. 50) Einspruch erhoben hat. Koebe selbst erschließt diese Tatsache erst hinterher aus dem bewiesenen Fundamentaltheorem und der „Einheit" der Mannigfaltigkeit M_1. Dies ist ein offensichtlicher Umweg, und ich halte an der Forderung fest, man solle die Einheit des Kontinuums M_2 durch direkte geometrische Erwägungen in Evidenz setzen. Im Grenzkreisfalle folgt die genannte Behauptung aus den oben erwähnten Frickeschen Untersuchungen.

An Stelle von 2. habe ich analytische Abhängigkeit postuliert, wodurch für mich der, wie oben erwähnt, von Brouwer erledigte Punkt 6. fortfiel. Über H. Poincarés Stellungnahme zu diesem Punkte habe ich schon berichtet. Koebe legt seinen Betrachtungen gleichfalls nur die Stetigkeit der Beziehung zugrunde, betont aber, daß er in allen Fällen es auch für möglich halte, den analytischen Charakter der Abhängigkeit darzutun. (Vgl. Math. Annalen, Bd. 75, S. 51.) Durchgeführt hat er dies nur, in knappester Form, für das Rückkehrschnittheorem (vgl. a. a. O., S. 82); er erzählte mir aber kürzlich in einer Unterhaltung, daß er die analytische Abhängigkeit bei den übrigen Fällen des Fundamentaltheorems auf das als nunmehr bewiesen anzusehende Rückkehrschnittheorem zurückführen zu können glaube.

Der dritte Punkt von Brouwer ist der heute sogenannte „Unitätssatz". Er kommt, wie ich in meiner Abhandlung CIII gezeigt habe, auf die beiden Lemmata hinaus, daß jede umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Inneren eines Kreises auf sich selbst, ferner, daß jede umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der ganzen Kugel, von der man nur unendlich viele zerstreut liegende Punkte ausnimmt, bei denen nur die Stetigkeit der Abbildung, nicht ihre Konformität als bekannt vorausgesetzt wird, durch eine lineare Funktion vermittelt wird. Der erste von diesen Sätzen war bereits zu der Zeit, als ich meine Arbeit schrieb, anerkannt; den zweiten hat Koebe in seinen ersten Arbeiten, in welchen er die Fundamentaltheoreme nach anderen Methoden bewies, erledigt. Meinen Gedankengang von § 3 (S. 703—704), bei dem allgemeinen Fundamentaltheorem durch fortgesetztes Spiegeln an unendlich vielen Grenzkreisen den Unitätssatz auf das zweite Lemma zurückzuführen, hat Koebe unverändert beibehalten.

Ehe ich auf Punkt 4. eingehe, will ich Punkt 5. vorwegnehmen. Anstatt den Beweis des fraglichen Satzes auf die Einheit des Kontinuums der in meiner Überlegung am Schlusse von § 2 (S. 701) benutzten Kreisscheiben mit stückweise analytischer Ränderzuordnung zu gründen, hat Koebe es vorgezogen, ihn zunächst nur für das Rückkehrschnittheorem zu erbringen, indem er die längs p einander nicht kreuzenden Rückkehrschnitten aufgeschnittenen Riemannschen Flächen auf schlichte Bereiche konform abbildet, die von $2p$ regulären geschlossenen, paarweise durch analytische Randsubstitutionen verbundenen, Randkurven begrenzt werden, und dann die

Einheit des Kontinuums dieser Bereiche nachweist. Für die übrigen Fundamentaltheoreme läßt sich der Satz leicht auf das hiermit Bewiesene zurückführen. — Brouwer hingegen zeigte (vgl. den oben genannten Vortrag in Karlsruhe und die dort gleichfalls zitierte Note I), daß sich die Benutzung dieses Satzes umgehen läßt indem man, $m > 2p-2$ vorausgesetzt, an Stelle von M_1 die Mannigfaltigkeit „der aus m numerierten Blättern zusammengesetzten, über der Ebene ausgebreiteten, mit n im Endlichen gelegenen Punkten signierten Riemannschen Flächen vom Geschlechte p mit $2m+2p-2$ numerierten einfachen, im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkten" setzt, wobei er für die Anordnung der Blätter und der Verzweigungspunkte das Lüroth-Clebschische Schema voraussetzt (genau wie oben in Nr. XCIX, S. 542 u. S. 558), und an Stelle von M_2 die Mannigfaltigkeit der zur Klasse $\varkappa$ gehörigen automorphen Funktionen mit ausschließlich einfachen Kreuzungspunkten und m einfachen, außerhalb der singulären Stellen der Gruppe liegenden Polen im Fundamentalbereich zu Grunde legt. Er hat aber auch selber für den von ihm formulierten Satz 5. einen strengen Beweis gegeben in seiner oben unter II. zitierten Note. Dabei äußert er Zweifel, ob für die unzerschnittenen Riemannschen Flächen sich der Satz aufrecht erhalten läßt, so daß die Betrachtung der zerschnittenen Riemannschen Flächen vorläufig ihre Vorzüge hat.

Den sehr wesentlichen Punkt 4. hat Koebe durch seinen bemerkenswerten „Verzerrungssatz" der konformen Abbildung begründet; derselbe besagt, um auf eine spätere Äußerung von Bieberbach [vgl. Math. Zeitschr., Bd. 4, (1919), S. 295] zurückzugreifen, daß bei schlichter konformer Abbildung der Maßstab der Abbildung nicht allzu stürmisch von Ort zu Ort wechseln kann. Wie wird nun dieser Satz zur Anwendung gebracht? Wenn eine Folge $F_1, F_2, \ldots$ von zerschnittenen Flächen der Mannigfaltigkeit M_1 gegen eine Fläche F konvergiert, die selbst dem Inneren von M_1 angehört, und wenn jeder der Flächen $F_1, F_2, \ldots$ ein Fundamentalbereich entspricht, so können diese Fundamentalbereiche vermöge des Verzerrungssatzes schließlich nur so wenig der eine vom anderen abweichen, daß sie in der Grenze ihrerseits gegen einen Fundamentalbereich konvergieren müssen, der dem Inneren von M_2 angehört und dem in M_1 gerade die Fläche F entspricht. Hiermit ist das Auftreten unzugänglicher Inselufer widerlegt und der Kontinuitätsbeweis zu Ende geführt.

Ich möchte aber doch erläutern, wie in Abh. CIII das Nichtauftreten der „Inseln" gemeint war, indem ich nämlich den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, wie ich ihn vor mir sah und oft in Vorlesungen vorgetragen habe, in der mir geläufigen Ausdrucksweise hersetze. Schreiben wir

$$w = f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

so entspricht jedem Werte von z bestimmt ein Wert von w. Es soll gezeigt werden, daß jedem Werte von w n Werte von z entsprechen, daß sich also über die w-Ebene als Bild der z-Ebene eine durch keine Öffnungen („Inseln") unterbrochene n-blättrige Riemannsche Fläche hinzieht. Wir markieren in der w-Ebene den Punkt ∞ und, indem wir für Gleichungen $(n-1)$-ten Grades den Satz schon als bewiesen ansehen, die höchstens $n-1$ verschiedenen Punkte $e_1, e_2, \ldots$, für welche $f'(z) = 0$ ist. Dann konstruieren wir, um mit möglichst wenig Schritten zum Ziele zu gelangen, alle Kreisscheiben (bezw. Halbebenen), welche genau drei dieser Punkte auf ihrem Rande und keinen im Innern enthalten. Wenn diese Kreisscheiben zusammen die w-Ebene noch nicht überdecken sollten, so lege man noch endlich viele weitere Kreisscheiben darauf, welche ebenfalls keinen der Punkte $\infty, e_1, e_2, \ldots$ im Innern enthalten, und welche dieses zuwege bringen. Die gesamten Kreisscheiben sollen einander dachziegelartig überdecken (nicht nur an einander grenzen). Nun wird von denjenigen Punkten w, denen n Wurzeln der Gleichung $w = f(z)$ entsprechen, wegen der Stetigkeit des Polynomes $f(z)$ ein Kontinuum der w-Ebene überdeckt. Denn läßt man z seine Ebene überstreichen, so erhält man jedenfalls solche Werte w, denen mindestens eine Wurzel entspricht; da wir aber vorausgesetzt haben, daß für Gleichungen $(n-1)$-ten

Grades der Satz schon bewiesen sei, folgt hieraus für diese Werte w sogleich die Existenz von n verschiedenen Wurzeln. Fiele dieses Kontinuum nun nicht mit der ganzen w-Ebene (ausschließlich der Punkte ∞, e_1, $e_2 \ldots$) zusammen, so nehme man irgendeinen Punkt w_0 innerhalb des Kontinuums, der gemäß unserer Konstruktion dem Inneren einer unserer Kreisscheiben angehört. Sind dann $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ die zu w_0 gehörigen Wurzeln, so lassen sich nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie n verschiedene nach Potenzen von $\frac{w-w_0}{w-\overline{w}_0}$ ($\overline{w}_0$ bedeutet hier den Spiegelpunkt zu w_0 in bezug auf den Rand der w_0 enthaltenden Kreisscheibe) fortschreitende Reihenentwicklungen angeben, die für $w = w_0$ bzw. in $z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ übergehen, sämtlich der Gleichung $w = f(z)$ genügen und mindestens innerhalb der w_0 enthaltenden Kreisscheibe konvergieren. Das will sagen, daß eine in der Riemannschen Fläche etwa vorhandene Öffnung erst jenseits der benutzten Kreisscheibe beginnen kann. Da aber die Kreisscheiben einander dachziegelartig überdecken, gelangt man durch analytische Fort-Fortsetzug sogleich in eine Nachbarscheibe, die über die erste hinausgreift, dann wieder in eine neue usw., und erschöpft mit endlich vielen Schritten die ganze w-Ebene. So bleibt für irgendwelche Öffnungen der Riemannschen Fläche überhaupt kein Raum übrig. W. z. b. w.

Ich wünsche jetzt zum Schlusse noch näher zu erläutern, wie ich mir die zwischen beiden Mannigfaltigkeiten bestehende analytische Abhängigkeit und den Charakter der analytischen Bedingungen denke, vermöge derer aus der Gesamtheit der auf dem algebraischen Gebilde unverzweigten bzw. nur in den Stigmaten in vorgeschriebener Weise verzweigten η-Funktionen jedesmal die zu dem betreffenden Fundamentaltheorem gehörige ausgeschieden wird. Hierzu knüpfe ich am liebsten an ein konkretes Beispiel an, nämlich den hyperelliptischen Fall $p = 2$. Denn einerseits lassen sich bei den hyperelliptischen Fällen alle Zwischenformeln wirklich hinschreiben, andererseits ist es für höheres p nicht ohne weiteres ersichtlich, wodurch sich die hyperelliptischen Fundamentalbereiche vor den allgemeinen auszeichnen, während bei $p = 2$ ja nur der hyperelliptische Fall existiert. Allerdings kann ich meine Gedanken schon deshalb nur in allgemeinen Umrissen andeuten, weil ich zum Teil auf die Entwicklungen über lineare Differentialgleichungen in Bd. 2 dieser Ausgabe zurückgreifen, zum Teil auch auf die im vorliegende Bande hier erst folgenden Nummern CVI, CVII verweisen muß. Stigmata lasse ich beiseite, um die Grundgedanken nicht noch durch komplizierte Einzelheiten zu verhüllen; ich betrachte also die auf der Riemannschen Fläche unverzweigten Differentialgleichungen.

Ihnen habe ich auf S. 544 des zweiten Bandes dieser Ausgabe (vgl. auch S. 585 daselbst, wo nur statt F der Buchstabe Π gebraucht wird) bei Benutzung binärer Variabelen x_1, x_2 die folgende Gestalt gegeben:

$$(*) \qquad (f_6, F)_2 = \varphi_2 \cdot F,$$

deren Lösungen F als binäre Formen vom Grade $-\frac{1}{2}$ gedacht sind, die nirgends unendlich werden. $f_6 = 0$ bestimmt dabei die 6 Verzweigungspunkte der hyperelliptischen Fläche; die 3 Koeffizienten von φ_2 vertreten die „akzessorischen Parameter". Die Frage ist, ob letztere allemal (auf eine und nur eine Weise) so bestimmt werden können, daß der Quotient $F_1 : F_2$ zweier Partikularlösungen von (*), welcher als η zu bezeichnen sein wird, die zweckmäßig zerschnittene hyperelliptische Fläche $\sqrt{f}$ auf einen Bereich abbildet, wie er dem jeweiligen Fundamentaltheoreme entspricht. Es ist zunächst zu zeigen, daß für eine beliebige η-Funktion die Bestimmungsstücke des Bildbereiches analytische ganze Funktionen der Koeffizienten von f_6 und φ_2, d. h. von den Moduln der hyperelliptischen Fläche und den akzessorischen Parametern der Gleichung (*) sind, solange f keine Doppelwurzel erhält und die Zerschneidung nicht ausartet.

Ein erster Schritt in dieser Richtung ist der Nachweis, der nicht schwer fallen sollte (und der auch in den ersten vier Paragraphen von H. Poincarés oft genannter Arbeit in Bd. 4 der Acta Math. mutatis mutandis besprochen wird), daß die Koeffizienten der homogenen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, welche irgend zwei Partikularlösungen F_1 und F_2 von (*) bei einem geschlossenen Wege auf der Riemannschen Fläche erleiden, reguläre analytische Funktionen der Koeffizienten von f und φ sind, NB. für jedes Wertesystem, welches diese annehmen können ohne daß die Gleichung $f = 0$ eine Doppelwurzel erhält.

Aber schon die Arbeiten LXV, LXVIII, LXIX in Bd. 2 dieser Ausgabe und weiterhin die hier nachfolgende Abhandlung CVI zeigen, daß der Bildbereich auf der η-Kugel (immer natürlich abgesehen von den linearen Substitutionen, denen man die η-Kugel unterwerfen mag) durch Angabe der Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$, welche die Randstücke zusammenordnen, noch keineswegs bestimmt ist; es sind dazu vielmehr noch die Überschlagungs- und Überdeckungszahlen notwendig. (Vgl. die Ausführungen auf S. 770 ff.). Hier greift nun die in Nr. CV entwickelte Auffassung ein, gemäß der die Umlaufssubstitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ nicht sogleich als fertige auftreten, sondern allmählich durch Aneinanderreihung unendlich vieler unendlich kleiner Substitutionen erwachsen. Indem man diesen Entstehungsprozeß genau verfolgt, erscheint es unzweifelhaft, daß man auch die Überschlagungs- und Überdeckungszahlen der η-Bereiche durch analytische Funktionen der Koeffizienten von f und φ wird fassen können. (Etwa in der Weise, wie man die Anzahl der Umläufe, die ein Punkt z um den Nullpunkt der z-Ebene beschrieben hat, durch die Änderung des imaginären Teiles der Funktion $\log z$ messen kann).

Welches sind nun die Bedingungen, die bei gegebenen Moduln der Riemannschen Fläche die akzessorischen Parameter z. B. dem Rückkehrschnitttheoreme entsprechend festlegen? Da ist zunächst klar, daß die p linearen Substitutionen, die η erfährt, wenn es die auf der Fläche gezogenen p Rückkehrschnitte durchläuft, sich mit der identischen Substitution decken müssen. Das sind $3p$ analytische Bedingungen für die verschiedenen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ (also in unserem Beispiele auch für die Koeffizienten von f und φ), von denen aber drei als Folge der übrigen in Abzug zu bringen sind, da die auf den letzten Rückkehrschnitt bezügliche Forderung von selbst erfüllt ist, wenn die den $p-1$ übrigen Schnitten entsprechenden Umlaufssubstitutionen der Identität gleich sind. Um nun das Grundtheorem von den zugehörigen Obertheoremen (siehe Abh. CVI) zu unterscheiden, treten weiter die Bedingungen hinzu, daß η erst nach voller Durchlaufung der Rückkehrschnitte die identische Substitution erfahren hat, nicht etwa schon nach einer halben, einer drittel usw. Durchlaufung. Aber auch diese Bedingungen drücken sich, nach der oben dargelegten Forderung, durch analytische Funktionen der Koeffizienten von f und φ aus.

Noch komplizierter wird die Sache bei dem anderen extremen Falle, dem Grenzkreistheorem. Wählen wir als Grenzkreis die reelle Axe, so ist auszudrücken — Stigmata lasse ich wieder der Einfachheit halber beiseite —, daß die imaginären Teile der Koeffizienten derjenigen $2p$ Substitutionen, die η erfährt, wenn sein Argument die $2p$ Schnitte A_i, B_i auf der Fläche durchläuft, gleich Null sind. Wenn wir oben die Substitutionskoeffizienten als analytische Funktionen der Koeffizienten von f und φ fanden, so haben wir jetzt die gesonderten reellen und imaginären Teile der Substitutionskoeffizienten als Funktionen der gesonderten reellen und imaginären Teile der Koeffizienten von f und φ auszudrücken. Natürlich gibt das wieder analytische Funktionen, aber wir befinden uns in dem Gebiete doppelt so vieler (reeller) analytischer Funktionen von doppelt so vielen (reellen) Variablen. Hinzu treten selbstverständlich wieder die auf die Überschlagungszahlen bezüglichen Bedingungen.

Es käme nun darauf an, diese Betrachtungen vom Falle $p = 2$ auf die allgemeineren Fälle zu übertragen. Da handelt es sich zunächst darum, die unverzweigten Differentialgleichungen für beliebige höhere algebraische Gebilde in zweckmäßiger Form herzustellen. Es wird nicht schwer sein, für die nächstfolgenden Fälle $p=3$, $p=4$, $p=5$, wo die Normalkurve der φ eine ebene Kurve 4-ter Ordnung ist, bzw. eine Raumkurve 6-ter Ordnung, in der sich eine Fläche 2-ten und eine 3-ten Grades schneiden, oder endlich eine Kurve 8-ter Ordnung im Raume von 4 Dimensionen, in der sich 3 Flächen zweiten Grades durchsetzen, ähnliche Formeln wie die oben angeschriebene Formel (*) in Ansatz zu bringen. Für höhere p aber ergeben sich Schwierigkeiten. Man kennt zwar nach M. Noether[4]) die genaue Zahl der Flächen m-ter Ordnung ($m=2, 3, 4, \ldots$), welche durch die Kurve der φ gehen, auch hat Petri[5]) neuerdings gezeigt, daß im allgemeinen die Flächen zweiter Ordnung allein genügen, um die Kurve der φ rein darzustellen und daß nur in einigen besonderen Fällen noch Flächen dritter Ordnung hinzugezogen werden müssen; aber man ist bisher nicht in der Lage, die übergroße Zahl der Flächen zweiter und dritter Ordnung so explizite hinzuschreiben, daß ihre Koeffizienten nach Berücksichtigung beliebiger linearer Transformation der φ die $3p-3$ Riemannschen Moduln der Kurve glatt erkennen lassen. Es wird dies wahrscheinlich keine schwere Aufgabe sein, die aber bei dem Fehlen neuer algebraisch-geometrischer Untersuchungen dieser Fragen vorläufig unerledigt ist.

Es bleibt, daß ich kurzen Bericht erstatte, in welcher Weise ich selbst später in längeren Zwischenräumen auf die hier berührten Fragen zurückgekommen bin.

1. Ich habe zunächst eine dreisemestrige Vorlesung über hypergeometrische Funktionen und lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu nennen. (Sommer 1890 bis Herbst 1891), auf die in Bd. 2 dieser Ausgabe schon verschiedentlich Bezug genommen ist, und die zu zwei von mir selbst ausgearbeiteten autographierten Heften Anlaß gegeben hat, die nicht in den Buchhandel gekommen, aber doch vielfach verqreitet worden sind. (Vgl. unten S. 748 u. 771.) In dieser Vorlesung war verschiedentlich von der Theorie der automorphen Funktionen die Rede; so findet sich z. B. ein längerer Abschnitt über die Poincaréschen Reihen (vgl. unten S. 745/46), ferner ein historisches Kapitel, in dem unter anderem über H. Poincarés Arbeit in Bd. 4 der Acta Math. referiert wird. Auch die Beweise des Fundamentaltheorems mit Hilfe der Überlagerungsfläche oder der Methode des Bogenelementes werden besprochen. Das Prinzip meines Kontinuitätsbeweises wird hier nur an zwei einfachsten Beispielen berührt und im übrigen die Frage nach der Abbildung der geeignet zerschnittenen Riemannschen Fläche auf die η-Ebene in ihrer Abhängigkeit von den akzessorischen Parametern in Verbindung mit dem von mir aufgestellten allgemeinen Oszillationstheorem der linearen Differentialgleichungen verfolgt. Dies ist ein neuer notwendiger Gesichtspunkt, der in den beiden letzten noch folgenden Nummern CVI und CVII dieses Bandes genauer betrachtet werden wird. Ebendeshalb wurden damals die Autographien nur für den engeren Kreis meiner Schüler ausgegeben. Denn ich hatte mehr meine Phantasie spielen lassen, als Beweise ausgeführt, insbesondere war die Verzögerung, die für das Oszillationstheorem bei Überschreitung der Stieltjesschen Grenze entsteht (vgl. Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 597 und die anschließenden allgemeineren Arbeiten von Hilb und Haupt in den Math. Annalen, Bd. 89, der demnächst erscheinen wird) noch nicht klar erkannt. Ich habe die betreffenden Überlegungen Herbst 1891 in einem nicht publizierten, von Borkum datierten Manuskript zusammengefaßt, auf welches in der Folge (siehe die Ausführungen auf S. 770 ff.) noch zurückzukommen sein wird.

---

[4]) Vgl. *Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen*, Math. Annalen, Bd. 17 (1880/81), S. 263—284.

[5]) Vgl. *Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen*, Math. Annalen, Bd. 88 (1922/23), S. 242—289.

2. Ich habe dann vom Herbst 1893 bis zum Herbst 1894 über dieselben Fragen wiederholt gelesen, indem ich den Stoff durch Weglassung der noch zweifelhaften Überlegungen wesentlich einschränkte. So sind die von E. Ritter ausgearbeiteten Autographieen entstanden, über welche in Bd. 2 dieser Ausgabe, in den Referaten Nr. LXVIII, LXIX auf S. 578—597, ausführlich berichtet ist. Der Kontinuitätsbeweis des Fundamentaltheorems der automorphen Funktionen wird dabei nur in der vorletzten Stunde des zweiten Semesters an dem Beispiel der elliptischen Modulfunktion $J(\omega)$ erläutert. Ich war damals durch anderweitige Berufsgeschäfte stark in Anspruch genommen worden und muß Verdienst und Verantwortung für den Wortlaut des Textes in weitgehender Weise dem Bearbeiter überlassen. Ich konnte das um so mehr, als ich die große Gewissenhaftigkeit und das eindringende Verständ- von E. Ritter besonders hoch einschätzte. Aber was dort auf S. 512 über $J(\omega)$ gesagt wird, kann ich in dieser Weise gar nicht vorgetragen haben, wo ich das Verhalten von $J(\omega)$ beim Herangehen an die Grenze, d. i. die reelle ω-Axe, längst genau kannte. Es wird überdies durch die Bemerkung auf S. 513 daselbst, die unbestimmte Zweifel erhebt, wieder aufgehoben.

3. Über die Veröffentlichungen von Fricke und Ritter, die als Vorarbeiten für die „Automorphen Funktionen“ dienen sollten, wird in dem folgendem Referat über dieses Werk genauer berichtet.

4. Erst im Sommer 1899 bin ich wieder dazu gekommen, über automorphe Funktionen zu lesen. Die Ausarbeitung hat damals der ebenfalls früh verstorbene H. v. Schaper gemacht; sie hat, wie alle Ausarbeitungen meiner Vorlesungen bis zum Jahre 1913 im hiesigen mathematischen Lesezimmer zu allgemeiner Benutzung ausgelegen. Die Poincaréschen Reihenentwicklungen werden für zahlreiche Einzelfälle studiert; das Fundamentaltheorem aber unter Festhaltung meines ursprünglichen Ansatzes, nicht an die Grenzen zu gehen, indes nur für einen besonders einfachen Fall, bei dem nur ein reeller akzessorischer Parameter zur Verfügung steht, beiläufig erörtert.

5. Endlich folgt 1905—1907 ein über vier Semester sich hinziehendes Seminar, an dem auch Hilbert und Minkowski, dann Koebe, Bieberbach, Ihlenburg, Graf, Rothe teilnahmen (ich nenne nur diejenigen Teilnehmer, die zu eigenen Veröffentlichungen über die behandelten Gegenstände gekommen sind). Meine eigenen damaligen Vorträge wurden (eine Zeit lang) von Toeplitz ausgearbeitet. Ich habe in den letzten zwei Semestern ganz besonders wieder die Abhängigkeit der konformen Abbildung von den akzessorischen Parametern der linearen Differentialgleichung studiert. Von hier aus ist, indem ich mich auf den niedersten Fall, $p=0$ mit vier reellen Stigmaten, beschränkte, die nachfolgende Abh. CVI entstanden, die ich Ostern 1907 Gordan zu seinem 70. Geburtstage in Erlangen als Festschrift überreichte. Hier hat dann Hilb, der gleichfalls in Erlangen war, und dem ich meine Überlegungen vortragen konnte, eingesetzt und die Betrachtungen durch relativ elementare Mittel ein wesentliches Stück weiterführen können. Auch hier handelt es sich um einen Kontinuitätsbeweis, es werden aber die akzessorischen Parameter und nicht die Moduln als variabel betrachtet. (Vgl. wieder die Ausführungen unten auf S. 770 ff.)

K. (mit B.-H.).

Bericht betreffend die „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen von R. Fricke und F. Klein“.

In zwei Bänden, Leipzig, bei B. G. Teubner 1897—1912.

Entsprechend dem allgemeinen Plane, welcher der vorliegenden Neuausgabe meiner wissenschaftlichen Abhandlungen zugrunde liegt, berichte ich hier über das in der Überschrift genannte, umfangreiche Werk, das eine wesentliche Vervollständigung meiner vorstehend als Nr. CI—CV abgedruckten Arbeiten, wie übrigens auch der in Vergleich kommenden Poincaréschen Veröffentlichungen vorstellt. Es kann sich hier natürlich nur darum handeln, die Entstehung und die Hauptpunkte des Inhaltes in ganz kurzer Übersicht zu charakterisieren.

Da ist zunächst zu sagen, daß es sich um die abschließende Durchführung des allgemeinen Programms handelt, welches ich 1884 durch die Herausgabe der „Vorlesungen über das Ikosaeder“ begann, und dann 1890—92 mit wesentlicher Unterstützung von R. Fricke in den „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen“ fortsetzte. Aber in den langen Jahren, welche seitdem verstrichen sind, traten an jeden von uns andersgeartete dringende Arbeitsverpflichtungen heran, die mit der Fortführung der uns auferlegten Unterrichtsaufgabe und den dadurch gegebenen organisatorischen Problemen zusammenhingen. So ist es gekommen, daß bei der Redaktion der „Automorphen Funktionen“ ich selbst nur noch verhältnismäßig wenig beteiligt war und auch Fricke sich ihr nur in getrennten Zeiträumen widmen konnte. Dieses Sachverhältnis findet seinen Ausdruck in dem Titel des Gesamtwerkes, bei welchem der Name von R. Fricke voransteht, und übrigens in den Erscheinungsdaten der einzelnen Lieferungen. Band I erschien 1897, Band II aber in drei Lieferungen, die bzw. von 1901, 1911 und 1912 datiert sind. Verzögernd wirkte auch, daß zahlreiche Fragen der Theorie der automorphen Funktionen noch der klärenden Untersuchung bedurften; Fricke selbst hat zu diesem Ausbau der Theorie durch eine große Zahl von Veröffentlichungen in den Göttinger Nachrichten und den Mathematischen Annalen[1]) wesentlich beigetragen.

[1]) Die Titel der Frickeschen Abhandlungen sind in chronologischer Reihenfolge diese:

Über eine besondere Klasse diskontinuierlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen, I und II. Math. Annalen, Bd. 38 (1890/91).
Spezielle automorphe Gruppen und quadratische Formen. Math. Annalen, Bd. 39 (1891).
Weitere Untersuchungen über automorphe Gruppen, deren Substitutionskoeffizienten Quadratwurzeln ganzer Zahlen enthalten. Math. Annalen, Bd. 39 (1891).
Über den arithmetischen Charakter der zu den Verzweigungen (2, 3, 7) *und* (2, 4, 7) *gehörigen Dreiecksfunktionen.* Math. Annalen, Bd. 41 (1892).
Zur gruppentheoretischen Grundlegung der automorphen Funktionen. Math. Annalen, Bd. 42 (1892).

