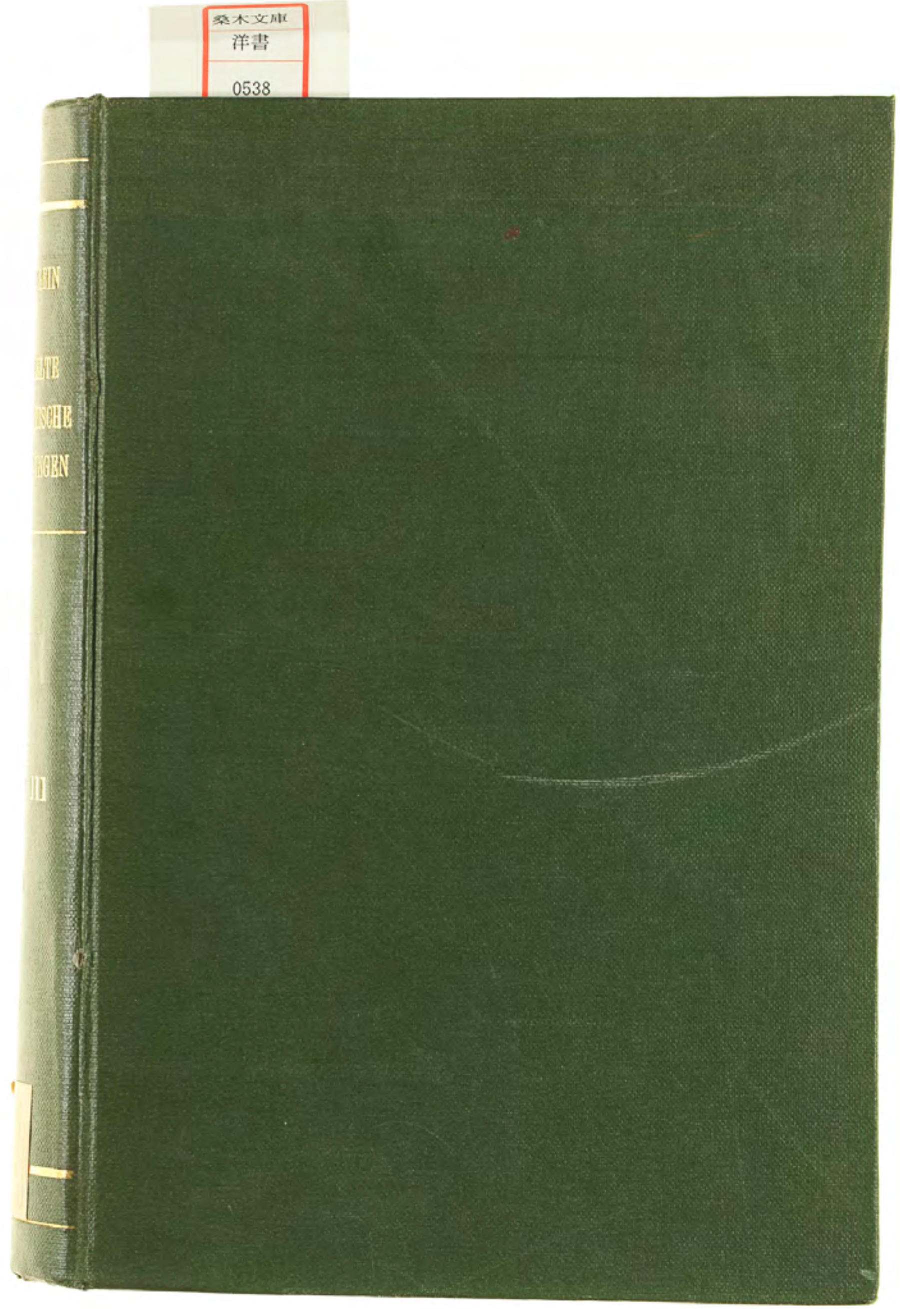

桑木文庫
洋書
0538

物理
08
K
11・3

九州帝國大學理學部
10684
物理學教室

桑木文庫
洋書
0538

理学部 洋 遡及
022232002008086
九州大学蔵書

物理
08
K
11·3

貴重書

FELIX KLEIN
GESAMMELTE MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN

DRITTER BAND

ELLIPTISCHE FUNKTIONEN, INSBESONDERE MODULFUNKTIONEN
HYPERELLIPTISCHE UND ABELSCHE FUNKTIONEN
RIEMANNSCHE FUNKTIONENTHEORIE UND
AUTOMORPHE FUNKTIONEN

ANHANG
VERSCHIEDENE VERZEIC

HERAUSGEGEBEN
VON

R. FRICKE, H. VERMEIL UND E
(VON F. KLEIN MIT ERGÄNZENDEN ZU

九州帝國大學工科大學
306251
大正12年11月20日
數學物理學教室

MIT 138 TEXTFIGUREN

J.06251

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1923

九州帝國大學圖書館
19. 4. 25
131685

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1923 by Julius Springer in Berlin.

VORWORT.

In dem vorliegenden dritten und letzten Bande der Gesammelten mathematischen Abhandlungen von F. Klein sind seine funktionentheoretischen Arbeiten vereinigt. Sie bilden, nach seiner eigenen Ansicht, die Krönung seiner theoretischen Untersuchungen. Der Übersichtlichkeit halber ist der Band, wie seine Vorgänger, in drei größere Abschnitte eingeteilt, innerhalb deren die einzelnen Arbeiten im wesentlichen chronologisch angeordnet sind. Der erste enthält die große Zahl der Abhandlungen und Noten über elliptische Funktionen und Modulfunktionen, die in den Jahren 1877 bis 1885 entstanden sind, ferner zwei zahlentheoretische Arbeiten aus den neunziger Jahren, die sich ihrem Inhalte nach hier am besten unterbringen ließen; der zweite bringt drei Abhandlungen über hyperelliptische und Abelsche Funktionen aus den Jahren 1886 bis 1890, während der dritte der Riemannschen Funktionentheorie und der Theorie der automorphen Funktionen gewidmet ist; von den dort abgedruckten Arbeiten entstammen die wichtigsten den Jahren 1881/82, die übrigen sind spätere Nachträge und Ergänzungen. Um dem Leser einen vollen Überblick über Kleins wissenschaftliche Tätigkeit zu ermöglichen, sind in einem Anhang ein Verzeichnis der von ihm gehaltenen Vorlesungen und Seminare und eines seiner sämtlichen wissenschaftlichen und der wichtigsten sonstigen Veröffentlichungen beigegeben.

Auf dem Gebiete der elliptischen Modulfunktionen erreichte Klein seine großen Erfolge dadurch, daß er Riemannsche Funktionentheorie, Gruppentheorie, Algebra und projektive Geometrie organisch vereinigte und so in den Stand gesetzt wurde, verhältnismäßig leicht Schwierigkeiten zu bewältigen, zu deren Überwindung die einzelne dieser Disziplinen zu schwach gewesen wäre. Den Gipfelpunkt dieser Periode bilden die vier Abhandlungen in den Bänden 14 und 15 der Math. Annalen, die überhaupt zu dem Schönsten gehören, was die mathematische Literatur jener Zeit geschaffen hat. Das Ergebnis war dann, gewissermaßen von selbst, die ausgereifte Systematik der Theorie der Modulfunktionen, die in programmatischer Form in Nr. LXXXVII niedergelegt ist. — Der Theorie der hyperelliptischen und Abelschen Funktionen erschloß er neue Wege durch deren Verbindung mit der linearen Invariantentheorie und die Begründung der Lehre von den Formen auf algebraischen Gebilden. — Am weitesten aber reicht Kleins Bedeutung für die Riemannsche Funktionentheorie und ihre naturgemäße Fortsetzung, die Lehre von den automorphen Funktionen. Obwohl Klein selbst Riemann nicht persönlich gekannt hat, ist er doch der eifrigste Vorkämpfer und beste Interpret der Gedanken gewesen, die seinerzeit für Riemann leitend gewesen waren. Ohne Kleins eindringendes Forschen und seine meisterhafte Darstellungsgabe in Wort und Schrift hätten Riemanns Ideen längst nicht die Verbreitung gefunden, die sie heute besitzen. Was die Theorie der automorphen Funktionen anlangt, so sind F. Klein und H. Poincaré deren eigentliche Schöpfer. Schon Ende der siebziger Jahre hatte Klein, gestützt auf seine Kenntnis der Theorie der regulären Körper und der Modulfunktionen, viele wesentliche Gedanken zum Aufbau dieser neuen Theorie beisammen, hatte sich dann aber anderen Fragen zugewandt. Da erschienen im Frühjahr 1881 die ersten Noten Poincarés in den Comptes rendus, und nun arbeiteten beide Gelehrte um die Wette daran, die Theorie durch neue, immer glänzendere Resultate zu bereichern. Leider mußte Klein bald aus diesem Kampfe ausscheiden, da seine Gesundheit, die schon seit längerer Zeit durch Überarbeitung erschüttert war, völlig versagte. Der Hergang bei dieser stürmischen Entwickelung, besonders sofern sie mehr subjektive Natur hat, ist bisher nur wenig bekannt. Um dem abzuhelfen, hat Klein einen Aufsatz „Zur Vorgeschichte der automorphen Funktionen" geschrieben, in dem auch die unser Gebiet betreffenden Leistungen anderer Gelehrter, z. B. die von Schottky und Schwarz, ihre Würdigung finden; außerdem werden hier zum ersten Male die Briefe veröffentlicht, die F. Klein und H. Poincaré in den Jahren 1881/82 über die Theorie der automorphen Funktionen gewechselt haben. (Sie sollen auch in Acta Math., Bd. 39 abgedruckt werden.) Beides wird hoffentlich viel Interesse finden und der geschichtlichen Klärung dienen.

Daß der vorliegende Band dem zweiten so schnell folgen konnte, ist zwei Umständen zu verdanken. Erstens hatte die Verlagsbuchhandlung Julius Springer (wie schon im Vorwort zu Bd. 2 angegeben wurde) noch bevor der zweite Band abgeschlossen war, sämtliche für Band 3 bestimmte Abhandlungen in Fahnen setzen lassen, so daß nur noch die kürzeren und längeren Zusätze und der Anhang zu setzen übrig blieb. Zweitens hatte Klein E. Bessel-Hagen, der schon bei der Herausgabe des zweiten Bandes an einigen Stellen mitgeholfen hatte, zum Mitherausgeber für Band 3 gewonnen. Im einzelnen gestaltete sich die Bearbeitung folgendermaßen. Während noch die letzten Arbeiten an Band 2 zu erledigen waren, begann Bessel-Hagen bereits mit der Durcharbeitung der Abhandlungen des ersten Abschnittes. Dagegen wandte sich Vermeil, nachdem er den zweiten Band fertiggestellt hatte, sofort der Bearbeitung des zweiten Abschnittes zu. Diese Arbeitsteilung ging jedoch nur so weit, daß jeder der beiden für seinen Abschnitt die Hauptverantwortung trägt; aber jeder hat

auch sämtliche Korrekturen des andern Abschnittes gelesen und dabei dem andern manchen Rat erteilt. Der dritte Abschnitt, als der schwierigste, wurde von Vermeil und Bessel-Hagen gemeinsam bearbeitet. Den Anhang stellte Vermeil zusammen. Es sei noch erwähnt, daß fast alle Formeln nachgerechnet und, wenn nötig, berichtigt wurden; diese Berichtigungen sind nur in den seltensten Fällen als Abweichungen vom Original besonders angegeben. Auch sind für den vorliegenden Band einige Figuren neu gezeichnet worden.

Die beiden jüngeren Herausgeber wären aber mit der Bearbeitung des ganzes Bandes längst nicht so schnell zu Ende gekommen, wenn sie sich nicht auf die wertvolle Vorarbeit hätten stützen können, die Fricke in seinen einschlägigen Büchern und Enzyklopädieartikeln[1]) geleistet hat. Außerdem durften sie sich in mehreren längeren Konferenzen bei ihm Rat holen. Überhaupt hat Fricke das Fortschreiten des Bandes mit lebhaftem Interesse verfolgt.

Noch wichtiger ist aber Kleins persönliche Anteilnahme für die Herausgabe seiner Abhandlungen gewesen. In fast täglichen Zusammenkünften hat Klein den ganzen Stoff bis in die Einzelheiten mit den beiden jüngeren Herausgebern durchgesprochen. Unermüdlich gab er Ratschläge und Anregungen. Ohne diese dauernde Fühlungnahme mit Klein wäre es Vermeil und Bessel-Hagen nicht möglich gewesen, in so kurzer Zeit ein für die Herausgabe ausreichendes Verständnis der in Frage kommenden Literatur zu erwerben. Er ist der geistige Leiter bei der Herausgabe gewesen. Stammen doch auch bei diesem Bande wieder zahlreiche Zusätze und sieben größere historisch-kritische Erörterungen aus seiner Feder.

Durch Kleins eigene, so lebhafte Mitwirkung bei der Herausgabe seiner Abhandlungen gewinnt diese Ausgabe ihre ganz besondere Bedeutung. Sie ist, im Gegensatz zu zahlreichen andern Gesamtausgaben, keineswegs ein bloß philologisch-kritisch durchgesehener Abdruck seiner Originalabhandlungen, sondern sie bietet nach zwei Richtungen mehr. Erstens unterstreicht Klein in zahlreichen Anmerkungen nochmals die Absicht, die er seinerzeit bei der Abfassung jeder einzelnen Arbeit verfolgt hat, und

[1]) Gemeint sind die Bücher:

Klein-Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Bd. I 1890, Bd. II 1892. In diesem Bande kurz als „Modulfunktionen" zitiert.

Fricke-Klein, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Bd. I 1897, Bd. II 1912. In diesem Bande kurz als „Automorphe Funktionen" zitiert.

Fricke, *Theorie der elliptischen Funktionen*, Bd. I 1915/16, Bd. II 1921/22 und die Referate in Bd. II, 2 der mathematischen Enzyklopädie:

Elliptische Funktionen (abgeschlossen 1913),

Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen (abgeschlossen 1913).

gibt an, was er heute über die vorliegenden Probleme denkt. So bildet diese Ausgabe gewissermaßen das wissenschaftliche Testament Kleins. Zweitens hat Klein überall versucht, seine Veröffentlichungen in die geschichtliche Entwicklung der Wissenschaft einzuordnen, indem er namentlich in längeren Vorbemerkungen und ergänzenden Ausführungen zeigte, auf welchem Boden seine Untersuchungen erwachsen sind und überdies schilderte, wie diese von seinen Schülern und andern Gelehrten jeweils weitergeführt wurden. So ist der Wunsch seiner Freunde und Schüler mehr als erfüllt, den diese bei seinem goldenen Doktorjubiläum aussprachen: Klein möge durch Herausgabe seiner Gesammelten Abhandlungen die wertvollen Errungenschaften seiner wissenschaftlichen Forscherarbeit der künftigen Generation zugänglich machen. Macht doch diese Ausgabe die Arbeiten Kleins nicht nur äußerlich leichter zugänglich, sondern sie erleichtert durch die eben genannte Mitarbeit Kleins dem Leser den Zugang zu ihrem vollen Verständnis. — Darüber hinaus gibt sie ein gutes Bild von der Gesamtentwicklung umfangreicher Teile der Mathematik im letzten Drittel des vergangenen Jahrhunderts. Klein hat die verschiedensten Zweige der mathematischen Wissenschaft, die am Beginn seiner Laufbahn schon auseinanderzufallen drohten, wieder zusammengeführt und sie in seiner machtvollen Persönlicheit, die wie wenige befähigt war, sie zu umspannen, zu einer imposanten Einheit gestaltet. Geometrie, Algebra, Analysis und Physik greifen, sich gegenseitig befruchtend, ineinander, und besonders wirkt auch der Sinn für die Anwendungen reizvoll und fördernd mit.

Aber was Kleins Persönlichkeit betrifft, bringt diese Ausgabe nur einen Teil seines Lebenswerkes zur Geltung. Denn neben seine Tätigkeit als Forscher tritt die als Organisator und Lehrer. Klein hat in dieser Eigenschaft kein geringeres Maß von Mühe und Arbeit aufgewandt, als in jener. Was er als Organisator geleistet hat, ist schwer in kurze Worte zu fassen. Es mag hier nur erwähnt werden, daß seine Bestrebungen in dieser Hinsicht hauptsächlich zwei Ziele verfolgten. Einmal galt es, den mathematischen und physikalischen Universitätsunterricht, der zwar weitgehend, aber zu spezialistisch entwickelt war, auf eine breitere Basis zu stellen, wie sie der allgemeinen Bedeutung der in Betracht kommenden Wissenschaften entspricht. Hierzu war die Zahl der Professuren und Institute zu vermehren. Dann aber handelte es sich darum, die Verbindung herzustellen mit den technischen Hochschulen, den höheren Schulen und den übrigen Schulgattungen bis hin zu den Fachschulen und Volksschulen. Vom Umfange seiner Lehrtätigkeit aber zeugt die große Zahl seiner jeweiligen Mitarbeiter und Schüler, auch aus den fernsten Ländern.

Der seinerzeit Klein für die Vorbereitung der Herausgabe seiner Gesammelten Abhandlungen überreichte Betrag war angesichts der ständig

zunehmenden Geldentwertung bald erschöpft, und hätte nicht private Hilfe und zuletzt die Notgemeinschaft deutscher Wissenschaft namhafte Summen bereitgestellt, so wäre die Ausgabe wohl nicht zu Ende geführt worden, weil es nicht möglich gewesen wäre, die jüngeren Mitarbeiter für die Herausgabe festzuhalten. Durch diese Hilfe ist es möglich geworden, daß die beiden jüngeren Herausgeber trotz der gegenwärtigen Notlage in Deutschland ohne materielle Sorgen sich ganz theoretischen Arbeiten widmen konnten und unter Kleins persönlicher Leitung ihre wissenschaftlichen Kenntnisse wesentlich erweitern konnten. So verbindet sich ihr persönlicher Dank für diese Hilfe mit dem aller Verehrer Kleinscher Mathematik.

Wir möchten ferner einer Anzahl Fachgenossen Dank sagen für die Unterstützung, die sie uns bei der Herausgabe haben zuteil werden lassen. An erster Stelle gebührt unser Dank Frl. E. Noether, die uns in zahlreichen Fällen mit ihrem sachkundigem Rat unterstützte. Herr Segre half uns bei der Klärung einer Frage der mehrdimensionalen algebraischen Geometrie. Verschiedentliche persönliche Bezugnahme mit den Herren Bieberbach, Brouwer, Courant, Hilb, Koebe, Schottky ist besonders dem dritten Abschnitt des vorliegenden Bandes zugute gekommen. Herr Nörlund stellte uns Abschriften der im Besitz der Redaktion der Acta mathematica befindlichen Briefe von Klein an Poincaré für die Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Klein und Poincaré zur Verfügung. Herr Rost übersandte uns alle Briefe von Klein an Prym zur Kenntnisnahme. — Weiter haben wir der Firma B. G. Teubner zu danken, daß sie einerseits der Druckerei eine Reihe älterer Bände der Mathematischen Annalen als Vorlage für den Satz zur Verfügung gestellt hat, und daß sie uns andererseits erlaubt hat, die in ihrem Verlage erschienene Schrift Kleins „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale“ abzudrucken, ohne deren Wiedergabe für das Verständnis von Kleins Arbeiten auf dem Gebiete der Riemannschen Theorie das Fundament gefehlt hätte.

Ganz besonderer Dank gebührt wieder der Verlagsbuchhandlung Julius Springer, die trotz der sich immer schwieriger gestaltenden wirtschaftlichen Lage nicht nur die jetzt abgeschlossene Gesamtausgabe zu Ende geführt hat, sondern auch kein Opfer gescheut hat, den dritten Band ebenso schön und würdig auszustatten, wie die beiden ersten. Sie hat dadurch aufs neue bekundet, wie sehr ihr daran liegt, die reine Wissenschaft zu fördern und in der Welt zur Geltung zu bringen, auch wenn kein materieller Gewinn zu erwarten steht.

Braunschweig und Göttingen, Ostern 1923.

Die Herausgeber.

INHALTSVERZEICHNIS DES DRITTEN BANDES.

貴重書

Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen

(einschließlich Zahlentheorie).

Zu den Arbeiten über elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen

(einschließlich Zahlentheorie).

Daß ich zu meinen Arbeiten über elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, die einen so großen Umfang annehmen sollten, ursprünglich von den Untersuchungen über das Ikosaeder aus gekommen bin, mit der Absicht, die Auflösungsmethoden der Gleichung fünften Grades durch elliptische Funktionen, wie sie 1858 von Hermite, Kronecker und Brioschi gegeben waren, vom Ikosaeder aus zu verstehen, ist schon in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 257 bis 258, hervorgehoben; es ergibt sich dies auch ganz klar aus den hier zunächst folgenden Nummern LXXXI, LXXXII. Ich wurde so von selbst zur allgemeinen Beschäftigung mit der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen (Nr. LXXXII) und damit insbesondere zur Neuaufnahme der Hermiteschen Aufgabe gedrängt: die Resolventen 5-ten, 7-ten und 11-ten Grades, die, einem berühmten Satze von Galois zufolge, bei Transformation 5-ter, 7-ter und 11-ter Ordnung bestehen, in einfachster Form wirklich aufzustellen. Durch Kombination der mir geläufigen gruppentheoretischen, bezw. invariantentheoretischen Ansätze mit den geometrisch-anschaulichen Methoden der Riemannschen Funktionentheorie gelang dies in überraschend einfacher Weise (Nr. LXXXIII, LXXXIV und LXXXVI). Zugleich ergab sich ein voller Überblick über die verschiedenen Arten von Modulargleichungen und Multiplikatorgleichungen, die in der Literatur vorlagen, sowie überhaupt eine klare Einsicht in das Wesen derjenigen algebraischen Gleichungen, welche durch elliptische Funktionen gelöst werden können (Nr. LXXXV, LXXXVII).

Hiermit war in der Tat ein neuer Ansatz zur systematischen Behandlung aller einschlägigen Fragen aus der Theorie der elliptischen Funktionen gewonnen. Abstrakt läßt sich derselbe dahin fassen, daß man die unendliche diskontinuierliche Gruppe homogener linearer Substitutionen

$$(1)\qquad \begin{cases} u' = \pm u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \\ \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{cases}$$

(wo $m_1, m_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze, die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ befriedigende, Zahlen bedeuten) an die Spitze stellen und den Stoff nach den Untergruppen ordnen soll, die in der Gesamtgruppe enthalten sind. Man erkennt den Anschluß an die Grundauffassung des Erlanger Programms: die Gruppentheorie als ordnendes Prinzip im Wirrsal der Erscheinungen zu benutzen. Diese Aufgabestellung wurde von mir allerdings nur unter zwei wesentlichen Einschränkungen durchgeführt: Die erste besteht darin, daß ich nur Untergruppen von endlichem Index in den Kreis meiner Betrachtungen zog, wodurch eine systematische Verwendung der Lehre von den algebraischen Funktionen ermöglicht wurde. Die zweite ergab sich aus dem historischen Entwicklungsgange, indem es sich zeigte, daß die in der vorhandenen Literatur auftretenden Untergruppen durchweg *Kongruenzgruppen* waren, d. h. solche Untergruppen von (1), die sich definieren lassen, indem man die Konstanten m_1, m_2, α, β, γ, δ bestimmten Kongruenzforderungen in bezug auf einen Zahlenmodul n unterwirft (Nr. LXXXVII). Danach gliedern sich die Entwicklungen in solche der 1-ten, 2-ten, 3-ten, ..., n-ten *Stufe*. Die Funktionen erster Stufe kommen in der Weierstrassischen Theorie der elliptischen Funktionen zu prinzipieller Geltung, die Funktionen zweiter Stufe in der Jacobischen und in der Weierstrassischen Theorie, jedoch mit dem Unterschiede, daß sie bei Jacobi unsymmetrisch auftreten ($sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$), während Weierstrass sie symmetrisch nebeneinander behandelt $\left(\sqrt{\wp(u)-e_1},\ \sqrt{\wp(u)-e_2},\ \sqrt{\wp(u)-e_3}\right)$. Es hängt dies damit zusammen, daß Weierstrass, wie übrigens auch Gauss in seinen Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel, u, ω_1, ω_2 als homogene Variable nebeneinander gebraucht, während Legendre, Abel und Jacobi ausschließlich mit den Verhältnissen $\frac{u}{\omega_2}$, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ arbeiten. Die Funktionen höherer Stufen haben bisher nur erst wenig die in den folgenden Abhandlungen geforderte Berücksichtigung gefunden, abgesehen von einzelnen Stellen bei Gauss und Abel und von einigen an Jacobi anschließenden Entwicklungen, in denen die Stufenzahlen 2^α und $2^\alpha \cdot 3$ ($\alpha = 0, 1, \ldots$) auftreten, ohne daß das Stufenprinzip als solches dabei hervorgekehrt wäre.

Das somit umrissene abstrakte Schema findet dann, was reine Modulfunktionen, d. h. Funktionen allein von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ angeht, seine konkrete Ausgestaltung durch Einführung eines geometrischen Hilfsmittels, nämlich des *Fundamentalpolygons* in der ω-Ebene, welches unmittelbar die Heranziehung der Riemannschen Existenzsätze betreffend die Funktionen einer komplexen Veränderlichen gestattet. Die Konstruktion dieses Polygons hat sich, wie aus Nr. LXXXII zu ersehen, ursprünglich aus der Veranschaulichung des dort gewählten Repräsentantensystems transformierter Moduln gewissermaßen von selbst ergeben, hat dann aber bei weitergehenden Untersuchungen immer mehr eine allgemeine Bedeutung gewonnen. Ich verweise hier nur, was den dritten Abschnitt des vorliegenden Bandes angeht, auf die Theorie der automorphen Funktionen, oder beispielsweise auf die zentrale Fragestellung in der modernen Kristallographie (siehe Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 614/615). Im übrigen betone ich hier gerne, wie solcherweise in den folgenden Abhandlungen Gruppentheorie, Zahlentheorie, Geometrie und Funktionentheorie, alle getragen von den Grundauffassungen der Invariantentheorie (also des projektiven Denkens), sich zu einem untrennbaren Ganzen verbinden. Was auf der einen Seite bekannt oder mühelos zu finden ist, wird für die Problemstellung der anderen ausgenutzt. Das hierin liegende Verfahren, welches natürlich ein vorheriges Studium der eigentümlichen Betrachtungsweisen jedes einzelnen Gebietes voraussetzt, darf wohl überhaupt als Grundzug aller meiner in dem vorliegenden Bande zusammengestellten Arbeiten angesehen werden. Dabei ist freilich, wie ich immer empfunden habe, ein wichtiges Hilfsmittel der vorwärtsdringenden mathematischen Forschung, nämlich das *algorithmische Verfahren* einigermaßen zu kurz gekommen. Um bei den hier im ersten Abschnitte des Bandes zusammengestellten Abhandlungen über elliptische Funktionen zu bleiben, so zeigt sich dies darin, daß die Thetareihen nur erst spät und mehr beiläufig auftreten. Es hat dies übrigens auch seine Vorteile gehabt; hätte ich das Rechnen mit den Thetareihen in den Vordergrund gezogen, es wäre mir vielleicht so gegangen, wie manchem anderen Mathematiker vorher, der in der Fülle sich darbietender Formeln kein rechtes Prinzip zur Herausfindung einfacher Grundgedanken mehr zu finden wußte.

Noch einige Worte über die historische Entwicklung der zunächst in Betracht kommenden Arbeiten Nr. LXXXI bis Nr. XCIV. Schon frühzeitig (im Winter 1869/70) hatte ich mir die Bekanntschaft mit den von Weierstrass eingeführten elliptischen Funktionen durch meinen Studienfreund Kiepert erworben, mit dem ich dann später (1877/78), wie schon in Bd. 2 dieser Ausgabe S. 257 erwähnt wurde, bei der Auflösung der Gleichungen fünften Grades, von ganz verschiedener Seite kommend, zusammentraf. Hierzu kam dann, daß ich aus Schwarz' Arbeit über die hypergeometrische Reihe

die elementare Modulfigur kannte, welche bei der konformen Abbildung der Ebene von k^2 auf die Halbebene des Periodenverhältnisses ω entsteht[1]). Von hier aus ist in den Spezialvorlesungen, die ich während der Jahre 1877 bis 1880 an der Münchener Technischen Hochschule über Zahlentheorie, elliptische Funktionen und algebraische Gleichungen gehalten habe, der geometrisch-gruppentheoretische Ansatz entstanden, der mich rasch weiterführen sollte. Ich hatte dabei das Glück, unter meinen Zuhörern ausgezeichnete Mitarbeiter zu finden, welche mich nicht nur bei meinen eigenen Untersuchungen wesentlich unterstützten, sondern bald auch, jeder in seiner Richtung, wesentlich weiter gingen. Ich nenne in dieser Hinsicht, der Reihenfolge ihrer einschlägigen Veröffentlichungen entsprechend, Gierster, Dyck, Bianchi und Hurwitz.

Gierster half mir zunächst bei den zur Aufstellung von Modulargleichungen nötigen numerischen Rechnungen und nahm dann gleich statt der von mir allein betrachteten Transformationen von Primzahlgraden solche von zusammengesetztem Grade in Angriff. Danach aber wandte er sich zahlentheoretischen Problemen zu, wie sie vermöge der neuen Ansätze besonders aussichtsreich erschienen. Kronecker hatte von 1860 beginnend aus der Betrachtung der Jacobischen Modulargleichungen acht sehr bemerkenswerte Relationen für die Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante abgeleitet, deren Beweisprinzip H. J. St. Smith im 6. Teile seines ausgezeichneten Referates über Zahlentheorie in den Reports der British Association v. J. 1865 (= Coll. Math. papers, Nr. X, Bd. 1, S. 289 ff.) klargelegt hatte. Indem ich das Referat studierte, schien es mir von vornherein möglich, entsprechende neue Relationen abzuleiten, indem man zu Modulargleichungen höherer Stufe schritt. Eine erste Note hierüber, welche die Relationen dritter und fünfter Stufe betraf, konnte Gierster bereits im Sommer 1879 fertigstellen, und es hat mir damals, bei eigenen sehr geringen zahlentheoretischen Kenntnissen, besondere Genugtuung gegeben, die Resultate der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften einzusenden. (Siehe Gött. Nachrichten 1879.) Bei der Weiteruntersuchung höherer Primzahlstufen konnte er nur mehr partikuläre Resultate ableiten und stieß übrigens, sobald die Fundamentalpolygone der in Betracht kommenden Irrationalitäten ein Geschlecht $p > 0$ besaßen, auf Schwierigkeiten, deren Überwindung er nur erst anbahnte. (Math. Annalen Bd. 17 (1880/81), Bd. 21 (1882/83) und Bd. 22 (1883).) Er fand nämlich induktiv, daß in den gewünschten Schlußformeln neue zahlentheoretische Funktionen auftraten, deren Herkunft dunkel blieb. Hier hat in der Folge erst Hurwitz mit durchschlagendem Erfolg eingegriffen, indem er die zu dem Fundamentalpolygon gehörigen, überall endlichen Integrale als eindeutige Modulfunktionen einführte, das Gesetz der zugehörigen Reihenentwicklungen studierte und in deren Koeffizienten jene zahlentheoretischen Funktionen erkannte. (Gött. Nachrichten 1883, Leipziger Berichte Bd. 36 (1884) und Bd. 37 (1885), Math. Annalen, Bd. 25, (1884/85).) Gierster, der Realschullehrer in Bamberg geworden war und dadurch isoliert für sich arbeiten mußte, vollendete außer dem Genannten noch sehr wertvolle Untersuchungen über die Galoisschen Gruppen der Modulargleichungen, die es ihm vollständig zu analysieren gelang, und über die auf S. 78 des vorliegenden Bandes Einzelangaben folgen werden. (Leipziger Dissertation, 1881 = Math. Annalen, Bd. 18, Leipziger Berichte, Bd. 37 (1885) und Math. Annalen Bd. 26 (1885/86).) Leider ist er bald einer schmerzhaften Krankheit verfallen, der er im Januar 1893 erlag. Aus kleinen Verhältnissen hervorgegangen, besaß er ein eigenartiges mathematisches Talent, dessen alle, die ihm nähergetreten sind, mit dauernder Anerkennung gedenken werden[2]).

[1]) Wegen der historischen Verhältnisse vgl. übrigens die Ausführungen betreffend Gauss und Riemann in der Fußnote [1]) auf S. 256 in Bd. 2 dieser Ausgabe; ich habe hierauf bei dem Wiederabdruck des folgenden Textes nicht mehr besonders Bezug genommen, um die ursprüngliche Darstellung nicht fortgesetzt abändern zu müssen.

[2]) Vgl. den Nachruf von R. Fricke in den Jahresberichten der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 2 (1893), S. 44/45.

貴重書

Die Begabung von **Dyck** ging viel mehr nach geometrisch anschaulicher und gleichzeitig abstrakt prinzipieller Seite, von seiner organisatorischen Veranlagung ganz zu schweigen. Was die hier folgenden Aufsätze angeht, so verdanke ich es ihm insbesondere, daß ich sie, ebenso wie meine spätere ausführliche Abhandlung über automorphe Funktionen (Math. Annalen, Bd. 21 (1882/83) = Nr. CIII unten), mit zweckmäßig gezeichneten Figuren begleiten konnte. Von hier aus ist er dann, unter Festhaltung der geometrischen Grundlage, sehr bald zu seinen allgemein gruppentheoretischen Arbeiten fortgeschritten. (Math. Annalen, Bd. 20 (1882) und Bd. 22 (1883).) Parallel damit gingen seine Bemühungen um die Entwicklung der für den mathematischen Unterricht erforderlichen anschauungsmäßigen Hilfsmittel, wovon schon in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 4, die Rede gewesen ist. Was er ferner als wissenschaftlicher Organisator geleistet hat, kann hier unmöglich ausgeführt werden. Wohl aber darf ich hier mit besonderer Dankbarkeit hervorheben, daß er mir nun seit mehr als vier Dezennien, sooft in der Folge meine Leistungsfähigkeit versagte, immer wieder hilfreich zur Seite gestanden ist.

Die Mitarbeit von **Bianchi**, der vom Herbst 1879 an bis Herbst 1880 in München weilte, war mehr vorübergehender Natur, aber für mich doch sehr wesentlich. Indem er im Sommer 1880 (Math. Annalen, Bd. 17) die elliptischen Kurven, die ich später (Abh. Nr. XC) elliptische Normalkurven der 3-ten und 5-ten Ordnung nannte, mit Hilfe der σ-Funktion behandelte, überwand er meine Scheu, mich dieses Hilfsmittels, wie auch der Thetareihen allgemein zu bedienen (vgl. das Nähere in Nr. LXXXVIII, LXXXIX, XC). Er hat so das Beste getan, um die Brücke von meinen Untersuchungen zu den Entwicklungen der **Weierstrassischen** Schule, insbesondere zu den gleichzeitigen Arbeiten meines Freundes **Kiepert** zu schlagen, von denen unten noch verschiedentlich die Rede sein wird. **Bianchi** ist längst eine anerkannte Autorität auf einem anderen Gebiete der Mathematik, der Lehre von der Flächenkrümmung, geworden. Aber ein beträchtlicher Teil seiner späteren Arbeiten steht doch auch mit den Anregungen seiner Münchener Zeit in Beziehung, ich meine seine Untersuchungen über die diskontinuierlichen Gruppen linearer Raumtransformationen.

Hurwitz ist von vornherein eine rein theoretische Natur gewesen, als solche aber von überragender Bedeutung. Von der algebraischen Geometrie ausgehend, konzentrierte er sich immer mehr auf Funktionentheorie und Zahlentheorie. Ich kann hier nur nennen, was mit den im folgenden abgedruckten Arbeiten über elliptische Funktionen unmittelbar zusammenhängt. Da ist zunächst seine Leipziger Dissertation von 1881 (Math. Annalen, Bd. 18), in welcher er das Bildungsgesetz der fundamentalen Modulformen, an **Eisenstein** anknüpfend, independent entwickelte und damit insbesondere die Theorie der Multiplikatorgleichungen erster Stufe auf eine neue allgemeine Grundlage stellte. Es folgen 1884/85 seine bereits oben genannten Untersuchungen über Klassenzahlrelationen höherer Stufen, die ihn im folgenden Jahre zu seiner berühmten Theorie der allgemeinsten algebraischen Korrespondenzen auf Gebilden höheren Geschlechts führten (Leipziger Berichte, Bd. 38 (1886), abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 28 (1887)). Dann 1886 die Ausdehnung meiner Theorie der elliptischen Normalkurven n-ter Ordnung, die ich nur für ungerades n entworfen hatte, auf beliebiges gerades n und im Anschluß daran die Entdeckung neuer analytischer Bildungsgesetze für elliptische Funktionen, die sich bei Periodensubstitutionen linear mit konstanten Koeffizienten substituieren. (Math. Annalen, Bd. 27 (1886).) Es wird sich im vorliegenden Bande noch öfters Gelegenheit bieten, einige weitere Untersuchungen von **Hurwitz** zu berühren.

In Bd. 2, S. 258 ist schon berichtet, daß ich Herbst 1880 nach Leipzig übersiedelte und die beiden ersten Jahre den Untersuchungen über allgemeine Riemannsche Funktionentheorie, speziell über automorphe Funktionen widmete, die ich als den Höhepunkt meiner mathematischen Produktivität ansehen muß[3]), daß ich dann

[3]) Dementsprechend werden diese Arbeiten erst im dritten (Schluß-) Abschnitte des vorliegenden Bandes reproduziert.

aber, durch Gesundheitsrücksichten gezwungen, zu der minder anstrengenden Ausarbeitung zusammenhängender Darstellungen überging. Als erste Probe einer solchen erschien 1884 mein Ikosaederbuch. Um dann für die elliptischen Funktionen Entsprechendes zu leisten, habe ich in den Jahren 1884/85 in meinem Seminar zunächst noch zahlreiche aus der Münchener Periode stammende Einzelfragen durcharbeiten lassen. Hieraus sind eine Reihe Dissertationen entstanden, über deren Ergebnisse weiterhin in den Referaten Nr. XCI und XCII Bericht erstattet wird. Ich selbst habe in jenen Jahren nur die Abhandlung Nr. XC über die elliptischen Normalkurven n-ter Ordnung ausgearbeitet, welche in der Sprache der mehrdimensionalen projektiven Geometrie die Verbindung meiner Münchener Ansätze mit den allgemeinen Theoremen der traditionellen Theorie, insbesondere derjenigen **Weierstrassischer** Prägung herstellt.

Ich bin dann aber bald doch wieder zu neuen Untersuchungen geschritten, insbesondere zu den Arbeiten über hyperelliptische und Abelsche Funktionen, welche im zweiten Abschnitte des vorliegenden Bandes abgedruckt sind. Unterdessen arbeiteten von meinen früheren Seminarmitgliedern **Pick** und **Fricke** auf dem Gebiet der elliptischen Modulfunktionen weiter. Ersterer unternahm (Math. Annalen Bde. 25, 26 (1885/86)), um nur dies hervorzuheben, den ersten Vorstoß in das damals noch wenig zugängliche Gebiet der Gleichungen der komplexen Multiplikation[4]), während **Fricke** nach verschiedenen Vorarbeiten, die in den Math. Annalen Bde. 28 bis 31 (1886 bis 1888) abgedruckt sind, unter ständiger Fühlungnahme mit mir die Ausarbeitung der geplanten systematischen Darstellung der elliptischen Modulfunktionen durchführte und seitdem mein nächster Mitarbeiter geworden ist. Der erste Band des so entstandenen umfangreichen Werkes ist 1890, der zweite ist 1892 erschienen[5]).

Durch den Titel des Buches ist angedeutet, daß bei der Redaktion die von mir geplante Disposition, welche dem in den Nrn. LXXXVII, LXXXVIII aufgestellten Programm entsprach, im wesentlichen eingehalten ist. Also Voranstellung der Gruppenfragen und ihrer Veranschaulichung durch Konstruktion der zugehörigen Fundamentalpolygone, Heranziehung der Riemannschen Existenzsätze und erst später der Thetareihen und Ableitung der hier folgenden zahlentheoretischen Theoreme, insbesondere der Klassenzahlrelationen. Die gesamten Überlegungen, die in den Nrn. LXXXI bis XCII berührt werden (nebst den Weiterbildungen durch **Kiepert**), erscheinen hier in geglätteter Form in einen gemeinsamen Rahmen eingespannt, der aber eine große Zahl von Einzelausführungen von **Fricke** mit umfaßt, wobei an numerisch durchgeführten Beispielen von Transformationsgleichungen und insbesondere auch an erläuternden Figuren nicht gespart wird. Auch ist den historisch-literarischen Verhältnissen überall Rechnung getragen. So mag das Werk beim Lesen der nachstehend abgedruckten Abhandlungen ständig verglichen werden, auch wenn durch kein besonderes Zitat darauf verwiesen wird.

Ich nenne insbesondere, weil sie in den hier abgedruckten Abhandlungen nicht hervortritt, die daselbst im Anschluß an **H. J. S. Smith** gegebene Darstellung der Lehre von den indefiniten binären quadratischen Formen. Indem **Smith** eine auf **Hermite** zurückgehende Idee ins Geometrische übersetzte, konstruierte er zur Darstellung der einzelnen indefiniten Form den Halbkreis, der die reelle Achse der ω-Ebene in den beiden Nullpunkten der Form rechtwinklig schneidet, und sieht zu, wie dieser die Dreiecksteilung der positiven ω-Halbebene durchsetzt[6]). **Smith** hatte

[4]) **H. Webers** *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen*, die den Gegenstand zum ersten Male im Zusammenhang behandelten, erschienen erst 1890/1891. (2. Auflage als Bd. 3 des *Lehrbuch der Algebra*, 1908.)

[5]) **F. Klein**, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, ausgearbeitet und vervollständigt von* **R. Fricke**. (Weiterhin kurzweg als „Modulfunktionen" zitiert.)

[6]) **H. J. S. Smith**, *Sur les équations modulaires*, 1874 der Pariser Akademie vorgelegt, 1877 in den Atti della Accademia Reale dei Lincei Serie III, Bd. 1 gedruckt. (= Nr. XXXV der Collected mathemat. Papers, Bd. 2, S. 224 ff.)

hierbei nur die dreizipfligen Dreiecke der Hauptkongruenzgruppe zweiter Stufe benutzt, während ich in meiner zahlentheoretischen Vorlesung von 1879 auf die Elementardreiecke der ω-Figur zurückgriff. In dieser Form ist die Entwicklung in den „Modulfunktionen“, Bd. 1, S. 250—261 aufgenommen. Eine merkwürdige Anwendung hiervon, die ich noch besonders nennen will, findet sich in Bd. 2 der „Modulfunktionen“, S. 165 ff., wo, wieder an H. J. S. Smith anknüpfend, die Anzahl der reellen Züge derjenigen algebraischen Kurve, welche der zwischen den Modulfunktionen $J(\omega)$ und $J' = J\left(\frac{\omega}{n}\right)$ bestehenden Transformationsgleichung entspricht, in unmittelbare Beziehung zu der Anzahl der Klassen primitiver indefiniter binärer Formen der Determinante n gesetzt wird.

Dagegen ist in den „Modulfunktionen“ ein anderer Punkt der Theorie, der eigentlich hätte aufgenommen werden müssen, nur beiläufig berührt worden, nämlich die zahlentheoretische Natur der Gleichungen der komplexen Multiplikation selbst. (In den „Klassenzahlrelationen“ wird nur ihr Grad in Betracht gezogen.) Ihre Behandlung hätte viel zu umfangreiche arithmetische Vorbereitungen erfordert. Für mich persönlich war es damals eine Haupthemmung der lebendigen Erfassung des Problems, daß ich, bei aller Betonung der Wichtigkeit homogener Schreibweise, mich doch gewöhnt hatte, nur den Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ geometrisch zu deuten, nicht ω_1, ω_2 einzeln. Ich bin erst später, als Weber in den Jahren 1892 bis 1895 neben mir in Göttingen war, dazu geführt worden, das letztere zu tun, also bei allen Fragen, welche die Transformation der elliptischen Funktionen betreffen, überall die Punktgitter zugrunde zu legen, welche von den Punkten $x + iy = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ gebildet werden. Bekanntlich hat schon Gauss die Theorie der binären quadratischen Formen von negativer Determinante mit dieser Vorstellung in Verbindung gebracht; die allgemeine Lehre von der projektiven Maßbestimmung gestattet mit Leichtigkeit, auch die Formen von positiver Determinante mit einzubeziehen. Von hier aus entwickelte ich zunächst (Nr. XCIII) eine geometrische Auffassung der Kompositionstheorie der quadratischen Binärformen. Furtwängler, der meine ersten bez. Vorträge (von Sommer 1893) ausarbeitete, hat noch neuerdings gezeigt, wie die Gittervorstellung, auf n Dimensionen verallgemeinert, die allgemeine Idealtheorie der Zahlentheoretiker zu begründen gestattet. (Math. Annalen, Bd. 82 (1920).) Die Einführung der Gitter kommt im Grunde darauf hinaus, jeweils die einzelne Zahl eines algebraischen Zahlkörpers mit den zu ihr konjugierten Zahlen nebeneinander zu betrachten. Im Falle $n = 2$ ergibt sich dabei unmittelbar der Übergang zu den doppeltperiodischen Funktionen und damit zu den elliptischen Gebilden. Von diesem Standpunkte aus habe ich in den zahlentheoretischen Vorlesungen von 1895 bis 1896, die später autographiert wurden und auf die sich das Referat Nr. XCIV bezieht, die Grundlage für die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen in besonders anschaulicher Weise entwickeln können. Neu ist dabei, daß ich auch hier nach „Stufen“ gliedere, wobei ich als Beispiel die fünfte Stufe heranziehe, so daß neben die (von Gierster gegebenen) Klassenzahlrelationen fünfter Stufe nunmehr ebensolche *Klassengleichungen* treten. Hierbei kommt natürlich überall die Ikosaedertheorie zur Geltung. Leider aber war ich damals, wie schon in Bd. 2, S. 508 ff. berichtet, bereits anderweitig stark beschäftigt. Ich habe also nur ein Bruchstück der Untersuchungen geben können, das noch eines Bearbeiters harrt, der die Betrachtungen zu Ende führt.

Zum Abschluß dieser Vorbemerkungen darf ich noch auf weitere Veröffentlichungen von Fricke verweisen, welche meine Entwicklungen in die sonstige Theorie der elliptischen Funktionen einordnen. Ich nenne in dieser Hinsicht zunächst die Referate in Bd. II, 2 der mathematischen Enzyklopädie (Elliptische Funktionen = II B, 3 und Automorphe Funktionen mit Einschluß der elliptischen Modulfunktionen = II B, 4, beide 1913), dann aber vor allem das neue Lehrbuch der elliptischen Funktionen (Bd. 1, 1915/16; Bd. 2, 1921/22). Um nur einzelne Punkte aus diesem Buche hervorzuheben, erwähne ich die bis in die Einzelheiten vordringende Behandlung der Jacobischen Funktionen neben den Weierstrassischen, wobei immer die Stufentheorie als Leitstern gilt und besonderes Gewicht auf die Klarstellung der Beziehungen der verschiedenen Funktionensysteme zueinander gelegt ist, ferner die deutliche Darlegung der in so eigentümlicher Weise über den Rahmen der Stufentheorie hinausragenden Stellung der Θ-Funktionen innerhalb der Theorie und die elegante Behandlung ihrer Transformationsformeln. Als besonderer Fortschritt im zweiten Bande, welcher hauptsächlich der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen und Modulfunktionen gewidmet ist, mag die Einführung einer geeignet definierten Hälfte meines Fundamentalpolygons, des *Klassenpolygons* genannt werden, wodurch die Theorie der Modulargleichungen wesentlich über das vorher bekannt gewesene hinaus gefördert ist. (Näheres siehe Fußnote[18]) auf S. 35/36 und ergänzende Bemerkung 3. zu Abh. LXXXVI auf S. 167/168 des vorliegenden Bandes.) Der dritte und letzte Band, der die Anwendungen, unter anderem die komplexe Multiplikation behandeln wird, ist noch nicht erschienen.

K.

LXXXI. Sull' equazione dell' Icosaedro nella risoluzione delle equazioni del quinto grado [per funzioni ellittiche][1].

(Nota estratta da una lettera diretta al M. E. professore Brioschi.)

[Reale Istituto Lombardo. Rendiconti, Ser. II., Vol. 10. (1877).]

... Se con g_2, g_3 si indicano gli invarianti della forma biquadratica
$$(1-x^2)(1-k^2x^2),$$
si hanno, come è noto, le espressioni:
$$g_2 = \frac{1+14k^2+k^4}{12},$$
$$g_3 = \frac{1-33k^2-33k^4+k^6}{216},$$
$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = \frac{k^2(1-k^2)^4}{16},$$
ed il problema: determinare il valore di k per una qualsivoglia data forma biquadratica, conduce quindi all' equazione[2]):
$$\frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{(1+14k^2+k^4)^3}{108k^2(1-k^2)^4}.$$

Questa equazione, allorquando pongasi $\sqrt{k} = \eta$, non è altro che la equazione dell' Ottaedro, siccome si è presentata nelle ricerche di Schwarz e nelle mie; il che sembrami non senza importanza per la teorica delle funzioni ellittiche.

Ma il risultato assai notevole al quale porta la considerazione di quella equazione deducesi dalle mie ricerche sull' uso dell' equazione dell' Icosaedro nella risoluzione delle equazioni del quinto grado per mezzo delle funzioni ellittiche, sia che essa voglia applicarsi al metodo del sig.

[1]) [Man vergleiche die Ausführungen des letzten Absatzes von S. 257 im zweiten Bande der vorliegenden Ausgabe, wo die Beziehung zu Kiepert dargestellt ist. K.]

[2]) Cayley, *An elementary treatise on elliptic functions* (Cambridge 1876), S. 317 [oder im Cambridge and Dublin Math. Journal, vol. I (1846) = Collected Math. Papers, vol. I, Nr. 33].

Hermite od a quello del sig. Kronecker. Dimostrasi così che questi due metodi non sono realmente differenti, come si crede comunemente.

Pel metodo di Kronecker, la risoluzione dell' equazione del quinto grado si fa dipendere da una equazione Jacobiana del sesto grado, nella quale sia il coefficiente $A = 0$, ossia dalla:
$$z^6 + 10Bz^3 - Cz + 5B^2 = 0,$$
ed il valore del modulo k deducesi dalla:
$$\frac{C^3}{B^5} = -16\frac{(1-16k^2k'^2)^3}{k^2k'^2},$$
come Ella ha dimostrato negli *Atti dell' Istituto Lombardo* (Vol. 1° anno 1858, pag. 277, 278 [= Opere matematiche, Nr. CXI, tomo III., S. 181/182]). Ponendo in questa relazione $\frac{1}{k'}$ in luogo di k, si ottiene la:
$$\frac{C^3}{B^5} = +16\frac{(1+14k^2+k^4)^3}{k^2(1-k^2)^4},$$
cioè la forma richiesta.

Si sostituisca ora l'equazione Jacobiana con una equazione dell' Icosaedro, pongasi cioè:
$$1728\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = X,$$
essendo:
$$f(\eta) = \eta\,(\eta^{10} + 11\eta^5 - 1)$$
ed $H(\eta)$ l' Hessiano di $f(\eta)$; si ha (*Erlanger Berichte, November* 1876)[3])
$$X = \frac{C^3}{1728B^5}$$
e quindi infine:
$$1728\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \frac{(1+14k^2+k^4)^3}{108k^2(1-k^2)^4}.$$

Consideriamo ora il metodo di Hermite. Egli scrive la forma di Bring-Jerrard nel modo seguente:
$$y^5 - y - \frac{2}{5\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{1+k^2}{k'\sqrt{k}} = 0.$$

Per formare l'equazione dell' Icosaedro corrispondente ad essa, la dedurrò dalla piu generale da me considerata per le equazioni del quinto grado nelle quali mancano il secondo ed il terzo termine (*Erlanger Berichte, Januar* 1877)[4]).

[3]) [Vgl. auch Math. Annalen, Bd. 12 (1877), S. 518, 520 (= Abh. LIV in Bd. 2 der vorliegenden Ausgabe, S. 337, 339).]

[4]) [Vgl. die in der eben genannten Abhandlung enthaltenen Entwicklungen auf S. 549 und 552 in Bd. 12 der Math. Annalen (= S. 368, 369 und 372 in Bd. 2 der vorliegenden Ausgabe).]

