XCII. Neue Untersuchungen über elliptische Funktionen und Modulfunktionen. Zweiter Bericht[1]).

[Math. Annalen, Bd. 26 (1885/86).]

Vor nun anderthalb Jahren richtete ich im Anschluß an meine Vorlesungen die Übungen meines Seminars auf die Theorie der elliptischen Funktionen, insbesondere der elliptischen Modulfunktionen, um so eine Reihe von Problemen, die mir von meiner früheren Beschäftigung mit der genannten Theorie her geläufig waren, zur Bearbeitung und gleichförmigen Erledigung zu bringen. Von den Untersuchungen, welche aus diesem Anlasse entstanden sind, haben einige wenige in den Mathematischen Annalen Aufnahme gefunden (vgl. Morera: *Über einige Bildungsgesetze in der Theorie der Teilung und der Transformation der elliptischen Funktionen*, Bd. 25 (1885) und zwei Aufsätze von Pick in Bd. 25 und 26 (1885/86): *Über die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen*); die anderen sind in den Schriften der K. Sächischen Gesellschaft der Wissenschaften erschienen oder werden binnen kurzem als Dissertationen veröffentlicht werden. Es ist Gefahr vorhanden, daß diese letzteren Arbeiten der Beachtung des mathematischen Publikums mehr oder minder entgehen, und es schien mir also zweckmäßig, an gegenwärtiger Stelle ein zusammenhängendes Referat über dieselben zu erstatten.

Ich will dabei den Gesamtstoff von vornherein auf zwei Abschnitte verteilen. — Einmal nämlich handelte es sich um die weitere Durchführung jenes Programms einer reinen Theorie der elliptischen Modulfunktionen, welches sich aus meinen Untersuchungen in den Bänden 14 und 15 der Math. Annalen (1878/79) [= Nr. LXXXII bis LXXXVI des vorliegenden Bandes] entwickelt hat, andererseits aber um die Aufgabe, die betreffenden Überlegungen mit der eigentlichen Theorie der elliptischen Funktionen, insbesondere mit den Fundamentalformeln, wie sie Weierstrass in seinen Vorlesungen zu geben pflegt, in Verbindung zu bringen.

---

[1]) [Vgl. die Fußnote [1]) auf S. 255 des vorliegenden Bandes.]

In ersterer Hinsicht muß ich voranstellen, daß in der Note „*Zur [Systematik der] Theorie der elliptischen Modulfunktionen*", welche ich im Dezember 1879 der Münchener Akademie vorlegte[2]) und auf die ich mich wiederholt zu beziehen habe, nur ein *Teil* des in Rede stehenden Programms niedergelegt ist. Ich beschränke mich dort durchaus auf Modulfunktionen im engeren Sinne, d. h. auf Funktionen des Periodenverhältnisses ω, während die weitergehende Untersuchung durchaus verlangt, Modul*formen*, d. h. homogene Funktionen der Perioden ω_1, ω_2 in Betracht zu ziehen. Man kann sich das Verhältnis etwa in der Weise vorstellen, daß die Riemannschen Methoden, welche ich damals voranstellte, (die Konstruktion und Diskussion der Fundamentalpolygone usw.) die zuerst erforderliche Vorarbeit leisten, während die feinere Ausbildung der Betrachtungen und die Durchführung auch in komplizierten Fällen der formentheoretischen Behandlung vorbehalten bleiben muß, — beide beherrschend aber die gruppentheoretische Auffassung (die Stufeneinteilung usw.) das oberste Einteilungsprinzip abgibt. Ich möchte mit Rücksicht hierauf insbesondere auf die Hurwitzsche Abhandlung im 18. Bande der Mathematischen Annalen (1881) verweisen (*Grundzüge einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen usw.*). Man beachte namentlich, wie dort (in § 9 des ersten Teiles) der Übergang von der Modulfunktion der ersten Stufe, die ich J nenne, zu den Modulformen derselben Stufe, d. h. zu g_2 und g_3, gefunden wird, indem $\frac{dJ}{d\omega}$ als Durchgangspunkt dient.

Die ersten Arbeiten, über welche ich nunmehr zu berichten habe, machen übrigens von dem Begriffe der Modulform nur beiläufigen Gebrauch und basieren dementsprechend in der Hauptsache auf der Diskussion algebraischer Funktionen im Riemannschen Sinne.

Ich referiere zunächst über die Untersuchungen von Herrn Fricke[3]). Bekanntlich ergibt die Betrachtung der Kreisbogendreiecke der ω-Ebene und der aus ihnen gebildeten Fundamentalpolygone, daß für $n = 2, 3, 4, 5$ sich sämtliche Modulfunktionen der zugehörigen Stufe rational je durch einen Hauptmodul darstellen lassen, welcher, wenn man J als gegeben ansieht, bzw. mit einer der durch die regulären Körper definierten Irrationalitäten, nämlich der Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaeder-Irrationalität, koinzidiert. Denselben Ansatz habe ich dann in meinen früheren Arbeiten auch noch für die Fälle $n = 7$ und $n = 11$ in Anwendung gebracht, wobei sich aber

---

[2]) Dieselbe ist in Bd. 17 der Math. Annalen [und im vorliegenden Bande unter Nr. LXXXVII, S. 169 ff.] abgedruckt.

[3]) Siehe meine noch öfter zu nennende Notiz in den Berichten der K. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 2. März 1885: „*Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunktionen der niedersten Stufen.*" [Vorstehend mit etwas verändertem Titel als Nr. XCI abgedruckt.]

eine steigende Komplikation einstellte, so daß die Leistungsfähigkeit der Methode auf kleine Stufenzahlen beschränkt erscheint. Um so wünschenswerter mußte es sein, die kleinen Werte von n nun auch sämtlich in dem angedeuteten Sinne diskutiert zu sehen. Dies ist, was Herr Fricke für $n=6$, 8, 16 und neuerdings auch bei $n=10$ ausgeführt hat[4]). Es handelt sich dabei selbstverständlicherweise in jedem Falle um Definition solcher einfachster algebraischer Funktionen der Invariante J, durch welche sich alle anderen Funktionen derselben Stufe rational darstellen lassen. Herr Fricke hat dabei seine Aufgabe so gefaßt, daß er es unternahm, alle Moduln der genannten Stufen, welche in der ausgedehnten hierhergehörigen Literatur als wesentlich vorkommen, explizit auf die Fundamentalgrößen zurückzuführen. So finden sich hier in die modernen Anschauungen eingeordnet insbesondere jene Relationen über dritte und fünfte Teilwerte der Thetafunktionen, welche man im Anschlusse an den Gaussischen Nachlaß neuerdings vielfach behandelt hat[5]).

Ich wende mich ferner zu den Untersuchungen der Herren Friedrich und E. Fiedler[6]). Dieselben beziehen sich auf die Theorie der *Modulargleichungen* in dem allgemeinen Sinne, wie ich dieselbe in meiner soeben genannten Münchener Note skizziert habe, und knüpfen an eine dort gegebene Bemerkung an, vermöge deren bei zweckmäßiger Wahl der zugrunde zu legenden Moduln Überlegungen *invariantentheoretischer Natur* bei Aufstellung der Modulargleichungen am Platze sind. Herr Friedrich hat in diesem Sinne die Modulargleichungen der regulären Körper behandelt. Es seien λ, a, o, η die Benennungen für Doppelverhältnis, Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaeder-Irrationalität; mit λ', a', o', η' bezeichnen wir die transformierten Werte. Die linke Seite der Modulargleichung muß dann eine solche ganze rationale Funktion von λ und λ', usw., sein, daß sie bei gewissen linearen Substitutionen, denen λ und λ' simultan zu unterwerfen sind, bis auf einen Faktor ungeändert bleibt. Hieraus nun leitet man durch rein algebraische Überlegungen ab, daß die linke Seite der Modulargleichung eine ganze Funktion einiger charakteri-

4) Die betreffenden Resultate sollen im Zusammenhange in der demnächst erscheinenden Leipziger Dissertation d. Verf. veröffentlicht werden. [= Robert Fricke, *Über Systeme elliptischer Modulfunktionen von niederer Stufenzahl.* — Gedruckt in Braunschweig bei Vieweg 1886].

5) [Siehe Gauss' Werke, Bd. 3, S. 470ff. und z. B. Göring in Bd. 7 der Math. Annalen (1874).]

6) Vgl. wieder die schon genannte Note in den Berichten d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. oder auch die bezüglichen, demnächst erscheinenden Leipziger Dissertationen. [= Georg Friedrich, *Die Modulargleichungen der Galoisschen Moduln der 2. bis 5. Stufe.* — Gedruckt in Greifswald bei Kunike 1886. — Ernst Wilhelm Fiedler, *Über eine besondere Klasse irrationaler Modulargleichungen der elliptischen Funktionen.* — Gedruckt in Zürich bei Zürcher und Furrer 1886].

stischer Verbindungen von λ, λ' usw. sein wird, wodurch die wirkliche Berechnung der Modulargleichungen auch bei höheren Transformationsgraden auf die Auswertung relativ weniger Zahlenkoeffizienten zurückgeführt ist. Herr Friedrich gibt — unter Beschränkung auf solche Transformationsgrade, welche bzw. zu 2, 3, 4, 5 relativ prim sind — für λ, a, o, η die Durchführung dieser Theorie und als Beleg jeweils eine Zahl ausgerechneter Beispiele. Dabei liegt ein interessanter Vergleichspunkt in dem Umstande, daß die Modulargleichungen für λ, λ' in den Fällen $n=3$ und $n=5$ schon in Jacobis Fundamenten (1829) [= Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 122/123] auftreten, wo sie „non sine calculo prolixo" abgeleitet werden (wie Jacobi dies selbst ausdrückt), während jetzt die empirische Berechnung je eines Zahlenkoeffizienten genügt. — Ganz ähnliche Bemerkungen sind hinsichtlich der Arbeit des Herrn E. Fiedler am Platze. Es handelt sich bei Herrn E. Fiedler nicht um Modulargleichungen im engeren Sinne, sondern um *Modularkorrespondenzen* und zwar insbesondere um diejenigen, welche zwischen $x=\sqrt[8]{\lambda}$, $y=\sqrt[8]{1-\lambda}$ einerseits und den transformierten Werten dieser Größen, die x', y' heißen mögen, bestehen. In meiner wiederholt genannten Münchener Note hatte ich die Frage offen gelassen, wie man eine solche Korrespondenz in jedem Falle algebraisch vollständig darzustellen habe, so daß hier in der Theorie eine wesentliche Lücke blieb, welche erst durch die neueren Untersuchungen von Herrn Hurwitz ausgefüllt worden ist[7]). An letztere Untersuchungen anknüpfend leitet Herr E. Fiedler den Satz ab, daß im Falle des von ihm betrachteten Modulsystems zur Darstellung der Modularkorrespondenz außer den selbstverständlichen Relationen $x^8+y^8=1$, $x'^8+y'^8=1$ immer eine Gleichung genügt, sobald der Transformationsgrad n (den Herr E. Fiedler der Einfachheit halber durchweg als ungerade voraussetzt) entweder selbst von der Gestalt $8\varkappa+7$ ist oder einen in ungerader Potenz vorkommenden Primfaktor von der Gestalt $8\varkappa+7$ hat. Er entwickelt ferner, daß man diese eine Gleichung immer so auswählen kann, daß sie bei gewissen ternären linearen Substitutionen, denen einerseits x, y, andererseits (und zwar gleichzeitig) x', y' zu unterwerfen sind, ungeändert erhalten bleibt, und zeigt endlich, daß infolge der genannten Eigenschaft die linke Seite der Gleichung als ganze Funktion bestimmter, aus x, y, x', y' zusammengesetzter Ausdrücke sich aufbauen läßt. Die einfachste hierhergehörige Gleichung ist die bekannte, welche Gützlaff [Crelles Journal, Bd. 12 (1834)] für den siebenten Transformationsgrad gab:

$$xy + x'y' = 1;$$

7) Siehe insbesondere dessen Mitteilung in den Göttinger Nachrichten von 1883: „*Zur Theorie der Modulargleichungen*". [Die weiteren hierher gehörigen Untersuchungen von Hurwitz sind auf S. 175, Fußnote 8) genannt.]

Herr E. Fiedler steigt mit den von ihm durchgerechneten Beispielen bis zu den Transformationsgraden 55, 71, 79 auf, ohne dabei übermäßig lange numerische Rechnungen zu gebrauchen[8]).

Dem Gegensatze entsprechend, der soeben zwischen Modulfunktionen und Modulformen gefunden wurde, treten an Seite der Modulargleichungen die *Multiplikatorgleichungen*. Unter einem *Multiplikator* verstehe ich überhaupt einen Quotienten, dessen Zähler der transformierte Wert einer Modulform ist, während der Nenner durch den anfänglichen Wert der Modulform gegeben wird. Der Multiplikator ist also zunächst Modul*funktion* und dementsprechend stellen sich die Koeffizienten der Multiplikatorgleichung zuvörderst ebenfalls als Modulfunktionen dar. Wenn wir dann aber hinterher mit einer geeigneten Potenz der im Nenner des Multiplikators stehenden Modulform heraufmultiplizieren, so verwandelt sich die Multiplikatorgleichung in eine solche, *welche den transformierten Wert einer Modulform von den gegebenen Werten irgendwelcher anderer Modulformen abhängig macht.* Eben hierin nun erblicke ich die innere Bedeutung der Multiplikatorgleichungen[9]).

Dem Gesagten zufolge gibt es so viele Multiplikatorgleichungen, als es Modulformen gibt, für die eine Transformationstheorie existiert. Die Jacobischen Multplikatorgleichungen, sowie die anderen, die ich Multiplikatorgleichungen erster Stufe nenne[10]), sind nur die ersten einfachen Beispiele.

Herr Biedermann[11]) hat nun insbesondere diejenigen Multiplikatorgleichungen untersucht, welche durch Betrachtung der *Teilwerte der Weierstrassischen σ-Funktion* erwachsen. Ich verstehe unter letzteren, wenn s eine beliebig gegebene Zahl bezeichnet, die folgenden Größen[12]):

$$\sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2) = -e^{\frac{-(\lambda\eta_1+\mu\eta_2)(\lambda\omega_1+\mu\omega_2)}{2s^2}} \cdot \sigma\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{s} \,\middle|\, \omega_1, \omega_2\right),$$

wo dann, unter n den Transformationsgrad, unter a, b, c, d vier ganze Zahlen von der Determinante $ad - bc = n$ verstanden, als Wurzeln der Multiplikatorgleichung die folgenden Quotienten genommen werden müssen:

$$x_{\lambda,\mu} = \frac{\sigma_{\lambda,\mu}(a\omega_1+b\omega_2, c\omega_1+d\omega_2)}{\sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2)}.$$

---

8) [Vgl. die in Nr. XCI, S. 272 mitgeteilten Schlußformeln.]

9) [Vgl. meine oben aus Math. Annalen, Bd. 15 (1878/79) abgedruckte Note, Nr. LXXXV im vorliegenden Bande, sowie die daselbst gegebenen Zitate. K.]

10) [Vgl. wieder die unter 9) genannte Note Nr. LXXXV.]

11) Berichte der K. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 4. Mai 1885. (Der Inhalt dieser Note soll wieder in einer Leipziger Dissertation besonders ausgeführt werden.) [= Paul Biedermann, *Über Multiplikatorgleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Funktionen.* — Gedruckt in Greifswald bei Kunike 1887.]

12) [Vgl. Abh. XC, S. 204 im vorliegenden Bande.]

Indem Herr Biedermann die Zahl s insbesondere gleich 2, 3, 4 setzt und dann, der Einfachheit halber, den Transformationsgrad n zu 2, bez. zu 3, relativ prim nimmt, bestimmt er mit Hilfe der zugehörigen in der ω-Ebene gelegenen Fundamentalpolygone die Form der entstehenden Multiplikatorgleichungen und ist dadurch in der Lage, für niedere Transformationsgrade die Schlußformeln fast ohne Rechnung hinzuschreiben. Die Bedeutung dieser Untersuchungen soll wieder nicht nur in der Erledigung eines einzelnen Falles beruhen, sondern in dem methodischen Fortschritte, der mit ihnen für alle ähnlichen Probleme, insbesondere auch für die Theorie der Jacobischen Multiplikatorgleichungen, gegeben erscheint. —

Indem ich mich nunmehr zum zweiten Teile meines Referates wende, gedenke ich zunächst der Untersuchungen des Herrn Nimsch. Die Perioden ω_1, ω_2, η_1, η_2 der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung lassen sich bekanntlich, wie Herr Bruns zuerst hervorhob[13]), aus den Invarianten g_2, g_3 durch hypergeometrische Reihen berechnen. Inzwischen fehlte es bislang an einer zusammenhängenden Darstellung der Theorie unter Heranziehung derjenigen Anschauungen, welche Riemann der Theorie der hypergeometrischen Funktionen zugrunde gelegt hat[14]). Eben hier hat Herr Nimsch eingesetzt und den Gegenstand so weit gefördert, daß seine Untersuchungen, die demnächst publiziert werden sollen, mit einer Tabelle numerischer Werte abschließen[15]).

Ich erwähne ferner die Untersuchungen von Herrn Molien[16]). Die achte Einheitswurzel, welche in der Theorie der unendlich vielen Formen der Funktion Θ auftritt, kann bekanntlich vom Weierstrassischen Standpunkte aus auf die Änderungen zurückgeführt werden, welche die achte Wurzel aus der Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ bei linearer Transformation der Perioden erfährt. Statt $\sqrt[8]{\Delta}$ wird man dann lieber gleich $\sqrt[24]{\Delta}$ in Be-

---

13) *Über die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung* (Dorpater Festschrift 1875) [wieder abgedruckt in Bd. 27 der Math. Annalen (1886), S. 234 ff.] vgl. auch meine Darstellung in Bd. 14 der Math. Annalen (1879/80) [= Abh. LXXXII, S. 26 ff. im vorliegenden Bande].

14) *Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische Reihe darstellbaren Funktionen* (1857). Es ist übrigens bemerkenswert, daß Riemann in dieser Abhandlung (vgl. S. 77 der Werke (2. Aufl.)) unter den rationalen Transformationen, welche unter Umständen eine gegebene P-Funktion in eine neue P-Funktion überführen, bereits folgende angibt: $y = \frac{4}{27}\frac{(1-x+x^2)^3}{x^2(1-x)^2}$, die genau dem Übergange vom Doppelverhältnisse $\lambda = x$ zur absoluten Invariante $J = y$ entspricht, so daß man annehmen darf, Riemann habe die Abhängigkeit der ω_1, ω_2 von J ihrem Wesen nach sehr wohl gekannt.

15) [Paul Nimsch, *Über die Perioden der elliptischen Integrale I. und II. Gattung als Funktionen der rationalen Invarianten.* Dissertation, Leipzig (1886). — Gedruckt in Leipzig bei Naumann 1886.]

16) Berichte d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 12. Januar 1885.

tracht ziehen, welches in gewissem Sinne die eigentliche fundamentale Größe ist, die freilich ihrerseits (wie Jacobi gelegentlich in den Fundamenten bemerkt) durch Heranziehen einer Transformation dritter Ordnung auf die Θ-Funktion und also wieder auf $\sqrt[8]{\Delta}$ zurückgeführt werden kann. Herr Molien hat nun den Faktor, um welchen sich $\sqrt[24]{\Delta}$ bei linearer Transformation der Perioden ändert, in der Weise bestimmt, daß er von der Eulerschen Reihenentwicklung für $\Pi(1-q^{2r})$ ausging und auf diese das Cauchysche Verfahren der Reihenvergleichung anwandte[17]. Die Gestalt, welche Herr Molien den Schlußformeln gibt, entspricht genau derjenigen, welche Henri John Stephen Smith bei der Transformation der Θ-Funktion zur Geltung bringt[18] und die in mancher Hinsicht der von Hermite gewählten Form vorzuziehen sein dürfte. Ich will übrigens nicht unerwähnt lassen, daß eben die Änderungen von $\sqrt[24]{\Delta}$ in neuerer Zeit auch von anderer Seite untersucht worden sind, so von Herrn Weber im 6. Bande der Acta Mathematica (1885) auf arithmetischem Wege und von Herrn Kiepert in Bd. 26 der Math. Annalen (1885/86) vermöge der Hermiteschen Methode[19].

Herr Engel hat eine andere Spezialfrage zur Beantwortung gebracht[20]. Abel bemerkt in seinem *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*[21], daß zwischen den n-ten Teilwerten der von ihm betrachteten elliptischen Funktionen lineare Identitäten bestehen, deren Koeffizienten n-te Einheitswurzeln sind, eine Behauptung, welche dann später von den Herren Sylow und Kronecker ausführlich begründet und weiter verfolgt worden ist[22]. Man wird fragen, was aus diesen Relationen wird, wenn man durchweg die Weierstrassischen Funktionen $\wp(u)$, $\wp'(u)$ einführt. Man könnte

17) Cauchy im Bulletin de la Société Philomatique von 1817.

18) Reports of the British Association for the Advancement of Science, Bd. 35 (1865): *Report VI on the Theory of Numbers* (vgl. insbesondere S. 329). [= Collected mathematical papers, vol. I, S. 297].

19) Vom Standpunkte einer reinen Theorie der elliptischen Funktionen aus liegt die Schwierigkeit (oder das Charakteristische) der in Rede stehenden Untersuchungen darin, daß $\sqrt[24]{\Delta}$ und $\sqrt[8]{\Delta}$ keine *eindeutigen* Funktionen von ω_1, ω_2 sind, sondern nur *unverzweigte* Funktionen der Größen, welche erst durch eine willkürliche Festsetzung (durch Ziehen eines Querschnittes im Gebiete der ω_1, ω_2) zu eindeutigen Funktionen gemacht werden können. Bei $\sqrt[12]{\Delta}$ ist es noch anders und es kann also die elegante Behandlung, welche Herr Hurwitz in seiner öfter genannten Abhandlung (Bd. 18 der Math. Annalen (1881), siehe insbesondere S. 564—566 daselbst) der $\sqrt[12]{\Delta}$ zuteil werden läßt, nicht ohne weiteres auf die anderen Wurzeln übertragen werden.

20) Berichte der K. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 31. Juli 1884.

21) [Crelles Journal, Bd. 4 (1829) = Oeuvres complètes, vol. I., S. 523, Nr. 6 (Ausgabe von Sylow und Lie).]

22) Sylow in den Verhandlungen der Akademie von Christiania, 1864 und 1871, Kronecker in den Berliner Monatsberichten, 1875 und 1876.

hier Komplikationen erwarten; indes sind die Formeln, welche Herr Engel findet, ebenso einfach wie die früheren, auf die älteren Funktionen bezüglichen. Schreiben wir der Kürze halber $\wp_{\lambda\mu}$, $\wp'_{\lambda\mu}$ für $\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ und ε für $e^{\frac{2i\pi}{n}}$, so lauten die von Herrn Engel gefundenen Relationen für $\lambda = 0, 1, \ldots, (n-1)$:

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{2\lambda\mu}}{\wp'_{\lambda,\mu}} = 0, \quad \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{2\lambda\mu}\cdot\wp_{\lambda\mu}}{\wp'_{\lambda,\mu}} = 0.$$ [23]

Eine[24] weitere naheliegende Aufgabe, betreffs der ich in meinem Aufsatz „*Über gewissse Teilwerte der Θ-Funktion*", Math. Annalen Bd. 17 (1881) [= Abh. LXXXIX im vorliegenden Bande] bereits einige Andeutungen machte[25], die ich aber in meiner, die Gedanken dieses Aufsatzes fortführenden Abhandlung über elliptische Normalkurven [= Abh. XC im vorliegenden Bande] nicht weiter in Betracht gezogen habe, ist die, den Zusammenhang der z_α, A_α mit der Invariante J, bez. g_2, g_3 genauer zu studieren. Es geschieht dies vielleicht am zweckmäßigsten derart, daß die Ansätze verallgemeinert werden, die ich in den Bänden 14, 15 dieser Annalen für $n = 5, 7, 11$ gegeben habe. Die Moduln z_α usw. erscheinen dann schließlich als die Lösungen bestimmter *Formenprobleme*[26], deren Koeffizienten sich aus g_2, g_3 aufbauen. Inzwischen dürfte eine Durchführung dieses Gedankens schwierig sein. Einfacher ist es jedenfalls, zunächst die Größe A_0 von g_2, g_3 durch die Multiplikatorgleichung erster Stufe abhängig zu machen (wegen dieser Gleichung siehe oben S. 278), dann A_0 zu adjungieren und zuzusehen, wie sich unter dieser Voraussetzung die z_α, bez. die A_α berechnen, was der Theorie zufolge durch Wurzelzeichen gelingen muß. In zwei neuerdings erschienenen Noten hat Herr Morera den hiermit bezeichneten Gedanken wenigstens in allgemeinen Zügen durchgeführt[27].

23) [Der seinerzeit von mir gewählte Weg zur Ableitung dieser Relationen ist skizziert in Fußnote 37) von Abh. XC, S. 235/236 im vorliegenden Bande. K.]

24) [Hier ist beim Wiederabdruck ein Absatz des Originals, der ein Selbstreferat betreffend die Abhandlung „*Über die elliptischen Normalkurven n-ter Ordnung usw.*" enthielt, fortgelassen worden, da diese selbst als Nr. XC im vorliegenden Bande abgedruckt ist.]

25) Indem ich nämlich die „Kurven" der z_α, A_α in Betracht zog, ihre Ordnung bestimmte usw.

26) Wegen dieser Ausdrucksweise siehe mein „Ikosaederbuch" (Leipzig 1884), insbesondere S. 123—126 daselbst [oder Abh. LIV in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 395 ff.]

27) *Zur Transformation und Teilung der elliptischen Funktionen*, Berichte d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 1. Juni 1885; *Intorno alla risoluzione di certe equazioni modulari*, Rendiconti dell' Istituto Lombardo, ser. 2, vol. 28, fasc. 13 (1885).

Ich kann dieses Referat nicht schließen, ohne die Untersuchungen wenigstens genannt zu haben, welche Herr Hurwitz im Zusammenhange mit meinen eigenen Bestrebungen neuerdings ebenfalls in den Berichten der K. Sächs. Ges. d. Wiss. veröffentlicht hat[28]). Die Zwecke, welche Herr Hurwitz bei ihnen verfolgt, sind durch die Titel der Arbeiten hinreichend angedeutet. Ich möchte aber ausdrücklich auf die Methode aufmerksam machen, deren sich der Verf. zur Erreichung seiner Zielpunkte bedient, insofern dieselbe an sich hervorragendes Interesse beanspruchen dürfte. Dieselbe besteht darin, die *überall endlichen Integrale*, welche zur n-ten Stufe gehören, als Funktionen von ω wirklich aufzustellen und eingehend zu diskutieren.

Zum Schlusse will ich noch einer anderen Arbeit gedenken, die, aus meinen Seminarübungen hervorgegangen, allerdings nicht direkt die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, aber doch die eng verwandte Lehre von den Irrationalitäten der regulären Körper betrifft. In seiner Dissertation[29]) entwickelt Herr O. Fischer vielseitige Methoden, um das Elementardreieck des Ikosaeders auf die anderen von den Symmetriebögen derselben Konfiguration umgrenzten sphärischen Dreiecke konform abzubilden, was jedesmal mit Hilfe algebraischer Funktionen gelingen muß. Insbesondere ist es interessant, daß die algebraischen Funktionen in gewissen Fällen rational werden, wo dann die Bestimmung der Koeffizienten der rationalen Funktionen in ähnlicher Weise durch Hilfsmittel der Invariantentheorie abgekürzt werden kann, wie dies in der Theorie der Modulargleichungen in den oben besprochenen Fällen gelang.

Leipzig, den 17. September 1885.

---

[28]) Berichte vom 15. Dezember 1884: *Über Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante*, sowie Berichte vom 4. Mai 1885: *Über die Klassenzahlrelationen und Modularkorrespondenzen primzahliger Stufe*. [Vgl. die weiteren Zitate auf S. 175 des vorliegenden Bandes.]

[29]) *Konforme Abbildung sphärischer Dreiecke aufeinander mittels algebraischer Funktionen* (Leipzig 1885). [Von dieser Arbeit war bereits auf S. 317, 346, 582 des zweiten Bandes dieser Gesamtausgabe und auf S. 63 des vorliegenden Bandes die Rede.]

XCIII. Über die Komposition der binären quadratischen Formen.

[Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1893). Heft 2. Vorgelegt in der Sitzung vom 14. Januar 1893.]

Bekanntlich kann man nach Gauss jede positive binäre quadratische Form $(ax^2 + bxy + cy^2)$ [1]) geometrisch durch ein parallelogrammatisches Gitter interpretieren. Man konstruiere sich nämlich ein Parallelogramm, welches die Seitenlängen $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ und zwischen diesen eingeschlossen einen Winkel besitzt, dessen Kosinus gleich $\frac{b}{2\sqrt{ac}}$ ist; von diesem entsteht dann das Gitter durch allseitige Aneinanderreihung kongruenter Parallelogramme. Sei (x, y) derjenige Eckpunkt des Gitters, welcher nach x-maliger Durchlaufung der Seite $\sqrt{a}$ und y-maliger Durchlaufung der Seite $\sqrt{c}$ erreicht wird; derselbe hat dann vom Punkte $(0, 0)$ eine Entfernung, deren Quadrat gleich $ax^2 + bxy + cy^2$ ist; eben hierin besteht die Gaussische Interpretation von f, d. h. die Interpretation aller Werte, welche f für ganzzahlige Werte der x, y annehmen kann[2]). Des weiteren werden wir jetzt die Seiten unseres Gitters wegnehmen und einzig das System seiner Eckpunkte beibehalten. Dasselbe läßt sich dann, wie man weiß, auf unendlich viele Weisen parallelogrammatisch ordnen und vertritt dadurch nicht nur die ursprüngliche Form f, sondern ebensowohl alle mit ihr äquivalente Formen. Wir werden sagen dürfen, daß die ganze Klasse äquivalenter Formen durch das bezügliche *Punktgitter* repräsentiert sei. Endlich beziehen wir dieses Punktgitter noch auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt in den Gitterpunkt $(0, 0)$ fällt, während die Richtung seiner Achsen unter irgendwelchem Azimut φ gegen

---

[1]) In Übereinstimmung mit den Entwicklungen von Herrn Weber lasse ich hier die 2 beim xy weg und bezeichne $b^2 - 4ac$ nicht als Determinante, sondern als Diskriminante der Form.

[2]) [Siehe Gauss' Recension eines Buches von Seeber über ternäre quadratische Formen in den Göttingischen gelehrten Anzeigen vom Juli 1831, abgedruckt in Gauss' Werken, Bd. 2, S. 188ff. Vgl. ferner das Fragment: *Geometrische Seite der ternären Formen* in Bd. 2 von Gauss' Werken, S. 305ff.]

das Gitter orientiert sein mag. Die einzelnen Gitterpunkte stellen uns dann komplexe Zahlen der folgenden Gestalt dar:

$$e^{i\varphi}\cdot\left\{\sqrt{a}\cdot x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\cdot y\right\}.$$

Bis hier enthält unser Ansatz noch nichts Neues und unterscheidet sich nur dadurch von der gewöhnlichen Einführung komplexer [ganzer] Zahlen [in die Kompositionstheorie], daß wir durch Heranziehen der Irrationalität $\sqrt{a}$ und des beliebigen Azimuts $e^{i\varphi}$ aus dem Kreise der durch $\sqrt{b^2-4ac}$ unmittelbar gegebenen ganzen Zahlen heraustreten. Nun aber betrachte man die verschiedenen Klassen primitiver Formen, welche dieselbe Diskriminante besitzen, nebeneinander. Ich will deren Zahl mit h benennen und übrigens die Benennung Hauptform usw. auf die zugehörigen Punktgitter übertragen. Meine Behauptung ist, *daß man die h Gitter* (die alle vom Koordinatenanfangspunkte auslaufen mögen) *derart durch Wahl geeigneter Azimute φ gegen das Koordinatensystem orientieren kann, daß die Sätze von der Komposition der Formen unmittelbar geometrisch hervortreten.* Irgend zwei der durch unsere Gitter vorgestellten komplexen Zahlen ergeben nämlich (bei richtiger Lage der Gitter) miteinander multipliziert immer wieder einen Gitterpunkt, und zwar gehört der so entstehende Gitterpunkt gerade derjenigen Formenklasse an, welche aus den beiden Klassen, denen die anfänglichen Zahlen entnommen wurden, komponiert ist. — Insbesondere mögen wir dabei unsere Aufmerksamkeit auf das Hauptgitter richten. Dasselbe erhält bei unserer Anordnung eine symmetrische Lage gegen das Koordinatensystem; seine komplexen Zahlen sind also keine anderen, als diejenigen, die man ohnehin in der Theorie der quadratischen Körper von der Diskriminante (b^2-4ac) betrachtet. Für sie gewinnt denn die Lehre von der Zerlegung in ideale Faktoren ihre unmittelbare Bedeutung. *Die idealen Faktoren decken sich einfach mit den durch die Nebengitter vorgestellten komplexen Zahlen.*

Zum Beweise dieser Angaben sind nicht etwa neue Entwicklungen nötig, vielmehr genügt es, die Formeln, welche Dirichlet und Dedekind für die Theorie der Komposition gegeben haben, nach ihrer geometrischen Bedeutung aufzufassen. Trotzdem scheinen mir die vorstehenden Sätze nach mehreren Seiten einen Fortschritt vorzustellen. Ich will hier nur auf ihre Verwendung in der Theorie der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen hinweisen. Indem wir in der Ebene unserer h orientierten Gitter die Werte einer komplexen Variabelen w ausgebreitet denken, definiert uns jedes der Gitter eine besondere Klasse doppeltperiodischer Funktionen von w, d. h. ein besonderes elliptisches Gebilde. Die

„Moduln" dieser Gebilde sind selbstverständlich keine anderen, als diejenigen, die man nach Kronecker als die *singulären* Moduln der betreffenden Diskriminante bezeichnet. So oft wir jetzt w mit irgendeiner der durch die Gitterpunkte gegebenen komplexen Zahlen multiplizieren, werden nicht nur die Gitter selbst, sondern auch die zugehörigen elliptischen Gebilde der Kompositionstheorie entsprechend in wechselseitige Abhängigkeit gesetzt. Die Folge ist, daß wir anschauungsmäßig erkennen, was sonst nur in indirekter Weise abgeleitet zu werden pflegt, daß nämlich die Galoissche Gruppe der Gleichung der singulären Moduln mit der Gruppe der Komposition übereinstimmt. —

Wir mögen des weiteren fragen, ob sich unsere Theorie auf quadratische binäre Formen $ax^2+bxy+cy^2$ von positiver Determinante übertragen läßt. Die Antwort ist, daß dies in der Tat sofort gelingt, sobald wir nur erst für die einzelne derartige Form eine geometrische Interpretation haben, welche der Gaussischen Interpretation der positiven Formen durch das Parallelgitter analog ist. Dies aber erreichen wir sofort, wenn wir die bisher betrachteten Maßverhältnisse im Parallelgitter so auffassen, wie es die projektive Geometrie lehrt, nämlich als projektive Beziehungen zu den beiden auf der unendlich fernen Geraden gelegenen imaginären „Kreispunkten". *Alles, was wir jetzt ändern, ist, daß wir diese letzteren durch irgend zwei reelle Punkte der unendlich fernen Geraden ersetzen.* Man nehme etwa die beiden Punkte, welche auf letzterer von den Linien $x\pm y=0$ ausgeschnitten werden. Als „Entfernung" zweier Punkte (xy) und $(x'y')$ erscheint dann bekanntlich der Ausdruck

$$\sqrt{(x-x')^2-(y-y')^2},$$

als „Winkel" der Verbindungslinien mit O der

$$\arccos\frac{xx'-yy'}{\sqrt{x^2-y^2}\cdot\sqrt{x'^2-y'^2}}.$$

„Drehung" um O ist eine homogene lineare Transformation von x und y, bei welcher jeder Punkt der Ebene auf einer gleichseitigen Hyperbel fortschreitet, welche die Linien $x\pm y=0$ zu Asymptoten hat. „Parallellinien" aber sind genau so zu definieren, wie bei der gewöhnlichen Maßbestimmung, nämlich als Linien, die sich auf der unendlich fernen Geraden schneiden. — *Im Sinne der so geschilderten Maßbestimmung läßt sich nun jede indefinite Form f wieder durch ein von O auslaufendes parallelogrammatisches Gitter, jede Klasse äquivalenter f durch ein Punktgitter deuten.* Dabei bleibt die „Orientierung" des Gitters fürs erste natürlich noch unbestimmt. Die Existenz aber der unendlich vielen linearen Transformationen der indefiniten f in sich selbst findet ihr Gegenbild in dem Umstande, daß jedes solche Parallelgitter nach einer endlichen „Drehung“ um O immer wieder in sich selbst übergeht. — Auch diese Angaben sind nur neu, was die zugrunde gelegte Auffassung angeht. Denn in Wirklichkeit finden sich die Parallelgitter, von denen wir sprechen, bereits in Sellings berühmten Untersuchungen über indefinite Formen[3]) zugrunde gelegt. *Der Unterschied ist nur, daß die Figuren dort in keine direkte Beziehung zu einer verallgemeinerten Maßbestimmung gesetzt sind, und daß infolgedessen ihre unmittelbare Analogie zu den Gaussischen Parallelogrammnetzen nicht hervortritt.* Diese Analogie ist aber hier das Wesentliche. Denn erst mit ihr ist der Schlüssel zur geometrischen Behandlung der zugehörigen Kompositionstheorie gegeben. Die Sache wird dann übrigens so einfach, daß es nicht nötig scheint, hier auf dieselbe noch näher einzugehen.

Zum Schlusse darf ich noch eine Bemerkung über komponierbare Formen n-ten Grades machen. Bei ihnen wird man mit Parallelepipedsystemen des n-dimensionalen Raumes arbeiten müssen. Die geometrischen Methoden, deren sich Herr Minkowski neuerdings in seinen Untersuchungen über die Theorie der algebraischen ganzen Zahlen bedient[4]), ordnen sich hier als spezieller Fall ein[5]).

[3]) E. Selling: *Über die binären und ternären quadratischen Formen*, Crelles Journal, Bd. 77 (1873/74), S. 143—229, insbesondere S. 152 daselbst.

[4]) H. Minkowski: *Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen*, Crelles Journal, Bd. 107 (1891) [= Ges. mathematische Abhandlungen, Bd. 1, S. 243 ff.]

[5]) [Alle in dieser Note berührten Punkte sind ausführlich entwickelt in meiner autographierten Vorlesung von 1895/96 über „Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie“, über die das nachfolgend abgedruckte Referat Nr. XCIV berichtet. K.]

XCIV. Autographierte Vorlesungshefte.

[Math. Annalen, Bd. 48 (1896/97).]

Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie.

(Zweistündige Vorlesung im Winter 1895/96 und Sommer 1896.)[1])

Es hat einige Jahrzehnte lang die Tendenz vorgeherrscht, zahlentheoretische Probleme möglichst abstrakt für sich, losgelöst von allen Beziehungen zu anderen mathematischen Disziplinen zu betrachten. Ich werde das Verdienst einer derartigen Darstellung wie insbesondere die große Leistung der dabei beteiligten Forscher gewiß nicht verkennen, glaube aber, daß der Gegenstand für zahlreiche Mathematiker durch Heranziehen geometrischer Vorstellungen und der Zusammenhänge mit Nachbargebieten zugänglicher wird. In den von Fricke und mir herausgegebenen *Vorlesungen über elliptische Modulfunktionen*, auf die ich im folgenden vielfach zurückgreifen muß, ist in diesem Sinne die Theorie der binären quadratischen Formen bereits nach verschiedenen Richtungen hin behandelt worden. Inzwischen habe ich die dort gegebene Darstellung in einer Vorlesung, die sich zweistündig durch die beiden letzten Semester hindurchzog und über die hier berichtet werden soll, wesentlich vervollständigt. Von dieser Vorlesung soll wieder eine autographierte Ausarbeitung[1]) publiziert werden. Ich darf hier vorweg erwähnen, daß es mein besonderes Interesse war, für die *Theorie der singulären elliptischen Gebilde* eine möglichst einfache und durchsichtige Grundlegung zu geben. Insbesondere habe ich dabei Gelegenheit genommen, einen Gegenstand zur Darstellung zu bringen, der mir seit lange am Herzen lag, nämlich die Lehre von den zugehörigen singulären Werten der *Ikosaederirrationalität*. Übrigens zweifele ich nicht, daß sich die entwickelten geometrischen Methoden auch für höhere Gebiete der Zahlentheorie als nützlich erweisen sollen; es genüge, auf die mannigfachen Zusammenhänge hinzuweisen, welche dieselben mit den von Min-

[1]) [Die Ausarbeitung wurde hergestellt von A. Sommerfeld und Ph. Furtwängler (1896 und 1897). Ein zweiter, unveränderter Abdruck erschien 1907 (in Kommission bei B. G. Teubner).]

kowski in den bisher erschienenen Bogen[2]) seines vielversprechenden Werkes (Geometrie der Zahlen) gegebenen Ansätzen besitzen.

Teil I meiner Vorlesung beginnt gleich damit, dasjenige ebene geometrische Gebilde zu schildern, welches in der Folge den meisten Betrachtungen zugrunde liegt, das *Parallelgitter* [in der Ebene]. Es handelt sich einfach um zwei Scharen unter sich äquidistanter Parallelen. Den Inbegriff der Schnittpunkte der beiden Scharen bezeichne ich kurzweg als *Punktgitter*. Es ist das also die Gesamtheit der Punkte, welche in irgendeinem x, y-Systeme ganzzahlige Koordinaten haben. Ist das Punktgitter als solches (ohne die verbindenden Parallelgeraden) vorgelegt, so gibt es auch unendlich viele Koordinatensysteme, betreffend deren es diese Eigenschaft besitzt; es ist ein erster wichtiger Satz, daß man von einem ersten solchen Systeme zu jedem anderen durch die ganzzahligen linearen Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= \gamma x + \delta y \end{aligned}\right\}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

übergeht.

Die Figur dieser Punktgitter wird nun in erster Linie dazu gebraucht, um die *Theorie der gewöhnlichen numerischen Kettenbrüche* in geometrischer Form verständlich zu machen[3]). Sei ω der Einfachheit halber eine irrationale Größe, die wir in einen Kettenbruch entwickeln wollen. Wir setzen $\omega = \frac{x}{y}$ und haben damit eine gerade Linie, welche vom Koordinatenanfangspunkte aus zwei entgegengesetzte Quadranten des x, y-Systems durchschneidet, ohne irgendeinen Gitterpunkt weiter zu enthalten. Ich will meine Aufmerksamkeit hier nur auf den einen Quadranten richten und die beiden Teile, in welche derselbe durch unsere Gerade zerlegt wird, kurz als X-Sektor und Y-Sektor bezeichnen. Sei jetzt vermöge gewöhnlicher Kettenbruchentwicklung:

$$\omega = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 +} \, \frac{1}{\mu_3 + \ldots};$$

wir erhalten von da die Näherungspunkte:

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{0}{1}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{\mu_1}{1}, \ldots$$

allgemein:

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = \frac{\mu_\nu \cdot p_{\nu-1} + p_{\nu-2}}{\mu_\nu \cdot q_{\nu-1} + q_{\nu-2}}.$$

---

[2]) [Diese wurden zusammen mit einem nachgelassenen Bogen von Hilbert und Speiser im Jahre 1910 unter dem Titel „*Geometrie der Zahlen*“ als Buch herausgegeben.]

[3]) [Vgl. hierzu die bereits in Bd. 2 dieser Gesamtausgabe als Nr. XLIV abgedruckte Note: *Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung*, Göttinger Nachrichten 1895.]

Hier sind die p_ν, q_ν teilerfremde ganze Zahlen, die ich so im Vorzeichen fixieren will, daß der „Näherungspunkt“ $(x, y) = (p_\nu, q_\nu)$ dem von uns ausgewählten Quadranten angehört. Die Frage wird sein, *welches das geometrische Gesetz dieser Näherungspunkte ist*, bez. *wie in der Reihenfolge dieser Punkte die Zahlen μ_ν hervortreten*. Hierauf kommt nun folgende einfache Antwort: Man denke sich die ganzzahligen Punkte (Gitterpunkte) zunächst des X-Sektors, dann des Y-Sektors, durch kleine Stifte markiert, und schlinge um das Ganze einen Faden, den man anzieht. Der Faden wird zunächst längs des begrenzten Teils der X-Achse (bez. der Y-Achse) herlaufen und dann in einen Polygonzug übergehen, welcher sich der Linie ω asymptotisch nähert. *Die Näherungspunkte (p_ν, q_ν) der Kettenbruchentwicklung sind nun nichts anderes als die Ecken dieses Polygonzuges, mit der Maßgabe, daß (p_{-1}, q_{-1}), (p_1, q_1), (p_3, q_3), ... dem Y-Sektor, (p_0, q_0), (p_2, q_2), ... dem X-Sektor angehören.* Man betrachte ferner die einzelne Polygonseite, welche $(p_{\nu-2}, q_{\nu-2})$ mit (p_ν, q_ν) verbindet. *Dieselbe ist parallel der Strecke, welche von 0 nach $(p_{\nu-1}, q_{\nu-1})$ führt und μ_ν-mal so lang; sie enthält also $(\mu_\nu - 1)$ Gitterpunkte in ihrem Inneren.* Hierin liegt unmittelbar die geometrische Bedeutung der μ_ν. Ich habe von da aus in meiner Vorlesung alle Einzelheiten der gewöhnlichen Kettenbruchtheorie abgeleitet und zum Teil noch vervollständigt.

So weit sind die Maßverhältnisse des Parallelgitters noch gar nicht in Betracht gekommen. Vielmehr handelte es sich um Beziehungen, die bei beliebigen *affinen* Umformungen des Gitters ungeändert bestehen bleiben; wir stehen, um es kurz zu sagen, auf dem Standpunkte der *affinen* Geometrie. Jetzt erst wenden wir uns den Betrachtungen der Maßverhältnisse zu. Aber wir tun dies in der freien Weise, daß wir ganz willkürlich eine quadratische Form geben:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

und nun die Entfernung zweier Punkte (x, y), (x', y') *durch*

$$\sqrt{f(x - x', y - y')}$$

definieren. Wir erreichen dadurch, daß wir unabhängig von dem Vorzeichen der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ eine gleichförmige geometrische Ausdrucksweise gewinnen. Wir können geradezu sagen, *daß die Theorie einer beliebigen binären quadratischen Form in der zu ihr gehörigen Maßgeometrie unseres Gitters enthalten ist.* Insbesondere berechnen wir für das Elementarparallelogramm als Seitenlänge $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ und als Kosinus des eingeschlossenen Winkels $\frac{b}{2\sqrt{ac}}$. Ist $D < 0$, so sind die beiden „Minimalrichtungen“ $f(x, y) = 0$ imaginär. Wir können dann das Gitter so wählen, daß diese beiden Richtungen nach den gewöhnlichen Kreispunkten hinweisen. Nehmen wir überdies unsere Form als positiv, so koinzidiert unsere Maßbestimmung mit derjenigen der elementaren Geometrie; wir haben so für definite $f(x, y)$ genau die von Gauss angegebene Deutung[4]. Der Vorzug unserer Auffassung aber ist der, daß wir ebensowohl für positives D eine durchaus anschauliche Deutung des f haben, sofern wir uns nur die Mühe nehmen, uns in die betreffende Maßbestimmung mit ihren reellen Minimalrichtungen hineinzudenken. Die Gaussische Deutung der definiten Formen $f(x, y)$ ist bekanntlich von Dirichlet zu einer einfachen Ableitung der Reduktionstheorie dieser Formen benutzt worden[5]. Ich habe daher in meiner Vorlesung mein Hauptinteresse darauf verwandt, nachzuweisen, *daß die scheinbar ganz anders geartete Theorie der Reduktion der indefiniten quadratischen Formen in unserer verallgemeinerten Maßbestimmung eine durchaus entsprechende geometrische Interpretation findet*[6].

[4]) [Vgl. das Zitat in Fußnote [2]) auf S. 283 des vorliegenden Bandes.]

[5]) [*Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen*, Monatsber. der K. Preuß. Akademie der Wissenschaften (1848) (= Werke, Bd. 2, S. 23 ff.). Unter dem gleichen Titel ein zweiter, ausführlicherer Aufsatz in Crelles Journal, Bd. 40 (1850) (= Werke, Bd. 2, S. 29 ff.). In der letzten Arbeit werden auch die binären Formen eingehend behandelt.]

[6]) Vielleicht ist es manchem Leser erwünscht, wenn ich hier folgende Bemerkung einschalte. Die im Text gemeinte Interpretation der Formen $f(x, y)$ ist im Grunde ganz trivial und besteht einfach darin, die Variablen x, y als Parallelkoordinaten in der Ebene zu deuten und danach f als eine Funktion des Ortes aufzufassen, — die Gitterfigur kommt erst dadurch herein, daß wir uns, was an sich nicht nötig wäre, auf ganzzahlige Werte der Variablen beschränken. Die linearen Substitutionen der x, y decken sich dabei mit denjenigen affinen Transformationen der Ebene, welche den Anfangspunkt festlassen; alle Eigenschaften der Formen also, welche gegenüber linearen Substitutionen der x, y invariant sind, verwandeln sich in Beziehungen der affinen Geometrie. Statt dessen findet man in den Werken über Invariantentheorie fast ausschließlich die *projektive* Interpretation der binären Formen entwickelt, welche nur den *Quotienten* $\frac{x}{y}$ geometrisch deutet, nämlich als Koordinate auf der geraden Linie oder im Strahlbüschel, wobei man dann von vornherein darauf angewiesen ist, nicht die Form f selbst, sondern nur die *Gleichung* $f = 0$ geometrisch zu interpretieren. Die hierbei hervortretenden Verhältnisse haben natürlich an sich ihr großes und berechtigtes Interesse, und werden dementsprechend auch in meiner Vorlesung bei Gelegenheit herangezogen, — als geometrische Deutung der invariantentheoretischen Beziehungen aber ist die Methode wesentlich unvollkommen. Daß sie solche universelle Geltung hat erlangen können, wie es tatsächlich der Fall ist, ist nur historisch zu verstehen, aus dem Umstande, daß sich die Invariantentheorie ursprünglich in Anlehnung an die entwickelt vorliegende projektive Geometrie ausgebildet hat. Alles dieses ist so selbstverständlich, daß ich darüber keine Worte verlieren würde, wenn ich nicht aus eigener Erfahrung wüßte, wie hemmend eine ausschließlich projektive Gewöhnung (wie überhaupt jede einseitige Gewöhnung) werden kann. Beispielsweise bin ich selbst nur durch diese Gewöhnung bis in die letzten Jahre gehindert worden, die Kompositionstheorie der quadratischen binären Formen geometrisch zu verstehen, während doch die Sache selbst, wie im Texte dargelegt ist, ganz einfach und natürlich zustande kommt.

Betrachten wir in dieser Hinsicht zunächst die gewöhnlichen *Automorphien* von f, d. h. diejenigen linearen ganzzahligen Substitutionen $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ von der Determinante $+1$, welche nicht nur f selbst, sondern auch die einzelnen Wurzeln von $f = 0$ in sich überführen. Damit solche Automorphien existieren, müssen natürlich die Koeffizienten von f kommensurabel sein; ich schließe mich der üblichen Darstellung an, indem ich sie von vornherein ganzzahlig und ohne gemeinsamen Teiler nehme. Es handelt sich dann zunächst um den Satz, daß die [sogenannte] Pellsche Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 4$$

bei positivem D unendlich viele positive Lösungen hat, die sich aus der sogenannten kleinsten Lösung t_0, u_0 vermöge der Formel

$$\frac{t + \sqrt{D} \cdot u}{2} = \left(\frac{t_0 + \sqrt{D} \cdot u_0}{2}\right)^{\nu}$$

zusammensetzen. Von da aus erhält man die in Rede stehenden Automorphien, indem man f irgendwie in zwei Linearformen spaltet:

$$f = \xi \cdot \eta, \text{ wo } \left\{ \begin{aligned} \xi &= \sqrt{a} \cdot x + \frac{b + \sqrt{D}}{2\sqrt{a}} \cdot y \\ \eta &= \sqrt{a} \cdot x + \frac{b - \sqrt{D}}{2\sqrt{a}} \cdot y \end{aligned} \right\},$$

und nun diese Linearfaktoren beliebig oft mit $\frac{t \pm \sqrt{D} \cdot u}{2}$ multipliziert:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \left(\frac{t_0 + \sqrt{D} \cdot u_0}{2}\right)^{\nu} \cdot \xi \\ \eta' &= \left(\frac{t_0 - \sqrt{D} \cdot u_0}{2}\right)^{\nu} \cdot \eta \end{aligned} \right\}.$$

Was bedeuten diese Automorphien geometrisch? Wir haben zunächst den Übergang von den x, y zu den ξ, η; derselbe besagt, daß wir statt der beliebigen Parallelkoordinaten *Minimalkoordinaten* einführen, d. h. die beiden geraden Linien $f = 0$ als neue Koordinatenachsen wählen sollen. Jede Formel

$$\xi' = m\xi, \quad \eta' = \frac{1}{m}\eta$$

wird nun geometrisch eine *Drehung* um den Koordinatenanfangspunkt vorstellen, d. h. eine Drehung im Sinne unserer durch $\sqrt{f}$ gegebenen Maßbestimmung. Der Drehwinkel berechnet sich dabei nach bekannten Grundsätzen[6a]) als $\frac{i}{2} \log DV$, wo DV das Doppelverhältnis der vier Strahlen

$$\frac{\xi}{\eta} = \infty, \ 0, \ \frac{\xi}{\eta}, \ \frac{\xi'}{\eta'},$$

also m^2 ist.

[6a]) Vgl. meine in Bd. 1 dieser Ausgabe abgedruckten Arbeiten über nichteuklidische Geometrie. K.]

Offenbar handelt es sich bei dem zahlentheoretischen Ansatz um diejenigen Drehungen dieser Art, welche unser Gitter mit sich selbst zur Deckung bringen. Und die Theorie sagt, daß es unendlich viele solcher Drehungen gibt, die sich alle aus einer kleinsten Drehung durch beliebige (positive oder negative) Wiederholung ergeben. Der Satz ist, wenn erst die Existenz einer kleinsten Drehung zugegeben wird, geometrisch evident. *Der Winkel dieser kleinsten Drehung aber* (den ich schlechtweg den Pellschen Winkel nenne) *hat den Betrag* $i \log \frac{t_0 + u_0 \sqrt{D}}{2}$. Da wird nun deutlich, weshalb dieser letztere Ausdruck in der Theorie der indefiniten quadratischen Formen genau da eintritt, wo in der Theorie der definiten Formen π $\left(\text{oder unter Umständen } \frac{\pi}{2} \text{ oder } \frac{\pi}{3}\right)$ steht. Denn dieses π $\left(\text{oder } \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ ist gerade auch der kleinste Winkel, um den man ein definites Gitter (wie ich der Kürze halber sagen will) drehen muß, damit es zum ersten Male mit sich selbst zur Deckung kommt.

Wir werden weiter fragen, weshalb diese Theorie in der bekannten engen Beziehung zur Kettenbruchentwicklung der beiden Wurzeln ω', ω'' steht, welche die Gleichung $f(x, y) = 0$ für den Quotienten $\frac{x}{y}$ ergibt. Wir konstruieren uns die beiden geraden Linien $\frac{x}{y} = \omega'$, $\frac{x}{y} = \omega''$, — deren jede durch O in zwei Halbgerade zerlegt wird —, und umgeben jede dieser vier Halbgeraden nach der oben geschilderten Regel mit zwei Kettenbruchpolygonen. Andererseits will ich gewisse vom Koordinatensystem unabhängige Polygone bilden, welche ich die zu ω', ω'' gehörigen *natürlichen Umrißpolygone* nenne. Nämlich: die ganzzahligen Punkte x, y werden durch die beiden Geraden ω', ω'' auf vier Sektoren verteilt, und nun will ich wieder die ganzzahligen Punkte des einzelnen so entstehenden Sektors, nachdem ich sie durch kleine Stifte bezeichnet habe, mit einem Faden umschlingen und diesen Faden straff ziehen. Es entstehen so vier Polygone, welche nach Art eines Hyperbelastes ein jedes asymptotisch zu zweien unserer Halbgeraden beiderseitig ins Unendliche laufen; die Polygone gehören paarweise als „Scheitelpolygone" zusammen. Daß diese natürlichen Umrißpolygone bei den Pellschen Drehungen mit sich selbst zur Deckung kommen, ist a priori klar, denn sie sind durch $f = 0$ eindeutig bestimmt. Man könnte sagen: es sind *semireguläre* Polygone, denn sie müssen nach einer gewissen Periode immer wieder [im Sinne unserer Maßbestimmung] dieselben Seitenlängen und Seitenwinkel darbieten. Die ganze Theorie der Kettenbruchentwicklungen von ω', ω'' kommt nun einfach darauf hinaus, daß die acht Kettenbruchpolygone, welche wir vorab nannten, *in ihrem asymptotischen Verlauf notwendig in diese natürlichen Umrißpolygone*

einmünden. Dies ist geometrisch evident, und insbesondere erkennt man auch, wie viele verschiedene Fälle in dieser Hinsicht je nach der Lage der X- und Y-Achse zu den Linien ω', ω'' zu unterscheiden sind. Ich habe dies in meiner Vorlesung genau ausgeführt und namentlich auch entwickelt, daß sich auf Grund der erhaltenen Figuren die Gaussische Theorie der Reduktion von f nunmehr ganz von selbst ergibt[7]). In einer vorläufigen Mitteilung, welche ich über diesen Gegenstand im vorigen Herbst vor der Lübecker Naturforscherversammlung gegeben habe[8]), habe ich gleich auf Verallgemeinerungen hingewiesen, welche das geschilderte Verfahren im dreidimensionalen Raume findet. Die Sache ist folgende:

Ich nehme das Gitter aller ganzzahligen Punkte x, y, z, und zwar $F(x, y, z)$ einmal als indefinite quadratische ternäre Form, das andere Mal als eine in drei reelle lineare Faktoren zerlegbare kubische ternäre Form. Wir haben dann in $F = 0$ das eine Mal einen reellen Kegel zweiten Grades, das andere Mal drei reelle Ebenen. Jede der beiden Kegelhälften umschließt ein unendliches Aggregat ganzzahliger Punkte, ebenso jeder der acht von den drei Ebenen gebildeten Oktanten. Mein Vorschlag ist nun der, daß man die Reduktionstheorie der genannten ternären Formen an die *ebenflächigen Umrißpolyeder* knüpfen soll, welche diese Aggregate ganzzahliger Punkte darbieten. Leider ist dieser Vorschlag bisher noch nicht zur Ausführung gelangt, insbesondere hat Herr Furtwängler in seiner damals in Aussicht gestellten, inzwischen erschienenen Dissertation[9]) die Reduktion der kubischen ternären zerlegbaren Formen doch nicht an die bezeichneten Umrißpolyeder, sondern an die Hermitesche Methode der „réduction continuelle" angeknüpft (wie dies betr. quadratische indefinite binäre Formen in den „Modulfunktionen" geschehen ist).

[7]) [Mit den meinigen ganz verwandte Betrachtungen stellte schon im Jahre 1880 H. Poincaré in seiner Arbeit: *Sur un mode nouveau de réprésentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies* (Journal de l'École polytechnique, 47ième cahier) an. Auch er nimmt die Gittervorstellung zum Ausgangspunkt und benutzt, ohne es hervorzuheben, die Nicht-Euklidische Maßbestimmung, indem er als „module" und „argument" die Größen $\sqrt{x^2 - Dy^2}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{-D}} \cdot \operatorname{arctang} \frac{y}{x} \sqrt{-D}$ einführt und geometrisch deutet. Auch die Reduktion mit Hilfe der Umrißpolygone steht bei ihm, der Sache nach, in allen Stücken; jedoch die wegen ihrer Anschaulichkeit so suggestive Formulierung mit dem um die Stifte geschlagenen Faden fehlt. Die Komposition der Formen, bzw. die Idealmultiplikation, behandelt er gleichfalls in geometrischem Gewande, ohne jedoch die h Gitter zu orientieren, wie ich es tue. K.]

[8]) Vgl. auch meine Mitteilung in den Göttinger Nachrichten vom Herbst 1895, [= Nr. XLIV in Bd. 2 dieser Ausgabe], sowie eine Übersetzung dieser Mitteilung in den Nouvelles Annales von 1896.

[9]) Göttingen 1896: *Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären kubischen Formen.*

Betreffs des weiteren Inhaltes des ersten Teils meiner Vorlesung wünsche ich noch folgendes anzuführen:

Nachdem die Reduktionstheorie für die einzelne binäre quadratische Form durchgeführt ist, handelt es sich darum, die Stellung der reduzierten Formen innerhalb der Gesamtheit darzulegen. Dies ist zur Zeit in den „Modulfunktionen" in der Weise geschehen, daß man die Wurzeln der Gleichung $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ einführte und in der komplexen Ebene interpretierte. Inzwischen habe ich schon damals darauf hingewiesen, daß man die entstehenden Kreisbogenfiguren zweckmäßigerweise durch geradlinige ersetzen kann[10]). Man erhält die letzteren unmittelbar, indem man die Verhältnisse $a:b:c$ als trimetrische Koordinaten in der Ebene deutet[11]). Die „definiten" Formen füllen dann mit ihren Bildpunkten das Innere des „Diskriminantenkegelschnitts" $b^2 - 4ac = 0$ aus, die indefiniten das Äußere. Dabei zerlegt sich das Innere, den Substitutionen $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ entsprechend, in unendlich viele äquivalente Dreiecke, deren eines die reduzierten Formen repräsentiert. Die Reduktionstheorie der indefiniten Formen aber wird dadurch zugänglich, daß man — entsprechend dem Grundgedanken von Hermites réduction continuelle — dem außerhalb des Kegelschnitts gelegenen Punkte seine *Polarsehne* zuordnet (d. h. denjenigen Teil seiner Polare, welche im Kegelschnittinneren liegt), und nun zusieht, wie diese Polarsehne die Dreiecksteilung des Inneren durchzieht[12]). Diese Verhältnisse sind noch letzthin von Herrn Hurwitz ausführlich dargelegt worden (Math. Annalen Bd. 44 (1894), sowie Mathematical Papers presented to the Chicago Congress (1893), erschienen 1896). Insbesondere hat derselbe dort die Gausssche Reduktion der indefiniten Formen in sehr eleganter Weise an die Betrachtung der Polarsehne geknüpft; es kommt einfach darauf an, zuzusehen, wie diese Polarsehne die Symmetrie*linien* der Dreiecksteilung durchsetzt (während die Hermitesche Reduktionstheorie, die der geometrischen Erläuterung der „Modulfunktionen" zugrunde liegt, die Dreiecks*flächen* in Betracht nimmt, durch welche die Polarsehne hindurchläuft). Ich habe in meiner Vorlesung die Hurwitzschen Entwicklungen mit einigen Modifikationen reproduziert und insbesondere hervorgehoben, wie dieselben Schritt für Schritt mit den früher dargelegten am Gitter operierenden Reduktionsbetrachtungen parallel

[10]) [Die geradlinige Figur aus Bd. 1 der „Modulfunktionen", S. 239, ist in Bd. 1 der vorliegenden Ausgabe, S. 379 wiedergegeben.]

[11]) Dies reicht hier aus; aber natürlich erhält man entsprechend der Anmerkung [6]) auf S. 290 eine vollständigere Interpretation, wenn man den dreidimensionalen Raum heranzieht und hier die a, b, c selbst als Punktkoordinaten interpretiert.

[12]) [Vgl. hierzu, was in den Vorbemerkungen auf S. 7, 8 über die Arbeiten von H. J. S. Smith gesagt ist, der analoge Untersuchungen in der ω-Halbebene durchführt. K.]

laufen. Ich betone dann insbesondere noch das unterschiedliche Verhalten der Gruppe $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ im Inneren des Diskriminantenkegelschnitts und außerhalb desselben. Während die Gruppe im Inneren eigentlich diskontinuierlich ist und dementsprechend das Innere in wohldefinierte Diskontinuitätsbereiche von endlicher Ausdehnung zerlegt (die Dreiecke der wiederholt genannten Einteilung), ist sie im Bereiche $b^2 - 4ac > 0$ uneigentlich diskontinuierlich, und es erscheint ganz unmöglich, sich hier eine Gesamtheit von Punkten anschaulich vorzustellen, welche aus jeder Klasse äquivalenter Punkte nur je einen enthielte. Die Theorie der automorphen Funktionen hat ja für das gleiche Vorkommnis längst sehr viel mannigfachere Beispiele geliefert. Trotzdem wollte ich hier — auch im Referate — nicht unterlassen, ausdrücklich auf dasselbe hinzuweisen. Denn es gibt meines Erachtens keine Tatsache, die so sehr zum Nachdenken über das Wesen der räumlichen Kontinuität anregt, als dieses verschiedenartige Verhalten ein und derselben Gruppe in verschiedenen Gebieten.

Zum Schlusse gebe ich noch eine Einleitung in diejenigen Gebiete der Theorie der elliptischen Funktionen, bez. Modulfunktionen, welche in der Folge benutzt werden sollen.

Der Übergang zu den elliptischen Funktionen geschieht am unmittelbarsten von der Figur des Parallelgitters aus. Man hat dabei eine quadratische Form $f(x, y)$ von *negativer* Diskriminante zugrunde zu legen. Wir konstruieren das zugehörige Parallelgitter am besten gleich (in Gaussischer Weise) so, daß $\sqrt{f(x, y)}$ die Entfernung von O im elementaren Sinne bezeichnet. Es genügt jetzt, die Ebene x, y in gewöhnlicher Weise als Ebene einer komplexen Variablen $(x + iy)$ aufzufassen: unser Parallelgitter legt dann ohne weiteres einen Inbegriff doppeltperiodischer Funktionen von $(x + iy)$, d. h. ein elliptisches Gebilde fest. Sind ω_1, ω_2 die dem Gitterparallelogramm entsprechenden Perioden des Gebildes, so ist rückwärts unsere quadratische Form $f(x, y)$ nichts anderes als die *Norm* $(\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$. Die Invarianten erster Stufe des elliptischen Gebildes, also g_2, g_3, Δ, ferner $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ oder $j = 1728\,J$ [nach der Bezeichnung von Weber], die von der besonderen Auswahl der Perioden ω_1, ω_2 unabhängig sind, erscheinen hier unmittelbar als *analytische Invarianten* des zum Parallelgitter gehörigen Punktgitters, d. h. als Invarianten der ganzen Formen*klasse*, welcher f zugehört. Eben deshalb tritt die Dreiecksfigur, mit deren Hilfe wir uns in der Ebene $a:b:c$ eine Übersicht über die Äquivalenzverhältnisse der definiten Formen verschafften, in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen grundlegend hervor. Die ausführliche Darstellung, welche hiervon in den „Modulfunktionen" gegeben ist, benutzt durchweg die Kreisbogendreiecke der ω-Ebene; es wäre die Frage, ob man nicht auch bei funktionentheoretischen Untersuchungen sich gewöhnen soll, direkt mit der geradlinigen Figur zu arbeiten.

Natürlich gibt die so gewonnene Beziehung zwischen elliptischen Funktionen und quadratischen Formen nach beiden Seiten hin den Anstoß zu ferneren Entwicklungen.

Ich erinnere in meiner Vorlesung insbesondere daran, daß nach den in den „Modulfunktionen" dargelegten Grundsätzen die vorgenannten Invarianten (oder Moduln) der *ersten* Stufe (welche bei allen unimodularen Substitutionen $\left|\begin{smallmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\right|$ ungeändert bleiben) den Anfang einer unbegrenzten Reihe von Invarianten *höherer* Stufe bilden, nämlich solcher Invarianten, welche nur bei denjenigen Substitutionen $\left|\begin{smallmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\right|$ unverändert bleiben, die in bezug auf eine bestimmte Zahl q geeigneten Kongruenzbedingungen genügen. Als Beispiel für Moduln höherer Stufe benutze ich dabei mit Vorliebe die *Ikosaederirrationalität* $\zeta(\omega)$, also den sogenannten Hauptmodul fünfter Stufe.

Die Sache ist nun die, daß diese Stufeneinteilung sich auf die Theorie der quadratischen Formen überträgt, indem man bei ihnen nicht nach Äquivalenz schlechthin, sondern nur nach *relativer* Äquivalenz fragt, d. h. nach Äquivalenz vermöge solcher $\left|\begin{smallmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\right|$, welche in bezug auf eine Zahl q den angedeuteten Kongruenzbedingungen genügen. Eine Erledigung findet das Problem der relativen Äquivalenz jeweils durch Betrachtung des *Fundamentalpolygons*, welche der gewählten Kongruenzgruppe innerhalb der zur Gesamtgruppe $\left|\begin{smallmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\right|$ gehörigen Dreiecksteilung entspricht[13]).

Von der anderen Seite, d. h. von seiten der Zahlentheorie, stammt das besondere Interesse für *ganzzahlige* quadratische Formen $ax^2+bxy+cy^2$, wobei man diejenigen Formen resp. Formenklassen, welche zu der nämlichen Diskriminante $D=b^2-4ac$ gehören, zweckmäßigerweise zusammenordnet und nebeneinander betrachtet. Was bedeutet diese Einschränkung für die Theorie der elliptischen Funktionen? Wir bezeichnen die betreffenden elliptischen Gebilde [nach Kronecker] als *singuläre* elliptische Gebilde, und es war der Hauptzielpunkt des zweiten Teils der vorliegenden Vorlesung, darzulegen, welche Bewandtnis es mit diesen besonderen elliptischen Gebilden hat. In dieser Weise also kommen wir hier zu demjenigen Gebiete,

[13]) Die „relative" Äquivalenz kommt in eingeschränktem Sinne auch in den Arbeiten von Kronecker vor; was nämlich Kronecker *vollständige* Äquivalenz zweier binärer quadratischen Formen nennt, ist relative Äquivalenz modulo der Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe. [Vgl. Kroneckers Aufsatz: *Über bilineare Formen mit vier Variablen*, Sitzungsber. d. K. Preuß. Akademie der Wissenschaften (1883) (vorgetragen bereits 1866), abgedruckt in Kroneckers Werken, Bd. 2, S. 424ff].

welches man gemeinhin als die Lehre von der *komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen* bezeichnet.

Schließlich dürfen wir wohl nicht unterlassen, hervorzuheben, wie merkwürdig es ist, daß sich die funktionentheoretischen Beziehungen, von denen wir reden, nur an die Formen negativer Diskriminanten anknüpfen, trotzdem die Formen positiver Diskriminanten zahlentheoretisch ebenso zugänglich sind, wie die anderen, und die Unterschiede ihrer Theorie nach der eben gegebenen Auseinandersetzung den gegensätzlichen Charakter verlieren, den sie zunächst zu besitzen scheinen. Wird hier dasselbe Mittel seine Kraft bewähren, welches Jacobi in der Theorie der Abelschen Funktionen benutzt, indem er Verhältnisse, die im Gebiete einer einzelnen Variablen undurchsichtig scheinen, dadurch zu voller Klarheit erhob, daß er sie als Projektionen mehrdimensionaler Beziehungen auffassen lehrte?

Der *zweite* Teil meiner Vorlesung beginnt mit denjenigen Transformationen der Gitter, welche durch lineare Substitutionen *höherer Ordnung*,

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax+by \\ y' &= cx+dy \end{aligned}\right\} \quad ad-bc=n$$

dargestellt sind. Durch jede solche Transformation wird einem gegebenen Gitter ein großmaschigeres Gitter „eingelagert", umgekehrt wird auf diese Weise jedes eingelagerte Gitter gewonnen. Sieht man von den Parallelstäben der Gitter ab, achtet also nur auf die Punktgitter, so gibt es für vorgeschriebenes n eine wohlbekannte endliche Zahl eingelagerter Gitter (wobei noch zu unterscheiden ist, ob man die Koeffizienten a, b, c, d als teilerfremd voraussetzen will oder nicht). — Diese Theorie gewinnt ihre besondere Bedeutung für die ganzzahligen quadratischen Formen bez. die zu ihnen gehörigen Gitter; sie gibt nämlich die Grundlage einer *rationellen Klassifikation* dieser Formen. Man bemerke vorab, daß die zu einer solchen Form gehörige Diskriminante $D=b^2-4ac$ entweder $\equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod{4}$ ist, und daß umgekehrt jede Zahl D, welche eine dieser Kongruenzen modulo 4 befriedigt, als Diskriminante einer ganzzahligen quadratischen Form angesehen werden kann. Man teile nun die Diskriminanten in Stammdiskriminanten d — das sind solche, die keinen quadratischen Faktor enthalten, nach dessen Abtrennung sie noch Diskriminanten bleiben — und in die zugehörigen Zweigdiskriminanten $D=n^2d$. Sei ferner h die Zahl der zur Stammdiskriminante d gehörigen Klassen quadratischer Formen resp. Punktgitter. Ein jedes dieser „Stammgitter" enthält dann vermöge Transformation n-ter Ordnung eine gewisse Anzahl „Zweiggitter" der Diskriminante n^2d, und mit diesen den h Stammgittern eingelagerten Gittern sind die Gitter, welche zur Diskriminante n^2d

gehören, überhaupt erschöpft. Das Resultat ist also, daß die betreffenden Gitter sich nach den Werten der Stammdiskriminante d zusammengruppieren.

Auf die Theorie der elliptischen Funktionen übertragen ergibt unser obiger Ansatz in bekannter Weise die Lehre von den Transformationen höherer Ordnung. Ich begründe in der von den „Modulfunktionen" her bekannten Weise[14]) die Existenz von algebraischen Transformationsgleichungen zunächst für die Invarianten erster Stufe, dann auch für diejenigen höherer Stufe, insbesondere die Ikosaederirrationalität. Bei der ersten Stufe haben wir erstlich die Gleichungen $F(j', j) = 0$, welche das gegebene j und das transformierte j (das wir j' nennen) verbinden, andererseits die Multiplikatorgleichung $\Phi(M, j) = 0$, wo $M = n\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}}$. Auf die Modulargleichungen des Ikosaeders komme ich noch später zurück. — Die besondere Betrachtung der singulären elliptischen Gebilde aber wird noch hinausgeschoben, weil erst noch bestimmte wichtige arithmetische Untersuchungen vorauszuschicken sind.

Wir können dieselben vielleicht folgendermaßen am kürzesten bezeichnen:

Wenn schon bislang an Stelle der quadratischen Formen immer mehr die zugehörigen Gitter getreten sind, so gilt es jetzt *mit den Gitterpunkten, oder vielmehr den Minimalkoordinaten* (ξ, η) *der Gitterpunkte* (vgl. oben S. 291) *zu rechnen.* Der einfacheren Exposition halber beschränken wir uns dabei zunächst auf Stammdiskriminanten d und denken uns übrigens für jede der h zugehörigen Klassen eine repräsentierende Form $ax^2 + bxy + cy^2$ gewählt. Die zugehörigen „Gitterzahlen" werden dann folgende sein:

$$\begin{cases} \xi = \varrho\left(\sqrt{a}\cdot x + \dfrac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\cdot y\right), \\ \eta = \dfrac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\cdot x + \dfrac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\cdot y\right), \end{cases}$$

wo ϱ ein vorläufig noch unbestimmter Faktor ist, den wir im Falle eines positiven d reell, im Falle eines negativen d komplex vom absoluten Betrage 1 wählen. Ich bezeichne dieses ϱ als den *Azimutalfaktor* des Gitters, weil $i \log \varrho$ ersichtlich der Winkel ist, den die von O nach $x = 1$, $y = 0$ laufende Gerade mit der Geraden $\xi - \eta = 0$ bildet. Über „Addition" zweier Gitterpunkte brauchen wir kaum eine Festsetzung zu treffen; wir verstehen darunter den Übergang von den beiden Punkten (ξ, η) und (ξ', η') zum Punkte $(\xi + \xi', \eta + \eta')$. Ersichtlich dürfen nur solche Punkte addiert werden, welche demselben Gitter angehören; anderenfalls würden wir über

[14]) D. h. durch unmittelbare funktionentheoretische Betrachtung in der ω-Ebene, also ohne die sonst übliche Voranstellung der Teilungsgleichung.

die h Gitter, auf deren Punkte wir uns doch beschränken wollen, hinausgeführt. Dagegen werden wir zwei Punkte (ξ, η) und (ξ', η') miteinander „multiplizieren", mögen sie demselben Gitter oder verschiedenen Gittern angehören; wir verstehen darunter den Übergang zum Punkte $(\xi\xi', \eta\eta')$. *Unsere Absicht wird sein, die Azimutalfaktoren der h Gitter so auszuwählen, daß die Multiplikation innerhalb des Gebietes unserer h Gitter unbeschränkt ausführbar wird (ohne irgend über dasselbe hinauszuführen).*

Zu dem Zwecke beginne man mit Überlegungen, die von der Auswahl der ϱ noch unabhängig sind. Man lasse bei beliebiger Annahme des ϱ bez. des ϱ', (ξ, η) alle Punkte eines Gitters G, (ξ', η') alle Punkte eines Gitters G' durchlaufen und bilde nicht nur alle Produkte $\xi\xi'$, $\eta\eta'$, sondern auch die Summe aller solcher Produkte $\sum\xi\xi'$, $\sum\eta\eta'$. *Die so erhaltenen Punkte werden dann geradezu ein drittes zur Diskriminante d gehöriges Gitter, G'', ausmachen* (dessen Azimut natürlich davon abhängt, wie man gerade die Azimute von G und G' gewählt hat). Wir schreiben symbolisch:

$$G \cdot G' = G''$$

und haben damit, was ich als *Komposition der Gitter* bezeichne. Die sogenannte „Komposition der Formen" ist davon nur ein Korollar.

Dem Prozeß der Komposition zufolge bilden die Gitter G, G', ... eine *Gruppe vertauschbarer Elemente.* Als „Einheit" erscheint dabei das *Hauptgitter,* als dessen repräsentierende Form wir je nach dem Verhalten von d in bezug auf den Modul 4 die Form

$$x^2 - \frac{d}{4}y^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + xy + \frac{1-d}{4}y^2$$

nehmen können; wir bezeichnen diese Form kurzweg als *Hauptform.* Alle anderen Gitter setzen sich nach bekannten Sätzen[15]) aus gewissen erzeugenden Gittern Γ, Γ_1, Γ_2, ... in der Gestalt $\Gamma^{\alpha}\Gamma_1^{\alpha_1}\Gamma_2^{\alpha_2}\dots$ zusammen. Für jedes Γ gibt es dabei eine niederste Potenz, zu der erhoben es gleich 1 wird: $\Gamma^k = 1$, $\Gamma_1^{k_1} = 1$, $\Gamma_2^{k_2} = 1$, ... Hier ist k_1 ein Teiler von k, k_2 ein Teiler von k_1 usw., das Produkt aller k aber ist die Klassenzahl h.

Es ist nun leicht, unsere h Gitter G, G', ... in der Weise zu „orientieren", d. h. über ihre Azimutalfaktoren so zu verfügen, daß die Kompositionsformel $G \cdot G' = G''$ nicht nur in abstracto, sondern auch hinsichtlich der Azimute gilt. Man lege zu dem Zwecke vor allen Dingen das Hauptgitter in der Weise fest, daß es die Punkte

$$\xi = x + \frac{\sqrt{d}}{2}y, \qquad \eta = x - \frac{\sqrt{d}}{2}y,$$

[15]) Vgl. Schering: *Die Fundamentalklassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen.* Göttinger Abhandlungen Bd. 14. (1868/69) [= Gesammelte Mathematische Werke, Bd. 1, S. 135—148].

bzw.

$$\xi = x + \frac{1+\sqrt{d}}{2}\,y, \quad \eta = x + \frac{1-\sqrt{d}}{2}\,y$$

enthält; dasselbe umfaßt dann insbesondere alle Punkte $(\xi, \eta) = (x, x)$, unter x beliebige rationale ganze Zahlen verstanden. Des ferneren werden wir die erzeugenden Gitter Γ unabhängig voneinander in der Weise orientieren, wie es der jedesmaligen Relation $\Gamma^k = 1$ entspricht; von da aus folgt dann die Orientierung der anderen Gitter von selbst.

Die so erhaltene Figur, welche ich die *Normalfigur* der h Gitter nenne, ist nur erst h-deutig bestimmt, weil die Forderung $\Gamma^k = 1$ für das einzelne erzeugende Gitter Γ, wie eine leichte Überlegung zeigt, noch k Lagen offen läßt. *Irgendeine dieser h Figuren, gleichgültig welche, ist für die Folge festzuhalten.* Ich bemerke noch ausdrücklich (was sich im Laufe der weiteren Betrachtung ergibt), daß die h Gitter der Normalfigur durchaus getrennt liegen (d. h., daß keine zwei Gitter außer dem Koordinatenanfangspunkte einen Punkt gemein haben).

Wir haben die Normalfigur konstruiert, indem wir verlangten, daß die Multiplikation zweier Punkte innerhalb der h Gitter unbeschränkt ausführbar sei. Nennen wir das Gitter $\Gamma^{\alpha} \cdot \Gamma_1^{\alpha_1} \cdot \ldots$ kurz G_{α}, ebenso das Gitter $\Gamma^{\beta} \cdot \Gamma_1^{\beta_1} \cdot \ldots$ kurz G_{β}, so wird ein Punkt von G_{α}, multipliziert mit einem Punkte von G_{β}, einen Punkt von $G_{\alpha+\beta}$ ergeben. *Das Schöne ist nun, daß innerhalb unserer Figur auch die Gesetze der Teilbarkeit in der von der gewöhnlichen Zahlentheorie her bekannten Weise gelten.*

Wir müssen, um diese Gesetze auszusprechen, zunächst die *Einheitspunkte* und ferner die *Primpunkte* definieren.

Als Einheitspunkte bezeichnen wir alle diejenigen Punkte, welche die Hauptform zu 1 machen. Es sind dies in Anlehnung an die oben besprochene Theorie der Pellschen Gleichung die Punkte

$$\xi = \pm\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\nu}, \quad \eta = \pm\left(\frac{t_0 - u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\nu};$$

in der Tat geht die Pellsche Gleichung durch eine elementare Substitution in die Forderung über, daß die Hauptform $= 1$ sein soll.

Für die Primpunkte aber erhält man folgende Aufzählung:

1. Es kann erstlich sein, daß [die rationale Primzahl] p durch keine Form der Diskriminante d darstellbar ist. Dann werden wir den Punkt $(\xi, \eta) = (p, p)$ als Primpunkt zu bezeichnen haben.

2. Zweitens nehmen wir den Fall, daß p in der Diskriminante d als Faktor enthalten ist. Dann wird sich in einem unserer Gitter der Primpunkt $(\sqrt{p}, \sqrt{p})$ — oder auch $(\sqrt{-p}, \sqrt{-p})$ — finden, dessen Quadrat der Punkt (p, p), evtl. nach Anbringung eines Zeichenwechsels ist.

3. Endlich soll p durch Formen der Diskriminante d zwar darstellbar sein, aber nicht in d enthalten sein. Wir können als darstellende Form dann

$$px^2 \pm qxy + ry^2$$

nehmen, wo das Vorzeichen von q unbestimmt bleibt. Von da aus kommen wir auf zwei getrennte Primpunkte, deren einer nach geeigneter Fixierung des Azimuthalfaktors ϱ durch

$$\xi = \varrho\sqrt{p}, \quad \eta = \frac{1}{\varrho}\sqrt{p}$$

gegeben ist, während der andere umgekehrt

$$\xi' = \frac{1}{\varrho}\sqrt{p}, \quad \eta' = \varrho\sqrt{p}$$

aufweist.

Ich bezeichne abkürzend $\varrho\sqrt{p}$ mit π, $\frac{1}{\varrho}\sqrt{p}$ mit $\bar{\pi}$ und habe dann

$$\pi \cdot \bar{\pi} = p.$$

Daraufhin sind nun die Gesetze der Teilbarkeit einfach die:

> *daß ein Primpunkt nicht anders zerlegt werden kann, als durch Abtrennung von Einheitspunkten,*
>
> *daß jeder andere Punkt, abgesehen von dieser immer möglichen Abtrennung, nur auf eine Weise in Primpunkte zerlegt werden kann.*

Die so dargelegten Verhältnisse sind natürlich nur eine andere Formulierung der für die ganzen Zahlen des quadratischen Körpers $\sqrt{d}$ geltenden sogenannten *Idealtheorie*. Des näheren gestaltet sich diese Beziehung folgendermaßen:

Bemerken wir vorab, daß es offenbar ausreicht, überall statt von den Gitterpunkten (ξ, η) von ihren ξ-Koordinaten (oder ihren η-Koordinaten) zu reden. Die anschauliche Vorstellung des Gitters geht dabei allerdings verloren, aber es ist in jedem Augenblicke möglich, zu derselben zurückzugehen. Ich werde in diesem Sinne vielfach nicht mehr von den Gitterpunkten, sondern von den Gitter*zahlen* (eben den ξ-Koordinaten) sprechen und von Hauptzahlen, Nebenzahlen unserer Figur reden. Es wird, hoffe ich, kein Mißverständnis hervorrufen, wenn ich diese Abänderung der Ausdrucksweise nicht weiter jedesmal betone.

Unsere *Hauptzahlen* $x + y \cdot \frac{\sqrt{d}}{2}$ resp. $x + y \cdot \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ sind nun nichts anderes als die *ganzen* Zahlen des quadratischen Körpers $\sqrt{d}$. Beschränkt man sich auf diese Hauptzahlen und ist die Klassenzahl $h > 1$, so hat die Zerlegung der Zahlen in Faktoren bekanntlich nicht mehr die eben hervorgehobene Eigenschaft der Eindeutigkeit; eben darum hat Kummer seinerzeit diesen Hauptzahlen gewisse gedachte Zahlen, *ideale* Zahlen, hinzugefügt, durch deren Hilfe sich die Eindeutigkeit der Faktorenzerlegung wieder herstellen ließ. ***Diese idealen Zahlen Kummers werden bei uns realisiert; sie sind nichts anderes als die Nebenzahlen unserer Normalfigur.*** Diese Nebenzahlen sind selbst ganze algebraische Zahlen. Sie gehören aber nicht mehr dem Körper $\sqrt{d}$ an, sondern enthalten gewisse zutretende Irrationalitäten, die sich aus den symbolischen Gleichungen

$$\Gamma^{k} = 1, \quad \Gamma_1^{k_1} = 1, \ \ldots$$

ergeben, also kurz gesagt eine k-te, eine k_1-te, ... Wurzel aus einer geeigneten Zahl des Körpers $\sqrt{d}$.

Daß man die idealen Zahlen Kummers durch Wurzeln aus wirklichen Zahlen (Hauptzahlen) darstellen kann, ist natürlich lange bekannt[16]). Dagegen ist die anschauliche Art, wie diese idealen Zahlen in unserer Normalfigur an die Nebengitter geknüpft werden, soviel ich weiß, von anderer Seite noch nicht gegeben[17]), und gerade sie soll uns weiterhin (bei den singulären elliptischen Gebilden) die besten Dienste leisten. Man wird auch in höheren Fällen die idealen Zahlen in entsprechender Weise realisieren können, sofern man nur, bei Körpern l-ten Grades, mit Gittern im Raume von l Dimensionen operiert. In der schon oben genannten Furtwänglerschen Dissertation ist dies neuerdings für $l = 3$ entwickelt worden; ich verweise auf die dort gegebene Darstellung insbesondere auch wegen der Grundlegung der Theorie[18]). Auch die Bemerkungen von Hurwitz in den Göttinger Nachrichten von 1895, S. 324 ff., bewegen sich in der gleichen Richtung[19]).

[16]) [Vgl. z. B. Kummer selbst in Crelles Journal, Bd. 35 (1847), S. 325 unten. — Neuerdings hat auch Hecke auf die mittels Wurzeln aus Hauptzahlen des Körpers $\sqrt{d}$ gebildeten idealen Zahlen zurückgegriffen und ihre Theorie klar auseinandergesetzt. Vgl. Math. Zeitschrift, Bd. 6 (1919/20), S. 12, 13 und S. 17, 18. K.]

[17]) Meine erste Mitteilung hierüber findet sich in den Göttinger Nachrichten vom Februar 1893 [= der vorstehend wiederabgedruckten Note XCIII]; vgl. auch den Vortrag IX in meinem „Evanston Colloquium“. [In Betreff der Poincaréschen Entwicklungen, auf welche ich am letztgenannten Orte verweise, vergleiche man die Fußnote [7]), S. 293 des vorliegenden Bandes. — Übrigens bemerkt schon H. J. S. Smith im zweiten Teile seines *Report on the theory of numbers* (1860), Artikel 48, daß man ideale Zahlen aus einer und derselben Klasse addieren kann, was doch nur eine abstrakte Ausdrucksweise dafür ist, daß die Zahlen einer jeden Klasse ein Gitter bilden. K.]

[18]) [Neuerdings hat Furtwängler in einem „*Punktgitter und Idealtheorie*“ betitelten Aufsatz seine Theorie in der Tat auf beliebig viele Dimensionen ausgedehnt und die eindeutige Zerlegbarkeit der Ideale in geometrischem Gewande bewiesem. Siehe Math. Annalen, Bd. 82 (1920/21).]

[19]) Vielleicht gehen die von den Gittern beginnenden geometrischen Betrachtungen doch in einer Hinsicht über die bisherigen Angaben der Zahlentheoretiker hinaus. Ich will dies hier nur für die binären quadratischen Formen auseinander-

Nicht minder direkt sind die Beziehungen zu Dedekinds Idealtheorie. Sei (ξ, η) ein Gitterpunkt unserer Normalfigur; derselbe möge dem Gitter G_β angehören. Man wird diesem Punkte allemal ein *Bildgitter* zuordnen können, welches dem Hauptgitter eingelagert ist, indem man einfach (ξ, η) mit allen Punkten des Gitters $G_{-\beta}$ multipliziert. Dieses Bildgitter (welches dem Gitter $G_{-\beta}$ „ähnlich“ ist) entspricht dem Dedekindschen „Ideal“, d. h. das Ideal, welches Dedekind an Stelle des idealen Faktors ξ setzt, wird durch die ξ-Koordinaten der Ecken unseres Bildgitters geliefert. Ich werde vielfach das Bildgitter selbst als das zum Punkte (ξ, η) gehörige *Ideal* bezeichnen. Durch das Ideal ist der Punkt (ξ, η) rückwärts nur bis auf Einheitsfaktoren bestimmt; man kann sagen, daß das Ideal der Inbegriff der durch den Punkt (ξ, η) ***teilbaren*** Hauptzahlen sei.

Ich möchte nicht, daß man meine Darlegung dieser Verhältnisse als einen Gegensatz zu den Dedekindschen Entwicklungen auffaßte, sondern wesentlich nur als eine Veranschaulichung derselben. In der Tat operiere ich bei dem in meiner Vorlesung gegebenen Beweise der hier im Referate nur historisch mitgeteilten Sätze fortgesetzt mit den Dedekindschen Begriffsbestimmungen, und auch die Einführung meiner Figuren geschieht durchweg in Anlehnung an die Dedekindschen Entwicklungen. Eine gewisse Verschiedenheit der Darstellung liegt allerdings darin, daß ich von der Theorie der quadratischen ***Formen*** ausgehe, deren Koeffizienten zunächst keineswegs ganze Zahlen zu sein brauchen, während bei Dedekind die Betrachtung des ***Körpers*** $\sqrt{d}$ und die Frage nach den für ihn geltenden Rechnungsregeln voransteht. Übrigens bedarf ich bei der Behandlung der singulären elliptischen Gebilde noch einer leichten Verallgemeinerung des Idealbegriffs, die sich bei Betrachtung der Normalfigur ganz zwanglos bietet. Genau so, wie wir dem Punkte (ξ, η) ein dem Hauptgitter eingelagertes Bildgitter zuordneten — die Gesamtheit der durch (ξ, η) teilbaren Hauptpunkte —, werden wir ihm innerhalb irgendeines gegebenen Nebengitters G_α ein Bildgitter koordinieren können. Dasselbe umfaßt einfach die Produkte von (ξ, η) mit sämtlichen Punkten des Gitters $G_{\alpha-\beta}$. ***Solche einem Nebengitter G_α eingelagerte Bildgitter werde ich Nebengitterideale nennen.***

Im übrigen sollte die Theorie von den Stammgittern (mit der Diskriminante d) jetzt noch auf die zugehörigen Zweigformen (von der Diskriminante $n^2 d$) übertragen werden. Diese Übertragung erfordert keine weitere Zurüstung, weil die Zweiggitter den Hauptgittern in fester Weise

setzen. Die Irrationalität, welche hier beim einzelnen Nebengitter der $\sqrt{d}$ hinzutritt, hat nach unseren Darlegungen von Hause aus die Gestaltung $\varrho\sqrt{a}$; *sie ist also nicht schlechtweg eine h-te Wurzel, sondern enthält neben dem Azimutalfaktor ϱ nur eine Quadratwurzel.* Dies scheint bisher nicht hervorgehoben zu sein.

eingelagert sind und daher mit diesen bei Konstruktion der Normalfigur endgültig orientiert werden. Ich habe diese Sache in meiner Vorlesung wegen Zeitmangels nicht weiter ausgeführt und bemerke um so lieber, daß auch sie implizite bei Dedekind erledigt ist. In dieser Hinsicht genüge zu bemerken, daß das, was Dedekind eine *Ordnung* nennt[20]), der Inbegriff der ξ-Koordinaten der Eckpunkte des dem Hauptstammgitter eingelagerten Hauptgitters der Diskriminante $n^2 d$ ist.

Die hiermit entwickelten Verhältnisse, insbesondere unsere Normalfigur, werden nun der Untersuchung der singulären elliptischen Gebilde zugrunde gelegt. Wir haben uns dabei natürlich auf *negative* Diskriminanten zu beschränken und setzen dementsprechend in der Folge für D die Bezeichnung $-\nabla$.

Man denke sich zuvörderst die verschiedenen Gitter, welche zu irgendeiner Stammdiskriminante oder Zweigdiskriminante $(-\nabla)$ gehören, in unserer Normalfigur nebeneinander liegend. Dabei wollen wir der Deutlichkeit wegen festsetzen (was für Stammdiskriminanten noch keine Einschränkung ist), daß wir nur solche Gitter in Betracht nehmen wollen, die zu *primitiven* quadratischen Formen Anlaß geben; die Zahl dieser zu einer bestimmten Diskriminante gehörigen „primitiven“ Gitter bezeichnen wir allgemein mit h. Wir suchen jetzt die neuen Gitter, die aus ihnen durch irgendeine Transformation höherer Ordnung entstehen (die ihnen vermöge Transformation n-ter Ordnung eingelagert sind). Ich will der Einfachheit wegen annehmen, daß der Transformationsgrad n eine Primzahl p sei, und zwar eine solche Primzahl, die sich im Gebiete unserer Gitterzahlen in zwei verschiedene (nicht bloß durch Einheitsfaktoren unterschiedene) Faktoren π und $\bar{\pi}$ spaltet. Diese Faktoren mögen den Gittern G_β und $G_{-\beta}$ angehören. Durch Transformation p-ter Ordnung entstehen aus irgendeinem unserer gegebenen Gitter G_α, allgemein zu reden, $(p+1)$ neue. *Aber zwei von ihnen nehmen eine Sonderstellung ein. Es sind dies die Bildgitter (Idealgitter), welche den Zahlen π bez. $\bar{\pi}$ innerhalb G_α entsprechen, also die Gitter $\pi \cdot G_{\alpha-\beta}$ und $\bar{\pi} \cdot G_{\alpha+\beta}$, die aus $G_{\alpha-\beta}$ bez. $G_{\alpha+\beta}$ durch komplexe Multiplikation hervorgehen.* Diese zwei Gitter sind ersichtlich mit $G_{\alpha-\beta}$ und $G_{\alpha+\beta}$ ähnlich; ihre quadratischen Formen werden sich dementsprechend von $f_{\alpha-\beta}$, $f_{\alpha+\beta}$ nur um den Faktor p unterscheiden, also imprimitiv sein. Im Gegensatze dazu sind die übrigen $(p-1)$ transformierten Gitter mit keinem der vorgegebenen Gitter ähnlich und geben zu primitiven quadratischen Formen Anlaß.

Was wir so für eine bestimmte Kategorie von Primzahlen konstatiert haben, überträgt sich leicht (mutatis mutandis) auf beliebige Transformationsgrade. *Dies ist der eigentliche Fundamentalsatz in der Theorie der singulären elliptischen Gebilde.*

[20]) Statt „Ordnung“ gebraucht Hr. Hilbert neuerdings das Wort „Ring“.

Unsere nächste Aufgabe wird sein, aus diesem Fundamentalsatze Folgerungen für die zu den Gittern G gehörigen Invarianten j zu ziehen. Ich werde die zu G_α gehörigen Invarianten j, Δ usw. einfach durch den Index α bezeichnen: j_α, Δ_α, ... und übrigens die h verschiedenen j_α die *zu ∇ gehörigen singulären Invarianten* nennen. Man nehme zunächst wieder an, daß es sich um Transformation vom Grade p handele und daß p in unserem Zahlengebiet, wie vorhin, in das Produkt zweier verschiedener komplexer Faktoren, π und $\bar{\pi}$, zerfalle.

Wir haben dann sofort folgende beiden Sätze:

1. Die zu Transformation p-ter Ordnung gehörige Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ besitzt für $j = j_\alpha$ zwei (und nur zwei) Wurzeln, welche sich in der Reihe der singulären j befinden, nämlich $j' = j_{\alpha+\beta}$ und $j' = j_{\alpha-\beta}$.

2. Die Multiplikatorgleichung $\Phi(M, j) = 0$ hat entsprechend für $j = j_\alpha$ zwei Wurzeln, welche sich durch die Diskriminanten Δ der vorgelegten singulären Gebilde selbst ausdrücken, nämlich

$$M = \bar{\pi} \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha-\beta}}{\Delta_\alpha}} \quad \text{und} \quad M = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}}.$$

Analoge Theorien ergeben sich natürlich für andere Primzahlen p und beliebige zusammengesetzte Transformationsgrade. Von da aus zeigt man dann ohne Schwierigkeit, erstlich: daß die zu ∇ gehörigen singulären j einer ganzzahligen Gleichung h-ten Grades $\chi_\nabla(j) = 0$ genügen, deren höchster Koeffizient $= 1$ ist (ich nenne diese Gleichung die Klassengleichung *erster Stufe*), ferner aber, daß $j_{\alpha+\beta}$ im Rationalitätsbereich $\sqrt{-\nabla}$ von j_α rational abhängt, und zwar vermöge einer Substitution: $j_{\alpha+\beta} = R_\beta(j_\alpha, \sqrt{-\nabla})$, die nur vom Index β bedingt ist. In dieser Angabe liegt bereits, daß für unsere Wurzeln j_α $R_\beta R_\gamma = R_\gamma R_\beta$ ist, daß also die Klassengleichung nach Adjunktion von $\sqrt{-\nabla}$ eine Abelsche Gleichung ist. Ich gehe auf die betreffenden Ausführungen meiner Vorlesung hier darum nicht genauer ein, weil die Gliederung des Gedankenganges schließlich dieselbe ist, welche Hr. Weber in den bez. Teilen seiner elliptischen Funktionen [1. Aufl. (1890/91)] eingehalten hat. In der Tat liegt der Fortschritt meiner Darstellung (sofern ein solcher überhaupt zugestanden wird) nicht in diesen weiteren Ausführungen, sondern in der Einfachheit, mit der sich die vorangeführten grundlegenden Sätze ergeben, in der Evidenz, mit der sie sozusagen von selbst aus der Normalfigur hervorsprießen[21]).

[21] [Der durch Adjunktion der singulären j zu dem Körper $\sqrt{-d}$ entstehende Körper $2h$-ten Grades hat von den Zahlentheoretikern den Namen Klassenkörper

Im übrigen aber wende ich mich zu neuen Entwicklungen. In der Tat ist nach dem Ideengange, welcher den „Modulfunktionen" zugrunde liegt, die Fragestellung nach der Natur der singulären elliptischen Gebilde mit den vorstehenden Angaben über die singulären j noch keineswegs erschöpft, vielmehr wird es gelten, nunmehr entsprechende Überlegungen für die Moduln *höherer Stufe* durchzuführen. Ansätze hierzu liegen in der Literatur bereits verschiedentlich vor. Beispielsweise betrachtet Hr. Weber in seinem Werke neben den singulären j gelegentlich die zugehörigen $\sqrt[3]{j}$ und ganz besonders die $\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}$ und ihre Potenzen.[22]) Andererseits haben Gierster und Hurwitz eine Seite der Frage längst allgemein bearbeitet, indem sie die *Klassenzahlrelationen höherer Stufe* aufstellten[23]); man vergleiche die entsprechenden Entwicklungen der „Modulfunktionen". Es wird gelten, allgemein eine Theorie der *Klassengleichungen höherer Stufe* zu entwerfen. Zu dem Zwecke habe ich in meiner Vorlesung das Beispiel der Ikosaedergleichung behandelt, und wenn ich auch bei der Kürze der Zeit selbst diesen besonderen Gegenstand nur nach seinen Umrissen habe bezeichnen können, so meine ich doch damit die ganze Fragestellung so weit zugänglich ge-

erhalten, weil jedes j einer Klasse quadratischer Formen zugeordnet ist. Auch in ihm werden die idealen Zahlen des Körpers $\sqrt{-d}$ realisiert. Wo werden sich in ihm die Bilder unserer Nebengitter befinden? Die Sache kann wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren nur so sein, daß man die letzteren mit der k-ten Wurzel aus einer Einheit des Klassenkörpers multiplizieren muß, um die entsprechenden Zahlen des Klassenkörpers zu erhalten. k bedeutet hierbei den Exponenten derjenigen Potenz, in die man das Nebengitter erheben muß, um es dem Hauptgitter einzulagern. Je nachdem der Klassenkörper unendlich viele oder nur endlich viele Einheiten hat, tritt jedes unserer Gitter in ihm unendlich oft oder nur endlich oft auf. — Ich habe in einer Vorlesung von 1901 das niederste hier mögliche Beispiel berührt. Es sei $d=-20$, worauf wir zwei Klassen haben, die Hauptklasse $x^2+5y^2 = (x+i\sqrt{5}y)\,(x-i\sqrt{5}y)$ und eine Anzepsklasse, die durch $2x^2+2xy+3y^2 = \left(\sqrt{2}x+\frac{1+i\sqrt{5}}{\sqrt{2}}y\right)\left(\sqrt{2}x+\frac{1-i\sqrt{5}}{\sqrt{2}}y\right)$ repräsentiert werden kann. Das zu letzterer gehörige Rhombengitter ist bereits so orientiert, daß die Diagonalen seiner Rhomben in die Richtung der x- und der y-Achse fallen. Die zu den beiden Klassen gehörigen singulären j sind $j(\sqrt{-5}) = (50+26\sqrt{5})^3$ und $j\left(\frac{1+\sqrt{-5}}{2}\right) = (50-26\sqrt{5})^3$. Man wird die beiden Gitter also in den Klassenkörper verlegen, indem man die Zahlen des Hauptgitters mit einer beliebigen Potenz von i, diejenigen des Nebengitters mit einer ungeraden Potenz der achten Einheitswurzel $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ multipliziert, d. h. indem man die Gitter um Multipla von 90° bzw. 45° aus der Normallage herumdreht. Es wäre recht erwünscht, in ähnlicher konkreter Weise die Fälle höherer Diskriminanten durchzudenken. K.]

[22]) [Auch Kiepert hat bei seinen umfangreichen Berechnungen numerischer Werte der singulären Invarianten neben j immer auch $\sqrt[3]{j}$ und $\sqrt[2]{j-1728}$ betrachtet. Vgl. Math. Annalen, Bd. 39 (1891). K.]

[23]) [Siehe die Zitate in den Vorbemerkungen und in Fußnote [8]) auf S. 175 des vorliegenden Bandes.]

macht zu haben, daß die weitere Behandlung nur mehr Sache der Einzelausführung ist. Die Grundlage für die Behandlung der Ikosaederirrationalität bilden natürlich die früheren Untersuchungen über die Modulargleichungen des Ikosaeders und die sich aus ihnen ergebenden Klassenzahlrelationen der fünften Stufe. Man findet diese Dinge in den Kapiteln 4 und 6 des vierten Abschnitts der „Modulfunktionen" mit aller Ausführlichkeit auseinandergesetzt[24]). Inzwischen ist es im Interesse der allgemeinen Verständlichkeit der von mir zu machenden Angaben vielleicht nützlich, wenn ich hierauf nicht weiter rekurriere, sondern den Tatbestand in knappen Sätzen meiner Darstellung mit einfüge. Ich gliedere meine Darlegung in eine Reihe einzelner Nummern:

1. Der Transformationsgrad n werde der Einfachheit halber (um nicht zu viele Fälle immer nebeneinander betrachten zu müssen) $\not\equiv 0 \pmod{5}$ genommen. Die Kongruenz $ad-bc \equiv n \pmod{5}$ hat dann — sofern wir gemeinsame Vorzeichenwechsel der a, b, c, d als irrelevant ansehen —, 60 verschiedene Lösungssysteme. Es gibt, sagen wir, modulo 5 betrachtet, 60 verschiedene *Schemata* für Transformation n-ter Ordnung $\omega' = \frac{a\omega+b}{c\omega+d}$. Das einzelne dieser Schemata bezeichnen wir in der Folge mit $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$. Übrigens betrachten wir nur „eigentliche" Transformation, schließen also aus, daß die a, b, c, d einen Faktor gemein haben.

2. Wir betrachten nun die Ikosaederirrationalität $\zeta(\omega)$. Während $j(\omega)$ mit allen durch Transformation n-ter Ordnung hervorgehenden Werten $j\left(\frac{a\omega+b}{c\omega+d}\right)$ durch dieselbe Transformationsgleichung verbunden ist, bekommen wir hier je nach dem *Schema*, welches wir für die Transformation n-ter Ordnung auswählen, 60 verschiedene derartige Transformationsgleichungen, die wir in folgender Weise bezeichnen:

$$f_{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}}(\zeta', \zeta) = 0.$$

3. Das einfachste Schema ist natürlich $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$. Die zugehörige Transformationsgleichung (auf deren Aufstellung ich hier nicht weiter eingehe) hat rationale Zahlenkoeffizienten. Aus ihr entstehen die 59 anderen Gleichungen, indem man auf ζ' (oder auch auf ζ) die Ikosaedersubstitutionen anwendet. Da die Ikosaedersubstitutionen die Irrationalität $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ enthalten, so werden die Koeffizienten der 59 Gleichungen, allgemein zu reden, erst im Körper ε rational sein.

4. Es gilt nun vor allen Dingen, diese 60 Transformationsgleichungen

[24]) [Was die Modulargleichungen des Ikosaeders betrifft, vgl. auch die im vorliegenden Bande abgedruckten Referate Nr. XCI und Nr. XCII.]

in *Kategorien gleichberechtigter Gleichungen* zusammenzufassen. Wir nennen zwei Transformationsgleichungen gleichberechtigt, wenn sie auseinander hervorgehen, indem man auf ζ' und ζ *dieselbe* Ikosaedersubstitution (kogrediente Ikosaedersubstitutionen) ausübt. Es ist klar, daß zwei gleichberechtigte Gleichungen für die folgenden Entwicklungen gleichwertig sind, so daß es genügt, aus jeder Kategorie gleichberechtigter Gleichungen immer nur eine zu betrachten. Man wird, allgemein zu reden, diejenigen wählen, welche die einfachsten Zahlenkoeffizienten darbietet.

5. Die hiermit postulierte Einteilung unserer Gleichungen steht in engster Beziehung zu derjenigen Zahl g, welche Gierster das *Gewicht* der einzelnen Gleichung genannt hat. Das Gewicht g ist die Zahl derjenigen kogredienten Substitutionen von ζ' und ζ, durch welche $f=0$ in sich übergeht. Ersichtlich ist die Anzahl der Gleichungen, welche mit einer gegebenen Gleichung gleichberechtigt sind, $=\frac{60}{g}$.

6. Diese Zahl g bestimmt sich nun für jedes Schema $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ als Anzahl der modulo 5 unterschiedenen unimodularen Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, welche der Kongruenz genügen:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \pmod{5}.$$

7. Die Spezialdiskussion dieser Kongruenzen ergibt für g die folgenden Tabellen:

$n \equiv 1 \pmod{5}$

Bezeichnung der Schemata	Anzahl der Schemata	Gewicht g
$\pm\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	1	60
Andere Schemata mit		
$a_0+d_0 \equiv \pm 2$	24	5
$a_0+d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0+d_0 \equiv \pm 1$	20	3

$n \equiv 4 \pmod{5}$

Schemata	Anzahl	g
$\pm\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	1	60
Andere Schemata mit		
$a_0+d_0 \equiv \pm 1$	24	5
$a_0+d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0+d_0 \equiv \pm 2$	20	3

$n \equiv 2 \pmod{5}$

Schemata	Anzahl	g
$a_0+d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0+d_0 \equiv \pm 1$	20	3
$a_0+d_0 \equiv \pm 2$	30	2

$n \equiv 3 \pmod{5}$

Schemata	Anzahl	g
$a_0+d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0+d_0 \equiv \pm 2$	20	3
$a_0+d_0 \equiv \pm 1$	30	2

8. Da die Anzahl der gleichberechtigten Gleichungen jedesmal $\frac{60}{g}$ beträgt, schließen wir aus den vorstehenden Tabellen:

Bei $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$ sind jedesmal diejenigen Schemata gleichberechtigt, welche dieselbe Summe $\pm(a_0+d_0)$ darbieten.

Das Gleiche gilt bei $n \equiv 1$ für $(a_0+d_0) \equiv 0,\ \pm 1$, ebenso bei $n \equiv 4$ für $(a_0+d_0) \equiv 0,\ \pm 2$.

Dagegen zerfallen bei $n \equiv 1$ die Schemata mit $(a_0+d_0) \equiv \pm 2$ und bei $n \equiv 4$ die Schemata mit $(a_0+d_0) \equiv \pm 1$ in drei getrennte Kategorien gleichberechtigter. Es gibt jedesmal ein für sich stehendes Schema vom Gewicht 60. Die übrigbleibenden 24 Schemata vom Gewicht 5 zerlegen sich noch in 2 Kategorien je von 12 gleichberechtigten Schematen. Diese 2 Kategorien werden weiter unten noch näher charakterisiert werden.

9. Die Zahl g bezeichnet nach ihrer Entstehung je [die Ordnung] einer Untergruppe der Ikosaedergruppe. Vermöge derselben werden die Punkte der ζ-Kugel, allgemein zu reden, zu je g zusammengeordnet. Diese g Punkte können nur dann ganz oder zum Teil zusammenfallen, wenn es sich um die Ecken des Ikosaeders, oder die Mitten seiner Seitenfläche, oder seine Kantenhalbierungspunkte handelt.