Sprechen wir zunächst vom ersten Band. Dieser enthält die gruppentheoretischen Grundlagen. Da ist es ganz wesentlich, daß man sich von vornherein der Vorstellungen der Nicht-Euklidischen Geometrie und desjenigen Übertragungsprinzipes, das ich z. B. in § 7 meines Erlanger Programmes [= Nr. XXVII in Bd. 1 dieser Ausgabe] ausgesprochen habe, bedient. Ordnet man in üblicher Weise dem Wertevorrat einer komplexen Variabeln ζ die Punkte einer Kugel zu, so entspricht jeder linearen Substitution von ζ, also jeder kreisverwandten Umformung auf der Kugeloberfläche, eine projektive Transformation der die Kreise tragenden Ebenen. Diese Kollineationen, die die Kugelfläche festlassen, sind Nicht-Euklidische Bewegungen mit der Kugel als Cayleyscher Fundamentalfläche. Man nehme nun einen Punkt C_0 im Innern der Kugel beliebig an und konstruiere alle mit ihm vermöge der zu betrachtenden Gruppe von ζ-Substitutionen äquivalenten Punkte $C_1, C_2, \ldots$. Um diese Punkte als Mittelpunkte beschreibe man (im Sinne der Maßbestimmung) gleichgroße zunächst sehr kleine Kugeln. Nun lasse man deren Radien gleichmäßig wachsen, bis sie sich mit Ebenen aneinanderlegen. So ist eine Einteilung des Kugelinnern in (im Sinne der Maßbestimmung) kongruente „Normalpolyeder“ entstanden, deren Schnitt mit der Kugeloberfläche diese im günstigen Falle in Diskontinuitätsbereiche der betrachteten Gruppe zerlegt. Überlegt man, welche Einteilungen möglich sind, so erhält man eine vollständige und sachgemäße Systematik aller „eigentlich diskontinuierlichen“ Gruppen linearer Sub-

Entwickelungen zur Transformation fünfter und siebenter Ordnung einiger spezieller automorpher Funktionen. Acta math., Bd. 17 (1893).
Über indefinite quadratische Formen mit drei und vier Variabeln. Gött. Nachr. 1893.
Über die Transformationstheorie der automorphen Funktionen. Math. Annalen, Bd. 44 (1893/94).
Die Kreisbogenvierseite und das Prinzip der Symmetrie. Math. Annalen, Bd. 44 (1894).
Eine Anwendung der Idealtheorie auf die Substitutionsgruppen der automorphen Funktionen. Gött. Nachr. 1894.
Zur Theorie der ternären quadratischen Formen mit ganzen komplexen Koeffizienten. Gött. Nachr. 1895.
Über die Diskontinuitätsbereiche der Gruppen reeller linearer Substitutionen einer komplexen Variabeln. Gött. Nachr. 1895.
Über die Theorie der automorphen Modulgruppen. Gött. Nachr. 1896.
Notiz über die Diskontinuität gewisser Kollineationsgruppen. Math. Annalen, Bd. 47 (1886).
Über eine einfache Gruppe von 360 Operationen. Gött. Nachr. 1896.
Über eine einfache Gruppe von 504 Operationen. Math. Annalen, Bd. 52 (1899).
Die Ritterschen Primformen auf einer beliebigen Riemannschen Fläche. Gött. Nachr. 1900.
Die automorphen Elementarformen. Gött. Nachr. 1900.
Zur Theorie der Poincaréschen Reihen. Jahresbericht der deutsch. Math. Ver. 9 (1900).
Über die Poincaréschen Reihen der (— 1)*-ten Dimension.* Festschrift für R. Dedekind, Braunschweig 1901.
Über die in der Theorie der automorphen Funktionen auftretenden Polygonkontinua. Gött. Nachr. 1903.
Beiträge zum Kontinuitätsbeweise der Existenz linear-polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Annalen, Bd. 59 (1904).
Neue Entwicklungen über den Existenzbeweis der polymorphen Funktionen. Verhandlungen des 3. intern. Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg 1904.
Zur Transformationstheorie der automorphen Funktionen. Gött. Nachr. 1911 und 1912.

stitutionen. Die Umkreisung der Polyederkanten liefert die „primären“ und „sekundären“ Relationen zwischen den Gruppenerzeugenden.

Abgesehen von den zyklischen Gruppen und den Nichtrotationsgruppen mit zwei Grenzpunkten sind die Rotationsgruppen, d. h. diejenigen, bei denen alle Polyederflächen durch *einen* Punkt gehen, von besonderem Interesse. Je nachdem ob dieser Fixpunkt innerhalb, auf oder außerhalb der Kugel liegt, erhält man die elliptischen Rotationsgruppen (Gruppen der regulären Körper), die parabolischen Rotationsgruppen (Gruppen der doppeltperiodischen Funktionen) oder die hyperbolischen Rotationsgruppen (Gruppen mit Hauptkreis). Frickes Untersuchungen gelten nun besonders den Hauptkreisgruppen. Der Schnitt der Polarebene des Fixpunktes mit der Polyedereinteilung liefert in dieser Ebene eine Einteilung in „Normalpolygone“. Da es sich um projektive Eigenschaften handelt, wollen wir von der Einteilung des Innern einer Ellipse in „Normalpolygone“ sprechen, deren Erzeugung ganz entsprechend wie im Raume zu denken ist. Und zwar können wir uns auf das *Innere* der Ellipse beschränken, weil nur dieses funktionentheoretische Bedeutung hat. Denn bei der Abbildung der Ellipsenebene auf die ζ-Ebene geht das Ellipseninnere in das Innere des Hauptkreises über, die Abbildung des Ellipsenäußern wird imaginär; dagegen entspricht dem Äußern des Hauptkreises ein zweites Exemplar des Ellipseninnern. Die hyperbolischen Zipfel, die ursprünglich soviel Schwierigkeiten machten (vgl. die Briefe Nr. 24 und 25 meines Briefwechsels mit H. Poincaré, sowie die oben abgedruckte Abhandlung Nr. CIV), treten bei den Normalpolygonen in der ζ-Ebene überhaupt nicht auf. Die Normalpolygone einer Gattung (p, n) haben im allgemeinen, d. h. wenn das zur Konstruktion des Normalpolygons verwandte Zentrum C_0 nicht gerade auf den Begrenzungslinien des „natürlichen Diskontinuitätsbereiches“ liegt, $12p+4n-6$ Seiten. Durch Abänderung der Normalpolygone, die eine erste allgemeine Form des Diskontinuitätsbereiches in der Ellipsenebene bilden, kommt Fricke dann zu einer zweiten allgemeinen Form desselben, zu den „kanonischen Polygonen“, so genannt, weil sie einer kanonischen Zerschneidung der Riemannschen Fläche entsprechen. Diese Polygone sind gleichfalls geradlinig, haben lauter konkave Winkel und besitzen $4p+2n$ Seiten. Für diese Polygone stellt Fricke ein volles System von Invarianten (Moduln) auf, durch welches die Polygone bis auf eine Nicht-Euklidische Bewegung bestimmt sind. Er erhält das wichtige Ergebnis: Die gesamte Gattung (p, n) zerfällt, allen möglichen Kombinationen von ν ganzen Zahlen $l>1$ mit $0 \leqq \nu \leqq n$ entsprechend, in unendlich viele Familien der Signaturen $(p, n; l_1, l_2, \ldots, l_\nu)$; die einzelne Familie stellt ein einziges $(3n-\nu+6p-6)$-fach unendliches Kontinuum von Polygonen vor. — Er untersucht ferner die Transformation dieser Modulsysteme bei Abänderung des kanonischen Querschnittsystems, was eine Gruppe birationaler Transformationen, die sogenannte automorphe Modulgruppe, liefert. Im zweiten Bande werden (um dies gleich vorweg zu nehmen) diese Untersuchungen fortgesetzt, und es wird z. B. gezeigt, daß sich das einzelne Kontinuum von Polygonen auf einen Würfel geeigneter Dimensionenzahl eineindeutig stetig abbilden läßt, und daß die automorphe Modulgruppe eigentlich diskontinuierlich ist. Während der ganze Würfel ein Abbild des Polygonkontinuums ist, st der einzelne Diskontinuitätsbereich der zugehörigen Modulgruppe ein Abbild des Gruppenkontinuums der ζ-Substitutionen. Zu jeder Gruppe (wobei diese als unabhängig von den Erzeugenden definiert zu denken ist) gehören also unendlich viele Polygone, unter denen eines als „reduziertes Polygon“ ausgezeichnet wird. (Siehe auch oben, S. 733.)

So viel von der geometrischen Theorie der Hauptkreisgruppen! Hinsichtlich der geometrischen Theorie der Nichtrotationsgruppen mit unendlich vielen Grenzpunkten beschränkt sich Fricke auf allgemeine Ansätze und eine größere Anzahl von Beispielen. Hier bilden für den Leser, wie überhaupt in dem ganzen Werke, eine große Anzahl schön gezeichneter Figuren ein wertvolles Hilfsmittel zur Orientierung. Ich will nur auf das Hervorkommen von nichtanalytischen Grenzkurven hinweisen, das

mich immer besonders interessiert hat. Von diesem ist schon in Abh. XLVI in Bd. 2 dieser Ausgabe auf S. 227 die Rede gewesen; ganz ausführlich ist dies Vorkommnis in meiner autographierten Vorlesung von 1901 „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien“ behandelt. — Es wäre wohl erwünscht, wenn die Frickeschen Ansätze für die Nichtrotationsgruppen wenigstens in einfacheren Fällen, z. B. für den Fall des Rückkehrschnitttheorems noch mehr ins einzelne durchgeführt würden, wobei man sich auf eine Theorie der Normalpolyeder bzw. anderer geeigneter Polyeder zu stützen hätte.

Im übrigen zerfallen alle in Betracht kommenden Gruppen naturgemäß in solche, welche Parameter enthalten, und in andere, deren sämtliche Substitutionskoeffizienten ausschließlich aus bestimmten numerischen Irrationalitäten aufgebaut sind. Fricke hat sich dem Studium der Gruppen letzterer Art mit besonderer Vorliebe gewidmet und, anknüpfend an Untersuchungen von Gauß, Dirichlet, Hermite, Selling, Picard, H. Poincaré, Bianchi, Hurwitz, für eine Reihe besonderer Fälle das allgemeine arithmetische Bildungsgesetz ihrer Substitutionskoeffizienten aufstellen können. Diese Untersuchungen, in denen Fricke weit über H. Poincaré hinausgeht, füllen etwa das letzte Drittel des ersten Bandes der „Automorphen Funktionen“.

Im ersten Bande finden aber auch eine Reihe wichtiger Nebenfragen ihre volle Beantwortung. Dahin gehört die Frage, wie sich die Gruppen, welche sich durch *symmetrische* Reproduktionen eines Ausgangsbereiches erzeugen lassen, in die Mannigfaltigkeit der übrigen Gruppen einordnen. Dahin gehört ferner die von Ritter in Bd. 41 der Math. Annalen (1892/93) erbrachte Entscheidung, ob die Gruppe der ζ-Substitutionen, wenn $\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ gesetzt wird, sich holoedrisch isomorph auf eine Gruppe homogener linearer Substitutionen von ζ_1 und ζ_2 beziehen läßt, oder ob die Gruppe der isomorphen unimodularen Substitutionen von ζ_1, ζ_2 notwendig die doppelte Zahl der Operationen der nicht homogenen Gruppe umfaßt, wie das bei der Ikosaedergruppe von entscheidender Bedeutung war. (Vgl. Abh. LIV und LXI in Bd. 2 dieser Ausgabe.)

Der zweite Band der „Automorphen Funktionen“ enthält die funktionentheoretischen Ausführungen. Da wird zunächst die Frage nach der Existenz aller zu einer gegebenen Gruppe gehörigen eindeutigen automorphen Funktionen beantwortet: Faßt man den Diskontinuitätsbereich als eine durch die Ränderzuordnung ideell geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit auf, so sind die automorphen Funktionen einfach die auf dieser Mannigfaltigkeit im Riemannschen Sinne existierenden algebraischen Funktionen. Nachdem dies festgestellt ist, entsteht die Aufgabe bei gegebener Gruppe von ζ-Substitutionen diese automorphen Funktionen wirklich herzustellen.

Hier hatte E. Ritter nach einem von mir entworfenen Programm schon wesentlich vorgearbeitet. (Vgl. seine schon wiederholt genannten Arbeiten in den Math. Annalen, Bd. 41 (1892) und 44 (1894).) Man fragt sich zunächst — und dies läßt sich mit Hilfe der von mir in Abh. XCVII eingeführten Primform allgemein beantworten —, welche „*multiplikativen Formen*“ auf Riemannschen Flächen mit gegebener Signatur existieren, d. h. homogene Formen, die sich bei Umläufen auf der Fläche *bis auf konstante Faktoren* reproduzieren. Diese multiplikativen Formen lassen sich dann immer durch zweckmäßig verallgemeinerte, homogen geschriebene Poincarésche Thetareihen darstellen. Da aber von den formal angesetzten Poincaréschen Reihen sehr viele identisch verschwinden, muß beim Beweise dieses Satzes insbesondere gezeigt werden, daß immer noch genug Reihen übrig bleiben, welche dies nicht tun; der Nachweis hierfür läßt sich durch rein analytisches Operieren an den Reihen nur sehr schwer führen, ist aber von H. Poincaré erbracht worden. Fricke hat übrigens die ursprüngliche Rittersche Darstellung in vielen Punkten vereinfacht.

Ritter hatte auch schon, ehe ihn ein frühzeitiger Tod ereilte, die Vorarbeiten für eine entsprechende Theorie der „*homomorphen Formen*“ und deren Darstellung durch Poincarésche Zetareihen in Angriff genommen. (Vgl. Math. Annalen, Bd. 47

(1896).) Man hat eine Lehre von den zur Riemannschen Fläche bestimmter Signatur gehörigen „Riemannschen Formenscharen" zu entwerfen, d. h. solcher Formen $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$, die sich bei Umläufen der homogenen Variabeln auf der Fläche selber *homogen mit konstanten Substitutionskoeffizienten* umsetzen. Ritter selbst hat diese Untersuchungen nur erst begonnen; er hat es nicht mehr erlebt, daß der Riemannsche Satz von der Existenz einer Schar linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung, deren Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ eine vorgegebene Monodromiegruppe besitzen, bewiesen wurde. Leider sind die homomorphen Formen in den „Automorphen Funktionen" bei der Menge der Fragen, die zu beantworten waren, von Fricke trotz eines diesbezüglichen Versprechens auf S. 42/43 nicht weiter verfolgt worden; und so sei hier nur erwähnt, daß man in Nr. 35 des Frickeschen Referates über automorphe Funktionen in Bd. II_2 der Enzyklopädie nähere Angaben findet.

In der zweiten Hälfte des zweiten Bandes der „Automorphen Funktionen" wendet sich Fricke den Beweisen für das Fundamentaltheorem über die Existenz der linear-polymorphen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche zu. Er beginnt mit einem Bericht über den *Kontinuitätsbeweis* (vgl. oben S. 700—705 und S. 731—741), soweit ein solcher damals (1911) vorlag. Was die Methode der offenen Kontinua anlangt (vgl. oben S. 732), so erläutert er nur meine hierher gehörigen Gedanken, wie ich sie in den oben abgedruckten Nummern XCIX und CIII ausgesprochen hatte. Er selbst schloß sich aber an die Methode der abgeschlossenen Kontinua an; und gerade, um die hier erforderlichen schwierigen Einzeluntersuchungen (vgl. oben S. 733/34) in zwingender Form durchführen zu können, hatte er seine oben besprochene Theorie der Hauptkreisgruppen so eingehend entwickelt und in unserem Werke vorangeschickt. Trotz dem erheblichen Fortschritt gegenüber Poincaré vermochte er es aber doch nur, in den niedersten Fällen den Kontinuitätsbeweis auf dieser Grundlage durchzuführen.

Die dritte Lieferung des zweiten Bandes hat durch die Berücksichtigung der Arbeiten Koebes, in welchen dieser, von 1907 an beginnend, die verschiedenen Fälle des Fundamentaltheorems bewies, eine viel befriedigendere Darstellung erhalten können als die zweite Lieferung, von der wir eben sprachen. Fricke gibt in der dritten Lieferung eine ausführliche Darlegung des Grenzkreistheorems einerseits und des Rückkehrschnitttheorems andererseits. Zum Beweise all dieser Theoreme wird allein die Methode der Überlagerungsfläche benutzt. Beim Rückkehrschnitttheorem dient der Koebesche Verzerrungssatz ganz wesentlich als Beweismittel. Hier und an anderen Stellen gelingt es Fricke, die Einzelheiten noch genauer herauszuarbeiten, als in der ursprünglichen Darstellung Koebes. Von der Methode des Bogenelementes im Grenzkreisfalle und von dem iterierenden Verfahren Koebes wird nur kurz berichtet. Desgleichen kommen die allgemeinen Fälle des Fundamentaltheorems kaum zur Sprache.

Den Schluß des zweiten Bandes bildet ein ausführlicher Anhang, der auf algebraische Fragen, wie sie schon in Bd. 2 dieser Ausgabe, besonders auf S. 501 ff. vorkommen, zurückgreift. (Vgl. auch die Bemerkungen auf S. 136 des vorliegenden Bandes.) Fricke hat gefunden, daß die ebene Kurve 6. Ordnung, welche dem Valentiner-Wiman-Problem zu Grunde liegt, und welche durch eine Gruppe von 360 ternären linearen Kollineationen in sich übergeht, durch Dreiecksfunktionen vom Typ (2, 4, 5) uniformisiert werden kann. Von diesem Ausgangspunkte aus wird hier die einschlägige Theorie entwickelt und bis zur vollen Aufstellung aller charakteristischen Gleichungsformen jener Kurve $f = 0$ und der einfachsten zugehörigen Resolventen 6-ten und 15-ten Grades geführt.

Zusammenfassend dürfen wir vielleicht sagen, daß die „Automorphen Funktionen" eine Reihe nebeneinander stehender, dabei sehr sorgfältig unter genauer Darlegung aller Beweisgründe durchgearbeiteter Monographien enthalten, welche alle das Gemeinsame haben, im einzelnen Fortschritte zu erzielen und überhaupt für die Theorie des Gesamtgebietes der automorphen Funktionen sehr wesentlich zu sein. Eine abgeschlossene Theorie aber war noch nicht möglich An allen Stellen sieht man sich vor neuen noch unerledigten Problemen. Man möchte der Theorie eine Geschmeidigkeit wünschen, welche sie für praktische Aufgaben ebenso brauchbar macht, wie es die elliptischen Funktionen sind. Daß automorphe Funktionen zur endgültigen Durchführung schon der einfachsten Probleme der Mechanik erforderlich sein können, habe ich u. a. in meinen Princeton-Vorträgen, die als Nr. LXXV in Bd. 2 dieser Ausgabe abgedruckt worden sind (siehe besonders S. 650 ff. daselbst), hervorgehoben. In diesem Zusammenhange darf ich wohl aus Bd. 21 der Jahresberichte der Deutschen Math. Vereinigung (1912) den Passus hersetzen, mit dem ich auf der Naturforscher-Versammlung in Karlsruhe die Berichte über den damals erreichten Stand der Theorie, von denen schon oben die Rede war, abschloß. Es heißt dort auf S. 153/154:

„... Nachdem jetzt die Existenz der eindeutigen automorphen Funktionen in ihren wesentlichen Zügen sichergestellt ist, sollte deren analytisches Bildungsgesetz erneuter Untersuchung unterworfen werden. In dieser Hinsicht wird vor allen Dingen eine genuine Produktentwicklung der Primform des zu dem jeweils vorliegenden Falle eindeutiger automorpher Funktionen gehörigen algebraischen Gebildes zu wünschen sein. In den einfachsten Fällen (wo das algebraische Gebilde keine Stigmata trägt) ist die Primform in den homogen geschriebenen Argumenten ζ_1, ζ_2 der automorphen Funktionen vom Grade $+1$. Es ist auch von mir gleich bei Aufstellung meiner Primform darauf hingewiesen worden (Math. Annalen Bd. 36, 1889: *Zur Theorie der Abelschen Funktionen* [= Abh. XCVII des vorliegenden Bandes]), daß die absolut konvergente Produktentwicklung, welche Herr Schottky für gewisse Fälle solcher eindeutiger automorpher Funktionen, bei denen nur isolierte Grenzpunkte auftreten, aufgestellt hat, im wesentlichen die diesen Fällen entsprechende Primform darstellt. Es wäre nicht unmöglich, daß zu dem gleichen Zwecke in den allgemeinen Fällen *bedingt konvergente* Produkte in Betracht zu ziehen sein möchten." K. (mit V.)

CVI. Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.[1]

(Zusammenhang zwischen dem Oszillationstheorem und den Existenztheoremen der automorphen Funktionen.)

[Math. Annalen Bd. 64 (1907).]

[Die hier veröffentlichten Untersuchungen sind aus einem Seminar entstanden, welches ich durch drei Semester (von Winter 1905/06 bis Winter 1906/7) in Gemeinschaft mit **Hilbert** und **Minkowski** gehalten habe. In diesem Seminar behandelten wir Fragen aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und der automorphen Funktionen. Ich knüpfte dabei an Gedankenreihen an, die ich erstmals in einer dreisemestrigen Vorlesung von Sommer 1890 bis Sommer 1891 über lineare Differentialgleichungen vorgetragen hatte. Von dieser Vorlesung existiert eine autographierte Ausarbeitung, die zwar unter der Hand Verbreitung gefunden hat, die ich aber nicht in den Buchhandel gegeben habe, weil sie vielfach nur vorläufige Ideen enthielt. — Vgl. hierzu die Angaben auf S. 740/741.]

§ 1.

Festlegung der Differentialgleichung. Das Oszillationstheorem. Das Polygon auf der η-Kugel.

1. Die folgenden Betrachtungen sollen der Bequemlichkeit halber an das Beispiel einer möglichst einfach gewählten Differentialgleichung geknüpft werden. Wir verstehen unter $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle Werte, die folgenden Ungleichungen unterworfen sein sollen:

$$a > b > c;$$

[und um unterhalb der Stieltjesschen Grenze zu bleiben]

$$0 \leqq \alpha < 1, \quad 0 \leqq \beta < 1, \quad 0 \leqq \gamma < 1, \quad 0 \leqq \delta < 1.$$

[1] [Diese Arbeit habe ich **Gordan** als Festschrift zur Feier seines siebzigsten Geburtstages am 27. April 1907 überreicht. K.]

Die Differentialgleichung, die wir betrachten wollen, sei dann folgende:

$$(1)\quad y'' + y'\left(\frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} + \frac{1-\gamma}{x-c}\right) + \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)}(Ax+B) = 0.$$

Wir haben hier vier singuläre Punkte:

$$a,\ b,\ c,\ \infty$$

und a, b, c entsprechend die Exponentenpaare:

$$\begin{cases}\alpha\\0\end{cases}\ \begin{cases}\beta\\0\end{cases}\ \begin{cases}\gamma\\0\end{cases};$$

die Exponenten δ', δ'', die zum singulären Punkte ∞ gehören, berechnen sich aus den Formeln:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta' + \delta'' = 2, \qquad \delta'\delta'' = A,$$

und ihre Differenz $\delta' - \delta''$ soll gleich der Größe δ sein, für welche wir bereits eine Ungleichung aufstellten. Die beiden zum einzelnen singulären Punkte, z. B. zu a, gehörigen Fundamentallösungen von (1) nenne ich Y_α^a, Y_0^a; sie sind nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Tritt der Grenzfall ein, daß α zu 0 wird, so fallen diese Lösungen in die eine Y_0^a zusammen und es tritt dann daneben in bekannter Weise eine neue Lösung mit logarithmischem Glied, welche mit $Y_{\log}^a$ bezeichnet sein soll.

2. Ich knüpfe übrigens durchweg an die Bezeichnungsweisen und Auffassungsweisen an, von denen ich in meinen alten Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Math. Annalen [vgl. die unten genannten Abhandlungen aus Bd. 2 dieser Ausgabe] und insbesondere in meinem hierauf bezüglichen, von E. **Ritter** 1894 publizierten autographierten Vorlesungsheft Gebrauch gemacht habe[2]). Die Größe B nenne ich den *akzessorischen Parameter*, und es handelt sich nun im folgenden um diejenigen Fragestellungen, welche ich in dem genannten Hefte als „eigentlich transzendente" bezeichnet habe, nämlich um die Festlegung des akzessorischen Parameters B einerseits durch das *Oszillationstheorem*, andererseits durch die *Existenztheoreme der automorphen Funktionen*.

3. Das Oszillationstheorem legt den Parameter B fest, indem es einer *einzelnen* reellen Lösung von (1) bestimmte Bedingungen auferlegt. In seiner ursprünglichen Fassung setzt dasselbe ein Intervall der x-Achse als gegeben voraus — es möge $\overline{mn}$ heißen —, das keinerlei singulären Punkt enthält. Wir verlangen, daß eine Lösung y von (1) existieren soll, für welche der Quotient $\frac{y}{y'}$ bei $x = m$ und bei $x = n$ je einen vor-

[2]) [Vgl. das Selbstreferat Nr. LXIX in Bd. 2 dieser Ausgabe.]

gegebenen reellen Wert annimmt, und die innerhalb des Intervalls $\overline{mn}$ eine vorgegebene Zahl von Malen (die auch Null sein kann) verschwindet; das Oszillationstheorem [wie es Sturm für diesen Fall ausgesprochen hat] behauptet, daß durch diese Forderungender Parameter B gerade eindeutig bestimmt sei. Das Oszillationstheorem läßt sich aber, wenn die Exponentendifferenzen der in Betracht kommenden singulären Punkte reell sind und *zwischen* 0 und 1 liegen (NB. mit Ausschluß dieser Grenzen), auch auf solche Intervalle ausdehnen, die sich an singuläre Punkte heranziehen. Ich darf dann nur, z. B. bei $x = a$, nicht den Wert von $\frac{y}{y'}$ vorschreiben, sondern muß angeben, mit welcher linearen Kombination $Y_\alpha^a - \lambda Y_0^a$ das y proportional sein soll. In dem Grenzfalle, den wir hier mit betrachten wollen, das nämlich $\alpha = 0$ wird, tritt eine wirkliche Beschränkung ein: daß y muß, wenn anders die Aussage des Oszillationstheorems bestehen bleiben soll, dem Y_0^a proportional sein (es darf, in der Reihenentwicklung des y bei $x = a$, kein logarithmisches Glied auftreten). Man sehe wegen dieser Einzelheiten und der Beweise die Arbeiten von Bôcher im American Bulletin von 1898, 1899, bez. das zusammenfassende Referat Bôchers in Bd. II,$_1$ der Mathematischen Enzyklopädie (Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, abgeschlossen 1900)[3]).

4. In der Theorie der automorphen Funktionen hinwieder betrachtet man den Quotienten $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ irgend *zweier* Partikularlösungen von (1), bez. das *Kreisbogenviereck*, auf welches dieses η die Halbebene der unabhängigen Variablen x (sagen wir, die „positive" Halbebene x) abbildet. Die Ecken dieses Vierecks, die den singulären Punkten a, b, c, ∞ entsprechen, sollen mit a', b', c', ∞' bezeichnet sein; sie weisen bez. die Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$ auf. Man vergleiche die schematische Figur:

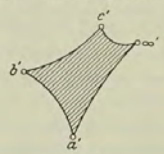


Fig. 1.

Es ist für weitergehende Untersuchungen bekanntlich zweckmäßig, dieses Kreisbogenviereck nicht in der η-*Ebene*, sondern auf der η-*Kugel*

[3]) [Vgl. die weiteren Literaturangaben auf S. 592 in Bd. 2 dieser Ausgabe, Fußnote [14]).]

gelegen zu denken und dann von raumgeometrischen Konstruktionen Gebrauch zu machen. Ich werde mich dabei immer kurzweg der Nicht-Euklidischen (projektiven) Maßbestimmung bedienen, deren Fundamentalfläche die η-Kugel ist. So ist, wenn weiterhin in diesem Zusammenhange von der Drehung um eine Achse durch einen bestimmten Winkel die Rede ist, dies immer im zugehörigen Nicht-Euklidischen Sinne gemeint (Drehung = Kollineation, bei der die η-Kugel in sich übergeht und die Achse Punkt für Punkt festbleibt).

5. Hier mögen, um gewisse spätere Auseinandersetzungen zu erleichtern, gleich folgende Ausführungen Platz finden. Man betrachte die vier Ebenen, in denen die Seiten $\infty'a'$, $a'b'$, $b'c'$, $c'\infty'$ des auf der Kugel gelegenen Kreisbogenvierecks gelegen sind, und folgeweise die vier Raumgeraden, in denen sich zwei aufeinanderfolgende dieser vier Ebenen beziehungsweise schneiden. Ich nenne diese vier Raumgeraden die zu den Eckpunkten a', b', c', ∞' des Vierecks gehörigen *Achsen*. Jede dieser Achsen schneidet die Kugel noch in einem zweiten Punkte, und dieser mag beziehungsweise a'', b'', c'', ∞'' genannt werden. Was haben die Werte, die η in diesen verschiedenen Punkten annimmt, mit den zu den singulären Punkten a, b, c, ∞ gehörigen Fundamentallösungen von (1) zu tun?