貴重書

Sia:

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$$

la data equazione, e si indichino con l, m, n le espressioni seguenti dei coefficienti della medesima:

$$\begin{aligned}
l &= 12^{\frac{2}{5}}(\alpha^4 - \beta^3 + \alpha\beta\gamma)\\
m &= 12^{-\frac{4}{5}}(\gamma^4 + 2^3\cdot 5\cdot\alpha^2\beta\gamma^2 - 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot\alpha\beta^3\gamma\\
&\qquad - 3\cdot 2^6\cdot\alpha^5\gamma - 2^4\cdot 3^2\cdot\beta^5 + 2^7\cdot 5\cdot\alpha^4\beta^2)\\
n &= 12^{-2}(-2^6\cdot 3^3\cdot\alpha^{10} + 2^5\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\alpha^7\beta\gamma - 2^5\cdot 5\cdot 13\cdot\alpha^6\beta^3\\
&\qquad + 2^6\cdot 3^2\cdot\alpha^5\gamma^3 - 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 23\cdot\alpha^4\beta^2\gamma^2 + 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13\cdot\alpha^3\beta^4\gamma\\
&\qquad - 2^3\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot\alpha^2\beta^6 + 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot\alpha^2\beta\gamma^4 - 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot\alpha\beta^3\gamma^3\\
&\qquad + 2^3\cdot 3^4\cdot\beta^5\gamma^2 + \gamma^6).
\end{aligned}$$

Sieno inoltre $y_0, y_1, \ldots, y_4$ le radici dell' equazione superiore del quinto grado; posto

$$\eta = -\frac{y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4}{y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4},$$

essendo ε una radice imaginaria quinta dell' unità, si avrà la seguente equazione icosaedrica:

$$1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \frac{l^5 + m^3 - n^2 \pm \sqrt{(l^5 + m^3 - n^2)^2 - 4l^5m^3}}{2l^5}.$$

Sostituiscansi ora in quest' ultima per α, β, γ i coefficienti dell' equazione di Hermite sopra ricordata; così si otterrà (dietro opportuna scelta del segno della radice quadrata)

$$1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \frac{(1 + 14k^2 + k^4)^3}{108k^2(1 - k^2)^4}$$

che coincide con quella trovata partendo dal metodo di Kronecker.

Monaco, 6. aprile 1877.

LXXXII. Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.

[Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79).]

In meiner Abhandlung „Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder" [Math. Annalen, Bd. 12 (1877), S. 503 ff. = Abh. LIV in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 321—380[1])] hatte ich mir ausdrücklich vorbehalten, noch ausführlich auf die Theorie der elliptischen Funktionen und ihre Bedeutung für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades zurückzukommen. Ich wünschte die in dieser Richtung vorliegenden Entwicklungen vom Ikosaeder aus zu verstehen und womöglich zu vereinfachen. Zugleich hoffte ich neue Gesichtspunkte für die Behandlung der elliptischen Funktionen zu gewinnen. Auf solche Art ist die nachfolgende Arbeit entstanden. Einmal soll sie meine früheren Untersuchungen über Gleichungen fünften Grades vervollständigen und in gewisser Hinsicht abschließen; nach der anderen Seite soll sie den Zugang zu umfassenderen Fragen eröffnen und also eine Vorarbeit für weitere Untersuchungen sein[2]).

Dabei muß ich von vornherein betonen, daß mein Ausgangspunkt zur Behandlung der elliptischen Funktionen mit demjenigen eng verwandt ist, den Herr Dedekind in seinem Aufsatze über elliptische Modulfunktionen (Crelles Journal, Bd. 83) benutzt hat. Ich muß das hier um so mehr, als ich, damals noch mit diesem Aufsatze (der erst Anfang September vorigen Jahres [1877] erschien) unbekannt, der *Naturforscherversammlung in München* ein erstes Resultat meiner Untersuchungen vorlegte[3]), das sich aus den Dedekindschen Entwicklungen unmittelbar ergibt.

[1]) [Im folgenden des öfteren kurz als „Ikosaederarbeit" zitiert. Bei Angabe von Seitenzahlen aus dieser Arbeit bezieht sich die erste stets auf das Original in Bd. 12 der Math. Annalen, die zweite, in eckige Klammern eingeschlossene, auf Abh. Nr. LIV des Wiederabdrucks in Bd. 2 der vorliegenden Gesamtausgabe.]

[2]) Siehe z. B. eine Note: *Über Gleichungen siebenten Grades*, die ich am 4. März 1878 der Erlanger Sozietät vorlegte. [Vgl. Nr. LVI in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 388.]

[3]) Sitzung am 21. September 1877. Amtlicher Bericht, S. 104. [Dort heißt es: „Man hat folgenden Satz: Bewegt sich die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{\Delta}$ einer biquadrati-

Abschnitt I.

Einiges über die Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung.

In diesem ersten Abschnitte stelle ich eine Reihe von Beziehungen zusammen, welche nicht eigentlich neu sind, sondern fast alle in den letzten Jahren von verschiedenen Seiten her entwickelt worden sind, die aber in ihrer Gesamtheit noch wenig bekannt zu sein scheinen, so daß ich sie zum Verständnis des Folgenden hier vorausschicken muß.

§ 1.

Die rationalen Invarianten des elliptischen Integrals. Beziehung zu den Perioden.

Das elliptische Differential:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4}}, \tag{1}$$

welches homogen geschrieben die folgende Form annimmt:

$$\frac{x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2}{\sqrt{a_0 x_1^4 + 4 a_1 x_1^3 x_2 + 6 a_2 x_1^2 x_2^2 + 4 a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4}},$$

kann als Kovariante der im Nenner stehenden biquadratischen binären Form angesehen werden; denn führt man statt x_1, x_2 durch eine lineare Substitution neue Veränderliche ein, so tritt die Substitutionsdeterminante als Faktor vor. Demnach ist es wesentlich abhängig von den rationalen Invarianten dieser binären Form. Im Anschlusse an die Vorlesungen von Weierstrass bezeichne ich diese Invarianten mit g_2, g_3 und schreibe demnach:

$$g_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \tag{2}$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

---

schen Funktion $R(x)$ (wo $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ in der gewöhnlichen Bezeichnung) bei Darstellung ihrer Werte in der komplexen Ebene über die positive Halbebene, so durchläuft der Wert des Periodenverhältnisses $\frac{K}{K'}$ des elliptischen Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln 0°, 60°, 90°. Sechs von diesen Dreiecken in bestimmter Weise nach dem Gesetze der Symmetrie aneinandergereiht bilden ein neues Kreisbogendreieck mit den Winkeln 0, 0, 0, und dieses ist eben dasjenige, über welches sich bekanntermaßen $\frac{K}{K'}$ bewegt, wenn der Modul k^2 des elliptischen Integrals seine positive Halbebene durchläuft."]

Aus g_2 und g_3 setzt sich die Diskriminante Δ der biquadratischen Form in bekannter Weise zusammen.

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2. \tag{4}$$

Ich benutze sie, um die *absolute* Invariante zu bilden. Als solche wähle ich nämlich nicht, wie gewöhnlich geschieht, $\frac{g_2^3}{g_3^2}$, sondern $\frac{g_2^3}{\Delta}$. Bezeichnet man sie mit J, so hat man also die Formeln:

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}, \qquad J - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta}. \tag{5}$$

Es wird sich in den folgenden Paragraphen darum handeln, die *Perioden* des aus dem Differential (1) entspringenden elliptischen Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

welche ω_1 und ω_2 genannt werden sollen, durch g_2, g_3 auszudrücken, oder aber, was für die folgenden Untersuchungen zunächst zweckmäßiger ist, das *Verhältnis* der Perioden $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ durch die absolute Invariante J darzustellen. Man könnte ω_1 und ω_2 die *transzendenten* Invarianten nennen. Ihre transzendente Natur findet darin ihren Ausdruck, daß sie unendlich vielwertig sind. Denn mit ω_1, ω_2 ist, wie bekannt, jedes andere Wertepaar

$$\begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{cases} \tag{6}$$

gleichberechtigt, sofern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (wie immer im folgenden) ganze Zahlen bedeuten, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ gleich Eins ist. Die Formel (6) gibt zugleich *alle* Werte, deren ω_1, ω_2 bei einem vorgelegten Integrale fähig sind. — *Invarianten* aber sind die Perioden, weil sie sich nur um die Substitutionsdeterminante als Faktor ändern, wenn man in das gegebene Integral statt x_1, x_2 neue Veränderliche durch lineare Substitution einführt.

Soll man mit Hilfe der Perioden *absolute* Invarianten bilden, so hat man zunächst das Periodenverhältnis $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, man hat ferner solche Kombinationen wie $\omega_i \sqrt[12]{\Delta}$, $\omega_i \sqrt[4]{g_2}$, $\omega_i \sqrt[6]{g_3}$, wo $i = 1$ oder 2 sein mag. Es ist vielfach zweckmäßig, das elliptische Integral in der Weise zu normieren, daß seine Perioden ohne weiteres absolute Invarianten sind. Man schreibe also das Integral etwa in folgender Form, die weiterhin gelegentlich als *Normalform* [*erster Stufe*, wie ich später sagte] bezeichnet sein soll:

$$\int \frac{\sqrt[12]{\Delta} \cdot dx}{\sqrt{f(x)}}. \tag{7}$$

Diese Normalform (7) ist natürlich im einzelnen Falle nur bis auf eine zwölfte Einheitswurzel bestimmt[4]).

§ 2.

Die algebraischen Invarianten des elliptischen Integrals.

Wenn man die vier Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ (die Verzweigungspunkte des Integrals) als gegeben ansieht, so setzt sich die absolute Invariante J bekanntermaßen aus denjenigen Ausdrücken rational zusammen, die man in der synthetischen Geometrie als die *Doppelverhältnisse* der vier Wurzeln bezeichnet. Nennt man eins derselben σ, so sind die übrigen durch die oft gebrauchten Formeln gegeben:

$$(8)\qquad \frac{1}{\sigma},\quad 1-\sigma,\quad \frac{1}{1-\sigma},\quad \frac{\sigma-1}{\sigma},\quad \frac{\sigma}{\sigma-1},$$

und die absolute Invariante J erhält den Wert:

$$(9)\qquad J=\frac{4}{27}\cdot\frac{(1-\sigma+\sigma^2)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2}$$

oder

$$(9\text{a})\qquad J-1=\frac{(1+\sigma)^2(2-\sigma)^2(1-2\sigma)^2}{27\,\sigma^2(1-\sigma)^2}.\text{[5])}$$

Diese Gleichung (9), welche ich *die Gleichung für das Doppelverhältnis* nennen will, ist nach Formel (8) eine derjenigen mit linearen Transformationen in sich. Sie gehört, nach der von Schwarz und mir bei früheren Gelegenheiten gebrauchten Ausdrucksweise, dem *Doppelpyramidentypus* [im „Ikosaederbuch" und später auch als *Diedertypus* bezeichnet] an, und zwar ist die betr. Doppelpyramide eine sechsseitige. Ich gebrauche im folgenden vor allen Dingen die konforme Abbildung, welche durch unsere Gleichung vermittelt wird, und will dieselbe also hier ausführlich schildern, ohne übrigens die sehr elementaren Beweisgründe anzugeben.

---

[4]) [Der Vorzug der im Texte gewählten Normierung vor anderen in der Literatur auftretenden $\left(\text{z. B. durch die Zusatzfaktoren } \sqrt{\frac{g_3}{g_2}},\ \frac{\sqrt[6]{g_3^5}}{g_2},\ \sqrt[6]{g_3},\ \sqrt[4]{g_2}\right)$ liegt darin begründet, daß $\sqrt[12]{\Delta}$ eine *eindeutige* Funktion von ω_1 und ω_2 ist, die für keinen Wert des Periodenverhältnisses ω mit endlichem positiven imaginären Bestandteil Null oder Unendlich wird. Jacobi normiert durch Zusatz der „zur zweiten Stufe adjungierten" (vgl. S. 208) Modulform $\sqrt{e_2-e_1}$, wodurch er in seine Theorie eine lästige Unsymmetrie bringt. K.]

[5]) Vgl. z. B. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872, S. 170. — Übrigens werde ich solche Formeln später immer in der Art zusammenfassen, daß ich schreibe:

$$J : J-1 : 1 = 4(1-\sigma+\sigma^2)^3 : (1+\sigma)^2(2-\sigma)^2(1-2\sigma)^2 : 27\,\sigma^2(1-\sigma)^2.$$

Man interpretiere die komplexen Werte von J in einer Ebene, die komplexen Werte von σ auf der Kugel, und letzteres in der Art, daß $\sigma=0,1,\infty$ drei äquidistante Punkte eines größten Kreises, welcher der Äquator heißen soll, entsprechen. In ihnen wird $J=\infty$ und also $\Delta=0$. Die Werte $\sigma=2,\frac{1}{2},-1$ (für welche g_3 verschwindet und $J=1$ wird) gehören dann ebenfalls drei äquidistanten Punkten des Äquators an, welche zwischen den erstgenannten in der Mitte liegen (Fig. 1).

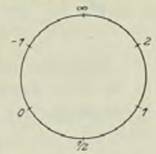


Fig. 1.

Für $J=0$, resp. $g_2=0$ ergeben sich die beiden Werte $\sigma=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$; sie sind durch Nord- und Südpol der Kugel vorgestellt.

Jetzt zerlege man die Kugel durch die sechs Halbmeridiane, welche Nord- und Südpol mit den sechs auf dem Äquator markierten Punkten verbinden, und übrigens durch den Äquator selbst in zwölf sphärische Dreiecke. Die konforme Abbildung ist dann einfach die, daß σ ein solches sphärisches Dreieck durchläuft, wenn sich J über seine positive oder seine negative Halbebene bewegt. Die Ecken entsprechen in der soeben angegebenen Weise $J=0,1,\infty$. Schraffiert man diejenigen Dreiecke, welche der positiven Halbebene J entsprechen und läßt die anderen frei, so ergeben die beiden Halbkugeln, auf die Äquatorebene parallel zur Achse projiziert, folgendes Bild:

Nördliche Halbkugel

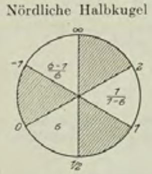


Fig. 2a.

Südliche Halbkugel

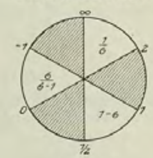


Fig. 2b.

Ich habe in die nicht schraffierten Gebiete die Ausdrücke σ, $\frac{1}{\sigma}$, $1-\sigma$, $\frac{1}{1-\sigma}$, $\frac{\sigma-1}{\sigma}$, $\frac{\sigma}{\sigma-1}$ in der Weise hineingeschrieben, daß die Drehungen kenntlich sind, welche die Kugel bei den betr. Substitutionen erfährt.

Übrigens ist die hiermit geschilderte Figur im wesentlichen identisch mit derjenigen, die ich früher [im Erlanger Programm (1872) = Abh. XXVII in Bd. 1 dieser Ausgabe, S. 496, sowie in den Math. Annalen, Bd. 9 (1875/76), S. 191 = Abh. LI in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 284] zur Versinnlichung des Formensystems einer binären kubischen Grundform angegeben habe. In der Tat, schreibt man statt σ homogen machend $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$, so hat man:

$$J : J - 1 : 1 = 4\,(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)^3 : [(\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 - 2\sigma_2)(2\sigma_1 - \sigma_2)]^2 \\ : 27\,[\sigma_1\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)]^2,$$

und betrachtet man hier $\sigma_1\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2)$ als binäre kubische Grundform, so ist (von Zahlenfaktoren abgesehen) $(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$ die Hessesche Form derselben, $(\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 - 2\sigma_2)(2\sigma_1 - \sigma_2)$ die Funktionaldeterminante beider.

§ 3.

Der Modul $\varkappa$ und die Legendresche Normalform[6]).

Man kann durch lineare Substitution erreichen, daß die binäre Form f in

$$y_1 y_2 (y_2 - y_1)(y_2 - \sigma y_1)$$

übergeht, wo σ irgendeines der sechs Doppelverhältnisse ist. Dann also wird, von einem Zahlenfaktor abgesehen, das elliptische Integral

$$(10) \qquad \int \frac{y_2\,dy_1 - y_1\,dy_2}{\sqrt{y_1 y_2 (y_2 - y_1)(y_2 - \sigma y_1)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\sigma y)}}.$$

Die Invarianten g_2, g_3, Δ nehmen folgende Werte an:

$$(11) \qquad \begin{cases} g_2 = \dfrac{\sigma^2 - \sigma + 1}{12}, \\[2mm] g_3 = \dfrac{(\sigma+1)(2\sigma-1)(\sigma-2)}{432}, \\[2mm] \Delta = \dfrac{\sigma^2(1-\sigma)^2}{256} \end{cases}$$

und normieren wir (10), indem wir $\sqrt[12]{\Delta}$ im Zähler zusetzen, so kommt:

$$(12) \qquad \int \frac{\sqrt[6]{\frac{\sigma(1-\sigma)}{16}}\cdot dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\sigma y)}} = \int \frac{\sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa'}{4}}\cdot dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\varkappa^2 y)}},$$

wo ich, wie es üblich ist, $\sigma = \varkappa^2$, $1 - \sigma = \varkappa'^2$ gesetzt habe[7]). Der Modul $\varkappa$ ist also hier die *Quadratwurzel* aus dem Doppelverhältnisse und als *solche* von keiner wesentlichen Bedeutung. Vielmehr ist *das Doppelverhältnis selbst* im folgenden überall die eigentlich in Betracht kommende Größe, und ich schreibe nur gelegentlich $\varkappa^2$ statt σ, um die Formeln den gewöhnlich gebrauchten ähnlicher zu machen.

[6]) Vgl. die Darstellung bei F. Müller, Schlömilchs Zeitschrift, Bd. 18 (1873), S. 280.

[7]) Was Herr Dedekind in seinem Aufsatze *Valenz* nennt, ist also nichts anderes als die [rationale] absolute Invariante des Integrals (10) oder (12):

$$J = \frac{4}{27}\cdot\frac{(\sigma^2 - \sigma + 1)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2}.$$

Nun aber betrachtet man durchgängig nicht (10) als die einfachste Form des elliptischen Integrals, sondern die Legendresche Normalform:

$$(13) \qquad \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2 \cdot 1 - \varkappa^2 z^2}},$$

die, von dem Zahlenfaktor 2 abgesehen, aus (10) durch die quadratische Transformation $y = z^2$ entsteht. Demgegenüber kann nicht stark genug betont werden, daß alle Entwicklungen in der Theorie der elliptischen Funktionen, welche an Jacobis Darstellungsweise anknüpfen, sich im Wesen der Sache auf das Integral (10) beziehen und nur der historischen Kontinuität zuliebe im Legendreschen Normalintegrale ihren Ausgangspunkt nehmen. [Vgl. unten Fußnote [3]) auf S. 179/180]. In der Tat, die Perioden von (13) sind nach Jacobis Bezeichnung $4K$, $2iK'$, während (10) $4K$ und $4iK'$ als Perioden ergibt; und $\frac{iK'}{K}$ ist diejenige Größe, welche man als transzendenten Modul zu betrachten pflegt, nicht $\frac{iK'}{2K}$. Anders ist es vielfach in Abels Arbeiten; bei ihm wird das Legendresche Integral aus dem allgemeinen $\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ durch *lineare* Substitution hergestellt. Ich werde weiter unten noch auf die sich dann ergebenden Beziehungen zurückkommen, und bemerke hier nur, daß dann die Bedeutung von $\varkappa$ minder einfach ist (siehe Abschn. III, § 9).

§ 4.

Die quadratische Transformation und die Transformation vierter Ordnung.

Neben dem Legendreschen Integrale entstehen aus (10) durch quadratische Transformation noch zwei andere, die man erhält, wenn man $-(1 - \sigma y)$, bzw. $(1 - y)$ durch $(\sigma - 1) z^2$ ersetzt. Für den soeben gekennzeichneten Standpunkt sind diese drei Integrale gleichberechtigt, und so mögen sie, von Faktoren befreit, hier zusammengestellt werden. Es sind diese:

$$(14) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2 \cdot 1 - \sigma z^2}}, \\[2mm] \displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2 \cdot 1 - (1-\sigma) z^2}}, \\[2mm] \displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{1 - \sigma z^2 \cdot 1 - (\sigma - 1) z^2}}. \end{cases}$$

Für ihre Invarianten hat man folgende Werte:

		g_2	g_3	Δ
(15)	I	$\frac{\sigma^2+14\sigma+1}{12}$	$\frac{\sigma^3-33\sigma^2-33\sigma+1}{216}$	$\frac{\sigma(1-\sigma)^4}{16}$
	II	$\frac{\sigma^2-16\sigma+16}{12}$	$\frac{-\sigma^3-30\sigma^2+96\sigma-64}{216}$	$\frac{\sigma^4(1-\sigma)}{16}$
	III	$\frac{1-16\sigma+16\sigma^2}{12}$	$\frac{-1-30\sigma+96\sigma^2-64\sigma^3}{216}$	$\frac{\sigma(\sigma-1)}{16}$

und also für die Größe J in den drei Fällen:

$$J = \frac{(\sigma^2+14\sigma+1)^3}{108\,\sigma(1-\sigma)^4}, \quad \frac{(\sigma^2-16\sigma+16)^3}{108\,\sigma^4(1-\sigma)}, \quad \frac{(1-16\sigma+16\sigma^2)^3}{108\,\sigma(\sigma-1)}. \tag{16}$$

Wir können an diese Formeln Folgerungen für die quadratische und die biquadratische Transformation des elliptischen Integrals knüpfen. Einmal hat man:

Ist J die absolute Invariante des gegebenen Integrals, so erhält man die absoluten Invarianten der durch quadratische Transformation hervorgehenden Integrale, wenn man einen Wert von σ der Gleichung entnimmt:

$$J = \frac{4}{27}\cdot\frac{(\sigma^2-\sigma+1)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2}$$

und ihn in die Ausdrücke (16) *einträgt.* Oder auch: *wenn man die sechs Werte von σ der vorstehenden Gleichung entnimmt und sie in einen der drei Ausdrücke* (16) *einträgt (wobei nur drei verschiedene Werte resultieren).*

Andererseits folgt:

Will man die Invarianten derjenigen Integrale berechnen, die aus dem gegebenen mit der Invariante J durch Transformation vierter Ordnung hervorgehen, so bestimme man aus einer der drei Gleichungen (16) *die sechs Werte von σ und trage sie in eine zweite der drei Gleichungen ein.*

§ 5.

Darstellung der rationalen Invarianten durch die Perioden.

Ich stelle hier einige den Jacobischen Fundamenten entnommene Formeln zusammen, die man zur Berechnung von Δ und g_2 und also von J benutzen kann. Nach dem, was soeben gesagt wurde, entspricht das Jacobische $\frac{iK'}{K}$ unserem $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Soll der Zähler dem Zähler, der

Nenner dem Nenner zugeordnet werden, so beachte man, daß $\omega_1\sqrt[12]{\Delta}$ resp. $\omega_1\sqrt[4]{g_2}$ absolut invariant ist. Daher kommt:

$$\begin{cases} \sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_1 = 4\,iK'\sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa'}{4}}, \\ \sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2 = 4\,K\ \sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa'}{4}}, \end{cases} \tag{17}$$

sowie:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{g_2}\cdot\omega_1 = 4\,iK'\sqrt[4]{\frac{\varkappa^4-\varkappa^2+1}{12}}, \\ \sqrt[4]{g_2}\cdot\omega_2 = 4\,K\ \sqrt[4]{\frac{\varkappa^4-\varkappa^2+1}{12}}. \end{cases} \tag{17a}$$

Nun findet man S. 89 der Fundamenta (1829) [= S. 146 in Bd. 1 der gesammelten Werke Jacobis]:

$$\{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots\}^6 = \frac{2\varkappa\varkappa' K^3}{\pi^3\sqrt{q}}, \quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Also folgt:

$$\omega_2\sqrt[12]{\Delta} = 2\pi\cdot q^{\frac{1}{6}}\cdot\Pi(1-q^{2\nu})^2, \quad q = e^{i\pi\omega}. \tag{18}$$

Diese Formel läßt Δ aus ω_1, ω_2 berechnen[8]. (Umgekehrt kann sie auch dazu dienen, um bei dem normierten Integrale, bei welchem $\Delta = 1$ ist, ω_2 und ω_1 durch ihr Verhältnis ω auszudrücken.)

Man findet ferner S. 114 der Fundamenta [= S. 169 in Bd. 1 der gesammelten Werke]:

$$(1-\varkappa^2+\varkappa^4)\cdot\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 = 1 + 15\cdot 16\left\{\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2^3q^4}{1-q^4} + \frac{3^3q^6}{1-q^6} + \dots\right\},$$

also, vermöge (17a):

$$g_2\cdot\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 = \frac{1}{12} + 20\left\{\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{2^3q^4}{1-q^4} + \frac{3^3q^6}{1-q^6} + \dots\right\}. \tag{19}$$

Aus dieser Formel berechne man g_2.

Beachten wir noch, welchem Werte sich $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ nähert, wenn q verschwindet. Man findet in erster Annäherung:

$$J = \frac{1}{1728\,q^2}. \tag{20}$$

§ 6.

Das Doppelverhältnis als Funktion von ω. Konforme Abbildung.

Man kann bekanntlich die Perioden $4K$, $4iK'$ als hypergeometrische Reihen darstellen, die Partikularlösungen derselben Differentialgleichung

[8]) Die rechter Hand in (18) stehende Funktion ist, von dem Faktor 2π abgesehen, das Quadrat der bei Dedekind zugrunde gelegten Funktion $\eta(\omega)$.

zweiter Ordnung mit $\sigma = \varkappa^2$ als unabhängiger Veränderlicher sind. Daher bildet der Quotient $\omega = \frac{iK'}{K}$ die Halbebene σ auf ein Kreisbogendreieck ab, und es zeigt sich, daß die Winkel dieses Dreiecks sämtlich Null sind*). Benutzt man für $4K$, $4iK'$ die gewöhnlich angegebenen Reihenentwicklungen, so haben die beiden Dreiecke, welche der positiven und negativen Halbebene σ (der nördlichen und südlichen Halbkugel) entsprechen und von denen das erstere schraffiert werden soll, in der ω-Ebene die in Fig. 3 gegebene Lage.

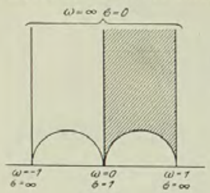


Fig. 3.

Zwei Dreieckseiten sind, wie man sieht, gerade Linien geworden, welche sich, als parallele Linien, unter einem Winkel gleich Null treffen; die dritte Seite ist ein Halbkreis, der die beiden geradlinigen Seiten in Punkten der reellen Achse berührt.

Vervielfältigt man diese Dreiecke nach dem Gesetze der Symmetrie, so erhält man eine beliebig zu vermehrende Zahl derselben, welche in lückenloser Aufeinanderfolge die positive Halbebene ω überdecken, aber niemals auf die negative Halbebene hinübergreifen. Ihre Spitzen liegen alle auf der Achse der reellen Zahlen und drängen sich dort in jedem rationalen Punkte zu unendlich vielen zusammen. Die folgende Figur (die nach Belieben vervollständigt werden kann) mag dies Verhältnis erläutern.

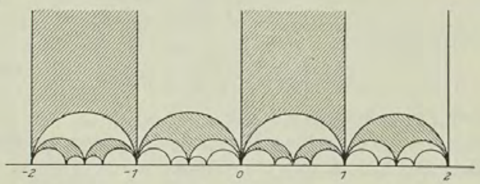


Fig. 4.

Diese Figur zeigt in völlig anschaulicher Weise, wie ω als Funktion von σ verzweigt ist. Wollte man die Riemannsche Fläche konstruieren, welche ω als Funktion von σ darstellt, so würde man unendlich viele Blätter erhalten, welche bei $\sigma = 0, 1, \infty$ unendlich oft zu unendlich vielen zusammenhängen würden. Statt dessen benutzen wir hier den Umstand

*) Siehe Schwarz in Crelles Journal, Bd. 75 (1872/73), S. 319 [= Gesammelte Math. Abhandlungen, Bd. 2, S. 241, 242.]

(der sich aus der konformen Abbildung selbst ohne weiteres ergibt), daß σ eine eindeutige Funktion von ω ist und zerlegen die Ebene ω in unendlich viele den Halbebenen von σ entsprechende Gebiete. Ich betone dieses Verfahren, weil ich es später oft benutze, um Verhältnisse klarzulegen, die sich auf der *mehrblättrigen* Riemannschen Fläche kaum übersehen lassen.

§ 7.

Die Invariante J als Funktion von ω.

Man beachte jetzt, daß sich nach § 2 die Halbebene σ (resp. die von dem Äquator begrenzte Halbkugel σ) in sechs Unterdreiecke zerlegt, welche den Halbebenen J entsprechen. Genau ebenso kann man ein Kreisbogen-

Fig. 5.

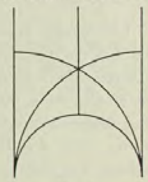


Fig. 6.

dreieck, dessen sämtliche Winkel gleich Null sind, in sechs Unterdreiecke zerlegen. Für das symmetrisch gestaltete Dreieck dieser Art ziehe man einfach, wie Fig. 5 zeigt, die drei Höhen; die Unterdreiecke sind dann geradezu kongruent. Allgemein also hat man zum Zwecke der Zerlegung durch jede der drei Ecken denjenigen Kreis zu ziehen, der in der Ecke die beiden dort zusammenstoßenden Kreisbogen berührt, während er auf der dritten Seite senkrecht steht. Dies liefert z. B. bei den Dreiecken der Fig. 3 das in Fig. 6 gegebene Bild.

Jetzt folgt aus dem Prinzip der Symmetrie: *daß sich ω eben über ein solches kleines Dreieck bewegt, wenn J über seine Halbebene läuft.*

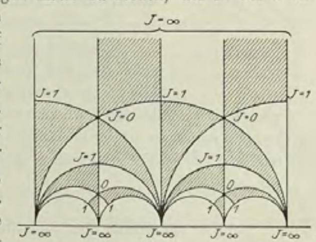


Fig. 7.

Man erhält also die konforme Abbildung, welche die Beziehung zwischen J und ω darstellt, wenn man jedes Dreieck der Fig. 4 in der nun angegebenen Weise in sechs kleine Dreiecke zerlegt und diese Dreiecke, der Zeichnung 2 entsprechend, abwechselnd schraffiert, resp. freiläßt. So entsteht die Fig. 7.

貴重書

Will man die Sache anders darstellen, indem man ω als Funktion von J durch eine unendlich-blättrige Riemannsche Fläche repräsentiert, so folgt, daß bei $J=0$ immer je drei, bei $J=1$ immer je zwei, bei $J=\infty$ immer unendlich viele Blätter zyklisch zusammenhängen.

Diese Figur nun — welche die eigentliche Grundlage für das Nachfolgende abgibt — ist eben diejenige, von der Dedekind bei seiner Darstellung ausgeht. Er kommt zu ihr durch rein arithmetische Betrachtung. Die Werte von ω, welche zu einem Werte von J gehören, sind, wie oben bemerkt, aus einem solchen Werte durch die [ganzzahligen] Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1 \tag{22}$$

zu berechnen. Nennen wir solche Werte von ω einander *äquivalent*, so ist aus der Entstehung unserer Figur klar, daß man zu einem beliebig gegebenen Punkte der positiven Halbebene ω, der einem schraffierten oder nicht schraffierten Dreiecke angehören mag, die Gesamtheit der mit ihm äquivalenten erhält, wenn man in allen schraffierten, bez. nicht schraffierten Dreiecken die entsprechend gelegenen Punkte markiert. Umgekehrt also — und das ist der Weg, den Herr Dedekind einschlägt — muß man, von der Untersuchung der Substitutionen (22) ausgehend, zu unserer Dreiecksfigur gelangen, und dann, wenn man will, von ihr aus zur Definition der Größe J (der *Valenz*). Dieser Weg hat in prinzipieller Hinsicht vor dem hier von mir eingeschlagenen durchaus den Vorzug; aber ich wünschte mich möglichst an die bekannten Resultate der Theorie der elliptischen Funktionen anzuschließen, da ich später doch auf sie zurückgreifen muß, wenn ich nicht zu weitläufig werden will.

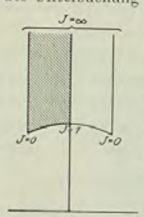


Fig. 8.

Übrigens sei es mir weiterhin gestattet, die Dreiecke der Fig. 7 als *Elementardreiecke* zu bezeichnen. Die Vierecke aber von der Art des in nebenstehender Figur dargestellten, welche durch Aneinanderlegung zweier Elementardreiecke entstehen und somit als Bilder der (zweckmäßig zerschnittenen) Gesamtebene J gelten können, sollen gelegentlich *Elementarvierecke* genannt werden.

§ 8.

Einteilung der Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$.

Unter Benutzung der nunmehr gewonnenen Figur ist es sehr leicht und für viele Zwecke sehr nützlich, sich ein deutliches Bild der Transformationen (22):

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \quad (\alpha\delta-\beta\gamma=1)$$

zu machen. Beachten wir hier nur die bei einer solchen Transformation festbleibenden Elemente. Sie können konjugiert imaginär, zusammenfallend oder reell und verschieden sein. Im ersteren Falle will ich die Substitution eine *elliptische*, im zweiten Falle eine *parabolische*, im dritten eine *hyperbolische* nennen. Bei einer elliptischen Substitution gehört eins der beiden festbleibenden Elemente der positiven Halbebene ω an, die durch unsere Figur überdeckt wird. Markieren wir vorab in ihr die zu einem beliebig gewählten Anfangswerte äquivalenten Punkte und fragen nun, wann von diesen verschiedenen Punkten im besonderen Falle einige zusammenfallen können. Es ist das offenbar nur dann der Fall, wenn wir es mit einer Ecke des Fundamentaldreiecks zu tun haben. Für die eine Ecke ist $J=0$ (d. h. $g_2=0$), die mit ihr äquivalenten Punkte rücken zu drei und drei zusammen. Für die zweite Ecke ist $J=1$ (d. h. $g_3=0$) und die äquivalenten Stellen sind zu zwei und zwei vereinigt. Die dritte Ecke kommt hier nicht in Betracht, da sie der Achse der reellen Zahlen angehört. Nun repräsentiert in Fig. 8 die eine Ecke des schraffierten Dreiecks, ($g_2=0$), den Wert $\omega=\varrho=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, die andere ($g_3=0$) den Wert i.

Dementsprechend werden wir den Satz aufstellen:

Von elliptischen Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ gibt es nur zwei Klassen; die einen haben die Periode 3, die anderen die Periode 2. Die ersteren lassen solche Punkte ungeändert, welche mit $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, die anderen solche Punkte, die mit $\pm i$ äquivalent sind.

Arithmetisch bestätigt sich dies durch folgende einfache Überlegung. Die Realität der bei den Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ festbleibenden Elemente hängt wegen $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ von dem Vorzeichen der Größe $(\alpha+\delta)^2-4$ ab. Soll also die Substitution eine elliptische sein, so kann $(\alpha+\delta)$ nur Null oder ± 1 sein. Im ersteren Falle sind die festbleibenden Elemente $\omega=\frac{-\delta\pm i}{\gamma}$, im anderen Falle $\omega=\frac{-\delta\pm\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}}{\gamma}$, und dies sind Werte, welche mit $\pm i$, bez. mit $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ äquivalent sind[10]. — Allgemein berechnet man die Periode einer Substitution, indem man letztere auf die Gestalt bringt:

$$\frac{\omega'-a}{\omega'-b} = \lambda\cdot\frac{\omega-a}{\omega-b},$$

wo a, b die beiden festbleibenden Elemente sind; ist dann n der Exponent

[10]) [Für den Beweis vgl. Dedekind, a. a. O. S. 275 ff.]

der niedrigsten Potenz von λ, welche gleich Eins ist, so ist n die Periode. Nun ergibt sich in unserem Falle mit Rücksicht auf $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ durch Koeffizientenvergleichung:

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = (\alpha + \delta)^2 - 2.$$

Setzen wir hier $(\alpha + \delta) = 0$, so kommt $\lambda = -1$, setzen wir $(\alpha + \delta) = \pm 1$, so kommt $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, womit bestätigt ist, was über die Perioden der elliptischen Substitutionen gesagt wurde.

Die Bestimmung der Doppelelemente zeigt, daß man eine *parabolische* Substitution hat, wenn $(\alpha + \delta) = \pm 2$ ist. Die Periode der Substitution (welche dann nicht mehr durch die letztangegebene Regel gegeben wird, da die festbleibenden Elemente zusammenfallen) ist dann notwendig unendlich; das festbleibende Element wird gleich $\frac{\pm 1 - \delta}{\gamma}$. Das heißt:

Jeder rationale reelle Wert von ω ist festbleibendes Element bei einer parabolischen Substitution.

Diese festbleibenden Elemente sind also keine anderen als diejenigen, in denen $J = \infty$, $\Delta = 0$ wird. In der Tat stoßen in jedem solchen Punkte unendlich viele Elementardreiecke zusammen.

Für die *hyperbolischen* Substitutionen endlich ergibt sich, daß auch sie eine unendlich große Periode besitzen und daß die bei ihnen festbleibenden Elemente niemals rationale Werte aufweisen. Denn die Quadratwurzel aus $(\alpha + \delta)^2 - 4$ kann nie rational sein, wenn $|\alpha + \delta| > 2$ ist.

§ 9.

Die Perioden ω_1, ω_2 als hypergeometrische Reihen, welche nach J fortschreiten.

Die Dreiecksfigur des § 7 lehrt uns ferner, ω_1 und ω_2 in Funktion der rationalen Invarianten zu berechnen. Zuvörderst ergibt sich, daß $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ der Quotient zweier Partikularlösungen einer hypergeometrischen Differentialgleichung ist, deren unabhängige Veränderliche die absolute Invariante J ist. Denn allgemein vermittelt der Quotient zweier Partikularlösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung die Abbildung der Halbebene auf ein Kreisbogendreieck[11]). In unserem Falle sind die drei Winkel des Kreisbogendreiecks $= 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, und wir können daher die

[11]) Vgl. die Abhandlung von Schwarz in Crelles Journal, Bd. 75 (1872/73) [= Gesammelte Math. Abhandlungen, Bd. 2, S. 211 ff.].

Konstanten α, β, γ der hypergeometrischen Differentialgleichung nach bekannten Formeln folgendermaßen wählen:

$$\alpha = \frac{1}{12}, \quad \beta = \frac{1}{12}, \quad \gamma = \frac{2}{3}.$$

Die Differentialgleichung lautet dann:

$$(23) \qquad J(1 - J) \cdot \frac{d^2 z}{dJ^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{6} J\right) \cdot \frac{dz}{dJ} - \frac{z}{144} = 0.$$

Ich will nun zuerst zwei Partikularlösungen z_1, z_2 dieser Differentialgleichung in der Weise angeben, daß $\omega = \frac{z_1}{z_2}$ sich eben über das in Fig. 8 gezeichnete Elementarviereck bewegt, wenn J seine ganze [von $-\infty$ über 0 nach $+1$ aufgeschnittene] Ebene durchläuft. Ich setze jede der Partikularlösungen z_1, z_2 in drei Formen, von denen für ein gegebenes J immer mindestens eine konvergiert. Von den doppelten Vorzeichen gilt das obere für ein J, das der positiven Halbebene angehört, das untere für die J der negativen Halbebene. Man findet durch elementare Methoden[12]):

$$(24) \left\{ \begin{aligned} z_1 &= \frac{i}{2\pi\sqrt[12]{J}} \left(\left(\log J + \log 1728\right) \cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \frac{1}{J}\right) - \frac{\partial F\left(\frac{1}{12} + \varrho, \frac{5}{12} + \varrho, 1 + 2\varrho, \frac{1}{J}\right)}{\partial \varrho}_{(\varrho = 0)} \right) \\ &= \frac{i}{2\pi\sqrt[12]{J-1}} \left(\left(\log (J-1) + \log 1728\right) \cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, 1, \frac{1}{1-J}\right) - \frac{\partial F\left(\frac{1}{12} + \varrho, \frac{7}{12} + \varrho, 1 + 2\varrho, \frac{1}{1-J}\right)}{\partial \varrho}_{(\varrho = 0)} \right) \\ &= \pm \sqrt{3}\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\Pi(0) \cdot \Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right) \cdot \Pi\left(-\frac{7}{12}\right)} \cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{2}{3}, J\right) \\ &\quad + \left(i \mp (2 + \sqrt{3})\right) \cdot \frac{\Pi(0) \cdot \Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right) \cdot \Pi\left(-\frac{5}{12}\right)} \cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{2}, 1 - J\right) \\ z_2 &= \frac{1}{\sqrt[12]{J}} \cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \frac{1}{J}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt[12]{J-1}} \cdot F\left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, 1, \frac{1}{1-J}\right) \end{aligned} \right.$$

[12]) [Bei dem Wiederabdruck wurden im folgenden zwecks Richtigstellung kleine Veränderungen vorgenommen. B.-H.]

$$\left|\begin{array}{l} z_2 = \pm i\sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\Pi(0)\cdot\Pi\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{7}{12}\right)}\cdot F\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{2}{3},J\right) \\ \qquad + (1\mp(2+\sqrt{3})\,i)\cdot\dfrac{\Pi(0)\cdot\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{1}{12}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{5}{12}\right)}\cdot F\left(\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{2},1-J\right). \end{array}\right.$$

Um jetzt ω_1, ω_2 selbst zu berechnen, setze man $\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_1 = Mz_1$, $\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2 = Mz_2$, wo M einen Multiplikator bedeutet, und findet zunächst:

$$\omega_1\frac{d\omega_2}{dJ} - \omega_2\frac{d\omega_1}{dJ} = \frac{-iM^2}{2\pi\sqrt[6]{\Delta}}J^{-\frac{2}{3}}(J-1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nun ist aber nach dem Früheren

$$\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_1 = 4iK'\sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa'}{4}},\qquad \sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2 = 4K\sqrt[3]{\frac{\varkappa\varkappa'}{4}}$$

und man hat die Formel der Fundamenta [vgl. Jacobi, Ges. Werke, Bd. 1, S. 129 unten]:

$$iK'\cdot\frac{dK}{d(\varkappa^2)} - K\frac{d(iK')}{d(\varkappa^2)} = \frac{i\pi}{4\varkappa^2(1-\varkappa^2)}.$$

Der Vergleich ergibt nach kurzer Zwischenrechnung:

$$M = \frac{2\pi}{\sqrt{2\sqrt{3}}},$$

und also haben wir für ω_1, ω_2 allgemein folgende Darstellung:

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} \omega_1 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\cdot\dfrac{z_1}{\sqrt[12]{\Delta}}, \\ \omega_2 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\cdot\dfrac{z_2}{\sqrt[12]{\Delta}}. \end{array}\right.$$

Ist also ein elliptisches Integral $\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ vorgelegt, so bedarf man zur Berechnung der Perioden ω_1, ω_2 durchaus nicht der Auflösung der Gleichung $f=0$, wie man gewöhnlich annimmt, indem man die Perioden durch die zwischen den Verzweigungspunkten genommenen Integrale definiert. Sondern es genügt, aus den Koeffizienten von f die rationalen Invarianten zu berechnen und ihre Werte in (24), (25) einzutragen.

Der erste, der dieses Resultat abgeleitet hat, scheint Herr Bruns zu sein[13]). Ich glaubte es hier von mir aus entwickeln zu sollen, weil es für

[13]) Dorpater Festschrift: *Über die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.* 1875 [abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 27 (1886), S. 234—252]. Herr Bruns beschränkt sich auf die Betrachtung des Integrals

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

und gibt den hypergeometrischen Reihen eine etwas andere Form.

das folgende durchaus wesentlich ist, die Beziehung zwischen den Perioden ω_1, ω_2 und den Invarianten g_2, g_3, Δ als eine direkte zu betrachten, zu deren Herstellung man der Vermittlung von $\sigma=\varkappa^2$ nicht bedarf, und habe eben deshalb auch die fertigen, bei der Berechnung unmittelbar brauchbaren Formeln hergesetzt.

Abschnitt II.

Die Gleichungen zwischen den Invarianten bei Transformation der elliptischen Funktionen. Auflösung der Jacobischen Gleichungen sechsten Grades mit $A=0$.

§ 1.

Gleichungen, welche einen Parameter enthalten.

Es sei

$$\varphi(s;z)=0$$

eine Gleichung, in der s die Unbekannte, z einen veränderlichen Parameter bedeuten soll. So konstruiere man über der Ebene, welche die komplexen Werte von z repräsentiert, die zu s gehörige Riemannsche Fläche. Dieselbe hat eine doppelte Eigenschaft, welche sie geeignet erscheinen läßt, als gemeinsames Charakteristikum aller Gleichungen zu dienen, die aus $\varphi=0$ durch Tschirnhausen-Transformation entstehen. Erstlich nämlich bleibt sie ungeändert, wenn man statt s eine rationale Funktion s' von s und z als neue Unbekannte einführt; zweitens gilt auch der umgekehrte Satz, daß s' in s und z rational ist, wenn s' in bezug auf z dieselbe Riemannsche Fläche besitzt wie s.

Handelt es sich also darum, eine Gleichung, die den Parameter z enthalten soll, in einfachster Weise aufzustellen, so studiere man zunächst die zu ihr gehörige über der z-Ebene konstruierte Riemannsche Fläche. *Dann führe man als Unbekannte die einfachste algebraische Funktion ein, welche in dieser Riemannschen Fläche existiert.*

Diese Forderung einer einfachsten Funktion wird, sobald das Geschlecht p der Riemannschen Fläche größer als Null ist, einer Definition bedürfen und je nach dem Zwecke, den man verfolgt, verschieden ausfallen. Ist aber $p=0$ — und das ist der Fall bei allen im folgenden explizite behandelten Gleichungen — so kann kein Zweifel sein, daß man als einfachste Funktion diejenige zu betrachten hat, durch die sich alle anderen rational ausdrücken. Diese Funktion, die weiterhin τ genannt werden soll, ist, von linearen Substitutionen $\left(\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ abgesehen, völlig bestimmt. Durch ihre Einführung gewinnt die Gleichung folgende Gestalt:

$$z = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}, \tag{1}$$

wo φ, ψ zwei ganze rationale Funktionen sind, und die vielfachen Wurzeln, welche die Gleichung

$$z \cdot \psi(\tau) - \varphi(\tau) = 0$$

bei veränderlichem z aufweist, entsprechen genau den Verzweigungspunkten, welche die Riemannsche Fläche besitzt.

§ 2.

Gleichungen, welche sich durch elliptische Modulfunktionen lösen lassen.

Der Parameter, welcher soeben z genannt wurde, soll jetzt die absolute Invariante eines elliptischen Integrals sein und demnach mit J bezeichnet werden. So frage man: *Wie muß s als Funktion von J verzweigt sein, wenn sich die Gleichung*

$$\varphi(s, J) = 0$$

durch elliptische Modulfunktionen soll lösen lassen? Ich meine, die Gleichung soll sich in der Weise lösen lassen, daß man aus J das Periodenverhältnis ω berechnet und man nun eindeutige in der ganzen positiven Halbebene ω definierte Funktionen von ω hat, welche die Wurzeln von $\varphi = 0$ repräsentieren.

Dazu ist nötig und hinreichend, daß sich die einzelne Wurzel s, als Funktion von ω aufgefaßt, innerhalb der positiven Halbebene ω nicht verzweigt.

Daher hat man unmittelbar mit Rücksicht auf Abschnitt I den Satz: *Verzweigungsstellen dürfen in der Riemannschen Fläche, welche s als Funktion von J darstellt, nur bei $J = 0, 1, \infty$ liegen. Bei $J = 0$ können beliebig oft drei Blätter zusammenhängen, bei $J = 1$ beliebig oft zwei Blätter. Bei $J = \infty$ kann die Verzweigung irgendwelche sein*[14]).

Suchen wir insbesondere Gleichungen vom Geschlechte Null und setzen sie in die Form (1):

$$J = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

so darf φ neben einfachen Faktoren nur dreifache, $\varphi - \psi$ neben einfachen

[14]) Genau ebenso bestimmt man alle transzendenten Funktionen von J, welche sich durch Modulfunktionen eindeutig darstellen lassen. Zugleich erledigt man das Problem: *Alle Untergruppen aufzustellen, welche in der Gesamtheit der* [*ganzzahligen*] *Substitutionen*

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

enthalten sind. [Vgl. die Darstellung in den „Modulfunktionen", Bd. 1, Abschnitt II, insbesondere Kap. 6.]

Faktoren nur doppelte, ψ Faktoren beliebiger Multiplizität enthalten. Aber keine Gleichung $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$, die von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\varphi - \psi = 0$ verschieden ist, darf mehrfache Wurzeln besitzen.

Zu diesen Gleichungen gehören z. B. die Gleichungen (9) und (16) des vorigen Abschnitts. Es gehören aber auch dazu, wie ich beiläufig anführe, zwei der drei Gleichungen, die ich Math. Annalen, Bd. 12 (1877), S. 175/176 [= Abh. LIII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 316/17] aufstellte. Diese Gleichungen sind deshalb bemerkenswert, weil sie mit dem Transformationsproblem der elliptischen Funktionen nichts zu tun haben, und also ein erstes ausgerechnetes Beispiel abgeben für die allgemeineren in diesem Paragraphen gemeinten durch elliptische Modulfunktionen lösbaren Gleichungen.

§ 3.

Die Gleichungen zwischen J' und J.

Ich lasse nunmehr die Beschränkung auf das Transformationsproblem der elliptischen Funktionen eintreten. J und J' seien die absoluten Invarianten zweier elliptischer Integrale, die durch Transformation n-ter Ordnung auseinander hervorgehen, wo n eine Primzahl sein mag. Um die Gleichung $(n+1)$-ten Grades aufzustellen, welche J' mit J verknüpft, studiere ich nach § 1 zunächst die Verzweigung von J' in bezug auf J.

Bekanntlich sucht man gewöhnlich nicht die Gleichungen zwischen J und J', sondern die Gleichungen zwischen den Doppelverhältnissen (Modulquadraten) $\varkappa^2, \lambda^2$ oder die zwischen den achten aus ihnen gezogenen Wurzeln $u = \sqrt[4]{\varkappa}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$. Ich werde weiter unten (§ 1 des vierten Abschnittes) einige auf diese *Modulargleichungen* bezügliche Bemerkungen machen. Hier sei nur erwähnt, daß die Verzweigung, welche z. B. v in bezug auf u aufweist, sehr viel komplizierter ist, als die von J' in bezug auf J.

Die Gleichungen zwischen J' und J sind zuerst von Felix Müller in seiner 1867 erschienenen Dissertation im Anschluß an Weierstrass' Vorlesungen behandelt worden[15]). Er geht von dem Studium der doppeltperiodischen Funktionen aus [indem er die Summe geeigneter $\wp$-Teilwerte als Hilfsgröße benutzt] und gelangt für $n = 2, 3, 4, 5, 7$ zu fertigen Gleichungen. Es hat dann 1874 Brioschi die Frage von algebraischer Seite in Angriff genommen, indem er die Transformation des elliptischen Integrals direkt in Betracht zog[16]). Die folgende Herleitung der Trans-

[15]) *De transformatione functionum ellipticarum*, Berlin, 1867. Vgl. auch die spätere Veröffentlichung: *Über die Transformation vierten Grades der elliptischen Funktionen*, Berlin, Programm der Königl. Realschule, 1872.

[16]) *Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques*, Comptes Rendus 79, S. 1065 (1874), und 80, S. 261 (1875). [= Opere matematiche, No. XLIX, tomo 1., S. 321 ff.]

formationsgleichungen für $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$ unterscheidet sich wesentlich dadurch, daß nur von den Variabeln J und ω, nicht aber von der Integrationsvariablen des elliptischen Integrals oder von diesem Integrale selbst Gebrauch gemacht wird[17]). Und selbst die Variable ω tritt nur in die *Betrachtung* ein, vermöge deren die Verzweigung von J' in bezug auf J erschlossen wird, nicht aber in die *Rechnung*.

§ 4.

Verzweigung von J' in bezug auf J.

Ich will, des einfacheren Ausdrucks wegen, die Primzahl n im folgenden größer als 3 voraussetzen. Ich denke mir ferner J' so berechnet, daß man irgendeinen zu J gehörigen Wert von ω herausgreift und nun ω' der Reihe nach gleichsetzt:

$$(2) \qquad \frac{\omega}{n}, \quad \frac{\omega+1}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{\omega+(n-1)}{n}, \quad -\frac{1}{n\omega}.$$

Dem Früheren zufolge kann eine Verzweigung von J' in bezug auf J nur bei $J = 0, 1, \infty$ statthaben.