10. Jetzt können wir in mannigfacher Weise eine rationale Funktion g-ten Grades, r_g, bilden, welche bei den Substitutionen unserer Untergruppe ungeändert bleibt. *Dieses r_g kann immer so ausgesucht werden* — und dies werden wir im folgenden voraussetzen —, *daß es in seinen Koeffizienten keine andere Irrationalität besitzt als höchstens ε.* Wir denken uns r_g bei jeder Kategorie gleichberechtigter Gruppen für eine Gruppe möglichst einfach gewählt und bringen dann bei den gleichberechtigten Gruppen diejenigen r_g in Anwendung, die sich aus diesem einen durch die Ikosaedersubstitutionen ergeben. Die Gleichung $r_g =$ Konst. liefert uns, je nach dem Werte der rechter Hand stehenden Konstante, die Gruppen von jedesmal g zusammengehörigen Punkten der Kugel; sie hat also nur dann möglicherweise vielfache Wurzeln, wenn es sich um die vorhin bezeichneten besonderen Punkte handelt. Alle anderen rationalen Funktionen von ζ, welche bei unserer Untergruppe ungeändert bleiben — insbesondere die rationale Funktion 60-ten Grades j —, sind rationale Funktionen von r_g. Ist $g = 60$, so nehmen wir r_g einfach $= j$.

11. Jetzt setzen wir in $f_{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|}(\zeta', \zeta) = 0$, $\zeta' = \zeta$ und fragen nach der Natur der entstehenden Gleichung. Eine Anzahl ihrer Wurzeln fällt möglicherweise in die Ecken oder die Seitenmitten oder die Kantenmitten des Ikosaeders. Diese werden wir (innerhalb des Bereiches ε) allemal

rational abtrennen können. Wir nehmen an, daß dieses geschehen sei und untersuchen die übrigbleibende Gleichung, die wir zwecks äußerer Kennzeichnung in eckige Klammern schließen wollen:

$$\left[f_{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|}(\zeta, \zeta)\right] = 0.$$

Von ihren Wurzeln gehören jedesmal g vermöge unserer Untergruppe zusammen, und diese g Wurzeln sind unter sich alle verschieden. Wir schließen, daß unsere Gleichung in Wirklichkeit eine solche für r_g ist. Wir schreiben dieselbe

$$\Psi_{\left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right|}(r_g) = 0.$$

Die Koeffizienten von Ψ sind jedenfalls nach Adjunktion von ε rational. Übrigens aber sind gleichberechtigte Ψ nur durch ihr r_g verschieden; sie fallen, wenn man hiervon absieht, geradezu zusammen.

12. Die Wurzeln der Gleichung $\Psi = 0$ lassen sich nun in übersichtlicher Weise durch die zugehörigen Werte von ω bezeichnen.

Wir werden zunächst verabreden, daß wir das zu irgendeinem ζ gehörige ω allemal *reduziert* nehmen, d. h. innerhalb des aus 60 Elementarbereichen der ω-Ebene zur Hauptkongruenzgruppe fünfter Stufe gehörigen Ikosaederpolygons. Da wir die besonderen Werte von ζ, welche den Ikosaederecken usw. entsprechen, bereits entfernt haben, werden wir des ferneren nur solche Punkte ω zu betrachten haben, welche erstens im *Inneren* der Halbebene liegen, und zweitens weder mit $\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ noch mit $i = \sqrt{-1}$ im elementaren Sinne äquivalent sind.

Da gilt nun: ein Wert ζ wird ebenso oft Wurzel der Gleichung $[f(\zeta, \zeta)] = 0$ sein, als das entsprechende ω bei Transformationen n-ter Ordnung des vorgelegten Schemas ungeändert bleibt. Und ferner: jedesmal g Werte ζ (oder auch ω) zusammen ergeben *eine* Wurzel r_g von $\Psi = 0$.

13. Sei jetzt in Übereinstimmung hiermit:

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

wo $(ad - bc) = n$ und $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| \equiv \pm \left|\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right| \pmod{5}$.

Wir haben dann

$$c\omega^2 + (d - a)\omega - b = 0$$

oder, wie wir abkürzend schreiben:

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0.$$

Hier sind die ganzen Zahlen P, Q, R (die gern einen Faktor gemein haben können, den wir dann aber zweckmäßigerweise *nicht* wegheben) an die Kongruenzen gebunden:

$$P \equiv \pm c_0, \quad Q \equiv \pm (d_0 - a_0), \quad R \equiv \mp b_0 \pmod{5}.$$

Wir setzen noch der Kürze halber:

$$a + d = t,$$

worauf natürlich t der Kongruenz unterliegt:

$$t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod{5}.$$

Als Wert der negativ genommenen Diskriminante der für ω geltenden quadratischen Gleichung ergibt sich jetzt:

$$4PR - Q^2 = \nabla = 4n - t^2.$$

Auf solche Weise finden wir: Um alle in Betracht kommenden Werte von ω zu erhalten, suche man zunächst alle positiven Werte von ∇, die in der Gestalt $4n - t^2$ enthalten sind, wo $t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod{5}$. Ferner bestimme man innerhalb des Ikosaederbereiches der ω-Ebene die Nullstellen aller solcher primitiver oder imprimitiver Gleichungen $P\omega^2 + Q\omega + R = 0$, deren Diskriminante $= -\nabla$ ist und die außerdem den für die P, Q, R aufgestellten Kongruenzbedingungen genügen. Von diesen Nullstellen schließe man noch diejenigen aus, deren P, Q, R mit t einen gemeinsamen Teiler haben — denn sie würden auf uneigentliche Transformationen n-ter Ordnung führen; — ferner schließe man diejenigen aus, die mit ϱ oder i im elementaren Sinne äquivalent sind. *Die übrigen ω geben jeweils mit der richtigen Multiplizität die einzelnen Wurzeln der Gleichung $[f] = 0$, und, da sie zu g zusammengehören, der Gleichung $\Psi(r_g) = 0$.*

14. Es kommt nun darauf an, für jeden Wert von ∇ die Zahl der hiermit bezeichneten ω-Werte abzuzählen. Es möge H die Klassenzahl der zu $(-\nabla)$ gehörigen primitiven und imprimitiven Klassen quadratischer Formen sein. Von ihnen kommen wegen der gerade formulierten Nebenbedingungen gewisse in Wegfall; ich bezeichne die Zahl der übrigbleibenden Klassen mit H'. Dieses H' baut sich in einfacher Weise aus den Anzahlen h der primitiven Klassen auf, die zu solchen Diskriminanten gehören, die aus $(-\nabla)$ durch Abtrennung eines quadratischen Teilers entstehen. Ich schreibe in diesem Sinne

$$H' = \sum h\left(\frac{\nabla}{\tau^2}\right),$$

wobei ich die in den früheren Angaben enthaltenen näheren Bedingungen für die Summation nicht noch besonders zufüge. Zu jeder der H' Klassen gehören nun innerhalb des Ikosaederbereiches der ω-Ebene 60 Nullpunkte. Unter ihnen müssen wir diejenigen insbesondere aussuchen, welche den für

P, Q, R aufgestellten Kongruenzbedingungen genügen. Wir wissen bereits, daß sich die auszuwählenden Punkte in Serien von je g zusammengruppieren. Die nähere Untersuchung ergibt nun, daß sich bei $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$ innerhalb der zur einzelnen Klasse quadratischer Formen gehörigen 60 Nullpunkte immer gerade *eine* Serie von g Punkten befindet, die die Kongruenzbedingungen befriedigt. *Das gibt also* $g \sum H'(4n - t^2)$ *Nullpunkte* (wobei t nur Werte $\equiv \pm(a_0 + d_0) \pmod{5}$ zu durchlaufen hat). Dieselbe Formel gilt bei $n \equiv 1 \pmod{5}$ für $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$, und bei $n \equiv 4 \pmod{5}$ für $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$. Dagegen ist für $n \equiv 1$ und $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ und ebenso für $n \equiv 4$ und $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ eine Fallunterscheidung einzuführen.

Haben wir für $n \equiv 1$ das Schema $\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\Big\{$bez. für $n \equiv 4$ das Schema $\pm \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\Big\}$, so erweisen sich vermöge unserer Kongruenz P, Q, R durch 5 teilbar; es sind also nur solche Formen in Betracht zu ziehen, welche den Teiler 5 haben, diese aber auch (sofern nicht die ganze Klasse wegen der Nebenbedingungen in Wegfall kommt) alle. *Die Zahl der Nullpunkte wird hiernach, in Übereinstimmung mit dem Werte* $g = 60$, *in leicht verständlicher Abkürzung*

$$60 \sum H'\left(\frac{4n - t^2}{25}\right).$$

Die Zahl t *durchläuft dabei nur solche Werte, welche* $\equiv \pm 2$ (*oder, im Falle* $n \equiv 4$, $\equiv \pm 1$) *modulo* 5 *sind.*

Für die anderen 24 Schemata aber tritt noch folgende Trennung ein. Man bemerke, daß $\nabla = 4n - t^2$ bei ihnen allemal durch 5 teilbar ist. Daher vermag nach der Theorie der *Gattungen* (die übrigens in meiner Vorlesung nicht weiter entwickelt wird), nur die Hälfte der jedesmaligen H' Klassen *Reste* mod. 5 darzustellen, die andere Hälfte, und nur sie, gibt *Nichtreste*. Je nachdem die Zahlen b_0, c_0 in dem gerade ausgewählten Schema Reste oder Nichtreste modulo 5 sind, wird nur die eine Hälfte der Klassen vermöge unserer Kongruenzbedingungen brauchbare Nullpunkte liefern oder nur die andere[25]). Im ersteren Falle erhalten wir jedesmal g Nullpunkte. *Die Gesamtzahl der Nullstellen ist also* $g \cdot \sum \frac{H'(4n - t^2)}{2}$, *wo* $t \equiv \pm 2$ *oder* $\equiv \pm 1$ (*mod.* 5) *zu nehmen ist, je nachdem der Fall* $n \equiv 1$ *oder* $n \equiv 4$ *vorliegt.*

15. Diese Anzahlen sind alle bereits seinerzeit von Gierster bestimmt worden, der von ihnen aus zu den Klassenzahlrelationen 5-ter Stufe

[25]) Hierin also liegt die oben noch nicht angegebene Unterscheidung der beiden Kategorien, in die sich unsere vorliegenden Schemata teilen.

gelangt ist, wie man des näheren in den „Modulfunktionen" nachlesen mag. Sie geben zugleich die Zahl der Wurzeln von $[f(\zeta, \zeta)] = 0$ und, durch g dividiert, die Zahl der Wurzeln von $\Psi(r_g) = 0$. Aber sie geben nicht nur die Zahl dieser Wurzeln, sondern auch deren Bedeutung im einzelnen, sie lassen also die *Struktur* der Gleichung $[f(\zeta, \zeta)] = 0$ bez. $\Psi(r_g) = 0$ erkennen.

Man bezeichne als *die zu einem Schema* $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ *gehörige Klassengleichung fünfter Stufe der Diskriminante* $(-\nabla)$ diejenige Gleichung vom Grade h, welcher die zu den betreffenden primitiven Klassen gehörigen Werte des r_g genügen. Ich schreibe diese Gleichung:

$$\chi_\nabla(r_g) = 0.$$

In den besonderen Fällen, wo nur die Hälfte der existierenden Klassen in Betracht kommen, konstruiere ich mir entsprechend *Halbklassengleichungen*; ich will in dem Falle dem Buchstaben χ zur Unterscheidung einen horizontalen Strich zusetzen:

$$\overline{\chi}_\nabla(r_g) = 0.$$

Endlich setze ich aus diesen χ ebenso größere Aggregate X' zusammen, wie sich die H' aus den h aufbauen:

$$X'_\nabla(r_g) = \prod \chi_{\frac{\nabla}{\tau^2}}(r_g).$$

Eventuell ist hier beiderseits ein horizontaler Strich zuzufügen. Wir erhalten dann den Formeln von Nr. 14 entsprechend folgende Dekomposition des jedesmaligen $\Psi(r_g)$:

1. bei $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$, sowie bei $n \equiv 1$ für die Schemata $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$ und bei $n \equiv 4$ für die Schemata $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$:

$$\Psi(r_g) = \prod X'_{4n - t^2}(r_g); \quad t \equiv \pm(a_0 + d_0);$$

2. bei $n \equiv 1, 4$ im Falle jeweils des ausgezeichneten Schemas:

$$\Psi(r_g) = \prod X'_{\frac{4n - t^2}{25}}(r_g); \quad t \equiv \pm 2 \text{ resp. } \equiv \pm 1;$$

(man erinnere sich, daß r_g hier einfach $= j$ ist);

3. bei $n \equiv 1, 4$ für die anderen Schemata $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$, resp. $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$:

$$\Psi(r_g) = \prod \overline{X}'_{4n - t^2}(r_g); \quad t \equiv \pm 2 \text{ resp. } \equiv \pm 1.$$

16. Es hat nun keine Schwierigkeit, unsere Ψ in rationaler Weise in die einzelnen X' und fernerhin in die einzelnen χ zu spalten. Es genügt in dieser Hinsicht zu bemerken, daß die singulären j den Klassengleichungen erster Stufe genügen und daß sich j jedesmal rational durch

die in Betracht kommende r_g darstellt. *Wir erfahren so, daß unsere Gleichungen:*

$$\chi_\nu(r_g) = 0, \quad \textit{bez.} \quad \bar{\chi}_\nu(r_g) = 0,$$

die ich nunmehr als Klassengleichungen, bez. Halbklassengleichungen der fünften Stufe bezeichne, rationale Zahlenkoeffizienten haben. „Rational" ist dabei selbstverständlich (sofern die Spezialuntersuchung der einzelnen Fälle es nicht als überflüssig erscheinen läßt) dahin zu verstehen, daß ε als adjungiert gilt. Die Auflösung der Klassengleichung erster Stufe zieht natürlich die Auflösung unserer Klassengleichungen fünfter Stufe unmittelbar nach sich. Wir können daher auch so sagen: *Man betrachte die Darstellung von j als rationale Funktion $\left(\frac{60}{g}\right)$-ten Grades von r_g als eine algebraische Gleichung für r_g. Diese Gleichungen, welche sich kurzweg als Resolventen der Ikosaedergleichung bezeichnen lassen, haben bei gegebenem singulären Werte von j nach Adjunktion von ε eine rationale Wurzel.*

17. Bis zu diesem Punkte habe ich die Untersuchung der singulären Werte der Ikosaederirrationalität in meiner Vorlesung gefördert. Wenn ich dieselbe in der vorliegenden unabgeschlossenen Form der Öffentlichkeit übergebe, so geschieht es, weil ich kaum hoffen darf, in absehbarer Zeit selbst zu diesen Fragestellungen zurückzukehren, und weil eben nun von verschiedenen Seiten den Klassengleichungen eine erhöhte Aufmerksamkeit zugewandt wird[26]).

Borkum, den 13. August 1896.

---

[26]) [Den Entwicklungen des Textes zufolge treten neben den Klassenkörper erster Stufe, der von den singulären j und $\sqrt{-d}$ erzeugt wird, für jede zu 5 relativ prime Diskriminante $-d$, Klassenkörper fünfter Stufe, die entstehen, indem man zum Körper $\sqrt{-d}$ die Wurzeln der verschiedenen Resolventen der Ikosaedergleichung (mit singulären ω-Werten als Argumenten) adjungiert. Es kann vorkommen, daß diese Wurzeln schon selbst dem Klassenkörper erster Stufe angehören, arithmetisch also nichts Neues liefern. Im Texte wird diese Seite der Frage nicht berührt, geschweige denn entschieden. Der Nachdruck liegt vielmehr auf der algebraischen Leistungsfähigkeit des Klassenkörpers erster Stufe. Seine Zahlen lösen nicht nur die Klassengleichung erster Stufe, sondern sie erteilen auch den Transformationsgleichungen höherer Stufe bzw. deren Resolventen, je nach den Umständen, einen stärkeren oder schwächeren Affekt. So wird die Galoissche Gruppe der Ikosaedergleichung, die nach Adjunktion der fünften Einheitswurzel ε für unbestimmtes J bekanntlich aus 60 Operationen besteht, auf eine ihrer Untergruppen reduziert, wenn man für J singuläre Invarianten, d. h. Zahlen eines Klassenkörpers erster Stufe, einsetzt. Die Einzelheiten hängen dabei von dem Verhalten der Diskriminante $-d$ modulo 5 ab, zu der die singulären ω gehören. — Es wird solcherweise allgemein darauf ankommen, zu studieren, welche Bedeutung die systematische Gliederung der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen nach Stufen für die komplexe Multiplikation hat. Die Aufstellung der Klassenzahlrelationen höherer Stufe, wie sie Gierster und Hurwitz vollzogen haben, bzw. Fricke in Bd. 2 der „Modulfunktionen" dargestellt hat, ist in dieser Hinsicht ein erster Schritt. K.]

Hyperelliptische und Abelsche Funktionen.

Vorbemerkungen zu den Arbeiten über hyperelliptische und Abelsche Funktionen.

Die drei Abhandlungen XCV bis XCVII, welche hier als zweiter Abschnitt des vorliegenden Bandes zusammengestellt sind, verfolgen einen Zweck, den einst Clebsch und Gordan am Schluß der Vorrede zu ihrem Werke über Abelsche Funktionen (Leipzig 1866) als erstrebenswert hingestellt haben, nämlich: *Die Theorie der hyperelliptischen und Abelschen Funktionen mit der Formentheorie bzw. Invariantentheorie in sachgemäße Verbindung zu bringen.* Hierbei erwiesen sich für mich zwei Maßnahmen als wesentlich: erstens, daß man sich hinsichtlich der Zahl der zu benutzenden homogenen Variabeln volle Freiheit vorbehält (also je nach Bedarf binär, ternär, . . . operiert), und zweitens, daß man einen geeigneten Rationalitätsbereich (sowohl für die Konstanten als auch für die zu verwendenden algebraischen Formen) zugrunde legt und insbesondere auch die transzendenten Funktionen (z. B. die Integrale und ihre Perioden) nach ihrem invarianten Verhalten betrachtet.

Das Hauptziel meiner Untersuchungen war, für ein beliebiges algebraisches Gebilde vom Geschlechte p den Aufbau der 2^{2p} Thetafunktionen eines gegebenen Riemannschen Querschnittsystems systematisch zu bewerkstelligen. Es mögen hier, um eine prinzipielle Übersicht zu gewinnen, vorab zwei Aufgabenstellungen unterschieden werden, wenn auch diese Scheidung in den Abhandlungen selbst nicht so deutlich hervortritt: Erstens handelt es sich darum, die Abhängigkeit der Thetafunktionen von den Koeffizienten des algebraischen Gebildes, von den Moduln einer Riemannschen Klasse zu untersuchen, insbesondere also die Thetanullwerte als Modulfunktionen zu bestimmen. Zweitens gilt es, die Thetafunktionen in ihrer Abhängigkeit von den Stellen des Gebildes, zwischen denen die in den Argumenten auftretenden Integrale genommen werden, darzustellen.

Beidemal konnte bei den Zwecken, die ich verfolgte, für mich die Weierstrassische Theorie der elliptischen Funktionen Vorbild sein, nur daß deren Ergebnisse noch unmittelbarer mit den in der Invariantentheorie üblichen Ansätzen in Verbindung zu bringen waren, als es in Weierstrass' eigener Darstellung geschieht (vgl. Abh. XCV, § 12). Auch habe ich mich bei den hyperelliptischen und Abelschen Funktionen an Weierstrass' bezügliche Entwicklungen vielfach anschließen können. Zu der Zeit, als ich meine Abhandlungen schrieb, waren diese nur erst aus gelegentlichen Mitteilungen seiner Schüler bzw. aus ausgearbeiteten Vorlesungsheften bekannt; eine authentische Veröffentlichung liegt erst seit 1902 in Bd. IV von Weierstrass' Mathematischen Werken vor, und es ist ineressant, die dort gegebene (übrigens auch aus verschiedenen Vorlesungen zusammengearbeitete) Darstellung hinterher zu vergleichen.

I. Was die erste der oben genannten Aufgaben, also die Betrachtung der Modulfunktionen anlangt, so möge vorab etwa folgendes bemerkt werden: Die Bestimmung der multiplizierenden Konstanten der Thetafunktionen konnte nur in den niedersten Fällen von mir voll erreicht werden. Es sind dies die hyperelliptischen Fälle (in Nr. XCV und XCVI) und im wesentlichen auch der allgemeine Fall $p = 3$ (in Nr. XCVII, Abschnitt II).

In den hyperelliptischen Fällen eines beliebigen p legte ich eine Binärform f vom $(2p+2)$-ten Grade zugrunde. Um an bekannte Untersuchungen anzuknüpfen, zerlegte ich f zunächst auf alle möglichen Weisen in zwei Faktoren, deren Gradzahl sich um ein Multiplum von vier unterscheidet:

$$f = \varphi_{p+1-2\mu} \cdot \psi_{p+1+2\mu} \qquad \left(\mu = 0, 1, 2 \ldots \left[\frac{p+1}{2}\right]\right).$$

Solcher Zerlegungen gibt es gerade 2^{2p}, denen bei gegebenem Querschnittsystem die einzelnen Thetafunktionen entsprechen. Einerseits wußte man nun aus den Untersuchungen von H. Weber, wieviele Anfangsglieder in der Reihenentwicklung der verschiedenen Thetafunktionen verschwinden und andererseits aus denen von J. Thomae, daß für $\mu = 0$ und $\mu = 1$ der konstante Faktor des niedrigsten nicht verschwindenden Termes bis auf einen Zahlenfaktor gleich ist der Quadratwurzel aus einer Periodendeterminante (also einem vom gewählten Querschnittsystem abhängigen Faktor) multipliziert mit $\sqrt[8]{\varDelta\varphi \cdot \varDelta\psi}$, wo $\varDelta\varphi$ und $\varDelta\psi$ die Diskriminanten von φ und ψ sind. Es war für mich nicht schwer, zu vermuten, daß dies auch in den Fällen $\mu > 1$ gilt. Die neuen Gedanken sind übrigens im wesentlichen folgende gewesen:

1. Von den 2^{2p} zu einem Querschnittsystem gehörigen Thetafunktionen aus definiere ich 2^{2p} *Sigmafunktionen*, welche sich bei linearen Periodentransformationen glatt vertauschen und übrigens vom Querschnittsystem unabhängig sind. Sie entsprechen kurzweg den 2^{2p} Zerspaltungen von f in $\varphi \cdot \psi$. Meine Sigmafunktionen sind das genaue Analogon der von Weierstrass in seiner Theorie der elliptischen Funktionen gebrauchten Funktionen σ, σ_1, σ_2, σ_3. Zur Gewinnung der Sigmafunktionen dividiere man zunächst jede für die Argumente $0, 0, \ldots 0$ nicht verschwindende Thetafunktion durch ihren Nullwert und multipliziere alle diese Quotienten mit demselben Exponentialfaktor zweiten Grades in den Argumenten, der dann so gewählt wird, daß in der Reihenentwicklung des bezüglichen Produktes

$$\Pi\left(\frac{\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)}{\vartheta(0, 0, \ldots 0)} e^{G_2(v_1, v_2, \ldots v_p)}\right)$$

die Glieder zweiter Ordnung identisch verschwinden. Von den Thetafunktionen mit verschwindenden Nullwerten kommt man hernach analog zu entsprechenden Sigmafunktionen (vgl. Nr. XCV §§ 1, 2, 4 und Nr. XCVII §§ 25, 27). Umgekehrt kann man von den Sigmafunktionen leicht zu den Thetafunktionen zurückgelangen, wenn man die obigen Angaben über die konstanten Faktoren der Thetareihen benutzt und außerdem den Exponentialfaktor so bestimmt, daß die Thetareihen für ein bestimmtes Querschnittsystem die bekannten Periodizitätseigenschaften besitzen. — Meine Sigmafunktionen sind natürlich ebenso wie die Thetafunktionen Spezialfälle der allgemeinen Jacobischen Funktionen erster Ordnung und es mag hier, um Verwechselungen vorzubeugen, gleich bemerkt werden, daß Weierstrass selbst und seine Schüler bei $p > 1$ den Buchstaben σ zur Bezeichnung beliebiger derartiger Jacobischer Funktionen gebraucht haben. Unter allen diesen Jacobischen Funktionen sind meine Sigmafunktionen dadurch ausgezeichnet, daß sie Reihenentwicklungen nach Potenzen der Argumente zulassen, welche nach *rationalen*, *ganzen Kovarianten* der zugehörigen Formen φ und ψ fortschreiten. Auch dies ist eine Verallgemeinerung der bei $p = 1$ bekannten Sätze. (Vgl. Nr. XCV, § 12).

2. Dem Übergang von den Thetafunktionen zu den Sigmafunktionen entspricht, daß es mir gelang, statt des vom Querschnittsystem abhängigen Clebsch-Gordanschen Normalintegrales dritter Gattung Π unter allen denjenigen Integralen dritter Gattung P, welche Vertauschung von Argument und Parameter gestatten, ein invariantentheoretisch ausgezeichnetes Integral Q aufzustellen. In bekannter Weise schreibe ich die Integrale dritter Gattung als Doppelintegrale. Unter $F(z, \zeta)$ die $(p+1)$-te Polare von f verstanden, ist das Integral Q gegeben durch:

$$Q = \int\!\!\int \frac{(z\,dz) \cdot (\zeta\,d\zeta)}{\sqrt{f(z)} \cdot \sqrt{f(\zeta)}} \cdot \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(\zeta)} + F(z, \zeta)}{2\,(z, \zeta)^2}.$$

Der wesentliche Bestandteil des Integranden ist also eine *rationale*, *ganze Kovariante* von f. — Mit Hilfe dieses Integrales Q lassen sich die 2^{2p} Sigmafunktionen, als Funktionen der Integralgrenzen betrachtet, übersichtlich aufbauen, wie unten noch erläutert werden soll. Hier interessiert uns vor allen Dingen, daß die Sigmafunktionen zufolge der Eigenart des Q das dem invariantentheoretischen Denken entsprechende Zwischenglied zwischen den algebraischen Funktionen und ihren Integralen einerseits und den Thetafunktionen andrerseits sind.

Das Analogon des Integrales Q ist in unmittelbarem Anschluß an meine erste Arbeit über hyperelliptische Funktionen von Pick in den Math. Annalen, Bd. 29 (1887) für ebene Kurven n-ter Ordnung ohne Doppelpunkt gebildet worden. Aber dies ist nur ein erster Schritt für den Aufbau der zugehörigen Sigmafunktionen bzw. Thetafunktionen. Um die Thetafunktionen herzustellen, ist es insbesondere nötig, die nur von den Moduln des algebraischen Gebildes abhängigen Faktoren der Thetareihen zu bestimmen. Die Förderung dieser letztgenannten Aufgabe gelang mir nur noch, wie schon angedeutet, im allgemeinen Falle $p = 3$ (wo nach Riemannschen Prinzipien eine doppelpunktlose ebene Kurve vierter Ordnung zugrunde zu legen war). Indem ich die von den Geometern entwickelte Theorie der 64 Systeme von Berührungskurven dritter Ordnung benutzte, indem ich sodann deren Verhalten beim Auftreten eines Doppelpunktes der C_4 studierte, gelang es mir, durch rein algebraische Betrachtung auch hier die konstanten Faktoren der Thetareihen festzulegen, allerdings nur bis auf einen unbestimmt bleibenden Zahlenfaktor. Jedem System von Berührungskurven dritter Ordnung entspricht bei gegebenem Querschnittsystem eine der 64 Thetafunktionen. Auch stelle ich gemäß der oben gegebenen Vorschrift wieder 64 vom Querschnittsystem unabhängige Sigmafunktionen auf, die also den Übergang zu den unendlich vielen Formen zugehöriger Thetafunktionen vermitteln. Diese Sigmafunktionen haben die Eigenschaft, daß ihre Potenzentwicklungen nach rationalen ganzen Kovarianten desjenigen Rationalitätsbereiches fortschreiten, welcher dem zugehörigen System der Berührungskurven dritter Ordnung entspricht.

Für allgemeine p wird man, um die Grundsätze der linearen Invariantentheorie anwenden zu können, nach bekannten Prinzipien, die auf Riemann zurückgehen und insbesondere von M. Noether entwickelt sind (Math. Annalen, Bd. 17, 1880), zu der Normalkurve der φ des Raumes von $(p-1)$ Dimensionen greifen, gegebenenfalls statt ihrer besondere, im ersten Abschnitt von Nr. XCVII definierte Projektionen setzen, die ich als *kanonische Kurven* bezeichne. Die vorausgeschickten besonderen Fälle (der hyperelliptische und der allgemeine Fall $p = 3$) sind hier eingeschlossen. Überall sind die φ als homogene Koordinaten zu denken. Aber es ist wohl zur Zeit nicht möglich, allgemein weiter vorzudringen. Man weiß zwar aus den Arbeiten von M. Noether (a. a. O.), wieviele quadratische, kubische, ... Relationen zwischen den φ in jedem Falle statthaben. Auch hat sich neuerdings Herr Petri (in den Math. Annalen, Bd. 88, 1922) mit der Gestalt dieser Relationen, die in den verschiedenen Fällen verschieden sein kann, beschäftigt. Es dürfte aber vorläufig noch zu schwierig sein, eine formale Invariantentheorie dieser Relationen zu entwerfen bzw. alle Fälle herauszusuchen, in denen sich dieselbe durch Einführung einer niederen kanonischen Kurve vereinfacht. (Über einige spezielle Fälle, die von vornherein erkennbar sind, folgen noch Zitate im Text.) Hier findet also der algebraisch-invariantentheoretische Ansatz, den ich zur Bestimmung der Modulfunktionen verfolgte, zur Zeit seine Grenze.

II. Sprechen wir nun von der zweiten Aufgabe, die Abhängigkeit der Thetafunktionen oder Sigmafunktionen (und, beide umfassend, der allgemeinen Jacobischen Funktionen erster Ordnung) von den Stellen des algebraischen Gebildes, welche als Grenzen in den Integralsummen der Argumente auftreten, durch den Aufbau dieser Funktionen aus einfacheren Bestandteilen ersichtlich zu machen, und so die Thetafunktionen vom Gebilde her systematisch zu gewinnen. Weierstrass hat diese Aufgabe in seinen Vorlesungen bekanntlich dadurch vereinfacht, daß er aus den zum algebraischen Gebilde gehörigen Integralen zunächst eine *Primfunktion* $E(x, y)$ zusammensetzt, deren

Argumente x und y indes nicht gleichberechtigt sind. Als Funktion von x betrachtet, verschwindet E auf dem Gebilde nur an der Stelle y, besitzt aber mindestens eine wesentlich singuläre Stelle. Letzterer Umstand ist durch die Forderung bedingt, daß die Primfunktion als Funktion von x eindeutig sein soll. Statt dessen tritt in meinen Entwicklungen von Nr. XCV, XVI und XCVII, Abschnitt I, immer deutlicher werdend, die Idee einer *Primform* $\Omega(x, y)$ auf, wie es der konsequenten Verwendung homogener Variabler entspricht. Diese Primform ändert bei Vertauschung von x und y nur ihr Vorzeichen; sie wird also für $x = y$ gleich Null. Sie verschwindet sonst nirgendwo und bietet überhaupt keine singuläre Stelle dar. Dieses Ω ist dann freilich auf dem algebraischen Gebilde unendlich vieldeutig. Ich definiere die Primform folgendermaßen: Ich gehe von der Normalkurve der φ aus, wo die homogenen Koordinaten φ nicht wie bei Riemann Funktionen der Stelle sind, sondern „Formen", welche sich wie die überall endlichen Differentiale du verhalten, und bezeichne mit $d\omega$ den Quotienten eines beliebigen du dividiert durch das zugehörige φ. Bedeutet P sodann irgendein Integral dritter Gattung, welches Vertauschung von Argument und Parameter gestattet, so wird meine Primform durch folgenden Grenzübergang gewonnen:

$$\Omega(x\,y) = \sqrt{d\omega_x\, d\omega_y \cdot e^{-P_{x,\,y}^{x+dx,\, y+dy}}} \qquad \lim dx = 0,\ dy = 0,$$

der sich bequem ausführen läßt, wenn das Gebilde als Kurve der φ oder überhaupt als kanonische Kurve gegeben ist. Hier bleibt natürlich die Unbestimmtheit, die bei der Definition des Integrals P besteht. Diese Primform liefert nicht nur die algebraischen Funktionen und Integrale des Gebildes, sondern sie gestattet auch, den Aufbau der allgemeinen Jacobischen Funktionen in ihrer Abhängigkeit von den Stellen des Gebildes darzulegen. Und zwar erhält man (jeweils bis auf die als konstante Faktoren auftretenden Modulfunktionen des Gebildes) speziell die Sigmafunktionen, wenn man in der obigen Formel das Integral P durch das invariantentheoretisch ausgezeichnete Integral Q ersetzt, und die Thetafunktion, wenn man statt P das Clebsch-Gordansche Integral Π einführt. Indem man z. B. als Argumente der Thetafunktionen mit Clebsch und Gordan geeignete $(p+1)$-gliedrige Integralsummen nimmt und das Verschwinden dieser Thetafunktionen als Funktionen der oberen Integralgrenzen studiert, ergeben sich als wesentliche Bestandteile für den Aufbau ein p-gliedriges Produkt von Primformen und eine p-reihige Determinante der Formen φ, dividiert wieder durch ein Produkt von Primformen. So ist es in Abschnitt I von Abh. XCVII auseinandergesetzt und damit meines Ermessens ein wirklicher Fortschritt n der Theorie, aber freilich noch nicht der Abschluß erreicht. — Der Deutlichkeit wegen erwähne ich noch, daß die von mir sogenannten „Mittelformen", welche ich dabei einführe, wenn man will, bloße Abkürzungen von Kombinationen von Primformen und φ-Formen sind. Alles einzelne möge man an Ort und Stelle nachsehen. Dort werden auch genauere Literaturnachweise auf Weierstrass und Schottky einerseits, auf Prym-Rost und sonstige Autoren andererseits gegeben.

Was die Entstehung der Arbeiten XCV bis XCVII und die daran anknüpfenden weiteren Ansätze angeht, so möchte ich folgendes anführen:

Untersuchungen über hyperelliptische und Abelsche Integrale bzw. Funktionen haben mich, dem damaligen Zuge der Zeit folgend, von Beginn meiner wissenschaftlichen Laufbahn an, zeitweise immer wieder beschäftigt. So finden sich schon in Bd. 1 und Bd. 2 der vorliegenden Ausgabe mehrfach bezügliche Entwicklungen. In Bd. 1 (vgl. S. 45, 151 und die Abhandlungen XII, XIII) handelt es sich namentlich um Anwendungen auf die Liniengeometrie, insbesondere die Kummersche Fläche. In Bd. 2 folgen Auseinandersetzungen über den Verlauf der überall endlichen Integrale bei reellen algebraischen Kurven (vgl. die Abhandlungen XXXIX, XLI und XLII, von denen die letzte übrigens erst aus dem Jahre 1892 stammt). Dann namentlich Angaben über endliche Gruppen linearer Substitutionen, die man aus den Periodentransformationen derjenigen hyperelliptischen Funktionen $X_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ mit $p = 2$ gewinnen kann,

welche die genauen Analoga zu den Größen X_α, Y_α, Z_α der Theorie der elliptischen Funktionen sind (siehe die Bemerkungen auf S. 439, 440, 478, 479 und die Abhandlungen LVIII und LIX; die dort gegebenen Zitate sollen hier nicht wiederholt werden.)

Was nun die Abhandlungen XCV bis XCVII anlangt, so sind ihnen historisch meine Arbeiten über die allgemeine Riemannsche Funktionentheorie und meine ersten über automorphe Funktionen vorausgegangen. Es sollen diese aber erst im letzten Abschnitt dieses Bandes folgen, weil ich in ihnen die Krönung meiner funktionentheoretischen Untersuchungen sehe. Der Leser möge jedoch beim Studium von Nr. XCV bis XCVII (besonders bei dem des ersten Abschnittes von XCVII) meine Schrift über „Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale" (Nr. XCIX) und den Abschnitt I der „Neuen Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie" (Nr. CIII) heranziehen.

In meiner Leipziger Zeit hielt ich im Winter 1882/83 zunächst ein Seminar über hyperelliptische Funktionen. An diesem nahmen u. a. Krazer und Staude teil, deren einschlägige Arbeiten man vergleichen wolle.[1]) Ich habe zum Schluß ebendort, von Ostern 1885 bis Ostern 1886 eine eigene Spezialvorlesung über die niedersten hyperelliptischen Funktionen ($p = 2$) gehalten. Hier sind jene Ideen über zugehörige σ-Funktionen entstanden, die in Nr. XCV auseinandergesetzt sind und in Weiterführung derselben im Sinne meiner elliptischen Stufentheorie diejenigen über die hyperelliptischen $X_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$, über die zwar meinerseits keine Veröffentlichungen vorliegen, wohl aber die in Bd. 2 dieser Ausgabe a. a. O. zitierten Arbeiten von Reichardt, Witting, Maschke und Burkhardt. Von Ostern 1887 bis Ostern 1888 habe ich dann in Göttingen über allgemeine hyperelliptische Funktionen gelesen und anschließend die Abhandlung XCVI geschrieben. Auf Arbeiten von Bolza, J. Schröder und Thomson, welche damals unter meinem Einfluß entstanden sind, und auf Untersuchungen von Wiltheiss und Brioschi, welche die Reihenentwicklung der hyperelliptischen Sigmafunktionen weiter förderten, wird noch im Text zurückzukommen sein.

Unter allen meinen Mitarbeitern hat mir damals keiner mehr geholfen als Burkhardt. Ich nenne gleich hier zwei größere von ihm veröffentlichte Abhandlungen, die als wesentliche Vervollständigungen meiner einschlägiger Darstellungen in Nr. XCV und XCVI anzusehen sind:

1. *Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Nach Vorlesungen von F. Klein.* (Math. Annalen, Bd. 35, 1889.) Hier werden die Ideen, die ich früher für $p = 1$ entwickelt hatte, namentlich die Stufentheorie (vgl. die im ersten Abschnitt des vorliegenden Bandes zusammengestellten Arbeiten) auf den nächst höheren Fall $p = 2$ übertragen. Die Darstellung greift also wesentlich über den jetzigen Ideenkreis hinaus.
2. *Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunktionen.* (Math. Annalen, Bd. 32, 1888). Diese Arbeit enthält den vollen und sorgfältigen Beweis aller der Angaben, die ich für hyperelliptische Funktionen von beliebigem p in der Abhandlung XCVI gemacht hatte. In Bd. 32 der Math. Annalen folgte s. Z. Burkhardts Arbeit unmittelbar hinter der meinen.

Burkhardt hat in der Folge noch interessante Beiträge zur Transformationstheorie der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung veröffentlicht; vgl. Math. Annalen, Bde. 36, 38, 41 (1890 bis 1892) wie auch die Bemerkung auf S. 479 in Bd. 2 dieser Gesamtausgabe. Auch hier ist wieder sein volles Verständnis der Theorie und der Tragweite der Hilfsmittel zu rühmen, das durch die Sorgfalt, mit der alle Schlüsse gezogen werden, womöglich noch übertroffen wird. Doch kann auf diese Untersuchungen an gegenwärtiger Stelle nicht näher eingegangen werden. Über Burk-

[1]) Das schönste Resultat, welches sich ergab, ist zweifellos die Staudesche Fadenkonstruktion des Ellipsoids.

hardt, der schon 1914 starb, und seine Arbeiten berichten Nachrufe von Liebmann in den Jahresberichten der deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 24 (1915) und von Dyck im Jahrbuch 1915 der Münchener Akademie.

Endlich, was die ausführliche Abhandlung Nr. XCVII über Abelsche Funktionen beliebigen Geschlechtes angeht, so ist ihr eine dreisemestrige Spezialvorlesung, die ich von Ostern 1888 bis Herbst 1889 gehalten habe, vorangegangen. Unmittelbar anschließende Arbeiten meiner Schüler Osgood und White über besondere kanonische Kurven und solche meiner Mitarbeiter Pascal und Wiltheiss über Reihenentwicklungen der Sigmafunktionen im Falle $p = 3$ sind wieder im Texte genannt. Ich erwähne aber bereits an gegenwärtiger Stelle, daß Wirtinger und Ritter meine Ansätze bald wesentlich weiterführten.

Von Wirtinger will ich in dieser Hinsicht nennen: Die Herstellung des Analogons der Kummerschen Fläche für $p = 3$ in den Göttinger Nachrichten von 1889 und für beliebiges p in den Wiener Monatsheften 1890, vor allen Dingen aber die Erledigung des Jacobischen Umkehrproblems für $p = 3$ in einer der invariantentheoretischen Auffassung (unter Wahrung des natürlichen Rationalitätsbereiches) entsprechenden völlig symmetrischen Form, in den Math. Annalen, Bd. 40, 1892. Eine kurze Analyse beider Arbeiten soll am Schluß von Nr. XCVII, S. 473 u. 474 folgen. Die wichtigen späteren Arbeiten von Wirtinger über $p = 4$ und die allgemeinen $2p$-fach periodischen Funktionen können hier selbstverständlich nicht noch besonders genannt werden, weil sie sich nicht unmittelbar an meine hier abgedruckten Arbeiten anschließen.

Von Ritter aber kommt insonderheit in Betracht die Abhandlung über die „multiplikativen“ Formen auf algebraischen Gebilden beliebigen Geschlechtes, in den Math. Annalen, Bd. 44, 1894. Es sind dies solche Formen, die sich bei Umläufen auf dem Gebilde bis auf konstante Faktoren reproduzieren. Nachdem Ritter die von mir eingeführten Primformen und Mittelformen hinsichtlich ihres bezüglichen Verhaltens bei Umläufen genau studiert hat, kann er seine multiplikativen Formen aus ihnen synthetisch aufbauen. Unter ihnen finden sich natürlich die algebraischen Formen, die sich bei beliebigen Umläufen ungeändert, und die Wurzelformen, welche sich bis auf Einheitswurzeln reproduzieren. Ritter bemerkt aber, daß das System dieser besonderen Formen gegenüber birationalen Transformationen des Gebildes nicht invariant ist, daß man vielmehr, um ein invariantes System zu erhalten, zu den allgemeinen multiplikativen Formen aufsteigen muß. — Auf sonstige Arbeiten von Ritter komme ich noch im folgenden Abschnitt des gegenwärtigen Bandes zurück. Sie sind leider nicht mehr zu dem von ihm geplanten, glänzenden Abschluß gekommen, weil ihn ein frühzeitiger Tod ereilte (1895). Ich habe seiner besonderen Leistung in Bd. 4 der Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung (1895) Worte der Erinnerung gewidmet.

Die Theorie der hyperelliptischen und Abelschen Funktionen ist nachgerade ein weitschichtiges Gebiet, dessen Gesamtgliederung um so schwerer zu überblicken ist, als sich die verschiedenen Autoren verschiedener Grundauffassungen und Ausdrucksweisen bedienen. Um so lieber weise ich hier zum Schlusse noch darauf hin, daß in dem erst letzthin (1921) in Bd. II_2 der mathematischen Enzyklopädie erschienenen umfangreichen Referate von Krazer und Wirtinger über „Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen“ die Gesamtheit der vorliegenden Literatur übersichtlich zusammengestellt und eingehend besprochen ist. Was meine eigenen und die unmittelbar damit zusammenhängenden Arbeiten angeht, so vergleiche man daselbst insbesondere die Nummern 64, 83, 84 und 93 bis 103. Außerdem nenne ich das bereits 1901 erschienene Referat Wirtinger über „algebraische Funktionen und ihre Integrale“ in demselben Enzyklopädieband, von welchem besonders die Nummern 37, 38 und 39 in Betracht kommen. Neben diesen Enzyklopädiereferaten ist übrigens immer noch der Bericht von Brill und Noether über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in Bd. 3 der Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung (1894) von Bedeutung, auf den ich noch späterhin zurückkomme. K.

XCV. Über hyperelliptische Sigmafunktionen.

(Erster Aufsatz.)

[Math. Annalen, Bd. 27 (1886).]

§ 1.

Begriff der σ-Funktionen.

Wenn man versuchen will, die neueren Fortschritte der Theorie der elliptischen Funktionen auf die Theorie der hyperelliptischen Funktionen (zunächst zweier Variabler) zu übertragen, so scheint es in erster Linie nötig, statt der 16 Thetafunktionen der gewöhnlichen Theorie

$$\vartheta(v_1, v_2;\ \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

solche 16 Funktionen einzuführen, die sich bei linearer Transformation der Perioden ohne Zutritt irgendwelcher Faktoren einfach permutieren.

Man nähert sich diesem Ziele in einer für viele Zwecke ausreichenden Weise, wenn man mit Weierstrass die geraden Thetafunktionen durch ihre Nullwerte, die ungeraden durch die Nullwerte gewisser (hernach noch genauer zu definierender) Differentialquotienten dividiert[1]). Die so entstehenden Funktionen permutieren sich nämlich bei linearer Transformation der Perioden bis auf einen bei allen gemeinsam auftretenden, von den Koeffizienten der Transformation abhängenden Exponentialfaktor:

$$(1)\qquad e^{c_{11} v_1^2 + 2 c_{12} v_1 v_2 + c_{22} v_2^2},$$

so daß also irgendwelche für die Funktionen aufgestellte *homogene* Relationen sich so umsetzen, als hätte eine reine Permutation der Funktionen stattgefunden. Dies Verhalten wird der Art nach nicht geändert, wenn man die in Rede stehenden Funktionen von vornherein noch mit einem gemeinsamen, beliebig anzunehmenden Exponentialfaktor:

$$(2)\qquad e^{A_{11} v_1^2 + 2 A_{12} v_1 v_2 + A_{22} v_2^2}$$

multipliziert, so daß also alle auf solche Weise entstehenden Funktionen

[1]) Man vgl. insbesondere die Ausführungen bei Staude im 24. Bande der Math. Annalen (1884).

zunächst gleichberechtigt erscheinen. Ich werde die so definierten Funktionen vorübergehend mit

$$\Theta(v_1, v_2;\ \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

bezeichnen.

Wenn es sich jetzt darum handeln soll, statt der ϑ-Funktionen solche einzuführen, die sich bei linearer Transformation der Perioden glatt permutieren, so kann es von vornherein keinem Zweifel unterliegen, daß derartige Funktionen unter den Θ mitenthalten sind. Unser Problem kann also dahin spezialisiert werden, *daß wir verlangen, den zunächst willkürlichen Faktor* (2) *so festzulegen, daß die bei linearer Transformation der Perioden im allgemeinen auftretenden Faktoren* (1) *überhaupt in Wegfall kommen.* Ich werde im folgenden Paragraphen zeigen, daß es in der Tat in einfacher Weise gelingt, dieser Forderung zu entsprechen. Indem ich fortwährend die Analogie mit Weierstrass' Theorie der elliptischen Funktionen festhalte, bezeichne ich die neuen, so entstehenden Funktionen als *σ-Funktionen* (während Herr Weierstrass selbst im Falle der hyperelliptischen und Abelschen Funktionen vorzuziehen scheint, den Faktor (2) überhaupt unbestimmt zu lassen und sämtliche Funktionen, die wir gerade Θ nannten, als σ-Funktionen zu bezeichnen[2])).

Ich will hier gleich einer anderen Ausdrucksweise gedenken, die ich gelegentlich gebrauche. Es handelt sich um eine gemeinsame Benennung aller derjenigen Funktionen, welche aus Thetafunktionen ν-ter Ordnung durch Zufügung irgendwelcher Faktoren der folgenden Form

$$K \cdot e^{a_{11}v_1^2+2a_{12}v_1v_2+a_{22}v_2^2}$$

(wo die $K, a_{11}, a_{12}, a_{22}$ ganz beliebige Konstante sind) entstehen. Ich werde dieselben, wie dies auch anderweitig schon geschehen ist als *Jacobische Funktion der ν-ten Ordnung* bezeichnen. — Meine sonstige Terminologie ist die allgemein übliche. Unter [*Charakteristik* einer ϑ-Funktion verstehe ich ausschließlich einen gewissen Komplex von halben ganzen Zahlen, so daß also die Verallgemeinerung, die in der Einführung beliebig gebrochener Charakteristiken liegt, hier einstweilen ausgeschlossen bleibt[3]).

§ 2.

Aufstellung der zehn geraden σ-Funktionen.

Wir beschränken uns jetzt zunächst auf gerade Funktionen. Indem wir den Nullwert eines geraden $\vartheta(v_1, v_2)$ kurz mit ϑ bezeichnen und der

[2]) Man vgl. Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1882 [= Math. Werke, Bd. III, S. 155—159] oder auch die einleitenden Paragraphen bei Schottky: *Abriß einer Theorie der Abelschen Funktionen von 3 Variabelen* (Teubner, Leipzig 1880).

[3]) [Für allgemeine Thetafunktionen mit beliebiger Variabelnzahl und beliebigen rationalen Charakteristiken hat Krazer in den Math. Annalen, Bd. 33 (1889) die folgenden Betrachtungen sinngemäß erweitert. K.]

Einfachheit halber jede Charakteristikenbezeichnung beiseite lassen, setzen wir dem eben Gesagten zufolge:

$$\Theta(v_1, v_2) = e^{A_{11}v_1^2+2A_{12}v_1v_2+A_{22}v_2^2} \cdot \frac{\vartheta(v_1, v_2)}{\vartheta}. \tag{3}$$

Um hier die A_{ik} in solcher Weise zu bestimmen, daß σ-Funktionen resultieren, betrachten wir das Produkt sämtlicher gerader Θ:

$$\prod_1^{10} \Theta(v_1, v_2) = e^{10(A_{11}v_1^2+2A_{12}v_1v_2+A_{22}v_2^2)} \cdot \prod_1^{10} \frac{\vartheta(v_1, v_2)}{\vartheta} \tag{4}$$

Wenn sich bei linearer Transformation der Perioden unsere Θ bis auf einen bei allen gemeinsam zutretenden Faktor (1):

$$e^{c_{11}v_1^2+2c_{12}v_1v_2+c_{22}v_2^2}$$

vertauschen, so wird dies Produkt bis auf den Faktor:

$$e^{10(c_{11}v_1^2+2c_{12}v_1v_2+c_{22}v_2^2)}$$

ungeändert bleiben: sollen also die Θ speziell in σ übergehen, so muß das Produkt überhaupt invariant sein. Aber auch der Rückschluß läßt sich machen: Ist unser Produkt invariant, so folgt

$$c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0.$$

Wir werden uns also zunächst ausschließlich mit dem Produkte (4) beschäftigen.

Wir wollen unser Produkt insbesondere in eine nach Potenzen von v_1, v_2 fortschreitende Reihe entwickeln. Indem wir die Terme gleicher Ordnung in leicht verständlicher Weise zusammenfassen, haben wir (da es sich um eine gerade Funktion handelt):

$$\prod \Theta = 1 + [v_1, v_2]_2 + [v_1, v_2]_4 + \cdots; \tag{5}$$

wir haben gleichzeitig:

$$\begin{aligned} e^{10(c_{11}v_1^2+2c_{12}v_1v_2+c_{22}v_2^2)} = 1 &+ 10(c_{11}v_1^2 + 2c_{12}v_1v_2 + c_{22}v_2^2) \\ &+ 50(c_{11}v_1^2 + 2c_{12}v_1v_2 + c_{22}v_2^2)^2 \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

Wir können also $(c_{11}v_1^2 + 2c_{12}v_1v_2 + c_{22}v_2^2)$ *definieren als den zehnten Teil derjenigen Änderung, welche die Terme zweiter Ordnung* $[v_1, v_2]_2$ *der Reihenentwicklung* (5) *bei linearer Transformation der Perioden erfahren*[4]). Wollen wir jetzt statt der Θ speziell σ-Funktionen haben, so

[4]) Man vergesse hier nicht, was ich der Kürze halber im Texte nicht weiter hervorhebe, daß bei linearer Transformation der Perioden die v_1, v_2 selbst lineare Umsetzungen erleiden. Dagegen bleiben die später einzuführenden u_1, u_2 bei linearer Transformation der Perioden ungeändert.

genügt es, besagte Terme zweiter Ordnung gegenüber linearer Transformation der Perioden invariant zu machen: die Invarianz der höheren Terme und also unseres Produktes folgt dann von selbst.

Hiermit nun haben wir eine bestimmte, aber noch unendlich vieler Lösungen fähige Aufgabe. Da wir nämlich die A_{ik} in (3), (4) ganz beliebig annehmen dürfen, so können wir $[v_1, v_2]_2$ in (5) jeder beliebigen quadratischen Form von v_1, v_2 gleich machen, und es gibt also so viele verschiedenartige σ-Funktionen, als es quadratische Formen von v_1, v_2 gibt, die bei linearer Transformation der Perioden ungeändert bleiben. Auf die hiermit berührte Frage nach der allgemeinsten Bestimmung von σ-Funktionen werde ich erst späterhin zurückkommen. An gegenwärtiger Stelle kommt es nur darauf an, der aufgestellten Forderung in irgendeiner (möglichst einfachen) Weise zu genügen. Das evidente Prinzip, dessen wir uns zu diesem Zwecke bedienen, ist dies, daß $[v_1, v_2]_2$ bei linearer Transformation jedenfalls ungeändert bleibt, wenn es von vornherein identisch verschwindet. *Wir wollen also in der Folge Funktionen* (3) *dann und nur dann als σ-Funktionen bezeichnen, wenn in der Reihenentwicklung* (5) *die Terme zweiter Ordnung einfach wegfallen.* Der Erfolg wird zeigen, daß die spezielle Festsetzung, die wir hiermit getroffen haben, in der Tat zu den *einfachsten* Funktionen hinführt, die unserer anfänglichen Forderung genügen.

Die Bestimmung der A_{ik} in (3) geschieht jetzt folgendermaßen. Ich will die Nullwerte der zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \vartheta(v_1, v_2)}{\partial v_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta(v_1, v_2)}{\partial v_1 \partial v_2}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta(v, v_2)}{\partial v_2^2}$$

der Kürze halber mit $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \vartheta_{22}$ bezeichnen. Dann ist für ein beliebiges gerades ϑ dem Taylorschen Lehrsatze zufolge:

$$\frac{\vartheta(v_1, v_2)}{\vartheta} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta} \cdot v_1^2 + 2\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta} \cdot v_1 v_2 + \frac{\vartheta_{22}}{\vartheta} \cdot v_2^2\right) + \ldots$$

Dies in (5) eingesetzt, erhalten wir sofort vermöge unserer Forderung:

$$A_{11} = -\frac{1}{20}\sum_1^{10}\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta}, \quad A_{12} = -\frac{1}{20}\sum_1^{10}\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta}, \quad A_{22} = -\frac{1}{20}\sum_1^{10}\frac{\vartheta_{22}}{\vartheta},$$

(wo die Summation über alle geraden ϑ zu erstrecken ist). *Wir finden also für die geraden σ folgende Definition, die fernerhin zugrunde zu legen ist:*

$$(6) \qquad \sigma(v_1, v_2) = e^{-\frac{1}{20}\left(\sum_1^{10}\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta} \cdot v_1^2 + 2\sum_1^{10}\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta} \cdot v_1 v_2 + \sum_1^{10}\frac{\vartheta_{22}}{\vartheta} \cdot v_2^2\right)} \cdot \frac{\vartheta(v_1, v_2)}{\vartheta}.$$

§ 3.

Bezeichnungen.

Ehe wir weiter schreiten, wird es zweckmäßig sein, gewisse Bezeichnungen zu verabreden, bez. die in ihnen liegende, für unsere weiteren Entwicklungen fundamentale Bedeutung hervorzuheben.

Zunächst: für die Auffassung, die ich zu entwickeln habe, ist es der wesentlichste Punkt, daß die ganze Funktion sechsten Grades, welche bei den hyperelliptischen Integralen unter dem Quadratwurzelzeichen vorkommt, in keinerlei kanonischer Form vorausgesetzt wird, während gleichzeitig möglichst übersichtlich sein soll, welchen Erfolg jeweils irgendeine lineare Substitution hat, der die Integrationsvariable unterworfen wird. Dementsprechend bedienen wir uns durchweg *homogener* Variabler $z_1 : z_2$ usw., so daß die genannte ganze Funktion in eine *binäre Form sechsten Grades* übergeht:

$$(7) \qquad f(z_1, z_2), \quad \text{oder} \quad f(x_1, x_2) \text{ usw.} \ldots,$$

(was wir dann freilich der Kürze halber meist wieder mit $f(z), f(x), \ldots$ bezeichnen), während die einfachsten beiden zugehörigen überall endlichen Integrale die folgende Form gewinnen:

$$(8) \qquad u_1 = \int_y^x \frac{z_1(z\,dz)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}, \quad u_2 = \int_y^x \frac{z_2(z\,dz)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}.$$

Hier steht $(z\,dz)$ abkürzend für $(z_1\,dz_2 - z_2\,dz_1)$, x und y in den Grenzen für $\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}$, oder, was genauer ist, für $\varrho x_1, \varrho x_2, \varrho^3\sqrt{f(x)}$ und $\varrho y_1, \varrho y_2, \varrho^3\sqrt{f(y)}$, unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden, dessen Wert völlig gleichgültig ist, und der nur der Symmetrie wegen eingefügt wurde. Als Funktion der x_1, x_2, wie der y_1, y_2, sind u_1, u_2 von der 0-ten Dimension, indem die unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke, wie selbstverständlich, nur von dem Quotienten $z_1 : z_2$ abhängen. Als Funktionen der Koeffizienten von f sind sie aus dem entsprechenden Grunde von der $(-\frac{1}{2})$-ten Dimension.

Wir fixieren jetzt auf der zur Irrationalität $\sqrt{f}$ gehörigen Riemannschen Fläche ein System kanonischer Querschnitte A_1, A_2, B_1, B_2, bei deren Überschreitung u_1, u_2 beziehungsweise die folgenden Perioden darbieten mögen:

(9)

	A_1	A_2	B_1	B_2
u_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
u_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

Die eigentlich wichtigen Größen der weiteren Theorie sind dann die *Unterdeterminanten:*

$$u_1\omega_{2k} - u_2\omega_{1k}, \quad \omega_{1i}\omega_{2k} - \omega_{2i}\omega_{1k}, \tag{10}$$

von denen ich die letzteren mit p_{ik} bezeichne:

$$p_{ik} = \omega_{1i}\omega_{2k} - \omega_{2i}\omega_{1k} = -p_{ki}. \tag{10b}$$

Zwischen ihnen bestehen wohlbekannte Relationen, von denen ich hier nur diejenigen hinschreibe, die sich auf die p_{ik} beziehen, nämlich erstens die Gleichung:

$$\Pi = p_{13} + p_{24} = 0, \tag{11}$$

ferner die Identität:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \tag{12}$$

Unsere eigentliche Tendenz muß sein, unter den Größen (10) diejenigen, welche gleichberechtigt sind, auch formal in gleichförmiger Weise zu benutzen. Da wir aber bei unseren Entwicklungen an die Theorie der ϑ-Funktionen anknüpfen, so haben wir hier zunächst in unsymmetrischer Weise vorzugehen. *Die Größen $v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, welche als Argumente der ϑ-Funktionen fungieren, sind einfach fünf voneinander unabhängige Quotienten der Unterdeterminanten* (10). Man hat:

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{u_1\omega_{22} - u_2\omega_{12}}{p_{12}}, \\ v_2 = \dfrac{u_1\omega_{21} - u_2\omega_{11}}{p_{21}} \end{cases} \tag{13}$$

und hierzu das Periodenschema:

(14)

	A_1	A_2	B_1	B_2
v_1	1	0	$\tau_{11} = \dfrac{p_{32}}{p_{12}}$	$\tau_{12} = \dfrac{p_{42}}{p_{12}}$
v_2	0	1	$\tau_{21} = \dfrac{p_{13}}{p_{12}}$	$\tau_{22} = \dfrac{p_{14}}{p_{12}}$

wo nun, infolge von (11), $\tau_{12} = \tau_{21}$ ist.

Wir gedenken jetzt gleich derjenigen Eigenschaft der Unterdeterminanten (10), die in der Folge zumeist in Betracht kommt und die sich auf ihr Verhalten gegenüber linearer Substitution der Integrationsvariabelen $z_1 : z_2$ bezieht. Um schon hier diejenige Ausdrucksweise zu benutzen, die wir fernerhin immer gebrauchen, wollen wir sagen, *daß unsere Unterdeterminanten transzendente Kovarianten, bez. transzendente Invarianten der Form f sind.* Unterwerfen wir nämlich die homogenen Variabelen z_1, z_2 und ebenso die x_1, x_2 bez. y_1, y_2, welche in den Grenzen der Integrale auftreten, einer und derselben übrigens beliebigen linearen Substitution:

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha z_1' + \beta z_2', \quad & x_1 &= \alpha x_1' + \beta x_2', \\ z_2 &= \gamma z_1' + \delta z_2'; \quad & x_2 &= \gamma x_1' + \delta x_2', \quad \text{usw.}, \end{aligned} \tag{15}$$

setzen ferner:

$$u_1' = \int_{y'}^{x'} \frac{z_1'(z'dz')}{\sqrt{f'(z_1', z_2')}}, \quad u_2' = \int_{y'}^{x'} \frac{z_2'(z'dz')}{\sqrt{f'(z_1', z_2')}},$$

so kommt:

$$\begin{cases} u_1 = r(\alpha u_1' + \beta u_2'), \\ u_2 = r(\gamma u_1' + \delta u_2'), \end{cases} \tag{16}$$

wo r die Determinante der Substitution (15) bezeichnet:

$$r = \alpha\delta - \beta\gamma, \tag{17}$$

und ebenso für die zu irgend einem Querschnitte der Riemannschen Fläche gehörigen Perioden:

$$\begin{cases} \omega_{1k} = r(\alpha\omega_{1k}' + \beta\omega_{2k}'), \\ \omega_{2k} = r(\gamma\omega_{1k}' + \delta\omega_{2k}'). \end{cases} \tag{18}$$

Daher kommt für die p_{ik}:

$$p_{ik} = r^3 \cdot p_{ik}', \tag{19}$$

und ebenso für die anderen Unterdeterminanten, was eben die Invarianteneigenschaft ausmacht. Wenn wir speziell die p_{ik} als Invarianten, die anderen Unterdeterminanten als Kovarianten bezeichneten, so sollte dies ausdrücken, daß erstere nur von den Koeffizienten von f abhängen, letztere außerdem Variable, nämlich die u_1, u_2, enthalten. Die Quotienten $v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, die bei (15) durchaus ungeändert bleiben, würde man *absolute* Kovarianten, bez. Invarianten von f nennen können.

Bemerken wir noch, daß die Unterdeterminanten (10) in den Koeffizienten von f von der Dimension (-1) sind.

Wir gedenken jetzt der zweierlei Zerlegungen von f, die wir fernerhin gebrauchen. Es handelt sich erstens (den 10 geraden Thetafunktionen oder Sigmafunktionen entsprechend) um die auf 10 Weisen mögliche Zerlegung von f in zwei kubische Formen:

$$f = \varphi \cdot \psi, \tag{20}$$

dann aber (den 6 ungeraden Funktionen entsprechend) um die auf sechs Weisen mögliche Zerlegung von f in eine Linearform p und eine Form fünften Grades χ:

$$f = p \cdot \chi. \tag{21}$$

Die Koeffizienten von f sind bilineare ganze Funktionen der Koeffizienten von φ und ψ, beziehungsweise von p und χ, außerdem hängen sie von φ und ψ symmetrisch ab.

§ 4.

Die Definition der sechs ungeraden σ. Die Kovarianteneigenschaft der σ-Funktion.

Um zunächst die Definition der ungeraden σ nachzutragen, benutzen wir den von anderer Seite bekannten Satz, daß bei der Reihenentwicklung einer ungeraden ϑ-Funktion nach Potenzen von u_1, u_2 die Terme erster Ordnung folgendermaßen lauten:

$$C(p_1 u_1 + p_2 u_2),$$

wo $p_1 z_1 + p_2 z_2 = p$ die Linearform ist, die in der zum ungeraden ϑ gehörigen Zerlegung (21) auftritt, und wir für C die Doppelformel anschreiben können:

$$C = \frac{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u_1}\right)_{u_1=0,\ u_2=0}}{p_1} = \frac{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u_2}\right)_{u_1=0,\ u_2=0}}{p_2}. \tag{22}$$

Nach dem Verfahren, welches wir in § 1 andeuteten, haben wir jetzt, um zur entsprechenden σ-Funktion zu gelangen, nur folgendes zu tun: wir haben erstens durch C zu dividieren und dann mit dem in § 2 bestimmten Exponentialfaktor zu multiplizieren. *Wir setzen also im Falle einer ungeraden Charakteristik:*

$$\sigma(v_1, v_2) = e^{-\frac{1}{20}\left(\sum\limits_1^{10}\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta}\cdot v_1^2 + 2\sum\limits_1^{10}\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta}\cdot v_1 v_2 + \sum\limits_1^{10}\frac{\vartheta_{22}}{\vartheta}\cdot v_2^2\right)}\cdot\frac{\vartheta(v_1, v_2)}{C}, \tag{23}$$

wo die Summen im Exponenten nach wie vor über die geraden Charakteristiken zu nehmen sind.

Es wird nützlich sein, an die nunmehr gewonnenen Definitionen der geraden und ungeraden σ noch eine Bemerkung zu schließen. Die geraden σ sind vermöge (6) unmittelbar Funktionen der $v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, während sich die ungeraden nach (23) erst in solche verwandeln, wenn man sie mit $p_1 u_1 + p_2 u_2$ dividiert. Nun sahen wir aber, daß sich bei der linearen Substitution (15) die v_1, v_2, τ_{ik} gar nicht ändern, während gleichzeitig, nach Formel (16), $p_1 u_1 + p_2 u_2$ in $r(p_1' u' + p_2' u_2')$ übergehen wird. Dementsprechend haben wir für das Verhalten unserer σ-Funktionen der Substitution (15) gegenüber, wenn wir uns noch gestatten, die u_1, u_2 als Argumente der σ-Funktionen zu betrachten, die Formeln:

$$\begin{cases} \text{bei gerader Charakteritik: } \sigma(u_1, u_2) = \sigma(u_1', u_2'), \\ \text{bei ungerader Charakteristik: } \sigma(u_1, u_2) = r\cdot\sigma(u_1', u_2'). \end{cases} \tag{24}$$

Wir können die σ also wieder als *Kovarianten* bezeichnen: *die geraden σ sind absolute Kovarianten, die ungeraden haben das Gewicht* 1. Außerdem hängen die geraden σ in einer fernerhin noch genauer anzugebenden Weise zehnwertig von den Koeffizienten von f allein ab, die ungeraden σ aber

von den Koeffizienten von f und p, — wobei zwar das Verhältnis $p_1 : p_2$ aus der Gleichung $f = 0$ sechswertig bestimmt werden kann, aber die absolute Fixierung der p_1, p_2 selbst der Willkür überlassen bleibt. *Die geraden σ sind Kovarianten von f allein, die ungeraden σ simultane Kovarianten von f und p.*

§ 5.

Umgestaltung des in § 2 eingeführten Exponentialfaktors.

Der in § 2 eingeführte Exponentialfaktor kann noch wesentlich vereinfacht werden, wie jetzt geschehen soll. Vermöge der partiellen Differentialgleichung der ϑ-Funktionen haben wir für die Nullwerte der geraden ϑ:

$$\vartheta_{11} = 4i\pi\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{11}}, \quad \vartheta_{12} = 2i\pi\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{12}}, \quad \vartheta_{22} = 4i\pi\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{22}}.$$

Daher können wir den in Rede stehenden Exponentialfaktor jedenfalls folgendermaßen schreiben:

$$e^{-\frac{i\pi}{5}\left(\sum\limits_1^{10}\frac{\partial\log\vartheta}{\partial\tau_{11}}\cdot v_1^2 + \sum\limits_1^{10}\frac{\partial\log\vartheta}{\partial\tau_{12}}\cdot v_1 v_2 + \sum\limits_1^{10}\frac{\partial\log\vartheta}{\partial\tau_{22}}\cdot v_2^2\right)}. \tag{25}$$

Hier nun tragen wir für das einzelne ϑ seinen von anderer Seite bekannten Wert ein. Ist $f = \varphi\cdot\psi$ diejenige Zerlegung, welche dem in Betracht genommenen ϑ im Sinne von (20) entspricht, und bezeichnen wir die Diskriminanten von φ und ψ mit $\Delta\varphi$, bez. $\Delta\psi$, so hat man die Formel[5]):

$$\vartheta = \sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}}\cdot\sqrt[8]{\Delta\varphi\cdot\Delta\psi}.$$

Ziehen wir zusammen, so erhalten wir schließlich statt (25), unter D die Diskriminante von f selbst verstanden:

$$e^{-\frac{i\pi}{10}\left(\frac{\partial\log D}{\partial\tau_{11}}\cdot v_1^2 + \frac{\partial\log D}{\partial\tau_{12}}\cdot v_1 v_2 + \frac{\partial\log D}{\partial\tau_{22}}\cdot v_2^2\right)},$$

oder auch, wenn wir die τ durch ihre Werte in den p_{ik} ersetzen:

$$e^{-\frac{i\pi p_{12}}{10}\left(\frac{\partial\log D}{\partial p_{32}}\cdot v_1^2 + \frac{\partial\log D}{\partial p_{42}}\cdot v_1 v_2 + \frac{\partial\log D}{\partial p_{14}}\cdot v_2^2\right)}.\text{[6]}) \tag{26}$$

Die hiermit gefundene Formel bedarf noch einer gewissen Erläuterung. Die Diskriminante D ist, wie jede rationale Invariante von f, eine ho-

[5]) Vgl. Thomae im 71. Bande von Crelles Journal (1869/70). Für die Konstante C (Formel (22) des Textes) entnehmen wir derselben Abhandlung den Wert:

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}}\cdot\sqrt[8]{\Delta\chi},$$

wo $\Delta\chi$ die Diskriminante der Form 5. Grades ist, die in der Zerlegung $f = p\cdot\chi$ vorkommt. [Thomae nennt abweichend das Differenzenprodukt „Diskriminante Δ".]

[6]) [Bei dieser Umformung ist p_{12} als Parameter anzusehen.]

mogene Funktion der Unterdeterminanten p_{ik} (hyperelliptische Modulfunktion) und zwar, wie ich beiläufig bemerke, vom (-10)-ten Grade (da ja das einzelne p_{ik} in den Koeffizienten von f von der Dimension -1 ist). Nun kann aber jede solche Funktion vermöge der unter (11), 12) mitgeteilten Relationen:

$$\Pi = 0, \quad P = 0$$

in sehr verschiedene Gestalten gesetzt werden. In Formel (26) ist, der Entstehung dieser Formel entsprechend, D in der Weise aufzufassen, daß $(p_{12})^{10} \cdot D$ nur von $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ abhängt, D erscheint also als Funktion allein von $p_{12}, p_{32}, p_{42}, p_{14}$. Dies ist eine unsymmetrische Einführung der p_{ik}, welche man, allgemein zu reden, durch Vermehrung von D um irgendwelche Multipla der Ausdrücke Π und P zu korrigieren bestrebt sein wird. Ich will dem hiermit angeregten Gedanken an vorliegender Stelle nur so weit Rechnung tragen, daß ich für D den gleichwertigen Ausdruck

$$\Delta = D + \frac{\Pi}{2} \cdot \frac{\partial D}{\partial p_{42}} \tag{27}$$

einführe. Es ist dann

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p_{13}} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{42}} = \frac{1}{2} \frac{\partial D}{\partial p_{42}} \tag{28}$$

und unser Exponentialfaktor nimmt folgende Gestalt an, in welcher die Differentiation nach p_{42} ohne weiteres durch eine Differentiation nach p_{13} ersetzt werden kann:

$$e^{\frac{-i\pi p_{12}}{10}\left(\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{32}} \cdot v_1^2 + 2 \frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{42}} \cdot v_1 v_2 + \frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{14}} \cdot v_2^2\right)}. \tag{29}$$

§ 6.

Verhalten der σ bei Vermehrung der Argumente um Perioden.

Wir suchen nunmehr die Funktionalgleichungen, denen unsere σ bei Vermehrung der u_1, u_2, oder der v_1, v_2, um Perioden unterliegen. Indem wir für erste nur die Charakteristik $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ in Betracht ziehen und diese der Einfachheit halber nicht weiter zusetzen, beginnen wir mit der Formel

$$\vartheta(v_1 + 1, v_2) = \vartheta(v_1, v_2).$$

Aus ihr ergibt sich durch direkte Umrechnung vermöge (29):

$$\sigma(u_1 + \omega_{11}, u_2 + \omega_{21}) = E \cdot \sigma(u_1, u_2)$$

wo E den folgenden Exponentialfaktor bedeutet:

$$E = e^{\frac{-i\pi}{5}\left(\left(\omega_{22}\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{32}} - \omega_{21}\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{13}}\right)\left(u_1 + \frac{\omega_{11}}{2}\right) + \left(\omega_{12}\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{23}} - \omega_{11}\frac{\partial \log \Delta}{\partial p_{31}}\right)\left(u_2 + \frac{\omega_{21}}{2}\right)\right)}.$$

Jetzt ist, da Δ, zufolge (27), das p_{34} gar nicht enthält:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{13}} = -\frac{\partial \Delta}{\partial p_{13}} \cdot \omega_{21} + \frac{\partial \Delta}{\partial p_{32}} \cdot \omega_{22},$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_{23}} = -\frac{\partial \Delta}{\partial p_{31}} \cdot \omega_{11} + \frac{\partial \Delta}{\partial p_{23}} \cdot \omega_{12}.$$

Daher wird unsere Formel:

$$\sigma(u_1 + \omega_{11}, u_2 + \omega_{21}) = e^{-\frac{i\pi}{5}\left(\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_{13}}\left(u_1 + \frac{\omega_{11}}{2}\right) + \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_{23}}\left(u_2 + \frac{\omega_{21}}{2}\right)\right)} \cdot \sigma(u_1, u_2), \tag{30}$$

wo wir hinterher Δ durch irgendeine Kombination

$$\Delta + M \cdot P \tag{31}$$

ersetzen können, indem der Ausdruck P (Formel (12)) nicht nur selbst identisch verschwindet, sondern auch, nach irgendeiner Periode (ω_{13}, ω_{23} usw.) differentiiert, identisch verschwindende Differentialquotienten liefert.

Die Rechnung für die zweite Periode verläuft selbstverständlich ganz entsprechend; *wir finden:*

$$\sigma(u_1 + \omega_{12}, u_2 + \omega_{22}) = e^{-\frac{i\pi}{5}\left(\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_{14}}\left(u_1 + \frac{\omega_{12}}{2}\right) + \frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega_{24}}\left(u_2 + \frac{\omega_{22}}{2}\right)\right)} \cdot \sigma(u_1, u_2). \tag{32}$$

Aber auch für die dritte und vierte Periode können die Formeln gleich hingeschrieben werden. Vertauschen wir nämlich, für $i = 1, 2$:

$$\omega_{i1}, \quad \omega_{i2}, \quad \omega_{i3}, \quad \omega_{i4}$$

mit

$$\omega_{i3}, \quad \omega_{i4}, \quad -\omega_{i1}, \quad -\omega_{i2},$$

so ist dies eine lineare Transformation der Perioden, bei welcher die Charakteristik $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ und also unsere σ-Funktion ungeändert bleibt und Δ nur insoweit modifiziert wird, als es in einen Ausdruck von der Form (31) verwandelt wird, — in der Tat kann Δ nicht noch um ein Multiplum von Π geändert werden, indem die Bedingung, durch welche wir Δ ursprünglich einführten (Formel (28)):

$$\frac{\partial \Delta}{\partial p_{13}} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{42}}$$

bei der vorgelegten Vertauschung ungeändert erhalten bleibt. Die hiernach allein mögliche Modifikation von Δ ist aber, wie wir eben sahen, für unsere Formeln ohne Belang. *Wir schließen, daß wir die Funktionalgleichungen für die dritte und die vierte Periode erhalten, indem wir in den Formeln (30), (32) einfach die vorgenannte Periodenvertauschung ausführen.*

Ich will, um den Vergleich mit den elliptischen σ-Funktionen auch äußerlich nahezulegen, die folgenden Bezeichnungen einführen:

$$
(33)\quad
\begin{aligned}
\eta_{11}&=-\frac{i\pi}{5}\cdot\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{13}},\ \eta_{12}=-\frac{i\pi}{5}\cdot\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{14}},\ \eta_{13}=\frac{i\pi}{5}\cdot\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{11}},\ \eta_{14}=\frac{i\pi}{5}\cdot\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{12}},\\
\eta_{21}&=-\frac{\pi i}{5}\cdot\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{23}},\ \eta_{22}=-\frac{i\pi}{5}\cdot\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{24}},\ \eta_{23}=\frac{\pi i}{5}\cdot\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{21}},\ \eta_{24}=\frac{i\pi}{5}\cdot\frac{\partial\log\Delta}{\partial\omega_{22}},
\end{aligned}
$$

wo Δ durch irgendeine der Funktionen (31) ersetzt werden kann. *Dann lauten die Funktionalgleichungen für Zutreten eines beliebigen Periodenpaares:*

$$
(34)\qquad \sigma(u_1+\omega_{1k}, u_2+\omega_{2k}) = e^{\eta_{1k}\left(u_1+\frac{\omega_{1k}}{2}\right)+\eta_{2k}\left(u_2+\frac{\omega_{2k}}{2}\right)}\cdot\sigma(u_1, u_2).
$$

Soll hier noch statt der bisher festgehaltenen Charakteristik $\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}$ eine beliebige $\begin{vmatrix}g_1&g_2\\h_1&h_2\end{vmatrix}$ eingeführt werden, so ist rechter Hand für $k=1,2,3,4$ beziehungsweise

$$
(-1)^{g_1},\ (-1)^{g_2},\ (-1)^{h_1},\ (-1)^{h_2}
$$

als Faktor zuzusetzen.

Die Größen η_{1k}, η_{2k} nennen wir, der Weierstrassischen Bezeichnung folgend, die *Perioden zweiter Gattung* der σ-Funktionen. Zwischen ihnen und den ω_{1k}, ω_{2k} bestehen die bekannten bilinearen Relationen, auf welche ich hier nicht weiter einzugehen brauche. Das Wichtige an den Entwicklungen, die ich hier beabsichtigte, ist nicht die *Gestalt* der Gleichung (34) (die ja bei allen Θ-Funktionen mutatis mutandis wiederkehrt), sondern die unter (33) gegebene Wertbestimmung der η_{1k}, η_{2k}, die sich genau entsprechend in der Theorie der elliptischen σ-Funktionen wiederfindet.

§ 7.
Zur Theorie der Integrale dritter Gattung.

Unser ferneres Ziel soll sein, die hyperelliptischen σ-Funktionen unabhängig von der Theorie der Thetafunktionen durch Integrale dritter Gattung zu definieren, woraus dann weiterhin das Gesetz für ihre Entwicklungen nach Potenzen von u_1, u_2 abgeleitet werden wird. Zu dem Zwecke schicke ich hier einige Bemerkungen über Integrale dritter Gattung voraus, die ihrem allgemeinen Inhalte nach sich selbstverständlich unter die Sätze subsumieren, die in dieser Hinsicht anderweitig gewonnen worden sind[7]), die aber vermöge ihrer besonderen Gestalt und der durch sie vermittelten Beziehung zur Invariantentheorie neu sein dürften. Ich benutze dabei dieselbe Abkürzung wie früher bei den Integralen erster Gattung,

[7]) Man vergleiche, was allgemeine Abelsche Integrale angeht, insbesondere **Noether**: *Über die algebraischen Differentialausdrücke*, zweite und dritte Note (in den Berichten der Erlanger physik.-medizin. Gesellschaft von 1884). Über **Weierstrass**' Behandlung der hierher gehörigen Fragen speziell für hyperelliptische Integrale werde ich sogleich (in Fußnote [8])) noch Genaueres zufügen.

indem ich nämlich die beiden Grenzen des Integrals wie seine Parameter, je durch einen Buchstaben (x, y, bez. x', y') bezeichne. Außerdem bediene ich mich derjenigen Schreibweise der Integrale dritter Gattung, bei welcher die Gleichberechtigung der Grenzen und der Parameter am klarsten hervortritt, nämlich der Darstellung durch Doppelintegrale.

Wir haben oben (Formel (7)) die binäre Form sechster Ordnung $f(z_1, z_2)$ in ganz allgemeiner Gestalt vorausgesetzt. Mein Ausgangspunkt ist jetzt der, daß wir ein zugehöriges Integral dritter Gattung mit den Grenzen y und x und den Parametern y' und x', welches überdies direkte Vertauschung der Parameter und Argumente gestattet, unmittelbar anschreiben können, ohne irgendwelche Irrationalität zu Hilfe zu nehmen. Mit $F(z, z')$ bezeichne ich die durch 120 dividierte dritte Polare:

$$
(35)\qquad F(z, z') = \frac{1}{120}\left(\frac{\partial^3 f(z_1, z_2)}{\partial z_1^3}\cdot z_1'^3 + \dots\right)
$$

(wo der Zahlenfaktor so gewählt ist, daß vermöge des Eulerschen Theorems $F(z, z) = f(z)$ wird). *Dann ist das fragliche Integral dritter Gattung durch folgende einfache Formel gegeben:*

$$
(36)\qquad Q^{x', y'}_{x, y} = Q^{x, y}_{x', y'} = \int_y^x\int_{y'}^{x'} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}\cdot\frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f(z')}}\cdot\frac{\sqrt{f(z)}\cdot\sqrt{f(z')}+F(z, z')}{2(zz')^2}
$$

wo $(z\,dz)$, $(z'\,dz')$, (zz') wieder Abkürzungen zweigliedriger Determinanten sind.

Daß Q wirklich ein Integral dritter Gattung mit den angegebenen Eigenschaften ist, ist teils unmittelbar evident, teils in der üblichen Weise durch Reihenentwicklungen zu beweisen[8]). Für das allgemeinste Integral

[8]) In einer Vorlesung *über hyperelliptische Funktionen* vom Winter 1881/82 (von der ich eine von **Hurwitz** angefertigte Ausarbeitung zur Verfügung hatte) hat Herr **Weierstrass** Betrachtungen gegeben, die auf die Formeln (35), (36) des Textes unmittelbar Anwendung finden. Seine weitere Durchführung wird dann freilich von der unsrigen verschieden, indem er von vornherein eine Wurzel von $f=0$ nach $z=\infty$ verlegt und bei seinen Rechnungen immer an der hierdurch gegebenen speziellen Voraussetzung festhält, [was das Heranziehen eines höheren Rationalitätsbereiches und außerdem in der Durchführung eine Unsymmetrie zur Folge hat]. Schreiben wir der letzteren Annahme entsprechend, indem wir zugleich z für z_1 und 1 für z_2 substituieren:

$$
f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + A_5 z^5,
$$

so wird unser $F(z, z')$ gleich:

$$
\begin{aligned}
F(z, z') = A_0 &+ \frac{A_1}{2}(z+z') + \frac{A_2}{5}(z^2+3zz'+z'^2)\\
&+ \frac{A_3}{20}(z^3+9z^2z'+9zz'^2+z'^3)\\
&+ \frac{A_4}{5}(z^3z'+3z^2z'^2+zz'^3) + \frac{A_5}{2}(z^3z'^2+z^2z'^3),
\end{aligned}
$$

dritter Gattung P, mit den Argumenten x, y und den Parametern x', y', welches unmittelbare Vertauschung der Argumente und Parameter gestattet, ergibt sich dann ferner der Ausdruck:

$$(37)\quad P_{x',y'}^{x,y} = P_{x,y}^{x',y'} = Q_{x',y'}^{x,y} + \alpha\, u_1 u_1' + \beta\,(u_1 u_2' + u_2 u_1') + \gamma\, u_2 u_2'.$$

Hier bedeuten u_1', u_2' die zwischen den Grenzen y' und x' hin erstreckten Integrale erster Gattung und α, β, γ sind irgendwie anzunehmende Konstante. Als spezieller Fall subsumiert sich das von Clebsch und Gordan in ihrer Theorie der Abelschen Funktionen gewählte Normalintegral:

$$(38)\qquad \Pi_{x',y'}^{x,y};$$

dasselbe ist dadurch ausgezeichnet, daß die Periodizitätsmoduln, die es an den Querschnitten A_1, A_2 besitzt, verschwinden, mögen wir nun z oder z' auf der Riemannschen Fläche als variabel betrachten.

Wir bemerken jetzt — und dies wird für unsere Theorie der Hauptpunkt —, daß unter allen Integralen P (37) das Integral Q durch eine besondere Eigenschaft ausgezeichnet ist. Um dieselbe bequem zu bezeichnen, will ich P in die Gestalt setzen:

$$P = \int\int \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \cdot \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f(z')}} \cdot \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(z,z') + 2(zz')^2\{\alpha\, z_1 z_1' + \beta\,(z_1 z_2' + z_2 z_1') + \gamma\, z_2 z_2'\}}{2(zz')^2}$$

und den Ausdruck:

$$(39)\quad \sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(z,z') + 2(zz')^2\{\alpha\, z_1 z_1' + \beta\,(z_1 z_2' + z_2 z_1') + \gamma\, z_2 z_2'\}$$

als *Zähler* von P bezeichnen. Der Zähler von Q ist offenbar eine *Kovariante* der Grundform f, und zwar eine solche, die wir als *rational* und *ganz* bezeichnen dürfen, insofern es im Gebiete der hyperelliptischen Funktionen naturgemäß ist, die Quadratwurzeln $\sqrt{f(z)}$, $\sqrt{f(z')}$ zu den rational bekannten Größen zu rechnen. Auch den Zähler von P können wir als Kovariante von f einführen: wir haben nur dafür zu sorgen, daß die quadratische Form

$$(40)\qquad \alpha\, z_1^2 + 2\beta\, z_1 z_2 + \gamma\, z_2^2$$

---

während der von Herrn Weierstrass benutzte Ausdruck folgendermaßen lautet:

$$R(z,z') = A_0 + A_2\, zz' + A_4\,(zz')^2 + \frac{A_1}{2}(z+z') + \frac{A_3}{2}(z+z')\,zz' + \frac{A_5}{2}(z+z')(zz')^2,$$

und also mit unserem $F(z,z')$ durch die Formel zusammenhängt:

$$R(z,z') = F(z,z') - (z-z')^2\left(\frac{A_2}{5} + \frac{A_3}{20}(z+z') + \frac{A_4}{5}\,zz'\right),$$

die ihrerseits mit Formel (37), (39) des Textes stimmt. — [In Weierstrass' Math. Werken, Bd. IV (1902) wird diese Rechnung auf S. 273 für beliebiges p durchgeführt. K.]

(deren erste Potenz in dem Zähler von P auftritt) eine Kovariante von f ist, deren Dimension in den Koeffizienten von f der Homogeneität wegen gleich $+1$ zu nehmen sein wird. Nun ist es in der Tat leicht, eine *rationale* quadratische Kovariante von f aufzustellen, die diesen Grad in den Koeffizienten von f besitzt. Ich komme an dieser Stelle zum ersten Male dazu, was in der Folge immer wieder geschehen muß, auf die *vollen Formensysteme* zu verweisen, welche Clebsch in seiner *Theorie der binären Formen* (Leipzig 1872) auf Grund der Untersuchungen von Gordan mitteilt. Das volle Formensystem speziell der Form sechsten Grades f, um welches es sich hier zunächst handelt, ist auf S. 296 daselbst abgedruckt. Um eine Kovariante der in (40) postulierten Art zu finden, genügt es, von den dort mitgeteilten rationalen und ganzen quadratischen Kovarianten von f irgendeine zu wählen und diese durch eine der eben dort aufgeführten Invarianten, deren Dimension in den Koeffizienten von f um eine Einheit niedriger ist, zu dividieren. Dagegen findet sich in dem genannten Formensysteme keine einzige quadratische Kovariante, die an sich die Dimension $+1$ in den Koefizienten von f besäße (wie ja auch a priori klar ist, daß eine solche Kovariante nicht existieren kann)[9]. Daher haben wir, indem wir zusammenfassen:

Es gibt unbegrenzt viele Integrale P, deren Zähler eine rationale Kovariante von f ist, aber unter ihnen ist Q das einzige, bei dem der Zähler zugleich eine ganze Kovariante von f ist.

Übrigens ergibt sich aus dem Grad in den Variabeln und in den Koeffizienten von f, daß die Zähler der Integrale P, wenn sie überhaupt Kovarianten von f sind, auch absolute Kovarianten von f sind. Nun werden diese Zähler unter dem doppelten Integralzeichen einerseits mit den beiden Determinanten $(z\,dz)$, $(z'\,dz')$ multipliziert, andererseits durch $(zz')^2$ dividiert. Daher sind die Integrale P, von denen wir handeln, und insbesondere das Integral Q, selbst absolute Kovarianten von f.

§ 8.

Definition der Thetafunktionen durch Integrale dritter Gattung.

Ehe ich weitergehe, kehre ich noch einmal wieder zur Theorie der Thetafunktionen zurück und gebe eine Definition dieser Funktionen durch Integrale dritter Gattung, welche für den Fortgang unserer Betrachtungen zweckmäßig ist. Ich werde dabei die fernere Abkürzung gebrauchen, solche Stellen des hyperelliptischen Gebildes, welche zu $x, y, \ldots$ konjugiert

[9]) Die einzige rationale ganze Kovariante einer allgemeinen binären Form f, die in den Koeffizienten von f linear ist, ist immer nur f selbst.

sind, d. h. sich von $x, y, \ldots$ nur durch das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{f(y)}, \ldots$ unterscheiden, mit $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$ zu benennen.

Wir bezeichnen jetzt mit $\vartheta(v_1, v_2)$ irgendeine gerade Thetafunktion und mit $f = \varphi \cdot \psi$ die zugehörige Zerlegung von f. Die Wurzeln $z = \frac{z_1}{z_2}$ der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ benennen wir vorübergehend mit k_1, k_2, k_3 und k_4, k_5, k_6. Wir haben dann jedenfalls folgende fundamentale Gleichung:

$$(41)\qquad \log \frac{\vartheta\left(\int\limits_{k_1}^{x} - \int\limits_{k_2}^{x'} - \int\limits_{k_3}^{x''}\right) \cdot \vartheta\left(\int\limits_{k_1}^{y} - \int\limits_{k_2}^{y'} - \int\limits_{k_3}^{y''}\right)}{\vartheta\left(\int\limits_{k_1}^{x} - \int\limits_{k_2}^{y'} - \int\limits_{k_3}^{y''}\right) \cdot \vartheta\left(\int\limits_{k_1}^{y} - \int\limits_{k_2}^{x'} - \int\limits_{k_3}^{x''}\right)} = \Pi_{x,y}^{x',y'} + \Pi_{x,y}^{x'',y''},$$

wo die Bezeichung der Argumente der ϑ-Funktion wohl ohne nähere Erläuterung verständlich ist und Π das unter (38) erklärte Clebsch-Gordansche Normalintegral ist. In dieser Gleichung können k_1, k_2, k_3 sofort durch k_4, k_5, k_6 ersetzt werden, so daß die Bevorzugung der Form φ gegenüber ψ, die vorzuliegen scheint, tatsächlich nicht statthat.

In (41) bedeuten x, x', x'', y, y', y'' zunächst beliebige Stellen des hyperelliptischen Gebildes. Wir wollen jetzt x', x'' von x und y', y'' von y durch die Gleichungen abhängig machen:

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} \int\limits_{k_1}^{x} du_i &= \int\limits_{k_2}^{x'} du_i + \int\limits_{k_3}^{x''} du_i, \\ \int\limits_{k_1}^{y} du_i &= \int\limits_{k_2}^{y'} du_i + \int\limits_{k_3}^{y''} du_i, \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2)$$

in denen wieder k_1, k_2, k_3 durch k_4, k_5, k_6 ersetzt werden können. Wir bringen diese Formeln in (41) zuvörderst linker Hand in Anwendung. Indem wir zusammenziehen und schließlich beiderseits von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen, kommt:

$$(43)\qquad \frac{\vartheta\left(\int\limits_{y}^{x}\right)}{\vartheta} = e^{-\frac{1}{2}\left(\Pi_{x,y}^{x',y'} + \Pi_{x,y}^{x'',y''}\right)}.$$

Nun aber können wir auch rechter Hand vom Abelschen Theoreme Gebrauch machen. Gleichung (42) sagt aus, daß die Punktgruppen

$$x', x'', \bar{x},$$

und

$$y', y'', \bar{y},$$

mit

$$k_1, k_2, k_3$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, mit

$$k_4, k_5, k_6$$

„korresidual" sind. Daher kommt, indem wir die Bezeichnung φ, ψ wieder aufnehmen:

$$\Pi_{x,y}^{x',y'} + \Pi_{x,y}^{x'',y''} = -\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} + 2\log \frac{2\sqrt[4]{f(x) \cdot f(y)}}{\sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\psi(y)} + \sqrt{\psi(x)}\sqrt{\varphi(y)}}$$

und also:

$$(44)\qquad \frac{\vartheta\left(\int\limits_{y}^{x}\right)}{\vartheta} = \frac{\sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\psi(y)} + \sqrt{\psi(x)}\sqrt{\varphi(y)}}{2\sqrt[4]{f(x) \cdot f(y)}} \cdot e^{\frac{1}{2}\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}.$$

Diese Formel, *welche wir fortan als Definition der linker Hand stehenden Größe betrachten wollen*, gilt selbstverständlich für jede gerade Thetafunktion, sofern wir unter φ, ψ nur die jedesmal zugehörigen kubischen Formen verstehen wollen: sie hat den Vorteil, daß alles, was auf die Charakteristik der Thetafunktion Bezug hat, auf den algebraischen Teil geworfen ist, während der hinzutretende Exponentialfaktor bei allen Thetafunktionen derselbe ist, [aber natürlich vom Querschnittsystem abhängt].

Um für die ungeraden ϑ-Funktionen eine ähnliche Definitionsformel zu erhalten, beziehe ich mich hier der Kürze halber auf Rosenhains Parameterdarstellung der Quotienten je zweier ϑ-Funktionen[10]. Indem wir dieselbe in unsere Bezeichnung übertragen, insbesondere die Formeln (21), (22) heranziehen, kommt:

$$(45)\qquad \frac{\vartheta\left(\int\limits_{y}^{x}\right)}{C} = \frac{(xy)\sqrt{p(x) \cdot p(y)}}{2\sqrt[4]{f(x) \cdot f(y)}} \cdot e^{\frac{1}{2}\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}.$$

§ 9.

Definition der σ-Funktionen durch Integrale dritter Gattung.

Die Quotienten, welche in (44), (45) linker Hand stehen, sind spezielle Fälle der Funktionen, die wir in § 1 mit Θ bezeichneten; um zu den allgemeinen Θ überzugehen, brauchen wir nur mit irgendeinem Exponentialfaktor

$$e^{A_{11}v_1^2 + 2A_{12}v_1v_2 + A_{22}v_2^2}$$

[10] [Mémoires des savants étrangers. Bd. 11, 1851.]

zu multiplizieren. *Dies aber kommt augenscheinlich darauf hinaus, das Integral* $\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}$ *in* (44), (45) *durch irgendein anderes Integral dritter Gattung* $P_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}$ *zu ersetzen.* In der Tat, aus der Nebeneinanderstellung der Formeln (37), (38) folgt, daß $\Pi_{x,y}^{x',y'}$ mit $P_{x,y}^{x',y'}$ durch eine Relation verbunden ist, die wir, unter Heranziehung der v_1, v_2 statt der u_1, u_2, so schreiben können:

$$\frac{1}{2} P_{x,y}^{x',y'} = \frac{1}{2} \Pi_{x,y}^{x',y'} - A_{11} v_1 v_1' - A_{12}(v_1 v_2' + v_2 v_1') - A_{22} v_2 v_2'.$$

Nehmen wir nun insbesondere $x' = \bar{x}$, $y' = \bar{y}$, so wird $v_1' = -v_1$, $v_2' = -v_2$ und es kommt:

$$\frac{1}{2} P_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} = \frac{1}{2} \Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}} + A_{11} v_1^2 + 2 A_{12} v_1 v_2 + A_{22} v_2^2,$$

worin unsere Behauptung liegt.

Es müssen sich also auch unsere σ-Funktionen durch Formeln vom Typus (44), (45) definieren lassen; es gilt nur, das Integral $\Pi_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}$ durch ein anderes zweckmäßig gewähltes Integral dritter Gattung zu ersetzen. Ich will hier gleich das Resultat aussprechen, welches man nach dem bisherigen Gange unserer Entwicklung bereits erwarten wird: *Das Integral dritter Gattung, welches wir bei den* σ *benutzen müssen, ist einfach das Normalintegral* Q *(Formel* (36)); *die Definitionsformeln der* σ *lauten:*

1. *im Falle gerader Charakteristik:*

$$\sigma(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{\varphi(x)}\cdot\sqrt{\psi(y)} + \sqrt{\psi(x)}\cdot\sqrt{\varphi(y)}}{2\sqrt[4]{f(x)\cdot f(y)}} \cdot e^{\frac{1}{2} Q_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}, \tag{46}$$

2. *im Falle ungerader Charakteristik:*

$$\sigma(u_1, u_2) = \frac{(x y)\sqrt{p(x)\cdot p(y)}}{2\sqrt[4]{f(x)\cdot f(y)}} \cdot e^{\frac{1}{2} Q_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}. \tag{47}$$

Ich habe dabei die Argumente der σ-Funktionen gleich wieder mit u_1, u_2 (und nicht mit v_1, v_2) bezeichnet, da wir in der Folge nur noch von ersteren Gebrauch machen werden.

Der Beweis der Formeln (46), (47) wird in Übereinstimmung mit § 2 darin zu liegen haben, daß in der Potenzentwicklung, die wir aus (46) für das Produkt der geraden σ ableiten können, die Glieder zweiter Ordnung identisch fortfallen (wobei es augenscheinlich auf dasselbe hinauskommt, ob wir, wie in § 2 geschehen, nach v_1, v_2, oder, wie wir später tun, nach u_1, u_2 ordnen). Da die Prinzipien dieses Nachweises dieselben sind, die ich bei Aufstellung der Reihenentwicklung für die einzelnen σ gebrauche, so will ich hier in der Weise verfahren, daß ich zunächst letztere Reihenentwicklungen herleite, *indem ich einstweilen* (46), (47) *als Definition der* σ *gelten lasse*, um dann den in Aussicht genommenen Beweis kurz nachzutragen. Beides soll in den folgenden zwei Paragraphen erledigt werden.

§ 10.

Allgemeines zur Reihenentwicklung der σ-Funktionen.

Wir haben bereits oben (§ 7) darauf aufmerksam gemacht, daß der „Zähler" des Integrals Q eine *ganze* und in gewissem Sinne *rationale* Funktion der Koeffizienten von f ist. Andererseits treten in den algebraischen Teilen der Formeln (46), (47) nur solche Irrationalitäten auf, die mit den Zerlegungen $f = \varphi\cdot\psi$ und $f = p\cdot\chi$ oder mit f selbst einfach zusammenhängen. *Hierin liegt, daß die Koeffizienten der Reihenentwicklungen nach Potenzen von* u_1, u_2

beim geraden σ: *ganze rationale Funktionen der Koeffizienten von* φ *und* ψ.

beim ungeraden σ: *ganze rationale Funktionen der Koeffizienten von* p *und* χ

sind. Was den Beweis dieser Behauptungen angeht, so vergleiche man die neueste Arbeit von Wiltheiss (Crelles Journal für Mathematik, Bd. 99, 1886): durch Übertragung der dort gegebenen Rechnungen könnte man geradezu das rekurrente Gesetz finden, dem die in Rede stehenden Entwicklungskoeffizienten genügen. (Partielle Differentialgleichungen der σ-Funktionen, ein Gegenstand, der in enger Verbindung mit den sogleich zu entwickelnden invariantentheoretischen Sätzen behandelt werden sollte)[11]. — Wir wollen gleich noch zufügen, daß bei der Entwicklung der geraden σ die zugehörigen Formen φ, ψ selbstverständlich *symmetrisch* beteiligt sind.

Wir setzen jetzt für das gerade σ:

$$\sigma(u_1, u_2) = 1 + (u_1, u_2)_2 + (u_1, u_2)_4 + \cdots, \tag{48}$$

und für das ungerade σ entsprechend:

$$\sigma(u_1, u_2) = (p_1 u_1 + p_2 u_2) + (u_1, u_2)_3 + (u_1, u_2)_5 + \cdots. \tag{49}$$

Die Anfangsterme dieser Reihenentwicklungen stehen nach den früheren

[11]) Die Reihenentwicklungen der hyperelliptischen Θ-Funktionen sind neuerdings von Brioschi weiter verfolgt worden; vgl. die Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vom 21. März und 4. April 1886 [= Opere matematiche, Nr. CXLIV, tomo III., S. 925 ff. und Nr. CXLV, tomo IV., S. 1 ff.] [Vgl. auch die am Anfang der folgenden Abh. XCVI, S. 357, Fußnote [2]) gegebenen weiteren Zitate auf Wiltheiss und Brioschi und endlich die Artikelserie von Wiltheiss in den Bänden 35, 36, 37 der Math. Annalen (1890). K.]

Bemerkungen von vornherein fest; die höheren Terme, die zu bestimmen bleiben, sollen weiterhin kurzweg mit $(u_1, u_2)_{2\nu}$, beziehungsweise $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ bezeichnet werden. Indem wir uns erinnern, daß u_1, u_2 in den Koeffizienten von f von der Dimension $-{}^1/_2$ sind, ferner die Schlußbemerkungen von § 3 herannehmen, folgt betreffs ihrer der weitere Satz:

Die Koeffizienten von $(u_1, u_2)_{2\nu}$ in (48) sind in den Koeffizienten von φ und ψ je vom Grade ν.

Die Koeffizienten von $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ in (49) sind in p_1, p_2 vom Grade $(\nu+1)$, dagegen in den Koeffizienten von χ vom Grade ν.

Hierüber hinaus erinnere man sich jetzt der Formeln (15), (16), (24). Wir sahen damals, daß bei einer linearen Substitution von der Determinante r, der die Integrationsvariabeln z_1, z_2 unterworfen werden:

$$z_1 = \alpha z_1' + \beta z_2',$$
$$z_2 = \gamma z_1' + \delta z_2',$$

die Integrale u_1, u_2 die Umsetzung erfahren:

$$u_1 = r(\alpha u_1' + \beta u_2'),$$
$$u_2 = r(\gamma u_1' + \delta u_2'),$$

während das gerade σ ganz ungeändert bleibt und das ungerade σ den Faktor r erhält. Das Verhalten der σ muß aus dem Verhalten jedes einzelnen Terms $(u_1, u_2)_{2\nu}$, bez. $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ resultieren. Daher schließen wir:

Die Terme $(u_1, u_2)_{2\nu}$ in (48) sind simultane Kovarianten der Formen φ, ψ in denen die Variabelen durch u_1, u_2 ersetzt sind;

Die Terme $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ in (49) sind ebensolche simultane Kovarianten der Formen p und χ.

Daß die $(u_1, u_2)_{2\nu}$ bei den in Rede stehenden linearen Substitutionen überhaupt ungeändert bleiben, während die $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ den Faktor r erhalten, gibt keinen neuen Satz, ist vielmehr eine Folge dessen, was eben über den Grad dieser Terme in den Koeffizienten von φ, ψ, beziehungsweise p, χ, bereits gesagt wurde.

Die hiermit aufgestellten Sätze ergeben nun, wie ersichtlich, für die Aufstellung der Reihenentwicklungen der σ ein allgemeines Prinzip: *wir werden damit beginnen, die vollen Formensysteme der rationalen, ganzen Kovarianten von φ und ψ, beziehungsweise von p und χ aufzustellen und setzen hernach die Terme $(u_1, u_2)_{2\nu}$ bez. $(u_1, u_2)_{2\nu+1}$ aus geeigneten Formen dieser Systeme mit Hilfe zunächst unbestimmter numerischer Faktoren zusammen.* Genau so werden wir Entwicklungen verwandten Charakters aufzusuchen haben. Wenn wir uns z. B. sogleich mit der Reihenentwicklung des Produktes der geraden σ beschäftigen, so werden wir in demselben Sinne das volle Formensystem der binären Formen sechster Ordnung f selbst heranziehen müssen.

Die theoretische Grundlage unseres Prinzips ruht ersichtlich auf dem Gordanschen Satze, demzufolge bei irgend gegebenen binären Formen *endliche* Formensysteme der in Rede stehenden Art jedesmal existieren: die praktische Brauchbarkeit hinwieder auf dem glücklichen Umstande, daß wir die von uns postulierten Formensysteme in den Untersuchungen der Invariantentheoretiker tatsächlich bereits aufgestellt finden (siehe überall Clebschs *Theorie der binären algebraischen Formen* 1872), so daß wir die fertig vorliegenden Formeln nur heranzunehmen brauchen, wie dies nunmehr für die niedrigsten Terme der Reihenentwicklungen geschehen soll.

§ 11.

Spezielle Durchführung der Reihenentwicklungen. Erledigung des noch ausstehenden Beweises.

Das simultane Formensystem zweier binärer kubischer Formen φ, ψ findet sich bei Clebsch a. a. O. auf S. 224 behandelt. Ich teile hier die niedrigsten demselben angehörigen Formen in nachstehendem Schema mit. Dasselbe ist nach dem Grade der Formen in den Koeffizienten von φ sowie nach dem Grade in den Koeffizienten von ψ geordnet; die über die einzelne Form gesetzte Zahl bedeutet den Grad in den Variabelen, die an die Klammerausdrücke rechts unten angefügten Indizes den Grad der Überschiebung. Wir haben[12]):

		Ordnung in φ		
		0	1	2
Ordnung in ψ	0	—	$\overset{3}{\varphi}$	$(\varphi, \varphi)_2 = \overset{2}{\Delta}$
	1	$\overset{3}{\psi}$	$(\varphi, \psi)_1 = \overset{4}{\Omega}$ $(\varphi, \psi)_2 = \overset{2}{\Theta}$ $(\varphi, \psi)_3 = \overset{0}{A}$	
	2	$(\psi, \psi)_2 = \overset{2}{\nabla}$		

Diesem Schema entsprechend ergibt sich nun folgende Reihenentwicklung der geraden σ bis zu den Termen vierter Ordnung inklusive:

[12]) Die Buchstaben $\varphi, \psi, \Delta, \nabla, \Theta$ habe ich ohne weiteres bei Clebsch entnommen, die anderen (A und Ω) der besseren Übersichtlichkeit halber von mir aus hinzugefügt. Statt $(\varphi, \psi)_3 = A$ gibt Clebsch $(\varphi, \psi)_2$ als eine von Θ und $(\varphi, \psi)_1 = \Omega$ verschiedene in den Koeffizienten von φ und ψ bilineare Form an, was ein offenbarer Druckfehler ist.

$$(50)\quad \sigma(u_1, u_2) = 1 + c\cdot\Theta(u_1, u_2) + (c'\cdot A\cdot\Omega(u_1, u_2) + c''\cdot\Theta(u_1, u_2)^2 + c'''\cdot\Delta(u_1, u_2)\cdot\nabla(u_1, u_2)) + \dots,$$

unter c, c', c'', c''' numerische Konstante verstanden, die auszuwerten bleiben.

Um die Reihenentwicklungen der ungeraden σ zu finden, müssen wir zuerst das volle Formensystem einer einzelnen binären Form fünften Grades χ ins Auge fassen. Nach Clebsch, S. 277, sind die niedrigsten Formen:

		Ordnung in den Variabelen		
		2	5	6
Ordnung in den Koeff. von χ	1	—	χ	—
	2	$(\chi, \chi)_4 = i$	—	$(\chi, \chi)_2 = H$

Die simultanen Formen von χ und p erwachsen nun nach invariantentheoretischen Prinzipien, indem man alle möglichen Potenzen p^ν mit den Formen des vorstehenden Schemas durch ν-fache Überschiebung verbindet.

Solcherweise kommt für das ungerade σ bis zu den Termen fünfter Ordnung inklusive:

$$(51)\quad \sigma(u_1, u_2) = p + c\cdot(\chi, p^2)_2 + (c'\cdot p\cdot(H, p^2)_2 + c''\cdot p^3\cdot i) + \dots,$$

wo c, c', c'' auszuwertende Konstante sind.

Selbstverständlich hat man in die hier auftretenden Kovarianten statt der Variablen wieder u_1, u_2 zu substituieren.

— Übrigens vergegenwärtige man sich den Fortschritt, der hinsichtlich der Berechnung definitiver Reihenentwicklungen der σ-Funktionen durch Heranziehen der invariantentheoretischen Resultate gewonnen ist. Wollte man z. B. bei der Reihenentwicklung eines geraden σ nur die Dimension der einzelnen Terme in den Koeffizienten von φ und ψ und die Symmetrie hinsichtlich φ und ψ heranziehen, so hätte man die Terme zweiter Ordnung mit $\frac{3\cdot 16}{2} = 24$ und die Terme vierter Ordnung mit $\frac{5\cdot 100}{2} = 250$ unbestimmten Koeffizienten anzuschreiben. —

Wie jetzt die Reihenentwicklung des *Produktes der geraden* σ zu finden ist, wurde bereits angedeutet. Wir setzen:

$$\prod_1^{10} \sigma(u_1, u_2) = 1 + [u_1, u_2]_2 + [u_1, u_2]_4 + \dots,$$

bestimmen den Grad in den Koeffizienten von f, den $[u_1, u_2]_{2\nu}$ besitzt, zu ν und setzen schließlich die einzelnen Terme als ganze Funktionen geeigneter Formen des bei Clebsch auf S. 296 mitgeteilten vollen Formen-

systems von f zusammen. Daß nun $[u_1, u_2]_2$ identisch verschwindet, *daß also unsere jetzigen σ mit den in § 2 eingeführten übereinstimmen*, ergibt sich sofort aus dem Umstande, der schon einmal (in § 7) für uns von Wichtigkeit war: daß nämlich eine quadratische Kovariante von f, ersten Grades in den Koeffizienten von f, nicht existiert. — Wir erfahren zugleich, daß $[u_1, u_2]_4$ bis auf einen Zahlenfaktor mit $(f, f)_4$ übereinstimmt, usw. ..., was wir hier nicht weiter verfolgen.

Wir wollen jetzt auch noch die Frage zum Abschluß bringen, die in § 2 entstand, inwieweit nämlich die Fixierung der σ-Funktionen, die wir damals wählten und auf die wir nun zurückgeführt worden sind, unter allen möglichen die zweckmäßigste ist. Offenbar ergeben sich die allgemeinsten σ-Funktionen aus den hier betrachteten durch Zufügung eines Exponentialfaktors

$$e^{\alpha u_1^2 + 2\beta u_1 u_2 + \gamma u_2^2},$$

wo $(\alpha u_1^2 + 2\beta u_1 u_2 + \gamma u_2^2)$ eine in den u_1, u_2 als Variable geschriebene *eindeutige*, oder sagen wir gleich, da wir unnötige Transzendenten jedenfalls vermeiden wollen, *rationale* Kovariante von f ist, deren Dimension in den Koeffizienten von f der Homogeneität wegen gleich $+1$ genommen werden muß. Nun sahen wir aber schon in § 7, daß eine solche Kovariante notwendig eine *gebrochene* Funktion der Koeffizienten von f ist. Wenn wir die Koeffizienten von f hinterher durch die Koeffizienten von φ und ψ oder von p und χ ersetzen, wird sie immer noch eine gebrochene Funktion der in Betracht kommenden Koeffizienten bleiben. *Unsere σ sind daher die einzigen, deren Reihenentwicklungen nicht nur nach rationalen, sondern auch nach ganzen Kovarianten der Formen φ und ψ, bez. p und χ fortschreiten.* Übrigens würde die Einführung allgemeinerer σ darauf hinauskommen, statt des Normalintegrales Q bei der Definition der σ-Funktionen eines der anderen in § 7 erwähnten kovarianten Integrale P zu benutzen.