Um hierauf zu antworten, überlege man, daß eine positive Umkreisung der Punkte a, b, c, ∞ der x-Ebene eine Drehung der η-Kugel um die Achsen $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $\infty'\infty''$ beziehungsweise von der Amplitude $2\alpha\pi$, $2\beta\pi$, $2\gamma\pi$, $2\delta\pi$ liefert (wobei der Sinn der Drehung für einen in a', bez. b' oder c' oder ∞' befindlichen Beobachter positiv ist). Hiermit halte man zusammen, daß bei den genannten Umkreisungen die Quotienten

$$\frac{Y_\alpha^a}{Y_0^a}, \quad \frac{Y_\beta^b}{Y_0^b}, \quad \frac{Y_\gamma^c}{Y_0^c}, \quad \frac{Y_{\delta'}^\infty}{Y_{\delta''}^\infty}$$

die Faktoren

$$e^{2i\pi\alpha}, \quad e^{2i\pi\beta}, \quad e^{2i\pi\gamma}, \quad e^{2i\pi\delta}$$

erhalten. Wir schließen: *in den Punkten* a', b', c' ∞' *der* η-*Kugel verschwinden beziehungsweise die Lösungen* Y_α^a, Y_β^b, Y_γ^c, $Y_{\delta'}^\infty$, *in den Punkten* a'', b'', c'', ∞'' *aber beziehungsweise die Lösungen* Y_0^a, Y_0^b, Y_0^c, $Y_{\delta''}^\infty$. Dabei müssen wir, da unser Viereck die Abbildung der positiven Halbebene x sein soll, alle vieldeutigen Funktionen so verstehen, wie sie bei analytischer Fortsetzung über diese Halbebene hin herauskommen.

6. Um das Gesagte in bestimmte Formeln zu fassen, will ich $Y_{\delta'}^\infty$ und $Y_{\delta''}^\infty$ bevorzugen. Es sei, bei analytischer Fortsetzung über die positive Halbebene x hin,

$$Y_\alpha^a \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \lambda_1 Y_{\delta''}^\infty, \qquad Y_0^a \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \lambda_2 Y_{\delta''}^\infty.$$

proportional, ebenso

$$Y_\beta^b \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \mu_1 Y_{\delta''}^\infty, \qquad Y_0^b \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \mu_2 Y_{\delta''}^\infty,$$
$$Y_\gamma^c \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \nu_1 Y_{\delta''}^\infty, \qquad Y_0^c \text{ mit } Y_{\delta'}^\infty - \nu_2 Y_{\delta''}^\infty.$$

Wir setzen nun

$$\eta = \frac{Y_{\delta'}^\infty}{Y_{\delta''}^\infty}$$

und schließen, *daß dieses η in den Punkten*

$$a', a''; \;\; b', b''; \;\; c', c''; \;\; \infty', \infty''$$

beziehungsweise die Werte annimmt:

$$\lambda_1, \lambda_2; \;\; \mu_1, \mu_2; \;\; \nu_1, \nu_2; \;\; 0, \;\; \infty.$$

§ 2.
Unsere Fragestellung.
Beispiel einer Differentialgleichung mit sechs singulären Punkten.

1. Ich erinnere nunmehr daran, daß ich in verschiedenen früheren Arbeiten[4]) die Aufmerksamkeit darauf lenkte, wie sich die Oszillationsbedingungen, denen die einzelne reelle Partikularlösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Intervall $\overline{mn}$ der x-Achse genügt, in der Gestalt der zugehörigen Kreisbogenpolygons der η-Ebene (oder η-Kugel) wiederspiegeln. Man hat vor allem den Satz, daß auf jede Halboszillation des y eine Selbstüberschlagung des dem Intervall $\overline{mn}$ entsprechenden Stücks der korrespondierenden Seite des Kreisbogenpolygons kommt. Diese Überlegungen sollen hier an dem Beispiel der Differentialgleichung (1) in etwas veränderter Fassung wieder aufgenommen werden. Und zwar soll es sich um besondere Fälle der folgenden allgemeinen Fragestellung handeln:

Die Theorie der automorphen Funktionen (im weitesten Sinne genommen, worüber unten nähere Ausführungen) verlangt, über die in den linearen Differentialgleichungen auftretenden akzessorischen Parameter so zu verfügen, daß die entsprechenden Figuren auf der η-Kugel (im vorliegenden Fall unser Kreisbogenviereck) gewisse ausgezeichnete Eigenschaften erhält; wie weit kann man diese Forderungen mit dem Oszillationstheorem in Verbindung bringen, bez. die zugehörigen Existenztheoreme der automorphen Theorie aus dem Oszillationstheorem beweisen?

Es handelt sich also um eine Fortsetzung der Untersuchungen, die den Abschluß der Autographie von 1894 bilden. Wenn ich heute, nach

[4]) [Siehe besonders die Nummern LXIV und LXV in Bd. 2 dieser Gesamtausgabe, sowie die oben genannte Autographie von 1894.]

so langer Zeit, auf diese Fragestellungen zurückkomme, so liegt dies daran, daß **Hilbert** neuerdings im Verfolg seiner Untersuchungen über Integralgleichungen zu hierhergehörigen Ansätzen gelangt ist (wie sogleich ausgeführt werden soll), und daß wir im Anschlusse daran letzthin in gemeinsamen Seminarübungen [wie ich bereits eingangs erwähnt habe], die einschlägigen Fragen eben an dem einfachen Beispiel der Differentialgleichung (1) mit unseren fortgeschrittenen Studenten durchgesprochen haben. Ich hoffe sehr, daß hier Ansätze gewonnen sind, deren Verfolg zu einer vollen Aufklärung der bei der vorbezeichneten allgemeinen Fragestellung vorliegenden außerordentlich interessanten Verhältnisse führen kann.

2. Vorab möchte ich noch darauf hinweisen, daß ich den Zusammenhang zwischen dem Oszillationstheorem und den Existenztheoremen der automorphen Funktionen bereits 1890 in einer Note in den Göttinger Nachrichten („*Zur Theorie der allgemeinen Laméschen Funktionen*" [abgedruckt als Abh. LXIV in Bd. 2 dieser Ausgabe, s. S. 546 f. daselbst]) an einem anderen einfachen Beispiel kurz berührt habe.

Es handele sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit sechs reellen Verzweigungspunkten:

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad \infty,$$

deren jeder die Exponentendifferenz $\frac{1}{2}$ aufweist, so daß wir als zugehörige Exponenten die folgenden wählen können:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\\ 0\end{cases} \begin{cases}\frac{1}{2}\\ 0\end{cases} \begin{cases}\frac{1}{2}\\ 0\end{cases} \begin{cases}\frac{1}{2}\\ 0\end{cases} \begin{cases}\frac{1}{2}\\ 0\end{cases} \begin{cases}1\\ \frac{1}{2}\end{cases}.$$

Die Differentialgleichung lautet dann

$$(2)\quad y'' + \frac{y'}{2}\left(\frac{1}{x-a} + \cdots + \frac{1}{x-e}\right) + \frac{y}{(x-a)\ldots(x-e)}\left(\frac{x^3}{2} + Bx^2 + B'x + B''\right) = 0.$$

Die Theorie der automorphen Funktionen behauptet, *daß man die drei hier auftretenden akzessorischen Parameter B, B', B'' auf eine und nur eine Weise so festlegen kann, daß die Abbildung der positiven Halbebene x in der η-Ebene folgende Gestalt annimmt:*

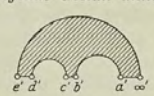


Fig. 2.

Man übersieht sofort, daß die Abbildung der gesamten x-Ebene, wofern man in ihr Einschnitte von a nach b, von c nach d und von e

nach ∞ längs der reellen x-Achse anbringt, durch folgende Figur gegeben wird:

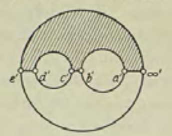


Fig. 3.

in der drei Vollkreise $\widehat{a'b'}$, $\widehat{c'd'}$, $\widehat{e'\infty'}$ auftreten. Es heißt dies, daß alle Partikularlösungen von (2), wenn man längs der x-Achse von a nach b und dann von b nach a zurückgeht — oder auch von c nach d und von da nach c zurück, bez. von e nach ∞ und von da nach e zurück — gerade eine Halboszillation ausführen. Solcherweise ist die automorphe Angabe also in mannigfacher Weise von seiten des Oszillationstheorems zu fassen. (Die Ausdehnung des Oszillationstheorems auf Intervalle, die zwischen zwei Verzweigungspunkten, mit den Exponenten $\frac{1}{2}$ und 0 hin- und hergehen, tritt schon in meiner ersten Arbeit über das Oszillationstheorem auf (Math. Annalen, Bd. 18 (1881); *Über [die Randwertaufgabe des Potentials für] Körper, welche von konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind* [= Abh. LXIII in Bd. 2 dieser Ausgabe]).)

§ 3.

Über den besonderen Fall der Differentialgleichung (1) mit den Exponentendifferenzen (0, 0, 0, 0).

(Hilbertsche Entwicklungen, automorphe Obertheoreme.)

1. Auf die *Beweise*, welche Hilbert für das Oszillationstheorem aus der Theorie der Integralgleichungen gewinnt, kann hier nicht eingegangen werden[5]); man vgl. übrigens einige hierhergehörige Auseinandersetzungen, welche Hilb neuerdings in Bd. 63 der Math. Annalen 1906/07 (S. 38ff.: *Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie*) gegeben hat. Es soll hier nur von der besonderen Verbindung zwischen dem Oszillationstheorem und der Theorie der automorphen Funktionen die Rede sein, welche Hilbert für denjenigen Fall der Differentialgleichung (1) aufgefunden hat, *wo die Exponentendifferenzen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sämtlich Null sind* (also bei allen singulären Punkten logarithmische Glieder auftreten).

[5]) [Hilbert hat seinen Beweis später veröffentlicht in der Arbeit *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Kap. XX (Göttinger Nachrichten v. J. 1910, 1. Halbband, S. 407ff., abgedruckt in dem gleichnamigen Buch, Leipzig 1912, daselbst S. 258ff.).]

Wir wählen, dieser Annahme entsprechend, bei

$$a, \quad b, \quad c, \quad \infty$$

als Exponenten

$$\begin{cases}0\\0\end{cases} \begin{cases}0\\0\end{cases} \begin{cases}0\\0\end{cases} \begin{cases}1\\1\end{cases}$$

und haben so die Differentialgleichung:

$$(3) \quad y'' + y'\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}\right) + \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)}(x+B) = 0.$$

Das zugehörige Kreisbogenviereck hat vier Spitzen, wie schematisch durch folgende Figur veranschaulicht sei:

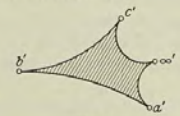


Fig. 4.

und es handelt sich nun, gemäß dem einfachsten Ansatze aus der Theorie der automorphen Funktionen, darum, den akzessorischen Parameter B so zu bestimmen, *daß das Viereck von einem durch die vier Ecken gehenden Orthogonalkreis umschlossen wird.*

2. Bemerken wir gleich, daß letztere Forderung sich von selbst in folgende zwei spaltet:

a) daß die vier Ecken überhaupt auf einem Orthogonalkreis gelegen sein sollen,

b) daß dieser Orthogonalkreis von keiner Seite des Kreisbogenvierecks durchsetzt werden soll (andernfalls erhält man die von mir so genannten, sogleich zu erläuternden automorphen Obertheoreme).

Ich erinnere ferner daran (vgl. Fricke in den *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Bd. I (1897), S. 412), daß die vier Ecken eines Kreisbogenvierecks mit lauter Nullwinkeln von selbst immer auf einem Kreise liegen; nur ist es im allgemeinen kein Orthogonalkreis.

Wir könnten nun auf die Erörterungen über das Kreisbogenviereck auf der Kugel zurückgreifen, die in § 1, **5** gegeben worden sind. Wir würden dann bemerken, daß im vorliegenden Falle die Punkte a' und a'', b' und b'', c' und c'', ∞' und ∞'' beziehungsweise zusammenfallen, so daß die vier Achsen des Vierecks in *Kugeltangenten* verwandelt sind. Ich komme hernach hierauf beiläufig zurück, begnüge mich aber übrigens im vorliegenden Falle, wo die geometrischen Verhältnisse so besonders einfach sind, damit, das Kreisbogenviereck in der Ebene zu betrachten.

3. Gemäß den Angaben in § 1, 3 dürfen wir das Intervall $\overline{mn}$ der x-Achse, auf welches das Oszillationstheorem bezogen werden soll, im vorliegenden Falle nur so bis an singuläre Punkte der Differentialgleichung heranerstrecken, daß wir für die in Betracht kommende Partikularlösung y das Auftreten logarithmischen Verhaltens ausschließen, d. h. (mit Rücksicht auf die Werte der Exponenten) verlangen, daß die Partikularlösung im betreffenden singulären Punkt endlich bleibt.

Das Neue an dem nunmehr zu besprechenden Hilbertschen Ansatze ist nun, daß das Intervall $\overline{mn}$ nicht nur in dem so geschilderten Sinne beiderseits bis an singuläre Punkte herangezogen wird, sondern *daß es zugleich über einen singulären Punkt hinübergezogen wird.* Ich will der bequemeren Zeichnung wegen für diesen im Intervall gelegenen singulären Punkt den Punkt b wählen (an sich könnte ein beliebiger anderer singulärer Punkt genommen werden); wir haben dann nachstehendes Intervall:

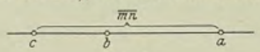


Fig. 5.

Und zwar wird nicht etwa verlangt, daß die in Betracht zu ziehende Partikularlösung y in dem in der Mitte gelegenen singulären Punkt (also in b) endlich ist, vielmehr nur, *daß sie über diesen Punkt hinüber in charakteristischer Weise diskontinuierlich fortgesetzt werden soll.*

Die Regel hierfür ist einfach folgende: Hat y rechts von b die Darstellung:

$$y = \mathfrak{P}_1(x-b) + \log(x-b)\cdot\mathfrak{P}_2(x-b) \tag{4}$$

(wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ gewöhnliche Potenzreihen mit reellen Koeffizienten sind), so soll links von b die Darstellung gelten:

$$y = \mathfrak{P}_1(x-b) + \log(b-x)\cdot\mathfrak{P}_2(x-b). \tag{4'}$$

Der Verlauf von y wird also schematisch durch folgende Figur gegeben sein:

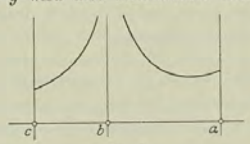


Fig. 6.

(y bei a und c endlich, bei b mit der charakteristischen Unstetigkeit behaftet).

4. Da wir y bei $x = b$ in der vorstehenden Figur positiv unendlich genommen haben, so ist $\mathfrak{P}_2(x-b)$ in der Nähe von $x = b$ negativ (was

sogleich zur Geltung kommen wird). Andererseits haben wir die Figur so skizziert, daß weder zwischen a und b, noch zwischen b und c eine Nullstelle von y liegt. Das Oszillationstheorem würde gestatten, in eines dieser beiden Segmente eine beliebige Anzahl von Nullstellen zu verlegen (wobei dann das andere Segment, wie man zeigen kann, von Nullstellen frei bleibt). Aber dies führt, beim Übergange zum η-Viereck, zu den bereits in Aussicht gestellten „Obertheoremen" und mag hier vorläufig noch ausgeschlossen sein.

Die Hilbertsche Behauptung ist nun, daß dem Auftreten einer solcherweise definierten Partikularlösung y von (3) bei unserem Kreisbogenviereck genau das Vorhandensein eines umschließenden Orthogonalkreises entspricht.

5. Man kann die Richtigkeit dieser Behauptung auf folgende Weise einsehen. Wir stellen neben das definierte y diejenige Partikularlösung (y), welche in der Nähe von b durch $\mathfrak{P}_2(x-b)$ gegeben ist, also bei $x = b$ endlich ist und sich ohne Diskontinuität über b hinüber fortsetzt. Bei $x = a$ und bei $x = c$ wird dieses (y) — weil es doch von der dort endlich bleibenden Lösung y verschieden ist — notwendig unendlich werden.

Wir setzen nun im Intervalle $\overline{ab}$

$$\eta = \frac{y}{(y)} \tag{5}$$

und haben für alle anderen Punkte der Halbebene x — weil wir doch ein zusammenhängendes Abbild dieser Halbebene in der η-Ebene entwerfen wollen — unser η durch analytische Fortsetzung *über die genannte Halbebene hin* zu erklären. Es kommt dies wegen der charakteristischen Unstetigkeit, die wir in die Definition der reellen Funktion y beim Übergange von $\overline{ab}$ zu $\overline{bc}$ aufgenommen haben, darauf hinaus, daß wir im Intervalle $\overline{bc}$ setzen müssen:

$$\eta = \frac{y + i\pi\cdot(y)}{(y)} = \frac{y}{(y)} + i\pi. \tag{5'}$$

Unser η ist also im Intervalle $\overline{bc}$ nicht mehr reell, sondern hat den konstanten imaginären Bestandteil $i\pi$.

Jetzt ist es leicht, das Kreisbogenviereck der η-Ebene, welches der positiven Halbebene x entspricht, seiner allgemeinen Gestalt nach festzulegen. Wir überlegen zunächst, daß unser η, wenn x längs der reellen Achse von b bis a geht — nach den Angaben, die wir über das Verhalten von y und (y) an den beiden Enden gemacht haben — auf reellem Wege von $-\infty$ bis 0 läuft. Und zwar handelt es sich nur um die einfach durchlaufene Strecke von $-\infty$ bis 0, nicht um eine einfache oder mehrfache Überspannung der ganzen reellen Achse. Denn sonst müßte y

im Innern des Intervalles $\overline{ab}$ Nullstellen haben, was wir doch ausdrücklich ausgeschlossen haben. Wir überlegen ferner, daß für die Differenz $\eta - i\pi$, wenn x längs der reellen Achse von b bis c geht, genau dasselbe gesagt werden kann. Damit haben wir für das Kreisbogenviereck der η-Ebene folgende zwei Begrenzungskanten festgelegt:

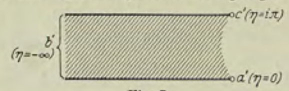


Fig. 7.

und das Viereck hat notwendigerweise eine Gestalt folgender Art:

Fig. 8.

Hier sieht man, *daß die Ecken a', b', c', ∞' in der Tat auf einem Orthogonalkreise liegen, der das Viereck nirgends durchsetzt*, nämlich auf der geraden Linie, welche die Punkte a', ∞', c' verbindet, w. z. b. w.

6. Hiermit ist das Grundtheorem der automorphen Funktionen im vorliegenden Falle erledigt. Was aber die in Aussicht gestellten *Obertheoreme* angeht, so entstehen dieselben, wenn man der Partikularlösung y außer ihrem Verhalten an den Stellen a, b, c im Intervalle $\overline{ab}$ bez. $\overline{bc}$ eine beliebige Anzahl von Nullstellen auferlegt. Es handelt sich dann, allgemein zu reden, um Kreisbogenvierecke mit den Winkeln $(0, 0, 0, 0)$, welche ihren Orthogonalkreis ein- oder mehreremal durchsetzen. Die Obertheoreme besagen (wenn ich es zunächst in dieser unbestimmten Form ausdrücken darf), daß man den akzessorischen Parameter B in (3) immer auf eine und nur auf eine Weise so bestimmen kann, daß ein sich selbst überschlagendes Viereck von bestimmtem Typus herauskommt. (Daß Obertheoreme dieser Art existieren, habe ich bereits in [der eingangs genannten] Vorlesung über lineare Differentialgleichungen, die ich 1890/91 hielt, nach verschiedenen Richtungen ausgeführt.)

7. Um dies genauer auszuführen, will ich dem y zunächst zwischen b und c eine (und nur eine) Nullstelle auferlegen. Gleichzeitig möge Fig. 8 durch die folgende äquivalente, aber für den vorliegenden Zweck bequemere Figur ersetzt sein:

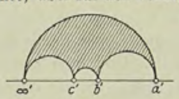


Fig. 9.

Dem neuen y muß ein Viereck entsprechen, das sich von dem so gezeichneten außer durch zweckmäßige Verschiebung der Punkte a', b', c', ∞' dadurch unterscheidet, daß sich die Kreisbogenseite $\overline{b'c'}$ einmal überschlägt. Dies ist nicht anders möglich (aus allgemeinen gestaltlichen Gründen), als wenn sich die gegenüberstehende Seite $\overline{a'\infty'}$ auch einmal überschlägt. Wir erhalten ein Viereck von folgendem Typus:

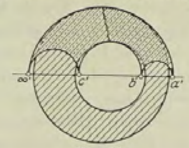


Fig. 10.

von dem wir sagen, daß es aus dem Grundtypus, Fig. 9, *durch Einhängung eines Kreisringes quer zu den Seiten $\overline{b'c'}$ und $\overline{a'\infty'}$ entstanden sei* (durch Einhängung eines Kreisringes entlang eines Verzweigungsschnittes, der die Seiten $\overline{b'c'}$ und $\overline{a'\infty'}$ quer verbindet). — Vermehrt man jetzt die Zahl der Nullstellen, welche y im Intervalle $\overline{bc}$ besitzen soll, so kommt das darauf hinaus, daß dem Polygon in der geschilderten Weise eine entsprechend größere Zahl von Kreisringen eingehängt werden soll. *Hiermit haben wir über eine erste unendliche Serie von Oberpolygonen, und über die Aussage der entsprechenden Obertheoreme, eine volle Übersicht.*

Die zweite (ebenso unendliche) Serie kommt hervor, wenn wir dem y im Intervalle $\overline{ab}$ Nullstellen in wachsender Zahl auferlegen. Wieder handelt es sich darum, einem Grundviereck vom Typus der Fig. 9 Kreisringe in beliebiger Zahl einzuhängen, dieses Mal quer zu $\overline{a'b'}$ und $\overline{c'\infty'}$, also entlang etwa dem in folgender Figur gezeichneten Verzweigungsschnitte:

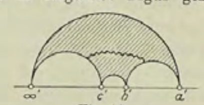


Fig. 11.

Als „Kreisring" ist hier natürlich ein Ebenenteil bezeichnet, der sich durchs Unendliche zieht und die über $\overline{a'b'}$ bez. $\overline{c'\infty'}$ stehenden Kreise von außen umgibt.

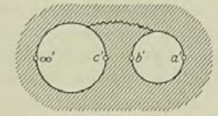


Fig. 12.

8. Es erübrigt sich noch zu bemerken, daß die Polygone, welche von den Obertheoremen geliefert werden, wenn man sie nach dem Gesetz der Symmetrie unbegrenzt vervielfältigt, unendlich-vielblättrige Überdeckungen ihrer Ebene liefern, so daß man mit ihnen aus der Theorie der *eindeutig umkehrbaren* und überhaupt der *endlichdeutig umkehrbaren automorphen Funktionen* heraustritt. Es ist ein Schritt in das allgemeine Gebiet hinein, daß ich überhaupt der Aufmerksamkeit des Mathematikers nachdrücklich empfehlen möchte: man fragt nach den Nicht-Euklidischen Abmessungen, die das einer vorgelegten linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung entsprechende Kreisbogenpolygon — oder allgemeiner: der ihr entsprechende Fundamentalbereich —, besitzen mag, insbesondere nach der funktionalen Abhängigkeit, die zwischen diesen Abmessungen und den Werten der akzessorischen Parameter der Differentialgleichung besteht[6]).

§ 4.
Inangriffnahme des allgemeinen Falles der Differentialgleichung (1).
(Die Involutionsbedingung.)

1. Es soll sich nunmehr darum handeln, für den allgemeinen Fall der Differentialgleichung (1), wo die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sämtlich > 0 (aber < 1) sind, ebenfalls einen Zusammenhang zwischen der Forderung, daß das Kreisbogenviereck einen Orthogonalkreis haben soll, und dem Oszillationstheorem herzustellen. Wir werden eine Regel erhalten, die im Grenzfalle (0, 0, 0, 0) natürlich in den in § 3 gegebenen Hilbertschen Ansatz übergeht. Aber die Sache ist doch wesentlich komplizierter als in diesem Grenzfalle und bedarf dementsprechend einiger Vorbereitung.

2. Wir denken uns das Kreisbogenviereck jetzt, wie bereits in § 1, **4** erörtert, auf der η-Kugel gelegen. Wir werden einen Orthogonalkreis haben, sobald die vier Seitenebenen des Vierecks in einen Punkt zusammenlaufen (dessen Polarebene hinsichtlich der η-Kugel aus dieser dann den gewünschten Orthogonalkreis ausschneidet). Je nachdem der in Rede stehende Schnittpunkt außerhalb der Kugel, auf der Kugel oder innerhalb derselben liegt, haben wir einen eigentlichen (reellen) Orthogonalkreis, einen Orthogonalkreis, der sich auf einen Punkt zusammenzieht, oder auch einen imaginären Orthogonalkreis. Wir werden im folgenden die Figuren immer für den ersten dieser drei Fälle entwerfen, der für die Theorie der automorphen Funktionen der interessanteste ist und in der Tat bei dem in § 3 behandelten Spezialfall von selbst vorliegt. Man beachte, daß der Kegel, der sich in diesem Falle vom Schnittpunkte der vier Ebenen an die Kugel legen läßt, reell ist und also die projektive Maßbestimmung,

[6]) [Vgl. den unten auf S. 770ff. folgenden Bericht über **Hilbs** einschlägige Untersuchungen.]

die man für die Ebenen und Strahlen des Punktes auf diesen Kegel gründen kann, hyperbolisch ausfällt.

Statt der vier Seitenebenen betrachten wir jetzt die vier Achsen, die wir oben mit $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, $\infty'\infty''$ bezeichneten, d. h. die Durchschnittsgeraden der aufeinanderfolgenden Ebenen. Jede dieser Achsen wird gemäß ihrer Definition von der vorangehenden und der nachfolgenden geschnitten, z. B. die Achse $\infty'\infty''$ (die wir fernerhin auszeichnen wollen) einerseits von $c'c''$, andererseits von $a'a''$. Schneiden sich aber die vier Seitenebenen des Vierecks in einem Punkte, so laufen auch $\infty'\infty''$, $c'c''$ und $a'a''$ in diesem Punkte zusammen (durch den dann natürlich auch $b'b''$ geht). Umgekehrt ist ersichtlicherweise das Zusammenlaufen von $\infty'\infty''$, $c'c''$ und $a'a''$ in einem Punkt die hinreichende Bedingung dafür, daß es einen gemeinsamen Schnittpunkt der vier Ebenen gibt. *Wir werden also das Zusammenlaufen der drei Achsen verlangen.*

3. Ich werde diese geometrische Forderung jetzt in besonderer Weise analytisch ausdrücken. Nach den in § 1, **6** gegebenen Entwicklungen gehören zu den Punkten

$$c', c''; \quad \infty', \infty''; \quad a', a''$$

als zugehörige η-Werte

$$\nu_1, \nu_2; \quad 0, \infty; \quad \lambda_1, \lambda_2.$$

Dabei wissen wir, daß einerseits c', c'', andererseits a', a'' mit ∞', ∞'' je in einer Ebene liegen. Die beiden Ebenen bilden miteinander den (Nicht-Euklidischen) Winkel $\delta\pi$. Ich will nun die Ebene $\infty'\infty''a'a''$ — oder vielmehr den Kreis, in welchem sie die η-Kugel schneidet — als „Meridian der reellen Zahlen“ wählen. Dann sind λ_1, λ_2 reelle Größen und ich schreibe, um dies hervorzuheben:

$$\lambda_1 = l_1, \quad \lambda_2 = l_2. \tag{6}$$

Dagegen sind ν_1, ν_2 Produkte reeller Größen n_1, n_2 in den Faktor $e^{-i\pi\delta}$:

$$\nu_1 = n_1 e^{-i\pi\delta}, \quad \nu_2 = n_2 e^{-i\pi\delta}. \tag{6'}$$

Man denke sich nun die Ebene $\infty'\infty''c'c''$ um die Achse $\infty'\infty''$ in den Meridian der reellen Zahlen hinübergedreht. So entstehen aus c', c'' zwei Punkte auf diesem Meridian, die wir der Kürze wegen ebenfalls c', c'' nennen wollen; die Anordnung soll folgende sein:

Fig. 13.

Dabei gehören zu den Punkten ∞', ∞''; a', a''; c', c'' dieser Figur die reellen η-Werte $0, \infty$; l_1, l_2; n_1, n_2. Wir haben nicht mehr und nicht minder zu verlangen, *als daß die in der Figur zu konstruierenden Verbindungsgeraden ∞', ∞''; a', a''; c', c'' in einen Punkt zusammenlaufen;* anders ausgedrückt: *daß die Punktepaare ∞', ∞''; a', a''; c', c'' auf dem Kegelschnitte drei Paare einer Involution bilden.* Nun drückt sich aber letzteres in bekannter Weise durch die *Involutionsbedingung*

$$l_1 l_2 = n_1 n_2 \tag{7}$$

aus, womit wir die analytische Formulierung für das Vorhandensein eines Orthogonalkreises haben.