Bei $J = 0$ hängen die Blätter der (unendlich-blättrigen) Riemannschen Fläche, welche ω als Funktion von J darstellt, nach § 7 des ersten Abschnittes zu drei und drei zusammen. Dies ist also, allgemein zu reden, auch bei der Riemannschen Fläche der Fall, welche J' darstellt, insofern J' eine eindeutige Funktion von ω ist. Ausgenommen ist nur, wenn an einer solchen Stelle auch $J' = 0$ ist. Dann ist das betr. Blatt der Fläche J' an der Stelle $J = 0$ gar nicht verzweigt.

Jetzt ist für $J = 0$ ein Wert von ω gleich $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \varrho$. Das entsprechende J' ist somit aus folgenden Werten von ω' zu berechnen:

$$\omega' = \frac{\varrho}{n}, \quad \frac{\varrho+1}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{\varrho+(n-1)}{n}, \quad -\frac{1}{n\varrho}$$

und es entsteht die Frage, ob unter diesen Werten einige sind, welche mit ϱ äquivalent sind, und für die also auch $J' = 0$ ist?

Man hat also den Ansatz:

$$(3) \qquad \frac{\varrho+\varkappa}{n} = \frac{\alpha\varrho+\beta}{\gamma\varrho+\delta},$$

wo $\varkappa$ eine der Zahlen $0, 1, \ldots (n-1)$ bedeutet und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgendwelche ganze Zahlen sind, die $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ergeben. Dies erweist sich als möglich und zwar zweimal als möglich, wenn n sich in komplexe Faktoren der Form
$$(\gamma\varrho+\delta)(\gamma'\varrho+\delta')$$

[17]) Etwas Ähnliches scheint Herr Dedekind zu beabsichtigen; vgl. den Schlußparagraphen seiner Arbeit.

zerlegen läßt, d. h. also, da $n > 3$ angenommen wurde, wenn n von der Gestalt $6\mu + 1$ ist $\cdot$ [$-\frac{1}{n\varrho}$ ist nie mit ϱ äquivalent].

Daher haben wir den Satz:

Ist $n = 6\mu + 5$, so hängen bei $J = 0$ die $(n+1)$ Blätter der auf J' bezüglichen Riemannschen Fläche zu drei und drei zyklisch zusammen. Für $n = 6\mu + 1$ dagegen verlaufen bei $J = 0$ zwei Blätter isoliert und nur die übrigen $(n-1)$ ordnen sich zu drei und drei in Zyklen.

Genau so erschließt man die Verzweigung bei $J = 1$. Dann ist ein zu J gehöriger Wert von ω gleich i, und es fragt sich, ob sich unter den zugehörigen Werten von ω' solche befinden, die mit i äquivalent sind. Man findet, daß es zwei solche Werte gibt, wenn $n = 4\mu + 1$ ist, daß es aber keinen solchen Wert gibt für $n = 4\mu + 3$. Daher:

Bei $J = 1$ hängen für $n = 4\mu + 3$ alle Blätter paarweise zusammen; ist aber $n = 4\mu + 1$, so bleiben zwei Blätter isoliert und nur die übrigen verzweigen sich zu zwei und zwei.

Betrachten wir endlich den Wert $J = \infty$. Ich behaupte:

Die $(n+1)$ zugehörigen Werte von J' sind ebenfalls unendlich. Aber nur n der betr. Blätter hängen in einem Zyklus zusammen, ein Blatt verläuft isoliert.

Denn nehmen wir etwa, $J = \infty$ entsprechend, $\omega = i\infty$, d. h. gleich einer sehr großen rein imaginären Zahl. Dann werden unter den Werten (2) von ω' die n ersten:

$$\frac{\omega}{n}, \quad \frac{\omega+1}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{\omega+(n-1)}{n}$$

ebenfalls gleich $i\infty$, der letzte:

$$-\frac{1}{n\omega}$$

gleich Null. Die zugehörigen J' sind also gewiß alle unendlich. Jetzt lassen wir $i\infty$ allmählich um *reelle* Inkremente wachsen, bis es $i\infty + 1$ geworden ist. Dann vertauschen sich die n ersten Repräsentanten zyklisch, da

$$\frac{\omega+n}{n} \quad \text{mit} \quad \frac{\omega}{n}$$

äquivalent ist. Der letzte Repräsentant aber ist mit seinem eigenen Anfangswerte äquivalent geworden.

§ 5.

Vertauschung von J und J'.

Selbstverständlich ist J in bezug auf J' gerade so verzweigt, wie J' in bezug auf J. Wir erhalten also dieselbe Riemannsche Fläche in doppelter Bedeutung, oder, anders ausgedrückt: *Es gibt eine eindeutige Transformation der Riemannschen Fläche in sich, welche der Vertauschung von J und J' entspricht.*

Diese eindeutige Transformation hat notwendig die Periode *Zwei*, weil eine zweimalige Vertauschung den ursprünglichen Zustand wieder herstellt. Nun entsprechen $J = \infty$, wie wir soeben sahen, nur *zwei* Punkte der Riemannschen Fläche, und für diese war auch J' gleich ∞. Ich behaupte zunächst:

Bei der in Rede stehenden eindeutigen Transformation werden diese beiden Punkte miteinander vertauscht.

Man sieht dies sofort, wenn man wieder, wie es eben geschah, $\omega = i\infty$ setzt und um reelle Inkremente wachsen läßt. So geht

$$\omega' = -\frac{1}{n\,\omega}$$

bereits in einen mit seinem anfänglichen Werte äquivalenten Wert über, wenn ω um $\frac{1}{n}$ zugenommen hat, so daß es n-mal einen äquivalenten Wert angenommen hat, wenn ω zum ersten Male mit seinem Anfangswerte äquivalent geworden ist. Für die anderen n Repräsentanten ω' gilt das Umgekehrte; sie werden mit ihrem ursprünglichen Werte zum ersten Male äquivalent, wenn ω dies bereits n-mal getan hat. —

Beachten wir ferner solche, nach dem vorigen Paragraphen möglicherweise paarweise vorhandene Stellen, in denen J und J' gleichzeitig Null oder gleichzeitig Eins sind, und die sich dadurch auf der Riemannschen Fläche kenntlich machen, daß bei $J = 0$ resp. bei $J = 1$ zwei Blätter isoliert verlaufen. Offenbar ändern diese Stellen bei Vertauschung von J und J' ihren Charakter nicht; *sie bleiben also bei der betr. eindeutigen Transformation entweder einzeln erhalten oder vertauschen sich wechselweise.* Welches von beiden eintritt, mag hier unentschieden bleiben.

§ 6.

Das Geschlecht der Transformationsgleichung.

Um das Geschlecht der Gleichung zwischen J und J' zu berechnen, unterscheide man jetzt n nach dem Modul 12. In der folgenden Tabelle ist angegeben, wie oft bei $J = 0$, $J = 1$, $J = \infty$ eine Anzahl von μ Blättern im Zyklus zusammenhängen. Also z. B. $4\nu \cdot 3 + 2 \cdot 1$ heißt, daß 4ν-mal je 3 Blätter zusammenhängen und außerdem zweimal je ein Blatt isoliert verläuft.

	$J = 0$	$J = 1$	$J = \infty$
$n = 12\nu + 1$	$4\nu \cdot 3 + 2 \cdot 1$	$6\nu \cdot 2 + 2 \cdot 1$	$1 \cdot (12\nu + 1) + 1 \cdot 1$
$n = 12\nu + 5$	$(4\nu + 2) \cdot 3$	$(6\nu + 2) \cdot 2 + 2 \cdot 1$	$1 \cdot (12\nu + 5) + 1 \cdot 1$
$n = 12\nu + 7$	$(4\nu + 2) \cdot 3 + 2 \cdot 1$	$(6\nu + 4) \cdot 2$	$1 \cdot (12\nu + 7) + 1 \cdot 1$
$n = 12\nu + 11$	$(4\nu + 4) \cdot 3$	$(6\nu + 6) \cdot 2$	$1 \cdot (12\nu + 11) + 1 \cdot 1$

Nun hat man die bekannte Regel

$$p = -n + \sum \frac{\nu - 1}{2},$$

wo n die um Eins verminderte Blätterzahl, ν die Zahl der im einzelnen Verzweigungspunkte zyklisch verbundenen Blätter ist. Daher kommt in den vier Fällen:

$$p = \nu - 1,\ \nu,\ \nu,\ \nu + 1. \tag{4}$$

Das Geschlecht ist also gleich Null für $n = 5, 7, 13$. *Für* $n = 11, 17, 19$ *wird es gleich Eins usw.*

Die Fälle $n = 2, 3$ blieben im Vorangehenden ausgeschlossen; wir werden weiterhin sehen, daß auch bei ihnen das Geschlecht gleich Null ist.

§ 7.

Das Fundamentalpolygon.

Nachdem bekannt ist, welche Verzweigungsstellen J' in bezug auf J aufweist, handelt es sich darum, zu entscheiden, wie die verschiedenen Verzweigungspunkte aufeinander bezogen sind (wie sie durch Verzweigungsschnitte zu verbinden sind). Um hierüber Klarheit zu bekommen, betrachte ich in der ω-Ebene ein Polygon, welches aus $(n + 1)$ nebeneinander liegenden Elementarvierecken besteht (Abschnitt I, § 7) und das ich wegen seiner Wichtigkeit für die Transformationstheorie das *Fundamentalpolygon* nenne[18]). Man wende nämlich auf das Elementarviereck der Fig. 8 die $(n + 1)$ Substitutionen an:

$$\omega' = \omega, \quad \omega \pm 1, \quad \ldots, \quad \omega \pm \left(\frac{n-1}{2}\right), \quad -\frac{1}{\omega}.$$

[18]) [Ich hätte schon bei meinen früheren algebraischen Arbeiten die Fundamentalpolygone heranziehen können, z. B. um die Resolventen des Ikosaeders zu definieren. Doch lagen dort die Verhältnisse noch so einfach, daß ich damals noch nicht auf ihre Benutzung verfiel. K.]

[Neuerdings hat, wie schon in den Vorbemerkungen erwähnt, R. Fricke die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen wesentlich dadurch gefördert, daß er das *Fundamentalpolygon* in geeigneter Weise in zwei Hälften zerlegt, die er „*Klassenpolygone*"

貴重書

So entsteht eine Figur, welche z. B. für $n = 5$, $n = 7$, $n = 13$ bzw. durch die unten auf S. 38—40 folgenden Figuren 9, 11, 13 wiedergegeben ist.

Man lasse jetzt ω das Polygon durchlaufen, setze $\omega' = \frac{\omega}{n}$ und betrachte die zugehörigen J und J'. So entsteht offenbar, wenn wir von den Randpunkten des Polygons absehen, jede mögliche Kombination J und J' *einmal*. Die Randpunkte aber müssen, allgemein zu reden, paarweise zusammengehören, so, daß zwei zusammengehörige Randpunkte *dasselbe* J und *dasselbe* J' liefern.

Heftet man jetzt die Ränder des Fundamentalpolygons in zweckentsprechender Weise zusammen, so entsteht eine geschlossene Fläche, deren einzelner Punkt ausnahmslos eindeutig der einzelnen Kombination J, J' zugeordnet ist. Mit anderen Worten: *dies ist eben die Riemannsche Fläche, welche wir suchen; nur ist sie, statt* $(n+1)$*-blättrig über der* J*-Ebene ausgebreitet zu sein, frei im Raume gelegen gedacht.* Den Halbebenen J entsprechend zerfallen die $(n+1)$ Blätter der ursprünglichen Riemannschen Fläche in $2(n+1)$ Halbblätter; dem entspricht hier, daß unser Fundamentalpolygon und also unsere neue Fläche in $2(n+1)$ abwechselnd schraffierte und nicht schraffierte Dreiecke zerlegt ist. Wo die ursprüngliche Fläche Verzweigungspunkte besitzt, da stoßen auf der neuen Fläche eine größere (notwendig *gerade*) Zahl von Dreiecken zusammen. Und statt zu überlegen, wie die Verzweigungspunkte durch Verzweigungsschnitte zu verbinden waren, beachten wir hier die Aufeinanderfolge der Dreiecke.

Die Benutzung solcher im Raume gelegener Flächen, welche, statt mehrblättrig zu sein, in Gebiete zerlegt sind, scheint in vielen Fällen äußerst zweckmäßig, wie ich in Ergänzung einer analogen Bemerkung des § 6 (Abschn. I) ausdrücklich hervorheben möchte. Die Regel, vermöge deren man das Geschlecht der Fläche aus Blätterzahl und Verzweigungspunkten berechnet, verwandelt sich für sie in den sogenannten verallgemeinerten Eulerschen Polyedersatz:

$$e + s = k - 2p + 2; \tag{5}$$

die Zahl der Ecken (e), vermehrt um die Zahl der Seitenflächen (s), ist gleich der Zahl der Kanten (k) vermindert um $(2p - 2)$.

nennt. Das Fundamentalpolygon geht nämlich, dem § 5 entsprechend, (bis auf sogenannte „erlaubte Abänderungen") durch die lineare Transformation der Determinante n: $\omega' = -\frac{n}{\omega}$, die der Vertauschung von J und J' entspricht, in sich über, und das Klassenpolygon ist eben der Fundamentalbereich der durch diese Transformation erweiterten ω-Gruppe mit $\beta \equiv 0 \pmod{n}$ (vgl. § 8 in diesem Abschnitt der vorliegenden Arbeit). Das Klassenpolygon hat nun für zahlreiche Transformationsgrade noch das Geschlecht Null, für die das Fundamentalpolygon bereits höheres Geschlecht hat, und erleichtert daher in diesen Fällen die funktionentheoretischen Ansätze. (Vgl. unten, S. 167/168). Der Name „*Klassenpolygon*" rührt davon her, daß die Stücke einer Begrenzung (elliptische Ecken und Symmetriekreise) in engstem Zusammenhange mit den Klassen der binären quadratischen Formen der Determinanten $-n$ bzw. $-4n$ und n bzw. $4n$ stehen, wie überhaupt es zahlreiche Beziehungen zur Arithmetik zu haben scheint. Näheres siehe in R. Fricke, *Über Transformations- und Klassenpolygone*, Göttinger Nachr. 1919, und namentlich im zweiten Bande des in den Vorbemerkungen genannten Lehrbuchs der elliptischen Funktionen von R. Fricke (1921). Übrigens trat das Klassenpolygon schon an verschiedenen Stellen der „Modulfunktionen" und in einer gleichzeitigen Arbeit von Fricke in den Math. Annalen, Bd. 40 (1892) auf, jedoch, ohne daß es als besonderes Gebilde aufgefaßt und mit einem eigenen Namen belegt wurde. Siehe insbes. „Modulfunktionen", Bd. 2, S. 170 ff., 189.]

§ 8.

Zusammengehörigkeit der Kanten des Fundamentalpolygons.

Die Zusammengehörigkeit der Kanten des Fundamentalpolygons ist im einzelnen Falle sehr einfach anzugeben. Zusammengehörige Randpunkte müssen dasselbe J und dasselbe J' besitzen; es müssen also die zugehörigen ω sowohl, als die zugehörigen $\frac{\omega}{n}$ äquivalent sein. Nun sieht man sofort, daß eine Substitution

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

dann und nur dann ein $\frac{\omega'}{n}$ ergibt, das mit $\frac{\omega}{n}$ äquivalent ist, *wenn* β *durch* n *teilbar ist.* Man suche also unter den Substitutionen, deren β durch n teilbar ist, diejenigen aus, welche aus einer Kante des Fundamentalpolygons eine andere machen: die beiden Kanten sind dann auf der Riemannschen Fläche zu vereinigen.

Ich bemerke, daß sich unter diesen Substitutionen immer zwei *parabolische* befinden, nämlich:

$$\omega' = \omega + n, \quad \omega' = \frac{\omega}{\omega + 1}.$$

Es findet sich ferner jedesmal ein Paar elliptischer Substitutionen, sobald für $J = 0$ oder $J = 1$ zwei Blätter der Fläche J' isoliert verlaufen. Der Rest wird von *hyperbolischen* Substitutionen gebildet[19]).

[19]) [Für ungerades primzahliges n lautet die vollständige Zusammenordnungsvorschrift der Kanten folgendermaßen. Es werden verbunden

1. die Kanten $\omega = -\frac{n}{2} + ti$ und $\omega = \frac{n}{2} + ti$, wo t reell und $\geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$, durch die parabolische Substitution
$$\omega' = \omega + n,$$
2. die Kanten $\omega = -1 + e^{i\varphi}$ und $\omega = 1 - e^{-i\varphi}$, wo $0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$, durch die parabolische Substitution
$$\omega' = \frac{\omega}{\omega + 1},$$

貴重書

Ich werde dies jetzt in den nächstfolgenden Paragraphen für diejenigen Fälle, welche $p=0$ ergeben, also $n=5,\ 7,\ 13$ näher ausführen. Die Riemannsche Fläche kann dann in eine Ebene ausgebreitet und also ihre Einteilung in Gebiete unmittelbar durch Zeichnung veranschaulicht werden.

§ 9.
Die Riemannsche Fläche für $n=5$.

Ich setze jetzt das bereits oben beschriebene Fundamentalpolygon für $n=5$ her:

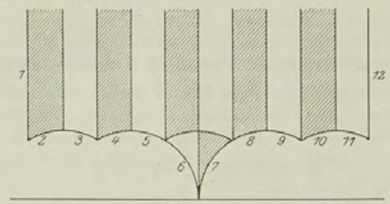


Fig. 9.

Die nebengeschriebenen Zahlen dienen zur genauen Bezeichnung der Kanten. So hat man folgende Substitutionen:

1. Die parabolischen Substitutionen

$$(6)\qquad \begin{cases} \omega' = \omega + 5, \\ \omega' = \dfrac{\omega}{\omega+1}. \end{cases}$$

Die erstere vereinigt die Kanten 1 mit 12, die andere 4, 5, 6 mit 9, 8, 7.

3. die Kanten $\omega = k + e^{i\varphi}$ und $\omega' = k' - e^{-i\varphi}$, wo k eine ganze Zahl zwischen $-\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ ausschließlich der Null und k' die dem gleichen Intervall angehörige Lösung der Kongruenz
$$k \cdot k' + 1 \equiv 0 \pmod n$$
bedeutet, während φ auf das Intervall $\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{2\pi}{3}$ beschränkt ist, durch die Substitution
$$\omega' = \frac{k'\omega - (1+kk')}{\omega - k}.$$

Eine Substitution 3. ist dann und nur dann elliptisch, wenn ihr $\alpha+\delta$, also $k'-k$, gleich Null oder ± 1 wird, d. h. wenn k einer der Kongruenzen genügt
$$k^2 + 1 \equiv 0 \pmod n \quad \text{oder} \quad k^2 \pm k + 1 \equiv 0 \pmod n.$$
Das sind genau die im Text aufgezählten Fälle. Sie ist dann und nur dann parabolisch, wenn $k'-k = \pm 2$, d. h.
$$k^2 \pm 2k + 1 = (k \pm 1)^2 \equiv 0 \pmod n$$
ist. Das führt auf die bereits unter 2. und im Texte genannte Substitution $\omega' = \frac{\omega}{\omega+1}$. In allen anderen Fällen ist $|k'-k| > 2$, d. h. die Substitution hyperbolisch. w. z. b. w. B.-H.]

2. Die elliptischen Substitutionen von der Periode Zwei:

$$(7)\qquad \omega' = \frac{2\omega - 5}{\omega - 2}, \quad \omega' = -\frac{2\omega + 5}{\omega + 2}.$$

Die erstere vereinigt 10 und 11, die zweite 2 und 3.

Wir erhalten daher folgende Figur für die Einteilung der Riemannschen Fläche in Gebiete:

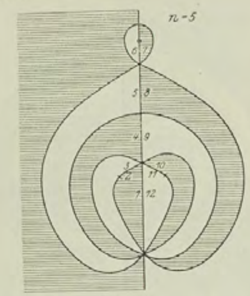


Fig. 10.

Es versteht sich, daß die Gestalt der Gebiete nur schematisch gemeint ist. — Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 12 weisen auf, wo in der Figur die ebenso numerierten Kanten des Fundamentalpolygons zu suchen sind.

§ 10.
Die Riemannsche Fläche für $n=7$.

Man hat das Fundamentalpolygon:

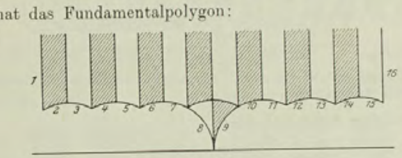


Fig. 11.

dann ferner die Substitutionen:

1. Parabolische:

$$(8)\qquad \begin{cases} \omega' = \omega + 7, & \text{vereinigt 1 und 16.} \\ \omega' = \dfrac{\omega}{\omega+1}, & \text{vereinigt 6, 7, 8 mit 11, 10, 9.} \end{cases}$$

貴重書

2. Elliptische von der Periode Drei:

$$(9)\quad \begin{cases} \omega' = \dfrac{2\omega - 7}{\omega - 3}, \text{ vereinigt } 12,\ 13 \text{ mit } 15,\ 14, \\[2mm] \omega' = -\dfrac{2\omega + 7}{\omega + 3}, \text{ vereinigt } 2,\ 3 \text{ mit } 5,\ 4. \end{cases}$$

So kommt die Figur:

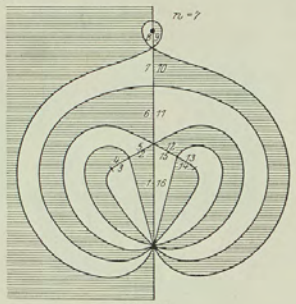


Fig. 12.

§ 11.

Die Riemannsche Fläche für $n = 13$.

Das Fundamentalpolygon hat folgende Gestalt:

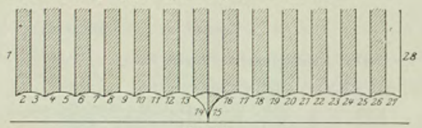


Fig. 13.

Die zugehörigen Substitutionen sind:

1. Parabolische Substitutionen:

$$(10)\quad \begin{cases} \omega' = \omega + 13 \ \text{(vereinigt 1 und 28)}, \\[2mm] \omega' = \dfrac{\omega}{\omega + 1} \quad \text{(vereinigt 12, 13, 14 mit 17, 16, 15)}. \end{cases}$$

2. Elliptische Substitutionen von der Periode Zwei:

$$(11)\quad \begin{cases} \omega' = \dfrac{5\omega - 26}{\omega - 5}, \text{ vereinigt 24 und 25}, \\[2mm] \omega' = -\dfrac{5\omega + 26}{\omega + 5}, \text{ vereinigt 4 und 5}. \end{cases}$$

3. Elliptische Substitutionen von der Periode Drei:

$$(12)\quad \begin{cases} \omega' = \dfrac{3\omega - 13}{\omega - 4}, \text{ vereinigt } 20,\ 21 \text{ mit } 23,\ 22, \\[2mm] \omega' = -\dfrac{3\omega + 13}{\omega + 4}, \text{ vereinigt } 6,\ 7 \text{ mit } 9,\ 8. \end{cases}$$

4. Hyperbolische Substitutionen:

$$(13)\quad \begin{cases} \omega' = \dfrac{6\omega - 13}{\omega - 2}, \text{ vereinigt } 18,\ 19 \text{ mit } 27,\ 26, \\[2mm] \omega' = -\dfrac{6\omega + 13}{\omega + 2}, \text{ vereinigt } 2,\ 3 \text{ mit } 11,\ 10. \end{cases}$$

Die Figur wird also diese:

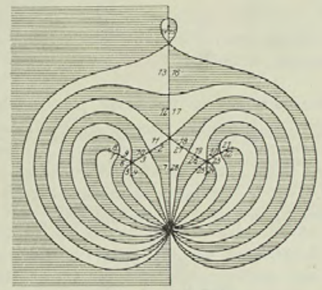


Fig. 14.

§ 12.

Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.

Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$, welche bei den vorangehenden Erörterungen ausgeschlossen blieben, behandelt man am besten direkt. Die Fundamentalpolygone sind:

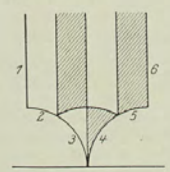


Fig. 15a.

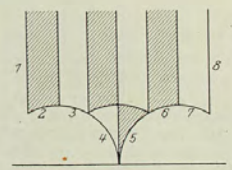


Fig. 15b.

und beidemal genügen die beiden parabolischen Substitutionen:

$$\omega' = \omega + n, \quad \omega' = \frac{\omega}{\omega + 1}, \tag{14}$$

um die Kanten zu vereinigen. So entstehen folgende Figuren:

Fig. 16a.

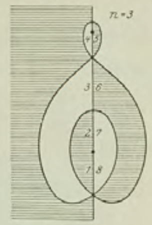


Fig. 16b.

Man sieht: Beidemal ist das Geschlecht $p = 0$. Bei $n = 2$ hängen von den 3 Blättern bei $J = 0$ alle, bei $J = 1$ zwei, bei $J = \infty$ wieder zwei im Zyklus zusammen. Bei $n = 3$ hat man 4 Blätter. Drei derselben sind bei $J = \infty$ zu einem Zyklus vereinigt, während eines isoliert bleibt; ebenso bei $J = 0$. Bei $J = 1$ teilen sich die 4 Blätter in 2 Paare, die Blätter jedes Paares hängen zyklisch zusammen.

§ 13.

Der Fall $n = 4$.

Mit Rücksicht auf die spätere Vollständigkeit betrachte ich noch den einen Fall einer Primzahlpotenz, $n = 4$. Als „Repräsentanten“ kann man bei ihm folgende sechs Ausdrücke betrachten:

$$\frac{\omega}{4}, \quad \frac{\omega+1}{4}, \quad \frac{\omega+2}{4}, \quad \frac{\omega+3}{4}, \quad \frac{-1}{4\omega}, \quad \frac{2\omega-1}{4\omega}. \tag{15}$$

Demnach erhält man folgende Gestalt des Fundamentalpolygons:

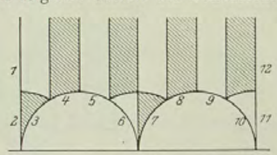


Fig. 17.

und also nachstehende Riemannsche Fläche:

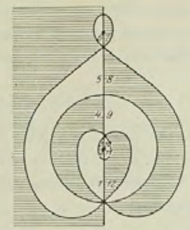


Fig. 18.

Wiederum ist $p = 0$. Bei $J = \infty$ hängen 4 Blätter zyklisch zusammen, während 2 isoliert verlaufen. Bei $J = 0$ verzweigen sich die 6 Blätter zweimal zu Drei und Drei, bei $J = 1$ dreimal zu Zwei und Zwei.

§ 14.

Aufstellung der Transformationsgleichungen.

Nach den in § 1, 2 dieses Abschnittes erläuterten Prinzipien werde ich jetzt in den Fällen $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$ die Gleichungen zwischen J und J' in der Weise aufstellen, daß ich beide durch diejenige Variable τ rational darstelle, welche in der Riemannschen Fläche jeden Wert nur einmal annimmt. Dabei gebrauche ich, wie ausdrücklich bemerkt sei, *nur* die Lage und Multiplizität der Verzweigungspunkte von J' in bezug auf J, sowie die Erläuterungen des § 5, also nicht die in den letzten Paragraphen gegebenen Figuren, welche man übrigens als in der Ebene τ gelegen denken mag[20]). Diese Figuren sollen also nicht das Mittel sein, um die Relation zwischen J und τ aufzustellen, sondern nur das Mittel, sie vollinhaltlich zu verstehen. Außerdem werde ich sie noch im folgenden dritten Abschnitte verwenden.

Beginnen wir etwa mit dem Beispiele $n = 7$. Wir setzen

$$J = \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)},$$

wo φ, ψ ganze Funktionen achten Grades von τ sind. Nach § 4 soll vor allen Dingen ψ aus einem einfachen und einem siebenfachen Faktor bestehen. Wählen wir also τ so, daß der einfache Faktor für $\tau = 0$, der

[20]) [Daß die Kenntnis der Lage und Multiplizität der Verzweigungspunkte zur Aufstellung der Gleichungen ausreicht, hat eben darin seinen Grund, daß in den in Frage kommenden Fällen die Verbindung der Blätter durch die Multiplizität der Verzweigungspunkte allein *eindeutig* bestimmt wird. Bei komplizierteren Beispielen ist dies nicht mehr der Fall. Vgl. § 5 der folgenden Abh. LXXXIII, S. 86. B.-H.]

siebenfache für $\tau = \infty$ verschwindet, so ist $\psi = c\tau$ zu nehmen, wo c eine unbekannte Konstante ist. Nach § 4 soll ferner der Zähler φ zwei einfache und zwei dreifache Faktoren haben; ich kann ihn also in der Form ansetzen:

$$\varphi = (\tau^2 + \alpha\tau + \beta)(\tau^2 + A\tau + B)^3.$$

Hier kann eine Konstante, die gewiß von Null verschieden ist, noch beliebig angenommen werden, z. B. β [21]); denn es wurde bislang nur bestimmt, wo τ gleich Null und wo es unendlich werden soll. Ich setze β, was sich als zweckmäßig erweist, gleich 49.

Betrachten wir jetzt

$$J - 1 = \frac{\varphi - \psi}{\psi}.$$

Dasselbe soll für vier Werte von τ je doppeltzählend verschwinden (nach § 4), d. h. $(\varphi - \psi)$ soll das volle Quadrat eines Ausdrucks vierten Grades sein. Dieser Ausdruck kann aber unmittelbar angegeben werden. Denn er muß in der Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} & \frac{d\psi}{d\tau} \end{vmatrix}$$

als einfacher Faktor stecken[22]), und diese reduziert sich, nach Abtrennung des Faktors $(\tau^2 + A\tau + B)^2$, auf den vierten Grad. So findet man für den Ausdruck vierten Grades, von einem evtl. Zahlenfaktor abgesehen:

$$(\tau^2 + \alpha\tau + 49)(\tau^2 + A\tau + B) - \tau(\tau^2 + \alpha\tau + 49)(6\tau + 3A) \\ - \tau(\tau^2 + A\tau + B)(2\tau + \alpha).$$

Jetzt identifiziere man das Quadrat dieses Ausdrucks, von dem Zahlenfaktor abgesehen, mit $(\varphi - \psi)$. So hat man eine überzählige Zahl von Gleichungen zur Bestimmung von α, A, B. Die Rechnung gibt:

$$(15) \quad \begin{cases} \varphi = (\tau^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3, \\ \varphi - \psi = (\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2, \text{ }^{23)} \\ \psi = 1728\tau. \end{cases}$$

[21]) β kann nicht Null sein, weil sonst φ mit ψ einen gemeinsamen Faktor hätte.

[22]) [Die hier angewandte „Funktionaldeterminantenmethode" habe ich zum ersten Mal benutzt in meinem zweiten Aufsatz *Über algebraisch integrierbare lineare Differentialgleichungen*, Math. Annalen, Bd. 12 (1877), S. 175 = Abh. LIII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 316. K.]

[23]) Man bemerke, daß der in der Klammer stehende Ausdruck sich so schreiben läßt:

$$(\tau^2 + 7\tau + 21)^2 - 28(\tau - 4)^2.$$

Um jetzt J' durch τ auszudrücken, führe ich die neue Größe τ' ein, vermöge deren sich J' ebenso ausdrückt, wie J durch τ. Man hat dann also:

$$J' = \frac{\varphi(\tau')}{\psi(\tau')},$$

und frage nun nach der *Beziehung zwischen τ und τ'*.

Dieselbe muß vor allen Dingen *linear* sein. Denn τ und τ' sind beide in derselben Riemannschen Fläche einwertig. Zweitens muß die lineare Relation $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ die Periode *Zwei* besitzen. Denn eine Wiederholung der Transformation führt von J' zu J, also von τ' zu τ zurück. Drittens muß die lineare Relation die Gestalt $\tau\tau' = C$ haben. Denn τ wird Null und Unendlich an denjenigen beiden Stellen der Riemannschen Fläche, für welche $J = \infty$ ist, und diese beiden Stellen werden bei Vertauschung von J und J' nach § 5 miteinander verwechselt. Endlich: die Konstante C muß gleich 49 sein. Denn die beiden Stellen der Riemannschen Fläche, welche durch Nullsetzen des einfachen Faktors von φ:

$$\tau^2 + 13\tau + 49 = 0$$

bestimmt sind, ergeben, nach § 4, sowohl $J = 0$ als $J' = 0$, müssen also nach § 5, durch dieselbe Gleichung in τ' gegeben sein:

$$\tau'^2 + 13\tau' + 49 = 0.$$

Also ist $\tau\tau' = 49$.

§ 15.

Fertige Formeln für $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$.

Durch das soeben geschilderte Verfahren erhält man für $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$ folgende Formeln.

1. *Transformation zweiter Ordnung.*

$$(16) \quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (4\tau - 1)^3 : (\tau - 1)(8\tau + 1)^2 : 27\tau, \\ J' : J' - 1 : 1 = (4\tau' - 1)^3 : (\tau' - 1)(8\tau' + 1)^2 : 27\tau', \\ \tau\tau' = 1. \end{cases}$$

2. *Transformation dritter Ordnung.*

$$(17) \quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\tau - 1)(9\tau - 1)^3 : (27\tau^2 - 18\tau - 1)^2 : -64\tau, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \tau\tau' = 1. \end{cases}$$

3. *Transformation vierter Ordnung* (vgl. § 4 des ersten Abschnitts).

$$(18) \quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\tau^2 + 14\tau + 1)^3 : (\tau^3 - 33\tau^2 - 33\tau + 1)^2 : 108\tau(1 - \tau)^4, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \tau + \tau' = 1. \end{cases}$$

4. *Transformation fünfter Ordnung,*

$$(19)\quad \begin{cases} J:J-1:1=(\tau^2-10\tau+5)^3:(\tau^2-22\tau+125)(\tau^2-4\tau-1)^2:-1728\tau, \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \qquad \tau\tau'=125. \end{cases}$$

5. *Transformation siebenter Ordnung.*

$$(20)\quad \begin{cases} J:J-1:1=(\tau^2+13\tau+49)(\tau^2+5\tau+1)^3 \\ \qquad\qquad :(\tau^4+14\tau^3+63\tau^2+70\tau-7)^2 \\ \qquad\qquad :1728\tau,\ ^{24)} \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \qquad \tau\tau'=49. \end{cases}$$

6. *Transformation dreizehnter Ordnung.*

$$(21)\quad \begin{cases} J:J-1:1=(\tau^2+5\tau+13)(\tau^4+7\tau^3+20\tau^2+19\tau+1)^3 \\ \qquad\qquad :(\tau^2+6\tau+13)(\tau^6+10\tau^5+46\tau^4+108\tau^3+122\tau^2+38\tau-1)^2 \\ \qquad\qquad :1728\tau,\ ^{25)} \\ J' \text{ ebenso in } \tau', \\ \qquad \tau\tau'=13. \end{cases}$$

§ 16.

Der Multiplikator für das durch $\sqrt[12]{\Delta}$ normierte Integral.

Daß man die vorangehenden Gleichungen durch elliptische Modulfunktionen lösen kann, ist nach § 2 dieses Abschnittes selbstverständlich. Aber wie man diese Lösung aufzustellen hat, dafür geben die vorangehen-

[24]) [Man findet für den biquadratischen Faktor zufolge [23]) die Zerlegung

$$(\tau^2+(7+2\sqrt{7})\tau+21+8\sqrt{7})\cdot(\tau^2+(7-2\sqrt{7})\tau+21-8\sqrt{7})$$

B.-H.]

[25]) Herr Gierster, der für mich die Koeffizienten der Transformation 13. Ordnung berechnete, teilt mir folgende Zerlegungen mit. Der Ausdruck vierten Grades ist gleich:

$$\left(\tau^2+\frac{7+\sqrt{13}}{2}\tau+\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(\tau^2+\frac{7-\sqrt{13}}{2}\tau+\frac{11-3\sqrt{13}}{2}\right)$$

und der Ausdruck sechsten Grades:

$$\left(\tau^3+5\tau^2+\frac{21-\sqrt{13}}{2}\tau+\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\cdot\left(\tau^3+5\tau^2+\frac{21+\sqrt{13}}{2}\tau+\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right).$$

[Im Anschluß an diese Rechnungen stellte Gierster im Herbst 1878 nach der gleichen Methode auch für diejenigen zusammengesetzten Transformationsgrade, für welche das Fundamentalpolygon das Geschlecht Null besitzt, die zwischen J und J' bestehenden Transformationsgleichungen auf. Vgl. die Notiz in Bd. 14 der Math. Annalen (1878/79), S. 537 ff. und die Berichtigung in Bd. 26 ebenda (1886), S. 590 ff. K.]

den Betrachtungen nur unvollkommenen Anhalt. Vielmehr greife ich an dieser Stelle auf die gewöhnliche Theorie zurück und zeige, daß sie tatsächlich Formeln liefert, welche zur Auflösung unserer Gleichungen führen.

Dabei kleide ich die Betrachtung folgendermaßen ein. Es wurde in § 1 des ersten Abschnittes der Normierung des elliptischen Integrals gedacht, welche dadurch geschieht, daß man im Zähler $\sqrt[12]{\Delta}$ zusetzt: $\int\frac{\sqrt[12]{\Delta}\cdot dx}{\sqrt{f(x)}}$. Es sei nun, des bestimmteren Ausdrucks wegen, n wieder eine Primzahl, und man verlange, das so normierte Integral durch Transformation n-ter Ordnung in ein ebenfalls normiertes Integral $\int\frac{\sqrt[12]{\Delta_1}\cdot dx_1}{\sqrt{f_1(x_1)}}$ überzuführen. So stellt sich ein *Multiplikator* ein, der durch die Gleichung definiert ist:

$$(22)\qquad M\int\frac{\sqrt[12]{\Delta}\cdot dx}{\sqrt{f(x)}}=\int\frac{\sqrt[12]{\Delta_1}\cdot dx_1}{\sqrt{f_1(x_1)}}.$$

Bildet man jetzt beiderseits eine Periode, etwa ω_2, so folgt, je nach der Art der Transformation (resp. der ausgewählten Periode):

$$(23)\qquad M=\frac{\sqrt[12]{\Delta_1}\cdot\omega_2'}{\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2},\quad \text{oder}\quad =\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt[12]{\Delta_1}\cdot\omega_2'}{\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2}.$$

Nun war nach Gleichung (18) des ersten Abschnitts:

$$\sqrt[12]{\Delta}\cdot\omega_2=2\pi q^{\frac{1}{6}}\,\Pi(1-q^{2\nu})^2,\quad \text{für}\ q=e^{i\pi\omega}.$$

Ebenso ist

$$\sqrt[12]{\Delta_1}\cdot\omega_2'=2\pi q_1^{\frac{1}{6}}\,\Pi(1-q_1^{2\nu})^2,\quad \text{für}\ q_1=e^{i\pi\omega'},$$

und hier hat man, wie bekannt, für q_1 folgende Werte zu setzen:

$$q^{\frac{1}{n}},\quad \alpha q^{\frac{1}{n}},\quad \alpha^2 q^{\frac{1}{n}},\quad \ldots,\quad \alpha^{n-1}q^{\frac{1}{n}},\quad q^n,$$

wo α eine primitive n-te Einheitswurzel ist[26]). Man erhält so für M folgende $(n+1)$ Ausdrücke, die zunächst nur bis auf sechste Einheitswurzeln definiert sind und übrigens in einer oft gebrauchten Art durch Indizes unterschieden werden sollen:

[26]) [Der Übergang von $q^{\frac{1}{n}}$ zu $\alpha\cdot q^{\frac{1}{n}}$ entspricht also, wenn etwa $\alpha=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ gewählt wird, der Substitution $\omega'=\omega+2$, die für *ungerades* n dasselbe leistet, wie $\omega'=\omega+1$. Für $n=2$ *muß* jedoch unter α eine primitive $2n$-te Einheitswurzel, d. h. $+i$ oder $-i$ verstanden werden. B.-H.]

$$(24)\quad \begin{cases} M_\varrho = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\alpha^{\frac{\varrho}{6}} q^{\frac{1}{6n}} \cdot \prod\left(1-\alpha^{2\varrho\nu} q^{\frac{2\nu}{n}}\right)^2}{q^{\frac{1}{6}} \cdot \prod(1-q^{2\nu})^2} \\ \qquad \text{für } \varrho = 0, 1, 2, \ldots, (n-1), \\ M_\infty = \dfrac{q^{\frac{n}{6}} \cdot \prod(1-q^{2\nu n})^2}{q^{\frac{1}{6}} \cdot \prod(1-q^{2\nu})^2}. \end{cases}$$

Diese Formeln sind es, welche ohne weiteres die Auflösung unserer Gleichungen geben, indem, von einem Zahlenfaktor abgesehen, τ mit einer Potenz von M identisch wird.

§ 17.
Auflösung der aufgestellten Gleichungen.

Um dies direkt einzusehen, betrachte ich einen Wert von M, etwa

$$M_0 = \frac{1}{n} \cdot \frac{q^{\frac{1}{6n}} \cdot \prod\left(1-q^{\frac{2\nu}{n}}\right)^2}{q^{\frac{1}{6}} \cdot \prod(1-q^{2\nu})^2},$$

als Funktion des Ortes in unserer Riemannschen Fläche J, J', oder, was auf dasselbe hinauskommt, in unserem in der ω-Ebene gelegenen Fundamentalpolygon[27]). Offenbar wird M_0 im Fundamentalpolygon nur einmal Null, da, wo $\omega = 0$, $q = 1$ ist. Ebenso wird es nur einmal unendlich, da, wo $\omega = i\infty$, $q = 0$ ist. Wir wollen jetzt in unserer Riemannschen Fläche um den Punkt, in welchem M_0 unendlich wird, einen kleinen Kreis beschreiben. Dies kommt in unserem Fundamentalpolygone darauf hinaus, daß wir von der einen vertikalen Begrenzungslinie zum entsprechenden Punkte der anderen vertikalen Begrenzungslinie fortschreiten, d. h. daß wir ω um n Einheiten wachsen lassen. Dabei geht $\dfrac{q^{\frac{1}{6n}}}{q^{\frac{1}{6}}} = e^{i\pi\omega\left(\frac{1-n}{6n}\right)}$ in $\dfrac{q^{\frac{1}{6n}}}{q^{\frac{1}{6}}} \cdot e^{i\pi\left(\frac{1-n}{6}\right)}$ über, *und also verändert sich M_0 bei Umkreisung dieses Punktes um die Einheitswurzel $e^{i\pi\left(\frac{1-n}{6}\right)}$ als Faktor.* Bezeichnen wir daher mit λ das kleinste Multiplum von $\frac{n-1}{12}$, welches gleich einer ganzen Zahl ist, *so ist M_0^λ in unserer Riemannschen Fläche* [da diese in den von uns betrachteten Fällen das Geschlecht Null hat,] *eindeutig und also eine rationale Funktion von J und J', die nur an einer Stelle Null und unendlich wird.*

[27]) Rechnerisch kann man die hier abzuleitenden Resultate gewinnen vermöge der leicht zu beweisenden Relation [vgl. Hurwitz, Math. Annalen, Bd. 18 (1881), S. 588]:

$$M^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{dJ'}{dJ} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}(J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}}(J'-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $n = 2, 3, 5, 7, 13$ wird λ gleich $12, 6, 3, 2, 1$. Zugleich ist $\lambda \cdot \frac{n-1}{12}$ nicht nur eine ganze Zahl, sondern gleich Eins. Daher wird in diesen Fällen M_0^λ nicht nur einmal Null oder unendlich, sondern auch nur einfach Null, resp. unendlich. *Es stimmt daher M_0^λ, von einem Zahlenfaktor abgesehen, mit dem früheren τ überein, welches an denselben Stellen und in derselben Weise Null und unendlich wird.*

Der Zahlenfaktor aber bestimmt sich folgendermaßen. Ebenso wie wir früher neben τ eine Größe τ' einführten, betrachte ich neben M den anderen Multiplikator M', welcher beim Rückübergang vom transformierten Integrale zum ursprünglichen auftritt. *Dann hat man in bekannter Weise:*

$$(25)\qquad M M' = \frac{1}{n}.$$

Vergleicht man diese Relation mit den Gleichungen

$$\tau\tau' = C,$$

welche in § 15 auftraten, so ergibt sich der gesuchte Zahlenfaktor. *Man erhält also folgende Formeln, welche die Auflösung der in § 15 zusammengestellten Gleichungen enthalten*[28]):

$$(26)\quad \begin{cases} n = 2, & \tau = -\ \ 64\, M^{12}, \\ n = 3, & \tau = -\ \ 27\, M^6, \\ n = 5, & \tau = -125\, M^3, \\ n = 7, & \tau = \ \ \ \ 49\, M^2, \\ n = 13, & \tau = \ \ \ \ 13\, M. \end{cases}$$

Ich füge dem nur noch zwei Bemerkungen zu:

1. Für $n = 4$ gelten ähnliche Betrachtungen, und es ergibt sich:

$$(27)\qquad \frac{\tau}{\tau - 1} = -16\, M^4.$$

2. Die Gleichungen des § 15 für $n = 2, 3, 5, 7, 13$ haben alle die Form $J = \frac{\varphi(\tau)}{c\,\tau}$. Dieser Zahlenkoeffizient c (der in den letzten drei Fällen gleich 1728 ist) ergibt sich unmittelbar, wenn man in den nunmehr gewonnenen Lösungsformeln $q = 0$ werden läßt und übrigens Gleichung (20) des ersten Abschnittes beachtet.

[28]) [Bei dieser Bestimmungsweise bleiben die Vorzeichen der gesuchten Zahlenfaktoren unbestimmt und waren in der Tat im Original z. T. unrichtig angegeben. Sie ergeben sich aber aus der Bemerkung 2. des Textes, wenn man benutzt, daß die Konstante c ja schon bekannt ist. Für $n = 2$ und $n = 4$ hat man noch die zweiten Glieder der Entwicklungen von J und M nach Potenzen von q^2 zu benutzen. B.-H.]

§ 18.

Die Multiplikatorgleichungen [erster Stufe] für $n = 5$ und $n = 7$.

Im Falle $n = 5$ hatten wir die Gleichung:

$$J = \frac{(\tau^2 - 10\tau + 5)^3}{-1728\,\tau}$$

und es ist

$$\tau = -125\,M^3.$$

Tragen wir diesen Wert von τ ein, schreiben statt J wieder $\frac{g_2^3}{\Delta}$ und ziehen beiderseits die dritte Wurzel, so kommt, wenn wir der Kürze wegen $-5\,M = z$ setzen:

$$(28)\qquad z^6 - 10z^3 + 12\,\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot z + 5 = 0.$$

Dies ist nun genau die *„Jacobische Gleichung mit $A = 0$"* (siehe meine „Ikosaederarbeit", S. 520 [S. 339]), die Kronecker zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades benutzt hat[29]). Dieselbe erscheint bei ihm nur deshalb unter etwas komplizierterer Form, weil er sich statt der rationalen Invarianten des Moduls $\varkappa^2$ bediente.

Kroneckers ursprüngliche Gleichung, etwas umgesetzt, ist nämlich diese:

$$(29)\qquad z^6 - 10z^3 - \frac{1 - 16\varkappa^2\varkappa'^2}{\sqrt[3]{\frac{\varkappa^2\varkappa'^2}{16}}}\cdot z + 5 = 0.$$ [30])

Hier ist der Koeffizient von z nach Formel (16) des ersten Abschnittes in der Tat nichts anderes als $12\cdot\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}$, berechnet für das mit dem Legendreschen Integrale auf derselben Stufe stehende Integral:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-\varkappa^2 z^2\cdot 1+\varkappa'^2 z^2}}.$$ [31])

Nun verlangt Kronecker a. a. O., daß man vorab $\varkappa^2$ aus der Gleichung

$$(30)\qquad \frac{1 - 16\varkappa^2\varkappa'^2}{\sqrt[3]{\frac{\varkappa^2\varkappa'^2}{16}}} = C$$

berechnet, um dann ω zu finden und schließlich

$$(31)\qquad z = \frac{1}{4}\sqrt[3]{4\varkappa^2\varkappa'^2}\left(\frac{\cos\operatorname{am}2\omega}{\cos\operatorname{am}4\omega} - \frac{\cos\operatorname{am}4\omega}{\cos\operatorname{am}2\omega}\right)^2$$

zu haben. Statt dessen berechnen wir nach § 9 des ersten Abschnittes ω direkt aus $\frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{-C^3}{1728}$ und finden $z = -5\,M$, so daß eine wesentliche Abkürzung erzielt ist.

Ich muß übrigens anführen, daß zu eben dieser Vereinfachung der Kroneckerschen Lösung von (28) bzw. (29) auch Herr Kiepert[32]) gelangt ist, wie er mir schon vor längerer Zeit brieflich mitteilte. Besonders aber möchte ich betonen, daß auf dem hier eingeschlagenen Wege die Jacobische Gleichung sechsten Grades mit $A = 0$, die algebraisch ohne Zweifel die einfachste ist, auf welche man alle anderen reduzieren muß (siehe meine Auseinandersetzungen in der „Ikosaederarbeit"), auch von seiten der elliptischen Funktionen *unmittelbar* erhalten wird, während das früher nur auf Umwegen gelang[33]): *sie ist einfach im Sinne der hier gebrauchten Ausdrucksweise die Multiplikatorgleichung* [*erster Stufe*] *für* $n = 5$.

In derselben Art kann man für $n = 7$ die Multiplikatorgleichung bilden. Wir hatten in § 15:

$$J - 1 = \frac{[\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7]^2}{1728\,\tau}$$

für $\tau = 49\,M^2$. Jetzt setze man $7\,M = z$, schreibe $\frac{27\,g_3^2}{\Delta}$ statt $J - 1$ und ziehe beiderseits die Quadratwurzel. So kommt:

$$(32)\qquad z^8 + 14z^6 + 63z^4 + 70z^2 - 216\,\frac{g_3}{\sqrt[2]{\Delta}}\cdot z - 7 = 0.$$

Dies ist eine Jacobische Gleichung vom *achten* Grade (wie man leicht zeigt, wenn man den in § 16 für M aufgestellten Produktausdruck in eine Potenzreihe verwandelt) und es scheint, daß sie für die allgemeinen Jacobischen Gleichungen achten Grades dieselbe Rolle spielen soll, wie für die Jacobischen Gleichungen sechsten Grades die Gleichung mit $A = 0$.

---

[29]) Comptes rendus, Bd. 46, 1858, 6. Juni.

[30]) Vgl. meinen vorstehend als Nr. LXXXI abgedruckten Brief an Brioschi.

[31]) [Vgl. die Formel 14, III in Abschnitt I dieser Arbeit, S. 19 im vorliegenden Bande.]

[32]) [Vgl. Kieperts erste Publikationen in den Göttinger Nachrichten vom 17. Juli 1878, sowie in Crelles Journal, Bd. 87 (1878/79), insbesondere S. 120. Unsere beiderseitigen Ansätze, die zu demselben Resultate führten, waren grundverschieden. Während ich die algebraischen Gleichungen der Gestalt der Fundamentalpolygone für $n = 5$, 7, 13 entnahm und erst hinterher die Beziehung zum Multiplikator erster Stufe herstellte, ging Kiepert vom Studium der speziellen Teilungsgleichung für die Funktion $\wp(u)$ aus und kam von da zur Jacobischen Gleichung sechsten Grades (28), indem er $z = f^2$, $f = \frac{1}{\wp\left(\frac{2\omega}{5}\right) - \wp\left(\frac{4\omega}{5}\right)}$ setzte und übrigens diesen Ausdruck gleich $\sqrt[24]{\frac{\Delta'}{\Delta^n}}$ fand, wo $\Delta'(\omega_1, \omega_2)$ zur Abkürzung für $\Delta\left(\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$ geschrieben ist. Später hat Kiepert für $\sqrt[24]{\frac{\Delta'}{\Delta}}$ den Buchstaben L eingeführt, so daß mein M genau dem Kiepertschen L^2 ist. Siehe die weiter unten auf S. 139 folgenden Zitate. K.]

[33]) Siehe Brioschis Darstellung im 13. Bde. der Math. Annalen (1877/78).

Abschnitt III.

Galoissche Resolventen. Bedeutung der Ikosaedergleichung.

§ 1.

Galoissche Resolventen, welche einen Parameter enthalten.

Im ersten Paragraphen des vorigen Abschnitts suchte ich zu kennzeichnen, was bei einer beliebigen Gleichung, die einen Parameter enthält, durch Tschirnhausentransformation unzerstörbar ist; ich wende mich jetzt zu der allgemeineren Frage, was bei beliebiger Resolventenbildung erhalten bleibt? Da die Galoissche Resolvente alle anderen in sich faßt, so genügt es, nur sie zu betrachten; und indem man die Gesamtheit der Galoisschen Resolventen überblickt, die aus einander durch rationale Transformation hervorgehen, wird man, im Anschlusse an die früheren Entwicklungen, *die Verzweigung, welche die Wurzel der Galoisschen Resolvente in bezug auf den Parameter besitzt,* als das eigentlich Bleibende bei allem Wechsel bezeichnen.