Ich habe dabei als selbstverständlich vorausgesetzt, daß wir nur mit Kovarianten von f operieren wollen. In der Tat, würden wir unseren Exponentialfaktor nicht als Kovariante von f einführen, so hieße dies, daß wir in die Definition der σ-Funktionen überflüssige Parameter, die mit der Form f in keinem notwendigen Zusammenhange stünden, mit aufnähmen — ein Verfahren, welches niemand würde gutheißen können.

§ 12.

Exkurs über elliptische Funktionen.

Um die nunmehr gewonnenen Resultate beurteilen und in geeigneter Richtung weiterführen zu können, erscheint es nützlich, die Grundformeln von Weierstrass' Theorie der elliptischen Funktionen zum Vergleich heranzuziehen. Indem ich an der durchgängigen Verwendung invarianter Bildungen festhalte, werde ich dieselben hier in einer Form hersetzen, bei welcher keinerlei besondere Voraussetzung über die Gestalt der zugrunde liegenden Quadratwurzel oder die Wahl der Integralgrenzen gemacht ist. Ich denke mir $f(z_1, z_2)$ als irgendeine binäre biquadratische Form, und u durch die Formel definiert:

$$(52) \qquad u = \int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}.$$

Was sind $\wp(u)$, $\wp'(u)$, was insbesondere die vier Sigmafunktionen $\sigma(u)$ und $\sigma_i(u)$ $(i = 1, 2, 3)$? Dies ist die Frage, die ich hier zunächst beantworte. Ich will dabei wieder in der Weise vorgehen, daß ich die in Betracht kommenden Formeln zuerst hinschreibe und hinterher verifiziere. *Man findet folgende Resultate:*

1. Um $\wp(u)$ zu definieren, bilden wir uns die durch 12 dividierte zweite Polare:

$$(53) \qquad F(x, y) = \frac{1}{12}\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}\cdot y_1^2 + \ldots\right).$$

Dann ist einfach:

$$(54) \qquad \wp(u) = \frac{\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + F(x, y)}{2(xy)^2}.$$

2. Bei der Definition von $\wp'(u)$ haben wir nur erste Polaren von f in Betracht zu ziehen, *wir haben:*

$$(55) \qquad \wp'(u) = \frac{\sqrt{f(y)}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\cdot y_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\cdot y_2\right) + \sqrt{f(x)}\left(\frac{\partial f(y)}{\partial y_1}\cdot x_1 + \frac{\partial f(y)}{\partial y_2}\cdot x_2\right)}{4(xy)^3}.$$

3. Wir bilden uns jetzt das Integral dritter Gattung:

$$(56) \qquad Q_{x,y}^{x',y'} = \int_y^x\int_{y'}^{x'} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}\cdot\frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f(z')}}\cdot\frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(z, z')}{2(zz')^2},$$

wo unter dem Integralzeichen derselbe Ausdruck steht, nur in z und z' statt in x und y geschrieben, den wir eben gleich $\wp(u)$ gesetzt haben. *Für $\sigma(u)$ finden wir dann folgenden Ausdruck:*

$$(57) \qquad \sigma(u) = \frac{(xy)}{\sqrt[4]{f(x)\cdot f(y)}}\cdot e^{\frac{1}{2}Q_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}.$$

4. Jeder geraden σ-Funktion $\sigma_i(u)$ entspricht eine bestimmte Zerlegung von f in zwei quadratische Faktoren:

$$(58) \qquad f = \varphi_i\cdot\psi_i.$$

Für $\sigma_i(u)$ erhält man die Formel:

$$(59) \qquad \sigma_i(u) = \frac{\sqrt{\varphi_i(x)}\sqrt{\psi_i(y)} + \sqrt{\psi_i(x)}\sqrt{\varphi_i(y)}}{2\sqrt[4]{f(x)\cdot f(y)}}\cdot e^{\frac{1}{2}Q_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}.$$

Was den Beweis der hiermit mitgeteilten Formeln betrifft, so bemerke man, daß selbige sämtlich ihrem Bildungsgesetze nach völlig ungeändert bleiben, wenn man z_1, z_2 usw. irgendeiner homogenen linearen Substitution von der Determinante 1 unterwirft. Wir werden jetzt voraussetzen, daß $f(z_1, z_2)$ durch eine solche Substitution, wie bekanntlich stets möglich, in die Weierstrassische Normalform verwandelt sei:

$$(60) \qquad f(z_1, z_2) = 4z_1^3 z_2 - g_2 z_1 z_2^3 - g_3 z_2^4,$$

werden an ihr unsere Formeln ausrechnen und zusehen, ob dieselben dann mit solchen, die man anderweitig mitgeteilt findet[13]) übereinstimmen. Um den Vergleich zu erleichtern, setze ich noch:

$$\int_x^\infty \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} = v, \qquad \int_y^\infty \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} = w,$$

also unser früheres u:

$$u = w - v$$

und substituiere dementsprechend in unsere Formeln für:

$$x_1,\, x_2,\, \sqrt{f(x)};\quad y_1,\, y_2,\, \sqrt{f(y)}$$

der Reihe nach:

$$\wp(v),\, 1,\, \wp'(v);\quad \wp(w),\, 1,\, \wp'(w).$$

1. Formeln (54), (55) verwandeln sich durch die angegebene Substitution in folgende:

$$\wp(w - v) = \frac{\wp' v\cdot\wp' w + 2\wp v\cdot\wp w(\wp v + \wp w) - \frac{g_2}{2}(\wp v + \wp w) - g_3}{2(\wp v - \wp w)^2},$$

$$\wp'(w - v) = \left\{\frac{\wp' w\left[\wp v^3 - \frac{3g_2}{4}\wp v - g_3 + 3\wp v^2\cdot\wp w - \frac{g_2}{4}\wp w\right] + \wp' v\left[\wp w^3 - \frac{3g_2}{4}\wp w - g_3 + 3\wp w^2\cdot\wp v - \frac{g_2}{4}\wp v\right]}{(\wp v - \wp w)^3}\right.,$$

was bekannte Formen des Additionstheorems für $\wp$ und $\wp'$ sind[14]), womit (54) und (55) bewiesen sind.

---

[13]) Vgl. überall: H. A. Schwarz: *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen* (1885). Nach Vorlesungen und Aufzeichungen des Herrn K. Weierstrass. [Ich zitiere diese Formelsammlung von Schwarz weil Weierstrass eigene Vorlesungen erst 1915 durch das Erscheinen der Bände V und VI seiner Math. Werke allgemein bekannt wurden. K.]

[14]) Schwarz, a. a. O., S. 14, Formel (4) und (11).

2. Um Formel (57) zu prüfen, setze ich noch:

$$\int_{z}^{\infty}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}=t, \qquad \int_{z'}^{\infty}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}=t'.$$

Dann wird das Doppelintegral (56) nach dem gerade Bewiesenen:

$$Q_{x,\,y}^{x'\,y'}=\int_{w'}^{v'}\int_{w}^{v}dt\cdot dt'\cdot\wp(t-t')$$

oder in bekannter Weise:

$$Q_{x,\,y}^{x',\,y'}=\log\frac{\sigma(v-v')\cdot\sigma(w-w')}{\sigma(v-w')\cdot\sigma(w-v')},$$

also

$$Q_{x,\,y}^{\bar{x},\,\bar{y}}=\log\frac{\sigma(2v)\cdot\sigma(2w)}{\sigma(v+w)^2}.$$

Formel (57) besagt hiernach:

$$\sigma(w-v)=\frac{\wp v-\wp w}{\sqrt{\wp' v\,\wp' w}}\cdot\frac{\sqrt{\sigma(2v)\cdot\sigma(2w)}}{\sigma(v+w)},$$

was sich sofort als Identität zu erkennen gibt[15]).

3. Wir schreiten jetzt zu Formel (59). Wir zerlegen (60) mit Weierstrass in folgender Weise:

$$(61)\qquad f(z_1,z_2)=4z_2(z_1-e_i z_2)(z_1-e_k z_2)(z_1-e_l z_2)$$

und wählen dementsprechend:

$$\varphi_i=4z_2(z_1-e_i z_2),\qquad \psi_i=(z_1-e_k z_2)(z_1-e_l z_2)$$

oder, vermöge der verabredeten Substitutionen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\varphi_i(x)}&=2\sqrt{\wp v-e_i} &&=\frac{2\cdot\sigma_i(v)}{\sigma(v)},\\
\sqrt{\psi_i(x)}&=\sqrt{\wp v-e_k\cdot\wp v-e_l} &&=\frac{\sigma_k(v)\cdot\sigma_l(v)}{\sigma(v)^2},\\
\sqrt{\varphi_i(y)}&=2\sqrt{\wp w-e_i} &&=\frac{2\cdot\sigma_i(w)}{\sigma(w)},\\
\sqrt{\psi_i(y)}&=\sqrt{\wp w-e_k\cdot\wp w-e_l} &&=\frac{\sigma_k(w)\cdot\sigma_l(w)}{\sigma(w)^2}.
\end{aligned}$$

Setzen wir noch

$$\wp v-\wp w=(\wp v-e_i)-(\wp w-e_i)=\frac{\sigma(w)^2\cdot\sigma_i(v)^2-\sigma(v)^2\cdot\sigma_i(w)^2}{\sigma(v)^2\cdot\sigma(w)^2},$$

so verwandelt sich (59) nach Division mit der bereits bewiesenen Gleichung (57) in folgende Formel:

$$\frac{\sigma_i(v-w)}{\sigma(v-w)}=\frac{(\sigma v\cdot\sigma_i v\cdot\sigma_k w\cdot\sigma_l w+\sigma w\cdot\sigma_i w\cdot\sigma_k v\cdot\sigma_l v)}{(\sigma w^2\cdot\sigma_i v^2-\sigma v^2\cdot\sigma_i w^2)},$$

15) Schwarz, a. a. O., S. 13, N. 11 Formel (1), S. 14, Formel (16).

die eine einfache Folge des gewöhnlichen Additionstheorems der σ-Funktionen ist[16]). —

Ich gebe übrigens diese Formeln (54)—(59) nur insofern als neu, als in ihnen infolge der Verwendung homogener Variabler die Beziehung zur Invariantentheorie der Form f explizit hervortritt. Jedenfalls die Formeln (54), (55) sind aus Vorlesungen von Weierstrass[17]), wie aus einer Abhandlung von Scheibner[18]) wohl bekannt. Sie erscheinen dort als Lösungen des Problems, ein beliebig vorgelegtes elliptisches Integral:

$$\int_{y}^{x}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}$$

durch rationale Transformation in die Normalform:

$$\int_{\wp}^{\infty}\frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3-g_2\wp-g_3}}$$

überzuführen[19]). —

16) Schwarz, a. a. O., S. 51 [$D\cdot 8$] und [$D\cdot 1$].

17) Vgl. die erste Mitteilung der betreffenden Formeln in § 1—3 der Dissertation von Biermann: *Problemata quaedam mechanica functionum ellipticarum ope soluta* (Berlin 1865). [Weierstrass hat, wie aus Bd. V seiner Mathematischen Werke, S. 13—15 hervorgeht, die ausgerechneten Formeln für die allgemeinen $\wp u$ und $\wp' u$ bereits 1863 schriftlich an Mertens mitgeteilt. Die Formeln (57) und (59) aber scheinen bei ihm nicht explizit vorzukommen, wie überhaupt die Beziehung zu den formalen Prozessen der Invariantentheorie fehlt. K.]

18) *Zur Theorie der Reduktion elliptischer Integrale in reeller Form* (Bd. 12 der Abhandl. d. math. phys. Klasse der K. Sächs. Gesellschaft d. Wiss., 1879).

19) Es ist interessant, auch die ebendort mitgeteilten Umkehrungen der betreffenden Transformation in die homogene Form zu setzen. Betrachtet man neben $\wp(u)$, $\wp'(u)$ die Grenze y als bekannt und bezeichnet mit $H(y)$, $T(y)$ in üblicher Weise die Kovarianten:

$$H(y)=\frac{1}{144}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f(y)}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(y)}{\partial y_2\,\partial y_1}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 f(y)}{\partial y_1\,\partial y_2} & \dfrac{\partial^2 f(y)}{\partial y_2^2}\end{vmatrix},\qquad T(y)=\frac{1}{16}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f(y)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f(y)}{\partial y_2}\\[2mm] \dfrac{\partial H(y)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial H(y)}{\partial y_2}\end{vmatrix},$$

so hat man zunächst für x, bez. für x_1 und x_2, unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1&=+\frac{\partial f}{\partial y_2}\cdot\wp(u)+\frac{\partial H}{\partial y_2}+2y_1\sqrt{f(y)}\cdot\wp'(u),\\
\varrho x_2&=-\frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\wp(u)-\frac{\partial H}{\partial y_1}+2y_2\sqrt{f(y)}\cdot\wp'(u),
\end{aligned}$$

und hieraus durch Differentiation und Benutzung von

$$\frac{(x\,dx)}{\sqrt{f(x)}}=\frac{d\wp}{\wp'}$$

die Bestimmung der Quadratwurzel:

$$\begin{aligned}
\varrho^2\sqrt{f(x_1,x_2)}&=-16\,T(y)\cdot\wp'(u)+8H(y)\sqrt{f(y)}\cdot\wp''(u)\\
&\quad+8f(y)\sqrt{f(y)}\left(2\wp(u)^3-\frac{3g_2}{2}\wp(u)-g_3\right).
\end{aligned}$$

Zum Schlusse gedenke ich noch der Reihenentwicklungen von $\sigma(u)$, $\sigma_i(u)$. Wir haben zunächst in bekannter Weise[20]):

$$(62) \qquad \sigma(u) = u - \frac{g_2}{120}u^5 - \frac{g_3}{840}u^7 - \ldots,$$

wo alle Koeffizienten ganze Funktionen der beiden rationalen Invarianten g_2 und g_3 von f sind. — Die Reihenentwicklungen der $\sigma_i(u)$ sind noch erst neuerdings von **Weierstrass** selbst ausführlich behandelt worden[21]). Man findet:

$$(63) \qquad \sigma_i(u) = 1 - \frac{e_i}{2}u^2 \ldots,$$

wo die Koeffizienten der aufeinanderfolgenden Potenzen ganze Funktionen von e_i und $(e_k - e_l)$ sind. Wir bemerken insbesondere, daß infolge von (63) und der Relation

$$e_i + e_k + e_l = 0$$

in der Reihenentwicklung des Produktes $\sigma_1 u \cdot \sigma_2 u \cdot \sigma_3 u$ der Term mit u^2 in der Tat wegfällt. Übrigens aber wollen wir noch hervorheben, daß e_i, e_k, e_l, indem sie vermöge (60), (61) allein von g_2, g_3 abhängen, *irrationale* Invarianten von f sind. In allgemeiner Form können wir dieselben definieren, wenn wir von der Zerlegung $f = \varphi_i \cdot \psi_i$ ausgehen. ***Es ist nämlich e_i gleich dem dritten Teile der zweiten Überschiebung von φ_i und ψ_i:***

$$(64) \qquad e_i = \frac{1}{3}(\varphi_i, \psi_i)_2.$$

Zum Beweise genügt es, die betreffende Überschiebung an den quadratischen Faktoren der **Weierstrass**ischen Normalform auszurechnen[22]).

§ 13.

Vergleich der elliptischen und hyperelliptischen Funktionen.

Wenn wir jetzt zwischen den Entwicklungen, die wir über hyperelliptische Funktionen gegeben haben, und den anderen, die wir nun betreffs der elliptischen Funktionen hinzufügten, einen Vergleich anstellen sollen, so bemerken wir vor allem, daß die Definition, die wir in (46), (47) für die hyperelliptischen σ hinschrieben, vollständig übereinstimmt mit der in (57), (59) für die elliptischen σ aufgestellten. Das Gleiche können wir auch

[20]) **Schwarz**, a. a. O., S. 6, Formel (6).

[21]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie von 1882. [= Werke, Bd. 2, S. 247; außerdem **Schwarz**, a. a. O., S. 22, Formel (4).]

[22]) [**Pick** hat in den Math. Annalen, Bd. 28 (1886/87) eine invariante Darstellung für $\wp u$, $\wp' u$, σu, $\sigma_i u$ gegeben, welche eine ternäre C_3 zugrunde legt. Diese Arbeit muß als Vorbereitung für die noch wiederholt zu nennende Arbeit **Picks** aus den Math. Annalen, Bd. 29 (1887) angesehen werden. K.]

von den beiderseitigen Reihenentwicklungen sagen: wir müssen nur beachten, daß statt der zwei bei den hyperelliptischen Funktionen vorhandenen Größen u_1, u_2 im Falle der elliptischen Funktionen nur eine, u, vorliegt, daß es sich also nicht mehr um *binäre* Kovarianten, sondern um *unäre* handeln wird[23]), d. h. eben um Potenzen von u, die mit geeigneten Invarianten von f multipliziert sind. Dem Satze, daß alle Entwicklungsterme der hyperelliptischen σ sich als ganze Funktionen aus den Kovarianten gewisser voller Systeme zusammensetzen, entspricht bei den elliptischen σ, daß die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von u jedesmal ganze Funktionen von nur zwei Invarianten sind. — Ich verzichte darauf, die Übereinstimmung der zweierlei σ noch weiter zu verfolgen; man vergleiche übrigens, was in § 6 über die beiderseitigen Funktionalgleichungen und an anderen Stellen über die Potenzentwicklung der Produkte der jeweiligen geraden σ-Funktionen gesagt wurde. —

Das hiermit Bemerkte ist eine Bestätigung für die Zweckmäßigkeit unserer bisherigen Überlegungen. Aber ein fortgesetzter Vergleich mit der Theorie der elliptischen Funktionen führt weiter, zu wesentlich neuen Gedankenentwicklungen. Man beachte, daß die eigentliche Normalform der Theorie der elliptischen Funktionen keineswegs diejenige ist, welche sich auf die Nebeneinanderstellung der $\sigma(u)$, $\sigma_i(u)$ stützt, vielmehr die andere, welche konsequent mit $\sigma(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$ operiert. Das entscheidende Moment liegt in dem Verhalten der in Betracht kommenden Funktionen gegenüber linearen Transformationen der Perioden: während $\sigma(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$ bei allen linearen Transformationen ungeändert bleiben, ist dies bei den $\sigma_i(u)$ nur noch bei solchen lineraren Transformationen der Fall, die modulo 2 zur Identität kongruent sind, — oder auch im Sinne der sonst von mir eingehaltenen Terminologie: *die $\sigma(u)$, $\wp(u)$, $\wp'(u)$ sind Funktionen erster Stufe, die $\sigma_i(u)$ Funktionen der zweiten Stufe.* Wir werden den Sachverhalt noch besser bezeichnen, wenn wir $\wp(u)$, $\wp'(u)$ als Quotienten **Jacobi**scher Funktionen schreiben (wobei die Nenner Potenzen von $\sigma(u)$ selbst sind) und nun statt $\wp(u)$, $\wp'(u)$ neben $\sigma(u)$ nur die in den Zählern auftretenden Jacobischen Funktionen nennen. Ich will eine Jacobische Funktion, welche der *ersten* Stufe angehört, fortan zur Unterscheidung mit $\Sigma(u)$ bezeichnen und ihr einen oberen Index geben, der ihre Ordnung anzeigt. Wir haben dann

[23]) In der Tat, hätten wir statt hyperelliptischer Funktionen zweier Variabler den nächst höheren Fall in Betracht gezogen, wo dann eine Grundform f vom achten Grade und drei überall endliche Integrale u_1, u_2, u_3 vorgelegt sein würden, so müßten die Entwicklungen der σ nach Kovarianten mit drei Variablen u_1, u_2, u_3 fortschreiten, d. h. nach simultanen Invarianten von f und einer quadratischen Form, in denen die Koeffizienten der quadratischen Form hinterher durch u_1, u_2, u_3 ersetzt worden sind. [Vgl. die Ausführungen in der folgenden Abhandlung XCVI.]

$$(65) \qquad \sigma(u) = \Sigma^{(1)}(u), \quad \wp(u) = \frac{\Sigma^{(2)}(u)}{(\Sigma^{(1)}(u))^2}, \quad \wp'(u) = \frac{\Sigma^{(3)}(u)}{(\Sigma^{(1)}(u))^3}$$

und können sagen: *daß die Normalform der Theorie der elliptischen Funktionen durchweg mit Σ-Funktionen operiert, insbesondere mit $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$, durch die sich alle anderen ausdrücken lassen.* Verwenden wir statt $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$ die σ, σ_i, so haben wir eine Theorie „zweiter Stufe"; an sie reihen sich, bei systematischer Behandlung der elliptischen Funktionen, Theorieen der dritten, vierten Stufe usw.[24]).

Unser Zielpunkt muß jetzt sein, *eben jene Systematik, die sich im Falle der elliptischen Funktionen bewährt hat, auch im Falle der hyperelliptischen Funktionen durchzuführen, vor allem sonach auch im hyperelliptischen Falle Σ-Funktionen zu konstruieren.* Ich werde in der gegenwärtigen Darstellung nur noch auf letzteren Punkt eingehen, und kehre hier vorab, um die betreffenden Entwicklungen vorzubereiten, noch einen Augenblick zu den elliptischen Σ-Funktionen zurück.

Indem wir (65) mit (54), (55), (57) kombinieren, erhalten wir folgende Definitionen der elliptischen Fundamentalfunktionen:

$$(66) \quad \begin{cases} \Sigma^{(1)}(u) = (x\,y)\cdot Z, \\ \Sigma^{(2)}(u) = \dfrac{\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + F(x,y)}{2}\cdot Z^2, \\ \Sigma^{(3)}(u) = \dfrac{\sqrt{f(y)}\left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} y_1 + \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} y_2\right) + \sqrt{f(x)}\left(\dfrac{\partial f(y)}{\partial y_1} x_2 + \dfrac{\partial f(y)}{\partial y_2} x_2\right)}{4}\cdot Z^3, \end{cases}$$

wo Z den folgenden „Zusatzfaktor" bedeutet:

$$(67) \qquad Z = \frac{e^{\frac{1}{2} Q_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}}}{\sqrt[4]{f(x)\cdot f(y)}}.$$

Wir erkennen hier folgende Gesetze, denen sämtliche Σ-Funktionen unterliegen und die rückwärts zur Charakterisierung der Σ-Funktionen ausreichen:

---

[24]) Man vgl. die Erläuterungen, welche ich hierüber in meiner Arbeit: *Über die elliptischen Normalkurven der n-ten Ordnung und zugehörige Modulfunktionen der n-ten Stufe* im 13. Bande der Abhandlungen der math. phys. Klasse der K. Sächs. Ges. d. Wiss. gegeben habe. [= Abh. XC in vorliegendem Bande]. — [Über die den dort eingeführten Größen X_α, Y_α, Z_α, entsprechenden Größen $X_{\alpha\beta}$, $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$, des hyperelliptischen Falles findet man in dem Referat von Krazer und Wirtinger „Abelsche und allgemeine Thetafunktionen" in Bd. II_2, der math. Enzyklopädie in Nr. 97, 98, Literatur. Vgl. außerdem Abhandlung LIX in Bd. 2 dieser Gesamtausgabe und die dort auf S. 475 und 478/79 gegebenen Zitate. K.]

1. Eine Σ-Funktion ν-ter Ordnung ($\Sigma^{(\nu)}(u)$) ist gleich dem Produkte von Z^ν in eine Kovariante $C_{x,y}$ von f, die wir nach Adjunktion der Größen $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{f(y)}$ als eine rationale ganze Kovariante von f bezeichnen dürfen.

2. In x und y hat diese Kovariante denselben Grad ν, so daß sie also bei festgehaltenem $y, \sqrt{f(y)}$ für 2ν Wertsysteme $x, \sqrt{f(x)}$, und ebenso bei festgehaltenem $x, \sqrt{f(x)}$ für 2ν Wertsysteme $y, \sqrt{f(y)}$ verschwindet.

3. Von den genannten 2ν Wertsystemen $x, \sqrt{f(x)}$ fallen jedesmal ν mit $\bar{y}$ (d. h. mit $y, -\sqrt{f(y)}$) und ebenso von den 2ν Wertsystemen $y, \sqrt{f(y)}$ jedesmal ν mit $\bar{x}$ (d. h. mit $x, -\sqrt{f(x)}$) zusammen.

Der letzte dieser drei Sätze ist offenbar besonders wichtig. Er ist notwendig, weil der Zusatzfaktor Z für $y = \bar{x}$ (oder, was dasselbe ist, für $x = \bar{y}$) einfach unendlich wird, während doch Σ endlich bleiben soll; er ist aber auch hinreichend, weil Z, wie leicht zu sehen, keine anderen Unendlichkeitsstellen als die hiermit berücksichtigten besitzt. Indem das Unendlichwerden von Z die unter 3. genannten Nullstellen von $C_{x,y}$ kompensiert, verschwindet $\Sigma^{(\nu)}(u)$ selbst bei festgehaltenem y, $\sqrt{f(y)}$ nur für ν Stellen x, $\sqrt{f(x)}$ usw., wie dies von anderer Seite (aus der Theorie der Jacobischen Funktionen) bekannt ist.

Übrigens erweist sich $\Sigma^{(\nu)}(u)$ als eine gerade oder ungerade Funktion von u und bleibt also bei Vertauschung von x und y im ersteren Falle überhaupt, im zweiten bis auf das Vorzeichen ungeändert. Es folgt dies aus Homogeneitätsgründen bei Betrachtung der nach Potenzen von u fortschreitenden Reihenentwicklungen der Σ (deren Koeffizienten durchweg ganze Funktionen von g_2, g_3 sein müssen), oder auch durch direkte Aufstellung sämtlicher zulässiger Kovarianten $C_{x,y}$. Was letzteren Punkt angeht, so können offenbar alle homogenen Relationen zwischen Σ-Funktionen als Identitäten zwischen Kovarianten $C_{x,y}$ aufgefaßt und bewiesen werden. Insbesondere, wenn alle $\Sigma^{(\nu)}(u)$ ganze Funktionen der drei fundamentalen $\Sigma^{(1)}(u)$, $\Sigma^{(2)}(u)$, $\Sigma^{(3)}(u)$ sind, so heißt dies, daß alle $C_{x,y}$ ganze Funktionen der in (66) auftretenden sind, ein Satz, den man durch direkte Überlegung bestätigt.

§ 14.

Hyperelliptische Σ-Funktionen.

Indem ich mich nunmehr zur Theorie der hyperelliptischen Σ-Funktionen wende, beginne ich mit der Konstruktion von Beispielen. Wir erhalten dieselben, indem wir geeignete symmetrische Verbindungen der hyperelliptischen σ in Betracht ziehen. Von dem hierher gehörigen Produkte der geraden σ haben wir schon in § 2 und § 11 gehandelt. Aber ebensowohl gehört hierher das Produkt der ungeraden σ, für welches sich aus (47), unter Z wieder den Zusatzfaktor (67) verstanden, folgender Wert ergibt:

$$\prod_{1}^{6} \sigma(u_1, u_2) = \frac{(xy)^6 \cdot \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(y)}}{64} \cdot Z^6, \tag{68}$$

oder die Summe der Quadrate der geraden σ,[25]) für welche aus (46) der folgende Ausdruck resultiert, dessen hauptsächlicher Bestandteil uns im Laufe unserer Entwicklungen nun schon so oft begegnet ist:

$$\sum_{1}^{10} \sigma(u_1, u_2)^2 = 5 \cdot (\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + F(x, y)) \cdot Z^2, \tag{69}$$

oder auch jede lineare Kombination der Quadrate der ungeraden σ:

$$\sum_{1}^{6} C_i \cdot \sigma_i(u_1, u_2)^2, \tag{70}$$

bei der wir die C_i mit Rücksicht auf die Dimension der σ_i in den Koeffizienten der zugehörigen Formen p_i und χ_i in der Art als simultane Invarianten der p_i und χ_i einführen, daß ihr Grad in den Koeffizienten von p_i um zwei Einheiten kleiner als ihr Grad in den Koeffizienten von χ_i ist. — Ausgerechnet ergeben die Summen (70) Werte der folgenden Form

$$(\alpha x_1 y_1 + \beta(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \gamma x_2 y_2) \cdot (xy)^2 \cdot Z^2, \tag{71}$$

unter

$$\alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$$

je eine rationale, ganze, quadratische Kovariante von f verstanden.

Diese Beispiele, zusammen mit dem im vorigen Paragraphen über elliptische Σ-Funktionen Gesagten, werden genügen, um den allgemeinen Begriff hyperelliptischer Σ-Funktionen erfassen zu lassen. Ein Punkt selbstverständlich bleibt den elliptischen Funktionen bei diesem Vergleiche eigentümlich und erteilt ihrer Theorie eine besondere Signatur, daß bei ihnen nämlich eine Jacobische Funktion

$$\sigma(u) = \Sigma^{(1)}(u)$$

existiert, welche gleichzeitig ein σ und ein Σ ist. Im übrigen haben wir den folgenden Satz, der die Charakterisierung der hyperelliptischen Σ-Funktionen enthält:

[25]) Die Summe der ersten Potenzen kommt nicht in Betracht, weil sie überhaupt keine Jacobische Funktion ist.

Eine hyperelliptische Σ-Funktion ν-ter Ordnung hat die Gestalt:

$$\Sigma^{(\nu)}(u_1, u_2) = C_{x,y} \cdot Z^\nu, \tag{72}$$

wo $C_{x,y}$ eine im Rationalitätsbereiche $\sqrt{f(x)}$, $\sqrt{f(y)}$ rationale, ganze Kovariante von f ist, welche bei festgehaltenem $y, \sqrt{f(y)}$ für 3ν Wertsysteme $x, \sqrt{f(x)}$ verschwindet, von denen ν mit $\bar{y}$ zusammenfallen, bei festgehaltenem $x, \sqrt{f(x)}$ aber für 3ν Wertsysteme $y, \sqrt{f(y)}$ verschwindet, von denen ν mit $\bar{x}$ koinzidieren.

Als Grad von $C_{x,y}$ in den x oder den y ergibt sich $\frac{3\nu}{2}$, woraus wir schließen, daß ν jedenfalls eine gerade Zahl ist. Wir zeigen ferner, daß $C_{x,y}$ bei Vertauschung von x und y ungeändert bleiben muß. Es folgt dies schon aus der Reihenentwicklung von $\Sigma^{(\nu)}(u_1, u_2)$, die nach den Formen des vollen Formensystems der Form f fortschreiten muß, indem ja unter diesen Formen (deren Variable durch u_1, u_2 ersetzt werden) nur Kovarianten geraden Grades vorhanden sind, die Reihenentwicklung also ungeändert bleibt, wenn wir u_1, u_2 durch $-u_1, -u_2$ ersetzen[26]).

Speziell als niederste Σ-Funktionen ergeben sich vier von der zweiten Ordnung, die ich durch untere Indizes unterscheiden will:

1. Es seien $\sum a_{ik} x_i x_k$, $\sum b_{ik} x_i x_k$, $\sum c_{ik} x_i x_k$ die niedrigsten drei rationalen, ganzen, quadratischen Kovarianten von f. *Dann sind die ersten drei in Betracht kommenden Σ-Funktionen in Übereinstimmung mit* (71):

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma_1^{(2)}(u_1, u_2) &= \sum a_{ik} x_i y_k \cdot (xy)^2 \cdot Z^2, \\ \Sigma_2^{(2)}(u_1, u_2) &= \sum b_{ik} x_i y_k \cdot (xy)^2 \cdot Z^2, \\ \Sigma_3^{(2)}(u_1, u_2) &= \sum c_{ik} x_i y_k \cdot (xy)^2 \cdot Z^2. \end{aligned} \right. \tag{73}$$

2. *Als weitere Funktion wähle ich nach* (69):

$$\Sigma_4^{(2)}(u_1, u_2) = (\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(y)} + F(x, y)) \cdot Z^2. — \tag{74}$$

Die vorliegenden Untersuchungen mögen hiermit ihr vorläufiges Ende gefunden haben[27]). In welcher Richtung sie weiterzuführen sind, und insbesondere: daß sie Übertragungen auf allgemeine Abelsche Funktionen gestatten, dürfte ohne weiteres deutlich sein. Das wesentlich Neue meiner

[26]) Bei hyperelliptischen Funktionen höherer Art treten alternierend nur gerade Σ-Funktionen oder auch ungerade auf, je nachdem die Zahl der in Betracht kommenden Variabeln eine gerade oder eine ungerade ist.

[27]) [Wegen weiterer Ausführungen zur Theorie der Σ-Funktionen erster Stufe siehe die Ausführungen von Burkhardt in Bd. 35 der Math. Annalen (1889/90) und die Arbeiten von E. Pascal in den Annali di Matematica, ser. 2, Bd. 18 (1890), S. 131 und 227, sowie Bd. 19 (1891/92), S. 159. K.]

Betrachtungen erblicke ich in dem prinzipiellen Anschlusse an die Prozesse und Begriffsbildungen der Invariantentheorie: nur hierdurch wird von vornherein die Unterscheidung wesentlicher und unwesentlicher Konstanten möglich und also ein wichtiges Hindernis weggehoben, das sich bisher dem Fortschritte der Theorie entgegenstellte[28]). Die elliptischen Funktionen zusammen mit den hyperelliptischen Funktionen beliebig vieler Argumente erscheinen dabei durch den Umstand ausgezeichnet, daß bei ihnen die Betrachtung einer *binären* Form zugrunde zu legen ist (oder doch zugrunde gelegt werden kann), während man zur Behandlung der allgemeinen Abelschen Funktionen zu Formen mit größerer Variablenzahl wird fortschreiten müssen.

Göttingen, den 10. April 1886.

---

[28]) [Siehe z. B. Bolza in den Math. Annalen, Bd. 30 (1887): „*Darstellung der ganzen rationalen Invarianten der Binärform sechsten Grades durch die Nullwerte der zugehörigen Thetafunktionen*". K.]

XCVI. Über hyperelliptische Sigmafunktionen.

(Zweiter Aufsatz.)

[Math. Annalen, Bd. 32 (1888).]

In einer ersten unter vorstehendem Titel veröffentlichten Abhandlung, die ich weiterhin mit Nr. XCV zitieren werde[1]), habe ich gezeigt, daß sich die Definition der σ-Funktionen, die Weierstrass zunächst nur für den Fall $p=1$ gegeben hat, bei zweckmäßiger Deutung der WeierstrassischenFormeln in einfacher und naturgemäßer Weise auf $p=2$ übertragen läßt: ich entwickelte zunächst, wie die neuen σ-Funktionen aus den zugehörigen ϑ-Funktionen entstehen (Nr. XCV, Gl. (6), (23)), ich gab sodann die Definition der σ am hyperelliptischen Gebilde (Gl. (46), (47) ebenda) und beschäftigte mich schließlich mit gewissen Eigenschaften ihrer Potenzentwicklung (Gl. (50), (51) daselbst)[2]). Ich habe seitdem diesen Gegenstand in Vorlesungen weiter verfolgt (Sommer 1887 und Winter 1887—88). Hierbei handelte es sich in erster Linie darum, die Darstellung in der Weise systematisch zu ordnen, daß ich die σ-Funktionen als den natürlichen Durchgangspunkt betrachtete, um vom hyperelliptischen Gebilde zu den zugehörigen ϑ-Funktionen zu gelangen. Andererseits strebte ich Erweiterung aller Entwicklungen auf hyperelliptische Funktionen beliebigen Geschlechtes an. Ich werde im folgenden hierüber Bericht erstatten, indem ich mich, wie in meinen Vorlesungen, auf eine allgemeine Skizzierung des Gedankenganges beschränke und immer nur diejenigen Punkte genauer ausführe, die für meine Überlegung besonders charakteristisch sind. Die notwendige Ergänzung, welche meine Darstellung hiernach im einzelnen benötigt, findet sich zum großen Teile bereits in der [in Bd. 32 der Math. Annalen auf das Original

---

[1]) Math. Annalen, Bd. 27 1886. [Vorstehend als Abh. XCV abgedruckt. Die angegebenen Seitenzahlen beziehen sich auf diesen Wiederabdruck.]

[2]) Die genannten Entwicklungen sind seitdem von Herrn Wiltheiss (Math. Annalen, Bd. 29, 1887, S. 272 ff.) und von Herrn Brioschi (Annali di Matematica, ser. 2, t. XIV, 1887, S. 241 ff.) [= Opere matematiche, Nr. LXXXIX, tomo II., S. 345 ff.] eingehender untersucht worden. Herr Brioschi berechnet die Entwicklungsterme der geraden σ-Funktionen bis zu denjenigen vom zwölften Grade einschließlich.

des vorliegenden Aufsatzes unmittelbar folgenden] Arbeit des Herrn Burkhardt[3]), auf die ich wiederholt zu verweisen haben werde; Zitate auf dieselbe sollen kurz durch den Buchstaben B. bezeichnet sein. Ich darf dabei nicht unterlassen anzugeben, daß mir der wissenschaftliche Verkehr mit Herrn Burkhardt auch für diejenigen Überlegungen, die ich im folgenden selbst entwickle, mannigfach förderlich gewesen ist.

§ 1.
Vorerinnerungen.

Die Bezeichnungen, die ich im folgenden verwende, sind im großen und ganzen dieselben, die ich in Nr. XCV gebraucht habe. Mit f_6 oder kurz f benenne ich die binäre Form sechsten Grades, durch welche das hyperelliptische Gebilde vom Geschlechte 2 definiert wird. Bei der Definition der σ-Funktionen hat man zweierlei Zerlegungen dieses f zu betrachten: solche in zwei kubische Formen und andere in einen Linearfaktor und einen Faktor fünften Grades. Beide will ich hier in die eine Formel zusammenfassen $f = \varphi\psi$, wo dann, sobald es der Deutlichkeit wegen wünschenswert scheint, φ und ψ im ersten Falle den Index 3 erhalten mögen, im zweiten Falle aber φ_1 und ψ_5 genannt werden sollen. Die zugehörigen σ werden dann ausführlich als $\sigma_{\varphi_3\psi_3}$ und $\sigma_{\varphi_1\psi_5}$ zu bezeichnen sein, wofür ich gelegentlich der Kürze halber $\sigma_{\varphi\psi}$ oder auch, wenn es nur auf den Grad der φ, ψ ankommt, $\sigma_{3,3}$ und $\sigma_{1,5}$ schreibe. Die Integrale erster Gattung, die früher u_1, u_2 hießen, nenne ich jetzt w_1, w_2:

(1) $$w_1 = \int_y^x \frac{z_1\,(z\,dz)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}, \quad w_2 = \int_y^x \frac{z_2\,(z\,dz)}{\sqrt{f(z_1, z_2)}}.$$

Dann ist nach Nr. XCV, Gl. (46) die Definition der zehn geraden σ die folgende:

(2) $$\sigma_{\varphi_3\psi_3}(w_1, w_2) = \frac{\sqrt{\varphi_3 x}\sqrt{\psi_3 y} + \sqrt{\psi_3 x}\sqrt{\varphi_3 y}}{2\sqrt[4]{f_6 x \cdot f_6 y}} \cdot e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}},$$

und die der sechs ungeraden σ nach Nr. XCV, Gl. (47):

(3) $$\sigma_{\varphi_1\psi_5}(w_1, w_2) = \frac{(xy)\sqrt{\varphi_1 x \cdot \varphi_1 y}}{2\sqrt[4]{f_6 x \cdot f_6 y}} \cdot e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}.$$

---

[3]) [*Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunktionen.* Burkhardt gibt als Ziel seiner Arbeit an „die in der vorstehenden Abhandlung des Herrn F. Klein für die Behandlung der hyperelliptischen Sigmafunktionen aufgestellten Gesichtspunkte ins einzelne durchzuführen“. Vgl. überdies die Vorbemerkungen auf S. 321 des vorliegenden Bandes.]

Hierbei ist Q nach Nr. XCV, Gl. (36) das Normalintegral dritter Gattung:

(4) $$Q_{xy}^{x'y'} = Q_{x'y'}^{xy} = \int_{y'}^{x'}\int_{y}^{x} \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{fz'}} \cdot \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \cdot \frac{\sqrt{fz'}\sqrt{fz} + F(z', z)}{2\,(z'z)^2},$$

wo $F(z', z)$ die durch 120 dividierte dritte Polare bedeutet:

(5a) $$F(z', z) = \frac{1}{120}\left(\frac{\partial^3 f(z_1 z_1)}{\partial z_1^3} \cdot z_1'^3 + \ldots\right),$$

die man symbolisch so schreiben kann, wenn man $f(z) = a_z^6$ setzt:

(5b) $$F(z', z) = a_{z'}^3 a_z^3.$$

Ferner sind $\bar{x}, \bar{y}$ die Benennungen derjenigen Stellen des hyperelliptischen Gebildes, die zu den Stellen x, y konjugiert sind (vgl. Nr. XCV, S. 338).

Auf der durch $\sqrt{f}$ gegebenen Riemannschen Fläche fixieren wir jetzt, wie in Nr. XCV, S. 327, ein System kanonischer Querschnitte A_1, A_2, B_1, B_2. Die zugehörigen Perioden der w_1, w_2 bezeichnen wir nach Nr. XCV Gl. (9) durch das Schema:

(6)

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
w_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

Dabei gilt, wohlverstanden, eine Periode als einem Querschnitte *zugehörig*, wenn sie dem Integralwerte bei *Überschreitung* des Querschnitts hinzutritt. Wollten wir die Perioden so ordnen, wie sie sich bei *Durchlaufung* der einzelnen Querschnitte A, B ergeben, so müßten wir in dem vorstehenden Schema die erste und dritte, wie die zweite und vierte Vertikalreihe miteinander vertauschen.

Aus (6) ergeben sich jetzt die Normalintegrale v_i und die Thetamoduln τ_{ik} nach der Tabelle:

(7)

	A_1	A_2	B_1	B_2
v_1	1	0	τ_{11}	τ_{12}
v_2	0	1	τ_{21}	τ_{22}

Die Unterdeterminante aus den beiden ersten Kolonnen der ω bezeichnen wir mit p_{12}:

(8) $$p_{12} = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}.$$

Aus den v, τ denken wir uns des weiteren die 16 ϑ-Reihen gebildet. Wir unterscheiden dieselben in üblicher Weise durch eine *Charakteristik*

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix},$$

wo die g_1, g_2, h_1, h_2 je die beiden Werte Null und Eins annehmen können. Wenn x in (1) die Querschnitte A_1, A_2, B_1, B_2 überschreitet und die v_1, v_2 dementsprechend die in (7) bezeichneten Periodenzuwächse erhalten, wird das zur Charakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ gehörige ϑ, das fortan mit

$$\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v_1, v_2) \quad \text{oder kurz} \quad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$$

bezeichnet werden soll, die Faktoren erhalten:

$$(10)\quad (-1)^{g_1},\quad (-1)^{g_2},\quad (-1)^{h_1}\cdot e^{-2i\pi\left(v_1+\frac{\tau_{11}}{2}\right)},\quad (-1)^{h_2}\cdot e^{-2i\pi\left(v_2+\frac{\tau_{22}}{2}\right)}.$$

Jeder geraden ϑ-Funktion entspricht eine bestimmte Zerspaltung von f in zwei Faktoren φ_3 und ψ_3, jeder ungeraden eine solche in φ_1 und ψ_5. Es wird weiterhin unsere besondere Aufgabe sein, zu entscheiden, welche Zerlegung dies in jedem Falle ist und wie also, je nach der Wahl des Querschnittssystems (6), die 16 ϑ-Funktionen den 16 σ-Funktionen zugeordnet sind. Bemerken wir hier nur noch, daß die zugehörigen Zerlegungen von f sich insbesondere geltend machen, wenn man die ϑ-Funktionen nach Potenzen der v_1, v_2 entwickeln will. Mit $\Delta\varphi_3$, $\Delta\psi_3$ seien, wie in Nr. XCV, die Diskriminanten von φ_3, ψ_3 bezeichnet, ebenso mit $\Delta\psi_5$ diejenige von ψ_5. Ich will der Gleichförmigkeit der Formeln wegen hier auch noch das Zeichen $\Delta\varphi_1$ einführen, das einfach den Zahlenwert Eins repräsentieren soll. Die Koeffizienten von $\varphi_1(z_1, z_2)$ nenne ich φ_{11}, φ_{12}:

$$\varphi_1(z_1, z_2) = \varphi_{11} z_1 + \varphi_{12} z_2.$$

Dann ist nach Nr. XCV, S. 330—331, vermöge der dort zitierten Thomaeschen Entwicklungen[4]) der Anfangsterm der Reihenentwicklung:

a) *beim geraden* ϑ:

$$(11\text{a})\qquad \vartheta(v_1, v_2) = \sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}}\cdot\sqrt[8]{\Delta\varphi_3\cdot\Delta\psi_3} + \dots,$$

b) *beim ungeraden* ϑ:

$$(11\text{b})\qquad \vartheta(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}}\cdot\sqrt[8]{\Delta\varphi_1\cdot\Delta\psi_5}\cdot(\varphi_{11} w_1 + \varphi_{12} w_2) + \dots$$

[4]) Crelles Journal, Bd. 71 (1869/70). *Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \dots 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Funktionen.*

(wo in der letzten Formel die w_1, w_2 noch durch die ihnen gleichen linearen Verbindungen der v_1, v_2 zu ersetzen sind, die sich aus (7) ergeben:

$$(11\text{c})\qquad \begin{aligned} w_1 &= \omega_{11} v_1 + \omega_{12} v_2, \\ w_2 &= \omega_{21} v_1 + \omega_{22} v_2). \end{aligned}$$

§ 2.

Integrale zweiter Gattung.

Es wird sich jetzt zunächst darum handeln, die Periodizitätseigenschaften der σ-Funktionen von den Formeln (2), (3) aus festzulegen. Hierzu haben wir vorab die Periodizitätseigenschaften des Integrals Q zu untersuchen. Zu dem Zwecke wird man sich des bekannten Zerlegungsverfahrens bedienen, welches Weierstrass seinen bezüglichen Entwicklungen zugrunde legt[5]). Inzwischen konnte mir die Gestalt, in der dieses Verfahren gegeben wird, für meine Zwecke nicht genügen. Vielmehr mußte ich versuchen, dasselbe so umzusetzen, daß durchweg invariante Bildungen und Prozesse zur Verwendung kamen. Hierzu gehörte vor allen Dingen eine geeignete Einführung der beiden, in der Weierstrassischen Theorie vorkommenden Integrale zweiter Gattung, die den Integralen w_1, w_2 der ersten Gattung korrespondieren. Ich werde dieselben nach den in Nr. XCV entwickelten Prinzipien, also unter Vermeidung aller unnötigen Irrationalitäten und im Anschluß an die Verfahrungsweisen der Invariantentheorie *so wählen, daß ihre gemeinsame Unstetigkeitsstelle* (an der sie, allgemein zu reden, zweifach unendlich werden) *eine beliebige Stelle t des hyperelliptischen Gebildes ist, während gleichzeitig ihre Perioden von der Wahl dieser Stelle unabhängig sind.* Letzteres muß sich in der Tat erreichen lassen. Ist nämlich t' eine zweite Stelle des algebraischen Gebildes, so wird man auf letzterem eine algebraische Funktion konstruieren können, welche in t genau so unendlich wird, wie das eine der beiden zu t gehörigen Integrale zweiter Gattung, welche ferner in t' höchstens doppelt unendlich wird und überall sonst endlich bleibt. Subtrahiert man nun diese algebraische Funktion von dem in t unendlich werdenden Integral zweiter Gattung, so hat man ein Integral zweiter Gattung gewonnen, dessen Unstetigkeitsstelle nach t' verlegt ist, während seine Perioden völlig ungeändert geblieben sind.

Die Durchführung der hiermit angedeuteten Entwicklungen wird durch folgende einfache Formeln geliefert. Sei:

$$(12)\qquad Z^{(t)} = \int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}}\cdot\frac{\sqrt{fz}\sqrt{ft} + F(z,t)}{2\,(zt)^2}.$$

[5]) Vgl. beispielsweise die Darstellung bei Wiltheiss in Crelles Journal für Mathematik, Bd 99 (1886), S. 238.

d. h. dasselbe Integral, welches unter dem Doppelintegral Q vorkommt, sofern man für das bei Q benutzte z' jetzt t setzt. Dieses Z stellt an sich bereits ein Integral zweiter Gattung mit der Unstetigkeitsstelle t vor, an welcher es übrigens nur einfach unendlich wird. Formentheoretisch ist dasselbe als eine Kovariante von f mit den Variabelreihen x, y, t vom Gewichte (-1) zu bezeichnen. In den x, y ist Z selbstverständlich vom 0-ten Grade, in den t vom ersten, in den Koeffizienten von f vom Grade $+\frac{1}{2}$. *Wir gewinnen nun die beiden fernerhin zu benutzenden Integrale der zweiten Gattung, die wir $Z_1^{(t)}$, $Z_2^{(t)}$ nennen wollen, indem wir $Z^{(t)}$ nach t_1, bez. t_2 differentiieren. Wir setzen also:*

$$Z_1^{(t)} = \frac{\partial Z^{(t)}}{\partial t_1}, \quad Z_2^{(t)} = \frac{\partial Z^{(t)}}{\partial t_2}. \tag{13}$$

Daß diese $Z_1^{(t)}$, $Z_2^{(t)}$ allen von uns aufgestellten Forderungen in der Tat entsprechen, ist leicht zu sehen. Um zu zeigen, daß ihre Perioden von der Stelle t unabhängig sind, bilde man für eine zweite Stelle, t', die entsprechenden Integrale $Z_1^{(t')}$, $Z_2^{(t')}$. Die Differenzen

$$Z_1^{(t)} - Z_1^{(t')}, \quad Z_2^{(t)} - Z_2^{(t')}$$

erweisen sich dann als algebraische Funktionen[6]).

Ich werde die Perioden, welche die $Z_1^{(t)}$, $Z_2^{(t)}$ an den Querschnitten A_1, A_2, B_1, B_2 annehmen, folgendermaßen bezeichnen:

(14)

	A_1	A_2	B_1	B_2
$Z_1^{(t)}$	$-\eta_{11}$	$-\eta_{12}$	$-\eta_{13}$	$-\eta_{14}$
$Z_2^{(t)}$	$-\eta_{21}$	$-\eta_{22}$	$-\eta_{23}$	$-\eta_{24}$

In der Tat sind dies, wie aus der ferneren Entwicklung hervorgeht, dieselben Größen, die ich in Nr. XCV Gl. (33) als $\eta_{11}, \ldots$ eingeführt habe und die ich damals bereits als Perioden der zweiten Gattung bezeichnete.

Aus (13) folgern wir sofort:

$$t_1 \cdot Z_1^{(t)} + t_2 \cdot Z_2^{(t)} = Z^{(t)}. \tag{15}$$

Da $Z^{(t)}$ als Kovariante von f von dem Gewichte -1 aufzufassen war, so ist in dieser Formel das Verhalten der $Z_1^{(t)}$, $Z_2^{(t)}$ bei linearer Transformation der Integrationsvariabeln z_1, z_2 ausgesprochen. Insbesondere folgt, daß die Summe

$$w_1^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z}{}_1^{(t)} + w_2^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z}{}_2^{(t)}, \tag{16}$$

[6]) Vgl. Wiltheiss in den Math. Annalen, Bd. 31, (1887/88) S. 137, oder auch die Entwicklungen von B. § 2.

— wo die x', y', x, y, irgendwelche Grenzen der Integrale bedeuten sollen —, eine absolute Kovariante der kogredienten Variabelreihen x', y', x, y, t ist, vom nullten Grade in jeder derselben wie in den Koeffizienten von f.

Diese Bemerkungen übertragen sich auf die Perioden η. Insbesondere lasse man in (16) das x' nach Überschreitung des α-ten Periodenweges mit y' zusammenfallen, ebenso das x nach Überschreitung des β-ten Periodenweges mit y. *Dann folgt, daß nachstehender Ausdruck:*

$$-\omega_{1\alpha}\eta_{1\beta} - \omega_{2\alpha}\eta_{2\beta} \tag{17}$$

eine absolute Invariante von f ist. Die bekannten Bilinearrelationen zwischen den ω und η, auf deren Theorie wir hier nicht weiter eingehen (vgl. B. § 9, 10), sind lineare Beziehungen zwischen solchen Invarianten.

§ 3.

Von der Periodizität der σ-Funktionen.

Die Zerlegung des Q, von der zu Anfang des vorigen Paragraphen die Rede war, wird jetzt durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{aligned} Q_{xy}^{x'y'} &= \int_{y'}^{x'} \frac{(z'dz')}{\sqrt{fz'}} \left[z_1' \cdot \overset{xy}{Z}{}_1^{(z')} + z_2' \cdot \overset{xy}{Z}{}_2^{(z')} \right] \\ &= \int_{y'}^{x'} \frac{(z'dz')}{\sqrt{fz'}} \left[z_1' \left(\overset{xy}{Z}{}_1^{(z')} - \overset{xy}{Z}{}_1^{(t')} \right) + z_2' \left(\overset{xy}{Z}{}_2^{(z')} - \overset{xy}{Z}{}_2^{(t')} \right) \right] \\ &\qquad + w_1^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z}{}_1^{(t')} + w_2^{x'y} \cdot \overset{xy}{Z}{}_2^{(t')}. \end{aligned} \tag{18a}$$

$$\begin{aligned} Q_{x'y'}^{xy} &= \int_{y}^{x} \frac{(zdz)}{\sqrt{fz}} \left[z_1 \cdot \overset{x'y'}{Z}{}_1^{(z)} + z_2 \cdot \overset{x'y'}{Z}{}_2^{(z)} \right] \\ &= \int_{y}^{x} \frac{(zdz)}{\sqrt{fz}} \left[z_1 \left(\overset{x'y'}{Z}{}_1^{(z)} - \overset{x'y'}{Z}{}_1^{(t)} \right) + z_2 \left(\overset{x'y'}{Z}{}_2^{(z)} - \overset{x'y'}{Z}{}_2^{(t)} \right) \right] \\ &\qquad + w_1^{xy} \cdot \overset{x'y'}{Z}{}_1^{(t)} + w_2^{xy} \cdot \overset{x'y'}{Z}{}_2^{(t)}. \end{aligned} \tag{18b}$$

Hier ist t', bez. t ein willkürlicher Hilfspunkt. *Erstere Formel gebrauchen wir, wenn es sich um die Änderung handelt, die Q erleidet, wenn x oder y auf dem hyperelliptischen Gebilde einen Periodenweg durchläuft, letztere Formel, wenn x' oder y' einen Periodenweg beschreibt.* Die Ausführung wolle man in der Arbeit von Herrn Burkhardt vergleichen, wo auch gezeigt wird, wie man von den so entstehenden Formeln aus zu den Periodizitätseigenschaften der Funktion Q_{xy}^{xy} und schließlich des einzelnen $\sigma_{\varphi\psi}$

gelangt. Das Resultat, wie es sich zunächst darbietet, läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Mögen auf irgendeinem Periodenwege die Integrale

$$w_1,\ w_2,\ Z_1^{(t)},\ Z_2^{(t)}$$

beziehungsweise um

$$\omega_1,\ \omega_2,\ -\eta_1,\ -\eta_2$$

wachsen, dann tritt zu jeder σ-Funktion ein Exponentialfaktor hinzu von folgender Gestalt:

$$(19)\qquad \pm\, e^{\eta_1\left(w_1+\frac{\omega_1}{2}\right)+\eta_2\left(w_2+\frac{\omega_2}{2}\right)}.$$

Was ich hier ausdrücklich erläutern muß, ist die Bestimmung des bei dieser Formel zu verwendenden Vorzeichens. Man denke sich zu dem Zwecke den geschlossenen Integrationsweg, der die Perioden ω, $-\eta$ liefert, aus lauter solchen einfachen Periodenwegen zusammengesetzt, deren jeder nur zwei Verzweigungspunkte umschließt. Für diese besonderen Wege ergibt sich dann folgende Regel:

Es sei $f = \varphi\cdot\psi$ diejenige Zerlegung von f, welche dem gerade in Betracht gezogenen σ entspricht. Wir werden in der zugehörigen Formel (19) *das + oder das − Zeichen anwenden müssen, je nachdem ob sich die beiden Verzweigungspunkte, die der Periodenweg umschließt, auf φ und ψ verteilen oder nicht.*

Wiederholte Anwendung dieser Regel ergibt, wie bereits angedeutet, die für einen beliebigen Periodenweg geltende Vorzeichenbestimmung[2].

Wir wollen nun insbesondere diejenigen Faktoren (19) in Betracht ziehen, welche beim einzelnen $\sigma_{\varphi\psi}$ in dem hiermit erläuterten Sinne den Wegen B_1, B_2, A_1, A_2 (also der Überschreitung von A_1, A_2, B_1, B_2) entsprechen. Die zugehörigen Vorzeichen mögen beziehungsweise durch

$$(-1)^{g_1},\quad (-1)^{g_2},\quad (-1)^{h_1},\quad (-1)^{h_2}$$

gegeben sein (wo die g, h die beiden Werte 0 und 1 je nachdem vorstellen sollen). *Dann lauten die betreffenden Exponentialfaktoren in Übereinstimmung mit* Nr. XCV, Gl. (34):

$$(20)\quad \begin{cases} (-1)^{g_1}\cdot e^{\eta_{11}\left(w_1+\frac{\omega_{11}}{2}\right)+\eta_{21}\left(w_2+\frac{\omega_{21}}{2}\right)}, & (-1)^{g_2}\cdot e^{\eta_{12}\left(w_1+\frac{\omega_{12}}{2}\right)+\eta_{22}\left(w_2+\frac{\omega_{22}}{2}\right)},\\ (-1)^{h_1}\cdot e^{\eta_{13}\left(w_1+\frac{\omega_{13}}{2}\right)+\eta_{23}\left(w_2+\frac{\omega_{23}}{2}\right)}, & (-1)^{h_2}\cdot e^{\eta_{14}\left(w_1+\frac{\omega_{14}}{2}\right)+\eta_{24}\left(w_2+\frac{\omega_{24}}{2}\right)}. \end{cases}$$

[2] [Die 36 Arten von verschiedenen Schnittsystemen, welche im hyperelliptischen Falle $p = 3$ zu unterscheiden sind, hat Herr H. D. Tompson 1892 in seiner Göttinger Dissertation „*Hyperelliptische Schnittsysteme und Zusammenordnung der algebraischen und transzendenten Thetacharakteristiken*" (abgedruckt im American Journal of Mathematics, Bd. 15.) untersucht. K.]

Dabei werden von den 16 unterschiedenen σ-Funktionen keine zwei dieselben Zahlen g_1, g_2, h_1, h_2 darbieten können; andernfalls nämlich wäre der Quotient der beiden σ auf dem hyperelliptischen Gebilde eindeutig, was nach (2), (3) nicht angeht.

§ 4.

Darstellung der ϑ durch die σ.

Wir haben gerade mit Bezug auf das zugrunde gelegte kanonische Querschnittsystem der A_1, A_2, B_1, B_2 jedem $\sigma_{\varphi\psi}$ vier bestimmte Zahlen g_1, g_2, h_1, h_2, deren jede 0 oder 1 sein kann, zugeordnet. Ich brauche nun nicht auszuführen, daß dem einzelnen $\sigma_{\varphi\psi}$ unter den zum Querschnittsystem gehörigen ϑ-Funktionen gerade diejenige korrespondiert, deren Charakteriktik durch $\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}$ gegeben ist, und daß wir also zur Definition des $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ eine Formel der folgenden Art haben:

$$(21)\qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|} = C_{\varphi\psi}\cdot e^{G(v_1, v_2)}\cdot \sigma_{\varphi\psi};$$

hier ist $G(v_1, v_2)$ eine homogene quadratische Funktion der v_1, v_2, die von der Charakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$, resp. der Zerlegung $f = \varphi\cdot\psi$, unabhängig ist, während $C_{\varphi\psi}$ eine Größe bezeichnet, in der die v_1, v_2 nicht mehr vorkommen, die aber mit der Zerlegung des f wechselt. Es handelt sich uns um die expliziten Werte des G und der C. In ersterer Hinsicht ziehen wir die Periodizitätsgleichungen (10) und (20) heran und finden aus den beiden ersten Gleichungspaaren:

$$(22)\quad G(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & w_1 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & w_2 \\ \eta_{11} w_1 + \eta_{21} w_2 & \eta_{12} w_1 + \eta_{22} w_2 & 0 \end{vmatrix} : 2\,p_{12}.$$

Die Bestimmung von $C_{\varphi\psi}$ erfolgt aus (11a), bez. (11b). In der Tat korrespondiert in (21), wie wir hier nicht näher nachweisen, jeder geraden Charakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ eine Zerlegung von f in $\varphi_3\cdot\psi_3$, jeder ungeraden eine Zerlegung in $\varphi_1\cdot\psi_5$. Hiernach ist unmittelbar

1. im Falle der geraden Charakteristik:

$$(23\text{a})\qquad C_{\varphi\psi} = \sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}}\cdot\sqrt[8]{\Delta\varphi_3\cdot\Delta\psi_3},$$

2. im Falle der ungeraden Charakteristik:

$$(23\text{b})\qquad C_{\varphi\psi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}}\cdot\sqrt[8]{\Delta\varphi_1\cdot\Delta\psi_5}.$$

Die Formeln (21), (22), (23) *zusammengenommen enthalten diejenige Definition der ϑ-Funktionen am hyperelliptischen Gebilde, die wir in der Einleitung in Aussicht nahmen.* Man vergleiche hiermit die genau analogen Formeln, welche Herr Weierstrass für den Zusammenhang seiner σ- und ϑ-Funktionen bei $p=1$ gegeben hat (Formelsammlung von Schwarz, S. 42).

§ 5.
Die elliptischen σ für mehrgliedriges Argument.

Wir kehren jetzt einen Augenblick zu den σ-Funktionen für $p=1$ zurück. Ich erwähne zunächst die Definition, welche ich für dieselben in Nr. XCV gegeben habe. Sei

$$w=\int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}}, \tag{24}$$

wo fz eine Binärform vierten Grades, sei ferner Q in ähnlicher Weise definiert, wie oben in (4), (nur daß $F(z',z)$ jetzt die durch 12 dividierte zweite Polare von f vorstellt), dann war das ungerade σ:

$$\sigma(w)=\frac{(xy)}{\sqrt[4]{fx\cdot fy}}\cdot e^{\frac{1}{2}Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}. \tag{25a}$$

Um die geraden σ zu konstruieren, mußte f auf alle Weisen in zwei quadratische Faktoren zerspalten werden:

$$f=\varphi_2\psi_2.$$

Jeder solchen Zerlegung gehörte dann ein gerades σ an:

$$\sigma(w)=\frac{\sqrt{\varphi x}\sqrt{\psi y}+\sqrt{\psi x}\sqrt{\varphi y}}{2\sqrt[4]{fx fy}}\cdot e^{\frac{1}{2}Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}. \tag{25b}$$

Wir werden im folgenden die hiermit erhaltenen vier σ-Funktionen zweckmäßigerweise wieder nach der zugehörigen Zerspaltung von f benennen, also die geraden σ als $\sigma_{\varphi_2\psi_2}$, das ungerade σ aber, bei dem in Wirklichkeit keinerlei Zerspaltung von f vorliegt, als $\sigma_{\varphi_0\psi_4}$.

Die Frage, um welche es sich nunmehr handeln soll, ist folgende. Wir denken uns w nicht mehr durch (24), sondern *in Gestalt der mehrfachen Integralsumme* gegeben:

$$w=\int_{y'}^{x'}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}}+\int_{y''}^{x'}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}}+\dots+\int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}}; \tag{26}$$

welches ist dann die Definition der $\sigma(w)$?

Die gewöhnlichen Additionsformeln der σ-Funktionen gestatten, diese Frage auf sehr verschiedenartige Weise zu beantworten[8]. Ich werde in dieser Hinsicht hier Formeln mitteilen, welche später unmittelbare Verallgemeinerung auf $p>1$ zulassen. Dieselben gehen von der in (25a) enthaltenen Definition der ungeraden σ-Funktion für eingliedriges Argument aus und führen mit deren Hilfe die σ-Funktionen mehrgliedriger Argumente (26) auf gewisse einfache Determinantenausdrücke zurück. Hierbei spielt also der in (25a) rechter Hand auftretende Ausdruck eine bevorzugte Rolle. Ich darf nun gleich hinzufügen, daß für $p>1$ ein ganz ähnlicher Ausdruck, von genau entsprechender Bedeutung, konstruiert werden kann, der aber nicht mehr mit einer der dann zu unterscheidenden σ-Funktionen zusammenfällt, auch nicht, wenn man die in den letzteren auftretenden Argumente spezialisiert. Ich werde also für den fraglichen Ausdruck (25a) schon hier ein von σ verschiedenes Zeichen einführen, das bei der späteren Verallgemeinerung beibehalten werden kann. Dementsprechend schreibe ich:

$$\frac{(xy)}{\sqrt[4]{fx\cdot fy}}\cdot e^{\frac{1}{2}Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}=\Omega(x,y). \tag{27}$$

Ich will ferner unter M folgendes Aggregat verschiedener Ω-Ausdrücke verstehen:

$$M=\frac{\prod_i\prod_k \Omega(x^{(i)},y^{(k)})}{\prod_i\prod_k (x^{(i)},y^{(k)})\cdot\prod_i\prod_k{}'\,\Omega(x^{(i)},x^{(k)})\cdot\prod_i\prod_k{}'\,\Omega(y^{(i)},y^{(k)})} \tag{28}$$

Hier sollen die i, k bei den Doppelprodukten je die Werte $1,2,\dots,\nu$ durchlaufen, mit der Maßgabe, daß bei den mit einem Akzent versehenen Produkten die Glieder mit $i=k$ auszulassen sind und jede Kombination zweier Zahlen i, k nur einmal zu nehmen ist[9]. Dieses M ist eine Kovariante der Variabelreihen $x',x'',\dots,x^{(\nu)}$; $y',y'',\dots,y^{(\nu)}$, in jeder derselben von der $(-\nu)$-ten Dimension, dabei in den Koeffizienten von f vom Grade $\left(-\frac{\nu}{2}\right)$.

Ich wende mich nun zur Konstruktion der in Betracht kommenden Determinantenausdrücke. Dieselben erhalten je 2ν Reihen, die bez. von den einzelnen $x',x'',\dots,x^{(\nu)}$, $y',y'',\dots,y^{(\nu)}$ abhängen. Da das Bildungsgesetz der ν ersten Reihen genau dasselbe ist, und ebenso das Bildungs-

[8]) Vgl. etwa Frobenius und Stickelberger in Crelles Journal für Mathematik, Bd. 88 (1880) S. 146 ff. (wo man eine Reihe weiterer Zitate findet), oder Schwarz-Weierstrass, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, S. 16 ff.

[9]) In gleichem Sinne wolle man später immer den einem Doppelprodukt zugesetzten Akzent verstehen.

gesetz der ν folgenden Reihen, so wird es genügen, eine einzige Reihe mit x und eine Reihe mit y anzuschreiben. In diesem Sinne lautet die Determinante, welche zur Zerlegung $f = \varphi_0 \psi_4$ gehört:

$$(29\text{a})\quad D_{\varphi_0\psi_4} = \begin{vmatrix} x_1^\nu, & x_1^{\nu-1}x_2, \ldots & x_2^\nu, x_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 x}, x_1^{\nu-3}x_2\sqrt{\psi_4 x}, \ldots x_2^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 x} \\ -y_1^\nu, & -y_1^{\nu-1}y_2, \ldots & -y_2^\nu, y_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 y}, y_1^{\nu-3}y_2\sqrt{\psi_4 y}, \ldots y_2^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 y} \end{vmatrix},$$

die zu $f = \varphi_2 \psi_2$ gehörige Determinante aber:

$$(29\text{b})\quad D_{\varphi_2\psi_2} = \begin{vmatrix} x_1^{\nu-1}\sqrt{\varphi_2 x}, \ldots & x_2^{\nu-1}\sqrt{\varphi_2 x}, x_1^{\nu-1}\sqrt{\psi_2 x}, \ldots x_2^{\nu-1}\sqrt{\psi_2 x} \\ -y_1^{\nu-1}\sqrt{\varphi_2 y}, \ldots & -y_2^{\nu-1}\sqrt{\varphi_2 y}, y_1^{\nu-1}\sqrt{\psi_2 y}, \ldots y_2^{\nu-1}\sqrt{\psi_2 y} \end{vmatrix};$$

das beidemal zugrunde liegende Bildungsgesetz tritt noch deutlicher hervor, wenn wir $D_{\varphi_0\psi_4}$ so schreiben:

$$\begin{vmatrix} x_1^\nu\sqrt{\varphi_0 x}, \ldots & x_2^\nu\sqrt{\varphi_0 x}, x_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 x}, \ldots x_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 x} \\ -y_1^\nu\sqrt{\varphi_0 y}, \ldots & -y_2^\nu\sqrt{\varphi_0 y}, y_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 y}, \ldots y_2^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 y} \end{vmatrix}.$$

Dieses voraufgeschickt haben wir nun für das durch (26) *gegebene Argument w die folgende Definition der Sigmafunktionen:*

$$(30)\qquad \begin{cases} \sigma_{\varphi_0\psi_4}(w) = c_\nu' \cdot M \cdot D_{\varphi_0\psi_4}, \\ \sigma_{\varphi_2\psi_2}(w) = c_\nu \cdot M \cdot D_{\varphi_2\psi_2}. \end{cases}$$

Die c_ν', c_ν sind dabei numerische (von der in (26) auftretenden Gliederzahl ν abhängige) Konstanten, mit deren Bestimmung wir uns hier nicht aufhalten.

Was den Beweis der Formeln (30) angeht, so ist derselbe nach bekannten Vorschriften durch Betrachtung der beiderseitigen Verschwindungsstellen und Periodizitätseigenschaften zu führen. Insbesondere wolle man beachten, daß die σ vermöge (30) Kovarianten in den $x', x'', \ldots, y', y'', \ldots$ werden, die in diesen Variabelreihen übereinstimmend die Dimensionen 0 haben; der Grad in den Koeffizienten von f ist dabei für $\sigma_{\varphi_0\psi_4}$ gleich $-\frac{1}{2}$, für die $\sigma_{\varphi_2\psi_2}$ gleich 0, wie es sein muß.

Nimmt man in (30) die Zahl ν gleich 1, so kommt man auf die Ausgangsformeln (25) zurück.

§ 6.

Entsprechende Verallgemeinerung der σ für $p = 2$.

Es soll sich nunmehr darum handeln, die hiermit für $p = 1$ gegebenen Entwicklungen auf $p = 2$ zu übertragen. Wir schreiben also statt der Formeln (1) mehrgliedrige Integralsummen:

$$(31)\qquad \begin{cases} w_1 = \displaystyle\int_{y'}^{x'} \frac{z_1(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \int_{y''}^{x''} \frac{z_1(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} \frac{z_1(z\,dz)}{\sqrt{fz}}, \\ w_2 = \displaystyle\int_{y'}^{x'} \frac{z_2(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \int_{y''}^{x''} \frac{z_2(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} \frac{z_2(z\,dz)}{\sqrt{fz}}, \end{cases}$$

und fragen, welche Formeln dementsprechend an Stelle von (2), (3) als Definition der $\sigma(w_1, w_2)$ zu treten haben. Wir haben im vorigen Paragraphen die geeigneten Vorbereitungen getroffen, die uns jetzt ohne weiteres zur Beantwortung dieser Frage hinleiten.

Wir setzen zunächst, wie in (27):

$$(32)\qquad \Omega(x, y) = \frac{(xy)}{\sqrt[4]{fx \cdot fy}}\, e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{xy}}.$$

Dieses Ω (dessen Einführung auch für $p > 1$ wir schon vorhin in Aussicht stellten) ist hier, wie im Falle $p = 1$, eine Kovariante der beiden Variabelreihen x und y, vom Grade $(-\frac{1}{2})$ in den Koeffizienten von f. Aber es ist nicht mehr, wie damals, von der 0-ten Dimension in den x, oder y, es ist also nicht mehr, wie im elliptischen Falle, eine eigentliche Funktion der Stellen x, y des algebraischen Gebildes. *Trotzdem werden wir Ω als wesentliches Element der auf $p = 2$ bezüglichen Theorie betrachten dürfen. Es hat nämlich auch bei $p = 2$ die Eigenschaft, an keiner Stelle des algebraischen Gebildes verzweigt zu sein, oder unendlich zu werden, und nur dann und zwar einfach zu verschwinden, wenn x mit y zusammenfällt.* Ω hat also nach wie vor, um es prägnant zu bezeichnen, die Eigenschaft eines ***Primausdrucks***[10]).

Wir konstruieren jetzt, wie in (28), das folgende Aggregat verschiedener Ω:

$$(33)\quad M = \frac{\prod_i \prod_k \Omega(x^{(i)} y^{(k)})}{\prod_i \prod_k (x^{(i)} y^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k{}' \,\Omega(x^{(i)} x^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k{}' \,\Omega(y^{(i)} y^{(k)})},$$

[10]) Man wolle den Primausdruck Ω nicht mit der Weierstrassischen „Primfunktion" $E(x, y)$ verwechseln. [Die unterscheidenden Merkmale beider sind bereits in den Vorbemerkungen auf S. 319/320 auseinandergesetzt.] — Mit dem Ausdruck Ω, der sich ganz entsprechend in allen höheren Fällen (nicht nur bei den hyperelliptischen Gebilden) aufstellen läßt [vgl. die nachfolgend abgedruckte Abh. XCVII über Abelsche Funktionen, insbes. § 4 daselbst], ist meines Erachtens ein allgemeiner Fortschritt in der Theorie der Abelschen Funktionen gegeben. [Näheres hierüber sowie über die in Betracht kommenden literarischen Beziehungen siehe in Abh. XCVII, Fußnote [19]) auf S. 404/405. K.]

wir konstruieren ferner die folgenden Determinanten:

$$(34)\quad \begin{cases} D_{\varphi_3\psi_3} = \begin{vmatrix} x_1^{\nu-1}\sqrt{\varphi_3 x}, \ldots & x_2^{\nu-1}\sqrt{\varphi_3 x}, & x_1^{\nu-1}\sqrt{\psi_3 x}, \ldots & x_2^{\nu-1}\sqrt{\psi_3 x} \\ -y_1^{\nu-1}\sqrt{\varphi_3 y}, \ldots & -y_2^{\nu-1}\sqrt{\varphi_3 y}, & y_1^{\nu-1}\sqrt{\psi_3 y}, \ldots & y_2^{\nu-1}\sqrt{\psi_3 y} \end{vmatrix} \\ D_{\varphi_1\psi_5} = \begin{vmatrix} x_1^{\nu}\sqrt{\varphi_1 x}, \ldots & x_2^{\nu}\sqrt{\varphi_1 x}, & x_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_5 x}, \ldots & x_2^{\nu-2}\sqrt{\psi_5 x} \\ -y_1^{\nu}\sqrt{\varphi_1 y}, \ldots & -y_2^{\nu}\sqrt{\varphi_1 y}, & y_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_5 y}, \ldots & y_2^{\nu-2}\sqrt{\psi_5 y} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Dann ist die Definition der zu den Integralsummen (31) *gehörigen* σ-*Funktionen die folgende:*

$$(35)\quad \begin{cases} \sigma_{\varphi_3\psi_3}(w_1, w_2) = c_\nu \cdot M \cdot D_{\varphi_3\psi_3}, \\ \sigma_{\varphi_1\psi_5}(w_1, w_2) = c'_\nu \cdot M \cdot D_{\varphi_1\psi_5}. \end{cases}$$

Die c, c' sind dabei wieder geeignete Zahlenfaktoren.

Der Beweis gestaltet sich ganz ähnlich wie im elliptischen Falle; ich darf dieserhalb auf B., § 19 ff. verweisen.

§ 7.

Übergang zu beliebigem p. Festlegung der zugehörigen Integrale.

Wir haben jetzt die Entwicklungen für $p = 1$ und $p = 2$ bis zu einem Punkte geführt, von dem aus sich unmittelbare Verallgemeinerung für beliebiges p ermöglicht[11]).

Sei also jetzt $f(z) = f_{2p+2}(z) = a_z^{2p+2}$ eine binäre Form $(2p+2)$-ten Grades, durch die wir ein hyperelliptisches Gebilde definieren.

Wir verabreden zunächst, welche zugehörigen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung wir der weiteren Betrachtung zugrunde legen wollen.

1. Als fundamentale überall endliche Integrale wählen wir die folgenden p:

$$(36)\quad w_1 = \int_y^x \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}}, \quad w_2 = \int_y^x \frac{z_1^{p-2} z_2 (z\,dz)}{\sqrt{fz}}, \ldots \quad w_p = \int_y^x \frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}}.$$

Wir notieren gleich, wie sich dieselben umsetzen, wenn man die z_1, z_2 einer linearen Substitution unterwirft:

$$(37)\quad \begin{cases} z_1 = \alpha z_1' + \beta z_2' \\ z_2 = \gamma z_1' + \delta z_2' \end{cases} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = r).$$

Offenbar sind die $w_1, \ldots w_p$ homogene lineare Kombinationen der

[11]) Ich habe die bez. allgemeinen Formeln zum großen Teile bereits in den Göttinger Nachrichten 1887 mitgeteilt (Sitzung vom 5. November 1887): *Zur Theorie der hyperelliptischen Funktionen von beliebig vielen Veränderlichen.*

$w_1', \ldots w_p'$. Um das Gesetz dieser Kombination möglichst einfach zu bezeichnen, sei

$$(38)\quad \chi(t) = w_1 t_2^{p-1} - (p-1)_1 w_2 t_2^{p-2} t_1 + (p-1)_2 w_3 t_2^{p-3} t_1^2 - + \ldots$$
$$= \int_y^x \frac{(zt)^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}}.$$

Wenn wir dann die t ebenso substituieren, wie die z in (37), so haben wir offenbar

$$(39)\quad \chi(t) = \chi'(t') \cdot r^p,$$

worin das gesuchte Gesetz ausgesprochen ist.

2. Um jetzt zu geeigneten Integralen zweiter Gattung zu kommen (deren wir ebenfalls p gebrauchen), beginnen wir wie bei $p = 2$ mit dem Integral

$$(40)\quad Z^{(t)} = \int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \cdot \frac{\sqrt{fz}\sqrt{ft} + a_z^{p+1} a_t^{p+1}}{2(zt)^2}.$$

Aus ihm leiten wir dann durch Differentiation nach t_1, t_2 die p fundamentalen Integrale zweiter Gattung ab; wir setzen:

$$(41)\quad Z_1^{(t)} = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \frac{\partial^{p-1} Z^{(t)}}{\partial t_1^{p-1}}, \qquad Z_2^{(t)} = \frac{(p-1)_1}{(p-1)!} \cdot \frac{\partial^{p-1} Z^{(t)}}{\partial t_1^{p-2}\,\partial t_2}, \ldots,$$

so daß also nach dem Eulerschen Theoreme:

$$(42)\quad t_1^{p-1} \cdot Z_1^{(t)} + t_1^{p-2} t_2 \cdot Z_2^{(t)} + \ldots + t_2^{p-1} Z_p^{(t)} = Z^{(t)}.$$

Diese $Z_1, \ldots, Z_p$ haben, bei $z = t$, allgemein zu reden, einen p-fachen Unstetigkeitspunkt. Ihr Verhalten bei einer linearen Substitution (37) ergibt sich aus der Kovariantennatur des $Z^{(t)}$; das Resultat ist, wie bei $p = 2$, *daß die* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ *den* $w_1, w_2, \ldots, w_p$ *genau kontragredient sind, so daß also der Ausdruck*

$$(43)\quad w_1^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_1^{(t)}} + w_2^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_2^{(t)}} + \ldots + w_p^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_p^{(t)}}$$

bei (37) *durchaus ungeändert bleibt.*

3. Als Integral dritter Gattung endlich bilden wir das folgende

$$(44)\quad Q_{xy}^{x'y'} = Q_{x'y'}^{xy} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \cdot \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{fz'}} \cdot \frac{\sqrt{fz}\sqrt{fz'} + a_z^{p+1} a_{z'}^{p+1}}{2(zz')^2}$$
$$= \int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \cdot \overset{x'y'}{Z^{(z)}} = \int_{y'}^{x'} \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{fz'}} \cdot \overset{xy}{Z^{(z')}},$$

seine Eigenschaften betr. Unendlichwerden und Verhalten bei linearer Substitution der z_1, z_2 gestalten sich genau so, wie in den Fällen $p = 1$ und $p = 2$.

§ 8.

Periodizität der Integrale.

Wir denken uns jetzt auf der durch $\sqrt{f}$ definierten Riemannschen Fläche $2p$ kanonische Querschnitte gezogen:

$$A_1, A_2, \ldots A_p; \quad B_1, B_2, \ldots B_p$$

und betrachten die Perioden, welche unsere Integrale bei Überschreitung dieser Querschnitte aufweisen.

1. Bei den Integralen erster Gattung beschränken wir uns darauf, eine feste Benennung der zugehörigen Perioden zu vereinbaren. Wir bezeichnen dieselben folgendermaßen:

$$(45)\qquad \begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & A_1 & \ldots & A_p & B_1 & \ldots & B_p \\
\hline
w_1 & \omega_{1,1} & \ldots & \omega_{1,p} & \omega_{1,p+1} & \ldots & \omega_{1,2p} \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
w_p & \omega_{p,1} & \ldots & \omega_{p,p} & \omega_{p,p+1} & \ldots & \omega_{p,2p}
\end{array}$$

2. Bei den Integralen zweiter Gattung führen wir die Perioden durch das Schema ein:

$$(46)\qquad \begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & A_1 & \ldots & A_p & B_1 & \ldots & B_p \\
\hline
Z_1^{(t)} & -\eta_{1,1} & \ldots & -\eta_{1,p} & -\eta_{1,p+1} & \ldots & -\eta_{1,2p} \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
Z_p^{(t)} & -\eta_{p,1} & \ldots & -\eta_{p,p} & -\eta_{p,p+1} & \ldots & -\eta_{p,2p}
\end{array}$$

Die hier auftretenden η heißen die *Perioden zweiter Gattung* schlechtweg. In der Tat zeigt sich, genau wie bei $p = 2$ (oder bei $p = 1$), daß dieselben von der Wahl des bei Konstruktion der Z benutzten t unabhängig sind.

3. Die Periodizität von Q ergibt sich nun wieder aus einer doppelten Umsetzung desselben.

Wir haben das eine Mal:

$$(47\text{a})\qquad Q_{xy}^{x'y'} = \int_{y'}^{x'} \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{fz'}} \Big[z_1'^{\,p-1} \big(\overset{xy}{Z_1^{(z')}} - \overset{xy}{Z_1^{(t')}}\big) + \ldots + z_2'^{\,p-1} \big(\overset{xy}{Z_p^{(z')}} - \overset{xy}{Z_p^{(t')}}\big) \Big]$$
$$+ w_1^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_1^{(t')}} + \ldots + w_p^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_p^{(t')}},$$

das andere Mal:

$$(47\text{b})\qquad Q_{x'y'}^{xy} = \int_{y}^{x} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \Big[z_1^{p-1} \big(\overset{x'y'}{Z_1^{(z)}} - \overset{x'y'}{Z_1^{(t)}}\big) + \ldots + z_2^{p-1} \big(\overset{x'y'}{Z_p^{(z)}} - \overset{x'y'}{Z_p^{(t)}}\big) \Big]$$
$$+ w_1^{xy} \cdot \overset{x'y'}{Z_1^{(t)}} + \ldots + w_p^{xy} \cdot \overset{x'y'}{Z_p^{(t)}}.$$

Wegen der Folgerungen hieraus, der Bilinearrelationen zwischen den ω und η, usw. usw. verweise ich auf die Darstellung von B. § 4 ff.[12])

§ 9.

Definition der allgemeinen σ-Funktionen.

Um jetzt die 2^{2p} zu $\sqrt{f_{2p+2}}$ gehörigen σ-Funktionen zu definieren, wollen wir von vorneherein beliebig vielgliedrige Integralsummen in Betracht ziehen, setzen also an Stelle der einfachen Formeln (36) die folgenden:

$$(48)\qquad \left\{ \begin{aligned}
w_1 &= \int_{y'}^{x'} \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \ldots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \\
&\;\;\vdots \\
w_p &= \int_{y'}^{x'} \frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \ldots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} \frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}}.
\end{aligned} \right.$$

Übrigens aber halten wir uns genau an die Resultate, die sich bei $p = 1, 2$ ergeben haben.

Wir konstruieren uns also vor allen Dingen den *Primausdruck:*

$$(49)\qquad \Omega(x, y) = \frac{(xy)}{\sqrt[4]{fx \cdot fy}} \cdot e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{xy}};$$

derselbe ist jetzt in den x und den y bez. vom Grade $-\frac{p-1}{2}$.

[12]) [Von späteren Arbeiten, die sich hier anschließen und zugleich die Verbindung mit der Weierstrassischen Darstellung der Theorie hervorkehren, nenne ich folgende Arbeiten von Bolza: *On Weierstrass' systems of hyperelliptic integrals of the first and second kind*", Mathematical Papers read at the internat. mathemat. Congress Chicago 1893 und für den folgenden Paragraphen: „*Über das Analogon der Funktion $\wp u$ im allgemeinen hyperelliptischen Falle*", Göttinger Nachrichten 1894 und „*On the first and second logarithmic derivatives of hyperelliptic σ-functions*", American Journal of Mathematics, Bd. 17, 1895. K.]

Wir setzen ferner, wie früher:

$$(50)\qquad M = \frac{\prod_i \prod_k \Omega(x^{(i)} y^{(k)})}{\prod_i \prod_k (x^{(i)} y^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k{}' \, \Omega(x^{(i)} x^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k{}' \, \Omega(y^{(i)} y^{(k)})}.$$

Wir betrachten sodann alle *Zerlegungen von* f von folgender Form:

$$(51)\qquad f = \varphi_{p+1-2\mu} \psi_{p+1+2\mu}, \quad \left(\mu = 0, 1, \ldots \left[\frac{p+1}{2}\right]\right),$$

d. h. alle Zerlegungen von f in zwei Faktoren, deren Grad sich um ein Multiplum von 4 unterscheidet. Solcher Zerlegungen gibt es gerade 2^{2p} (wobei wir, im Falle p ungerade ist, den Ansatz $f = \varphi_0 \psi_{2p+2}$ mitgezählt haben, wie wir ja schon im Falle $p = 1$ getan hatten).

Einer jeden dieser Zerlegungen entsprechend konstruieren wir jetzt eine 2ν-reihige Determinante, die im Sinne der früheren Verabredung folgendermaßen zu bezeichnen sein wird:

$$(52)\qquad D_{\varphi_{p+1-2\mu} \psi_{p+1+2\mu}} = \begin{vmatrix} x_1^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi x}, \ldots & x_2^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi x}, & x_1^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi x}, \ldots x_2^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi x} \\ -y_1^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi y}, \ldots & -y_2^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi y}, & y_1^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi y}, \ldots y_2^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi y} \end{vmatrix}.$$

Hierauf nun führen wir die 2^{2p} σ*-Funktionen durch folgende Formeln ein*[13]*):*

$$(53)\qquad \sigma_{\varphi_{p+1-2\mu} \psi_{p+1+2\mu}} = c_\nu^{(\mu)} \cdot M \cdot D_{\varphi_{p+1-2\mu} \psi_{p+1+2\mu}}.$$

Die $c_\nu^{(\mu)}$ sollen dabei numerische Konstanten sein, die von μ und ν abhängen und über deren Werte noch weiterhin geeignete Verfügung getroffen werden wird.

§ 10.

Einige Eigenschaften der σ-Funktionen.

Die σ-Funktionen erscheinen im vorigen Paragraphen als Kovarianten der Formen φ, ψ mit den Variabelreihen $x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$; $y', y'', \ldots, y^{(\nu)}$. In diesen Variabelenreihen sind sie je vom 0-ten Grade, dagegen in den Koeffizienten von φ, ψ bez. vom Grade $+\frac{\mu}{2}$ und $-\frac{\mu}{2}$.

Dabei hat die Definition wegen der Determinanten (52) zunächst nur Bedeutung, wenn $\nu > \mu$ ist.

Immer können wir die Definition auch noch für $\nu = \mu$ aufrecht erhalten, wenn wir die Determinante (52), wie fortan geschehen soll, in

[13]) In den Göttinger Nachrichten (a.a.O.) hatte ich die Definition der allgemeinen σ etwas anders gefaßt, indem ich die Funktion $X(x) = \Omega(x, y)_{\lim (y=x)}$ einführte; inzwischen erscheint dies zunächst weniger zweckmäßig, als das im Texte angewandte Verfahren. [Siehe jedoch unten S. 405.]

diesem Falle dahin interpretieren, daß sie überhaupt keine Kolonne mit $\sqrt{\psi}$ enthält, sich also auf den einfachen Wert reduziert:

$$(54)\qquad (-1)^\nu \cdot \begin{vmatrix} x_1^{2\nu-1} \ldots x_2^{2\nu-1} \\ y_1^{2\nu-1} \ldots y_2^{2\nu-1} \end{vmatrix} \cdot \prod_i \sqrt{\varphi(x^{(i)})} \cdot \prod_i \sqrt{\varphi(y^{(i)})}.$$

Es stimmt dies mit der allgemeinen Formel insofern, als die Zahl der Kolonnen mit $\sqrt{\psi}$ für $\nu > \mu$ ja $(\nu - \mu)$ beträgt.

Sollte aber $\nu < \mu$ sein, werden wir σ, wie wir jetzt verabreden, einfach $= 0$ setzen.

Es ist jetzt zu zeigen, daß bei geeigneter Abhängigkeit der Konstanten $c_\nu^{(\mu)}$ von der Anzahl ν[14]) *die hiermit eingeführten* σ*-Funktionen allein von den Integralsummen* $w_1, \ldots, w_p$ (48) *abhängen.*

Es ist ferner zu zeigen, *daß sie eindeutige ganze Funktionen der genannten Integralsummen sind, welche geraden oder ungeraden Charakter besitzen, je nachdem* μ *gerade oder ungerade ist.*

Es ist endlich zu entwickeln, *daß sie als Funktionen der* $w_1, \ldots, w_p$ *für* $\nu < \mu$ *genau* $(\mu - \nu)$*-fach verschwinden.*

Alle diese Nachweise werden von B. (§ 17 ff.) erbracht.

Bemerken wir insbesondere noch das Folgende. Unser letzter Satz schließt ein, daß die σ-Funktionen für $w_1, \ldots, w_p = 0, \ldots, 0$ μ-fach zu Null werden.

Die einzigen σ also, welche für die Nullwerte der Argumente nicht verschwinden, sind diejenigen, die Zerlegungen $f = \varphi_{p+1} \cdot \psi_{p+1}$ zugehören.

Die einzigen ferner, die für die Nullwerte der Argumente nur einfach verschwinden, sind die anderen, die Zerlegungen $f = \varphi_{p-1} \cdot \psi_{p+3}$ entsprechen, usw. usw.

§ 11.

Über die Reihenentwicklungen der σ nach steigenden Potenzen der w.

Nach den zuletzt angeführten Sätzen können die σ nach steigenden ganzen Potenzen der w in immer konvergente Potenzreihen entwickelt werden (wobei nur gerade oder nur ungerade Potenzen der w auftreten werden, je nachdem μ gerade oder ungerade genommen ist).

Es besteht nun der wichtige Satz, daß die Koeffizienten der Reihenentwicklungsterme rationale ganze Funktionen der Koeffizienten von φ und ψ sind, *daß also die* σ *nicht nur eindeutige ganze Funktionen der* $w_1, \ldots, w_p$ *sind, sondern ebensolche Funktionen der Koeffizienten von* φ

[14]) [Burkhardt findet $c_\nu^{(\mu)} = \frac{(-1)^{\mu\nu + \frac{1}{2}\mu(\mu+1)}}{2^{\mu-\nu}}$.]

und ψ. (Man vergleiche B. § 24, sowie die Darstellung bei Wiltheiss im 31. Bande der Math. Annalen, 1888, S. 410 ff.[15]))

Ich bespreche hier einige besonders einfache Gesetze, denen die in Rede stehenden Reihenentwicklungen unterliegen.

Man erinnere sich vor allem, daß vermöge der in (53) enthaltenen Definition σ in den Koeffizienten von φ den Grad $+\frac{\mu}{2}$ hatte, in den Koeffizienten von ψ den Grad $-\frac{\mu}{2}$. Nun sind die w ihrerseits in den Koeffizienten von $f=\varphi\psi$ von der $-\frac{1}{2}$-ten Dimension. Hat also ein Entwicklungsterm in den w den Grad $\mu+2\varrho$, so hat er in den Koeffizienten von φ den Grad $\mu+\varrho$, in denen von ψ den Grad ϱ; wir werden den Inbegriff derartiger Terme mit

$$\begin{pmatrix} {}^{\mu+2\varrho} & {}^{\mu+\varrho} & {}^{\varrho} \\ w, & \varphi, & \psi \end{pmatrix}$$

bezeichnen dürfen. Aus dem, was über das Verhalten des σ für verschwindende Argumente gesagt wurde, folgt jetzt, daß die niedrigsten überhaupt auftretenden Terme diejenigen sind, die $\varrho=0$ entsprechen. Ferner ist deutlich, daß ϱ nur ganzzahlige Werte annehmen kann. *Daher wird die Reihenentwicklung des σ folgendermaßen lauten:*

$$(55)\qquad \sigma\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu} = \begin{pmatrix} {}^{\mu} & {}^{\mu} & {}^{0} \\ w, & \varphi, & \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{\mu+2} & {}^{\mu+1} & {}^{1} \\ w, & \varphi, & \psi \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} {}^{\mu+2\varrho} & {}^{\mu+\varrho} & {}^{\varrho} \\ w, & \varphi, & \psi \end{pmatrix} + \dots,$$

in Übereinstimmung mit dem, was über den geraden, bez. ungeraden Charakter der Entwicklungsterme in Aussicht gestellt wurde.

Man bemerke jetzt ferner, daß die σ, vermöge der in (53) enthaltenen Definition, gegenüber linearen Transformationen der Integrationsvariabelen *Kovarianten* der φ, ψ sind. Sei die lineare Transformation, wie früher, durch (37) gegeben; mit w', φ', ψ' bezeichnen wir diejenigen Werte, welche dabei aus den w, φ, ψ entstehen, endlich mit σ' diejenige σ-Funktion, welche genau so aus den w', φ', ψ' zusammengesetzt ist, wie σ aus w, φ, ψ. Dann ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung:

$$(56)\qquad \sigma = r^{\mu^2}\cdot\sigma',$$

und also auch für jeden einzelnen Term in (55):

$$(57)\qquad \begin{pmatrix} {}^{\mu+2\varrho} & {}^{\mu+\varrho} & {}^{\varrho} \\ w, & \varphi, & \psi \end{pmatrix} = r^{\mu^2}\begin{pmatrix} {}^{\mu+2\varrho} & {}^{\mu+\varrho} & {}^{\varrho} \\ w', & \varphi', & \psi' \end{pmatrix}.$$

[15]) [Wiltheiss hat später seine einschlägigen Untersuchungen im 33. und 34. Band der Math. Annalen (1888/89) durch Hervorkehrung der invarianten-theoretischen Gesichtspunkte noch wesentlich vervollständigt. K.]

Nun haben wir in § 7 genauer untersucht, wie die w und die w' zusammenhängen. Allerdings waren damals die w als einfache Integrale vorausgesetzt, während sie jetzt als Integralsummen gelten, aber es ist deutlich, daß die Beziehungen zwischen den w und den w' von dieser Unterscheidung unabhängig sind. Wir werden also wieder dieselbe Hilfsform χ einführen dürfen, wie damals, wobei ich nur, was jetzt keine Verwechslung erzeugen kann, die in χ auftretenden Variabelen mit z_1, z_2 bezeichnen will, so daß wir haben:

$$\chi(z) = w_1 z_2^{p-1} - (p-1)_1 w_2 z_2^{p-2} z_1 + (p-1)_2 w_3 z_2^{p-3} z_1^2 - + \dots$$

Unser Resultat betr. Umsetzung der w war dann einfach (Formel (39)), *daß $\chi(z)$ bei linearer Transformation der z_1, z_2, bis auf einen hier nicht wieder anzugebenden Faktor ungeändert bleibt.* Wir wollen die w jetzt durchweg als Koeffizienten dieses χ betrachten und demnach die Reihenentwicklung (55) folgendermaßen schreiben:

$$(58)\qquad \sigma\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu} = \begin{pmatrix} {}^{\mu} & {}^{\mu} & {}^{0} \\ \chi, & \varphi, & \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{\mu+2} & {}^{\mu+1} & {}^{1} \\ \chi, & \varphi, & \psi \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} {}^{\mu+2\varrho} & {}^{\mu+\varrho} & {}^{\varrho} \\ \chi, & \varphi, & \psi \end{pmatrix} + \dots.$$

Die einzelnen Terme rechter Hand sind hier rationale ganze Funktionen der in $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ auftretenden Koeffizienten, beziehungsweise von den beigesetzten Graden in diesen Koeffizienten. Formel (57) gibt dabei

$$(59)\qquad \begin{pmatrix} {}^{\mu+2\varrho} & {}^{\mu+\varrho} & {}^{\varrho} \\ \chi, & \varphi, & \psi \end{pmatrix} = r^{\mu^2}\begin{pmatrix} {}^{\mu+2\varrho} & {}^{\mu+\varrho} & {}^{\varrho} \\ \chi', & \varphi', & \psi' \end{pmatrix}.$$

Dies aber heißt, mit Rücksicht auf das bereits hervorgehobene, in (39) enthaltene Verhalten der Form bei linearer Transformation:

Die einzelnen Terme (χ, φ, ψ) in (58) sind simultane Invarianten der drei Formen $\chi(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

Dies ist das hauptsächliche Resultat, welches hier zunächst abgeleitet werden sollte. Wir wollen uns für die folgenden Paragraphen die Aufgabe stellen, wenigstens den ersten Term der Reihenentwicklung (58), also den Term

$$\begin{pmatrix} {}^{\mu} & {}^{\mu} & {}^{0} \\ \chi, & \varphi, & \psi \end{pmatrix},$$

oder, wie wir kurz sagen werden, den Term

$$\begin{pmatrix} {}^{\mu} & {}^{\mu} \\ \chi, & \varphi \end{pmatrix}$$

zu berechnen. Zur Gewinnung der höheren Terme werden dann die Differentialgleichungen dienlich sein, welche Herr Wiltheiss in Crelles Journal für Mathematik, Bd. 99, 1886 (S. 236 ff.) und neuerdings, unter Verwendung invariantentheoretischer Prozesse, im 31. Bande der Math. Annalen 1888 (S. 134 ff.) abgeleitet hat.

§ 12.

Vorbereitungen zur Berechnung des ersten Terms der Reihenentwicklungen.

Indem ich mich jetzt zur Berechnung des Terms $\begin{pmatrix} \mu & \mu \\ \chi, & \varphi \end{pmatrix}$ hinwende, habe ich vor allem folgendes zu berichten. In der Definition (53) der ϱ-Funktionen waren die Konstanten $c_\nu^{(\mu)}$ zunächst völlig unbestimmt. Nun haben wir in § 10 verabredet, wie dieselben von der Zahl ν abhängig gemacht werden sollen, nämlich so, daß die σ, unabhängig von ν, Funktionen der Integralsummen $w_1, \ldots, w_p$ werden. Die Abhängigkeit der c von der Zahl μ ist dabei noch völlig unbestimmt gelassen. Wir wollen dieselbe jetzt fixieren, indem wir bedingen, *daß der Term* $\begin{pmatrix} \mu & \mu \\ \chi, & \varphi \end{pmatrix}$ *keinen überflüssigen Zahlenfaktor enthalten soll.* Dies hat zur Folge, daß wir bei der folgenden Zwischenrechnung von den $c_\nu^{(\mu)}$ überhaupt absehen und alle vortretenden Zahlenfaktoren einfach beiseite lassen dürfen. Es hat ferner zur Folge, worauf es uns hier zunächst ankommt, daß die Reihenentwicklung derjenigen σ, bei denen $\mu = 0$ ist (die also Zerlegungen $f = \varphi_{p+1}\psi_{p+1}$ entsprechen), mit $+1$ beginnt.

Wir betrachten jetzt ein beliebiges $\sigma_{\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu}}$. Nach dem, was wir gerade verabredeten, wird es auf dasselbe hinauskommen, ob wir den ersten Reihenentwicklungsterm für dieses σ selbst bestimmen oder aber für einen der Quotienten:

$$\frac{\sigma_{\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu}}}{\sigma_{\varphi_{p+1}\psi_{p+1}}};$$

diesen Quotienten aber können wir, indem wir das $c_\nu^{(\mu)}$ des Zählers wegwerfen, durch den algebraischen Ausdruck

$$(60)\qquad \frac{D_{\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu}}}{D_{\varphi_{p+1}\psi_{p+1}}}$$

ersetzen. An ihn also werden unsere weiteren Entwicklungen anknüpfen.

Wir werden nun, allgemein zu reden, folgendermaßen verfahren. In den Determinanten D treten die Variabelreihen $x', \ldots, x^{(\nu)}$, $y', \ldots, y^{(\nu)}$ auf. *Wir lassen jetzt die* $x', \ldots, x^{(\nu)}$ *den* $y', \ldots, y^{(\nu)}$ *beziehungsweise konsekutiv werden,* setzen also:

$$(61)\qquad x' = y' + dy',\ x'' = y'' + dy'', \ldots, x^{(\nu)} = y^{(\nu)} + dy^{(\nu)}.$$

Wir bestimmen zunächst, welchen Wert der Determinantenquotient (60) infolge dieser Formeln annimmt, sofern wir nur unendlich kleine Größen der niedersten Ordnung (die hier notwendig die μ-te Ordnung ist) beibehalten. Wir haben andererseits nach (48) für die Integralsummen w, indem wir Terme höherer Ordnung beiseite lassen:

$$(62)\qquad \begin{cases} w_1 = \dfrac{y_1'^{\,p-1}(y'\,dy')}{\sqrt{f\,y'}} + \dfrac{y_1''^{\,p-1}(y''\,dy'')}{\sqrt{f\,y''}} + \cdots + \dfrac{y_1^{(\nu)\,p-1}(y^{(\nu)}\,dy^{(\nu)})}{\sqrt{f\,y^{(\nu)}}}, \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ w_p = \dfrac{y_p'^{\,p-1}(y'\,dy')}{\sqrt{f\,y'}} + \dfrac{y_p''^{\,p-1}(y''\,dy'')}{\sqrt{f\,y''}} + \cdots + \dfrac{y_p^{(\nu)\,p-1}(y^{(\nu)}\,dy^{(\nu)})}{\sqrt{f\,y^{(\nu)}}} \end{cases}$$

oder für das zugehörige $\chi(z)$:

$$(62a)\quad \chi(z) = \frac{(y'\,dy')}{\sqrt{f\,y'}}(y'\,z)^{p-1} + \frac{(y''\,dy'')}{\sqrt{f\,y''}}(y''\,z)^{p-1} + \cdots + \frac{(y^{(\nu)}\,dy^{(\nu)})}{\sqrt{f\,y^{(\nu)}}}(y^{(\nu)}\,z)^{p-1}.$$

Unsere Aufgabe ist jetzt, zwischen dem für (60) *gefundenen Werte und den Formeln* (61), *resp.* (62) *die* y, dy *zu eliminieren, was möglich sein muß.* Der Quotient (60) wird dann einem Ausdrucke $\begin{pmatrix} \mu & \mu \\ w, & \varphi \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \mu & \mu \\ \chi, & \varphi \end{pmatrix}$ proportional werden, der eben das gesuchte erste Reihenentwicklungsglied vorstellt.

Die hiermit angedeutete Rechnung soll nun im folgenden Paragraphen in besonderer Weise durchgeführt werden. Wir wollen nämlich zunächst voraussetzen, daß $\nu = \mu$ sei, wodurch alle Formeln wesentlich vereinfacht werden. Aus dem dann entstehenden partikulären Ansatze werden wir sodann *vermöge invariantentheoretischer Prinzipien* das allgemeine Resultat in ganz bestimmter Form ablesen können.

§ 13.

Die wirkliche Berechnung des ersten Terms.

Wir nehmen jetzt, wie verabredet, $\nu = \mu$ und tragen die dieser Voraussetzung entsprechenden Werte (61) von x in Zähler und Nenner von (60) ein, wobei wir nur Glieder der niedrigsten Ordnung beibehalten.

Was zunächst den Nenner $D_{\varphi_{p+1}\psi_{p+1}}$ betrifft, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn wir in ihm einfach $x' = y', \ldots, x^{(\nu)} = y^{(\nu)}$ setzten. Durch eine leichte Umstellung, die ich hier nicht ausführe, wird derselbe dabei zu dem Produkt der Determinanten proportional:

$$\left| y_1^{\nu-1}\sqrt{\varphi_{p+1}y} \ldots y_p^{\nu-1}\sqrt{\varphi_{p+1}y} \right| \cdot \left| y_1^{\nu-1}\sqrt{\psi_{p+1}y} \ldots y_p^{\nu-1}\sqrt{\psi_{p+1}y} \right|$$

d. h. zu folgendem Ausdrucke:

$$(63)\qquad \prod_i \prod_k{}' (y^{(i)}\,y^{(k)})^2 \cdot \prod_i \sqrt{f(y^{(i)})}.$$

Hier haben i, k die Werte $1, 2, \ldots, \mu$ zu durchlaufen.

Wir betrachten ferner die Zählerdeterminante $D_{\varphi_{p+1-2\mu}\,\psi_{p+1+2\mu}}$. Da $\nu = \mu$, so nimmt dieselbe die vereinfachte in (54) angegebene Form an, die wir bei geeigneter Vorzeichenbestimmung der einzelnen Faktoren auch so schreiben können

$$\prod_i \prod_k{}' (x^{(i)} x^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k (x^{(i)} y^{(k)}) \cdot \prod_i \sqrt{\varphi(x^{(i)}) \cdot \varphi(y^{(i)})}.$$

Hier nun tragen wir die Werte (61) der x ein, so zwar, daß wir in jedem einzelnen Faktor die Bestandteile höherer Ordnung einfach weglassen. Offenbar kommt:

$$\prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)})^4 \cdot \prod_i \varphi(y^{(i)}) \cdot \prod_i (y^{(i)}\, d\, y^{(i)}). \tag{64}$$

Nehmen wir (63), (64) *zusammen, so haben wir für den Quotienten* (60) (*von konstanten Faktoren abgesehen, die wir vernachlässigten*) *den folgenden Ausdruck gefunden:*

$$\prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)})^2 \cdot \prod_i \varphi(y^{(i)}) \cdot \prod_i \frac{(y^{(i)}\, d y^{(i)})}{\sqrt{f y^{(i)}}}. \tag{65}$$

Hiermit schließt die Behandlung des speziellen Falles. Wir haben jetzt, um zum allgemeinen Falle überzugehen, folgende Sachlage vor uns:

Gesucht wird eine simultane Invariante $\binom{\mu\ \ \mu}{\chi,\ \varphi}$ zweier unabhängiger binärer Formen $\chi(z)$, $\varphi(z)$, von denen die erste vom $(p-1)$-ten, die zweite vom $(p+1-2\mu)$-ten Grade ist. Wir kennen den Wert (65), den diese Invariante in dem besonderen Falle annimmt, daß $\chi(z)$ durch (62a) mit der Maßgabe vorgestellt wird, daß man das in dieser Formel auftretende ν durch μ ersetzt. Wird hierdurch $\binom{\mu\ \ \mu}{\chi,\ \varphi}$ allgemein bestimmt sein?

Ich sage, daß dies in der Tat der Fall ist. Wir wollen vorübergehend für $\frac{(y' dy')}{\sqrt{f y'}}$, $\frac{(y'' dy'')}{\sqrt{f y''}}$, …, c', c'', … schreiben, so daß das besondere $\chi(z)$ die folgende Gestalt annimmt:

$$\chi(z) = c'(y'z)^{p-1} + c''(y''z)^{p-1} + \ldots + c^{(\mu)}(y^{(\mu)}z)^{p-1}. \tag{66}$$

Das besondere $\chi(z)$ *ist also invariantentheoretisch dadurch partikularisiert, daß es sich aus nur* μ $(p-1)$*-ten Potenzen linearer Formen zusammensetzen läßt.* Diese Partikularisierung tritt aber nach der Lehre von den Potenzdarstellungen der binären Formen dann und nur dann ein, wenn eine gewisse Kovariante $(\mu+1)$-ten Grades in den Koeffizienten von χ identisch verschwindet[16]). Hierdurch aber können keine zwei Ausdrücke $\binom{\mu\ \ \mu}{\chi,\ \varphi}$, die im allgemeinen verschieden sind, einander gleich werden.

[16]) Vgl. beispielsweise Gundelfinger in Crelles Journal für Mathematik, Bd. 100, 1886: *Zur Theorie der binären Formen*, oder die Dissertation von Hilbert: *Über die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen usw.* (Königsberg 1885). [Diese Kovariante führt den Namen „Katalektikante".]

Es gibt also in der Tat nur eine Bildung $\binom{\mu\ \ \mu}{\chi,\ \varphi}$, *die für unser spezielles* χ *die Form* (65) *annimmt, und also muß es möglich sein, die allgemeine Form von* $\binom{\mu\ \ \mu}{\chi,\ \varphi}$ *aus* (65) *abzulesen.*

Übrigens will ich die Form (65) in Übereinstimmung mit (66) noch folgendermaßen schreiben:

$$\prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)})^2 \cdot \prod_i \varphi(y^{i}) \cdot \prod_i c^{(i)}. \tag{67}$$

Um nun $\binom{\mu\ \ \mu}{\chi,\ \varphi}$ wirklich aufzustellen, setze man symbolisch:

$$\chi = \chi_z^{p-1}, \qquad \varphi = \varphi_z^{p+1-2\mu}.$$

Ich behaupte dann, daß die gesuchte Invariante folgenden Wert hat:

$$\binom{\mu\ \ \mu}{\chi,\ \varphi} = \begin{vmatrix} (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{2\mu-2} & (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{2\mu-3}\chi_2 & \ldots & (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{\mu-1}\chi_2^{\mu-1} \\ (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{2\mu-3}\chi_2 & (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{2\mu-4}\chi_2^2 & \ldots & (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{\mu-2}\chi_2^{\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{\mu-1}\chi_2^{\mu-1} & \ldots & \ldots & (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_2^{2\mu-2} \end{vmatrix}. \tag{68}$$

Der Beweis hat sich, dem Vorangehenden zufolge, auf den Nachweis zu beschränken, daß (68) in (67) übergeht, sobald man $\chi(z)$ in der besonderen Form (66) voraussetzt. Dies aber ergibt sich durch eine ganz einfache Rechnung, die nicht weiter angeführt werden soll[17]).