4. Diese Bedingung verwandelt sich nun vermöge § 1, **6** sofort in eine Aussage über die gegenseitigen Beziehungen der zu den singulären Punkten ∞, a und c gehörigen Fundamentallösungen von (1). Um diese Aussage bequem zu fassen, empfiehlt sich noch eine bestimmte Verabredung über die Festlegung der zum Punkte ∞ gehörigen Fundamentallösungen, — eine Verabredung, die dem Wesen nach mit der Hilbertschen Festsetzung für den Fall (0, 0, 0, 0) stimmt, die in den Formeln (4), (4′) ihren Ausdruck fand, und die andererseits das genaue Äquivalent ist für die gerade eben vollzogene Drehung um die Achse $\infty'\infty''$, durch die c', c'' auf den Meridian der reellen Zahlen zu liegen kamen. Wir setzen nämlich fest:

Mögen $Y_{\delta'}^{\infty}, Y_{\delta''}^{\infty}$ für (hinreichend große) positive reelle Werte von x und damit im ganzen Intervall $\overline{\infty a}$ durch Formeln folgender Art erklärt sein:

$$Y_{\delta'}^{\infty} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta'} \cdot \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right), \qquad Y_{\delta''}^{\infty} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\delta''} \cdot \mathfrak{P}''\left(\frac{1}{x}\right), \tag{8}$$

unter $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ Potenzreihen mit reellen Koeffizienten verstanden, so soll für (hinreichend große) negative reelle Werte von x und damit im ganzen Intervall $\overline{\infty c}$ folgende Definition gelten:

$$Y_{\delta'}^{\infty} = \left(-\frac{1}{x}\right)^{\delta'} \cdot \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{x}\right), \qquad Y_{\delta''}^{\infty} = \left(-\frac{1}{x}\right)^{\delta''} \cdot \mathfrak{P}''\left(\frac{1}{x}\right). \tag{8'}$$

Hiernach müssen diejenigen Funktionswerte, die sich aus den Lösungen (8) durch analytische Fortsetzung über die positive x-Halbebene hin für das Intervall $\overline{\infty c}$ ergeben, fortan mit

$$e^{-i\pi\delta'} \cdot Y_{\delta'}^{\infty} \quad \text{bez.} \quad e^{-i\pi\delta''} Y_{\delta''}^{\infty}$$

bezeichnet werden.

Nun haben wir früher (in § 1, **6**) festgesetzt, daß in der positiven Halbebene x

$$Y_{\gamma}^{c} \text{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - \nu_1 Y_{\delta''}^{\infty}, \qquad Y_0^{c} \text{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - \nu_2 Y_{\delta''}^{\infty}$$

proportional sein solle. Wir werden das jetzt für das reelle Intervall $\overline{\infty c}$, indem wir dieses als Begrenzung der Halbebene auffassen, gemäß (8′) dahin aussprechen, daß

$$Y_{\gamma}^{c} \text{ mit } e^{-i\pi\delta'} \cdot Y_{\delta'}^{\infty} - \nu_1 \cdot e^{-i\pi\delta''} \cdot Y_{\delta''}^{\infty},$$
$$Y_0^{c} \text{ mit } e^{-i\pi\delta'} \cdot Y_{\delta'}^{\infty} - \nu_2 \cdot e^{-i\pi\delta''} \cdot Y_{\delta''}^{\infty},$$

oder, was dasselbe ist, daß

$$Y_{\gamma}^{c} \text{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - \nu_1 \cdot e^{i\pi\delta} \cdot Y_{\delta''}^{\infty},$$
$$Y_0^{c} \text{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - \nu_2 \cdot e^{i\pi\delta} \cdot Y_{\delta''}^{\infty}$$

proportional sein solle.

Aber $\nu_1 e^{i\pi\delta}$ und $\nu_2 e^{i\pi\delta}$ sind gerade die reellen Beträge, die wir in (6′) mit n_1 und n_2 bezeichnet haben (während in (6) für die an sich reellen Größen λ_1, λ_2 die Bezeichnungen l_1, l_2 eingeführt wurden). So resumiert sich also die Sachlage folgendermaßen:

Definiert man $Y_{\delta'}^{\infty}$, $Y_{\delta''}^{\infty}$ für das Intervall $\overline{\infty a}$ durch die Formeln (8), für das Intervall $\overline{\infty c}$ durch die Formeln (8′), so werden die zu a und c gehörigen Fundamentallösungen mit reellen Verbindungen der $Y_{\delta'}^{\infty}$, $Y_{\delta''}^{\infty}$ proportional. Nämlich

$$Y_{\alpha}^{a} \textit{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - l_1 Y_{\delta''}^{\infty}, \qquad Y_0^{a} \textit{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - l_2 Y_{\delta''}^{\infty}$$

und

$$Y_{\gamma}^{c} \textit{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - n_1 Y_{\delta''}^{\infty}, \qquad Y_0^{c} \textit{ mit } Y_{\delta'}^{\infty} - n_2 Y_{\delta''}^{\infty}.$$

Unser Kreisbogenviereck wird dann und nur dann einen Orthogonalkreis haben, wenn zwischen den so definierten Größen l, n die Involutionsbedingung (7) besteht.

5. Die so gewonnene Aussage ist an sich so einfach wie möglich; sie ist auch ausschließlich auf die reellen Lösungen von (1) bezogen; sie hat aber doch noch nicht die Form, welche für einen Ansatz im Sinne des Oszillationstheorems brauchbar ist. Denn das Oszillationstheorem bezieht sich immer auf eine *einzelne* Lösung von (1), während hier sechs Lösungen nebeneinander betrachtet werden. Wir werden das Resultat also noch weiter umsetzen müssen, wie in den folgenden beiden Paragraphen geschehen soll.

Vorher bemerken wir noch, daß die Bedingung, die wir in § 3 für das Vorhandensein eines Orthogonalkreises in dem besonderen Falle (0, 0, 0, 0) erhielten, mit dem nunmehr gewonnenen allgemeinen Resultat übereinstimmt. Man knüpfe, um dies zu sehen, etwa an Fig. 13 (S. 761) an. Im Falle (0, 0, 0, 0) sind hier die Achsen $\infty'\infty''$, $a'a''$, $c'c''$ alle drei *Tangenten* des Meridians der reellen Zahlen. Sollen dieselben außerdem durch einen Punkt gehen, so ist das, gemäß der Entstehung der Figur, nur so möglich, daß die Achsen $a'a''$ und $c'c''$ zusammenfallen. Beachten wir noch, daß wir jetzt für jeden singulären Punkt nur eine (doppeltzählende) Fundamentallösung haben, zu der als zweite Lösung eine solche mit logarithmischem Gliede tritt. Die (doppeltzählenden) Fundamentallösungen für die Punkte a und c werden mit Y_0^a und Y_0^c, die Fundamentallösung für den Punkt ∞ mit Y_1^∞ zu bezeichnen sein. Die zum Punkte ∞ gehörige Lösung $Y_{\log}^\infty$ wird, im Sinne von (8), (8') oder von (4), (4'), so zu definieren sein, daß sie sowohl im Intervalle $\overline{\infty a}$ als im Intervalle $\overline{\infty c}$ reell ausfällt. Wir haben dann:

Soll ein Orthogonalkreis vorhanden sein, so müssen die zu a und c gehörigen Fundamentallösungen Y_0^a und Y_0^c derselben linearen Verbindung von Y_1^∞ und $Y_{\log}^\infty$ proportional sein.

Und das ist gerade der Sinn der Fig. 6 (S. 756). Nur ist dort statt des Punktes ∞, den wir hier auszeichneten, als Vergleichspunkt der Punkt b gewählt, für den sich das Sachverhältnis bequemer zeichnen ließ.

§ 5.
Vorbereitungen zur Adaptierung des gewonnenen Ansatzes an das Oszillationstheorem.

(Abwicklung des Vierkants; Fortsetzung der reellen Lösungen von (1) über die singulären Punkte hinweg.)

1. Um die in § 4 erhaltene Involutionsbedingung der Form nach an den Ansatz des Oszillationstheorems anzupassen, werden wir jetzt unsere geometrische Betrachtung und die analytische Behandlung parallel zueinander in gewisser Weise weiterentwickeln.

2. Die Fig. 13 (S. 761) entstand, indem wir die Achse $c'c''$ so um die Achse $\infty'\infty''$ herumdrehten, daß sie, gleich der Achse $a'a''$, in die Ebene der reellen η-Werte fiel. Indem wir durchweg mit Nicht-Euklidischen Vorstellungen operieren, wollen wir uns vorstellen, daß unser ganzes Vierkant wie ein starrer Körper dieser Drehung unterworfen werde. Dann ist in Fig. 13 das Stück $\infty'c'$ des Meridians der reellen Zahlen eine *Abwicklung* der gleichbenannten Seite unseres auf der η-Kugel gelegenen Kreisbogenvierecks (während das Stück $a'\infty'$ des Meridians von Haus aus eine Seite des Kreisbogenvierecks ist). Wir wollen mit dieser Abwicklung nun fortfahren, indem wir das Vierkant in seiner neuen Lage um $c'c''$ drehen, bis die Punkte b', b'' desselben in zwei Punkte des Meridians der reellen Zahlen fallen, die wir der Kürze wegen ebenfalls mit b', b'' bezeichnen. Dann drehen wir das Vierkant um die so erhaltene neue Achse $b'b''$ und bringen wieder a', a'' auf den Meridian der reellen Zahlen, wo sie jetzt

a_1', a_1'' genannt werden sollen. Folgeweise drehen wir um a_1', a_1'' und erhalten zwei Punkte ∞_1', ∞_1'' unseres Meridians usw. *Wir bekommen auf unserem Meridian eine unendliche Reihe von Punktepaaren:*

$$a',\ a'';\quad \infty',\ \infty'';\quad c',\ c'';\quad b',\ b'';\quad a_1',\ a_1'';\quad \infty_1',\ \infty_1'';\quad \ldots,$$

die wir natürlich auch nach der negativen Seite unbegrenzt fortsetzen können, und damit eine unbegrenzte Abwicklung der Peripherie unseres Kreisbogenvierecks auf unseren Meridian. Man vergleiche folgende (schematische) Figur:

Fig. 14.

3. Schließlich ist auf solche Weise jedes der vier Segmente $\overline{a\infty}$, $\overline{\infty c}$, $\overline{cb}$, $\overline{ba}$ der reellen x-Achse unendlich oft auf den Meridian der reellen η-Werte übertragen. Und da jeder vollen Abrollung unseres Vierkants eine bestimmte Nicht-Euklidische Bewegung entspricht, die unseren Meridian in sich überführt, so gehen die unendlich vielen reellen Werte von η, die solcherweise dem einzelnen reellen x zugeordnet sind, aus dem einzelnen η durch wiederholte Anwendung einer bestimmten reellen linearen Substitution hervor: *Das reelle x ist eine linear-automorphe Funktion des reellen η.* Schließlich häufen sich, wenn die Verhältnisse so liegen, wie sie in der Figur gewählt sind, die zu demselben x gehörigen η-Punkte nach rechts und links hin gegen zwei Grenzpunkte P und Q, die in der Figur bereits markiert sind; es sind dies die Fixpunkte der in Rede stehenden linearen Substitution.

4. Ist nun bei unserem Kreisbogenviereck insbesondere ein Orthogonalkreis vorhanden, so hat das zur Folge, daß alle die unendlich vielen Punktepaare

$$\ldots\ a',\ a'';\quad \infty',\ \infty'';\quad c',\ c'';\quad \ldots$$

zu P und Q harmonisch sind. Umgekehrt können wir infolgedessen die Bedingung, daß ein Orthogonalkreis vorhanden sei, auf sehr verschiedene Weisen aussprechen, worauf wir im Schlußparagraphen zurückkommen.

5. Wir wollen vorab den analytischen Ansatz ebensoweit fördern. Da ist das erste Hilfsmittel, daß wir in Übereinstimmung mit (8), (8') eine Verabredung treffen, welche genau der festgesetzten Abwicklung unseres Vierecks auf den Meridian der reellen Zahlen entspricht. Wir werden jetzt nämlich nicht nur $Y_{\delta'}^\infty$, $Y_{\delta''}^\infty$ auf der reellen x-Achse so definieren, daß sie beiderseits vom Punkte ∞ reell sind, sondern in entsprechender Weise hinsichtlich der Umgebungen der Punkte a, b, c die zu a, b, c gehörigen Fundamentallösungen. Wir setzen also z. B. für $x = a$:

rechts von a:

$$Y_\alpha^a = (x-a)^\alpha \mathfrak{P}_1(x-a), \quad Y_0^a = \mathfrak{P}_2(x-a), \tag{9}$$

und links von a:

$$Y_\alpha^a = (a-x)^\alpha \mathfrak{P}_1(x-a), \quad Y_0^a = \mathfrak{P}_2(x-a), \tag{9'}$$

unter $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ Potenzreihen mit reellen Koeffizienten [und unter $(x-a)^\alpha$ bezw. $(a-x)^\alpha$ die reellen Werte dieser Potenzen] verstanden.

6. Durch diese Verabredung erreichen wir in der Tat, daß wir jede reelle Lösung y von (1) entlang der reellen x-Achse über jeden singulären Punkt mit einer charakteristischen Unstetigkeit reell fortsetzen können. Ist z. B., wenn wir von rechts an a herankommen,

$$y = c_\alpha Y_\alpha^a + c_0 Y_0^a,$$

so werden wir durch eben diese Formel das y links von a erklären usw. Schließlich können wir so die einzelne reelle Lösung y für unbegrenzt wiederholte, positive oder negative Durchlaufung der genannten x-Achse immer weiter verfolgen.

7. Um von hier aus Anschluß an die Fig. 14 zu erhalten, haben wir nur das in § 1, **6** vorgeführte η:

$$\eta = \frac{Y_{\delta'}^\infty}{Y_{\delta''}^\infty}$$

im Sinne der nun getroffenen Verabredungen unbegrenzt an der reellen X-Achse entlang zu verfolgen.

§ 6.
Riccati-Kurven.

1. Die soeben gegebenen geometrischen und analytischen Entwicklungen gehen, wie gesagt, durchaus parallel, aber der nähere Vergleich wird schleppend, weil den einfach unendlich vielen reellen Werten von η *zweifach* unendlich viele reelle Lösungen von (1):

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

gegenüberstehen. Wir werden diesen Umstand vermeiden, wenn wir jetzt statt der Lösungen von (1) die Lösungen der zugehörigen *Riccatischen Gleichung*

$$z = \frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{c_1 y_1' + c_2 y_2'} \tag{10}$$

ins Auge fassen.

Den Inbegriff vermöge (10) zusammengehöriger reeller Werte von z und x nenne ich *Riccati-Kurve*. Die Riccati-Kurven ziehen sich vermöge der in § 5 getroffenen Festsetzungen über die singulären Werte $x = a, b, c, \infty$ reell hinweg. Und dabei liegen insofern besonders anschauliche Verhältnisse vor, als durch jeden nicht singulären Punkt der Ebene (z, x) — d. h. durch jeden Punkt, dessen x von a, b, c, ∞ verschieden ist —, nur *eine* Riccati-Kurve geht. Die Ebene (z, x) wird, von diesen singulären Stellen abgesehen, die besonderer Untersuchung bedürfen, von den Riccati-Kurven gerade einfach überdeckt. Dabei enthält die Formel (10) ohne weiteres ein übrigens wohlbekanntes geometrisches Gesetz: *Die durch (10) gegebenen einfach unendlich vielen Riccati-Kurven schneiden eine beliebige (nicht singuläre) Vertikale $x = X$ in einer Punktreihe, die zu den Werten $\frac{c_1}{c_2}$ projektiv ist.* — Wir können natürlich ebensowohl sagen, daß die Punktreihe den Werten $-\frac{c_2}{c_1}$ projektiv sei.

2. Man schreibe jetzt in (10) für $-\frac{c_2}{c_1}$ den Buchstaben η, also:

$$z = \frac{y_1 - \eta y_2}{y_1' - \eta y_2'}, \tag{11}$$

wo η reell sein soll. Die durch den einzelnen Wert dieses η festgelegte Riccati-Kurve schneidet die x-Achse da, wo $y_1 - \eta y_2 = 0$ ist, wo also η gerade gleich dem Quotienten $\frac{y_1}{y_2}$ ist. Hiermit aber nimmt der soeben ausgesprochene Satz die folgende einfache Form an, welche die volle Verbindung mit der Betrachtung von § 5, speziell der Fig. 14 auf S. 765 herstellt:

Ordnet man jedem reellen Punkte der x-Achse diejenige Riccati-Kurve (11) *zu, die durch ihn hindurchgeht, so schneidet die Schar der Riccati-Kurven eine beliebige nicht singuläre Vertikale $x = X$ in einer Punktreihe, welche zu der entsprechenden, in* Fig. 14 *auf dem Meridian der reellen Zahlen gelegenen Punktreihe direkt projektiv ist.*

3. Hiernach lassen sich alle Einzelheiten der Fig. 14 auf die Schar unserer Riccati-Kurven übertragen. Beispielsweise entsprechen den Punkten a', a_1', ... der Fig. 14 die Schnittpunkte, welche unsere Vertikale $x = X$ bei immer wiederholter Durchlaufung der gesamten x-Achse mit derjenigen Riccati-Kurve hat, die der Lösung y_α^a von (1) entspricht. Alle die Forderungen, die wir hinsichtlich der involutorischen Lage der Punktepaare von Fig. 14 erhoben, übertragen sich, usw.

4. Mehr beiläufig will ich geltend machen, daß sich das Oszillationstheorem in seiner ursprünglichen Fassung (§ 1, **3**) in besonders einfacher Weise auf die Riccati-Kurven überträgt. In der Tat, wenn dasselbe in den Endpunkten eines Intervalls $\overline{mn}$ der x-Achse die Werte vorschreibt, die der Quotient $\frac{y}{y'}$ für ein geeignetes y annehmen soll, so heißt das jetzt einfach, daß eine Riccati-Kurve existieren soll, die für $x = m$ und $x = n$ vorgegebene Ordinaten z aufweist, d. h. die zwei gegebene Punkte der Ebene (x, z) verbindet. Den Nullpunkten aber, die man dem y im Intervalle mn auferlegen mag, entsprechen direkt Nullpunkte des z, also Schnittpunkte der Riccati-Kurve mit der x-Achse.

§ 7.
Endgültige Adaptierung der Involutionsbedingung (7) an das Oszillationstheorem.

1. Gemäß § 4, 5 wird die Aufgabe, die wir noch zu lösen haben, darin bestehen, daß wir die Involutionsbedingung (7) in eine Bedingung für eine *einzelne* Lösung von (1), oder vielmehr jetzt für eine *einzelne* Riccati-Kurve umsetzen.

Dies läßt sich nunmehr folgendermaßen erreichen:

2. Ich scheide aus der Betrachtung der Fig. 14 zunächst alle Punkte aus, die mit b oder c oder ∞ bezeichnet sind, d. h. ich betrachte nur die Punkte a', a_1', a_2', ... und a'', ... Will ich von den Punkten a', a_1', a_2', ... aus die Grenzelemente P, Q der Figur festlegen, so werde ich vier aufeinanderfolgende Punkte, etwa a', a_1', a_2', a_3' gebrauchen. P und Q sind die Fixpunkte derjenigen Kollineation unseres Kegelschnittes (d. h. des Meridians der reellen η-Werte) in sich, bei der a' in a_1', a_1' in a_2', a_2' in a_3' übergeht. Man konstruiere jetzt (auf unserem Kegelschnitt) zu a' hinsichtlich P und Q den vierten harmonischen Punkt. *Dann deckt sich die Involutionsbedingung (7) mit der Forderung, daß dieser vierte harmonische Punkt mit a'' zusammenfällt.*

3. Es erübrigt sich, diese Forderung in die Sprache der Riccati-Kurven zu übertragen. *Wir verlangen, daß eine mit bestimmten Unstetigkeiten behaftete Riccati-Kurve bei $x = a$ bestimmte Grenzbedingungen befriedige.* Die Kurve soll bei $x = a$ gemäß der Formel

$$z = Y_\alpha^a : \frac{dY_\alpha^a}{dx}$$

beginnen. Wir verfolgen den Verlauf der Kurve, indem wir viermal hintereinander an der x-Achse entlang laufen (wobei wir an den singulären Stellen a, b, c, ∞ die ein für allemal verabredeten Diskontinuitäten anbringen). Auf einer beliebig anzunehmenden nicht singulären Vertikalen $x = X$ mögen dabei vier Schnittpunkte mit der Riccati-Kurve entstehen, die ich a', a_1', a_2', a_3' nenne. Ich suche mir jetzt auf der Vertikalen die Doppelelemente P, Q derjenigen Kollineation, welche a' in a_1', a_1' in a_2',

a_2' in a_3' überführt. Ich konstruiere mir ferner hinsichtlich dieser P, Q auf der Vertikalen zu a' den vierten harmonischen Punkt, den ich a'' nenne. Ich unterbreche jetzt den stetigen Verlauf meiner Riccati-Kurve, indem ich von a_3' zu a'' überspringe und nun längs der x-Achse zurückgehe, bis ich zum ersten Male nach $x = a$ gelange. *Die Forderung ist, daß ich bei $x = a$ in*

$$z = Y_0^a : \frac{dY_0^a}{dx}$$

hineinmünde. Dann und nur dann hat das Kreisbogenviereck auf der η-Kugel einen Orthogonalkreis.

4. Hiermit ist das Ziel erreicht, das ich mir in der gegenwärtigen Arbeit gesteckt habe. Es bleibt zu untersuchen, ob die Hilbertschen Methoden ausreichen, das Oszillationstheorem für ein so kompliziertes Bedingungssystem, wie wir es gerade aufstellten, zu beweisen.[7]) Der Fall, der dabei zunächst interessiert, ist der, wo die gesuchte Riccati-Kurve im Innern der Intervalle $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{c\infty}$, $\overline{\infty a}$ *keinen* Schnittpunkt mit der x-Achse aufweist. Zeigt sich, daß man im einzelnen Intervall statt dessen noch irgendeine Anzahl von Schnittpunkten vorschreiben kann, so treten neben das automorphe Grundtheorem noch entsprechende Obertheoreme.

Zum Schluß möge folgende Andeutung gestattet sein. Die gewöhnliche Theorie der automorphen Funktionen, d. h. die Theorie der *eindeutigen* automorphen Funktionen bezieht sich nur auf solche Fälle der Differentialgleichung (1), bei denen α, β, γ, δ die reziproken Werte ganzer Zahlen sind. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß der Beweis des formulierten Oszillationstheorems von diesem Umstande abhängen sollte (vielmehr wird es wahrscheinlich genügen, daß die reellen Größen α, β, γ, δ zwischen Null und Eins liegen). Wir werden also, wenn es gelingt, die Oszillationsbetrachtung durchzuführen, in doppeltem Sinne über die gewöhnliche Theorie der automorphen Funktionen hinausgeführt: einmal, indem sich eventuell Obertheoreme neben das Grundtheorem stellen, dann aber, weil Werte der α, β, γ, δ miterledigt werden, die aus der genannnten Theorie naturgemäß herausfallen.

Göttingen, im April 1907.

[7]) [Vgl. den Bericht über Herrn Hilbs Untersuchungen auf S. 770ff.]

CVII. Über den Zusammenhang zwischen dem sogenannten Oszillationstheorem der linearen Differentialgleichungen und dem Fundamentaltheorem der automorphen Funktionen.[1])

[Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Dresden (1907), abgedruckt im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16 (1907).]

Wenn man in einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Koeffizienten die singulären Punkte und ihre Exponenten vorgibt, bleiben bekanntlich noch gewisse Konstante — die „akzessorischen Parameter" — unbestimmt; man wird versuchen, sie festzulegen, indem man hinsichtlich des *Verlaufs* der Lösungen y_1, y_2 der Differentialgleichung geeignete Forderungen stellt. Man kennt in dieser Hinsicht zweierlei Ansätze: das *Oszillationstheorem*, das sich auf den reellen Verlauf der reellen Lösungen bezieht und dadurch nach Aussage und Begründung besonders anschaulich ist —, und die ***Fundamentaltheoreme aus der Theorie der automorphen Funktionen***, die hinsichtlich der konformen Abbildung, welche der Quotient y_1/y_2 von dem komplexen Gebiet der unabhängigen Variablen entwirft, gewisse Forderungen stellen. Ich habe schon vor Jahren Versuche gemacht, wenigstens in einfachen Fällen letztere Theoreme auf das Oszillationstheorem zurückzuführen. Auf diese Versuche bin ich neuerdings in einem Aufsatze, der im 64. Bande der Math. Annalen, 1907 [der vorstehenden Abh. CVI] abgedruckt ist, zurückgekommen. Ich bin in Gemeinschaft mit Herrn Hilb (gegenwärtig Assistent an der Universität Erlangen) zurzeit damit beschäftigt, diese Versuche wesentlich auszudehnen. Der Zielpunkt ist dabei, die akzessorischen Parameter allgemein dadurch festzulegen, daß man für die inneren Maßverhältnisse des durch den Quotienten y_1/y_2 entworfenen Bildes geeignete Bedingungen vorschreibt.

[Schlußbemerkungen zu den beiden Abhandlungen CVI, CVII.]

[Herr Hilb hat die bezüglichen Untersuchungen in zwei Abhandlungen mit dem Titel: *Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen* in den Math. Annalen, Bd. 66 (1908/09) und Bd. 68 (1909/10) ausführlich dargestellt.

[1]) [Bericht über einen am 16. September 1907 auf der Naturforscherversammlung zu Dresden gehaltenen Vortrag.]

Auch hat er 1915 in Bd. II, 2 der mathematischen Enzyklopädie (in Nr. 17 seines Referates: *Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet*) einen Bericht über den bis dahin erreichten Stand der Theorie gegeben. Ansätze zur Weiterentwicklung dieser Untersuchungen enthalten die unter Hilbs Anleitung entstandenen zwei Arbeiten von Falckenberg: *Zur Theorie der Kreisbogenpolygone* in den Math. Annalen, Bd. 77 (1915/16) und Bd. 78 (1918), in denen dieser die Überschlagungszahlen und Überdeckungszahlen beliebiger Kreisbogenpolygone bestimmt. Ich nenne ferner den demnächst in den Math. Annalen, Bd. 89 (1922/23) erscheinenden Aufsatz von Haupt und Hilb über: *Oszillationstheoreme oberhalb der Stieltjesschen Grenze*, in welchem meine auf den hypergeometrischen Fall bezüglichen Bemerkungen von S. 597—599 in Bd. 2 dieser Gesamtausgabe weitergeführt werden. Überhaupt schließen sich alle hier genannten Veröffentlichungen auf das engste an meine eigenen Arbeiten über lineare Differentialgleichungen an, die schon in Bd. 2 der vorliegenden Ausgabe als Nr. LXIII, LXIV, LXV, LXVII abgedruckt sind, sowie an meine autographierten Vorlesungshefte: *Über die hypergeometrische Funktion* (1893/94) und *Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung* (1894), über die ebenda als Nr. LXVIII und LXIX Selbstreferate gebracht sind. Noch wichtiger ist für Hilb, nach seiner eigenen Angabe, meine autographierte Vorlesung von 1890/91 (vgl. oben S. 740) gewesen, und ferner der im Herbst 1891 in Borkum hergestellte Entwurf zu einer nicht veröffentlichten Abhandlung über die in der Überschrift genannten Probleme (siehe ebenfalls S. 740).

Wenn ich im folgenden über die Hilbschen Arbeiten kurz berichte, so kann es sich angesichts der Schwierigkeit der ganzen Materie nur darum handeln, den Ausgangspunkt der Überlegungen zu charakterisieren und die einfachsten der erreichten Resultate zu erwähnen.

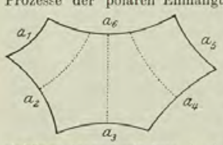
Sprechen wir zunächst von den Maßverhältnissen eines Kreisbogenpolygons. Wir handeln nur von solchen Kreisbogenpolygonen, in deren Berandung sich eine einfach zusammenhängende Fläche ohne inneren Windungspunkt einspannen läßt (Membranpolygone). Denken wir uns ein solches Polygon auf einer η-Kugel gegeben, so konstruieren wir uns zunächst seinen *Kern*, d. h. diejenige Raumfigur, welche durch die Ebenen gebildet wird, welche die aufeinanderfolgenden Kreisbogenseiten des Polygons aus der η-Kugel ausschneiden. Je zwei aufeinanderfolgende Ebenen schneiden sich in einer Kante des Kerns, je zwei dieser aufeinanderfolgenden Kanten in einer Ecke desselben. Da wir die Variable η im folgenden beliebigen linearen Substitutionen unterworfen denken, ist es naturgemäß, für das Polygon und seinen Kern solche Maßzahlen zu verabreden, welche hiervon unberührt bleiben; hierzu wählen wir die η-Kugel als Fundamentalfläche einer Cayleyschen Maßbestimmung und erhalten folgende $3n$ Maßzahlen:

1. Die n *Längen der* zwischen aufeinanderfolgenden Ecken liegenden *Kantenstücke*. (Nimmt man als multiplizierende Konstante des zur Längenbestimmung dienenden Logarithmus eines Doppelverhältnisses, um auf Cayleys ursprüngliche trigonometrische Definition zurückzukommen, den Wert $\frac{i}{2}$, so wird die einzelne Länge rein imaginär, sofern die begrenzenden Ecken beide innerhalb oder beide außerhalb der Kugel gelegen sind; sie wird reell, wenn sie durch die Kugeloberfläche getrennt sind. — Die gleiche Festsetzung der multiplizierenden Konstanten möge für die übrigen in Betracht kommenden Maßzahlen getroffen werden.)