Diese Verzweigung hat eine sehr einfache Eigenschaft. *Hängen für irgendeinen Wert des Parameters r Blätter zyklisch zusammen, so hängen an dieser Stelle alle Blätter in Zyklen von je r zusammen.* In der Tat, da sich durch eine Wurzel der Galoisschen Resolvente und übrigens den Wert des Parameters alle anderen Wurzeln rational ausdrücken lassen, so sind alle Wurzeln in bezug auf den Parameter gleich verzweigt. Und auch umgekehrt: Wenn alle Wurzeln in bezug auf den Parameter gleich verzweigt sind, so lassen sie sich durch den Parameter und eine von ihnen rational ausdrücken; man hat es also mit einer Gleichung zu tun, welche ihre eigene Galoissche Resolvente ist[34]).

Demzufolge hat man folgendermaßen zu verfahren, um die Verzweigungspunkte zu bestimmen, welche die Galoissche Resolvente einer beliebig vorgelegten Gleichung:

$$\varphi(s, z) = 0$$

besitzt. Man suche die Verzweigungsstellen der letzteren. Hängen an einer solchen Stelle gewisse ν_1 Blätter zyklisch zusammen, andere ν_2, ν_3 usw.,

[34]) [Vgl. hierzu die Erörterungen auf S. 121/122 im vorliegenden Bande. — Unter dem Ausdrucke „*gleichverzweigt*" ist im Texte mehr verstanden, als nur, daß die Verzweigungsstellen einer jeden Wurzel die gleiche Lage und Vielfachheit haben, wie die jeder anderen; es soll außerdem die *Verbindung* der Blätter für je zwei Wurzeln die gleiche sein. D. h. präziser: Beschreibt ein Punkt P auf der etwa N-blättrigen Riemannschen Fläche irgendeinen geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden Weg, und läßt man einen beliebigen der $N-1$ genau über bzw. unter P gelegenen Punkte sich auf der Riemannschen Fläche so bewegen, daß er immer genau über bzw. unter P bleibt, so soll er ebenfalls stets einen geschlossenen, sich nicht schneidenden Weg beschreiben. B.-H.]

so hängen an dieser Stelle die Blätter der Galoisschen Resolvente zu je ν zusammen, wo ν das ***kleinste gemeinsame Multiplum*** der Zahlen $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ ist. Denn z muß offenbar ν-mal eine solche Stelle umkreisen, bis eine beliebig gegebene Anordnung $s_1, s_2, \ldots, s_n$ der Wurzeln zum ersten Male wieder erscheint.

§ 2.

Galoissche Resolventen vom Geschlechte Null.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß man alle Galoissche Resolventen, die einen Parameter besitzen und das Geschlecht Null haben, ohne weiteres bestimmen kann. Es sind keine anderen Gleichungen, ***als diejenigen mit linearen Transformationen in sich,*** d. h. dieselben Gleichungen, mit denen ich mich in meinen letzten Veröffentlichungen[35]) ausführlich beschäftigt habe. Dies gibt zugleich einen neuen Weg, die betr. Gleichungen zu bestimmen.

In der Tat, sei das Geschlecht einer Galoisschen Resolvente gleich Null. So wird man diejenige Funktion η als Unbekannte einführen können, durch die sich alles rational ausdrückt, und die Gleichung nimmt also, unter z den Parameter verstanden, die Form an:

$$R(\eta) = z, \tag{1}$$

wo R eine rationale Funktion bedeutet. Nun soll jede Wurzel η_i durch jede andere η_k mit Hilfe von z rational ausdrückbar sein, das heißt also im Falle (1) durch η_k allein. Da ebenso η_k rational in η_i sein muß, so sind beide ***linear*** verknüpft. Man kommt also notwendig zu einer Gleichung mit linearen Transformationen in sich, w. z. b. w.

Will man diesen Satz benutzen, um alle Gleichungen mit linearen Transformationen in sich aufzustellen, so zähle man einfach alle Riemannschen Flächen auf, die so verzweigt sind, wie § 1 verlangt und die außerdem $p = 0$ ergeben. Dies ist das elementarste Problem der unbestimmten Analysis, und seine Diskussion liefert sofort die Fälle, welche allein existieren[36]).

Ich setze der Vollständigkeit wegen die Gleichungen mit linearen Transformationen in sich hier noch einmal her. Es sind folgende:

$$\eta^n = z, \tag{2}$$

$$\eta^n + \eta^{-n} = z, \tag{3}$$

$$\left(\frac{1 - 2\sqrt{-3}\,\eta^2 - \eta^4}{1 + 2\sqrt{-3}\,\eta^2 - \eta^4}\right)^3 = z, \quad \text{(Tetraedergleichung)}, \tag{4}$$

[35]) [Vgl. die Abhandlungen LI bis LIV in Bd. 2 dieser Ausgabe.]
[36]) [Für die Einzelheiten vgl. das „Ikosaederbuch", S. 115 ff.]

$$(5)\qquad \frac{(1+14\eta^4+\eta^8)^3}{108\,\eta^4(1-\eta)^4}=z,\quad \text{(Oktaedergleichung)},$$

$$(6)\qquad 1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}=z,\quad \text{(Ikosaedergleichung)}.$$

Ich habe dabei für die Ikosaedergleichung die Bezeichnung beibehalten, welche ich in meiner „Ikosaederarbeit" fortwährend benutzte. Die Gleichung (2) weist nur zwei Verzweigungen auf; bei $z=0$ und $z=\infty$ hängen beidemal sämtliche n Blätter zyklisch zusammen. Die Gleichung (3) besitzt drei Verzweigungsstellen; bei $z=+2$ und $z=-2$ hängen die $2n$ Blätter paarweise zusammen, bei $z=\infty$ teilen sie sich in zwei Zyklen von je n. Die Gleichungen (4), (5), (6) liefern übereinstimmend bei $z=0$ einen Zusammenhang zwischen je 3, bei $z=1$ zwischen je 2 Blättern. Bei $z=\infty$ ergeben sie bez. eine Verzweigung von je 3, 4, 5 Blättern.

§ 3.

Galoissche Resolventen, welche durch elliptische Modulfunktionen lösbar sind.

Es werde der Parameter z, welcher in der Galoisschen Resolvente vorkommt, jetzt wieder gleich der absoluten Invariante J [bzw. einer linearen Funktion von J] gesetzt. Soll dann die Gleichung durch elliptische Modulfunktionen lösbar sein, so darf sie nach § 2 des vorigen Abschnitts nur bei $J=0,\ 1,\ \infty$ Verzweigungen aufweisen, und zwar können bei $J=0,\ 1$, sofern überhaupt Verzweigung stattfindet, die Blätter nur zu 3, bezüglich zu 2 zusammenhängen. Bei der großen Bestimmtheit dieser Angabe ist es ein Leichtes, für die niedersten p alle hierher gehörigen Gleichungen aufzuzählen. Für $p=0$ sind es folgende:

$$\eta^3=J,\quad \eta^2=J-1,\quad \eta^3+\eta^{-3}=\frac{2J-4}{J},$$

dann *Tetraeder-*, *Oktaeder-* und *Ikosaedergleichung.*

Doch sollen diese allgemeinen Betrachtungen hier nicht weiter verfolgt werden, vielmehr wende ich mich zu dem spezielleren Problem der Transformationsgleichungen zurück.

§ 4.

Die Galoisschen Resolventen der Gleichungen zwischen J und J'.

Bekanntlich umfaßt die Galoissche Gruppe der Transformationsgleichung für $n=2$ *sechs*, für $n=4$ *vierundzwanzig* und für jede Primzahl n, die >2 ist, $\frac{n(n^2-1)}{2}$ Substitutionen[37]). Ebensoviele Blätter wird

[37]) Ich sehe ab bei diesen Angaben, wie immer in dieser Arbeit, von den bloß *numerischen* Irrationalitäten, die bei der Auflösung der Gleichungen notwendig sind.

also die Riemannsche Fläche besitzen, welche die Galoissche Resolvente der Transformationsgleichung vorstellt. Diese Blätter hängen nach § 4 des vorigen Abschnitts und auf Grund der nunmehr erläuterten Verhältnisse bei $J=0$ zu je 3, bei $J=1$ zu je 2, bei $J=\infty$ zu je n zusammen. Das gibt also für $n=2$ $p=0$, für $n=4$ wieder $p=0$, für die anderen n $p=\frac{n-3\cdot n-5\cdot n+2}{24}$. Man sieht: *Das Geschlecht wird Null bei $n=2,3,4,5$ und nur bei diesen Werten von n.* Für $n=7$ z. B. wird es bereits gleich Drei.

Bei $n=3,4,5$ haben wir dieselbe Verzweigung, welche die *Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergleichung* aufweisen. Diese sind aber die einfachsten Gleichungen, welche diese Verzweigung besitzen, insofern in ihnen die Größe η als Unbekannte eingeführt ist, durch die sich alles rational ausdrückt (§ 2). *Es sind also diese Gleichungen die einfachsten Formen, welche man der Galoisschen Resolvente der Transformationsgleichung für $n=3,4,5$ erteilen kann.* Hiermit ist die Bedeutung, welche zumal die *Ikosaedergleichung*, auf welche ich in dieser Arbeit meine besondere Aufmerksamkeit richte, für die Transformationstheorie besitzt, so scharf gekennzeichnet, als man verlangen kann.

Bei $n=2$ kommen wir nach dem vorigen Paragraphen zunächst zu der Gleichung:

$$\eta^3+\eta^{-3}=\frac{2J-4}{J}.$$

Aber diese Gleichung geht durch die lineare Substitution

$$\eta=\frac{\sigma+\alpha}{\sigma+\alpha^2},\quad \left(\alpha=e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

in die Gleichung für das Doppelverhältnis über:

$$J=\frac{4}{27}\cdot\frac{(1-\sigma+\sigma^2)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2},$$

und *die Gleichung für das Doppelverhältnis gehört also hier als erstes Glied zu der von der Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergleichung gebildeten Reihe.*

§ 5.

Im Raume gelegene Riemannsche Flächen.

Nach den früher ausgesprochenen Ideen (§ 7 des zweiten Abschnitts) kann man das Gesagte noch zweckmäßig umformen. Man schraffiere bei den beschriebenen Riemannschen Flächen diejenigen Halbblätter, welche die positive Halbebene J überdecken, während die anderen Halbblätter frei bleiben sollen. Dann deformiere man die Fläche so, daß sie schließlich, ohne Verzweigung im Raume gelegen, eine möglichst übersichtliche

Gestalt annimmt, also, z. B. im Falle $p=0$ die Gestalt einer Kugel. Bezeichnet man mit N die Blätterzahl der ursprünglichen Fläche, so ist die neue Fläche von $2N$ (krummlinigen) Dreiecken überdeckt, welche sich, abwechselnd schraffiert und nicht schraffiert, lückenlos aneinander schließen. Die Ecken der einen Art (für die $J=0$ ist) sind immer zu sechs und sechs, die Ecken der zweiten Art ($J=1$) zu vier und vier, die Ecken der dritten Art ($J=\infty$) zu $2n$ und $2n$ vereinigt; die Dreieckswinkel sind also (sozusagen) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{n}$. Im besonderen Falle $p=0$ fällt diese Einteilung in Dreiecke mit derjenigen zusammen, die wir für die Doppelverhältnisgleichung ($n=2$) oben ausführlich aufstellten (Abschnitt I, § 2), und die bei der Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaedergleichung übrigens bekannt ist.

Diese Vorstellung ist nun besonders nützlich, um die Abhängigkeit zu verstehen, welche zwischen der Wurzel der Galoisschen Resolvente und dem Periodenverhältnisse ω besteht. Wir hatten die Ebene ω in unendlich viele, abwechselnd schraffierte und nicht schraffierte, Elementardreiecke zerlegt, deren Winkel $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 betrugen. *Einem solchen Elementardreiecke entspricht jetzt geradezu das neue* [*in gleichem Sinn umlaufene*] *Dreieck mit seinen Winkeln* $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{n}$. Da nebeneinanderliegenden Dreiecken natürlich ebensolche entsprechen, so hat man ein volles Bild der gegenseitigen Abhängigkeit.

§ 6.

Verwertung der Galoisschen Resolventen.

Der Nutzen der Galoisschen Resolvente besteht zumal darin, daß man durch eine beliebige ihrer Wurzeln und übrigens den Parameter alle anderen Größen rational ausdrücken kann. Ist insbesondere $p=0$, so ist auch noch der Parameter überflüssig und alles durch eine beliebige Wurzel der Resolvente allein rational darstellbar. Ich stelle also insbesondere die Aufgabe, *die Wurzeln* τ *der oben aufgestellten Transformationsgleichungen für* $n=2, 3, 4, 5$ *durch das Doppelverhältnis, resp. die Tetraeder-, Oktaeder-, Ikosaederirrationalität rational in expliziter Form auszudrücken.*

Um die betr. Formeln zu finden, bediente ich mich der geometrischen Vorstellung des vorangehenden Paragraphen. Ich zeichnete in der ω-Ebene für $n=2, 3, 4, 5$ das Fundamentalpolygon und suchte dann auf der betr. in 12, 24, 48, 120 Dreiecke eingeteilten Kugel das entsprechende Gebilde. Die Beziehung zwischen der Wurzel der Galoisschen Resolvente und der

Variablen τ ist dann derart, daß erstere sich gerade über das neue Polygon bewegt, wenn τ sein (zweckmäßig zerschnittenes) Gesamtgebiet durchläuft. Hiernach ist es in jedem Falle leicht, die algebraische Abhängigkeit darzustellen. Im folgenden unterdrücke ich der Kürze wegen diese Zwischenbetrachtungen und gebe ohne weitere Erläuterung einmal die Figuren, dann gleich die definitiven Formeln. —

Hat man in dieser Weise alles durch eine Irrationalität ausgedrückt, so muß man verlangen, die letztere auf transzendentem Wege zu definieren. Ich erreiche das in den vier Fällen auf indirektem Wege, indem ich, von den oben für τ gefundenen Ausdrücken ausgehend, auf die Wurzel der Galoisschen Resolvente den Rückschluß mache.

§ 7.

Die Gleichung für das Doppelverhältnis.

Wenn wir in dem soeben geschilderten Sinne das Fundamentalpolygon für $n=2$ auf die Kugel übertragen, die zur Repräsentation des Doppelverhältnisses σ dient, so wird eben die Hälfte derselben überdeckt, die Begrenzungslinie ist ein Meridian. In der beistehenden Figur ist dieser Meridian stärker ausgezogen und nur auf der überdeckt gedachten Halbkugel sind die früheren Schraffierungen angebracht:

Nördliche Halbkugel

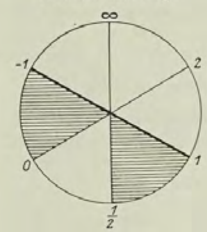


Fig. 19a.

Südliche Halbkugel

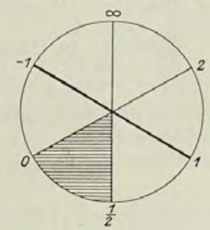


Fig. 19b.

Die Transformationsgleichung für $n=2$ war:

$$J=\frac{1}{27}\cdot\frac{(4\tau-1)^3}{\tau},$$

die Gleichung für das Doppelverhältnis:

$$J=\frac{4}{27}\cdot\frac{(\sigma^2-\sigma+1)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2}.$$

Man erhält die eine aus der anderen, indem man schreibt:

$$(6\mathrm{a})\qquad \begin{cases} \tau_\infty = -\dfrac{\sigma^2}{4(1-\sigma)}, \\ \tau_0 = -\dfrac{(1-\sigma)^2}{4\sigma}, \\ \tau_1 = +\dfrac{1}{4\sigma(1-\sigma)}. \end{cases}$$

Ich habe dabei den drei Wurzeln τ Indizes erteilt, so wie sie den oben der Größe M beigelegten Indizes entsprechen.

§ 8.

Die Tetraedergleichung.

In der nachstehenden Zeichnung denke ich mir ein reguläres Tetraeder mit horizontaler Basis, auf welches man von oben hinabblickt. Jede der drei sichtbaren Seitenflächen ist durch die drei Höhen in sechs Elementardreiecke zerlegt. Läßt man sie den Elementardreiecken der ω-Ebene entsprechen, so überdeckt das Fundamentalpolygon für $n = 3$ den von einem stark ausgezogenen Rahmen umschlossenen Raum; nur in ihm sind Schraffierungen angebracht. Dieser Raum absorbiert, wie man sieht, genau den dritten Teil der gesamten Tetraederfläche.

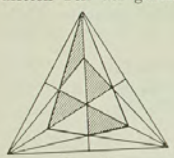


Fig. 20.

Die Formeln, zu denen man dementsprechend geführt wird, sind folgende.

Die Transformationsgleichung für $n = 3$ war:

$$J = -\frac{(\tau-1)(9\tau-1)^3}{64\tau}.$$

Der Tetraedergleichung erteile ich folgende Gestalt:

$$J = -64\frac{(x_1^4 - x_1 x_2^3)^3}{(8x_1^3 x_2 + x_2^4)^3}.$$ [38]

Ich habe dabei der größeren Deutlichkeit wegen homogene Variable genommen und die Zahlenkoeffizienten so gewählt, daß keine Irrationalitäten auftreten. Man findet dann:

$$(7)\qquad \begin{cases} \tau_\infty = \dfrac{x_2^4}{8x_1^3 x_2 + x_2^4}, \\ \tau_0 = \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{(2x_1+x_2)^4}{8x_1^3 x_2 + x_2^4}, \\ \tau_1 = \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{(2\alpha x_1+x_2)^4}{8x_1^3 x_2 + x_2^4}, \\ \tau_2 = \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{(2\alpha^2 x_1+x_2)^4}{8x_1^3 x_2 + x_2^4}. \end{cases} \qquad \left(\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right),$$

[38]) Es wird dann

$$J - 1 = -\frac{(8x_1^6 + 20x_1^3 x_2^3 - x_2^6)^2}{(8x_1^3 x_2 + x_2^4)^3}.$$

[In den folgenden Formeln (7) ist unter $\frac{x_1}{x_2}$ diejenige Wurzel der Tetraedergleichung zu verstehen, die für $\omega = i\infty$, $\omega = 0$, $\omega = 1$ bzw. die Werte $\infty, -\frac{1}{2}, -\frac{\alpha^2}{2}$ annimmt. B.-H.]

Die im Zähler stehenden Ausdrücke sind die vier linearen Faktoren des Nenners. Man kann sagen, wenn ein solcher Ausdruck gestattet ist: *die Größen τ stellen die vierte Potenz einer Tetraederecke dar, dividiert durch das ganze Tetraeder.*

§ 9.

Die Oktaedergleichung.

Beim Oktaeder bekommt man folgende nach dem Vorhergehenden wohl ohne weitere Erläuterung verständliche Figur:

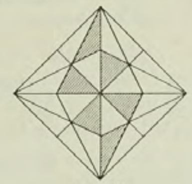


Fig. 21.

Wir hatten ferner oben für $n = 4$ als Transformationsgleichung aufgestellt:

$$J = \frac{(\tau^2 + 14\tau + 1)^3}{108\tau(1-\tau)^4},$$

während die Oktaedergleichung lautete:

$$J = \frac{(\eta^8 + 14\eta^4 + 1)^3}{108\eta^4(1-\eta^4)^4}.$$

Offenbar ist ein Wert von τ gleich η^4, und die übrigen Werte ergeben sich, wenn man η den linearen Transformationen unterwirft, durch welche die Oktaedergleichung in sich übergeht. Also kommt für die sechs Werte von τ:

$$(8)\qquad \eta^4, \quad \frac{1}{\eta^4}, \quad \left(\frac{1\pm\eta}{1\mp\eta}\right)^4, \quad \left(\frac{1\pm i\eta}{1\mp i\eta}\right)^4.$$ [38a]

Schreibt man hier $\varkappa^2$ statt τ und also $\sqrt{\varkappa}$ statt η, so wird (nach § 3 des ersten Abschnittes) J die Invariante des Legendreschen Integrals und die Formeln (8) drücken ein bekanntes Resultat von Abel aus[39]. Wir können also folgendermaßen sagen: *Transformiert man das allgemeine elliptische Integral* $\int\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$ *durch lineare Substitution in die Legendresche*

[38a]) [Bedeutet η diejenige Wurzel der Oktaedergleichung, die für $\omega = i\infty, 0, 1$ bzw. die Werte $\infty, 1, -i$ annimmt, so gilt genauer $\tau_0 = \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^4$. B.-H.]

[39]) [Siehe z. B. Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 459 in der Ausgabe von Sylow und Lie.]

Normalform, so hat $\sqrt{\varkappa}$ in bezug auf die absolute Invariante J die B-
deutung der Oktaederirrationalität.

§ 10.

Die Ikosaedergleichung.

In der folgenden Figur sind nur einige der Dreiecke gezeichnet, welc ein reguläres Ikosaeder überdecken; aber sie wird genügen, um die La des $n = 5$ entsprechenden Fundamentalpol gons zu erkennen.

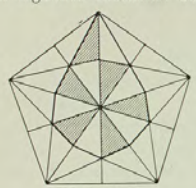


Fig. 22.

Nun hatten wir für τ bei $n = 5$:

$$J = \frac{(\tau^2 - 10\tau + 5)^3}{-1728\tau}$$

und übrigens die Ikosaedergleichung:

$$J = 1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}.$$

Schreiben wir homogen machend $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, so werden die sechs Wurzeln

$$(9) \qquad \begin{cases} \tau_\infty = \dfrac{125\,\eta_1^6\,\eta_2^6}{f}, \\[2ex] \tau_\varrho = (-1)^\varrho \dfrac{(\varepsilon^{-2\varrho}\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 - \varepsilon^{+2\varrho}\eta_2^2)^6}{f}, \end{cases}$$

wo ε gleich $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ist.[39a])

Übrigens gehen diese Formeln [bis auf die Zuordnung der Indize schon aus früheren Angaben[40]) von mir hervor, indem $\sqrt[3]{\tau}$, wie § 18 d zweiten Abschnitts gezeigt, Wurzel der Jacobischen Gleichung sechst Grades mit $A = 0$ ist.

§ 11.

Auflösung der Gleichung für das Doppelverhältnis.

Aus Formel (6a) folgt:

$$-\sigma^3 = \frac{\tau_\infty}{\tau_1}.$$

Nun war

$$\frac{\tau_\infty}{\tau_1} = \frac{M_\infty^{12}}{M_1^{12}},$$

[39a]) [Unter $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ ist in (9) diejenige Wurzel der Ikosaedergleichung zu verstehe die für $\omega = i\infty$, 0, 1 bzw. die Werte ∞, $\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{2}$, $\varepsilon^4 \cdot \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{2}$ annimmt. B.-H.]

[40]) [Siehe „Ikosaederarbeit" S. 518 [S. 337].]

also kommt:

$$(10) \qquad \sigma = 2^4 \cdot q \cdot \frac{\Pi(1 + q^{2\nu})^8}{\Pi(1 + q^{2\nu - 1})^8},$$

die gewöhnliche Formel für $\sigma = \varkappa^2$.

§ 12.

Auflösung der Tetraedergleichung.

Man schließt aus Formel (7):

$$\sqrt[4]{\tau_0} : \sqrt[4]{\tau_1} : \sqrt[4]{\tau_2} = 2x_1 + x_2 : 2\alpha x_1 + x_2 : 2\alpha^2 x_1 + x_2.$$

Andererseits verhalten sich diese Größen wie

$$M_0^{\frac{3}{2}} : M_1^{\frac{3}{2}} : M_2^{\frac{3}{2}}$$

resp. wie die drei Ausdrücke, die entstehen, wenn man in

$$q^{\frac{1}{4}} \Pi(1 - q^{2\nu})^3$$

statt q einträgt $q^{\frac{1}{3}}$, $\alpha q^{\frac{1}{3}}$, $\alpha^2 q^{\frac{1}{3}}$. Aber dieses Produkt $q^{\frac{1}{4}} \Pi(1 - q^{2\nu})^3$ ist [bis auf den Faktor 2π] nichts anderes als $\Theta_1'(0)$ nach der gewöhnlichen Bezeichnung, gibt also in eine Reihe entwickelt:

$$q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - 7q^{\frac{49}{4}} + 9q^{\frac{81}{4}} - 11q^{\frac{121}{4}} + \cdots.$$

Trägt man hier für q ein $\alpha^\varrho q^{\frac{1}{3}}$, so kommt[41]):

$$\alpha^\varrho \cdot q^{\frac{1}{12}}(1 + 5q^2 - 7q^4 - 11q^{10} + 13q^{14} + 17q^{24} - 19q^{30} - \ldots)$$
$$- 3q^{\frac{9}{12}}(1 - 3q^6 + 5q^{18} - 7q^{36} \ldots)$$

und also wird *die Auflösung der Tetraedergleichung* diese:

$$(11) \qquad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{1}{6q^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1 + 5q^2 - 7q^4 - 11q^{10} + 13q^{14} + 17q^{24} - 19q^{30} - \ldots}{1 - 3q^6 + 5q^{18} - 7q^{36} + \ldots}.$$

§ 13.

Die Auflösung der Oktaedergleichung.

Man kommt zu der Formel:

$$(12) \qquad \eta = \frac{1}{2} \cdot q^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Pi(1 + q^{4\nu - 2})^2}{\Pi(1 + q^{4\nu})^2},$$

die mit den gewöhnlich für $\sqrt{\varkappa}$ gegebenen nach leichter Modifikation übereinstimmt.

[41]) [Die Rechnung liefert das Resultat des Textes multipliziert mit der vierten Einheitswurzel $e^{-\frac{\pi i \varrho}{2}}$. Aber in den $\sqrt[4]{\tau_\varrho}$ bleibt an sich eine vierte Einheitswurzel unbestimmt. Diese vierten Einheitswurzeln ergeben sich nachträglich aus der Forderung, daß $\frac{x_1}{x_2}$ die Tetraedersubstitutionen erfahren soll, wenn ω unimodular substituiert wird. Es zeigt sich, daß gerade die Ausdrücke des Textes das Richtige liefern. B.-H.]

§ 14.

Die Auflösung der Ikosaedergleichung.

Nach § 10 verhalten sich die sechsten Wurzeln aus den τ_ϱ [bis a hinzutretende zwölfte Einheitswurzeln] wie

$$\varepsilon^{-2\varrho}\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 - \varepsilon^{+2\varrho}\eta_2^2.$$

Dieselben sechsten Wurzeln verhalten sich, nach § 17 des vorig Abschnitts, wie die $\sqrt{M}$, das heißt wie diejenigen Ausdrücke, die a $q^{\frac{1}{12}}\prod(1-q^{2\nu})$ hervorgehen, wenn man statt q einträgt $q^{\frac{1}{5}}$, $\varepsilon q^{\frac{1}{5}}$, $\varepsilon^2 q$ $\varepsilon^3 q^{\frac{1}{5}}$, $\varepsilon^4 q^{\frac{1}{5}}$ $\left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}} \text{ gesetzt}\right)$.

Aber es ist $q^{\frac{1}{12}}\prod(1-q^{2\nu})$ nach einer bekannten von Euler he rührenden Formel:

$$\sum_0^\infty (-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}}.$$

Wenn wir hier statt q schreiben $\varepsilon^\mu q^{\frac{1}{5}}$, so ergibt sich[42]):

$$\begin{aligned} & q^{\frac{5}{12}}(-1+q^{10}+q^{20}-q^{50}+\dots) \\ & + \varepsilon^{2\mu}\cdot q^{\frac{49}{60}}(-1+q^2-q^4+q^8+q^{22}-q^{30}+\dots) \\ & + \varepsilon^{3\mu}\cdot q^{\frac{1}{60}}(1+q^2-q^6-q^{14}-q^{16}-q^{28}+q^{40}\dots) \end{aligned}$$

und vergleicht man dies mit den $\sqrt[6]{\tau_\varrho}$, so kommt als *Auflösung d* *Ikosaedergleichung:*

$$\text{(13)} \qquad \frac{\eta_1}{\eta_2} = q^{-\frac{2}{5}} \frac{1+q^2-q^6-q^{14}-q^{16}-q^{28}+q^{40}+\dots}{-1+q^{10}+q^{20}-q^{50}+\dots},$$

oder auch:

$$\text{(13a)} \qquad \frac{\eta_1}{\eta_2} = -q^{-\frac{2}{5}} \frac{-1+q^{10}+q^{20}-q^{50}+\dots}{-1+q^2-q^4+q^8+q^{22}-q^{30}+\dots}.$$

§ 15.

Vergleich der verschiedenartigen Auflösungen der Ikosaedergleichung[43])

Ein Vergleich der hiermit gewonnenen Lösung der Ikosaedergleichung dur elliptische Funktionen mit der früher explizite entwickelten [„Ikosaederarbeit

[42]) [Hier liefert die Rechnung das Resultat des Textes multipliziert mit d zwölften Einheitswurzel $e^{-\frac{5\pi i\mu}{6}}$, die sich gegen die in den $\sqrt[6]{\tau_\varrho}$ unbestimmt gelassen Einheitswurzeln kompensiert. Wiederum ergibt sich das Schlußresultat durch Hera ziehung der Ikosaedersubstitutionen, wobei man noch das Verhalten von $\frac{\tau_0}{\tau_1}$ f $\omega = i\infty$ benutzen mag. B.-H.]

[43]) Ähnliche Betrachtungen gelten natürlich bei der Gleichung für das Dopp verhältnis, der Tetraeder- und der Oktaedergleichung.

S. 512 ff. [S. 331 ff.]] ist deshalb besonders interessant, weil er neue Gesichtspunkte für die Behandlung der hypergeometrischen Reihen abgibt. Wenn sich die Invariante J über die Halbebene bewegt, so durchläuft die Ikosaederirrationalität η ein Kreisbogendreieck von den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$ und ω ein solches von den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0. Statt nun nach der früheren Methode η direkt aus J als Quotienten hypergeometrischer Reihen zu berechnen, berechnen wir jetzt auf analoge Weise das ω und aus ihm erst das η; das heißt, wir verwandeln die Halbebene J zunächst in ein Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 und dehnen dann dieses wieder zu einem Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{5}$. *Dies Verfahren ist in analoger Weise offenbar immer zulässig, wenn ein Quotient Ω hypergeometrischer Reihen berechnet werden soll, der die Halbebene J auf ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{\nu}$ abbildet, wo ν irgendeine Zahl ist.* Dies Verfahren hat dann aber, allgemein zu reden, einen großen Vorteil, der freilich beim Ikosaeder nicht recht zur Geltung kommt. Im allgemeinen nämlich ist weder J eine eindeutige Funktion von Ω, noch Ω von J. Dagegen werden beide eindeutige Funktionen von ω. Indem man also ω als die unabhängige Variable einführt, ist ein ähnlicher Vorteil erzielt, wie etwa der, den in der Theorie der elliptischen Integrale die Einführung der Integrale erster Gattung als unabhängiger Veränderlicher mit sich bringt. —

Es handelte sich dabei um hypergeometrische Reihen, welche nach J fortschreiten. Aber ich habe S. 512, 516 [S. 331, 335] meiner „Ikosaederarbeit" bereits darauf aufmerksam gemacht, daß es unbegrenzt viele andere Arten der Auflösung für die Ikosaedergleichung gibt, sofern man solche hypergeometrische Reihen zuläßt, die *nach algebraischen Funktionen von J* fortschreiten[44]). Ich will hier nur drei solche Fälle besonders anführen, die sich an das Vorhergehende genau anschließen. Schreibt man

$$J = \frac{(4\tau-1)^3}{27\tau} \quad \text{(Transformation zweiter Ordnung)},$$

so bewegt sich η, wenn τ über die Halbebene läuft, über ein Dreieck, das aus drei kleinen Dreiecken $\left(\text{mit den Winkeln } \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}\right)$ zusammengesetzt ist (Fig. 23 auf der folgenden Seite); wird

$$J = \frac{4}{27}\cdot\frac{(\sigma^2-\sigma+1)^3}{\sigma^2(1-\sigma)^2}$$

[44]) [Vgl. auch die bereits in Bd. 2 dieser Ausgabe auf S. 317, S. 346 und S. 582 genannte Leipziger Dissertation von O. Fischer: *Konforme Abbildung sphärischer Dreiecke aufeinander mittels algebraischer Funktionen.* (Leipzig, 1885).]

gesetzt (Doppelverhältnisgleichung), so entspricht der Halbebene σ das Dreieck η (Fig. 24), das heißt, das Begrenzungsdreieck des eigentlichen Ikosaeders. Nimmt man endlich:

$$J = \frac{1}{108} \cdot \frac{(\tau^2 + 14\tau + 1)^3}{\tau(1-\tau)^4}$$

(Transformation vierter Ordnung, Invariante der Legendreschen Normalform), so ist die Halbebene τ auf ein Dreieck η bezogen, das die in Fig. 25 gegebene Gestalt hat.

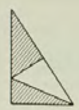


Fig. 23.

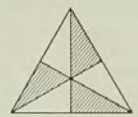


Fig. 24.

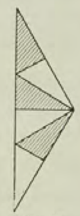


Fig. 25.

Dieser letzte Fall ist es, den ich S. 516 [S. 335] meiner „Ikosaederarbeit" ausführlicher in Betracht zog, weil ich damals von der Legendreschen Normalform aus die Auflösung der Ikosaedergleichung durch elliptische Funktionen untersuchen wollte. — [Vgl. Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 383/384.]

Bringt man diese Lösungen wieder mit der Auflösung durch elliptische Funktionen zusammen, so erhält man z. B. den Satz: *Alle hypergeometrische Reihen, welche nach dem Doppelverhältnisse $\sigma (= \varkappa^2)$ fortschreiten, lassen sich als eindeutige Modulfunktionen darstellen*[45]. Doch greift ein Verfolg dieser Ideen, die sich schließlich alle auf *die Transformation der hypergeometrischen Reihen* beziehen, natürlich weit über die Grenzen des gegenwärtigen Aufsatzes hinaus.

Abschnitt IV.

Modulargleichungen. — Die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.

In diesem letzten Abschnitte beabsichtige ich, zu zeigen, in welchem Verhältnisse die Untersuchungen Hermites und Brioschis, die sich auf die Bring-Jerrardsche Form der Gleichungen fünften Grades, resp. auf die

[45]) [Wegen dieses Theorems, auf das ich immer besonderen Wert gelegt habe, vgl. die Fußnote [10]) auf Seite 581/82 in Bd. 2 dieser Ausgabe. K.]

verwandten Jacobischen Gleichungen sechsten Grades „mit $B = 0$" beziehen, zum Ikosaeder stehen, um dann, die Entwicklungen der vorhergehenden Abschnitte und meine früheren Arbeiten umfassend, einen Überblick über die verschiedenen Arten der Lösung der Gleichungen fünften Grades zu geben. Ich bedarf dazu gewisser Betrachtungen über *Modulargleichungen*, die mir an sich ein großes Interesse zu bieten scheinen, die ich aber nur so weit hier durchführe, als zur Erreichung des vorgenannten Zweckes notwendig ist.

§ 1.

Über Modulargleichungen im allgemeinsten Sinne.

Statt der Gleichungen zwischen den absoluten Invarianten J und J', die ich im zweiten Abschnitte dieser Arbeit untersuchte, betrachtet man, von den Θ-Funktionen ausgehend, gewöhnlich die Gleichungen zwischen den Doppelverhältnissen σ, σ' (d. h. $\varkappa^2, \lambda^2$) oder die zwischen ihren achten Wurzeln $u = \sqrt[4]{\varkappa}$, $v = \sqrt[4]{\lambda}$. Ist n, wie vorausgesetzt werde, eine Primzahl und dabei > 2, so sind auch diese Gleichungen vom Grade $(n+1)$. Bei der hier eingehaltenen Darstellung, in der die absolute Invariante J allemal die ursprüngliche Variable abgibt, entsteht von selbst die allgemeine Frage: *Welche algebraischen Funktionen von J, resp. J', haben ebenfalls diese Eigenschaft, zu Transformationsgleichungen vom Grade $(n+1)$ Anlaß zu geben?*

Es sei $\varphi(\omega)$ eine solche in der ganzen Halbebene ω eindeutige Funktion. So betrachte man vor allen Dingen diejenigen linearen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'}, \quad (\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1), \tag{1}$$

welche $\varphi(\omega)$ ungeändert lassen. Sie mögen durch akzentuierte $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ kenntlich gemacht sein, und bilden übrigens eine in der Gesamtheit aller

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

enthaltene Untergruppe. Zwei Zahlen, die durch eine Substitution (1) auseinander hervorgehen, will ich *relativ äquivalent* nennen. So bilde man alle Werte von φ, welche durch folgende Formel ausgedrückt sind:

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'}\right)$$

und frage, wann sie mit $\varphi(\omega)$ durch eine Gleichung $(n+1)$-ten Grades verknüpft sind.

Eine leichte Überlegung führt zu zwei Bedingungen.

Zunächst ist erforderlich, *daß alle Werte von ω, für welche die Funktion φ denselben Wert annimmt, relativ äquivalent sind*. Dies be-

貴重書

dingt, daß J eine rationale Funktion von φ sein muß, und auch umgekehrt: wenn J eine rationale Funktion von φ ist, so wird diese erste Bedingung befriedigt.

Dann muß weiter verlangt werden, *daß alle Zahlen* $\frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha' \omega + \beta'}{\gamma' \omega + \delta'}$ *mit nur* $(n+1)$ *„Repräsentanten" relativ äquivalent sind.*

Diese zwei Bedingungen zusammen sind jedenfalls ausreichend; wie weit sie möglicherweise voneinander abhängig sind, habe ich noch nicht untersucht[46]).

§ 2.

Die Ikosaederirrationalität.

Ich behaupte nun, daß die Ikosaederirrationalität η, die durch die Gleichung definiert wird:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = J,$$

den beiden Anforderungen für alle Primzahlen n genügt, die von Fünf verschieden sind[47]).

Zunächst der ersten Bedingung wird entsprochen, weil J in η rational ist. Mit Bezug auf die zweite habe ich zunächst die Substitutionen (1 anzugeben, welche η ungeändert lassen. Da η nichts anderes ist als die Wurzel der Galoisschen Resolvente der Transformationsgleichung für $n = 5$, so umfassen nach bekannten Sätzen die gesuchten Substitutionen alle diejenigen $\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ und nur diejenigen, bei denen $\alpha \equiv \delta \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0$ (mod. 5) ist. Wir können also schreiben:

$$(2) \quad \omega' = \frac{\alpha' \omega + \beta'}{\gamma' \omega + \delta'} = \frac{(5a+1)\omega + 5b}{5c\omega + (5d+1)}, \quad \text{wo } (5a+1)(5d+1) - 25bc = 1$$

und es ist nun zu zeigen, daß alle Zahlen

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{(5A+1)\omega + 5B}{5C\omega + (5D+1)}, \quad \text{wo } (5A+1)(5D+1) - 25BC = 1,$$

mit Bezug auf (2) zu $(n+1)$ Repräsentanten äquivalent sind. Zum Beweise gebe ich $(n+1)$ Repräsentanten wirklich an; daß in bezug auf sie das Theorem richtig ist, sieht man sofort. Die Repräsentanten sind:

$$\frac{\omega}{n}, \quad \frac{\omega + 5}{n}, \quad \frac{\omega + 2 \cdot 5}{n}, \ldots, \quad \frac{\omega + (n-1)\cdot 5}{n}, \quad \frac{1}{n} \cdot \frac{\lambda n \omega + (\lambda n - 1)}{(1 - \lambda n)\omega + (2 - \lambda n)}.$$

Hier ist λn das kleinste Multiplum von n, welches modulo 5 zu Eins kongruent ist.

---

46) [Vgl. hierzu die weitergehenden Angaben in Nr. LXXXVII, S. 173 ff. in diesem Bande.]

47) Entsprechende Entwicklungen gelten für das Doppelverhältnis o, wie für die Tetraeder- und Oktaederirrationalität.

§ 3.

Simultane Änderungen der zusammengehörigen Ikosaederirrationalitäten.

Es sollen die beiden Ikosaederirrationalitäten, welche durch Transformation n-ter Ordnung miteinander verknüpft sind, η und ζ genannt werden. So sei η durch Formel (13) des vorigen Abschnitts gegeben:

$$(3) \qquad \eta = q^{-\frac{2}{5}} \frac{1 + q^2 - q^6 - q^{14} - q^{16} - q^{28} + q^{40} + \ldots}{-1 + q^{10} + q^{20} - q^{50} + \ldots}.$$

Ich will dann unter den zugehörigen Werten von ζ denjenigen auswählen, der sich aus (3) ergibt, wenn man, dem ersten der eben angegebenen Repräsentanten entsprechend, ω durch $\frac{\omega}{n}$, also $q = e^{i\pi\omega}$ durch $q^{\frac{1}{n}}$ ersetzt.

Nun lasse man ω allmählich um $2n$ wachsen. Dann verwandelt sich η vermöge (3) in $\varepsilon^{-2n}\eta$, ζ in $\varepsilon^{-2}\zeta$. Hiernach hat man auf Grund der Entwicklungen S. 525 [S. 345] meiner „Ikosaederarbeit" sofort folgenden Satz:

Transformiert man η durch die 60 Ikosaedersubstitutionen, so geschieht dasselbe mit ζ. Dabei ergibt sich die Substitution, welche ζ erfährt, aus der für η, indem man jedesmal ε^n durch ε ersetzt.

Nun kann n modulo 5 zu 1, 2, 3, 4 kongruent sein. In den beiden letzten Fällen ersetze man ζ durch $-\frac{1}{\zeta}$ und bezeichne diese neue Größe wieder einfach mit ζ. Dann hat man:

Die Transformation für ζ ist entweder mit der für η identisch, oder aus ihr abzuleiten, wenn man ε^2 durch ε ersetzt. Der erstere Fall tritt ein, wenn n quadratischer Rest modulo 5 ist, der andere Fall, wenn n Nichtrest ist.

§ 4.

Die Modulargleichungen zwischen η und ζ.

Der ausgesprochene Satz ermöglicht es, die Gleichung $(n+1)$-ten Grades zwischen η und ζ in den niedersten Fällen ohne weiteres hinzuschreiben. Man hat zu dem Zwecke auf meine „Ikosaederarbeit" und namentlich auf Gordans neueste Veröffentlichung zurückzugreifen (Math. Annalen Bd. 13 (1878), S. 375 ff.: *Über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grad.* [Siehe auch den Bericht über Gordans Arbeit in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 380 ff.]).

Nehmen wir zunächst $n = 2, 3$. So haben wir eine Gleichung zwischen η und ζ, welche in beiden Veränderlichen vom dritten Grade bez. vom vierten Grade ist und die ungeändert bleibt, wenn man auf ζ eine beliebige Ikosaedersubstitution, auf η aber diejenige anwendet, die sich durch Verwandlung von ε in ε^2 ergibt. *Also sind auf Grund der Gordanschen Arbeit die Modulargleichungen für $n = 2$, 3 einfach diese:*

$$(4) \qquad 0 = f = \zeta^3\eta^2 + \zeta^2 + \zeta\eta^3 - \eta,$$

$$(5) \qquad 0 = \varphi = \zeta^4\eta - \zeta^3\eta^4 - 3\zeta^2\eta^2 + \zeta + \eta^3.$$

Ich habe diese Gleichungen den Formeln (7), (8) der genannten Arbeit entnommen, indem ich einfach $\frac{y_1}{y_2}$ durch ζ, $\frac{x_1}{x_2}$ durch η ersetzte.

Betrachten wir ferner den Fall $n = 4$. Freilich haben wir oben nur den Fall einer Primzahl n erläutert. Aber man sieht leicht, daß sich für $n = 4$ nach Analogie mit den gewöhnlichen Modulargleichungen eine Gleichung sechsten Grades zwischen η und ζ ergibt, und daß man vier der Werte von ζ erhält, wenn man in (3) statt ω einträgt $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega+5}{n}$, $\frac{\omega+2\cdot 5}{n}$, $\frac{\omega+3\cdot 5}{n}$. Verwandeln wir dieses ζ der Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen entsprechend in $-\frac{1}{\zeta}$, so werden also η, ζ gleichzeitig denselben Ikosaedersubstitutionen unterworfen. Beachten wir ferner dies. Für $\omega = i\infty$ wird η nach Formel (3) unendlich, die vier (neuen) ζ aber, welche $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega+5}{n}$, $\frac{\omega+2\cdot 5}{n}$, $\frac{\omega+3\cdot 5}{n}$ entsprechen, werden Null. Wir haben also den Satz, der sogleich zur Verwendung kommen soll: *Für $\eta = \infty$ werden mindestens vier von den sechs Werten ζ gleich Null.*

Nun habe ich im zweiten Abschnitte meiner „Ikosaederarbeit" die simultanen Invarianten eines Ikosaeders und einer quadratischen Form untersucht und gezeigt, daß sich alle aus *vier* Invarianten A, B, C, D zusammensetzen lassen. Nimmt man diese quadratische Form gleich $(x_1 - \eta x_2)(x_1 - \zeta x_2)$, so gehen A, B, C, D in Ausdrücke zweiten, sechsten, zehnten und fünfzehnten Grades in η und ζ über, und diese bilden nach den eben dort gegebenen Entwicklungen die Gesamtheit derjenigen Ausdrücke, welche sich (homogen geschrieben) nicht ändern, sobald man auf η und ζ simultan dieselben Ikosaedersubstitutionen anwendet. Ich setze insbesondere her:

$$(6) \qquad A = \frac{1}{4}(\eta - \zeta)^2,$$

$$(7) \qquad B = \frac{1}{2}\{-(\eta+\zeta)^4\eta\zeta - (\eta+\zeta)^2\eta^2\zeta^2 - 2\eta^3\zeta^3 + (\eta+\zeta)(1-\eta^5\zeta^5)\}.$$

Nun folgt ohne weiteres, daß die Modulargleichung für $n = 4$, weil vom sechsten Grade, die Gestalt haben muß:

$$B - \lambda A^3 = 0,$$

und lassen wir hier η unendlich werden, so zeigt sich, daß $\lambda = 0$ ist.

Daher ist $B = 0$ die Modulargleichung für $n = 4$, wo B den Ausdruck (7) bedeutet[48].

Es sind nun diese Modulargleichungen für $n = 2$ und $n = 4$, die ich gebrauche, um vom Ikosaeder aus zu den Formeln **Hermites** und **Brioschis** zu gelangen. Dabei muß ich freilich die gesamten Entwicklungen des zweiten und dritten Abschnitts meiner „Ikosaederarbeit" als bekannt voraussetzen.

§ 5.

Geometrisches über die Bring-Jerrardsche Form[49].

Im dritten Abschnitte der genannten Arbeit habe ich die fünf Wurzeln y einer Gleichung fünften Grades, für welche $\sum y = 0$ ist, ihrem Verhältnisse nach als Pentaederkoordinaten eines Raumpunktes gedeutet und insbesondere die Fläche zweiten Grades Ψ studiert, deren Gleichung $\sum y^2 = 0$ ist. Auf dieser Fläche liegt eine Raumkurve sechster Ordnung, K, vom Geschlechte 4, der Durchschnitt mit der Diagonalfläche $\sum y^3 = 0$. *Diese Kurve ist das Bild der Bring-Jerrardschen Gleichung*, insofern die Wurzeln y der letzteren, in bestimmter Ordnung genommen, jedesmal die Koordinaten eines Kurvenpunktes vorstellen[50].

Auf der Fläche zweiten Grades Ψ verlaufen außerdem die beiden Scharen geradliniger Erzeugender; und wenn wir denselben, wie damals geschah, die Parameter η, ζ beilegen, so ist die Kurve sechster Ordnung K eben durch die Gleichung (4):

$$f(\eta, \zeta) = 0$$

gegeben[51], die dem letzten Paragraphen zufolge ausdrückt, daß η, ζ durch quadratische Transformationen des elliptischen Integrals auseinander hervorgehen.

Die Kurve K ist also das geometrische Bild der quadratischen Transformation. Wählt man eine Erzeugende η aus, so schneidet sie die Kurve K in drei Punkten; die drei durch diese Punkte verlaufenden Erzeugenden der anderen Art haben als Parameter die drei Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ der Gleichung $f(\eta, \zeta) = 0$. Berechnet man jetzt $J = 1728\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}$ und ebenso

[48]) Dies zeigt, daß für $\eta = \infty$ *fünf* Werte von ζ gleich Null werden, und *einer* gleich unendlich.

[49]) [Vgl. zu den folgenden Paragraphen die in Bd. 2 dieser Ausgabe auf S. 383/84 gegebenen Erläuterungen zu der durch die Kurve $f(\eta, \zeta) = 0$ — in der dortigen Bezeichnung $\alpha = 0$ — vermittelten konformen Abbildung.]

[50]) Das Geschlecht der Kurve ($p = 4$) stimmt deshalb mit dem Geschlecht der später anzugebenden Galoisschen Resolvente der Bring-Jerrardschen Gleichung überein.

[51]) Vgl. die **Gordansche** Arbeit. Es ist $f(\eta, \zeta) = 0$ damit gleichbedeutend, daß $\sum y^3 = 0$ ist.

die drei Werte $J' = 1728\,\frac{H^3(\zeta_1)}{f^5(\zeta_1)}$, $1728\,\frac{H^3(\zeta_2)}{f^5(\zeta_2)}$, $1728\,\frac{H^3(\zeta_3)}{f^5(\zeta_3)}$, so hat man die drei Invarianten J', welche aus J durch quadratische Transformation hervorgehen[52]).

§ 6.

Die Bring-Jerrardsche Form als Resolvente der Ikosaedergleichung.

Die Bring-Jerrardsche Gleichung fünften Grades ist an sich keine Resolvente der Ikosaedergleichung $1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = J$, das heißt, es gibt keinen in η (und J) rationalen Ausdruck, welcher einer Bring-Jerrardschen Gleichung genügt. Würde es einen solchen geben, so wären die Koordinaten eines Punktes der Kurve K rational durch den Parameter η dargestellt und also das Geschlecht der Kurve nicht 4, sondern 0. Vielmehr muß man, um, vom Ikosaeder ausgehend, zur Bring-Jerrardschen Gleichung zu gelangen, eine Hilfsgleichung vom dritten Grade lösen[53]), und dieser Hilfsgleichung habe ich in meiner „Ikosaederarbeit" (S. 525) [S. 344] folgende Form erteilt:

$$\frac{8\lambda^3}{J} - 12\lambda^2 + 6\lambda + (J-2) = 0;$$

ich habe dabei nur jetzt J statt des früheren X geschrieben. Setzt man hier $2\lambda = \varrho(1-J) + J$, so kommt:

$$\varrho^3\left(\frac{1-J}{J}\right) + 3\varrho - 2 = 0,$$

oder:

$$J = \frac{\varrho^3}{(\varrho+2)(\varrho-1)^2}. \tag{8}$$

Aus dem vorhergehenden Paragraphen folgt nun, *daß diese Gleichung reduzibel werden muß, wenn man neben J einen der drei Werte J' einführt, welche aus J durch quadratische Transformation hervorgehen.* Anders ausgedrückt: die Gleichung wird reduzibel, wenn wir eine der drei Wurzeln der Hilfsgleichung dritten Grades adjungieren, auf welche wir oben die Transformation zweiter Ordnung zurückgeführt haben:

$$J = \frac{(4\tau-1)^3}{27\tau}.$$

Dies trifft in der Tat zu. Denn die unmittelbare Vergleichung ergibt:

$$\varrho = \frac{8\tau-2}{8\tau+1}. \tag{9}$$

[52]) Genau ebenso versinnlicht der Durchschnitt der Fläche Ψ mit der Fläche vierter Ordnung $\Sigma y^4 = 0$ die Transformation dritter Ordnung $\varphi(\eta, \zeta) = 0$.

[53]) Diese kann, wegen $p = 4$, auch nicht etwa auf den zweiten Grad herabgedrückt werden.

Will man das Doppelverhältnis $\sigma = \varkappa^2$ einführen, so hat man für die drei Wurzeln:

$$\varrho_1 = 2\,\frac{\sigma^2-\sigma+1}{\sigma-2\cdot 2\sigma-1}, \quad \varrho_2 = 2\,\frac{\sigma^2-\sigma+1}{\sigma+1\cdot 2\sigma-1}, \quad \varrho_3 = -2\,\frac{\sigma^2-\sigma+1}{\sigma+1\cdot\sigma-2}. \tag{10}$$

Man sieht hieraus den inneren Grund, weshalb man bei dem Bestreben, die Gleichungen fünften Grades durch elliptische Funktionen zu lösen, anfänglich zur Bring-Jerrardschen Form kommen konnte. Der Grund liegt darin, *daß man nicht von der rationalen Invariante J des elliptischen Integrals, sondern vom Doppelverhältnisse $\sigma = \varkappa^2$ ausging, und so die Wurzeln der kubischen Hilfsgleichung, ohne es zu wissen, adjungierte.*

§ 7.