Ich komme jetzt noch einmal auf die Bemerkung zurück, mit der ich den vorigen Paragraphen begann. Der Ausdruck (68) enthält keinen ohne weiteres erkennbaren abtrennbaren Zahlenfaktor. *Wir werden die in* (53) *noch unbestimmten Konstanten* $c_\nu^{(\mu)}$ *also definitiv dahin fixieren, daß wir*

[17]) Ich habe den Ausdruck (68) bereits a. a. O. in den Göttinger Nachrichten mitgeteilt. Inzwischen habe ich ihn dort in unrichtiger Weise eingeführt. Unser Ausdruck verschwindet, sobald wir in (66) eine der Konstanten c', c'', …, $c^{(\mu)}$ gleich Null nehmen, — in Übereinstimmung mit dem Satze, daß die ganze σ-Funktion (nicht nur der erste Term ihrer Reihenentwicklung) identisch verschwindet, sofern wir die Argumente $w_1, \ldots, w_p$ aus Summen von weniger als μ Integralen zusammensetzen. Aber hierdurch allein ist unser Ausdruck noch nicht definiert; vielmehr gibt es zahlreiche Ausdrücke $\binom{\mu\ \ \mu}{\chi,\ \varphi}$ der hiermit bezeichneten Eigenschaft, worauf mich Herr Hilbert aufmerksam machte. Es ist also unmöglich, den in Betracht kommenden Term $\binom{\mu\ \ \mu}{\chi,\ \varphi}$ aus dem Satze vom Verschwinden der σ-Funktion allein zu bestimmen, wie ich damals wollte. Immerhin scheint dieser Satz für die Reihenentwicklung des σ überaus wesentlich; denn er gibt eine Eigenschaft nicht nur des ersten Entwicklungsterms von σ, sondern aller folgenden.

verlangen, die Reihenentwicklungen der einzelnen σ soll genau mit dem Term (68) *beginnen.*

Ist $\mu = 0$, so wird dieser Term gleich 1, wie es sein soll. Wir betrachten noch insbesondere den Fall $\mu = 1$. Setzen wir ein Augenblick $\varphi(z) = a z_1^{p-1} + b z_1^{p-2} z_2 + \ldots$, so reduziert sich das zugehörige $\binom{\mu\ \ \mu}{\chi,\ \varphi}$ auf $a w_1 + b w_2 + \ldots$. *Die Reihenentwicklung derjenigen σ also, die Zerlegungen $f = \varphi_{p-1}\psi_{p+3}$ entsprechen, beginnt je mit einem in den w linearen Gliede, das sich einfach ergibt, wenn man in $\varphi(z)$ statt der sukzessiven Terme $z_1^{p-1}, z_1^{p-2}z_2, \ldots$ der Reihe nach die $w_1, w_2, \ldots$ einträgt*[18].

§ 14.

Die Periodizität der σ-Funktionen. Der Übergang zu den ϑ.

Die Frage nach der Periodizität der σ-Funktionen erledigt sich jetzt genau so, wie im Falle $p = 2$; ich darf dieserhalb durchaus auf B. verweisen. Das Resultat ist, daß bei der Überschreitung der in § 8 eingeführten Querschnitte A_k, B_k jedem σ ein Exponentialfaktor zutritt, dessen Wert bez.

$$(69)\qquad \pm e^{\sum_i \eta_{ik}\left(w_i + \frac{\omega_{ik}}{2}\right)}, \qquad \pm e^{\sum_i \eta_{i,k+p}\left(w_i + \frac{\omega_{i,k+p}}{2}\right)}$$

ist. Ob hier $+$ oder $-$ zu schreiben ist, hängt von derselben Regel ab, die wir in § 3 für $p = 2$ aufgestellt haben. Wir bezeichnen die Vorzeichen, die dem einzelnen σ in diesem Sinne an den Querschnitten

$$A_1, A_2, \ldots, A_p;\quad B_1, B_2, \ldots, B_p$$

zukommen, mit

$$(70)\quad (-1)^{g_1}, (-1)^{g_2}, \ldots, (-1)^{g_p};\quad (-1)^{h_1}, (-1)^{h_2}, \ldots, (-1)^{h_p}.$$

Hierdurch ist dann, da keine zwei σ dieselben „Charakteristiken" g, h aufweisen, *eine ganze bestimmte Zuordnung* der σ zu den ϑ-Funktionen:

$$(71)\qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v, \tau) = \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g_1 g_2 \ldots g_p \\ h_1 h_2 \ldots h_p \end{smallmatrix}\right|}(v_1, v_2, \ldots, v_p;\quad \tau_{11}, \ldots, \tau_{pp})$$

[18]) [Die weiteren Terme der Reihenentwicklungen der hyperelliptischen Sigmafunktionen für $p > 2$ scheinen nur wenig untersucht zu sein. Für $p = 3$ hat E. Pascal in den Annali di matematica, ser. 2, Bd. 17 (1889/90) in der Arbeit: „*Sulla teoria delle funzioni σ iperellitiche pari e dispari di genere 3*" weitergehende Resultate abgeleitet. Mit der Berechnung des zweiten Gliedes für beliebiges p beschäftigen sich im Falle $\mu = 0$ und $\mu = 1$ Joh. Schröder in den Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft, Bd. 3, Heft 1 u. 2 (1891) und im Falle eines beliebigen μ Brioschi in den Memorie della R. Acc. dei Lincei, ser. 4, Bd. 6 (1890). = Opere matematiche, Nr. CLIV, tomo IV. K.]

gegeben. Die Größen v, τ werden dabei durch das Schema erklärt:

$$(72)\qquad \left\{\begin{array}{c|cccc|cccc} & A_1 & A_2 & \ldots & A_p & B_1 & B_2 & \ldots & B_p \\ \hline v_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1p} \\ v_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2p} \\ \cdot & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & \\ v_p & 0 & 0 & \ldots & 1 & \tau_{p1} & \tau_{p2} & \ldots & \tau_{pp} \end{array}\right.$$

Um jetzt die Beziehung zwischen dem einzelnen $\sigma_{\varphi,\psi}$ und dem zugehörigen $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ explizit festzulegen, schreiben wir wie in § 4

$$(73)\qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|} = C_{\varphi\psi} \cdot e^{G(v_1, v_2, \ldots v_p)} \cdot \sigma_{\varphi\psi},$$

wo wieder G eine homogene Funktion zweiten Grades der v, $C_{\varphi\psi}$ aber eine von den v unabhängige Konstante sein wird, deren Wert von der Zerlegung $f = \varphi \cdot \psi$ abhängt, die bei Konstruktion des σ benutzt wurde. Hier bestimmt sich G aus der Periodizität der σ, ϑ. Es wird überflüssig sein, die bekannten Periodizitätseigenschaften der ϑ noch besonders anzugeben, um so mehr als dies für $p = 2$ in § 1 geschehen ist. *Der resultierende Wert von G ist folgender:*

$$(74)\qquad G(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1p} & w_1 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots & \omega_{2p} & w_2 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \ldots & \omega_{pp} & w_p \\ \sum \eta_{i1} w_i & \sum \eta_{i2} w_i & \ldots & \sum \eta_{ip} w_i & 0 \end{vmatrix} : 2 \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1p} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots & \omega_{2p} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \ldots & \omega_{pp} \end{vmatrix}.$$

Wie aber bestimmen sich die $C_{\varphi\psi}$? Ich kann nicht zweifeln, *daß dieselben in Übereinstimmung mit den Formeln* (23) *allgemein folgende Werte haben:*

$$(75)\qquad C_{\varphi\psi} = c \cdot \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \omega_{11} & \ldots & \omega_{1p} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \omega_{p1} & \ldots & \omega_{pp} \end{vmatrix}}{(2i\pi)^p}} \cdot \sqrt[8]{\Delta\varphi \cdot \Delta\psi}.$$

wo c ein rationaler Zahlenfaktor ist und $\Delta\varphi, \Delta\psi$ die Diskriminanten von φ, ψ vorstellen (die gleich Eins zu setzen sind, wenn der Grad von φ, ψ auf 1 oder auf 0 herabsinken sollte). Die Entwicklungen von

Thomae, auf die ich mich in § 4 bei $p=2$ stützen konnte, sind allerdings nicht weit genug durchgeführt, um diesen Wert des $C_{\varphi\psi}$ unmittelbar ablesen zu lassen; sie geben denselben nur in den beiden Fällen, daß $\mu=0$ oder $=1$ genommen wird. Es kann aber nicht schwer sein, die Thomaeschen Entwicklungen in dem hier in Betracht kommenden Sinne zu vervollständigen; es muß dies um so mehr gelingen, als wir im vorigen Paragraphen für jedes σ den Anfangsterm der Potenzentwicklung aufgestellt haben[19]). Übrigens vergleiche man auch Andeutungen von Prym am Schlusse seiner sogleich noch einmal zu nennenden Arbeit: „Zur Theorie der Funktionen in einer zweiblättrigen Fläche[20])." Wir bemerken noch, daß der in (75) mitgeteilte Wert des C in den Koeffizienten von φ, ψ jedenfalls die richtige Dimension hat. Die Perioden ω der Integrale w haben nämlich in den Koeffizienten von φ, ψ ersichtlich die Grade:

$$-\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2},$$

die $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ dagegen bzw. die Grade:

$$2(p-2\mu), \qquad 0$$

und

$$0, \quad 2(p+2\mu);$$

die Dimension des C in den φ, ψ ist also:

$$-\frac{\mu}{2}, \quad +\frac{\mu}{2},$$

Nun hatte $\sigma_{\varphi\psi}$ seinerseits die Dimension

$$+\frac{\mu}{2}, \quad -\frac{\mu}{2},$$

das Produkt $C \cdot \sigma$ wird also in den φ, wie in den ψ vom 0-ten Grade, wie es mit Rücksicht auf das Bildungsgesetz der ϑ-Funktion sein muß.

Mit den Formeln (73), (74), (75) haben wir nun denjenigen Zielpunkt gewonnen, der in dieser Arbeit erreicht werden sollte. *In der Tat geben diese Formeln bei beliebigem p die Definition der ϑ am hyperelliptischen Gebilde.* Sie sind das genaue Analogon derjenigen, die in § 4 für $p=2$ aufgestellt werden.

Vermöge dieser Formeln kommt ein Teil der Sätze, die wir für die σ aufstellen, naturgemäß auf solche zurück, die man für die ϑ-Funktionen bereits kennt.

---

19) [Die Vermutung des Textes hat Herr Johannes Schröder in seiner Göttinger Dissertation *„Über den Zusammenhang der hyperelliptischen Sigma- und Thetafunktionen"*, 1890 (gedruckt in Leipzig) bestätigt. Für c findet er den Wert $\frac{1}{2^n}$. K.]

20) Bd. 22 der Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, Zürich 1866.

Beispielsweise treten unsere Determinanten $D_{\varphi\psi}$ in allgemeinster Form bereits in der soeben genannten Abhandlung von Herrn Prym auf (woselbst algebraische Darstellungen für den *Quotienten* zweier hyperelliptischer ϑ gesucht werden); nur ist daselbst die Symmetrie ihres Bildungsgesetzes etwas verdeckt, indem sich Herr Prym unhomogener Schreibweise bedient und zwecks Vereinfachung der dann entstehenden Formeln den einen der $(2p+2)$ Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes ins Unendliche wirft. Hierdurch werden Fallunterscheidungen notwendig, die bei unserer Darstellung alle fortfallen.

Andererseits hat bereits Herr Weber angegeben (Math. Annalen, Bd. 13, 1877/78 S. 43), wie viele der 2^{2p} hyperelliptischen ϑ-Funktionen für die Nullwerte der Argumente keinmal, einmal, zweimal, ... verschwinden. Nach den Entwicklungen unseres § 10 korrespondieren diese ϑ bzw. denjenigen σ, bei welchen μ gleich 0, 1, 2, ... genommen ist.

§ 15.

Schlußbemerkungen.

Der Zweck der vorstehenden Betrachtungen war es, wie wiederholt gesagt wurde, die hyperelliptischen ϑ-Funktionen [vom algebraischen hyperelliptischen Gebilde ausgehend] *durch Vermittlung der σ-Funktionen* zu definieren. In Abhandlung XCV war dies anders gewesen: ich hatte dort zunächst (unter Beschränkung auf $p=2$) die σ-Funktionen aus den ϑ abgeleitet. Dabei fand ich den zu diesem Zwecke den ϑ-Funktionen zuzusetzenden Exponentialfaktor dadurch, daß ich verlangte, das Produkt der geraden σ soll eine Reihenentwicklung nach Potenzen der w ergeben, in der die Terme zweiter Ordnung ausfallen. Wollen wir im Falle eines beliebigen p einen ähnlichen Gang einschlagen, so werden wir statt des Produktes sämtlicher gerader σ das Produkt nur derjenigen geraden σ in Betracht ziehen müssen, deren Nullwerte nicht verschwinden (die also Zerlegungen $f=\varphi_{p+1}\cdot\psi_{p+1}$ entsprechen). In der Tat können bei der Reihenentwicklung dieses Produktes von σ-Funktionen quadratische Terme wieder nicht auftreten. Dieselben müßten nämlich, wie sofort zu sehen, eine rationale ganze simultane Invariante unserer Hilfsform $(p-1)$-ten Grades χ und der Grundform $(2p+2)$-ten Grades f bilden, vom zweiten Grade in den Koeffizienten von χ, vom ersten Grade in den Koeffizienten von f, und eine solche simultane Invariante existiert nicht.

Noch einen andern Punkt möchte ich hier zur Sprache bringen. Gewiß ist das Wesentlichste an den vorstehenden Entwicklungen, daß ich überhaupt σ-Funktionen einführe, d. h. Funktionen, die sich, gleich den ϑ, an die in Betracht kommenden Zerspaltungen $f = \varphi\psi$ in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Weise anschließen, ohne doch, wie es die ϑ tun, Irrationalitäten zu benötigen, die nicht unmittelbar durch die Zerspaltungen selbst gegeben sind. Es findet dies darin seinen prägnanten Ausdruck, daß ich durchaus mit dem Integral dritter Gattung Q operiere, dessen Sonderstellung in Nr. XCV, § 7 ausführlich besprochen wurde. Hätte ich im Vorangehenden statt Q durchweg das sonst übliche „transzendent normierte" Integral Π gesetzt (das durch die Eigenschaft definiert wird, an den Querschnitten $A_1, A_2, \ldots, A_p$ verschwindende Periodizitätsmoduln zu haben), so würde ich, wie leicht zu sehen, in Formel (53) bei geeigneter Wahl der multiplizierenden Konstanten direkt zu den ϑ-Funktionen geführt worden sein. Aber ich möchte darauf aufmerksam machen, daß meine Darstellung noch in anderem Sinne von der sonst üblichen abweicht. Wir haben in (53), bez. (73) eine *explizite* Definition der σ, resp. ϑ, vor uns. Die gewöhnliche Darstellungsweise begnügt sich mit einer *impliziten* Definition des ϑ, etwa derjenigen, die in der Formel:

$$(76)\qquad \log \frac{\vartheta\left(\int_a^x - \int_{a'}^{x'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{x^{(p)}}\right) \cdot \vartheta\left(\int_a^y - \int_{a'}^{y'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{y^{(p)}}\right)}{\vartheta\left(\int_a^y - \int_{a'}^{x'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{x^{(p)}}\right) \cdot \vartheta\left(\int_a^x - \int_{a'}^{y'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{y^{(p)}}\right)} = \sum_1^p{}_i\, \Pi_{xy}^{x^{(i)}\, y^{(i)}}$$

ihren Ausdruck findet. Hier sind die $a, a', \ldots, a^{(p)}$ Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes, deren Auswahl von der Zerlegung

$$f = \varphi_{p+1-2\mu}\, \psi_{p+1+2\mu}$$

abhängt, zu der die gerade gewählte ϑ-Funktion gehört: 2μ der genannten Verzweigungspunkte können, unter der einzigen Bedingung, daß man sie paarweise zusammenfallen läßt, übrigens beliebig angenommen werden, während die übrigen $(p + 1 - 2\mu)$ in die Wurzeln von $\varphi = 0$ zu verlegen sind. Eine ganz ähnliche Formel kann selbstverständlich für das zugehörige σ konstruiert werden; sie lautet einfach:

$$(77)\qquad \log \frac{\sigma\left(\int_a^x - \int_{a'}^{x'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{x^{(p)}}\right) \cdot \sigma\left(\int_a^y - \int_{a'}^{y'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{y^{(p)}}\right)}{\sigma\left(\int_a^y - \int_{a'}^{x'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{x^{(p)}}\right) \cdot \sigma\left(\int_a^x - \int_{a'}^{y'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{y^{(p)}}\right)} = \sum_1^p{}_i\, Q_{xy}^{x^{(i)}\, y^{(i)}}.$$

Sicher sind dies sehr elegante Formeln, und ich habe deshalb auch nicht unterlassen wollen, sie hier anzuführen. Aber sie stehen doch hinter den expliziten Formeln (53), (73) zurück. Einmal führen letztere ja tatsächlich weiter, indem sie eine genaue Definition der multiplizierenden Konstanten ermöglichen. Dann aber erscheinen sie auch prinzipiell einfacher. Ich darf in dieser Hinsicht noch einmal auf B. verweisen, indem ich den Leser bitte, die dort § 22ff. gegebene Begründung der fundamentalen funktionentheoretischen Sätze unseres § 10 mit der sonst üblichen indirekten zu vergleichen.

Göttingen, den 24. März 1888.

XCVII. Zur Theorie der Abelschen Funktionen.

[Math. Annalen, Bd. 36 (1889/90).]

Anknüpfend an die Untersuchungen über hyperelliptische Funktionen beliebig vieler Variabler, über die in Bd. 32 der Math. Annalen, 1888 [= Abh. XCVI im vorliegenden Bande] berichtet ist, habe ich in den Spezialvorlesungen der letzten drei Semester *die Theorie der Abelschen Funktionen* in Betracht gezogen und bei ihnen die vom algebraischen Gebilde ausgehende Definition der Thetafunktionen bis zu demselben Punkte zu führen gesucht, der bei den hyperelliptischen erreicht ist. Dies gelang, wenigstens in der Hauptsache, hinsichtlich aller derjenigen Fragen, bei denen die Moduln des algebraischen Gebildes als fest gegeben angesehen werden; sollen die Moduln als veränderlich gelten (eine Auffassung, die ich im Falle der hyperelliptischen Funktionen in Bd. 32 auch nur erst gestreift habe), so erwies sich die Beschränkung auf den Fall $p = 3$ einstweilen als notwendig. Hiermit ist die Einteilung des folgenden Berichtes in zwei Hauptabschnitte gegeben, die sich nach Inhalt und Methode unterscheiden. Ich war leider durch äußere Verhältnisse verhindert, einzelne Punkte so ausführlich zu behandeln, wie ich dies gewünscht hätte. Neben meinen Abhandlungen über hyperelliptische Sigmafunktionen in den Bänden 27 und 32 der Math. Annalen (1886 und 1888) [= Nr. XCV und XCVI im vorliegenden Bande] wird zum Verständnisse die Bearbeitung eines Teiles meiner hyperelliptischen Vorlesungen nützlich sein, welche Herr Burkhardt neuerdings in Bd. 35 dieser Annalen veröffentlicht hat[1]). Übrigens wird man bemerken, daß vermöge meiner neuen Darstellung die Theorie der hyperelliptischen Sigmafunktionen selbst an vielen Punkten eine weitere Durchbildung bez. neue Grundlegung erfährt. Über die Gliederung der nachfolgenden Betrachtungen wird das folgende Verzeichnis den besten Aufschluß geben[2]):

[1]) *Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung* (1889). — Übrigens vergleiche man auch Herrn Burkhardts Abhandlung: *Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunktionen* (Math. Annalen, Bd. 32 (1888)), [deren Wichtigkeit schon in den Vorbemerkungen auf S. 321 betont ist].

[2]) Was die hier abzuleitenden Resultate angeht, so habe ich dieselben großenteils schon in vorläufigen Mitteilungen bekannt gemacht; vgl. drei Noten in den Göttinger Nachrichten (*Über irrationale Kovarianten*, März 1888, *Zur Theorie der Abelschen Funktionen* I, II, März und Mai 1889), zwei Noten in den Comptes Rendus der Pariser Akademie Bd. 108 (*Formes principales sur les surfaces de Riemann*, Jan. 1889, *Des

Inhalts-Verzeichnis.

Abschnitt I.

Von den Funktionen auf gegebener Riemannscher Fläche.

Abschnitt II.

Spezielle Theorie des Falles $p = 3$.

Abschnitt I.

Von den Funktionen auf gegebener Riemannscher Fläche.

§ 1.

Die Riemannsche Fläche als Grundlage der Theorie. Integrale erster und dritter Gattung.

Bei den hyperelliptischen Gebilden ist von vornherein eine einfachste algebraische Darstellung bekannt, die man zweckmäßigerweise allen auf

fonctions thêta sur la surface générale de Riemann*, Febr. 1889), endlich eine Note in den Proceedings der London Mathematical Society (*Über die konstanten Faktoren der Thetareihen für $p=3$*, Febr. 1889).

sie bezüglichen Untersuchungen zugrunde legt und von der selbstverständlicherweise auch in Bd. 32 [Nr. XCVI] ausgegangen wurde. Nicht so bei den allgemeinen algebraischen Gebilden[3]). Von den zahlreichen bei ihnen in Vorschlag gebrachten Normalgleichungen bietet für die hier in Betracht kommenden Fragestellungen keine solche besonderen Vorteile, daß es nützlich schiene, gerade sie zum Ausgangspunkte der Entwicklung zu nehmen. Vielmehr finde ich es am zweckmäßigsten, mit der Riemannschen Auffassung zu beginnen und erst aus ihr diejenige Form der algebraischen Darstellung, welche für uns die dienlichste sein dürfte, zu entwickeln. Als Riemannsche Auffassung schlechtweg bezeichne ich dabei diejenige, bei der das algebraische Gebilde geradezu durch eine Riemannsche *Fläche* gegeben wird, auf der dann erst hinterher die Funktionen, die uns interessieren mögen, insbesondere die algebraischen Funktionen, konstruiert werden. Ich habe die wesentlichen Momente dieser Auffassung, so wie ich dieselben verstehe, 1881 in einer besonderen Schrift dargestellt[4]); im folgenden Jahre gab ich in Bd. 21 der Math. Annalen Erläuterungen über die dabei in Betracht kommenden Existenzbeweise[5]). Nachdem inzwischen Herr Carl Neumann eine ausführliche Darlegung der letzteren publiziert hat[6]), darf ich die betreffenden Anschauungen im folgenden als bekannt voraussetzen. Es sei hier nur daran erinnert, daß vermöge derselben die Integrale erster und dritter Gattung das prius sind, aus welchem die Integrale zweiter Gattung und insbesondere die algebraischen Funktionen erst hinterher abgeleitet werden. Ich will gleich hier die Bezeichnungen zusammenstellen, die ich für die Integrale erster und dritter Gattung weiterhin gebrauche:

Irgend p linear unabhängige Integrale erster Gattung nenne ich:

$$w_1, w_2, \ldots, w_p, \tag{1}$$

oder ausführlicher, wenn die obere Grenze x und die untere Grenze y in Betracht kommen:

$$w_1^{xy}, w_2^{xy}, \ldots, w_p^{xy}.$$

[3]) Ich bediene mich dieses aus den Weierstrassischen Vorlesungen stammenden Ausdruckes (den man evtl. noch durch das Wort „eindimensional" näher umgrenzen kann) überall da, wo die Benennungen „Riemannsche Fläche" oder „algebraische Kurve" störende Nebenvorstellungen mit sich führen würden; wo diese Nebenvorstellungen wesentlich sind, werden letztere Benennungen herangezogen.

[4]) *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (Teubner, 1881/82) [= Nr. XCIX im vorliegenden Bande.]

[5]) *Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie* [= Nr. CIII im vorliegenden Bande]; vgl. insbesondere daselbst Abschnitt I, § 6.

[6]) *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale.* Zweite Auflage (Teubner, 1884).

Die $2p$ Perioden von w_α an den Querschnitten A_β, B_β einer kanonischen Zerschneidung heißen

$$\omega_{\alpha,\beta} \text{ bez. } \omega_{\alpha,\beta+p}. \tag{2}$$

Mit Hilfe derselben setzen wir uns aus den w die „transzendent normierten" Integrale erster Gattung

$$v_1, v_2, \ldots, v_p \tag{3}$$

zusammen; die Perioden derselben sind durch das Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & A_1 & \ldots & A_p & B_1 & \ldots & B_p \\ \hline v_1 & 1\ 0 & \ldots & 0 & \tau_{11} & \ldots & \tau_{1p} \\ v_2 & 0\ 1 & \ldots & 0 & \tau_{21} & \ldots & \tau_{2p} \\ \vdots & & & & & & \\ v_p & 0\ 0 & \ldots & 1 & \tau_{p1} & \ldots & \tau_{pp} \end{array} \tag{4}$$

Ein Integral dritter Gattung mit den „Grenzen" x, y und den „Parametern" ξ, η heißt allgemein

$$P_{\xi\eta}^{xy}. \tag{5}$$

Dasselbe kann insbesondere so spezialisiert werden, daß es als Funktion von x (oder y) an den Querschnitten A, B die folgenden Perioden darbietet:

$$\begin{array}{ccc|ccc} A_1 & \ldots & A_p & B_1 & \ldots & B_p \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 2\pi i v_1^{\xi\eta} & \ldots & 2\pi i v_p^{\xi\eta} \end{array}; \tag{6}$$

wir bezeichnen dasselbe dann [nach Clebsch und Gordan] mit

$$\Pi_{\xi\eta}^{xy} \tag{7}$$

und benennen es als „transzendent normiertes" Integral dritter Gattung. Aus dem $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ (oder irgendeinem anderen speziell gewählten Integral dritter Gattung) ergibt sich das allgemeinste $P_{\xi\eta}^{xy}$, wenn man irgendeine bilineare Verbindung der v_α^{xy}, $v_\beta^{\xi\eta}$ hinzufügt:

$$P_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \sum c_{\alpha\beta} v_\alpha^{xy} v_\beta^{\xi\eta}. \tag{8}$$

Nimmt man hier $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$, so hat man insbesondere diejenigen Integrale dritter Gattung, welche, wie das Π selbst, Vertauschung von Parameter und Argument zulassen. [Mit $Q_{\xi\eta}^{xy}$ ist in den hyperelliptischen Fällen (Abh. XCV und XCVI) und weiterhin in einfachen Fällen, die man ausführlicher behandeln kann, ein invariantentheoretisch ausgezeichnetes P bezeichnet.]

§ 2.

Einführung der Formentheorie auf Grund der φ.

Wir schreiben jetzt, indem wir die Differentiale der überall endlichen Integrale in Betracht ziehen [und $p > 1$ voraussetzen]:

$$(9) \qquad dw_1 : dw_2 : \ldots : dw_p = \varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p.\text{[7]}$$

Die Herren Weber[8]) und Nöther[9]) haben bereits die so eingeführten $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ als homogene Koordinaten der Punkte eines Raumes von $(p-1)$ Dimensionen interpretiert, innerhalb dessen dann, unserer Riemannschen Fläche entsprechend, eine Kurve $(2p-2)$-ter Ordnung (C_{2p-2}), die *Normalkurve der* φ, liegt[10]). Wir adoptieren den hiermit gegebenen Gedanken, indem wir ihn weiter entwickeln. Die Funktionen, welche man in der Theorie der Abelschen Funktionen bisher ausschließlich zu betrachten pflegt, sind nur von den Verhältnissen der φ abhängig, sie sind *homogene Funktionen 0-ten Grades* der $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Wir werden Veranlassung nehmen überhaupt homogene Funktionen der $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ in Betracht zu ziehen. Wir bezeichnen dieselben im Gegensatze zu jenen nur von den Verhältnissen der φ abhängigen Funktionen als *Formen*.

Der hiermit bezeichnete Schritt von den Funktionen zu den Formen wird mehr oder minder bewußt immer vollzogen, wenn man irgendwelche algebraische Gebilde analytisch-geometrisch im Sinne projektiver Auffassung behandelt. Inzwischen hat sich eben hierdurch, wenn ich nicht irre, eine gewisse Unklarheit festgesetzt. Man möchte dieselbe zu dem

---

[7]) [Die φ erscheinen hier also als die sogenannten *Cauchy'schen Differentiale* der w, d. h. als beliebige endliche Größen, welche sich wie die $dw_1 : dw_2 : \ldots : dw_p$ verhalten. Aus Riemanns Werken (siehe 1. Aufl. Nr. XXX, 2. Aufl. Nr. XXXI) und den 1902 von Noether und Wirtinger herausgegebenen Nachträgen dazu wissen wir, daß Riemann selbst schon in seinen Vorlesungen 1861/62 die Betrachtung der φ in den Mittelpunkt seiner algebraischen Untersuchungen gerückt hat. K.]

[8]) *Über gewisse in der Theorie der Abelschen Funktionen auftretende Ausnahmefälle*, Math. Annalen, Bd. 13 (1878).

[9]) *Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen*, Math. Annalen, Bd. 17 (1880). [In dem Titel der Noetherschen Arbeit ist der Grundgedanke auch meiner vorliegenden Abhandlung ausgedrückt. In der Tat sind die Verhältnisse $\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p$ bei einem gegebenen algebraischen Gebilde bis auf eine beliebige lineare Substitution von vornherein festgelegt, womit der Anschluß an die lineare Invariantentheorie von p Veränderlichen gegeben ist. K.]

[10]) Im hyperelliptischen Falle artet dieselbe bekanntlich in die doppeltzählende rationale C_{p-1} aus; dies hindert aber [gemäß der wiederholt von mir entwickelten Auffassung (vgl. meine Abhandlungen „*Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades*" in den Bänden 10 und 11 der Math. Annalen, 1876 und 1877 = Abh. XXXIX und XLI in Bd. 2 dieser Ausgabe)] nicht, daß wir die C_{2p-2} auch im hyperelliptischen Falle in Betracht ziehen, den wir überhaupt im folgenden immer als miteingeschlossen betrachten, sofern wir nicht, wie in § 7, ausdrücklich das Gegenteil bemerken.

Satze verdichten: Funktionen, d. h. Formen 0-ter Dimension, haben an sich eine geometrische Bedeutung, Formen höherer Dimension aber nur, insofern sie gleich Null oder Unendlich gesetzt werden. Dieser Satz ist bei der gewöhnlichen Darstellung in der Tat völlig richtig, aber doch nur infolge der willkürlichen Verabredung, vermöge deren man von vornherein nur die Verhältnisse der homogenen Variablen geometrisch interpretiert hat. Letzteres ist ja in der Tat für viele Zwecke außerordentlich nützlich, wie es denn im folgenden zunächst in der herkömmlichen Weise geschehen soll. Aber es steht doch nichts entgegen, die homogenen Variablen in einem mit einer Dimension mehr ausgestatteten Raume als absolute Koordinaten zu interpretieren. Dann gewinnen sofort die Formen irgendwelchen Grades selbst ihre geometrische Bedeutung. Man nehme das Beispiel unserer $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$. Wenn wir, in Übereinstimmung mit dem gewöhnlichen Ansatze, wie wir es gerade sagten, die Verhältnisse $\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p$ als Koordinaten eines im Raume von $(p-1)$ Dimensionen gelegenen Punktes interpretieren, wo dann jeder Stelle der Riemannschen Fläche ein solcher Punkt entspricht und der Riemannschen Fläche selbst, als den Inbegriff ihrer Stellen, die gerade erwähnte C_{2p-2} korrespondiert, dann ist es freilich unmöglich, bei einer von den φ nicht im 0-ten Grade abhängenden Form etwas anderes als die Null- und die Unendlichkeitsstellen geometrisch aufzufassen. Aber wir können doch die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ ebensowohl als gewöhnliche Parallelkoordinaten des Raumes von p Dimensionen deuten. Dann erheben wir uns zu einem höheren Standpunkte: einer jeden Stelle der Riemannschen Fläche entspricht dann ein ganzer, durch den Koordinatenanfangspunkt laufender *Strahl*; dieser Strahl beschreibt, wenn die Stelle die Riemannsche Fläche überstreicht, einen *Kegel* der $(2p-2)$-ten Ordnung, und auf diesem Kegel finden dann alle die in den nächsten Paragraphen einzuführenden Formen: das Differential $d\omega$, die Primform Ω, usw. ihre vollwertige geometrische Interpretation. [An die Stelle der projektiven Geometrie des R_{p-1} tritt so diejenige affine Geometrie des R_p, bei welcher der Anfangspunkt O festbleibt.]

Noch ein paar Worte über den Gebrauch homogener Variabler überhaupt. Ich entschließe mich zu demselben nicht irgendwelcher Tradition oder Gewöhnung zuliebe, sondern um das Wesen der Sache, so wie ich dasselbe verstehe, klarer herauszustellen. Um nur von den nächstfolgenden Paragraphen zu reden, so ist es der Zielpunkt derselben, gewisse kompliziertere Funktionen der bisherigen Theorie, die Integrale dritter Gattung, die Thetafunktionen usw. aus einfacheren Elementen aufzubauen; dies würde ohne homogene Variable unmöglich sein, denn diese einfacheren Elemente existieren, [wenn man ihnen volle Beweglichkeit wahren will,] eben nur im Bereich der homogenen Variablen. Dabei wolle man sich, was die

Formulierung der Sätze angeht, immer gegenwärtig halten, daß beim Gebrauch homogener Variabler nicht nur unendlich große Werte der Veränderlichen ausgeschlossen sind, sondern auch das gleichzeitige Verschwinden sämtlicher Veränderlichen. Nur hierdurch werden die im folgenden immer wiederkehrenden Sätze möglich, daß gewisse Formen niemals unendlich werden usw.

Die Erläuterungen, welche ich hiermit über das Wesen der homogenen Variablen und ihre geometrische Interpretation insbesondere gegeben habe, machen keinen Anspruch auf Neuheit. Trotzdem schien es im Interesse besserer Verständlichkeit der folgenden Entwicklungen nützlich, dieselben hierher zu setzen. In der Tat hat mich die Erfahrung belehrt, daß selbst solche Mathematiker, die an den Gebrauch homogener Variabler im Gebiete rationaler algebraischer Operationen durchaus gewöhnt sind, einen Augenblick stutzen, wenn sie die gleiche Art des Ansatzes im transzendenten Gebiete handhaben sollen.

§ 3.

Das Differential $d\omega$. Die Integrale zweiter Gattung.

Der erste Erfolg, der aus der Einführung der φ resultiert, ist der, daß wir in einfachster Form einen Differentialausdruck (eine *Differentialform*) konstruieren können, welcher nirgendwo auf dem algebraischen Gebilde (oder besser gesagt: auf der für uns in Betracht kommenden Mannigfaltigkeit der φ) Null oder Unendlich wird. Derselbe lautet, unter α eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, p$ verstanden:

$$d\omega = \frac{dw_\alpha}{\varphi_\alpha}. \tag{10}$$

Daß hier der Wert des α durchaus gleichgültig ist, ergibt sich sofort aus (9); wir könnten, unter den c_α irgendwelche Konstante verstanden, ebensowohl schreiben:

$$d\omega = \frac{\Sigma c_\alpha dw_\alpha}{\Sigma c_\alpha \varphi_\alpha}. \tag{10a}$$

Aber ebensowohl folgt aus (9), unter Berücksichtigung unserer Festsetzungen über den Bereich, innerhalb dessen sich die homogenen Variablen φ zu bewegen haben, daß $d\omega$ keine Null- oder Unendlichkeitsstellen besitzt: in Formel (10a) kann, bei gegebenen c_α, allerdings Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden, aber wir gehen dann jedesmal sofort zu einem bestimmten endlichen Werte des $d\omega$ über, indem wir die c_α durch irgendwelche andere Konstante ersetzen.

Das so gewonnene $d\omega$ erweist sich nun in der Folge als ganz besonders nützlich. Ich werde dasselbe hier zunächst zur Definition der Integrale zweiter Gattung anwenden. Man führt diese Integrale in die Riemannsche Theorie allgemein so sein, daß man ein Integral dritter Gattung nach einem seiner Parameter differentiiert. Aber was heißt nach einem Parameter (überhaupt nach einer Stelle der Riemannschen Fläche) differentiieren? Die gewöhnliche Darstellung benutzt dazu irgendeine Funktion der Stelle und differentiiert nach dieser Funktion; sie führt damit in die Definition der Integrale zweiter Gattung eine unnötige Partikularisierung ein. Für uns ist in allen solchen Fällen unmittelbar die Benutzung des $d\omega$ gegeben. *Eine Funktion auf der Riemannschen Fläche differentiieren heißt, das Differential der Funktion durch $d\omega$ dividieren.* Ist also Y_ξ^{xy} ein Integral zweiter Gattung mit den Grenzen x, y und der Unstetigkeitsstelle ξ, so setzen wir:

$$Y_\xi^{xy} = \frac{\partial P_{\xi\eta}^{xy}}{\partial \omega_\xi}. \tag{11}$$

Hier ist $d\omega_\xi$ von der (-1)-ten Dimension in den φ der Stelle ξ; *es ist also Y eine Form (1)-ter Dimension in den φ der Unstetigkeitsstelle.* Natürlich wechselt das Y mit dem zugrunde gelegten Integral dritter Gattung. Indem wir in (11) statt P das Normalintegral Π setzen, wollen wir insbesondere schreiben:

$$\Upsilon_\xi^{xy} = \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}^{xy}}{\partial \omega_\xi}. \tag{12}$$

Formel (8) gibt dann:

$$Y_\xi^{xy} = \Upsilon_\xi^{xy} + \sum c_{\alpha\beta} v_\alpha^{xy} \psi_\beta(\xi). \tag{13}$$

Andererseits ergeben sich aus (6) als Perioden des Integrals Υ_ξ:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} & A_1 & \ldots & A_p & B_1 & \ldots & B_p \\ \hline \Upsilon_\xi & 0 & \ldots & 0 & 2\pi i\psi_1(\xi) & \ldots & 2\pi i\psi_p(\xi) \end{array}. \tag{14}$$

Ich habe dabei diejenigen linearen Verbindungen der φ, die, vermöge (9), den Differentialen $dv_1, \ldots, dv_p$ der Normalintegrale v entsprechen, mit $\psi_1, \ldots, \psi_p$ bezeichnet.

Ich schließe einige Folgerungen an, welche man aus der so verschärften Definition der Integrale zweiter Gattung ohne Mühe ableitet.

Seien $t', t'', \ldots, t^{(m)}$ irgend m Stellen des algebraischen Gebildes. Wir haben dann in

$$c'\Upsilon_{t'}^{xy} + c''\Upsilon_{t''}^{xy} + \ldots + c^{(m)}\Upsilon_{t^{(m)}}^{xy} + C \tag{15}$$

die allgemeinste Integralfunktion vor uns, welche an den Stellen

$t', t'', \ldots, t^{(m)}$ je einfach algebraisch unendlich wird und dabei an den Querschnitten $A_1, \ldots, A_p$ durchaus verschwindende Periodizitätsmoduln aufweist. Bestimmen wir jetzt vermöge (14) die $c', c'', \ldots, c^{(m)}$ so, daß auch noch die Perioden zweiter Art verschwinden, so haben wir die allgemeinste auf dem Gebilde eindeutige algebraische Funktion der Stelle x vor uns, welche für $x = t', t'', \ldots, t^{(m)}$ einfach unendlich wird. Dies gibt sofort den Riemann-Rochschen Satz über die Zahl der in einer solchen Funktion noch willkürlichen Konstanten $c', c'', \ldots, c^{(m)}$: *die Zahl dieser Konstanten ist*

$$(16) \qquad m - p + \tau,$$

wo τ die Zahl der linear unabhängigen linearen Verbindungen der φ ist, die für $t', t'', \ldots, t^{(m)}$ verschwinden.

Wir betrachten ferner $(p+1)$ Stellen des Gebildes: $t, t', \ldots, t^{(p)}$ und bilden die Determinante:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} \Upsilon_t^{xy} & \Upsilon_{t'}^{xy} & \ldots & \Upsilon_{t^{(p)}}^{xy} \\ \psi_1(t) & \psi_1(t') & \ldots & \psi_1(t^{(p)}) \\ \vdots & & & \\ \psi_p(t) & \psi_p(t') & \ldots & \psi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix}.$$

Wir schließen sofort, daß dies eine algebraische Funktion der Stelle x (bez. y) ist, welche für $x = y$ verschwindet, dagegen einfach unendlich wird, wenn x (oder y) mit $t, t', \ldots, t^{(p)}$ zusammenfällt. Wir wollen diese Funktion mit dem Zeichen

$$(18) \qquad \mathrm{Alg}(x, y;\ t, t', \ldots, t^{(p)})$$

bezeichnen; in den $\varphi(t), \varphi(t'), \ldots$ ist sie bzw. von der $+1$-ten Dimension. Jetzt wird (17) nach Formel (13) nicht geändert, wenn wir die Υ durch beliebige Y ersetzen; sie ändert sich nur um einen konstanten Faktor, indem wir statt der ψ die anfänglichen φ einführen. Indem wir diesen konstanten Faktor mit in die Definition der algebraischen Funktion (18) aufnehmen, haben wir die Gleichung:

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} Y_t^{xy} & Y_{t'}^{xy} & \ldots & Y_{t^{(p)}}^{xy} \\ \varphi_1(t) & \varphi_1(t') & \ldots & \varphi_1(t^{(p)}) \\ \vdots & & & \\ \varphi_p(t) & \varphi_p(t') & \ldots & \varphi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix} = \mathrm{Alg}(x, y; t, t', \ldots, t^{(p)}).$$

Hier entwickle man jetzt linker Hand nach den Elementen der ersten Vertikalreihe und dividiere durch den Koeffizienten von Y_t^{xy}. Indem wir dann noch der Kürze wegen für die auftretenden linearen Verbindungen der $Y_{t'}^{xy}, \ldots, Y_{t^{(p)}}^{xy}$ die Zeichen $-Y_1^{xy}, \ldots, -Y_p^{xy}$ einführen, erhalten wir:

$$(20) \qquad Y_{(t)}^{xy} = \varphi_1(t)\cdot Y_1^{xy} + \varphi_2(t)\cdot Y_2^{xy} + \ldots + \varphi_p(t)\cdot Y_p^{xy} + \frac{\mathrm{Alg}(x, y; t, t_1', \ldots, t^{(p)})}{\begin{vmatrix} \varphi_1(t'), \ldots, \varphi_1(t^{(p)}) \\ \vdots \\ \varphi_p(t'), \ldots, \varphi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix}}.$$

Die hiermit erhaltene Formel ist, von unwesentlichen Änderungen abgesehen, dieselbe, welche in den Vorlesungen von Herrn Weierstrass eine bekannte wichtige Rolle spielt. (Sie wird dort nur in ganz anderer Weise gewonnen, indem die algebraische Funktion (18) in direkter Weise hergestellt und dann in Aggregate von Integralen zweiter Gattung gespalten wird[11]). Man könnte die von den p Stellen $t', t'', \ldots, t^{(p)}$ abhängigen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ *Normalkombinationen von Integralen zweiter Gattung* nennen. Um ihre Perioden zu erforschen, bilden wir uns zunächst die der Determinantenform (17) entsprechenden Normalkombinationen $\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_p$. Für die Perioden der letzteren ergibt (14) sofort folgendes Schema:

(21)

	$A_1 \ldots A_p$	$B_1 \ldots B_p$
Υ_1	$0 \ldots 0$	$2\pi i \ldots 0$
$\vdots$		
Υ_p	$0 \ldots 0$	$0 \ldots 2\pi i$

Wir schließen, *daß die Perioden der Normalkombinationen $Y_1, \ldots, Y_p$ von der Auswahl der p Stellen $t', \ldots, t^{(p)}$ unabhängig sind, und also nur von der Wahl des Integrals dritter Gattung P (Formel (11)), bzw. der p Integrale erster Gattung w_α, durch welche wir die φ_α bestimmt haben, abhängen. Diese Perioden sind es jetzt, die wir Perioden zweiter Gattung nennen werden.* Der Formel (2) entsprechend bezeichnen wir die Perioden von Y_α an den Querschnitten A_β, B_β mit

$$(22) \qquad -\eta_{\alpha,\beta}, \quad \text{bez.} \quad -\eta_{\alpha,\beta+p}.$$

Die Perioden von Y_t werden dann bzw., nach Formel (20):

$$(23) \qquad -\sum^{\alpha} \varphi_\alpha(t)\,\eta_{\alpha,\beta}, \quad \text{und} \quad -\sum^{\alpha} \varphi_\alpha(t)\,\eta_{\alpha,\beta+p}.$$ [12])

[11]) [Vgl. z. B. Weierstrass' Math. Werke, Bd. IV, S. 62—73, 193—210. — Sie wird dort auch viel weitergehend benutzt als hier, wo sie nur zur Definition der Perioden η (Formel (22), (23)) dient. Vgl. das Referat von Wirtinger über algebraische Funktionen und ihre Integrale in Bd. II_2, der math. Enzyklopädie, Nr. 33 daselbst. K.]

[12]) Ich habe die Definition der η im Texte um so lieber ausführlich gegeben, als ich in Bd. 32 der Math. Annalen [= Abh. XCVI des vorliegenden Bandes, S. 361 f.] bei den entsprechenden Entwicklungen für den Fall der hyperelliptischen Funktionen eine unnötige Partikularisation einführte. Die dort benutzten $Z_1^{(t)}, Z_2^{(t)}, \ldots, Z_p^{(t)}$ sind solche Normalverbindungen von Integralen zweiter Gattung, deren sämtliche Unstetigkeitsstellen in die eine mit t benannte Stelle des hyperelliptischen Gebildes zusammengerückt sind. [Auch Weierstrass macht von dieser Partikularisation in verschiedenen seiner Vorlesungen Gebrauch; vgl. Math. Werke, Bd. IV, S. 211—225. K.]

§ 4.

Die Primform $\Omega(x, y)$.

In den vorigen beiden Paragraphen war $p > 1$ vorausgesetzt. Wir betrachten einen Augenblick die Fälle $p = 0$ und $p = 1$. Es ist sehr leicht, bei ihnen Differentialausdrücke anzugeben, die insofern dem $d\omega$ des vorigen Paragraphen entsprechen, als sie gleichfalls auf dem algebraischen Gebilde nirgendwo Null oder Unendlich werden und dabei, von einem etwaigen konstanten Faktor abgesehen, den wir nach Belieben zufügen mögen, völlig bestimmt sind. Bei $p = 1$ ist dies das Differential des einen in diesem Falle überhaupt vorhandenen überall endlichen Integrals selbst:

$$d\omega = dw. \tag{24}$$

Bei $p = 0$ werden wir uns auf dem algebraischen Gebilde zunächst eine solche algebraische Funktion x konstruieren, die jeden Wert nur einmal annimmt, dieses $x = \frac{x_1}{x_2}$ setzen, [also homogene Variable einführen] und endlich $d\omega$ gleich der Determinante $(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$ wählen:

$$d\omega = (x\,dx). \tag{25}$$

Ich werde jetzt umgekehrt ein wesentliches Element der allgemeinen Theorie einführen, indem ich mit den Fällen $p = 0$ und $p = 1$ beginne.

Bei $p = 0$ und $p = 1$ kann man nämlich einen einfachen nur von zwei Stellen des Gebildes, x und y, abhängigen Ausdruck $\Omega(x, y)$ aufbauen, der nur verschwindet, und zwar wie $d\omega$, wenn die beiden Stellen x, y zusammenrücken, und der nirgends unendlich wird; mit Hilfe dieses Ω lassen sich die zum Gebilde gehörigen Integrale in einfachster Weise darstellen.

Bei $p = 0$ ist einfach

$$\Omega(x, y) = (x_1 y_2 - x_2 y_1). \tag{26}$$

Dabei wird die Definition des zum Gebilde $p = 0$ gehörigen Integrals dritter Gattung:

$$P_{\xi\eta}^{xy} = \log \frac{(x\xi)(y\eta)}{(x\eta)(y\xi)}. \tag{27}$$

Bei $p = 1$ ist die Sache ein wenig komplizierter. Sei $\vartheta_1(w)$ Jacobis ungerade Thetafunktion, gebildet für das Integral erster Gattung w und seine beiden Perioden ω_1, ω_2. Ich schreibe dann, unter c eine beliebige Konstante verstanden:

$$\Theta_1(w) = e^{cw^2} \cdot \vartheta_1(w) : \vartheta_1'(0). \tag{28}$$

Unser Ω entsteht, indem wir in die so definierte „allgemeine" Thetafunktion Θ_1 für w den Wert w^{xy} substituieren:

$$\Omega(x, y) = \Theta_1(w^{xy}). \tag{29}$$

Auch hier brauche ich die in Aussicht gestellten Eigenschaften von $\Omega(x, y)$ nicht ausführlich darzulegen. Ich will nur daran erinnern, daß in der Tat

$$P_{\xi\eta}^{xy} = \log \frac{\Theta_1(w^{x\xi}) \cdot \Theta_1(w^{y\eta})}{\Theta_1(w^{x\eta}) \cdot \Theta_1(w^{y\xi})} \tag{30}$$

ein zum Gebilde $p = 1$ gehöriges Integral dritter Gattung definiert (und zwar ein solches, welches Vertauschung von Parameter und Argument gestattet); — den unendlich vielen Formen, welche die Funktion Θ_1 in (28) der Willkür des c entsprechend annehmen kann, entsprechen die verschiedenen Definitionen, die bei einem solchen Integral dritter Gattung noch möglich sind. Läßt man x auf dem algebraischen Gebilde einen Periodenweg beschreiben, bei welchem w um ω, das zu P und w gehörige Integral zweiter Gattung Y um $-\eta$ zunimmt, so erhält $\Omega(x, y)$, nach (29), den Faktor

$$-e^{\eta\left(u^{xy} + \frac{\omega}{2}\right)}. \tag{31}$$

Gelten hier η und ω als bekannt, so gibt uns dies eine Definition der Größe w^{xy}. Man kann also in der Tat sämtliche Integrale von Ω beginnend definieren.

Ich sage nun, daß sich diese Theorie vermöge des im vorigen Paragraphen für $p > 1$ eingeführten Differentialausdrucks $d\omega$ ungeändert auf den Fall eines größeren p überträgt.

Wir müssen zu dem Zwecke die Formelgruppen (26), (27) und (29), (30) umkehren. Dies gelingt, wie man sofort nachrechnet, durch die gemeinsame Formel:

$$\Omega(x, y) = \left(\sqrt{d\omega_x \cdot d\omega_y \cdot e^{-P_{x,y}^{x+dx,\,y+dy}}}\right)_{\lim dx=0,\, dy=0}, \tag{32}$$ [13])

wo $d\omega$ durch (25), bez. (24) definiert ist und natürlich das Vorzeichen der Quadratwurzel durch passende Verabredung festzulegen ist.

Eben diese Formel, in der wir $d\omega$ durch (10) erklären, unter P aber irgendein zum algebraischen Gebilde gehöriges Integral dritter Gattung verstehen, ist uns jetzt die Definition des $\Omega(x, y)$ in den höheren Fällen. [Dieses Ω ist im Zusammenhange der vorliegenden Betrachtungen als Mittelpunkt und Quelle aller zum algebraischen Gebilde gehörigen Funktionen und Formen anzusehen.]

In der Tat verifiziert man sofort, daß das durch (32) gegebene Ω auch bei höherem p nur für $x = y$ verschwindet, und zwar bei geeigneter

[13]) [Diese Formel verliert ihr merkwürdiges Aussehen, wenn man in den Fällen $p = 0$ und $p = 1$ für P gemäß (27) oder (29) seinen Ausdruck als Logarithmus einträgt bzw. wenn man im Falle eines beliebigen p bedenkt, daß $P_{x,y}^{x+dx,\,y+dy}$ bei Ausführung des Grenzüberganges an den Stellen x und y logarithmisch unendlich wird. K.]

Wahl der Quadratwurzel wie $d\omega_x$ selbst, niemals aber unendlich wird. Eine Formel, ganz ähnlich gebaut wie (27) oder (30), gibt uns sodann eine Definition des P durch Ω.[14]) Um von Ω aus die Integrale erster Gattung zu definieren, bestimmen wir wieder den Faktor, um den Ω wächst, wenn x auf dem algebraischen Gebilde einen geschlossenen Weg durchläuft, der für die w_α die Perioden ω_α, für die Y_α die Perioden $-\eta_\alpha$ liefert; wir finden:

$$(33) \qquad \pm e^{\sum^\alpha \eta_\alpha \left(w_\alpha^{xy} + \frac{\omega_\alpha}{2}\right)}; \text{ [15])}$$

hier ist das Zeichen $\pm$ an sich unbestimmt, weil Ω eine Form $\left(-\frac{1}{2}\right)$-ter Dimension in den $\varphi(x)$ bez. den $\varphi(y)$ ist. — Ich werde das Ω, welches mit dem Integral dritter Gattung Π gebildet ist, im folgenden gelegentlich Ω_Π nennen; für das allgemeine Ω_P hat man dann nach Formel (8):

$$(34) \qquad \Omega(x, y)_P = \Omega(x, y)_\Pi \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum c_{\alpha\beta} v_\alpha^{xy} v_\beta^{xy}}.$$

Das so gewonnene $\Omega(x, y)$ ist nun diejenige *Primform*, deren allgemeine Einführung ich bereits in Bd. 32 der Math. Annalen [Fußnote [10]) auf S. 369 dieses Bandes] in Aussicht nahm, [die ich aber damals nur erst für den hyperelliptischen Fall verwandte.] Ich kann nicht zweifeln, daß dieselbe für die allgemeine Theorie der algebraischen Gebilde nach den verschiedensten Richtungen hin Bedeutung gewinnen wird. Wenn ich dieselbe im folgenden nur erst zur Konstruktion der Thetafunktionen benutze, so ist das eben nur eine von den verschiedenen möglichen Anwendungen. Vorbehaltlich der Ergänzungen, welche der folgende Paragraph bringt, denke ich mir den Fortschritt, der in der Einführung der von zwei Stellen des algebraischen Gebildes abhängigen Primform statt des von vier Stellen abhängenden Integrals dritter Gattung liegt, genau so, wie den Fortschritt von der projektiven Geometrie der geraden Linie, welche nur Doppelverhältnisse von vier Punkten kennt, bez. (bei der Lehre von der projektiven Maßbestimmung) mit Logarithmen solcher Doppelverhältnisse operiert, zur binären Invariantentheorie, welche die Determinante (xy) als einfachtes Gebilde zugrunde legt. Ich habe [ursprünglich] in Bd. 32 der Math. Annalen [= Nr. XCVI] [und jetzt in den Vorbemerkungen] der nahen

[14]) Dabei ist vorausgesetzt, daß P Vertauschung von Parameter und Argument gestattete; ist dies nicht der Fall, so wird durch (32) nach wie vor ein brauchbares $\Omega(x, y)$ definiert, die Anwendung von (27), (30) führt aber nicht zu $P_{\xi\eta}^{xy}$, sondern zu $\frac{1}{2}\left(P_{\xi\eta}^{xy} + P_{xy}^{\xi\eta}\right)$ zurück.

[15]) [Die genaue Änderung von Ω und sogar von $\log \Omega$ bei Umläufen der homogenen Variablen hat Ritter in den Math. Annalen, Bd. 44 (1894) bestimmt. K.]

Beziehung gedacht, welche zwischen der *Primform* $\Omega(x, y)$ und der von Weierstrass in seinen Vorlesungen benutzten *Primfunktion* $E(x, y)$ besteht. Noch näher kommt dem $\Omega(x, y)$ vermöge seines besonderen Ausgangspunktes Herr Schottky in seiner Abhandlung *„Über eine spezielle Funktion, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt"* (Crelles Journal für Mathematik, Bd. 101, 1887). Herr Schottky behandelt daselbst die Darstellung algebraischer Gebilde durch solche eindeutige Funktionen einer Variablen η mit linearen Transformationen in sich, welche auf der ganzen η-Kugel existieren (eben die Darstellung, welche nach dem von mir in Band 19 der Math. Annalen (1881) [= Nr. CI des vorliegenden Bandes] aufgestellten Satze allgemein gültig ist). Dabei erscheint ihm (S. 242 a.a.O.) ein von zwei Stellen des Gebildes abhängiges unendliches Produkt fundamental, das er, der Weierstrassischen Bezeichnung entsprechend, mit E benennt:

$$E(\xi, \eta) = (\xi - \eta) \cdot \prod \frac{(\xi - \eta_n)(\eta - \xi_n)}{(\xi - \xi_n)(\eta - \eta_n)}; \text{ [16])}$$

mit seiner Hilfe erzeugt er alle anderen für ihn in Betracht kommenden Funktionen. Hier sind ξ, η die transzendenten Argumente, durch welche die beiden Stellen des algebraischen Gebildes, die wir x, y nennen, gegeben werden; *$E(\xi, \eta)$ ist infolgedessen mit unserer Primform $\Omega(x, y)$ so gut wie identisch.* Man hat nur, um letztere zu erhalten, ξ in geeigneter Weise gleich $\xi_1 : \xi_2$, η gleich $\eta_1 : \eta_2$ zu setzen, worauf

$$\Omega(x, y) = \xi_2 \eta_2 E(\xi, \eta)$$

ist, sich also durch ein unendliches Produkt darstellt, dessen einzelne Faktoren Determinanten vom Typus $(\xi\eta) = (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)$ sind:

$$\Omega(x, y) = (\xi\eta) \cdot \prod \frac{(\xi\eta_n)(\eta\xi_n)}{(\xi\xi_n)(\eta\eta_n)}. \text{ [17])}$$

Die hiermit gegebene formal ganz unbedeutende Modifikation des Schottkyschen Ansatzes ist für die Auffassung von fundamentaler Bedeutung. Indem das E des Herrn Schottky für $\xi = \infty$ oder $\eta = \infty$ selbst unendlich wird, verhält es sich auf dem ursprünglichen algebraischen Gebilde durchaus kompliziert und läßt in keiner Weise das einfache Verhalten erkennen, welches das $\Omega(x, y)$ tatsächlich besitzt[18]).

[16]) [W. Burnside hat in den Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 23 (1892), gezeigt, daß dies Produkt außer in den von Schottky angegebenen Fällen, immer dann konvergiert, wenn die Poincaréschen Reihen (-2)-ter Dimension konvergieren. Ob die Konvergenz weiter reicht, scheint noch unbekannt. K.]

[17]) [Der Zusammenhang dieses Produktes mit der von mir gegebenen Formel (32) wurde von W. Burnside a. a. O. entwickelt. K.]

[18]) [Wegen der Primform der hyperelliptischen Gebilde vgl. oben S. 369.] Für eine andere spezielle Art algebraischer Gebilde, nämlich die ebenen Kurven m-ter

§ 5.
Von den Mittelformen.

Wir betrachten jetzt auf unserem algebraischen Gebilde für einen Augenblick algebraische Funktionen, die auf dem Gebilde eindeutig sind, dieselben, die wir oben (§ 3) aus Integralen zweiter Gattung zusammensetzten. Die Primform Ω ergibt bei beliebigem p eine Darstellung dieser Funktionen, die für $p=0$ wie für $p=1$ sehr bekannt ist. In der Tat, seien die a_i die Nullpunkte, die b_i die Unendlichkeitspunkte einer solchen Funktion R, so hat man

$$R = \frac{\prod_i \Omega(x, a_i)}{\prod_i \Omega(x, b_i)}. \tag{35}$$

Wie aber steht es mit der analogen Darstellung algebraischer *Formen?* Wir müssen, ehe wir diese Frage beantworten, die Bedeutung des Wortes Form noch erst genauer festlegen. Im allgemeineren Sinne wird dies erst weiter unten (§ 7) geschehen. Indem wir den Fall $p=1$ vorläufig ausschließen, wollen wir uns hier mit einer vorläufigen Definition für $p=0$ und $p>1$ begnügen. Im Falle $p=0$ verstehen wir hier unter einer algebraischen Form eine homogene rationale ganze Funktion der im vorigen Paragraphen eingeführten x_1, x_2. Im Falle $p>1$ wollen wir als algebraische Form eine homogene rationale ganze Funktion der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ bezeichnen, durchaus den Erläuterungen des § 2 entsprechend. Möge nun eine solche Form F an den Stellen a_i des algebraischen Gebildes verschwinden. Wir werden dann für $p=0$ bei geeigneter Wahl der absoluten Werte der den a_i zugehörigen homogenen Koordinaten sofort schreiben können:

$$F = \prod (x\, a_i).$$

Ist aber $p>1$ und wir bilden das entsprechende Produkt

$$\prod_i \Omega(x, a_i),$$

Ordnung, welche keine singulären Punkte besitzen, wird Herr Pick in Bd. 29 der Math. Annalen in der noch wiederholt zu nennenden Arbeit „*Zur Theorie der Abelschen Funktionen*" (1886) ebenfalls ganz in die Nähe der Primform $\Omega(x, y)$ geführt. In der Tat ist, für den dort vorliegenden Fall, der S. 267 a. a. O. gegebene Ausdruck:

$$\frac{(h\,x\,y)^2}{a_h\, a_x^{m-1} \cdot a_h\, a_y^{m-1}} \cdot e^{\mathrm{H}(x\,y)}$$

geradezu das Quadrat unseres Ω. Herr Pick bemerkt auch die ausgezeichnete Eigenschaft dieses Ausdrucks, nirgends unendlich zu werden und nur bei $x=y$ zu verschwinden [und für die Aufstellung von Σ-Funktionen brauchbar zu sein. Siehe auch die Bemerkungen auf S. 409. K.]

so wird dasselbe, weil transzendent [und unendlich vieldeutig] keineswegs mit F übereinstimmen.

Den Quotienten

$$\frac{\prod_i \Omega(x, a_i)}{F} \tag{36}$$

betrachte ich als Definition einer neuen, auf dem algebraischen Gebilde nirgendwo Null oder Unendlich werdenden Form. Ich bezeichne alle so entstehenden Formen als *Mittelformen,* weil sie, sozusagen, zwischen den transzendenten Ω-Produkten und den algebraischen Formen in der Mitte stehen.

In der hiermit gegebenen Definition liegt noch, was man wohl beachten möge, eine gewisse Unbestimmtheit. Eine jede der im Zähler von (36) auftretenden Primform kann nach (33), unabhängig von jeder anderen, um einen Faktor

$$\pm\, e^{\sum_\alpha \eta_\alpha^{(i)} \left(w_\alpha^{x\, a_i} + \frac{\omega_\alpha^{(i)}}{2}\right)}$$

modifiziert werden. Ich werde einen solchen Faktor, der Ausdrucksweise von Weierstrass folgend, eine *Einheit* nennen. Dann kann also unser Quotient um das folgende Produkt von Einheiten modifiziert werden:

$$\pm\, e^{\sum_i \sum_\alpha \eta_\alpha^{(i)} \left(w_\alpha^{x\, a_i} + \frac{\omega_\alpha^{(i)}}{2}\right)}.$$

Aber unter den so entstehenden Werten hängen augenscheinlich nur diejenigen analytisch zusammen, die sich um einen Einheitsfaktor folgender Form unterscheiden:

$$e^{\sum_\alpha \eta_\alpha \left(\sum_i w_\alpha^{x\, a_i} + \frac{n\, \omega_\alpha}{2}\right)},$$

unter n die (notwendig gerade) Zahl der Nullstellen a_i verstanden. *Unser Quotient* (36) *schließt also unendlich viele untereinander analytisch nicht zusammenhängende Wertereihen in sich.* Wenn wir also unseren Quotienten als ein analytisch wohlbestimmtes Gebilde behandeln, so ist dabei die Voraussetzung, daß wir irgendeine dieser unendlich vielen Wertereihen fest gewählt haben. Von der einen Wertereihe können wir hernach zu jeder anderen durch Zufügung geeigneter Einheitsfaktoren übergehen.

Wir überzeugen uns jetzt, *daß wir, von solchen Einheitsfaktoren abgesehen, alle Mittelformen* (36) *auf eine einzige* $m(x)$ *zurückführen können.* Wir definieren dieses $m(x)$, indem wir in (36) für F irgendeine Linearform $C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_p\varphi_p$ einführen, deren $2p-2$ Nullpunkte wir c_i nennen wollen:

$$m(x) = \frac{\prod_i \Omega(x, c_i)}{C_1\varphi_1 + \ldots + C_p\varphi_p}. \tag{37}$$

In der Tat wird (36), für irgendeine Form ν-ten Grades der φ gebildet, von der ν-ten Potenz des so gewonnenen $m(x)$ nur um Einheitsfaktoren verschieden sein können. Um dies zu sehen, genügt es, den betreffenden Quotienten (36) durch $m(x)^{\nu}$ zu dividieren und die entstehende Funktion von x auf der Riemannschen Fläche, auf der sie keinerlei Null- oder Unendlichkeitsstellen hat, auf ihre Periodizitätseigenschaften zu untersuchen.

Das durch (37) eingeführte $m(x)$ ist in dem allgemeinen Sinne des § 2 eine Form $(-p)$-ten Grades in den φ der Stelle x. Beschreibt x einen Periodenweg, bei welchem die w_α um ω_α, die Y_α um $-\eta_\alpha$ wachsen, so erhält $m(x)$ einen Faktor, den ich folgendermaßen schreiben will:

$$e^{\sum_\alpha \eta_\alpha \left(W_\alpha^x + (p-1)\,\omega_\alpha\right)}. \tag{38}$$

Hier bedeutet W_α^x die Integralsumme:

$$W_\alpha^x = w_\alpha^{x c_1} + w_\alpha^{x c_2} + \ldots + w_\alpha^{x c_{2p-2}}; \tag{39}$$

ich habe dieselbe mit einem besonderen Zeichen belegt, weil dieselbe, dem Abelschen Theorem zufolge, von der besonderen Linearform C_φ, deren Verschwindungspunkte die c_i sind, unabhängig ist.

Wir könnten $m(x)$ die *fundamentale Mittelform* nennen. Inzwischen bestimmt uns die Rücksicht auf die folgenden Entwicklungen der §§ 6 und 9, diesen Namen lieber für die $(2p-2)$-te Wurzel aus $m(x)$ in Anwendung zu bringen:

$$\mu(x) = \sqrt[2p-2]{m(x)}. \tag{40}$$

Hierdurch wird ja zunächst, bei der Vieldeutigkeit des Wurzelzeichens, eine neue Unbestimmtheit eingeführt. Allein diese Unbestimmtheit ist weiterhin ohne Belang, insofern in den späteren Formeln immer so viele Faktoren μ miteinander multipliziert auftreten, daß alle Vieldeutigkeit wegfällt, sobald man an der selbstverständlichen Regel festhält, daß man für nebeneinander stehende Faktoren μ immer nur die gleiche Definition in Anwendung bringt. Es ist dies mit Absicht etwas ungenau ausgedrückt. In der Tat zeigt sich, daß in den bald zu betrachtenden speziellen Fällen statt $\mu(x)^{2p-2}$ schon $\mu(x)^m$, wo m ein Teiler von $2p-2$ ist, durch eine Formel vom Typus (36), (37) definiert werden kann, so daß dann zur Weghebung der in Rede stehenden Unbestimmtheit nur eine kleinere Zahl von Faktoren $\mu(x)$ zusammenzutreten braucht[19]).

Die Mittelformen sind meines Wissens bislang in der Literatur nicht aufgetreten. In Band 32 der Math. Annalen [= Nr. XCVI dieses Abdrucks] konnte ich die Darstellung des dort zu behandelnden hyperelliptischen Falles so wenden, daß es noch nicht nötig war, von Mittelformen zu sprechen. Anders verfuhr ich in einer vorher über denselben Gegenstand in den Göttinger Nachrichten publizierten Note (*Zur Theorie der hyperelliptischen Funktionen beliebig vieler Argumente*, Nov. 1887). Dort benutzte ich einen Ausdruck $\mathrm{X}(x)$, der dem $\mu(x)$ sehr nahe steht. Es ist nämlich im Sinne der damals gebrauchten Bezeichnung:

$$\mu(x) = \left(\frac{\mathrm{X}(x)}{\sqrt{f(x)}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

[19]) [Die Primform $\Omega(x, y)$ ist nur im Falle $p=1$ von der nullten Ordnung und fällt dann mit der ungeraden Jacobischen Funktion erster Ordnung zusammen. Im Falle $p=0$ bleibt man notwendig bei *Formen*. Dagegen kann man bei $p>1$ eine Kombination von Ω und μ bilden, welche von der nullten Ordnung ist, nämlich:

$$\Omega(x, y)\cdot\mu(x)^{\frac{1-p}{p}}\cdot\mu(y)^{\frac{1-p}{p}}. \tag{a}$$

Man hat so eine *Funktion*, die nur an der Stelle $x=y$ verschwindet, keine singulären Stellen besitzt, aber selbstverständlich unendlich vieldeutig ist. Daß eine solche Funktion existiere, hat mir Prym schon in einem Briefe vom 8. März 1882 andeutungsweise mitgeteilt.

Explizite treten derartige Funktionen wohl zuerst bei A. C. Dickson in den Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 33 (1902) auf. Sie finden sich dann in dem Werke von Prym und Rost, welches 1911 in Leipzig erschien und die allgemeine Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung behandelt, d. h. solcher Funktionen w auf einer Riemannschen Fläche, welche sich bei Überschreiten der Querschnitte in der Gestalt $Aw+B$ reproduzieren. Die Übereinstimmung des Prym-Rostschen $\Theta\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right|$ mit dem obigen Ausdrucke (a) bemerkte ich damals gleich in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 20 (1911), *S. 199*.

Es scheint aber zweckmäßig, um je nach dem vorliegenden Zweck geeignete Kombinationen bilden zu können, die Formen Ω und μ nebeneinander zu behalten. So bildet Ritter in den Math. Annalen, Bd. 44 (1894) die folgende Kombination:

$$P(x, y) = \Omega(x, y)\frac{\mu(y)}{\mu(x)},$$

womit zwar die Symmetrie von x und y geopfert ist, aber eine Form gewonnen wird, welche bei Umläufen des x nur konstante Faktoren annimmt.

Wegen weiterer Literatur vergleiche man die Nummern 64 und 65 des wiederholt genannten Enzyklopädieartikels von Krazer und Wirtinger.

Hier mögen nur noch einige Bemerkungen über die entsprechende Darstellung in meinen und Frickes Büchern Platz finden. In den „Modulfunktionen" Bd. II, S. 505 und 506 hat Fricke statt der Formel (32) des Textes, weil es für die dort eingehaltene Darstellung bequemer war, den Ausdruck benutzt:

$$\sqrt{(x\,dx)(y\,dy)\,e^{-P_{x,\,y}^{x+dx,\,y+dy}}}\qquad \lim dx = 0,\ dy = 0.$$

Er bekommt dadurch eine Form, die ebenfalls für $x=y$ einfach verschwindet, aber in den Verzweigungspunkten der mehrblättrig über der komplexen Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche Nullstellen besitzt und dort eventuell auch verzweigt ist. Dieser Unterschied ist für die damals in Betracht kommende Anwendung auf die Hurwitzsche Korrespondenztheorie ohne Bedeutung, weil dort nur Quotienten von Primformen benutzt werden. In den „Automorphen Funktionen", Bd. II, S. 222 ff. kommt Fricke auf den Zusammenhang meines $d\omega_x$ mit seinem $(x\,dx)$ zu sprechen und somit schließlich zu meiner ursprünglichen Definition der Primform (Formel (32) des Textes) zurück. K.]

§ 6.

Fälle besonders einfacher algebraischer Darstellung.

Die bisher gegebenen Definitionen knüpften, wie dies in § 1 in Aussicht genommen war, durchaus an die Grundvorstellungen der Riemannschen Theorie an, sie machten keinerlei Voraussetzungen oder Angaben darüber, wie das in Betracht zu ziehende algebraische Gebilde algebraisch dargestellt sein sollte. Wir wenden uns jetzt zu der Frage, ob es nicht eine solche Darstellung gibt, die für unsere Zwecke besonders geeignet ist. Um in dieser Hinsicht bestimmte Ideen zu gewinnen, betrachten wir vorab zwei Fälle algebraischer Darstellung, die zu besonders einfachen Resultaten führen, so daß sie für die höheren Fälle einen Fingerzeig abzugeben scheinen. Das eine Mal handelt es sich um die hyperelliptischen Gebilde, betreffs deren ich zumal auf die in Bd. 32 der Math. Annalen [= Nr. XCVI im vorliegenden Bande] gegebenen Formeln verweisen will, das andere Mal um die ebenen Kurven ohne Doppelpunkt, wegen deren man neben den Arbeiten von Clebsch insbesondere die bereits genannte Abhandlung von Pick im 29. Bande der Math. Annalen vergleichen mag.

Im hyperelliptischen Falle gestalten sich die Verhältnisse folgendermaßen. Wir haben eine zweiblättrige Riemannsche Fläche, die durch die Quadratwurzel aus einer Binärform $(2p+2)$-ten Grades

$$(41)\qquad \sqrt{f_{2p+2}(z_1, z_2)}$$

definiert ist. Das zugehörige $d\omega$ wird:

$$(42)\qquad d\omega_z = \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f_{2p+2}(z_1, z_2)}}.$$

Infolgedessen decken sich die φ mit den rationalen ganzen Formen $(p-1)$-ten Grades der z_1, z_2; wir können insbesondere setzen:

$$(43)\qquad \varphi_1(z) = z_1^{p-1},\ \varphi_2(z) = z_1^{p-2} z_2, \ldots, \varphi_p(z) = z_2^{p-1},$$

woran sich die weiteren Formeln schließen:

$$(44)\qquad w_1^{xy} = \int_y^x \varphi_1(z)\,d\omega_z,\quad w_2^{xy} = \int_y^x \varphi_2(z)\,d\omega_z, \ldots,\quad \dot{\omega}_p^{xy} = \int_y^x \varphi_p(z)\,d\omega_z.$$

Aber auch die Definition der Integrale dritter Gattung wird einfach. Dieselben erscheinen als Doppelintegrale algebraischer Ausdrücke von übersichtlicher Bauart. Invariantentheoretische Betrachtungen, auf deren Einzelheiten ich hier nicht einzugehen habe, lassen dabei unter allen möglichen Integralen dritter Gattung eines, Q, als besonders bevorzugt erscheinen. Sei $f(z)$ symbolisch gleich a_z^{2p+2} gesetzt, so ist Q durch folgende Formel gegeben

$$(45)\qquad Q_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_z\,d\omega_\zeta \cdot \frac{\sqrt{fz}\sqrt{f\zeta} + a_z^{p+1} a_\zeta^{p+1}}{2\,(z\zeta)^2};$$

aus ihm entsteht das allgemeine $P_{\xi\eta}^{xy}$, indem man eine beliebige bilineare Kombination der w^{xy} und $w^{\xi\eta}$ hinzufügt (oder, was dasselbe ist, unter dem doppelten Integralzeichen eine beliebige bilineare Kombination der $\varphi(z)$ und $\varphi(\zeta)$). — Des ferneren ergibt sich eine Darstellung der Primform, bei welcher der in Formel (32) postulierte Grenzübergang vollzogen ist. Bezeichnet man nämlich mit $\bar{x}$, $\bar{y}$ die Stellen, welche zu x, y konjugiert sind (d. h. sich von den Stellen x, y nur durch das Vorzeichen der zugehörigen Quadratwurzel $\sqrt{fx}$, $\sqrt{fy}$ unterscheiden), so kommt:

$$(46)\qquad \Omega(x, y) = \frac{(xy)}{\sqrt[4]{fx \cdot fy}} \cdot e^{\frac{1}{2} P_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}.$$

Endlich wird die Definition der Mittelform $\mu(x)$ jetzt besonders einfach, indem wir auf dem hyperelliptischen Gebilde neben den algebraischen Formen, die wir im vorigen Paragraphen ausschließlich betrachteten, nämlich den rationalen ganzen Formen der $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, die sich in den z_1, z_2 vermöge (43) als rationale ganze Formen von einem durch $(p-1)$ teilbaren Grade darstellen, überhaupt rationale ganze Formen der z_1, z_2 betrachten können. Wir werden insbesondere eine lineare Form dieser Art in Betracht ziehen: $C_1 z_1 + C_2 z_2$; ihre Verschwindungsstellen sollen c, $\bar{c}$ heißen. Statt (37), (40) können wir dann schreiben

$$(47)\qquad \mu(x)^2 = \frac{\Omega(x, c) \cdot \Omega(x, \bar{c})}{C_1 x_1 + C_2 x_2},$$

so daß also jetzt, entsprechend der am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachten Andeutung, die 2-te Potenz von $\mu(x)$ ebenso definiert erscheint, wie früher, im allgemeinen Falle, die $(2p-2)$-te.[20])

Bei den ebenen Kurven m-ter Ordnung, welche keinen Doppelpunkt (d. h. überhaupt keinen singulären Punkt) besitzen und also dem Geschlecht

$$(48)\qquad p = \frac{m-1 \cdot m-2}{2}$$

---

[20]) [Setzt man in Formel (47) c und $\bar{c}$ bzw. gleich y und $\bar{y}$ und berücksichtigt die Dimension des entstehenden Ausdruckes in x und y, so erhält man für das in Fußnote [19]) auf Seite 404/405 genannte $\Theta\Big|_{y}^{x}\Big|$ folgenden Ausdruck:

$$\Theta\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right| = \frac{(xy)^{\frac{p+1}{2p}}}{[f(x) f(y)]^{\frac{1}{4p}}} \cdot e^{\frac{p+1}{4p} P_{xy}^{\bar{x}\bar{y}} - \frac{p-1}{4p} P_{x\bar{y}}^{\bar{x}y}}.$$

K].

angehören, kommen Formeln ganz ähnlicher Art vor. Um diesen Formeln volle Symmetrie zu erteilen, muß man in dieselben bekanntlich, da es sich um ternäre Bildungen handelt, Reihen willkürlicher Größen einführen. Herr Pick benutzt zu dem Zwecke, wie es zumeist üblich ist, die Koordinaten eines Hilfspunktes h. Inzwischen ist es im Interesse der späteren Verallgemeinerung zweckmäßig, statt des Punktes h die Koordinaten zweier sich in ihm kreuzender gerader Linien α, β einzuführen. Sei jetzt

(49)
$$f(z_1, z_2, z_3) = 0$$

die Gleichung der Kurve, $\alpha_z = 0$, $\beta_z = 0$ seien die beiden willkürlichen Geraden, $(f\alpha\beta)$ die Funktionaldeterminante von $f(z)$, α_z, β_z. Dann hat man vor allen Dingen die folgende Darstellung des zur Kurve gehörigen Differentials $d\omega$:

(50)
$$d\omega_z = \frac{(\alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz})}{(f\alpha\beta)}.$$

Es ergeben sich sodann die φ als identisch mit den rationalen ganzen Formen $(m-3)$-ten Grades der z_1, z_2, z_3, also etwa:

(51)
$$\varphi_1(z) = z_1^{m-3}, \quad \varphi_2(z) = z_1^{m-2} z_2, \ldots, \quad \varphi_p(z) = z_3^{m-3},$$

womit die zugehörigen Integrale erster Gattung w_1, w_2, ..., w_p definiert sind. Die Integrale dritter Gattung wird man wieder als Doppelintegrale darzustellen suchen. Abermals sind es invariantentheoretische Überlegungen, die in dieser Hinsicht zu einer bestimmten einfachsten Normalform Q führen. Sei $f(z)$ symbolisch gleich $a_z^m = b_z^m$; α_z, β_z seien wieder zwei willkürliche Linearformen (die übrigens von den in (50) benutzten ganz unabhängig zu denken sind). Dann lautet das von Herrn Pick aufgestellte Q folgendermaßen[21]):

(52)
$$Q_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_z\, d\omega_\zeta \cdot \frac{\sum_1^m{}'\left((a\alpha\beta)\, a_z^{\nu-1} a_\zeta^{m-\nu} \cdot (b\alpha\beta)\, b_z^{m-\nu} b_\zeta^{\nu-1}\right) - \sum_1^{m-1}{}'\left((a\alpha\beta)^2 a_z^{\nu-1} a_\zeta^{m-\nu-1} \cdot b_z^{m-\nu} b_\zeta^{\nu}\right)}{m(\alpha_z \beta_\zeta - \beta_z \alpha_\zeta)^2};$$

aus ihm ergibt sich wieder das allgemeine $P_{\xi\eta}^{xy}$ durch Hinzufügung einer bilinearen Verbindung der w^{xy}, $w^{\xi\eta}$. Wir haben ferner eine explizite

[21]) Man kann dasselbe für $f(z) = a_z^m = b_z^m = c_z^m$ in die folgende Gestalt symbolisch umrechnen:

$$Q_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_z\, d\omega_\zeta \cdot \frac{(abc)^2 \sum\limits_{\varkappa+\lambda+\mu=m-2} a_z^\varkappa b_z^\lambda c_z^\mu a_\zeta^{\lambda+\mu} b_\zeta^{\mu+\varkappa} c_\zeta^{\varkappa+\lambda}}{6 m a_\zeta^{m-1} a_z},$$

wo im Zähler eine aus der Theorie der Doppeltangenten bekannte Covariante steht. [Vgl. Dersch, Math. Annalen, Bd. 7, 1874.]

Darstellung der Primform. Zu dem Zwecke muß man die $(m-1)$ von der Stelle x verschiedenen Stellen

$$x', x'', \ldots, x^{(m-1)}$$

der Kurve $f = 0$ einführen, für welche (ebenso wie für x selbst)

$$\alpha_x \beta_z - \beta_x \alpha_z = 0,$$

desgleichen die $(m-1)$ Stellen

$$y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$$

die sich in entsprechender Weise aus y ableiten lassen. Man hat dann[22])

(53)
$$\Omega(x, y) = \frac{\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y}{\sqrt{(a\alpha\beta)\, a_x^{m-1} \cdot (b\alpha\beta)\, b_y^{m-1}}} \cdot e^{\frac{1}{2}\sum\limits_1^{m-1} P_{xy}^{x^{(i)} y^{(i)}}}.$$

Für die Mittelform $\mu(x)$ ergibt sich dem allgemeinen Ansatze des vorigen Paragraphen gegenüber wieder eine Vereinfachung. In der Tat können wir jetzt alle homogenen rationalen ganzen Verbindungen der x_1, x_2, x_3 als Formen auf der Kurve betrachten. Sei nun C_x eine Linearform dieser Art; ihre Nullstellen heißen c', c'', ..., $c^{(m)}$. Wir setzen dann einfach:

(54)
$$\mu(x)^m = \frac{\prod\limits_1^m \Omega(x, c^{(i)})}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3}.$$

Ich will noch ausdrücklich darauf aufmerksam machen, daß die Formeln dieses Paragraphen ungeändert in Geltung bleiben auch wenn $p = 0$ oder $p = 1$ ist. Damit sind also, der Beschränkung des vorigen Paragraphen entgegen, Mittelformen auch im Falle $p = 1$ definiert. Nur haben dieselben keine absolute Bedeutung, sondern hängen von der besonderen Gleichungsform ab, in der wir das elliptische Gebilde als gegeben voraussetzen.

§ 7.

Allgemeines über algebraische Formen auf eine Kurve.[23])

Ehe wir weitergehen, müssen wir den Begriff der *algebraischen Form* auf einer algebraischen Kurve noch in allgemeinerem Sinne festlegen, als dies im vorigen Paragraphen geschehen ist, wobei wir gleich

[22]) Vgl. die Fußnote [18]) auf S. 401/402.

[23]) [Wegen der über die übliche Darstellungsweise hinausgehenden Theorie der Formen auf einer Kurve bzw. Riemannschen Fläche vgl. auch die ausfürlichen Darstellungen in meinem autographierten Vorlesungsheft „Riemannsche Flächen I" (1892), S. 114 ff. in den „Modulfunktionen" Bd. II, S. 486 ff., in den „Automorphen Funktionen", Bd. II, 1. Abschnitt und ferner Ritter in den Math. Annalen Bd. 44 (1894). K.]

Gelegenheit nehmen, den wichtigen Begriff des *vollen Formensystems* einzuführen.

Von den beiden im vorigen Paragraphen betrachteten Fällen betrifft der eine (der hyperelliptische) eine solche Kurve, die den eindimensionalen Raum der $z_1 : z_2$ doppelt überdeckt, der andere eine Kurve des zweidimensionalen Raumes der $z_1 : z_2 : z_3$, welche nur der einen Beschränkung unterliegt, keine singulären Punkte zu besitzen.

Indem wir diese beiden Fälle umfassen, denken wir uns jetzt im $(n-1)$-fach ausgedehnten Raume der $z_1 : z_2 : \ldots : z_n$ eine Kurve m-ter Ordnung gegeben, welche keinerlei singuläre Punkte (Doppelpunkte, Spitzen usw.) besitzen soll, die aber gerne in eine mehrfache Überdeckung einer Kurve niederer Ordnung ausgeartet sein kann (wo wir uns dann diese verschiedenen Überdeckungen durch Verzweigungspunkte in irgendwelcher Weise verbunden denken mögen).

Was wollen wir im allgemeinsten Sinne unter einer *algebraischen Form δ-ten Grades* auf dieser Kurve verstehen? Sicher wird uns eine rationale ganze homogene Funktion δ-ten Grades G_δ der $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ein Beispiel hierfür sein. Wir haben uns im vorigen Paragraphen auf dieses Beispiel beschränkt. Wir knüpfen jetzt an den allgemeinen Begriff der auf der Kurve eindeutigen algebraischen *Funktion* an. Wir werden verabreden, *daß wir jede solche homogene, ganze, algebraische Verbindung Γ_δ des δ-ten Grades der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine algebraische Form δ-ten Grades nennen wollen, die durch eine Form G_δ dividiert eine auf der Kurve eindeutige algebraische Funktion ergibt.* Die $m\delta$ Nullstellen einer Form Γ_δ sind also schlechtweg solche Punkte der Kurve, welche zu irgend $m\delta$ Punkten $G_\delta = 0$ äquivalent sind[24]).

Die so gegebene allgemeine Definition ist mit den Entwicklungen des vorigen Paragraphen nicht im Widerspruche, aber sie erweitert dieselbe für den Fall des hyperelliptischen Gebildes. Sie läßt uns nämlich die Quadratwurzel $\sqrt{f_{2p+2}(z_1, z_2)}$ als eine zum Gebilde gehörige algebraische Form $(p+1)$-ten Grades erscheinen. Bei der ebenen Kurve $f=0$ tritt eine solche Erweiterung nicht ein: die zu $f=0$ gehörigen Γ decken sich einfach, auf Grund bekannter Sätze der analytischen Geometrie, mit den rationalen ganzen Formen der z_1, z_2, z_3. Bei dem hyperelliptischen Gebilde setzt sich die Gesamtheit der Γ erst aus $z_1, z_2, \sqrt{f_{2p+2}}$ zusammengenommen rational und ganz zusammen.

[24]) Nach der Ausdrucksweise von Dedekind und Weber im 92. Bande von Crelles Journal für Mathematik (*Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen*, 1880); Brill und Noether gebrauchen für denselben Begriff das Wort „corresidual", welches aber im Zusammenhange des Textes weniger zweckmäßig scheint.

Wir haben mit diesen letzten Bemerkungen tatsächlich bereits den Begriff des vollen Formensystems berührt. *Allgemein werde ich als ein zu unserer Kurve gehöriges volles Formensystem jede solche Zusammenstellung zugehöriger algebraischer Formen $\Gamma', \Gamma'', \ldots$ bezeichnen, durch deren Formen sich alle anderen zur Kurve gehörigen algebraischen Formen rational und ganz darstellen.*

Die hiermit besprochenen Ideenbildungen finden sich in der Literatur von zwei Seiten her bearbeitet, von geometrischer und von arithmetischer Seite.

In ersterer Hinsicht will ich insbesondere auf die bereits oben genannte Arbeit von Herrn Noether verweisen, in welcher derselbe die Normalkurve der φ untersucht (Math. Annalen, Bd. 17: *Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen*, 1880). Herr Noether entwickelt daselbst ein Resultat, welches für uns besonders wichtig ist. In unsere Ausdrucksweise übersetzt besagt dasselbe, *daß für die Normalkurve der φ* (sofern wir den hyperelliptischen Fall ausnehmen, der hier in der Tat eine Sonderstellung einnimmt) *die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ selbst ein volles Formensystem bilden.*

In letzterer Hinsicht habe ich auf die gerade genannte Arbeit der Herren Dedekind und Weber, sowie auf die im 91. Bande von Crelles Journal für Mathematik veröffentlichte Abhandlung von Herrn Kronecker zu verweisen (*Über die Diskriminante algebraischer Funktionen einer Variabeln*, 1881 [= Werke, Bd. II]). Es seien α_z, β_z zwei lineare Formen der z, welche für keinen Punkt unserer Kurve gemeinsam verschwinden. Wir setzen:

$$\alpha_z : \beta_z = x = x_1 : x_2$$

(projizieren also unsere Kurve m-ter Ordnung durch das Büschel linearer Mannigfaltigkeiten

$$\alpha_z - x \cdot \beta_z = 0$$

auf die x-Achse, wodurch letztere m-fach überdeckt wird). Ist nun eine Form Γ_δ vorgelegt, so wird $\frac{\Gamma_\delta}{x_2^\delta}$ eine auf unserem Gebilde eindeutige algebraische Funktion sein, welche nur bei $x = \infty$ unendlich wird. Dies ist aber gerade, was die genannten Herren schlechtweg als eine zum Gebilde gehörige *ganze* algebraische Funktion bezeichnen. Ist umgekehrt eine solche ganze algebraische Funktion gegeben, die bei $x = \infty$ höchstens δ-fach unendlich wird, so wird ihr Produkt mit x_2^δ eine Form Γ_δ vorstellen. „Ganze algebraische Funktionen" und „algebraische Formen" stehen einander also sehr nahe; der Unterschied liegt in der Hauptsache darin, daß wir homogene Veränderliche einführen und uns dadurch von der dem Wesen der Sache fremden Bevorzugung des Wertes $x = \infty$ frei-machen. In der Tat können wir denn auch den genannten Arbeiten ein für uns wichtiges Resultat entnehmen. Es wird dort nämlich gezeigt, daß man allemal ein System von $(m-1)$ ganzen Funktionen

$$F_1, F_2, \ldots, F_{m-1}$$

so aussuchen kann, daß jede andere ganze Funktion sich in der Form darstellen läßt:

$$g + g_1 F_1 + g_2 F_2 + \ldots + g_{m-1} F_{m-1},$$

unter den g rationale ganze Funktionen von x verstanden. Das heißt, in unsere Sprache übertragen, daß allemal $(m-1)$ algebraische Formen

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{m-1}$$

mit x_1, x_2 zusammen ein volles Formensystem bilden, durch welches sich alle anderen algebraischen Formen besonders einfach ausdrücken lassen. Im hyperelliptischen Falle ist dieses Formensystem von dem bei uns benutzten nicht verschieden, im Falle unserer ebenen Kurve aber, wie in dem der Normalkurve der φ, dürfte es für die Anwendung komplizierter sein als das von uns angegebene System der x_1, x_2, x_3, beziehungsweise der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$.

Ich gebe diese Erläuterungen über volle Formensysteme übrigens wesentlich nur zur allgemeinen Orientierung. Ich werde die folgende Darstellung so wählen, daß ich betreffs derselben keinerlei allgemeine Kenntnis voraussetze; vielmehr dienen mir die vollen Systeme nur zur Exemplifizierung in einzelnen Fällen.

§ 8.
Kanonische Kurven.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen und die anderen, von denen wir in §§ 2, 5 ausgingen, widersprechen einander gewissermaßen: damals definierten wir Formen auf dem algebraischen Gebilde ganz allgemein von den φ aus, jetzt knüpfen wir zu demselben Zwecke an eine bestimmte Art algebraischer Darstellung des Gebildes an, indem wir uns dasselbe als Kurve m-ter Ordnung im Raume von $(n-1)$ Dimensionen gelegen denken. Die zweierlei Festsetzungen stimmen ohne weiteres nur in einem einzigen Falle überein, wenn nämlich die C_m mit der Normalkurve der φ identisch ist (wobei wir dann noch, um den Noetherschen Satz anwenden zu können, den hyperelliptischen Fall beiseite lassen müssen). Indessen zeigen die beiden Beispiele des § 6, daß doch auch noch auf andere Weise eine Verträglichkeit der zweierlei Auffassungen herbeigeführt werden kann. Beim hyperelliptischen Gebilde sind die linearen Verbindungen der φ mit den Verbindungen $(p-1)$-ten Grades der z_1, z_2, bei den ebenen Kurven

m-ter Ordnung, die wir betrachteten, mit den Verbindungen $(m-3)$-ten Grades der z_1, z_2, z_3 identisch; *dadurch wird erreicht, daß alle rationalen ganzen homogenen Verbindungen der* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ *in den beiden Fällen algebraische Formen auch im Sinne des § 7 sind.* Ich werde alle Kurven, bei denen etwas Ähnliches statthat, *kanonische Kurven* nennen.

Kanonische Kurven sind also unter den in § 7 betrachteten Kurven solche, bei denen die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ *algebraische Formen, sagen wir vom* d*-ten Grade, der* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *sind.* Es ist dies auf Grund bekannter Äquivalenzbetrachtungen dasselbe, als wenn wir sagten, daß die Gesamtheit der linearen Verbindungen der φ mit der Gesamtheit der algebraischen Formen d-ten Grades der z identisch ist.[25])

Auf Grund dieser Definition ergeben sich sofort zwei Eigenschaften, welche für die kanonischen Kurven charakteristisch sind.

Erstlich beachte man, daß eine φ in $2p-2$ Punkten verschwindet; es ist daher

$$(55) \qquad 2p - 2 = md;$$

die Ordnung m *der kanonischen Kurve ist ein Teiler von* $2p-2$.

Zweitens seien α_z, β_z irgend zwei lineare Formen der $z_1, \ldots, z_n$, welche für keinen Punkt der kanonischen Kurve gemeinsam verschwinden. Der Differentialausdruck

$$(56) \qquad \alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz}$$

verschwindet dann in

$$2m + 2p - 2 = m(d+2)$$

Punkten der Kurve. *Ich sage, daß diese* $m(d+2)$ *Punkte die Nullstellen einer algebraischen Form* Γ_{d+2} *sind.* In der Tat, sei vorübergehend dW dasjenige überall endliche Differential, welches durch die Gleichung:

$$dW = (\beta_z)^d \cdot d\omega$$

definiert ist. Der Differentialquotient

$$-d\left(\frac{\alpha_z}{\beta_z}\right) : dW$$

ist dann eine auf der Kurve eindeutige algebraische Funktion, welche in den genannten $m(d+2)$ Punkten verschwindet. Aber die Unend-

[25]) [Weitere Beispiele kanonischer Kurven sind gewisse Fälle der binomischen Gebilde (vgl. die Erlanger Dissertation von Osgood „*Zur Theorie der zum algebraischen Gebilde* $y^m = R(x)$ *gehörigen Abelschen Funktionen*“, 1890) und singularitätenfreie Durchschnittskurven von $(n-2)$ Hyperflächen des Raumes von $(n-1)$ Dimensionen. (vgl. die Göttinger Dissertation von H. S. White „*Abelsche Integrale auf singularitätenfreien, einfach überdeckten, vollständigen Schnittkurven eines beliebig ausgedehnten Raumes*“, 1891, abgedruckt in den Nova Acta Leopoldina.) K.]

lichkeitspunkte dieser Funktion liegen $(d+2)$-fach zählend in den Punkten $\beta_z = 0$; sie sind also die Nullstellen einer $G_{d+2}(z)$ (um diese im vorigen Paragraphen gelegentlich gebrauchte Bezeichnung wieder aufzunehmen). Daher sind die Nullstellen der Funktion nach der Definition der Γ durch das Verschwinden einer Γ_{d+2} gegeben. Wir könnten geradezu schreiben:

$$(57) \qquad \Gamma_{d+2}(z_1, \ldots, z_n) = \frac{-d\left(\frac{\alpha_z}{\beta_z}\right)}{dW} \cdot (\beta_z)^{d+2}.$$

Für $d\omega$ ergibt sich dann der Ausdruck

$$(58) \qquad d\omega = \frac{(\alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz})}{\Gamma_{d+2}(z_1, \ldots, z_n)}.$$

Die beiden hiermit genannten Eigenschaften der kanonischen Kurven, die in der Formel (58) zusammengefaßt erscheinen, sind, wie gesagt, für die kanonischen Kurven charakteristisch. Denn sobald man für $d\omega$ die Formel (58) hat, werden die Integrale

$$(59) \qquad \int \Gamma_d(z_1, \ldots, z_n) \cdot d\omega$$

überall endliche Integrale vorstellen, die Formen Γ_d sind also lineare Verbindungen der φ und die Gesamtheit der Γ_d deckt sich, wieder vermöge der bekannten Äquivalenzbetrachtungen, mit der Gesamtheit der linearen Verbindungen der φ.

Wir haben bei den letzten Erläuterungen (indem wir von den φ handelten) p selbstverständlich > 1 genommen. Unser letzter Satz gestattet uns, die Definition der kanonischen Kurven auch auf die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ auszudehnen. *Wir werden, bei beliebigem p, eine Kurve kanonisch nennen, wenn das zugehörige $d\omega$ durch eine Formel vom Typus* (58) *gegeben ist.*

Dies gibt für $p = 1$ ein besonders einfaches Resultat. In der Tat können wir die Formeln (57), (58) sofort für $p = 1$ gelten lassen, indem wir in denselben $d = 0$ nehmen und dW mit dem einen in diesem Falle vorhandenen Differential erster Gattung identifizieren. Wir haben also: *Sämtliche Kurven des § 7, die $p = 1$ aufweisen, sind kanonische Kurven.*

Für $p = 0$ ergeben sich als kanonische Kurven: die einfach überdeckte Gerade $z_1 : z_2$, die m-fach überdeckte Gerade, welche durch das Wurzelzeichen

$$\sqrt[m]{a_z : b_z}$$

definiert wird, der einfache Kegelschnitt der Ebene.

Jedenfalls läßt sich also jedes algebraische Gebilde in kanonische Form setzen. Für $p > 1$ ist ja in allen Fällen die Normalkurve der φ eine kanonische Kurve (auch im hyperelliptischen Falle, trotzdem dort der

Satz vom vollen Formensystem der φ nicht gilt). Um zu untersuchen, ob neben ihr gegebenenfalls noch niedere kanonische Kurven existieren, hat man nur nachzusehen, ob für irgendeinen Teiler d der Zahl $2p-2$ eine Schar überall $(d-1)$-fach berührender linearer Verbindungen der φ existiert:

$$\left(c_1 \sqrt[d]{\varphi_1} + c_2 \sqrt[d]{\varphi_2} + \ldots + c_n \sqrt[d]{\varphi_n}\right)^d;$$

ist dies der Fall — und dies muß sich jeweils mit algebraischen Mitteln entscheiden lassen, — so hat man vermöge der Formeln:

$$z_1 = \sqrt[d]{\varphi_1}, \quad z_2 = \sqrt[d]{\varphi_2}, \quad \ldots, \quad z_n = \sqrt[d]{\varphi_n}$$

eine kanonische Darstellung des algebraischen Gebildes im Raume der z. Es müßte interessant sein, für beliebige Werte des p alle Möglichkeiten aufzuzählen, welche in dieser Hinsicht existieren.

Die kanonischen Kurven sind nun diejenige Darstellung der algebraischen Gebilde, die wir im folgenden ausschließlich zugrunde legen[26]). In der Tat zeigt sich, daß sich für sie die Verhältnisse immer am einfachsten gestalten. Ich werde in dieser Hinsicht jetzt zunächst entwickeln, daß sich die Formeln des § 6 fast ohne Änderung auf beliebige kanonische Kurven übertragen.

§ 9.

Grundformeln der kanonischen Darstellung.

Ich werde die in Betracht kommenden Formeln in derselben Reihenfolge geben wie in § 6, sodaß fortwährender Vergleich möglich ist.

Zunächst noch eine genauere Festlegung der unter (58) gegebenen Formel für $d\omega$. Indem wir die in (58) vorkommenden willkürlichen Konstanten α, β in geeigneter Weise partikularisieren, erhalten wir spezielle Formeln:

$$d\omega = \frac{z_i\, dz_k - z_k\, dz_i}{\Gamma^{(ik)}_{d+2}(z_1, \ldots, z_n)},$$

wo i, k irgend zwei verschiedene der Indizes $1 \ldots n$ sind; indem wir

[26]) Entsprechend dem Umstande, daß wir mit der Riemannschen Theorie beginnen, gelten im Texte die φ und die aus ihnen herzustellenden Ausdrücke von vornherein als bekannt; es bleibt also die Frage durchaus unberührt, wie wir dieselben herzustellen haben, wenn uns das algebraische Gebilde irgendwie durch Gleichungen definiert vorliegt. Ich will aber doch ausdrücklich darauf hinweisen, daß diese Frage längst von anderer Seite erledigt ist (so daß also, theoretisch zu reden, wirklich die Möglichkeit vorliegt, von dem irgendwie algebraisch gegebenen Gebilde bis zu jeder zulässigen kanonischen Darstellung desselben vorzudringen). Man vgl. z. B. Noether in Bd. 23 der Math. Annalen (*Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Funktionen*, 1883). [Es steht andererseits aber nichts entgegen, alle im Text gebrauchten Formen für ein algebraisches Gebilde, welches mit beliebigen Singularitäten behaftet ist, zu definieren; siehe, was z. B. binäre Gebilde angeht, Pick in den Math. Annalen, Bd. 50 (1897). K.]

sodann die einzelnen der so gewonnenen Formeln im Zähler und Nenner mit $(\alpha_i\beta_k - \beta_i\alpha_k) = (\alpha\beta)_{ik}$ multiplizieren und die sämtlichen so entstehenden Ausdrücke vereinigen, kommt:

$$d\omega = \frac{(\alpha_z\beta_{dz} - \beta_z\alpha_{dz})}{\Sigma(\alpha\beta)_{ik}\,\Gamma_{d+2}^{(ik)}(z_1, \ldots, z_n)},$$

womit die Abhängigkeit des in (58) auftretenden Nenners Γ_{d+2} von den Konstanten α, β klargelegt ist. Wir wollen diese Formel abkürzenderweise so schreiben:

$$d\omega = \frac{(\alpha_z\beta_{dz} - \beta_z\alpha_{dz})}{\Gamma_{d+2}(z_1 \ldots z_n; \alpha, \beta)}. \tag{60}$$

Wir wenden uns zur Definition der φ und der Integrale erster Gattung. Dieselbe ist bereits in (59) enthalten: *die linearen Verbindungen der φ decken sich mit den algebraischen Formen $\Gamma_d(z_1, \ldots z_n)$; unter den Formen Γ_d gibt es genau p linear unabhängige.*

Sei ferner $P_{\xi\eta}^{xy}$ ein Integral dritter Gattung. Wir bilden uns

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\omega_x\,\partial\omega_\xi},$$

multiplizieren mit $(\alpha_x\beta_\xi - \beta_x\alpha_\xi)^2$, wo die α, β willkürliche Größen sind, die übrigens mit den unter (60) benutzten durchaus nicht identisch zu sein brauchen, und erhalten einen Ausdruck

$$\Psi(x, \xi; \alpha, \beta),$$

der sich linear aus den Verbindungen zweiten Grades der Determinanten $(\alpha\beta)_{ik}$ zusammensetzt. Dieser Ausdruck erweist sich in den $x_1, \ldots, x_n$, wie in den $\xi_1, \ldots, \xi_n$, als algebraische Form $(d+2)$-ten Grades, verschwindet doppelt, wenn $\alpha_x\beta_\xi - \beta_x\alpha_\xi = 0$ ist, ohne daß x mit ξ zusammenfällt, und geht für $\xi = x$ in das Quadrat von $\Gamma_{d+2}(x_1, \ldots, x_n; \alpha, \beta)$ über. Wir schliessen, *daß es jedenfalls möglich sein muß, bei der vorgelegten C_m Formen Ψ dieser Art zu bilden.* Das Integral P erscheint dann in der Form

$$P_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x\!\!\int_\eta^\xi d\omega_z\,d\omega_\zeta \cdot \frac{\Psi(z, \zeta; \alpha, \beta)}{(\alpha_z\beta_\zeta - \beta_z\alpha_\zeta)^2}. \tag{61}$$

Umgekehrt wird jedes Ψ, welches die angegebenen Eigenschaften besitzt, in (61) eingesetzt ein Integral dritter Gattung definieren. Wir schließen, daß der Ausdruck Ψ durch die von uns angegebenen Eigenschaften so weit definiert ist, wie das Integral dritter Gattung selbst: *aus einem speziellen Werte des Ψ werden wir den allgemeinen erhalten, indem wir den mit willkürlichen c_{ik} ausgestatteten Ausdruck*

$$(\alpha_z\beta_\zeta - \beta_z\alpha_\zeta)^2 \cdot \sum c_{ik}\,\varphi_i(z)\,\varphi_k(\zeta) \tag{62}$$

hinzuaddieren.

Wir ziehen jetzt die Definition (32) der Primform in Betracht. Wieder können wir den daselbst angedeuteten Grenzübergang mit Hilfe des Abelschen Theorems ausführen, indem wir diejenigen Stellen

$$x', x'', \ldots, x^{(m-1)}$$

bzw.

$$y', y'', \ldots, y^{(m-1)}$$

unserer kanonischen Kurve einführen, welche die Gleichungen

$$\alpha_x\beta_z - \beta_x\alpha_z = 0, \quad \text{bez.} \quad \alpha_y\beta_z - \beta_y\alpha_z = 0$$

befriedigen, ohne doch mit x, bez. y identisch zu sein. Wir erhalten:

$$\Omega(x, y) = \frac{\alpha_x\beta_y - \beta_x\alpha_y}{\sqrt{\Gamma_{d+2}(x; \alpha, \beta) \cdot \Gamma_{d+2}(y; \alpha, \beta)}} \cdot e^{\frac{1}{2}\sum P_{xy}^{x^{(i)}y^{(i)}}}. \tag{63}$$

Übrigens bemerken wir: *$\Omega(x, y)$ ist in den Koordinaten des Punktes x, bez. y vom Grade $-\frac{d}{2}$.*

Wir beschäftigen uns endlich mit der Mittelform $\mu(x)$. Zu ihrer Definition werden wir selbstverständlich nicht eine lineare Verbindung der φ, sondern eine solche der x heranziehen. Wir gewinnen dadurch die m-te Potenz von $\mu(x)$ in der Form:

$$\mu(x)^m = \frac{\prod_1^m \Omega(x, c^{(i)})}{C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n}. \tag{64}$$

Wir sehen: *$\mu(x)$ ist in den Koordinaten x vom Grade $-\frac{p}{m}$.*[27])

Hiermit sind in der Tat die Formeln des § 6 auf den Fall einer beliebigen kanonischen Kurve übertragen, abgesehen allerdings von einem einzigen Punkte: wir haben in (61), (62) die zur kanonischen Kurve gehörigen Integrale dritter Gattung nur im allgemeinen definiert, während wir in § 6 für jeden der beiden dort in Betracht kommenden Fälle ein ganz bestimmtes Integral dritter Gattung, das wir Q nannten, als das einfachste von allen festgelegt hatten. Ich bin einstweilen nicht in der Lage, die Theorie dieses Q auf beliebige kanonische Kurven zu übertragen. In § 26 unten wird für ebene Kurven vierter Ordnung ohne Doppelpunkt die Eigenart des Q noch näher erläutert; es handelt sich dabei aber um solche Betrachtungen, bei denen die *Konstanten* der Riemannschen Fläche (die

[27]) [In meinem autographierten Vorlesungsheft „Riemannsche Flächen" I, S. 144 ff. findet man noch eine andere Darstellung für die mit geeigneten Mittelformen multiplizierte Primform $\Omega(x,y)$ an der kanonischen Kurve. K.]

Moduln derselben) als veränderlich gelten, und diese Betrachtungen entziehen sich zur Zeit, wie schon in der Einleitung angedeutet, der Verallgemeinerung[28]).

§ 10.

Von den Lösungen des Umkehrproblems.

Wir werden jetzt das Umkehrproblem der Integrale erster Gattung einführen, bez. diejenigen auf seine Lösungen bezüglichen Sätze kurz zusammenstellen, die sogleich gebraucht werden. Die allgemeinste Formulierung des Umkehrproblems ist jedenfalls die, daß wir für $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ die Gleichungen anschreiben

$$(65) \qquad w_\alpha^{x' y'} + w_\alpha^{x'' y''} + \ldots + w_\alpha^{x^{(\nu)} y^{(\nu)}} = W_\alpha,$$

wo ν irgendwelche Zahl, und nun verlangen, den aus den Werten der W_α folgen den algebraischen Zusammenhang zwischen den $x', \ldots, x^{(\nu)}, y', \ldots, y^{(\nu)}$ anzugeben. Inzwischen wollen wir diese Fragestellung hier gleich so partikularisieren, daß wir die y als gegebene Größen und nur die x als veränderlich, bez. als unbekannt betrachten. Wir haben jedenfalls den Satz:

Ist $x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ irgendeine Lösung der Gleichungen (65), *so ist auch jedes zu den $x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ im Sinne des § 7 äquivalente Punktsystem eine Lösung.*

Aber diesen Satz können wir unmittelbar umkehren. Sind $x', \ldots, x^{(\nu)}$ und $\bar{x}', \ldots, \bar{x}^{(\nu)}$ zwei Lösungssysteme derselben Gleichungen (65), so erweist sich der Primformenquotient:

$$\frac{\Omega(x, x') \ldots \Omega(x, x^{(\nu)})}{\Omega(x, \bar{x}') \ldots \Omega(x, \bar{x}^{(\nu)})}$$

als algebraische, auf unserer Kurve eindeutige Funktion von x. Wir schließen:

Je zwei Lösungssysteme $x', \ldots, x^{(\nu)}$ und $\bar{x}', \ldots, \bar{x}^{(\nu)}$ von (65) *sind äquivalent.*

Hiernach gestattet der Riemann-Rochsche Satz, unter der Voraussetzung, daß überhaupt ein Lösungssystem der Gleichungen (65) existiere, die Zahl dieser Lösungen anzugeben. Wir formulieren das Resultat mit den Worten:

Ist τ die Zahl der linear unabhängigen φ, die in den Punkten $x', \ldots, x^{(\nu)}$ irgendeines Lösungssystems der Gleichungen (65) *verschwinden, so ist die Zahl der überhaupt vorhandenen Lösungen $\infty^{\tau - p + \tau}$.*

[28]) [Außer Pick (vgl. § 6) haben Osgood und White in ihren bereits oben (S. 413, Fußnote [25]) genannten Dissertationen ein Integral Q mit kovariantem Charakter für die von ihnen betrachteten kanonischen Kurven aufgestellt. K.]

Wir sind so zu der fundamentalen Frage geführt, ob das Gleichungssystem (65) überhaupt Lösungen hat. Für $\nu < p$ verlangt dies jedenfalls Bedingungen zwischen den W_α, und diesen können wir hier nicht nachgehen, da sie sich erst mit Hilfe der hier noch als unbekannt geltenden Thetafunktionen beantworten lassen. Dagegen haben wir ohne weiteres:

Für $\nu \geqq p$ hat die Problemstellung (65) *sicher Lösungen.*

Allerdings leitet man auch diesen Satz, nach dem Vorgange von Riemann, vielfach erst aus der Theorie der Thetafunktionen ab. Demgegenüber ist es mit Rücksicht auf den Inhalt der folgenden Paragraphen wesentlich, hier ausdrücklich zu konstatieren, daß man zu diesem Zwecke der Theorie der Thetafunktionen keineswegs bedarf. Herr Weierstrass hat in der Tat seit langem einen ganz elementaren Beweis des in Rede stehenden Satzes gegeben[29]). Derselbe läßt sich mit wenigen Worten skizzieren. Man beginnt damit, für die W hinreichend kleine Größen zu setzen, welche (W) heißen sollen. Läßt man dann $\nu - p$ der zugehörigen Punkte x mit den korrespondierenden Punkten y zusammenfallen, so kann man die symmetrischen Funktionen der Koordinaten der übrigen x nach Potenzen der (W) in konvergente Reihen entwickeln. Damit ist für die (W) die Existenz eines ersten Lösungssystems sichergestellt. Hierauf gestattet das Abelsche Theorem, für Größen $W = n \cdot (W)$, wo n irgendeine ganze Zahl, ein Lösungssystem aus dem für die (W) gefundenen algebraisch zu konstruieren. Aber die so definierten W sind an sich die allgemeinsten, die es gibt. In der Tat, wenn irgendwelche W vorgelegt sind, so kann man n immer so groß nehmen, daß die Größen $\frac{W}{n}$ zu den bereits behandelten (W) gehören. Daher usw.