2. Die n *Kantenwinkel*. Als Maßzahlen des Kerns sind dies diejenigen Winkel im Nicht-Euklidischen Sinne, unter denen sich aufeinanderfolgende Seitenebenen schneiden. Diese Winkel stimmen nach bekannten Grundsätzen der projektiven Metrik mit denjenigen im elementaren Sinne gemessenen Winkeln ohne weiteres überein, welche die entsprechenden aufeinanderfolgenden Kreisbögen auf der Kugeloberfläche einschließen. Diese letzteren Winkel wird man bei der Allgemeinheit, welche unser geometrischer Ansatz besitzt, nicht notwendig, wie in der elementaren Polyedrometrie, kleiner als π nehmen, sondern beliebig groß sein lassen, wo dann ihr absoluter Wert durch die Polygonmembran gegeben ist.

3. Die *n Längen der Polygonseiten.* Als Maßzahlen des Kerns handelt es sich um diejenigen Winkel im Nicht-Euklidischen Sinne, welche die zwei eine Seite begrenzenden Kanten miteinander bilden. Die ihnen entsprechenden Seiten auf der Kugelfläche wird man wieder nicht, wie in der elementaren Polyedrometrie, beschränken wollen, sondern ihnen beliebige Überschlagungen gestatten. Der Absolutwert einer Seite ist dann erst durch die Polygonmembran bestimmt. Reduziert man die Seiten modulo 2π, so erhält man einen reellen oder imaginären Restbestandteil, je nachdem sich die beiden Kanten innerhalb oder außerhalb der Kugel schneiden.

Wir vereinigen nun eine Schiebung längs einer Kante um die zugehörige Kantenlänge mit der Drehung um dieselbe Kante durch den zugehörigen Kantenwinkel zu einer Schraubenbewegung um die Kante. Dann bestehen zwischen den Sinus und Kosinus der Amplituden dieser Schraubenbewegungen und den Sinus und Kosinus der n Seitenlängen diejenigen sechs fundamentalen Relationen der Nicht-Euklidischen Polygonometrie, welche aussagen, daß die Aufeinanderfolge von n Schraubungen um alle Kanten des Kerns je um die *doppelte* zugehörige Amplitude die Identität ergibt. Ich will diese Relationen nicht hinschreiben. Dagegen möchte ich gleich darauf hinweisen, daß Maßzahlen, zwischen deren Sinus und Kosinus jene sechs Relationen erfüllt sind, durchaus noch nicht zu einem Kreisbogenpolygon in unserm Sinne zu gehören brauchen, obwohl sonst keine weiteren Bedingungen zwischen den Sinus und Kosinus der Maßzahlen bestehen. Weil wir nämlich ein *Membran*polygon haben wollten, bestehen darüber hinaus noch *Ergänzungsrelationen* zwischen den absoluten Werten der Maßzahlen, wie ich solche in den Math. Annalen, Bd. 37, 1891 (= Abh. Nr. LXV in Bd. 2) zunächst für das Dreieck gab. Erst durch diese werden die in den polygonometrischen Formeln noch unbestimmt bleibenden ganzzahligen Multipla von 2π, welche in der einzelnen Maßzahl enthalten sind, völlig bestimmt, bezw. auf die zulässigen Werte eingeschränkt. Falckenberg hat a. a. O. ganz allgemein solche Ergänzungsrelationen aufgestellt, welche nach Herausgreifen von $n-3$ sich überschlagenden Seiten die Überschlagungszahlen der drei andern im allgemeinen mit einer Unbestimmtheit von $n-3$ Einheiten liefern. Für die ursprünglichen Hilbschen Untersuchungen wird man jedoch mit einfacheren Betrachtungen zur Aufstellung genauer Ergänzungsrelationen gelangen können, weil dort alle Winkel des Polygons $< \pi$ vorausgesetzt werden (um unterhalb der sogenannten Stieltjesschen Grenze zu bleiben). Von einem zu einem gegebenen Kern gehörigen Membranpolygon aus wird man dann alle andern zu demselben Kern gehörigen Membranpolygone erhalten, indem man allein den Prozeß der transversalen Einhängung (bzw. Aushängung) von Kugelzonen wiederholt ausführt. (Die Prozesse der polaren Einhängung von Kugelkalotten, der lateralen Anhängung von Kugelkalotten und der diagonalen Einhängung von Vollkugeln, die sonst noch in Frage kämen, sind hier wegen der Beschränkung der Polygonwinkel nicht möglich.) Hier ein einfaches Beispiel. Ich zeichne ein Kreisbogensechseck, dessen Seiten sich nicht überschlagen. Ich werde dasselbe gern erweitern können, indem ich längs der punktierten Linien $a_6 a_2$, $a_6 a_3$, $a_6 a_4$ eine beliebige Anzahl von Kreisringen transversal einhänge (sagen wir bzw. l_2, l_3, l_4 Kreisringe), von denen die ersten von den Kreisen a_6 und a_2, die folgenden von den Kreisen a_6 und a_3, die letzten von den Kreisen a_6 und a_4 begrenzt werden. Die Folge wird sein, daß sich die Seiten a_2, a_3, a_4 bzw. l_2-mal, l_3-mal, l_4-mal überschlagen, die Seite a_6 aber $(l_2+l_3+l_4)$-mal, und daß sich die Seiten a_1 und a_5 überhaupt nicht überschlagen können, wenn l_2, l_3, l_4 sämtlich von Null verschieden sind. In der Abhängigkeit dieser Anzahlen liegt eben, was ich im vorliegenden Falle als Ergänzungsrelation bezeichne. Weitere Beispiele finden sich in den eingangs genannten Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen in Bd. 2 dieser Ausgabe.



Man bilde nun das Kreisbogen-n-Eck auf eine x-Halbebene konform ab. Dann

erhält man für η als Funktion von x in bekannter Weise eine Differentialgleichung dritter Ordnung, die man, indem man η in geeigneter Weise in $\frac{y_1}{y_2}$ spaltet, sofort auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführt:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{1-\alpha_1}{x-a_1} + \frac{1-\alpha_2}{x-a_2} + \dots + \frac{1-\alpha_{n-1}}{x-a_{n-1}}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{A x^{n-3} + B_0 x^{n-4} + \dots + B_{n-4}}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n-1})}\, y = 0,$$

welche n durchaus reelle singuläre Punkte $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = \infty$ besitzt, deren Exponentendifferenzen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n = \alpha_n' - \alpha_n''$ mit π multipliziert die entsprechenden Winkel des η-Polygons geben. Dabei ist noch

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n' + \alpha_n'' = n-2$$
$$\alpha_n' \cdot \alpha_n'' = A.$$

Die Frage, die ich in der vorstehend abgedruckten Abhandlung Nr. CVI nur beim Kreisbogenviereck erläutere, ist, ob man bei gegebenen reellen singulären Punkten in der x-Ebene mit reellen Exponentendifferenzen und bei gegebenem reellem Werte von A über die akzessorischen Parameter $B_0, B_1, \dots, B_{n-4}$ so verfügen kann, daß das Kreisbogenpolygon, welches durch die Abbildung des Quotienten η zweier Partikularlösungen y_1 und y_2 entsteht, bzw. dessen Kern bestimmte Maßverhältnisse aufweist.

In dieser Hinsicht stellt sich Hilb insbesondere die Aufgabe, durch Vorgabe von $n-3$ rein imaginären Kantenlängen und gewissen $n-3$ Oszillationszahlen *oder* durch Vorgabe von $n-3$ reellen Seitenlängen *oder* durch Vorgabe einer Anzahl $m\,(< n-3)$ rein imaginärer Kantenlängen nebst gewissen m Oszillationszahlen und $n-m-3$ reellen Seitenlängen die $n-3$ akzessorischen Parameter zu bestimmen. — Aus der Reihe seiner Theoreme, zu denen er mit Hilfe des Oszillationstheorems und elementarer Stetigkeitsbetrachtungen gelangt, hebe ich nur folgende hervor:

I. Man kann stets auf eine und nur eine Weise die akzessorischen Parameter als reelle Größen so bestimmen, daß $n-3$ Seiten vorgeschriebene reelle Längen besitzen, die aber nicht ganze Vielfache von π sind. Sind die Werte der Seitenlängen ganze Vielfache von π, so hört die eindeutige Bestimmtheit der Parameterwerte auf.

Man vergleiche hierzu die auf den Fall Laméscher Polynome bezüglichen Ausführungen auf S. 594ff. in Band 2 dieser Ausgabe und speziell die Figur auf S. 595 daselbst.

II. Ist A positiv, so kann man auf eine und nur eine Weise die akzessorischen Parameter so bestimmen, daß die Längen der Kanten $a_2' a_2'', a_3' a_3'', \dots, a_{n-2}' a_{n-2}''$ vorgeschriebene rein imaginäre Längen besitzen, während die Seiten $a_1' a_2', a_2' a_3', \dots, a_{n-2}' a_{n-1}'$ rein imaginäre Längen besitzen.

Besonders wichtig ist der Fall, wo alle Kantenlängen des Kerns verschwinden, sich also alle Kanten in demselben Raumpunkte schneiden; das Kreisbogenpolygon besitzt dann einen Orthogonalkreis. Als Spezialfall ist hierin das Grenzkreistheorem der eindeutigen automorphen Funktionen vom Geschlechte $p=0$ und mit n durchaus reellen Stigmaten enthalten. Für dieses ergibt sich somit ein neuer und verhältnismäßig einfacher Beweis, der darauf beruht, daß man $n-3$ reelle Parameter variiert. Man spricht, sobald ein Orthogonalkreis vorhanden ist, von Grund- und Obertheoremen. Verstehen wir noch unter A_{a_i} denjenigen Wert, der an Stelle des Koeffizienten A tritt, wenn man die Differentialgleichung so transformiert, daß an Stelle des singulären Punktes a_n der singuläre Punkt a_i ins Unendliche geworfen wird, so hat Hilb folgende *Grundtheoreme:*

III. Sind alle Größen A_{a_i} positiv, so kann man auf eine und nur eine Weise die akzessorischen Parameter so bestimmen, daß das Kreisbogenpolygon einen Orthogonalkreis besitzt, der reell ist und den keine Seite schneidet. (Grenzkreisfall.)

IV. Ist A_{a_n} positiv, sind dagegen alle andern Größen A_{a_i} negativ, so kann man die akzessorischen Parameter auf eine und nur eine Weise so bestimmen, daß das Kreisbogenpolygon einen reellen Orthogonalkreis besitzt, den die reellen Seiten $a'_{n-1}\,a'_n$ und $a_n\,a'_1$ und nur diese schneiden.

Neben die Grundtheoreme treten noch eine große Anzahl *Obertheoreme*, deren einfachstes folgenden Wortlaut hat:

V. Sind alle A_{a_i} positiv, so kann man stets die akzessorischen Parameter so bestimmen, daß das Kreisbogenpolygon einen reellen Orthogonalkreis besitzt, den $n-3$ benachbarte Seiten je in einer vorgegebenen Anzahl von Schnittpunkten schneiden, während die $(n-2)$-te und n-te Seite ihn nicht schneidet. —

Weit schwieriger werden die Verhältnisse, sobald die singulären Punkte der Differentialgleichung imaginär werden. Man studiert dann nicht mehr die Abbildung der positiven x-Halbebene auf ein Kreisbogenpolygon, sondern die Abbildung der von einem willkürlichen Punkte O nach den singulären Stellen aufgeschnittenen x-Ebene auf einen Fundamentalbereich mit linearer Ränderzuordnung. Zu diesem Fundamentalbereich gehört ein Kern, der aus n durch die Bilder der singulären Punkte gehenden Kanten besteht, welche im allgemeinen alle windschief zueinander sind. Zu diesem Kern konstruiere man den Polarkern, welcher aus den (im Sinne einer auf die η-Kugel gegründeten Maßbestimmung) gemeinsamen inneren Perpendikeln je zweier aufeinanderfolgender Kanten des Kerns besteht. (Vgl. hierzu die Bemerkungen auf S. 408 in Band 1 dieser Ausgabe und die dort genannten Arbeiten von Fr. Schilling.) Als Maßzahlen dieses Schillingschen Doppelkerns kann man die Amplituden der n Schraubungen um die Kanten des Kerns wählen, welche jeweils das eine diese Kante treffende Perpendikel in das zweite Perpendikel überführen, und außerdem die Amplituden der n Schraubungen um die n Perpendikel, welche die eine das Perpendikel treffende Kante in die zweite Kante überführen. Der Schiebungsteil der Schraubungen erster Art entspricht der Kantenlänge, der Drehungsteil dem Kantenwinkel im früheren einfachen Falle; der Drehungsteil hängt in bekannter Weise mit der Exponentendifferenz des zugehörigen singulären Punktes zusammen. Die Amplituden der Schraubungen zweiter Art entsprechen den Seitenlängen im früheren Falle. Die sechs fundamentalen Relationen zwischen den Sinus und Kosinus der Amplituden der Schraubungen beider Art erhält man aus der Tatsache, daß die Aufeinanderfolge von n Schraubungen um die Kanten des Kerns mit jeweils doppelter Amplitude die Identität liefert. An Stelle der einfachen Ergänzungsrelationen werden hier Relationen zwischen den Überdeckungszahlen gewisser Stellen des Fundamentalbereichs treten.

Es entsteht jetzt die Frage, inwieweit sich die $n-3$ akzessorischen Parameter B der Differentialgleichung, natürlich jetzt als komplexe Zahlen, so festlegen lassen, daß der Fundamentalbereich bzw. sein zugehöriger Doppelkern vorgegebene Maßverhältnisse besitzt. Besonders wichtig ist hier wieder die Spezialfrage, wann es einen Kreis gibt, der bei Ausführung aller n Drehungen um die Kanten des Kerns ungeändert bleibt. Die Frage wird durch die Grundtheoreme und die Obertheoreme beantwortet. Diese Antwort enthält zugleich einen Beweis für das Grenzkreistheorem der eindeutigen automorphen Funktionen des Geschlechtes $p=0$ und mit n beliebigen Stigmaten. — Alle diese Fragen hat Hilb nur im Falle $n=4$, und auch da nur teilweise beantworten können, weil im Falle imaginärer singulärer Stellen die Zahl der Obertheoreme ganz ungeheuer schnell wächst.

Wie man sieht, stehen alle diese Untersuchungen noch im Anfang. Es wird vor allen Dingen darauf ankommen, sie auf Gebilde von höherem p mit beliebigen Stigmaten auszudehnen. Die Verhältnisse werden da komplizierter liegen als im Falle $p=0$, aber ich glaube kaum, daß eigentlich prinzipielle neue Schwierigkeiten zu überwinden sind. Jedenfalls hat die jüngere mathematische Generation hier ein aussichtsreiches Arbeitsgebiet vor sich. Die Wissenschaft an sich ist etwas Unendliches. Nur ein kleiner Teil ihres Bereiches ist erarbeitet. Und jedem nachwachsenden Geschlecht ist die Möglichkeit gegeben, diesen Bereich zu erweitern. K. (mit V.)]

Anhang.

Verschiedene Verzeichnisse.

1. Angaben betreffend die Lehrtätigkeit F. Kleins bis Ostern 1923.

Vorbemerkungen.

Das folgende Verzeichnis a) gibt über Kleins akademische Lehrtätigkeit Aufschluß, soweit eine solche Zusammenstellung das überhaupt vermag. In seinen Vorlesungen, auch in denen allgemeinerer Art, hat Klein manche wissenschaftliche Frage gefördert, die in den abgedruckten Abhandlungen der vorliegenden Gesamtausgabe gar nicht zur Sprache kommt. Glücklicherweise existieren von den mit * bezeichneten Vorlesungen (also von beinahe allen) Ausarbeitungen, die in der Regel von Kleins jeweiligen Assistenten oder seinen Schülern angefertigt worden sind. Diese Ausarbeitungen sind zwar nicht stenograpische Nachschriften, sondern mehr oder weniger freie Bearbeitungen auf Grund von während des Vortrages gemachten Notizen und zeigen als solche den Stempel der Eigenart der Bearbeiter, welche für viele Einzelheiten die Verantwortung tragen müssen; aber da sie unter der Aufsicht Kleins hergestellt wurden, ermöglichen sie einen guten Einblick in seine Lehrtätigkeit. Ein Teil dieser Ausarbeitungen ist, wie im folgenden jeweils genauer angegeben werden soll, autographiert worden und so in den Buchhandel gekommen. Aber auch von den nicht autographierten Vorlesungen existieren im Besitz von Instituten und Privatpersonen mancherlei Abschriften, haben doch die Ausarbeitungen jahrelang in den jeweiligen Seminarräumen zur allgemeinen Benutzung ausgelegen. (Vgl. hierzu, was in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe auf S. 382—383 gesagt wurde.) — Das Zeichen ** vor einer Vorlesung bedeutet, daß von dieser zwar keine Ausarbeitung, aber ein ausführliches in Stichworten abgefaßtes Protokoll existiert. Von sämtlichen Vorlesungen existieren ferner die Notizen, welche sich Klein zur Vorbereitung seines Vortrages gemacht hatte. Der beste Teil von Kleins Lehrtätigkeit hat übrigens nicht in den Vorlesungen, sondern in den Seminaren und den daran anschließenden privaten Besprechungen mit seinen Schülern seine Stätte gefunden. Von den mit ○ bezeichneten Vortragsseminaren (also von beinahe sämtlichen) existieren Protokollbücher, in welche die jeweils vortragenden Seminarmitglieder Berichte über ihre Vorträge eingetragen haben. Die Protokollbücher bilden so eine wertvolle Quelle für die aus Kleins Seminaren hervorgegangenen Veröffentlichungen seiner Schüler. Um den Lesern der vorliegenden Ausgabe auch nach dieser Richtung einiges zu bieten, ist nachfolgend unter b) das Verzeichnis der bei Klein bearbeiteten Dissertationen und unter c) die Liste seiner Assistenten beigefügt.

Als weitere Quellen, welche Angaben über Kleins Lehrtätigkeit und seine Arbeit an der Organisation des Unterrichtes enthalten, seien hier genannt die „Vorbemerkungen zu den Arbeiten zur anschaulichen Geometrie“ und die Ausführungen „zur Entstehung meiner Beiträge zur mathematischen Physik“ in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 4ff. bzw. S. 508ff., die unter C. und D. in dem nachfolgenden Verzeichnis der Veröffentlichungen Kleins genannten Schriften, sodann das Werk von W. Lorey „Das Studium der

Mathematik an den Deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts“ (Leipzig, Teubner 1916, als Bd. III, Heft 9 der Abh. über den math. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die IMUK), schließlich die beiden Berichte „Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, herausgegeben von A. Gutzmer“ (Leipzig, Teubner 1908) und „Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in den Jahren 1908—1913, herausgegeben von A. Gutzmer“ (Leipzig, Teubner 1914), in denen u. a. einige ältere Aufsätze Kleins abgedruckt sind. V.

(Abgeschlossen April 1923.)

---

a) Verzeichnis der Vorlesungen und Seminare.

Göttingen (Januar 1871 bis Herbst 1872).

Wi. 1870/71: (nach der Habilitation am 7. Januar 1871): Ausgewählte Kapitel der Geometrie, 2st.

So. 1871: Theoretische Optik, 4st.
Liniengeometrie, speziell Plückersche Komplexe, 2st.

Wi. 1871/72: Wechselwirkung der Naturkräfte und Gesetz der Erhaltung der Kraft, 6st.
Geometrische Transformationen, 2st.

So. 1872: Analytische Geometrie der Ebene, 4st.
○ Seminar (mit Clebsch zusammen) über verschiedene, hauptsächlich geometrische Gegenstände, 2st.

Erlangen (Herbst 1872 bis Ostern 1875).

Wi. 1872/73: Elementare Partieen der Algebra und der analytischen Geometrie der Ebene, 4st.
Ausgewählte Kapitel der neueren Geometrie, verbunden mit praktischen Übungen.
○ Seminar über verschiedene Gegenstände, 2st.

So. 1873: Differential- und Integral-Rechnung, 4st.
Invariantentheorie I, 4st.
○ Seminar über verschiedene Gegenstände der Geometrie und Algebra, 2st.

Wi. 1873/74: Analytische Mechanik, 4st.
Invariantentheorie II, 4st.
○ Seminar über verschiedene Gegenstände der Geometrie und Algebra, 2st.

So. 1874: Raumgeometrie, 4st.
Abelsche Funktionen, 4st.
○ Seminar über geometrische Gegenstände, 2st.

Wi. 1874/75: Höhere Algebra, 4st.
Ausgewählte Kapitel der neueren Geometrie, 4st.
Übungen in darstellender Geometrie, 2st.
○ Seminar über verschiedene Gegenstände der Geometrie und Algebra, 2st.

München, polytechn. Schule (Ostern 1875 bis Herbst 1880).

So. 1875: Analytische Geometrie, 4 Std. Vorl. u. 2 St. Üb.
Analytische Mechanik, 2st.
○ Seminar über ausgewählte Gegenstände der mathematischen Physik, 2st.

Wi. 1875/76: Differential- und Integral-Rechnung I, 4 St. Vorl. u. 2 St. Üb.
Höhere algebraische Kurven, 4st.
○ Seminar über verschiedene Gegenstände, 2st.

So. 1876: Differential- und Integral-Rechnung II, 4 St. Vorl. u. 2 St. Üb.
Abelsche Funktionen, 4st.
○ Seminar über verschiedene Gegenstände, 2st.

Wi. 1876/77: ** Analytische Geometrie I, 2 St. Vorl. u. 1 St. Üb.
Differentialgleichungen, 4st.
○ Proseminar über verschiedene Gegenstände, 2st.
○ Seminar über verschiedene Gegenstände der Geometrie und Algebra, 2st.

So. 1877: ** Analytische Geometrie I, 2 St. Vorl. u. 1 St. Üb.
Zahlentheorie, 4st.
○ Proseminar über verschiedene Gegenstände, 2st.
○ Seminar über verschiedene Gegenstände der Geometrie und elliptische Funktionen, 2st.

Wi. 1877/78: ** Einführung in die Höhere Mathematik I, 4 St. Vorl. u. 2 St. Üb.
Elliptische Funktionen, 4st.
○ Proseminar über ausgewählte Gegenstände der mathematischen Physik, 2st.
○ Seminar über Geometrie und Invariantentheorie, 2st.

So. 1878: ** Einführung in die Höhere Mathematik I, 4 St. Vorl. u. 2 St. Üb.
** Analytische Mechanik, 4st.
○ Proseminar über ausgewählte Gegenstände der mathematischen Physik, 2st.
○ Seminar über verschiedene Gegenstände, 2st.

Wi. 1878/79: ** Einführung in die Höhere Mathematik II, 4 St. Vorl. u. 2 St. Üb.
* Algebraische Gleichungen, 4st.
○ Seminar über Geometrie und elliptische Funktionen, 2st.

So. 1879: ** Einführung in die Höhere Mathematik II, 4 St. Vorl. u. 2 St. Üb.
* Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, 4st.
○ Seminar über Geometrie und elliptische Funktionen, 2st.

Wi. 1879/80: ** Einführung in die Höhere Mathematik I, 4 St. Vorl. u. 2 St. Üb.
** Analytische Mechanik, 4st.
○ Seminar über Geometrie und elliptische Funktionen, 2st.

So. 1880: ** Einführung in die Höhere Mathematik I, 4 St. Vorl. u. 2 St. Üb.
○ Seminar über elliptische Funktionen, 2st.

Leipzig (Herbst 1880 bis Ostern 1886).

Wi. 1880/81: * Funktionentheorie in geometrischer Darstellung I, 4st.[1]).
○ Seminar über Geometrie und Funktionentheorie, 2st.

---

[1]) Diese Vorlesung wurde seiner Zeit von Herrn Ernst Lange ausgearbeitet. Im Jahre 1892 hat Herr Paul Epstein nach geringen Abänderungen den Teil I unter dem Titel „Einleitung in die geometrische Funktionentheorie“ als Autographie vervielfältigen lassen. Der Teil II wurde nicht autographiert, weil sein Inhalt sich im wesentlichen mit Kleins Schrift „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale“ (= Nr. XCIX im vorliegenden Bande dieser Ausgabe) deckt und zum Teil auch in ausführlicherer Gestalt in die Autographie „Riemannsche Flächen“ übergegangen ist.

So. 1881: ** Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 4st.
* Funktionentheorie in geometrischer Darstellung II, 4st.[2]).
○ Seminar über Geometrie und Funktionentheorie, 2st.

Wi. 1881/82: * Projektive Geometrie I, 4st.
** Darstellende Geometrie I, 2 St. Vorl. u. 2 St. Üb. (durch den Assistenten Dyck abgehalten).
○ Seminar über Funktionentheorie (Klein trägt selbst über seine Schrift „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihre Integrale“ vor).

So. 1882: * Projektive Geometrie II, 4st.
** Darstellende Geometrie II, 2 St. Vorl. u. 2 St. Üb. (durch Dyck abgehalten).
* vom 6. Juni ab: Eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich, 2st.
○ Seminar über Fouriersche Reihen und Funktionentheorie, 2st.

Wi. 1882/83: * Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf Geometrie, 4st. (bis Weihnachten durch Dyck gelesen).
* Übungen hierzu, 2st. (abgehalten durch Dyck).
○ Seminar (nur bis Weihnachten) über hyperelliptische, Abelsche und Thetafunktionen, 2st.

So. 1883: * Theorie der Gleichungen, insbesondere des fünften Grades, 4st.[3]) (nur bis Pfingsten).
○ Seminar über lineare Differentialgleichungen und die hypergeometrische Funktion, 2st. (von Pfingsten an durch Dyck abgehalten).

Wi. 1883/84: Elliptische Funktionen I, 4st.
○ Seminar über elementare Funktionentheorie, 2st.

So. 1884: * Elliptische Funktionen II, 4st.
○ Seminar über elliptische Funktionen, 2st.

Wi. 1884/85: * Höhere algebraische Kurven und Flächen, 4st.
○ Seminar über elliptische Funktionen; Klein selbst trägt mehrmals über elliptische Normalkurven vor, 2st.

So. 1885: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 4st.
* Hyperelliptische Funktionen I, 2st.
○ Seminar über algebraische Funktionen und ihre Integrale, 2st.

Wi. 1885/86: * Differential- und Integral-Rechnung, 4st.
* Hyperelliptische Funktionen II, 2st.
○ Seminar über hyperelliptische Funktionen und die Kummersche Fläche, 2st.

Göttingen (seit Ostern 1886).

So. 1886: * Algebra I, 4st.
* Elliptische Modulfunktionen, 2st.
○ Seminar über reguläre Körper und Dreiecksfunktionen, 2st.

Wi. 1886/87: * Mechanik I, 4 St. Vorl. u. 1 St. Üb.
* Algebra II, 2st.
○ Seminar über Gruppentheorie und algebraische Gleichungen, 2st.

---

[2]) Siehe Note [1]) S. 5.

[3]) Aus dieser Vorlesung ist Kleins Buch „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“, Leipzig 1884, entstanden.

So. 1887: * Mechanik II, 2 St. Vorl. u. 1 St. Üb.
* Hyperelliptische Funktionen I, 4st.
○ Seminar über die Kreiseltheorie, 2st.
Kolloquium über Gruppentheorie und algebraische Gleichungen.

Wi. 1887/88: * Theorie des Potentials I, 4st.[4]).
* Hyperelliptische Funktionen II, 2st.
○ Seminar über hyperelliptische Funktionen, 2st

So. 1888: * Theorie des Potentials II, 4st.[4]).
* Abelsche Funktionen I, 2st.
○ Seminar über hyperelliptische Funktionen, 2st.

Wi. 1888/89: * Partielle Differentialgleichungen der Physik I, 4st.[4]).
* Abelsche Funktionen II, 2st.
○ Seminar über Abelsche Funktionen, 2st.

So. 1889: * Partielle Differentialgleichungen der Physik II, 4st[4]).
* Abelsche Funktionen III, 2st.

Wi. 1889/90: * Nicht-Euklidische Geometrie I, 4st.[5]).
* Lamésche Funktionen, 2st.[6]).
○ Seminar über partielle Differentialgleichungen der Physik, über Zykliden und Lamésche Funktionen, 2st.

So. 1890: * Nicht-Euklidische Geometrie II, 2st.[5]).
* Lineare Differentialgleichungen I, 4st.[7]).
○ Seminar über Besselsche Funktionen, Kugelfunktionen und hypergeometrische Funktionen, 2st.

Wi. 1890/91: * Mechanik I, 4st.
* Lineare Differentialgleichungen II, 4st.[7]).

So. 1891: * Mechanik II, 4st.
* Lineare Differentialgleichungen III, 4st.[7]).
○ Seminar über hypergeometrische und automorphe Funktionen, 2st.

Wi. 1891/92: * Algebraische Gleichungen, 4st.
* Riemannsche Flächen I, 4st.[8]).
Seminar über hypergeometrische und Lamésche Funktionen, 2st.

---

[4]) Einige Teile der Vorlesungen „Theorie des Potentials“ und „Partielle Differentialgleichungen der Physik“ sind in das Buch von Herrn Fr. Pockels „Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik“, Leipzig 1891, übergegangen.

[5]) Die Einleitung über die Grundlagen der projektiven Geometrie wurde von Herrn Bertheau ausgearbeitet, der Hauptteil der Vorlesung jedoch von Herrn Friedrich Schilling, der auf Grund dieser Ausarbeitung die Autographie „Nicht-Euklidische Geometrie I u. II“ herstellte.