Die Hermitesche Gleichung.

Diese Betrachtungen finden ihre volle Bestätigung, wenn man die Gleichung fünften Grades behandelt, die Hermite durch elliptische Funktionen löst[54]):

$$y^5 - y - \frac{2}{5\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{1+\varkappa^2}{\sqrt{\varkappa(1-\varkappa^4)}} = 0. \tag{11}$$

Bemerken wir zunächst, daß alle Formeln Hermites im wesentlichen ungeändert bleiben, wenn man $\varkappa^2$ durch $\frac{1}{\varkappa^2}$ ersetzt. Es ist daher zweckmäßig, eine symmetrische Verbindung derselben einzuführen, also etwa

$$\tau = -\frac{1}{4}\left(\varkappa^2 + \frac{1}{\varkappa^2} - 2\right),$$

dasselbe τ, welches in der von uns für Transformation zweiter Ordnung aufgestellten Gleichung dritten Grades vorkommt (nach Gleichung (6a) des vorigen Abschnitts). Dann wird die Hermitesche Gleichung

$$y^5 - y - \frac{4\sqrt{i}}{5\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{\tau-1}{2}}}{\sqrt[4]{\tau}} = 0, \tag{12}$$

und um eine beliebige Bring-Jerrardsche Gleichung, die ich so schreiben will:

$$y^5 + 5\beta y + \gamma = 0, \tag{13}$$

auf sie zu reduzieren, bekommt man für τ die quadratische Gleichung:

$$\frac{256\beta^5}{\gamma^4} = \frac{4\tau}{(\tau-1)^2}, \tag{14}$$

die aufgelöst ergibt:

$$\frac{\tau+1}{\tau-1} = \pm\frac{\sqrt{256\beta^5+\gamma^4}}{\gamma^2}. \tag{15}$$

[54]) Die Irrationalitäten des letzten Koeffizienten rühren nur davon her, daß die beiden anderen Koeffizienten gleich 1 gemacht sind.

Hier bemerke man

1. daß die Quadratwurzel aus der Diskriminante von (13) gezogen ist.
2. daß ein Vorzeichenwechsel derselben τ in $\frac{1}{\tau}$ verwandelt.

Nun entspricht der Wechsel des Vorzeichens der Diskriminante nach meiner früheren Darstellung einer Vertauschung der beiden durch den Raumpunkt y hindurchlaufenden geradlinigen Erzeugenden, und die Gleichung $\tau' = \frac{1}{\tau}$ bedeutet, nach Abschnitt II der gegenwärtigen Arbeit, eine quadratische Transformation. Der Wechsel zwischen den beiden Erzeugenden bringt also eine quadratische Transformation mit sich, wie es nach dem Vorhergehenden sein sollte.

Noch evidenter wird die Übereinstimmung, wenn man nach § 7 des dritten Abschnittes meiner „Ikosaederarbeit“ (S. 553/54 [S. 373/74]), den ich eben zu diesem Zwecke dort eingeschaltet habe, für die Hermitesche Gleichung (11) die beiden dort X_1, X_2 genannten Ikosaederkonstanten berechnet. So kommt:

$$(16)\qquad X_1 = \frac{4}{27}\cdot\frac{(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^3}{\varkappa^4(1-\varkappa^2)^2}, \qquad X_2 = \frac{(1+14\varkappa^2+\varkappa^4)^3}{108\varkappa^2(1-\varkappa^2)^4},$$

und dies sind, wie im ersten Abschnitte der gegenwärtigen Arbeit gezeigt wurde, genau die absoluten Invarianten J, J' der beiden durch quadratische Transformation auseinander hervorgehenden Integrale:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y\cdot\overline{1-y}\cdot\overline{1-\varkappa^2 y}}} \quad\text{und}\quad \int\frac{dx}{\sqrt{\overline{1-x^2}\cdot\overline{1-\varkappa^2x^2}}}.$$

Es ergibt sich hiernach, daß die Bring-Jerrardsche Gleichung, welche nach § 6 aus der Ikosaedergleichung

$$(17)\qquad 1728\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \frac{(4\tau-1)^3}{27\tau}$$

abgeleitet werden kann, mit der Hermiteschen Gleichung fünften Grades (12) geradezu identisch ist, und daß wir umgekehrt (17) als einfachste Galoissche Resolvente der in der Gestalt (12) geschriebenen Hermiteschen Gleichung ansprechen können[55]).

§ 8.

Die Jacobischen Gleichungen sechsten Grades mit $B = 0$.

Gehen wir nun zur Betrachtung der Jacobischen Gleichungen sechsten Grades mit $B = 0$ über. In § 4 dieses Abschnittes haben wir die quadratische Form

$$A_1 x_1^2 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2,$$

[55]) In der Tat ist das Geschlecht von (17) gleich 4. Übrigens kann (17), wie oben angegeben [Abschn. III, S. 63], direkt durch hypergeometrische Reihen gelöst werden.

die im zweiten Abschnitte meiner „Ikosaederarbeit“ der Betrachtung zugrunde liegt, durch

$$(x_1 - \eta x_2)(x_1 - \zeta x_2)$$

ersetzt. Das heißt, im Sinne der damals gebrauchten geometrischen Redeweise, wir haben den Punkt $A_0 : A_1 : A_2$ ersetzt durch die beiden Berührungspunkte η, ζ der beiden von ihm an den Kegelschnitt $A = 0$ gelegten Tangenten. Deshalb ist also die Gleichung

$$(7)\qquad B(\eta, \zeta) = 0,$$

wie sie soeben für die Transformation vierter Ordnung aufgestellt wurde, die Bedingung dafür, daß sich die in den Punkten η, ζ des Kegelschnitts $A = 0$ konstruierten Tangenten auf der Kurve $B = 0$ kreuzen. Ziehen wir jetzt in einem Punkte η des Kegelschnitts $A = 0$ eine Tangente und konstruieren die sechs Berührungspunkte der sechs weiteren Tangenten, welche man von den Durchschnittspunkten dieser geraden Linie mit der Kurve B an den Kegelschnitt A legen kann. Nun sind die sechs Wurzeln der Modulargleichung für Transformation vierten Grades, wie bekannt, paarweise untereinander wieder durch Transformation vierter Ordnung verbunden. Daher müssen sich die sechs konstruierten Tangenten noch dreimal zu zwei wieder auf der Kurve B schneiden. Und so haben wir den Satz:

Man kann um $A = 0$ unendlich viele Dreiecke beschreiben, deren Ecken auf $B = 0$ liegen. Jeder Punkt auf B ist Ecke eines solchen Dreiecks, während jede Tangente von A dreimal als Dreiecksseite benutzt wird.

Ich habe diesen Satz S. 542 [S. 362] meiner „Ikosaederarbeit“ ohne Beweis mitgeteilt und damals aus den von Brioschi gegebenen Formeln erschlossen. Umgekehrt benutze ich ihn hier, um die Übereinstimmung meiner Überlegungen mit Brioschis Rechnungen zu erweisen.

§ 9.

Die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

Ich lasse nun den Überblick über die verschiedenen Auflösungsarten der Gleichungen fünften Grades folgen, den ich schon das vorige Mal [in der vielfach genannten „Ikosaederarbeit“] in Aussicht stellte. Ich wünsche deutlich zu machen, daß sich die verschiedenen bis jetzt bekannten Methoden mit der von mir gegebenen in allerengste Beziehung setzen lassen.

Mein Ansatz verlangt zunächst, die Gleichung fünften Grades durch Tschirnhausentransformation so umzugestalten, daß $\sum y = 0$, $\sum y^2 = 0$ ist. Dann wird nach Adjunktion der Quadratwurzel aus der Diskriminante auf rationalem Wege eine Ikosaedergleichung hergestellt. — Hermite dagegen machte, um eine durch elliptische Funktionen lösbare Gleichung zu haben, auch noch $\sum y^3$ zu Null. Dazu gehörte außer der Quadratwurzel aus der Diskriminante die Auflösung noch einer kubischen Hilfsgleichung. Die letztere war, wie meine Methode zeigte, jedenfalls überflüssig. Wir können uns nach den Entwicklungen der letzten Paragraphen so ausdrücken: *sie war das Äquivalent dafür, daß man statt der absoluten Invariante des elliptischen Integrals den Modul $\varkappa^2$ suchte.*

Die Verbesserung, die in der Vermeidung der kubischen Hilfsgleichung liegt, kann, wie oben gezeigt wurde (Abschn. II, § 18), eben auch bei Kroneckers Lösung[56]) angebracht werden. Nur ist die Änderung, welche daraus resultiert, keine so tiefgreifende wie bei Hermite, da es sich nur darum handelt, die Berechnung der transzendenten Funktionen umzugestalten und der algebraische Teil der Theorie nicht berührt wird. Dieser algebraische Teil ist nun seinerseits mit meinem Verfahren wieder eng verwandt.

Kronecker leitet aus der allgemeinen Gleichung fünften Grades nach Adjunktion der Quadratwurzel aus der Diskriminante eine allgemeine Jacobische Gleichung sechsten Grades auf rationalem Wege ab und verwandelt dann letztere mit Hilfe einer Quadratwurzel in eine solche mit $A = 0$, d. h. im wesentlichen in eine Ikosaedergleichung. Dieselben Schritte werden bei mir in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt; ich gebrauche zuerst die Hilfsquadratwurzel (bei der Tschirnhausentransformation) und dann erst die Quadratwurzel aus der Diskriminante. Aber im Grunde kommt das auf dasselbe hinaus. Denn im Sinne meiner geometrischen Redeweise bedeutet die Herstellung der *allgemeinen* Jacobischen Gleichung sechsten Grades, daß man dem Raumpunkte $y_0, \ldots y_4$, der die Gleichung fünften Grades vertritt, ein *Paar* von Erzeugenden der *einen* Art der Fläche Ψ zuordnet[57]), welches man dann, um zu einer Gleichung mit $A = 0$ zu gelangen, am einfachsten in seine zwei Bestandteile zerlegt (siehe den zweiten Abschnitt meiner „Ikosaederarbeit"). Dann ist also schließlich dem Raumpunkte y *eine* Erzeugende der *einen* Art zugeordnet. Eben dies erreicht meine Methode, indem sie zunächst dem Punkte y einen Punkt auf der Fläche Ψ zuordnet und dann unter den beiden durch diesen Punkt hindurchlaufenden Erzeugenden die eine wählt. —

[56]) Ich verstehe im Texte unter Kroneckers Lösung immer diejenige, die er in seinem ersten Briefe an Hermite angab (Comptes Rendus Bd. 46, Juni 1858). — Die Identität der in den beiden Fällen gebrauchten Hilfsgleichung bildet den wesentlichen Inhalt meines in den Rendiconti dell' Istituto Lombardo (April 1877) veröffentlichten [vorstehend als Nr. LXXXI abgedruckten] Briefes an Brioschi.

[57]) Von dieser Auffassungsweise ausgehend erhält man sehr einfache Formeln zur Herstellung der allgemeinen Jacobischen Gleichung, bei denen man nicht, wie bei den Brioschischen, den Begriff der zyklischen Funktion benutzt.

Ich glaube nun aber nach den Entwicklungen des dritten hier vorangehenden Abschnittes auch das allgemeine Prinzip bezeichnen zu können, demzufolge man die Auflösung der Gleichungen fünften Grades auf die Ikosaedergleichung zurückführen *muß*. Dieses Prinzip, wie es sich hier darstellt, scheint folgendes zu sein. Sicher wird man suchen, solange es angeht, die Auflösung der allgemeinen algebraischen Gleichungen auf diejenige spezieller Gleichungen zurückzuführen, welche nur *einen* Parameter enthalten[58]). Denn nur die algebraischen Funktionen *einer* Variablen beherrscht man zur Zeit einigermaßen. Unter diesen speziellen Gleichungen scheinen nun immer diejenigen die wichtigsten zu sein, *deren Galoissche Resolvente das kleinstmögliche Geschlecht besitzt.* Hat man bei einer Gleichung fünften Grades die Quadratwurzel aus der Diskriminante adjungiert, so kann dies Geschlecht bis auf Null herabsinken, und dem eben entspricht, daß man die Ikosaedergleichung einführt. Unzweckmäßig aber ist es, wenn man z. B. als Normalform der Gleichungen fünften Grades die Bring-Jerrardsche wählt. Denn dann ist das Geschlecht der Galoisschen Resolvente gleich 4, und dies bringt den doppelten Mißstand mit sich, daß die zugrunde gelegte Irrationalität minder einfach ist, und daß es schwieriger ist, die allgemeine Gleichung fünften Grades auf sie zurückzuführen[59]).

München, Anfang Mai 1878.

[58]) Die Gesichtspunkte, welche Kronecker in seiner zweiten Arbeit über Gleichungen fünften Grades angedeutet hat (Berliner Monatsberichte 1861, Crelles Journal Bd. 59), zielen nach anderer Richtung. [Vgl. die Erläuterungen, welche ich zu Kroneckers Arbeit in meiner Abhandlung in den Math. Annalen, Bd. 61 (1905) = Abh. LXI in Bd. 2 dieser Ausgabe gab. K.]

[59]) [Bei dem Wiederabdruck ist ein Anhang, der sich nicht auf den Inhalt der vorstehenden Arbeit LXXXII bezog, sondern rechnerische Ergänzungen zu der „Ikosaederarbeit" brachte, fortgelassen, weil er schon bei dem Wiederabdruck der letztgenannten Arbeit in Bd. 2, soweit es erforderlich schien, berücksichtigt wurde. — Im vorangehenden ist fortgesetzt auf die „Ikosaederarbeit" verwiesen worden. Seitdem das „Ikosaederbuch" (Leipzig 1884) vorliegt, wird man gern auch dieses vergleichen, in dem die Entwicklungen jener Arbeit und z. T. auch der vorliegenden Nr. LXXXII in geglätteter Form wiedergegeben sind.]

LXXXIII. Über die Erniedrigung der Modulargleichungen.

[Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79).]

Die funktionentheoretische Methode, deren ich mich neuerdings bediente, um die Modulargleichungen für die niedersten Transformationsgrade $n = 2, 3, 4, 5, 7, 13$ zu untersuchen[1]), soll im folgenden dazu verwandt werden, die Resolventen fünften, siebenten und elften Grades zu definieren, welche man, einem berühmten Satze von Galois zufolge, für $n = 5, 7, 11$ aufstellen kann. Unter der *Definition* einer Gleichung, die (wie die hier in Betracht kommenden) einen Parameter enthält, verstehe ich dabei im Riemannschen Sinne die Verzweigung, welche die Unbekannte, als Variable aufgefaßt, in bezug auf den Parameter besitzt: Verzweigung so verstanden, daß nicht nur die Lage und Multiplizität der Verzweigungspunkte, sondern auch die Art angegeben wird, wie vermöge der Verzweigungspunkte die einzelnen Funktionszweige zusammenhängen.

Es ist ein allgemeines Problem, zu dessen Erledigung seither sehr wenig geschehen ist: die algebraische Gleichung, welche zu einer in diesem Sinne definierten Verzweigung gehört, in einfachster Form wirklich aufzustellen. In den drei hier behandelten Fällen vereinfacht sich dasselbe, ebenso wie in den in meiner früheren Abhandlung behandelten Beispielen, indem das Geschlecht p der Gleichung übereinstimmend gleich *Null* wird. Infolgedessen kann man den Parameter (die absolute Invariante J des elliptischen Integrals) in den drei Fällen bez. gleich setzen einer *rationalen* Funktion fünften, siebenten, elften Grades der Unbekannten, und wir haben die viel leichtere Aufgabe, diese rationale Funktion aus der uns bekannten Verzweigungsart zu berechnen. In der Tat genügen bei $n = 5$ und $n = 7$ ein paar Zeilen Rechnung, um die betr. rationale Funktion zu bilden,

[1]) *Über die Transformation der elliptischen Funktionen usw.*, Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79), S. 111 ff. [= der vorstehend abgedruckten Abh. LXXXII.] — Zitate auf bloße Seitenzahlen, welche im folgenden vorkommen, beziehen sich auf den vorliegenden Band.

während sich bei $n = 11$ Weitläufigkeiten einstellen, die ich noch nicht überwunden habe[2]).

Meine Endformeln für $n = 5, 7$ sind übrigens nicht eigentlich neu. Denn bei $n = 5$ komme ich, wie dies vorauszusehen war, zu der bekannten Gleichung:

$$x^5 - 10x^3 + 45x = C,$$

die Brioschi zuerst aufgestellt hat[3]) und zu der andererseits die Betrachtung des Ikosaeders hinleitet[4]), — während ich bei $n = 7$ eine Gleichung erhalte, die im wesentlichen zusammenfällt mit derjenigen, die Hermite in seinen hierhergehörigen Untersuchungen gewonnen hat[5]). Es liegt dies an dem gewissermaßen zufälligen Umstande, daß bei $n = 7$ die von Hermite gebrauchte Diskriminante der zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ bestehenden Modulargleichung mit den *rationalen* Invarianten des elliptischen Integrals enge zusammenhängt; sie ist, abgesehen von Faktoren, welche Δ[6]) verschwinden lassen, geradezu gleich $g_2^{\,2}$.

§ 1.
Die Angaben von Betti. Plan der Untersuchung.

Das Galoissche Theorem, um welches es sich hier handelt, wurde bekanntlich zuerst von Betti bewiesen[7]), der die ganzzahligen linearen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

in bezug auf die Moduln 5, 7, 11 untersuchte. Die Gesamtheit dieser Substitutionen erweist sich in bezug auf diese Moduln mit nur 60, 168, 660 äquivalent, und nun kommt das Galoissche Theorem darauf zurück, daß sich, in den einzelnen Fällen, Untergruppen bilden lassen,

[2]) [Ihre Überwindung gelang später in der in diesem Bande unter Nr. LXXXVI (1879) abgedruckten Arbeit.]

[3]) *Sul metodo di Kronecker* usw. Atti dell' Istituto Reale Lombardo, tomo I. [(1858) = Opere matematiche, Nr. CXI, Tomo III., S. 177 ff.]

[4]) Siehe Math. Annalen, Bd. 9 (1875/76), S. 204, Bd. 12 (1877), S. 523. [= Abh. LI und LIV in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 297/98 und S. 342.]

[5]) Vgl *Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré.* Comptes rendus, Bände 48, 49 (1859) [= Oeuvres, tome II., p. 38], sowie wegen der hier in Betracht kommenden Gleichung insbesondere: *Sur l'abaissement de l'équation modulaire du huitième degré*, in Tortolini's Annali di Matematica, Bd. 2 (1859), S. 59 [= Oeuvres, tome II., S. 83].

[6]) Wegen der Bezeichnungen siehe immer meine vorige Abhandlung. [= Nr. LXXXII].

[7]) *Sopra l'abbassamento delle equazione modulari delle funzione ellitiche;* Tortolini's Annali di scienze matematiche usw. Bd. 4 (1853). [= Opere matematiche, Nr. VI, tomo I., S. 81 ff.]. Siehe auch Hermites Bemerkung in einem Briefe an Jacobi, Crelles Journal Bd. 40 (1850), S. 289 [= Oeuvres, tome I., S. 135].

welche nur den fünften, siebenten, bez. elften Teil der Gesamtheit enthalten[8]).

Diese Untergruppen lauten nach **Bettis** Angaben folgendermaßen: [Ich nenne aus jeder Reihe mit einander gleichberechtigter Untergruppen immer nur eine als typisches Beispiel.]

1. $n=5$. Die Untergruppe umfaßt alle diejenigen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma=1)$$

welche modulo 5 mit einer der folgenden 12 übereinstimmen[9]):

$$\pm\omega, \quad \mp\frac{1}{\omega}, \quad \pm\frac{\omega+2}{\omega-2}, \quad \mp\frac{\omega-2}{\omega+2}, \quad \pm 3\cdot\frac{\omega-1}{\omega+1}, \quad \mp 3\cdot\frac{\omega+1}{\omega-1}.$$

Ich werde diese Untergruppe die *Gruppe I* nennen.

2. $n=7$. Bei $n=7$ gibt es *zwei* [Reihen unter sich gleichberechtigter] Untergruppen, die in Betracht kommen, und [*deren Vertreter*] *ich mit* II_a *und* II_b *bezeichnen will.* Dieselben umfassen alle diejenigen Substitutionen, welche modulo 7 entweder zu folgenden 24:

$$a\omega, \quad -\frac{a}{\omega}, \quad a\frac{\omega+2b}{\omega-b}, \quad -a\frac{\omega-b}{\omega+2b},$$

oder zu den folgenden

$$a\omega, \quad -\frac{a}{\omega}, \quad a\frac{\omega-3b}{\omega-b}, \quad -a\frac{\omega-b}{\omega-3b}$$

kongruent sind. Hier bedeuten a, b [beliebige] quadratische Reste modulo 7.

---

[8]) [Das volle Verständnis des in Rede stehenden Theorems wurde erst durch die bereits in den Vorbemerkungen genannten Untersuchungen von J. **Gierster** erreicht, dem es gelang, für jedes n, das einer Primzahl oder der Potenz einer ungeraden Primzahl gleich ist, sämtliche in der Gruppe

$$\omega' \equiv \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \pmod n$$
$$\alpha\delta-\beta\gamma \equiv 1 \pmod n$$

enthaltenen Untergruppen aufzuzählen. Sein Hauptergebnis für ungerade Primzahlen n besagt, daß Untergruppen von der Ordnung 12, 24, 60, wie es die besonderen von **Galois** entdeckten sind, auch für größere Primzahlen als 5, 7, 11 vorkommen. Nur weil 5, 7, 11 verhältnismäßig kleine Zahlen sind, fällt der Index dieser Untergruppen, nämlich $\frac{n\cdot(n^2-1)}{24}$, bzw. $\frac{n\cdot(n^2-1)}{48}$, bzw. $\frac{n\cdot(n^2-1)}{120}$ genau gleich n und nicht größer aus. Hierdurch wird bei den Zahlen 5, 7, 11 die ihnen zufolge des Galoisschen Satzes zukommende scheinbare Ausnahmestellung erklärt. Näheres siehe in den Originalarbeiten von **Gierster**: Math. Annalen, Bd. 18 (1881), S. 319 ff., Leipziger Berichte Bd. 37 (1885), S. 291 ff., Math. Annalen, Bd. 26 (1885/86), S. 309 ff., oder in den „Modulfunktionen“, Bd. 1, Abschnitt II, Kap. 8 und 9. K.]

[9]) [In den folgenden Formeln sind die Substitutionen öfters in der Weise geschrieben, daß $\alpha\delta-\beta\gamma$ nicht congruent Eins, sondern einem der anderen quadratischen Reste (mod n) ist, was natürlich nur ein äußerlicher Unterschied ist.]

3. $n=11$. Auch bei $n=11$ gibt es *zwei* [Reihen gleichberechtigter] Untergruppen, [*deren Vertreter*] III_a *und* III_b *genannt werden sollen.* Die erste umfaßt alle Substitutionen, welche modulo 11 zu folgenden 60 kongruent sind:

$$a\omega, \quad -\frac{a}{\omega}, \quad a\frac{\omega-2b}{\omega-b}, \quad -a\frac{\omega-b}{\omega-2b}.$$

Für die andere lauten diese Formeln:

$$a\omega, \quad -\frac{a}{\omega}, \quad a\frac{\omega-6b}{\omega-b}, \quad -a\frac{\omega-b}{\omega-6b}$$

Beidemal bedeuten a, b [beliebige] quadratische Reste modulo 11. —

Die verschiedenen Ausdrücke $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ sind vermöge der Substitutionen dieser Untergruppen zu nur fünf, sieben, elf *Repräsentanten* äquivalent, für welche man am einfachsten die folgenden nimmt:

$$\omega, \ \omega+1, \ \omega+2, \ldots, \ \omega+(n-1). \qquad (n=5,7,11).$$

Ich benutze diese Angaben nun folgendermaßen. Ich denke mir eine in der positiven Halbebene ω überall eindeutige Funktion $y(\omega)$, welche die Eigenschaft hat, bei den Substitutionen der Untergruppe I, oder II, oder III ungeändert zu bleiben, nicht aber bei *allen* Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$. Letztere Eigenschaft kommt, wie bekannt, der absoluten Invariante J zu, und überdies nimmt J *nur* für solche Werte ω denselben Wert an, die durch eine Substitution von der Form $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ miteinander verknüpft sind.

Daher gehören zu jedem J n Werte von y:

$$y(\omega), \ y(\omega+1), \ldots, y(\omega+(n-1))$$

und y ist mit J durch eine algebraische Gleichung vom Grade n verbunden.

Man breite jetzt die komplexen Werte von J über eine Ebene aus und konstruiere über letzterer die y entsprechende n-blättrige Fläche. Ich verlange dann zunächst, Lage und Multiplizität ihrer Verzweigungspunkte anzugeben, dann aber zu bestimmen, wie vermöge der Verzweigungspunkte die n verschiedenen Funktionszweige zusammenhängen.

Was die erstere Frage betrifft, so können nach den Entwicklungen meiner vorigen Arbeit Nr. LXXXII (S. 30) Verzweigungspunkte nur bei $J=0, 1, \infty$ vorkommen, und zwar können bei $J=0$ (sofern das Blatt nicht unverzweigt bleibt) immer nur je drei, bei $J=1$ (unter der entsprechenden Einschränkung) immer nur je zwei Blätter zyklisch verbunden sein. Man hat also nur anzugeben: 1. wie bei $J=\infty$ die Verzweigung beschaffen ist, 2. wie viele Blätter bei $J=0$, resp. $J=1$ isoliert verlaufen. Dies beantwortet sich, wie ich sogleich bei $n=5$ ausführe, durch eine einfache Betrachtung der *parabolischen* und der *elliptischen* Substitutionen (siehe S. 25/26), welche in der Gesamtheit der Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ enthalten sind.

Die zweite Frage erledigt sich durch Betrachtung des zur Funktion $y(\omega)$ gehörigen *Fundamentalpolygons* (S. 35). Den n eben angegebenen Repräsentanten entsprechend kann man als Fundamentalpolygon für y in den drei Fällen ein Aggregat von $5, 7, 11$ nebeneinanderliegenden Elementarvierecken (siehe S. 24) wählen. Man findet dann leicht, wie die Kanten dieses Fundamentalpolygons auf der betr. Riemannschen Fläche zu vereinigen sind, und da, wie schon angegeben, $p = 0$ wird, kann man in der Ebene durch nebeneinanderliegende Dreiecke die gewünschte Verzweigung versinnlichen.

§ 2.
Der Fall $n = 5$.

Um die Verzweigungspunkte zunächst der *fünfblättrigen* Fläche zu bestimmen, lassen wir vor allen Dingen J seinen Unendlichkeitspunkt umkreisen. Dann verwandelt sich ein passend gewähltes zugehöriges ω in $\omega + 1$. Die Wurzel $y(\omega)$ geht also in $y(\omega+1)$ über, diese in $y(\omega+2)$ usw. Demnach haben wir als ersten Satz: *Bei $J = \infty$ hängen die fünf Blätter in einem Zyklus zusammen.*

Betrachten wir ferner den Wert $J = 1$. Wir können diesem Werte entsprechend $\omega = i$ wählen, so daß also die fünf Repräsentanten in folgende Zahlen übergehen:

$$i,\ i+1,\ i+2,\ i+3,\ i+4.$$

Nun ist jeder Punkt $(i+k)$ festbleibendes Element bei einer *elliptischen Substitution von der Periode Zwei* (S. 25), die sich, wie man leicht findet, durch folgende Formel darstellt:

$$\omega' = \frac{k\omega - (k^2+1)}{\omega - k}. \tag{1}$$

Hier setze man $k = 0, 1, \ldots, 4$ und frage nun, ob die betreffende Substitution mit zu der Untergruppe I gehört, welche $y(\omega)$ ungeändert läßt? Ist das der Fall, so ist $y(\omega)$ eine für diesen Wert von ω unverzweigte Funktion von J, anderenfalls nicht. — Man findet so, *daß bei $J = 1$ nur ein Blatt unverzweigt bleibt.* Denn die Formel (1) gibt für $k = 0, 1, \ldots, 4$ nur dann eine Substitution I, wenn $k = 0$ genommen wird, nämlich $\omega' = -\frac{1}{\omega}$.

Genau so beantwortet sich die Frage für $J = 0$. Man wähle als zugehörige Werte von ω die folgenden:

$$\varrho,\ \varrho+1,\ \varrho+2,\ \varrho+3,\ \varrho+4,$$

wo $\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, und schreibe allgemein eine *der beiden elliptischen Substitutionen von der Periode Drei* hin (S. 25), welche $\varrho + k$ ungeändert lassen. Man findet für eine der letzteren:

$$\omega' = \frac{(k-1)\omega - (k^2-k+1)}{\omega - k}, \tag{2}$$

und setzt man hier k der Reihe nach $= 0, 1, \ldots, 4$, so trifft man zweimal und nur zweimal auf Substitutionen der Gruppe I, nämlich bei $k = 2$ und bei $k = 4$. Daher: *bei $J = 0$ verlaufen zwei Blätter isoliert.*

Fassen wir zusammen, so folgt: *Bei $J = \infty$ hängen alle Blätter in einem Zyklus, bei $J = 1$ zweimal zwei, bei $J = 0$ einmal drei zusammen. Das Geschlecht p wird also gleich Null.*

Betrachten wir jetzt das Fundamentalpolygon, wie es durch die Fig. 1 versinnlicht wird.

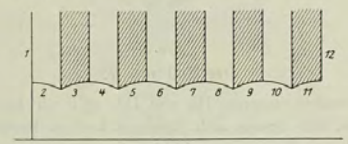


Fig. 1.

Der Substitution $\omega' = \omega + 5$ entsprechend sind jedenfalls die beiden vertikalen Kanten 1 und 12 zu vereinigen, so daß ein Fünfeck entsteht, wie es Fig. 2 vorstellt.

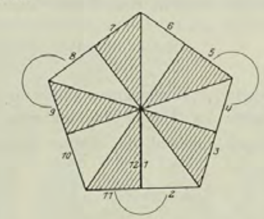


Fig. 2.

Von den Kanten dieses Fünfecks sind nun (wie in der Figur bereits [durch die Doppelpfeile] angedeutet ist) den Substitutionen (1), (2) entsprechend folgende zusammenzufügen: der *einen* Substitution (1) entsprechend 11 und 2, den *zwei* Substitutionen (2) entsprechend einmal 4 und 5, 3 und 6, das andere Mal 8 und 9, 7 und 10. Dadurch ist aber bereits über alle Kanten verfügt, und man erhält die Fig. 3, welche die Verzweigung bei $n = 5$ in der gewünschten Weise erläutert.

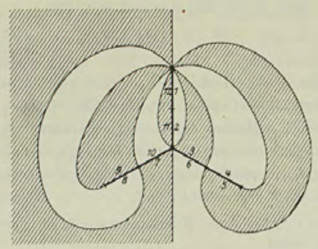


Fig. 3.

§ 3.

Der Fall $n = 7$.

Von den beiden Gruppen IIa und IIb will ich hier nur die erste betrachten. Bei IIb ergeben sich durchaus analoge Resultate, mit *einer* Abweichung, die am Schlusse des Paragraphen angegeben wird.

Man schließt sofort, wie bei $n = 5$:

1. *Bei* $J = \infty$ *hängen alle Blätter der nun siebenblättrigen Fläche im Zyklus zusammen.*

2. *Bei* $J = 1$ *hängen zweimal zwei Blätter zusammen.* Denn unter den Substitutionen (1):

$$\omega' = \frac{k\omega - (k^2 + 1)}{\omega - k}$$

(wo nun k die Werte $0, 1, \ldots, 6$ annehmen kann) finden sich, $k = 0, 4, 5$ entsprechend, *drei*, welche der Gruppe IIa angehören.

3. *Bei* $J = 0$ *hängen zweimal drei Blätter zusammen.* Denn unter den Substitutionen (2):

$$\omega' = \frac{(k-1)\omega - (k^2 - k + 1)}{\omega - k}$$

findet sich für $k = 0, 1, \ldots, 6$ nur *eine*, welche IIa angehört, nämlich diejenige, welche $k = 2$ entspricht.

Demnach ist also wieder $p =$ *Null.*

Wir haben des ferneren ein Fundamentalpolygon, welches durch Fig. 4 vorgestellt wird:

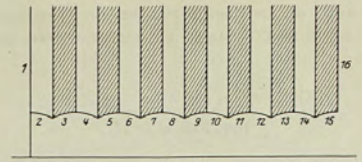


Fig. 4.

Hier sind vor allen Dingen $\omega' = \omega + 7$ entsprechend die beiden Kanten 1 und 16 zu vereinigen, so daß das Siebeneck der Fig. 5 entsteht.

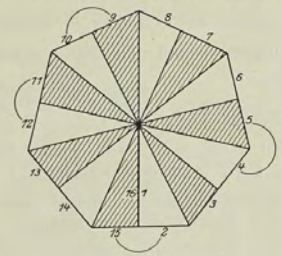


Fig. 5.

Es ist ferner den drei in Betracht kommenden Substitutionen (1) entsprechend [wie in Fig. 5 durch die Doppelpfeile angedeutet] 15 mit 2, 9 mit 10, 11 mit 12 zu vereinigen, und der einen Substitution (2) entsprechend 4 mit 5, 3 mit 6. Hieraus folgt von selbst, daß 7 mit 14, 8 mit 13 zu verbinden ist, und man erhält die Zeichnung der Fig. 6.

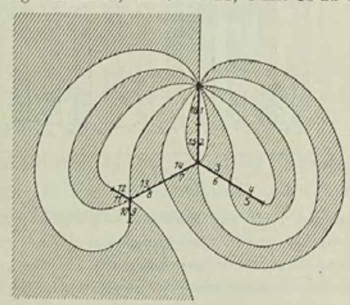


Fig. 6.

Wie man sieht, ist dieselbe unsymmetrisch. Vertauscht man recht und links, so erhält man diejenige Figur, welche der Gruppe IIb ent spricht.

§ 4.

Der Fall $n = 11$.

Von den beiden Gruppen IIIa und IIIb, die bei $n = 11$ auftrete betrachte ich wieder nur die erstere. Dann ergeben sich hinsichtlich de elfblättrigen Fläche, welche das zugehörige $y(\omega)$ als Funktion von darstellt, zunächst folgende Sätze:

1. *Bei $J = \infty$ hängen die 11 Blätter in einem Zyklus zusamme*

2. *Bei $J = 1$ hängen viermal zwei Blätter zusammen.* Denn unte den Substitutionen (1):

$$\omega' = \frac{k\omega - (k^2 + 1)}{\omega - k}$$

finden sich für $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$ *drei*, welche der Gruppe IIIa z gehören, den Werten $k = 0, 1, 8$ entsprechend.

3. *Bei $J = 0$ hängen dreimal drei Blätter zusammen.* Denn unte den Substitutionen (2):

$$\omega' = \frac{(k-1)\omega - (k^2 - k + 1)}{\omega - k}$$

gibt es *zwei*, welche zu IIIa gehören, entsprechend $k = 4$ und $k = 7$.

Dementsprechend ist abermals $p = Null$.

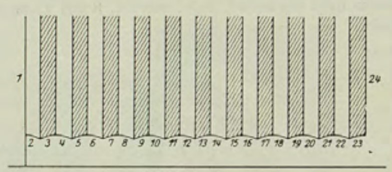


Fig. 7.

Betrachten wir jetzt das Fundamentalpolygon (siehe Fig. 7), so e halten wir zunächst durch Vereinigung von 1 und 24 das Elfeck de Fig. 8 und dann durch Berücksichtigung der zu IIIa gehörigen [in Fig. durch Doppelpfeile gekenzeichneten] Substitutionen (1), (2) die Fig. 9.

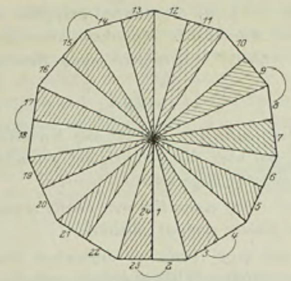


Fig. 8.

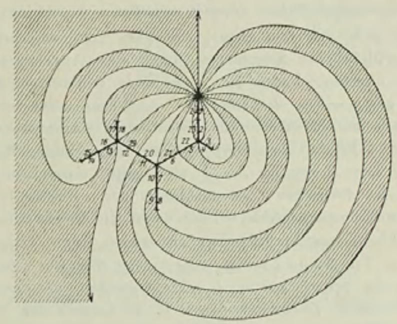


Fig. 9.

Auch sie ist wieder unsymmetrisch; vertauscht man rechts und links, so erhält man diejenige Figur, welche der Gruppe IIIb entspricht.

§ 5.

Allgemeines über die Aufstellung der Gleichungen.

Da in den drei Fällen p übereinstimmend gleich Null ist, so kann ich y so wählen (S. 29/30), daß J eine rationale Funktion von y ist:

$$J = \frac{\varphi(y)}{\psi(y)}.$$

(Hier bedeuten φ und ψ ganze Funktionen von y bezüglich vom fünften, siebenten, elften Grade.) — Nun sollen für $J = \infty$ sämtliche Wurzeln y

koinzidieren. *Daher ist $\psi(y)$ die fünfte, bezüglich siebente oder elfte Potenz eines linearen Ausdrucks.* Man kann also, da y noch drei willkürliche Konstante enthält[10], *ψ einfach gleich Eins nehmen*, und also schreiben

$$J = \varphi(y).$$

Es enthält y dann noch zwei willkürliche Konstante.

Nun soll nach den über die Verzweigung gemachten Angaben $\varphi(y)$ in den drei Fällen folgende Eigenschaften besitzen:

1. *Bei $n = 5$ soll $\varphi(y)$ einen linearen Faktor kubisch und $\varphi(y) - 1$ einen quadratischen Faktor doppelt enthalten;*

2. *Bei $n = 7$ soll $\varphi(y)$ einen quadratischen Faktor kubisch und $\varphi(y) - 1$ einen quadratischen Faktor doppelt enthalten;*

3. *Bei $n = 11$ soll $\varphi(y)$ einen kubischen Faktor dreifach und $\varphi(y) - 1$ einen biquadratischen Faktor doppelt enthalten.*

Es fragt sich, wie weit $\varphi(y)$, abgesehen von den zwei noch in y enthaltenen willkürlichen Konstanten, durch diese Angaben bestimmt ist. Dies hängt offenbar davon ab, *wie viele n-blättrige Riemannsche Flächen es gibt, welche die von uns angegebene Zahl und Lage der Verzweigungspunkte besitzen.* Um hierüber zu entscheiden, denke man sich eine solche Fläche längs derjenigen n Linien, welche das Stück der reellen Achse von $J = 0$ bis $J = 1$ überlagern, zerschnitten. Sie wird dann wegen des zyklischen Zusammenhangs der n Blätter bei $J = \infty$ in eine einfach zusammenhängende, einfach berandete Fläche verwandelt sein, die in eine Ebene ausgebreitet, eben ein solches Fünf-, Sieben-, Elf-Eck ergibt, wie es Fig. 1, 4, 7 vorstellt, — oder vielmehr (wenn man die Mittelpunkte der Seiten, welche $J = 1$ entsprechen, als Ecken mitzählt) ein Zehn-, Vierzehn-, Zweiundzwanzig-Eck. Es handelt sich jetzt offenbar darum, aufzuzählen, wie oft man die Kanten eines Zehn-, Vierzehn-, Zweiundzwanzig-Ecks in der Art zu einem doppelt überdeckten Linienzug zusammenbiegen kann, daß die Ecken der einen Art eine gewisse gegebene Anzahl von Malen zu drei, die Ecken der anderen Art eine gewisse gegebene Anzahl von Malen zu zwei zusammenstoßen, während die übrig bleibenden Ecken der einen, sowie die der anderen Art isoliert bleiben. Der Versuch ergibt, daß dies bei $n = 5$ überhaupt nur einmal, bei $n = 7$ zweimal, bei $n = 11$ aber zehnmal möglich ist. Ich schließe also:

Die Anzahl der Funktionen $\varphi(y)$, welche den aufgeführten Bedingungen genügen, ist für $n = 5, 7, 11$ bezüglich 1, 2, 10.

---

10) Insofern statt y jede gebrochene lineare Funktion $\frac{ay+b}{cy+d}$ eingeführt werden könnte.

Es wird sich also die Berechnung der Funktionen $\varphi(y)$ bei $n = 5$ und $n = 7$ verhältnismäßig einfach gestalten (wie sich sogleich bestätigt), bei $n = 11$ aber zu komplizierten Rechnungen Anlaß geben. Wir werden ferner bei $n = 5$ und $n = 7$ die Funktionen $\varphi(y)$ unmittelbar alle gebrauchen können, da es sich ja bei $n = 7$ um die *zwei* Gruppen IIa und IIb handelte. Dagegen würden wir bei $n = 11$ den zwei Gruppen IIIa und IIIb entsprechend unter den zehn Funktionen $\varphi(y)$ noch erst zwei auszusuchen haben, was eine neue Art der Fragestellung bedingen würde. Ich lasse deshalb im folgenden den Fall $n = 11$ unerledigt und behandele nur $n = 5$ und $n = 7$.

§ 6.
Formeln für $n = 5$.

In Anbetracht der beiden in y enthaltenen willkürlichen Konstanten können wir bei $n = 5$ setzen:

$$\begin{aligned}\varphi &= C(y^2 + ay + b)(y-3)^3,\\ \varphi - \psi &= Cy(y^2 + \alpha y + \beta)^2;\\ \psi &= 1.\end{aligned}$$

Man benutze nun zunächst, daß die Funktionaldeterminante von $\varphi - \psi$ und ψ den Faktor $(y-3)^2$ enthalten muß. Dies gibt

$$5(y-3)^2 = 5y^2 + 3\alpha y + \beta,$$

also

$$\alpha = -10, \quad \beta = 45.$$

Man benutze ferner, daß die Funktionaldeterminante von φ und ψ den Faktor $y^2 + \alpha y + \beta$ enthalten muß. So kommt:

$$5y^2 + (4a-6)y + (3b-3a) = 5(y^2 - 10y + 45),$$

oder

$$a = -11, \quad b = 64.$$

Man setze endlich in $(\varphi) - (\psi) = (\varphi - \psi)$ das y gleich Null, so folgt:

$$C = -\frac{1}{1728}.$$

Daher lautet die Gleichung fünften Grades, um deren Aufstellung es sich handelte, folgendermaßen:

$$(3)\quad J : J-1 : 1 = (y^2 - 11y + 64)(y-3)^3 : y(y^2 - 10y + 45)^2 : -1728.$$

Will man dieselbe noch etwas umsetzen, so schreibe man $\frac{27 g_3^2}{\Delta}$ statt $J - 1$, x^2 statt y, und ziehe aus

$$J - 1 = \frac{\varphi - \psi}{\psi}$$

beiderseits die Quadratwurzel. So kommt, wie bereits in der Einleitung gesagt, die Brioschische Gleichung[11]), in der Form:

$$x^5 - 10x^3 + 45x = \frac{216 g_3}{\sqrt{-\Delta}}. \tag{4}$$

§ 7.

Formeln für $n = 7$.

Man setze bei $n = 7$:

$$\varphi = C y (y^2 + 7y + 7m)^3,$$
$$\varphi - \psi = C(y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma)(y^2 + Ay + B)^2,$$
$$\psi = 1.$$

Hier ist der Koeffizient von y in dem rechter Hand in φ auftretenden dreifachen Faktor gleich 7 genommen, nachdem sich beim Vergleich herausgestellt hatte, daß er nicht gleich Null ist. Bildet man jetzt die Funktionaldeterminante von φ und ψ und verlangt, daß sie den Faktor $y^2 + Ay + B$ enthalte, so kommt:

$$y^2 + Ay + B = y^2 + 4y + m,$$

also

$$A = 4, \quad B = m;$$

bildet man ferner die Funktionaldeterminante von $(\varphi - \psi)$ und ψ und verlangt, daß sie den Faktor $(y^2 + 7y + 7m)$ quadratisch enthalte, so folgt:

$$\begin{aligned} 7(y^2 + 7y + 7m)^2 = {} & (3y^2 + 2\alpha y + \beta)(y^2 + 4y + m) \\ & + 2(2y + 4)(y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma), \end{aligned}$$

also:

$$\alpha = 13, \quad \beta = 27 + 19m, \quad \gamma = -81 + 108m, \quad 4m^2 - 11m + 8 = 0;$$

oder:

$$m = \frac{11 \pm \sqrt{-7}}{8}, \quad \alpha = 13, \quad \beta = \frac{425 \pm 19\sqrt{-7}}{8}, \quad \gamma = \frac{135 \pm 27\sqrt{-7}}{2}.$$

Setzt man endlich in $(\varphi) - (\psi) = (\varphi - \psi)$ wieder $y = 0$, so ergibt sich:

$$C = -\frac{1}{\gamma m^2} = \frac{-4}{27(13 \pm 7\sqrt{-7})}.$$

Daher lautet die gesuchte Gleichung siebenten Grades[12]):

[11]) Vgl. Math. Annalen, Bd. 9 (1875/76), S. 204 und Bd. 12 (1877), S. 173 [= Abh. LI und Abh. LIII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 297 bzw. S. 313]; vgl. ferner Kiepert, *Über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*, Crelles Journal Bd. 87 (1878/79) (Zusatz bei der ursprünglichen Korrektur im Dez. 1878).

[12]) Ich habe diese Gleichung bereits in einer Note veröffentlicht, welche am 20. Mai dieses Jahres [1878] der Erlanger Sozietät vorgelegt wurde.

$$\begin{aligned} (5) \quad & J : J - 1 : 1 \\ & = y\left(y^2 + 7y + \frac{77 \pm 7\sqrt{-7}}{8}\right)^3 \\ & :\left(y^3 + 13y^2 + \frac{425 \pm 19\sqrt{-7}}{8}y + \frac{135 \pm 27\sqrt{-7}}{2}\right) \cdot \left(y^2 + 4y + \frac{11 \pm \sqrt{-7}}{8}\right)^2 \\ & : -\frac{27}{4}\left(13 \pm 7\sqrt{-7}\right). \end{aligned}$$

Ich werde dieselbe zuvörderst noch in der Weise umändern, daß ich

$$\mathfrak{z} = \varrho y$$

setze und

$$\varrho = -2^2 \cdot 7(7 \mp \sqrt{-7})$$

wähle. So kommt:

$$\begin{aligned} (6) \quad & J : J - 1 : 1 \\ & = \mathfrak{z}\left(\mathfrak{z}^2 - 2^2 \cdot 7^2 (7 \mp \sqrt{-7})\mathfrak{z} + 2^5 \cdot 7^4 (5 \mp \sqrt{-7})\right)^3 \\ & :\left(\mathfrak{z}^3 - 2^2 \cdot 7 \cdot 13(7 \mp \sqrt{-7})\mathfrak{z}^2 + 2^6 \cdot 7^3 (88 \mp 23\sqrt{-7})\mathfrak{z} \right. \\ & \qquad \left. - 2^8 \cdot 3^3 \cdot 7^4 (35 \mp 9\sqrt{-7})\right) \cdot \\ & \qquad \cdot \left(\mathfrak{z}^2 - 2^4 \cdot 7(7 \mp \sqrt{-7})\mathfrak{z} + 2^5 \cdot 7^3 (5 \mp \sqrt{-7})\right)^2 \\ & : \mp 2^{27} \cdot 3^3 \cdot 7^{10} \cdot \sqrt{-7}. \end{aligned}$$

Schreibt man nun hier x^3 statt $\mathfrak{z}$, $\frac{g_2^3}{\Delta}$ statt J und zieht aus

$$J = \frac{\varphi}{\psi}$$

beiderseits die Kubikwurzel, so folgt:

$$x^7 - 2^2 \cdot 7^2 (7 \mp \sqrt{-7})x^4 + 2^5 \cdot 7^4 (5 \mp \sqrt{-7})x \mp 2^9 \cdot 3 \cdot 7^3 \sqrt{-7} \cdot \frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}} = 0. \tag{7}$$

Dies ist nun, wie in der Einleitung angedeutet wurde, im wesentlichen dieselbe Gleichung, zu der Hermite bei seinen Untersuchungen [auf ganz anderem Wege] geführt wurde.

Hermites Gleichung ist nämlich diese:

$$\begin{aligned} & \zeta^7 - 4^2 \cdot 7^2 \cdot \sqrt{-7} \cdot \alpha \cdot kk'^4 \cdot \zeta^4 - 4^4 \cdot 7^4 (\alpha - 3)k^2 k'^8 \cdot \zeta \\ & \quad + 4^6 \cdot 7^3 \cdot \sqrt{-7} \cdot kk'^8 (1 - k^2 + k^4) = 0, \end{aligned}$$

wo α den Ausdruck $\frac{1 - \sqrt{-7}}{2}$ bedeuten soll. Schreibt man hier

$$\zeta = \sqrt[3]{2kk'^4} \cdot x$$

und wählt in (7) das untere Zeichen, so stimmen beide Gleichungen überein; man hat sich nur der Relation zu erinnern (S. 16):

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{4}{27} \cdot \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4 k'^4}.$$

München, im Oktober 1878.

LXXXIV. Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen.

[Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79).]

Bei der Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Funktionen stellt sich neben die Modulargleichung sechsten Grades und ihre bekannte Resolvente vom fünften Grad, beide beherrschend, die Galoissche Resolvente 60sten Grades, die *Ikosaedergleichung*. Von ihr ausgehend übersieht man Bildungsgesetz und Eigenschaften jener Gleichungen niederen Grades mit größter Leichtigkeit. Ich wünsche im folgenden die Theorie der Transformation *siebenter* Ordnung bis zu demselben Punkte zu führen. Wie man bei ihr die Modulargleichung achten Grades in einfachster Form aufzustellen hat, habe ich bereits in meiner Arbeit: *Über die Transformation der elliptischen Funktionen* usw. [= Abh. LXXXII, S. 13ff. dieses Bandes] gezeigt; die zugehörige Resolvente siebenten Grades betrachtete ich in der hier voraufgeschickten Note [Nr. LXXXIII]: *Über die Erniedrigung der Modulargleichungen*. Es handelt sich nunmehr darum, *die zugehörige Galoissche Resolvente vom 168-sten Grade in zweckmäßigster Weise zu bilden und von ihr aus jene niederen Gleichungen abzuleiten*.

Die Wurzel η dieser Galoisschen Resolvente hat, wie bekannt, als Funktion des Periodenverhältnisses ω betrachtet, die charakteristische Eigenschaft, bei allen denjenigen linearen Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ und nur bei denjenigen ungeändert zu bleiben, welche modulo 7 zur Identität kongruent sind. Dies ist für mich im folgenden die Definition der Irrationalität η. Ich beginne also (§ 1) mit einer kurzen Untersuchung der linearen Substitutionen in bezug auf den Modul 7, welche durchaus elementarer Natur ist, aber der Vollständigkeit wegen hier eingeschaltet werden mußte[1]). Es ergibt sich daraus (§ 2), wie η als Funktion der

[1]) Vgl. die allgemeineren Untersuchungen in Serrets Traité d'algèbre supérieure [3. und folgende Auflagen, Paris 1866ff. — Deutsche Übersetzung von G. Wertheim, Leipzig 1868ff.]

absoluten Invariante J verzweigt ist, und vor allen Dingen dies Resultat, daß die zwischen η und J bestehende Gleichung, dem Geschlechte $p=3$ angehörig, durch 168 eindeutige Transformationen von a priori angebbarer Gruppierung in sich übergeht. Dies führt zur Kenntnis einer merkwürdigen Kurve vierter Ordnung, welche durch 168 Kollineationen der Ebene in sich übergeht (§ 3) und infolgedessen eine Reihe besonders einfacher Eigenschaften besitzt (§§ 4, 5). Es genügt, von der Existenz jener 168 Kollineationen zu wissen, um mit leichter Mühe das volle System der zur Kurve gehörigen Kovarianten aufzustellen (§ 6), und man erhält die Gleichung 168-sten Grades, um welche es sich handelt, in übersichtlichster Weise, indem man die Grundkurve mit einem kovarianten Kurvenbüschel von der 42-sten Ordnung schneidet (ebenda). Will man von der so erhaltenen Gleichung zur Modulargleichung achten Grades oder zur Resolvente siebenten Grades hinabsteigen, so kommen zumal solche Sätze in Betracht, welche man bei der allgemeinen Kurve vierter Ordnung hinsichtlich der Berührungskurven dritter Ordnung und gewisser Gruppierungen der Doppeltangenten kennt (§§ 7—10). Die Wurzeln der gemeinten Gleichungen erweisen sich dabei als rationale Funktionen der Koordinaten *eines* Kurvenpunktes, und in dieser expliziten Darstellung scheint mir der wesentliche Fortschritt zu liegen, der für die Transformation siebenter Ordnung erreicht ist. — Die nun noch folgenden Paragraphen (§§ 11—15) haben den Zweck, ein möglichst anschauliches Bild von der Verzweigung der Riemannschen Fläche zu entwerfen, welche η als Funktion von J darstellt und die in mehr abstrakter Weise schon in § 2 betrachtet wird. Die Figuren, welche ich dabei erhalte, wollen für die hier vorliegenden Fragen dieselbe Bedeutung beanspruchen, welche die *Gestalt* des Ikosaeders für die Probleme fünften Grades hat.