Dies ist alles, was wir von der Theorie des Umkehrproblems in den folgenden Paragraphen brauchen werden.

§ 11.

Wurzelformen bei kanonischen Kurven.

Wir denken uns jetzt wieder eine kanonische Kurve m-ter Ordnung des Raumes der $z_1 : z_2 : \ldots : z_n$ gegeben.

Eine zu derselben gehörige algebraische Form irgendwelchen Grades Γ_δ kann so beschaffen sein, daß ihre $m\delta$ Nullpunkte, unter μ einen Teiler

[29]) [Siehe Crelles Journal, Bd. 52 (1856) = Math. Werke, Bd. I, S. 297 ff. oder Math. Werke, Bd. IV, S. 445 ff. Vgl. auch die Darstellungen in den „Modulfunktionen", Bd. II, S. 512—517 oder in der wiederholt genannten Arbeit von Burkhardt, Math. Annalen, Bd. 32, § 22. K.]

von $m\delta$ verstanden, zu je μ zusammenfallen. Wir nennen sie dann eine *Berührungsform* μ-ter Stufe, die μ-te Wurzel aber

$$\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$$

eine *Wurzelform* der μ-ten Stufe.

Über die Mannigfaltigkeit solcher zu einer gegebenen C_m gehöriger Wurzelformen geben die Entwicklungen des vorigen Paragraphen eine Reihe von übrigens wohlbekannten Sätzen, von denen hier einige in knapper Form zusammengestellt werden sollen.

Mit $a', a'', \ldots, a^{(m)}$ seien vorübergehend die m auf unserer Kurve gelegenen Verschwindungspunkte einer Linearform a_z, mit c ein festgewählter, willkürlicher Punkt der Kurve bezeichnet. Wir setzen, für $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$(66) \qquad w_\alpha^{a'c} + w_\alpha^{a''c} + \ldots + w_\alpha^{a^{(m)}c} = C_\alpha .$$

Es seien ferner $x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ die Verschwindungspunkte einer Wurzelform $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$, also $\mu\nu = m\delta$. Dann hat man, wie auch die Integrationswege gewählt werden mögen, modulo der Perioden erster Gattung folgende Kongruenzen:

$$\mu\left(w_\alpha^{x'c} + w_\alpha^{x''c} + \ldots + w_\alpha^{x^{(\nu)}c}\right) \equiv \delta C_\alpha .$$

Wir schließen hieraus in bekannter Weise:

$$(67) \qquad w_\alpha^{x'c} + w_\alpha^{x''c} + \ldots + w_\alpha^{x^{(\nu)}c} = \frac{\delta}{\mu}\cdot C_\alpha + \left(\frac{\omega_\alpha}{\mu}\right),$$

wo $\left(\frac{\omega_\alpha}{\mu}\right)$ irgendeinen der μ^{2p} Teilwerte

$$(68) \qquad \frac{h_1\,\omega_{\alpha,1} + h_2\,\omega_{\alpha,2} + \ldots + h_{2p}\,\omega_{\alpha,2p}}{\mu}$$

bedeuten soll, die man erhält, indem man $h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$ unabhängig voneinander die Werte $0, 1, \ldots, (\mu - 1)$ durchlaufen läßt. Wir haben also zur Bestimmung der Nullstellen $x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ die μ^{2p} Umkehrprobleme (67) zu behandeln.

Indem wir jetzt den Inhalt des vorigen Paragraphen von rückwärts durchlaufen, haben wir zunächst:

Ob es bei gegebener Kurve C_m für $\nu < p$ bei irgendwelcher Annahme der $h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$ Lösungen x der Gleichungen (67) gibt, steht dahin; sicher aber gibt es solche Lösungen, und zwar bei beliebig angenommenen Werten der $h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$, für $\nu \geqq p$.

Für $\nu \geqq p$ erhalten wir also μ^{2p} getrennte Systeme von Wurzelformen δ-ter Ordnung μ-ter Stufe; ob es für $\nu < p$ derartige Systeme gibt und wie groß eventuell deren Zahl ist, bleibt [bei der gegenwärtigen Betrachtung] unbestimmt.

Indem wir jetzt unter den Gleichungen (67) eine bestimmte ins Auge fassen, sei τ die Anzahl der linear unabhängigen φ, welche für die Punkte $x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ irgendeines zugehörigen Lösungssystems verschwinden. Wir haben dann:

Die Zahl der Lösungssysteme unserer Gleichung ist $\infty^{\nu-p+\tau}$; die Punkte jedes einzelnen Lösungssystems sind mit $x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ äquivalent.

Und hieraus:

Unter den der einzelnen Gleichung (67) zugehörigen Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ gibt es $(\nu - p + \tau + 1)$ linear unabhängige; alle anderen Wurzelformen des Systems setzen sich aus diesen mit Hilfe beliebig zu wählender konstanter Multiplikatoren linear zusammen.

Sind also

$$\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta'},\ \sqrt[\mu]{\Gamma_\delta''}, \ldots,\ \sqrt[\mu]{\Gamma_\delta^{(\nu-p+\tau+1)}}$$

unter den Wurzelformen des Systems geschickt ausgewählt, so ist

$$(69) \qquad \sqrt[\mu]{\Gamma_\delta} = c'\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta'} + c''\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta''} + \ldots + c^{(\nu-p+\tau+1)}\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta^{(\nu-p+\tau+1)}},$$

unter den c unabhängige Konstante verstanden, die allgemeinste Wurzelform desselben.

Wir betrachten jetzt Wurzelformen μ-ter Stufe von den Ordnungen δ und δ' nebeneinander. Es entstehen dann gewisse Gruppierungssätze, von denen wir nur zwei herausgreifen:

1. *Ist $\delta \equiv \delta'$ (mod. μ) und $\delta' > \delta$, so gehört zu jedem existierenden Systeme von Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ ein bestimmtes System von Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$.*

Man erhält nämlich Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$, indem man die $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ des gegebenen Systems mit beliebigen zur C_m gehörigen algebraischen Formen vom Grade $\frac{\delta'-\delta}{\mu}$ multipliziert; durch die so gewonnenen $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$ ist dann ein ganzes System von Wurzelformen δ'-ter Ordnung rational festgelegt.

2. *Haben δ und δ' mit μ verschiedene Faktoren gemein, so haben die Systeme von Formen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$, die es gibt, unter sich eine ganz andere Gruppierung, als die Systeme von Formen $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$.*

Ist beispielsweise δ durch μ teilbar, so findet sich unter den zugehörigen Systemen des $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ ein besonders ausgezeichnetes: das ist der Inbegriff der algebraischen Formen des Grades $\frac{\delta}{\mu}$. Oder ist $\mu = \mu'\mu''$ und δ durch μ' teilbar, so finden sich unter den Systemen der $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ als ausgezeichnete Systeme die Wurzelformen $\sqrt[\mu'']{\Gamma_{\frac{\delta}{\mu'}}}$.

Es ist hier nicht der Ort, diese Gruppierungssätze weiter zu verfolgen. Auf den besonderen Fall derselben, welcher der Annahme $m = 2p - 2$, $\mu = 2$ entspricht, ist insbesondere Herr **Noether** wiederholt eingegangen (in der schon öfter genannten Arbeit in Bd. 17 der Math. Annalen, in Bd. 28 daselbst *„Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abelschen Funktionen“* 1886, usw.); der Fall $m = 2$, $p = 2$ (μ beliebig) findet seine Erledigung in der wiederholt genannten Abhandlung von Herrn **Burkhardt** (*Systematik der hyperelliptischen Funktionen*).

§ 12.

Charakteristiken von Wurzelformen, insbesondere Primcharakteristiken.

Die μ^{2p} verschiedenen Systeme von Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$, die es für $\nu \geqq p$ gibt, erscheinen vermöge (67), (68) je durch ein bestimmtes System der Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$ festgelegt. Aber diese Zahlen haben an sich keine absolute Bedeutung, insofern man der in derselben Formel vorkommenden Größe $\frac{\delta C_a}{\mu}$ nach Belieben die μ^{2p} verschiedenen Werte erteilen kann, welche sich aus einem einzelnen dieser Werte durch Hinzufügen eines beliebigen μ-Teiles der Perioden ergeben. Ich werde das so ausdrücken:

Durch die Formeln (67), (68) werden für die Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ keine absoluten Charakteristiken $(h_1, h_2, \ldots, h_{2p})$, sondern nur relative Charakteristiken festgelegt.

Unter der relativen Charakteristik zweier Systeme von Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ und $\left(\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}\right)$ verstehe ich nämlich den Inbegriff der Differenzen der diesen Systemen in (67), (68) entsprechenden Zahlen h, (h), also den Zahlenkomplex:

$$|h_1 - (h_1), h_2 - (h_2), \ldots, h_{2p} - (h_{2p})|$$

(sämtliche Zahlen immer nur modulo μ genommen). Wir können für denselben eine selbständige Definition aufstellen, indem wir den Quotienten

$$\frac{\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}}{\left(\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}\right)}$$

in Betracht ziehen. Seien $x', x'', \ldots, x^{(\nu)}$ diejenigen Punkte unserer Kurve, für welche der Zähler, $(x'), (x''), \ldots, (x^{(\nu)})$ diejenigen Punkte, für welche der Nenner verschwindet. Dann ist unser Quotient gleich dem Produkte von Primformen:

$$\frac{\Omega(x, x') \cdot \Omega(x, x'') \ldots \Omega(x, x^{(\nu)})}{\Omega(x, (x')) \cdot \Omega(x, (x'')) \ldots \Omega(x, (x^{(\nu)}))}.$$

Von hier aus berechnet man jetzt vermöge (33) die Faktoren, welche unser Quotient erhält, sobald der Punkt x auf der zerschnitten gedachten Riemannschen Fläche beziehungsweise die Querschnitte

$$A_1, \ldots, A_p; \quad B_1, \ldots, B_p$$

überschreitet. Wir finden, vermöge der zwischen den ω, η herrschenden Bilinearrelationen,

$$\text{(70)} \qquad \varepsilon^{h_{p+1} - (h_{p+1})}, \ldots, \varepsilon^{h_{2p} - (h_{2p})}; \quad \varepsilon^{-h_1 + (h_1)}, \ldots, \varepsilon^{-h_p + (h_p)},$$

wo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. *In diesen Faktoren liegt die in Aussicht genommene Definition der relativen Charakteristik zweier Systeme von Wurzelformen.*

Es gibt nun zwei besondere Fälle, in denen man, unter Aufrechterhaltung der so formulierten Sätze, dem einzelnen Systeme der $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ in zwangloser Weise eine *absolute* Charakteristik

$$|h_1, h_2, \ldots, h_{2p}|$$

beilegen kann.

Der erste dieser Fälle tritt ein, wenn δ durch μ teilbar ist. Es gibt dann, wie schon bemerkt, ein ausgezeichnetes System von Wurzelformen $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$, dasjenige, welches aus den algebraischen Formen vom Grade $\frac{\delta}{\mu}$ besteht. Es ist natürlich, diesem System die Charakteristik $|0, 0, \ldots, 0|$ zu erteilen. Dann sind die Charakteristiken aller anderen Systeme damit festgelegt; wenn wir wollen, durch die Faktoren

$$\text{(71)} \qquad \varepsilon^{h_{p+1}}, \ldots, \varepsilon^{h_{2p}}, \quad \varepsilon^{-h_1}, \ldots, \varepsilon^{-h_p},$$

welche der Quotient

$$\frac{\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}}{\Gamma_{\frac{\delta}{\mu}}}$$

an den Querschnitten A, B erhält. Wir werden die so gewonnenen „absoluten“ Charakteristiken als *Elementarcharakteristiken* bezeichnen.

Den Elementarcharakteristiken treten zweitens die *Primcharakteristiken* gegenüber. Ich wähle diesen Namen, weil bei ihrer Definition die Primform Ω zu benutzen ist. Der Einfachheit wegen will ich fortan $\mu = 2$ setzen. Dann ist der Grad δ derjenigen Wurzelformen, für welche es Primcharakteristiken gibt, $2\varrho + d$, unter ϱ eine beliebige ganze Zahl verstanden, während $d = \frac{2p-2}{m}$ ist. Ist nämlich eine Wurzelform $(2\varrho + d)$-ter Ordnung zweiter Stufe

$$\sqrt{\Gamma_{2\varrho + d}}$$

vorgelegt, so können wir aus ihr eine *Funktion* der Stelle x bilden, indem wir ihr den Faktor $\Omega(x, y)$ hinzufügen (wo y ein beliebiger Hilfspunkt) und dann durch eine beliebige algebraische Form $\Gamma_{\varrho+d}$ dividieren. Um die Primcharakteristik von $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$ zu finden, bestimmen wir die Faktoren, welche die in Rede stehende Funktion

$$\frac{\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}\cdot\Omega(x,y)}{\Gamma_{\varrho+d}}$$

an den $2p$ Querschnitten der Riemannschen Fläche annimmt. Indem wir mit $h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$ geeignete ganze Zahlen bezeichnen, lauten diese Faktoren:

$$(72)\qquad \begin{cases} \text{bei } A_1\colon & (-1)^{h_{p+1}}\cdot e^{\sum \eta_{\alpha 1}\left(w_\alpha^{xy}+\frac{\omega_{\alpha 1}}{2}\right)}, \\ \text{bei } A_2\colon & (-1)^{h_{p+2}}\cdot e^{\sum \eta_{\alpha 2}\left(w_\alpha^{xy}+\frac{\omega_{\alpha 2}}{2}\right)}, \\ \quad\vdots & \\ \text{bei } B_p\colon & (-1)^{h_p}\cdot e^{\sum \eta_{\alpha,2p}\left(w_\alpha^{xy}+\frac{\omega_{\alpha,2p}}{2}\right)}, \end{cases}$$

wo die h natürlich nur modulo 2 bestimmt sind. *Die so definierten*

$$(73)\qquad h_1, h_2, \ldots, h_{2p}$$

sind die Primcharakteristik der Wurzelform $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$. In der Tat ist sofort zu sehen, daß die so gegebene Definition der Charakteristiken mit der aus (67), (68) fließenden verträglich ist. Bilden wir nämlich für zwei Wurzelformen $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$ aus verschiedenen Systemen — sie mögen $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$, $(\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}})$ heißen — nach der neuen Regel die Primcharakteristiken h und (h), so wird deren Quotient

$$\frac{\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}}{(\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}})}$$

an den A, B die Faktoren annehmen:

$$(-1)^{h_{p+1}-(h_{p+1})},\quad (-1)^{h_{p+2}-(h_{p+2})}, \ldots, (-1)^{h_p-(h_p)},$$

was mit Formel (70) genau übereinstimmt.

Übrigens werden wir, um uns der gewöhnlichen Bezeichnung anzuschließen, für

$$h_1, h_2, \ldots, h_p,\quad h_{p+1}, \ldots, h_{2p}$$

in der Folge vielfach

$$h_1, h_2, \ldots, h_p,\quad g_1, \ldots, g_p$$

schreiben. In der Tat gehen die Charakteristiken, welche wir definierten, in dem besonderen Falle $\mu = 2$, $d = 1$, d. h. im Falle der Wurzelformen zweiter Stufe bei zugrunde gelegter Normalkurve der φ, in die sonst gebrauchten Charakteristiken über; die Primcharakteristiken beziehen sich dann auf die Wurzelformen ungerader Ordnung, die Elementarcharakteristiken auf die Formen gerader Ordnung. Die Primcharakteristiken werden also das, was man *eigentliche Charakteristiken*, die Elementarcharakteristiken

das, was man *Gruppencharakteristiken* zu benennen pflegt. Ich habe mich diesen letzteren Benennungen schon darum nicht anschließen mögen, weil ich für das Wort „Gruppe" durchweg die spezifische, auf Galois zurückgehende Bedeutung aufrecht erhalten will[30]).

Übrigens möchte ich vorgreifend hier folgende Bemerkung einschalten. Die Primcharakteristiken wurden, wo sie bislang in der Literatur auftraten, nur indirekt, von der Theorie der Thetafunktionen aus, eingeführt. Aber hierbei blieb eine Unbestimmtheit bestehen. Man wußte sehr wohl, daß den 2^{2p} unterschiedenen Thetafunktionen an der Normalkurve der φ die 2^{2p} zu unterscheidenden Systeme von Wurzelformen ungerader Ordnung entsprechen, aber man war nicht in der Lage, die betreffende Zuordnung ins einzelne durchzuführen. Nun wir die Primcharakteristiken direkt definieren, ist diese Unbestimmtheit beseitigt. *An der kanonischen* C_m *wird jeder Thetafunktion dasjenige System von Wurzelformen* $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$ *entsprechen, deren Primcharakteristik mit der Charakteristik der Thetafunktion* (deren Definition durch die Thetareihe selbst gegeben ist), *übereinstimmt.*

Herr Noether hat in Bd. 28 der Annalen (a. a. O.) auf das verschiedene Verhalten aufmerksam gemacht, welches die an der Normalkurve der φ für $\mu = 2$ definierten Charakteristiken der beiden Arten gegenüber linearer Periodentransformation zeigen. Dieses Verhalten ist von der Auswahl der zugrunde zu legenden kanonischen Kurve selbstverständlich unabhängig. Zugleich ergibt sich dasselbe hier, ohne irgendwelche Bezugnahme auf die lineare Transformation der Thetafunktionen, aus der Betrachtung der Faktoren (71), (72) direkt. Die Formeln selbst sind folgende. Sei die lineare Transformation der Perioden (ich will mich der Kürze halber auf $p = 3$ beschränken) durch die Formeln gegeben:

$$(74)\qquad \begin{cases} \omega_1' = a_1\omega_1 + b_1\omega_2 + c_1\omega_3 + d_1\omega_4 + e_1\omega_5 + f_1\omega_6, \\ \omega_2' = a_2\omega_1 + b_2\omega_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_3' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

Man hat dann als Umsetzung der Elementarcharakteristiken

$$(75)\qquad \left.\begin{cases} h_1 = a_1 h_1' + a_2 h_2' + a_3 h_3' + a_4 h_4' + a_5 h_5' + a_6 h_6' \\ h_2 = b_1 h_1' + b_2 h_2' + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}\right\}\ (\text{mod. } 2).$$

[30]) [Statt Primcharakteristik wird vielfach auch der Name Thetacharakteristik gebraucht, der hier vermieden werden mußte, weil die Thetafunktion erst aus den Primformen aufgebaut werden sollte. K.]

dagegen für die Primcharakteristiken:

$$(76)\quad \left.\begin{cases} h_1 = a_1 h_1' + a_2 h_2' + a_3 h_3' + a_4 h_4' + a_5 h_5' + a_6 h_6' + (a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6) \\ h_2 = b_1 h_1' + b_2 h_2' + \ldots \qquad\qquad + (b_1 b_4 + b_2 b_5 + b_3 b_6) \\ h_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}\right\} (\mathrm{mod.}\ 2)$$

Die Folge ist, daß unter allen Elementarcharakteristiken die eine $(0, 0, \ldots, 0)$ eine Sonderstellung den anderen gegenüber einnimmt, während sich die Primcharakteristiken in gerade und ungerade zerlegen, je nachdem

$$h_1 h_4 + h_2 h_5 + h_3 h_6$$

gerade oder ungerade ist.

Diese tiefgehende Unterscheidung von Elementarcharakteristiken und Primcharakteristiken schließt nicht aus, daß sich beide, *sobald das d der kanonischen Kurve eine gerade Zahl ist,* auf dieselben Wurzelformen beziehen können. Es ist dies z. B. bei den hyperelliptischen Gebilden eines ungeraden p der Fall.

§ 13.

Fundamentalformeln für die auf kanonische Kurven bezogenen Thetafunktionen.

Wir haben jetzt alle Vorbereitungen, um uns wenigstens dem ersten Teile desjenigen wichtigen Problems zuwenden zu können, dessen Erledigung in der Einleitung als der allgemeine Zielpunkt der gegenwärtigen Abhandlung bezeichnet wurde.

Es handelt sich um eine Fragestellung, welche von derjenigen, die Riemann in Nr. 25 seiner Abelschen Funktionen gibt, nur wenig verschieden ist.

Wir denken uns nämlich die 2^{2p} Thetareihen, deren einzelne durch ihre Charakeristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ festgelegt ist:

$$(77)\qquad \vartheta_{\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}}(v_1, \ldots, v_p;\quad \tau_{11}, \ldots, \tau_{pp}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \ldots \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_p} E,$$

wo

$$E = e^{i\pi\left(\sum_1^p{}_\alpha \sum_1^p{}_\beta \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta + \frac{g_\beta}{2}\right)\tau_{\alpha\beta} + 2\sum_1^p{}_\alpha \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2}\right)\left(v_\alpha + \frac{h_\alpha}{2}\right)\right)},$$

in Funktionen auf der uns gegebenen kanonischen Kurve m-ter Ordnung des Raumes von $(n-1)$ Dimensionen verwandelt, indem wir die $\tau_{\alpha\beta}$ mit den gleichbenannten Perioden der zugehörigen Normalintegrale erster Gattung zusammenfallen lassen, für die v_α aber, unter ν eine beliebige Zahl verstanden, die folgenden Integralsummen einführen:

$$(78)\qquad v_\alpha = v_\alpha^{x' y'} + v_\alpha^{x'' y''} + \ldots + v_\alpha^{x^{(\nu)} y^{(\nu)}}.$$

Die einfachen und fundamentalen Eigenschaften der so definierten Funktionen der Stellen $x', \ldots, x^{(\nu)}, y', \ldots, y^{(\nu)}$ sollen als bekannt gelten. Unsere Aufgabe ist, ***diese neuen Funktionen,*** sofern es möglich ist, ***durch die in den früheren Paragraphen bereits eingeführten Funktionen und Formen explizit darzustellen, was darauf hinauskommen wird, sie aus algebraischen Ausdrücken, Primformen und Mittelformen zusammenzusetzen.***

Von dieser allgemeinen Frage lassen wir hier, im ersten Abschnitte der gegenwärtigen Abhandlung, unserem anfänglichen Plane entsprechend, so viel nach, daß wir auf eine Festlegung der sogenannten konstanten Faktoren der Thetareihen, d. h. derjenigen Faktoren, welche nicht mehr von den $x', \ldots, x^{(\nu)}, y', \ldots, y^{(\nu)}$, sondern nur noch von den Moduln des algebraischen Gebildes abhängen, verzichten; wir werden also mit Formeln zufrieden sein, die noch eine unbestimmte multiplikative Konstante enthalten. Die Auswertung dieser konstanten Faktoren wird dann die Hauptaufgabe unseres zweiten Abschnittes sein, wobei wir uns aber, wie ebenfalls schon in der Einleitung bemerkt, auf $p = 3$ beschränken müssen.

Leider aber sind wir nun genötigt, auch hierüber hinaus noch eine Reduktion unseres Problems eintreten zu lassen. Es hat mir nämlich nicht gelingen wollen, für die allgemeinen Integralsummen (78) zweckmäßige Lösungen desselben zu finden. Ich sehe mich also genötigt, statt der Summen (78) speziellere Integralsummen einzuführen, die freilich noch so allgemein sind, daß man alle anderen Fälle nach dem Abelschen Theoreme auf sie zurückführen kann. Ich habe in dieser Hinsicht zwei verschiedene Ansätze gemacht, die ich hier gleich nennen will.

1. Um die Integralsummen (78) der ersten Art zu definieren, haben wir vorab jedem Punkte y unserer kanonischen Kurve bezüglich der Primcharakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ (Formel (72), (73)) bestimmte p Punkte $c_y', c_y'', \ldots, c_y^{(p)}$ zuzuordnen. Zu dem Zwecke betrachten wir dasjenige System von Wurzelformen $(d+2)$-ter Ordnung zweiter Stufe, welches die Primcharakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ besitzt. Wir wählen ferner irgendeine Linearform α_z, welche in $z = y$ verschwindet; ihre $(m-1)$ sonstigen Nullpunkte sollen $y', \ldots, y^{(m-1)}$ heißen. Dann gibt es den Umkehrtheoremen zufolge eine Wurzelform der gerade bezeichneten Art, welche in $y', \ldots, y^{(m-1)}$ verschwindet. *Ihre weiteren p Verschwindungspunkte sind die hier gesuchten $c_y', c_y'', \ldots, c_y^{(p)}$.* In der Tat hängen die so definierten c, wie man nach dem Abelschen Theoreme zeigt, nur vom y und der gewählten Primcharakteristik ab, nicht aber von der speziellen, bei ihrer Konstruktion benutzten Linearform α_z.[31])

[31]) Die Theorie dieser Punkte $c_y', \ldots, c_y^{(p)}$ geht bekanntlich auf Clebsch und Gordan zurück (*Theorie der Abelschen Funktionen*, Leipzig 1866): der dort ge-

Jetzt sind die Integralsummen v_α, die wir beim einzelnen $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}$ in erster Linie in Betracht ziehen wollen:

$$(79)\qquad v_\alpha = v_\alpha^{x\,y} - v_\alpha^{x'\,c'_y} - v_\alpha^{x''\,c''_y} - \ldots - v_\alpha^{x^{(p)}\,c_y^{(p)}};$$

die $x, y, x', x'', \ldots, x^{(p)}$ werden hier willkürliche Punkte unserer Kurve vorstellen.

2. Wir nehmen zweitens an, *die Zahl ν der in (78) vorkommenden Einzelintegrale sei durch m teilbar, also $\nu = m\varrho$, es seien ferner die unteren Grenzpunkte y als die Nullstellen irgendeiner algebraischen Form ϱ-ten Grades Γ_ϱ, gewählt.* Wir wollen dies andeuten, indem wir schreiben:

$$(80)\qquad v_\alpha = \underbrace{\int^{x'} d\,v_\alpha + \int^{x''} d\,v_\alpha + \ldots + \int^{x^{(m\varrho)}} d\,v_\alpha}_{(\Gamma_\varrho = 0)}.$$

Die so bestimmten v_α wollen wir dann in ein beliebiges $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}$ als Argumente substituieren.

In den beiden hiermit bezeichneten Fällen läßt sich nun in der Tat der Wert der Thetafunktion vorbehaltlich einer unbestimmt bleibenden multiplikativen Konstanten in einfachster Weise durch geschlossene Formeln der von uns gewollten Art darstellen. Ich gebe hier diese Formeln vorweg ohne Beweis an. *In denselben bedeuten Ω, μ diejenigen Primformen, bez. Mittelformen, die man erhält, indem man das bei ihrer Definition zu benutzende Integral dritter Gattung mit dem transzendent normierten Integral $\Pi_{\xi\,\eta}^{x\,y}$ zusammenfallen läßt.* Die verschiedenen nebeneinander stehenden Faktoren Ω und μ sind natürlich in ihrer Vieldeutigkeit aneinander gebunden, widrigenfalls man ein falsches Resultat erhalten würde; da ich auf die Einzelheiten der diesbezüglichen Verhältnisse hier unmöglich eingehen kann, will ich vorweg bemerken, daß die analogen Fragen des hyperelliptischen Falles mit aller Ausführlichkeit in Bd. 32 der Math. Annalen von Herrn Burkhardt in seiner bereits in der Einleitung genannten Arbeit zur Diskussion gebracht worden sind[32]).

Im ersten Falle (Formel (79)) seien $\varphi'_1, \ldots, \varphi_p^{(p)}$ die Werte, welche die Formen $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ an den Stellen $x', \ldots, x^{(p)}$ annehmen. *Man hat dann* [bis auf einen Einheitsfaktor, der durch die Unbestimmtheit bei der Definition der Mittelform bedingt ist] *folgende Formel:*

gebenen Darstellung gegenüber bietet die des Textes zumal den Vorteil, daß sie vermöge des Begriffs der Primcharakteristik unter den 2^{2p} überhaupt vorhandenen Systemen von Punkten c das jedesmal in Betracht kommende einzeln herauslöst.

[32]) *Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunktionen*, § 22.

$$(81)\qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}(v,\tau) = C\cdot\frac{\Omega(x,x')\ldots\Omega(x,x^{(p)})}{\mu(x)^{p-1}}\cdot\frac{\begin{vmatrix}\varphi'_1 & \cdots & \varphi_1^{(p)}\\ \varphi'_p & \cdots & \varphi_p^{(p)}\end{vmatrix}\cdot\prod\limits_1^p \mu(x^{(i)})^{p-1}}{\prod\limits_1^p\prod\limits_{i+1}^p \Omega(x^{(i)}, x^{(k)})}\;{}^{33}).$$

Im zweiten Falle haben wir das zur Primcharakteristik $\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|$ gehörige System von Wurzelformen zweiter Stufe $(2\varrho + d)$-ter Ordnung in Betracht zu ziehen. Es sind hier zwei Möglichkeiten auseinanderzuhalten. Es kann sein — und es ist für alle $\varrho > \frac{d}{2}$ notwendig der Fall —, daß in den Nullpunkten einer solchen Wurzelform keine einzige Linearverbindung der φ verschwindet. *Dann setzen sich nach dem Riemann-Rochschen Satze die sämtlichen Wurzelformen des Systems aus $m\varrho$ linear unabhängigen zusammen, die ich*

$$\sqrt{\Phi_1},\ \sqrt{\Phi_2},\ \ldots,\ \sqrt{\Phi_{m\varrho}}$$

nennen will. Es kann aber auch sein, daß in den Nullpunkten der einzelnen Wurzelform τ linear unabhängige Linearverbindungen der φ verschwinden. *Dann ist die Zahl der linear unabhängigen $\sqrt{\Phi}$ um τ größer.*

Bei ersterer Voraussetzung wird das der Formel (80) *entsprechende* $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}(v,\tau)$ [bis auf einen Einheitsfaktor] *folgenden Wert haben:*

$$(82)\qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|}(v,\tau) = C\cdot\frac{\begin{vmatrix}\sqrt{\Phi'_1} & \ldots & \sqrt{\Phi_1^{(m\varrho)}}\\ \sqrt{\Phi'_{m\varrho}} & \ldots & \sqrt{\Phi_{m\varrho}^{(m\varrho)}}\end{vmatrix}\cdot\prod\limits_1^{m\varrho}\mu(x^{(i)})^{m\varrho}}{\prod\limits_1^{m\varrho}\prod\limits_{i+1}^{m\varrho}\Omega(x^{(i)}, x^{(k)})},$$

bei letzterer Voraussetzung wird es identisch verschwinden und zwar τ-fach verschwinden, d. h. mit seinen ersten, zweiten, …, $(\tau-1)$-ten nach den $v_1, v_2, \ldots, v_p$ genommenen Differentialquotienten. Dabei bedeuten in Formel (82) die $\sqrt{\Phi'_1}, \ldots, \sqrt{\Phi_{m\varrho}^{(m\varrho)}}$ die Werte, welche die Wurzelformen $\sqrt{\Phi_1}, \ldots, \sqrt{\Phi_{m\varrho}}$ an den Stellen $x', \ldots, x^{(m\varrho)}$ annehmen[34]).

[33]) [Es ist dies dem Wesen nach dieselbe Formel, welche Prym und Rost in ihrem Werke über Prymsche Funktionen (1911), Teil II, S. 262 aufstellen. Über einen ersten Ansatz dazu, der sich aber nur auf die Abhängigkeit von der Stelle x bezog, hat mir Prym im Jahre 1882 wiederholt andeutungsweise geschrieben; derselbe scheint auf das Jahr 1873 zurückzugehen. Dagegen ist die vollständige Formel erst in den Jahren 1909—1911 von Prym und Rost in ihrer Darstellung aufgefunden, wie Krazer in seinem Nachruf auf Prym in den Jahresberichten der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 25, 1917, S. 1ff. angibt und mir Rost bestätigt. K.]

[34]) [Ein Spezialfall der Formel (82) ist die Darstellung der hyperelliptischen Sigmafunktionen in § 9 der vorstehend abgedruckten Abhandlung XCVI. Siehe die Formeln (50) und (52) auf S. 374 daselbst. K.]

Man sieht: die beiden Formeln (81), (82) stehen in einem gewissen Gegensatze: bei (81) sind die Argumente v in geeigneter Weise (durch Vermittlung der Punkte $c_y', \ldots, c_y^{(p)}$) von der Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ abhängig gemacht, dafür ist die rechte Seite von (81) von der Charakteristik unabhängig; bei (82) ist es genau umgekehrt.

§ 14.

Beweis der aufgestellten Formeln nebst weiteren auf sie bezüglichen Bemerkungen.

Über den Beweis der Formeln (81), (82) werde ich hier nur solche Andeutungen machen, welche geeignet sind, das Bildungsgesetz der rechter Hand stehenden Ausdrücke verständlich zu machen. Dabei sei es der Kürze halber gestattet, die Argumente v als Summen bloßer Integral*zeichen* anzuschreiben.

Formel (81) ruht durchaus auf dem bekannten Riemannschen Satze, daß

$$\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}\left(\int\limits_{y}^{x} - \int\limits_{c_y'}^{x'} - \cdots - \int\limits_{c_y^{(p)}}^{x^{(p)}}\right)$$

nur dann verschwindet, wenn entweder x mit einemder Punkte $x', \ldots, x^{(p)}$ zusammenfällt oder die $x', \ldots, x^{(p)}$ Nullpunkte einer und derselben Linearverbindung der φ sind. Indem die rechte Seite von (81) einerseits die Primfaktoren $\Omega(x, x'), \ldots, \Omega(x, x^{(p)})$, andererseits die Determinante $\Sigma \pm \varphi_1' \ldots \varphi_p^{(p)}$ enthält, verschwindet sie in den angegebenen Fällen jedenfalls auch. Aber die genannte Determinante ist auch Null, wenn es die Thetafunktion keineswegs ist, wenn nämlich irgend zwei der Punkte $x', x'', \ldots, x^{(p)}$ zusammenfallen. *Dies nun wird gerade durch das der Determinante als Nenner beigefügte Produkt von Primformen $\Omega(x^{(i)}, x^{(k)})$ kompensiert.* Man beachte sodann, daß die Thetareihe eine *Funktion* der Stellen $x, x', \ldots, x^{(p)}$ ist, d. h. von den homogenen Koordinaten dieser Stellen im 0-ten Grade abhängt. Um das gleiche auf der rechten Seite unserer Gleichung zu erzielen, eben dazu dienen die verschiedenen daselbst im Zähler und Nenner als Faktoren beigesetzten Mittelformen.

In ganz ähnlicher Weise können wir uns jetzt von dem Aufbau der Formel (82) und den zugehörigen Bemerkungen über den Fall $\tau > 0$ Rechenschaft geben. Soll die in (82) betrachtete Thetafunktion verschwinden, so wird man nach dem gerade benutzten Satze schreiben dürfen, unter $z', \ldots, z^{(p-1)}$ irgendwelche $(p-1)$ Punkte unserer Kurve verstanden:

$$\underbrace{\int^{x'} + \int^{x''} + \cdots + \int^{x^{(m\varrho)}}}_{\Gamma_\varrho = 0} = -\int\limits_{c_y'}^{z'} - \int\limits_{c_y''}^{z''} - \cdots - \int\limits_{c_y^{(p-1)}}^{z^{(p-1)}} - \int\limits_{c_y^{(p)}}^{y}.$$

Wir führen jetzt solche $(m-1)$ Punkte $y', \ldots, y^{(m-1)}$ in die Betrachtung ein, welche mit y durch eine lineare Gleichung $\alpha_z = 0$ verbunden sind, und die also mit den $c_y', \ldots, c_y^{(p)}$ zusammen die Verschwindungspunkte einer Wurzelform zweiter Stufe der Ordnung $(2+d)$ sind. Indem wir dann vorstehende Gleichung so schreiben:

$$\underbrace{\int^{x'} + \cdots + \int^{x^{(m\varrho)}}}_{\Gamma_\varrho = 0} + \int\limits_{c_y'}^{z'} + \cdots + \int\limits_{c_y^{(p-1)}}^{z^{(p-1)}} + \int\limits_{c_y^{(p)}}^{y} + \int\limits_{y'}^{y'} + \cdots + \int\limits_{y^{(m-1)}}^{y^{(m-1)}} = 0,$$

bemerken wir, *daß unsere Thetafunktion* (82) *dann und nur dann verschwindet, wenn die Punkte $x', \ldots, x^{(m\varrho)}$ zusammen mit irgend $(p-1)$ beliebig anzunehmenden Punkten $z', \ldots, z^{(p-1)}$ die Nullstellen einer zur Primcharakteristik $\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ gehörigen Wurzelform zweiter Stufe der $(2\varrho + d)$-ten Ordnung sind.* Dies ist aber, wenn $\tau > 0$, immer der Fall, daher unser Satz von dem identischen Verschwinden. Andererseits wird im Falle $\tau = 0$ die rechte Seite von (82) dem so formulierten Satze genau entsprechen. Denn wenn die Determinante $\sum \pm \sqrt{\Phi_1'} \ldots \sqrt{\Phi_{m\varrho}^{(m\varrho)}}$ überflüssigerweise auch dann verschwindet, wenn irgend zwei der Stellen $x', \ldots, x^{(m\varrho)}$ zusammenfallen, so wird dies wieder durch das dem Nenner zugefügte Primformprodukt kompensiert. Die Mittelformen aber, welche als Faktoren beigesetzt sind, haben wieder den Zweck, den Grad des auf der rechten Seite stehenden Ausdrucks in den homogenen Koordinaten der einzelnen Stelle $x', \ldots, x^{(m\varrho)}$ auf Null herabzudrücken. —

Ich füge nun noch einige Bemerkungen hinzu, welche bestimmt sind, die Formeln (81), (82) mit anderweitig bekannten Resultaten in Verbindung zu setzen.

Die in (81), (82) auftretenden Formen Ω und μ waren, wie wir ausdrücklich hervorhoben, unter Zugrundelegung des Integrals dritter Gattung $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$ gebildet. Setzen wir an seine Stelle nach (8) irgend ein P:

$$P_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \Sigma\, c_{\alpha\beta}\, v_\alpha^{xy}\, v_\beta^{\xi\eta},$$

so wird sich die linke Seite (81), (82) in die allgemeine Thetafunktion

$$e^{-\frac{1}{2}\Sigma c_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta} \cdot \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v, \tau)$$

verwandeln, die wir natürlich, der in unseren Formeln vorkommenden unbestimmten Konstanten C entsprechend, auch noch mit irgendeinem konstanten Faktor multipliziert denken können. Nun sind die *Sigmafunktionen* des hyperelliptischen Gebildes, die ich in den Bänden 27, 32 der Math. Annalen [= Nr. XCV, XCVI des vorliegenden Bandes] behandelte, in die hiermit bezeichneten Funktionen mit eingeschlossen; bei ihnen ist das Integral dritter Gattung P durch das unter (45) genannte Normalintegral Q ersetzt. In der Tat wird für $m = 2$ nach Einführung des Q unsere Formel (82) mit der in Abh. XCVI, S. 374 unter (53) gegebenen Definition der hyperelliptischen Sigmafunktion ohne weiteres identisch. Man hat sich nur vor Augen zu halten, daß die dort betrachteten Integralsummen

$$\int_{y'}^{x'} + \dots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}}$$

vermöge der Eigenart der hyperelliptischen Gebilde auch so geschrieben werden können:

$$\underbrace{\int^{x'} + \dots + \int^{x^{(\nu)}} + \int^{\bar{y}'} + \dots + \int^{\bar{y}^{(\nu)}}}_{\Gamma_\nu = 0},$$

daß beim hyperelliptischen Gebilde die Mittelform $\mu(x)$ der einfachen Definition (47) unterliegt, und daß man beim hyperelliptischen Gebilde die sämtlichen Wurzelformen zweiter Stufe $(2\nu + d)$-ter Ordnung kennt, sobald man die sämtlichen Zerlegungen des fundamentalen f_{2p+2} in zwei Faktoren $\varphi_{p+1-2\mu} \cdot \psi_{p+1+2\mu}$ beherrscht; diese Wurzelformen sind dann nämlich durch

$$(83) \qquad \gamma_{\nu-1+\mu}(x_1, x_2) \cdot \sqrt{\varphi_{p+1-2\mu}} + \gamma_{\nu-1-\mu}(x_1, x_2) \cdot \sqrt{\psi_{p+1+2\mu}}$$

gegeben, unter $\gamma_\lambda(x_1, x_2)$ eine beliebige rationale ganze Form λ-ten Grades der x_1, x_2 verstanden. Zugleich subsumiert sich das, was a. a. O. in § 10 über das identische Verschwinden der hyperelliptischen Sigma gesagt wurde, unter die allgemeine für das identische Verschwinden der Theta im vorigen Paragraphen aufgestellte Regel.

Wir wollen ferner jenes bekannte Umkehrtheorem zu Hilfe nehmen, welches sich über die Sätze des § 10 hinaus in bekannter Weise aus dem Verschwinden der ungeraden Thetafunktionen für die Nullwerte der Argumente ergibt. Dasselbe besagt, daß jeder ungeraden Charakteristik $\left|{g \atop h}\right|$ entsprechend mindestens eine in den φ lineare Berührungsform zweiter Stufe $\varphi_{\left|{g \atop h}\right|}$ existiert; eventuell kann es deren eine ganze Schar geben[35]), was wir aber der Kürze halber hier ausschließen wollen. Von den p einem

[35]) Weber, *Über gewisse in der Theorie der Abelschen Funktionen auftretende Ausnahmefälle*, Math. Annalen, Bd. 13 (1878).

Punkte y vermöge der Charakteristik $\left|{g \atop h}\right|$ zugeordneten Punkten $c_y', \dots, c_y^{(p)}$, fällt dementprechend einer, etwa $c_y^{(p)}$, in den Punkt y zurück, während die übrigen $p - 1$ in die Berührungspunkte der zugehörigen $\varphi_{\left|{g \atop h}\right|}$ rücken. Wir wollen jetzt Formel (81) heranziehen, indem wir unter Voraussetzung eines ungeraden $\left|{g \atop h}\right|$ die $x', \dots, x^{(p)}$ mit den so bestimmten $c_y', \dots, c_y^{(p)}$ zusammenfallen lassen. Wir erhalten dann nach leichter Umformung:

$$(84) \qquad \vartheta_{\left|{g \atop h}\right|}\left(\int_y^x\right) = C \cdot \sqrt{\varphi_{\left|{g \atop h}\right|}(x) \cdot \varphi_{\left|{g \atop h}\right|}(y)} \cdot \Omega(x, y).$$

Es ist dies [dem Wesen der Sache nach] dieselbe Formel, welche für den Fall ebener Kurven ohne Doppelpunkt Herr Pick in Bd. 29 der Math. Annalen aufgestellt hat (wobei er sich nur das Ω nicht mit dem Integral Π, sondern mit dem unter (52) angegebenen Q gebildet denkt, weshalb er auch den Buchstaben ϑ durch den Buchstaben σ ersetzt[36])). Daß sich die ungeraden $\vartheta_{\left|{g \atop h}\right|}\left(\int_y^x\right)$ wie die mit geeigneten Konstanten multiplizierten Quadratwurzeln aus $\varphi_{\left|{g \atop h}\right|}(x) \cdot \varphi_{\left|{g \atop h}\right|}(y)$ verhalten, ist ein bekannter Satz von Riemann (Über das Verschwinden der Thetafunktionen, 1865.[37]) Übrigens kann man, wenn man mit der Definition der Thetafunktionen beginnen will, (84) als *Definition der Primform* $\Omega(x\,y)$ ansehen. Man wird mit Hilfe derselben Ω in viele Untersuchungen einführen können, in denen man sich bisher mehr oder minder elegant mit Hilfe der Thetafunktionen zurecht gefunden hat[38]).

Überhaupt werden wir die mannigfachen Formeln, die man für die Darstellung der Quotienten verschiedener ϑ am algebraischen Gebilde aufgestellt hat, mit Leichtigkeit aus (81), (82) ableiten.

[36]) Die sämtlichen Entwicklungen des Herrn Pick finden durch die Formeln (81), (82) ihre naturgemäße Erweiterung. Es ist besonders interessant, dabei den Sätzen über das identische Verschwinden der Thetafunktionen nachzugehen. Wir haben bei der singularitätenfreien ebenen Kurve das d der Formel (82) gleich $m-3$ zu nehmen. Daher wird (worauf mich Herr Pick gelegentlich aufmerksam machte) bei ungeradem m von den dort in Betracht kommenden Wurzelformen $(2\varrho + d)$-ter Ordnung ein System rational; dasselbe besteht aus der Gesamtheit der rationalen Formen $\left(\varrho + \frac{m-3}{2}\right)$-ter Ordnung. Für $\varrho \leq \frac{m-3}{2}$ verschwindet die zugehörige ausgezeichnete Thetafunktion $\frac{(m-2\varrho)^2-1}{8}$-fach.

[37]) [Crelles Journal, Bd. 65 = Ges. Math. Werke Nr. XI.]

[38]) [Vgl. z. B. die in den „Modulfunktionen", Bd. II gegebene Darstellung der Hurwitzschen Korrespondenztheorie. K.]

Aus Formel (81) schließen wir z. B. (ich unterdrücke dabei der Kürze halber linker Hand die Charakteristikenbezeichnung):

$$\log \cdot \frac{\vartheta\left(\int\limits_{y}^{x} - \int\limits_{c'_y}^{x'} - \dots - \int\limits_{c^{(p)}_y}^{x^{(p)}}\right) \cdot \vartheta\left(\int\limits_{\eta}^{\xi} - \int\limits_{c'_\eta}^{\xi'} - \dots - \int\limits_{c^{(p)}_\eta}^{\xi^{(p)}}\right)}{\vartheta\left(\int\limits_{y}^{\xi} - \int\limits_{c'_y}^{x'} - \dots - \int\limits_{c^{(p)}_y}^{x^{(p)}}\right) \cdot \vartheta\left(\int\limits_{\eta}^{x} - \int\limits_{c'_\eta}^{\xi'} - \dots - \int\limits_{c^{(p)}_\eta}^{\xi^{(p)}}\right)}$$
$$= \log \frac{\Omega(x, x') \cdot \Omega(\xi, \xi')}{\Omega(x, \xi') \cdot \Omega(\xi, x')} + \dots + \log \frac{\Omega(x, x^{(p)}) \cdot \Omega(\xi, \xi^{(p)})}{\Omega(x, \xi^{(p)}) \cdot \Omega(\xi, x^{(p)})}.$$

Hier ist nun jeder der rechter Hand stehenden Logarithmen nach (27), (30) ein Integral dritter Gattung $\Pi^{x\,\xi}_{x^{(\nu)}\,\xi^{(\nu)}}$. Wir haben also die wohlbekannte und vielfach benutzte Formel vor uns:

$$(85)\qquad \log \cdot \frac{\vartheta\left(\int\limits_{y}^{x} - \int\limits_{c'_y}^{x'} - \dots - \int\limits_{c^{(p)}_y}^{x^{(p)}}\right) \cdot \vartheta\left(\int\limits_{\eta}^{\xi} - \int\limits_{c'_\eta}^{\xi'} - \dots - \int\limits_{c^{(p)}_\eta}^{\xi^{(p)}}\right)}{\vartheta\left(\int\limits_{y}^{\xi} - \int\limits_{c'_y}^{x'} - \dots - \int\limits_{c^{(p)}_y}^{x^{(p)}}\right) \cdot \vartheta\left(\int\limits_{\eta}^{x} - \int\limits_{c'_\eta}^{\xi'} - \dots - \int\limits_{c^{(p)}_\eta}^{\xi^{(p)}}\right)}$$
$$= \Pi^{x'\,\xi'}_{x\,\xi} + \dots + \Pi^{x^{(p)}\,\xi^{(p)}}_{x\,\xi}.$$ [39])

Wir wollen ferner in (82) $d = 1$, also $m = 2p - 2$ setzen und $\varrho = 1$ nehmen. Indem wir die Quotienten der den verschiedenen Charakteristiken $\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ entsprechenden Ausdrücke bilden, sehen wir, daß sich an der Normalkurve der φ die ϑ mit den Argumenten

$$\underbrace{\int^{x'} + \int^{x''} + \dots + \int^{x^{(2p-2)}}}_{\Gamma_1 = 0}$$

wie $(2p-2)$-gliedrige Determinanten aus Wurzelformen zweiter Stufe der dritten Ordnung verhalten. Dieses Resultat ist für $p = 3$ von Herrn Weber[40]), für beliebiges p von Herrn Noether[41]) abgeleitet worden.

[39]) [Die rechte Seite ist identisch mit der Funktion $T_{x\xi}$ in den Abelschen Funktionen von Clebsch und Gordan. K.]

[40]) *Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht 3.* Berlin 1876.

[41]) In der wiederholt genannten Arbeit in Bd. 28 der Math. Annalen 1886/89.

Abschnitt II.

Spezielle Theorie des Falles $p = 3$.

§ 15.

Die ebene Kurve vierter Ordnung. Algebraische Moduln der ersten Stufe und transzendente Moduln.

Wir wenden uns jetzt zu neuen Fragestellungen, auf deren allgemeinen Charakter bereits in der Einleitung verwiesen wurde. Es soll sich nicht mehr darum handeln, nach funktionentheoretischen Grundsätzen auf *gegebener Riemannscher Fläche* zu operieren, vielmehr sollen fortan die Konstanten der Riemannschen Fläche (ihre Moduln) als Veränderliche gelten und als solche der funktionentheoretischen Betrachtung unterworfen werden. Hier lassen wir nun von vornherein die bereits in Aussicht genommene Beschränkung auf den Fall $p = 3$ eintreten. Daß $p = 3$ einfacher ist als der Fall der höheren p, kann von vornherein vorausgesetzt werden, überdies aber ist es sehr viel zugänglicher, weil wir gerade bei $p = 3$ noch eine größere Zahl von Untersuchungen anderer Mathematiker als Vorarbeiten werden benutzen können. Die Weiterführung unserer Untersuchungen für höhere p bleibt anzustreben; vielleicht daß dabei neue Hilfsmittel werden herangezogen werden müssen.

Die Normalkurve der φ ist für $p = 3$ (vom hyperelliptischen Falle abgesehen, den wir um so lieber beiseite lassen können, als er mit Rücksicht auf die hier vorliegende Fragestellung bereits erledigt ist) eine ebene Kurve vierter Ordnung allgemeiner Art:

$$(86)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Eine solche soll der Untersuchung fortan zugrunde gelegt sein. Als fundamentale Moduln des algebraischen Gebildes betrachten wir konsequenterweise die Koeffizienten von f, sie sind uns, im Gegensatz zu anderen bald einzuführenden Modulsystemen, die „algebraischen Moduln erster Stufe"[42]). Eine geometrische Deutung finden vermöge unserer C_4 natürlich nur die Verhältnisse dieser Koeffizienten. Die geometrische Auffassung, mit der wir arbeiten, wird also wieder nur solchen homogenen Funktionen der Veränderlichen gerecht, die homogen 0-ter Dimension sind (vgl. oben § 2); dies hindert uns aber nicht, allgemein homogene Verbindungen derselben, d. h. *Formen*, in die analytische Untersuchung

[42]) Vgl. hier und in der Folge überall die allerdings auf $p = 2$ bezüglichen Erläuterungen in den [in den Vorbemerkungen und sonst wiederholt genannten] von Herrn Burkhardt publizierten „*Grundzügen einer allgemeinen Systematik usw.*" in Bd. 35 der Math. Annalen (1889).

einzuführen. Daneben haben wir uns fortgesetzt vor Augen zu halten, daß es sich bei unseren Untersuchungen nur um solche Eigenschaften der C_4 oder Konstruktionen an der C_4 handeln kann, welche gegenüber projektiven Umformungen invariant sind. Es kommt dies darauf hinaus, daß wir fortgetzt mit Invarianten, bez. Kovarianten von f zu tun haben.

Neben die hiermit festgelegten fundamentalen Moduln treten nun vor allen Dingen die „transzendenten" Moduln. Es sind dies zunächst die $3 \cdot 6$ Perioden

$$(87) \qquad \begin{cases} \omega_{11}, \omega_{12}, \ldots, \omega_{16}, \\ \omega_{21}, \omega_{22}, \ldots, \omega_{26}, \\ \omega_{31}, \omega_{32}, \ldots, \omega_{36}, \end{cases}$$

welche die überall endlichen Integrale

$$w_1 = \int x_1 \, d\omega, \quad w_2 = \int x_2 \, d\omega, \quad w_3 = \int x_3 \, d\omega$$

an den Querschnitten A, B der von uns gewählten kanonischen Zerschneidung besitzen[43]); es sind dann insbesondere die invarianten Verbindungen derselben, d. h. die aus den ω_{ik} gebildeten dreigliedrigen Determinanten. Unter den letzteren greifen wir insbesondere die folgende heraus

$$(88) \qquad p_{123} = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix},$$

mit ihrer Hilfe lassen sich die übrigen aus den sechs Thetamoduln

$$(89) \qquad \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{33}$$

zusammensetzen. Hier ist p_{123} eine Invariante vom Grade (-3) in den Koeffizienten von f, die τ_{ik} aber sind absolute Invarianten. Jede Invariante von f verwandelt sich dementsprechend durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von p_{123} in eine Funktion der τ_{ik}.

Indem bei gegebener C_4 auf der zu ihr gehörigen Riemannschen Fläche unendlich viele kanonische Querschnittsysteme zur Definition der Perioden konstruiert werden können, treten neben die von uns zuerst gewählten ω_{ik} (87) unendlich viele andere Periodensysteme ω'_{ik} welche mit den ω_{ik} durch die schon oben, unter (74), angegebenen Formeln der linearen Transformation zusammenhängen:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= a_1 \omega_1 + b_1 \omega_2 + c_1 \omega_3 + d_1 \omega_4 + e_1 \omega_5 + f_1 \omega_6, \\ \omega'_2 &= a_2 \omega_1 + b_2 \omega_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega'_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

[43]) Zwischen den 18 Größen ω_{ik} bestehen bekanntlich drei linear unabhängige Bilinearrelationen, so daß wir 15 unabhängige Größen behalten, was mit der Zahl der Koeffizienten von f genau übereinstimmt.

Umgekehrt ist bekannt, daß jeder linearen Transformation der Perioden der Übergang von dem ursprünglich gewählten Querschnittssystem zu irgendeinem anderen Systeme kanonischer Querschnitte entspricht[44]). Sind alle so entstehenden Periodensysteme gegenüber der C_4 gleichberechtigt oder zerfallen dieselben in verschiedenwertige Kategorien? Das ist die fundamentale Frage, über die wir uns vor allen Dingen klar werden müssen. Ich sage, *daß die sämtlichen Periodensysteme in der Tat gleichberechtigt sind. Man kann nämlich die Koeffizienten von f von irgendwelchen Anfangswerten beginnend durch stetige Änderung so zu ihren Anfangswerten zurückführen, daß dabei das irgendeiner ursprünglichen Zerschneidung der zugehörigen Riemannschen Fläche entsprechende Periodensystem der ω in das irgendeiner anderen Zerschneidung der Fläche entsprechende Periodensystem der ω' übergeht.*

Was den Beweis der so formulierten Behauptung angeht, so erbringt man denselben wohl am einfachsten, indem man eine Überlegung zu Hilfe nimmt, welche Riemann in Nr. 12 seiner Abelschen Funktionen entwickelt. Man interpretiere die komplexen Werte irgendeines an der C_4 hinerstreckten, überall endlichen Integrals, etwa des w_1, in einer Ebene. Sodann bilde man die zur C_4 gehörige Riemannsche Fläche vermöge w_1 zweimal auf diese Ebene ab, das eine Mal, nachdem wir sie vermöge des ersten Querschnittsystems, das andere Mal, nachdem wir sie vermöge des zweiten Querschnittsystems zerschnitten haben. Wir erhalten dann in der Ebene w_1 zwei Figuren, welche je aus drei übereinandergeschichteten Parallelogrammen bestehen, die durch vier Verzweigungspunkte aneinander geheftet sind. Und nun ruht der ganze hier zu erbringende Beweis darauf, daß man jede solche Figur in jede andere derselben Art solcherweise überführen kann, daß alle Zwischenlagen von Figuren der gleichen Art gebildet werden, d. h. von Figuren, welche aus Tripeln übereinandergelegter und durch vier Verzweigungspunkte verbundener Parallelogramme bestehen. Einer jeden solchen Figur entspricht nämlich rückwärts[45]) ein algebraisches Gebilde $p = 3$, d. h. eine C_4; wir können also der kontinuierlichen Reihenfolge der Figuren eine kontinuierliche Aufeinanderfolge von Kurven vierter Ordnung entsprechend setzen: vermöge dieser Reihenfolge wird also gleichzeitig das Periodensystem der ω in das der ω' und die ursprüngliche C_4 in sich selbst übergeführt, was zu beweisen war[46]).

[44]) Dies ist zuerst von Herrn Thomae gezeigt worden, vgl. dessen „*Beitrag zur Theorie der Abelschen Funktionen*" in Bd. 75 von Crelles Journal für Math. (1872).

[45]) Vgl. hierzu auch S. 149—150 meiner Arbeit in Bd. 21 der Math. Annalen: „*Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie*" (1882) [= Abh. CIII in diesem Bande].

[46]) [Wie sich die Riemannsche Figur in concreto gestaltet, hat Wirtinger für $p=2$ in den Wiener Denkschriften, Bd. 85 (1909) näher ausgeführt.]

Es ist interessant, und ich ergreife gern die Gelegenheit, hierüber einige Angaben zu machen, daß der in Rede stehende Satz keineswegs mehr richtig bleibt, wenn man sich durchweg auf hyperelliptische Gebilde $p = 3$ beschränkt: läßt man die acht Verzweigungspunkte einer zweiblättrigen Fläche des Geschlechtes 3 (also die Moduln eines *hyperelliptischen* Gebildes $p = 3$) irgendwelche Wege beschreiben, durch die sie, einzeln oder in ihrer Gesamtheit, zu ihren Anfangslagen zurückgeführt werden, während sie eine ein für allemal auf der Fläche angebrachte Zerschneidung vor sich her schieben, so kann man dadurch keineswegs jede lineare Transformation der Perioden erzielen[47]). Vielmehr gelingt dies nur hinsichtlich derjenigen linearen Transformationen, die in bestimmter Weise modulo 2 zu kennzeichnen sind. Hierdurch zerfallen die linearen Transformationen, die es überhaupt gibt, in 36 modulo 2 unterschiedene Kategorien. Wir schließen daraus, *daß es auf der hyperelliptischen Fläche des Geschlechtes 3 36 verschiedene (hinsichtlich des hyperelliptischen Gebildes nicht gleichberechtigte) Arten kanonischer Querschnittsysteme gibt.* Auf meinen Wunsch hat sich Herr H. D. Thompson im Frühjahr 1888 damit beschäftigt, bei gegebener hyperelliptischer Fläche auf der von derselben doppelt überdeckten Ebene Zeichnungen für zweckmäßig gewählte Repräsentanten eines jeden dieser 36 Fälle herzustellen[48]). Diese Zeichnungen werden ganz übersichtlich; man hat in der Hauptsache nur zu unterscheiden, ob in der Ebene der Zeichnung durch den einzelnen Querschnitt die acht Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes in $2+6$ oder in $4+4$ zerlegt werden. Analytisch ist jede der hier unterschiedenen 36 Arten von Querschnittsystemen durch die Charakteristik gekennzeichnet, welche, bei Zugrundelegung derselben, der im vorliegenden Falle vorhandenen ausgezeichneten geraden Thetafunktion, deren Nullwert verschwindet, zuteil wird: je nach der Wahl des Querschnittsystems kann nämlich diese Thetafunktion jede beliebige der 36 überhaupt vorhandenen geraden Charakteristiken erhalten.

§ 16.

Adjunktion von Wurzelformen und zugehörigen Moduln der zweiten Stufe.

Wir führen jetzt neben die algebraischen Moduln erster Stufe (die Koeffizienten von f schlechthin) algebraische Moduln zweiter Stufe ein, indem wir gewisse auf der C_4 existierende Wurzelformen und die Relationen, durch welche dieselben miteinander verknüpft sind, in Betracht ziehen. [Wir steigen also in einen höheren Rationalitätsbereich auf.]

[47]) Dies bemerkt bereits Camille Jordan auf S. 364—365 seines *Traité des substitutions* (Paris 1870).

[48]) [Vgl. seine Göttinger Dissertation „*Hyperelliptische Schnittsysteme und Zusammenordnung der algebraischen und transzendenten Thetacharakteristiken*", abgedruckt im American Journal of Math., Bd. 15, 1893. K.]

Die allgemeine Theorie der auf einer kanonischen Kurve existierenden Wurzelformen wurde bereits in § 11 skizziert. Wir haben derselben zufolge bei Wurzelformen zweiter Stufe zwischen solchen von gerader und ungerader Ordnung zu unterscheiden. Von jeder Art gibt es 2^{2p}, bei der C_4 also 64 Systeme. Die 64 Systeme gerader Ordnung sind durch Elementarcharakteristiken, die Systeme ungerader Ordnung durch Primcharakteristiken festzulegen (§ 12). Entsprechend dem verschiedenartigen Verhalten dieser Charakteristiken gegenüber linearer Transformation (ebenda) spalten sich die 64 Systeme gerader Ordnung in $1+63$, die 64 Systeme ungerader Ordnung in $28+36$. Wir lesen ferner aus dem soeben (§ 15) entwickelten Satze von der Gleichberechtigung aller kanonischen Querschnittsysteme ab, daß die 63 Systeme, wie die 28, und die 36, je unter sich der C_4 gegenüber gleichberechtigt sind[49]). Wenn wir also in der Folge irgendeines der 63 Systeme, oder eines der 28, bez. der 36, adjungieren, so brauchen wir nicht zu unterscheiden, welches wir gewählt haben.

Ich werde den hiermit in abstrakter Gestalt mitgeteilten Sätzen weiterhin, wo es ohne Mißverständnisse geschehen kann, die übliche geometrische Form geben. Ich werde also nicht von *Berührungsformen* sprechen (durch die die Wurzelformen definiert sind), sondern von *Berührungskurven.* Dabei sollen die typischen Repräsentanten der Berührungskurven gerader Ordnung die *Berührungskegelschnitte* sein. In Übereinstimmung mit den allgemeinen Sätzen des § 11 besteht das eine System derselben aus den doppelt zählenden geraden Linien der Ebene, ist also zweifach unendlich; die anderen 63, unter sich gleichberechtigten Systeme sind je einfach unendlich. Als Repräsentanten der Berührungskurven ungerader Ordnung werden zumeist die *Berührungskurven dritter Ordnung* dienen. Ihre sämtlichen 64 Systeme sind dreifach unendlich. Ich nenne die 28 Systeme mit ungerader Charakteristik *Systeme der ersten Art*, die 36 Systeme gerader Charakteristik *Systeme der zweiten Art.* Berührungskurven erster Ordnung, d. h. *Doppeltangenten*, gibt es auf Grund des in § 14 berührten speziellen Umkehrtheorems nur im Falle ungerader Charakteristik. Die 28 dementsprechend zu unterscheidenden Doppeltangenten sind den 28 Systemen von Berührungskurven dritter Ordnung erster Art in der Weise einzeln zugeordnet, daß jedesmal die Doppeltangente zusammen mit einer beliebigen doppeltzählenden Geraden der Ebene eine Kurve dritter Ordnung des zugehörigen Systems bildet.

[49]) Mit dem algebraischen Nachweise dieser Gleichberechtigung beschäftigt sich neuerdings Herr Noether in den Abhandlungen der Münchener Akademie (Bd. XVII, 1889: *Zur Theorie der Berührungskurven der ebenen Kurve vierter Ordnung.*)

Zwecks Definition geeigneter Moduln zweiter Stufe werden wir [in der Folge] ausschließlich Berührungskurven ungerader Ordnung betrachten. Wir denken uns zu dem Zwecke eines ihrer 28 oder 36 Systeme adjungiert und die Gleichung der Kurve vierter Ordnung dementsprechend in die eine oder andere charakteristische Form gesetzt. *Die Moduln zweiter Stufe, welche wir weiterhin gebrauchen, sind nichts anderes als die in diesen Gleichungsform vorkommenden Konstanten.* Dabei ist es vielfach nützlich, das geometrische Bild zu wechseln. Den dreifach unendlich vielen Kurven entsprechend, welche in dem einzelnen Systeme von Berührungskurven dritter Ordnung enthalten sind, gibt es unter den zugehörigen Wurzelformen zweiter Stufe vier linear unabhängige. Als solche wähle ich

$$\sqrt{\Phi_1},\ \sqrt{\Phi_2},\ \sqrt{\Phi_3},\ \sqrt{\Phi_4}$$

und setze nun

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \sqrt{\Phi_1} : \sqrt{\Phi_2} : \sqrt{\Phi_3} : \sqrt{\Phi_4}\,. \tag{90}$$

Wir beziehen dadurch unsere C_4 auf eine *Raumkurve sechster Ordnung*. Je nach der Art des benutzten Systems unterscheiden wir Raumkurven sechster Ordnung der ersten oder der zweiten Art. An dieser Kurve sechster Ordnung werden sich dann die zuerst in der Ebene zu betrachtenden Konstruktionen in räumliche Konstruktionen umsetzen. Algebraisch entspricht dem, daß wir von ternären Invarianten zu quaternären schreiten.

Ich werde jetzt in dem hiermit bezeichneten Sinne die zweierlei Arten von Berührungskurven dritter Ordnung einzeln in Betracht ziehen.

§ 17.

Von den Berührungskurven dritter Ordnung erster Art.

Sei $D = 0$ eine Doppeltangente unserer C_4. Indem wir durch ihre Berühungspunkte einen Kegelschnitt $\Omega = 0$ legen, können wir die Gleichung der C_4 in folgende Gestalt setzen:

$$D\Phi - \Omega^2 = 0; \tag{91}$$

$\Phi = 0$ ist dabei, wie man sofort erkennt, eine Berührungskurve dritter Ordnung des zu D gehörigen Systems. Wir erhalten die sämtlichen Berührungskurven des Systems, indem wir schreiben:

$$\Phi + 2u_x\Omega + u_x^2 D = 0, \tag{92}$$

wo $u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$ und die u beliebig. Zum Beweise genügt es, (91) in die Gestalt zu setzen:

$$D(\Phi + 2u_x\Omega + u_x^2 D) - (\Omega + u_x D)^2 = 0. \tag{93}$$

Vermöge (92) ist also das ganze zu D gehörige System von Berührungskurven dritter Ordnung rational hinzuschreiben. Daher ist (91) eine der

beiden charakteristischen Gleichungsformen der C_4, die fortan festzuhalten sind: *Die Koeffizienten von D, Ω, Φ sind die Moduln zweiter Stufe, welche, dieser Gleichungsform entsprechend, als adjungiert gelten sollen.*

Die Zahl der so eingeführten Moduln ist 19, entgegen der Zahl 15 der Koeffizienten von f. Die erste Frage, über die wir uns bei Benutzung der neuen Moduln klar zu werden haben, ist daher die, welche Funktionen derselben überhaupt als Funktionen der Koeffizienten von f anzusehen sind. Es sind dies offenbar diejenigen, welche bei allen kontinuierlichen Änderungen der D, Ω, Φ, die f ungeändert lassen, selber ungeändert bleiben. Nun sind diese Abänderungen in Übereinstimmung mit (92), (93) durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{cases} D' = \lambda D, \\ \Omega' = \Omega + u_x D, \\ \Phi' = \dfrac{\Phi + 2u_x\Omega + u_x^2 D}{\lambda}, \end{cases} \tag{94}$$

wo λ, u_1, u_2, u_3 beliebig. Wir mögen hier insbesondere λ unendlich wenig verschieden von 1 und u_1, u_2, u_3 unendlich wenig verschieden von Null nehmen. Indem wir ausdrücken, daß eine Funktion der Koeffizienten von D, Ω, Φ bei den solchergestalt gewonnenen unendlich kleinen Transformationen ungeändert bleibt, erhalten wir ein System von vier linearen partiellen Differentialgleichungen, durch welches die von uns gesuchten Funktionen charakterisiert sind. Unter diesen Funktionen werden uns insbesondere solche interessieren, welche gegenüber linearen Transformationen der x_1, x_2, x_3 Invarianteneigenschaft besitzen. Ich bezeichne dieselben als *die, der Gleichungsform* (91) *entsprechenden, irrationalen Invarianten, bez. Kovarianten von f.*[50])

Von (91) ausgehend haben wir jetzt folgende vier linear unabhängige Wurzelformen unseres Systems

$$\sqrt{\Phi_1} = x_1\sqrt{D},\quad \sqrt{\Phi_2} = x_2\sqrt{D},\quad \sqrt{\Phi_3} = x_3\sqrt{D},\quad \sqrt{\Phi_4} = \sqrt{\Phi}. \tag{95}$$

Indem wir dieselben der Formel (90) entsprechend mit z_1, z_2, z_3, z_4 proportional setzen, erhalten wir im Raume der z eine Kurve sechster Ordnung, für welche die Gleichungen bestehen:

$$D(z_1, z_2, z_3)\cdot\Phi(z_1, z_2, z_3) - \Omega(z_1, z_2, z_3)^2 = 0, \tag{96}$$

$$\Phi(z_1, z_2, z_3) - 2\,\Omega(z_1, z_2, z_3)\cdot z_4 + D(z_1, z_2, z_3)\cdot z_4^2 = 0. \tag{97}$$

Hier stellt (97) eine Fläche dritter Ordnung vor, welche nur insofern partikularisiert ist, als sie durch die vierte Ecke des Koordinatentetraeders

[50]) [Vgl. die bereits oben S. 388 genannte Notiz in den Göttinger Nachrichten v. J. 1888. K.]

der z hindurchläuft; (96) ist der Umhüllungskegel vierter Ordnung, welcher sich von besagter Ecke an die Fläche legen läßt. Indem wir das hierin liegende Resultat von dem speziellen bei uns benutzten Koordinatensystem ablösen, haben wir: *Unsere Raumkurve sechster Ordnung kann definiert werden als die Berührungskurve, welche eine beliebige F_3 mit dem an sie von einem beliebigen ihrer Punkte auslaufenden Umhüllungskegel vierter Ordnung gemein hat*[51]).

Wir fragen, wie bei der so gewonnenen Raumfigur die 28 Doppeltangenten der C_4 zur Geltung kommen. Eben diese Frage hat Herr Geiser in Bd. 1 der Math. Annalen untersucht (*Über die Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierten Grades*, 1868). Es handelt sich um die 28 Doppeltangentialebenen des Kegels vierter Ordnung (96). Eine derselben ist von vornherein bekannt, das ist $D(z_1, z_2, z_3) = 0$, *die Tangentialebene der Fläche dritter Ordnung in der Kegelspitze*. Die anderen werden nach Geiser durch die 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung gegeben: *sie fallen mit denjenigen Ebenen zusammen, welche die Kegelspitze beziehungsweise mit den 27 Geraden der F_3 verbinden.* Von hier aus ergeben sich bekannte Vergleichspunkte zwischen der Theorie der 28 Doppeltangenten und derjenigen der 27 Geraden, auf die wir zum Teil noch weiter unten zurückkommen.

Wir führen jetzt die z in die Formeln (94) ein und erhalten:

$$z_1' = \lambda z_1, \quad z_2' = \lambda z_2, \quad z_3' = \lambda z_3,$$
$$z_4' = \frac{z_4 + u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3}{\lambda}.$$

Kombiniert man diese Formeln mit einer beliebigen linearen Transformation der z_1, z_2, z_3, so hat man die allgemeinste quaternäre lineare Transformation der z_1, z_2, z_3, z_4. Wir schließen daraus, daß wir die erwähnten irrationalen Invarianten, bez. Kovarianten der C_4 schlechtweg definieren können als *Invarianten, bez. Kovarianten des von der Fläche dritter Ordnung und dem auf ihr gegebenen Projektionspunkte gebildeten quaternären Systems.* —

Dies sind, was die Berührungskurven dritter Ordnung erster Art angeht, die Elemente, mit denen wir später zu arbeiten haben werden.

§ 18.

Von den Berührungskurven dritter Ordnung zweiter Art.

Unsere Kenntnis der Berührungskurven dritter Ordnung zweiter Art geht bekanntlich auf Hesse zurück (*Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Kurven vierter Ordnung*, Crelles Journal für Math., Bd. 49, 1855 [= Gesammelte Werke, Nr. 24, S. 319 ff.]; *Über Doppeltangenten der ebenen Kurven vierter Ordnung*, ebenda [= Gesammelte Werke, Nr. 25, S. 345 ff.]). Ich reproduziere sein Hauptresultat zunächst folgendermaßen (indem ich durchaus in der Ebene operiere):

[51]) Diese Berührungskurve liegt natürlich auf einer Fläche zweiten Grades [nämlich der Polaren der Kegelspitze]; aus (96), (97) findet sich für dieselbe

$$\Omega(z_1, z_2, z_3) - D(z_1, z_2, z_3) \cdot z_4 = 0.$$

Seien

$$\sqrt{\Phi_1}, \ \sqrt{\Phi_2}, \ \sqrt{\Phi_3}, \ \sqrt{\Phi_4}$$

vier linear unabhängige Wurzelformen eines Systems zweiter Art. Es ergibt sich dann der Satz, daß auch die Quadrate und Produkte dieser Formen, die wir, vermöge $f = 0$, rationalen Formen dritten Grades gleich setzen können:

$$(\sqrt{\Phi_1})^2 = \Psi_{11}, \ \sqrt{\Phi_1}\sqrt{\Phi_2} = \Psi_{12}, \ldots$$

linear unabhängig sind. Daher ist es möglich, die drei Polaren

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

aus den Ψ linear zusammenzusetzen, was durch folgende Formeln geschehen mag:

$$\text{(98)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \Sigma \alpha_{ik} \Psi_{ik}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \Sigma \beta_{ik} \Psi_{ik}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \Sigma \gamma_{ik} \Psi_{ik}.$$

Mit den solchergestalt gewonnenen Konstanten $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ bilde man jetzt die Linearformen

$$\text{(99)} \qquad \pi_{ik} = \alpha_{ik} x_1 + \beta_{ik} x_2 + \gamma_{ik} x_3.$$

Dann läßt sich die Gleichung der C_4 in Gestalt folgender symmetrischer Determinante schreiben:

$$\text{(100)} \qquad \begin{vmatrix} \pi_{11} & \cdot & \cdot & \pi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41} & \cdot & \cdot & \pi_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

die Ψ_{ik} aber werden den dreigliedrigen Unterdeterminanten dieser Determinante proportional, so daß das zugehörige System von Berührungskurven dritter Ordnung, unter c_1, c_2, c_3, c_4 willkürliche Konstante verstanden, durch die rationale Gleichung gegeben ist:

$$\text{(101)} \qquad \begin{vmatrix} \pi_{11} & \cdot & \cdot & \pi_{14} & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_3 \\ \pi_{41} & \cdot & \cdot & \pi_{44} & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.\text{[52])}$$

[52]) Ich schließe hier, weil sich in gegenwärtiger Abhandlung keine andere passende Stelle findet, eine Formel für die auf die Kurve vierter Ordnung bezogene, unserem

Hier sind nun die 30 *durch* (98) *eingeführten Größen* α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} *die von uns in Betracht zu ziehenden Moduln der zweiten Stufe.* Wir fragen uns wieder vor allen Dingen, welchen Bedingungen eine Funktion der neuen Moduln genügen muß, um eine Funktion der Koeffizienten von f zu sein. Diese Bedingungen ergeben sich fast unmittelbar aus (100) und lassen sich in folgender Weise formulieren: Man denke sich die ursprünglich gewählten vier Wurzelformen $\sqrt{\Phi_1}, \ldots, \sqrt{\Phi_4}$ irgendwie durch vier ihrer linearen Verbindungen, deren Determinante gleich Eins sein soll, ersetzt. Dann erleiden ebenfalls die zehn Größen Ψ_{ik} und also, nach (98), die α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} (jede dieser drei Größenreihen für sich genommen) eine bestimmte lineare Substitution. *Diejenigen und nur diejenigen Funktionen der* α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} *sind Funktionen der Koeffizienten von* f, *welche bei den sämtlichen solcherweise entstehenden linearen Substitutionen ungeändert bleiben.* Hiernach kann man ein System von 15 linearen partiellen Differentialgleichungen aufstellen, durch welches sich unsere Funktionen charakterisieren lassen. — Wieder mögen wir unter den so definierten Funktionen solche heraussuchen, welche gegenüber linearen Transformationen der x_1, x_2, x_3 Invarianteneigenschaft besitzen. Wir werden dieselben als *die zur Gleichungsform* (100) *gehörenden irrationalen Invarianten, bez. Kovarianten von* f bezeichnen.

Alle diese Beziehungen werden nun um vieles durchsichtiger, wenn wir der Formel (90) entsprechend, wie dies im vorliegenden Falle Hesse selbst bereits tat, raumgeometrische Vorstellungen einführen. Statt (90) können wir hier schreiben:

$$z_1^2 : z_1 z_2 : \ldots : z_4^2 = \Psi_{11} : \Psi_{12} : \ldots : \Psi_{44} .$$

Die Gleichungen (98) also ergeben die drei Flächen zweiten Grades:

$$(102) \qquad \sum \alpha_{ik} z_i z_k = 0 , \qquad \sum \beta_{ik} z_i z_k = 0 , \qquad \sum \gamma_{ik} z_i z_k = 0 ;$$

das Flächennetz, welches sich aus denselben zusammensetzen läßt, entspricht dem Netz der aus den Ausdrücken (98) zusammenzusetzenden

---

Berührungssysteme entsprechende gerade Thetafunktion $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}\left(\int_y^x\right)$ an, — eine Formel, welches das Seitenstück zu der unter (84) gegebenen für ungerade Thetafunktionen geltenden ist, sofern man letztere auf den Fall der ebenen Kurve vierter Ordnung einschränken will. Die neue Formel lautet:

$$\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}\left(\int_y^x\right) = \frac{k_1 \Sigma \alpha_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(y)} + k_2 \Sigma \beta_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(y)} + \ldots}{\sqrt{(k_1 \Sigma \alpha_{ik} \Psi_{ik}(x) + \ldots)(k_1 \Sigma \alpha_{ik} \Psi_{ik}(y) + \ldots)}} \cdot e^{\frac{1}{2} \sum \Pi_{x}^{x^{(i)}} {}_{y}^{y^{(i)}}} .$$

Hier bedeutet k_1, k_2, k_3 irgendwelchen Hilfspunkt der Ebene und die Summation im Exponenten ist über diejenigen Punkte x', x'', x''', bez. y', y'', y''' der Kurve zu erstrecken, welche, von x und y verschieden, der Verbindungslinie des k mit x, bez. y angehören.

Polaren der Kurve vierter Ordnung. *Daher entspricht der Kurve vierter Ordnung gemäß* (100) *im Raume die Kegelspitzenkurve sechster Ordnung des durch* (102) *gegebenen Flächennetzes.* Besonders einfach wird, was wir über die zu (100) gehörigen irrationalen Invarianten und Kovarianten der C_4 gesagt haben. Man betrachte die gemischt ternär-quaternäre Form:

$$(103) \qquad x_1 \sum \alpha_{ik} z_i z_k + x_2 \sum \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum \gamma_{ik} z_i z_k .$$

Es wird sich bei unseren Invarianten und Kovarianten um solche von (103) *abhängige Ausdrücke handeln, welche bei beliebigen linearen Substitutionen der* x *wie der* z *Invarianteneigenschaft besitzen, d. h. um Kombinanten des Flächennetzes im allgemeinsten Sinne.* Beschränken wir uns dabei auf gewöhnliche Invarianten oder Kovarianten von f, so müssen wir natürlich hinzufügen, daß in den betreffenden Ausdrücken keine z mehr vorkommen sollen.

Es erübrigt, daß wir zur Sprache bringen, wie sich die 28 Doppeltangenten unserer C_4 an der C_6 darstellen. Zu dem Zwecke müssen wir, mit Hesse, die acht Punkte, in denen sich die Flächen (102) schneiden, einzeln einführen. *Die* 28 *Verbindungslinien dieser* 8 *Punkte sind in gewissem Sinne das Bild der* 28 *Doppeltangenten.* Jede dieser Verbindungslinien erweist sich nämlich als eine Sekante der C_6, welche die C_6 in solchen zwei Punkten trifft, die vermöge (90) den Berührungspunkten der ebenen C_4 mit einer ihrer Doppeltangenten entsprechen.

§ 19.

Von der Diskriminante der C_4 und ihre Darstellung in den Rationalitätsbereichen erster und zweiter Stufe.

Eine ganz besondere Rolle spielt im folgenden die *Diskriminante* der C_4, d. h. diejenige Funktion ihrer Koeffizienten, deren Verschwinden das Auftreten eines Doppelpunktes der Kurve vierter Ordnung anzeigt. Wir müssen uns hier mit den Darstellungen beschäftigen, welche dieselbe in den von uns unterschiedenen Rationalitätsbereichen erster und zweiter Stufe findet.

Im Bereiche erster Stufe ist die Diskriminante definiert als diejenige rationale, ganze, homogene Funktion 27-ten Grades der Koeffizienten von f, die sich als Resultante der drei Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 , \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 , \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

bei Elimination der x_1, x_2, x_3 ergibt. Dieselbe ist eine Invariante vom Gewichte 36. Ich führe dabei gern an, daß es Herrn Gordan, einer brieflichen Mitteilung zufolge, neuerdings gelungen ist, die hier geforderte

Elimination wirklich durchzuführen. Sei f vorübergehend symbolisch $= a_x^4 = b_x^4 = c_x^4$. So geht Hr. Gordan von der Bemerkung aus, daß die folgende, von uns schon oben (in der Anmerkung zu Formel (52)) benutzte Kovariante:

$$(a\,b\,c)^2 \sum_{\varkappa+\lambda+\mu=2} a_x^{\lambda+\mu}\, b_x^{\mu+\varkappa}\, c_x^{\varkappa+\lambda}\, a_y^{\varkappa}\, b_y^{\lambda}\, c_y^{\mu},$$

unter x die Koordinaten eines Doppelpunktes der C_4 verstanden, für sämtliche Werte der y verschwindet. Dies gibt, indem wir die Koeffizienten $y_1^2, y_1 y_2, \ldots$ einzeln gleich Null setzen, sechs Gleichungen vierten Grades für die x_1, x_2, x_3, d. h. sechs lineare Gleichungen für die 15 Glieder 4-ter Dimension $x_1^4, x_1^3 x_2, \ldots$. Weitere 9 Gleichungen derselben Art erhält man aber, wenn man eine jede der drei bereits bekannten Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3 multipliziert. Aus den so gewonnenen 15 Gleichungen können wir jetzt die $x_1^4, x_1^3 x_2, \ldots$ als linear vorkommende Größen in elementarer Weise eliminieren. Das Resultat ist eine fünfzehnreihige Determinante, deren erste 6 Zeilen je dritten Grades in den Koeffizienten von f sind, während die neun folgenden in den Koeffizienten linear sind. Die Determinante ist also im ganzen 27-ten Grades in den Koeffizienten von f: sie ist mit der gesuchten Diskriminante ohne weiteres identisch, oder weicht doch nur, wenn wir letztere ihrem absoluten Werte nach bereits auf andere Weise definiert haben, von ihr um einen Zahlenfaktor ab, der uns hier gleichgültig ist. —

Wir wenden uns jetzt zu den beiden Rationalitätsbereichen der §§ 17 und 18.

Um mit dem ersten derselben zu beginnen, wollen wir unsere Untersuchung in der Weise geometrisch einleiten, daß wir fragen, wie man das von der Fläche dritter Ordnung und dem auf ihr liegenden Projektionspunkte gebildete System partikularisieren muß, damit der von dem Projektionspunkte an die Fläche gehende Umhüllungskegel vierter Ordnung eine Doppelkante erhält. Die Geiserschen Betrachtungen, auf welche wir bereits verwiesen, ergeben in dieser Hinsicht zwei und nur zwei Möglichkeiten: *Entweder muß die Fläche dritter Ordnung, von der wir ausgehen, selbst einen Doppelpunkt bekommen, oder es muß der Projektionspunkt, den wir benutzen, auf eine der 27 Geraden der Fläche rücken.* Im ersteren Falle verschwindet ein Ausdruck Σ, den wir als „Diskriminante der F_3" benennen können. Im anderen Falle wird Null erhalten, wenn wir in diejenige Kovariante neunter Ordnung der F_3, deren Verschwinden auf der F_3 die 27 Geraden festlegt, die Koordinaten des Projektionspunktes eintragen. Ich will den so bestimmten Ausdruck mit T

bezeichnen. Wir haben also für die Diskriminante der Kurve vierter Ordnung notwendig eine Darstellung folgender Form:

$$\text{Diskr.} = \Sigma^{\alpha}\,\mathsf{T}^{\beta}, \tag{104}$$

unter α, β noch zu bestimmende Multiplizitäten verstanden[53]).

Um α, β festzulegen, müssen wir jetzt genauer darauf eingehen, wie sich die Ausdrücke Σ und T aus den Koeffizienten von D, Ω, Φ aufbauen. Ich will dabei jeden einzelnen Ausdruck als eine Summe von Gliedern anschreiben, deren einzelnes in den Koeffizienten von D, Ω, Φ bez. homogen ist:

$$= S(\overset{l}{D}, \overset{m}{\Omega}, \overset{n}{\Phi}),$$

wo l, m, n resp. den Grad des einzelnen Gliedes in den Koeffizienten von D, Ω, Φ angeben sollen. Wir haben in dieser Hinsicht[54]):

1. Σ ist in den Koeffizienten unserer F_3 (97), deren Gleichung wir noch einmal hersetzen:

$$\Phi - 2\,\Omega z_4 + D z_4^2 = 0,$$

von der 32-ten Ordnung. Daher hat man für jedes einzelne Glied der Σ entsprechenden Summe S:

$$l + m + n = 32.$$

Ferner hat Σ das Gewicht $\frac{32 \cdot 3}{4} = 24$. Setzt man jetzt in die Gleichung der F_3 für z_4 λz_4, während z_1, z_2, z_3 ungeändert bleiben, so kommt dies darauf hinaus, für Φ, Ω, D beziehungsweise $\Phi, \lambda\Omega, \lambda^2 D$ zu schreiben. Hierbei soll Σ seinem Gewicht entsprechend den Faktor λ^{24} erhalten. Dies gibt für jedes Glied unseres S:

$$2l + m = 24.$$

Wir erhalten also für Σ folgende Darstellung:

$$\Sigma = S(\overset{l}{D}, \overset{24-2l}{\Omega}, \overset{8+l}{\Phi}). \tag{105}$$

2. T ist der leitende Koeffizient einer Kovariante unserer F_3, d. h. der Koeffizient der höchsten in dieser Kovariante auftretenden Potenz von z_4. Diese Kovariante hat in den Variabeln den Grad 9, in den Koeffizienten den Grad 11. Hiernach erhält man für die in der Entwicklung von T auftretenden Glieder:

$$l + m + n = 11, \quad 2l + m = \frac{33 - 9}{4} + 9 = 15.$$

---

[53]) Ich werde, um alle Mißverständnisse auszuschließen, die Diskriminante der C_4 in den Formeln immer ausführlich mit „Diskr." bezeichnen.

[54]) Vgl. die Angaben in Salmons Analytic Geometry of three dimensions, S. 503 ff. (ich zitiere auch weiterhin auf die vierte Auflage des Originals (vom Jahre 1882), die ich gerade zur Hand habe). [Vgl. daneben Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, Bd. II, 3. Aufl., 1880, wo S. 427 der Ausdruck für Σ und S. 429 der Ausdruck für T zu finden ist.]

Daher ist:

$$\mathsf{T} = S(\overset{l}{D},\ \overset{15-2l}{\Omega},\ \overset{-4+l}{\Phi}). \tag{106}$$

3. Die Diskriminante von $f = D\Phi - \Omega^2$ ergibt als Funktion 27-ten Grades der Koeffizienten von f eine Darstellung der folgenden Form:

$$\text{Diskr.} = S(\overset{l}{D},\ \overset{54-2l}{\Omega},\ \overset{l}{\Phi}). \tag{107}$$

Der Vergleich der Formeln (105)—(107) mit (104) ergibt jetzt mit Notwendigkeit für die in (104) noch unbestimmten Konstanten $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Wir haben also:

Im Rationalitätsbereiche zweiter Stufe der ersten Art setzt sich die Diskriminante der C_4 aus den in (105), (106) *näher definierten Bestandteilen Σ, T vermöge der Formel zusammen:*

$$\text{Diskr.} = \Sigma \cdot \mathsf{T}^2. \tag{108}$$

Hierbei sind, wie man beachten mag, Σ und T allein genommen, keineswegs Funktionen der Koeffizienten von f. Sie bleiben allerdings, vermöge ihrer quaternären Invarianteneigenschaft, bei denjenigen Operationen (94) ungeändert, welche $\lambda = 1$ entsprechen; setzt man aber, um zu den allgemeinen Operationen (94) aufzusteigen, hinterher $D' = \lambda D$, $\Omega' = \Omega$, $\Phi' = \frac{\Phi}{\lambda}$, so wird Σ den Faktor λ^{-8}, T den Faktor λ^{+4} erhalten; *erst das Produkt $\Sigma \cdot \mathsf{T}^2$ ist eine Funktion der Koeffizienten von f.* —

Wir betrachten ferner die Raumkurven sechster Ordnung zweiter Art. Dabei können wir uns etwas kürzer fassen, weil das Resultat, um welches es sich handelt, schon anderweitig bekannt ist[55]). Soll unsere Kurve vierter Ordnung einen Doppelpunkt erhalten, so zeigt sich, daß die 8 Grundpunkte des die Raumkurve sechster Ordnung definierenden Netzes von Flächen zweiter Ordnung eine von zwei besonderen Lagen annehmen müssen: *es müssen entweder zwei der acht Punkte zusammenfallen* (worauf die C_6 selbst einen Doppelpunkt erhält), *oder es müssen sich die Punkte zu vier und vier auf zwei Ebenen verteilen* (es muß im Flächennetz ein Ebenenpaar vorhanden sein, worauf die C_6 in die Durchschnittskante der beiden Ebenen und eine C_5 zerfällt). Beide Vorkommnisse werden durch das Verschwinden von Invarianten der ternär-quaternären Form (103) (von Kombinanten des Flächennetzes) ausgedrückt. Im ersteren Falle ist die betreffende Kombinante nichts anderes als die sogenannte Taktinvariante des Netzes; sie ist also solche in den α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} je vom 16-ten Grade; wir wollen sie hier mit S bezeichnen. Im zweiten Falle haben wir eine

[55]) Vgl. Salmon a. a. O. S. 208 ff., insbesondere S. 213. [Vgl. auch Salmon-Fiedler, Bd. I, 4. Aufl., 1898, S. 403 ff., insbesondere S. 406, 407.]

Kombinante zehnten Grades in den α_{ik}, wie in den β_{ik} und den γ_{ik}; sie soll T genannt werden. Nun ist die Diskriminante unserer C_4, mit Rücksicht auf die unter (100) gegebene Gleichungsform derselben, in den α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} zusammengenommen vom 108-ten Grade, also in den α_{ik}, wie in den β_{ik} oder in den γ_{ik} einzeln genommen vom Grade 36. Wir sprechen sofort das Resultat aus:

Im Rationalitätsbereiche zweiter Stufe der zweiten Art hat man eine ganz ähnliche Zerlegung der Diskriminante der C_4, wie oben unter (108); *es ist:*

$$\text{Diskr.} = S \cdot T^2. \tag{109}$$

Nur sind jetzt hier die beiden Faktoren S und T einzeln genommen bereits als Funktionen der Koeffizienten von f anzusehen. Denn hierzu ist es nach § 18 nicht nur erforderlich, sondern auch hinreichend, daß man es mit Kombinanten des Flächennetzes zu tun hat. Als Funktion der Koeffizienten von f hat S den Grad 12, T den Grad $7^1/_2$.

§ 20.

Über das Verhalten der Berührungkurven dritter Ordnung beim Auftreten eines Doppelpunktes.[56])

Wir bestätigen die Formeln (108), (109) und gewinnen zugleich die Grundlage für spätere Folgerungen, indem wir zusehen, wie sich die einzelnen Systeme von Berührungskurven dritter Ordnung der C_4 verhalten, wenn die C_4 einen Doppelpunkt bekommt. Zu dem Zwecke werden wir zunächst untersuchen, welchen Einfluß die Entstehung des Doppelpunktes auf die Thetamoduln $\tau_{\alpha\beta}$ hat, wobei uns aber gestattet sein wird, zwecks Definition der $\tau_{\alpha\beta}$ auf der zur C_4 gehörigen Riemannschen Fläche ein möglichst bequem gewähltes Schnittsystem zugrunde zu legen. In der Tat gewinnen wir auf dem hiermit angedeuteten Wege in einfachster Weise nicht nur die in Betracht kommenden Sätze über das Verhalten der Berührungskurven, sondern zugleich die Grundlage für unsere späteren die Thetafunktionen betreffenden Entwicklungen[57]).

[56]) [Vgl. bei diesem und den beiden folgenden Paragraphen, die „*Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunktionen*“ von Herrn Burkhardt. (Math. Annalen, Bd. 36 (1890), Bd. 38 (1891), Bd. 41 (1892/93)). Es sind dort Überlegungen ähnlicher Art, wie die im Texte für $p = 3$ gegebenen, für den Fall $p = 2$ mit großer Sorgfalt durchgeführt.]

[57]) [Die hier gebrauchte „Doppelpunktsmethode“, wie andrerseits den Übergang vom allgemeinen Gebilde zum hyperelliptischen, habe ich in meiner späteren Arbeit, in den Math. Annalen, Bd. 42, 1892 (bereits in Bd. 2 als Abh. XLII abgedruckt) vielfach angewandt. K.]

Um jetzt zunächst das in Rede stehende Schnittsystem zu definieren, denken wir uns die Riemannsche Fläche aus der Kurve vierter Ordnung durch Projektion von irgendeinem der Kurve selbst nicht angehörigen Punkte der Ebene aus abgeleitet, so daß wir eine vierblättrige Fläche mit 12 Verzweigungspunkten vor uns haben. Da sieht man dann ohne weiteres, wie das Entstehen eines Doppelpunktes der C_4 auf die Riemannsche Fläche wirkt. Der Erfolg ist der, daß zwei auf der Riemannschen Fläche durch einen Verzweigungsschnitt verbundene Verzweigungspunkte zusammenrücken und sich dadurch kompensieren. Ich will die Stelle, an der sich die beiden Verzweigungspunkte vereinigen, insofern sie dem einen der beiden ursprünglich verbundenen Blätter angehört, mit ξ, insofern sie dem anderen der beiden Blätter angehört, mit η bezeichnen. Durch das Zusammenrücken der beiden Verzweigungspunkte ist das p unserer Fläche auf Zwei herabgesunken. Wir werden jetzt die so erhaltene Fläche kanonisch zerschneiden, indem wir auf ihr nach den bekannten Regeln zwei Paare von Querschnitten: A_1, B_1 und A_2, B_2 herstellen, von denen indes keiner durch ξ oder η hindurchlaufen soll. Ist dies geschehen, so führen wir noch zwei Schnitte A_3, B_3, die folgendermaßen definiert sein sollen: A_3 führt vom Punkte η, ohne den A_1, B_1, A_2, B_2 irgendwie zu begegnen, zum Punkte ξ, B_3 umgibt den Punkt ξ (oder auch η, wenn wir es vorziehen sollten) in kleinem Kreise. Wir betrachten jetzt, was offenbar gestattet ist, dieses Schnittnetz $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ *als Grenzlage einer eben hierdurch definierten kanonischen Zerschneidung der ursprünglichen Fläche* $p=3$. Hinsichtlich der so gefundenen Zerschneidung führen wir dann auf der Fläche $p=3$ Normalintegrale erster Gattung ein, die uns bestimmte Thetamoduln $\tau_{\alpha\beta}$ liefern. Dann gehen wir wieder zur Fläche $p=2$ zurück und sehen, was dabei aus den Integralen erster Gattung und den $\tau_{\alpha\beta}$ wird.

Ich setze das allgemeine Schema der Formel (4) noch einmal her:

	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3
v_1	1	0	0	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}
v_2	0	1	0	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}
v_3	0	0	1	τ_{31}	τ_{32}	τ_{33}

Hier ändert sich nun, was die Integrale v angeht, beim Grenzübergang zur Fläche $p=2$ nur das, daß v_3 in ξ und η logarithmische Unstetigkeitsstellen erhält und also in ein Integral dritter Gattung übergegangen ist. In der Tat liefert die Überschreitung von A_3, d. h. die Umkreisung von ξ, für v_3 dem Schema entsprechend den Betrag 1; wir haben also $\frac{1}{2i\pi}$ als das zum Punkte ξ gehörige logarithmische Residuum von v_3 anzusehen.

Aber unser Schema schreibt gleichzeitig als Perioden von v_3 an A_1, A_2 bzw. 0, 0 vor. Nehmen wir beides zusammen, so werden wir, in der Grenze,

$$v_3 = \frac{1}{2i\pi}(\Pi_{\xi\eta}),$$

setzen dürfen, unter (Π) ein zur Fläche $p=2$ gehöriges im gewöhnlichen Sinne transzendent normiertes Integral dritter Gattung verstanden[58]). Dabei gehen nun, in Übereinstimmung mit Formel (6), $\tau_{13}=\tau_{31}$ und $\tau_{23}=\tau_{32}$ beziehungsweise in die wohlbestimmten Größen $v_1^{\xi\eta}$ und $v_2^{\xi\eta}$ über. Anders aber das τ_{33}. *Es ergibt sich, daß* $\tau_{33}=i\infty$ *wird.* Wir wollen in der Folge schreiben:

$$(110) \qquad q_{33} = e^{i\pi\tau_{33}}.$$

Wir haben dann:

Erhält die Kurve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so wird für das von uns gewählte Schnittsystem q_{33} *zu Null.*

Wir fragen jetzt nach dem zugehörigen Verhalten der Berührungskurven, gerader und ungerader Ordnung, die wir hier beide brauchen[59]). Wir wollen dabei, um möglichst einfache Sätze zu erhalten, dem gewöhnlichen Sprachgebrauche entgegen nur solche Kurven zur Kurve vierter Ordnung *adjungiert* nennen, welche eine *ungerade* Anzahl von Malen durch den Doppelpunkt der letzteren hindurchlaufen; alle anderen Kurven heißen nicht-adjungiert.

Um mit den Berührungskegelschnitten zu beginnen, so ist deren Theorie besonders zugänglich, weil wir das einzelne System derselben durch eine *Elementarcharakteristik* $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ festlegen können (§ 12). Seien a_1, a_2, a_3, a_4 die vier Schnittpunkte der C_4 mit einer geraden Linie, b_1, b_2, b_3, b_4 die Berührungspunkte eines dem System angehörigen Kegelschnittes, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_6$ die Perioden eines beliebigen Integrals erster Gattung, so ist die betr. Charakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ durch folgende Gleichung gegeben:

$$\int_{a_1}^{b_1} + \int_{a_2}^{b_2} + \int_{a_3}^{b_3} + \int_{a_4}^{b_4} = \frac{h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3 + g_1\omega_4 + g_2\omega_5 + g_3\omega_6}{2}$$

Dabei kommen von den möglichen Wertsystemen $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ allein die 63 in Betracht, welche von $\left|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right|$ verschieden sind. — Wir schließen jetzt, mit Rücksicht auf den angegebenen Wert von τ_{33}:

[58]) Ich habe dies zum ersten Male vorgetragen, als ich im Sommer 1874 über Abelsche Funktionen las.

[59]) Vgl. insbesondere Brill, „*Über die Anwendung der hyperelliptischen Funktionen in der Geometrie*", Crelles Journal für Math. Bd. 65 (1864), sodann die Erläuterungen, welche Herr Lindemann in Clebschs Vorlesungen über Geometrie auf S. 879, 880 des Bd. I (1876) gibt. Die im Texte gegebenen Theoreme scheinen in ihrer vollständigen Form neu zu sein.

Von den 63 Systemen von Berührungskegelschnitten, die bei der allgemeinen C_4 zu unterscheiden sind, erweisen sich, sobald die C_4 einen Doppelpunkt erhält, diejenigen 32, deren $g_3 = 1$ ist, als adjungiert, die anderen 31 (mit $g_3 = 0$) als nicht adjungiert.

Die nähere Untersuchung zeigt ferner, daß von den Kegelschnittsystemen der ersten Art immer diejenigen zwei identisch werden, deren Charakteristiken sich nur durch das h_3 unterscheiden; *es gibt also bei der C_4 mit Doppelpunkt nur 16 getrennte Systeme adjungierter Berührungskegelschnitte.*

Die Kegelschnittsysteme der anderen Art bleiben getrennt. Aber unter ihnen ist eines, welches unsere ganz besondere Aufmerksamkeit auf sich zieht. Es ist dies das System mit der Charakteristik

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Während nämlich die 30 übrigen nicht adjungierten Kegelschnittsysteme allgemein zu reden aus eigentlichen Kegelschnitten bestehen (unter denen sich nur einzelne Linienpaare finden), so ist dieses System in das Büschel der doppeltzählenden durch den Doppelpunkt laufenden Geraden ausgeartet. Insbesondere vertreten bei ihm die sechs vom Doppelpunkt an die Kurve auslaufenden Tangenten, jede dieser sechs Tangenten doppeltgezählt, die sechs Doppeltangentenpaare, welche der allgemeinen Theorie zufolge unter den Kegelschnitten jedes Berührungssystems vorhanden sein sollen. —

Wir beschäftigen uns jetzt des näheren mit den 28 Doppeltangenten. Jede einzelne derselben wird uns im allgemeinen Falle durch eine Primcharakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ festgelegt, die ungerade ist, d. h. für die

$$g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Erhält jetzt die C_4 einen Doppelpunkt, so müssen wir diejenigen 12 Doppeltangenten, für welche $g_3 = 0$ ist, von den anderen 16, für die $g_3 = 1$ ist, abtrennen. Wir finden:

Von den 12 Doppeltangenten mit $g_3 = 0$ fallen jedesmal diejenigen zwei, deren Charakteristiken sich nur durch das h_3 unterscheiden, miteinander zusammen und gehen dabei, indem sie adjungiert werden, in die 6 soeben genannten vom Doppelpunkte auslaufenden Tangenten über. — Die 16 Doppeltangenten mit $g_3 = 1$ verlaufen getrennt und nicht adjungiert.

Man beweist diese Sätze, indem man bemerkt, daß die Primcharakteristiken irgend zweier Doppeltangenten zusammenaddiert die Elementarcharakteristik gerade desjenigen Kegelschnittsystems ergeben müssen, unter

dessen Kegelschnitten das von den beiden Doppeltangenten gebildete Linienpaar als spezieller Fall enthalten ist.

Auf dieselbe Weise weiter schließend, sieht man, daß man allgemein bei den Berührungskurven ungerader Ordnung die Fälle $g_3 = 0$ und $g_3 = 1$ auseinanderzuhalten hat:

Von den Systemen mit $g_3 = 0$ fallen immer diejenigen zwei, die sich nur durch das h_3 unterscheiden, zusammen; die Systeme mit $g_3 = 1$ verlaufen getrennt.

Die sämtlichen Kurven der Systeme mit $g_3 = 0$ sind adjungiert, diejenigen der Systeme mit $g_3 = 1$ sind nicht adjungiert[60]).

Betrachten wir insbesondere Berührungskurven dritter Ordnung, so haben wir 32 Systeme mit $g_3 = 0$ und ebensoviele mit $g_3 = 1$. Wir unterschieden oben die Systeme mit ungerader und gerader Charakteristik als solche der ersten und der zweiten Art. Von den Systemen erster Art finden sich 12 unter den 32 mit $g_3 = 0$, die übrigen 16 unter den 32 mit $g_3 = 1$. Die entsprechenden Zahlen für Systeme zweiter Art sind 20 und 16. Unter den Systemen mit $g_3 = 0$ fallen selbstverständlich immer nur solche zwei zusammen, die derselben Art angehören. —

§ 21.

Neue Sätze über das Verhalten der Kurvendiskriminante.

Die im vorigen Paragraphen erhaltenen Sätze gestatten uns vor allen Dingen, die Theoreme über Diskriminantenzerlegung, die wir in § 19 erhielten, wesentlich zu vervollständigen.

Wir bemerken zunächst, daß jedesmal, wenn bei einer C_4 ein Doppelpunkt entsteht, eines der 63 Systeme zugehöriger Kegelschnitte ausgezeichnet ist. Nun sind, wie wir wissen, alle 63 Systeme an sich gleichberechtigt (§ 16). Daher schließen wir:

Adjungiert man[61]) *sämtliche Systeme von Berührungskegelschnitten, so zerfällt die Diskriminante der C_4 in 63 gleichberechtigte Faktoren.*

Wir könnten diesem Satze weiter nachgehen, indem wir bemerken, daß sämtliche Berührungskegelschnitte rational bekannt sind, wenn man die 28 Doppeltangenten einzeln kennt, daß man aber letzteres im Anschlusse an bekannte Untersuchungen von Aronhold erreichen kann, indem man von 7 Doppeltangenten als willkürlich gegeben ausgeht, usw.[62])

[60]) Das ist also genau umgekehrt wie bei den durch Elementarcharakteristiken festgelegten Systemen von Berührungskegelschnitten (oder von Berührungskurven gerader Ordnung überhaupt).

[61]) Im Galoisschen Sinne.

[62]) [Siehe Aronhold in den Berliner Monatsberichten v. J. 1864. Auch Riemann hat in seinen Vorlesungen von 1861/62 schon hierauf hingewiesen; vgl. die Angaben in Fußnote [7]) auf S. 392.]

Inzwischen würde uns dies zu sehr von dem speziellen Gegenstande unserer Untersuchung abführen. Vielmehr wende ich mich zu den Entwicklungen des § 19 zurück[63]).

Wir sind in § 19 von den Raumfiguren der § 17, 18 ausgegangen. Ich sage jetzt, *daß in jeder dieser beiden Raumfiguren die 63 Faktoren der Diskriminante, von den wir gerade sprechen, mit Leichtigkeit zu erkennen sind.*

Um mit der Kurve sechster Ordnung erster Art zu beginnen, so ist von vornherein klar, daß der Faktor T der Zerlegung (108) 27 der 63 Faktoren in sich begreift: besagt doch $\mathsf{T}=0$, daß der auf der Fläche dritter Ordnung bewegliche Projektionspunkt auf eine der 27 Geraden der Fläche gerückt ist. Aber ebenso lassen die bereits zitierten Geiserschen Entwicklungen erkennen, daß der andere Faktor der Zerlegung (108), also Σ, 36 von den 63 Möglichkeiten umfaßt. Denn wenn, dem Verschwinden von Σ entsprechend, die Fläche dritter Ordnung, mit der wir operieren, selbst einen Doppelpunkt bekommt, so wird dabei von den 36 Schläflischen Doppelsechsen, welche die Fläche trägt, immer eine ausgezeichnet, und jede dieser Doppelsechsen steht zu einer der Steinerschen „Gruppen" von 12 Doppeltangenten der C_4, d. h. zu einem der 63 Systeme von Berührungskegelschnitten der C_4, in ausschließlicher Beziehung. Zusammenfassend wollen wir schreiben:

$$(111) \qquad 63=(27)_{\mathsf{T}}+(36)_{\Sigma}.$$

In demselben Sinne werden wir jetzt für die Kurve sechster Ordnung zweiter Art erhalten:

$$(112) \qquad 63=(35)_{T}+(28)_{S}.$$

Es ist nämlich klar, daß die Bedingung $T=0$ (d. h. die Bedingung, unter der sich die acht Grundpunkte des Netzes von Flächen zweiter Ordnung zu vier und vier auf zwei Ebenen verteilen), sofern man die Doppeltangenten der C_4 und also die Grundpunkte des Netzes als einzeln bekannt ansieht, auf 35 verschiedene Weisen zu befriedigen ist

[63]) Ich muß hier speziell auf die Arbeiten der Herren Schottky und Frobenius über die Theorie der Kurven vierter Ordnung verweisen (Schottky, *Abriß einer Theorie der Abelschen Funktionen von 3 Variabeln* (Leipzig, 1880), Frobenius in den Bänden 98, 99, 103, 105 von Crelles Journal für Mathematik (1885—89)). Es ist nicht zu zweifeln, daß in diesen Arbeiten (wie schon vorher in Herrn Webers Schrift über die *Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht 3* (Berlin, 1876)) zahlreiche Formeln auftreten, welche mit den von mir im Texte gegebenen Entwicklungen, insbesondere auch denjenigen, die weiter unten über die Thetanullwerte mitgeteilt werden sollen, auf das innigste zusammenhängen. Inzwischen scheint es, daß die expliziten Theoreme, zu denen ich in einfachster Weise komme, als solche bisher nicht bekannt gewesen sind.

$\left(35=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\right)$, während die Forderung $S=0$ (daß zwei von den acht Grundpunkten zusammenfallen) genau entsprechend auf 28 Möglichkeiten führt $\left(28=\frac{8\cdot7}{1\cdot2}\right)$.

Wir verbinden diese Resultate jetzt mit den am Schluß des vorigen Paragraphen erhaltenen Sätzen.

Den letzteren zufolge zerfallen die 28 Systeme von Berührungskurven dritter Ordnung erster Art, die es gibt, sobald ein Doppelpunkt auftritt, in 12, welche adjungiert, und in 16, welche nicht adjungiert werden. Man halte jetzt ein einzelnes der 28 Systeme fest, lasse dafür aber den Doppelpunkt der Reihe nach entsprechend jeder einzelnen der 63 hierfür unterschiedenen Möglichkeiten auftreten. Dann wird $\frac{12\cdot63}{28}=27$ mal der Fall vorliegen, daß das gegebene System von Berührungskurven adjungiert verläuft, $\frac{16\cdot63}{28}=36$ mal wird es nicht adjungiert sein. Hiermit vergleiche man jetzt (111). Wir schließen:

Im ersteren Falle verschwindet das zum System der Berührungskurven gehörige T, *im zweiten Falle* Σ.

Wir machen jetzt die entsprechende Abzählung für die 36 Systeme von Berührungskurven dritter Ordnung zweiter Art. Von den 63 hinsichtlich der Entstehung des Doppelpunktes zu unterscheidenden Möglichkeiten müssen für das einzelne der 36 Systeme $\frac{20\cdot63}{36}=35$ zur Folge haben, daß das System adjungiert wird, $\frac{16\cdot63}{36}=28$, daß es nicht adjungiert wird. Der Vergleich mit (112) ergibt also:

Das eine Mal verschwindet das zum Systeme der Berührungskurven gehörige T, das andere Mal das S.