[6]) Diese Vorlesung wurde von Herrn Maxime Bôcher ausgearbeitet und später in erweiterter Gestalt als Buch „Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie“, Leipzig 1894, herausgegeben. Vgl. Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 592, Fußnote [14]).

[7]) Teil I dieser Vorlesung (hauptsächlich eine Theorie der bestimmten Integrale und der hypergeometrischen Funktion enthaltend) wurde von den Herren Curry und Bôcher ausgearbeitet, Teil II und III von Klein selbst. Von Teil II und III wurde nach Kleins Ausarbeitung eine Autographie hergestellt mit dem Titel „Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ (1891/92). Vgl. die Bemerkungen in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 596/97 und in Bd. 3, S. 740 u. 748.

[8]) Von dieser Vorlesung wurde nach einer von Klein selbst hergestellten Ausarbeitung die gleichnamige Autographie hergestellt. Ein unveränderter Neudruck erschien 1906. Vgl. das Selbstreferat von Klein, Nr. C in Bd. 3 dieser Ausgabe, S. 574.

So. 1892:	* Riemannsche Flächen II, 4st.[9]). ○ Seminar über Zahlentheorie, 2st.
Wi. 1892/93:	* Höhere Geometrie I, 4st.[10]). ○ Seminar über verschiedene Gegenstände, 2st.
So. 1893:	* (erst vom Anfang Juni ab). Höhere Geometrie II, 4st.[10]). * (nur im Mai) 15 Vorträge über Zahlentheorie. ○ Seminar über Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2st.
Wi. 1893/94:	Hypergeometrische Funktionen, 4st.[11]). ○ Seminar über lineare Differentialgleichungen und die *P*-Funktion, 2st.
So. 1894:	Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, 4st.[12]). * Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, 2st.[13]). ○ Seminar über lineare Differentialgleichungen und Kugelfunktionen, 2st.
Wi. 1894/95:	Zahlentheorie, 4st. ○ Seminar über die Grundlagen der Analysis bei Funktionen einer Veränderlichen, 2st.
So. 1895:	Differentialrechnung, 4st. ○ Seminar über die Grundlagen der Analysis bei Funktionen mehrerer Veränderlichen, Differenzenrechnung, 2st.
Wi. 1895/96:	* Theorie des Kreisels, 2st.[14]). Zahlentheorie I, 2st.[15]). ○ Seminar über Zahlentheorie, 2st.
So. 1896:	* Einführung in die technische Mechanik, 2st. Zahlentheorie II, 2st.[15]). ○ Seminar über Zahlentheorie, 2st.
Wi. 1896/97:	* Integralrechnung, 4st. ○ Seminar (mit Hilbert zusammen) über Funktionentheorie und konforme Abbildung, 2st.

[9]) Siehe Note [8]) S. 7.

[10]) Die Ausarbeitung dieser Vorlesung und die Herstellung der gleichnamigen Autographie wurde von Herrn Friedrich Schilling besorgt. Ein Neudruck erschien 1907. Vgl. das Selbstreferat von Klein, Nr. XXVIII in Bd. 1 dieser Ausgabe, S. 498.

[11]) Die Ausarbeitung dieser Vorlesung und die Herstellung der Autographie „Über die hypergeometrische Funktion" (1893/94) wurde von Herrn Ernst Ritter besorgt. Ein Neudruck erfolgte 1906. Vgl. das Selbstreferat von Klein, Nr. LXVIII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 578.

[12]) Die Ausarbeitung dieser Vorlesung und die Herstellung der Autographie „Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung" (1894) wurde von Herrn Ernst Ritter besorgt. Ein Neudruck erfolgte 1906. Vgl. das Selbstreferat von Klein, Nr. LXIX in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 583.

[13]) Die Ausarbeitung dieser Vorlesung wurde von einigen Zuhörern in gemeinsamer Arbeit angefertigt. Auf Grund dieser Ausarbeitung hat Herr Tägert das gleichnamige Schriftchen, Leipzig 1895, hergestellt.

[14]) Die Ausarbeitung hat Herr Arnold Sommerfeld besorgt. Auf Grund derselben hat er in den folgenden Jahren in ausführlicherer Darstellung das umfangreiche Buch „Über die Theorie des Kreisels" (Leipzig 1897—1910) geschrieben (1. Heft 1897, 2. Heft 1898, 3. Heft 1903, 4. Heft 1910. Bei Abfassung des 4. Heftes hat Herr Fritz Noether ihn unterstützt).

[15]) Die Ausarbeitung dieser Vorlesung und die Herstellung der Autographie „Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I und II" haben die Herren Arnold Sommerfeld und Philipp Furtwängler besorgt. Ein Neudruck erschien 1907. Vgl. das Selbstreferat von Klein, Nr. XCIV in Bd. 3 dieser Ausgabe, S. 287.

So. 1897:	* Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen, 4st. ○ Seminar (mit Hilbert zusammen) über Funktionentheorie, 2st.
Wi. 1897/98:	Mechanik I, 4st. ○ Seminar (mit Hilbert zusammen) über Mechanik, 2st.
So. 1898:	Mechanik II, 4st. ○ Seminar (mit Hilbert zusammen) über Mechanik, 2st.
Wi. 1898/99:	* Funktionentheorie, 4st. ○ Seminar über die Analysis reeller Funktionen, 2st.
So. 1899:	* Automorphe Funktionen, 4st. ○ Seminar über Funktionentheorie und Potentialtheorie, 2st.
Wi. 1899/00:	* Mechanik deformierbarer Körper, speziell Hydrodynamik, 3st. ○ Seminar über die Theorie der Schiffsbewegung, 2st.
So. 1900:	* Analytische Geometrie, 4st. ○ Seminar (mit Abraham zusammen) über technische Anwendungen der Elastizitätstheorie, 2st.
Wi. 1900/01:	* Projektive Geometrie, 4st. ○ Seminar über projektive Geometrie und darstellende Geometrie, 2st.
So. 1901:	* Prinzipien der Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, 4st.[16]). ○ Seminar über Geodäsie, 2st.
Wi. 1901/02:	* Mechanik I, 4st. ○ Seminar über ausgewählte Kapitel der Mechanik, 2st.
So. 1902:	* Mechanik II, 4st. ○ Seminar (mit Schwarzschild zusammen) über Astronomie, 2st.
Wi. 1902/03:	* Enzyklopädie der Mathematik I, 4st. ○ Seminar (mit Schwarzschild zusammen) über Prinzipien der Mechanik, 2st.
So. 1903:	* Enzyklopädie der Mathematik II, 4st. ○ Seminar (mit Schwarzschild zusammen) über graphische Statik und Festigkeitslehre, 2st.
Wi. 1903/04:	* Differential- und Integral-Rechnung II (als Fortsetzung einer Vorlesung von Fr. Schilling), 4st. ○ Seminar (mit Schwarzschild zusammen) über ausgewählte Kapitel der Hydrodynamik, 2st.
So. 1904:	* Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen, 4st. ○ Seminar (mit Schwarzschild, Brendel und Carathéodory) über Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Wi. 1904/05:	* Über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen, 4st.[17]), ○ Seminar (mit Prandtl, Runge, Voigt zusammen) über ausgewählte Kapitel der Elastizitätstheorie, 2st.

[16]) Die Ausarbeitung dieser Vorlesung und die Herstellung der Autographie „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien" hat Herr Conrad Müller besorgt. Ein Neudruck erschien 1907.

[17]) Diese Vorlesung wurde von Herrn Paul Schimmack ausgearbeitet. Auf Grund dieser Ausarbeitung entstand das Buch „Vorträge über den mathematischen Unterricht" (Leipzig 1906).

So. 1905: * Elementarmathematik (Arithmetik, Algebra, Analysis), 4 st.
○ Seminar (mit Prandtl, Runge, Simon zusammen) über Elektrotechnik, 2 st.

Wi. 1905/06: Projektive Geometrie, 4 st.
○ Seminar (mit Hilbert und Minkowski zusammen): Vorträge von Klein über lineare Differentialgleichungen und automorphe Funktionen, 2 st.

So. 1906: * Funktionentheorie, 4 st.
○ Seminar (mit Hilbert und Minkowski zusammen) über lineare Differentialgleichungen und automorphe Funktionen, 2 st.

Wi. 1906/07: * Elliptische Funktionen, 4 st.
○ Seminar (mit Hilbert und Minkowski zusammen) über lineare Differentialgleichungen und automorphe Funktionen, 2 st.

So. 1907: * Kurven und Flächen (Differentialgeometrie), 4 st.
○ Seminar (mit Hilbert und Minkowski zusammen) Vorträge von Klein über lineare Differentialgleichungen und automorphe Funktionen, 2 st.

Wi. 1907/08: * Elementarmathematik I (Arithmetik, Algebra, Analysis), 4 st.[18]).
○ Seminar (mit Prandtl, Runge, Wiechert zusammen) über Hydrodynamik, 2 st.

So. 1908: * Elementarmathematik II (Geometrie), 4 st.[18]).
○ Seminar (mit Prandtl, Runge, Wiechert zusammen) über Schiffstheorie und dynamische Meteorologie, 2 st.

Wi. 1908/09: * Mechanik der Punktsysteme, 4 st.
○ Seminar (mit Prandtl und Runge zusammen) über Theorie der Baukonstruktionen, 2 st.

So. 1909: * Mechanik der Kontinua, 4 st.
○ Seminar (mit Prandtl und Runge zusammen) über Festigkeitslehre, 2 st.

Wi. 1909/10: * Projektive Geometrie, 4 st.
○ Seminar über Mathematik und Psychologie, 2 st.

So. 1910: Klein ist aus Gesundheitsrücksichten beurlaubt.

Wi. 1910/11: * Moderne Entwicklung des mathematischen Unterrichts, 2 st.
○ Seminar über mathematischen Unterricht, 2 st.

So. 1911: * Differential- und Integral-Rechnung I, 4 st.
○ Seminar (mit Bernstein zusammen) über Versicherungsmathematik, 2 st.

Wi. 1911/12: * Differential- und Integral-Rechnung II, 4 st. (Da Klein während des Semester aus Gesundheitsrücksichten Urlaub nehmen mußte, wurde von Ende November ab die Vorlesung von den Herren Behrens und Weyl gehalten.)
○ Seminar über Geschichte der Infinitesimalrechnung, 2 st. (von Ende November ab durch Herrn Schimmack geleitet).

---

[18]) Die Ausarbeitung dieser Vorlesung und die Herstellung der Autographie „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, I und II“ hat Herr Ernst Hellinger besorgt. Ein Neudruck von Teil I erschien 1911, von Teil II 1914.

So. 1912: Klein ist beurlaubt.
○ Das angekündigte Seminar über Fragen des Unterrichtswesens wird durch Herrn Schimmack geleitet.

Wi. 1912/13: Klein ist beurlaubt.

Ostern 1913 ließ sich Klein emeritieren. In der Folge hat er noch eine Reihe von Vorlesungen gehalten (die aber im Vorlesungsverzeichnis der Universität nicht angezeigt sind) und zwar in den nächsten Jahren noch im Universitätsgebäude, von Ostern 1916 an aber in seiner Wohnung mit wechselnder Stundenzahl vor einem kleinen ausgewählten Hörerkreis, dem u. a. mehrere Göttinger Dozenten angehörten.

So. 1914: Kolloquium über mathematische Literatur des 19. Jahrhunderts, 2 st.

Wi. 1914/15: * Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, 2 st.[19])

So. 1915: * Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert II, 2 st.[19])

Wi. 1915/16: * Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert III, 2 st.[19])

So. 1916: * Invariantentheorie der linearen Transformationen.[19])

Wi. 1916/17: * Spezielle Relativitätstheorie auf invarianter Basis.[19])

So. 1917: * Invariantentheorie der allgemeinen Punkttransformationen.[19])

So. 1918 }
Wi. 1918/19 }: (bis Weihnachten) Allgemeine Relativitätstheorie auf invarianter Basis.

Die im folgenden genannten Vorträge dienten zur Vorbereitung des Wiederabdrucks von Kleins gesammelten Abhandlungen.

Wi. 1918/19: (ab Weihnachten) Liniengeometrie.

So. 1919: Nicht-Euklidische Geometrie, das Erlanger Programm.

Wi. 1919/20: Gestalten algebraischer Gebilde (anschauliche Geometrie).

Wi. 1920/21: (bis Weihnachten) Variationsprinzipien in der klassischen Mechanik und allgemeinen Relativitätstheorie.

Wi. 1921 (Januar b. März) }
So. 1921 }: Gruppen linearer Substitutionen und algebraische Gleichungen.

Wi. 1921/22: (bis Weihnachten) Lineare Differentialgleichungen und Oszillationstheoreme.

Wi. 1922/23: (bis Weihnachten) Riemannsche Funktionentheorie und automorphe Funktionen.

b) Verzeichnis der bei F. Klein bearbeiteten Dissertationen.

(Die ersten Ortsangaben beziehen sich auf die promovierenden Universitäten. In eckigen Klammern ist jeweils angegeben, wo die betreffende Dissertation gedruckt ist.)

1. Diekmann, J., „Über die Modifikationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche 3. Ordn. durch Auftreten von Singularitäten erhält“. Göttingen 1871. [Math. Annalen, Bd. 4.]

2. Lindemann, F., „Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung“. Erlangen 1873. [Math. Annalen, Bd. 7.]

---

[19]) Diese Vorträge wurden ausgearbeitet (z. T. von Klein selbst) und in mehreren Maschinenschriftexemplaren vervielfältigt.

3. Weiler, A., Über die verschiedenen Gattungen der Komplexe 2. Grades". Erlangen 1873. [Math. Annalen, Bd. 7.]

4. Bretschneider, W., „Über Kurven 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten". Erlangen 1875. [C. Eberle, Stuttgart 1875.]

5. Braun, W., „Die Singularitäten der Lissajousschen Stimmgabelkurven". Erlangen 1875. [E. Th. Jacob, Erlangen 1875].

6. Harnack, A., „Über die Verwertung der elliptischen Funktionen für die Geometrie der Kurven 3. Grades". Erlangen 1875. [Math. Annalen, Bd. 9.]

7. Wedekind, L., „Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen". Erlangen 1875. [Math. Annalen, Bd. 9.]

8. Rohn, K., „Betrachtungen über die Kummersche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Funktionen $p=2$". München 1878. [F. Straub, München 1878.]

9. Dyck, W., „Über regulär verzweigte Riemannsche Flächen und die durch sie definierten Irrationalitäten". München 1879. [F. Straub, München 1879.]

10. Gierster, J., „Die Untergruppen der Galoisschen Gruppe der Modulargleichung für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades". Leipzig 1881. [Math. Annalen, Bd. 18.]

11. Hurwitz, A., „Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen 1. Stufe". Leipzig 1881. [Math. Annalen, Bd. 18.]

12. Staude, O., „Über lineare Gleichungen zwischen elliptischen Koordinaten". Leipzig 1881. [Teubner, Leipzig 1881.]

13. Lange, E., „Die 16 Wendeberührungspunkte der Raumkurve 4. Ordnung 1. Spezies". Leipzig 1882. [Teubner, Leipzig 1882 und Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 28.]

14. Weichold, G., „Über symmetrische Riemannsche Flächen und die Periodizitätsmoduln der zugehörigen Abelschen Normalintegrale 1. Gattung. Leipzig 1883. [Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 28.]

15. Dingeldey, F., Über die Erzeugung von Kurven 4. Ordnung durch Bewegungsmechanismen". Leipzig 1885. [Teubner, Leipzig 1885.]

16. Fiedler, E., „Über eine besondere Klasse irrationaler Modulargleichungen der elliptischen Funktionen". Leipzig 1885. [Zürcher & Furrer, Zürich 1885.]

17. Fischer, O., „Konforme Abbildung sphärischer Dreiecke aufeinander mittels algebraischer Funktionen". Leipzig 1885. [Metzger & Wittig, Leipzig 1885.]

18. Domsch, P., Über die Darstellung der Flächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Funktionen". Leipzig 1885. [Kunike, Greifswald 1885.]

19. Fine, H. B., „On the singularities of curves of double curvature". Leipzig 1886. [American Journal of Math., vol. 8.]

20. Fricke, R., „Über Systeme elliptischer Modulfunktionen von niederer Stufenzahl". Leipzig 1886. [Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1886.]

21. Friedrich, G., „Die Modulargleichungen der Galoisschen Moduln der 2. bis 5. Stufe". Leipzig 1886. [Kunike, Greifswald 1886.]

22. Nimsch, P., „Über die Perioden der elliptischen Integrale 1. und 2. Gattung als Funktionen der rationalen Invarianten". Leipzig 1886. [C. G. Naumann, Leipzig 1886.]

23. Biedermann, P., „Über Multiplikatorgleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Funktionen". Leipzig 1887. [Kunike, Greifswald 1887.]

24. Olbricht, R., „Studien über die Kugel- und Zylinderfunktionen". Leipzig 1887. [Nova Acta der Carol-Leopold-Akademie, Bd. 52.]

25. Reichardt, W., „Über die Darstellung der Kummerschen Fläche durch hyperelliptische Funktionen". Leipzig 1887. [Nova Acta der Carol-Leopold-Akademie, Bd. 50.]

26. Witting, A., „Über eine der Hesseschen Konfiguration der ebenen Kurve 3. Ordnung analoge Konfiguration im Raume usw." Göttingen 1887. [Teubner, Leipzig 1887.]

27. Haskell, M. W., „Über die zu der Kurve $\lambda^3\mu+\mu^3\nu+\nu^3\lambda=0$ im projektiven Sinne gehörende mehrfache Überdeckung der Ebene". Göttingen 1890. [American Journal of Math., vol. 13.]

28. Schroeder, J., „Über den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- und ϑ-Funktionen". Göttingen 1890. [Teubner, Leipzig 1890.]

29. Bôcher, M., „Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie". Göttingen 1891. [Göttinger Preisschrift, W. Fr. Kästner, Göttingen 1891.]

30. White, H. S., „Abelsche Integrale auf singularitätenfreien, einfach überdeckten, vollständigen Schnittkurven eines beliebig ausgedehnten Raumes". Göttingen 1891. [Nova Acta der Carol-Leopold-Akademie, Bd. 57.]

31. Thompson, H. D., „Hyperelliptische Schnittsysteme und Zusammenordnung der algebraischen und transzendenten Thetacharakteristiken". Göttingen 1892. [American Journal of Math., vol. 15.]

32. Schellenberg, C., „Neue Behandlung der hypergeometrischen Funktion auf Grund ihrer Definition durch ein bestimmtes Integral". Göttingen 1892. [W. Fr. Kästner, Göttingen 1892.]

33. Ritter, E., „Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null". Göttingen 1892. [Math. Annalen, Bd. 41.]

34. Van Vleck, E. B., „Zur Kettenbruchentwicklung Laméscher und ähnlicher Integrale". Göttingen 1893. [Friendenwald Comp., Baltimore 1893 und American Journal of Math., vol. 16.]

35. Schilling, F., „Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s-Funktion". Göttingen 1894. [Math. Annalen, Bd. 44.]

36. Glauner, Th., „Über den Verlauf von Potentialfunktionen im Raume". Göttingen 1894. [W. Fr. Kästner, Göttingen 1894.]

37. Woods, F. S., „Über Pseudominimalflächen". Göttingen 1895. [W. Fr. Kästner, Göttingen 1895.]

38. Chisholm, G., „Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie". Göttingen 1895. [W. Fr. Kästner, Göttingen 1895.]

39. Snyder, V., „Über die linearen Komplexe der Lieschen Kugelgeometrie". Göttingen 1895. [W. Fr. Kästner, Göttingen 1895.]

40. Jaccottet, C., „Über die allgemeine Reihenentwicklung der Potentialfunktion nach Laméschen Produkten". Göttingen 1895. [W. Fr. Kästner, Göttingen 1895.]

41. Furtwängler, Ph., „Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren ganzzahligen ternären kubischen Formen". Göttingen 1896. [W. Fr. Kästner, Göttingen 1896.]

42. Winston, M. F., „Über den Hermiteschen Fall der Laméschen Differentialgleichung". Göttingen 1897. [W. Fr. Kästner, Göttingen 1897.]

43. Wieghardt, C., „Über die Statik ebener Fachwerke mit schlaffen Stäben". Göttingen 1903. [W. Fr. Kästner, Göttingen 1903.]

44. Müller, C. H., Studien zur Geschichte der Mathematik an der Universität Göttingen im XVIII. Jahrh." Göttingen 1904. [Teubner, Leipzig 1904.]

45. Winkelmann, M., „Zur Theorie des Maxwellschen Kreisels". Göttingen 1904. [W. Fr. Kästner, Göttingen 1904.]

46. Timpe, A., „Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen". Göttingen 1905. [Teubner, Leipzig 1905.]

47. Ihlenburg, W., „Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke". Göttingen 1909. [Nova Acta der Carol-Leopold-Akademie, Bd. 91.]

48. Behrens, W., „Ein der Theorie der Lavalturbine entnommenes mechanisches Problem usw." Göttingen 1911. [Teubner, Leipzig 1911.]

c) Liste der Assistenten F. Kleins.

München (Ostern 1875 bis Herbst 1880).

Wi. 1877/78	bis	So. 1879:	J. Gierster.
Wi. 1879/80	bis	So. 1880:	W. Dyck.

Leipzig (Herbst 1880 bis Ostern 1886).

1. Assistenten.

Wi. 1880/81:			Kein Assistent.
So. 1881	bis	Wi. 1883/84:	W. Dyck.
So. 1884	bis	Wi. 1885/86:	Fr. Schur.

2. Famuli.

Wi. 1880/81	bis	So. 1882:	E. Lange.
Wi. 1882/83:			O. Herrmann.
So. 1883	bis	So. 1884:	O. Fischer.
Wi. 1884/85:			P. Biedermann.
So. 1885	bis	Wi. 1885/86:	W. Reichardt.

Göttingen (seit Ostern 1886).

1. Assistenten.

So. 1886	bis	So. 1892:	Kein Assistent.
Wi. 1892/93	bis	So. 1893:	Fr. Schilling.
Wi. 1893/94	bis	So. 1894:	E. Ritter.
Wi. 1894/95	bis	So. 1896:	A. Sommerfeld.
Wi. 1896/97	bis	So. 1897:	M. Weber.
Wi. 1897/98	bis	So. 1898:	H. Liebmann.
Wi. 1898/99	bis	So. 1899:	H. v. Schaper.
Wi. 1899/1900	bis	So. 1900:	C. Wieghardt.
Wi. 1900/01	bis	So. 1901:	C. H. Müller.
Wi. 1901/02	bis	So. 1902:	G. Hamel.
Wi. 1902/03	bis	So. 1903:	C. H. Müller.
Wi. 1903/04	bis	Wi. 1904/05:	R. Schimmack.
So. 1905	bis	So. 1906:	A. Timpe.
Wi. 1906/07	bis	So. 1907:	K. Hiemenz.
Wi. 1907/08	bis	Wi. 1908/09:	E. Hellinger.
So. 1909	bis	Wi. 1909/10:	F. Pfeiffer.
So. 1910	bis	Wi. 1910/11:	E. Hecke.
So. 1911	bis	Wi. 1911/12:	W. Behrens.
So. 1912	bis	Wi. 1913/14:	L. Föppl.
So. 1914:			D. Cauer.
Wi. 1914/15	bis	So. 1915:	W. Graefe.
Wi. 1915/16	bis	So. 1919:	W. Baade.
Wi. 1919/20	bis	So. 1921:	H. Vermeil.

Nach seiner Emeritierung (Ostern 1913) behielt Klein die Leitung des Göttinger math. Lesezimmers und der Modellsammlung noch bis Ostern 1921 bei, wo sie von Prof. Courant übernommen wurde.

2. Mitarbeiter bei der Herausgabe der „Gesammelten mathematischen Abhandlungen".

Wi. 1918/19	bis	So. 1920:	A. Ostrowski.
Wi. 1920/21	bis	Wi. 1922/23:	H. Vermeil.
Wi. 1921/22	bis	Wi. 1922/23:	E. Bessel-Hagen.

2. Verzeichnis der hauptsächlichen Veröffentlichungen F. Kleins.

Inhaltsübersicht.

A. Wissenschaftliche Abhandlungen.

Vorbemerkungen.

In der vorliegenden Gesamtausgabe von Kleins wissenschaftlichen Abhandlungen sind im allgemeinen vorläufige Mitteilungen und kurze Noten nicht abgedruckt, wenn ihr Inhalt später in ausführlicherer oder ausgereifterer Form in größere Arbeiten übergegangen ist. Eine Ausnahme wurde nur dann gemacht, wenn der in einer vorläufigen Mitteilung entwickelte Gedankengang von dem einer späteren Veröffentlichung abweicht. Demgemäß soll in dem folgenden, nach Jahreszahlen geordneten, Verzeichnisse bei jeder Abhandlung entweder angegeben werden, unter welcher römischen Nummer sie abgedruckt ist, oder in welche größere Arbeit ihr Inhalt übergegangen ist. Diese Angaben erfolgen durch die Abkürzungen: [= Nr. . . .] bzw. [Übergegangen in . . . = Nr. . . .]. Bei der letzteren gibt die voranstehende, in arabischen Ziffern geschriebene Zahl die laufende Nummer der betreffenden Arbeit im folgenden Verzeichnisse an[1]).

[1]) Nr. I—XXXIII stehen in Bd. 1, Nr. XXXIV—LXXX in Bd. 2, Nr. LXXXI bis CVII in Bd. 3.

a) Chronologisch geordnetes Verzeichnis der mathematischen Abhandlungen.

1868.

1. Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form. Inauguraldissertation Bonn 1868 (Promotion am 12. Dez. 1868). (53 S.) Abgedr. mit kleinen Änderungen und Zusätzen Math. Annalen, Bd. 23 (1884). (40 S.) [= Nr. I.]

1869.

2. Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und des zweiten Grades. Göttinger Nachrichten 1869 (datiert 4. Juni 1869, vorgelegt 9. Juni 1869). (19 S.) [Übergegangen in 3. = Nr. II.]

3. Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und des zweiten Grades. Math. Annalen Bd. 2, 1870 (dat. 14. Juni 1869). (29 S.) [= Nr. II.]

4. Über die Abbildung der Komplexflächen vierter Ordnung und vierter Klasse. Math. Annalen Bd. 2, 1870 (dat. 14. Juni 1869). (2 S.) [= Nr. IV.]

5. [Eine Abbildung des Linienkomplexes zweiten Grades auf den Punktraum] veröffentlicht in der Arbeit von Max Noether „Zur Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer komplexer Variabeln", Göttinger Nachrichten 1869 (vorgel. 14. Juli 1869). (1 S.) [= Nr. V.]

6. Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten. Math. Annalen, Bd. 2, 1870 (dat. 4. Aug. 1869). (5 S.) [= Nr. III.]

1870.

7. (Mit S. Lie zusammen.) Sur une certaine famille de courbes et de surfaces (2 Noten). Comptes Rendus t. 70, 1870 (dat. 6. Juni, 13. Juni 1870). (5 und 4 S.) [= Nr. XXV.]

8. (Mit S. Lie zusammen.) Über die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. Monatsberichte der Berliner Akademie 1870 (vorgel. 15. Dez. 1870). (9 S.) Abgedr. Math. Annalen Bd. 23, (1884). [= Nr. VI.]

1871.

9. Zur Theorie der Kummerschen Fläche und der zugehörigen Linienkomplexe zweiten Grades. Göttinger Nachrichten 1871 (vorgel. 18. Januar 1871). (13 S.) [Übergegangen in 28. = Nr. XI.]

10. Über einen Satz aus der Theorie der Linienkomplexe, welcher dem Dupinschen Theoreme analog ist. Göttinger Nachrichten 1871 (vorgel. 4. März 1871). (13 S.) [= Nr. VII.]

11. (Mit S. Lie zusammen.) Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Annalen, Bd. 4, 1871 (dat. März 1871). (35 S.) [= Nr. XXVI.]

12. Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen. Math. Annalen, Bd. 4, 1871 (dat. Mai 1871). (13 S.) [= Nr. L.]

13. Notiz betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper. Math. Annalen, Bd. 4, 1871 (dat. Juni 1871). (13 S.) [= Nr. XIV.]

14. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Göttinger Nachrichten 1871 (vorgel. 30. August 1871). (15 S.) [= Nr. XV.] Französische Übersetzung im Bulletin des sciences mathém. et astron. (1) vol. 2, 1877.

15. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie I. Math. Annalen Bd. 4, 1871 (dat. 19. August 1871). (53 S.) [= Nr. XVI.] Französische Übersetzung in den Annales de la faculté des sciences de Toulouse, vol. 11, 1897.

16. Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Annalen Bd. 5, 1872 (dat. Oktober 1871). (21 S.) [= Nr. VIII.]

17. Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen. Math. Annalen, Bd. 5, 1872 (dat. November 1871). (26 S.) [= Nr. IX.]

18. Vier Modelle zur Theorie der Linienkomplexe zweiten Grades. Prospekt der mechanischen Werkstätten von J. Eigel und Sohn in Köln, 1871. (2 S.) [Übergegangen in 109. = Nr. XXXIV.]

1872.

19. Über einen liniengeometrischen Satz. Göttinger Nachrichten 1872 (vorgel. 2. März 1872). (12 S.) Abgedr. Math. Annalen, Bd. 22, 1883. [= Nr. X.]