Die hauptsächlichsten der genannten Resultate habe ich bereits in einer Note veröffentlicht, welche ich am 20. Mai dieses Jahres der Erlanger Sozietät vorlegte[2]). Ebendort zeigte ich bereits, wie sich nunmehr die Zurückführung derjenigen Gleichungen siebenten Grades, welche die Gruppe der Modulargleichung haben, auf eben diese Modulargleichung explizite bewerkstelligen läßt[3]). Im folgenden bin ich auf diese und andere sich anschließende Fragen noch nicht eingegangen; ich möchte mir vorbehalten, demnächst ausführlicher auf sie zurückzukommen. [Vgl. Math. Annalen, Bd. 15 (1879), S. 251ff. = Abh. LVII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 390ff.].

[2]) *Über Gleichungen siebenten Grades*, zweite Mitteilung.

[3]) [In einer ersten, in Bd. 2 dieser Ausgabe als Nr. LVI abgedruckten, Mitteilung an die Erlanger Societät vom 4. März 1878 des in Fußnote [1]) genannten Titels habe ich zunächst nur die theoretische Möglichkeit dieser Zurückführung durch abstrakte Schlüsse erwiesen. K.]

§ 1.

Einteilung der Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ in bezug auf den Modul 7.

Unter einer Substitution $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ schlechthin verstehe ich im folgenden immer eine solche

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta},$$

deren Koeffizienten ganzzahlig und deren Determinante gleich Eins ist. Dabei will ich, der Kürze wegen, folgende Ausdrucksweise gebrauchen. Zwei Substitutionen S_1 und S_2 sollen *gleichberechtigt* heißen, wenn es eine dritte Substitution S gibt, so daß man die Relation hat:

$$S_1 = S^{-1} \cdot S_2 \cdot S.$$

Nun unterschied ich früher (S. 25)[1] elliptische, parabolische und hyperbolische Substitutionen. Man hat dann ohne weiteres folgende Sätze:

Gleichberechtigte Substitutionen haben dieselbe Summe $\alpha+\delta$.

Alle elliptischen Substitutionen von der Periode 2 (also mit $\alpha+\delta=0$*) sind gleichberechtigt.*

Nimmt man die elliptischen Substitutionen von der Periode 3 (also mit $\alpha+\delta=\pm 1$*) in der Weise paarweise zusammen, wie sie durch Iteration auseinander hervorgehen, so sind alle solchen Paare gleichberechtigt.*

Die parabolischen Substitutionen ($\alpha+\delta=\pm 2$) *zerfallen in unendlich viele Klassen; jede Substitution ist mit einer der folgenden:*

$$\omega'=\omega, \quad \omega'=\omega\pm 1, \quad \omega'=\omega\pm 2, \ldots$$

gleichberechtigt.

Fortan werden wir nun die Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ nicht mehr an sich, sondern in bezug auf den Modul 7 betrachten, und also zwei Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ und $\frac{\alpha'\omega+\beta'}{\gamma'\omega+\delta'}$ als identisch betrachten, wenn $\alpha\equiv\alpha'$, $\beta\equiv\beta'$, $\gamma\equiv\gamma'$, $\delta\equiv\delta'$ ist, demnach auch nicht mehr verlangen, daß $\alpha\delta-\beta\gamma$ gleich Eins ist, sondern nur, daß es kongruent Eins ist (modulo 7). Wir haben dann jedenfalls den Satz:

Substitutionen, welche früher gleichberechtigt waren, sind es auch jetzt.

Übrigens gibt es jetzt nur eine endliche Anzahl von Substitutionen; man zählt sofort ab:

Die Zahl der Substitutionen ist 168.

[1] Die Zitate auf bloße Seitenzahlen beziehen sich immer auf den vorliegenden Band.

Unter diesen ist eine, S_1, von der Periode 1, nämlich die Identität $\omega'=\omega$. Das ist selbstverständlich.

Um Substitutionen von der Periode 2 zu erhalten, führen wir die Bedingung $\alpha+\delta=0$ ein, welche die elliptischen Substitutionen von der Periode 2 charakterisierte. Wir finden 21 modulo 7 verschiedene Substitutionen; da sie ihre Periode nicht geändert haben können, so folgt:

Es gibt 21 gleichberechtigte Substitutionen von der Periode 2. Dieselben sollen S_2 genannt werden; Beispiel: $-\frac{1}{\omega}$.

Auf dieselbe Weise findet man durch Heranziehen der Bedingung $\alpha+\delta=\pm 1$, welche die elliptischen Substitutionen von der Periode 3 charakterisierte:

Man hat 28 gleichberechtigte Paare von Substitutionen S_3 *mit der Periode 3.* Beispiel für ein Paar: $\frac{-2\omega}{3}, \frac{-3\omega}{2}$.

Bei den parabolischen Substitutionen war $\alpha+\delta=\pm 2$. Dementsprechend erhalten wir 49 modulo 7 verschiedene Substitutionen. Von diesen ist eine die Identität $\omega'=\omega$. Die übrigen erweisen sich mit $\omega\pm 1$, $\omega\pm 2$, $\omega\pm 3$ gleichberechtigt; sie haben daher, wie diese, die Periode 7.

Es gibt 48 Substitutionen S_7 *von der Periode 7, welche sich auf 8 gleichberechtigte Sextupel verteilen.*

Beispiel eines Sextupels: $\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+6$.

So bleiben noch $168-1-21-56-48=42$ Substitutionen, für welche $\alpha+\delta\equiv\pm 3$ ist. Iteriert man sie, so wird für die neue Substitution $\alpha'+\delta'\equiv 0$. Unsere Substitutionen ergeben also, wiederholt, Substitutionen von der Periode 2, haben demnach selbst die Periode 4. Ich werde jede solche Substitution mit der inversen zu einem Paare zusammenfassen. Dann folgt:

Es gibt 21 gleichberechtigte Paare von Substitutionen S_4 *mit der Periode 4, die einzeln den 21 Substitutionen* S_2 *zugeordnet sind.*

Beispiel: $\frac{2\omega+2}{-2\omega+2}, \frac{2\omega-2}{2\omega+2}$, zu $-\frac{1}{\omega}$ gehörig.

An diese Unterscheidung der Periodizität unserer Substitutionen knüpft sich sofort die Aufstellung der aus ihnen zusammenzusetzenden *Gruppen*. Zunächst hat man diejenigen Gruppen, welche nur Wiederholungen einer und derselben Substitutionen enthalten. *Es gibt von solchen Gruppen:*

1. *Eine* G_1*, welche nur eine Substitution enthält:* $\omega'=\omega$,
2. *21* G_2*, mit zwei Substitutionen, z. B.:* $\omega, -\frac{1}{\omega}$,
3. *28* G_3*, mit drei Substitutionen, z. B.:* $\omega, \frac{-2\omega}{3}, \frac{-3\omega}{2}$,

4. *21* G_4, *mit vier Substitutionen, z. B.:* $\omega, \frac{2\omega+2}{-2\omega+2}, -\frac{1}{\omega}, \frac{2\omega-2}{2\omega+2}$.

5. *8* G_7, *mit sieben Substitutionen, z. B.:* $\omega, \omega+1, \ldots, \omega+6$.

Unter diesen Gruppen sind immer diejenigen, welche gleich viele Substitutionen enthalten, gleichberechtigt. Es genügt daher zum Beweise der nachfolgenden Sätze, jedesmal nur ein Beispiel anzuführen, welches sich auf eine einzelne der im Satze gemeinten Gruppen bezieht. Man findet:

1. *Jede Substitution* S_2 *ist mit vier anderen* S_2 *vertauschbar. Diese vier* S_2 *verteilen sich in der Art auf zwei Paare, daß die Substitutionen eines Paares unter sich ebenfalls vertauschbar sind.*

Beispiel: Die Substitution $-\frac{1}{\omega}$ ist mit folgenden vertauschbar:

$$\frac{2\omega+3}{3\omega-2}, \quad \frac{3\omega-2}{-2\omega-3}, \quad \frac{2\omega-3}{-3\omega-2}, \quad \frac{3\omega+2}{2\omega-3}.$$

Die beiden ersten sind untereinander gleichfalls vertauschbar, ebenso die beiden letzten.

2. *Demnach gibt es 14 Gruppen* G_4' *mit vier Substitutionen, welche, von der Identität abgesehen, nur Substitutionen von der Periode 2 enthalten*[5]).

Beispiel: $\omega, -\frac{1}{\omega}, \frac{2\omega+3}{3\omega-2}, \frac{3\omega-2}{-2\omega-3}$

oder auch: $\omega, -\frac{1}{\omega}, \frac{2\omega-3}{-3\omega-2}, \frac{3\omega+2}{2\omega-3}$.

Diese 14 Gruppen sind untereinander nun *nicht* gleichberechtigt, sondern verteilen sich, den beiden angeführten Beispielen entsprechend, zu je sieben auf zwei Klassen. Jede G_2 ist an einer Gruppe G_4' aus jeder Klasse beteiligt.

3. *Mit jeder Gruppe* G_3 *sind drei Substitutionen* S_2 *vertauschbar. Also gibt es 28 untereinander gleichberechtigte Gruppen* G_6' *von sechs Substitutionen. Jede* G_2 *ist an vier solchen* G_6' *beteiligt.*

Beispiel: $\omega, -\frac{3\omega}{2}, -\frac{2\omega}{3}, -\frac{1}{\omega}, \frac{2}{3\omega}, \frac{3}{2\omega}$.

4. *Die vier Substitutionen* S_2, *welche Satz 1 zufolge mit einer gegebenen* S_2 *vertauschbar sind, sind auch mit der* G_4 *vertauschbar, in welcher die gegebene* S_2 *enthalten ist. Dies gibt 21 gleichberechtigte Gruppen* G_8' *von acht Substitutionen.*

Beispiel:
$$\omega, \quad -\frac{1}{\omega}, \quad \frac{2\omega+2}{-2\omega+2}, \quad \frac{2\omega-2}{+2\omega+2},$$
$$\frac{2\omega+3}{3\omega-2}, \quad \frac{3\omega-2}{-2\omega-3}, \quad \frac{2\omega-3}{-3\omega-2}, \quad \frac{3\omega+2}{2\omega-3}.$$

[5]) [*Vierergruppen* nach meiner späteren Terminologie, die auch von anderen Autoren angenommen ist. K.]

5. *Mit jeder Gruppe* G_7 *sind 14 Substitutionen* S_3 *vertauschbar. Dies gibt acht gleichberechtigte Gruppen* G_{21}' *von 21 Substitutionen. Jede* S_3 *ist an zwei solchen Gruppen beteiligt.*

Beispiel: $\omega+k, \frac{-2(\omega+k)}{3}, \frac{-3(\omega+k)}{2}$ für $k=0, 1, \ldots, 6$, oder auch: die Gesamtheit der Substitutionen $\frac{\alpha\omega}{\gamma\omega+\delta}$.

6. *Den* $2\cdot 7$ *Gruppen* G_4' *(Satz 2) entsprechend gibt es* $2\cdot 7$ *Gruppen* G_{24}'' *mit 24 Substitutionen.* Dieselben entstehen folgendermaßen. Man nehme eine G_4' und vervollständige dieselbe:

a) durch diejenigen $6\,S_4$, deren Wiederholungen die der G_4' angehörigen drei Substitutionen S_2 sind,

b) durch diejenigen $6\,S_2$, welche mit einer der genannten drei S_2 vertauschbar sind, ohne selbst bereits der G_4' anzugehören. Wenn man die so zusammengestellten Substitutionen beliebig kombiniert, so entstehen nur noch:

c) vier Paare zusammengehöriger Substitutionen S_3, und

$$4+6+6+4\cdot 2 \text{ ist } 24.$$

Beispiel: G_4': $\quad \omega, -\frac{1}{\omega}, \frac{2\omega+3}{3\omega-2}, \frac{3\omega-2}{-2\omega-3}$;

$$\left\{\begin{array}{lll} S_4, \text{ welche zu } -\frac{1}{\omega} \text{ gehören:} & \frac{2\omega+2}{-2\omega+2}, & \frac{2\omega-2}{2\omega+2}; \\[1ex] S_4, \text{ welche zu } \frac{2\omega+3}{3\omega-2} \text{ gehören:} & \frac{\omega+1}{\omega+2}, & \frac{-2\omega+1}{\omega-1}; \\[1ex] S_4, \text{ welche zu } \frac{3\omega-2}{-2\omega-3} \text{ gehören:} & \frac{3\omega-3}{-3\omega+1}, & \frac{\omega+3}{3\omega+3}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Neue } S_2, \text{ mit } -\frac{1}{\omega} \text{ vertauschbar:} & \frac{2\omega-3}{-3\omega-2}, & \frac{3\omega+2}{2\omega-3}; \\[1ex] \text{"} \quad \text{"}, \text{"} \; \frac{2\omega+3}{3\omega-2} \quad \text{"} \quad : & \frac{-\omega+1}{-2\omega+1}, & \frac{\omega+2}{-\omega-1}; \\[1ex] \text{"} \quad \text{"}, \text{"} \; \frac{3\omega-2}{-2\omega-3} \quad \text{"} \quad : & \frac{3\omega-1}{3\omega-3}, & \frac{-3\omega-3}{\omega+3}. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Paare von } S_3, \text{ welche durch Kombination entstehen:} \\[1ex] \qquad \frac{-3\omega-1}{2}, \quad \frac{-2\omega-1}{3}; \\[1ex] \qquad \frac{2\omega}{\omega-3}, \quad \frac{3\omega}{\omega-2}; \\[1ex] \qquad \frac{2}{3\omega+1}, \quad \frac{-\omega+2}{3\omega}; \\[1ex] \qquad \frac{-\omega+3}{2\omega}, \quad \frac{-3}{2\omega+1}. \end{array}\right.$$

Man sieht: Die 24 Substitutionen einer G''_{24} sind ebenso beschaffen, wie die 24 Vertauschungen von vier Elementen, oder auch wie die 24 Drehungen, welche ein reguläres Oktaeder mit sich zur Deckung bringen. Ich werde von beiden Vergleichungen später eine Anwendung machen. — Übrigens sind diese G''_{24} selbstverständlicherweise keine anderen Gruppen, als diejenigen, deren ich mich in dem Aufsatze: *Über die Erniedrigung der Modulargleichungen* [vorstehend als Nr. LXXXIII abgedruckt] bediente. Ich habe sie damals im Anschlusse an Betti in einer etwas anderen Gestalt mitgeteilt, indem ich nämlich nicht daran festhielt, daß $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{7}$ sei, sondern nur verlangte, daß $\alpha\delta - \beta\gamma$ kongruent einem quadratischen Reste werde — ein Unterschied, der für die gebrochene Substitution $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ bedeutungslos ist.

7. Man beweist endlich durch bekannte Methoden, *daß in der Gesamtheit der 168 Substitutionen* $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ *keine anderen Untergruppen vorhanden sind als die nun aufgezählten* [6]).

§ 2.

Die Funktion $\eta(\omega)$ und ihre Verzweigung in bezug auf J.

Es sei jetzt η eine algebraische Funktion von J, welche so verzweigt ist, daß sie, als Funktion von ω betrachtet, folgende Eigenschaften besitzt:

1. Sie ist innerhalb der positiven Halbebene ω durchaus eindeutig,

2. sie geht durch diejenigen Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ und nur durch diejenigen in sich über, welche modulo 7 zur Identität kongruent sind.

Ich will mit $\eta(\omega)$ einen der Werte bezeichnen, welche zu einem gegebenen J gehören. Man erhält dann alle anderen, indem man statt ω die 167 Ausdrücke $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ einträgt, welche modulo 7 von ω verschieden sind, denn alle Werte von ω, die zu dem gegebenen J gehören, sind in dieser Form enthalten. Daher:

η ist mit J durch eine Gleichung vom Grade 168 in η verbunden.

Es mögen die 168 Wurzeln in irgendeiner Reihenfolge mit

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{168}$$

[6]) [Bei der Aufzählung ist übersehen, daß in jeder der $2\cdot 7$ G''_{24} eine G''_{12} als ausgezeichnete Untergruppe enthalten ist, die isomorph ist zu der Gruppe der geraden Vertauschungen von vier Dingen, oder zu der Gruppe der Drehungen, die ein reguläres Tetraeder mit sich zur Deckung bringen. Für den ganzen Paragraphen vergleiche man übrigens die auf S. 78 dieses Bandes in Fußnote [5]) genannte Arbeit von Gierster in den Math. Annalen, Bd. 18, oder die entsprechenden Ausführungen in „Modulfunktionen", Bd. 1, Abschnitt II, Kap. 8 u. 9.]

bezeichnet sein. Wenn jetzt J in der Ebene, welche seine komplexen Werte versinnlicht, einen geschlossenen Weg beschreibt, so erfährt ein beliebiges der zugehörigen ω eine Substitution $\frac{\alpha'\omega+\beta'}{\gamma'\omega+\delta'}$. Dementsprechend erleiden die η eine bestimmte Permutation, indem in $\eta\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$ für ω der eben angegebene Wert eingetragen werden muß. Soll nun nach dieser Permutation (bei allgemeinem Werte von J) *irgendein* η_i mit seinem Anfangswerte zusammenfallen, so ist offenbar nötig, daß die Substitution $\begin{vmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$ modulo 7 zur Identität kongruent ist; dann aber fallen *alle* Werte η mit ihren Anfangswerten zusammen. Denn bezeichnet S irgendeine Substitution $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, S_0 eine beliebige solche, die modulo 7 zur Identität kongruent ist, und S_0' eine bestimmte derselben Art, so hat man allemal die Relation:

$$SS_0 = S_0'S.$$

Ich drücke das so aus:

Alle Wurzeln η_i sind in bezug auf J gleichverzweigt [7]).

Die Verzweigungspunkte selbst können nach meinen früheren Angaben nur bei $J = 0, 1, \infty$ liegen (S. 30). Umkreist J den Punkt 0, so erfährt ω eine elliptische Substitution von der Periode 3, umkreist es den Punkt 1, so erfährt ω eine elliptische Substitution von der Periode 2. Endlich, wenn es den Punkt ∞ umkreist, so erfährt ein passend gewähltes ω die parabolische Substitution $\omega' = \omega + 1$. Daher folgt:

Bei $J = 0$ hängen von den 168 Blättern der η repräsentierenden Riemannschen Fläche 56mal drei Blätter im Zyklus zusammen, bei $J = 1$ 84mal zwei Blätter, bei $J = \infty$ 24mal sieben Blätter.

Das *Geschlecht* der zwischen η und J bestehenden Gleichung erweist sich hiernach gleich *Drei:*

$$p = \tfrac{1}{2}(2 - 2\cdot 168 + 56\cdot 2 + 84\cdot 1 + 24\cdot 6) = 3.$$

Algebraische Funktionen von J, welche in bezug auf J gleichverzweigt sind, lassen sich durcheinander mit Hilfe von J rational darstellen. Daher folgt:

Jede Wurzel η_i unserer Gleichung ist eine rationale Funktion von jeder anderen Wurzel η_k und J.

Oder anders ausgedrückt:

Man kann 168 rationale Funktionen $R(\eta, J)$ mit numerischen Koeffizienten bilden, so daß, unter η eine beliebige Wurzel verstanden, folgende Relationen bestehen:

$$\eta_1 = R_1(\eta, J),\ \eta_2 = R_2(\eta, J),\ \ldots,\ \eta_{168} = R_{168}(\eta, J).$$

[7]) [Vgl. die Fußnote [34]) auf S. 52 des vorliegenden Bandes.]

Es gibt also, den 168 Substitutionen entsprechend, welche im ersten Paragraphen betrachtet wurden, *168 eindeutige Transformationen unserer Riemannschen Fläche in sich*. Die weiteren Schlüsse stützen sich alle darauf, daß man, nach § 1, die Gruppierung jener Substitutionen kennt und daß diese Gruppierung sich bei den nunmehr in Betracht kommenden eindeutigen Transformationen wiederfinden muß.

Doch beachten wir zunächst folgendes. Durch die Transformationen wird jeder Punkt unserer Riemannschen Fläche in jeden anderen über ihm resp. unter ihm liegenden Punkt verwandelt. Fragt man also, ob es Punkte der Riemannschen Fläche gibt, welche bei einigen der 168 Transformationen fest bleiben und aus denen also weniger als 168 verschiedene Punkte hervorgehen, so beantwortet sich diese Frage einfach durch die Verzweigungsstellen, — denn sie sind die einzigen Punkte, welche gleichzeitig verschiedenen Blättern angehören. Mit Rücksicht auf das, was soeben hinsichtlich der Verzweigung gesagt wurde, haben wir also den Satz:

Unter den Gruppen von je 168 durch die Transformationen zusammengeordneten Punkten haben wir, $J=\infty$ entsprechend, eine siebenfach zählende von nur 24, $J=0$ entsprechend eine dreifach zählende von nur 56, $J=1$ entsprechend eine doppeltzählende von nur 84. Andere mehrfach zählende Punktgruppen gibt es nicht.

Ich werde diese Punkte, ihrer Wichtigkeit halber, mit einer besonderen Bezeichnung belegen; sie sollen die Punkte a, b, c heißen. Jeder Punkt a bleibt bei einer Transformation von der Periode 7 ungeändert, d. h. also überhaupt bei den Transformationen einer G_7. Ebenso bleibt jeder Punkt b bei den Transformationen einer G_3, jeder Punkt c bei den Transformationen einer G_2 ungeändert. Nun wissen wir aber, daß es nur acht Gruppen G_7, 28 Gruppen G_3 und 21 Gruppen G_2 gibt, außerdem 21 Gruppen G_4. So schließen wir:

Bei den Transformationen einer G_7 bleiben immer drei Punkte a fest, bei den Transformationen einer G_3 zwei Punkte b, bei den Transformationen einer G_2 vier Punkte c.

Bei den Transformationen einer G_4 bleibt kein Punkt ungeändert.

Nun war jede G_7 ausgezeichnete Gruppe in einer G'_{21}, welche neben den Substitutionen der G_7 nur Substitutionen von der Periode 3 umfaßte. Die drei Punkte a, welche bei den Transformationen der G_7 ungeändert bleiben, können es bei den anderen Transformationen der G'_{21} nicht tun; denn sonst würde es nicht 24, sondern nur acht Punkte a geben. Daher werden die drei Punkte a durch die neuen Transformationen untereinander vertauscht, und da die Periode der neuen Transformationen 3 ist, so werden sie *zyklisch* vertauscht.

In diesem Sinne bleibt bei den Transformationen einer G'_{21} jedesmal ein Tripel zusammengehöriger Punkte a ungeändert.

Ebenso schließt man:

Bei den Transformationen einer G'_6 bleibt jedesmal ein Paar zusammengehöriger Punkte b ungeändert.

Die G'_6 enthält Transformationen von der Periode 3 und solche von der Periode 2. Bei den ersteren bleiben die beiden Punkte b einzeln genommen fest, bei den letzteren werden sie wechselseitig vertauscht.

Diese Sätze lassen sich vervielfachen. Ich führe nur noch folgende an. Jede S_2 war mit vier anderen S_2 vertauschbar. Das heißt:

Bei einer Transformation von der Periode 2 bleiben außer dem Quadrupel der einzeln festbleibenden Punkte c noch vier andere Quadrupel ungeändert (aber nicht die Punkte c in ihnen).

Ferner war jede S_2 mit vier G_3 vertauschbar. Also:

In demselben Sinne bleiben bei einer Substitution von der Periode 2 vier Paare zusammengehöriger Punkte b ungeändert.

Ich erinnere endlich daran, daß sich unter den Substitutionen einer G''_{21} vier Gruppen G_3 befanden. Dementsprechend erhalten wir vier Paare zusammengehöriger Punkte b, und nach dem, was über die Beschaffenheit der G''_{21} gesagt wurde, ist deutlich, *daß diese vier Paare vermöge der Transformationen der G''_{21} auf alle Weisen untereinander permutiert werden.*

Die angeführten Sätze sind immer so zu verstehen, daß auch nicht mehr Paare usw., als angegeben ist, ungeändert bleiben resp. auf alle Weisen permutiert werden.

§ 3.
Die Normalkurve von der vierten Ordnung.

Als Unbekannte η in unserer Gleichung 168-sten Grades kann jede algebraische Funktion gewählt werden, die innerhalb der nunmehr geschilderten Riemannschen Fläche eindeutig ist und bei den 168 eindeutigen Transformationen 168 im allgemeinen verschiedene Werte annimmt. Wir werden jedenfalls die einfachste Funktion auswählen wollen, wenn es sich um wirkliche Aufstellung der Gleichung handelt, und dementsprechend beschäftige ich mich zunächst mit dem Probleme, diejenige *Normalkurve niederster Ordnung* anzugeben, auf welche sich die Gleichung zwischen η und J eindeutig beziehen läßt. Dies Problem erledigt sich, wie man sehen wird, durch eine Reihe einfacher Schlüsse, welche sich deshalb ermöglichen, *weil man die algebraischen Funktionen vom Geschlechte $p=3$ auf Grund anderer Untersuchungen ziemlich genau kennt**).

*) Siehe namentlich: Weber, *Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht $p=3$* (Berlin, 1876).

Bei den algebraischen Funktionen $p = 3$ sind zwei Fälle hinsichtlich der Normalkurve zu unterscheiden: der *hyperelliptische* und der *allgemeine*. Im ersteren Falle ist die Normalkurve eine [ebene] Kurve fünfter Ordnung mit dreifachem Punkte, im zweiten eine [ebene] Kurve vierter Ordnung [die keine mehrfachen Punkte besitzt][9]).

Ich behaupte nun zunächst: *hyperelliptisch kann unsere Normalkurve nicht sein*. Denn sie muß, wie die Gleichung zwischen η und J, auf die sie eindeutig bezogen ist, durch 168 eindeutige Transformationen der bewußten Gruppierung in sich übergehen. Bei der hyperelliptischen Kurve aber hat die einfach unendliche Schar von Punktepaaren, die bei der C_5 mit dreifachem Punkte durch die von diesem Punkte ausgehenden Strahlen ausgeschnitten wird, gegenüber eindeutigen Transformationen eine invariante Bedeutung. Es müßte also der von dem dreifachen Punkte ausgehende Strahlbüschel auf 168 Weisen eindeutig in sich transformiert werden[10]). Nun ist ein Strahlbüschel eine rationale Mannigfaltigkeit von einer Dimension; es müßte also (nach dem von mir schon oft angewandten Schlusse) eine Gruppe von 168 linearen Transformationen einer Veränderlichen geben, welche, wohlverstanden, ebenso beschaffen wäre, wie unsere Transformationsgruppe, also z. B. keine Substitution von einer Periode > 7 enthielte. Eine solche Gruppe aber gibt es bekanntlich nicht.

Also ist unsere Normalkurve von der vierten Ordnung.

Jetzt lehrt die Theorie der algebraischen Funktionen[11]), daß allgemein bei einer eindeutigen Transformation einer Kurve in sich die von Riemann so genannten Funktionen φ linear transformiert werden. Bei der Kurve vierter Ordnung nehmen die Funktionen φ jeden Wert im allgemeinen in *vier* Punkten an, und die Punktquadrupel, welche in diesem Sinne einer Funktion φ entsprechen, können durch die geraden Linien, welche sich in einem bestimmten Punkte der Ebene kreuzen, ausgeschnitten werden. Daher gehört zu jeder linearen Transformation der φ eine Umformung der Ebene, bei welcher jeder geraden Linie eine gerade Linie, jedem Punkte ein Punkt entspricht, d. h. eine *Kollineation* im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Daher:

---

[9]) [Vgl. die Darstellung bei Clebsch-Gordan, *Theorie der Abelschen Funktionen*, Leipzig 1866, S. 65 und bei Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, Bd. 1, Leipzig 1876, S. 687 u. 712. K.]

[10]) Man könnte an bloß 84 Weisen denken, indem eine Substitution S_2 möglicherweise darin bestehen könnte, daß die beiden von einem Strahl ausgeschnittenen Punkte vertauscht werden, — was sich dann auch, wie im Texte, als unmöglich erweisen würde. Aber das ist schon deshalb unzulässig, weil die Gruppe der 168 Transformationen „einfach" ist.

[11]) Siehe Brill und Noether: *Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie*, Math. Annalen, Bd. 7 (1874).

Unsere Kurve vierter Ordnung geht durch 168 Kollineationen, welche die bewußte Gruppierung haben, in sich über;

und vor allen Dingen:

Es gibt eine endliche Gruppe von 168 Kollineationen der Ebene, unter denen keine eine Periode > 7 hat[12]).

Auf unserer Kurve vierter Ordnung werden sich, diesen Kollineationen entsprechend, die Punkte im allgemeinen zu je 168 zusammenordnen. Nur einmal sind es bloß 24 (die Punkte a, wie ich sie auch jetzt nennen werde), ein anderes Mal bloß 56 (die Punkte b), ein drittes Mal bloß 84 (die Punkte c). Andere Gruppen von weniger als 168 zusammengehörigen Punkten gibt es nicht.

Nun aber kennt man auf einer Kurve vierter Ordnung Gruppen von 24, 56, 84 ausgezeichneten Punkten, das sind die 24 *Wendepunkte*, die 56 *Berührungspunkte der Doppeltangenten*, die 84 *sextaktischen Punkte*. Diese Punkte sind sämtlich durch Eigenschaften charakterisiert, welche bei Kollineationen der Ebene ungeändert bleiben und werden also bei den 168 Kollineationen der Kurve in sich bez. untereinander vertauscht. Daher folgt:

Die Punkte a sind die Wendepunkte, die Punkte b die Berührungspunkte der Doppeltangenten, die Punkte c die sextaktischen Punkte.

Man könnte diesem Schlusse gegenüber vielleicht einwenden, daß möglicherweise die Wendepunkte mit den Berührungspunkten der Doppeltangenten oder mit den sextaktischen Punkten, oder diese beiden letzten Kategorien untereinander zum Teil zusammenfallen. Um diesen Einwand zu entkräften, genügt es, darauf hinzuweisen, daß 56 durch 24 nicht teilbar ist und daß sich 84 aus 56 und 24 nicht ganzzahlig zusammensetzen läßt. In der Tat können wir, nach dem, was wir von der Riemannschen Fläche wissen, nun einmal nur Gruppen von 24, 56, 84 Punkten gebrauchen.

Aber auch die *Tripel* der Punkte a, die *Paare* der Punkte b und die *Quadrupel* der Punkte c bekommen eine einfache Bedeutung.

Was zunächst die *Tripel* betrifft, so beachte man, daß jede Wendetangente der C_4 dieselbe noch in *einem* weiteren Punkte schneidet. Solcher Punkte erhalten wir, entsprechend der Zahl der Wendepunkte, 24. Nun gibt es auf unserer Kurve nur *eine* Gruppe von 24 zusammengehörigen Punkten, das sind die Wendepunkte selbst. Wir schließen also:

---

[12]) In der Aufzählung aller endlichen Gruppen ternärer linearer Substitutionen, welche Camille Jordan gegeben hat (Crelles Journal, Bd. 84 (1877/78)) scheint diese Gruppe übersehen zu sein. (Wie mir Herr C. Jordan mitteilt, befindet sich der Fehler auf S. 167 der genannten Arbeit, Z. 8 v. u., indem Ω daselbst nicht durch 9φ, sondern nur durch 3φ dividierbar zu sein braucht. (Zusatz bei der ursprünglichen Korrektur im Dezember 1878).)

Die neuen Punkte fallen mit den Wendepunkten in irgendeiner Reihenfolge zusammen.

Mit dem anfänglich gewählten Punkte kann der neue Punkt nicht koinzidieren; sonst hätte man eine vierpunktig berührende Tangente und die Wendepunkte wären weder unter sich noch von den Berührungspunkten der Doppeltangenten durchaus verschieden. Daher:

Jede Wendetangente unserer C_4 schneidet dieselbe noch in einem weiteren Wendepunkte.

Nun gibt es Kollineationen der C_4 in sich, welche den anfänglich gewählten Wendepunkt festlassen. Dieselben lassen jedenfalls auch den nun konstruierten neuen Wendepunkt ungeändert; dann weiter auch denjenigen, welcher aus diesem durch Wiederholung desselben Prozesses abgeleitet wird, usw. Es sind aber die *Tripel* zusammengehöriger Punkte a eben dadurch charakterisiert worden, daß sie bei denselben Transformationen ungeändert bleiben. Also folgt:

Die 24 Wendepunkte unserer C_4 verteilen sich in der Weise auf acht Dreiecke, daß die Dreiecksseiten zugleich die Wendetangenten sind.

Diese Wendedreiecke entsprechen den Tripeln zusammengehöriger Punkte a.

Noch einfacher ist die Bedeutung der *Paare* zusammengehöriger Punkte b. Bleibt bei einer Kollineation, welche die C_4 in sich überführt, der eine Berührungspunkt einer Doppeltangente fest, so gewiß auch der andere. Daher:

Den 28 Paaren zusammengehöriger Punkte b entsprechen die 28 Doppeltangenten mit ihren beiden Berührungspunkten.

Um endlich die *Quadrupel* der Punkte c zu interpretieren, beachte man den leicht zu beweisenden Satz, daß in der Ebene jede Kollineation von der Periode 2 eine *Perspektive* ist. Wir erhalten also den 21 Substitutionen S_2 entsprechend 21 *Achsen* und 21 zugehörige *Zentra*, in bezug auf welche unsere C_4 sich selbst perspektivisch ist. Jede Achse schneidet die C_4 in vier Punkten: das sind eben die vier Punkte c, welche bei der betreffenden S_2 ungeändert bleiben. Also:

Die 84 sextaktischen Punkte unserer C_4 werden von 21 geraden Linien ausgeschnitten.

Die vier Punkte, welche einer dieser Linien angehören, repräsentieren jedesmal ein Quadrupel zusammengehöriger Punkte c.

Betrachten wir zuletzt noch die drei am Ende des vorigen Paragraphen angeführten Sätze. So bekommen wir:

Durch jedes Zentrum der Perspektivität laufen vier Achsen hindurch, auf jeder Achse liegen vier Zentra.

Jede Doppeltangente trägt drei Zentra, indem durch jedes Zentrum vier Doppeltangenten verlaufen.

Bei den 24 Kollineationen einer G''_{24} werden vier ausgezeichnete Doppeltangenten auf alle Weise permutiert.

§ 4.

Gleichungsformen der Kurve vierter Ordnung.

Die angeführten Sätze sind mehr als hinreichend, um für unsere C_4 verschiedene Gleichungen aufzustellen, in denen die Kollineationen der verschiedenen Gruppen ohne weiteres hervortreten.

Als Koordinatendreieck möge zunächst ein *Wendedreieck* zugrunde gelegt werden. Seine Seiten seien $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ und sollen bezüglich im Schnitte mit $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\lambda = 0$ die Kurve oskulieren. Dann hat die Gleichung der C_4 jedenfalls folgende Gestalt:

$$A\lambda^3\mu + B\mu^3\nu + C\nu^3\lambda + \lambda\mu\nu(D\lambda + E\mu + F\nu) = 0.$$

Nun soll unsere Kurve bei zyklischer Vertauschung der Dreiecksseiten ungeändert bleiben. Daher ist, wenn wir in die Definition von λ, μ, ν passende Zahlenfaktoren aufnehmen, $A = B = C$ und $D = E = F$. Ferner soll die C_4 bei sechs Kollineationen von der Periode 7 in sich übergehen, vermöge deren die Dreiecksseiten ungeändert bleiben. Diese Kollineationen drücken sich analytisch jedenfalls so aus, daß die Verhältnisse $\lambda : \mu : \nu$ mit passenden siebenten Einheitswurzeln multipliziert werden. Dabei kann der Term $\lambda\mu\nu(\lambda + \mu + \nu)$ unmöglich in ein Multiplum seiner selbst übergehen; er darf daher in unserer Gleichung nicht vorkommen. *Die Gleichung lautet daher einfach:*

(1) $$0 = f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda.$$

Ich will die Kollineationen, durch welche f in sich selbst übergeht, immer so angeben, daß sie die Determinante *Eins* besitzen. Dann hat man erstens die Kollineation von der Periode 3:

(2) $$\lambda' = \mu, \quad \mu' = \nu, \quad \nu' = \lambda;$$

sodann folgende Kollineation von der Periode 7:

(3) $$\lambda' = \gamma\lambda, \quad \mu' = \gamma^4\mu, \quad \nu' = \gamma^2\nu, \qquad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right),$$

verbindet man beide in beliebiger Wiederholung, *so hat man die G'_{21}, bei welcher das zugrunde gelegte Wendedreieck ungeändert bleibt.*

Um nunmehr die sechs Kollineationen einer G'_6 hervortreten zu lassen, werde ich ein neues Koordinatendreieck einführen, dessen Seiten dadurch definiert sind, daß sie bei den Vertauschungen (2) ungeändert bleiben. Dementsprechend setze ich zunächst:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\lambda+\mu+\nu}{\alpha-\alpha^2} \\ x_2 = \dfrac{\lambda+\alpha\mu+\alpha^2\nu}{\alpha-\alpha^2} \\ x_3 = \dfrac{\lambda+\alpha^2\mu+\alpha\nu}{\alpha-\alpha^2} \end{cases} \qquad \left(\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

Dann wird die Gleichung unserer Kurve

$$(5)\qquad 0 = f = \tfrac{1}{3}(x_1^4 + 3x_1^2x_2x_3 - 3x_2^2x_3^2 + x_1((1+3\alpha^2)x_2^3 + (1+3\alpha)x_3^3)).$$

Um hier rechter Hand die dritten Einheitswurzeln fortzuschaffen, setze ich ferner:

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1}{\sqrt[3]{7}}, \\ x_2 = y_2\sqrt[3]{3\alpha+1}, \\ x_3 = y_3\sqrt[3]{3\alpha^2+1} \end{cases}$$

und erhalte:

$$(6)\qquad 0 = f = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}}(y_1^4 + 21y_1^2y_2y_3 - 147y_2^2y_3^2 + 49y_1(y_2^3+y_3^3)).$$

Man sieht hier ohne weiteres, daß $y_1 = 0$ eine Doppeltangente unserer Kurve ist, welche im Schnitt mit $y_2 = 0$ und mit $y_3 = 0$ berührt, und *daß sich die sechs Substitutionen der zugehörigen G_6' aus folgenden beiden zusammensetzen lassen,* von *denen die erste mit* (2) *zusammenfällt:*

$$(7)\qquad y_1' = y_1,\quad y_2' = \alpha y_2,\quad y_3' = \alpha^2 y_3,$$

$$(8)\qquad y_1' = -y_1,\quad y_2' = -y_3,\quad y_3' = -y_2.$$

Die drei Zentra, welche auf $y_1 = 0$ liegen, sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$y_2 + y_3 = 0,\quad y_2 + \alpha y_3 = 0,\quad y_2 + \alpha^2 y_3 = 0,$$

während die zugehörigen Achsen der Perspektivität folgende sind:

$$y_2 - y_3 = 0,\quad y_2 - \alpha y_3 = 0,\quad y_2 - \alpha^2 y_3 = 0.$$

Um jetzt den Übergang zu einer G_{24}'' zu finden, suche ich vor allen Dingen die Doppeltangenten zu bestimmen, welche von den genannten Zentren auslaufen. Durch jedes Zentrum gehen vier Doppeltangenten, aber eine derselben fällt bei uns jedesmal mit $y_1 = 0$ zusammen, so daß es sich nur um neun Doppeltangenten handelt. Betrachten wir zunächst diejenigen, welche durch das erste Zentrum hindurchgehen und demnach eine Gleichung folgender Form haben:

$$\sigma y_1 + (y_2 + y_3) = 0.$$

Um sie zu bestimmen, trage man den Wert von y_1 aus vorstehender Gleichung in die Kurvengleichung ein, ordne nach $\frac{y_2y_3}{(y_2+y_3)^2}$ und bilde die Diskriminante der für diese Größe entstehenden quadratischen Gleichung. So erhält man folgende Gleichung für σ:

$$28\sigma^3 - 21\sigma^2 - 6\sigma - 1 = 0$$

mit den Wurzeln:

$$\sigma = 1,\quad \sigma = \frac{-1 \pm 3\sqrt{-\frac{1}{7}}}{8}.$$

Die drei durch das Zentrum laufenden Doppeltangenten lauten demnach:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

$$(-7 \pm 3\sqrt{-7})y_1 + 56y_2 + 56y_3 = 0.$$

Die sechs übrigen durch die beiden anderen Zentra laufenden Doppeltangenten ergeben sich aus diesen durch die Substitutionen (7).

Ich sage nun, *daß $y_1 = 0$ zusammen mit solchen drei der genannten Doppeltangenten, welche durch* (7) *auseinander hervorgehen, ein Quadrupel von Doppeltangenten bildet, deren acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.* Allgemein nämlich werden die sechs Punkte, welche aus einem beliebigen Punkte durch die Substitutionen der G_6' hervorgehen, mit den Berührungspunkten von $y_1 = 0$ auf einem Kegelschnitte liegen, weil bei den Substitutionen (7), (8) jeder quadratische Ausdruck $y_1^2 + ky_2y_3$ ungeändert bleibt. Die sechs Berührungspunkte der genannten Tripel von Doppeltangenten gehen aber durch die Substitutionen der G_6' auseinander hervor, denn jede einzelne Doppeltangente bleibt, weil sie durch ein Zentrum verläuft, bei einer Substitution von der Periode 2 ungeändert, während sich die Berührungspunkte auf ihr vertauschen.

Demnach kann jetzt die Gleichung unserer C_4 auf drei Weisen in die Form gesetzt werden: $pqrs - w^2 = 0$, wo p, q, r, s Doppeltangenten, w ein Kegelschnitt ist, der durch ihre Berührungspunkte läuft. Man findet einmal:

$$(9)\qquad 0 = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}}\cdot\{49y_1(y_1+y_2+y_3)(y_1+\alpha y_2+\alpha^2y_3)(y_1+\alpha^2y_2+\alpha y_3) - 3(4y_1^2 - 7y_2y_3)^2\},$$

das andere Mal:

$$\begin{aligned}(10)\qquad 0 = \frac{1}{21\sqrt[3]{7}}\cdot\Big\{\frac{y_1}{7\cdot 8^3}&((-7\pm3\sqrt{-7})y_1 + 56y_2 + 56y_3)\\ &\cdot((-7\pm3\sqrt{-7})y_1 + 56\alpha y_2 + 56\alpha^2y_3)\\ &\cdot((-7\pm3\sqrt{-7})y_1 + 56\alpha^2y_2 + 56\alpha y_3)\\ &- 3\left(\frac{1\pm3\sqrt{-7}}{16}\cdot y_1^2 - 7y_2y_3\right)^2\Big\}.\end{aligned}$$

Die Gleichungsform (9) wird uns später (im letzten Paragraphen) von Wichtigkeit sein, *die andere ergibt, wie ich nun zeigen werde, ohne weiteres die Substitutionen einer* G''_{24}.

Man setze nämlich:

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathfrak{z}_1 = (21 \mp 9\sqrt{-7})\,y_1, \\ \mathfrak{z}_2 = (-7 \pm 3\sqrt{-7})\,y_1 + 56\,y_2 + 56\,y_3, \\ \mathfrak{z}_3 = (-7 \pm 3\sqrt{-7})\,y_1 + 56\,\alpha y_2 + 56\,\alpha^2 y_3, \\ \mathfrak{z}_4 = (-7 \pm 3\sqrt{-7})\,y_1 + 56\,\alpha^2 y_2 + 56\,\alpha y_3, \end{cases}$$

so daß $\sum \mathfrak{z} = 0$ ist. Dann geht (10), von einem Zahlenfaktor abgesehen, in folgende Gleichung über:

$$(12)\qquad (\sum \mathfrak{z}^2)^2 - (14 \pm 6\sqrt{-7})\,\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4 = 0$$

und diese Gleichung bleibt bei den 24 Kollineationen ungeändert, welche durch die Vertauschungen der $\mathfrak{z}$ *dargestellt sind. Dies also sind die Kollineationen der betreffenden* G''_{24}.

Man sieht: bei den Kollineationen einer G''_{24} bleibt allemal ein Kegelschnitt ungeändert:

$$\sum \mathfrak{z}^2 = 0,$$

welcher durch die Berührungspunkte der ausgezeichneten Doppeltangenten hindurchläuft. Da es $2\cdot 7$ Gruppen G''_{24} gibt und alle Doppeltangenten untereinander gleichberechtigt sind, so gibt es $2\cdot 7$ derartiger Kegelschnitte, von denen jedesmal sieben zusammengehörige die Berührungspunkte sämtlicher Doppeltangenten ausschneiden. Diese Kegelschnitte werden weiterhin von größter Wichtigkeit werden.

§ 5.

Die 168 Kollineationen bezogen auf das Wendedreieck. Sonstige Formeln.

Die Gleichungen, welche nach (4), (6) zwischen den Variablen λ, μ, ν und y_1, y_2, y_3 bestehen, lassen sich so schreiben:

$$(12\mathrm{a})\begin{cases} -\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\cdot\lambda = y_1 + \sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_2 + \sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_3, \\ -\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\cdot\mu = y_1 + \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_2 + \alpha\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_3, \\ -\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\cdot\nu = y_1 + \alpha\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_2 + \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_3. \end{cases}$$

Vertauscht man nun hier y_1, y_2, y_3 nach (8) mit $-y_1, -y_3, -y_2$ und schreibt dementsprechend:

$$-\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\cdot\lambda' = -y_1 - \sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_2 - \sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_3,$$
$$-\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\cdot\mu' = -y_1 - \alpha\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_2 - \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_3,$$
$$-\sqrt{-3}\sqrt[3]{7}\cdot\nu' = -y_1 - \alpha^2\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)}\cdot y_2 - \alpha\sqrt[3]{7(3\alpha+1)}\cdot y_3,$$

eliminiert sodann zwischen beiden Gleichungssystemen die y_1, y_2, y_3, *so hat man offenbar den Übergang von einem Wendedreiecke* $\lambda\mu\nu = 0$ *zu einem anderen* $\lambda'\mu'\nu' = 0$ *gefunden.* Die Rechnung ergibt ein sehr einfaches Resultat, wenn man die bekannten Ausdrücke für die rechts stehenden Kubikwurzeln in dritten und siebenten Einheitswurzeln benutzt[13]. Sei nämlich:

$$(13)\qquad A = \frac{\gamma^5-\gamma^2}{\sqrt{-7}},\quad B = \frac{\gamma^3-\gamma^4}{\sqrt{-7}},\quad C = \frac{\gamma^6-\gamma}{\sqrt{-7}},$$
$$\sqrt{-7} = \gamma + \gamma^4 + \gamma^2 - \gamma^6 - \gamma^3 - \gamma^5,$$

so kommt einfach:

$$(14)\qquad \begin{cases} \lambda' = A\lambda + B\mu + C\nu, \\ \mu' = B\lambda + C\mu + A\nu, \\ \nu' = C\lambda + A\mu + B\nu. \end{cases}$$

Verbindet man nun diese Substitution (welche die Periode 2 hat) auf alle Weisen mit beliebigen Wiederholungen der beiden (2), (3):

$$\lambda' = \mu,\quad \mu' = \nu,\quad \nu' = \lambda,$$
$$\lambda' = \gamma\lambda,\quad \mu' = \gamma^4\mu,\quad \nu' = \gamma^2\nu,$$

so hat man explizite die 168 Kollineationen, welche die Kurve vierter Ordnung, oder, besser gesagt, die ternäre biquadratische Form

$$f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda$$

in sich überführen.

An dieses Resultat anknüpfend, lassen sich die Koordinaten sämtlicher singulärer Elemente, welche unsere Kurve besitzt, ohne weiteres angeben; man hat jedesmal nur die Koordinaten eines einzigen Elementes der gewollten Art zu bestimmen und auf diese die 168 Kollineationen anzuwenden. Auf solche Art ergeben sich sofort die Koordinaten der 24 Wendepunkte und der zugehörigen Wendetangenten. Was die Doppeltangenten angeht, so bemerke ich, daß die Doppeltangente $y_1 = 0$ des vorigen Paragraphen auf unser Wendedreieck bezogen die Gleichung erhält $\lambda + \mu + \nu = 0$, und daß die Berührungspunkte auf ihr die Koordinaten $1:\alpha:\alpha^2$ resp. $1:\alpha^2:\alpha$ besitzen. Um endlich die 21 Achsen der Perspektivität und die zugehörigen Zentra zu bestimmen, genügt es, diese Elemente für die Substitution (14) auszurechnen. Man findet als Achse der Perspektivität:

$$(15)\qquad \lambda' + \lambda = \mu' + \mu = \nu' + \nu = 0$$

[13]) Es ist

$$\sqrt[3]{7(3\alpha+1)} = (\gamma+\gamma^6) + \alpha\,(\gamma^2+\gamma^5) + \alpha^2(\gamma^4+\gamma^3),$$
$$\sqrt[3]{7(3\alpha^2+1)} = (\gamma+\gamma^6) + \alpha^2(\gamma^2+\gamma^5) + \alpha\,(\gamma^4+\gamma^3).$$

und entsprechend für die Koordinaten des Zentrums:

$$-B-C:B:C$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$B:-B-A:A, \quad \text{resp.} \quad C:A:-C-A.$$

Im folgenden werde ich vor allen Dingen diejenigen Ausdrücke in λ, μ, ν gebrauchen, welche gleich Null gesetzt die *acht Wendedreiecke*, resp. die *zweimal sieben Kegelschnitte* darstellen, von denen am Ende des vorigen Paragraphen die Rede war. Ich will diese Ausdrücke hier so mitteilen, wie sie auseinander durch die 168 Substitutionen von der Determinante Eins hervorgehen.

Es sei das als Koordinatendreieck benutzte Wendedreieck mit δ_∞ bezeichnet und unter Zufügung eines später zweckmäßigen Zahlenfaktors rechter Hand gesetzt:

$$\delta_\infty = -7\lambda\mu\nu. \tag{16}$$

Dann ergibt sich für die übrigen Wendedreiecke ($x = 0, 1, \ldots, 6$):

$$\begin{aligned} \delta_x = &-7(A\gamma^x\lambda + B\gamma^{4x}\mu + C\gamma^{2x}\nu)\cdot(B\gamma^x\lambda + C\gamma^{4x}\mu + A\gamma^{2x}\nu) \\ &\cdot(C\gamma^x\lambda + A\gamma^{4x}\mu + B\gamma^{2x}\nu) \\ = &+\lambda\mu\nu - (\gamma^{3x}\lambda^3 + \gamma^{5x}\mu^3 + \gamma^{6x}\nu^3) + (\gamma^{6x}\lambda^2\mu + \gamma^{3x}\mu^2\nu + \gamma^{5x}\nu^2\lambda) \\ &+ 2(\gamma^{4x}\lambda^2\nu + \gamma^x\nu^2\mu + \gamma^{2x}\mu^2\lambda). \end{aligned} \tag{17}$$

Wir erhalten ferner für zwei der 14 Kegelschnitte, wenn wir in die Gleichung $\sum \mathfrak{z}^2 = 0$ des vorigen Paragraphen rückwärts die y und für diese die λ, μ, ν eintragen unter Zufügung eines geeigneten Zahlenfaktors:

$$(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) = 0.$$

Dementsprechend kommt, wenn wir allgemein die linke Seite der Kegelschnittsgleichung mit c_x bezeichnen, für $x = 0, 1, 2, \ldots 6$:

$$c_x = (\gamma^{2x}\cdot\lambda^2 + \gamma^x\cdot\mu^2 + \gamma^{4x}\cdot\nu^2) + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6x}\cdot\mu\nu + \gamma^{3x}\cdot\nu\lambda + \gamma^{5x}\cdot\lambda\mu). \tag{18}$$

Diese beiden Ausdrücke sind es, welche später die einfachsten Resolventen achten und siebenten Grades ergeben werden.

§ 6.

Aufstellung der Gleichung 168-ten Grades[14]).