Wir werden diese beiden Ergebnisse jetzt so zu einem Satze zusammenfassen, daß wir die spezielle Zerschneidung der Riemannschen Fläche heranziehen, die im vorigen Paragraphen benutzt wurde. Wir haben dann:

Erhält die Kurve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so verschwindet für diejenigen ihr zugehörigen Raumkurven sechster Ordnung, deren im Sinne von § 20 bestimmte Charakteristik $g_3=0$ aufweist, T *beziehungsweise T; für die anderen Raumkurven, deren Charakteristiken $g_3=1$ enthalten, verschwindet* Σ *beziehungsweise S.*

Noch wollen wir genauer angeben, wie stark in jedem Falle der einzelne Diskriminantenfaktor, beziehungsweise die Diskriminante selbst verschwindet. Wir wollen uns dabei auf die bekannten Verhältnisse des elliptischen Falles beziehen. Ich will letzteren in gewöhnlicher Weise durch eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit vier Verzweigungspunkten vorgestellt sein lassen, von denen jetzt, dem Ansatze des § 20 entsprechend, zwei zusammenrücken mögen. Wir denken uns auf dieser Fläche das den Vorschriften des § 20 entsprechende kanonische Querschnittsystem konstruiert. Wir finden dann, daß in der Grenze das zugehörige τ gleich $i\infty$ wird, so daß $q = e^{i\pi\tau}$ verschwindet. Nun kennen wir aber von anderer Seite (aus der Theorie der elliptischen Funktionen) für das aus den Argumenten der vier Verzweigungspunkte zu bildende Differenzenprodukt eine nach Potenzen von q fortschreitende Reihe, aus der wir erfahren, daß besagtes Differenzenprodukt im Grenzfalle ebenso stark wie q selbst verschwindet. Wir übertragen jetzt dieses Resultat auf die vierblättrige, mit zwölf Verzweigungspunkten ausgestattete Riemannsche Fläche des § 20. Dann tritt an Stelle des q das q_{33} (110), und wir finden, daß das Differenzenprodukt der Argumente der zwölf Verzweigungspunkte, sobald die Kurve vierter Ordnung einen Doppelpunkt erhält, wie q_{33} selber verschwindet. Jetzt erheben wir unser Differenzenprodukt ins Quadrat und erhalten so einen Ausdruck, dessen wesentlicher, hier allein in Betracht zu ziehender Faktor die Diskriminante der Kurve vierter Ordnung ist. Daher haben wir den wichtigen Satz:

Erhält die Kurve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so verschwindet die zugehörige Diskriminante bei Zugrundelegung des in § 20 definierten Schnittsystems wie q_{33}^2.

Dieses Resultat überträgt sich dann sofort, vermöge (108), (109) auf die einzelnen Diskriminantenfaktoren Σ, T, bez. S, T. *Insbesondere werden* Σ *und* S, *wenn sie verschwinden* (d. h. wenn das g_3 der im Sinne von § 20 in Betracht kommenden Charakteristik gleich 1 ist) *immer auch verschwinden wie* q_{33}^2.

§ 22.

Erneute Inbetrachtnahme der Thetafunktionen.

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel, um bei der Kurve vierter Ordnung die in § 13 aufgestellten Formeln wesentlich zu vervollständigen. Bei der Wertbestimmung der Theta sind damals die multiplikativen Konstanten durchaus unbestimmt geblieben. Wir nehmen uns jetzt vor, dieselben bei der Kurve vierter Ordnung jedenfalls so weit festzulegen, als sie von den Koeffizienten der Kurve abhängen: der numerische Bestandteil, der dann noch zu bestimmen bleibt, wird durch Grenzübergang zu niederen Fällen zu eruieren sein. Und zwar werden wir die Frage in der Weise anfassen, daß wir geradezu das Glied niederster Dimension in der nach Potenzen der v_1, v_2, v_3 (oder, was dasselbe ist, in der nach Potenzen der w_1, w_2, w_3) fortschreitenden Reihenentwicklung der Thetafunktionen zu

bestimmen suchen. Hieran reiht sich dann naturgemäß als letzte von uns zu behandelnde Aufgabe die Frage nach den Gliedern höherer Dimension dieser Entwicklung. Und hier, zum Schluß der gegenwärtigen Abhandlung, wird es von Vorteil, für den allgemeinen Fall $p = 3$ diejenigen Funktionen in die Betrachtung einzuführen, die man nach Analogie des elliptischen und des hyperelliptischen Falles als *Sigmafunktionen* bezeichnen wird.

Es handelt sich, wie man sieht, in den folgenden Paragraphen um dieselben Fragestellungen, die ich für hyperelliptische Funktionen in den §§ 11—14 meiner Arbeit in Bd. 32 der Math. Annalen [= Nr. XCVI dieser Ausgabe] behandelt habe. Inzwischen ist der Ausgangspunkt hier und dort ein wesentlich verschiedener. Ich hatte mir damals die Aufgabe gestellt, vom algebraischen Gebilde beginnend auf synthetischem Wege zu den Sigmafunktionen und deren Reihenentwicklung zu gelangen; der Übergang zu den ϑ geschah erst hinterher und mehr beiläufig. Hier dagegen erscheinen die ϑ als das von vornherein Gegebene; es sind ganz wesentlich ihre Eigenschaften, die uns interessieren; die σ erscheinen nur zum Schlusse bei der Durchführung der Potenzentwicklung. Hiermit hängt zusammen, daß ich damals den Wert der bei den ϑ auftretenden multiplikativen Konstanten C kurzweg ohne Beweis angab [S. 383 in diesem Bande], während die Festlegung dieser Konstanten jetzt als ein Hauptpunkt der Entwicklung erscheint, dem wir die nächsten beiden Paragraphen ausschließlich widmen.

Was Untersuchungen anderer Mathematiker angeht, die hier in Betracht kommen, so hat Riemann bekanntlich in der schon oben genannten Nr. 25 seiner Abelschen Funktionen darauf hingewiesen, daß die Bestimmung der fraglichen Konstanten auf rechnerischem Wege durch Umformung derjenigen Differentialgleichungen muß gefunden werden können, denen die ϑ bezüglich der v und der τ genügen. Dieser Weg ist dann für den Fall der hyperelliptischen Funktionen von Herrn Thomae wenigstens betreffs der einfachsten bei denselben in Betracht kommenden Thetafunktionen durchgeführt worden[64]), und ich füge gern an, daß in seiner demnächst erscheinenden Göttinger Dissertation Herr Schröder die analogen Betrachtungen für die höheren hyperelliptischen Theta zum Abschluß bringt[65]). Es haben sich ferner die Herren Thomae[66]) und Fuchs[67])

[64]) Crelles Journal für Math., Bd. 71 (1870): *Beitrag zur Bestimmung von* $\vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ *durch die Klassenmoduln algebraischer Funktionen.*

[65]) [Vgl. das genauere Zitat in Fußnote [19]) auf S. 384 dieses Bandes.]

[66]) Crelles Journal für Math., Bd. 66 (1866): *Bestimmung von* $d \log \vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ *durch die Klassenmoduln.*

[67]) Crelles Journal für Math., Bd. 73 (1871): *Über die Form der Argumente der Thetafunktionen und über die Bestimmung von* $d \log \vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ *als Funktion der Klassenmoduln.* [= Ges. Math. Werke, Bd. I, Nr. XIII.]

mit der Aufgabe beschäftigt, bei allgemeineren algebraischen Gebilden den von Riemann geforderten Ausdruck für $d \log \vartheta(0, 0, \ldots, 0)$ zu berechnen. Herr Thomae hat später auch die Integration dieses Ausdrucks in Betracht gezogen[68]), wobei er sich eines funktionentheoretischen Ansatzes bedient, der, allgemein gesagt, darauf hinauskommt, die Konstanten der Riemannschen Fläche als veränderliche Größen zu betrachten. Letzteres ist, wie man bemerkt, derselbe Gedanke, der dem ganzen zweiten Abschnitte der gegenwärtigen Abhandlung zugrunde liegt und der uns nun in der Tat bei der hier vorliegenden Frage, was den allgemeinen Fall $p = 3$ angeht, zu einfachen Schlußresultaten leiten soll. Mein Ansatz ist dabei insofern einfacher als der von Herrn Thomae, als ich mich überhaupt nicht mit der Differentialformel für $d \log \vartheta(0, 0, 0)$ beschäftige, [oder mit irgendwelchen inhomogenen Thetarelationen operiere] sondern die Wertbestimmung des $\vartheta(0, 0, 0)$, bez. der anderen, neben $\vartheta(0, 0, 0)$ in Betracht kommenden Konstanten direkt in Angriff nehme (so daß also mit meinen Entwicklungen zugleich eine vereinfachte Bestimmung der betreffenden Konstanten der hyperelliptischen und elliptischen Theorie gegeben ist). Aber der wesentliche Unterschied liegt in der Wahl der veränderlichen Größen, durch die wir die einzelne Riemannsche Fläche festlegen. Während ich nämlich als solche durchweg die Koeffizienten der C_4, beziehungsweise die in § 17, 18 definierten Moduln zweiter Stufe verwende, benutzt Herr Thomae die komplexen Argumente der Verzweigungspunkte, die bei der von ihm zugrunde gelegten Riemannschen Fläche auftreten. An dieser Wahl geeigneter Variablen, die sich genau dem jeweils in Betracht kommenden Rationalitätsbereiche anpassen, hängt der ganze Erfolg der weiterhin zu gebenden Entwicklungen. Dabei bewährt sich wieder das Prinzip der homogenen Veränderlichen. Denn die Schlußformeln, um die es sich handelt, würden sich unnötig kompliziert darstellen, wenn man nicht die bei uns vorkommenden Koeffizienten selbst, sondern irgendwelche aus ihnen zu bildende Quotienten als Variable zugrunde gelegt hätte[69]).

Ich will doch, ehe ich weitergehe, das Prinzip der in Rede stehenden funktionentheoretischen Schlußweise klar formulieren, und dies um so mehr, als ich mich weiterhin, bei den einzelnen Anwendungen, der Kürze halber gezwungen sehe, immer nur die Prämissen der einzelnen Schlüsse und dann gleich die Resultate zu geben. Man denke sich die Gesamtheit der von

[68]) Crelles Journal für Math., Bd. 75 (1873): *Beitrag zur Theorie der Abelschen Funktionen.*

[69]) Herr Thomae ist seinerseits neuerdings auf den Fall $p = 3$ zurückgekommen (in den Sächsischen Berichten von 1887: *Bemerkungen über Thetafunktionen vom Geschlecht 3*).

den 15 Koeffizienten der C_4 anzunehmenden Wertsysteme unter dem Bilde eines 15-fach ausgedehnten Raumes. Innerhalb desselben werden die Koeffizienten solcher Kurven vierter Ordnung, welche einen gewöhnlichen Doppelpunkt besitzen, durch eine 14-fach ausgedehnte algebraische Mannigfaltigkeit vertreten sein: denjenigen C_4 dagegen, welche höhere Singularitäten oder singuläre Punkte in höherer Zahl besitzen, werden algebraische Mannigfaltigkeiten von höchstens 13 Dimensionen entsprechen; die Zahl der verschiedenen derart in Betracht zu ziehenden Mannigfaltigkeiten ist notwendig endlich. Alle Schlüsse über die Natur der darzustellenden Funktionen werden nun gemacht, indem wir diese sämtlichen höchstens 13-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten schlechtweg beiseite lassen, in der Weise, daß wir jedesmal solche zwei Funktionen identisch setzen, von denen wir wissen, daß sie sich an sämtlichen Stellen, die jenen höchstens 13-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten *nicht* angehören, gleichartig verhalten.

Es erübrigt, daß ich die speziellen Grundlagen des angewandten Verfahrens angebe. Dieselben werden zunächst von den Sätzen gebildet, die Riemann in seiner Abhandlung über das Verschwinden der Theta gab[70]), beziehungsweise von den Folgerungen, welche Herr Weber aus diesen Sätzen gezogen hat (in der schon oben genannten Abhandlung in Bd. 13 der Math. Annalen (1878): *Über gewisse in der Theorie der Abelschen Funktionen auftretende Ausnahmefälle*). Aus denselben folgt nämlich, was die Voraussetzung aller weiteren Schlüsse ist, daß bei keiner der 64 zu einer singularitätenfreien C_4 gehörigen Thetafunktionen das erste Glied der nach Potenzen der v_1, v_2, v_3 fortschreitenden Entwicklung identisch verschwinden kann. Hierüber hinaus aber benutzen wir *das Verhalten der ϑ gegenüber linearer Periodentransformation*. Ich will hier die Fundamentalformel für die lineare Transformation der ϑ in einer Form hersetzen, in der Herr Thomae dieselbe im 75. Bande von Crelles Journal für Mathematik (a. a. O.) entwickelt hat. Es sei p_{123} die unter (88) eingeführte Periodendeterminante; v', τ', p'_{123}, g', h' seien die transformierten Werte der v, τ, p_{123}, g, h; M bezeichne den Quotienten:

$$M = \frac{p_{123}}{p'_{123}}. \tag{113}$$

Dann hat man

$$\frac{\vartheta_{\left|\substack{g'\\h'}\right|}(v', \tau')}{\sqrt{p'_{123}}} = j_{\left|\substack{g\\h}\right|} \cdot \frac{\vartheta_{\left|\substack{g\\h}\right|}(v, \tau)}{\sqrt{p_{123}}} \cdot e^{-i\pi\left(\frac{\partial \log M}{\partial \tau_{11}} v_1^2 + \frac{\partial \log M}{\partial \tau_{12}} v_1 v_2 + \cdots\right)}, \tag{114}$$

unter $j_{\left|\substack{g\\h}\right|}$ eine von der Charakteristik abhängige achte Einheitswurzel verstanden, deren besonderer Wert für uns nicht in Betracht kommt.

[70]) [Vgl. auch seine Vorlesung von 1861/62. K.]

§ 23.

Das Produkt der Nullwerte der 36 geraden Thetafunktionen.

Wir betrachten jetzt zunächst, wieder im Anschlusse an Thomae, Crelles Journal, Bd. 75, das durch p_{123}^{18} dividierte Produkt der Nullwerte der 36 geraden Thetafunktionen, oder vielmehr, um Formel (114) bequem anwenden zukönnen, die achte Potenz des so definierten Ausdrucks, d. h.

$$(115)\qquad \frac{\prod\limits_{1}^{36} \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(000)^8}{p_{123}^{144}},$$

Nach Formel (114) ändert sich dieser Ausdruck bei linearer Transformation der Perioden überhaupt nicht, ist also eine eindeutige Funktion der Koeffizienten von f. Die $\vartheta(0,0,0)$ sind in diesen Koeffizienten homogen vom 0-ten Grade, p_{123} ist vom Grade -3. Der Grad unseres Ausdrucks ist also $+432$.

Es handelt sich jetzt darum, diesen Ausdruck, wenn möglich, als rationale Funktion der Koeffizienten von f darzustellen.

Zu dem Zwecke müssen wir uns zunächst damit beschäftigen, zu untersuchen, wie sich die 36 zu f gehörigen geraden Thetafunktionen beim Entstehen eines Doppelpunktes verhalten. Wir dehnen diese Untersuchung, da es ohne Mühe geschieht und wir das Resultat später doch brauchen, gleich mit auf die 28 ungeraden Thetafunktionen aus. Indem wir über die Formeln der linearen Periodentransformation verfügen, durch welche wir von jedem beliebigen kanonischen Querschnittsystem zu jedem anderen übergehen können, so dürfen wir bei dieser Untersuchung irgendwelche bequem gewählte Zerschneidung der Riemannschen Fläche zugrunde legen. Als solche benutzen wir jetzt die in § 20 gegebene, vermöge deren die Argumente v, τ der Thetafunktionen beim Eintreten des Doppelpunktes keine andere Änderung erlitten, als daß τ_{33} gleich $i\infty$ wurde, so daß $q_{33} = e^{i\pi\tau_{33}}$ verschwand. Wir verfahren hiernach einfach so, daß wir $q_{33} = 0$ in die 64 Thetareihen eintragen. So ergibt sich ein Resultat, dessen Übereinstimmung mit dem in § 20 (gegen Ende des Paragraphen) für die Berührungskurven dritter Ordnung abgeleiteten auf der Hand liegt. Wir finden:

Diejenigen 32 *Theta, deren* $g_3 = 0$ *ist* (die also adjungierten Berührungskurven dritter Ordnung entsprechen), *fallen paarweise zusammen, indem sie in die* 16 *Thetareihen des Falles* $p = 2$ *übergehen, die anderen* 32 (welche den nicht adjungierten Berührungskurven dritter Ordnung korrespondieren) [*erhalten einen verschwindenden Faktor.*]

Wir werden bei den 32 ϑ der letzteren Kategorie unter den Gliedern der Reihenentwicklung jetzt diejenigen heraussuchen, die am schwächsten

verschwinden. *Es ergibt sich, daß dieselben alle den Faktor* $q_{33}^{1/4}$ *besitzen.* Betrachten wir q_{33} als unendlich kleine Größe, so werden wir dementsprechend in erster Annäherung setzen dürfen:

$$(116)\qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix}\right|}(v,\tau) = q_{33}^{1/4}\cdot \bar{\vartheta}_{\left|\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix}\right|}(v,\tau).$$

Hier ist $\bar{\vartheta}_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ ein solches Grenztheta, wie es schon in den Untersuchungen von Rosenhain auftritt und später von Clebsch und Gordan vielfach bei der Behandlung ebener Kurven mit Doppelpunkt gebraucht wurde[71]). Die Definition dieser $\bar{\vartheta}_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ wird durch die Reihe gegeben:

$$(117)\qquad \bar{\vartheta}_{\left|\begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix}\right|}(v,\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n_2} \left(e^{i\pi\left(v_3+\frac{h_3}{2}\right)}\cdot E_1 + e^{-i\pi\left(v_3+\frac{h_3}{2}\right)}\cdot E_2 \right),$$

wo:

$$E_1 = e^{i\pi\left(\sum\limits_1^2{}_\alpha \sum\limits_1^2{}_\beta \left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta+\frac{g_\beta}{2}\right)\tau_{\alpha\beta} + \sum\limits_1^2{}_\alpha \left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\tau_{\alpha 3} + 2\sum\limits_1^2{}_\alpha \left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(v_\alpha+\frac{h_\alpha}{2}\right)\right)}$$

$$E_2 = e^{i\pi\left(\sum\limits_1^2{}_\alpha \sum\limits_1^2{}_\beta \left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(n_\beta+\frac{g_\beta}{2}\right)\tau_{\alpha\beta} - \sum\limits_1^2{}_\alpha \left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\tau_{\alpha 3} + 2\sum\limits_1^2{}_\alpha \left(n_\alpha+\frac{g_\alpha}{2}\right)\left(v_\alpha+\frac{h_\alpha}{2}\right)\right)};$$

ich teile dieselbe hier mit, damit man sich überzeugt, was wir später brauchen werden, daß die $\bar{\vartheta}$ ebenso wie die ϑ ganze Funktionen der v_1, v_2, v_3 sind.

Wir kehren jetzt zu den Nullwerten der geraden Theta zurück. Bezüglich derselben werden wir sofort sagen:

Sobald die C_4 *einen Doppelpunkt erhält, werden von den* 36 *geraden Thetanullwerten* 16 *Null wie* $q_{33}^{1/4}$, *die übrigen* 20 *bleiben von Null verschieden.*

Nun wird, sofern wir an dem besonderen in § 20 eingeführten Querschnittsystem festhalten, die Periodendeterminante p_{123} von dem Entstehen eines Doppelpunktes überhaupt nicht in Mitleidenschaft gezogen. Wir haben daher:

Unser Produkt (115) *verschwindet beim Entstehen eines Doppelpunktes wie* q_{33}^{32}.

Jetzt ziehen wir den Satz heran, den wir der Riemannschen Abhandlung über das Verschwinden der Thetafunktionen in § 22 gegen Schluß entnahmen. Derselbe besagt für die hier in Betracht kommenden Thetanullwerte, daß keiner derselben verschwinden kann, solange die Kurve vierter Ordnung keinen Doppelpunkt (oder höheren singulären Punkt) bekommt. Das gleiche wird also auch für unser Produkt (115) gelten.

[71]) *Abelsche Funktionen*, S. 270ff. (das Kapitel vom „erweiterten" Umkehrproblem), Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, Bd. I, 1876 S. 867ff.

Hiermit haben wir aber, bei unserem Produkte, lauter Eigenschaften, welche gleicherweise der 16-ten Potenz der Kurvendiskriminante zukommen. In der Tat, die 16-te Potenz der Diskriminante ist in den Koeffizienten von f vom Grade 432, sie verschwindet (nach § 21) beim Entstehen eines Doppelpunktes wie q_{33}^{32}, sie wird gewiß nicht Null, solange kein Doppelpunkt vorliegt. Und nun tritt die Schlußweise, von der wir im vorigen Paragraphen handelten, in ihr Recht.

Wir schließen, *daß unser Produkt bis auf einen konstanten Faktor mit der 16-ten Potenz der Diskriminante übereinstimmt.* Wir wollen hier noch beiderseits die achte Wurzel ziehen. *Dann haben wir, unter c eine numerische Konstante verstanden:*

$$(118)\qquad \prod_1^{36} \vartheta_{\left|{g \atop h}\right|}(0,0,0) : p_{123}^{18} = c\cdot \text{Diskr.}^2 \text{ [72]})$$

Die Fragestellung, von der wir zu Anfang dieses Paragraphen ausgingen, ist damit vollständig beantwortet. Nebenbei folgt, daß das Produkt der 36 in (114) definierten, auf gerade Charakteristiken $\left|{g \atop h}\right|$ bezüglichen achten Einheitswurzeln $j_{\left|{g \atop h}\right|}$ allemal der Einheit gleich ist [73]).

§ 24.

Das Anfangsglied in der Reihenentwicklung des einzelnen ϑ.

Wir haben das Produkt des vorigen Paragraphen vorab betrachtet, weil bei ihm die Schlußweise, auf die es ankommt, innerhalb des Rationalitätsbereiches erster Stufe zur Geltung gelangt. Indem wir uns jetzt dazu wenden, durch entsprechende Betrachtungen das Anfangsglied in der Reihenentwicklung der einzelnen ϑ festzulegen, haben wir uns je in einem derjenigen Rationalitätsbereiche zweiter Stufe zu bewegen, die in § 17, 18 eingeführt wurden. Übrigens sind die hier zu ziehenden Schlüsse durch die Entwicklungen des § 21 auf das beste vorbereitet.

Beginnen wir mit dem geraden Theta. Bei ihnen wird es sich um die algebraische Bestimmung des einzelnen

$$\vartheta_{\left|{g \atop h}\right|}(0,0,0) : \sqrt{p_{123}}$$

---

[72]) [Die numerische Konstante c bleibt notwendig unbestimmt, solange die in Betracht kommenden Diskriminanten selbst nur bis auf einen unbestimmten Faktor definiert sind. Das gleiche gilt von den später auftretenden Konstanten c' und c''. K.]

[73]) Formel (118) dehnt sich mit Leichtigkeit auf $p=4$ aus. Die Normalkurve der φ ist bei $p=4$ im dreidimensionalen Raume als Durchschnitt einer F_2 und einer F_3 gegeben. Nun sei Δ die Determinante der F_2, T die Taktinvariante von F_2 und F_3. Dann kommt für das Produkt der Nullwerte der zugehörigen 136 geraden Thetafunktionen:

$$\prod_1^{136} \vartheta_{\left|{g \atop h}\right|}(0,0,0,0) : p_{1234}^{68} = c\cdot\Delta^2\cdot T^8.$$

handeln. Nach Formel (114) ist die achte Potenz dieser Größe innerhalb desjenigen Rationalitätsbereiches zweiter Stufe, der die gerade Charakteristik $\left|{g \atop h}\right|$ trägt, eindeutig. Dabei ist sie (wegen des p_{123}) von der 12-ten Dimension in den Koeffizienten von f. Und wie ist es mit ihrem Verschwinden? Sie verschwindet, dem Riemannschen Satze zufolge, gewiß nicht, solange die Kurve vierter Ordnung keinen Doppelpunkt besitzt; erhält aber die C_4 einen solchen, so verschwindet sie dann und nur dann, wenn ihre auf das Querschnittsystem des § 20 bezogene Charakteristik $g_3 = 1$ aufweist; sie verschwindet in einem solchen Falle wie das Quadrat des zugehörigen q_{33}. Alle diese Eigenschaften kommen aber genau so dem in Formel (109) auftretenden Diskriminantenfaktor $S_{\left|{g \atop h}\right|}$ zu (wir setzen demselben hier, um uns völlig genau ausdrücken zu können, die Charakteristik $\left|{g \atop h}\right|$ als Index hinzu). *Wir schließen also, daß, unter c' eine geeignete numerische Konstante verstanden, die folgende Formel statthat:*

$$(119)\qquad \vartheta_{\left|{g \atop h}\right|}(0,0,0) : \sqrt{p_{123}} = c'\sqrt[8]{S_{\left|{g \atop h}\right|}}.$$

Hiermit ist der Fall der geraden ϑ erledigt.

Wenden wir uns jetzt zu den ungeraden ϑ. Um keine Lücke zu lassen, will ich zunächst aus (84) die allgemeine Form des ersten Gliedes ihrer Reihenentwicklung ableiten. Wir wollen dabei zwecks besseren Anschlusses an die jetzt gebrauchte Bezeichnung das dort vorkommende $\varphi_{\left|{g \atop h}\right|}$ durch das gleichbedeutende $D_{\left|{g \atop h}\right|}$ ersetzen, sodaß wir die Formel haben

$$\vartheta_{\left|{g \atop h}\right|}\left(\int_y^x\right) = C\cdot\sqrt{D_{\left|{g \atop h}\right|}(x)\cdot D_{\left|{g \atop h}\right|}(y)}\cdot\Omega(x,y).$$

Hier schreibe man jetzt $x = y + dy$. Dann entsteht rechter Seite, indem wir die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung weglassen:

$$C\cdot D_{\left|{g \atop h}\right|}(y)\cdot d\omega_y.$$

Aber die Integrale w_1, w_2, w_3 sind unter gleicher Voraussetzung:

$$w_1 = y_1 d\omega_y,\quad w_2 = y_2 d\omega_y,\quad w_3 = y_3 d\omega_y.$$

Der Anfangsterm in der Reihenentwicklung des ϑ nach Potenzen der w wird also, wie anderweitig bekannt (ich lasse jetzt der Kürze halber die Charakteristik $\left|{g \atop h}\right|$ in den Formeln weg):

$$C\cdot D(w) = C(D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3).$$

Dies ist die gesuchte allgemeine Form. Unsere Aufgabe ist damit darauf zurückgeführt, die hier vorkommende Konstante C [in ihrer Abhängigkeit von den Kurvenkoeffizienten] festzulegen. Wir erhalten eine explizite Definition derselben, indem wir die Taylorsche Entwicklung unserer Thetafunktion heranziehen. In der Tat wird vermöge derselben:

$$(120)\qquad C=\frac{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_1}\right)_{000}\cdot v_1+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_2}\right)_{000}\cdot v_2+\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_3}\right)_{000}\cdot v_3}{D_1 w_1+D_2 w_2+D_3 w_3}.$$

Dieses C unterwerfen wir nun einer ganz ähnlichen Betrachtung, wie vorhin den Nullwert des geraden ϑ. Wir bilden uns (ich füge jetzt die Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix} g\\ h\end{smallmatrix}\right|$ wieder zu) den Quotienten

$$C_{\left|\begin{smallmatrix} g\\ h\end{smallmatrix}\right|}:\sqrt{p_{123}}$$

und bemerken, daß dessen achte Potenz vermöge (114) in dem zur ungeraden Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix} g\\ h\end{smallmatrix}\right|$ gehörigen Rationalitätsbereiche des § 17 eindeutig ist. Wir untersuchen seine Dimension in den Koeffizienten der zugehörigen D, Φ, Ω und betrachten die Fälle, in denen er verschwindet. *Solcherweise kommt dann als Gegenstück zu Formel* (119):

$$(121)\qquad C_{\left|\begin{smallmatrix} g\\ h\end{smallmatrix}\right|}:\sqrt{p_{123}}=c''\sqrt[8]{\Sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g\\ h\end{smallmatrix}\right|}},$$

unter c'' eine geeignete numerische Konstante, unter Σ den in (105), (108) *betrachteten Diskriminantenfaktor verstanden.*

§ 25.

Von den Funktionen Th.

Ehe wir jetzt die höheren Glieder der uns interessierenden Reihenentwicklungen der ϑ aufsuchen, werden wir statt der ϑ, indem wir dieselben mit einem geeigneten Exponentialfaktor versehen, andere Funktionen einführen, die von den Koeffizienten der C_4 in einfacherer Weise abhängen. Es sind dies dieselben Funktionen, welche Herr Wiltheiss mit dem Buchstaben Th zu bezeichnen pflegt[74]), Funktionen, welche zwischen den ϑ und den weiter unten einzuführenden σ in der Mitte stehen. Wir schreiben:

$$(122)\qquad \mathrm{Th}_{\left|\begin{smallmatrix} g\\ h\end{smallmatrix}\right|}(w_1 w_2 w_3;\, \omega_{ik})=\frac{\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g\\ h\end{smallmatrix}\right|}(v,\tau)}{\sqrt{p_{123}}}\cdot e^{\sum a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta}$$

[74]) Vgl. z. B. Herrn Wiltheiss' Untersuchungen über hyperelliptische Funktionen in den Bänden 29, 31, 33 der Math. Annalen. [Vgl. auch oben S. 323f.]

und legen den hier rechter Seite auftretenden Exponentialfaktor durch dieselbe Forderung fest, von welcher ich im Falle $p=2$ in meiner ersten Arbeit über hyperelliptische Sigmafunktion (Math. Annalen, Bd. 27, 1886 [= Nr. XCV im vorliegenden Bande]) ausgegangen bin. Wir verlangen nämlich, *daß in der Reihenentwicklung des Produktes der geraden* Th *nach Potenzen der w_1, w_2, w_3, bez. der v_1, v_2, v_3, das Glied zweiter Dimension identisch ausfallen soll.* Dies bewirkt dann (vgl. § 2 der genannten Arbeit), daß sich die Th bei linearer Periodentransformation von etwa zutretenden achten Einheitswurzeln abgesehen glatt permutieren, so daß an Stelle von (114) die einfache Formel tritt:

$$(123)\qquad \mathrm{Th}_{\left|\begin{smallmatrix} g'\\ h'\end{smallmatrix}\right|}(w_1 w_2 w_3;\, \omega'_{ik})=j_{\left|\begin{smallmatrix} g\\ h\end{smallmatrix}\right|}\cdot \mathrm{Th}_{\left|\begin{smallmatrix} g\\ h\end{smallmatrix}\right|}(w_1 w_2 w_3;\, \omega_{ik}).$$

Für den in (122) auftretenden Exponentialfaktor finden wir vermöge des Taylorschen Theorems:

$$(124)\qquad \sum a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta=-\frac{1}{72}\left(\sum_1^{36}\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta}\cdot v_1^2+2\sum_1^{36}\frac{\vartheta_{12}}{\vartheta}\cdot v_1 v_2+\dots\right).$$

Hier soll der Buchstabe ϑ rechter Hand den Nullwert des einzelnen geraden Theta, $\vartheta_{\alpha\beta}$ den Nullwert des nach v_α, v_β genommenen zweiten Differentialquotienten desselben Theta bedeuten; die Summation geht über sämtliche gerade Theta. Ich habe in § 5 der genannten Abhandlung über hyperelliptische Sigmafunktionen den entsprechenden Ausdruck für $p=2$ in charakteristischer Weise umgerechnet, indem ich die Diskriminante des hyperelliptischen Gebildes in denselben einführte. Genau so können wir hier verfahren, sofern wir Formel (118) zugrunde legen. Indem wir die Riemannschen Differentialgleichungen heranziehen:

$$4i\pi\frac{\partial\vartheta(v,\tau)}{\partial\tau_{11}}=\frac{\partial^2\vartheta(v,\tau)}{\partial v_1^2},\qquad 2i\pi\frac{\partial\vartheta(v,\tau)}{\partial\tau_{12}}=\frac{\partial^2\vartheta(v,\tau)}{\partial v_1\,\partial v_2},\ \dots$$

erhalten wir aus (124) zunächst:

$$\sum a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta=-\frac{i\pi}{18}\left(\sum_1^{36}\frac{\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{11}}}{\vartheta}\cdot v_1^2+\sum_1^{36}\frac{\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{12}}}{\vartheta}\cdot v_1 v_2+\dots\right).$$

Hier werden wir jetzt

$$\sum_1^{36}\frac{\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{ik}}}{\vartheta}$$

durch

$$\frac{\partial\log\prod_1^{36}(\vartheta)}{\partial\tau_{ik}}$$

ersetzen und dann für das Produkt der Thetanullwerte dessen Wert aus (118) einführen. Solcherweise kommt

$$(125)\qquad \sum a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta =$$

$$= -\frac{i\pi}{9}\left(\frac{\partial \log (p_{123}^9 \,\text{Diskr.})}{\partial \tau_{11}} \cdot {v_1}^2 + \frac{\partial \log (p_{123}^9 \,\text{Diskr.})}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \ldots\right).$$

Wir könnten diesen Ausdruck vermöge der zwischen den verschiedenen dreigliedrigen Periodendeterminanten p_{ikl} bestehenden Relationen noch symmetrischer gestalten (vgl. immer die Entwicklungen in Bd. 27 der Math. Annalen, Abh. XCV), doch mag es hier bei Formel (125) sein Bewenden haben.

Um die Fundamentaleigenschaft der durch (122), (125) definierten Th, die durch (123) ausgedrückt wird, von der Grundformel (114) der linearen Transformation der Theta aus zu verifizieren, hat man nur zu beachten, daß bei beliebiger linearer Transformation jedesmal

$$\frac{\partial}{\partial \tau'_{11}} \cdot {v_1'}^2 + \frac{\partial}{\partial \tau'_{12}} \cdot v_1' v_2' + \ldots = \frac{\partial}{\partial \tau_{11}} \cdot {v_1}^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \ldots$$

wird (so daß man also den Operator

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{11}} \cdot {v_1}^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \ldots$$

als eine Invariante der linearen Transformation bezeichnen könnte). Wir erkennen daraus, daß es noch unendlich viele andere Funktionen gibt, die sich bei linearer Periodentransformation wie die Th nach Formel (123) umsetzen. Sei nämlich J irgendeine rationale (und also bei linearer Periodentransformation unveränderliche) Invariante unserer C_4; ihr Grad in den Koeffizienten sei ν. Wir schreiben dann in (125) für das Produkt $(p_{123}^9 \cdot \text{Diskr.})$ allgemeiner $(p_{123}^{\nu/3} \cdot J)$, für $\frac{i\pi}{9}$ folglich $\frac{3i\pi}{\nu}$. *Die dementsprechend aus* (122) *hervorgehenden Funktionen*

$$(126)\qquad \frac{\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v, \tau)}{\sqrt{p_{123}}} \cdot e^{-\frac{3i\pi}{\nu}\left(\frac{\partial \log\left(p_{123}^{\nu/3} J\right)}{\partial \tau_{11}} \cdot {v_1}^2 + \frac{\partial \log\left(p_{123}^{\nu/3} J\right)}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \ldots\right)}$$

werden immer die Eigenschaft haben, sich bei linearer Periodentransformation der Formel (123) *entsprechend zu verhalten.*

Es ist wesentlich, zu bemerken, wodurch sich unter den so gewonnenen Funktionen (126) unsere durch (125) festgelegten Th insbesondere auszeichnen. Es liegt dies darin, *daß sie, gleich den ursprünglichen* ϑ, *bei allen Ausartungen der* C_4 *endlich bleiben.* Im allgemeinen wird die durch (126) eingeführte Funktion unendlich werden, sobald die Invariante J verschwindet. Unser Th dagegen bleibt endlich, auch wenn die

Diskriminante der Kurve vierter Ordnung zu Null wird. Wir brauchen, um dies zu sehen, nur von (125) zu (124) zurückzugehen. Erhält die Kurve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so bleiben nach den früheren Entwicklungen alle $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v, \tau)$ von Null verschieden, deren g_3 gleich Null ist, die anderen verschwinden wie $q_{33}^{1/4} \cdot \bar{\vartheta}_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v, \tau)$. Hierbei bleiben, wie man sieht, die sämtlichen in (124) auftretenden Quotienten $\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta}$ endlich. Wir haben bei dieser Überlegung allerdings die spezielle Zerschneidung des § 20 zugrunde gelegt. Allein Formel (123) belehrt uns darüber, daß das Resultat von der besonderen Art der zugrunde gelegten Zerschneidung unabhängig ist.

§ 26.

Exkurs über Integrale dritter Gattung.

Aus Formel (126) werden wir jetzt eine Folgerung für die Theorie der Integrale dritter Gattung ziehen. Wir bemerkten bereits oben, in § 14, daß man jeder allgemeinen Thetafunktion

$$\Theta = C \cdot e^{\sum a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta} \cdot \vartheta(v, \tau)$$

genau so ein Integral dritter Gattung entsprechend setzen kann, wie dem ϑ selbst das Π; die Definition dieses Integrals dritter Gattung war in der Formel enthalten

$$\Pi_{\xi\eta}^{xy} - 2 \sum a_{\alpha\beta}\, v_\alpha^{xy}\, v_\beta^{\xi\eta}.$$

Wir schließen, indem wir (126) herannehmen:

Jedes Integral dritter Gattung der folgenden Form:

$$(127)\qquad P_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy}$$

$$+ \frac{3i\pi}{\nu}\left(2\,\frac{\partial \log\left(p_{123}^{\frac{\nu}{3}} J\right)}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^{xy} v_1^{\xi\eta} + \frac{\partial \log\left(p_{123}^{\frac{\nu}{3}} J\right)}{\partial \tau_{12}} (v_1^{xy} v_2^{\xi\eta} + v_1^{\xi\eta} v_2^{xy}) + \ldots\right)$$

hat die Eigenschaft, bei linearer Periodentransformation völlig ungeändert zu bleiben, also von den Koeffizienten der C_4 *eindeutig abzuhängen.*

Wir denken uns jetzt dieses P nach Formel (61) des § 9 an der Kurve vierter Ordnung als Doppelintegral hinerstreckt:

$$(128)\qquad P_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_z \cdot d\omega_\zeta \cdot \frac{\Psi(z, \zeta; \alpha\beta)}{(\alpha_z \beta_\zeta - \beta_z \alpha_\zeta)^2}.$$

Hier wird Ψ (weil P in den Koeffizienten der C_4 vom 0-ten Grade ist) selbst in den Koeffizienten vom zweiten Grade sein. Es ist ferner klar, daß Ψ eine Kovariante von f sein muß: denn P ist aus lauter Bestandteilen aufgebaut, welche sich bei projektiven Umformungen der C_4 nicht ändern. Wir ziehen endlich die in § 22 besprochene Schlußweise heran und erfahren durch sie, daß Ψ nicht nur eindeutig, sondern *rational* von den Koeffizienten von f abhängen muß.

Wir werden jetzt (um zu unseren Th zurückzukehren) das J in (127) insbesondere durch die Kurvendiskriminante ersetzen. Dann belehren uns die Schlußbemerkungen des § 25 darüber, daß wir es mit einem Integral dritter Gattung zu tun haben, welches als Funktion der Kurvenkoeffizienten überall endlich ist. Das im Sinne von (128) zugehörige Ψ muß also neben den sonstigen bereits angegebenen Eigenschaften auch noch die besitzen, eine *ganze* Funktion der Kurvenkoeffizienten zu sein. *Hiermit ist nun, was die Kurven vierter Ordnung angeht, der in* § 10 *nur erst in Aussicht genommene volle Anschluß an die von Herrn Pick für singularitätenfreie ebene Kurven gegebene Normalform Q der Integrale dritter Gattung* (§ 6) *erreicht.* In der Tat war das Picksche Q gegenüber der allgemeinen in (128) enthaltenen Definition des P dadurch spezialisiert, das wir für Ψ die unter (52) angegebene *rationale*, *ganze Kovariante* eingeführt hatten:

$$(129)\quad \Psi = \frac{\sum\limits_{1}^{n}(a\alpha\beta)\, a_z^{\nu-1} a_\zeta^{m-\nu}\cdot(b\alpha\beta)\, b_z^{m-\nu}\, b_\zeta^{\nu-1} - \sum\limits_{1}^{n-1}(a\alpha\beta)^2 a_z^{\nu-1} a_\zeta^{m-\nu-1}\cdot b_z^{m-\nu}\, b_\zeta^{\nu}}{m};$$

es gab keine andere rationale, ganze Kovariante, als die hiermit hingeschriebene, welche den sonst an Ψ zu stellenden Forderungen genügte. Wir haben also:

Zwecks Definition der Th *sind die unter* (81), (82) *in* § 13 *für die ϑ aufgestellten Formeln in der Weise zu modifizieren, daß man in sie an Stelle des transzendent normierten Integrals dritter Gattung Π das Picksche Q einführt,*

so wie andererseits:

Von transzendenter Seite läßt sich das Integral Q durch die Formel definieren:

$$(130)\quad Q_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy}$$
$$+\frac{i\pi}{9}\left(2\,\frac{\partial \log\left(p_{123}^{9}\ \text{Diskr.}\right)}{\partial \tau_{11}}\cdot v_1^{xy}\, v_1^{\xi\eta} + \frac{\partial \log\left(p_{123}^{9}\ \text{Diskr.}\right)}{\partial \tau_{12}}\left(v_1^{xy}\, v_2^{\xi\eta} + v_2^{xy}\, v_1^{\xi\eta}\right) + \dots\right).$$

Übrigens gilt letztere Formel, wie man leicht sieht, nicht nur für unsere Kurven vierter Ordnung, sondern mit geeigneter Modifikation überhaupt für singularitätenfreie ebene Kurven m-ter Ordnung. Hiermit ist die Picksche Entwicklung in einem wesentlichen Punkte ergänzt. Bei Herrn Pick wird nämlich der unter (129) angegebene Ausdruck nur empirisch

konstruiert: es wird gezeigt, daß er tatsächlich den sämtlichen an ihn zu stellenden Anforderungen genügt, es wird aber nicht a priori entwickelt, daß es einen derartigen Ausdruck geben *muß*, (daß die zahlreichen an den Ausdruck zu stellenden Anforderungen überhaupt verträglich sind). Hier nun greift Formel (130) ergänzend ein. Indem wir dieselbe als Definition des Q betrachten, sind wir der *Existenz* des bei Herrn Pick aufgestellten Ausdrucks von vornherein sicher.

Den vorstehenden Entwicklungen laufen andere parallel, die sich auf die hyperelliptischen Gebilde beziehen und vermöge deren wir bei ihnen von den ϑ, bez. den Th aus zu dem von algebraischer Seite bekannten Normalintegrale Q kommen. Hierdurch findet dann die bez. Darstellung in Bd. 27 und 32 der Math. Annalen [= Abh. XCV und XCVI dieser Ausgabe] ihre Ergänzung. Ich verfolge das hier nicht weiter.

§ 27.

Die höheren Glieder in der Reihenentwicklung der ϑ. Die Sigmafunktionen.

Durch Formel (122) sind die ϑ mit dem Th in so einfacher Weise verknüpft, daß wir die nach Potenzen der v, resp. der w fortschreitenden Reihenentwicklungen der ϑ als bekannt ansehen dürfen, sobald wir die Reihenentwicklungen der Th beherrschen: letztere aber werden, wie wir dies schon in Aussicht stellten, leichter aufzustellen sein, als die Entwicklungen der ϑ selbst, weil sich die Th gegenüber linearer Periodentransformation einfacher verhalten als die ϑ und also von den Koeffizienten der C_4 ihrem Wesen nach einfacher abhängen als diese. Aber die Th selbst lassen sich in diesem Betracht noch durch einfachere Funktionen ersetzen. Wir haben die Sätze, die wir in § 23 über das Verschwinden der ϑ beim Entstehen eines Doppelpunktes aufgestellt haben, bis jetzt nur erst dahin ausgenutzt, daß wir vermöge derselben die Anfangsglieder in den Reihenentwicklungen der ϑ festlegten. Aber sie liefern nicht minder einen Beitrag zur Kenntnis der höheren Glieder. Wenn nämlich bei entstehendem Doppelpunkte das Anfangsglied der Entwicklung einer Thetafunktion verschwindet, so verschwindet nach den genannten Sätzen die zugehörige Thetafunktion überhaupt, und zwar in demselben Grade, wie das Anfangsglied. *Wir schließen, daß sämtliche Glieder der Reihenentwicklung der geraden ϑ durch $\sqrt[8]{S}$, sämtliche Glieder der Reihenentwicklung der ungeraden ϑ durch $\sqrt[8]{\Sigma}$ teilbar sein müssen.* Von den ϑ überträgt sich dieser Satz sofort auf die Th. *Statt der* Th *wollen wir also lieber diejenigen Funktionen auf ihre Reihenentwicklung* *untersuchen, die sich aus den* Th *durch Division mit* $\sqrt[8]{S}$, *bez.* $\sqrt[8]{\Sigma}$ *ergeben.*

Die neuen so entstehenden Funktionen, deren Reihenentwicklungen wir jetzt des näheren untersuchen werden, sind [diejenigen, welche ich in Anlehnung an die vorangehenden Abhandlungen über hyperelliptische Funktionen als *Sigmafunktionen* bezeichne]. In der Tat stimmen dieselben durchaus mit den im elliptischen und im hyperelliptischen Falle so benannten Funktionen überein, sofern wir die Definition im einzelnen noch so präzisieren, daß wir die noch nicht fixierten numerischen Konstanten c', c'' eliminieren, welche in den Formeln (119), (121) auftreten.

Ich setze dementsprechend bei gerader Charakteristik:

$$\sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(w_1, w_2, w_3) = \mathrm{Th}_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(w) : c' \sqrt[8]{S_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}}, \tag{131}$$

bei ungerader Charakteristik:

$$\sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(w_1, w_2, w_3) = \mathrm{Th}_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(w) : c'' \sqrt[8]{\Sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}}. \tag{132}$$

Wir betrachten zunächst einen Augenblick die ersten Glieder in den Entwicklungen der σ. Nach (119) beginnt die Entwicklung des geraden σ mit 1, nach (120) die des ungeraden σ mit

$$D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3.$$

Wir schließen daraus, daß sich die unter (123) für die Th aufgestellten Formeln der linearen Periodentransformation noch einmal vereinfachen, sobald wir von den Th zu den σ gehen. In der Tat ist aus den mitgeteilten Anfangsgliedern ersichtlich, daß beim Vergleich zweier Sigmafunktionen achte Einheitswurzeln unmöglich auftreten können. *Die Formeln der linearen Transformation heißen einfach:*

$$\sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right|}(w_1, w_2, w_3;\ \omega'_{ik}) = \sigma_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(w_1, w_2, w_3;\ \omega_{ik}); \tag{133}$$

die σ permutieren sich also bei linearer Periodentransformation ohne irgendwelche zutretende Faktoren.

Aus dem hiermit gewonnenen Satze erkennen wir eine wesentliche Eigenschaft der nach Potenzen der w_1, w_2, w_3 fortschreitenden Entwicklungen der σ. Es folgt nämlich, daß die Koeffizienten sämtlicher in diesen Entwicklungen auftretenden Glieder jeweils innerhalb des durch die Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|$ festgelegten Rationalitätsbereiches *eindeutig* sein müssen. Die Koeffizienten in der Entwicklung des einzelnen geraden σ sind also eindeutige Funktionen der zugehörigen Moduln $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ des § 18, die Koeffizienten in der Entwicklung des einzelnen ungeraden σ eindeutige Funk-

tionen der bei den zugehörigen D, Ω, Φ des § 17 auftretenden Konstanten. Aus den eindeutigen Funktionen werden *ganze* Funktionen, sobald wir berücksichtigen, daß die Th und also die σ als Funktionen der Kurvenkoeffizienten niemals unendlich werden. Endlich erweisen sich bei Fortsetzung der funktionentheoretischen Betrachtung die eindeutigen Funktionen als *rationale* Funktionen.

Hiermit haben wir nun für unsere neuen Sigmafunktionen alle die grundlegenden Sätze, welche mutatis mutandis für die elliptischen und hyperelliptischen Sigmafunktionen bekannt sind. Ich führe noch an, wie sich diese Sätze ausgestalten, sofern man die Dimension der einzelnen in Betracht kommenden Terme in den verschiedenen Arten homogener Variablen, die Invarianteneigenschaft dieser Terme usw. berücksichtigt.

Wir betrachten zunächst die *geraden* σ und erhalten das Folgende:

1. Die äußere Gestalt der Reihenentwicklung ist jedenfalls diese:

$$\sigma(w_1, w_2, w_3) = 1 + [w]_2 + [w]_4 + \ldots; \tag{134}$$

unter $[w]_{2\nu}$ verstehen wir dabei das Aggregat sämtlicher Glieder, welche die w_1, w_2, w_3 in der 2ν-ten Potenz enthalten.

2. Wir wissen bereits, daß diese Glieder rationale ganze Funktionen der Moduln $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ des zugehörigen Rationalitätsbereiches zweiter Stufe sind. Da die w vermöge (100) in den $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ zusammengenommen von der (-4)-ten Dimension sind, werden die Koeffizienten von $[w]_{2\nu}$ die Gesamtdimension 8ν aufweisen müssen.

3. Bei linearer Koordinatentransformation verhalten sich die w_1, w_2, w_3 den x_1, x_2, x_3 kogredient, die einzelne σ-Funktion aber bleibt durchaus ungeändert. Wir schließen, daß $[w]_{2\nu}$ eine dem Rationalitätsbereiche der $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ angehörige Kovariante von f ist, deren Variablen x_1, x_2, x_3 man durch w_1, w_2, w_3 ersetzt hat.

4. Indem wir auf § 18 zurückgreifen, werden wir uns zusammenfassend folgendermaßen ausdrücken können:

$[w]_{2\nu}$ *ist eine rationale ganze Kovariante der gemischt ternär-quaternären Form:*

$$w_1 \cdot \sum \alpha_{ik} z_i z_k + w_2 \cdot \sum \beta_{ik} z_i z_k + w_3 \cdot \sum \gamma_{ik} z_i z_k,$$

welche in den w_1, w_2, w_3 den Grad 2ν, in den $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$ zusammengenommen den Grad 8ν, in den z_1, z_2, z_3, z_4 den Grad Null besitzt. —

Wir betrachten ferner die *ungeraden* σ, deren Reihenentwicklung wir durch die Formel andeuten

$$\sigma(w_1, w_2, w_3) = (D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3) + [w]_3 + [w]_5 + \ldots. \tag{135}$$

Hier sind die $[w]_{2\nu+1}$ Aggregate rationaler Kovarianten der drei zur ungeraden Charakteristik gehörigen ternären Formen D, Ω, Φ, in denen man die Koordinaten x_1, x_2, x_3 durch w_1, w_2, w_3 ersetzt hat. Multipliziert man die Koeffizienten von D, Ω, Φ mit einem gemeinsamen Faktor λ, so erhält f den Faktor λ^2, die w werden also in $\frac{w}{\lambda^2}$ verwandelt. Mit Rücksicht auf das Anfangsglied unserer Reihenentwicklung schließen wir hieraus, daß $[w]_{2\nu+1}$ die Koeffizienten von D, Ω, Φ zusammen homogen im Grade $4\nu+1$ enthalten muß. Andererseits ersetze man D, Ω, Φ bzw. durch $\lambda D, \Omega, \frac{\Phi}{\lambda}$, wobei f und also die w ungeändert bleiben. Hierbei wird jedes $[w]_{2\nu+1}$, wie man wieder aus dem Anfangsgliede sieht, den Faktor λ erhalten müssen[75]). Der Term $[w]_{2\nu+1}$ wird sich daher im Sinne der in § 19 gebrauchten Bezeichnung folgendermaßen als Aggregat einzelner Glieder darstellen lassen, deren jedes in den Koeffizienten von D, von Ω und von Φ homogen ist:

$$(136) \qquad [w]_{2\nu+1} = \underset{l=1}{\overset{l=2\nu+1}{S}} \left(\overset{l}{D}, \overset{4\nu+2-2l}{\Omega}, \overset{l-1}{\Phi}; \overset{2\nu+1}{w}\right).$$

Wir können endlich von diesem Aggregate noch aussagen, daß es bei denjenigen Operationen (94), die $\lambda = 1$ entsprechen, d. h. den Substitutionen

$$D' = D,$$
$$\Omega' = \Omega + u_x \cdot D,$$
$$\Phi' = \Phi + 2u_x \cdot \Omega + u_x^2 \cdot D,$$

ungeändert bleiben muß.

Hiermit ist die Untersuchung des allgemeinen Falles $p = 3$ bis zu denselben Formeln geführt, die in Band 32 der Math. Annalen [= Nr. XCVI dieser Ausgabe] für die hyperelliptischen Sigmafunktionen entwickelt wurden, und es ist also der Zielpunkt erreicht, den ich für die gegenwärtige Abhandlung von vornherein in Aussicht nahm. Ich darf nicht schließen ohne hinzuzufügen, daß die Herren Wiltheiss und Pascal die Frage der Reihenentwicklungen der ϑ vom Geschlechte $p = 3$ in neuester Zeit bereits weiter verfolgt haben. In den Göttinger Nachrichten vom Juni 1889 hat Herr Wiltheiss elegante Differentialgleichungen veröffentlicht, denen die ϑ, bzw. die Th, hinsichtlich der als variabel angesehenen Koeffizienten der C_4 genügen. Herr Pascal hat sodann in den Nachrichten vom Juli 1889 nähere Angaben über die Reihenentwicklung der ungeraden σ gemacht; er hat den Term $[w]_3$ direkt berechnet und aus ihm mit Hilfe der Wiltheissischen Differentialgleichungen rekurrente Formeln zur Berechnung der allgemeinen Terme $[w]_{2\nu+1}$ abgeleitet. Ausführlicher gibt Herr Pascal diese Rechnungen in dem neuesten Hefte der Annali di Matematica (ser. 2, t. XVII, 2: *Sullo sviluppo delle funzioni σ abeliane dispari di genere 3*).[76])

[75]) In der Tat ist das ungerade σ und also auch das einzelne $[w]_{2\nu+1}$ in dem genauen, oben festgehaltenen Sinne des Wortes, gar keine Funktion der Koeffizienten von f, erst $\mathrm{Th} = \sqrt[8]{\Sigma} \cdot \sigma$ ist eine solche Funktion. Vgl. die in § 19 an Formel (108) geknüpften Erläuterungen.

Göttingen, den 24. September 1889.

[Im Zusammenhange mit den vorstehend abgedruckten Abhandlungen XCV bis XCVII möchte ich noch einige Worte über zwei Arbeiten von Wirtinger sagen. Die eine (erschienen in den Math. Annalen, Bd. 40, 1892) behandelt das Umkehrproblem bei $p = 3$, die andere (veröffentlicht in den Göttinger Nachrichten v. J. 1889) das Analogon der Kummerschen Fläche bei $p = 3$. In diese Arbeiten Wirtingers spielen die Gedanken hinein, welche in Abh. XCV bis XCVII und in den einschlägigen Untersuchungen meiner damaligen Seminare, sowie auch in Abh. XII und XIII in Bd. 1 dieser Ausgabe berührt wurden. Die Einzelheiten können hier freilich nicht dargelegt werden, und dies ist auch nicht nötig, da sich in den Nummern 101 und 34 des wiederholt genannten Enzyklopädiereferates von Krazer und Wirtinger ausführliche Berichte über beide Arbeiten finden.

Was die erste Arbeit anlangt, so ist ihr Ziel, das Umkehrproblem in solche Formulierung zu bringen, daß man aus dem Rationalitätsbereich der Koeffizienten der doppelpunktlosen Kurve vierter Ordnung $f = 0$ nicht heraustritt und selbstverständlich überall den invariantentheoretischen Gesichtpunkt zur Geltung bringt. Statt der 64 σ-Funktionen werden daher, wie bei mir am Schluß der Abh. XCV, Σ-Funktionen gesucht, d. h. Jacobische Funktionen höherer Ordnung, deren beständig konvergente Entwicklung nach Potenzen der gegebenen Integralsummen w_1, w_2, w_3 nach ganzen rationalen Kovarianten von f fortschreitet (wozu übrigens schon Pick in den Math. Annalen, Bd. 29, 1887 einen ersten Ansatz gemacht hat.)

Wirtinger formuliert zu dem Zwecke das Umkehrproblem folgendermaßen: Gegeben sind die drei viergliedrigen Integralsummen:

$$w_i = \int^x + \int^y + \int^z + \int^t \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Es sollen die ∞^1 korresidualen Quadrupel $(x\,y\,z\,t)$, welche durch die oberen Grenzen der Integrale vorgestellt sind, bestimmt werden. (Die unteren Grenzen werden ge-

[76]) Inzwischen erschien in den Annali di Matematica bereits eine Fortsetzung dieser Untersuchungen unter dem Titel: *Sulle formole di ricorrenza per lo sviluppo delle σ abeliane dispari a tre argomenti.* Herr Pascal hat überdies jetzt die Berechnung des Gliedes $[w]_2$ der Reihenentwicklung (134) der geraden Sigmafunktionen bewerkstelligt; ich habe eine bez. Mitteilung vor wenigen Tagen der Göttinger Societät der Wissenschaften vorgelegt; dieselbe wird im Dezemberheft der Göttinger Nachrichten veröffentlicht werden. [Zusatz bei der Korrektur am 14. Dez. 1889.] — [Ich nenne an weiterer anschließender Literatur: Wiltheiss, *Die partiellen Differentialgleichungen der Abelschen Thetafunktionen dreier Argumente*, in den Math. Annalen, Bd. 38, 1890/91 und Pascal, *Sulla teoria delle funzioni σ abeliane pari a tre argomenti*, Annali di Mat. ser. 2, t. XVIII, 1889/90, sowie *Sulla ricerca del secondo termine dello sviluppo in serie delle funzioni σ abeliane pari di genere tre*, Annali di Mat. ser. 2, t. XXIV, 1896. K.]

bildet durch die Schnittpunkte der Kurve vierter Ordnung mit einer beliebigen Geraden.) Zu jeder solchen Schar gehört eine Schar residualer Quadrupel $(x' y' z' t')$, die den Integralsummen $(-w_i)$ entsprechen. Jedes Quadrupel der ersten Schar bildet mit jedem Quadrupel der zweiten Schar den vollen Schnitt der Kurve vierter Ordnung mit einem Kegelschnitt. Solcherweise entstehen ∞^2 Kegelschnitte. — Wirtinger unternimmt zunächst, das System dieser Kegelschnitte durch algebraische Kovarianten k zu charakterisieren und auch zu sagen, welche Quadratwurzel r man gebraucht, um die beiden Quadrupelscharen voneinander zu trennen.

Um die erforderlichen Σ-Funktionen zu bilden, hat Wirtinger nur die Primform $\Omega(x, y)$ und die Mittelform $m(x)$, wie ich sie in Nr. XCVII betrachte, unter Zugrundelegung des Pickschen Integrals Q zu bilden und aus ihnen den auch von mir benutzten Faktor

$$M = \frac{m(x)\cdot m(y)\cdot m(z)\cdot m(t)}{\Omega(x, y)\cdot\Omega(x, z)\cdot\Omega(x, t)\cdot\Omega(y, z)\cdot\Omega(y, t)\cdot\Omega(z, t)}$$

zusammenzusetzen. Die Produkte kM^2 und rM^4 werden dann die Σ-Funktionen sein, durch deren Reihenentwicklung nach Potenzen von w_1, w_2, w_3 das Umkehrproblem gelöst wird. Dabei sind die kM^2 gerade und das rM^4 ungerade Funktionen der w_i.

Hier findet denn auch diejenige niederste Σ-Funktion, die 1889 bei Frobenius unter der Bezeichnung φ auftritt und die den Kern der Entwicklungen des Schottkyschen Buches ausmacht, ihre Stelle. (Vgl. die Zitate in Fußnote [63]) auf S. 454). $\varphi = 0$ besagt, daß sich die Integralsummen w_i als eingliedrige Integrale, genommen zwischen zwei beliebigen Stellen x und y der Kurve vierter Ordnung, also in der Gestalt $\int_y^x$, darstellen lassen.

Was das Analogon zur Kummerschen Fläche angeht, so muß man eine Arbeit von H. Weber in Crelles Journal, Bd. 84, 1877/78 gegenwärtig haben, welche davon ausgeht, daß die Quadrate der 16 Thetafunktionen zweier Argumente v_1, v_2 sich aus vier geeigneten linear zusammensetzen lassen, die man den homogenen Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ eines dreidimensionalen Raumes proportional nimmt. Läßt man die Argumente v_1, v_2 der Thetafunktionen variieren, so beschreibt der Punkt x eine Kummersche Fläche. (Vgl. auch die in Bd. 1, S. 164, Fußnote [1]) genannte Leipziger Dissertation von W. Reichardt in den Nova Acta Leopoldina, Bd. 50, 1886.)

Genau entsprechend kann man die 64 Quadrate der Thetafunktionen von drei Variabeln v_1, v_2, v_3 durch acht derselben linear darstellen und bekommt, wenn man diese den homogenen Koordinaten $x_1 : x_2 : \ldots : x_8$ eines siebendimensionalen Raumes gleichsetzt, als Ort des Punktes x eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, deren Ordnung ich seiner Zeit auf Grund eines Poincaréschen Satzes zu 24 bestimmt hatte. Diese M_3^{24} geht durch 64 Kollineationen, die der Vermehrung der v_i um Systeme halber Perioden entsprechen, in sich über. Wirtinger findet nun, daß sie auch durch 64 dualistische Transformationen in sich übergeht, von denen 28 Nullsysteme und 36 Polarreziprozitäten sind. Durch die Gruppe dieser 2.64 Operationen werden die Punkte und die R_6 des R_7 zu Konfigurationen $(64)_{28}$ zusammengeordnet. Insbesondere wird eine derartige Konfiguration von 64 vierfachen Punkten der M_3^{24} und 64 entsprechenden R_6 gebildet. — Diese schöne Theorie hat Wirtinger 1890 in den Wiener Monatsheften für Mathematik u. Physik auf beliebige p übertragen.

K.]

Riemannsche Funktionentheorie und automorphe Funktionen.

Vorbemerkungen zu den Arbeiten über Riemannsche Funktionentheorie.

Indem ich den letzten Abschnitt meiner gesammelten Abhandlungen „Riemannsche Funktionentheorie und automorphe Funktionen“ überschreibe, muß ich zu allererst bemerken, daß ich Riemann selbst nicht etwa gekannt habe, und daß auch die persönlichen Überlieferungen, die mich erreicht haben, nur sehr dürftig sind. Mein Lehrer Clebsch hat mich selbstverständlich auf die Riemannschen Resultate auf das Nachdrücklichste hingewiesen, aber die geometrisch-physikalischen Betrachtungsweisen, durch die Riemann zu seinen Ergebnissen gekommen war, nicht eigentlich als tragkräftig und weiterführend angesehen. Insofern steht die Entwicklung, welche mich zu Riemann hinführte, im Widerspruch zu der Tradition, in der ich aufgewachsen bin. Ich habe es zunächst dem schon in meiner Bonner Studienzeit gefaßten Plan, nach und nach alle Richtungen der Mathematik kennen zu lernen (s. Bd. 1 dieser Ausgabe, S. 52), zu verdanken, daß ich mich mit Riemanns eigenen funktionentheoretischen Überlegungen beschäftigte. Der Weg, den ich in dieser Hinsicht gegangen bin, tritt in den bereits in den Bänden 2 und 3 dieser Ausgabe abgedruckten Abhandlungen ziemlich klar zutage. Zunächst handelte es sich darum, zum Verständnis der Riemannschen Gedankenreihen in ihren Anwendungen auf die Theorie der algebraischen Kurven zu gelangen. So entstanden die Arbeiten über die neuen Riemannschen Flächen, in den Math. Annalen Bd. 7 und 10 (1874, 1876) und über Abelsche Integrale bei Kurven vierten Grades, ebenda Bd. 10 und 11 (1876, 1876/77). [Siehe die Abhandlungen XXXVIII und XL, bzw. XXXIX und XLI in Bd. 2.] Des weiteren führte mich dann die Theorie der regulären Körper und die damit in Verbindung stehende Theorie der algebraisch integrierbaren linearen Differentialgleichungen immer mehr zu Fragen der geometrischen Funktionentheorie. Vgl. meine Arbeiten über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich und über das Ikosaeder, in den Math. Annalen, Bd. 9 und 12 (1875/76, 1877), sowie die über lineare Differentialgleichungen, ebenda Bd. 11 und 12 (1876, 1877). [Siehe die Abhandlungen LI und LIV, bzw. LII und LIII in Bd. 2.] Ihnen folgten 1877—1880 noch in München meine Untersuchungen über elliptische Modulfunktionen, welche im ersten Abschnitt des vorliegenden Bandes unter Nr. LXXXI bis LXXXIX abgedruckt sind, in denen sich Riemannsche Denkweise mit Gruppentheorie und geometrischer Konstruktion verband.

Durch diese ganze Arbeitsrichtung war ich so tief in die geometrische Funktionentheorie eingedrungen, daß ich meine Leipziger Lehrtätigkeit sofort nach meiner Übersiedelung aus München im Herbst 1880 mit einer zweisemestrigen Vorlesung über „Funktionentheorie in geometrischer Darstellung“ begann. Diese Vorlesungen wurden von meinem damaligen „Famulus“ Ernst Lange ausgearbeitet, und auf Grund dieser Ausarbeitung hat später (1892) Paul Epstein die Betrachtungen des ersten Semesters in einer Autographie „*Einleitung in die geometrische Funktionentheorie*“ dargestellt. Diese Autographie ist nie in den Buchhandel gekommen, hat aber unter der Hand Verbreitung gefunden. Bei der dort gegebenen Behandlung der algebraischen

Funktionen und ihrer Integrale bildet die algebraische Gleichung den Ausgangspunkt, und die Riemannsche Fläche dient in üblicher Weise als mehrblättrige Fläche über der $(x+iy)$-Ebene zur Veranschaulichung der Mehrwertigkeit der Funktion. Erst später werden die von mir aufgestellten „projektiven" Riemannschen Flächen und die frei im Raume gelegenen Flächen gleichfalls nur zur Veranschaulichung herangezogen. — Die Vorlesung des zweiten Semesters nahm dann einen höheren Aufschwung. Sie deckt sich nach Inhalt und Tendenz im wesentlichen mit meiner Schrift *„Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale"*, welche unten als Nr. XCIX abgedruckt ist. Dies kleine Büchlein habe ich in den Herbstferien 1881 ausgearbeitet; es ist Anfang 1882 im Teubnerschen Verlage in Leipzig erschienen; jedoch konnten die ersten Exemplare bereits vor Weihnachten 1881 versandt werden.

Da ich meine andern im letzten Abschnitt dieser Gesamtausgabe zusammengestellten Arbeiten über automorphe Funktionen und deren Zusammenhang mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit besonderen Ausführungen begleiten will, kann ich mich hier gleich einer ausführlicheren Besprechung der genannten Schrift und der Weiterführungen der Theorie, die sich bald daran anschlossen, zuwenden. Indem ich mir vorbehalte, einige wünschenswert erscheinende Einzelausführungen noch an Ort und Stelle in Fußnoten im Texte zu machen, mögen hier nur einige allgemeine Betrachtungen ihre Stelle finden.

Da darf zunächst folgendes gesagt werden: Es ist in der modernen mathematischen Literatur durchaus ungewöhnlich, daß allgemein physikalische und geometrische Überlegungen in naiv-anschaulicher Form, die später in exakten mathematischen Beweisen ihre feste Stütze finden, als solche so vorangestellt werden, wie dies in meiner Schrift geschieht. Ich suche durch physikalische Erwägungen zu einer wirklichen Beherrschung der Grundgedanken der Riemannschen Theorie zu gelangen. Ich möchte den Wunsch äußern, daß ähnliches öfter geschehen möge. Denn bei der üblichen Art der mathematischen Publikation (die übrigens auch im Altertum unter dem Druck der öffentlichen Meinung vorherrschend war) tritt die wichtige Frage, *wie man überhaupt dazu kommt, gewisse Probleme und Gedankenreihen aufzustellen*, ganz in den Hintergrund. Es ist gar nicht zu sagen, wie sehr die Auffassung mathematischer Arbeiten dadurch erschwert wird. Ich halte es für ein Unrecht, wenn die meisten Mathematiker ihre intuitiven Überlegungen ganz unterdrücken und nur die allerdings notwendigen strengen (und meist arithmetisierten) Beweise veröffentlichen. Es scheint da eine gewisse Angst mitzuwirken, den Fachgenossen nicht „wissenschaftlich" genug zu erscheinen. Oder ist es in andern Fällen der Wunsch gewesen, den Konkurrenten nicht die Quelle der eigenen Überlegungen zu verraten? Jedenfalls betrachte ich es als eine charakteristische Leistung, daß ich gerade diese Seite der mathematischen Publikation betonte. Ich habe meine Schrift über Riemann geradezu als Physiker geschrieben, unbekümmert um alle die vorsichtigen Zusätze, die man bei ausgeführter mathematischer Behandlung zu machen gewohnt ist und habe damit gerade auch bei verschiedenen Physikern Beifall gefunden. — Es war natürlich eine Ausführung der erforderlichen Beweise in einer zweiten Schrift geplant (siehe die Vorrede S. 503). Aber diese ist als solche leider nicht mehr zustande gekommen, weil meine Arbeitskraft bald durch weitergehende Fragestellungen betreffend automorphe Funktionen in Anspruch genommen wurde. Sie findet sich aber skizziert im Abschnitt I meiner unten als Nr. CIII abgedruckten Abhandlung *„Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie"* aus den Math. Annalen, Bd. 21 (1882/83) und ausführlicher nach Vorlesungen von mir in den durch Fricke fertiggestellten Werken über „Modulfunktionen" Bd. 1 (1890), S. 493 ff. und „Automorphe Funktionen" Bd. 2 (1912) S. 3 ff., oder bei Ritter in den Math. Annalen, Bd. 41 (1892) und 44 (1893). Eingehender behandele ich selbst diese Gegenstände in den beiden Bänden meiner autographierten Vorlesung *„Riemannsche Flächen"*, auf die ich gleich nachher noch zu sprechen komme.

Es ist natürlich die Frage, ob bei Riemann historisch die Überlegungen wirklich so erwachsen sind, wie ich es in meiner Schrift darstelle. Aus den noch vorhandenen auf Riemann zurückgehenden Manuskriptstücken wird sich vermutlich keine Klärung dieser Frage ergeben, obwohl noch eine philologisch-kritische Durcharbeitung des Riemannschen wissenschaftlichen Nachlasses unter den hier in Betracht kommenden Gesichtspunkten fehlt. Hoffentlich erfolgt eine solche in nicht zu ferner Zeit. Aber auch die von mir einst angestellte Befragung von Schülern Riemanns liefert keinen bestimmten Anhaltspunkt. Denn selbst die Bezugnahme auf eine Mitteilung von Prym, auf die ich mich in der Vorrede zu meiner Schrift (S. 501/502) berief, kann ich nicht aufrecht erhalten. Prym hat mir nämlich, als Antwort auf die Übersendung meiner Schrift, deren ganze Tendenz er durchaus billigte, unter dem 8. April 1882 u. a. ausdrücklich folgendes geschrieben: „. . . Bei meiner Ihnen gegenüber gemachten Bemerkung hatte ich wahrscheinlich das Abbildungsproblem im Auge; ich erinnere mich leider nicht mehr des Zusammenhangs, in welchem ich dieselbe gemacht habe. Das nur kann ich bestimmt behaupten, daß ich niemals den Gedanken gehegt, daß bei Riemann die Untersuchung von Funktionen auf beliebigen Flächen der Untersuchung der Funktionen in einer über der Ebene ausgebreiteten mehrblättrigen Fläche T vorangegangen sei; und wenn in meiner betr. Bemerkung das Wort ‚ursprünglich' vorgekommen ist, so muß es im Zusammenhange der Rede eine andere Bedeutung gehabt haben, als diejenige, die Sie ihm beigelegt haben . . ."

Demnach wäre also der Inhalt meiner Mitteilung wesentlich einzuschränken. Es ist jetzt, nach fast 50 Jahren, natürlich unmöglich, aus der Erinnerung Bestimmtes hinzuzufügen. Jedoch bemerke ich, daß man zweierlei auseinanderhalten muß: Bei Betrachtungen der Analysis Situs hat man von Beginn an Flächen im Raume betrachtet, und es war umgekehrt eine Leistung von Riemann, wenn er seine bezüglichen Überlegungen auf mehrblättrige Flächen über der Ebene übertrug. Hinterher entstand der Gedanke, die Verhältnisse, wie sie sich bei letzteren einstellen, an Normalflächen mit p Löchern zu erläutern. So finden wir es bei Tonelli 1875 in den Atti dei Lincei, ser. II, t. 2, so 1877 bei Clifford in den Proceedings of the London Math. Society vol. 8 [= Math. Papers Nr. XXVII]. Etwas anderes ist die Benutzung im Raume gelegener Flächen als Träger komplexer Ortsfunktionen. Dies geschieht zum ersten Male wohl bei Beltrami 1867, in den Annali di Matematica, ser. II, t. 1 [= Opere matematiche, t. 1, Nr. XXI]. Aber Beltrami behandelt nur Flächenstücke, bei denen er die Randwertaufgabe stellt. Die Idee, *geschlossene Flächen im Raume der funktionentheoretischen Betrachtung zugrunde zu legen und damit die eigentlichen Grundgedanken der Riemannschen Theorie zu fassen*, scheint vor meiner Schrift nicht hervorgetreten zu sein. Sie hat auch wenig Nachahmung gefunden. Einzig H. Poincaré (1898, in seiner Abhandlung *Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$* im Journal des Mathématiques, série V, vol. 4 [= Oeuvres, vol. 2.]) und H. Weyl (1913, in seinem Buche *Die Idee der Riemannschen Fläche*) scheinen eine Ausnahme zu machen.

Ich gebe also, was die Darstellung in meiner Schrift angeht, jeden Anspruch auf historische Treue in den Einzelheiten preis und behaupte nur, eine adäquate Einleitung in die schließliche Riemannsche Auffassung, wie sie sich bei ihm im Laufe der Jahre gebildet hat, geliefert zu haben. Man wolle überhaupt in dieser Hinsicht nicht zu sehr an Äußerlichkeiten haften bleiben. Wenn ich z. B. von stationären elektrischen Strömen rede, wie das der modernen physikalischen Überlegung entspricht, so weiß ich sehr wohl, daß man um das Jahr 1850 herum in Mathematikerkreisen immer noch vorwiegend die (experimentell sehr viel schwieriger herstellbaren) stationären Wärmeströmungen betrachtete.

Nachdem dieser Punkt klargestellt ist, möge noch darauf hingewiesen werden, daß meine Schrift bei aller Unstrenge in der Form doch auch nach rein mathematischer Seite einige wesentliche Fortschritte enthält, zunächst dadurch, daß sie bestimmte Sätze, deren Beweise im Prinzip vorlagen, mit Lebhaftigkeit in den Vordergrund stellte und sie als Hilfsmittel für die weiterdringende Forschung empfahl. Ich rechne dahin vor allen Dingen die allgemeinen Existenzsätze betreffend die uns interessierenden Funktionen auf beliebig gegebenen Riemannschen Flächen. Im Wesentlichen waren diese Sätze durch Schwarz streng bewiesen, aber man hatte das mehr als ein Endergebnis aufgefaßt, nicht als eine Grundlage, auf der man weiterbauen könne. Dann ferner den Nachweis (der für alle Untersuchungen über automorphe Funktionen fundamental werden sollte), daß die Riemannschen Flächen desselben p (und damit die algebraischen Gebilde, welche sie vorstellen) ein Kontinuum bilden, ein Satz, der sich mit leichter Mühe auf die Flächen desselben p, welche nach einem bestimmten Typus zerschnitten sind, überträgt. — Ich betone ferner, daß die Theorie der Ortsfunktionen auf einer allgemeinen Riemannschen Fläche an sich mehr besagt, als die auf einer mehrblättrig über die $(x+iy)$-Ebene ausgebreiteten Fläche. Bei letzterer ist nämlich eine Ortsfunktion — das $x+iy$ selbst — von vornherein gegeben, was bei der ersteren nicht der Fall ist, so daß alle Ortsfunktionen erst konstruiert werden müssen und damit gleichberechtigt werden: jede ist eine analytische Funktion jeder andern. Darüber hinaus findet man bei mir wohl zum ersten Male eine systematische und erschöpfende Theorie der *symmetrischen* Riemannschen Flächen und ihre Einordnung in die Gesamtheit der übrigen, also eine Systematik der algebraischen Gebilde mit reellen Gleichungskoeffizienten.

Ich komme nun zu den Weiterbildungen, welche die hiermit auseinandergesetzte Auffassung noch in den weiter unten abgedruckten Nummern CIII und CIV gefunden hat.

In dieser Hinsicht kommt vor allen Dingen der erste Abschnitt von Nr. CIII in Betracht. (Die übrigen Abschnitte dieser Abhandlung sind der Theorie der automorphen Funktionen gewidmet und bilden meine hierauf bezügliche Hauptarbeit.) Da ist zunächst zu nennen, daß ich an Stelle der geschlossenen Fläche allgemein das setze, was ich als „Riemannsche Mannigfaltigkeit" bezeichne, nämlich einen gegebenenfalls aus mehreren Stücken bestehenden Bereich, dessen Ränder derart aufeinander bezogen sind, daß ideell eine geschlossene Mannigfaltigkeit vorliegt. Hier ordnet sich also der Begriff des Fundamentalpolygons, wie es in meinen Arbeiten zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen hervortrat, als spezieller Fall unter. Auf jedem Teil der Riemannschen Mannigfaltigkeit kann sogar das ds^2 (oder vielmehr die Gleichung $ds^2=0$) irgendwie definit gewählt werden. Es ist aber zu beachten (vgl. Nr. CIV), daß eine Mannigfaltigkeit der genannten Art nur brauchbar ist, wenn es gelingt, sie mit einer endlichen Anzahl von Kalotten „dachziegelartig" zu überdecken, deren jede sich auf das Innere eines Kreises ein-eindeutig konform abbilden läßt. — Man wird heutzutage natürlich gleich die Frage aufwerfen, was sich aussagen läßt, wenn die Zahl solcher Kalotten unendlich groß wird. Statt dessen habe ich bereits früher (in den oben genannten Abhandlungen über die „neuen" Riemannschen Flächen) die Möglichkeit gestreift, daß das ds^2 längs bestimmter auf der Riemannschen Fläche gelegener Kurvenzweige seinen definiten Charakter verliert (vgl. insbesondere S. 101 in Bd. 2). — Da ist ferner ein synthetischer Aufbau der zu einer vorgelegten Mannigfaltigkeit gehörigen Existenzbeweise, der sich durch seine Einfachheit empfiehlt. Dabei wird durch die Kombinationsmethoden von C. Neumann und Schwarz nur erst die Existenz des Integrals zweiter Gattung (mit einem einfachen algebraischen Pol) festgestellt und dann durch Summation, bzw. Integration solcher Integrale der Rest der übrigen gewonnen. Es hängt dies genau damit zusammen, daß in der bereits als Nr. XCVII abgedruckten Abhandlung über Abelsche Funktionen (1889) das Integral dritter Gattung als Doppelintegral erscheint, das durch seine Perioden die Integrale erster Gattung liefert.

In der genannten Abhandlung über Abelsche Funktionen wird sodann der weitere Fortschritt gemacht, aus der Theorie der zu einer Riemannschen Fläche gehörigen algebraischen Funktionen durch konsequente Einführung homogener Variabler eine Theorie der algebraischen *Formen* zu gestalten. Aus diesen Formen entstehen

die Funktionen dann durch Quotientenbildung. Dieser Gegenstand ist bald darauf, wie schon auf S. 322 auseinandergesetzt wurde, durch E. Ritters Theorie der „multiplikativen" Formen wesentlich weitergeführt worden. E. Ritter hat dann auch einen andern Punkt bewiesen, an dessen Festlegung mir besonders lag, nämlich die Stetigkeit der „Moduln" einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in ihrer Abhängigkeit von deren Abmessungen. Vgl. Math. Annalen, Bd. 45 und 46, 1894 und 1895.

Im übrigen finden sich diese Fortschritte, soweit sie 1891/92 vorlagen, in den beiden autographierten Heften über Riemannsche Flächen, die ich damals ausgab und auf die hier verwiesen sei, zusammengefaßt. Über diese Hefte ist in Nr. C ein leider nur sehr kurzes Selbstreferat abgedruckt. Dabei ist weggelassen, was in den Nummern CIII und CIV ohnehin ausführlicher gesagt ist. In Heft 2 ist insbesondere die Theorie der symmetrischen Riemannschen Flächen, d. h. der Realitätstheoreme, welche man bei reellen algebraischen Gebilden aufstellen kann, weitergehend verfolgt. Hierüber ist schon in Bd. 2 dieser Ausgabe in der als Nr. XLII abgedruckten Abhandlung ein ausführlicher, aber in seiner Gedrängtheit vielleicht schwer zu lesender Bericht erstattet.

Den Abschluß meiner ganzen somit besprochenen auf die allgemeine Riemannsche Theorie bezüglichen Tätigkeit bildet endlich der Vortrag über Riemann, den ich 1894 auf der Naturforscherversammlung in Wien hielt und der nach Dafürhalten der Herausgeber, sozusagen als Einleitung zu allem Folgenden, schon in Nr. XCVIII abgedruckt ist. Der Abdruck ist ungeändert erfolgt, weil das Gefüge des Vortrages verloren gegangen sein würde, wenn alle die Fortschritte, die seitdem unsere Kenntnis der Riemannschen Theorie gemacht hat, genannt worden wären. Jedenfalls gilt noch heute, vielleicht mehr als je, was im Schlußsatze des Vortrages gesagt ist: „daß die Ausführungen nicht als Schilderungen einer zurückliegenden Zeit anzusehen sind, der wir die Empfindungen der Pietät widmen, sondern als Wiedergabe lebendiger Momente, welche die Mathematik der Gegenwart erfüllen". Beschäftigen sich ja noch heute zahlreiche Mathematiker und neuerdings auch Physiker mit den Riemannschen Problemen und Gedankenreihen.

In üblicher Weise nenne ich noch zum Schluß einige Referate, in denen über die Weiterentwicklung der hier in Betracht kommenden Literatur berichtet wird. Da ist zunächst der „*Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen*" von Brill und Noether in Bd. 3 der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (1894). Ferner folgende Artikel aus der Mathematischen Enzyklopädie: Wirtinger, *Algebraische Funktionen und ihre Integrale* in Bd. II, 2 (abgeschlossen 1901), Burkhardt und Fr. Meyer, *Potentialtheorie* in Bd. II, 1 1 (abgeschlossen 1900), und schließlich Lichtenstein, *Neuere Entwicklung der Potentialtheorie* in Bd. II, 3 (abgeschlossen 1918); letzterer bringt die Entwicklung der Variationsmethoden. K.

XCVIII. Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik[1]).

[Amtlicher Bericht der Naturforscherversammlung zu Wien (1894), abgedruckt im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 4 (1894/95).]

Hochgeehrte Anwesende!

Es hat gewiß seine ganz besondere Schwierigkeit, über mathematische Dinge, oder auch nur über allgemeine Verhältnisse und Beziehungen innerhalb der Mathematik vor einem größeren Publikum zu sprechen. Diese Schwierigkeit resultiert daraus, daß die Begriffe, mit denen wir uns beschäftigen und deren inneren Zusammenhang wir erforschen, selbst erst das Produkt fortgesetzter mathematischer Gedankenarbeit sind, daß sie dem gewöhnlichen Leben fern liegen.

Trotzdem habe ich nicht angestanden, der ehrenvollen Aufforderung zu entsprechen, welche der Vorstand Ihrer Gesellschaft neuerdings an mich richtete, und den heutigen ersten Vortrag zu übernehmen.

Ich hatte das Beispiel des nun vollendeten großen Forschers vor Augen, welcher ursprünglich als Redner in Aussicht genommen war. Es ist zweifellos ein großes Verdienst von Hermann v. Helmholtz, daß er von Beginn seiner Laufbahn an bemüht gewesen ist, die Probleme und Resultate der wissenschaftlichen Arbeit auf allen den vielen von ihm berührten Gebieten in allgemein verständlichen Vorträgen dem Kreise der weiteren Fachgenossen vorzulegen; er hat dadurch jeden einzelnen von uns auf dessen eigenem Gebiete gefördert. Wenn es von vornherein unmöglich scheint, ein Gleiches im Hinblick auf reine Mathematik zu leisten, so drängen dafür die inneren Verhältnisse meines Faches immer zwingender darauf hin, zu versuchen, was sich erreichen lassen möchte. Ich spreche hier nicht als einzelner, ich spreche im Namen der sämtlichen Mitglieder der *mathematischen Vereinigung*, welche sich im Anschluß an die Gesellschaft der Naturforscher und Ärzte vor einigen Jahren gebildet hat, und die, wenn nicht formal, so doch tatsächlich mit ihrer ersten Sektion identisch ist. Wir empfinden, daß unter dem Einflusse der modernen

[1]) Vortrag, gehalten in der öffentlichen Sitzung der Naturforscherversammlung zu Wien am Mittwoch den 26. September 1894.

Entwicklung unsere fortschreitende Wissenschaft je länger je mehr Gefahr läuft, sich zu isolieren. Die enge Beziehung zwischen Mathematik und theoretischer Naturwissenschaft, wie sie zum Segen beider Gebiete seit dem Emporkommen der modernen Analysis bestand, droht zu zerreißen. Hier liegt eine große, täglich wachsende Gefahr. Dem wollen wir Mitglieder der mathematischen Vereinigung nach Kräften entgegenwirken. In diesem Sinne war es, daß wir uns an die Naturforscherversammlung angeschlossen haben. Wir wünschen von Ihnen im persönlichen Verkehre zu lernen, wie sich der wissenschaftliche Gedanke in Ihren Disziplinen entwickelt, und wo dementsprechend der Ansatzpunkt für das Eingreifen des Mathematikers gegeben sein mag. Wir wünschen umgekehrt, von Ihrer Seite für unsere Auffassungen und Bestrebungen einiges Interesse und Verständnis zu finden. In diesem Sinne stehe ich vor Ihnen und versuche, von der Bedeutung desjenigen Forschers ein Bild zu entwerfen, der wie kein anderer für die Entwicklung der modernen Mathematik bestimmend gewesen ist, von Bernhard Riemann. Dabei hoffe ich, jedenfalls denjenigen unter Ihnen einiges bieten zu können, denen die Ideengänge der Mechanik und theoretischen Physik geläufig sind. Sie alle aber müssen fühlen, daß hier Verbindungspunkte mit dem naturwissenschaftlichen Denken vorliegen.

Der äußere Lebensgang von Riemann wird vielleicht Ihre Teilnahme, aber kaum Ihr besonderes Interesse erregen. Riemann ist einer der stillen Gelehrten gewesen, welche ihre tiefen Gedanken langsam in sich ausreifen lassen. Als er 1851 in Göttingen mit einer allerdings sehr hervorragenden Dissertation promovierte, war er 25 Jahre alt; es dauerte weitere drei Jahre, bis er sich ebenda habilitierte. Um diese Zeit entstehen in rascher Aufeinanderfolge alle die bedeutenden Arbeiten, von denen ich zu berichten habe. Riemann ist 1859 nach dem Tode von Dirichlet dessen Nachfolger an der Göttinger Universität geworden, aber schon 1863 begann die unheilvolle Krankheit, der er 1866 zum Opfer gefallen ist, im Alter von nur 40 Jahren. Seine gesammelten Werke, welche zuerst 1876 von Heinrich Weber und Dedekind herausgegeben wurden (und die bereits in zweiter Auflage vorliegen), sind nicht etwa besonders umfangreich; sie füllen einen Oktavband von ca. 550 Seiten, darunter sind nur etwa die Hälfte Arbeiten, die zu Riemanns Lebzeiten veröffentlicht worden sind[2]). Die große Wirkung, welche von Riemann ausgegangen ist und fortwährend ausgeht, ist einzig eine Folge der *Eigenartigkeit* und selbstverständlich der *eindringenden Kraft* seiner mathematischen Betrachtungen.

[2]) [1902 haben Noether und Wirtinger noch in einem Oktavband von ca. 200 Seiten Nachträge zu Riemanns Werken herausgegeben, die aus Nachschriften Riemannscher Vorlesungen bestehen und viel Interessantes enthalten.]

Entzieht sich die letztere der heutigen Darlegung, so meine ich die Eigenart der Riemannschen Mathematik Ihnen allerdings vorweg erklären zu können, indem ich den einheitlichen Grundgedanken bezeichne, von dem aus alle seine Entwicklungen entspringen. Ich darf vorweg erwähnen, daß Riemann sich viel und eingehend mit physikalischen Betrachtungen beschäftigt hat. Aufgewachsen in der großen Tradition, die durch die Vereinigung der Namen Gauss und Wilhelm Weber bezeichnet ist, beeinflußt andererseits von der Herbartschen Philosophie, hat er immer wieder daran gearbeitet, in mathematischer Form eine einheitliche Formulierung der sämtlichen Naturerscheinungen zugrunde liegenden Gesetze zu finden. Diese Untersuchungen sind, wie es scheint, niemals zu einem bestimmten Abschlusse gekommen und liegen uns in Riemanns Nachlaß nur ganz bruchstückweise vor. Es handelt sich um verschiedene Ansätze, denen nur dies Eine gemeinsam ist, was heute unter der Herrschaft von Maxwells elektromagnetischer Lichttheorie die allgemeine Grundanschauung wenigstens der jüngeren Physiker sein dürfte, die Annahme nämlich, daß der Raum von einer kontinuierlich ausgebreiteten Flüssigkeit erfüllt ist, welche gleichzeitig der Träger der optischen, wie der elektrischen und der Gravitationserscheinungen ist. Ich verweile nicht bei den Einzelheiten, um so mehr, als dieselben heute nur noch historisches Interesse besitzen dürften. Was ich betonen will, ist dies, *daß eben hier die Quelle von Riemanns rein mathematischen Entwicklungen liegt.* Was in der Physik die Verbannung der Fernwirkungen, die Erklärung der Erscheinungen durch die inneren Kräfte eines raumerfüllenden Äthers ist, das ist in der Mathematik das Verständnis der Funktionen *aus ihrem Verhalten im Unendlich-Kleinen*, insbesondere also *aus den Differentialgleichungen*, denen sie genügen. Und wie im übrigen die einzelne Erscheinung im Gebiete der Physik von der allgemeinen Anordnung der Versuchsbedingungen abhängt, so individualisert Riemann seine Funktionen durch die *besonderen Grenzbedingungen*, die er ihnen auferlegt. Die Formel, deren man zur rechnerischen Beherrschung der Funktion bedarf, erscheint hier als Schlußresultat der Betrachtungen, nicht als Ausgangspunkt. Wenn ich wagen darf, die Analogie so scharf zu betonen, so werde ich sagen, *daß Riemann im Gebiete der Mathematik und Faraday im Gebiete der Physik parallel stehen.* — Diese Bemerkung bezieht sich zunächst auf den *qualitativen Inhalt* der beiderseitigen Gedankengänge; ich meine aber, daß auch die *Wichtigkeit* der von den beiden Forschern erreichten Resultate, gemessen an den Bedingungen der einzelnen Wissenschaft vergleichbar sei.

Indem ich mich jetzt dazu wende, an der Hand der hiermit gegebenen Auffassung mit Ihnen die einzelnen Hauptgebiete von Riemanns mathematischen Untersuchungen zu durchwandern, habe ich selbstverständlich

mit derjenigen Disziplin zu beginnen, welche am innigsten mit seinem Namen verbunden erscheint, wenn er sie selbst auch nur als einen Beleg für sehr viel weiter ausgreifende, umfassende Tendenzen betrachten mochte: — mit der *Funktionentheorie komplexer Variabler.*

Der fundamentale Ansatz dieser Theorie ist wohlbekannt; bei Untersuchung der Funktionen einer Variablen z substituiert man für diese Variable eine zweiteilige Größe $x + iy$, mit der so gerechnet wird, daß man für i^2 allemal -1 einträgt. Der Erfolg ist, daß die Eigenschaften der Funktionen einfacher Variabler, die wir gewöhnlich betrachten, in sehr viel höherem Maße verständlich werden, als ohne eine solche Maßnahme. Um die eigenen Worte Riemanns aus seiner Dissertation von 1851 zu gebrauchen (in welcher er die Grundlinien für die ihm eigentümliche Behandlungsweise unserer Theorie gezogen hat): *es tritt beim Übergange zu komplexen Werten eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmäßigkeit hervor.*

Der Begründer dieser Theorie ist der große französische Mathematiker Cauchy[3]); aber erst in Deutschland hat dieselbe ihr modernes Gepräge erhalten, durch welches sie, sozusagen in den Mittelpunkt unserer mathematischen Überzeugungen gerückt wird. Das ist der Erfolg der gleichzeitigen Bestrebungen der beiden Forscher, die wir noch wiederholt nebeneinander zu nennen haben, nämlich von Riemann und andererseits von Weierstrass.

Auf dasselbe Ziel gerichtet, sind die Methoden dieser beiden Mathematiker im einzelnen so verschieden wie möglich; sie scheinen sich fast zu widerstreiten, was, von einem höheren Standpunkte gesehen, selbstverständlich dahin führt, daß sie einander ergänzen.

Weierstrass definiert die Funktionen einer komplexen Veränderlichen analytisch durch eine gemeinsame Formel, nämlich die unendlichen Potenzreihen; er vermeidet auch weiterhin nach Möglichkeit geometrische Hilfsmittel und sucht seine spezifische Leistung in der durchgebildeten Schärfe der Beweisführung.

Riemann dagegen beginnt — dem allgemeinen Ansatze entsprechend, den ich vorhin bezeichnete, — mit gewissen Differentialgleichungen, denen die Funktionen von $x + iy$ genügen. Es nimmt das hier unmittelbar physikalische Form an. Man setze $f(x + iy) = u + iv$. Dann erscheint

[3]) Ich sehe bei der Darstellung des Textes von Gauss ab, der, hier wie in anderen Gebieten seiner Zeit vorauseilend, zahlreiche Entdeckungen antizipiert hat, ohne hierüber irgend etwas an die Öffentlichkeit zu bringen. Es ist besonders merkwürdig, daß man bei Gauss funktionentheoretische Ansätze findet, die ganz in der Richtung der späteren Riemannschen Methoden liegen, als habe in unbewußter Form von dem älteren Forscher auf den jüngeren eine Übertragung leitender Ideen stattgefunden. [Vgl. hierzu die unten auf S. 577f. folgenden Angaben.]

vermöge der genannten Differentialgleichungen der einzelne Bestandteil, u wie v, als ein *Potential* in dem Raume der zwei Veränderlichen x und y, und man kann Riemanns Entwicklungen kurzweg dahin bezeichnen, *daß er auf diese einzelnen Bestandteile die Grundsätze der Potentialtheorie zur Geltung bringt.* Sein Ausgangspunkt liegt hiernach auf dem Gebiete der mathematischen Physik. Sie sehen, daß auch innerhalb der Mathematik der Individualität ein breiter Spielraum bleibt.

Wollen Sie übrigens bemerken, daß die Potentialtheorie, welche nach ihrer Unentbehrlichkeit in der Elektrizitätslehre und anderen Kapiteln der Physik heutzutage ein allgemein gekanntes und benutztes Instrument ist, damals noch jung war. Allerdings hat Green bereits 1828 seine grundlegende Abhandlung geschrieben, aber diese ist lange unbeachtet geblieben. Dann folgt Gauss 1839. Die Weiterverbreitung und Entwicklung der hier gegebenen Grundsätze ist, soweit Deutschland in Betracht kommt, wesentlich das Verdienst der Vorlesungen von Dirichlet, und an diese knüpft Riemann unmittelbar an.

Als spezifische Leistung von Riemann erscheint in diesem Zusammenhange zunächst selbstverständlich die Tendenz, der Potentialtheorie eine grundlegende Bedeutung für die ganze Mathematik zu geben, weiter aber eine Reihe *geometrischer Konstruktionen*, oder, wie ich lieber sage, *geometrischer Erfindungen*, über die Sie mir ein paar Worte gestatten wollen.

Ein erster Schritt ist, daß Riemann die Gleichung $u + iv = f(x + iy)$ durchweg als eine *Abbildung* der Ebene x, y auf eine Ebene u, v auffaßt. Diese Abbildung erweist sich als konform, das heißt winkeltreu, und kann geradezu durch diese Eigenschaft charakterisiert werden. Wir haben so ein neues Hilfsmittel zur Definition der Funktionen von $x + iy$. Riemann entwickelt in dieser Hinsicht den glänzenden Satz, daß es immer eine Funktion f gibt, welche ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Gebiet der xy-Ebene auf ein beliebig gegebenes, einfach zusammenhängendes Gebiet der uv-Ebene überträgt; diese Funktion ist bis auf drei Konstante, die willkürlich bleiben, völlig bestimmt.

Hierüber hinaus aber begründet er die Vorstellung der Riemannschen *Fläche* (wie wir es heute ausdrücken), das heißt einer Fläche, welche sich mehrblättrig über der Ebene ausbreitet und deren Blätter in sogenannten Windungspunkten zusammenhängen. Dies ist ohne Zweifel der schwierigste, aber auch der erfolgreichste Schritt gewesen. Wir sehen noch täglich, wie hart es dem Neuling ankommt, das Wesen der Riemannschen Fläche zu begreifen, und wie er auf einmal die ganze Theorie besitzt, wenn er diese fundamentale Vorstellungsweise erfaßt hat. Die Riemannsche Fläche bietet das Mittel, um die mehrwertigen Funktionen von $x + iy$ in ihrem Verlaufe zu verstehen. Denn auf ihr existieren

ebensolche Potentiale, wie auf der schlichten Ebene, deren Gesetzmäßigkeiten mit denselben Mitteln erforscht werden können; nicht minder bleibt die Methode der konformen Abbildung hier in Geltung. Einen ersten Haupteinteilungsgrund gibt dabei die Zusammenhangszahl der Flächen, das heißt die Zahl der Querschnitte, die man ausführen kann, ohne die Fläche in getrennte Teile zu zerlegen. Auch dies ist eine geometrisch ganz neue Fragestellung, die vor Riemann trotz ihres elementaren Charakters von niemand berührt worden war.

Vielleicht bin ich mit diesen Ausführungen bereits zu sehr ins einzelne gegangen. Um so lieber will ich gleich hinzufügen, daß alle diese Hilfsmittel, welche Riemann von der physikalischen Anschauung aus für die Zwecke der reinen Mathematik geschaffen hat, rückwärts für die mathematische Physik die größte Bedeutung gewonnen haben. Überall zum Beispiel, wo es sich um *stationäre Strömungen* von Flüssigkeiten in Gebieten von zwei Dimensionen handelt, kommen die Riemannschen Ansätze jetzt allgemein zur Verwendung. Hierdurch ist eine Reihe der interessantesten Aufgaben, die früher unlösbar schienen, erledigt worden. Sehr bekannt ist in dieser Hinsicht Helmholtz' Bestimmung der Gestalt eines freien Flüssigkeitsstrahls. Vielleicht weniger beachtet ist eine andere Art der physikalischen Anwendung, bei welcher die Riemannschen Vorstellungsweisen in besonders reizvoller Kombination zur Geltung kommen. Ich meine die Theorie der *Minimalflächen*. Riemanns eigene Untersuchungen hierüber sind erst 1867 nach seinem Tode publiziert worden, ziemlich gleichzeitig mit parallellaufenden Untersuchungen von Weierstrass über denselben Gegenstand. Seitdem ist die Fragestellung durch Schwarz und andere sehr viel weiter verfolgt worden. Es handelt sich darum, die Gestalt der kleinsten Fläche zu bestimmen, die in einen festen Rahmen eingespannt werden kann, — sagen wir die Gleichgewichtsfigur einer Flüssigkeitslamelle, die in eine gegebene Kontur paßt. Da ist das Merkwürdige, daß auf Grund der Riemannschen Ansätze die in der Analysis bekannten Funktionen gerade ausreichen, um die einfachsten Fälle zu erledigen.

Diese Anwendungen, die ich heute voranstelle, sind selbstverständlich nur die eine Seite der Sache. Die Hauptbedeutung der funktionentheoretischen Methoden, um die es sich handelt, liegt zweifellos nach Seiten *der reinen Mathematik*. Ich muß versuchen, dies genauer zu entwickeln, wie es der Wichtigkeit des Gegenstandes entspricht, ohne doch dabei besondere Vorkenntnisse vorauszusetzen.

Lassen Sie mich mit der ganz allgemeinen Frage beginnen, wie es überhaupt mit dem Fortschritt im Gebiete der reinen Mathematik bestellt ist. Die Weiterbildung der reinen Mathematik erscheint dem Ferner-stehenden vielleicht als etwas ganz Willkürliches, weil die Konzentration auf einen von Haus aus gegebenen bestimmten Gegenstand wegfällt. Und dennoch gibt es einen Regulator, der in beschränkterem Sinne innerhalb aller anderen Disziplinen wohlbekannt ist — *die historische Kontinuität: Die reine Mathematik wächst, indem man alte Probleme mit neuen Methoden durchdenkt. In dem Maße, wie wir die früheren Aufgaben besser verstehen, bieten sich neue von selbst.*

Von dieser Auffassung geleitet, müssen wir zunächst einen Blick auf das funktionentheoretische Material werfen, welches Riemann zu Beginn seiner Laufbahn entgegentrat. Man hatte gefunden, daß unter den analytischen Funktionen einer Variablen, das heißt eben unter den Funktionen von $x+iy$, drei Klassen der Beachtung ganz besonders wert sind. Es sind dies zunächst die *algebraischen* Funktionen, die durch eine endliche Zahl von Elementaroperationen, das heißt von Additionen, Multiplikationen und Divisionen definiert werden — im Gegensatze zu den transzendenten Funktionen, bei deren Festlegung unendliche Reihen der genannten Operationen benötigt werden. Unter den transzendenten Funktionen stehen natürlich die Logarithmen und andererseits die trigonometrischen Funktionen, also Sinus und Cosinus usw., als die einfachsten voran. Aber die Forschung war über diese bereits fortgeschritten, einerseits zu den *elliptischen* Funktionen, die aus der Umkehr der elliptischen Integrale erwachsen, dann zu den anderen Funktionen, welche mit der *hypergeometrischen Reihe* zusammenhängen, den Kugelfunktionen, Besselschen Funktionen, Gammafunktionen usw.

Die Riemannsche Leistung kann nun am kürzesten dahin bezeichnet werden, daß er für eine jede dieser drei Funktionsklassen ganz neue Resultate und neue Auffassungen gefunden hat, welche bis heute fortschreitend die Quelle nachhaltigster Anregung geblieben sind. Einige wenige Bemerkungen mögen dies mehr im einzelnen vorführen.

Das Studium der *algebraischen Funktionen* fällt dem Wesen nach zusammen mit dem Studium der algebraischen *Kurven*, deren Eigenschaften die Geometer studieren, mögen sie sich zu den „Analytikern" zählen, welche die Formel voranstellen, oder zu den „synthetischen Geometern" im Sinne Steiners und v. Staudts, die mit der Erzeugung der Kurven durch Strahlbüschel operieren. Der wesentliche neue Gesichtspunkt, den Riemann hier eingeführt hat, ist der Gesichtspunkt der allgemeinen eindeutigen Transformation. Von hier aus erscheinen die vielgestaltigen algebraischen Kurven in große Kategorien zusammengefaßt, und es entsteht, indem man von den Eigentümlichkeiten der einzelnen Kurvenform absieht, eine Lehre von den allgemeinen Eigenschaften, die allen zusammengehörigen Kurven gemeinsam sind. Die Geometer haben nicht gezögert, die solcherweise entspringenden Resultate von ihrem Standpunkte aus

abzuleiten und weiter zu verfolgen, — allen voran Clebsch, der gleich auch begann, die entsprechenden Untersuchungen bei mehrdimensionalen algebraischen Gebilden in Angriff zu nehmen. Aber es wird darauf ankommen, daß die Kurvengeometrie auch die *Methoden* Riemanns nach ihrem inneren Gehalte zu assimilieren sucht. Ein erster Schritt dazu ist, daß man an der Kurve selbst das Gegenbild für die zweifach ausgedehnte Riemannsche Fläche konstruiert, was in mannigfacher Weise gelingt. Der weitere Fortschritt müßte sein, daß man auf dem so definierten Gebilde funktionentheoretisch operieren lernt.

Die Theorie der *elliptischen Integrale* findet ihre Weiterbildung in der Betrachtung der allgemeinen Integrale algebraischer Funktionen, über welche der Norweger Abel in den zwanziger Jahren dieses Jahrhunderts die ersten grundlegenden Untersuchungen publiziert hat. Man wird es immer als eine der größten Leistungen Jacobis ansehen müssen, daß er durch eine Art von Divination für diese Integrale ein Umkehrproblem aufstellte, welches, ebenso wie im Falle der elliptischen Integrale die direkte Umkehr, eindeutige Funktionen ergibt. Die wirkliche Durchführung dieses Umkehrproblems ist die zentrale Aufgabe, welche auf verschiedenen Wegen gleichzeitig von Weierstrass und Riemann gelöst worden ist. Man hat die große Abhandlung *über die Abelschen Funktionen*, in welcher Riemann 1857 seine Theorie veröffentlichte, unter allen Leistungen seines Genius immer als die glänzendste betrachtet. Denn das Resultat kommt nicht auf mühsamem Wege, sondern durch unmittelbare Betrachtungen hervor, einfach indem Riemann in geeigneter Ideenverbindung die geometrischen Hilfsmittel heranzieht, von denen soeben andeutungsweise die Rede war. Ich habe bei einer früheren Gelegenheit[1]) gezeigt, daß man seine Resultate, betreffend die Integrale, sowie die daraus folgenden Ergebnisse, betreffend die algebraischen Funktionen, in übersichtlichster Weise erhält, indem man stationäre Flüssigkeitsströmungen, sagen wir Strömungen der Elektrizität, auf beliebig im Raume gelegenen geschlossenen Flächen betrachtet. Doch betrifft das nur die erste Hälfte der Riemannschen Abhandlung. Die zweite Hälfte, welche sich auf die Thetareihen bezieht, ist vielleicht noch bemerkenswerter. Es ergibt sich da das merkwürdige Resultat, daß die Thetareihen, deren man zur Erledigung des Jacobischen Umkehrproblems bedarf, nicht die allgemeinen sind, womit die neue Aufgabe gegeben ist, die Stellung der allgemeinen Theta in dieser Theorie zu bestimmen. Nach einer Notiz von Hermite hat Riemann bereits den Satz gekannt, der später von Weierstrass publiziert und neuerdings von Picard und Poincaré behandelt wurde, nämlich daß die Thetareihen

[1]) [Vgl. die hier folgend als Nr. XCIX abgedruckte Schrift „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale."]

ausreichen, um die allgemeinsten periodischen Funktionen mehrerer Variablen aufzustellen.

Doch ich darf auf diese Einzelfragen nicht zu weit eingehen. Eine zusammenhängende Darstellung der Entwicklung zu geben, welche an Riemanns Abelsche Funktionen anschließt, ist darum mißlich, weil die weitgehenden Untersuchungen von Weierstrass über denselben Gegenstand immer nur erst aus Vorlesungsheften bekannt sind. Ich werde mich also auf die Bemerkung beschränken, daß das wichtige Buch von Clebsch und Gordan, das 1866 erschien, im wesentlichen bezweckte, die Riemannschen Resultate an der algebraischen Kurve mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie zur Ableitung zu bringen. Die Riemannschen Methoden waren damals noch eine Art Arcanum seiner direkten Schüler und wurden von den übrigen Mathematikern fast mit Mißtrauen betrachtet. Ich kann dem gegenüber nur wiederholen, was ich soeben bei den Kurven bemerkte, daß nämlich die fortschreitende Entwicklung ersichtlich mit Notwendigkeit dahin führt, auch die Riemannschen Methoden dem Allgemeinbesitz der Mathematiker einzufügen. Es ist interessant, in dieser Hinsicht, die neuesten französischen Lehrbücher zu vergleichen[5]).

Die dritte Funktionsklasse, die wir nannten, sollte diejenigen Abhängigkeitsgesetze umfassen, welche sich an die hypergeometrische Reihe anschließen. Es sind dies im weiteren Sinne diejenigen Funktionen, die durch lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten definiert werden können. Riemann hat hierüber bei seinen Lebzeiten nur eine erste einleitende Arbeit veröffentlicht (1856), welche sich ausschließlich mit dem hypergeometrischen Falle selbst beschäftigt und in überraschender Weise zeigt, wie alle die früher bekannten merkwürdigen Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion ohne alle Rechnung aus dem Verhalten der Funktion bei Umkreisung der singulären Punkte abgeleitet werden können. Wir wissen jetzt aus seinem Nachlasse, in welcher Form er sich die entsprechende allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung ausgeführt dachte: auch hier sollte die Gruppe der linearen Substitutionen, welche die Lösungen bei Umkreisung der singulären Punkte erleiden, voranstehen und das oberste Merkmal der Klassifikation abgeben.

Dieser Ansatz, welcher gewissermaßen der von Riemann gegebenen Behandlung der Abelschen Integrale entspricht, ist in der umfassenden von Riemann beabsichtigten Weise noch nicht durchgeführt worden; die zahlreichen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen, welche in den letzten Jahrzehnten anderweitig publiziert worden sind, haben im

[5]) Vgl. Picard, Traité d'analyse, Bd. 2, Paris 1893. Appell et Goursat, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, Paris 1895.

wesentlichen nur erst einzelne Teile der Theorie geordnet. Es sind in dieser Hinsicht insbesondere die Untersuchungen von Fuchs zu nennen. Übrigens ist die Theorie, sofern man sich auf lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung beschränkt, einer einfachen geometrischen Interpretation fähig. Man hat die konforme Abbildung zu betrachten, welche der Quotient zweier Partikularlösungen der Differentialgleichung von dem Gebiet der unabhängigen Veränderlichen entwirft. Im einfachsten Falle der hypergeometrischen Funktion erhält man hier die Abbildung einer Halbebene auf ein Kreisbogendreieck und damit einen merkwürdigen Übergang zur sphärischen Trigonometrie. Allgemein gibt es Fälle, welche eindeutige Umkehr gestatten und damit zu jenen bemerkenswerten Funktionen einer Variablen Anlaß geben, die gleich den periodischen Funktionen durch unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen, und die ich dem entsprechend als *automorphe* Funktionen bezeichne. Alle diese Entwicklungen, welche die Funktionentheoretiker der Neuzeit beschäftigen, treten mehr oder minder explizite bereits in den hinterlassenen Papieren Riemanns[6]) auf, insbesondere in der Arbeit über die Minimalflächen, von welcher oben die Rede war. Ich verweise übrigens auf Schwarz' Abhandlung über die hypergeometrische Reihe und auf die bahnbrechenden Untersuchungen von Poincaré zur Theorie der automorphen Funktionen. Hier rubrizieren auch die Untersuchungen über die elliptischen Modulfunktionen und die Funktionen der regulären Körper.