20. Über einen Satz der Analysis situs. Göttinger Nachrichten 1872 (vorgel. 5. Juni 1872). (8 S.) [= Nr. XVII.]

21. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie II. Math. Annalen, Bd. 6, 1873 (dat. 8. Juni 1872). (34 S.) [= Nr. XVIII.]

22. Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie. Göttinger Nachrichten 1872 (vorgel. 3. August 1872). (6 S.) Abgedr. Math. Annalen, Bd. 22, 1883. [= Nr. XXIII.]

23. Besprechung eines von Herrn Dr. Neesen nach Angaben von F. Klein konstruierten Modells einer Fläche dritter Ordnung. Göttinger Nachrichten 1872 (vorgel. 3. August 1872). (2 S.) [Übergegangen in 26. = Nr. XXXV.]

24. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen. A. Deichert, Erlangen 1872 (dat. Oktober 1872). (48 S.) Abgedr. mit einer Reihe von Bemerkungen Math. Annalen, Bd. 43, 1893. [= Nr. XXVII.] Übersetzt ins Englische von Haskell, Bulletin of the New York mathematical society, vol. 2, 1893; ins Französische von Padé, Annales de l'école normale supérieure, (3), vol. 8, 1891; ins Italienische von Fano, Annali di matematica, (2), t. 17, 1890; ins Polnische von Dickstein, Prac. matematyczno-fizycznych, t. 6, 1805; ins Russische von Sintzow, Kasaner Gesellschaft (2), t. 5 u. 6, 1896; ins Ungarische von Kopp Lajos, Budapest 1897.

1873.

25. Über Flächen dritter Ordnung. Erlanger Sitzungsberichte 1872/73 (vorgel. 5. Mai 1873). (6 S.) [Übergegangen in 26. = Nr. XXXV.]

26. Über Flächen dritter Ordnung. Math. Annalen, Bd. 6, 1873 (dat. 6. Juni 1873). (31 S. und 6 Tafeln.) [= Nr. XXXV.]

27. Weitere Mitteilung über Flächen dritter Ordnung. Erlanger Sitzungsberichte 1872/73 (vorgel. 23. Juni 1873). (2 S.) [Übergegangen in 26. = Nr. XXXV.]

28. Über die Plückersche Komplexfläche. Math. Annalen, Bd. 7, 1874 (dat. Oktober 1873). (4 S.) [= Nr. XI.]

29. Über eine Übertragung des Pascalschen Satzes auf Raumgeometrie. Erlanger Sitzungsberichte 1873/74 (vorgel. 10. November 1873). (3 S.) [= Nr. XXIV.]

30. Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve. Erlanger Sitzungsberichte 1873/74 (vorgel. 8. Dezember 1873). (11 S.) Abgedr. mit einigen Zusätzen Math. Annalen, Bd. 22, 1883. [= Nr. XLV.]

1874.

31. Nachtrag zu dem zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Annalen, Bd. 7, 1874 (dat. Januar 1874). (7 S.) [= Nr. XIX.]

32. Über eine neue Art der Riemannschen Flächen. Erlanger Sitzungsberichte 1873/74 (vorgel. 2 Februar 1874). (4 S.) [Übergegangen in 34. = Nr. XXXVIII.]

33. Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen. Math. Annalen, Bd. 7, 1874 (dat. Februar 1874). (9 S.) [= Nr. XXXVI.][1])

34. Über eine neue Art der Riemannschen Flächen I. Math. Annalen, Bd. 7, 1874 (dat. Februar 1874). (9 S.) [= Nr. XXXVIII.]

35. Weitere Mitteilung über eine neue Art von Riemannschen Flächen. Erlanger Sitzungsberichte 1873/74 (vorgel. 11. Mai 1874). (5 S.) [Übergegangen in 44. = Nr. XL.]

36. Über eine Klasse binärer Formen. Erlanger Sitzungsberichte 1874/75 (vorgel. 13. Juli 1874). (3 S.) [Übergegangen in 39. = Nr. LI.]

37. Bemerkungen über eine Klasse binärer Formen. Erlanger Sitzungsberichte 1874/75 (vorgel. 14. Dezember 1874). (2 S.) [Übergegangen in 39. = Nr. LI.]

1875.

38. Über eine Gleichung zwölften Grades. Erlanger Sitzungsberichte 1874/75 (vorgel. 12. Juli 1875). (5 S.) [Übergegangen in 39. = Nr. LI.]

39. Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Math. Annalen, Bd. 9, 1876 (dat. Juni 1875). (26 S.) [= Nr. LI.]

40. Über den Zusammenhang der Flächen. Math. Annalen, Bd. 9, 1876 (dat. November 1875). (8 S.) [= Nr. XXXVI.][1])

41. Über eine Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve. Erlanger Sitzungsberichte 1875/76 (vorgel. 13. Dezember 1875). (5 S.) [Übergegangen in 42. = Nr. XXXVII.]

1876.

42. Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve. Math. Annalen, Bd. 10, 1876 (dat. Januar 1876). (11 S.) [= Nr. XXXVII.]

[1]) Vgl. Fußnote [1]) auf S. 63 in Bd. 2 dieser Ausgabe.

43. Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades I. Math. Annalen, Bd. 10, 1876 (dat. April 1876). (33 S. und 3 Tafeln.) [= Nr. XXXIX.]

44. Über eine neue Art von Riemannschen Flächen II. Math. Annalen, Bd. 10, 1876 (dat. April 1876). (19 S.) [= Nr. XL.]

45. Über lineare Differentialgleichungen I. Erlanger Sitzungsberichte 1875/76 (vorgel. 26. Juni 1876). (4 S.) [= Nr. LII.] Abgedr. Math. Annalen, Bd. 11, 1877. Französische Übersetzung: Bulletin des sciences mathématiques et astron. (2), vol. 1, 1877.

46. Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades II. Math. Annalen, Bd. 11, 1877 (dat. August 1876). (13 S. und 1 Tafel.) [= Nr. XLI.]

47. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder I. Erlanger Sitzungsberichte 1876/77 (vorgel. 13. Nov. 1876). (14 S.) [Übergegangen in 52. = Nr. LIV.]

1877.

48. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder II. Erlanger Sitzungsberichte 1876/77 (vorgel. 15. Januar 1877). (14 S.) [Übergegangen in 52. = Nr. LIV.]

49. Sull' equazione dell' Icosaedro nella risoluzione delle equazioni del quinto grado. (Brief an Brioschi), Rendiconti del Reale Istituto Lombardo (2), vol. 10, 1877 (dat. 6. April 1877). (3 S.) [= Nr. LXXXI.]

50. Über lineare Differentialgleichungen II. Math. Annalen, Bd. 12, 1877 (dat. April 1877). (13 S.) [= Nr. LIII.]

51. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder III. Erlanger Sitzungsberichte 1876/77 (vorgel. 9. Juli 1877). (4 S.) [Übergegangen in 52. = Nr. LIV.]

52. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder. Math. Annalen, Bd. 12, 1877 (dat. August 1877). (58 S.) [= Nr. LIV.]

53. Über die Gestalten der Kummerschen Fläche. Amtlicher Bericht der 50. Vers. Deutscher Naturforscher und Ärzte in München 1877. (1 S.) [Übergegangen in 109. = Nr. XXXIV.]

54. Über elliptische Funktionen. Amtlicher Bericht der 50. Vers. Deutscher Naturforscher und Ärzte in München 1877. (1 S.) [Übergegangen in 57. = Nr. LXXXII.][2])

1878.

55. Über Gleichungen siebenten Grades I. Erlanger Sitzungsberichte 1877/78 (vorgel. 4. März 1878). (2 S.) [= Nr. LVI.]

56. On the transformation of elliptic functions. London mathematical society proceedings, vol. 9, 1877/78 (vorgel. 9. Mai 1878). (9 S.) [Übergegangen in 57. = Nr. LXXXII.]

57. Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. Math. Annalen, Bd. 14, 1879 (dat. Anfang Mai 1878). (62 S.) [= Nr. LXXXII.]

[2]) Siehe Fußnote [2]) auf S. 13/14 in Bd. 3 dieser Ausgabe.

58. Die Gleichungen siebenten Grades II. Erlanger Sitzungsberichte 1877/78 (vorgel. 20. Mai 1878). (5 S.) [Übergegangen in 62. = Nr. LVII und 60. = LXXXIV.]

59. Über die Erniedrigung der Modulargleichungen. Math. Annalen, Bd. 14, 1879 (dat. Oktober 1878). (11 S. und 2 Tafeln). [= Nr. LXXXIII.]

60. Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen. Math. Annalen, Bd. 14, 1879 (dat. Anfang November 1878). (44 S. und 1 Tafel.) [= Nr. LXXXIV.]

61. Sull' equazione modulari. (Brief an Brioschi), Rendiconti del Reale Istituto Lombardo (2), vol. 12, 1879 (dat. 30. Dezember 1878, vorgel. 2. Januar 1879). (4 S.) Deutsche Übersetzung mit einigen Kürzungen unter dem Titel „Über Multiplikatorgleichungen". Math. Annalen, Bd. 15, 1879. (3 S.) [= Nr. LXXXV.][3])

1879.

62. Über die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade. Math. Annalen, Bd. 15, 1879 (dat. Ende März 1879). (32 S.) [= Nr. LVII.]

63. Sulla risolvente di 11° grado dell' equazione modulare di 12° grado. (Brief an Brioschi), Transunti della Reale Acc. dei Lincei (3), vol. 3, 1879 (vorgel. 4. Mai 1879). (2 S.) [Übergegangen in 65. = Nr. LXXXVI.]

64. Sulla trasformazione dell 11° grado delle funzioni ellitiche. (Brief an Brioschi), Rendiconti del Reale Istituto Lombardo (2), vol. 12, 1879 (vorgel. am 17. Juli 1879). (4 S.) [Übergegangen in 65. = Nr. LXXXVI.]

65. Über die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Funktionen. Math. Annalen, Bd. 15, 1879 (dat. 15. August 1879). (23 S. und 1 Tafel.) [= Nr. LXXXVI.]

66. Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Münchener Sitzungsberichte 1879 (vorgel. 6. Dezember 1879). (12 S.) Abgedr. Math. Annalen, Bd. 17, 1880. (9 S.) [= Nr. LXXXVII.]

1880.

67. Über die geometrische Definition der Projektivität auf den Grundgebilden der ersten Stufe. Math. Annalen, Bd. 17, 1880 (dat. April 1880). (3 S.) [= Nr. XX.]

68. Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung. Münchener Sitzungsberichte 1880 (vorgel. 3. Juli 1880). (9. S.) Abgedr. Math. Annalen, Bd. 17, 1881 (6 S.) [= Nr. LXXXVIII.]

69. On the transformation of elliptic functions. London mathematical society proceedings, vol. 11, 1879/80 (vorgel. 5. Oktober 1880). (2 S.) [Übergegangen in 71. = Nr. LXXXIX.]

70. Über die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen. Zeitschrift für den mathemat. und naturwissenschaft. Unterricht, Bd. 26, 1895. (Antrittsrede, gehalten am 25. Oktober 1880 in Leipzig.) (12 S.) [Vgl. Nr. 1 auf S. *30*.]

[3]) Siehe Fußnote [1]) auf S. 137 in Bd. 3 dieser Ausgabe.

1881.

71. Über gewisse Teilwerte der Θ-Funktion. Math. Annalen, Bd. 17, 1881 (dat. 3. Januar 1881). (3 S.) [= Nr. LXXXIX.]

72. Über Lamésche Funktionen. Math. Annalen, Bd. 18, 1881 (dat. Mitte Januar 1881). (10 S.) [= Nr. LXII.]

73. Über Körper, welche von konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind. Math. Annalen, Bd. 18, 1881 (dat. 14. März 1881). (18 S.) [= Nr. LXIII.]

74. Bemerkung über Flächen vierter Ordnung. Math. Annalen, Bd. 18, 1881 (dat. 5. April 1881). (1 S.) [Nicht abgedruckt.]

75. Über die konforme Abbildung von Flächen. Math. Annalen, Bd. 19, 1882 (dat. Oktober 1881). [Übergegangen in 76. = Nr. XCIX.]

76. Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. B. G. Teubner, Leipzig 1882 (dat. 7. Oktober 1881). (VIII + 82 S.) [= Nr. XCIX.]

1882.

77. Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich I. Math. Annalen, Bd. 19, 1882 (dat. 12. Januar 1882). (4 S.) [= Nr. CI.]

78. Über eindeutige Funktionen mit linearen Substitutionen in sich II. Math. Annalen, Bd. 20, 1882 (dat. 27. März 1882). (3 S.) [= Nr. CII.]

79. Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie. Math. Annalen, Bd. 21, 1883 (dat. 2. Oktober 1882). (78 S. und 2 Tafeln.) [= Nr. CIII.]

1883.

80. Über gewisse Differentialgleichungen dritter Ordnung. Leipziger Berichte, Bd. 35, 1883 (vorgel. 29. Januar 1883). (6 S.) Abgedr. mit einem ausführlichen Anhang Math. Annalen, Bd. 23, 1884. (10 S.) [= Nr. CV.]

1884.

81. Zur Theorie der elliptischen Funktionen n-ter Stufe. Leipziger Berichte, Bd. 36, 1884 (vorgel. 14. November 1884). (8 S.) [Übergegangen in 83. = Nr. XC.]

1885.

82. Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunktionen der niedersten Stufen. Leipziger Berichte, Bd. 37, 1885 (vorgel. 2. März 1885). (22 S.) [= Nr. XCI.]

83. Über die elliptischen Normalkurven der N-ten Ordnung und zugehörige Modulfunktionen N-ter Stufe. Leipziger Abhandlungen, Bd. 13, 1886 (dat. 10. April 1885). (66 S.) [= Nr. XC.]

84. Neue Untersuchungen im Gebiete der elliptischen Funktionen. Math. Annalen, Bd. 26, 1886 (dat. 17. September 1885). (10 S.) [= Nr. XCII.]

85. Über Konfigurationen, welche der Kummerschen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind. Math. Annalen, Bd. 26, 1886 (dat. 28. September 1885). (37 S.) [= Nr. XII.]

1886.

86. Über hyperelliptische Sigmafunktionen I. Math. Annalen, Bd. 27, 1886 (dat. 10. April 1886) (34 S.) [= Nr. XCV.]

87. Über Gleichungen sechsten und siebenten Grades. Math. Annalen, Bd. 28, 1887 (dat. Oktober 1886). (34 S.) [= Nr. LVIII.]

88. Zur geometrischen Deutung des Abelschen Theorems der hyperelliptischen Integrale. Math. Annalen, Bd. 28, 1887 (dat. Oktober 1886). (28 S.) [= Nr. XIII.]

1887.

89. Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du 27ième degré, de laquelle dépend la détermination des 27 droites d'une surface cubique. (Brief an C. Jordan), Journal de mathématiques pures et appliquées (4), vol. 4, 1888 (dat. 22. September 1887). (4 S.) [= Nr. LIX.]

90. Zur Theorie der hyperelliptischen Funktionen beliebig vieler Argumente. Göttinger Nachrichten 1887 (vorgel. 5. November 1887). (7 S.) [Übergegangen in 92. = Nr. XCVI.]

1888.

91. Über irrationale Kovarianten. Göttinger Nachrichten 1888 (dat. 15. März, vorgel. 5. Mai 1888). (4 S.) [Übergegangen in 98. = Nr. XCVII.]

92. Über hyperelliptische Sigmafunktionen II. Math. Annalen, Bd. 32, 1888 (dat. 24. März 1888). (30 S.) [= Nr. XCVI.]

1889.

93. Formes principales sur les surfaces de Riemann. Comptes Rendus t. 108, 1889 (vorgel. 21. Januar 1889). (4 S.) [Übergegangen in 98. = Nr. XCVII.]

94. Des fonctions théta sur la surface générale de Riemann. Comptes Rendus t. 108, 1889 (vorgel. 11. Februar 1889). (4 S.) [Übergegangen in 98. = Nr. XCVII.]

95. Zur Theorie der Abelschen Funktionen I. Göttinger Nachrichten 1889 (vorgel. 2. März 1889). (12 S.) [Übergegangen in 98. = Nr. XCVII.]

96. Über die konstanten Faktoren der Thetareihen für $p = 3$. London mathematical society proceedings, vol. 20, 1888/89 (vorgel. 11. April 1889). (3 S.) [Übergegangen in 98. = Nr. XCVII.]

97. Zur Theorie der Abelschen Funktionen II. Göttinger Nachrichten 1889 (dat. 12. Mai, vorgel. 1. Juni 1889). (5 S.) [Übergegangen in 98. = Nr. XCVII.]

98. Zur Theorie der Abelschen Funktionen. Math. Annalen, Bd. 36, 1890 (dat. 24. September 1889). (83 S.) [= Nr. XCVII.]

1890.

99. Zur Theorie der Laméschen Funktionen. Göttinger Nachrichten 1890 (vorgel. 1. März 1890). (11 S.) [= Nr. LXIV.]

100. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Göttinger Nachrichten 1890 (vorgel. 2. August 1890). (1 S.) [Übergegangen in 102. = Nr. LXV.]

101. Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Math. Annalen, Bd. 37, 1890 (dat. 20. August 1890). (29 S.) [= Nr. XXI.]

102. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Math. Annalen, Bd. 37, 1890 (dat. 5. September 1890). (18 S.) [= Nr. LXV.]

103. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Bremen 1890. (1 S.) [Übergegangen in 102. = Nr. LXV.]

104. Über Normierung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Annalen, Bd. 38, 1891 (dat. 23. Dezember 1890). (9 S.) [Der erste Teil stimmt mit dem ersten Teil von 99. = Nr. LXIV überein, der zweite Teil ist als Nr. LXVI abgedruckt.][4]

1891.

105. Über den Hermiteschen Fall der Laméschen Differentialgleichung. Math. Annalen Bd. 40, 1892 (dat. September 1891). (5 S.) [= Nr. LXVII.]

106. Über den Begriff des funktionentheoretischen Fundamentalbereiches. Math. Annalen, Bd. 40, 1892 (dat. September 1891). (10 S.) [= Nr. CIV.]

107. Über neuere englische Arbeiten zur Mechanik. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Halle 1891. Abgedr. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 1. (2 S.) [= Nr. LXX.]

1892.

108. Über Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abelschen Funktionen. Göttinger Nachrichten 1892 (dat. 20. April, vorgel. 7. Mai 1892). (3 S.) [Übergegangen in 111. = Nr. XLII.]

109. Vier Modelle zur Theorie der Linienkomplexe zweiten Grades. Katalog math. Modelle, herausgegeben von W. Dyck, München 1892. (2 S.) [= Nr. XXXIV.]

110. Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen. Katalog math. Modelle, herausgegeben von W. Dyck, München 1892 (dat. 9. Juni 1892). (13 S.) [= Nr. XLIII.]

111. Über Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalkurve der φ. Math. Annalen, Bd. 42, 1893 (dat. 2. September 1892). (29 S.) [= Nr. XLII.]

1893.

112. Über die Komposition der binären quadratischen Formen. Göttinger Nachrichten 1893 (vorgel. 14. Januar 1893). (4 S.) [= Nr. XCIII.]

113. The present state of Mathematics. Mathematical papers read at the international math. congress, Chicago 1893. New York, MacMillan and Co., 1896 (vorgetragen 21. August 1893). (4 S.) Zuerst erschienen in „The Monist", herausgegeben von Carus, Bd. 4, Chicago 1893; abgedruckt im Bulletin of the New York Math. Society, vol. 3, 1894. [= Nr. LXXIII.]

114. Über die Entwicklung der Gruppentheorie während der letzten 20 Jahre. Mathematical Papers read at the international math. congress, Chicago 1893 (August 1893). (1 S.) [Nicht abgedruckt.]

[4]) Vgl. die Fußnote [6]) auf S. 544 und die Fußnote [1]) auf S. 568 in Bd. 2 dieser Ausgabe.

115. Zur Theorie der algebraischen Funktionen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 2, 1893 (dat. September 1893). (2 S.) [Übergegangen in 111. = Nr. XLII.]

1894.

116. Autographierte Vorlesungshefte I, Referate über die Vorlesungen: Höhere Geometrie, Riemannsche Flächen, Über die hypergeometrische Funktion. Math. Annalen, Bd. 45, 1894 (dat. März 1894). (13 S.) [= Nr. XXVII, C, LXVIII.][5])

117. Autographierte Vorlesungshefte II, Referat über die Vorlesung: Lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Math. Annalen, Bd. 46, 1895 (dat. 16. September 1894). (14 S.) [= Nr. LXIX.]

118. Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik. Rede, gehalten am 26. September 1894, Tageblatt der 66. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Wien 1894 (9 S.) und in den Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, Wien 1894. Abgedr. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, 1897. (17 S.) [= Nr. XCVIII.] Wiederabgedr. Zeitschrift für den mathemat. u. naturwissenschaftl. Unterricht, Bd. 26, 1895. Englische Übersetzung: American mathematical society Bulletin, vol. 1, 1895. Italienische Übersetzung: Annali di mathematica (2), t. 23, 1895.

119. Über die zu einem algebraischen Gebilde gehörenden nirgends singulären linearen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Verhandhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Wien 1894. Abgedr. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, 1897. (2 S.) [Übergegangen in 117. = Nr. LXIX.]

1895.

120. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwickelung. Göttinger Nachrichten 1895 (vorgel. 19. Oktober 1895). (3 S.) [= Nr. XLIV.] Französische Übersetzung: Nouvelles annales des mathématiques (3), vol. 15, 1896.

121. Zur Theorie der gewöhnlichen Kettenbrüche. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Lübeck 1895. Abgedr. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, 1897. (2 S.) [Übergegangen in Nr. XLIV.]

122. Über die Arithmetisierung der Mathematik. Göttinger Nachrichten (geschäftliche Mitteilungen). (Rede gehalten 2. November 1895.) (10 S.) [= Nr. XLVII.] Abgedr. Zeitschrift für den mathemat. u. naturwissenschaftl. Unterricht, Bd. 27, 1896. Englische Übersetzung: American math. society bulletin, vol. 2, 1896, Französische Übersetzung: Nouvelles annales des mathématiques (3), vol. 16, 1897, Italienische Übersetzung: Rendiconti del circolo mat. di Palermo, t. 10, 1896.

1896.

123. Über die Bewegung des Kreisels. Göttinger Nachrichten 1896 (vorgel. 11. Januar 1896). (2 S.) [= Nr. LXXIV.] Französische Übersetzung: Nouvelles annales des mathématiques (3), vol. 15, 1896.

[5]) Vgl. auch den Zusatz auf S. 382 u. 383 in Bd. 1 dieser Ausgabe.

124. Über die analytische Darstellung der Rotationen bei Problemen der Mechanik. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Frankfurt 1896. Abgedr. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 5, 1901. (2 S.) [Übergegangen in 123. = Nr. LXXIV.]

125. The mathematical theory of the top. Princeton lectures, reported by H. B. Fine. New York, Charles Scribners sons, 1897 (vorgetragen am 12.—15. Oktober 1896). (74 S.) [= Nr. LXXV.]

126. Stability of the sleeping top. American mathematical society bulletin, vol. 3, 1897 (vorgetragen Princeton am 17. Oktober 1896). (4 S.) [= Nr. LXXVI.] Französische Übersetzung: Nouvelles annales des mathématiques (3), vol. 15, 1896.

1897.

127. Autographierte Vorlesungshefte III. Referat über die Vorlesung: Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Math. Annalen, Bd. 48, 1897 (dat. 13. August 1896). (24 S.) [= Nr. XCIV.]

128. Gutachten betreffend den 3. Bd. der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anläßlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-preises. Nachrichten der physiko-mathemat. Gesellschaft der Universität Kasan (2), Bd. 8, 1897. Abgedr. Math. Annalen, Bd. 50, 1898. (18 S.) [= Nr. XXII.]

1899.

129. Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado. (Brief an Castelnuovo), Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), vol. 8, 1899 (vorgel. 2. April 1899). (1 S.) [= Nr. LX.]

1901.

130. „Gauß' wissenschaftliches Tagebuch" mit ausführlichen Anmerkungen, herausgegeben von F. Klein. Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Berlin 1901. Abgedr. in den Math. Annalen, Bd. 57, 1903. [Nicht abgedruckt.]

131. Gutachten der Göttinger philosophischen Fakultät betreffend die Beneke-Preisaufgabe für 1901. Göttinger Nachrichten 1901 (geschäftliche Mitteilungen), (dat. April 1901). (8 S.) Im Auszug abgedruckt Math. Annalen, Bd. 55, 1902. (6 S.) [= Nr. XLVIII.]

132. Über das Brunssche Eikonal. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 46, 1901. (4 S.) [= Nr. LXXI.]

133. Räumliche Kollineationen bei optischen Instrumenten. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 46, 1901. (7 S.) [= Nr. LXXII.]

134. Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 47, 1902 (dat. 3. September 1901). (29 S.) Abgedruckt mit einem größeren Zusatz Math. Annalen, Bd. 62, 1906. [= Nr. XXIX.]

1904.

135. (Mit C. Wieghardt zusammen). Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. Archiv der Mathematik und Physik (3), Bd. 8, 1904 (dat. 10. Februar 1904). (35 S.) [= Nr. LXXVII].

1905.

136. Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades. Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 129, 1905 (dat. 22. März 1905). (24 S.) Abgedr. Math. Annalen, Bd. 61, 1905. [= Nr. LXI.]

137. Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen. Math. Annalen, Bd. 61, 1905 (dat. 26. August 1905). (3 S.) [= Nr. LV.]

138. Grenzfragen der Mathematik und Philosophie. Wissenschaftliche Beilage zum 19. Jahresbericht der philosophischen Gesellschaft an der Universität zu Wien, 1906 (vorgetragen am 14. Oktober 1905). (6 S.) [= Nr. XLIX.]

1907.

139. Bemerkungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Annalen, Bd. 64, 1907 (dat. April 1907). (22 S.) [= Nr. CVI.]

140. Über den Zusammenhang zwischen dem sogenannten Oszillationstheoreme der linearen Differentialgleichungen und dem Fundamentaltheoreme der automorphen Funktionen. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Dresden 1907. (1 S.) Abgedruckt Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 16, 1907 [= Nr. CVII.]

1909.

141. Über Selbstspannungen ebener Diagramme. Math. Annalen, Bd. 67, 1909 (dat. 31. März 1909). (12 S.) [= Nr. LXXVIII.]

142. Zu Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 58, 1910 (dat. 17. April 1909). (6 S.) [= Nr. LXXIX.]

143. Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 58, 1910 (dat. 20. August 1909). (4 S.) [= Nr. LXXX.]

144. Modelle zur Darstellung affiner Transformationen von Punktsystemen in der Ebene und im Raume. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 58, 1910 (dat. September 1909). (5 S.) [Nicht abgedruckt.]

1910.

145. Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 19, 1910 (vorgetragen in der mathematischen Gesellschaft in Göttingen am 10. Mai 1910). (20 S.) Abgedruckt Physikalische Zeitschrift, Bd. 12, 1911. [= Nr. XXX.]

1911.

146. Vorträge betreffend automorphe Funktionen. Historische Einleitung zu Referaten von Brouwer, Koebe, Bieberbach und Hilb. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Karlsruhe 1911. Abgedruckt Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 21, 1912. (2 S.) [Vgl. S. 747.]

1918.

147. Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik. Aus einem Briefwechsel zwischen Klein und Hilbert. Göttinger Nachrichten 1917 (erschienen 1918), (vorgel. 25. Januar 1918). (14 S.) [= Nr. XXXI.]

148. Bericht über eine Reihe von Vorträgen über die Einsteinsche Gravitationstheorie gehalten in der Göttinger mathematischen Gesellschaft im Sommer-Semester 1918. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 27, 1918. (4S.) [Übergegangen in 149. = Nr. XXXII und 151. = Nr. XXXIII.] Auszugsweise abgedruckt in den Verhandlungen der Amsterdamer Akademie vom 26. Oktober 1918.

149. Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie. Göttinger Nachrichten 1918 (vorgel. 19. Juli 1918). (19 S.) [= Nr. XXXII.]

150. Bemerkungen über die Beziehungen des de Sitterschen Koordinatensystems B zu der allgemeinen Welt konstanter positiver Krümmung. Proceedings of the Amsterdam Academy, vol. 21 (vorgel. 29. September 1918). (2 S.) [Übergegangen in 151. = Nr. XXXIII.]

151. Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt. Göttinger Nachrichten 1919 (vorgel. 6. Dezember 1918). (30 S.) [= Nr. XXXIII.]

b) Nachrufe.

152. Mitarbeit an „Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen". Math. Annalen, Bd. 7, 1874 (dat. Juli 1873). (55 S.)

153. Otto Hesse. Berichte über die Kgl. polytechnische Schule zu München für 1874/75. (4 S.) Italienische Übersetzung im Bulletino di bibliogr. e di storia delle science mat. etc. von Boncompagni, t. 9, Roma 1876.

154. Ernst Ritter. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4, 1897 (dat. 25. September 1895). (2 S.)

155. Zum Gedächtnis Ernst Scherings. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 6, 1899. (2 S.)

156. Wilhelm Lexis. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 23, 1914. (4 S.)

Siehe außerdem den bereits unter Nr. 118 genannten Wiener Vortrag „Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik".

c) Besprechungen.