Als Unbekannte η der Gleichung 168-ten Grades kann, wie schon gesagt, jede auf unserer C_4 eindeutige Funktion, also jede rationale Funk-

[14]) [Mit den folgenden Paragraphen 6 bis 10 vergleiche man meinen bereits eingangs erwähnten Aufsatz: *Über die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade*, der ein halbes Jahr nach der vorliegenden Arbeit (März 1879) entstand und unmittelbar an diese anknüpft, aber leider aus Rücksicht auf den Plan der Gesamtausgabe beim Wiederabdruck von ihr getrennt werden mußte. K.]

tion von $\lambda:\mu:\nu$ gewählt werden, welche in den 168 durch die Kollineationen zusammengeordneten Punkten im allgemeinen verschiedene Werte aufweist. Es erscheint am einfachsten, $\frac{\lambda}{\mu}$ oder $\frac{\lambda}{\nu}$ selbst zu wählen. Das Resultat gewinnt aber außerordentlich an Übersichtlichkeit, wenn wir nicht *einen* solchen Quotienten, sondern gleichzeitig *beide* einführen, die dann durch die Gleichung

$$f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

aneinander gebunden sind. Es läßt sich dann nämlich J als rationale Funktion 42-ter Ordnung von $\lambda:\mu:\nu$ darstellen

$$J = R(\lambda, \mu, \nu), \tag{19}$$

wo R ein *sehr einfaches* Bildungsgesetz hat, und *diese Gleichung* (19) *von der 42-ten Ordnung zusammen mit der Gleichung vierter Ordnung $f = 0$ vertritt dann die eine Gleichung 168-ten Grades, von welcher bislang immer die Rede war.* Ein ähnliches Verfahren scheint allemal angebracht, wenn es sich um Aufstellung einer Gleichung handelt, deren Geschlecht p größer als Null ist.

Die Funktion $R(\lambda, \mu, \nu)$ muß vor allen Dingen die Eigenschaft haben, bei den 168 Kollineationen ungeändert zu bleiben. Um R zu finden, beschäftige ich mich daher zunächst damit, alle *ganzen* Funktionen von λ, μ, ν aufzustellen, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Dabei wird selbstverständlicherweise vorausgesetzt, daß die 168 Kollineationen mit der Determinante *Eins* genommen werden. — Wir kennen *eine* solche ganze Funktion, das ist

$$f = \lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda;$$

wir wissen ferner, daß die ***Kovarianten*** von f jedenfalls dieselbe Eigenschaft haben. Eine leichte Diskussion zeigt dann, daß sich die Kovarianten von f mit den gesuchten Funktionen decken, und läßt zugleich ihr volles System mit den zwischen den Systemformen bestehenden Relationen aufstellen. Die rationale Funktion R erweist sich als die einfachste aus den Kovarianten zu bildende Verbindung nullter Dimension. — Das ist dieselbe Methode, deren sich Gordan und ich in unseren neueren Arbeiten wiederholt bedienten.

Wir haben als erste Kovariante von f die Hessesche ∇ von der sechsten Ordnung:

$$\nabla = \frac{1}{54}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\nu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\,\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\,\partial\nu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu^2} \end{vmatrix} = 5\lambda^2\mu^2\nu^2 - (\lambda^5\nu + \nu^5\mu + \mu^5\lambda). \tag{20}$$

Gleich Null gesetzt bestimmt sie auf $f=0$ die 24 Wendepunkte, also in der Tat eine Gruppe zusammengehöriger Punkte. Nun gab es auf $f=0$ keine andere Gruppe von nur 24 Punkten und überhaupt keine von einer geringeren Punktzahl. Wir schließen daraus, daß es keine ungeändert bleibende ganze Funktion von geringerer als sechster Ordnung geben kann, und daß jede Funktion sechster Ordnung bis auf einen Zahlenfaktor mit ∇ übereinstimmen muß. Gäbe es nämlich noch eine andere Funktion der sechsten Ordnung, so würde sich dieselbe jedenfalls in der Form

$$k\cdot\nabla + l\cdot\varphi\cdot f$$

darstellen lassen, wo k, l Konstante sind, — denn gleich Null gesetzt muß sie auf $f=0$ eben auch die 24 Wendepunkte bestimmen. Hier wäre φ eine ungeändert bleibende Funktion zweiten Grades und eine solche Funktion kann, wie oben bemerkt, nicht existieren. Genau ebenso schließt man: *Die nächsthöhere in Betracht kommende ganze Funktion ist vom Grade* 14 *und schneidet, gleich Null gesetzt, aus* $f=0$ *die* 56 *Berührungspunkte der Doppeltangenten aus.*

Nun kann man auf verschiedene Weisen eine Kovariante vierzehnter Ordnung bilden. Bekanntlich gab schon Hesse für die allgemeine Kurve vierter Ordnung eine Kurve vierzehnter Ordnung an, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten hindurchgeht. In unserem Falle geschieht das von *jeder* Kovariante 14-ter Ordnung, die nicht eben ein Multiplum von $f^2\nabla$ ist, und es genügt also, irgendeine hinzuschreiben. Ich wähle:

$$(21)\quad C=\frac{1}{9}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\nu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\,\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial\mu\,\partial\nu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\mu} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\lambda} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu\,\partial\mu} & \frac{\partial^2 f}{\partial\nu^2} & \frac{\partial\nabla}{\partial\nu} \\ \frac{\partial\nabla}{\partial\lambda} & \frac{\partial\nabla}{\partial\mu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\nu} & 0 \end{vmatrix} = (\lambda^{14}+\mu^{14}+\nu^{14})+\ldots$$

Ich bilde mir ferner *eine Funktion vom* 21-*ten Grade, die Funktionaldeterminante von* f, ∇, C:

$$(22)\quad K=\frac{1}{14}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial\lambda} & \frac{\partial\nabla}{\partial\lambda} & \frac{\partial C}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial f}{\partial\mu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\mu} & \frac{\partial C}{\partial\mu} \\ \frac{\partial f}{\partial\nu} & \frac{\partial\nabla}{\partial\nu} & \frac{\partial C}{\partial\nu} \end{vmatrix} = -(\lambda^{21}+\mu^{21}+\nu^{21})+\ldots$$

Gleich Null gesetzt ergibt K auf $f=0$ die 84 sextaktischen Punkte. Man kann auch wieder erschließen, daß es außer K keine ungeändert bleibende

Funktion von der 21-ten Ordnung gibt. Denn eine solche müßte sich in der Gestalt darstellen lassen:

$$kK - l\varphi f^{\nu},$$

wo k, l Konstante bedeuten. Hier wäre φ eine ungeändert bleibende Funktion vom Grade $21-4\nu$, schnitte also, gleich Null gesetzt, aus $f=0$ eine Anzahl von Punkten aus, die durch 4, aber nicht durch 8 teilbar wäre. Nun umfassen die einzigen Punktgruppen, welche hier in Betracht kommen können, 24 und 56 Punkte; daher hat man einen Widerspruch. Jetzt erinnere man sich, daß wir früher die 84 sextaktischen Punkte durch 21 gerade Linien, *die* 21 *Achsen der Perspektivität*, ausgeschnitten haben (siehe Gleichung (15)). Es folgt also:

Die Gleichung $K=0$ *stellt das Aggregat der* 21 *Achsen dar.*

Will man *allgemein* 168 zusammengehörige Punkte auf $f=0$ ausschneiden, so genügt es offenbar, den Kurvenbüschel

$$\nabla^7 = kC^3$$

für veränderliches k zu betrachten. Hieraus folgt vor allen Dingen, *daß man für geeignete Werte von* k, l *unter der Bedingung* $f=0$ *eine Relation folgender Form hat:*

$$(23)\qquad \nabla^7 = k\cdot C^3 + l\cdot K^2,$$

es folgt dann aber ferner, *daß* f, ∇, C, K, *zwischen denen diese eine Relation besteht, das volle System der in Betracht kommenden Formen bilden und also um so mehr das volle System der Kovarianten von* f.

Um die in (23) vorkommenden Konstanten k, l zu bestimmen, setze ich zunächst $\lambda=1$, $\mu=0$, $\nu=0$. Dann wird nach Formel (20), (21), (22):

$$(23)\qquad \nabla=0\quad C=1,\quad K=-1$$

und übrigens $f=0$. Also folgt:

$$k=-l.$$

Ich nehme ferner für f die Form (6):

$$f=\frac{1}{21\sqrt[3]{7}}\cdot\{y_1^4+21\,y_1^2y_2y_3-147\,y_2^2y_3^2+49\,y_1(y_2^3+y_3^3)\}$$

und berechne einige Terme von ∇, C, K. So kommt:

$$\nabla=\frac{1}{27}\{7^2\cdot y_3^6-3\cdot5\cdot7\cdot y_1y_2y_3^4\ldots\},$$

$$C=\frac{2^3\cdot7^5\cdot\sqrt[3]{7}}{3^6}\cdot y_2y_3^{13}\ldots,$$

$$K=\frac{-2^3\cdot7^7}{3^9}\cdot y_3^{21}\ldots.$$

Setzt man nun hier $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, so ergibt sich außer $f = 0$:

$$\nabla = \frac{7^2}{3^3}, \quad C = 0, \quad K = \frac{-2^3 \cdot 7^7}{3^9} \tag{23b}$$

und also

$$l = \frac{1}{2^6 \cdot 3^3}, \qquad k = \frac{-1}{2^6 \cdot 3^3}.$$

Die Relation zwischen ∇, C, K *lautet daher:*

$$(-\nabla)^7 = \left(\frac{C}{12}\right)^3 - 27\left(\frac{K}{216}\right)^2. \tag{24}$$

Auf Grund dieser Relation bestimmt sich jetzt die Funktion $R(\lambda, \mu, \nu) = J$ unmittelbar. J soll in den Berührungspunkten der Doppeltangenten gleich Null werden, in den sextaktischen Punkten gleich Eins, in den Wendepunkten unendlich, es soll überdies jeden anderen Wert in 168 zusammengehörigen Punkten und nur in diesen annehmen. *Daher hat man folgende Gleichung:*

$$J : J - 1 : 1 = \left(\frac{C}{12}\right)^3 : 27\left(\frac{K}{216}\right)^2 : -\nabla^7 \tag{25}$$

und diese Gleichung zusammen mit

$$f = 0$$

repräsentiert das Problem 168-*ten Grades, dessen Formulierung unsere Aufgabe war.*

Will man statt J die Invarianten g_2, g_3, Δ des elliptischen Integrals benutzen, so kann man auch schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} g_2 &= \frac{C}{12}, \\ g_3 &= \frac{K}{216}, \\ \sqrt[7]{\Delta} &= -\nabla. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

§ 7.

Resolventen niederen Grades.

Die Gruppe der 168 Kollineationen besaß Untergruppen G'_{21} und G'_{24} von 21 bez. 24 Kollineationen. Demnach besitzt unser Problem 168-ten Grades Resolventen vom achten und vom siebenten Grad. Wie diese Resolventen in einfachster Weise lauten werden, kann nicht zweifelhaft sein. Denn es müssen eben diejenigen Gleichungen achten und siebenten Grades sein, welche ich früher [in den vorangehend abgedruckten Arbeiten LXXXII und LXXXIII], von der direkten Betrachtung der ω-Substitutionen ausgehend, als einfachste ihrer Art aufgestellt habe. Es handelt sich also

nur mehr darum, von den jetzigen Betrachtungen aus den Übergang zu jenen Gleichungen zu finden. Dies gelingt (wie immer bei diesen Untersuchungen) auf doppelte Weise.

Entweder man sucht die einfachste *rationale* Funktion $r(\lambda, \mu, \nu)$, welche in den durch die G'_{21} oder die G''_{24} zusammengeordneten Punkten denselben Wert annimmt, und fragt, wie sie mit J zusammenhängt. —

Oder man bestimmt die niedrigste *ganze* Funktion von λ, μ, ν, welche bei den Substitutionen der G'_{21} resp. der G''_{24} ungeändert bleibt und bestimmt ihren Zusammenhang mit ∇, C, K, bez. Δ, g_2, g_3.

Beide Methoden haben ihre eigentümlichen Vorzüge, und so mag im folgenden die zweite der ersten jedesmal als Ergänzung beigegeben sein.

§ 8.

Die Resolvente vom achten Grade.

Betrachten wir die G'_{21}, welche durch Kombination folgender Substitutionen entsteht:

$$\lambda' = \mu, \qquad \mu' = \nu, \qquad \nu' = \lambda,$$
$$\lambda' = \gamma \cdot \lambda, \qquad \mu' = \gamma^4 \cdot \mu, \qquad \nu' = \gamma^2 \cdot \nu.$$

Ungeändert bleibt bei ihr vor allen Dingen das Wendedreieck $\delta_\infty = -7\lambda\mu\nu$ (16), ungeändert bleibt ferner jedenfalls ∇, also auch die rationale Funktion $\sigma = \frac{\delta_\infty^2}{\nabla}$. Überdies hat letztere die Eigenschaft, jeden vorgegebenen Wert nur in 21 Punkten von $f = 0$ anzunehmen, denn der Büschel von Kurven sechster Ordnung $\delta_\infty^2 - \sigma\nabla = 0$ hat drei feste Grundpunkte, die Koordinateneckpunkte, einfach zählend mit $f = 0$ gemein. Wenn wir also, wie nun geschehen soll, σ als Unbekannte einführen, *so wird J eine rationale Funktion achten Grades von σ:*

$$J = \frac{\varphi(\sigma)}{\psi(\sigma)}. \tag{27}$$

Bestimmen wir jetzt — wie ich es bei analogen Aufgaben wiederholt tat — welche Multiplizität den einzelnen Faktoren in $\varphi, \psi, \varphi - \psi$ zukommt.

J wird unendlich in den 24 Wendepunkten, und zwar siebenfach. In dreien dieser Punkte wird σ siebenfach gleich Null, nämlich in den Koordinateneckpunkten; denn δ_∞ verschwindet in ihnen vierfach, ∇ nur einfach. In den übrigen 21 Wendepunkten wird σ des Nenners ∇ wegen unendlich, aber nur einfach. Daher besteht $\psi(\sigma)$ aus einem einfachen und einem siebenfachen Faktor, von denen der erstere für $\sigma = 0$, der andere für $\sigma = \infty$ verschwindet. *Es ist also, von einem konstanten Faktor abgesehen, $\psi(\sigma)$ gleich σ.*

J wird Null in den 56 Berührungspunkten der Doppeltangenten, und zwar dreifach. Der Gruppe G'_{21} gegenüber spalten sich die Doppeltangenten in $7 + 21$[15]), ihre Berührungspunkte also in $2 \cdot 7 + 2 \cdot 21$. In den ersteren nimmt σ den ihm zukommenden Wert dreifach, in den anderen nur einfach an. Das heißt: *φ enthält zwei einfache und zwei dreifache lineare Faktoren.*

J wird endlich gleich Eins und zwar doppelt, in den 84 sextaktischen Punkten. Der Gruppe G'_{21} gegenüber spalten sich diese Punkte in $4 \cdot 21$, σ nimmt an jeder dieser Stellen seinen Wert nur einfach an. Daher: *$(\varphi - \psi)$ ist das volle Quadrat eines Ausdrucks vierten Grades (von nicht verschwindender Diskriminante).*

Dies sind nun hinsichtlich φ, ψ, $\varphi - \psi$ eben dieselben Angaben, welche mich früher (S. 43 bis 45) zur Aufstellung der Modulargleichung achten Grades führten:

$$(28) \qquad \begin{aligned} J : J - 1 : 1 &= (\tau^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 \\ &: (\tau^4 + 14\tau^3 + 63\tau^2 + 70\tau - 7)^2 \\ &: 1728\,\tau. \end{aligned}$$

Zu eben dieser Gleichung gelangen wir also auch jetzt, wenn wir ein geeignetes Multiplum von σ mit τ bezeichnen.

Um dieses Multiplum zu bestimmen, gehe ich zu dem Koordinatensystem der y zurück (Formel (12a)). Es ist dann $7^2 \cdot \lambda^2 \mu^2 \nu^2$ vermöge $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ gleich $\frac{(5 - 3\alpha) \cdot 7^2}{3^3}$, und vermöge $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ gleich $\frac{(5 - 3\alpha^2) \cdot 7^2}{3^3}$. Für ∇ hat man in beiden Fällen (Formel (23b)) $\frac{7^2}{3^3}$, daher für σ bezüglich die Werte $(5 - 3\alpha)$ und $(5 - 3\alpha^2)$. Aber die beiden Punkte $y_1 = 0$, $y_2 = \left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right.$, $y_3 = \left\{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right.$ sind die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente $\lambda + \mu + \nu = 0$, d. h. einer von den sieben durch die G'_{21} zusammengeordneten Doppeltangenten. Demnach ist für sie $J = 0$ und es verschwindet in (28) insbesondere der einfache Faktor $\tau^2 + 13\tau + 49$. Dessen Wurzeln lauten $3\alpha - 5$ und $3\alpha^2 - 5$. *Daher ist einfach:*

$$\tau = -\sigma$$

oder anders ausgesprochen:

Eine Wurzel τ der Gleichung (28) hat den Wert:

$$(29) \qquad \tau_\infty = -\frac{\delta_\infty^2}{\nabla} = \frac{-7^2 \cdot \lambda^2 \mu^2 \nu^2}{\nabla}.$$

Dann folgt aus (17), *daß die übrigen Wurzeln τ_x folgende Werte aufweisen:*

$$(30) \qquad \tau_x = \frac{-\delta_x^2}{\nabla} = -\frac{\left\{ \begin{aligned} &\lambda\mu\nu - (\gamma^{3x}\lambda^3 + \gamma^{5x}\mu^3 + \gamma^{6x}\nu^3) + (\gamma^{6x}\lambda^2\mu + \gamma^{3x}\mu^2\nu + \gamma^{5x}\nu^2\lambda) \\ &+ 2(\gamma^{4x}\lambda^2\nu + \gamma\ \nu^2\mu + \gamma^{2x}\mu^2\lambda) \end{aligned} \right\}^2}{\nabla}$$

[15]) Derartige Angaben verifiziert man sofort durch die früher mitgeteilten Formeln.

und somit haben wir, wie es in der Einleitung verlangt wurde, die Wurzeln der Modulargleichung achten Grades als rationale Funktionen eines Punktes der Kurve $f = 0$ dargestellt.

Die Gleichung (28) läßt sich, wie ich bereits S. 51 erwähnte, in der Weise umgestalten, daß man statt τ schreibt z^2, statt $J - 1$ aber $\frac{27 g_3}{\Delta}$ und nun beiderseits die Quadratwurzel zieht. So kommt:

$$(31) \qquad z^8 + 14 z^6 + 63 z^4 + 70 z^2 - \frac{216 g_3}{\sqrt{\Delta}} \cdot z - 7 = 0,$$

wo wir nach Formel (26)

$$\frac{216 g_3}{\sqrt{\Delta}} = \frac{K}{\sqrt{-\nabla^3}}$$

setzen können. Tragen wir hier für z nach (29), (30) seinen Wert $\frac{\delta}{\sqrt{-\nabla}}$ ein, so erhalten wir folgende Relation:

$$(32) \qquad \delta^8 - 14\delta^6\nabla + 63\delta^4\nabla^2 - 70\delta^2\nabla^3 - \delta K - 7\nabla^4 = 0.$$

Das Zeichen des vorletzten Gliedes bestimmt sich so, wie es angegeben ist, wenn man etwa für λ, μ, ν die Werte $1, 0, 0$ und für δ irgendeinen der Werte δ_x einträgt.

Eben auf diese Gleichung (32) wird man nun geführt, wenn man sich des formentheoretischen Ansatzes bedient. Die einfachste *ganze* Funktion von λ, μ, ν nämlich, welche bei der G'_{21} ungeändert bleibt, ist $\delta_\infty = -7\lambda\mu\nu$. Bei den 168 Kollineationen nimmt δ acht verschiedene Werte an, deren symmetrische Funktionen ganze Funktionen von ∇, C, K sein müssen (da $f = 0$ genommen ist). Somit genügt δ einer Gleichung achten Grades, die wegen der Dimension von ∇, C, K notwendig folgende Gestalt hat:

$$\delta^8 + a\nabla \cdot \delta^6 + b\nabla^2 \cdot \delta^4 + c\nabla^3 \cdot \delta^2 + dK \cdot \delta + e\nabla^4 = 0,$$

und bestimmt man hier die Koeffizienten $a, b, \ldots e$, indem man für δ, ∇, K ihre Werte in λ, μ, ν einträgt und übrigens $f = 0$ berücksichtigt, so gelangt man eben zur Gleichung (32). Diese Ableitung hat den Vorzug, daß sie a priori übersehen läßt, weshalb in (32) nur gewisse Potenzen von δ vorkommen.

§ 9.

Berührungskurven dritter Ordnung. — Auflösung der Gleichung 168-ten Grades.

Die acht Wurzeln der Gleichung (32) drücken sich nach (16), (17) folgendermaßen aus:

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \delta_\infty &= -7\lambda\mu\nu, \\ \delta_x &= \lambda\mu\nu - \gamma^{-x}(\nu^3 - \lambda^2\mu) - \gamma^{-4x}(\lambda^3 - \mu^2\nu) - \gamma^{-2x}(\mu^3 - \nu^2\lambda) \\ &\qquad + 2\gamma^{x} \cdot \nu^2\mu \qquad + 2\gamma^{4x} \cdot \lambda^2\nu \qquad + 2\gamma^{2x} \cdot \mu^2\lambda. \end{aligned} \right.$$

Nun gab ich bereits in meiner früheren Arbeit (Nr. LXXXII) an (S. 51), daß die Gleichung (31) und also auch die Gleichung (32) *eine Jacobische Gleichung achten Grades ist*, das heißt, daß sich die aus ihren Wurzeln gezogenen Quadratwurzeln mit Hilfe von vier Größen A_0, A_1, A_2, A_3 folgendermaßen zusammensetzen lassen[16]):

$$(34)\qquad \begin{cases} \sqrt{\delta_\infty} = \sqrt{-7}\cdot A_0, \\ \sqrt{\delta_\varkappa} = \qquad A_0 + \gamma^{\varrho\varkappa} A_2 + \gamma^{4\varrho\varkappa} A_2 + \gamma^{2\varrho\varkappa} A_3. \end{cases}$$

(ϱ bedeutet hier irgendeine durch 7 nicht teilbare ganze Zahl). Es fragt sich, wie sich diese Angabe, die ich der a. a. O. mitgeteilten transzendenten Auflösung von (31) entnommen hatte, algebraisch bestätigt. Dies erledigt sich durch die Betrachtung gewisser *Berührungskurven dritter Ordnung*[17]), welche unsere Kurve $f = 0$ besitzt, oder, anders ausgesprochen, durch die Betrachtung gewisser *auf* $f = 0$ *existierender Wurzelfunktionen dritter Ordnung.*

Eine Kurve vierter Ordnung hat bekanntlich 64 dreifach unendliche Systeme von Berührungskurven dritter Ordnung, 36 von *gerader*, 28 von *ungerader* Charakteristik[18]). *Es ist nun hier ein System von gerader Charakteristik dadurch ausgezeichnet, daß es die acht Wendedreiecke als Berührungskurven in sich schließt.*

Jedenfalls kann ein Wendedreieck unmittelbar als Berührungskurve dritter Ordnung betrachtet werden, indem seine 12 Durchschnittspunkte mit der Kurve vierter Ordnung sogar in nur *drei* Schnittpunkte (zu je vier) zusammenfallen. Betrachten wir nun etwa das Dreieck δ_∞. Durch seine Schnittpunkte mit der C_4 legen wir die dreifach unendliche Zahl von Kurven dritter Ordnung, welche in ihnen die C_4 berühren; ihre Gleichung ist:

$$(35)\qquad k\lambda\mu\nu + a\lambda^2\mu + b\mu^2\nu + c\nu^2\lambda = 0.$$

[16]) Wegen der Jacobischen Gleichungen achten Grades vgl. eine Notiz von Brioschi in den Rendiconti dell' Istituto Lombardo von 1868 [= Opere matematiche, Nr. CXVII, tomo III., S. 243] (erläutert von Jung und Armenante im 7. Bande des Giornale di Matematiche, S. 98 ff.), sowie eine im Texte noch nicht verwertete Bemerkung am Schlusse meiner wiederholt zitierten Erlanger Note, [ferner die in Bd. 15 der Math. Annalen erschienene Arbeit von F. Brioschi (1879) = Opere matematiche, Nr. CCXXXV, tomo V., S. 225]. Ich hoffe bald ausführlicher auf den Gegenstand zurückkommen zu können. [Vgl. Math. Annalen Bd. 15 (1879), S. 251 ff. = Abh. LVII in Bd. 2 dieser Ausgabe.] (Vgl. auch die neuerdings erschienene Arbeit Brioschis: *Sopra una classe di equazioni modulari*, Annali di Matematica, t. IX. (1878/79) [= Opere matematiche, Nr. LXXV, tomo II., S. 193.]).

[17]) D. h. Kurven dritter Ordnung, welche $f = 0$ sechsmal einfach berühren. [Die Entwicklungen des Textes schließen sich an die Untersuchuungen von Hesse an: *Über Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie*, Crelles Journal, Bd. 49 (1853/55) = Gesammelte Werke, Nr. 24, S. 319].

[18]) [Vgl. Riemanns Vorlesungen von 1861/62, die in dem von Noether und Wirtinger herausgegebenem Nachtrage zu Riemanns Werken veröffentlicht sind. Siehe daselbst besonders S. 15].

Sie schneiden jede die C_4 in noch sechs weiteren Punkten, und in diesen Punkten berührt dann, wie bekannt, eine neue Kurve dritter Ordnung desselben Systems, zu welchem δ_∞ gehört; zugleich erzielt man auf diese Weise *alle* Kurven des fraglichen Systems. Jetzt findet man die Identität:

$$(36)\qquad \begin{aligned} &(k\lambda\mu\nu + a\lambda^2\mu + b\mu^2\nu + c\nu^2\lambda)^2 - (a^2\lambda\mu + b^2\mu\nu + c^2\nu\lambda)\cdot f \\ &= \lambda\mu\nu\cdot\{k^2\lambda\mu\nu - (a^2\mu^3 + b^2\nu^3 + c^2\lambda^3) + 2(bc\mu\nu^2 + ca\nu\lambda^2 + ab\lambda\mu^2) \\ &\qquad + [(2ak - b^2)\lambda^2\mu + (2bk - c^2)\mu^2\nu + (2ck - a^3)\nu^2\lambda]\}. \end{aligned}$$

Die Gesamtheit der in Betracht kommenden Berührungskurven dritter Ordnung ist daher durch folgende Gleichung dargestellt:

$$(37)\qquad \begin{aligned} 0 = {}& k^2\lambda\mu\nu - (a^2\mu^3 + b^2\nu^3 + c^2\lambda^3) + 2(bc\mu\nu^2 + ca\nu\lambda^2 + ab\lambda\mu^2) \\ &+ [(2ak - b^2)\lambda^2\mu + (2bk - c^2)\mu^2\nu + (2ck - a^2)\nu^2\lambda]. \end{aligned}$$

Setzt man nun hier

$$k = 1, \quad a = \gamma^{-\varkappa}, \quad b = \gamma^{-4\varkappa}, \quad c = \gamma^{-2\varkappa},$$

so entsteht rechter Hand der Ausdruck $\delta_\varkappa$, und es gehören also, wie behauptet wurde, die acht Wendedreiecke demselben Systeme von Berührungskurven an[19]).

Nun kommen die Formeln (34) einfach auf den Satz zurück, *daß sich die Wurzelfunktionen eines Systems gerader Charakteristik linear aus vier unabhängigen zusammensetzen lassen.* Man wähle nämlich solche vier Wurzelfunktionen, welche Berührungskurven (37) entsprechen, für die der Reihe nach

$$\begin{aligned} k = 1, \quad a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \\ k = 0, \quad a = 1, \quad b = 0, \quad c = 0 \text{ usw.} \end{aligned}$$

genommen ist, und setze dementsprechend:

$$(38)\qquad \begin{cases} \qquad\qquad A_0 = \sqrt{\lambda\mu\nu}, \\ A_1 = \sqrt{-\mu^3 - \nu^2\lambda}, \quad A_2 = \sqrt{-\nu^3 - \lambda^2\mu}, \quad A_3 = \sqrt{-\lambda^3 - \mu^2\nu}. \end{cases}$$

Dann hat man bei richtiger Wahl der Vorzeichen vermöge $f = 0$ folgende Relationen:

$$(39)\qquad \begin{cases} A_0A_1 = \lambda^2\mu, \quad A_0A_2 = \mu^2\nu, \quad A_0A_3 = \nu^2\lambda, \\ A_1A_2 = \lambda\mu^2, \quad A_2A_3 = \mu\nu^2, \quad A_2A_1 = \nu\lambda^2, \text{[20])} \end{cases}$$

[19]) Daß dies System von *gerader* Charakteristik ist, folgt aus der sogleich anzugebenden irrationalen Gleichungsform.

[20]) Infolgedessen hat man zwischen den A_0, A_1, A_2, A_3 eine Reihe identischer Relationen, welche alle durch Nullsetzen folgender Matrix

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_0 & -A_2 & 0 \\ A_2 & 0 & A_0 & -A_3 \\ A_3 & -A_1 & 0 & A_0 \end{vmatrix}$$

erhalten werden.

und es läßt sich die Gleichung (37) in folgender irrationaler Form schreiben:

$$(40)\qquad k A_0 + a A_1 + b A_2 + c A_3 = 0 .$$

Insbesondere wird mit Rücksicht auf (33):

$$(41)\qquad \begin{cases} \sqrt{\delta_\infty} = \sqrt{-7}\cdot A_0, \\ \sqrt{\delta_x} = \qquad A_0 + \gamma^{-x}\cdot A_1 + \gamma^{-4x}\cdot A_2 + \gamma^{-2x} A_3. \end{cases}$$

Dies sind nun in der Tat die Formeln (34), *indem nur statt der damals unbestimmt gelassenen Zahl* ϱ *jetzt* (-1) *gesetzt ist.*

Man kann diese Formeln benutzen, um unsere Gleichung 168-ten Grades explizite durch elliptische Funktionen zu lösen[21]). Die Wurzeln δ von (32) sind den Wurzeln z von (31) proportional, und für letztere gab ich S. 48, 51 meiner vorletzten Arbeit [Nr. LXXXII] den Ausdruck in $q = e^{i\pi\omega}$ an. Dementsprechend haben wir hier:

$$(42)\qquad \delta_\infty : \delta_x = -7\sqrt[6]{q^7}\cdot \Pi(1-q^{14n})^2 : \sqrt[6]{\gamma^x\cdot q^{1/7}}\,\Pi\left(1-\gamma^{2nx}\cdot q^{\frac{2n}{7}}\right)^2 .$$

Die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke liefern vermöge der Reihenentwicklung

$$q^{\frac{1}{12}}\cdot \Pi(1-q^{2n}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\cdot q^{\frac{(6n+1)^2}{12}}$$

die A_0, A_1, A_2, A_3 ihrem Verhältnisse nach, und benutzt man nun, daß nach Formel (39):

$$(43)\qquad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{A_0}{A_2},\quad \frac{\mu}{\nu} = \frac{A_0}{A_3},\quad \frac{\nu}{\lambda} = \frac{A_0}{A_1}$$

ist, so findet man folgende Lösungen der Gleichung 168-ten Grades:

$$(44)\qquad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu} = q^{\frac{4}{7}}\cdot \dfrac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+7h}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^h\cdot q^{21h^2+h} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^h\cdot q^{21h^2+13h+2}}, \\[2ex] \dfrac{\mu}{\nu} = q^{\frac{2}{7}}\cdot \dfrac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+7h}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+19h+4} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^h\cdot q^{21h^2+37h+16}}, \\[2ex] \dfrac{\nu}{\lambda} = q^{\frac{1}{7}}\cdot \dfrac{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+7h}}{\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^h\cdot q^{21h^2+25h+7} + \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{21h^2+31h+11}}. \end{cases}$$

[21]) Sie muß sich auch durch eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung lösen lassen; wie hat man dieselbe aufzustellen? [Anschließende Literatur ist in Fußnote [32]), S. 423/24 von Bd. 2 dieser Ausgabe mitgeteilt.]

Es genügt, dieses eine Lösungssystem zu berechnen, denn die 167 *anderen ergeben sich aus diesem einen durch die Kollineationen des* § 5.

Ich habe dabei nur die *Verhältnisse* $\lambda : \mu : \nu$ berechnet; will man von der Formulierung ausgehen, wie sie Gleichung (26) vertritt, so erhält man natürlich entsprechende Formeln für die *absoluten Werte* von λ, μ, ν.

§ 10.
Die Resolvente siebenten Grades.

Bei den Substitutionen einer G''_{24} blieb jedesmal ein Kegelschnitt c_x ungeändert, welcher die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten ausschnitt; nach Gleichung (18) können wir setzen:

$$(45)\quad c_x = (\gamma^{2x}\cdot\lambda^2 + \gamma^x\cdot\mu^2 + \gamma^{4x}\cdot\nu^2) + \frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6x}\cdot\mu\nu + \gamma^{3x}\cdot\nu\lambda + \gamma^{5x}\cdot\lambda\mu).$$

Bilden wir jetzt die rationale Funktion:

$$(46)\qquad \xi = \frac{c_x^3}{\nabla}.$$

Da Zähler und Nenner bei den 24 Substitutionen der G''_{24} ungeändert bleiben, da ferner der Büschel von Kurven sechster Ordnung $\nabla - \xi\cdot c_x^3 = 0$ keine festen Grundpunkte mit der C_4 gemein hat, so schließen wir, daß ξ jeden Wert einmal in solchen 24 Punkten annimmt, welche durch die 24 Substitutionen der G''_{24} zusammengeordnet werden. Daher:

J ist eine rationale Funktion siebenten Grades von ξ:

$$(47)\qquad J = \frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)}.$$

Wir betrachten nun wieder die Werte $J = \infty, 0, 1$.

Die 24 Wendepunkte, in denen J siebenfach unendlich wird, bilden den Substitutionen der G''_{24} gegenüber nur eine, einfach zählende Gruppe. $\psi(\xi)$ ist also die siebente Potenz eines linearen Faktors. Aber ξ wird, nach Formel (46) in den Wendepunkten selbst unendlich. *Daher ist* $\psi(\xi)$ *eine Konstante.*

Von den 56 Berührungspunkten der 28 Doppeltangenten liegen acht auf $c_x = 0$, in ihnen also wird ξ dreifach Null. Die anderen 48 verteilen sich auf $2\cdot 24$ (welche je 12 Doppeltangenten angehören). Deshalb: φ *enthält neben dem einfachen Faktor* ξ *noch die dritte Potenz eines quadratischen Faktors von nicht verschwindender Diskriminante.*

Die 84 sextaktischen Punkte endlich verteilen sich den 24 Substitutionen der G''_{24} gegenüber auf $3\cdot 12 + 2\cdot 24$. Also: $\varphi - \psi$ *enthält einen kubischen Faktor einfach und einen quadratischen doppelt.*

Nun sind es eben wieder diese an φ, ψ gestellten Forderungen gewesen, welche ich früher benutzte, um die einfachste Gleichung siebenten Grades aufzustellen (S. 88/89), welche folgendermaßen lautete:

$$(48)\quad J:J-1:1=\mathfrak{z}\left(\mathfrak{z}^2-2^2\cdot 7^2(7\mp\sqrt{-7})\mathfrak{z}+2^5\cdot 7^4(5\mp\sqrt{-7})\right)^3$$
$$:\Big(\mathfrak{z}^3-2^2\cdot 7\cdot 13(7\mp\sqrt{-7})\mathfrak{z}^2+2^6\cdot 7^3(88\mp 23\sqrt{-7})\,\mathfrak{z}$$
$$-2^8\cdot 3^3\cdot 7^4(35\mp 9\sqrt{-7})\Big)$$
$$\cdot\left(\mathfrak{z}^2-2^4\cdot 7(7\mp\sqrt{-7})\mathfrak{z}+2^5\cdot 7^3(5\mp\sqrt{-7})\right)^2$$
$$:\mp 2^{27}\cdot 3^3\cdot 7^{10}\cdot\sqrt{-7}\,.$$

Wir schließen, daß die Unbekannte $\mathfrak{z}$ bis auf einen konstanten Faktor mit unserem jetzigen ξ übereinstimmt, wobei es aber noch fraglich ist, ob das obere Vorzeichen von $\sqrt{-7}$ in (45) dem oberen oder dem unteren Vorzeichen in (48) entspricht.

Um dies zu entscheiden, gestalte ich (48) zunächst in der Weise um, daß ich $\mathfrak{z}=z^3$, $J=\frac{g_2^3}{\Delta}$ setze und dann beiderseits die Kubikwurzel ziehe.

$$(49)\quad z^7-3^2\cdot 7^2(7\mp\sqrt{-7})z^4+2^5\cdot 7^4(5\mp\sqrt{-7})z\mp 2^9\cdot 3\cdot 7^3\sqrt{-7}\cdot\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}=0.$$

Schreibt man hier nach Gleichung (26) $\frac{C}{12\sqrt[3]{-\nabla^7}}$ statt $\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}$, trägt andererseits für z, unter k eine unbekannte Konstante verstanden, ein $\frac{kc}{\sqrt[3]{\nabla}}$, so folgt:

$$(50)\quad k^7c^7-2^2\cdot 7^2(7\mp\sqrt{-7})k^4\cdot\nabla c^4+2^5\cdot 7^4(5\mp\sqrt{-7})k\nabla^2c$$
$$\pm 2^7\cdot 7^3\sqrt{-7}\cdot C=0.$$

Dies gibt:

$$k^3\sum c_x^3=3\cdot 2^2\cdot 7^2(7\mp\sqrt{-7})\cdot\left(5\lambda^2\mu^2\nu^2-(\lambda^5\nu+\nu^5\mu+\mu^5\lambda)\right),$$
$$k^7\cdot\Pi c_x=\mp 2^7\cdot 7^3\cdot\sqrt{-7}\,(\lambda^{14}+\mu^{14}+\nu^{14}+\ldots),$$

(selbstverständlich vermöge $f=0$). *Die beiden Gleichungen werden nun in der Tat befriedigt, wenn man*

$$k=\pm 2\sqrt{-7}$$

wählt und dem Vorzeichen in k das obere in (49) *und das untere in* (45) *entsprechen läßt.*

Mit anderen Worten: *Die Wurzeln z der Gleichung* (49), *resp. $\mathfrak{z}$ der Gleichung* (48) *haben in λ, μ, ν folgende Werte:*

$$(51)\quad z=\mathfrak{z}^{\frac{1}{3}}=\frac{\pm 2\sqrt{-7}\left\{(\gamma^{2x}\cdot\lambda^2+\gamma^x\cdot\mu^2+\gamma^{4x}\cdot\nu^2)+\frac{-1\mp\sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6x}\cdot\mu\nu+\gamma^{3x}\cdot\nu\lambda+\gamma^{5x}\ldots\right.}{\sqrt[3]{\nabla}}$$

und somit finden sich die $\mathfrak{z}$, wie es in der Einleitung verlangt wurde, als rationale Funktionen eines Punktes unserer C_4 explizite angegeben.

Die Gleichung (50) aber geht in folgende über:

$$(52)\qquad c^7+\frac{7}{2}(-1\mp\sqrt{-7})\nabla c^4-7\left(\frac{5\mp\sqrt{-7}}{2}\right)\nabla^2c-C=0.\text{[22]}$$

Auf eben diese Gleichung würde der formentheoretische Ansatz selbstverständlich von vornherein geführt haben. Denn die niedrigste ganze Funktion von λ, μ, ν, welche bei den 24 Substitutionen einer G_{24}'' ungeändert bleibt, ist eben das zugehörige c_x, und dieses c_x muß einer Gleichung siebenten Grades genügen, deren Koeffizienten ganze Funktionen von ∇, C, K sind, die also, wegen der Dimension dieser Formen in λ, μ, ν, jedenfalls folgende Gestalt hat:

$$c^7+\alpha\nabla c^4+\beta\nabla^2c+\gamma C=0,$$

wo nun α, β, γ durch Eintragung der Werte in λ, μ, ν zu bestimmen sind. Dieser Ansatz hat wieder den Vorzug, a priori zu zeigen, daß in (52) resp. (49) eine große Anzahl von Gliedern fehlen müssen.

§ 11.

Ersetzung der Riemannschen Fläche des § 2 durch eine regulär eingeteilte Oberfläche.

Ich wünsche nun noch die Beziehung der Irrationalität $\lambda:\mu:\nu$ zu der absoluten Invariante J, resp. zu den Wurzeln τ und $\mathfrak{z}$ der Gleichungen achten und siebenten Grades so anschaulich wie möglich durch die Hilfsmittel der Analysis situs zu erläutern. Dabei erinnere ich zunächst an die Figuren, welche ich S. 39/40 für die Gleichung achten Grades und auf S. 83 für die Gleichungen siebenten Grades gegeben habe, und beginne übrigens mit einer allgemeinen Erläuterung betreffend solche *Riemannsche Flächen, die zu Galoisschen Resolventen mit einem rational vorkommenden Parameter gehören* (vgl. S. 52 ff.). Es sei $F(\eta, z)=0$ eine derartige Gleichung vom Grade N, die dann die charakteristische Eigenschaft hat, daß jede Wurzel η_i in bezug auf den Parameter z ebenso verzweigt ist, wie jede andere η_k, und die dementsprechend durch N eindeutige Transformationen in sich übergeht (siehe § 2 dieser Arbeit)[23]. Die komplexen Werte von z mögen in eine Ebene ausgebreitet werden, und $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sollen diejenigen Stellen sein, an denen Verzweigungen stattfinden. Diese Verzweigungen sind für alle Blätter gleichmäßig; ich will annehmen, daß in z_1 je ν_1

[22]) [Die entsprechende Gleichung für $f\neq 0$ ist in Bd. 15 der Math. Annalen (1879), S. 266 = Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 406 angegeben].

[23]) [Die Aussage des Textes soll ebenso wie auf S. 52 und S. 97 einschließen, daß die Verbindung der Blätter gleichmäßig ist. Siehe insbesondere die Fußnote [34]) auf S. 52. B.-H.]

Blätter, in z_2 je ν_2 Blätter usw. zusammenhängen. Man lege dann in der z-Ebene durch $z_1, z_2, \ldots, z_n$ irgendeine in sich zurückkehrende Kurve (einen Absonderungsabschnitt), welche die Ebene z und gleichzeitig jedes der N über ihr hinerstreckten Blätter der η versinnlichenden Riemannschen Fläche in zwei Gebiete zerlegt. Das eine Gebiet denke ich mir schraffiert, das andere freigelassen, — und verwandle nun die über der z-Ebene mehrblättrig verlaufende Fläche unter Beibehaltung der Schraffierung in eine im Raume gelegene stetig gekrümmte Fläche von gleichem Zusammenhange. Dieselbe ist dann in $2N$ abwechselnd schraffierte und nicht schraffierte n-Ecke zerlegt, welche in den verschiedenen Ecken bezüglich zu $2\nu_1, 2\nu_2, \ldots, 2\nu_n$ zusammenstoßen, und die, im Sinne der Analysis situs, abwechselnd kongruent und symmetrisch sind; die Kanten dieser Polygone sind das Bild des in der *z-Ebene* gezogenen Absonderungsschnittes. Die N eindeutigen Transformationen der Gleichung $F(\eta, z) = 0$ in sich sprechen sich darin aus, daß man die so erhaltene Fläche auf N Weisen eindeutig auf sich selbst beziehen kann. Man ordne nämlich einem beliebigen schraffierten oder nicht schraffierten n-Ecke der Fläche ein beliebiges anderes zu, das ebenfalls schraffiert oder nicht schraffiert ist: setzt man dann fest, daß nebeneinanderliegenden n-Ecken ebensolche entsprechen sollen, so wird vermöge der ersten Zuordnung *jedem* n-Eck unserer Fläche ein und nur ein bestimmtes anderes *n-Eck* entsprechen. Ich will Oberflächen, welche in diesem Sinne in alternierende Gebiete geteilt sind, *als regulär[-symmetrisch] eingeteilte Oberflächen* bezeichnen; sie umfassen als besonderen Fall, bei $p = 0$, diejenigen Einteilungen der Kugelfläche in 24, 48, 120 Dreiecke, welche man beim Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder kennt. — Wir können dann den allgemeinen Satz aussprechen:

Jede Galoissche Resolvente $F(\eta, z) = 0$ wird durch eine regulär eingeteilte Oberfläche versinnlicht.

Und auch umgekehrt: *Jede regulär eingeteilte Oberfläche definiert eine besondere Klasse Galoisscher Resolventen mit einem Parameter.* Denn sie definiert eine Verzweigung von η in bezug auf z von der Eigenschaft, daß jede Wurzel η_i sich durch jede andere η_k und den Parameter z rational ausdrückt[24]).

[24]) Es scheint eine sehr nützliche Aufgabe zu sein, für die niedrigsten p alle regulär eingeteilten Oberflächen aufzuzählen und die zugehörigen Gleichungen $F(\eta, z) = 0$ zu untersuchen. [Diese Aufgabe löste W. Dyck in seiner Münchener Inauguraldissertation (1879): *Über regulär verzweigte Riemannsche Flächen und die durch sie definierten Irrationalitäten* und in der an sie anknüpfenden Arbeit in Bd. 17 der Math. Annalen (1880/81): *Über Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemannscher Flächen.* Jedoch befindet sich in diesen Arbeiten wie auch im Texte meiner vorliegenden Arbeit noch ein Fehler; der Unterschied zwischen *regulären* und *regulär-symmetrischen* Flächen ist noch nicht klar erfaßt und dementsprechend sind nur die letzteren behandelt. Dyck hat später diesen Irrtum richtig gestellt in seiner Abhandlung *Gruppentheoretische Studien* in Bd. 20 der Math. Annalen (1882), vgl. S. 30 daselbst, Anmerkung. — In diesem Zusammenhange möchte ich noch hervorheben, daß Dyck gerade auch den Riemannschen Flächen, die den *Galoisschen Resolventen der Modulargleichungen* entsprechen, ein besonderes Spezialstudium gewidmet hat und zu einem allgemeinen Prinzip gelangt ist, diese in übersichtlicher Form darzustellen. Man vgl. hierüber seinen diesbezügl. Aufsatz in den Math. Annalen, Bd. 18 (1881), S. 507 ff. Ich werde unten in einem Zusatz zu Abh. LXXXVI, S. 166 des vorliegenden Bandes, hierauf zurückkommen. K.]

In dem besonderen Falle nun, der hier vorliegt, haben wir 168 Blätter und drei Verzweigungspunkte. Indem ich statt z wieder J schreibe, entsprechen die letzteren $J = 0, 1, \infty$. Bei $J = 0$ hängen die Blätter zu je drei, bei $J = 1$ zu je zwei, bei $J = \infty$ zu je sieben zusammen. Dementsprechend erhalten wir zur Versinnlichung unserer Irrationalität eine regulär eingeteilte Oberfläche, *welche von $2 \cdot 168$ Dreiecken überdeckt ist, die 24-mal zu vierzehn, 56-mal zu sechs, 84-mal zu vier zusammenstoßen.* Die Ecken dieser Dreiecke sind keine anderen als die früher (§ 2) so genannten Punkte a, b, c, eine Bezeichnung, an der ich auch jetzt festhalten will. — Der Absonderungsschnitt in der Ebene J mag fortan so gewählt sein, daß er mit der reellen Achse zusammenfällt. Dann entsprechen die zweierlei Dreiecke, welche unsere Fläche überdecken, den beiden Halbebenen J, *die Kanten der Dreiecke also den reellen Werten von J.* Ich will (wie ich es immer tat) diejenigen Gebiete schraffieren, welche der positiven Halbebene J entsprechen. So hat man bei den schraffierten Dreiecken folgende Aufeinanderfolge der Ecken:

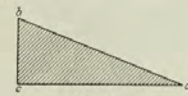


Fig. 1.

Vergleichen wir die so definierte Fläche mit der in unendlich viele Dreiecke eingeteilten ω-Ebene (S. 23), so ist vor allen Dingen deutlich, daß sich unsere Irrationalität über *ein* schraffiertes resp. nicht schraffiertes Dreieck bewegt, wenn ω ein schraffiertes oder nicht schraffiertes Dreieck durchläuft. Nun erläuterte die Fig. 11 auf S. 39 die Beziehung zwischen ω und der Wurzel τ der Modulargleichung achten Grades, die Figuren 4, 5 auf S. 83 in der vorangehenden Arbeit die Beziehung zwischen ω und der Wurzel $\mathfrak{z}$ der Gleichung siebenten Grades. Übertragen wir diese Figuren auf unsere regulär eingeteilte Fläche und beachten, daß τ und $\mathfrak{z}$ *rationale* Funktionen von $\lambda : \mu : \nu$ sind, daß also jedem Punkte unserer Fläche nur ein Wert von τ und ein Wert von $\mathfrak{z}$ entspricht, so erhalten wir folgende Sätze:

Unsere regulär eingeteilte Fläche kann in 21 Gebiete der folgenden Gestalt zerlegt werden:

貴重書

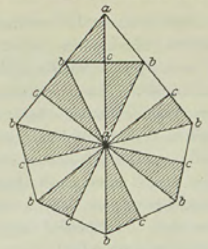


Fig. 2.

sie kann ferner in 24 Siebenecke zerlegt werden, wie sie beistehende Figur versinnlicht.

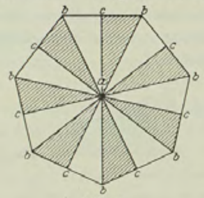


Fig. 3.

Die Gebiete der ersten Art entsprechen der richtig zerschnittenen Ebene τ, die anderen der zerschnittenen Ebene $\mathfrak{z}$.[25])

Die Fig. 2 wird durch ihre Mittellinie in zwei symmetrische Hälften zerlegt, von denen ich die eine hier besonders abzeichne.

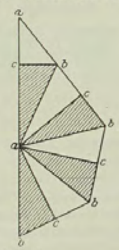


Fig. 4.

[25]) Die Zusammenfassung in 24 Siebenecke ist also dem analog, daß man die 120 beim Ikosaeder auftretenden Dreiecke zu je 10 in die 12 Fünfecke des Pentagondodekaeders vereinigt.

Wir können dann sagen: *Unsere Fläche wird von 42 abwechselnd kongruenten und symmetrischen Gebieten der durch diese Figur definierten Art überdeckt*[26]). An diese Zerlegung unserer Fläche will ich anknüpfen, um ein völlig deutliches Bild derselben zu entwickeln.

§ 12.

Erklärung der beigegebenen Hauptfigur [auf S. 126].

Die in Rede stehenden Gebiete legen sich auf unserer regulär eingeteilten Oberfläche jedenfalls folgendermaßen zu je dreien aneinander:

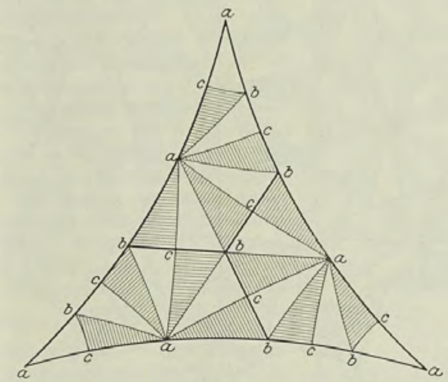
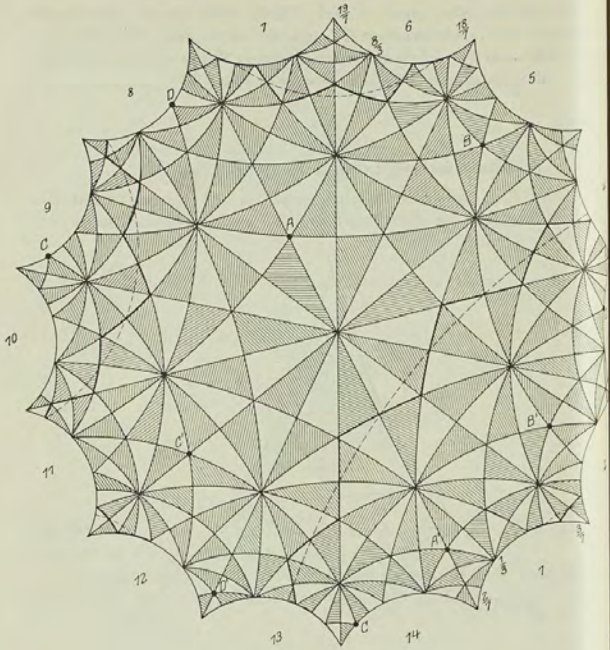


Fig. 5.