Ich darf die Besprechung von Riemanns funktionentheoretischen Arbeiten nicht schließen, ohne einer isoliert stehenden Abhandlung zu gedenken, in welcher derselbe interessante Beiträge zur Theorie der bestimmten Integrale gibt, die aber zumal durch die Anwendung, welche Riemann auf ein zahlentheoretisches Problem macht, berühmt geworden ist. Es handelt sich um das *Gesetz der Verteilung der Primzahlen* innerhalb der natürlichen Zahlenreihe. Riemann gibt für dasselbe Annäherungsausdrücke, welche sich wesentlich näher an die Ergebnisse der empirischen Abzählungen anschließen, als die bis dahin aus diesen Abzählungen induktiv abgeleiteten Regeln. Zwei Bemerkungen sind es, die sich hier aufdrängen. Erstlich wollen Sie beachten, wie merkwürdig die einzelnen Teile der höheren Mathematik zusammenhängen, indem hier ein Problem, welches in die Elemente der Zahlenlehre zu gehören scheint, aus den Entwicklungen der feinsten funktionentheoretischen Fragen eine ungeahnte Förderung erfährt. Zweitens aber habe ich hervorzuheben, daß die Beweise der Riemannschen Abhandlung, wie er übrigens selbst bemerkt, nicht ganz vollständig sind, und daß dieselben trotz zahlreicher Be-

[6]) [Vgl. die auf S. 577 folgenden Ausführungen über die Vorgeschichte der automorphen Funktionen.]

mühungen der neuesten Zeit noch nicht lückenlos haben hergestellt werden können. Riemann muß vielfach mit der Intuition gearbeitet haben. Es gilt dies auch, wie ich nicht verfehlen darf, nachträglich anzugeben, für seine Grundlegung der Funktionentheorie selbst. Riemann verwendet dort eine in der mathematischen Physik oft gebrauchte Schlußweise, die er seinem Lehrer Dirichlet zu Ehren als *Dirichletsches Prinzip* bezeichnet. Es handelt sich darum, eine stetige Funktion zu bestimmen, welche ein gewisses Doppelintegral zu einem Minimum macht, und hier behauptet nun das genannte Prinzip, daß die *Existenz* einer solchen Funktion aus der Fragestellung selbst evident sei[7]). Weierstrass hat gezeigt, daß hier ein Fehlschluß vorliegt; es könnte sein, daß das Minimum, welches wir suchen, nur eine Grenze bezeichnet, welche man innerhalb des Gebietes der stetigen Funktionen nicht erreichen kann. Hiermit wird ein großer Teil der Riemannschen Entwicklungen hinfällig. Trotzdem aber sind die weitreichenden Resultate, welche Riemann auf das genannte Prinzip stützt, alle richtig, wie dies Carl Neumann und Schwarz durch strenge Methoden später ausführlich gezeigt haben. Man muß sich wohl die Idee bilden, daß Riemann die Theoreme selbst ursprünglich der physikalischen Anschauung entnommen hat, die sich hier wieder einmal als heuristisches Prinzip bewährte, und nur hinterher auf die genannte Schlußweise bezog, um einen in sich geschlossenen mathematischen Gedankengang zu haben. Hierbei hat er, wie längere Entwicklungen seiner Dissertation zeigen, gewisse Schwierigkeiten sehr wohl gefühlt, aber im Hinblicke darauf, daß er die Schlußweise in analogen Fällen von seiner Umgebung, selbst von Gauss, anstandslos angenommen sah, nicht so weit verfolgt, als erforderlich gewesen wäre[8]).

[7]) Ich verstehe hier also unter dem „Prinzip" entgegen einem vielfach verbreiteten Sprachgebrauche die Schlußweise, nicht die daraus abgeleiteten Resultate. Bei der Gelegenheit möchte ich auf einen Aufsatz von W. Thomson aufmerksam machen, der in Liouvilles Journal, Bd. XII, 1847 [= Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism by Sir W. Thomson, Nr. XIII, S. 139ff.] abgedruckt ist und von den deutschen Mathematikern zu wenig beachtet zu sein scheint. Das fragliche Prinzip ist dort in großer Allgemeinheit ausgesprochen.

[8]) [Ich erinnere mich, daß Weierstrass mir bei Gelegenheit erzählte, Riemann habe auf die Gewinnung seiner Existenzsätze durch das „Dirichletsche Prinzip" keinerlei entscheidenden Wert gelegt. Daher habe ihm auch seine (Weierstrass') Kritik des „Dirichletschen Prinzips" keinen besonderen Eindruck gemacht. Jedenfalls ergab sich die Aufgabe, die Existenzsätze auf andere Art zu beweisen. Diese dürfte dann Weierstrass seinem Spezialschüler Schwarz übertragen haben, bei dem er die erforderliche Verbindung geometrisch-anschaulichen Denkens mit der Fähigkeit, analytische Konvergenzbeweise zu führen, bemerkt hatte. Damit ist der bezüglichen außerordentlichen Leistung von Schwarz nichts abgebrochen, aber es ist der historische Zusammenhang, der bei bloßer Aufzählung der in den Publikationen enthaltenen Resultate verborgen bleibt, hervorgekehrt. Übrigens scheint sich Schwarz bei seinen Beweisen von physikalischen Anschauungen haben leiten lassen. Wegen der Beweise

So viel über die Funktionen komplexer Variabler. Sie repräsentieren das einzige Gebiet, welches Riemann im Zusammenhange bearbeitet hat; alles andere sind Einzeluntersuchungen. Aber man würde doch ein sehr unzureichendes Bild von dem Mathematiker Riemann erhalten, wenn man darum diese anderen Arbeiten zur Seite schieben wollte. Denn abgesehen von den sehr bemerkenswerten Resultaten, welche er in denselben gewinnt, lassen sie erst die allgemeine Auffassung hervortreten, die ihn beherrschte, und das Arbeitsprogramm, welches er auszuführen dachte. Auch hat eine jede dieser Untersuchungen in hervorragendem Maße anregend und bestimmend auf die Weiterentwicklung der Wissenschaft eingewirkt, wie ich sofort des näheren ausführen werde.

Sagen wir es vor allen Dingen, was wir schon oben andeuteten, daß die von Riemann gegebene Behandlung der Funktionentheorie komplexer Variabler, welche von der partiellen Differentialgleichung des Potentials beginnt, nach seiner Auffassung nur ein *Beispiel* für eine analoge Behandlung aller anderen physikalischen Probleme sein sollte, die auf partielle Differentialgleichungen — oder überhaupt auf Differentialgleichungen — führen; allemal soll gefragt werden, welches die mit den Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten sind, und wie weit die Lösungen durch die bei ihnen hervortretenden Unstetigkeiten und zutretende Nebenbedingungen bestimmt sein mögen. Die Durchführung dieses Programms, welches seitdem von verschiedenen Seiten wesentlich gefördert ist und in den letzten Jahren mit besonderem Erfolge von den französischen Geometern aufgenommen wurde, kommt auf nichts Geringeres als eine *systematische Neubegründung der Integrationsmethoden der Mechanik und mathematischen Physik* hinaus. Riemann hat selbst in dieser Hinsicht nur ein einzelnes Problem eingehender behandelt. Es geschieht dies in der Abhandlung über die *Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, 1860. Man muß bei den linearen partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik zwei Haupttypen unterscheiden: den elliptischen und den hyperbolischen Typus, für welche beziehungsweise die Differentialgleichung des Potentials und die Differentialgleichung

von Schwarz und Carl Neumann vgl. auch die §§ 6 und 7 des Abschnittes I meiner unten abgedruckten Abh. CIII. — Ich bemerke gern, daß neuerdings Bolza in seinem Artikel „Gauss und die Variationsrechnung", III. Teil, § 2 in Bd. X_2 der Gesammelten Werke von Gauss dargelegt hat, daß das von Riemann so genannte „Dirichletsche Prinzip" auf Gauss' Untersuchungen zur Potentialtheorie (1839/40) zurückgeht. Riemann hatte die Schlußweise in Dirichlets Vorlesung kennen gelernt und dann, wie es junge Forscher zu tun pflegen, mit dem Namen seines Lehrers belegt. — Es ist Hilbert vorbehalten geblieben, von 1901 an beginnend, zu zeigen, daß unbeschadet der Richtigkeit der Weierstrassischen Ausführungen gerade im Falle der Potentialtheorie und verwandter Probleme die Existenz des Minimums dennoch aus dem Variationsproblem als solchem erschlossen werden kann. K.]

der schwingenden Saite die einfachsten Beispiele bilden; ihnen tritt als ein Übergangsfall der parabolische Typus zur Seite, unter den die Differentialgleichung der Wärmeleitung rubriziert. Neuere Untersuchungen von **Picard** haben gezeigt, daß man die Integrationsmethoden der Potentialtheorie ziemlich ungeändert auf die elliptischen Differentialgleichungen überhaupt übertragen kann. Aber wie ist es bei den anderen Typen? In dieser Hinsicht gibt Riemanns Arbeit einen ersten wichtigen Beitrag. Riemann zeigt, welche merkwürdigen Modifikationen an der aus der Potentialtheorie bekannten Randwertaufgabe und ihrer Lösung durch die heute so genannte **Greensche** Funktion angebracht werden müssen, damit die Entwicklung für die hyperbolischen Differentialgleichungen gültig bleibe. Aber auch nach anderer Seite ist die Riemannsche Abhandlung besonders bemerkenswert. Schon die Reduktion des in der Überschrift genannten Problems auf eine lineare Differentialgleichung ist eine besondere Leistung. Und daneben zieht sich durch die Abhandlung eine Betrachtungsweise, die dem Physiker allerdings kaum überraschend sein wird: *die graphische Behandlung des Problems.* Ich möchte hierauf ganz besonders aufmerksam machen. Denn die in Rede stehende Methode wird seitens der an abstraktere Überlegungen gewöhnten Mathematiker heutzutage vielfach unterschätzt. Um so erfreulicher ist es, daß eine mathematische Autorität wie Riemann deren Gebrauch an geeigneter Stelle vertritt und aus ihr die merkwürdigsten Folgerungen zu ziehen weiß.

Es bleiben nun noch die beiden großen Entwürfe zu besprechen, welche Riemann 1854, im Alter von 28 Jahren, bei seiner Habilitation vorgelegt hat: der Aufsatz *über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, und die Schrift *über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe.* Es ist merkwürdig, wie verschieden diese beiden Arbeiten bisher von dem allgemeineren wissenschaftlichen Publikum gewertet worden sind: Die Hypothesen der Geometrie haben seit lange die ihnen gebührende allgemeine Beachtung gefunden, hauptsächlich jedenfalls durch das Eintreten von **Helmholtz**, wie viele von Ihnen wissen; die Untersuchung über die trigonometrische Reihe aber ist bislang nur im engeren Kreise der Mathematiker bekannt. Dies hindert nicht, daß die Resultate, welche sie enthält, oder, ich will lieber sagen, die Betrachtungen, zu denen sie Anlaß gegeben hat, oder mit denen sie im Zusammenhange steht, vom allgemeinen erkenntnistheoretischen Standpunkte aus das höchste Interesse beanspruchen.

Was die *Hypothesen der Geometrie* angeht, so werde ich hier mich nicht weiter über die philosophische Bedeutung der Sache verbreiten, über die ich nichts Neues zu sagen habe. Es handelt sich bei dieser Diskussion für den Mathematiker weniger um den Ursprung der geometrischen Axiome,

als um deren gegenseitige logische Abhängigkeit. Die berühmteste Frage ist jedenfalls die nach der Stellung des Parallelenaxioms. Die Untersuchungen von **Gauss**, **Lobatschefskij** und **Bolyai** (um nur die hervorragendsten Namen zu nennen) haben bekanntlich gezeigt, daß das Parallelenaxiom gewiß keine Folge der übrigen Axiome ist, daß man eine allgemeine, in sich konsequente Geometrie aufbauen kann, welche die gewöhnliche Geometrie als Spezialfall enthält, indem man vom Parallelenaxiom absieht. Diesen wichtigen Betrachtungen hat Riemann dadurch eine neue und spezifische Wendung gegeben, daß er die Ideenbildungen der *analytischen* Geometrie voranstellt: der Raum erscheint ihm als ein besonderer Fall einer dreifach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit, in welcher sich das Quadrat des Bogenelementes durch eine quadratische Form der Differentiale der Koordinaten ausdrückt. Die speziellen geometrischen Resultate, welche er von hier aus gewinnt, werde ich nicht weiter besprechen und noch weniger auf die Weiterentwicklung eingehen, welche die Theorie in der Zwischenzeit von anderer Seite gefunden hat. Das Wesentliche in dem vorliegenden Zusammenhange ist, daß Riemann auch hier seinem Grundgedanken treu geblieben ist: *die Eigenschaften der Dinge aus ihrem Verhalten im Unendlichkleinen zu verstehen.* Er hat dabei den Grund zu einem neuen Kapitel der Differentialrechnung gelegt: *zur Lehre von den quadratischen Differentialausdrücken beliebiger Variabler*, beziehungsweise von den *Invarianten*, welche diese Differentialausdrücke gegenüber beliebigen Transformationen der Variabeln besitzen. Ich will hier, in Ergänzung der sonstigen Betrachtungen meines Vortrages, einmal diese abstrakte Seite der Sache hervorheben. Gewiß ist es bei der *Auffindung* mathematischer Beziehungen nicht gleichgültig, ob man den Symbolen, mit welchen man operiert, eine bestimmte Bedeutung beilegt oder nicht, indem sich gerade aus der konkreten Auffassung diejenigen Gedankenverbindungen ergeben, welche weiterführen. Beleg hierfür ist so ziemlich alles, was wir bisher über die innere Verwandtschaft der Riemannschen Mathematik und der mathematischen Physik sagten. Aber unabhängig davon steht das schließliche Resultat der mathematischen Untersuchungen oberhalb aller derartiger spezieller Ansätze; es ist ein allgemeines logisches Schema, dessen besonderer Inhalt gleichgültig bleibt und je nachdem in verschiedener Weise gewählt werden kann. Von diesem Standpunkte aus hat es nichts Überraschendes, daß Riemann später (1861) in einer der Pariser Akademie eingereichten Preisaufgabe von seiner Untersuchung über die Differentialausdrücke eine Anwendung auf ein Problem der Wärmeleitung macht, also auf einen Gegenstand, der mit den Hypothesen der Geometrie gewiß nichts zu tun hat. In demselben Sinne schließen sich hier moderne Untersuchungen über die Äquivalenz und Klassifikation der allgemeinen mechanischen Probleme an. In der Tat kann man die Differentialgleichungen der Mechanik nach Lagrange und Jacobi in der Weise darstellen, daß sie von einer einzigen quadratischen Form der Differentiale der Koordinaten abhängen.

Ich komme nun zu der Arbeit *über die trigonometrische Reihe*, die ich mit Vorbedacht an das Ende gesetzt habe, weil sie einen letzten wesentlichen Charakter der Riemannschen Auffassung hervortreten läßt. Bei meiner bisherigen Darstellung konnte ich allemal kurzweg an die geläufigen Vorstellungsweisen der Physik oder doch der Geometrie anknüpfen. Aber der eindringende Geist Riemanns hat sich nicht damit begnügt, die geometrisch-physikalische Anschauung zu benutzen; er ist dazu übergegangen, dieselbe zu kritisieren und nach der Notwendigkeit der aus ihr fließenden mathematischen Beziehungen zu fragen. Es handelt sich, kurz gesagt, um die *Prinzipien der Infinitesimalrechnung*. Riemann hat in seinen sonstigen Arbeiten zu den in dieser Richtung vorliegenden Problemen immer nur beiläufig oder versteckt Stellung genommen. Anders in der Arbeit über die trigonometrische Reihe. Er behandelt ja da leider nur einzelne Probleme: die Frage, ob eine Funktion in jedem Punkte unstetig sein könne, und ob bei Funktionen von so allgemeiner Beschaffenheit unter Umständen noch von einer Integration möchte gesprochen werden können. Aber diese Probleme behandelt er in so überzeugender Weise, daß von hier aus die Untersuchungen anderer über die Grundlagen der Analysis den mächtigsten Impuls erhalten haben. Die Tradition berichtet, daß Riemann in späteren Jahren seinen Schülern denjenigen Punkt bezeichnete, der als das merkwürdigste Ergebnis der modernen Kritik dasteht: die Existenz stetiger Funktionen, die an keiner Stelle differentiierbar sind. Ausführlicheres über derartige „unvernünftige“ Funktionen (wie man lange sagte) ist dann freilich erst durch Weierstrass bekannt geworden, der überhaupt wohl das meiste dazu beigetragen hat, um die *Theorie reeller Funktionen reeller Variabler* (wie man das ganze hier vorliegende Gebiet zu nennen pflegt) in seine heutige strenge Gestalt zu bringen. Ich verstehe die Riemannschen Entwicklungen über die trigonometrische Reihe so, daß er mit der Weierstrassischen Darstellungsweise, welche in den hier vorliegenden Fragen die räumliche Anschauung verbannt und ausschließlich mit arithmetischen Definitionen operiert, was die Grundlegung angeht, einverstanden sein würde. Aber ich kann mir nicht denken, daß Riemann darum in seinem Herzen die räumliche Anschauung, wie es jetzt wohl von übereifrigen Vertretern der modernen Richtung geschieht, als etwas der Mathematik Widerstreitendes, welches notwendig zu Fehlschlüssen verleiten müßte, angesehen hat. Er muß daran festgehalten haben, daß in der Schwierigkeit, welche hier vorliegt, ein Ausgleich möglich ist.

Wir berühren hier eine Frage, welche für die Weiterentwicklung der Mathematik gerade in der Gegenwart von entscheidender Wichtigkeit sein dürfte: Unsere Studierenden wachsen zur Zeit heran, indem sie gleich anfangs alle die intrikaten Verhältnisse kennen lernen, welche die moderne Analysis als möglich aufgedeckt hat. Das ist gewiß gut, aber es hat eine bedenkliche Folgeerscheinung, daß nämlich die jungen Mathematiker sich vielfach scheuen, überhaupt bestimmte Sätze zu formulieren, daß ihnen die Frische fehlt, ohne welche auch in der Wissenschaft kein Erfolg errungen werden kann. Auf der anderen Seite glaubt die Mehrzahl der Praktiker sich den angedeuteten schwierigen Untersuchungen einfach entziehen zu dürfen. Sie lösen sich dadurch von der strengen Wissenschaft ab und entwickeln für ihren Hausgebrauch eine besondere Mathematik, die wie ein Wurzelschößling neben der veredelten Pflanze emporschießt. Wir werden alles einsetzen wollen, daß die hier vorliegende gefährliche Spaltung überwunden wird. Sei es dementsprechend gestattet, mit zwei Sätzen meine eigene Stellung in dieser Sache zu präzisieren:

Erstlich glaube ich, daß die von mathematischer Seite gerügten Mängel der räumlichen Anschauung nur temporäre sind, daß man die Anschauung üben kann, so daß man mit ihrer Hilfe die abstrakten Entwicklungen der Analytiker jedenfalls in ihrer *Tendenz* versteht.

Ich glaube ferner, daß bei der so geforderten Ausbildung der Anschauung die Anwendungen der Mathematik auf Gegenstände der Außenwelt in der Hauptsache ungeändert bestehen bleiben, sofern man sich nur entschließt, dieselben durchweg als eine Art von *Interpolation* gelten zu lassen, welche die Verhältnisse mit einer den praktischen Anforderungen genügenden, aber doch nur begrenzten Genauigkeit darstellt[9]).

Mit diesen Bemerkungen darf ich meinen Vortrag, der Ihre Geduld schon zu lange in Anspruch genommen hat, schließen. Sie mögen erkannt haben, daß auch innerhalb der Mathematik kein Stillstand ist, daß eine ähnliche Bewegung herrscht, wie in den Naturwissenschaften. Und auch dieses ist ein allgemeines Gesetz, daß zwar viele zur Entwicklung der Wissenschaft beitragen, daß aber die wirklich neuen Anregungen nur auf wenige hervorragende Forscher zurückgehen. Deren Wirksamkeit ist dann nicht auf die kurze Spanne ihres Lebens beschränkt; sie wirken nach, indem sie allmählich in immer vollerem Maße verstanden werden. So ist es zweifellos mit Riemann. Ich möchte, daß Sie meine heutigen Ausführungen nicht als die Schilderung einer zurückliegenden Zeit ansehen, der wir die Empfindungen der Pietät widmen, sondern als eine Wiedergabe lebendiger Momente, welche die Mathematik der Gegenwart erfüllen.

[9]) [Vgl. hierzu auch, was ich in den Abhandlungen XLV—XLIX in Bd. 2 dieser Ausgabe und den Vorbemerkungen dazu auf S. 212—213 ausgeführt habe. K.]

XCIX.

ÜBER RIEMANNS THEORIE

DER

ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN

UND IHRER INTEGRALE.

EINE

ERGÄNZUNG DER GEWÖHNLICHEN DARSTELLUNGEN.

VON

FELIX KLEIN,

O. Ö. PROFESSOR DER GEOMETRIE A. D. UNIVERSITÄT LEIPZIG.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

Vorrede.

Die kleine Schrift, welche ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, ist aus Vorlesungen erwachsen, die ich im verflossenen Jahre gehalten habe[1]) und in denen ich mir neben anderen Aufgaben eine Darlegung von Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale zum Zweck gesetzt hatte[2]). Es ist um höhere mathematische Vorlesungen eine eigentümliche und schwierige Sache: bei der besten Absicht des Dozenten erreichen sie durchweg nur ein sehr bescheidenes Ziel. Zumeist bestimmt, eine *systematische* Entwicklung zu bringen, beschränken sie sich entweder auf die Elemente der darzustellenden Disziplin oder verlieren sich in Einzelheiten. Ich glaubte in meinem Falle, wie ich es öfters schon tat, eine umgekehrte Methode eintreten lassen zu sollen. Die gewöhnlichen Darstellungen, wie sie die Lehrbücher von den Elementen der Riemannschen Theorie geben, setzte ich als bekannt voraus. Überdies verwies ich, sobald Einzelheiten ausführlicher zu erledigen waren, auf die einschlägigen Monographien. Dafür aber verwandte ich alle Sorgfalt auf die Darlegung des *eigentlichen Gedankenganges*, und strebte nach *Überblick* über Umfang und Leistung der Methode. Ich meine auf solchem Wege wiederholt gute Erfolge errungen zu haben, allerdings nur bei begabten Zuhörern; möge die Erfahrung zeigen, ob eine auf gleichen Grundlagen ruhende kleine Schrift sich ebenfalls als nützlich erweist!

Eine Darstellung, wie ich sie hiernach anstrebe, ist notwendig eine sehr subjektive, und bei Riemanns Theorie um so mehr, als sich für sie in Riemanns Schriften nur sehr dürftiges Material explizite vorfindet. Ich weiß nicht, ob ich je zu einer in sich abgeschlossenen Gesamtauffassung gekommen wäre, hätte mir nicht Herr Prym vor längeren Jahren (1874) bei gelegentlicher Unterredung eine Mitteilung gemacht, die immer

[1]) „Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise“, Teil I, Wintersemester 1880/81, Teil II, Sommersemester 1881.

[2]) Ich bezeichne so den Inbegriff der Untersuchungen, mit denen sich Riemann in der ersten Abteilung seiner „*Theorie der Abelschen Funktionen*“ Crelles Journal Bd. 54, 1857 (= Gesammelte Werke, 1. Aufl., S. 81 ff.; 2. Aufl., S. 88 ff.) beschäftigt. Die Theorie der Θ-Funktionen, wie sie in der zweiten Abteilung daselbst entwickelt wird, hat zunächst einen wesentlich anderen Charakter, und soll in der folgenden Darstellung ebenso ausgeschlossen bleiben, wie sie es in jener Vorlesung gewesen ist. [Ich habe sie später (1889) in der oben abgedruckten Nr. XCVII behandelt. K.]

wesentlicher für mich geworden ist, je länger ich über den Gegenstand nachgedacht habe. Er erzählte mir, *daß die Riemannschen Flächen ursprünglich durchaus nicht notwendig mehrblättrige Flächen über der Ebene sind, daß man vielmehr auf beliebig gegebenen krummen Flächen ganz ebenso komplexe Funktionen des Ortes studieren kann, wie auf den Flächen über der Ebene*[3]). Die folgende Darlegung wird genugsam zeigen, wie nützlich mir diese Bemerkung gewesen ist. Mit ihr kombinieren sich von selbst gewisse physikalische Überlegungen, die neuerdings, wenn auch unter Beschränkung auf einfachere Fälle, von verschiedenen Seiten her entwickelt worden sind[4]). Ich habe kein Bedenken getragen, diese physikalischen Anschauungen geradezu zum Ausgangspunkte meiner Darstellung zu machen. Riemann verwendet statt ihrer, wie man weiß, in seinen Schriften das Dirichletsche Prinzip[5]). Aber ich kann nicht zweifeln, daß er von analogen physikalischen Problemen ausgegangen ist, und ihnen nur hinterher, um die physikalische Evidenz durch einen mathematischen Schluß zu stützen, das Dirichletsche Prinzip substituiert hat. Wer sich die Bedingungen klar macht, unter denen Riemann in Göttingen arbeitete, wer die naturphilosophischen Spekulationen Riemanns verfolgt hat, wie sie zum Teil in Fragmenten auf uns gekommen sind[6]), wird, denke ich, diese Meinung teilen. — Wie dem auch sei: für meine Zwecke erschien die physikalische Methode als die richtige. Denn zur eigentlichen Begründung der aufzustellenden Theoreme reicht auch das Dirichletsche Prinzip bekanntermaßen in keiner Weise aus; das *heuristische* Element der Methode aber, auf dessen Entwicklung mir alles ankam, tritt bei der physikalischen Methode viel klarer hervor. Eben darum im folgenden durchweg das Heranziehen anschauungsmäßiger Überlegungen, wo ein Beweis durch Formeln nicht schwierig und vielleicht einfacher gewesen wäre, eben darum auch die wiederholte Erläuterung allgemeiner Resultate durch Beispiele und Figuren.

Im Zusammenhange hiermit muß ich der wesentlichen Beschränkung gedenken, an der ich im folgenden festgehalten habe. Man kennt die umständlichen und schwierigen Überlegungen, durch welche es in neuerer Zeit gelungen ist, wenigstens einen Teil der hier in Betracht kommenden Riemannschen Sätze durch zuverlässige Methoden zu beweisen[7]). Ich

[3]) [Siehe indessen die Vorbemerkungen auf S. 479].

[4]) Vgl. C. Neumann im 10. Bande der Math. Annalen, 1876, S. 569–571; Kirchhoff in den Berliner Monatsberichten von 1875, S. 487–497 [= Gesammelte Abhandlungen, S. 56ff.]; Töpler in Poggendorffs Annalen, Bd. 160, 1877, S. 375–388.

[5]) [Vgl. die Ausführungen oben auf S. 492f.]

[6]) Gesammelte Werke, 1. Aufl., S. 494ff., 2. Aufl., S. 576ff.

[7]) Man vergleiche insbesondere die hierhergehörigen Untersuchungen von C. Neumann und Schwarz. Übrigens findet der allgemeine Fall *geschlossener* Flächen (der für uns im folgenden der wichtigste ist) bisher nirgendwo explizite Erledigung. Herr Schwarz begnügt sich in dieser Hinsicht mit einigen Andeutungen (Berliner Monats-

habe diese Überlegungen im folgenden durchaus beiseite gelassen und also auf andere als anschauungsmäßige Begründung der vorzutragenden Sätze verzichtet. In der Tat soll man solche Beweise mit der Gedankenentwicklung, wie ich sie im folgenden versuche, in keiner Weise untermischen; es entsteht sonst eine Darstellung, die nach keiner Seite befriedigt. Aber freilich sollte man sie hinterher bringen, und ich gebe gern dem Gedanken Raum, in diesem Sinne der gegenwärtigen Schrift bei Gelegenheit eine Ergänzung folgen zu lassen[*]).

Im übrigen mag Umfang und Begrenzung meiner Darstellung für sich selbst sprechen. Daß ich oft und ausführlich meiner Freunde und meine eigenen früheren, auf verwandte Gegenstände bezüglichen Publikationen herangezogen habe, hat in einer Nebenabsicht seinen Grund, die mir aus persönlichen Gründen wichtig war: ich wünschte meinen Zuhörern eine Art Leitfaden in die Hand zu geben, vermöge dessen sie sich über den wechselseitigen Zusammenhang jener Arbeiten und ihre Stellung zu der hier entwickelten allgemeinen Auffassung selbständig orientieren können. Auf Erledigung *neuer* Probleme und Fragestellungen, die sich in großer Anzahl bieten, habe ich mich im folgenden nur so weit eingelassen, als mit der Gesamtanlage des Schriftchens verträglich schien. Immerhin möchte ich auf die Sätze aufmerksam machen, die ich (im letzten Abschnitte) betreffs konformer Abbildung beliebiger Flächen entwickelt habe; ich bin denselben um so lieber nachgegangen, als Riemann am Schlusse seiner Dissertation eine hierauf bezügliche merkwürdige Äußerung macht.

Und nun noch eine Schlußbemerkung, die einem Mißverständnisse entgegentreten soll, das sonst aus dem Gesagten erwachsen könnte! Indem ich bemüht bin, im Falle der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale den ursprünglichen Ideengang zu entwickeln, den ich bei Riemann voraussetze, umspanne ich in keiner Weise die Gesamtheit seiner funktionentheoretischen Intentionen. Für ihn waren die genannten Funktionen ja nur ein Beispiel, in dessen Behandlung er freilich besonders glücklich war. Insofern er alle möglichen Funktionen komplexer Veränderlicher umfassen wollte, dachte er an viel allgemeinere Bestimmungsweisen derselben, als im folgenden in Betracht kommen: Bestimmungsweisen, bei denen die physikalische Analogie, die wir hier zum hodegetischen Prinzip nehmen,

berichte, 1870, S. 767ff. = Ges. Math. Abhandlungen Bd. 2. S. 144ff.), und Herr C. Neumann hat überhaupt nur solche Fälle in Betracht gezogen, in denen Funktionen durch gegebene Randwerte zu bestimmen sind. [Anders ist es in der zweiten Auflage von C. Neumanns Lehrbuch „*Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*", Leipzig 1884, wo der Fall einer beliebigen, über der Ebene ausgebreiteten, geschlossenen Riemannschen Fläche ausführlich behandelt wird. — Weitere Zitate folgen in Nr. CIII].

[*]) [Vgl. die Vorbemerkungen auf S. 478.]

versagt. Man vergleiche hierzu den § 19 seiner Dissertation, man vergleiche die Arbeit über die hypergeometrische Reihe. — Demgegenüber habe ich zu erklären, daß ich in keiner Weise von diesen allgemeineren Betrachtungen ablenken möchte, indem ich von dem speziellen, in sich geschlossenen Teile eine gesonderte Darstellung gebe. Vielmehr ist meine innerste Meinung, daß gerade sie berufen sind, in der Entwicklung der modernen Funktionentheorie noch eine wichtige und hervorragende Rolle zu spielen[9]).

Borkum, den 7. Oktober 1881.

[9]) [In der Tat schließen auch meine eigenen späteren Untersuchungen, wie sie in den Nummern CI bis CVII dieses Bandes abgedruckt sind, an das erweiterte Riemannsche Programm an. K.]

Inhalt.

Abschnitt I.
Einleitende Betrachtungen.

Abschnitt II.
Exposition der Riemannschen Theorie.

Abschnitt III.
Folgerungen.

Abschnitt I.

Einleitende Betrachtungen.

§ 1.

Stationäre Strömungen in der Ebene als Deutung der Funktionen von $x + iy$.

Die physikalische Deutung der Funktionen von $x + iy$, mit welcher wir im folgenden zu arbeiten haben, ist in ihren Grundlagen wohlbekannt[10]), nur der Vollständigkeit halber müssen letztere kurz zur Sprache gebracht werden.

Sei $w = u + iv$, $z = x + iy$, $w = f(z)$. Dann hat man vor allen Dingen:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

und hieraus:

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

sowie für v:

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Hier wird man nun u als *Geschwindigkeitspotential* deuten, so daß $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ die Komponenten der Geschwindigkeit sind, mit der eine Flüssigkeit parallel zur xy-Ebene strömt. Wir mögen uns diese Flüssigkeit zwischen zwei Ebenen eingeschlossen denken, die parallel zur xy-Ebene verlaufen, oder auch uns vorstellen, daß die Flüssigkeit als unendlich dünne, übrigens gleichförmige Membran über der xy-Ebene ausgebreitet sei. Dann sagt die Gleichung (2) — und dies ist der Kern unserer physikalischen Deutung —, daß unsere Strömung eine *stationäre* ist. Die Kurven $u = \text{Const.}$ heißen die *Niveaukurven*, während die Kurven $v = \text{Const.}$, die vermöge (1) den ersteren überall rechtwinklig begegnen, die *Strömungskurven* abgeben.

[10]) Sei insbesondere auf die Darstellung verwiesen, welche Maxwell in seinem *Treatise on Electricity and Magnetism* (Cambridge 1873) gegeben hat. Dieselbe entspricht, was anschauungsgemäße Behandlung angeht, genau den Gesichtspunkten, die auch ich im Texte verfolge.

Bei dieser Vorstellungsweise ist es zunächst natürlich völlig gleichgültig, wie beschaffen wir uns die strömende Flüssigkeit denken wollen. Inzwischen wird es in der Folge vielfach zweckmäßig sein, dieselbe mit dem *elektrischen Fluidum* zu identifizieren. Es wird dann nämlich u mit dem elektrostatischen Potential, welches die Strömung hervorruft, proportional, und die experimentelle Physik gibt uns mannigfache Mittel an die Hand, um zahlreiche Strömungszustände, die uns interessieren, tatsächlich zu realisieren.

Die Strömung selbst wird übrigens ungeändert bleiben, wenn wir u durchweg um eine Konstante vermehren: es sind nur die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, welche unmittelbar in Evidenz treten. Das Analoge gilt von v; so daß die Funktion $u + iv$, welche wir physikalisch deuten, durch diese Deutung nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, was im folgenden wohl zu beachten ist.

Sodann bemerke man noch, daß die Gleichungen (1) bis (3) ungeändert bestehen bleiben, wenn man u durch v, v durch $-u$ ersetzt. Dementsprechend erhalten wir einen zweiten Strömungszustand, bei welchem v das Geschwindigkeitspotential abgibt und die Kurven $u = \text{Const.}$ die Strömungskurven sind. Derselbe repräsentiert in dem oben erläuterten Sinne die Funktion $v - ui$. Es ist häufig zweckmäßig, diese neue Strömung neben der ursprünglichen zu betrachten, bei welcher u das Geschwindigkeitspotential war; wir wollen dann der Kürze halber von *konjugierten* Strömungen sprechen. Die Benennung ist zwar etwas ungenau, weil sich u zu v verhält wie v zu $(-u)$; sie wird aber für später ausreichen.

Diese ganze Erläuterung bezieht sich, gleich den Differentialgleichungen (1) bis (3), zuvörderst nur auf einen solchen (übrigens beliebigen) *Teil* der Ebene, in welchem $u + iv$ eindeutig ist und weder $u + iv$, noch einer seiner Differentialquotienten unendlich wird. Um den entsprechenden physikalischen Vorgang deutlich zu übersehen, hat man sich also vorab einen solchen Bereich abzugrenzen und durch geeignete Vorrichtungen an der Grenze dafür zu sorgen, daß der im Inneren des Gebietes eingeleitete stationäre Bewegungszustand ungehindert fortdauern kann.

In einem so umgrenzten Gebiete werden diejenigen Punkte z_0 unsere besondere Aufmerksamkeit auf sich ziehen, für welche der Differentialquotient $\frac{dw}{dz}$ verschwindet. Ich will der Allgemeinheit wegen gleich annehmen, daß auch $\frac{d^2 w}{dz^2}$, $\frac{d^3 w}{dz^3}$, ... bis hin zu $\frac{d^\alpha w}{dz^\alpha}$ gleich Null sein mögen. Um über den Verlauf der Niveaukurven, oder auch der Strömungskurven, in der Nähe eines solchen Punktes Aufschluß zu erhalten, entwickle man w in eine nach Potenzen von $(z - z_0)$ fortschreitende Reihe.

Dieselbe bringt hinter dem konstanten Gliede unmittelbar ein Glied mit $(z-z_0)^{\alpha+1}$. Durch Einführung von Polarkoordinaten schließt man hieraus, *daß sich im Punkte z_0 $(\alpha+1)$ Kurven $u = Const.$ unter resp. gleichen Winkeln kreuzen, während ebenso viele Kurven $v = Const.$ als Halbierungslinien der genannten Winkel auftreten.* Ich werde einen solchen Punkt dementsprechend einen *Kreuzungspunkt* nennen, und zwar einen *Kreuzungspunkt von der Multiplizität α.*

Die folgende (selbstverständlich nur schematische) Figur mag dieses Vorkommnis für $\alpha = 2$ erläutern und namentlich verständlich machen, wie sich ein Kreuzungspunkt in das Orthogonalsystem einfügt, welches übrigens von den Kurven $u = $ Const., $v = $ Const. gebildet wird:

Fig. 1.

Die Strömungskurven $v = $ Const. erscheinen in der Figur ausgezogen und die Strömungsrichtungen auf ihnen durch beigesetzte Pfeilspitzen angegeben; die Niveaukurven sind durch Punktierung angedeutet. Man sieht, wie die Flüssigkeit von drei Seiten auf den Kreuzungspunkt zuströmt, um ebenfalls nach drei Seiten von demselben abzuströmen. Dies wird nur dadurch möglich, daß die Geschwindigkeit der Strömung im Kreuzungspunkte gleich Null wird (daß sich die Flüssigkeit in demselben staut, wie man nach Analogie bekannter Vorkommnisse sagen könnte). In der Tat ist ja die Geschwindigkeit durch $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ gegeben.

Es ist weiterhin vorteilhaft, den Kreuzungspunkt von der Multiplizität α *als Grenzfall von α einfachen Kreuzungspunkten* aufzufassen. Daß dies zulässig ist, zeigt die analytische Behandlung. Denn im α-fachen Kreuzungspunkte hat die Gleichung $\frac{dw}{dz} = 0$ eine α-fache Wurzel, und eine solche entsteht, bekanntermaßen durch Zusammenrücken von α-einfachen Wurzeln. Im übrigen mögen folgende Figuren diese Auffassung erläutern:

Fig. 2.

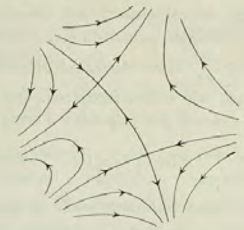

Fig. 3.

Ich habe in denselben der Einfachheit halber nur die Strömungskurven angegeben. Linker Hand erblickt man denselben Kreuzungspunkt von der Multiplizität Zwei, auf den sich Fig. 1 bezieht. Rechter Hand liegt eine Strömung vor, welche dicht beieinander zwei einfache Kreuzungspunkte aufweist. Man erkennt, wie der eine Strömungszustand aus dem anderen durch kontinuierliche Änderung hervorgeht.

Bei dieser Erläuterung wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß das Gebiet, in welchem wir den Strömungszustand betrachten, sich nicht ins Unendliche erstrecke. Es hat allerdings keinerlei prinzipielle Schwierigkeit, den Punkt $z = \infty$ ebenso in Betracht zu ziehen, wie irgendeinen anderen Punkt $z = z_0$. An Stelle der Reihenentwicklung nach Potenzen von $z - z_0$ hat dann in bekannter Weise eine solche nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ zu treten. Man wird von einem α-fachen Kreuzungspunkte bei $z = \infty$ sprechen, wenn diese Entwicklung hinter dem konstanten Gliede sofort einen Term mit $\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha+1}$ bringt. Aber es scheint überflüssig, die geometrischen Verhältnisse, welche diesen Vorkommnissen bei unserer Strömung entsprechen, ausführlicher zu schildern. Denn wir werden später Mittel und Wege kennen lernen, um die Sonderstellung des Wertes $z = \infty$, wie sie uns hier entgegentritt, ein für allemal zu beseitigen. Ebendeshalb wird der Punkt $z = \infty$ in den nächtfolgenden Paragraphen (§§ 2—4) beiseite gelassen, trotzdem er auch dort, wenn man vollständig sein wollte, besonders in Betracht gezogen werden müßte.

§ 2.

Berücksichtigung der Unendlichkeitspunkte von $w = f(z)$.

Wir wollen nunmehr auch solche Punkte z_0 in unser Gebiet hereinnehmen, in denen $w = f(z)$ unendlich groß wird. Dabei schränken wir indes die unbegrenzte Reihe der Möglichkeiten, welche in dieser Richtung vorliegt, mit Rücksicht auf die spezielle von uns allein zu studierende Funktionsklasse bedeutend ein. Wir wollen verlangen, *daß der Differentialquotient* $\frac{dw}{dz}$ *keine wesentlich singuläre Stelle besitzen soll*, oder, was dasselbe ist, wir wollen festsetzen, *daß* w *nur so unendlich werden darf, wie ein Ausdruck der folgenden Form:*

$$A\log(z-z_0)+\frac{A_1}{z-z_0}+\frac{A_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{A_\nu}{(z-z_0)^\nu},$$

unter ν *eine bestimmte endliche ganze Zahl verstanden.*

Entsprechend den verschiedenen Formen, die dieser Ausdruck darbietet, sagen wir, daß sich bei $z=z_0$ verschiedene Unstetigkeiten überlagern: ein *logarithmischer* Unendlichkeitspunkt, ein *algebraischer* Unendlichkeitspunkt von der Multiplizität Eins, usw. Wir werden der Einfachheit halber hier jedes dieser Vorkommnisse für sich betrachten, worauf es eine nützliche Übung sein wird, sich in einzelnen Fällen das Resultat der Überlagerung deutlich zu machen.

Sei $z=z_0$ zuvörderst ein *logarithmischer* Unendlichkeitspunkt. Wir haben dann:

$$w=A\log(z-z_0)+C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\cdots$$

Hier ist A diejenige Größe, welche man, mit $2i\pi$ multipliziert, nach Cauchy als *Residuum* des logarithmischen Unendlichkeitspunktes bezeichnet, eine Benennung, die im folgenden gelegentlich angewandt werden soll. Für die Strömung in der Nähe des Unstetigkeitspunktes ist es von primärer Wichtigkeit, ob A reell ist oder rein imaginär, oder endlich komplex. Offenbar kann man den dritten Fall als eine Überlagerung der beiden ersten auffassen. Wir wollen daher auch ihn beiseite lassen, und haben uns somit nur mit zwei getrennten Möglichkeiten zu beschäftigen.

1. Wenn A reell ist, so werde $C_0=a+ib$ gesetzt. Man hat dann in erster Annäherung für $w=u+iv$, $z-z_0=re^{i\varphi}$:

$$u=A\cdot\log r+a,\qquad v=A\cdot\varphi+b.$$

Die Kurven $u=$ Const. umgeben also den Unendlichkeitspunkt in Gestalt kleiner Kreise; die Kurven $v=$ Const. laufen, den wechselnden Werten von φ entsprechend, in allen Richtungen auf den Unendlichkeitspunkt zu. Wir haben eine Bewegung, bei welcher $z=z_0$ *eine Quelle von einer gewissen positiven oder negativen Ergiebigkeit vorstellt.* Um diese Ergiebigkeit zu berechnen, multiplizieren wir das Bogenelement eines kleinen mit dem Radius r um den Unstetigkeitspunkt beschriebenen Kreises mit der zugehörigen Geschwindigkeit und integrieren den so gewonnenen Ausdruck längs der Kreisperipherie. Da $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ in erster Annäherung mit $\frac{\partial u}{\partial r}$ und dieses mit $\frac{A}{r}$ zusammenfällt, so kommt:

$$\int_0^{2\pi}\frac{A}{r}\cdot r\,d\varphi=2A\pi$$

als Wert der Ergiebigkeit. *Die Ergiebigkeit ist also gleich dem Residuum, geteilt durch* i; *sie ist positiv oder negativ je nach dem Werte von* A.

2. Sei zweitens A rein imaginär, gleich $i\mathsf{A}$. Dann kommt unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen in erster Annäherung:

$$u=-\mathsf{A}\cdot\varphi+a,\qquad v=\mathsf{A}\cdot\log r+b.$$

Die Rollen der Kurven $u=$ Const., $v=$ Const. sind also geradezu vertauscht. Die Niveaukurven verlaufen jetzt nach allen Richtungen von $z-z_0$ aus, während die Strömungskurven den Unendlichkeitspunkt in kleinen Kreisen umgeben. Die Flüssigkeit *wirbelt* auf letzteren Kurven um den Punkt $z=z_0$ herum. Ich will den Punkt dementsprechend als einen *Wirbelpunkt* bezeichnen[11]). Sinn und Intensität des Wirbels werden durch A gemessen. Da die Geschwindigkeit $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ in erster Annäherung gleich $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ wird, *so findet die Wirbelbewegung bei positivem* A *im Sinne des Uhrzeigers, bei negativem* A *in entgegengesetztem Sinne statt.* Wir mögen die Intensität des Wirbels gleich $2\mathsf{A}\pi$ setzen, sie ist dann dem Residuum des betreffenden Unendlichkeitspunktes negativ gleich.

Übrigens können wir sagen, indem wir uns der Definition konjugierter Strömungen, wie sie im vorigen Paragraphen gegeben wurde, mit der ihr anhaftenden Unbestimmtheit erinnern: *Hat eine von zwei konjugierten Strömungen bei* $z=z_0$ *eine Quelle von einer gewissen Ergiebigkeit, so hat die andere dort einen Wirbelpunkt von gleicher oder entgegengesetzt gleicher Intensität.*

Wir betrachten ferner die *algebraischen* Unstetigkeitspunkte. Bei ihnen ist der Verlauf der Strömung seinem allgemeinen Charakter nach davon unabhängig, ob das erste Glied der Reihenentwicklung einen reellen, imaginären oder komplexen Koeffizienten hat. Sei zuvörderst:

$$w=\frac{A_1}{z-z_0}+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots,$$

so wird in erster Annäherung für $z-z_0=re^{i\varphi}$, $A_1=\varrho e^{i\psi}$:

$$w-C_0=\frac{\varrho}{r}\{\cos(\psi-\varphi)+i\sin(\psi-\varphi)\}.$$

---

[11]) [**Faßt man die Wirbelbewegung nicht kinematisch, sondern dynamisch auf, so muß man die Wirbelpunkte festgehalten denken.**]

Betrachten wir zuvörderst den reellen Teil rechter Hand. Wenn r sehr klein ist, so kann $\frac{\varrho}{r}\cos(\psi - \varphi)$ durch geschickte Wahl von φ doch noch jeden beliebigen vorgegebenen Wert vorstellen. *Die Funktion u nimmt also in unmittelbarer Nähe der Unstetigkeitsstelle noch jeden Wert an.* Zur näheren Orientierung denken wir uns einen Augenblick r und φ als unbegrenzte Veränderliche, und betrachten das Kurvensystem

$$\frac{\varrho}{r}\cos(\psi - \varphi) = \text{Const.}$$

Wir erhalten dann einen Büschel von Kreisen, welche alle die feste Richtung $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$ berühren. Die Kreise sind um so kleiner, je größer der absolute Betrag von Const. genommen wird. *In ähnlicher Weise verlaufen daher die Kurven $u =$ Const. in der Nähe der Unstetigkeitsstelle. Insbesondere haben sie für sehr große positive oder negative Werte von Const. die Gestalt kleiner, geschlossener, kreisähnlicher Ovale*[12]). — Für den imaginären Teil des Ausdrucks rechter Hand und also die Kurven $v =$ Const. gilt eine ähnliche Diskussion. Der Unterschied ist nur der, daß jetzt die Richtung $\varphi = \psi$ von allen Kurven berührt wird. Hiernach wird die folgende Figur, in welcher die Niveaukurven wieder punktiert, die Strömungskurven ausgezogen sind, verständlich sein:

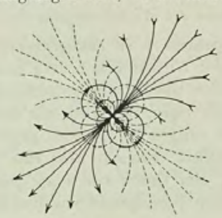

Fig. 4.

Die analoge Diskussion liefert vom ν-fachen algebraischen Unstetigkeitspunkte die erforderliche Anschauung. Ich will hier nur das Resultat anführen: *Jede Kurve $u =$ Const. läuft ν-mal durch den Unstetigkeitspunkt hindurch, indem sie der Reihe nach ν feste, gleich stark gegeneinander geneigte Tangenten berührt. Analog die Kurven $v =$ Const. Für sehr große (positive oder negative) Werte der Konstante sind beiderlei Kurven in unmittelbarer Nähe der Unstetigkeitsstelle geschlossen.* Ich gebe zur Veranschaulichung eine Figur für $\nu = 2$:

[12]) [Wir haben hier den Kraftlinienverlauf eines magnetischen Moleküls, oder nach moderner Bezeichnung eines Dipols. Vgl. auch § 8 von Abschnitt I der Abh. CIII.]

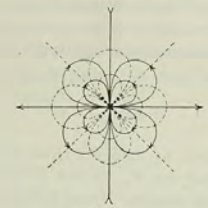

Fig. 5.

Man wird vermuten, daß diese höheren Vorkommnisse aus den niederen durch Grenzübergang entstehen mögen. Ich verschiebe die betreffende Erläuterung bis zum folgenden Paragraphen, wo uns eine bestimmte Funktionsklasse die erforderlichen Anschauungen mit Leichtigkeit vermitteln wird.

§ 3.

Rationale Funktionen und ihre Integrale. Entstehung höherer Unendlichkeitspunkte aus niederen.

Die entwickelten Sätze genügen, um den Gesamtverlauf solcher Funktionen zu veranschaulichen, die, übrigens in der ganzen Ebene eindeutig, keine anderen Unendlichkeitspunkte aufweisen, als die eben betrachteten. Es sind dies, wie man weiß, *die rationalen Funktionen und ihre Integrale.* Ohne ausgeführte Zeichnungen zu geben, stelle ich hier die Sätze, welche man bei ihnen betreffs der Kreuzungspunkte und Unendlichkeitspunkte findet, in knapper Form zusammen. Ich beschränke mich dabei, aus dem oben angegebenen Grunde, auf solche Fälle, in denen $z = \infty$ keinerlei ausgezeichnete Rolle spielt. Die hierin liegende Beschränkung wird hinterher, wie bereits angedeutet, von selbst in Wegfall kommen.

1. Die rationale Funktion, welche wir zu betrachten haben, stellt sich in der Form dar:

$$w = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

wo φ und ψ ganze Funktionen desselben Grades sind, die ohne gemeinsamen Teiler angenommen werden können. Ist dieser Grad der n-te und zählt man jeden abgebraischen Unendlichkeitspunkt so oft, als seine Multiplizität anzeigt, so erhält man, den Wurzeln von $\psi = 0$ entsprechend, n algebraische Unstetigkeitspunkte. Die Kreuzungspunkte sind durch $\psi\varphi' - \varphi\psi' = 0$, eine Gleichung $(2n-2)$-ten Grades, gegeben. *Die Gesamtmultiplizität der Kreuzungspunkte ist also $2n-2$,* wobei man aber beachten muß, daß jede ν-fache Wurzel von $\psi = 0$ eine $(\nu - 1)$-fache Wurzel von $\psi' = 0$ ist und also jeder ν-fache Unendlichkeitspunkt der Funktion für $(\nu - 1)$ Kreuzungspunkte mitzählt.

2. Soll das Integral einer rationalen Funktion

$$W = \int \frac{\Phi(z)}{\Psi(z)} dz$$

für $z = \infty$ endlich bleiben, so muß der Grad von Φ um zwei Einheiten kleiner sein als der Grad von Ψ. Φ und Ψ sollen dabei ohne gemeinsamen Teiler angenommen werden. Dann liefert $\Phi = 0$ *die freien Kreuzungspunkte*, d. h. diejenigen Kreuzungspunkte, welche nicht mit Unendlichkeitspunkten zusammenfallen. Die Wurzeln von $\Psi = 0$ geben die Unendlichkeitspunkte des Integrals. Und zwar entspricht der einfachen Wurzel von $\Psi = 0$ ein logarithmischer Unendlichkeitspunkt, der Doppelwurzel ein Unendlichkeitspunkt, der im allgemeinen die Überlagerung eines logarithmischen Unstetigkeitspunktes mit einem einfachen abgebraischen sein wird, usw. *Wenn man dementsprechend jeden Unendlichkeitspunkt so oft zählt, als die Multiplizität des entsprechenden Faktors in Ψ beträgt, so ist die Gesamtmultiplizität der Kreuzungspunkte um zwei Einheiten geringer als die der Unendlichkeitspunkte.* Übrigens sei noch an den bekannten Satz erinnert, daß die Summe der logarithmischen Residua sämtlicher Unstetigkeitspunkte gleich Null ist. —

Das Vorstehende gibt uns eine zweifache Möglichkeit, um höhere Unstetigkeitspunkte aus niederen entstehen zu lassen. Wir können einmal — und dies ist für uns das Wichtigste — vom Integral der rationalen Funktion ausgehen. Bei ihm entsteht ein ν-facher algebraischer Unstetigkeitspunkt, wenn $\nu + 1$ Faktoren von Ψ einander gleich werden, *wenn also $\nu + 1$ logarithmische Unstetigkeitspunkte in geeigneter Weise zusammenrücken.* Dabei ist deutlich, daß die Residuensumme der letzteren gleich Null sein muß, wenn der entstehende Unendlichkeitspunkt ein rein algebraischer sein soll. Die folgenden beiden Figuren, in denen nur die Strömungskurven angegeben sind, erläutern den betreffenden Grenzübergang für den einfachen algebraischen Unstetigkeitspunkt der Fig. 4:

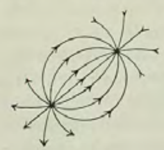

Fig. 6.

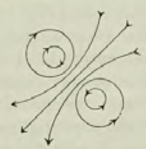

Fig. 7.

Ich habe dabei die Anordnung in doppelter Weise getroffen, so daß linker Hand zwei Quellenpunkte, rechter Hand zwei Wirbelpunkte einander nahegerückt scheinen und Fig. 4 als übereinstimmendes Resultat des Grenzüberganges in beiden Fällen erscheint. In derselben Beziehung stehen die folgenden beiden Zeichnungen zu Fig. 5:

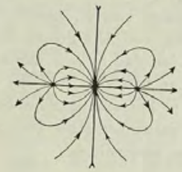

Fig. 8.

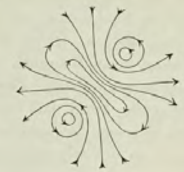

Fig. 9.

Die zweite Möglichkeit für das Entstehen höherer Unendlichkeitsstellen aus niederen bietet die Betrachtung der rationalen Funktion $\frac{\varphi}{\psi}$ selbst. Logarithmische Unendlichkeitsstellen bleiben dabei ausgeschlossen. *Der ν-fache algebraische Unstetigkeitspunkt entsteht jetzt aus ν einfachen algebraischen Unstetigkeitspunkten*, indem nämlich ν einfache lineare Faktoren von ψ zu einem ν-fachen zusammenrücken müssen. *Aber zugleich vereinigt sich mit ihnen eine Anzahl von Kreuzungspunkten, deren Gesamtmultiplizität $(\nu - 1)$ beträgt.* Denn $\psi\varphi' - \varphi\psi' = 0$ erhält, wie schon bemerkt, in demselben Augenblicke, wo ψ den ν-fachen Faktor bekommt, einen $(\nu - 1)$-fachen Faktor. Die folgende Figur erläutert in diesem Sinne das Entstehen des in Fig. 5 abgeleiteten zweifachen algebraischen Unendlichkeitspunktes:

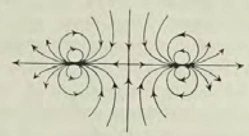

Fig. 10.

Es ist natürlich leicht, diese beiden Arten des Grenzüberganges unter eine allgemeinere gemeinsam zu subsumieren. Wenn man $\nu + \mu + 1$ logarithmische Unendlichkeitspunkte und μ Kreuzungspunkte sukzessive oder gleichzeitig zusammenfallen läßt, so wird allemal ein ν-facher algebraischer Unstetigkeitspunkt entstehen. Doch ist hier nicht der Ort, um diese Gedanken weiter auszuführen.

§ 4.

Realisation der betrachteten Strömungen auf experimentellem Wege.

Wir wollen unserer Betrachtung nunmehr eine andere Wendung geben, indem wir uns fragen, wie diejenigen Bewegungsformen, die wir jetzt von den rationalen Funktionen und ihren Integralen kennen, physikalisch realisiert werden mögen. Dabei sei es gestattet, von dem Prinzip der *Überlagerung* ausgiebigen Gebrauch zu machen, so daß es sich nur um Herstellung der allereinfachsten Bewegungsformen handelt. Aus der Theorie der Partialbrüche folgt, daß man jede der in Betracht kommenden Funktionen aus einzelnen Bestandteilen additiv zusammensetzen kann, welche sich unter einen der folgenden beiden Typen subsumieren:

$$A \cdot \log(z - z_0), \qquad \frac{A}{(z-z_0)^\nu}.$$

Da $\log(z - z_0)$ bei $z = \infty$ einen Unstetigkeitspunkt hat, was eine unnötige Besonderheit ist, so wollen wir den ersten Typus durch den allgemeineren ersetzen:

$$A \cdot \log \frac{z - z_0}{z - z_1}$$

und diesen selbst wieder, entsprechend den Erläuterungen des § 2, in zwei Bestandteile zerspalten, indem wir nämlich A gleich $\mathsf{A} + i\mathsf{B}$ setzen und nun $\mathsf{A} \cdot \log \frac{z - z_0}{z - z_1}$ und $i\mathsf{B} \cdot \log \frac{z - z_0}{z - z_1}$ gesondert betrachten. Hiernach haben wir im ganzen drei Fälle auseinanderzuhalten.

1. Wenn es sich um den Typus $\mathsf{A} \cdot \log \frac{z - z_0}{z - z_1}$ handelt, so haben wir bei z_0 eine Quelle von Ergiebigkeit $2\mathsf{A}\pi$, bei z_1 eine solche von der Ergiebigkeit $-2\mathsf{A}\pi$ anzubringen. Man denke sich zu dem Zwecke die xy-Ebene mit einer unendlich dünnen, gleichförmigen, elektrizitätsleitenden Schicht überdeckt. Dann wird die entsprechende Bewegungsform offenbar realisiert, *indem wir bei z_0 den einen, bei z_1 den anderen Pol einer galvanischen Batterie von zweckmäßig gewählter Stärke aufsetzen*[13]. — Man sieht zugleich, weshalb das Residuum von z_0 demjenigen von z_1 entgegengesetzt gleich sein muß: da der Strömungszustand stationär sein soll, muß an der einen Stelle ebensoviel Elextrizität zugeführt werden, wie an der anderen abströmt. Derselbe Grund gilt, wie man sofort erkennt, für den entsprechenden Satz bei beliebig vielen logarithmischen

[13]) Man vergleiche den grundlegenden Aufsatz von Kirchhoff im 64. Bande von Poggendorffs Annalen: (1845). *Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene.* [= Gesammelte Abhandlungen, S. 1 ff.]

Unendlichkeitspunkten, wobei allerdings zunächst nur von den rein imaginären Teilen der betreffenden Residua die Rede ist (welche den von den Unendlichkeitspunkten ausgehenden Quellenbewegungen entsprechen).

2. Im zweiten Falle (wo $i\mathsf{B} \cdot \log \frac{z - z_0}{z - z_1}$ gegeben ist) wird die experimentelle Anordnung etwas schwieriger. Das einfachste Schema ist dieses, daß man z_0 und z_1 durch eine sich selbst nicht schneidende Kurve verbindet *und nun dafür sorgt, daß diese Kurve der Sitz einer konstanten elektromotorischen Kraft sei.* Es entwickelt sich dann in der xy-Ebene eine Strömung, welche bei z_0 und z_1 Wirbelpunkte aufweist, welche überall sonst stetig verläuft, und aus der man durch Integration als zugehöriges Geschwindigkeitspotential eine Funktion findet, welche bei jeder Umkreisung von z_0 oder z_1 um einen gewissen Periodizitätsmodul wächst. Von diesem Geschwindigkeitspotential ist dabei das notwendig eindeutige elektrostatische Potential wohl zu unterscheiden. Die Kurve, welche z_0 und z_1 verbindet, ist für das letztere eine Unstetigkeitskurve, und eben hierdurch wird die Eindeutigkeit des elektrostatischen Potentials ermöglicht[14]).

Ich weiß nicht, ob es eine elementare experimentelle Anordnung gibt, um dieses einfachste Schema zu realisieren. Es scheint, daß man umständlicher zu Werke gehen muß. Denken wir zuvörderst etwa an *thermoelektrische* Ströme. Wir wollen die xy-Ebene zum Teil mit dem Materiale I, zum Teil mit dem Materiale II überdecken und die Stärke der überdeckenden Schichten dabei so bemessen, daß der spezifische Leitungswiderstand überall derselbe sei. Wenn wir dann dafür sorgen, daß die beiden durch z_0 und z_1 voneinander getrennten Teile der Kontur, in welcher die zweierlei Materialien zusammenstoßen, beide auf konstanten, unter sich verschiedenen Temperaturen gehalten werden, so wird in der Tat eine elektrische Strömung entstehen, wie wir sie haben wollen. Dabei weist das elektrostatische Potential, nach den Vorstellungen, die man der Lehre von der Thermoelektrizität zugrunde legt, an *beiden* Teilen der genannten Kontur Unstetigkeiten auf. — Noch komplizierter scheint es, elektrische Ströme zu benutzen, wie sie die gewöhnlichen galvanischen Elemente liefern. Man muß die Ebene dann durch mindestens drei Kurven, welche von z_0 nach z_1 verlaufen, in Teile zerlegen und zwei dieser Teile

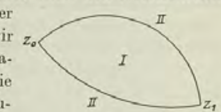

Fig. 11.

[14]) Die Behauptungen des Textes hängen, wie man sieht, auf das engste mit der Theorie der sogenannten Doppelbelegungen zusammen, wegen deren man Helmholtz in Poggendorffs Annalen Bd. 89, 1853, S. 224 ff. (*Über einige Gesetze der Verteilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern* [= Gesammelte Wissenschaftliche Abhandlungen Bd. 1, No. XVII, S. 475 ff.] sowie C. Neumann in dessen Buche: *Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential* (Leipzig, Teubner, 1877) vergleichen mag.

mit metallischen Belegen, den dritten mit einem feuchten Leiter überdecken. Man vergleiche hierzu die Fig. 12.

Durch alle diese Anordnungen hindurch ist von vornherein ersichtlich, daß die beiden bei z_0 und z_1 auftretenden Wirbelpunkte in der Tat entgegengesetzt gleiche Intensität haben müssen. Aus ähnlichen Gründen wird die Gesamtintensität sämtlicher Wirbel bei beliebig vielen gegebenen Wirbelpunkten immer gleich Null sein, und dadurch ist der Satz von dem Verschwinden der Summe aller logarithmischen Residuen, auch was den reellen Teil dieser Residuen angeht, auf physikalisch evidente Gründe zurückgeführt.

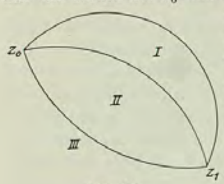

Fig. 12.

3. Die Bewegungsformen, welche den algebraischen Typen $\frac{A}{(z-z_0)^\nu}$ entsprechen, mögen den Entwicklungen des § 3 zufolge aus den eben betrachteten durch Grenzübergang gewonnen werden. Es wird dies natürlich nur mit einer gewissen Annäherung geschehen können. Man setze z. B. $(\nu+1)$ Drähte, in welche die Pole einer galvanischen Batterie auslaufen, *dicht beieinander* auf die xy-Ebene auf. Dann entsteht eine Strömung, welche in einiger Entfernung von den Drahtenden mit derjenigen merklich zusammenfällt, welche einem algebraischen Unstetigkeitspunkte von der Multiplizität ν entspricht. Zugleich ergibt sich eine Ergänzung unserer obigen Darstellung. Man wird die galvanische Batterie *sehr stark* nehmen müssen, wenn bei der erwähnten Anordnung noch eine mittelstarke elektrische Strömung zustande kommen soll. Es entspricht dies dem von analytischer Seite wohlbekannten Satze, daß die Residua logarithmischer Unendlichkeitspunkte selbst ins Unendliche wachsen müssen, wenn beim Zusammenfallen der logarithmischen ein algebraischer Unstetigkeitspunkt entstehen soll. — Ich gehe hier in keine weitere Einzelheit, da es im folgenden allein darauf ankommt, daß auf Grund der Fig. 6 bis 10 das allgemeine Prinzip verstanden wird.

§ 5.

Übergang zur Kugelfläche, Strömungen auf beliebigen krummen Flächen.

Um die unendlich großen Werte von z derselben geometrischen Behandlungsweise zugänglich zu machen, wie die endlichen, bedient man sich in den Lehrbüchern jetzt allgemein der „*Riemannschen*“ *Kugelfläche*[15]), welche

[15]) Nach dem Vorgange von C. Neumann, *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*, Leipzig 1865. — Die Einführung der Kugelfläche läuft so-

stereographisch auf die xy-Ebene bezogen ist. Man kennt die einfachen geometrischen Beziehungen, welche bei dieser Abbildung auftreten[16]). Man weiß auch zur Genüge, daß das Unendlichweite der Ebene sich in einen bestimmten Punkt der Kugel, den Projektionspunkt, zusammenzieht, so daß es keine symbolische Ausdrucksweise mehr ist, wenn man auf der Kugel von einem Punkte $z=\infty$ spricht. Dagegen scheint es noch immer weniger bekannt zu sein, daß bei dieser Abbildung die Funktionen von $x+iy$ eine Bedeutung für die Kugelfläche gewinnen, welche derjenigen, die sie für die Ebene hatten, genau analog ist, *daß man also in den Entwicklungen der vorangehenden Paragraphen statt der Ebene die Kugel gebrauchen kann, wobei von einer Sonderstellung des Wertes $z=\infty$ von vornherein keine Rede ist*[17]). Ich entwickle hier kurz diejenigen Sätze der Flächentheorie, aus denen diese Behauptung folgt, und nehme meinen Standpunkt dabei gleich so allgemein, daß meine Darstellung für später anzustellende Betrachtungen ausreicht.

Indem wir Flüssigkeitsbewegungen parallel der xy-Ebene studierten, haben wir uns bereits gewöhnt, die Flüssigkeitsschicht, welche der Betrachtung unterliegt, als unendlich dünn vorauszusetzen. In demselben Sinne kann man Flüssigkeitsbewegungen offenbar auf beliebig gegebenen Flächen betrachten. Die Verschiebungen frei ausgespannter Flüssigkeitsmembranen in sich, wie man sie bei den Plateauschen Versuchen so schön beobachten kann, geben ein anschauliches Beispiel dafür. — Wir

zusagen der Ersetzung von z durch das Verhältnis $\frac{z_1}{z_2}$ *zweier* Variabler parallel, wodurch die Behandlung unendlich großer Werte von z auch *formal* unter die der endlichen Werte subsumiert wird.

[16]) Unter ξ, η, ζ rechtwinklige Koordinaten verstanden, sei die Gleichung der Kugel $\xi^2+\eta^2+(\zeta-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$. Projektionspunkt sei $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=1$, Projektionsebene (xy-Ebene) die gegenüberliegende Tangentialebene (die $\xi\eta$-Ebene). Dann folgt:

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}, \quad \eta=\frac{y}{x^2+y^2+1}, \quad \zeta=\frac{1}{x^2+y^2+1}.$$

Bezeichnet man mit ds das Bogenelement der Ebene, mit $d\sigma$ das entsprechende Bogenelement der Kugel, so kommt:

$$d\sigma=\frac{ds}{x^2+y^2+1},$$

eine Formel, welche für das folgende insofern besonders wichtig ist, als sie die Abbildung als eine *konforme* charakterisiert.

[17]) Man vergleiche hierzu und zu den folgenden Entwicklungen: Beltrami, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque;* Annali di Matematica, ser. II, t. 1 (1867), p. 329 ff. [= Opere matematiche, t I., Nr. XXI.] — Die besondere Bemerkung, daß Oberflächenpotentiale bei konformer Abbildung ebensolche bleiben, findet sich in den in der Vorrede zitierten Schriften von C. Neumann, Kirchhoff und Töpler, dann auch z. B. bei Haton de la Goupillière, *Méthodes de transformation en Géométrie et en Physique Mathématique*, Journal de l'Ecole Polytechnique, t. XXV, 1867, p. 169 ff.

werden versuchen, auch derartige Bewegungen durch ein Potential zu definieren, und vor allen Dingen fragen, welche Bewandtnis es dann mit den stationären Bewegungen hat.

Die zweckmäßige Verallgemeinerung des Potentialbegriffs bietet sich unmittelbar. Es sei u eine Funktion des Ortes auf der Fläche, und man denke sich auf letzterer die Kurven $u = \text{Const.}$ gezogen. Sodann werde festgesetzt, daß die Flüssigkeitsbewegung auf der Fläche in jedem Punkte *senkrecht* gegen die hindurchgehende Kurve $u = \text{Const.}$ stattfinden solle, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die, unter dn das Bogenelement der zugehörigen, auf der Fläche verlaufenden [mit einem bestimmten Sinne versehenen] Normalrichtung verstanden, gleich $\frac{du}{dn}$ ist. Wir nennen dann u, wie in der Ebene, das zur Bewegung gehörige *Geschwindigkeitspotential.*

Die in solcher Weise definierte Strömung soll nun eine *stationäre* sein. Um eine bestimmte Formel zu haben, wollen wir ein krummliniges Koordinatensystem p, q auf unserer Fläche annehmen und uns die Form bestimmt denken:

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2, \tag{1}$$

welche vermöge dieses Koordinatensystems das Bogenelement auf der Fläche annimmt. Dann gibt eine einfache Zwischenbetrachtung, welche der in der Ebene üblichen durchaus analog verläuft, daß u, um eine stationäre Bewegung zu veranlassen, der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen muß:

$$\frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial q} - G\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q} = 0. \tag{2}$$ [18])

An diese Differentialgleichung knüpft nun eine kurze Überlegung, welche die volle Analogie mit den auf die Ebene bezüglichen Resultaten herstellt.

Es ergibt sich nämlich aus der Form von (2), daß man neben jedem u, welches (2) genügt, eine andere Funktion v einführen kann, *die zu u genau in dem bekannten Reziprozitätsverhältnisse steht.* In der Tat, vermöge (2) sind die folgenden beiden Gleichungen verträglich:

$$\tag{3} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p} &= \frac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}, \\ \frac{\partial v}{\partial q} &= \frac{G\frac{\partial u}{\partial p} - F\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}; \end{aligned} \right.$$

[18]) [Dividiert man die linke Seite von (2) durch $\sqrt{EG-F^2}$, so erhält man Beltramis zweiten Differentialparameter von u.]

sie definieren ein v bis auf eine notwendig unbestimmt bleibende Konstante. Aus ihnen aber folgt durch Auflösung:

$$\tag{4} \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial p} &= \frac{F\frac{\partial v}{\partial p} - E\frac{\partial v}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}, \\ -\frac{\partial u}{\partial q} &= \frac{G\frac{\partial v}{\partial p} - F\frac{\partial v}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}} \end{aligned} \right.$$

und hieraus:

$$\frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial v}{\partial q} - G\frac{\partial v}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \dfrac{F\frac{\partial v}{\partial p} - E\frac{\partial v}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q} = 0, \tag{5}$$

so daß einmal u sich zu v verhält, wie v zu $-u$, und andererseits v, so gut wie u, der partiellen Differentialgleichung (2) genügt. Zugleich haben die Gleichungen (3), bez. (4), die geometrische Bedeutung, daß die Kurven $u = \text{Const.}$ und $v = \text{Const.}$ einander im allgemeinen rechtwinklig schneiden.

Was nun die Behauptung betrifft, die ich hinsichtlich der stereographischen Beziehung der Kugel auf die Ebene zu Eingang dieses Paragraphen voranstellte, so ist sie ein unmittelbarer Ausfluß aus dem Umstande, *daß die Gleichungen* (2) *bis* (5) *in E, F, G homogen von der 0-ten Dimension sind*[19]). Wenn zwei Flächen konform aufeinander bezogen sind und man führt auf ihnen entsprechende krummlinige Koordinaten ein, so unterscheidet sich der Ausdruck für das Bogenelement auf der einen Fläche von dem auf die andere Fläche bezüglichen nur durch einen Faktor. Dieser Faktor aber fällt aus dem angegebenen Grunde aus den Gleichungen (2) bis (5) einfach heraus. Wir haben also einen allgemeinen Satz, der die besondere auf Kugel und Ebene bezügliche, oben ausgesprochene Behauptung als speziellen Fall umfaßt. Indem ich aus u, v die Kombination $u + iv$ bilde und diese als *komplexe Funktion des Ortes auf der Fläche* bezeichne, spricht sich derselbe folgendermaßen aus:

Wird eine Fläche konform auf eine zweite abgebildet, so verwandelt sich jede auf ihr existierende komplexe Funktion des Ortes in eine Funktion derselben Art auf der zweiten Fläche.

Vielleicht ist es nützlich, ausdrücklich einem Mißverständnisse entgegenzutreten, welches hierbei entstehen könnte. Derselben Funktion

[19]) Es ist übrigens nicht schwer, sich auch ohne alle Formel von der Richtigkeit jener Behauptung Rechenschaft zu geben; man sehe die wiederholt zitierten Arbeiten von C. Neumann und Töpler.

$u + iv$ entspricht eine Flüssigkeitsbewegung auf der einen und auf der anderen Fläche; man könnte meinen, daß die eine Bewegung vermöge der Abbildung aus der anderen hervorgehe. Dies ist natürlich richtig mit Bezug auf den Verlauf der Strömungskurven und der Niveaukurven, keineswegs aber in bezug auf die Geschwindigkeit. Wo das Bogenelement der einen Fläche größer ist als das Bogenelement der anderen Fläche, da ist die Geschwindigkeit der Strömung entsprechend *kleiner*. Hierin eben liegt es, daß der Wert $z = \infty$ auf der Kugel seine singuläre Stellung verliert. Für den Unendlichkeitspunkt der Ebene erweist sich die Geschwindigkeit der Strömung, wie man sofort sieht, im allgemeinen als unendlich klein von der zweiten Ordnung. Sollte der Unendlichkeitspunkt singulär sein, so wird die Geschwindigkeit dort allemal um zwei Ordnungen kleiner als die Geschwindigkeit in einem gleich zu benennenden Punkt des Endlichen. Man erinnere sich nun der oben (unter dem Texte) mitgeteilten Formel:

$$d\sigma = \frac{ds}{x^2 + y^2 + 1},$$

welche das Bogenelement der Kugel zum Bogenelement der Ebene in Beziehung setzt. Hier ist $x^2 + y^2 + 1$ eben auch eine Größe zweiter Ordnung, und es findet daher beim Übergange zur Kugel genaue Kompensation statt.

§ 6.

Zusammenhang der entwickelten Theorie mit den Funktionen eines komplexen Argumentes.

Nun wir die Kugel als Substrat unserer Betrachtungen gewonnen haben, übertragen wir auf sie, was wir in den §§ 3 und 4 betreffs rationaler Funktionen und ihrer Integrale haben kennen lernen. Wir gewinnen dadurch, daß alle früher aufgestellten Sätze auch für unendlich großes z und somit ausnahmslos gelten. Um so interessanter wird es, sich auf der Kugel den Verlauf bestimmter rationaler Funktionen zu überlegen und über die Mittel zu ihrer physikalischen Realisierbarkeit nachzudenken[20].

[20]) Ein besonders übersichtliches Beispiel von doch nicht zu elementarem Charakter gibt die *Ikosaedergleichung* (siehe Math. Annalen, Bd. 12 (1877). [Vgl. Abh. LIV in Bd. 2 dieser Ausgabe]). Dieselbe lautet:

$$w = \frac{(-(z^{20}+1) + 228(z^{15} - z^5) - 494 z^{10})^3}{1728 z^5 (z^{10} + 11 z^5 - 1)^5},$$

ist also (für z) eine Gleichung vom sechzigsten Grade. Die Unendlichkeitspunkte von w fallen zu je 5 in 12 Punkte zusammen, welche die Ecken eines Ikosaeders sind, das der Kugel, auf welcher wir z deuten, einbeschrieben ist. Den 20 Seitenflächen dieses Ikosaeders entsprechend zerlegt sich die Kugel in 20 gleichseitige sphärische Dreiecke. Die Mittelpunkte dieser Dreiecke sind durch $w = 0$ gegeben und stellen ebensoviele Kreuzungspunkte von der Multiplizität Zwei für die Funktion w

Aber es ist eine andere wichtige Frage, welche sich bei solchen Untersuchungen aufdrängt. Die verschiedenen Funktionen des Ortes, welche wir auf der Kugelfläche studieren, sind zugleich Funktionen des *Argumentes* $x + iy$. Woher dieser Zusammenhang?

Man wolle vor allen Dingen bemerken, daß $x + iy$ selbst eine komplexe Funktion des *Ortes* auf unserer Kugel ist; genügen doch x und y, für u und v eingesetzt, den früher (§ 1) für letztere aufgestellten Differentialgleichungen. Solange man in der Ebene operiert, könnte man denken, daß diese Funktion vor den übrigen etwas Wesentliches voraus habe; nach dem Übergange zur Kugel ist hierzu keine Veranlassung mehr. Und in der Tat verallgemeinert sich die Bemerkung, auf die sich unsere Frage bezieht, sofort. Wenn $u_1 + iv_1$ und $u + iv$ Funktionen von $x + iy$ sind, so ist auch $u_1 + iv_1$ eine Funktion von $u + iv$. Wir haben also für Ebene und Kugelfläche den allgemeinen Satz: *daß von zwei komplexen Funktionen des Ortes im Sinne der gewöhnlichen funktionentheoretischen Ausdrucksweise jede eine Funktion der anderen ist.*

Wird dieses nun eine besondere Eigentümlichkeit der genannten Flächen sein? Sicher wird sich dieselbe auf alle solche Flächen übertragen, die man auf einen Teil der Ebene (oder der Kugel) konform beziehen kann. Dies folgt aus dem letzten Satze des vorigen Paragraphen. Ich sage aber, *daß dieselbe Eigentümlichkeit überhaupt allen Flächen zukommt*, womit implizite behauptet wird, daß man einen Teil einer *beliebigen* Fläche auf die Ebene oder die Kugelfläche konform übertragen kann.

Der Beweis gestaltet sich unmittelbar, wenn man die Bestandteile x, y irgendeiner auf einer Fläche existierenden komplexen Funktion des Ortes, $x + iy$, auf der Fläche selbst als krummlinige Koordinaten einführt. Dann müssen nämlich die Koeffizienten E, F, G in dem Ausdrucke des Bogenelementes so beschaffen werden, daß Identitäten entstehen, wenn man in die Gleichungen (2) bis (5) des vorigen Paragraphen für p und q und gleichzeitig für u und v bez. x und y einführt. *Dies bedingt, wie man sofort ersieht, daß* $F = 0$, $E = G$ *wird.* Hierdurch aber verwandeln sich jene Gleichungen in die wohlbekannten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \text{ usw.}$$

dar. Hiernach kennt man (unter Einrechnung der Unendlichkeitspunkte) von den $2 \cdot 60 - 2 = 118$ Kreuzungspunkten bereits $4 \cdot 12 + 2 \cdot 20 = 88$. Die 30 noch fehlenden werden durch die Halbierungspunkte der 30 Kanten, die jenen 20 sphärischen Dreiecken angehören, geliefert. Die beistehende Figur repräsentiert in schematischer Weise eines jener 20 Dreiecke und auf ihm den Verlauf der Strömungskurven; auf den 19 übrigen Dreiecken ist die Sache genau ebenso.

Fig. 13.

Sie gehen also direkt in jene Gleichungen über, durch welche man Funktionen des Argumentes $(x+iy)$ zu definieren pflegt, so daß $u+iv$ in der Tat eine Funktion von $x+iy$ wird, was zu beweisen war.

Zugleich erledigt sich, was hinsichtlich konformer Abbildung behauptet wurde. Denn aus der Form des Bogenelementes

$$ds^2 = E(dx^2 + dy^2)$$

folgt unmittelbar, daß unsere Fläche durch $x+iy$ auf die xy-Ebene konform übertragen wird. Ich will dieses Resultat in etwas allgemeinerer Form aussprechen, indem ich sage:

Wenn man auf zwei Flächen beziehungsweise zwei komplexe Funktionen des Ortes kennt, und man bezieht die Flächen so aufeinander, daß entsprechende Punkte resp. gleiche Funktionswerte aufweisen, so sind die Flächen konform aufeinander bezogen.

Es ist dies die Umkehr des ähnlich lautenden am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellten Satzes.

Alle diese Theoreme haben, soweit sie sich auf beliebige Flächen beziehen, fürs erste nur dann einen klaren Sinn, wenn man seine Aufmerksamkeit auf kleine Stücke der Flächen beschränkt, innerhalb deren die komplexen Funktionen des Ortes weder Unendlichkeitspunkte noch Kreuzungspunkte aufweisen. Ich habe deshalb gelegentlich auch nur von einem Flächen*teile* gesprochen. Aber es liegt nahe, zu fragen, wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn man geschlossene Flächen *in ihrer ganzen Ausdehnung* benutzt. Diese Frage ist mit der weiteren Ideenentwicklung, die ich im folgenden zu geben habe, auf das innigste verknüpft; ihr speziell sind die §§ 19 bis 21 des Folgenden gewidmet.

§ 7.

Noch einmal die Strömungen auf der Kugel. Riemanns allgemeine Fragestellung.

Wir haben nunmehr alle Vorbedingungen, um die Entwicklungen der ersten Paragraphen dieser Einleitung in wesentlich neuer Weise aufzufassen und uns vermöge dieser Auffassung zu einer großen und allgemeinen Fragestellung zu erheben, welche die *Riemannsche* ist, und deren Präzisierung und Beantwortung den eigentlichen Gegenstand der gegenwärtigen Schrift zu bilden hat.

Das Primäre bei der bisherigen Darstellung bildete die Funktion von $x+iy$. Wir haben dieselbe durch eine stationäre Strömung auf der Kugel gedeutet und uns bemüht, Eigenschaften der Funktion in solchen der Strömung wieder zu erkennen. Insbesondere haben uns die rationalen

Funktionen und ihre Integrale mit einer einfachen Art von Strömungen bekannt gemacht: es sind die *einförmigen* Strömungen, diejenigen, bei denen in jedem Punkte der Kugel nur *eine* Strömung statthat. Und zwar sind es unter der Voraussetzung, daß keine anderen Unstetigkeitspunkte statthaben als die in § 2 definierten, die *allgemeinsten* einförmigen Strömungen, welche es auf der Kugel gibt.

Es scheint von vornherein möglich, diese ganze Entwicklung umzukehren: *das Studium der Strömungen voranzustellen und aus ihm erst die Theorie gewisser analytischer Funktionen zu entwickeln.* Die Frage nach der allgemeinsten in Betracht kommenden Strömung mag dann vorab durch physikalische Betrachtungen beantwortet werden; geben uns doch die experimentellen Anordnungen des § 4 zusammen mit dem Prinzip der Überlagerung das Mittel, um jede derartige Strömung zu definieren! Die einzelne Strömung bestimmt uns sodann, von einer Integrationskonstante abgesehen, eine komplexe Funktion des Ortes, deren allgemeinen Verlauf wir anschauungsmäßig verfolgen können. Jede solche Funktion ist eine analytische Funktion jeder anderen. Indem wir irgend zwei komplexe Funktionen des Ortes zusammenstellen, werden wir zu analytischen Abhängigkeiten hingeführt, deren Eigenschaften wir von vornherein übersehen und die wir erst hinterher, um den Zusammenhang mit den Betrachtungen der Analysis herzustellen, mit sonst in der Analysis üblichen Abhängigkeiten identifizieren.

Alles dieses ist so deutlich, daß eine genauere Ausführung hier überflüssig erscheint, daß wir vielmehr sofort zu der in Aussicht gestellten *Verallgemeinerung* schreiten können. Auch diese bietet sich auf Grund der bisherigen Entwicklungen fast mit Notwendigkeit. Wir werden alle die Fragen, welche wir gerade hinsichtlich der Kugelfläche formulierten, in gleicher Weise aufwerfen können, *wenn statt der Kugelfläche eine beliebige geschlossene Fläche gegeben ist.* Auch auf ihr werden wir einförmige Strömungen und also komplexe Funktionen des Ortes bestimmen können, deren Eigenschaften wir anschauungsmäßig erfassen. Die gleichzeitige Betrachtung verschiedener Funktionen des Ortes verwandelt hernach die zu gewinnenden Ergebnisse in ebenso viele Lehrsätze der gewöhnlichen Analysis. — Die Ausführung dieses Gedankenganges ist *die Riemannsche Theorie,* [soweit sie in dieser Schrift in Betracht kommt]; zugleich haben wir die Haupteinteilung, welche bei der folgenden Exposition derselben zugrunde zu legen ist.

Abschnitt II.
Exposition der Riemannschen Theorie.

§ 8.
Klassifikation geschlossener Flächen nach der Zahl p.[21])

Für unsere Betrachtungen sind selbstverständlich alle diejenigen geschlossenen Flächen als äquivalent aufzufassen, die sich durch eindeutige Zuordnung konform aufeinander abbilden lassen. Denn jede komplexe Funktion des Ortes auf der einen Fläche wird sich bei einer solchen Abbildung in eine ebensolche Funktion auf der anderen Fläche verwandeln: die analytische Beziehung also, welche durch das Zusammenbestehen zweier komplexer Funktionen auf der einen Fläche versinnlicht wird, bleibt beim Übergange zur zweiten Fläche durchaus ungeändert. Wenn man also z. B. (zufolge bekannter Entwicklungen) das Ellipsoid derart konform auf die Kugel beziehen kann, daß jedem Punkte desselben ein und nur ein Kugelpunkt entspricht, so heißt dies für uns, daß das Ellipsoid ebenso geeignet ist, die rationalen Funktionen und ihre Integrale zu repräsentieren, wie die Kugel.

Um so wichtiger ist es, ein Element kennen zu lernen, welches nicht nur bei konformer, sondern überhaupt bei *eindeutiger* Umgestaltung einer Fläche ungeändert erhalten bleibt[22]). *Es ist dies das Riemannsche p:* die Zahl der Rückkehrschnitte, welche man auf einer Fläche ziehen kann, ohne sie zu zerstücken. Die einfachsten Beispiele genügen, um diesen Begriff einzuüben. Für die Kugel ist $p = 0$; denn sie zerfällt durch jede auf ihr verlaufende geschlossene Kurve, in zwei getrennte Bereiche. Für den gewöhnlichen Ring ist $p = 1$, man kann ihn längs einer, aber auch

[21]) Die in diesem Paragraphen gegebene Darstellung weicht von der durch Riemann selbst gegebenen zumal dadurch ab, daß Flächen mit Randkurven vorab überhaupt nicht in Betracht gezogen werden und also statt der Querschnitte, die von einem Randpunkte zu einem zweiten laufen, sogenannte *Rückkehrschnitte* zur Verwendung gelangen (vgl. C. Neumann, *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*, 1865, S. 291 ff.).

[22]) Es ist immer nur an Umformung durch *stetige* Funktionen gedacht. Überdies sollen bei den willkürlichen Flächen des Textes bis auf weiteres gewisse besondere Vorkommnisse ausgeschlossen sein. Es ist am besten, sich dieselben ohne alle singuläre Punkte zu denken; erst später kommen Verzweigungspunkte und damit Selbstdurchsetzungen der Fläche in Betracht (§ 13). Die Flächen dürfen jedenfalls keine *Doppelflächen* sein, bei denen man von einer Flächenseite durch kontinuierliches Fortschreiten auf der Fläche zur anderen Flächenseite gelangen kann; man vergleiche indes § 23. Überdies wird vorausgesetzt — wie man es immer tut, wenn man sich eine geschlossene Fläche als *fertig* gegeben denkt — daß die Fläche durch eine *endliche* Zahl von Schnitten in einfach zusammenhängende Teile zerlegt werden kann.

nur längs einer, übrigens noch sehr willkürlichen, in sich zurücklaufenden Kurve zerschneiden, ohne daß er in Stücke zerfällt.

Daß es unmöglich ist, zwei Flächen von verschiedenem p eindeutig aufeinander zu beziehen, scheint evident[23]). Komplizierter ist es, den umgekehrten Satz zu beweisen, *daß nämlich die Gleichheit des p die hinreichende Bedingung für die Möglichkeit der ein-eindeutigen Beziehung zweier Flächen abgibt.* Ich muß mich, was den Beweis dieses wichtigen Satzes angeht, an dieser Stelle auf bloße Zitate unter dem Texte beschränken[24]). Auf Grund desselben ist man berechtigt, bei Untersuchungen über geschlossene Flächen, solange nur allgemeine Lagenverhältnisse in Betracht kommen, für jedes p einen möglichst einfachen Typus zugrunde zu legen. In diesem Sinne wollen wir von *Normalflächen* sprechen.[25]) Für quantitative Bestimmungen reichen die Normalflächen natürlich in keiner Weise mehr aus; aber sie bieten auch für sie ein Mittel zur Orientierung.

Die Normalfläche für $p = 0$ sei die Kugel, für $p = 1$ der Ring. Bei höherem p mag man sich eine Kugel mit p Anhängseln (Handhaben) versehen denken, wie folgende Figur für $p = 3$ aufweist:

Fig. 14.

Eine ähnliche Normalfläche ist natürlich auch bei $p = 1$ statthaft, wie überhaupt man sich diese Flächen nicht als starr gegeben, sondern als beliebiger Verzerrungen fähig denken muß.

Auf diesen Normalflächen mögen nun gewisse *Querschnitte*, von denen wir im folgenden Gebrauch zu machen haben, festgelegt werden. Bei $p = 0$ kommen dieselben noch nicht in Betracht. Auf dem Ringe $p = 1$

[23]) Damit soll keineswegs gesagt sein, daß diese Art geometrischer Evidenz nicht noch der näheren Untersuchung bedürftig sei. Man vergleiche die Erläuterungen von G. Cantor in Crelles Journal, Bd. 84, 1877/78, S. 242 ff. Es bleiben indessen diese Untersuchungen von den Darlegungen des Textes ausgeschlossen, da es für letztere Prinzip ist, auf anschauungsmäßige Verhältnisse als letzte Begründung zu rekurrieren.

[24]) Man sehe C. Jordan, *Sur la déformation des surfaces* in Liouvilles Journal ser. 2, Bd. 11 (1866). Einige Punkte, die mir besonderer Aufklärung zu bedürfen schienen, sind in den Math. Annalen, Bd. 7 (1874) und Bd. 9 (1875/76) besprochen. [Vgl. Abh. XXXVI in Bd. 2 dieser Gesamtausgabe, S. 63 ff.]

[25]) [Vgl. die in den Vorbemerkungen auf S. 479 gegebenen Zitate.]

mag eine „Meridiankurve" A, verbunden mit einer „Breitenkurve" B das Querschnittsystem bilden:

Fig. 15.

Allgemein gebrauchen wir $2p$ Querschnitte. Es wird, denke ich, mit Rücksicht auf die folgende Figur verständlich sein, wenn ich bei der einzelnen Handhabe unserer Normalfläche von einer Meridiankurve und einer Breitenkurve rede:

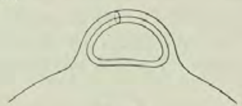

Fig. 16.

Wir wählen die $2p$ Querschnitte derart, daß wir um jede der p Handhaben eine Meridiankurve und eine Breitenkurve herumlegen. Wir wollen diese Querschnitte der Reihe nach mit $A_1, A_2, \ldots, A_p$, beziehungsweise $B_1, B_2, \ldots, B_p$ bezeichnen.

§ 9.

Vorläufige Bestimmung stationärer Strömungen auf beliebigen Flächen.

Wir haben uns nun mit der Aufgabe zu beschäftigen, auf beliebigen (geschlossenen) Flächen die allgemeinsten einförmigen, stationären Strömungen mit Geschwindigkeitspotential zu definieren, immer unter der Voraussetzung, daß keine anderen Unendlichkeitspunkte zugelassen werden sollen, als die in § 2 genannten[26]). Zu dem Zwecke richten wir unsere

[26]) Die Definition dieser Unendlichkeitspunkte bezog sich zunächst nur auf die Ebene, bez. die Kugel. Aber es ist wohl klar, wie dieselbe auf beliebige krumme Flächen zu übertragen ist: die Verallgemeinerung ist so zu treffen, daß wir auf die alten Unendlichkeitspunkte zurückkommen, wenn wir die Fläche und die stationären Strömungen auf ihr durch konforme Abbildung auf die Ebene übertragen. — In dieser Beschränkung hinsichtlich der Art der Unendlichkeitspunkte liegt auch, wie ich hier nicht ausführen kann, daß nur eine *endliche* Zahl von Unendlichkeitspunkten bei unseren Strömungen zulässig ist. Desgleichen folgt aus unseren Prämissen, wie beiläufig hervorgehoben sei, daß von Kreuzungspunkten bei unseren Strömungen jedenfalls auch nur eine endliche Zahl auftritt.

Ideen auf die Normalflächen des vorigen Paragraphen und benutzen übrigens wieder Vorstellungen der Elektrizitätslehre. Die gegebene Fläche denken wir uns mit einem unendlich dünnen gleichförmigen Überzuge einer leitenden Substanz versehen und wenden zunächst diejenigen experimentellen Mittel an, die uns von § 3 her bekannt sind. Wir werden also zuvörderst etwa die beiden Pole einer galvanischen Batterie auf unsere Fläche an zwei beliebigen Stellen aufsetzen: es entsteht dann eine Strömung, welche diese beiden Stellen als Quellenpunkte von entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit besitzt. Wir werden sodann zwei beliebige Punkte der Fläche durch eine oder mehrere, nebeneinander herlaufende, sich selbst nicht schneidende Kurven verbinden, welche der Sitz konstanter elektromotorischer Kräfte sein sollen, — wobei man sich alles dessen erinnern mag, was in § 4 betreffs der dann notwendig werdenden experimentellen Anordnung gesagt wurde. Wir erhalten dann eine stationäre Bewegung, für welche die beiden Punkte Wirbelpunkte von entgegengesetzt gleicher Intensität sind. — Wir werden ferner verschiedene solche Bewegungsformen überlagern und endlich, wenn es nötig scheint, getrennte Unendlichkeitspunkte durch Grenzübergang zu höheren Unendlichkeitspunkten zusammenfallen lassen. Alles das gestaltet sich genau so, wie auf der Kugel, und wir haben also jedenfalls den folgenden Satz:

Wenn man die Art der Unendlichkeitsstellen nach Anleitung des § 2 beschränkt, wenn man ferner daran festhält, daß die Summe sämtlicher logarithmischer Residua allemal gleich Null sein muß, so existieren auf unserer Fläche komplexe Funktionen des Ortes, welche an beliebig gegebenen Stellen in übrigens beliebig gegebener Weise unendlich werden und überall sonst stetig verlaufen.

Mit den so bestimmten Funktionen ist nun aber, für $p > 0$, die Sache noch keineswegs erschöpft. Wir können nämlich eine experimentelle Anordnung treffen, für welche auf der Kugel noch keinerlei Möglichkeit gegeben war. Es gibt jetzt auf der Fläche in sich zurücklaufende Kurven, vermöge deren die Fläche keineswegs in getrennte Bereiche zerlegt wird. Nichts steht im Wege, daß die Elektrizität von der einen Seite einer solchen Kurve durch die Fläche hindurch zur anderen Seite derselben hinüberströmt. *Wir werden eine solche Kurve, oder auch mehrere nebeneinander herlaufende Kurven dieser Art ebensogut als Sitz konstanter elektromotorischer Kräfte betrachten können, wie dies in § 4 mit Kurvenzügen geschah, die von einem Endpunkte zu einem zweiten hinlaufen.*

Die Strömungen, welche wir dann erhalten, haben überhaupt keine Unstetigkeiten. Wir werden sie als *überall endliche Strömungen* und die zugehörigen komplexen Funktionen des Ortes als *überall endliche Funktionen* bezeichnen können. Diese Funktionen sind notwendig unendlich vieldeutig. Denn sie erhalten jeweils einen reellen, der angenommenen elektromotorischen Kraft proportionalen Periodizitätsmodul, so oft man die gegebene Kurve in demselben Sinne überschreitet[27]).

Wir fragen, wie mannigfach die so definierten, überall endlichen Strömungen sein mögen. Offenbar sind zwei auf derselben Fläche verlaufende Kurven, als Sitz gleich starker elektromotorischer Kräfte betrachtet, für unseren Zweck *äquivalent*, wenn sie sich durch stetige Verschiebung über die Fläche hin zur Deckung bringen lassen. Verzerrt man eine Kurve so, daß Kurvenstücke auftreten, welche zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, so dürfen dieselben einfach weggelassen werden. Infolgedessen beweist man, *daß eine jede geschlossene Kurve einer ganzzahligen Kombination der Querschnitte A_i, B_i, wie diese im vorigen Paragraphen definiert wurden, äquivalent ist.*

In der Tat, man verfolge den Weg einer geschlossenen Kurve auf unserer Normalfläche[28]). Für $p = 1$ wird die Richtigkeit unserer Behauptung dann unmittelbar evident. Es genügt, ein Beispiel zu betrachten, wie es in den folgenden Figuren vorliegt.

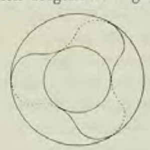

Fig. 17.

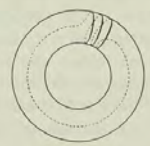

Fig. 18.

Die in Fig. 17 auf der Ringfläche verlaufende Kurve ist mit der anderen, welche rechter Hand gezeichnet ist, durch bloße Verzerrung zur Deckung zu bringen, sie ist also mit einer dreifachen Durchlaufung der Meridiankurve A (vgl. Fig. 15) und einer einfachen Durchlaufung der Breitenkurve B äquivalent. — Sei ferner $p > 1$. So oft dann unsere Kurve über eine der p Handhaben verläuft, kann man ein Stück von ihr abtrennen, das sich durch bloße Verzerrung in eine ganzzahlige Verbindung der betreffenden Meridiankurve und der zugehörigen Breitenkurve verwandeln läßt. Nach Absonderung aller solcher Bestandteile bleibt eine geschlossene Kurve übrig, die sich entweder unmittelbar in einen einzelnen

[27]) Über die Periodizität des imaginären Teils der Funktion soll hiermit keinerlei Verfügung getroffen sein. In der Tat ist v bei gegebenem u durch die Differentialgleichungen (1) der S. 520 nur bis auf eine additive Konstante vollständig bestimmt, und es unterliegen also die Periodizitätsmoduln, welche v an den Querschnitten A_i, B_i besitzen mag, keinerlei willkürlicher Festsetzung.

[28]) Einen anderen Beweis siehe bei C. Jordan: *Des contours tracés sur les surfaces*, in Liouvilles Journal, ser. 2, Bd. 11 (1866).

Punkt der Fläche zusammenziehen läßt und also jedenfalls keinen Beitrag zur elektrischen Strömung liefert, oder die eine oder mehrere Handhaben völlig umschließt, wovon Fig. 19 ein Beispiel aufweist:

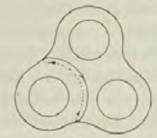

Fig. 19.

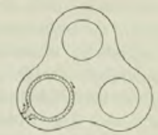

Fig. 20.

Die Fig. 20 erläutert, wie man eine solche Kurve durch Deformation verändern kann. Durch Fortsetzung des hierdurch angedeuteten Prozesses verwandelt sie sich in einen Kurvenzug, der aus der inneren Randkurve der betreffenden Handhabe und einer zugehörigen Meridiankurve besteht, dessen Stücke aber beide zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden. Also auch eine solche Kurve gibt keinen Beitrag zur Strömung. Man hätte dieses übrigens auch von vornherein aus der Bemerkung ersehen können, daß die jetzt betrachtete Kurve, gleich einer solchen, die sich in einen Punkt zusammenziehen läßt, die gegebene Fläche in getrennte Gebiete zerlegt.

Wir erzielen daher durch Heranziehen beliebiger geschlossener Kurven nicht *mehr*, als durch geeignete Benutzung der $2p$ Kurven A_i, B_i. Die allgemeinste überall endliche Strömung, welche wir hervorrufen können, wird entstehen, wenn wir jeden der $2p$ Querschnitte zum Träger einer beliebigen konstanten elektromotorischen Kraft machen. Oder anders ausgedrückt:

Die allgemeinste von uns zu konstruierende überall endliche Funktion ist diejenige, deren reeller Teil an den $2p$ Querschnitten beliebig vorgegebene Periodizitätsmoduln aufweist.

§ 10.

Die allgemeinste stationäre Strömung. Beweis für die Unmöglichkeit anderweitiger Strömungen.

Wenn wir die verschiedenen im vorigen Paragraphen konstruierten komplexen Funktionen des Ortes additiv zusammenfügen, so erhalten wir eine Funktion, deren Willkürlichkeit wir sofort übersehen. Indem wir die Bedingungen, die hinsichtlich der Unendlichkeitsstellen ein für allemal vorgeschrieben sind, nicht noch besonders erwähnen, können wir sagen: *daß unsere Funktion an beliebig gegebenen Stellen in beliebig gegebener Weise unendlich wird und überdies ihr reeller Teil an den $2p$ Querschnitten beliebig gegebene Periodizitätsmoduln aufweist.*

Ich sage nun, *daß dies in der Tat die allgemeinste Funktion ist, der auf unserer Fläche eine einförmige Strömung entspricht.* Zum Beweise mögen wir diese Behauptung auf eine einfachere reduzieren. Ist irgendeine komplexe Funktion der in Betracht kommenden Art auf unserer Fläche gegeben, so haben wir im vorhergehenden das Mittel, eine zugehörige Funktion zu konstruieren, welche an denselben Stellen in derselben Weise unendlich wird, und deren reeller Teil an den Querschnitten A_i, B_i dieselben Periodizitätsmoduln aufweist, wie der reelle Teil der gegebenen Funktion. Die Differenz der beiden Funktionen ist eine neue Funktion, welche nirgendwo unendlich wird und deren reeller Teil an den Querschnitten verschwindende Periodizitätsmoduln besitzt, welche überdies, wie selbstverständlich, wiederum eine einförmige Strömung definiert. *Offenbar haben wir zu beweisen, daß eine solche Strömung nicht existiert, daß also die Funktion sich auf eine Konstante reduziert.*

Und in der Tat ist dieser Beweis nicht schwierig. Was eine Durchführung desselben in strenger Form betrifft, so will ich mich darauf beschränken, zu bemerken, daß dieselbe mit Hilfe des verallgemeinerten Greenschen Satzes gelingt[29]). Die folgenden Betrachtungen sollen auf *anschauungsmäßigem Wege* dieselbe Unmöglichkeit dartun. Mag man dieselben wegen der unbestimmten Form, die sie besitzen, vielleicht auch nicht als zwingend erachten[30]), so scheint es doch nützlich, auch in dieser Weise den Gründen für das Bestehen jenes Theorems nachzugehen.

Wir mögen den besonderen Fall $p = 0$ vorwegnehmen und uns also fragen, weshalb auf der Kugel eine einförmige, überall endliche Strömung unmöglich ist. Das Zweckmäßigste scheint es zu sein, den Verlauf der Strömungskurven auf der Kugel zu verfolgen. Da Unendlichkeitspunkte nicht auftreten sollen, so kann eine Strömungskurve nicht plötzlich abbrechen, wie es in einem Quellenpunkte, oder in einem algebraischen Unstetigkeitspunkte geschieht. Überdies halte man vor Augen, daß nebeneinander herlaufende Strömungskurven notwendig gleichen Strömungssinn haben. Man erkennt dann, daß nur zweierlei Arten von nicht abbrechenden Strömungskurven möglich sind. Entweder die Kurve windet sich, je länger um so enger, um einen asymptotischen Punkt — dann haben wir wieder einen Unendlichkeitspunkt —, oder die Kurve ist geschlossen. Ist aber *eine* Strömungskurve geschlossen, so sind es die nächstfolgenden auch. Dabei schließen sie einen kleineren und kleineren Teil der Kugelfläche ein. Es kann also nicht fehlen, daß man zu einem Wirbelpunkte, d. h.

29) Wegen dieses Satzes siehe Beltrami, a. a. O. S. 354. [= Opere mat. t. I., S. 399].

30) Ich will übrigens daran erinnern, daß man auch den Greenschen Satz anschauungsmäßig begründen kann. Vgl. Tait, *On Green's and allied other theorems*, Edinburgh Transactions, 1870, S. 69 ff. [= Scientific Papers, vol. I, Nr. XIX].

abermals zu einem Unendlichkeitspunkte geführt wird. Eine überall endliche Strömung ist also in der Tat unmöglich. Allerdings haben wir der Möglichkeit nicht gedacht, die in dem Auftreten von Kreuzungspunkten liegt. Diese Punkte sind jedenfalls nur, wie oben hervorgehoben, in endlicher Zahl vorhanden. Es wird also nur eine endliche Zahl von Strömungskurven geben, welche durch sie hindurchlaufen. Man denke sich die Kugel durch diese Kurven in Gebiete zerlegt und wiederhole innerhalb der einzelnen Gebiete die gerade angestellten Betrachtungen, wobei sich das frühere Resultat von neuem ergeben wird.

Nehmen wir nun $p > 0$ und legen wieder die Normalflächen des § 8 zugrunde. Daß auf diesen Flächen überall endliche, einförmige Strömungen existieren, liegt nach dem gerade Gesagten an dem Auftreten der Handhaben. Eine auf der Normalfläche gezogene geschlossene Kurve, die sich in einen Punkt zusammenziehen läßt, kann ebensowenig, wie eine geschlossene Kurve auf der Kugel, Strömungskurve für eine überall endliche Strömung sein. Aber auch eine Kurve, wie wir sie in Fig. 19 betrachteten, ist nicht zu brauchen. Denn an eine erste solche Strömungskurve müssen sich weitere schließen nach Art der in Fig. 20 dargestellten, — so daß wir zuletzt zu einer Kurve gelangen, deren Teile zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden! Die Strömungskurve muß also notwendig sich um die eine oder andere Handhabe *herumwinden*, mag dies ein einfaches Umfassen jener Handhabe sein, oder ein wiederholtes Umkreisen derselben im Sinne der Meridian- oder der Breitenkurven. In allen Fällen läßt sich von der Strömungskurve ein Teil abtrennen, der im Sinne des vorigen Paragraphen mit einer ganzzahligen Kombination der betreffenden Meridiankurve und der zugehörigen Breitenkurve äquivalent ist. Nun wächst u, der reelle Teil der durch die Strömung definierten komplexen Funktion, fortwährend, wenn man längs einer Strömungskurve fortschreitet. Andererseits liefern zwei Kurven, welche im Sinne des vorigen Paragraphen äquivalent sind, bei Durchlaufung notwendig dieselben Inkremente von u. Es gibt also eine Kombination wenigstens einer Meridiankurve und einer Breitenkurve, deren Durchlaufung einen nicht verschwindenden Zuwachs von u herbeiführt. Das gleiche gilt notwendig von der betreffenden Meridiankurve oder der Breitenkurve selbst. Der Zuwachs aber, den u beim *Durchlaufen* der Meridiankurve gewinnt, entspricht dem *Überschreiten* der Breitenkurve, und umgekehrt. Daher hat u notwendig wenigstens an einer Breitenkurve oder Meridiankurve einen nicht verschwindenden Periodizitätsmodul, und eine überall endliche, einförmige Strömung, bei der alle diese Periodizitätsmoduln gleich Null sind, ist in der Tat unmöglich, w. z. b. w.

§ 11.
Erläuterung der Strömungen an Beispielen.

Es scheint sehr nützlich, sich über den allgemeinen Verlauf der nunmehr definierten Strömungen an Beispielen zu orientieren, damit nämlich unsere Sätze nicht bloße abstrakte Formulierungen bleiben, sondern mit konkreten Vorstellungen verbunden werden[31]). Es gelingt dies im gegebenen Falle ziemlich leicht, so lange man sich auf qualitative Verhältnisse beschränkt; die genaue quantitative Bestimmung würde selbstverständlich ganz andere Hilfsmittel erfordern. Ich will mich dabei der Einfachheit halber auf solche Flächen beschränken, bei denen eine Symmetrieebene existiert, die mit der Ebene der Zeichnung zusammenfällt, — und auf diesen Flächen nur solche Strömungen in Betracht ziehen, bei denen der scheinbare Umriß der Fläche (d. h. der Schnitt der Fläche mit der Zeichnungsebene) entweder Strömungskurve oder Niveaukurve ist. Man hat dann den wesentlichen Vorteil, daß man die Strömungskurven nur auf der *Vorderseite* der Fläche zu zeichnen braucht; denn auf der Rückseite verlaufen sie genau geradeso[32]).

Beginnen wir mit überall endlichen Strömungen auf dem Ringe $p=1$. Wir betrachten zunächst eine Breitenkurve (oder mehrere solche Kurven) als Sitz der elektromotorischen Kraft. Dann entsteht die Fig. 21, in der alle Strömungskurven Meridiankurven sind und Kreuzungspunkte nicht auftreten. Die Meridiankurven sind dabei durch Stücke radial verlaufender gerader Linien vorgestellt. Die Pfeilspitzen geben die Strömungsrichtung auf der Vorderseite, auf der Rückseite haben wir durchweg den umgekehrten Bewegungssinn.

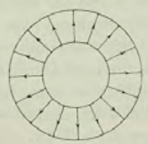
Fig. 21.

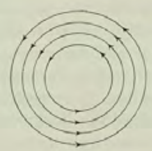
Fig. 22.

[31]) Eine solche Orientierung ist vermutlich auch für den praktischen Physiker von hohem Werte.

[32]) Derartige Zeichnungen gab ich bereits in dem Aufsatze: *Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades*, Math. Annalen, Bd. 10, 1876 [vgl. Abh. XXXIX in Bd. 2 dieser Gesamtausgabe]. Allerdings haben die Riemannschen Flächen daselbst eine etwas andere Bedeutung, so daß bei ihnen nur in übertragenem Sinne von einer Flüssigkeitsbewegung die Rede sein kann; vgl. die Erläuterungen, welche darüber in § 17 des Nachfolgenden gegeben werden.

Bei der konjugierten Strömung spielen die Breitenkurven die analoge Rolle, wie soeben die Meridiankurven; dieselbe mag durch Fig. 22 erläutert sein. Der Bewegungssinn ist in diesem Falle auf Vorder- und Rückseite derselbe.

Wir wollen nun den Ring $p=1$ dadurch umändern, daß wir, etwa auf der rechten Seite der Figur, zwei Ausstülpungen aus ihm hervorwachsen lassen, die sich allmählich zusammenbiegen und schließlich verschmelzen. *So haben wir eine Fläche $p=2$ und auf ihr ein Paar konjugierter Strömungen, wie es die Fig. 23 und 24 erläutern.*

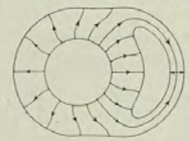
Fig. 23.

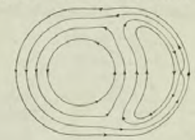
Fig. 24.