Außer den Selbstreferaten Nr. 116, 117, 127 über autographierte Vorlesungshefte sind besonders zu nennen:

157. Besprechung von „M. Chasles, Rapport sur les progrès de la géométrie (Paris 1870)". Göttingische gelehrte Anzeigen 1872. (12 S.)

158. Besprechung von „W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde. 1. Bd.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 4. Aufl. (Stuttgart 1895)". Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 42, 1897. (Historisch-literarische Abteilung.) (3 S.)

Siehe ferner das bereits unter Nr. 128 genannte Gutachten „Gutachten betreffend den 3. Bd. der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie ..."

Eine Reihe von Besprechungen in den „Fortschritten der Mathematik" für die Jahrgänge 1869 bis 1877 (Bde. 2—9), mit Kln. gezeichnet, soll hier nicht besonders angeführt werden, ebensowenig eine Reihe von Referaten über eigene Arbeiten in dem „Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik", herausgegeben von Koenigsberger und Zeuner (Leipzig 1877 u. 1879), und die Mitarbeit am „Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques (2), vol. 1, 1877.

B. Wissenschaftliche Bücher, autographierte Vorlesungshefte.

a) Bücher.

1. Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. (VIII + 82 S.) Leipzig, Teubner 1882. Englische Übersetzung von F. Hardcastle. Cambridge, Macmillan and Bowes, 1893. [= Nr. XCIX.]

2. Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. (VIII + 260 S.) Leipzig, Teubner 1884. Englische Übersetzung von G. G. Morrice. London, Trübner and Co. 1888.

3. Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke. Bd. 1. (XX + 764 S.), Bd. 2. (XV + 712 S.) Leipzig, Teubner 1890 und 1892.

4. The Evanston Colloquium. Lectures on Mathematics reported by A. Ziwet. (IX + 109 S.) New York, MacMillan and Co., 1894. Zweite Auflage 1911. — Französische Übersetzung von L. Laugel. Paris, A. Hermann, 1898 (mit weiteren Literaturnachweisen). Polnische Übersetzung von S. Dickstein. Warschau 1899. [Der Vortrag 6 ist als Nr. XLVI in Bd. 2 dieser Ausgabe abgedruckt.]

5. Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von F. Tägert. (V + 66 S.) Leipzig, Teubner, 1895. Übersetzungen: ins Englische von Beman and Smith, Boston and London, Ginn and Cie., 1897; ins Französische von J. Grieß, Paris, Nony et Cie. 1896; ins Italienische von G. Giudice, Torino, Rosenberg e Sellier 1896.

6. R. Fricke und F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Bd. 1. (XIV + 634 S.), Bd. 2 (VIII + 668 S.) Leipzig, Teubner. Bd. 1, 1897; Bd. 2, Lieferung 1, 1901, Lieferung 2, 1911, Lieferung 3, 1912.

7. F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Heft 1 (IV + 196 S.) 1897, zweiter Abdruck 1914; Heft 2 (IV + 315 S.) 1898, zweiter Abdruck 1921; Heft 3 (IV + 247 S.) 1903; Heft 4 bearbeitet und ergänzt von F. Noether (II + 206 S.) 1910. Leipzig, Teubner.

8. The mathematical theory of the top. Princeton lectures, reported by H. B. Fine. (74 S.) New York, Charles Scribners sons 1897. [= Nr. LXXV.]

Außerdem:

9. F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig, Teubner 1890. (Das Buch stellt in einigen besonders bezeichneten Teilen die Ausführung von Vorlesungen von Klein aus den Semestern Winter 1887/88 bis Sommer 1889 dar.)

10. M. Bôcher, Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. Leipzig, Teubner 1894. (Das Buch stellt in den meisten Teilen die Ausführung einer Vorlesung von Klein aus dem Winter-Semester 1888/89 dar.)

b) Autographierte Vorlesungshefte.

1. Einleitung in die geometrische Funktionentheorie. Winter 1880/81 (IV + 280 S.) ausgearbeitet von Ernst Lange. Herausgegeben 1892 von Paul Epstein.

2. Nicht-Euklidische Geometrie. Teil I, Wi. 1889/90 (364 S.), Teil II, So. 1890 (238 S.), ausgearbeitet von Friedrich Schilling.

3. Ausgewählte Kapitel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Teil I, Wi. 1890/91 (234 S.), Teil II, So. 1891 (193 S.), ausgearbeitet von Klein selbst.

4. Riemannsche Flächen. Teil I, Wi. 1891/92 (254 S.) Teil II, So. 1892 (262 S.), ausgearbeitet von Klein selbst. Neudruck 1906. Vgl. das Selbstreferat Nr. C.

5. Höhere Geometrie. Teil I, Wi. 1892/93 (VI + 567 S.), Teil II So. 1893 (IV + 388 S.), ausgearbeitet von Friedrich Schilling. Neudruck 1907. Vgl. das Selbstreferat Nr. XXVIII.

6. Über die hypergeometrische Funktion. Wi. 1893/94 (569 S.) Ausgearbeitet von Ernst Ritter. Neudruck 1906. Vgl. das Selbstreferat Nr. LXVIII.

7. Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. So. 1894 (524 S.), ausgearbeitet von Ernst Ritter. Neudruck 1906. Vgl. das Selbstreferat Nr. LXIX.

8. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Teil I, Wi. 1895/96 (XI + 391 S.), Teil II, So. 1896 (354 S.), ausgearbeitet von Arnold Sommerfeld und Philipp Furtwängler. Neudruck 1907. Vgl. das Selbstreferat Nr. XCIV.

9. Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. So. 1901 (VIII + 468 S.), ausgearbeitet von Conrad Müller. Neudruck 1907.

10. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I, Wi. 1907/08 (VIII + 590 S.), Teil II, So. 1908 (VIII + 515 S.), ausgearbeitet von Ernst Hellinger. Neudruck mit Zusätzen und Änderungen von Teil I, 1911, von Teil II 1913.

Die Autographien 1. und 3. sind nur in kleiner Auflage hergestellt worden und nicht in den Buchhandel gelangt. Die übrigen Autographien wurden bei B. G. Teubner, Leipzig, in Kommissionsverlag gegeben; sie sind jedoch zurzeit größtenteils vergriffen. Es besteht die Absicht, überarbeitete und ergänzte Neuauflagen dieser Autographien im Verlage von Julius Springer erscheinen zu lassen.

Es existieren außerdem von einer größeren Anzahl Vorlesungsausarbeitungen handschriftlich oder maschinenschriftlich hergestellte Abschriften. Von diesen sind jedoch nur folgende fünf Hefte autorisiert, die für eine später zu verfassende Gesamtdarstellung der Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert als Vorarbeiten gedacht waren:

I. Die ersten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts.
II. Reine Mathematik bis ca. 1850. Mathematische Physik bis ca. 1880.
III. Funktionentheorie von 1850 bis ca. 1900.
IV. Die Invariantentheorie der linearen kontinuierlichen Gruppen in ihrer Bedeutung für die neueste mathematische Physik.
V. Gruppen analytischer Punkttransformationen bei Zugrundelegung einer quadratischen Differentialform.

C. Abhandlungen und Schriften über die Organisation des mathematischen Unterrichts und verwandte Fragen.

Vorbemerkung.

In Bd. 2 dieser Ausgabe (S. 508 ff.) ist bereits von der Wendung in Kleins Tätigkeit berichtet, die von 1892 an eintrat. Die Fühlung mit Althoff, die Bezugnahme mit den Ingenieuren, die Neubelebung des mathematisch-physikalischen Unterrichtes auf allen Arten von Lehranstalten sind die Hauptmomente, die hierfür in Betracht kommen. Das Wesentliche der geleisteten Arbeit vollzog sich in privaten Besprechungen und Kommissionsberatungen. Die hier folgende Zusammenstellung von Veröffentlichungen bietet dafür nur sozusagen zufällige Belegstücke. Trotzdem konnten sie hier nicht kommentiert werden, weil das von dem Ziele der gegenwärtigen Ausgabe zu weit abgeführt haben würde. So sei nur noch einmal auf die bereits auf S. *3/4* genannten einschlägigen Darstellungen bei Gutzmer und Lorey verwiesen, ferner insbesondere auch auf die geschichtlichen Teile von Klein-Schimmack (siehe Nr. 22 des folgenden Verzeichnisses, vgl. namentlich S. 158 ff.), wo von den Neueinrichtungen an der Universität Göttingen die Rede ist. Leider führt die Darstellung nur bis zu dem Erscheinungsjahre 1907.

1. Über die Beziehung der neueren Mathematik zu den Anwendungen. (Antrittsrede, gehalten am 25. Okt. 1880 in Leipzig.) Zeitschr. für den math. und naturw. Unterricht, Bd. 26, 1895. (12 S.)

2. Mathematik in „Die deutschen Universitäten, für die Universitätsausstellung in Chicago (1893) herausgegeben von W. Lexis (Berlin, A. Ascher & Co. 1893)." (10 S.)

3. Über den mathematischen Unterricht an der Universität Göttingen im besonderen Hinblick auf die Bedürfnisse der Lehramtskandidaten. (Vorgetragen im Verein zur Förderung des math. und naturwissenschaftl. Unterrichts am 4. Juni 1895.) Zeitschr. für den math. und naturw. Unterricht, Bd. 26, 1895. (7 S.)

4. Über den Plan eines physikalisch-technischen Instituts an der Universität Göttingen. (Vortrag geh. am 6. Dez. 1895 im Hannoverschen Bezirksverein des Vereins Deutscher Ingenieure.) Zeitschr. des Vereins Deutscher Ingenieure 1896. (4 S.) Abgedr. in „Klein-Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik usw." [Vgl. Nr. 11. dieses Verzeichnisses.]

5. Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbilbung der mathematischen Lehramtskandidaten. (Vorgetr. im Hannoverschen mathematischen Verein am 20. April 1896.) Zeitschr. für den math. u. naturw. Unterricht, Bd. 27, 1896. (6 S.) Abgedr. in der Zeitschr. des Vereins Deutscher Ingenieure 1896 und in „Klein-Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik usw."

6. Universität und Technische Hochschule. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Düsseldorf 1898. Abgedr. im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 7, 1899 (12 S.) und in „Klein-Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik usw."

7. Über Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Düsseldorf 1898. Abgedr. im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 7, 1899. (13 S.)

8. Über die Neueinrichtungen für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen. (Datiert Anfang November 1899.) Physikalische Zeitschrift, Bd. 1, 1899. Abgedruckt in dem unter (10.) genannten Schriftchen, ferner in „Die physikalischen Institute der Universität Göttingen (Leipzig 1906)" und in „Klein-Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik usw."

9. Bemerkungen zu Referaten von Weber und Hauck über die angewandte Mathematik in der Prüfungsordnung von 1898. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in München 1899. Abgedr. im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 8, 1900.

10. Über die Neueinrichtungen für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen. Mit einer Antwort auf die von Prof. Slaby in der Sitzung des preußischen Herrenhauses vom 30. März 1900 gehaltene Rede. Leipzig, Teubner 1900. (23 S.) [Vgl. Nr. 8. dieses Verzeichnisses.]

11. F. Klein und E. Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen. Vorträge von E. Riecke, F. Klein, F. Schilling, E. Wiechert, G. Bohlmann, E. Meyer, Th. Des Coudres während eines Göttinger Ferienkurses, mit Wiederabdruck verschiedener Aufsätze von F. Klein. Leipzig, Teubner 1900. (VI + 252 S.)

12. Bemerkungen im Anschluß an die Schulkonferenz von 1900. Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts, Berlin, 6. bis 8. Juni 1900. Abgedr. in Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 11, 1902. (14 S.) und in „Klein-Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathem. u. phys. Unterrichts usw." [Vgl. Nr. 16 unten.]

13. Hundert Jahre mathematischer Unterricht an den höheren preußischen Schulen in „Lexis, Die Reform der höheren Schulwesens in Preußen" (Halle 1902). (11 S.) Abgedr. im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 13, 1904 und in „Klein-Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathem. u. phys. Unterrichts usw."

14. Zur Besprechung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts auf der nächsten Naturforscherversammlung zu Breslau. (Bemerkungen zu den sogenannten Hamburger Thesen der Biologen.) Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Kassel 1903. Abgedr. im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 13, 1904 und in „Klein-Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathem. u. phys. Unterrichts usw."

15. Über die Aufgaben und die Zukunft der philosophischen Fakultät. (Kaisergeburtstagsrede vom 27. Januar 1904.) Göttingen, Kästner 1904. (11 S.) Abgedr. im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 13, 1904; teilweise abgedruckt in der Physikalischen Zeitschrift, Bd. 5, 1904.

16. F. Klein und E. Riecke, Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vorträge von O. Behrendsen, E. Bose, E. Götting, F. Klein, E. Riecke, F. Schilling, J. Stark, K. Schwarzschild während eines Göttinger Ferienkurses. Heft 1 (VII + 190 S.), Heft 2 (VI + 198 S.). Leipzig, Teubner 1904.

17. Mathematik, Physik und Astronomie an den deutschen Universitäten in den Jahren 1893—1903 in „Das Unterrichtswesen im Deutschen Reich, aus Anlaß der Weltausstellung in St. Louis herausgegeben von W. Lexis, Bd. 1 (Berlin 1904)". (13 S.) Abgedr. im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 13, 1904 und in der Physikalischen Zeitschrift, Bd. 5, 1904.

18. Über die Aufgabe der angewandten Mathematik, besonders über die pädagogische Seite. (Vorgetragen am 9. August 1904.) Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904 (Leipzig, Teubner 1905). (2 S.) [Im Auszug abgedruckt in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 510/11.]

19. Bericht über den Stand des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Breslau 1904. (14 S.) Abgedr. im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 14, 1905, in der Physikalischen Zeitschrift, Bd. 5, 1904 und in „Klein-Schimmack, Vorträge über den mathematischen Unterricht usw." [vgl. Nr. 22 unten] und in „Gutzmer, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (Leipzig, Teubner 1908)".

20. Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts. (Dat. September 1905.) Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 14, 1905, (15 S.) Abgedr. in „Klein-Schimmack, Vorträge über den mathematischen Unterricht usw." Französische Übersetzung im Enseignement mathématique, vol. 8, 1907.

21. Zur Geschichte der Göttinger Vereinigung in „Die physikalischen Institute der Universität Göttingen" (Festschrift der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik, Leipzig, Teubner 1906). (12 S.)

22. Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Bearbeitet von R. Schimmack. (IX + 236 S.) Leipzig, Teubner 1907. [Weitere Teile sind nicht erschienen.]

23. Allgemeine Ausführungen zu den Vorschlägen über [Ober-] Lehrerausbildung. (Reformvorschläge, unterbreitet der Naturforscherversammlung zu Dresden 1907.) Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Dresden 1907. (7 S.) Abgedr. in der Zeitschr. für den math. und naturw. Unterricht, Bd. 38, 1907 und in „Gutzmer, Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (Leipzig, Teubner 1808)". Französische Übersetzung: (im Auszuge) Enseignement mathématique, vol. 10, 1908.

24. Universität und Schule, Vorträge von F. Klein, P. Wendland, A. Brandl, A. Harnack auf der Versammlung Deutscher Philologen und Schulmänner zu Basel 1907. Leipzig, Teubner 1907. (88 S.) [Mit Wiederabdruck der unter 23. genannten Reformvorschläge.]

25. Die Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. (Festrede, gehalten am 22. Februar 1908.) Festbericht zum 10jährigen Bestehen der Vereinigung. Abgedruckt im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 17, 1908 (11 S.) und in der Physikalischen Zeitschrift, Bd. 9, 1908.

26. Wissenschaft und Technik. Vortrag gehalten bei der Jahresfeier des Deutschen Museums in München am 1. Oktober 1908, München 1908. Abgedruckt im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 17, 1908 (8 S.), in der Physikalischen Zeitschrift, Bd. 9, 1908 und in der Internationalen Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik, Bd. 2, 1908.

27. (Mit Greenhill und Fehr zusammen.) Internationale mathematische Unterrichtskommission (IMUK). Vorbericht über Organisation und Arbeitsplan. (Datiert Oktober 1908.) Enseignement mathématique, vol. 10, 1908. (16 S.) Deutsche Übersetzung in der Zeitschrift für den math. und naturw. Unterricht, Bd. 39, 1908.

28. Die Einrichtungen zur Förderung der Luftschiffahrt an der Universität Göttingen. (Auszug aus einem Vortrage vor dem Niedersächsischen Verein für Luftschiffahrt vom 28. Januar 1909.) Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 18, 1909 (3 S.). Abgedruckt in Illustrierte aeronautische Mitteilungen 1909 und in der Physikalischen Zeitschrift, Bd. 10, 1910.

29. Zur Beratung des Kultusetats im Preußischen Herrenhause. (Rede gehalten am 27. Mai 1910.) Zeitschr. für den math. und naturw. Unterricht, Bd. 41, 1910 (5 S.).

30. Wissenschaftliche Vorbereitungskurse für Mittelschullehrer. Zeitschr. für den math. und naturw. Unterricht, Bd. 41, 1910 (5 S.). Abgedr. in den Pädagogischen Blättern, Bd. 39, 1910.

31. Aktuelle Probleme der [Volksschul-] Lehrerbildung. Schriften des Deutschen Ausschusses für den math. und naturw. Unterricht, Heft 10 (IV + 32 S.). Leipzig, Teubner 1911 (enthalten in Gutzmer, Die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den math. und naturw. Unterricht, Leipzig, Teubner 1914).

32. Bericht über den heutigen Zustand des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen. (Datiert Mitte August 1914.) Zeitschr. für den math. und naturw. Unterricht, Bd. 46, 1915 (10 S.).

33. Festrede bei der Feier des 20jährigen Bestehens der Göttinger Vereinigung (gehalten am 22. Juni 1918). Festbericht zum 20-jährigen Bestehen der Vereinigung. (13 S.) Abgedruckt im Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, Bd. 27 (1919).

Außerdem Reden und Referate über Unterrichtsfragen im Preußischen Herrenhaus von 1908 bis 1918, im stenographischen Bericht über die Verhandlungen.

D. Herausgabe von Zeitschriften, Sammelwerken, Werken anderer Mathematiker, Verschiedenes.

a) Zeitschriften.

Mathematische Annalen. Eintritt in die Redaktion seit Bd. 6 (1873).

b) Sammelwerke.

I. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

Mitglied der Kommission der Akademien für die Herausgabe der mathematischen Enzyklopädie seit ihrer Gründung im Jahre 1895. Insbesondere Redaktion von Bd. IV (Mechanik) seit 1899 (seit 1904 in Gemeinschaft mit C. H. Müller). Teilband 1 (mit Vorwort von Klein) 1901—1908; Teilband 2 (erscheint seit 1907); Teilband 3, 1901 bis 1908; Teiband 4, 1907—1917; Leipzig, Teubner.

II. Internationale mathematische Unterrichtskommission. (IMUK).

Vorsitz der Internationalen mathematischen Unterrichts-Kommission seit ihrer Gründung im Jahre 1908. (Stellvertretender Vorsitzender: G. Greenhill; Generalsekretär: H. Fehr.) Vorsitzender des Deutschen Unterausschusses derselben ebenfalls seit dem Gründungsjahre 1908.

Eine Gesamtübersicht über die von der Internationalen math. Unterrichtskommission herausgebrachten Veröffentlichungen, im ganzen 294 Nummern umfassend, hat H. Fehr in dem von ihm herausgegebenen Enseignement mathématique, Bd. XXI, 1921 zusammengestellt. Der Deutsche Unterausschuß gab folgende Schriften heraus:

A. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland (herausgegeben von F. Klein). 5 Bände in 9 Teilbänden. Bd. 1, 1909—1913; Bd. 2, 1910—1913; Bd. 3, 1911—1916; Bd. 4, 1910—1915; Bd. 5, 1912—1916.

B. Berichte und Mitteilungen (herausgegeben von W. Lietzmann); 1. Folge (enthaltend 12 Stücke) 1909—1916; 2. Folge (enthaltend 3 Stücke) 1915—1917.

In sehr vielen der Veröffentlichungen der Internat. math. Unterrichtskommission finden sich Mitteilungen von Klein.

Siehe auch die unter C. 27 genannte Abhandlung.

III. Redaktion von „Die Kultur der Gegenwart. III. Teil. 1. Abteilung: die mathematischen Wissenschaften“. Lieferung 1—3, Leipzig, Teubner 1912 bis 1914.

c) Werke anderer Mathematiker.

1. Bearbeitung und Herausgabe von „J. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Zweite Abteilung.“ Mit im Vorwort besonders bezeichneten Zusätzen von F. Klein. Leipzig, Teubner 1869.

2. Herausgabe von „A. F. Möbius, Gesammelte Werke.“ Bd. II, III und Nachtrag zu Bd. IV. Leipzig, Hirzel 1886/87.

3. Herausgabe von „C. F. Gauss Werke“. Bd. VIII 1900, Bd. IX 1903, Bd. VII 1906, Bd. X, 1. Teil 1917, 2. Teil seit 1922 in Einzellieferungen. Bd. XI in Vorbereitung. Leipzig, Teubner.

4. F. Klein und M. Brendel (später F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger), Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. Hefte 1—8, 1911—1920, Leipzig, Teubner. Auch als Beihefte zu den Göttinger Nachrichten von 1911 (1), 1912 (2 und 3), 1917 (4 und 5), 1918 (6), 1919 (7) und 1920 (8) erschienen.

5. Über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken. Berichte 1—14. Göttinger Nachrichten (geschäftliche Mitteilungen) 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1904, 1906, 1910, 1911, 1913, 1915, 1917, 1919, 1921. Abgedr. in den Math. Annalen Bd. 50, 53, 55, 55, 57, 61, 63, 69, 71, 74, 77, 78, 80, 85. Französische Übersetzung von Bericht 1 und 2 im Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, vol. 22, 1898 und vol. 23, 1899.

6. Gauss' wissenschaftliches Tagebuch, mit Anmerkungen herausgegeben von F. Klein. Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Berlin 1901). Abgedr. Math. Annalen, Bd. 57, 1903. Über das in der Festschrift enthaltene, irrtümlicherweise als Porträt des 26jährigen Gauss bezeichnete, Bild vgl. Göttinger Nachrichten (geschäftliche Mitteilungen) v. J. 1903.

7. Erwerbung neuer auf B. Riemann bezüglicher Manuskripte. Göttinger Nachrichten (geschäftliche Mitteilungen) 1897. (2 S.)

d) Verschiedenes.

1. Herausgabe von „München in naturwissenschaftlicher und medizinischer Beziehung“. Leipzig und München 1877.

2. Herausgabe von „Amtlicher Bericht der 50. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in München 1877“. Leipzig und München 1877.

3. Eine Reihe von Einführungsworten zu Werken anderer Autoren oder zu von Klein veranlaßten und im Teubnerschen Verlage erschienenen deutschen Übersetzungen bekannter ausländischer Werke sollen hier nicht im einzelnen aufgeführt werden.

[Abgeschlossen April 1923. — V.]

3. Übersicht über den Gesamtinhalt der drei Bände der vorliegenden Ausgabe.

Bd. I. Herausgegeben von R. Fricke u. A. Ostrowski.

Vorrede zur Gesamtausgabe.

Liniengeometrie. — Grundlegung der Geometrie. (Einordnung der Nicht-Euklidischen Geometrie in die projektive Geometrie.) — Zum Erlanger Programm. (Klassifikation der geometrischen Forschungen nach den zu Grunde gelegten Transformationsgruppen, Ausdehnung des Klassifikationsprinzipes auf die moderne Physik, insbesondere die Relativitätstheorieen.)

Bd. II. Herausgegeben von R. Fricke u. H. Vermeil.

Zur anschaulichen Geometrie. (Realitätsverhältnisse algebraischer Gebilde, Analysis Situs, Erkenntnistheoretisches.) — Zur Auflösung algebraischer Gleichungen. (Die regulären Körper, das Ikosaeder und die Gleichungen fünften Grades, allgemeine Betrachtung endlicher Gruppen linearer Substitutionen und ihrer Bedeutung für die Auflösung höherer algebraischer Gleichungen.) — Zur mathematischen Physik. (Oszillationstheorem, Hamiltonsche Optik, Mechanik, insbesondere Kreiseltheorie.)

Bd. III. Herausgegeben von R. Fricke, H. Vermeil u. E. Bessel-Hagen.

Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen. (Transformationstheorie, gruppentheoretische Systematik.) — Zahlentheorie. (Zahlengitter und komplexe Multiplikation.) — Hyperelliptische und Abelsche Funktionen (auf invariantentheoretischer Grundlage, Primformen). — Riemannsche Funktionentheorie. (Algebraische Funktionen und ihre Integrale, entwickelt aus der Vorstellung der Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten.) — Automorphe Funktionen. (Vorgeschichte, Briefwechsel zwischen F. Klein und H. Poincaré in den Jahren 1881/82, Fundamentaltheorem, Verbindung mit dem Oszillationstheorem der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.)

Anhang: Verschiedene Verzeichnisse.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

Gemeinsam mit **W. Blaschke**, Hamburg, **M. Born**, Göttingen, **C. Runge**, Göttingen

herausgegeben von

R. Courant

Göttingen

Band I:

Vorlesungen über Differential-Geometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. 1. Elementare Differential-Geometrie. Von **Wilhelm Blaschke**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. Zweite neubearbeitete Auflage. In Vorbereitung

Band II:

Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Von Dr. **Konrad Knopp**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg. Mit 12 Textfiguren. 1922. GZ. 15; gebunden GZ. 18

Band III:

Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Von **Adolf Hurwitz** †, weil. ord. Professor der Mathematik am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich. Herausgegeben und ergänzt durch einen Abschnitt über:

Geometrische Funktionentheorie von **R. Courant**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen. Mit 122 Textfiguren. 1922. GZ. 13; gebunden GZ. 16

Band IV:

Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Von Dr. **Erwin Madelung**, ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M. Mit 20 Textfiguren. 1922. GZ. 8,25; gebunden GZ. 10

Band V:

Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen, sowie auf die Kristallographie. Von **Andreas Speiser**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Zürich. 1923. GZ. 7; gebunden GZ. 8,5

Band VI:

Theorie der Differentialgleichungen. Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen. Von **Ludwig Bieberbach**, o. ö. Professor der Mathematik an der Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin. Mit 19 Textfiguren. Erscheint im Frühjahr 1923

Band VII:

Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. Von **Wilhelm Blaschke**, ord. Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. II. Affine Differentialgeometrie. Bearbeitet von Kurt Reidemeister, Professor der Mathematik an der Universität Wien. Erste und zweite Auflage. Mit 40 Textfiguren. Erscheint im Sommer 1923

Weitere Bände in Vorbereitung

Die Grundzahlen (GZ.) entsprechen den ungefähren Vorkriegspreisen und ergeben mit dem jeweiligen Entwertungsfaktor (Umrechnungsschlüssel) vervielfacht den Verkaufspreis. Über den zur Zeit geltenden Umrechnungsschlüssel geben alle Buchhandlungen sowie der Verlag bereitwilligst Auskunft.

Grundzüge der mehrdimensionalen Differential-Geometrie in direkter Darstellung. Von **D. J. Struik.** Mit 4 Textfiguren. 1922. GZ. 12

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. **W. Ludwig**, o. Professor an der Technischen Hochschule Dresden.

Erster Teil: **Das rechtwinklige Zweitafelsystem. Vielflache, Kreis, Zylinder, Kugel.** Mit 58 Textfiguren. 1919. GZ. 4,5

Zweiter Teil: **Das rechtwinklige Zweitafelsystem. Kegelschnitte, Durchdringungskurven, Schraubenlinie.** Mit 50 Textfiguren. 1922. GZ. 4,5

Dritter Teil: In Vorbereitung.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In zwei Bänden. Von Dr. **Georg Scheffers**, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin.

Erster Band: Zweite, durchgesehene Auflage. Unveränderter Neudruck. Mit 404 Textfiguren. 1922. Gebunden GZ. 14

Zweiter Band: Mit 396 Textfiguren. 1920. GZ. 11; gebunden GZ. 14

B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Neu herausgegeben und erläutert von **H. Weyl.** Dritte Auflage. 1923. GZ. 2

Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung des Festvortrages, gehalten an der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Januar 1921. Von **Albert Einstein.** Mit 2 Textabbildungen. 1921. GZ. 1

Koordinaten-Geometrie. Von Dr. **Hans Beck**, Professor an der Universität Bonn. Erster Band: **Die Ebene.** Mit 47 Textabbildungen. 1919. GZ. 20; geb. GZ. 23

Raum — Zeit — Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Von **Hermann Weyl.** Fünfte, umgearbeite Auflage. Mit 23 Textfiguren. 1923. GZ. 10

Mathematische Analyse des Raumproblems. Vorlesungen, gehalten in Barcelona und Madrid. Von Dr. **Hermann Weyl**, Professor der Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Mit etwa 9 Textabbildungen. Erscheint im Sommer 1923

Die Grundzahlen (GZ.) entsprechen den ungefähren Vorkriegspreisen und ergeben mit dem jeweiligen Entwertungsfaktor (Umrechnungsschlüssel) vervielfacht den Verkaufspreis. Über den zur Zeit geltenden Umrechnungsschlüssel geben alle Buchhandlungen sowie der Verlag bereitwilligst Auskunft.