Es haben sich, wie man erkennt, rechter Hand zwei *Kreuzungspunkte* eingestellt (von denen natürlich nur einer auf der Vorderseite gelegen und also sichtbar ist). Etwas Analoges tritt jedesmal ein, wenn man überall endliche Strömungen auf einer Fläche $p>1$ studiert. Ich setze statt weiterer Erläuterungen noch zwei Figuren mit je vier Kreuzungspunkten her, die sich auf $p=3$ beziehen:

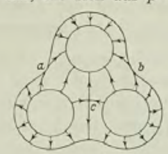

Fig. 25.

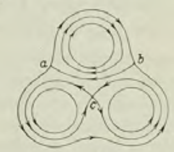

Fig. 26.

Dieselben entstehen, wenn man auf sämtlichen „Handhaben" der Fläche einmal in den Breitenkurven, das andere Mal in den Meridiankurven elektromotorische Kräfte wirken läßt. Auf den beiden unteren Handhaben sind dieselben in gleichem Sinne orientiert, bei der oberen im entgegengesetzten. Von den Kreuzungspunkten liegen zwei bei a und b, der dritte bei c, der vierte an der entsprechenden Stelle der Rückseite. Es sind die Kreuzungspunkte bei a und b in Fig. 25 nur deshalb schwer zu erkennen, weil am Rande der Figur bei der von uns gewählten Darstellungsweise eine perspektivische Verkürzung eintritt und daher beide im Kreuzungspunkte zusammentreffende Strömungskurven den Rand zu berühren scheinen.

Denkt man sich die (in entgegengesetzter Richtung) stattfindenden Strömungen auf der Rückseite der Fläche hinzu, so kann über die Natur dieser Punkte wohl keine Unklarheit bestehen.

Gehen wir nun zum Ringe $p = 1$ zurück und lassen bei ihm zwei logarithmische Unstetigkeitspunkte gegeben sein! Man erhält zugehörige Figuren, wenn man die Zeichnungen 23 und 24 einem Deformationsprozesse unterwirft, der auch in allgemeineren Fällen ebenso interessant als nützlich ist. Wir wollen nämlich die Partieen linker Hand in den einzelnen Figuren zusammenziehen, die rechter Hand ausdehnen, so daß wir zunächst etwa folgende Bilder erhalten:

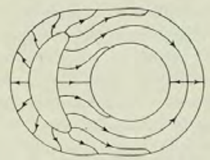

Fig. 27.

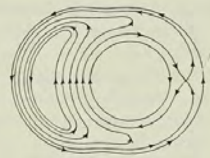

Fig. 28.

und nun die linker Hand bereits sehr schmal gewordene „Handhabe“ vollends zur Kurve zusammenziehen, um sie dann wegzuwerfen. *So ist aus der überall endlichen Strömung auf der Fläche $p = 2$ eine Strömung mit zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkten auf der Fläche $p = 1$ geworden.* Die Figuren haben nämlich folgende Gestalt angenommen:

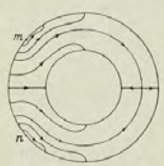

Fig. 29.

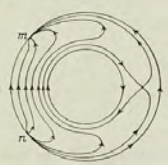

Fig. 30.

Die beiden Kreuzungspunkte von Fig. 23, 24 sind geblieben; m und n sind die beiden logarithmischen Unstetigkeitspunkte. Und zwar sind dieselben im Falle der Fig. 29 Wirbelpunkte von entgegengesetzt gleicher Intensität, im Falle der Fig. 30 Quellenpunkte von entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit. Dabei ist es wieder eine Folge der von uns gewählten Projektionsart, wenn im zweiten Falle sämtliche Strömungskurven, von einer einzigen abgesehen, in m und n den Rand zu berühren scheinen.

Wollen wir endlich m und n zusammenrücken lassen, so daß ein algebraischer Unstetigkeitspunkt von einfacher Multiplizität entsteht, so kommen folgende Zeichnungen, bei denen, wie man beachten mag, die Kreuzungspunkte nach wie vor an ihrer Stelle geblieben sind:

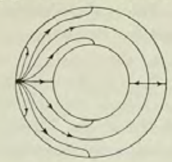

Fig. 31.

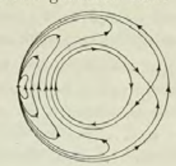

Fig. 32.

Ich will diese Figuren nicht noch mehr vervielfältigen, da weitere Beispiele nach Art der nunmehr betrachteten leicht zu bilden sind. Nur der eine Umstand werde noch hervorgehoben. Die Zahl der Kreuzungspunkte einer Strömung wächst offenbar mit dem p der Fläche und mit der Zahl der Unendlichkeitspunkte. Algebraische Unendlichkeitspunkte von der Multiplizität r mögen als $(r+1)$ logarithmische Unendlichkeitspunkte gezählt werden. Dann ist auf der Kugel bei μ logarithmischen Unendlichkeitspunkten die Anzahl der eigentlichen Kreuzungspunkte allgemein $\mu - 2$. Andererseits ist mit der Zunahme von p um eine Einheit nach unseren Beispielen eine Zunahme der Zahl der Kreuzungspunkte um zwei Einheiten verbunden. *Hiernach wird man vermuten, daß die Zahl der Kreuzungspunkte überhaupt $\mu + 2p - 2$ sein wird.* Ein strenger Beweis dieses Satzes auf Grund der bisher entwickelten Anschauungen hat jedenfalls keine besondere Schwierigkeit[33]); er würde hier aber zu weit führen. Der einzige Spezialfall unseres Satzes, den wir später gebrauchen werden, ist auf Grund der auf Riemann zurückgehenden Untersuchungen der Analysis situs bekannt: es handelt sich bei ihm (§ 14) um solche Strömungen, bei denen m einfache algebraische Unstetigkeitspunkte vorhanden sind, bei denen also $2m + 2p - 2$ Kreuzungspunkte auftreten müssen.

§ 12.

Über die Zusammensetzung der allgemeinsten komplexen Funktion des Ortes aus einzelnen Summanden.

Der Beweisgang des § 10 setzt uns in den Stand, von der allgemeinsten auf einer Fläche existierenden komplexen Funktion des Ortes

[33]) Zu einem solchen Beweise scheint vor allen Dingen notwendig, sich über die verschiedenen Möglichkeiten klar zu werden, die betreffs der Überführung einer gegebenen Fläche in die Normalfläche des § 8 vorliegen.

uns dadurch eine konkretere Vorstellung zu machen, daß wir dieselbe aus einzelnen Summanden von möglichst einfacher Eigenschaft additiv zusammensetzen.

Betrachten wir zuvörderst *überall endliche* Funktionen.

Es seien $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ überall endliche Potentiale. Dieselben mögen *linear abhängig* heißen, wenn zwischen ihnen eine Relation

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_\mu u_\mu = a$$

mit konstanten, *reellen* Koeffizienten besteht. Eine solche Beziehung liefert entsprechende Gleichungen für die $2p$ Serien von μ Periodizitätsmoduln, welche $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ an den $2p$ Querschnittten der Fläche besitzen. Umgekehrt würde, nach dem in § 10 bewiesenen Satze, aus solchen Gleichungen zwischen den Periodizitätsmoduln die lineare Relation zwischen den u selbst hervorgehen. Es ergibt sich so, *daß man auf mannigfachste Weise $2p$ linear unabhängige überall endliche Potentiale*

$$u_1, u_2, \ldots, u_{2p}$$

finden kann, daß sich aber aus ihnen jedes andere überall endliche Potential linear zusammensetzt:

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_{2p} u_{2p} + A.$$

In der Tat kann man $u_1, u_2, \ldots, u_{2p}$ z. B. derart wählen, daß jedes nur an einem der $2p$ Querschnitte einen nicht verschwindenden Periodizitätsmodul besitzt (wobei natürlich jedem Querschnitte ein und nur ein Potential zugewiesen werden soll). Hernach kann man in $\Sigma a_i u_i$ die Konstanten a_i so bestimmen, daß dieser Ausdruck an sämtlichen $2p$ Querschnitten dieselben Periodizitätsmoduln aufweist, wie u. Dann ist $u - \Sigma a_i u_i$ eine Konstante, und wir haben also die vorstehende Formel.

Um nun von den Potentialen u zu den überall endlichen Funktionen $u + iv$ überzugehen, denke ich mir der Einfachheit halber ein solches Koordinatensystem x, y auf der Fläche eingeführt (§ 6), daß u, v durch die Gleichungen verknüpft sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Sei jetzt u_1 ein beliebiges überall endliches Potential. Wir bilden das zugehörige v_1 und haben:

u_1 und v_1 sind jedenfalls linear unabhängig.

Denn wenn zwischen u_1, v_1 eine Gleichung

$$a_1 u_1 + b_1 v_1 = \text{Const.}$$

mit konstanten Koeffizienten bestünde, so würde dieselbe die folgenden Relationen begründen:

$$a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad a_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0,$$

aus denen vermöge der angegebenen Beziehungen das widersinnige Resultat

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$$

folgen würde.

Es sei nun ferner u_2 von u_1 und v_1 linear unabhängig. Dann nehmen wir das zugehörige v_2 und haben dann den allgemeineren Satz:

Die vier Funktionen u_1, u_2, v_1, v_2 sind ebenfalls linear unabhängig.

In der Tat könnte man aus jeder linearen Relation:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + b_1 v_1 + b_2 v_2 = \text{Const.}$$

durch Benutzung der zwischen den u, v bestehenden Beziehungen die folgenden Gleichungen ableiten:

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2)\frac{\partial u_1}{\partial x} - (a_1 b_2 - a_2 b_1)\frac{\partial v_1}{\partial x} + (a_2^2 + b_2^2)\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0,$$

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2)\frac{\partial u_1}{\partial y} - (a_1 b_2 - a_2 b_1)\frac{\partial v_1}{\partial y} + (a_2^2 + b_2^2)\frac{\partial u_2}{\partial y} = 0,$$

aus denen durch Integration eine lineare Abhängigkeit zwischen u_1, v_1, u_2 folgen würde.

So vorwärts schließend bekommt man endlich $2p$ linear unabhängige Potentiale:

$$u_1, v_1;\ u_2, v_2;\ \ldots;\ u_p, v_p,$$

wo jedes v mit dem gleichbezeichneten u zusammengehört. Wir setzen $u_\alpha + iv_\alpha = w_\alpha$ und nennen nunmehr überall endliche Funktionen $w_1, w_2, \ldots, w_\mu$ linear unabhängig, wenn zwischen ihnen keinerlei Relation:

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_\mu w_\mu = c$$

besteht, unter $c_1, \ldots, c_\mu, c$ beliebige *komplexe* Konstanten verstanden. Dann haben wir sofort:

Die p überall endlichen Funktionen

$$w_1, w_2, \ldots, w_p$$

sind linear unabhängig.

Wenn nämlich eine lineare Abhängigkeit bestünde, so könnte man in ihr das Reelle und Imaginäre sondern und erhielte dadurch lineare Beziehungen zwischen den u und v.

Des weiteren aber folgt: *Jede beliebige überall endliche Funktion setzt sich aus unseren $w_1, w_2, \ldots, w_p$ in der Form zusammen:*

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p + C.$$

In der Tat können wir durch geeignete Wahl der komplexen Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_p$ bei der linearen Unabhängigkeit der $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_p$ erreichen, daß eine durch vorstehende Formel definierte Funktion w

an den $2p$ Querschnitten beliebig vorgegebene Größen als Periodizitätsmoduln des reellen Teils aufweist.

Dies ist das Theorem, welches wir hinsichtlich der Darstellung überall endlicher Funktionen im gegenwärtigen Paragraphen aufzustellen hatten. Der Übergang zu *Funktionen mit Unendlichkeitsstellen* ist nun sehr leicht zu bewerkstelligen.

Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ die Punkte, in denen unsere Funktion in irgendwie vorgeschriebener Weise unendlich werden soll. Wir wollen dann einen Hilfspunkt η einführen und eine Reihe von einzelnen Funktionen

$$F_1, F_2, \ldots, F_\mu$$

konstruiren, von denen jede einzelne nur in einem der Punkte ξ, und zwar in der für diesen Punkt vorgeschriebenen Weise, unendlich werden soll und überdies in η einen logarithmischen Unstetigkeitspunkt besitzen mag, dessen Residuum dem, zu dem betreffenden ξ gehörigen, logarithmischen Residuum entgegengesetzt gleich kommt. Die Summe

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_\mu$$

wird dann in η stetig; denn die Summe aller zu den Unstetigkeitspunkten ξ gehörigen Residua ist, wie wir wissen, gleich Null. Überdies wird sie in den ξ und nur in den ξ, dabei in der vorgeschriebenen Weise unendlich. Sie unterscheidet sich also von der gesuchten Funktion nur um eine überall endliche Funktion. *Die gesuchte Funktion ist also in der Gestalt darstellbar:*

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_\mu + c_1 w_1 + c_2 w_2 + \ldots + c_p w_p + C,$$

womit wir auch das allgemeine hier in Betracht kommende Theorem gefunden haben.

Dasselbe entspricht offenbar der Zerlegung, welche wir in § 4 für die auf der Kugel existierenden komplexen Funktionen betrachteten, und die wir damals, wie man es gewöhnlich tut, der Lehre von der *Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen* entnahmen.

§ 13.

Über die Vieldeutigkeit unserer Funktionen. Besondere Betrachtung eindeutiger Funktionen.

Die Funktionen $u + iv$, welche wir auf unseren Flächen studieren, sind im allgemeinen unendlich vieldeutig: denn einmal bringt jeder logarithmische Unendlichkeitspunkt einen Periodizitätsmodul mit sich, andererseits haben wir die Periodizitätsmoduln an den $2p$ Querschnitten A_i, B_i,

deren reelle Teile wir willkürlich annehmen konnten. Ich sage nun, *daß mit diesen Angaben die Vieldeutigkeit von $u + iv$ in der Tat erschöpft ist.* Zum Beweise müssen wir auf den Begriff der Äquivalenz zweier Kurven auf gegebener Fläche zurückgreifen, den wir in § 9 zunächst zu anderem Zwecke einführten. Da die Differentialquotienten von u und v (oder, was dasselbe ist, die Komponenten der zugehörigen Strömung) auf unserer Fläche durchweg eindeutig sind, so liefern zwei äquivalente geschlossene Kurven, welche durch keinen logarithmischen Unstetigkeitspunkt getrennt sind, bei Durchlaufung denselben Zuwachs von u, wie von v. Nun fanden wir aber, daß jede geschlossene Kurve mit einer ganzzahligen Kombination der Querschnitte A_i, B_i äquivalent ist. Wir bemerkten ferner (§ 10), daß die Durchlaufung von A_i denjenigen Periodizitätsmodul liefert, welcher der Überschreitung von B_i entspricht, und umgekehrt. Hieraus aber folgt das ausgesprochene Theorem in bekannter Weise.

Es wird uns nun insbesondere interessieren, *eindeutige* Funktionen des Ortes zu betrachten. Dem Gesagten zufolge werden wir alle solche Funktionen erhalten, wenn wir als Unstetigkeiten nur rein *algebraische* Unendlichkeitspunkte zulassen und dann dafür sorgen, daß die $2p$ Periodizitätsmoduln an den Querschnitten A_i, B_i sämtlich verschwinden. Dabei wird es der leichteren Ausdrucksweise wegen gestattet sein, nur *einfache* algebraische Unstetigkeitspunkte in Betracht zu ziehen. Denn wir wissen ja aus § 3, daß der ν-fache algebraische Unstetigkeitspunkt durch Zusammenrücken von ν einfachen entstehen kann, wobei übrigens, wie man nicht vergessen darf, Kreuzungspunkte in der Gesamtmultiplizität $(\nu - 1)$ absorbiert werden. Seien also m Punkte als einfache algebraische Unendlichkeitspunkte der gesuchten Funktion gegeben. So wollen wir zuerst irgend m Funktionen des Ortes bilden: $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$, von denen jede nur an einer der gegebenen Stellen einfach algebraisch unendlich werden soll, aber übrigens beliebig vieldeutig sein mag. Aus diesen Z setzt sich die allgemeinste komplexe Funktion des Ortes, welche an den gegebenen Stellen einfache algebraische Unstetigkeiten besitzt, dem vorigen Paragraphen zufolge in der Gestalt zusammen:

$$a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \ldots + a_m Z_m + c_1 w_1 + \ldots + c_p w_p + C,$$

unter $a_1, a_2, \ldots, a_m$ beliebige konstante Koeffizienten verstanden. Um eine eindeutige Funktion zu haben, setzen wir die Periodizitätsmoduln, welche dieser Ausdruck an den $2p$ Querschnitten besitzt, gleich Null. Aber diese Periodizitätsmoduln setzen sich vermöge der a, c aus den Periodizitätsmoduln der Z, w linear zusammen. *Wir finden also $2p$ lineare homogene Gleichungen für die $m + p$ Konstanten a und c.* Wir wollen annehmen, daß diese Gleichungen linear unabhängig sind[34]). Dann kommt der wichtige Satz:

Unter der genannten Voraussetzung gibt es bei m beliebig vorgeschriebenen einfachen algebraischen Unstetigkeitspunkten nur dann eindeutige Funktionen des Ortes, wenn $m \geqq p+1$ ist, und zwar enthalten diese Funktionen $(m-p+1)$ linear vorkommende willkürliche komplexe Konstante.

Man denke sich jetzt die m Unendlichkeitspunkte als beweglich. So treten m neue Willkürlichkeiten in die Betrachtung ein. Überdies ist klar, daß man beliebige m Punkte auf der Fläche durch kontinuierliche Verschiebung in beliebige m andere verwandeln kann. Wir können also sagen, indem wir uns übrigens immer der Voraussetzung erinnern, die wir gemacht haben:

Die Gesamtheit der eindeutigen Funktionen mit m einfachen algebraischen Unstetigkeitspunkten, die auf gegebener Fläche existieren, bildet ein Kontinuum von $(2m-p+1)$ komplexen Abmessungen.

Nun wir die Existenz und die Mannigfaltigkeit der eindeutigen Funktionen haben kennen lernen, wollen wir auf möglichst anschauungsmäßigem Wege noch eine andere wichtige Eigenschaft derselben entwickeln. Die Zahl m der Unendlichkeitspunkte unserer Funktion hat nämlich für letztere eine noch viel weitergehende Bedeutung. Ich sage, *daß unsere Funktion $u+iv$ jeden beliebig vorgegebenen Wert u_0+iv_0 genau an m Stellen annimmt.*

Zum Beweise betrachte man den Verlauf der Kurven $u=u_0$, $v=v_0$ auf unserer Fläche. Nach § 2 ist klar, daß jede dieser Kurven einen Ast durch jeden der m Unendlichkeitspunkte hindurchschickt. Andererseits folgt aus Betrachtungen, wie wir sie in § 10 entwickelten, daß jeder Kurvenast mindestens einen Unendlichkeitspunkt enthalten muß. Hiernach ist für sehr große u_0, v_0 die Richtigkeit unserer Behauptung unmittelbar klar. Denn die betreffenden Kurven $u=u_0$, $v=v_0$ gehen dann in der Nähe des einzelnen Unendlichkeitspunktes nach § 2 in kleine durch

[34]) Sind sie es nicht, so ist die nächste Folge, daß die Zahl der in m Punkten unendlich werdenden eindeutigen Funktionen *größer* wird als die im Texte angegebene. Man kennt die Untersuchungen, welche zumal Roch über diese Möglichkeit angestellt hat (Crelles Journal Bd. 64, 1865; vgl. auch, was die algebraische Formulierung betrifft: Brill und Noether *Über die algebraischen Funktionen und ihre Verwendung in der Geometrie*, Math. Annalen, Bd. 7, 1874). Ich kann diesen Untersuchungen im Texte nicht folgen, obgleich sie sich mit Leichtigkeit an die Darstellung des Abelschen Theorems anschließen lassen, wie sie Riemann in Nr. 14 der *Abelschen Funktionen* gibt, und will nur, mit Rücksicht auf spätere Entwicklungen des Textes (vgl. § 19), darauf hinweisen, *daß eine lineare Abhängigkeit zwischen den $2p$ Gleichungen jedenfalls nicht eintritt, wenn m die Grenze $2p-2$ überschreitet.* [Siehe indessen Abh. XCVII, S. 396 des vorliegenden Bandes.]

den Unendlichkeitspunkt hindurchlaufende Kreise über, welche notwendig neben dem (hier nicht weiter in Betracht kommenden) Unstetigkeitspunkte noch je *einen* Schnittpunkt gemein haben.

Hieraus aber folgt die Sache allgemein. *Denn die Kurven $u=u_0$, $v=v_0$ können bei kontinuierlicher Änderung von u_0, v_0 niemals einen Schnittpunkt verlieren.* Es könnte dies nämlich nach dem Gesagten nur so geschehen, daß mehrere Schnittpunkte zusammenrückten, um dann in geringerer Zahl wieder auseinander zu treten. Nun bilden die Kurven u, v ein Orthogonalsystem. Ein Zusammenrücken reeller Schnittpunkte ist also nur in den Kreuzungspunkten möglich (in denen es auch wirklich geschieht). Die Kreuzungspunkte aber sind nur in endlicher Zahl vorhanden, und also nicht imstande, die Fläche in verschiedene Gebiete zu zerlegen. Die Eventualität des Zusammenrückens ist also überhaupt nicht in Betracht zu ziehen, und somit unsere Behauptung bewiesen.

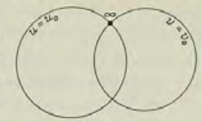

Fig. 33.

Es ist übrigens für das Folgende nützlich, sich die Verteilung der Werte von $u+iv$ in der Nähe eines Kreuzungspunktes deutlich zu machen. Hierzu genügt eine aufmerksame Betrachtung der oben gegebenen Fig. 1. Man erkennt zumal, daß von den m beweglichen Schnittpunkten der Kurven $u=u_0$, $v=v_0$ bei Annäherung an den ν-fachen Kreuzungspunkt $(\nu+1)$ zusammenrücken.

Analoge Betrachtungen, wie wir sie hiermit für eindeutige Funktionen erledigt haben, finden natürlich auch bei vieldeutigen Funktionen ihre Stelle. Ich gehe auf sie nur deshalb nicht ein, weil es die im folgenden festgehaltene Umgrenzung des Stoffes nicht nötig macht. Auch kommt nur in den allereinfachsten Fällen ein übersichtliches Resultat. Sei in dieser Beziehung daran flüchtig erinnert, daß eine komplexe Funktion mit mehr als zwei inkommensurabeln Periodizitätsmoduln an jeder Stelle jedem beliebigen Werte unendlich nahe gebracht werden kann.

§ 14.

Die gewöhnlichen Riemannschen Flächen über der $x+iy$-Ebene.

Statt die Verteilung der Funktionswerte $u+iv$ auf der ursprünglichen Fläche zu betrachten, kann man ein sozusagen umgekehrtes Verfahren einschlagen. Man deute nämlich die Funktionswerte — welche dementsprechend jetzt $x+iy$ genannt werden sollen — in gewöhnlicher Weise in der Ebene (oder auch auf der Kugel[35])) und studiere die *kon-*

[35]) Ich spreche im folgenden durchweg von der Ebene, statt von der Kugel, um mich möglichst an die gewöhnliche Auffassungsweise anzuschließen.

forme Abbildung, welche demzufolge (nach § 5) von unserer ursprünglichen Fläche entworfen wird. Wir beschränken uns dabei wieder, der Einfachheit halber, auf den Fall der eindeutigen Funktionen, trotzdem es besonderes Interesse hat, gerade auch die Abbildung durch mehrdeutige Funktionen in Betracht zu ziehen[36]).

Eine kurze Überlegung zeigt, *daß wir so gerade zu der mehrblättrigen, mit Verzweigungspunkten versehenen, über der xy-Ebene ausgebreiteten Fläche geführt werden, welche man gewöhnlich als Riemannsche Fläche schlechthin bezeichnet.*

In der Tat, sei m die Zahl der (einfachen) Unendlichkeitspunkte, welche $x+iy$ auf der ursprünglichen Fläche besitzt. Es nimmt dann $x+iy$, wie wir sahen, *jeden* Wert auf der gegebenen Fläche m-mal an. *Daher überdeckt die konforme Abbildung unserer Fläche auf die $x+iy$-Ebene die letztere im allgemeinen mit m Blättern.* Eine Ausnahmestellung nehmen nur diejenigen Werte von $x+iy$ ein, für welche einige der m auf der ursprünglichen Fläche zugehörigen Stellen zusammenfallen, denen also *Kreuzungspunkte* entsprechen. Man ziehe zum Verständnisse noch einmal die Fig. 1 heran. Es folgt aus derselben, daß man die Umgebung eines ν-fachen Kreuzungspunktes derart in $(\nu+1)$ Sektoren zerlegen kann, daß $x+iy$ innerhalb jedes Sektors denselben Wertvorrat durchläuft. *Daher werden oberhalb der betreffenden Stelle der $(x+iy)$-Ebene $(\nu+1)$ Blätter der konformen Abbildung derart zusammenhängen, daß eine Umlaufung der Stelle von einem Blatte in ein zweites, von diesem in ein drittes führt usw., und daß eine $(\nu+1)$-malige Umlaufung derselben nötig wird, um zum Anfangspunkte zurückzugelangen.* Dies ist aber genau, was man gewöhnlich als einen ν-fachen *Verzweigungspunkt* bezeichnet[37]). Dabei ist die Abbildung in diesem Punkte selbst natürlich keine konforme mehr; man beweist leicht, daß der Winkel, den irgend zwei auf der ursprünglichen Fläche verlaufende sich im Kreuzungspunkte schneidende Kurven miteinander bilden, auf der über der $(x+iy)$-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche genau mit $(\nu+1)$ multipliziert erscheint.

---

[36]) Man vergleiche hierzu, was Riemann in Nr. 12 seiner *Abelschen Funktionen* über die Abbildung durch überall endliche Funktionen sagt.

[37]) Wir haben oben (§ 11) ohne ausgeführten Beweis angegeben, daß die Zahl der Kreuzungspunkte von $x+iy$ $(2m+2p-2)$ beträgt. Wie man jetzt sieht, ist diese Behauptung eine einfache Umsetzung der bekannten Relation, welche die Zahl der Verzweigungspunkte (oder vielmehr die Gesamtmultiplizität derselben) mit der Blätterzahl m und dem p einer mehrblättrigen ebenen Fläche verknüpft (unter p die Maximalzahl der Rückkehrschnitte verstanden, die man auf dieser mehrblättrigen ebenen Fläche ziehen kann, ohne sie zu zerstücken).

Aber zugleich erkennen wir die Bedeutung, welche diese mehrblättrige Fläche für unsere Zwecke beanspruchen kann. Alle Flächen, welche durch konforme Abbildung eindeutig auseinander hervorgehen, sind für uns gleichbedeutend (§ 8). Wir können also die m-blättrige Fläche über der Ebene ebensogut zugrunde legen, wie die bisher benutzte Fläche, die wir uns ohne jedes singuläre Vorkommnis frei im Raume gelegen vorstellten. Dabei kommt die Schwierigkeit, die man in dem Auftreten der Verzweigungspunkte erblicken könnte, von vornherein in Wegfall: denn wir werden nur solche Strömungen auf der mehrblättrigen Fläche in Betracht ziehen, welche sich in der Umgebung der Verzweigungspunkte derart verhalten, daß sie rückwärts auf die im Raume gelegene ursprüngliche Fläche übertragen dort keine anderen singulären Vorkommnisse darbieten, als die ohnehin gestatteten. Hierzu ist nicht einmal nötig, daß man eine entsprechende im Raume gelegene Fläche kennt; handelt es sich doch nur um Verhältnisse in der nächsten Umgebung der Verzweigungspunkte, d. h. um differentielle Relationen, denen unsere Strömungen genügen müssen[38]). Es hat hiernach auch keinen Zweck mehr, wenn wir von beliebig gekrümmten Flächen sprechen, uns diese ohne singuläre Punkte zu denken: *sie mögen selbst mit mehreren Blättern überdeckt sein, die unter sich durch Verzweigungspunkte, beziehungsweise Verzweigungsschnitte zusammenhängen.* Aber welche unter den unbegrenzt vielen, sonach gleichberechtigten Flächen wir auch der Betrachtung zugrunde legen wollen: wir müssen zwischen *wesentlichen* Eigenschaften unterscheiden, welche allen gleichberechtigten Flächen gemeinsam sind, und *unwesentlichen* Eigenschaften, die der partikulären Fläche anhaften. Zu ersteren gehört die Zahl p, es gehören dahin die „Moduln", von denen in § 18 ausführlicher die Rede sein soll; zu letzteren bei mehrblättrigen Flächen die Art und Lage der Verzweigungspunkte. Wenn wir uns eine *ideale* Fläche denken, die nur jene wesentlichen Eigenschaften besitzen soll, so entsprechen auf ihr den Verzweigungspunkten der mehrblättrigen Fläche gewöhnliche Punkte, die, allgemein zu reden, vor den übrigen Punkten nichts voraus haben, und die erst dadurch beachtenswert werden, daß bei der konformen Abbildung, die von der idealen Fläche zur partikulären hinüberführt, in ihnen Kreuzungspunkte entstehen.

Das Resultat ist also dieses, *daß wir betreffs der Flächen, auf denen wir operieren dürfen, eine größere Beweglichkeit gewonnen haben, und daß wir zugleich die Zufälligkeiten erkennen, welche die Betrachtung jeder einzelnen besonderen Fläche mit sich bringt.* Insbesondere werden wir

---

[38]) Wegen der expliziten Formulierung dieser Relationen vergleiche man die gewöhnlichen Lehrbücher, sodann insbesondere die Schrift von C. Neumann: *Das Dirichletsche Prinzip in seiner Anwendung auf die Riemannschen Flächen*, Leipzig, 1865.

im folgenden, so oft es nützlich scheint, mehrblättrige Flächen über der $x+iy$-Ebene in Betracht ziehen; ihre Verwendung soll aber in keiner Weise die Allgemeinheit der Auffassung beeinträchtigen[39]).

§ 15.

Der Ring $p=1$ und die zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungspunkten über der Ebene[40]).

Ich habe mich im vorigen Paragraphen ziemlich kurz fassen können, da ich die gewöhnliche Riemannsche Fläche über der Ebene mit ihren Verzweigungspunkten als bekannt ansah. Immerhin wird es nützlich sein, wenn ich das Gesagte an einem Beispiel erläutere. Wir wollen einen Ring $p=1$ betrachten. Auf ihm existieren nach § 13 ∞^4 eindeutige Funktionen mit nur zwei Unendlichkeitspunkten. Eine jede derselben besitzt nach der allgemeinen Formel des § 11 vier Kreuzungspunkte. Der Ring ist also auf mannigfache Weise auf eine zweiblättrige ebene Fläche mit vier Verzweigungspunkten abzubilden. Ich will den besonderen Fall, in welchem ich diese Abbildung nunmehr betrachten werde, auf explizite Formeln stützen, damit auch denjenigen Lesern, die in den rein anschauungsmäßigen Operationen minder geübt sind, die Sache zugänglich sei. Allerdings greife ich damit in etwas den Entwicklungen vor, welche erst der folgende Paragraph zu bringen bestimmt ist.

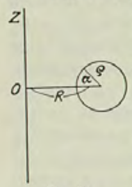

Fig. 34.

Wir wollen die Ringfläche als gewöhnlichen Torus voraussetzen, der durch Rotation eines Kreises um eine denselben nicht schneidende Achse seiner Ebene entsteht. Sei ϱ der Radius dieses Kreises, R der Abstand seines Mittelpunktes von der Achse, α ein Polarwinkel.

Wir führen die Rotationsachse als Z-Achse, den Punkt O der Figur als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems ein und unterscheiden die durch OZ hindurchlaufenden Ebenen nach dem Winkel φ,

---

[39]) Es entsteht hier die interessante Frage, ob es immer möglich ist, mehrblättrige Flächen mit beliebigen Verzweigungspunkten konform in solche zu verwandeln, die durchaus keine singuläre Stelle besitzen. Diese Frage greift über die im Texte zu behandelnden Gegenstände hinaus, aber ich habe sie immerhin anführen wollen. Gelingt es im einzelnen Falle nicht, so haben die vorgängigen Betrachtungen des Textes doch noch die Bedeutung, daß sie am einfachsten Beispiele die allgemeinen Ideen haben entstehen lassen und dadurch die Behandlung auch der komplizierten Vorkommnisse ermöglicht haben. [Vgl. zu dieser Frage die Abschnitte über Minimalflächen in meiner Autographie *„Riemannsche Flächen“* (1891/92). K.]

[40]) Vgl. Kirchhoff, Monatsberichte der Berliner Akademie von 1875, a. a. O. (wo übrigens explizite nur die Beziehung zwischen Ringfläche und ebenem Rechtecke besprochen wird).

den sie mit der positiven X-Achse bilden. Dann hat man für einen beliebigen Punkt der Ringfläche:

$$(1)\quad X=(R-\varrho\cos\alpha)\cos\varphi,\quad Y=(R-\varrho\cos\alpha)\sin\varphi,\quad Z=\varrho\sin\alpha.$$

Daher wird das Bogenelement:

$$(2)\quad ds=\sqrt{dX^2+dY^2+dZ^2}=\sqrt{(R-\varrho\cos\alpha)^2\cdot d\varphi^2+\varrho^2\cdot d\alpha^2}$$

oder:

$$(3)\qquad ds=(R-\varrho\cos\alpha)\cdot\sqrt{d\xi^2+d\eta^2},$$

wo

$$(4)\qquad \xi=\varphi,\quad \eta=\int_0^\alpha\frac{\varrho\,d\alpha}{R-\varrho\cos\alpha}$$

gesetzt sein soll.

Nach Formel (3) haben wir eine konforme Abbildung der Ringfläche auf die $\xi\eta$-Ebene. Die ganze Ringfläche wird offenbar einmal überstrichen, wenn φ und α (in den Formeln (1)) jedes von $-\pi$ bis $+\pi$ läuft. *Die konforme Abbildung der Ringfläche überdeckt daher ein Rechteck der Ebene, wie es durch Fig. 35 vorgestellt wird.*

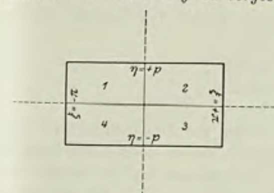

Fig. 35.

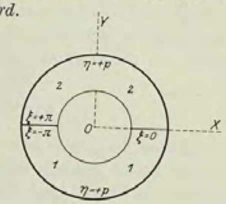

Fig. 36.

Ich habe dabei in der Figur der Kürze halber statt $\int_0^\pi\frac{\varrho\,d\alpha}{R-\varrho\cos\alpha}$ einfach p geschrieben. — Wollen wir uns die Beziehung zwischen Rechteck und Ringfläche recht anschaulich vorstellen, so denke man sich ersteres aus dehnsamem Material verfertigt und nun die gegenüberstehenden Kanten des Rechtecks ohne Torsion zusammengebogen. Oder auch, man denke sich den Ring von analoger Beschaffenheit, zerschneide ihn längs einer Breitenkurve und einer Meridiankurve und breite ihn dann in die $\xi\eta$-Ebene aus. Ich setze statt weiterer Erläuterung eine Figur her, welche die Vertikalprojektion der Ringfläche von der positiven Z-Achse aus auf die XY-Ebene vorstellt und bei der die Beziehung zur $\xi\eta$-Ebene markiert ist (Fig. 36).

Natürlich erblickt man nur die Oberseite der Ringfläche, die auf der Rückseite abgebildeten Quadranten 3 und 4 werden beziehungsweise von 2 und 1 verdeckt.

Sei nun andererseits bei reellem $\varkappa$ (< 1) über der Ebene eine zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungspunkten $Z = \pm 1, \pm \frac{1}{\varkappa}$ gegeben:

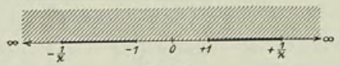

Fig. 37.

wobei ich mir (wie es in der Figur angedeutet ist) die beiden Halbblätter, welche die positive Halbebene überlagern, schraffiert denken will. Dabei sollen die Verzweigungsschnitte mit den geradlinigen Strecken zwischen $+1$ und $+\frac{1}{\varkappa}$ einerseits, und -1 und $-\frac{1}{\varkappa}$ andererseits zusammenfallen.

Diese zweiblättrige Fläche repräsentiert, wie man weiß, die Verzweigung von $w = \sqrt{1 - z^2 \cdot 1 - \varkappa^2 z^2}$, und zwar können wir, in Anbetracht der Wahl der Verzweigungsschnitte, die Zuordnung so treffen, daß auf dem oberen Blatte w durchweg einen positiven reellen Teil besitzt. Wir betrachten nun das Integral

$$W = \int_0^z \frac{dz}{w}.$$

Dasselbe liefert uns in bekannter Weise die Abbildung unserer zweiblättrigen Fläche ebenfalls auf ein Rechteck, dessen nähere Beziehung zur zweiblättrigen Fläche durch folgende Figur gegeben ist, auf welcher man die Schraffierungen und sonstigen Unterscheidungen der Fig. 37 wiederfindet:

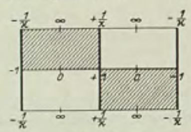
Fig. 38.

Dem oberen Blatte von Fig. 37 entspricht die linke Seite dieser Figur. Man beachte vor allem, wie sich die Abbildung für die Umgebung der Verzweigungspunkte der zweiblättrigen Fläche gestaltet. Vielleicht ist es am einfachsten, die Sache sich so vorzustellen, daß man von Fig. 37 zunächst durch stereographische Projektion zu einer zweimal überdeckten Kugelfläche übergeht, welche auf einem Meridian vier Verzweigungspunkte

trägt, — daß man die so erhaltene Fläche durch einen längs des Meridians verlaufenden Schnitt in vier Halbkugeln zerlegt, deren einzelne man durch geeignete Dehnung und Deformierung in der Nähe der vier Verzweigungspunkte in ein ebenes Rechteck verwandelt, — daß man endlich die so entstehenden vier Rechtecke entsprechend den Beziehungen zwischen den vier Halbkugeln nach Art von Fig. 38 nebeneinander legt. Man sieht auf diese Art auch deutlich, daß in Fig. 38 immer *zwei* (zusammengehörige) Randpunkte denselben Punkt der ursprünglichen Fläche bezeichnen.

Um nun zwischen dem Ringe und der zweiblättrigen Fläche die gewünschte Beziehung zu erzielen, haben wir nur dafür zu sorgen, daß das Rechteck der Fig. 38 durch passende Wahl des Moduls $\varkappa$ mit dem Rechtecke der Fig. 35 ***ähnlich*** wird. Eine proportionale Vergrößerung des einen Rechtecks (welches auch eine konforme Umgestaltung ist) bringt dasselbe sodann mit dem anderen Rechteck zur Deckung und vermittelt so eine eindeutig-konforme Abbildung der zweiblättrigen Fläche auf die Ringfläche (oder der letzteren auf die erstere). Es wird wiederum genügen, das Sachverhältnis durch eine Figur zu kennzeichnen, dieselbe entspricht genau der eben gegebenen Fig. 36:

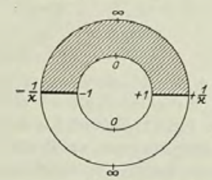

Fig. 39.

Die Schraffierung soll sich dabei nur auf die Vorderseite der Ringfläche beziehen; auf der Rückseite ist die untere Hälfte der Figur schraffiert zu denken, die obere frei zu lassen.

Die konforme Abbildung, welche wir wünschten, ist hiermit tatsächlich geleistet. Wir wollen jetzt rückwärts die Strömung auf der Ringfläche bestimmen, durch deren Vermittlung im Sinne des § 14 die Abbildung zustande kommt. Dieselbe wird an den mit $\pm 1, \pm \varkappa^2$ bezeichneten Stellen Kreuzungspunkte besitzen müssen, an den beiden Stellen ∞ algebraische Unendlichkeitspunkte von einfacher Multiplizität. Man findet die betreffenden Kurven, die Niveaukurven sowohl wie die Strömungskurven, am besten, wenn man sich des Rechtecks als Zwischenfigur bedient. Offenbar übertragen sich die Kurven $x = \text{Const.}$, $y = \text{Const.}$ der z-Ebene (Fig. 37) auf das Rechteck der Fig. 38, wie die Fig. 40, 41 angeben. Ich habe dabei allein den Kurven $y =$ Const. Pfeilspitzen zugesetzt, um sie im Gegensatze zu den anderen als Strömungskurven zu charakterisieren.

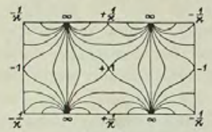

Fig. 40.

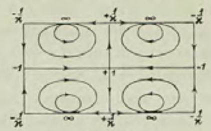

Fig. 41.

Man hat nun einfach diese Zeichnungen in derselben Weise zusammenzubiegen, wie es bei Fig. 35 geschildert wurde, um die Ringfläche und auf ihr die gewünschten Kurvensysteme zu erhalten. Das Resultat ist das folgende:

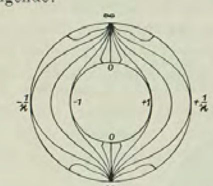

Fig. 42.

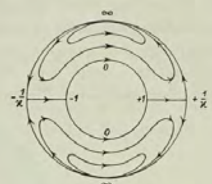

Fig. 43.

Dabei erscheinen in Fig. 42 die vier Kreuzungspunkte der Strömung vermöge der gewählten Projektionsart als Berührungspunkte der Niveaukurven mit der scheinbaren Kontur der Ringfläche.

§ 16.

Funktionen von $x + iy$, welche den untersuchten Strömungen entsprechen.

Sei $x + iy$, wie in § 14, eine eindeutige komplexe Funktion des Ortes auf unserer Fläche mit m algebraischen, einfachen Unendlichkeitspunkten. Wir verwandeln unsere Fläche nach Anleitung jenes Paragraphen in eine m-blättrige Fläche über der $x + iy$-Ebene[41]) und legen uns nun die Frage vor, *in welche Funktionen des Argumentes $x + iy$ die bisher untersuchten komplexen Funktionen des Ortes übergehen mögen.* Man erinnere sich dabei der Entwicklungen des § 6.

[41]) Diese geometrische Umsetzung ist natürlich keineswegs notwendig; wir erreichen durch dieselbe nur den Anschluß an die gewöhnlich eingehaltene Darstellungsweise.

Sei zunächst w eine komplexe Funktion des Ortes, welche auf unserer Fläche, ebenso wie $x + iy$, *eindeutig* ist. Vermöge der Festsetzungen, die hinsichtlich der Unendlichkeitspunkte unserer Funktionen und insbesondere der eindeutigen Funktionen getroffen worden sind, ergibt sich sofort, daß w als Funktion von $x + iy = z$ nirgendwo einen *wesentlich* singulären Punkt hat. Überdies ist w auf der m-blättrigen über der z-Ebene ausgebreiteten Fläche, so gut wie auf der ursprünglichen Fläche, eindeutig. Daher folgt auf Grund bekannter Sätze, *daß w eine algebraische Funktion von z ist.*

Dabei ist die Möglichkeit an sich nicht auszuschließen, daß die m Werte von w, welche demselben z entsprechen, zu je ν übereinstimmen mögen (wobei ν natürlich ein Teiler von m sein muß). Aber jedenfalls können wir solche eindeutige Funktionen w auswählen, bei denen dieses nicht der Fall ist. Wir bestimmten oben (§ 13) die eindeutigen Funktionen, indem wir ihre Unendlichkeitspunkte willkürlich annahmen. Wir haben es daher in der Hand, das erwähnte Vorkommnis jedenfalls zu vermeiden: wir brauchen nur die Unendlichkeitspunkte von w so anzunehmen, daß nicht jedesmal ν von ihnen dasselbe z aufweisen. Dann kommt:

Die irreduzible Gleichung, welche zwischen w und z besteht:

$$f(w, z) = 0$$

hat in w die m-te Ordnung.

Ebensogut wird sie in z natürlich die n-te Ordnung besitzen, wenn n die Gesamtmultiplizität der Unendlichkeitspunkte ist, die w aufweist.

Aber die Beziehung dieser Gleichung $f = 0$ zu unserer Fläche ist noch eine innigere, als die bloße Übereinstimmung der Ordnung mit der Blätterzahl aussagt. Zu jedem Punkte der Fläche gehört nur *ein* Wertepaar w, z, das der Gleichung genügt, und umgekehrt gehört zu jedem solchen Wertepaare im allgemeinen[42]) nur ein Punkt der Fläche. *Gleichung und Fläche sind sozusagen ein-eindeutig aufeinander bezogen.*

Es sei jetzt w_1 eine neue eindeutige Funktion auf unserer Fläche, also jedenfalls eine algebraische Funktion von z. Dann kann man die Art dieser algebraischen Funktion, nachdem einmal die Gleichung $f(w, z) = 0$ unter der angegebenen Voraussetzung gebildet ist, mit zwei Worten kennzeichnen. Man zeigt nämlich, *daß w_1 eine rationale Funktion von w und z ist, und daß auch umgekehrt jede rationale Funktion von w und z eine Funktion vom Charakter des w_1 abgibt.* Das letztere ist selbstverständlich. Denn eine rationale Funktion von w und z ist in unserer

[42]) Im besonderen kann dies anders sein. Wenn man w und z als Parallel-Koordinaten, die zwischen ihnen bestehende Gleichung durch eine Kurve deutet, so sind es, wie man weiß, die *Doppelpunkte* dieser Kurve, welche jenen besonderen Vorkommnissen entsprechen.

Fläche eindeutig; überdies als analytische Funktion von z eine komplexe Funktion des Ortes in der Fläche. Aber auch das erstere ist leicht zu beweisen[43]. Man bezeichne die m Werte von w, die zu einem beliebigen Werte von z gehören, mit $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots, w^{(m)}$ (allgemein $w^{(\alpha)}$), die entsprechenden Werte von w_1 (die nicht notwendig alle verschieden zu sein brauchen) mit $w_1^{(1)}, w_1^{(2)}, \ldots, w_1^{(m)}$. Dann ist die Summe:

$$w_1^{(1)} w^{(1)^\nu} + w_1^{(2)} w^{(2)^\nu} + \ldots + w_1^{(m)} w^{(m)^\nu}$$

(wo ν eine beliebige, positive oder negative ganze Zahl bedeuten soll) als symmetrische Funktion der verschiedenen Werte $w_1^{(\alpha)} w^{(\alpha)^\nu}$ eine eindeutige Funktion von z, und also, als algebraische Funktion, eine *rationale* Funktion von z. Aus m beliebigen der so entstehenden Gleichungen kann man $w_1^{(1)}, w_1^{(2)}, \ldots, w_1^{(m)}$ als linear vorkommende Unbekannte berechnen, und es zeigt dann eine leichte Diskussion, daß in der Tat das einzelne $w_1^{(\alpha)}$ eine rationale Funktion des zugehörigen $w^{(\alpha)}$ und des z geworden ist. —

Von diesem Satze ausgehend bestimmt man nun auch sofort den Charakter derjenigen Funktionen von z, welche durch die von uns in Betracht gezogenen *mehrdeutigen* Funktionen des Ortes geliefert werden. Sei W eine solche Funktion. Dann ist W jedenfalls eine analytische Funktion von z; man kann also von einem *Differentialquotienten* $\frac{dW}{dz}$ sprechen und diesen selbst wieder als komplexe Funktion des Ortes auf unserer Fläche deuten. Derselbe ist notwendig als Funktion des Ortes eindeutig. Denn die Vieldeutigkeit von W bezieht sich ja nur auf konstante Periodizitätsmoduln, welche, in beliebiger Vielfachheit genommen, dem Anfangswerte additiv hinzutreten können. Daher ist $\frac{dW}{dz}$ nach dem eben Bewiesenen eine rationale Funktion von w und z, *und es stellt sich also W als Integral einer solchen Funktion dar:*

$$W = \int R(w, z)\, dz.$$

Der umgekehrte Satz, daß jedes solche Integral eine komplexe Funktion des Ortes in unserer Fläche abgibt, welche zu der von uns betrachteten Funktionsklasse gehört, ist auf Grund bekannter Entwicklungen selbstverständlich. Diese Entwicklungen beziehen sich einmal auf das Unendlichwerden der Integrale, andererseits auf die Wertänderungen, welche die Integrale durch Wechsel des Integrationsweges erleiden. Ein näheres Eingehen hierauf scheint an dieser Stelle unnötig.

[43] Vgl. die eingehende Beweisführung bei Prym, Crelles Journal, Bd. 83, 1877, S. 251 ff.: *Beweis eines Riemannschen Satzes.*

Wir sind, wie wir sehen, zu einem wohlumgrenzten Resultate geführt worden. *Ist erst einmal die algebraische Gleichung bestimmt, welche die Abhängigkeit zwischen z und dem in hohem Maße willkürlichen w definiert, so sind die übrigen Funktionen des Ortes der Art nach wohlbekannt; sie decken sich in ihrer Gesamtheit mit den rationalen Funktionen von w und z, und mit den Integralen solcher Funktionen.*

Es wird gut sein, dieses Resultat am Falle der wiederholt betrachteten Ringfläche $p = 1$ zu erläutern. Als Funktionen z und w werden wir diejenigen zugrunde legen, die im vorigen Paragraphen besprochen wurden, und von denen die erstere durch die Fig. 42, 43 erläutert wird. Die zwischen ihnen bestehende Gleichung lautet einfach, wie wir wissen:

$$w^2 = 1 - z^2 \cdot 1 - \varkappa^2 z^2$$

und es verwandeln sich also die Integrale $\int R(w, z)\, dz$ in diejenigen, die man als *elliptische Integrale* zu bezeichnen pflegt. Unter ihnen gibt es, nach § 12, ein einziges „überall endliches" Integral. Aus der in Fig. 38 gegebenen Abbildung folgt, daß dieses kein anderes ist, als das dort betrachtete $\int \frac{dz}{w}$, das gewöhnlich sogenannte *Integral erster Gattung*. Die zugehörigen Niveaukurven und Strömungskurven sind dieselben, welche in Fig. 21 und 22 dargestellt sind. Aber auch diejenigen Funktionen, denen die Fig. 29 und 30, bez. 31 und 32 entsprechen, sind in der gewöhnlichen Analysis wohlbekannt. Wir haben das eine Mal eine Funktion mit zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkten, das andere Mal eine solche mit nur einem algebraischen Unstetigkeitspunkte. Als Funktionen von z betrachtet geben dieselben solche elliptische Integrale ab, welche man als *Integrale dritter Gattung* bez. *zweiter Gattung* zu bezeichnen pflegt.

§ 17.

Tragweite und Bedeutung unserer Betrachtungen.

Mit den Entwicklungen des vorigen Paragraphen ist der Zielpunkt, den wir uns mit der allgemeinen Fragestellung des § 7 gesteckt haben, tatsächlich erreicht. Wir haben auf beliebiger Fläche die allgemeinsten für uns in Betracht kommenden komplexen Funktionen des Ortes bestimmt und nun die analytischen Abhängigkeiten derselben voneinander definiert, indem wir zusahen, wie alle von einer, übrigens beliebig gewählten, eindeutigen Funktion des Ortes im Sinne der gewöhnlichen Analysis abhängig sind. Es bleibt uns also, um unseren Gedankengang abzuschließen, nur noch ein Umblick zu halten, was alles durch unsere Betrachtungen gewonnen sein mag. Wir haben dann allerdings keineswegs den vollen Inhalt, aber doch die Grundlage der Riemannschen Theorie gewonnen, und es kann wegen weiterer Ausführungen auf Riemanns Originalarbeit sowie die sonstigen Darstellungen der Theorie verwiesen werden.

Konstatieren wir zunächst, *daß es in der Tat die Gesamtheit der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale ist, welche durch unsere Untersuchung umspannt wird.* Denn wenn eine beliebige algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$ gegeben ist, so können wir in der gewöhnlichen Weise über der z-Ebene eine zugehörige mehrblättrige Riemannsche Fläche konstruieren und nun auf dieser einförmige Strömungen und komplexe Funktionen des Ortes studieren (vgl. § 15).

Wir fragen, ob das Studium dieser Funktionen durch unsere Betrachtungen in der Tat gefördert sei. Erinnern wir uns zu dem Zwecke, daß es vor allen Dingen die *Vieldeutigkeit* der Integrale war, welche so lange einen Fortschritt in ihrer Theorie verhindert hat. Daß Integrale durch das Auftreten logarithmischer Unstetigkeitspunkte vieldeutig werden, hatte schon Cauchy erkannt. Aber erst durch die Riemannsche Fläche ist die andere Art von Periodizität, welche in dem *Zusammenhange* der Fläche ihren Grund hat und an den Querschnitten der Fläche gemessen wird, uns völlig deutlich geworden. — Ein anderer Punkt ist dieser. Man hat sich von je bei der Untersuchung der Integrale der Umformung durch Substitution bedient, ohne sich indes über eine bloß empirische Verwertung derselben beträchtlich zu erheben. Bei Riemanns Theorie ist eine umfangreiche Klasse von Substitutionen von selbst gegeben und in ihrer Wirkung zu beurteilen. Die Variablen w und z sind für uns nur irgend zwei, voneinander unabhängige, eindeutige Funktionen des Ortes; wir können statt ihrer ebensogut zwei andere, w_1 und z_1, zugrunde legen, wobei sich w_1 und z_1 als übrigens beliebige rationale Funktionen von w und z und ebensowohl letztere als rationale Funktionen von w_1 und z_1 erweisen. Die Riemannsche Fläche, auf der wir operieren, wird von dieser Umänderung durchaus nicht notwendig betroffen. Unter der Menge der *zufälligen* Eigenschaften unserer Funktionen erkennen wir also *wesentliche*, welche bei eindeutiger Umformung ungeändert bleiben. Und vor allem tritt uns in der Zahl p von vornherein ein solches invariantes Element entgegen. — Indem die Riemannsche Theorie die beiden hiermit bezeichneten Schwierigkeiten, welche frühere Bearbeiter gehemmt hatten, beiseite räumt, gelangt sie unmittelbar zu dem Satze, den wir in § 10 aufstellten, und der die Willkürlichkeit der in Betracht zu ziehenden Funktionen bestimmt. Ich meine den Satz, *daß man (unter den wiederholt angegebenen Beschränkungen) die Unendlichkeitspunkte der Funktion und die Periodizitätsmoduln ihres reellen Teiles an den Querschnitten als willkürliche und hinreichende Bestimmungsstücke derselben erachten darf [abgesehen von einer additiven Konstanten].*

So etwa stellt sich die Bilanz, wenn man die funktionentheoretischen Interessen, wie es unter Mathematikern zu geschehen pflegt, voranstellt. Aber vergessen wir nicht, daß die umgekehrte Auffassung im Grunde ebenso berechtigt ist. Das Studium einförmiger Strömungen auf gegebenen Flächen kann um so mehr als Selbstzweck betrachtet werden, als es bei zahlreichen *physikalischen* Problemen unmittelbar zur Verwertung gelangt. In der unendlichen Mannigfaltigkeit dieser Strömungen orientiert uns die Riemannsche Theorie, indem sie auf den Zusammenhang hinweist, der zwischen diesen Strömungen und den algebraischen Funktionen der Analysis bez. ihren Integralen statthat.

Wir können endlich den *geometrischen* Gesichtspunkt hervorkehren, und die Riemannsche Theorie als ein Mittel betrachten, um die Lehre von der konformen Abbildung geschlossener Flächen aufeinander der analytischen Behandlung zugänglich zu machen. Eben diese Auffassung ist es, der ich im folgenden, dritten Abschnitte meiner Darstellung Ausdruck zu geben bemüht bin. Es wird nicht nötig sein, schon an dieser Stelle ausführlicher hierauf einzugehen.

§ 18.
Weiterbildung der Theorie.

In Riemanns eigenem Gedankengange, wie ich ihn vorstehend zu schildern versuchte, veranschaulicht die Riemannsche Fläche nicht nur die in Betracht kommenden Funktionen, sondern sie *definiert* dieselben. Es scheint möglich, diese beiden Dinge zu trennen: die Definition der Funktionen von anderer Seite zu nehmen und die Fläche nur als Mittel der Veranschaulichung beizubehalten. Das ist es in der Tat, was von der Mehrzahl der Mathematiker um so lieber geschehen ist, als Riemanns Definition der Funktion bei genauerer Untersuchung beträchtliche Schwierigkeiten mit sich bringt[44]). Man beginnt also etwa mit der algebraischen Gleichung und der Begriffsbestimmung des Integrals, und konstruiert erst hinterher eine zugehörige Riemannsche Fläche.

Dann aber ist von selbst eine große Verallgemeinerung der ursprünglichen Auffassung gegeben. Bislang galten uns zwei Flächen nur dann als gleichwertig, wenn die eine aus der anderen durch eindeutige konforme Abbildung entstand. Jetzt ist kein Grund mehr, an der Konformität der Abbildung festzuhalten. *Jede Fläche, welche durch stetige Abbildung eindeutig in die gegebene verwandelt werden kann, überhaupt jedes geometrische Gebilde, dessen Elemente sich stetig ein-eindeutig auf die ursprüngliche Fläche beziehen lassen, kann ebensowohl zur Versinnlichung der in*

[44]) Vgl. die betreffenden Bemerkungen der Vorrede.

Betracht zu ziehenden Funktionen gebraucht werden. Ich habe diesem Gedanken, wie ich bei gegenwärtiger Gelegenheit ausführen möchte, in früheren Arbeiten nach zwei Richtungen hin Ausdruck gegeben.

Einmal operierte ich mit dem Begriffe einer möglichst übersichtlichen, übrigens verschiedentlich modifizierbaren *Normalfläche* (vgl. § 8), auf welcher ich den Verlauf der in Betracht kommenden Funktionen durch verschiedene graphische Hilfsmittel zu illustrieren bemüht war. Hierher gehören auch die *Polygonnetze*, deren ich mich wiederholt bediente[45]), indem ich mir die Riemannsche Fläche in geeigneter Weise zerschnitten und dann in die Ebene ausgebreitet dachte. Es bleibe dabei an dieser Stelle unerörtert, ob nicht den so entstehenden Figuren, die zunächst beliebig stetig verändert werden dürfen, im Interesse weitergehender funktionentheoretischer Untersuchungen hinterher doch eine gesetzmäßige Gestalt erteilt werden soll, vermöge deren sich eine *Definition* der durch die Figur zu veranschaulichenden Funktionen ermöglicht.

Das andere Mal[46]) stellte ich mir die Aufgabe, in möglichst anschaulicher Weise den Zusammenhang darzulegen zwischen der Auffassungsweise der Funktionentheorie und derjenigen der gewöhnlichen analytischen Geometrie, welch letztere eine Gleichung zwischen zwei Variablen als *Kurve* deutet. Indem ich von dem Satze ausging, daß jede imaginäre Gerade der Ebene und also auch jede imaginäre Tangente einer Kurve einen und nur einen reellen Punkt besitzt, erhielt ich eine Riemannsche Fläche, die sich an den Verlauf der gegebenen Kurve auf das innigste anschmiegt. Ich habe diese Fläche, wie es mein ursprünglicher Zweck war, bisher nur zur Veranschaulichung gewisser einfacher Integrale gebraucht[47]). Aber es findet eine ähnliche Bemerkung ihre Stelle, wie oben bei den Polygonnetzen. Insofern die Fläche gesetzmäßig ist, muß auch sie zur *Definition* der auf ihr existierenden Funktionen dienen können. In der Tat kann man für diese Funktionen eine partielle Differentialgleichung bilden, welche

[45]) Vgl. meine Arbeiten über elliptische Modulfunktionen in den Bänden 14, 15, der Math. Annalen (1878—1879) [= Abh. LXXXII—LXXXIV dieses Bandes]. Man sehe insbesondere die Figuren in der Arbeit „*Zur Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen*" aus den Math. Annalen Bd. 14 [vgl. Abh. LXXXIV dieses Bandes, besonders S. 126 daselbst], sowie die später noch zu nennende Arbeit von Dyck im 17. Bande der Math. Annalen (1880/81). [Vgl. auch Fußnote[24]) auf S. 122 des vorliegenden Bandes.]

[46]) „*Über eine neue Art von Riemannschen Flächen*", Math. Annalen Bd. 7 und 10 (1874 und 1876) [vgl. Abh. XXXVIII und XL in Bd. 2 dieser Gesamtausgabe].

[47]) Siehe: Harnack (*Über die Verwertung der elliptischen Funktionen für die Geometrie der Kurven dritten Grades*) im 9. Bande der Math. Annalen (1875/76), siehe ferner meinen schon oben genannten Aufsatz: „*Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades*" im 10. Bande daselbst (1876) [vgl. Abh. XXXIX in Bd. 2 dieser Gesamtausgabe].

den Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die wir in §§ 1 und 5 betrachten, in etwa analog ist: nur daß der Differentialausdruck, an den diese Gleichung anknüpft, nicht unmittelbar [oder doch nur in übertragenem Sinne] als *Bogenelement* einer Fläche zu deuten ist[48]).

Diese wenigen Bemerkungen müssen genügen, um auf Betrachtungen hinzuweisen, deren Verfolg mir interessant erscheint.

Abschnitt III.

Folgerungen.

§ 19.

Über die Moduln algebraischer Gleichungen.

Es gibt einen wichtigen Punkt, in welchem die Riemannsche Theorie der algebraischen Funktionen nicht nur der Methode, sondern auch dem Resultate nach über die sonst üblichen Darstellungen dieser Theorie hinausgreift. Sie besagt nämlich, *daß zu jeder über der z-Ebene ausgebreiteten, graphisch gegebenen mehrblättrigen Fläche zugehörige algebraische Funktionen konstruiert werden können*, — wobei man beachten mag, daß diese Funktionen, sofern sie überhaupt existieren, in hohem Maße willkürlich sind, da $R(w, z)$ im allgemeinen geradeso verzweigt ist, wie w. — Der genannte Satz ist um so merkwürdiger, als er eine Angabe über eine interessante Gleichung höheren Grades impliziert. Sind nämlich die Verzweigungspunkte einer m-blättrigen Fläche gegeben, so existieren noch eine endliche Zahl von wesentlich verschiedenen Möglichkeiten, dieselben in die m-Blätter einzuordnen: man wird diese Zahl durch Betrachtungen auffinden können, die der reinen Analysis situs angehören[49]). Aber dieselbe Zahl hat unserem Satze zufolge ihre algebraische Bedeutung. Man bezeichne, wie es Riemann tut, alle solche algebraischen Funktionen von z als derselben „Klasse" angehörig, die sich, unter Benutzung von z, rational durch einander ausdrücken lassen. *Dann ist unsere Zahl die Anzahl der verschiedenen Klassen algebraischer Funktionen, welche in bezug auf z die gegebenen Verzweigungswerte besitzen.*[50])

[48]) [Siehe auch die Fußnote[1]) auf S. 101 in Bd. 2 dieser Ausgabe.]

[49]) Solche Bestimmungen machte z. B. Herr Kasten in seiner Göttinger Inauguraldissertation: *Zur Theorie der dreiblättrigen Riemannschen Fläche*. Bremen 1876.

[50]) Wenn es hier wieder gestattet ist auf eigene Arbeiten zu verweisen, so geschehe dies zunächst mit Bezug auf eine Stelle der Arbeit über lineare Differentialgleichungen im 12. Bande der Math. Annalen (1877) [vgl. Abh. LIII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 315 ff.], wo der Schluß begründet wird, daß gewisse rationale Funktionen durch die Zahl ihrer Verzweigungen völlig bestimmt sind, sodann in bezug auf die Arbeit über die Transformation elfter Ordnung in Bd. 15 der Math. Annalen [vgl. Abh. LXXXVI

Ich wünsche im gegenwärtigen und im folgenden Paragraphen verschiedene Folgerungen zu ziehen, die sich aus dem vorausgeschickten Satze gewinnen lassen, und zwar mag zunächst die Frage nach den *Moduln* der algebraischen Funktionen [wie sie Riemann nennt] behandelt werden, d. h. die Frage nach denjenigen Konstanten, welche bei eindeutiger Transformation der Gleichungen $f(w, z) = 0$ die Rolle der Invarianten spielen.

Sei zu diesem Zwecke ϱ eine zunächst unbekannte Zahl, welche angibt, wie vielfach unendlich oft eine Fläche sich eindeutig in sich transformieren, d. h. konform auf sich selber abbilden läßt, [wieviele kontinuierlich veränderliche, komplexe Parameter die Transformation enthält.] Sodann erinnere man sich an die Anzahl der Konstanten in den eindeutigen Funktionen auf gegebener Fläche (§ 13). Es gab im allgemeinen ∞^{2m-p+1} eindeutige Funktionen mit m Unendlichkeitspunkten, und diese Zahl war jedenfalls genau richtig (wie ohne Beweis angegeben wurde), wenn $m > 2p - 2$ war. Nun bildet jede dieser Funktionen die gegebene Fläche auf eine m-blättrige Fläche über der Ebene eindeutig ab. *Daher ist die Gesamtheit der m-blättrigen Flächen, auf welche man eine gegebene Fläche konform eindeutig beziehen kann, und also auch der m-blättrigen Flächen, die man einer Gleichung $f(w,z) = 0$ durch eindeutige Transformation zuordnen kann, $\infty^{2m-p+1-\varrho}$fach.* Denn jedesmal ∞^{ϱ} Abbildungen ergeben dieselbe m-blättrige Fläche, weil jede Fläche der Voraussetzung nach ∞^{ϱ}mal auf sich selber abgebildet werden kann.

Nun gibt es aber überhaupt ∞^{w} m-blättrige Flächen, unter w die Zahl der Verzweigungspunkte, d. h. $2m + 2p - 2$ verstanden. Denn durch die Verzweigungspunkte wird die Fläche, wie oben bemerkt, endlich-deutig bestimmt, und Verzweigungspunkte höherer Multiplizität entstehen durch Zusammenrücken einfacher Verzweigungspunkte, wie dieses betreffs der entsprechenden Kreuzungspunkte bereits in § 1 erläutert wurde (vgl. Fig. 2 und 3 auf S. 509). Zu jeder dieser Flächen gehören, wie wir wissen, algebraische Funktionen. *Die Anzahl der Moduln ist daher $w - (2m + 1 - p - \varrho) = 3p - 3 + \varrho$.*

Bemerken wir hierzu, daß die Gesamtheit der m-blättrigen Flächen mit w Verzweigungspunkten ein *Kontinuum* bildet[51]), wie das Entsprechende betreffs der auf gegebener Fläche existierenden eindeutigen Funktionen mit m Unendlichkeitspunkten bereits in § 13 hervorgehoben wurde. Wir schließen dann, *daß die algebraischen Gleichungen eines gegebenen p ebenfalls eine einzige zusammenhängende Mannigfaltigkeit konstituieren* (wobei wir alle Gleichungen, die auseinander durch eindeutige Transformation hervorgehen, als ein Individuum erachten). Hierdurch erst gewinnt die angegebene Zahl der Moduln ihre präzise Bedeutung: *sie ist die Zahl der komplexen Dimensionen dieser zusammenhängenden Mannigfaltigkeit.*

dieses Bandes, S. 141 ff], wo eine ausführliche Betrachtung lehrt, daß es zehn rationale Funktionen elften Grades gibt, die gewisse Verzweigungsstellen besitzen. [Später hat Hurwitz diese Untersuchungen wesentlich weiter geführt. Siehe Math. Annalen Bd. 39 (1891) und Bd. 55 (1901).]

[51]) Es folgt dies z. B. aus den Sätzen von Lüroth und Clebsch, die man in den Bänden 4 und 6 der mathematischen Annalen (1871 und 1873) abgeleitet findet.

Es kommt jetzt noch darauf an, die Zahl ϱ zu bestimmen. Dies geschieht durch folgende Sätze:

1. *Jede Gleichung $p = 0$ kann ∞^3 mal eindeutig in sich selbst transformiert werden.* Denn auf der zugehörigen Riemannschen Fläche existieren eindeutige Funktionen mit nur je einem Unendlichkeitspunkt in dreifach unendlicher Zahl (§ 13), von denen man, um eine eindeutige Transformation der Fläche in sich zu haben, nur irgend zwei entsprechend zu setzen hat. — Des näheren stellt sich die Sache so. Heißt eine der genannten Funktionen z, so sind alle anderen (nach § 16) algebraische eindeutige, d. h. rationale Funktionen von z, und, da das Verhältnis umkehrbar sein muß, *lineare* Funktionen von z. Umgekehrt ist auch jede lineare Funktion von z eine eindeutige Funktion des Ortes in unserer Fläche, mit nur einem Unendlichkeitspunkte. Daher wird man die allgemeinste eindeutige Transformation der Gleichung in sich bekommen, wenn man jedem Punkte z der Riemannschen Fläche einen anderen durch die Formel zuordnet:

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

unter $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ beliebige komplexe Konstante verstanden.

2. *Jede Gleichung $p = 1$ kann einfach unendlich oft eindeutig in sich transformiert werden.* Zum Beweise betrachte man das zugehörige überall endliche Integral W und insbesondere die Abbildung, welche von der zweckmäßig zerschnittenen Riemannschen Fläche in der Ebene W entworfen wird. Wir haben dies in einem besonderen Falle bereits getan (§ 15, Fig. 38); eine genaue Ausführung im allgemeinen Falle wird um so weniger nötig sein, als es sich um Betrachtungen handelt, die in der Theorie der elliptischen Funktionen ausführlich entwickelt zu werden pflegen. Das Resultat ist, daß zu jedem Werte von W *ein* Punkt und nur ein Punkt der betreffenden Riemannschen Fläche gehört, während sich die unendlich vielen Werte von W, die demselben Punkte der Riemannschen Fläche entsprechen, aus einem derselben in der Form zusammensetzen: $W + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, unter m_1, m_2 beliebige ganze Zahlen, unter ω_1, ω_2 die beiden Perioden des Integrals verstanden. Bei eindeutiger Umformung wird jedem Punkte W ein Punkt W_1 in der Weise zugeordnet werden müssen, daß jeder Vermehrung von W um Perioden eine solche

von W_1 entspricht, und umgekehrt. Dies gelingt in der Tat, aber im allgemeinen nur in der Weise, daß man

$$W_1 = \pm W + C$$

setzt. Nur im besonderen Falle (wenn das Periodenverhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ bestimmte zahlentheoretische Eigenschaften hat) kann W_1 auch gleich $\pm i W + C$, oder $\pm \varrho W + C$ gesetzt werden (unter ϱ eine dritte Einheitswurzel verstanden)[52]). Wie dem auch sei, wir haben in jedem Falle in den Transformationsformeln nur eine willkürliche Konstante und also den wechselnden Werten derselben entsprechend in der Tat einfach unendlich viele Transformationen, wie behauptet wurde.

3. *Gleichungen $p > 1$ können niemals unendlich oft eindeutig in sich transformiert werden*[53]).

Ich verweise, was den analytischen Beweis dieser Behauptung angeht, auf die Darstellungen von Schwarz (Crelles Journal, Bd. 87, 1875/79 [= Ges. Math. Abhandlungen Bd. 2, S. 285 ff.]) und Hettner (Göttinger Nachrichten, 1880, S. 386). Auf anschauungsmäßigem Wege kann man sich die Richtigkeit der Behauptung folgendermaßen verständlich machen. Sollte es unendlich viele eindeutige Transformationen der Gleichung in sich geben, so müßte es möglich sein, die zugehörige Riemannsche Fläche derart kontinuierlich über sich hin zu *verschieben*, daß jede kleinste Figur mit sich selbst ähnlich bleibt. Die Kurven, längs deren eine solche Verschiebung vor sich ginge, müßten die Fläche jedenfalls vollständig und zugleich einfach überdecken. Ein *Kreuzungspunkt* dürfte in diesem Kurvensysteme offenbar nicht vorhanden sein. Man müßte einen solchen Punkt nämlich, damit keine Vieldeutigkeit der Transformation eintritt, als festbleibenden Punkt betrachten und also die Geschwindigkeit der Verschiebung in ihm gleich Null setzen. Dann aber würde eine kleine Figur, welche bei der Verschiebung auf den Kreuzungspunkt zu rückt, im Sinne der Bewegung notwendig zusammengedrückt, senkrecht dazu auseinandergezogen werden; sie könnte also nicht mit sich selbst ähnlich bleiben, wie es doch durch den Begriff der konformen Abbildung verlangt wird. — Andererseits müssen aber in jedem Kurvensysteme, das eine Fläche $p > 1$ vollständig und einfach überdeckt, notwendig Kreuzungspunkte vorhanden sein. Dies ist der-

[52]) Ich führe dieses Resultat, welches aus der Theorie der elliptischen Funktionen wohlbekannt ist, im Texte ohne Beweis an.

[53]) Es ist bei diesem Satze an eine *kontinuierliche* Schar von Transformationen, also an Transformationen mit willkürlich veränderlichen Parametern gedacht. Ob eine Fläche $p > 1$ unter Umständen nicht durch unendlich viele *diskrete* Transformationen in sich übergehen kann, bleibt im Texte unerörtert; doch ist dies bei endlichem p in der Tat auch unmöglich. [Vgl. meinen Brief an H. Poincaré vom 3. April 1882, der unten auf S. 608 f. abgedruckt ist, bzw. dessen an denselben anknüpfende Ausführungen in Bd. 7 der Acta mathematica, 1885, S. 16. K.]

selbe Satz, den wir in etwas weniger allgemeiner Form in § 11 aufgestellt haben. — Die ganze Verschiebung der Fläche in sich ist also unmöglich, was zu beweisen war.

Nach diesen Sätzen ist $\varrho = 3$ für $p = 0$, gleich 1 für $p = 1$, und gleich Null für alle größeren p. *Die Zahl der Moduln ist also für $p = 0$ gleich Null, für $p = 1$ gleich Eins, für größere p gleich $3p - 3$.*

Es wird gut sein, noch folgende Bemerkungen hinzuzufügen. Um den Punkt eines Raumes von $(3p - 3)$ Dimensionen zu bestimmen, wird man im allgemeinen mit $(3p - 3)$ Größen nicht ausreichen: man wird mehr Größen benötigen, zwischen denen dann algebraische (oder auch transzendente) Relationen bestehen. Außerdem mag es aber auch sein, daß man zweckmäßigerweise Bestimmungsstücke einführt, von denen jedesmal verschiedene Serien denselben Punkt der Mannigfaltigkeit bezeichnen. Welche Verhältnisse bei den $(3p - 3)$ Moduln, die bei $p > 1$ existieren müssen, in dieser Hinsicht vorliegen, ist nur erst wenig erforscht. Dagegen ist der Fall $p = 1$ aus der Theorie der elliptischen Funktionen genau bekannt. Ich erwähne die auf ihn bezüglichen Resultate, um mich im folgenden bei aller Kürze doch präzise ausdrücken zu können. Sei vor allen Dingen hervorgehoben, daß für $p = 1$ das algebraische Individuum (um diesen oben gebrauchten Ausdruck noch einmal zu verwenden) in der Tat durch eine (und nur eine) Größe charakterisiert werden kann: *die absolute Invariante* $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$.[54]) Wenn im folgenden gesagt wird, daß zur Überführbarkeit zweier Gleichungen $p = 1$ ineinander die Gleichheit des Moduls nicht nur hinreichend, sondern auch erforderlich sei, so ist stets an die Invariante J gedacht. Statt ihrer verwendet man bekanntlich gewöhnlich das *Legendre*sche $\varkappa^2$, welches bei gegebenem J sechswertig ist, so daß bei der Formulierung allgemeiner Sätze eine gewisse Schwerfälligkeit unvermeidbar scheint. In noch höherem Maße ist dies der Fall, wenn man das Periodenverhältnis $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ des elliptischen Integrals erster Gattung, wie dies in anderer Beziehung vielfach zweckmäßig ist, als Modul einführt. Jedesmal unendlich viele Werte des Moduls bezeichnen dann dasselbe algebraische Individuum.

§ 20.

Konforme Abbildung geschlossener Flächen auf sich selbst.

In den nun noch folgenden Paragraphen mögen die entwickelten Prinzipien, wie in Aussicht gestellt, nach der geometrischen Seite verfolgt

[54]) Vgl. die Darstellung im 14. Bande der Math. Annalen (1878/79) in der Arbeit *„Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades“* [= Abh. LXXXII des vorliegenden Bandes S. 13 ff.].

werden, um wenigstens die Grundzüge für eine Theorie *der konformen Abbildung* von Flächen aufeinander zu gewinnen[55]) und so den Andeutungen zu entsprechen, mit denen Riemann, wie bereits in der Vorrede bemerkt, seine Dissertation abschloß. Ich werde mich dabei, was die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ angeht, um nicht zu weitläufig zu werden, vielfach auf eine bloße Angabe der Resultate oder eine Andeutung ihres Beweises beschränken müssen.

Indem wir uns zuvörderst nach konformen Abbildungen einer geschlossenen Fläche auf sich selbst fragen, haben wir eine Unterscheidung einzuführen, von der bislang noch nicht die Rede war: *die Abbildung kann ohne Umlegung der Winkel geschehen oder mit Umlegung derselben.* Wir haben eine Abbildung der einen Art, wenn wir eine Kugel durch Drehung um den Mittelpunkt mit sich selbst zur Deckung bringen; wir bekommen die zweite Art, wenn wir zu demselben Zwecke eine Spiegelung an einer Diametralebene verwenden. Die analytische Behandlung, wie wir sie bisher benutzten, entspricht nur den Abbildungen der ersten Art. Sind $u + iv$ und $u_1 + iv_1$ zwei beliebige komplexe Funktionen des Ortes auf derselben Fläche, so liefert $u = u_1$, $v = v_1$ die allgemeinste Abbildung erster Art (vgl. § 6). Aber es ist leicht zu sehen, wie man die Erweiterung zu treffen hat, um auch Abbildungen zweiter Art zu umfassen. *Man hat einfach $u = u_1$, $v = -v_1$ zu setzen, um eine Abbildung zweiter Art zu haben.*

Entnehmen wir zunächst den Entwicklungen des vorigen Paragraphen, was sich auf Abbildung der ersten Art bezieht. Indem wir uns möglichst geometrischer Ausdrucksweise bedienen, formulieren wir die folgenden Theoreme:

Flächen $p = 0$ oder $p = 1$ können immer, Flächen $p > 1$ niemals unendlich oft durch Abbildung der ersten Art in sich übergeführt werden.

Bei den Flächen $p = 0$ ist die einzelne Abbildung der ersten Art bestimmt, wenn man drei beliebige Punkte der Fläche drei beliebigen Punkten derselben zugeordnet hat.

Ist $p = 1$, so darf man einen beliebigen Punkt der Fläche einem zweiten nach Willkür zuweisen, und hat dann noch zur Bestimmung der Abbildung erster Art im allgemeinen eine zweifache, im besonderen Falle eine vierfache oder sechsfache Möglichkeit.

[55]) Die im Texte aufzustellenden Sätze finden sich explizite größtenteils in der Literatur nicht vor. Wegen der Flächen $p = 0$ vergleiche man den bereits zitierten Aufsatz von Schwarz (Berliner Monatsberichte 1870 [= Ges. Math. Abhandlungen Bd. 2, S. 167]). Man sehe ferner die Arbeit von Schottky: *Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen*, die als Berliner Inaugural-Dissertation 1875 erschien und später (1877) in umgearbeiteter Form in Borchardts Journal Bd. 83 abgedruckt wurde. Es handelt sich in derselben um solche p-fach zusammenhängende ebene Bereiche, welche von $(p + 1)$ Randkurven begrenzt werden.

Mit diesen Sätzen ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß besondere Flächen $p > 1$ durch *getrennte* Transformationen der ersten Art in sich übergehen mögen. Tritt dies ein, so bildet es eine bei beliebiger konformer Umänderung der Fläche invariante Eigenschaft, nach deren Vorhandensein und Modalität besonders interessante Flächenklassen aus der Gesamtheit der übrigen herausgehoben werden können[56]). Doch verfolgen wir hier diesen Gesichtspunkt nicht weiter.

Betreffs der Transformation zweiter Art mögen wir voranstellen, *daß jede Transformation der zweiten Art in Verbindung mit einer solchen der ersten Art eine neue Transformation der zweiten Art ergibt.* Nun kennen wir bei den Flächen $p = 0$ und $p = 1$ die Transformationen erster Art auf Grund der angegebenen Sätze vollständig. Es wird bei ihnen also genügen, zu untersuchen, ob überhaupt *eine* Transformation der zweiten Art existiert. *Bei den Flächen $p = 0$ ist dies sofort zu bejahen.* Denn es genügt, eine beliebige der eindeutigen Funktionen des Ortes mit nur einem Unendlichkeitspunkte, $x + iy$, herauszugreifen, und dann $x_1 = x$, $y_1 = -y$ zu setzen. Bei den Flächen $p = 1$ ist die Sache anders. *Man findet, daß im allgemeinen keine Transformation der zweiten Art existiert.* Zum Beweise ist es am einfachsten, die Werte in Betracht zu ziehen, welche das überall endliche Integral W auf der Fläche $p = 1$ annimmt. Man denke sich in der Ebene W die Punkte $W = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2$ markiert, unter m_1, m_2 wie oben beliebige positive oder negative ganze Zahlen verstanden. Man zeigt dann leicht, daß eine Transformation der zweiten Art der Fläche $p = 1$ in sich nur dann möglich ist, wenn dieses Punktsystem eine Symmetrieachse besitzt. Es ist dies gerade *der* Fall, in welchem die oben definierte absolute Invariante J einen *reellen* Wert aufweist. Je nachdem dabei $J < 1$ oder > 1, können jene Punkte in der W-Ebene als die Ecken eines *rhombischen* oder eines *rechteckigen* Systems betrachtet werden.

Sei nun $p > 1$. Wenn für eine solche Fläche eine Transformation der zweiten Art existiert, so wird dieselbe im allgemeinen von keiner weiteren Transformation derselben Art begleitet sein[57]). Denn sonst würde die Wiederholung oder Kombination dieser Transformationen eine von der Identität verschiedene Transformation der ersten Art liefern. Die Trans-

[56]) Solchen Flächen entsprechen algebraische Gleichungen mit einer Gruppe eindeutiger Transformationen in sich. Die Bemerkungen des Textes zielen also auf solche Untersuchungen ab, wie sie in neuerer Zeit von Herrn Dyck verfolgt worden sind (vgl. die bereits zitierte Arbeit im 17. Bande der Math. Annalen 1881: *Untersuchung und Aufstellung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemannscher Flächen*).

[57]) Es gibt natürlich wieder Flächen, welche neben einer Anzahl von Transformationen erster Art eine gleiche Anzahl von Transformationen zweiter Art zulassen; dieselben entsprechen den *regulär-symmetrischen* Flächen der Dyckschen Arbeit.

formation muß daher notwendig eine *symmetrische* sein, d. h. eine solche, welche die Punkte der Fläche *paarweise* zusammenordnet. Ich will dementsprechend die Fläche selbst eine *symmetrische* nennen.

Übrigens mögen hinterher unter diesem Namen überhaupt alle Flächen mit einbegriffen sein, welche Transformationen zweiter Art in sich zulassen, die zweimal angewandt zur Identität zurückführen. Es gehören dahin, wie man sofort sieht, die Flächen $p = 0$, sowie auch sämtliche Flächen $p = 1$ mit reeller Invariante.

§ 21.

Besondere Betrachtung der symmetrischen Flächen.

Für die symmetrischen Flächen, auf die wir hier unser besonderes Augenmerk richten wollen, ergibt sich sofort eine Einteilung nach der Zahl und Art der auf ihr befindlichen *Übergangskurven*, d. h. derjenigen Kurven, deren Punkte bei der in Betracht kommenden symmetrischen Umformung ungeändert bleiben.

Die Zahl dieser Kurven kann jedenfalls nicht größer sein, als $(p+1)$. Denn wenn man eine Fläche längs aller ihrer Übergangskurven mit Ausnahme einer einzigen zerschneidet, so bildet sie, indem ihre symmetrischen Hälften noch immer in der einen Übergangskurve zusammenhängen, nach wie vor ein ungetrenntes Ganze. Es würden sich also, wenn mehr als $(p+1)$ Übergangskurven vorhanden wären, auf der Fläche mehr als p nicht zerstückende Rückkehrschnitte ausführen lassen, was ein Widerspruch gegen die Definition der Zahl p ist.

Dagegen ist unterhalb dieser Grenze jede Zahl von Übergangskurven möglich. Es mag hier genügen, in diesem Sinne die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ zu diskutieren; für die höheren p ergeben sich dann von selbst naheliegende Beispiele.

1. Wenn wir eine Kugel durch Spiegelung an einer Diametralebene mit sich zur Deckung bringen, so bildet der größte Kreis, in welchem sie von der Diametralebene geschnitten wird, eine Übergangskurve. Wir erhalten eine Zuordnung der anderen Art, indem wir je zwei solche Punkte der Kugel entsprechend setzen, welche die Endpunkte eines Durchmessers bilden. Beide Beispiele sind leicht zu generalisieren. Die analytische Darstellung ist diese. Wenn eine Übergangskurve existiert, so gibt es eindeutige Funktionen des Ortes mit nur einem Unendlichkeitspunkte, die auf der Übergangskurve reelle Werte annehmen. Heißt eine derselben $x+iy$, so ist die Umformung, wie oben schon als Beispiel angegeben, durch $x_1 = x$, $y_1 = -y$ gegeben. — Im zweiten Falle kann man eine Funktion

$x+iy$ so wählen, daß ihre Werte ∞ und 0, sowie $+1$ und -1 zusammengeordnete Punkte vorstellen. Dann ist

$$x_1 - iy_1 = \frac{-1}{x+iy}$$

die analytische Formel der betreffenden Umänderung.

2. Im Falle $p = 1$ müssen wir die Invariante J, wie wir wissen, jedenfalls reell nehmen. Sei dieselbe zunächst > 1. Dann können wir das zugehörige überall endliche Integral W (durch Zufügung eines geeigneten konstanten Faktors) so normieren, daß die eine Periode *reell*, gleich a, die andere *rein imaginär*, gleich ib, wird. Setzen wir dann (für $W = U + iV$):

$$U_1 = U, \quad V_1 = -V,$$

so haben wir eine symmetrische Umformung der Fläche $p = 1$ mit den *zwei* Übergangskurven:

$$V = 0, \quad V = \frac{b}{2};$$

schreiben wir dagegen:

$$U_1 = U + \frac{a}{2} \quad V_1 = -V,$$

was wieder eine symmetrische Umformung unserer Fläche ist, so haben wir den Fall, in welchem *keine* Übergangskurve entsteht. — Der Fall mit nur *einer* Übergangskurve tritt ein, wenn wir $J < 1$ nehmen. Wir können dann W so wählen, daß seine beiden Perioden konjugiert komplex werden. Wir schreiben dann wieder

$$U_1 = U, \quad V_1 = -V$$

und haben eine symmetrische Umformung mit der einen Übergangskurve $V = 0$.

Neben die hiermit erläuterte erste Unterscheidung der symmetrischen Flächen nach der *Zahl* der Übergangskurven stellt sich aber noch eine zweite. Ich will die Fälle von 0 oder $(p+1)$ Übergangskurven einen Augenblick ausschließen. Dann bietet sich von vornherein eine doppelte Möglichkeit. *Eine Zerschneidung der Fläche längs sämtlicher Übergangskurven mag nämlich entweder ein Zerfallen der Fläche herbeiführen oder nicht.* Es sei π die Zahl der Übergangskurven. Man zeigt dann leicht, daß $p - \pi$ ungerade sein muß, wenn ein Zerfallen eintreten soll. Eine weitere Beschränkung existiert nicht, wie man an Beispielen beweist. Wir wollen dementsprechend symmetrische Flächen *der einen und der andern Art* unterscheiden und den ersteren (den zerfallenden) Flächen die Fläche mit $(p+1)$ Übergangskurven, den letzteren die Fläche ohne Übergangskurve zurechnen[58]).

[58]) [Klein hat die beiden Arten symmetrischer Flächen später durch die Worte „orthosymmetrisch“ und „diasymmetrisch“ unterschieden. Vgl. Abh. XLII in Bd. 2

Diese Sätze besitzen eine gewisse Analogie mit den Resultaten, welche in der analytischen Geometrie die gestaltliche Untersuchung der Kurven von gegebenen p erzielt hat[59]). Und in der Tat zeigt sich, daß diese Analogie eine begründete ist. Die analytische Geometrie beschäftigt sich bei jenen Untersuchungen (zunächst) nur mit solchen Gleichungen

$$f(w, z) = 0,$$

welche reelle Koeffizienten besitzen. Beachten wir zunächst, daß jede solche Gleichung über der z-Ebene in der Tat eine symmetrische Riemannsche Fläche bestimmt, insofern ja die Gleichung und also auch die Fläche ungeändert bestehen bleibt, wenn man w und z gleichzeitig durch ihre konjugierten Werte ersetzt — und daß die Übergangskurven auf dieser Fläche den *reellen* Wertereihen von w und z entsprechen, welche $f = 0$ befriedigen, d. h. genau den verschiedenen Zügen, welche die Kurve $f = 0$ im Sinne der analytischen Geometrie aufweist.

---

dieser Ausgabe S. 172. Wegen der Entstehung dieser Benennung siehe die unten abgedruckte Abh. CI. — Für orthosymmetrische Flächen eines beliebigen p erhält man einfache Beispiele, wenn man eine Kugel derart mit p Handhaben versieht, daß diese zur Äquatorebene der Kugel als Symmetrieebene einer Spiegelung symmetrisch liegen, d. h. entweder am Äquator oder paarweise zu beiden Seiten desselben liegen. Nun hat man außer dem Äquator selbst nur auf den am Äquator liegenden Handhaben je eine Übergangskurve, woraus folgt, daß im orthosymmetrischen Fall $p - \pi$ ungerade ist. — Ein Beispiel für diasymmetrische Flächen ohne Übergangskurve bildet die Oberfläche einer Kugel mit p zentralen zylindrischen Durchbohrungen bei Symmetrie am Mittelpunkt, wobei natürlich die Durchdringungskurven der Durchbohrungen ohne Belang sind. Beispiele für diasymmetrische Flächen mit $\pi\,(> 0)$ Übergangskurven erhält man, indem man die Doppelflächen zu den sofort zu nennenden einseitigen Flächen bildet und die übereinanderliegenden Punkte beider Bedeckungen sich entsprechen läßt. Man nehme eine Scheibe mit p Löchern und verdrehe von den p Stücken zwischen dem äußeren Scheibenrand und den Lochrändern $p - \pi + 1$ nach Art eines Möbiusschen Bandes einfach; man erhält dann gerade π Randkurven, längs deren die beiden Bedeckungen aneinander zu heften sind. Hinterher mag man die zuerst flache Fläche unter Aufrechterhaltung der symmetrischen Beziehung noch zu einer Kugel mit p Handhaben aufblähen. — Im übrigen sei auf die Leipziger Dissertation von G. Weichold: *Über symmetrische Riemannsche Flächen und die Periodizitätsmoduln der zugehörigen Abelschen Normalintegrale erster Gattung.* (1893, abgedruckt in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 28) verwiesen. V.]

[59]) Vgl. Harnack, *Über die Vielteiligkeit der ebenen algebraischen Kurven*, in Bd. 10 der Math. Annalen, 1876, S. 189 ff.; vergleiche ferner S. 415, 416 daselbst [= Abh. XL in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 154, 155], wo ich die Einteilung jener Kurven in zweierlei Arten gegeben habe. Vielleicht ist es zweckmäßig, bei diesen Untersuchungen die Lehre von den symmetrischen Flächen und die Riemannsche Theorie, so wie beide hier im Texte dargestellt werden, geradezu als Ausgangspunkt zu wählen. [Daß es zu jedem p Kurven mit $p+1$ reellen Zügen gibt, geht auch aus der oben zitierten Schottkyschen Dissertation hervor. Trotzdem ist das Ergebnis von Harnack mit dem von Schottky nicht ohne weiteres identisch. Harnack geht nämlich davon aus, daß die Ordnung der Kurve von vornherein gegeben sei, und zeigt, daß für jedes dann mögliche p Kurven mit $p+1$ reellen Zügen existieren. Vgl. auch die Erläuterungen auf S. 155 in Bd. 2 dieser Ausgabe. K.]

Aber auch der Rückschluß ist leicht zu machen. Sei eine symmetrische Fläche und auf ihr eine beliebige komplexe Funktion des Ortes, $u + iv$, gegeben. Bei der symmetrischen Umformung erfährt unsere Fläche *eine Umlegung der Winkel.* Wenn man also jedem Punkte der Fläche solche Werte u_1, v_1 beilegt, wie sie, unter der Benennung u, v, sein symmetrischer Punkt aufweist, so wird $u_1 - iv_1$ eine neue komplexe Funktion des Ortes sein. Man bilde nun:

$$U + iV = (u + u_1) + i(v - v_1),$$

so hat man einen Ausdruck, der im allgemeinen nicht identisch verschwindet; es genügt zu dem Zwecke, die Unendlichkeitspunkte von $u + iv$ in unsymmetrischer Weise anzunehmen. *Man hat also eine komplexe Funktion des Ortes, welche in symmetrisch gelegenen Punkten gleiche reelle, aber entgegengesetzt gleiche imaginäre Werte aufweist.* Solcher $U + iV$ mögen nun irgend zwei: W und Z, die überdies *eindeutige* Funktionen des Ortes sein sollen, herausgegriffen werden. Die zwischen diesen bestehende algebraische Gleichung hat dann die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn man W und Z gleichzeitig durch ihre konjugierten Werte ersetzt. *Sie ist also eine Gleichung mit reellen Koeffizienten*, womit der geforderte Beweis in der Tat erbracht ist.

Ich knüpfe an diese Überlegungen noch Bemerkungen über die *reellen* eindeutigen Transformationen *reeller* Gleichungen $f(w, z) = 0$ in sich, oder, was dasselbe ist, über solche konforme Abbildungen erster Art symmetrischer Flächen auf sich selbst, bei denen symmetrische Punkte wieder in symmetrische Punkte übergehen. In unendlicher Zahl können solche Transformationen nach dem allgemeinen Satze des § 19 nur für $p = 0$ und $p = 1$ auftreten; wir beschränken uns also auf diese Fälle. Nehmen wir zuvörderst $p = 1$. Dann sehen wir sofort, daß unter den früher aufgestellten Transformationen nur noch diejenigen

$$W_1 = \pm W + C$$

in Betracht kommen, *bei denen C eine reelle Konstante bedeutet.* Analog in dem ersten Falle $p = 0$. Die Beziehung $x_1 = x$, $y_1 = -y$ bleibt ungeändert, wenn man $x + iy = z$ und $x_1 + iy_1 = z_1$ gleichzeitig derselben linearen Transformation:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

unterwirft, *wo die Verhältnisgrößen $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ reell sind.* In dem zweiten Falle $p = 0$ ist die Sache etwas komplizierter. *Auch bei ihm sind lineare Transformationen mit drei reellen Parametern möglich.* Dieselben nehmen aber für das oben eingeführte z die folgende Gestalt an:

$$z' = \frac{(a + ib)z + (c + id)}{-(c - id)z + (a - ib)},$$

wo $a:b:c:d$ die drei reellen Parameter vorstellen. Dieses Resultat ist implizite in den Untersuchungen enthalten, die sich auf die analytische Repräsentation der Drehungen der $x+iy$-Kugel um ihren Mittelpunkt beziehen[60]).

§ 22.

Konforme Abbildung verschiedener Flächen aufeinander.

Wenn es sich jetzt darum handelt, verschiedene geschlossene Flächen aufeinander abzubilden, so liefern die vorausgeschickten Untersuchungen über die konforme Abbildung geschlossener Flächen auf sich selbst die nötigen Nebenbestimmungen, welche angeben, wie oft sich eine solche Abbildung gestaltet, sofern eine solche überhaupt möglich ist. Flächen, welche sich konform aufeinander abbilden lassen, besitzen jedenfalls (wie schon hervorgehoben) übereinstimmende Transformationen in sich selbst. Man erhält also alle Abbildungen der einen Fläche auf die zweite, wenn man eine beliebige Abbildung mit allen solchen verbindet, welche *eine* der beiden Flächen in sich selbst überführen. Ich werde hierauf nicht weiter zurückkommen.

Betrachten wir nun zuvörderst allgemeine, d. h. nicht symmetrische Flächen. Dann treten die Abzählungen des § 19 betreffs der Moduln algebraischer Gleichungen unmittelbar in Geltung. Wir haben zunächst:

Flächen $p=0$ lassen sich immer konform aufeinander abbilden;

und finden übrigens, daß die Flächen $p=1$ *einen*, die Flächen $p>1$ $(3p-3)$ bei konformer Abbildung unzerstörbare Moduln besitzen. Jeder solche Modul ist im allgemeinen eine *komplexe* Konstante. Dem Umstande entsprechend, daß bei symmetrischen Flächen reelle Parameter in Betracht gezogen werden müssen, wollen wir ihn in seinen reellen und seinen imaginären Bestandteil zerlegt denken. Dann haben wir:

Sollen zwei Flächen $p>0$ aufeinander abbildbar sein, so sind im Fall $p=1$ zwei, im Falle $p>1$ aber $(6p-6)$ Gleichungen zwischen den reellen Konstanten der Flächen zu erfüllen.

Indem wir uns jetzt zu den *symmetrischen* Flächen wenden, haben wir noch eine kleine Zwischenbetrachtung zu machen. Zunächst ist ersichtlich, daß zwei solche Flächen nur dann „symmetrisch" aufeinander bezogen werden können, wenn sie neben dem gleichen p dieselbe Zahl π der Übergangskurven darbieten und überdies beide entweder der ersten oder der zweiten Art angehören. Im übrigen wiederhole man speziell für die symmetrischen Flächen die Abzählungen des § 13 betreffs der Zahl

[60]) Siehe zumal: Cayley, *On the correspondence between homographies and rotations*, Mathematische Annalen, Bd. 15, 1879 S. 238—240 [= Collected math. papers, vol. X, Nr. 660, S. 153—154]. [Siehe ferner S. 32—34 des „Ikosaederbuches"].

der in eindeutigen Funktionen enthaltenen Konstanten unter der Bedingung, daß nur solche Funktionen in Betracht gezogen werden, welche an symmetrischen Stellen konjugiert imaginäre Werte aufweisen. Hiermit kombiniere man sodann nach dem Muster des § 19 die Zahl solcher über der Z-Ebene konstruierbarer mehrblättriger Flächen, welche in bezug auf die Achse der reellen Zahlen symmetrisch sind. Ich will dabei, um das Auftreten unendlich vieler Transformationen in sich zu vermeiden, zuvörderst annehmen, daß $p>1$ sei. Die Sache ist dann so einfach, daß ich sie nicht speziell durchzuführen brauche. Der Unterschied ist nur, daß die in Betracht kommenden, früher unbeschränkten Konstanten nunmehr gezwungen sind, entweder *einzeln reell* oder *paarweise konjugiert komplex* zu sein. Infolgedessen reduzieren sich alle Willkürlichkeiten auf die Hälfte. Wir mögen folgendermaßen sagen:

Zur Abbildbarkeit zweier symmetrischer Flächen $p>1$ aufeinander ist neben der Übereinstimmung in den Attributen das Bestehen von $(3p-3)$ Gleichungen zwischen den reellen Konstanten der Fläche erforderlich.

Die Fälle $p=0$ und $p=1$, welche hierbei ausgeschlossen wurden, sind implizite bereits im vorigen Paragraphen erledigt. Selbstverständlich müssen zwei symmetrische Flächen $p=1$, die sich aufeinander sollen abbilden lassen, die gleiche Invariante J besitzen, was *eine* Bedingung für die Konstanten der Flächen abgibt, insofern J jedenfalls reell ist. Im übrigen aber findet man sofort, daß die Abbildung sich allemal ermöglicht, sobald die symmetrischen Flächen, wie dies selbstverständlich verlangt werden muß, *in der Zahl der Übergangskurven* übereinstimmen.

§ 23.

Berandete Flächen und Doppelflächen.

Auf Grund der nunmehr gewonnenen Resultate können wir den bisherigen Untersuchungen über die Abbildung *geschlossener* Flächen eine scheinbar bedeutende Verallgemeinerung zuteil werden lassen, und deshalb habe ich eben die symmetrischen Flächen so ausführlich betrachtet. Wir können jetzt nämlich *berandete* Flächen und *Doppelflächen* in Betracht ziehen (mögen nun letztere berandet sein oder nicht) und mit einem Schlage die auf sie bezüglichen Fragen erledigen. Hierzu gehört, was die Einführung der Randkurven angeht, daß wir uns von einer gewissen Beschränkung befreien, welche wir bisher, allerdings nur implizite, vorausgesetzt haben. Wir dachten uns die Flächen, auf denen wir operierten, bislang durchweg als stetig gekrümmt, oder doch nur in einzelnen Punkten (den Verzweigungspunkten) mit Unstetigkeiten behaftet. Aber nichts hindert uns, jetzt hinterher auch andere Unstetigkeiten zuzulassen. Wir werden uns z. B. vorstellen dürfen, daß unsere Fläche aus einer endlichen Anzahl verschiedener (im allgemeinen selbst gekrümmter) Stücke, welche unter endlichen Winkeln zusammenstoßen, polyederartig zusammengesetzt sei. Können wir uns doch auf einer solchen Fläche ebensogut elektrische Ströme verlaufend denken, wie auf einer stetig gekrümmten! Unter diese Flächen nun lassen sich die berandeten Flächen subsumieren[61]. *Man fasse nämlich die beiden Seiten der berandeten Fläche als Polyederflächen auf, welche längs der Randkurve (also durchweg unter einem Winkel von 360 Grad) zusammenstoßen und behandele nunmehr statt der ursprünglichen berandeten Fläche die aus beiden Seiten zusammengesetzte Gesamtfläche*[62]). Diese Gesamtfläche ist dann in der Tat eine geschlossene Fläche. Sie ist aber überdies eine *symmetrische* Fläche. Denn wenn man die übereinanderliegenden Punkte der beiden Flächenseiten vertauscht, so erfährt die Gesamtfläche eine konforme Abbildung auf sich selbst mit Umlegung der Winkel. Die Randkurven sind dabei die Übergangskurven. *Zugleich aber gewinnt unsere Einteilung der symmetrischen Flächen in zweierlei Arten eine wichtige und durchschlagende Bedeutung.* Die gewöhnlichen berandeten Flächen, bei denen man zwei Flächenseiten unterscheiden kann, entsprechen offenbar der ersten Art. Der zweiten Art aber korrespondieren die *Doppelflächen*, bei denen man von einer Flächenseite durch kontinuierliches Fortschreiten über die Fläche hin zur anderen gelangen kann. Auch der Fall ist nicht auszuschließen (wie bereits angedeutet), daß die Doppelfläche überhaupt keine Randkurve besitzen mag. *Wir haben dann eine symmetrische Fläche ohne Übergangskurve vor uns.*

Ich betrachte nunmehr der Reihe nach die verschiedenen auseinanderzuhaltenden Fälle.

1. *Sei zuvörderst eine einfach berandete, einfach zusammenhängende Fläche gegeben.* Eine solche Fläche erscheint für uns als eine geschlossene Fläche $p = 0$, welche unter Auftreten einer Übergangskurve symmetrisch auf sich selbst bezogen ist. Wir finden also, *daß zwei solche Flächen sich allemal durch Abbildung der einen oder der anderen Art konform aufeinander beziehen lassen, und daß man dabei in jedem der beiden Fälle noch drei reelle Konstanten zur willkürlichen Verfügung hat.* Wir können die letzteren insbesondere dazu benutzen, um einen beliebigen inneren Punkt der einen Fläche einem entsprechend gelegenen

[61]) Ich verdanke diese Auffassung einer gelegentlichen Unterredung mit Herrn Schwarz (Ostern 1881). [Sie geht auf Herrn Schottky zurück.]

[62]) Ich drücke mich im Texte der Kürze halber so aus, als wenn die ursprüngliche Fläche eine zweiseitige Fläche gewesen wäre, während doch nicht ausgeschlossen sein soll, daß sie eine Doppelfläche ist.

Punkte der anderen Fläche zuzuweisen und überdies einen beliebigen Randpunkt der einen Fläche einem beliebigen Randpunkte der anderen. Diese Bestimmungsweise entspricht dem bekannten Satze, den Riemann betreffs der konformen Abbildung einer einfach berandeten, einfach zusammenhängenden, *ebenen* Fläche auf die Fläche eines Kreises gegeben und in Nr. 21 seiner Dissertation als Beispiel für die Anwendung seiner Theorie auf Probleme der konformen Abbildung ausführlich erläutert hat.

2. *Wir betrachten ferner Doppelflächen $p = 0$ (ohne Randkurven).* Aus §§ 21, 22 folgt sofort, daß zwei solche Flächen allemal konform aufeinander bezogen werden können, und man dabei, den Schlußformeln des § 21 entsprechend, noch drei reelle Konstanten zu beliebiger Verfügung hat.

3. *Die verschiedenen hier in Betracht kommenden Fälle, welche eine Gesamtfläche $p = 1$ ergeben, betrachten wir gemeinsam.* Es gehören dahin zunächst die *zweifach berandeten, zweifach zusammenhängenden* Flächen, also Flächen, die wir uns im einfachsten Falle als geschlossene *Bänder* vorstellen dürfen. Es gehören dahin ferner *die bekannten Doppelflächen mit nur einer Randkurve*, die man erhält, wenn man die beiden schmalen Seiten eines rechteckigen Papierstreifens zusammenbiegt, nachdem man den Streifen um 180 Grad tordiert hat. Es gehören endlich dahin *gewisse unberandete Doppelflächen*. Man kann sich von denselben ein Bild machen, indem man etwa ein Stück eines Kautschukschlauches umstülpt und nun so sich selbst durchdringen läßt, daß bei Zusammenbiegung der Enden die Außenseite mit der Innenseite zusammenkommt. Bezüglich aller dieser Flächen besagen die früheren Sätze, daß die Abbildbarkeit der einzelnen Fläche auf eine zweite derselben Art das Bestehen *einer*, aber nur einer, Gleichung zwischen den reellen Konstanten der Flächen voraussetzt, daß aber die Abbildung, wenn überhaupt, in unendlich vielen Weisen geschehen kann, indem man ein doppeltes Vorzeichen und eine reelle Konstante zu beliebiger Verfügung hat.

4. *Wir nehmen nunmehr den allgemeinen Fall einer zweiseitigen Fläche.* Die Fläche soll π Randkurven besitzen und überdies p' nicht zerstückende Rückkehrschnitte zulassen, wobei entweder $p' > 0$ sein muß oder $\pi > 2$. Dann wird die aus Vorder- und Rückseite gebildete Gesamtfläche $2p' + \pi - 1$ nicht zerstückende Rückkehrschnitte zulassen. Denn man kann erstens die p' nach Voraussetzung auf der einfachen Flächenseite möglichen Rückkehrschnitte jetzt doppelt benutzen (sowohl auf der Vorderseite als der Rückseite), man kann ferner noch längs $(\pi - 1)$ der vorhandenen Randkurven Schnitte anbringen, ohne daß die Gesamtfläche aufhörte, ein einziges zusammenhängendes Flächenstück zu bilden. Wir werden also in den Sätzen des vorigen Paragraphen $p = 2p' + \pi - 1$ setzen und haben:

Zwei Flächen der betrachteten Art lassen sich, wenn überhaupt, nur auf eine endliche Anzahl von Weisen aufeinander abbilden. Die Abbildbarkeit hängt von $6p' + 3\pi - 6$ *Gleichungen zwischen den reellen Konstanten der Flächen ab.*

5. *Wir haben endlich den allgemeinen Fall der Doppelfläche* mit π Randkurven und P auf der doppelt gedachten Fläche neben den Randkurven möglichen Rückkehrschnitten. Indem wir die drei unter 2. und 3. betrachteten Möglichkeiten ($P = 0$, $\pi = 0$ oder 1, und $P = 1$, $\pi = 0$) beiseite lassen, erhalten wir denselben Satz wie unter 4., nur daß überall statt $2p' + \pi - 1$ die Summe $P + \pi$ zu schreiben ist, wo P nach Belieben eine gerade oder ungerade Zahl sein kann. *Insbesondere beträgt die Zahl der reellen Konstanten einer Doppelfläche, die bei beliebiger konformer Abbildung ungeändert bleiben,* $3P + 3\pi - 3$. —

Unter die hiermit gewonnenen Resultate subsumieren sich die allgemeinen Theoreme und Entwicklungen, welche Herr Schottky in seiner wiederholt zitierten Abhandlung gegeben hat, als spezielle Fälle.

§ 24.
Schlußbemerkung.

Die Entwicklungen des nunmehr zu Ende geführten letzten Abschnitts dieser Schrift sollten, wie wiederholt gesagt, den Andeutungen entsprechen, mit denen Riemann seine Dissertation abschloß. Allerdings haben wir uns auf *eindeutige* Beziehung zweier Flächen durch konforme Abbildung beschränkt. Riemann hat, wie er ausspricht, ebensowohl an mehrdeutige Beziehung gedacht. Man würde sich dementsprechend jede der beiden in Vergleich kommenden Flächen mit mehreren Blättern überdeckt vorstellen müssen und erst die so entstehenden mehrblättrigen Flächen konform eindeutig zu beziehen haben. Die Verzweigungspunkte, welche diese mehrblättrigen Flächen besitzen mögen, würden ebensoviele neue, zur Disposition stehende komplexe Konstante abgeben. — Hierzu ist zu bemerken, daß wir wenigstens *einen* Fall einer solchen Beziehung bereits ausführlich in Betracht gezogen haben. Indem wir eine beliebige Fläche mehrblättrig über die Ebene ausbreiteten (§ 15), haben wir zwischen Fläche und Ebene eine Beziehung hergestellt, die von der einen Seite mehrdeutig ist. Es ist dann weiter hervorzuheben, daß eben dieser spezielle Fall auch zwei beliebige Flächen mehrdeutig aufeinander beziehen läßt. Denn sind erst die beiden Flächen auf die Ebene abgebildet, so sind sie, durch Vermittlung der Ebene, auch aufeinander bezogen. — Mit diesen Bemerkungen ist die Frage nach der mehrdeutigen Abbildung natürlich keineswegs erschöpft. Aber es ist doch eine Grundlage zu ihrer Behandlung gewonnen,

indem gezeigt ist, wie sie sich in die übrigen funktionentheoretischen Spekulationen Riemanns, von denen wir hier Rechenschaft zu geben hatten, einfügt.

[Ich greife gern noch einmal auf die wiederholt genannte Arbeit Schottkys in Crelles Journal, Bd. 83 (1877) zurück, zumal ich weiter unten (S. 578/579) ohnehin ausführlicher auf sie zurückkommen muß. Die große Ähnlichkeit der auf einen besonderen Fall bezüglichen Schottkyschen Untersuchungen mit den allgemeinen meiner Schrift war mir von vornherein aufgefallen. Ich schrieb also damals an Herrn Schottky und fragte ihn nach der Entstehung seiner Ideen. Hierauf antwortete er mir in einem Briefe vom Mai 1882 (der in Bd. 20 der Math. Annalen abgedruckt wurde), daß er in der Tat ursprünglich auch von der Betrachtung der Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit ausgegangen sei und diesen physikalischen Ausgangspunkt nur auf Rat von Weierstrass bei der Drucklegung durch die Bezugnahme auf Schwarz' Untersuchungen über konforme Abbildung ersetzt habe.

Ich weise ferner noch einmal darauf hin, daß Weyl in seinem Buche *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913) die Mehrzahl der in der vorstehenden Abhandlung ausgesprochenen Gedanken in einer allen modernen Anforderung an Strenge genügenden Weise bewiesen hat. K.]