Die auf der nächsten Seite folgende Hauptfigur dieser Arbeit ist nun dadurch entstanden, daß ich 14 solcher großer Dreiecke in abwechselnd symmetrischer Aufeinanderfolge um einen Mittelpunkt gruppierte. Dabei wählte ich, um eine möglichst übersichtliche Gestalt zu bekommen, die kleinen Dreiecke (welche den Halbebenen J entsprechen) als Kreisbogendreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{7}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. Ich behaupte: *Diese Figur ist das Bild unserer regulär eingeteilten Oberfläche, sofern wir die 14 Begrenzungslinien derselben uns noch in geeigneter Weise paarweise verbunden denken.*

[26]) Jedes derartige Gebiet entspricht der richtig zerschnittenen Halbebene τ; siehe Fig. 12 auf S. 40.

貴重書

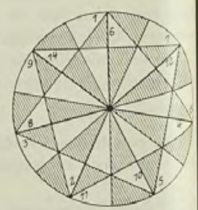


Hauptfigur.

Ecken der einen Art.

Zusammengehörigkeit der Kanten:

1	an	6
3	„	8
5	„	10
7	„	12
9	„	14
11	„	2
13	„	4



Ecken der anderen Art.

In der Tat enthält unsere Figur 2·168 kleine Kreisbogendreiecke, welche überall da, wo sie zusammenstoßen, das von uns angegebene Verhalten zeigen. Von dieser Bemerkung ausgehend, kann man eine geeignete Verbindung der Begrenzungslinien suchen und dann den Beweis führen, daß eine andere Gruppierung der 2·168 Dreiecke, als die so erhaltene, nicht möglich ist.

Um jedoch diese Betrachtung nicht zu abstrakt zu gestalten, greife ich zurück auf die ω-Ebene und zeichne in ihr zunächst dasjenige Aggregat von Elementardreiecken, welches Fig. 5 entspricht. So erhalte ich das nebenstehende Bild.

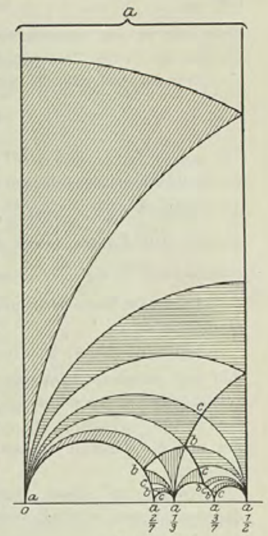


Fig. 6.

Reiht man 14 derartige Figuren in abwechselnd symmetrischer Lage in der ω-Ebene aneinander, so hat man, was der Hauptfigur entspricht. Es handelt sich dann vor allen Dingen um den Nachweis, der sich sofort ergibt, daß der so in der ω-Ebene abgegrenzte Raum als *Fundamentalpolygon* für unsere Irrationalität dienen kann, das heißt, daß sowohl die 168 schraffierten als auch die 168 nicht schraffierten Dreiecke, welche unsere Figur umfaßt, aus einem schraffierten resp. nicht schraffierten Dreiecke durch solche Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ hervorgehen, welche modulo 7 alle verschieden sind. Es handelt sich ferner darum, die Zusammengehörigkeit der Kanten zu bestimmen, die in der Hauptfigur mit $1, 2, \ldots, 14$ bezeichnet sind. Jeder solchen Kante entspricht in der ω-Ebene ein *Paar* von Halbkreisen, die auf der reellen Achse senkrecht stehen; der Kante 1 z. B. das Paar der Kreise, von denen der eine durch $\omega = \frac{2}{7}$ und $\omega = \frac{1}{3}$, der andere durch $\omega = \frac{1}{3}$ und $\omega = \frac{3}{7}$ hindurchgeht. Wenn ich jetzt z. B. behaupte, daß die Kanten 1 und 6 miteinander zu vereinigen sind, so habe ich zu zeigen, daß die entsprechenden Halbkreise in der ω-Ebene, welche folgende gegenseitige Lage haben:

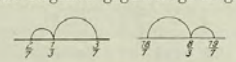


Fig. 7.

durch solche Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ auseinander hervorgehen, welche modulo 7 zur Identität kongruent sind. Dies ist in der Tat der Fall. Denn die Substitution

$$\omega' = \frac{113\,\omega - 35}{42\,\omega - 13}$$

läßt aus $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{3}$ bez. $\frac{19}{7}$, $\frac{8}{3}$ hervorgehen und verwandelt also den Halbkreis, der in den erstgenannten Punkten die reelle Achse trifft, in denjenigen, der in den beiden anderen schneidet.

Entsprechend läßt die Substitution

$$\omega' = \frac{55\,\omega - 21}{21\,\omega - 8}$$

aus $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$ bez. $\frac{8}{3}$ und $\frac{18}{7}$ hervorgehen, was hinsichtlich des anderen Paares von Halbkreisen den nämlichen Schluß begründet. Ich habe in der Hauptfigur die Zahlen $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{18}{7}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{19}{7}$ an den entsprechenden Stellen beigesetzt. *Die Kanten* 1 *und* 6 *sind nach dem Vorhergehenden so zu vereinigen, daß* $\frac{2}{7}$ *mit* $\frac{19}{7}$, $\frac{3}{7}$ *mit* $\frac{18}{7}$ *zusammenkommt.*

Auf solche Weise findet man[27]), *daß überhaupt folgende Kanten zu vereinigen sind:*

$$1-6,\ 3-8,\ 5-10,\ 7-12,\ 9-14,\ 11-2,\ 13-4,$$

und daß jedesmal gleichartige Ecken zusammenkommen. Was dabei unter „gleichartig" zu verstehen sei, zeigt die Figur; die kleinen Nebenfiguren (auf S. 126) erläutern, wie sich dementsprechend die 7 Ecken der einen Art und die 7 Ecken der andern Art je zu einem Punkte a zusammenschließen.

Wollte man, diesen Angaben entsprechend, die betr. Kanten durch Zusammenbiegen wirklich vereinigen, so erhielte man zunächst eine sehr

[27]) [Die Punkte $k+\frac{1}{3}$ $(k=0,1,\ldots,6)$ und $k'-\frac{1}{3}$ $(k'=1,2,\ldots,7)$ liegen auf den in der Hauptfigur mit $2k+1$ bezw. $2k'$ bezeichneten Kanten. Wann ist ein Punkt $k+\frac{1}{3}$ mit einem Punkt $k'-\frac{1}{3}$ in Bezug auf unsere Gruppe äquivalent? Der Ansatz

$$k+\frac{1}{3} = \frac{(7a+1)\left(k'-\frac{1}{3}\right)+7b}{7c\left(k'-\frac{1}{3}\right)+(7d+1)}$$

liefert nach dem Modul 7 betrachtet:

$$k'-k \equiv \frac{2}{3} \equiv 3 \pmod 7,$$

also

$$2k'-(2k+1) \equiv 5 \pmod 7,$$

d. h. die Kanten $2k+1$ und $2k+6$ sind zu vereinigen. B.-H.]

unübersichtliche Figur. Es ist daher besser, fürs erste bei der oben abgedruckten Hauptfigur zu bleiben und sie durch die Tabelle, welche sich auf die Zusammengehörigkeit der Kanten bezieht, und die beiden Nebenfiguren zu ergänzen. Auf solche Weise gewinnt man die Sätze, welche ich im folgenden Paragraphen zusammenstelle.

§ 13.

Die 28 Symmetrielinien.

Als eine *Symmetrielinie* unserer Oberfläche will ich eine solche Linie bezeichnen, welche, aus lauter Dreiecksseiten bestehend, nirgendwo eine Knickung erfährt, die also durch die Punkte a, b, c sozusagen *geradlinig* hindurchläuft. Als Symmetrielinien kann man diese Kurven bezeichnen, weil die Fläche in bezug auf sie in der Tat symmetrisch ist. Denn eine solche Symmetrielinie wird z. B. von der vertikalen Mittellinie unserer Figur gebildet, sofern man sie noch durch Kante 5, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch Kante 10 zu einer geschlossenen Kurve ergänzt; — und diese beiden Kanten liegen in bezug auf die Mittellinie symmetrisch, und übrigens ist auch die Verbindungsweise der übrigen Kanten in bezug auf die Mittellinie symmetrisch.

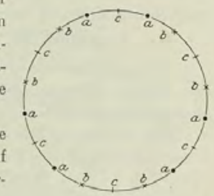


Fig. 8.

Das Beispiel zeigt zugleich, daß eine solche Symmetrielinie je sechs Punkte a, b, c in der auf nebenstehender Figur angegebenen Aufeinanderfolge enthält.

Hiernach hat man vor allen Dingen:

Es gibt 28 *Symmetrielinien.* Dieselben erschöpfen, da sie alle Dreiecksseiten enthalten, zugleich die Gesamtheit derjenigen Punkte unserer Fläche, welche *reellen* Werten von J entsprechen.

Diese Symmetrielinien sind für viele Zwecke das einfachste Orientierungsmittel auf unserer Fläche; ich will sie hier dazu benutzen, um die zusammengehörigen Punkte a, b, c zu definieren. Es ist dann leicht, sich eine Vorstellung von den zugehörigen eindeutigen Transformationen unserer Fläche in sich zu bilden.

Man findet:

Die 7 *Symmetrielinien, welche sich in einem Punkte* a *schneiden, schneiden sich auch in den beiden zugehörigen Punkten* a. Ein Beispiel gibt der Mittelpunkt unserer Figur zusammen mit den 7 Ecken der einen und den 7 Ecken der anderen Art. Hiernach läßt sich der Prozeß, vermöge dessen man von der geschlossenen regulär eingeteilten Fläche zu unserer Figur kommt, folgendermaßen beschreiben: Man wählt auf der Fläche ein Tripel zusammengehöriger Punkte a und zerschneidet sie längs derjenigen 7 Stücke Symmetrielinien, die von einem dieser Punkte a zu einem anderen hinreichen. Dann ist sie, da für sie $p = 3$ war, einfach zusammenhängend mit einer Randkurve geworden, — und breitet man sie nun in eine Ebene aus, so hat man unsere Hauptfigur auf S. 126. Durch je *zwei* Tripel zusammengehöriger Punkte a verläuft offenbar eine Symmetrielinie; die Punkte der beiden Tripel folgen auf ihr alternierend.

Man findet ferner:

Die 3 Symmetrielinien, welche durch einen Punkt b laufen, schneiden sich wieder in dem zugehörigen Punkte b. — Beispiele für solche Punktepaare b geben in der Figur die Punkte A, A'; B, B'; C, C'; D, D', die ich noch weiterhin betrachten werde. Jedem solchen Tripel von Symmetrielinien, und also jedem Punktepaare b, ist eine bestimmte Symmetrielinie dadurch zugeordnet, daß sie die Linien des Tripels in 2 Punkten c schneidet. In diesem Sinne gehören die 28 Punktepaare b und die 28 Symmetrielinien eindeutig zusammen.

Man findet endlich:

Die zwei Symmetrielinien, welche durch einen Punkt c laufen, schneiden sich in einem zweiten Punkte c. Es gibt dann jedesmal noch zwei weitere Symmetrielinien, welche den beiden ersten nirgends begegnen und die sich gegenseitig ebenfalls in zwei Punkten c schneiden. Auf solche Weise erhält man ein Quadrupel zusammengehöriger Punkte c.

§ 14.

Definitive Gestalt unserer Fläche.

Eine Figur pflegt in demselben Maße anschaulicher zu sein, als sie regelmäßiger ist. Ich wünsche also der hier vorliegenden regulär eingeteilten Oberfläche eine solche Gestalt zu erteilen, daß möglichst viele der 168 eindeutigen Transformationen der Fläche durch gewöhnliche *Drehungen* vermittelt werden. Man kennt alle endlichen Gruppen, welche sich aus Drehungen zusammensetzen lassen; sie entsprechen den regulären Körpern. Eine Gruppe von 168 Drehungen, wie sie hier in Betracht kommen könnte, gibt es [zumal im dreidimensionalen Raume] nicht. Dagegen wurde bereits bemerkt (§ 1), daß die 24 Substitutionen einer G_{24}'' sich ebenso zusammensetzen, wie die Drehungen, die ein reguläres Oktaeder mit sich zur Deckung bringen. Es scheint daher von vornherein nicht unmöglich, *unserer Fläche eine solche Gestalt zu geben, daß sie durch die Oktaederdrehungen in sich übergeht.*

Zu dem Zwecke sind zuvörderst auf unserer Figur solche vier Punktepaare b zu bezeichnen, welche bei den Substitutionen der G_{24}'' permutiert werden. Dies kann in sehr einfacher Weise geschehen, wenn man je 14 Dreiecke, die in einem Punkte a zusammenlaufen, zu einem Siebeneck zusammenfaßt und also die ganze Fläche, wie schon oben besprochen, in 24 Siebenecke zerlegt. *Man kann dann nämlich auf $2 \cdot 7$ Weisen vier Punktepaare b so aussuchen, daß durch die an sie anstoßenden Siebenecke sämtliche 24 Siebenecke erschöpft werden*[28]). Eben solche vier Punktepaare sind die schon eben genannten A, A'; B, B'; C, C'; D, D'. Sechs weitere Quadrupel bekommt man, wenn man unsere Figur um ihren Mittelpunkt wiederholt durch den siebenten Teil des Kreisumfangs dreht; die übrigen sieben ergeben sich, wenn man die so erhaltenen 7 an einer Symmetrielinie, also etwa an der vertikalen Mittellinie, spiegelt.

Jetzt zerschneide man unsere Figur (nachdem man die zusammengehörigen Kanten vereinigt hat) längs der durch stärkeres Ausziehen gekennzeichneten drei Zickzacklinien (welche von den punktierten Linien durchsetzt werden). Sie ist dann in eine sechsfach zusammenhängende Fläche mit sechs Randkurven verwandelt, *und diese Fläche kann man nun, wie man findet, in der Art auf eine Kugel regulär ausbreiten, daß die acht Punkte A, A' usw. in die Ecken eines der Kugel eingeschriebenen Würfels fallen, daß die Ecken des zugehörigen Oktaeders unbedeckt bleiben, und daß die zwölf den Halbierungspunkten der Oktaederkanten entsprechenden Punkte mit Punkten c koinzidieren.* Der größeren Deutlichkeit wegen füge ich eine Zeichnung bei, welche den einzelnen Oktanten der Kugelfläche vorstellt. (Siehe Fig. 9.)

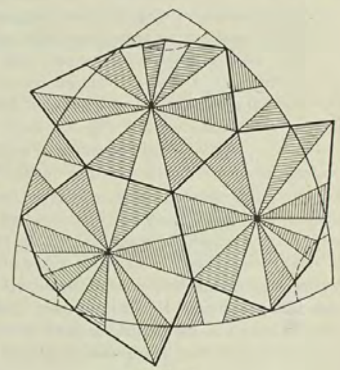


Fig. 9.

Die drei Siebenecke, welche im Mittelpunkte des Oktanten zusammenstoßen, greifen zum Teil über ihn hinaus. Da aber das Nämliche von den

[28]) Auch die Existenz der Resolventen achten Grades ist mit Hilfe dieser Siebenecke kurz zu beweisen: *Man kann auf acht Weisen drei Siebenecke so aussuchen, daß die angrenzenden Siebenecke die Gesamtheit der noch übrigen 21 erschöpfen.*

Siebenecken geschieht, welche die Seitenoktanten überdecken, so bleiben von der Fläche des Oktanten nur die drei Ecken unbedeckt.

Fragen wir jetzt, wie die Randkurven, welche sich um die Oktaederecken herumlegen, zu vereinigen sind, damit wir ein Bild der gesuchten Fläche bekommen, so ergibt der Vergleich mit der früheren Figur dies einfache Gesetz: *daß immer die diametral gegenüberstehenden Punkte zu vereinigen sind.*

Nun läßt sich diese Vereinigung in der Tat realisieren, ohne daß unsere Fläche die gewollte Regularität verliert: *man hat nämlich die Begrenzungskurven in der Art durch das Unendliche zusammenzubringen, daß der Schnitt mit dem Unendlich-Weiten aus denjenigen Linien besteht, welche in der Hauptfigur auf Seite* 126, *wie auch auf Fig.* 9, *durch Punktierung kenntlich gemacht sind.* Die Siebenecke, welche von der Mitte des Oktanten ausgehen, erstrecken sich also zum Teil durch das Unendliche hindurch, so daß im ganzen zwölf Punkte c unendlich weit liegen. — Die Fläche selbst aber läuft etwa so ins Unendliche, wie das Aggregat dreier unter sich kongruenter Rotationshyperboloide mit rechtwinkelig gekreuzten Achsen. *Dies ist die einfachste Gestalt, deren unsere regulär eingeteilte Fläche fähig erscheint*[29].

Will man sich jetzt überzeugen, daß bei den 24 Transformationen, welche durch die Oktaederdrehungen versinnlicht sind, wirklich jedesmal die früher angegebene Zahl von Punkten festbleibt, so berücksichtige man, *daß bei Drehungen von der Periode Zwei nicht nur die Punkte der Rotationsachse, sondern auch sämtliche Punkte der zur Rotationsachse senkrechten unendlich fernen Geraden festbleiben.* Nun wird unsere Fläche von den Oktaederdiagonalen gar nicht geschnitten, von den zu ihnen senkrechten unendlich weiten Linien viermal. Diejenigen Diametrallinien, welche die Kantenhalbierungspunkte des Oktaeders verbinden, schneiden zweimal, desgleichen die zu ihnen gehörigen unendlich fernen Linien. Die Würfeldiagonalen haben ebenfalls zwei und nur zwei Schnittpunkte. Hiernach bleibt bei einer Drehung von der Periode Vier *kein* Punkt fest, bei jeder Drehung von der Periode Zwei ein *Punktquadrupel*, bei jeder Drehung von der Periode Drei ein *Punktepaar*, wie es sein sollte.

§ 15.

Die reellen Punkte der Kurve vierter Ordnung.

Ich wünsche nun noch zum Schlusse zu zeigen, wie weit diese Lagenverhältnisse hervortreten, wenn man *die reellen Punkte der Kurve vierter Ordnung*

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$$

[29]) [Dyck hat damals für das mathematische Institut der technischen Hochschule in München ein schönes Modell der so gestalteten Fläche angefertigt. K.]

ins Auge faßt. Das Koordinatendreieck mag gleichseitig genommen sein, die Koordinaten selbst proportional mit den Abständen von den Dreiecksseiten. Dann stellt die Doppeltangente $\lambda + \mu + \nu = 0$ die unendlich ferne Gerade dar; ihre Berührungspunkte $1:\alpha:\alpha^2$ und $1:\alpha^2:\alpha$ sind die beiden Kreispunkte. Die unendlich ferne Gerade ist also *isolierte* Doppeltangente. Die sechs Kollineationen der zugehörigen G_6' sind die einzigen unter den 168, welche reell sind; sie bestehen aus den drei Drehungen durch 120 Grad um den Mittelpunkt des Koordinatendreiecks und aus den Umklappungen um gewisse drei durch den Mittelpunkt hindurchlaufende gerade Linien. Diese Linien sind die einzigen unter den 21 Achsen der Perspektivität, welche reell sind; die zugehörigen Zentra liegen senkrecht zu ihnen unendlich weit. Die betreffenden Umklappungen lassen aus dem Wendedreiecke $\lambda\mu\nu = 0$ noch ein zweites reelles Wendedreieck $\lambda'\mu'\nu' = 0$ entstehen.

Man beachte nun vor allem die Gleichungsform (9):

$$49y_1(y_1 + y_2 + y_3)(y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3)(y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3) - 3(4y_1^2 - 7y_2y_3)^2 = 0.$$

Hier setze man für y_1, als unendlich ferne Gerade, 1, für y_2 und y_3, insofern die betr. Linien durch die Kreispunkte laufen, $x + iy$ und $x - iy$. So kommt:

$$49(2x + 1)(-x + \sqrt{3}\cdot y + 1)(-x - \sqrt{3}\cdot y + 1) - 3(4 - 7(x^2 + y^2))^2 = 0.$$

Die Doppeltangenten

$$2x + 1 = 0, \quad -x + \sqrt{3}\cdot y + 1 = 0, \quad -x - \sqrt{3}\cdot y + 1 = 0$$

bilden wieder ein gleichseitiges Dreieck; seine Höhe ist $\frac{3}{2}$, seine Kantenlänge $\sqrt{3}$. Aus ihnen schneidet der um den Mittelpunkt des Dreiecks herumgelegte Kreis vom Radius $\frac{2}{\sqrt{7}}$ reelle Berührungspunkte aus, *so daß wir drei nicht isolierte Doppeltangenten haben.* Alle anderen Doppeltangenten werden, wie man findet, imaginär. *Unsere Kurve ist also eine einteilige Kurve*[30]), *welche in das Dreieck der nicht isolierten Doppeltangenten eingeschrieben ist.* In der umstehenden Figur[31]) sind neben den

[30]) Siehe Zeuthe, *Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre*, Math. Annalen, Bd. 7 (1874).

[31]) [Die nur schematisch gezeichnete Figur des Originals wurde bei dem Wiederabdruck ersetzt durch die punktweise berechnete, welche M. W. Haskell in seiner Göttinger Dissertation: *Über die zu der Kurve $\lambda^2\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ im projektiven Sinne gehörende mehrfache Überdeckung der Ebene* (American Journal of Math., Bd. 13 (1891)) gegeben hat. In dieser von mir veranlaßten Arbeit wendet Haskell die in meinen Aufsätzen *Über eine neue Art von Riemannschen Flächen* [Nr. XXXVIII und Nr. XL in Bd. 2 dieser Ausgabe (1874) und (1876)] entwickelten Gedanken auf die Kurve $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ an und erläutert die Resultate durch einige Figuren. K.]

drei in Rede stehenden Doppeltangenten der Kreis durch die Berührungspunkte, die drei reellen Achsen der Perspektivität und die beiden reellen Wendedreiecke kenntlich gemacht.

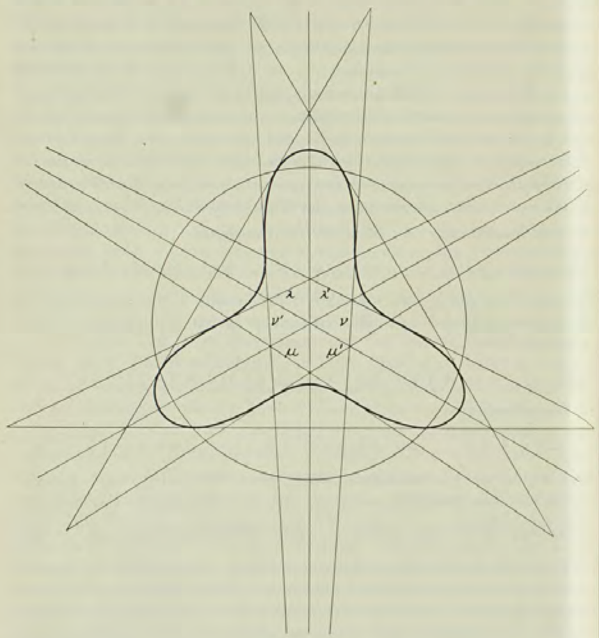


Fig. 10.

Der so gewonnene reelle Kurvenzug hat für die zugehörige Riemannsche Fläche eine sehr einfache Bedeutung: *er stellt eine der 28 Symmetrielinien vor.* Denn reellen Werten von λ, μ, ν entsprechen reelle Werte von J, und durch reelle Werte von J sind die Symmetrielinien charakterisiert. — Diese Symmetrielinie ist der unendlich fernen isolierten Doppeltangente eindeutig zugeordnet und geht daher, wie diese, durch die reellen Substitutionen einer G_6' in sich über. Sie enthält von den Punkten a, b, c je

sechs, und, wie die Figur zeigt, in der Tat in derselben Reihenfolge, welche, nach Fig. 8, S. 129, bei Symmetrielinien überhaupt statthat.

München, im Anfang November 1878.

[Ergänzende Bemerkungen über einige an Abh. LXXXIV anknüpfende mathematische Literatur.]

[An die in meiner vorstehend abgedruckten Arbeit eingeführte Kurve vierter Ordnung $\lambda^3\mu+\mu^3\nu+\nu^3\lambda=0$ bzw. das durch sie definierte algebraische Gebilde mit 168 eindeutigen Transformationen in sich hat die mathematische Literatur, insbesondere auch die geometrische, in der Folge vielfach angeknüpft. Es ist unmöglich, dies hier im einzelnen nachzuweisen, doch will ich wenigstens einige Punkte zur Sprache bringen.

Was die algebraische Seite der Frage betrifft, so ist auf die umfangreichen Untersuchungen **Gordans** zu verweisen, über die in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 426 ff. berichtet ist. — Ich füge noch eine Erörterung über die Rolle der n-ten Einheitswurzeln hinzu, die in meinen im gegenwärtigen (ersten) Abschnitte des vorliegenden Bandes oder auch in Bd. 2 abgedruckten Aufsätzen vorkommen. Behandelt man die Galoisschen Probleme, so sind es „natürliche" Irrationalitäten; z. B. kann bei $n=5$ infolge der Ikosaedersubstitutionen ε als Quotient zweier in geeigneter Weise gewählter Wurzeln der Ikosaedergleichung dargestellt werden. Das Gleiche gilt infolge der „Abelschen Relationen" für die speziellen Teilungsgleichungen der elliptischen Funktionen. Vgl. unten Fußnote [37]) in Abh. XC, S. 235/36 des vorliegenden Bandes. Für die Modulargleichungen der Funktionen $J(\omega)$ sind jedoch die n-ten Einheitswurzeln nicht mehr „natürlich", wohl aber die aus ihnen zusammengesetzten Gaussischen Summen $\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n}$. (Vgl. z. B. Fricke, *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen*, Bd. 2 (1921/22) S. 462). Dasselbe gilt bei den besonderen Resolventen fünften, siebenten und elften Grades, die in den Abh. LXXXIII und LXXXVI behandelt werden. (Vgl. z. B. Fricke, a. a. O., S. 482.) Diese Angaben sind von Wichtigkeit, um in den einzelnen Fällen nicht nur die Gruppe der Monodromie [32]), auf die sich die Darlegungen des Textes beschränken, sondern auch die Galoissche Gruppe bei Zugrundelegung des Rationalitätsbereiches der rationalen Zahlen zu bestimmen.

Ein anderer Teil der Untersuchungen beschäftigt sich mit den drei überall endlichen Integralen unserer Kurve vierter Ordnung. Es erscheint besonders bemerkenswert, daß sich ihre Perioden explizit angeben lassen. Poincaré (in den Comptes rendus, Bd. 97 (1883), S. 1189) und Hurwitz (in den Math. Annalen, Bd. 26 (1885/86), S. 123) finden bei geeigneter Wahl der Querschnitte folgendes Periodenschema:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \tau & \tau-1 & -\tau \\ 0 & 1 & 0 & \tau-1 & -\tau & \tau \\ 0 & 0 & 1 & -\tau & \tau & \tau-1\,. \end{array}$$

wobei τ die quadratische Irrationalzahl $\dfrac{1+i\sqrt{7}}{4}$ bedeutet. Hieraus folgt insbeson-

[32]) [Der Begriff der Monodromiegruppe wurde von Hermite eingeführt in den Comptes rendus von 1851 = Oeuvres, t. I., S. 276 ff. Der Name steht, soviel ich weiß, zum erstenmal in dem *Traité des substitutions etc.* von C. Jordan, Paris (1870), S. 278. K.]

dere, daß sich unsere Riemannsche Fläche durch mehrfache Überdeckung einer elliptischen Fläche herstellen läßt, die zu dem singulären Modul $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{r-1}{r}$, also zu der rationalen Invariante $J\left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right) = -\frac{5^3}{2^6}$ gehört. Weiterhin hat Hurwitz (Math. Annalen, Bd. 25 (1884/85)) die Integrale erster Gattung als Funktionen von ω studiert und in den Koeffizienten ihrer Potenzreihenentwicklungen nach $q^2 = e^{2\pi i\omega}$ jene zahlentheoretischen Funktionen gefunden, auf die Gierster bei Aufstellung der Klassenzahlrelationen siebenter Stufe gestoßen war. Vgl. die Vorbemerkungen, S. 5 des vorliegenden Bandes. Weitere Einzelheiten hierüber findet man in den „Modulfunktionen“.

Am wichtigsten ist aber unsere Kurve wohl dadurch geworden, daß die in einem Orthogonalkreis eingeschriebene Hauptfigur von S. 126 das erste konkrete Beispiel für die Uniformisierung der algebraischeu Kurven höheren Geschlechtes war und so für mich die beste Stütze bei der Aufstellung der allgemeinen Uniformisierungssätze in den im letzten Teile dieses Bandes abgedruckten Aufsätzen Nr. CI bis CIII wurde.

Eine unmittelbare Fortsetzung finden die Betrachtungen des Textes in einer Notiz von Dyck über die zur Hauptkongruenzgruppe achter Stufe gehörige Normalkurve $\lambda^4 + \mu^4 + \nu^4 = 0$ mit 96 eindeutigen Transformationen in sich (Math. Annalen, Bd. 17 (1880/81)), ganz besonders aber in den Untersuchungen von Fricke über die ternäre Valentiner-Wimangruppe und die Transformationstheorie der zu einem Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ gehörenden Dreiecksfunktion. (Veröffentlicht als Anhang zum 2. Bande der von Fricke und mir herausgegebenen „*Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*“, Leipzig 1912. Vgl. auch Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 501/502.) K.]

LXXXV. Über Multiplikatorgleichungen [erster Stufe].[1]

[Math. Annalen, Bd. 15 (1878/79).]

Hier meine Methode zur Aufstellung der Multiplikatorgleichungen [erster Stufe]. — Betrachtet man ω_1, ω_2 als homogene Veränderliche, so sind $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ resp. von den Geraden $-4, -6, -1$ und reproduzieren sich bei jeder linearen ganzzahligen Substitution von der Determinante 1:

$$\begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2, \end{cases}$$

sofern man bei $\sqrt[12]{\Delta}$ von einer zwölften Einheitswurzel absieht[2]). Man kann nun zeigen, daß allgemein jede homogene Funktion von ω_1, ω_2 von einem negativen ganzen Grade, welche sich bis auf einen Faktor bei den in Rede stehenden linearen Substitutionen reproduziert, eine *ganze* Funktion von $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ ist. — Die Sache ist genau so, wie bei den endlichen Systemen linearer Substitutionen, und man hat z. B. auch folgende Sätze: daß g_2 die in bezug auf ω_1, ω_2 genommene Hessesche Form von $\log \Delta$ ist,

---

[1]) Aus einem an Herrn Brioschi gerichteten Briefe, der in den Rendiconti dell' Istituto Lombardo abgedruckt wurde (Sitzungsbericht vom 2. Januar 1879). [Die italienische Veröffentlichung enthält noch einige Angaben über die Substitutionssysteme von $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ Variablen, die in dem damaligen Annalenabdruck und hier beiseite gelassen sind imHinblick auf die ausführlichere Darstellung in meiner Arbeit über Gleichungen siebenten und achten Grades (Math. Annalen. Bd. 15 (1879) = Abh. LVII in Bd. 2 dieser Ausgabe).] — Der Ausdruck „Multiplikator [erster Stufe]“ bezieht sich auf das durch $\sqrt[12]{\Delta}$ normierte Integral, siehe Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79), [= Abh. LXXXII im vorliegenden Bande dieser Ausgabe, S. 46 ff.]. [Später habe ich den Ausdruck, „Multiplikator“ in noch allgemeinerer Bedeutung gebraucht; siehe hierüber das Referat Nr. XCII, S. 278 im vorliegenden Bande. Über den Jacobischen Multiplikator vgl. Fußnote [4]) auf S. 16 des vorliegenden Bandes. K.]

[2]) [$\sqrt[12]{\Delta}$ gehört demnach nicht eigentlich zur ersten Stufe in meiner späteren (in Nr. LXXXVII eingeführten) Terminologie, sondern ist als „zur ersten Stufe adjungiert“ zu bezeichnen. (Vgl. unten Abh. XC, S. 208 im vorliegenden Bande.) Den Wert der im Text genannten zwölften Einheitswurzel in Abhängigkeit von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestimmte A. Hurwitz in seiner Leipziger Dissertation: *Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen erster Stufe* (abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 18 (1881)). In dieser vorzüglichen Arbeit sind überhaupt alle Sätze, die hier ohne Beweis oder nur mit knapper Andeutung eines solchen mitgeteilt sind, ausführlich bewiesen und zahlreiche weitere Resultate hinzugefügt. K.]

und g_3 die Funktionaldeterminante beider (immer abgesehen von einem numerischen Faktor)[3]).

Sei nun Δ' die Diskriminante, welche bei einer Transformation vom Primzahlgrade n auftritt. So hat Δ' $(n+1)$ Werte, also $\sqrt[12]{\Delta'}$ deren $12(n+1)$. Aber es zeigt sich, daß bereits die symmetrischen Funktionen von nur $(n+1)$ richtig ausgewählten Werten von $\sqrt[12]{\Delta'}$ unter die eben erwähnte Kategorie von Funktionen fallen, also ganze Funktionen von $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ sind. Setzt man der Kürze halber z für $\sqrt[12]{\Delta'}$, so erhält man also eine Gleichung $(n+1)$-ten Grades für z. Da $\sqrt[12]{\Delta'}$ von der Dimension (-1) in ω_1, ω_2 ist, so hat der Koeffizient $z^{n+1-\varkappa}$ die Dimension $-\varkappa$ und ist dementsprechend als ganze Funktion von $g_2, g_3, \sqrt[12]{\Delta}$ aufzubauen.

Jetzt betrachte man insbesondere den Wert:

$$\sqrt[12]{\Delta'}\cdot\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right) = n\cdot q^{\frac{n}{6}}\cdot\Pi(1-q^{2n\nu})^2 = z\cdot\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right).$$

Vermehrt man $\omega=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ um 1, so erhält dieses z die Einheitswurzel $e^{\frac{n i\pi}{6}}$ zum Faktor, während bei dem ursprünglichen $\sqrt[12]{\Delta}$ die Einheitswurzel $e^{\frac{i\pi}{6}}$ zutritt. Bei dieser Änderung muß die für z bestehende Gleichung ungeändert richtig bleiben; es muß sich also aus allen Gliedern derselbe Faktor herausheben. Hieraus folgt, *daß der Koeffizient von $z^{n+1-\varkappa}$ die Form hat: $\sqrt[12]{\Delta^\lambda}\cdot G$, wo λ die kleinste nicht negative ganze Zahl ist, welche in bezug auf den Modul* 12 *zu $n\varkappa$ kongruent ist, und G eine ganze Funktion von g_2, g_3 allein ist.* Insbesondere schließt man: *So oft λ größer als $\varkappa$ wird, ist der Koeffizient von $z^{n+1-\varkappa}$ identisch Null.*

Auf Grund dieser Sätze kann man die Multiplikatorgleichung für ein beliebiges primzahliges n ohne weiteres der Art nach anschreiben. Man findet, daß bei $n=12\mu+1$ nur g_2^3 und g_3^2 auftritt; bei $n=12\mu+5$ stellt sich das g_2 ein, bei $n=12\mu+7$ das g_3; bei $n=12\mu+11$ treten beide, g_2 und g_3, auf. Für $n=5, 7, 13$ stimmt dies Resultat mit meinen früheren Formeln überein[4]); für $n=11$ erhält man in Übereinstimmung mit Ihren Angaben[5]):

$$z^{12}+a\cdot\Delta^{\frac{6}{12}}\cdot z^6+b\cdot\Delta^{\frac{4}{12}}\cdot g_2\cdot z^4+c\cdot\Delta^{\frac{3}{12}}\cdot g_3\cdot z^3+d\cdot\Delta^{\frac{2}{12}}\cdot g_2^2\cdot z^2$$
$$+e\cdot\Delta^{\frac{1}{12}}\cdot g_2 g_3\cdot z+f\cdot g_2^3+g\cdot g_3^2=0,$$

wo $a, b, \ldots$ numerische Koeffizienten sind.

[3]) [Ausführlicher in Bd. 1 der „Modulfunktionen", S. 125/26.]

[4]) Math. Annalen, Bd. 14, (1878/79) [= Abh. LXXXII, in diesem Bande, S. 46—51.]

[5]) Brioschi in den Annali di Matematica, (Ser. II) tomo IX., S. 167: *Sopra una classe di equazioni modulari* (Nov. 1878). [= Opere matematiche, Nr. LXXV, tomo II, S. 193.]

Man beweist nun ohne weiteres, daß das von z freie Glied der Gleichung den Wert $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n\cdot\Delta$ hat, und, was die numerischen Koeffizienten in den übrigen Gliedern betrifft, daß sie bis auf den vorletzten alle durch n teilbar sind. Man hat außerdem folgende Regeln, welche freilich gerade den Fall $n\equiv 11$ (mod. 12) nicht betreffen:

1. *Für $n=12\mu+1$ oder $=12\mu+5$.*

Setzt man $g_3=0$, so verwandelt sich die linke Seite der Multiplikatorgleichung, nach Abtrennung eines quadratischen Faktors, in ein vollständiges Quadrat.

2. *Für $n=12\mu+1$ oder $12\mu+7$.*

Setzt man $g_2=0$, so verwandelt sich die linke Seite der Multiplikatorgleichung, nach Unterdrückung eines quadratischen Faktors, in einen vollen Kubus.

Man kann überdies die numerischen Koeffizienten der Gleichungen, welche für $g_2=0$ oder $g_3=0$ entstehen, allemal als rationale Funktionen von Einheitswurzeln a priori angeben; doch habe ich diesen Gegenstand noch nicht hinlänglich untersucht. Um die bei $n=11$ auftretenden Zahlenkoeffizienten zu bestimmen, habe ich mich daher einstweilen der Reihenentwicklungen nach aufsteigenden Potenzen von q bedient, und so das Resultat erhalten, welches ich Ihnen bereits in meinem vorigen Briefe[6]) mitteilte:

$$z^{12}-90\cdot 11\cdot\sqrt[2]{\Delta}\cdot z^6+40\cdot 11\cdot 12g_2\cdot\sqrt[3]{\Delta}\cdot z^4-15\cdot 11\cdot 216g_3\cdot\sqrt[4]{\Delta}\cdot z^3$$
$$+2\cdot 11\cdot(12g_2)^2\cdot\sqrt[6]{\Delta}\cdot z^2-12g_2\cdot 216g_3\cdot\sqrt[12]{\Delta}\cdot z-11\cdot\Delta=0.\ ^{7)}$$

München, den 30. Dezember 1878.

[6]) Vom 25. Dezember 1878.

[7]) [Von der Beziehung der Multiplikatorgleichung [erster Stufe] zu den Kiepertschen L-Gleichungen ist schon S. 51, Fußnote [32]) die Rede gewesen. Die weiteren hier und für die folgenden Arbeiten dieses Bandes in Betracht kommenden Veröffentlichungen von Kiepert sind folgende: *Auflösung der Transformationsgleichungen und Division der elliptischen Funktionen*, Crelles Journal Bd. 76 (1872/73); drei Arbeiten mit dem Titel: *Zur Transformationstheorie der elliptischen Funktionen* in den Bänden 87, 88 und 95 des Crelleschen Journals (1879), (1879/80) und (1883), sodann die beiden zusammenfassenden Darstellungen in den Math. Annalen: *Über Teilung und Transformation der elliptischen Funktionen*, Bd. 26 (1885/86) und: *Über die Transformation der elliptischen Funktionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade*, Bd. 32 (1888), schließlich noch eine ergänzende Note in Bd. 37 der Math. Annalen (1890): *Über gewisse Vereinfachungen der Transformationsgleichungen in der Theorie der elliptischen Funktionen*. Die Beziehung zu meinen eigenen Arbeiten ist um so enger, als wir in jenen Jahren eine fortgesetzte wissenschaftliche Korrespondenz geführt haben. Siehe übrigens unten S. 204 ff. in der Abh. XC über elliptische Normalkurven. K.]

LXXXVI. Über die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Funktionen.

[Math. Annalen, Bd. 15 (1879).]

Im Verfolg meiner Untersuchungen über die Transformation der elliptischen Funktionen behandele ich im Nachstehenden die Transformation *elfter* Ordnung. Es ist dabei mein besonderes Ziel gewesen, die Gleichung *elften* Grades, welche in diesem Falle auftritt, in einfachster Form explizite herzustellen. Im 14. Bande der Math. Annalen (1878/79) [= Abh. LXXXIII, S. 84 bis 86 dieses Bandes] habe ich bereits gezeigt, daß man dieser Gleichung folgende Gestalt geben kann:

$$J = F(z),$$

wo $F(z)$ eine *ganze* Funktion elften Grades der Unbekannten z mit nur numerischen Koeffizienten ist, die einen kubischen Faktor dreifach enthält, während $(F(z) - 1)$ einen biquadratischen Doppelfaktor besitzt. Aber zugleich bemerkte ich, daß diese Angaben noch nicht zur vollen Bestimmung der Funktion F ausreichen. Ich kombiniere daher mit den damaligen Betrachtungen nunmehr ein im 15. Bande der Math. Annalen (1879), S. 277 [= Abh. LVII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 416ff.] für einen beliebigen Transformationsgrad ausgesprochenes Resultat. *Dasselbe lehrt bei* $\frac{n-1}{2}$ *Variablen y ein System von Kollineationen kennen, welches mit der Gruppe der Modulargleichung isomorph ist.* Dementsprechend gibt es ein „Problem der y“, bei uns vom 660-sten Grade, und eine geeignete Spezialisierung desselben liefert zunächst in übersichtlichster Weise die Galoissche Resolvente 660-sten Grades der Modulargleichung, dann weiter die gewollte Gleichung elften Grades, und zwar in zwei Formen, von denen jede ihre Vorzüge hat und deren eine eben jene $J = F(z)$ ist. Ich habe in § 10 die so gefundenen Resultate zusammengestellt. Die folgenden Paragraphen vermitteln sodann den Übergang zu der einfachen Multiplikatorgleichung *zwölften* Grades, die ich Math. Annalen, Bd. 15 (1878/79) [= Nr. LXXXV, S. 137ff. im vorliegenden Bande] angab, und liefern so die Möglichkeit, die neuen Gleichungen elften und 660-sten Grades auf transzendentem Wege zu lösen.

Die hiermit aufgezählten Resultate habe ich bereits, doch ohne Beweis, in zwei an Herrn **Brioschi** gerichteten Briefen vom 9. April und 11. Juni 1879, von denen der eine der *Accademia dei Lincei*, der andere dem *Istituto Lombardo* vorgelegt wurde, veröffentlicht; andererseits habe ich die ganze Entwicklung, wie ich sie hier gebe, im Laufe des verflossenen Sommersemesters in einer Vorlesung über algebraische Gleichungen zum Vortrag gebracht.

§ 1.

Über gewisse elfblättrige Riemannsche Flächen[1]).

Die Wurzel z der Gleichung

$$J = F(z), \tag{1}$$

von der soeben die Rede war, ist, wie ich a. a. O. zeigte, so in bezug auf J verzweigt, daß bei $J = \infty$ sämtliche elf Blätter im Zyklus zusammenhängen, bei $J = 0$ dreimal drei, bei $J = 1$ viermal zwei. Nun behauptete ich ebendort, *daß es nicht weniger als zehn wesentlich verschiedene Riemannsche Flächen gibt, welche dieselbe Eigenschaft besitzen* (von denen aber nur zwei bei der Transformationstheorie in Betracht kommen). Es ist heute meine nächste Aufgabe, diese Behauptung auf dem damals bereits angedeuteten, rein geometrischen Wege zu beweisen.

Die elf Blätter der Riemannschen Fläche will ich vorab, wie ich es früher tat, der Anschaulichkeit halber zur Hälfte schraffieren, nämlich soweit sie die positive Halbebene J überdecken. Sodann zerschneide man die Blätter sämtlich längs desjenigen Stückes der reellen Achse J, welches im Endlichen von $J = 0$ bis $J = 1$ reicht. Unsere Fläche geht dann, wie aus der vorausgesetzten Multiplizität der Verzweigungspunkte folgt, in eine einfach zusammenhängende, einfach berandete Fläche über, deren Blätter nach wie vor bei $J = \infty$ im Zyklus verbunden sind. Offenbar kann man dieselbe durch stetige Deformation in das Innere eines Kreises ausbreiten, das von einem beliebigen seiner Punkte aus in 22 abwechselnd schraffierte und nicht schraffierte Sektoren zerlegt ist. Will man die Punkte $J = 0$ als Ecken gestalten und die zwischen ihnen befindlichen Stücke der Kreisperipherie geradlinig zeichnen, so hat man das Elfeck der Fig. 8 auf S. 85 dieses Bandes.

[1]) Dieser Paragraph knüpft unmittelbar an die schon soeben zitierte Arbeit an: *Über die Erniedrigung der Modulargleichungen*, Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXIII im vorliegenden Bande dieser Ausgabe]. [Allgemeinere Abzählungen über die Anzahl der Riemannschen Flächen, welche in der z-Ebene gegebene Verzweigungsstellen haben, finden sich vor allem in zwei Arbeiten von **Hurwitz** in Bd. 39 und in Bd. 55 der Math. Annalen (1891 und 1901/02). K.]

貴重書

Die so hergestellte Figur modifiziere ich nun mit Rücksicht auf den speziellen hier vorliegenden Zweck in der Art, wie es die dieses Mal beigefügte Fig. 1 versinnlichen soll. Statt das *Innere* des Elfecks als Abbildung der zerschnittenen Fläche zu betrachten, wähle ich das *Äußere*

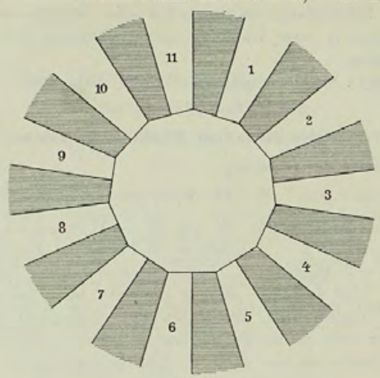


Fig. 1.

desselben und ersetze die früher im Mittelpunkte zusammenlaufenden 22 Halbdiagonalen durch ebensoviele ins Unendliche auslaufende gerade Linien. Außerdem habe ich zur Bezeichnung der verschiedenen Blätter in die nicht schraffierten Felder die Ziffern $1, 2, \ldots, 11$ hineingesetzt.

Will man nun wissen, wie viele verschiedene elfblättrige Flächen es gibt, welche die von uns verlangte Lage und Multiplizität der Verzweigungspunkte besitzen, so ist die Frage augenscheinlich die [vgl. S. 86 im vorliegen Bande,]: ***Auf wie viele Weisen ist es möglich, die 22 Halbkanten der in Fig. 1 vorhandenen inneren Begrenzung derart zu einem aus 11 Stücken bestehenden, doppelt überdeckten Linienzuge zusammenzubiegen, daß von den 11 Punkten $J = 0$ dreimal drei und von den 11 Punkten $J = 1$ viermal zwei zusammenkommen?*** — Die Fig. 3 auf Seite 144 (die wohl ohne besondere Erläuterung verständlich ist) soll an einem Beispiele erläutern, wie dieses Zusammenbiegen gemeint ist.

Die so formulierte Frage wird durch die Schemata I, ..., VI in Figur 2 beantwortet. Dieselben sollen nur die Gestalt des elfgliedrigen Linienzuges in jedem Falle angeben. Die mit kleinen Kreisen bezeichneten Punkte entsprechen allemal $J = 0$, die durch gerade Striche markierten $J = 1$. Das Schema V bezieht sich auf den in Fig. 3 dargestellten Fall;

die Schemata I sind, meinen früheren Erläuterungen zufolge, die einzigen, welche auf die aus der Transformationstheorie hervorgehenden Gleichungen elften Grades passen.

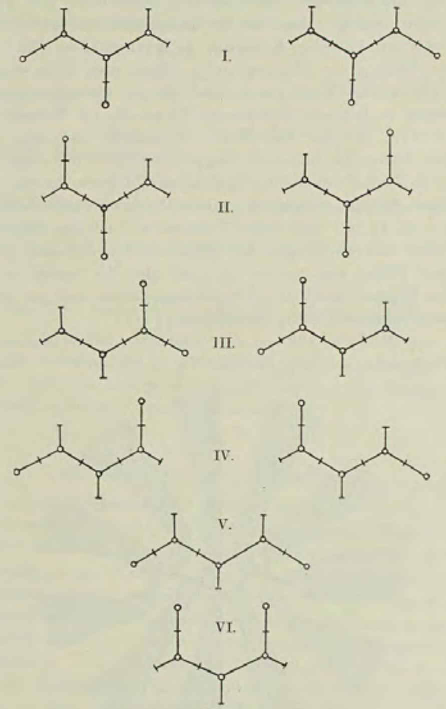


Fig. 2.

Es gibt, diesen Schematen nach, in der Tat *zehn* Möglichkeiten der Zusammenbiegung. Daß es auch nicht mehr gibt, ist ebenso evident; denn offenbar gelingt es nicht, noch andere elfgliedrige Linienzüge der von uns gewünschten Art herzustellen. — Somit ist der zu Eingang des Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen.

§ 2.

Gruppe der Monodromie.

Es wird sich nunmehr darum handeln, unter diesen zehn Fällen diejenigen beiden, welche allein für die Transformationstheorie Bedeutung haben, durch ein einfaches Kriterium zu kennzeichnen. Ich wähle als solches die *Gruppe der Monodromie* [2]). Wenn man J in seiner Ebene beliebige geschlossene Wege beschreiben läßt, so werden, wie man weiß, in den beiden in Betracht kommenden Fällen die elf Wurzeln der Gleichung $J = F(z)$ nur auf 660 Weisen vertauscht, und diese 660 Vertauschungen bilden die bekannte Gruppe, welche Galois zuerst auffand und über die Betti [3]) die ersten ausführlichen Untersuchungen veröffentlichte. Diese Gruppe enthält nur solche Vertauschungen, deren Periode 1, 2, 3, 5, 6, 11 ist; und diesen Umstand will ich hier dazu benutzen, um zu zeigen, daß die Gruppe der Monodromie in den acht für uns unbrauchbaren Fällen eine andere ist, *daß also die beiden in Betracht kommenden Flächen durch ihre Verzweigungspunkte und die Gruppe der Monodromie zusammen völlig charakterisiert sind.*

Der betr. Nachweis stellt sich in sämtlichen Fällen durchaus analog. Ich erläutere daher nur den Fall der Fig. 3 (Schema V). Man lasse J

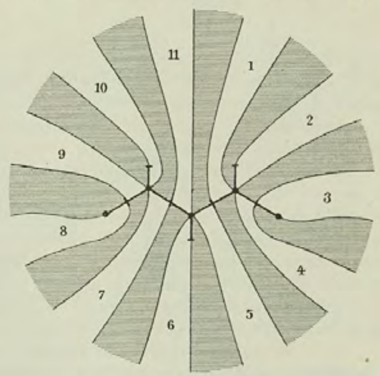


Fig. 3.

[2]) Vgl. die Fußnote [32]) auf S. 135 des vorliegenden Bandes.
[3]) Annali di Scienze matematiche etc. di Tortolini, t. IV. (1852). [= Opere matematiche, Nr. VI, t. I., S. 81 ff.]

in seiner Ebene einmal den Unendlichkeitspunkt umkreisen, eine Operation, die ich S nennen will. Dann gehen (wie die Figur aufweist) die Wurzeln

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$$

bei richtig gewähltem Bewegungssinne in folgende über:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 1.$$

Andererseits lasse man J den Punkt $J = 1$ umkreisen, eine Operation, die T heißen soll. So wird aus

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,$$

wie wieder die Figur zeigt, resp.

$$5,\ 2,\ 4,\ 3,\ 1,\ 6,\ 11,\ 9,\ 8,\ 10,\ 7.$$

Jetzt mache man zuerst die Operation T, dann dreimal die Operation S. So entsteht aus

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,$$

bez.

$$8,\ 5,\ 7,\ 6,\ 4,\ 9,\ 3,\ 1,\ 11,\ 2,\ 10;$$

die Operation TS^3 vertauscht also folgende Wurzeln zyklisch:

$$(1\ 8,)\ (2,\ 5,\ 4,\ 6,\ 9,\ 11,\ 10)\ (3,\ 7).$$

Diese Zyklen enthalten bez. 2 und 7 Buchstaben; die Periode von TS^3 ist also 14, und die Gruppe der Monodromie von der Gruppe der 660 Substitutionen verschieden, was zu beweisen war [4]).

§ 3.

Die Gruppe der 660 y-Substitutionen.

Den soeben bewiesenen Satz benutze ich jetzt in der Art, daß ich mich fortan mit einem Probleme beschäftige, welches jedenfalls die richtige Gruppe von 660 Vertauschungen besitzt; *gelingt es mir dann, im Verlaufe der Untersuchung auf eine Gleichung $J = F(z)$ zu kommen, wo $F(z)$ einen kubischen Faktor kubisch und $(F(z) - 1)$ einen biquadratischen Faktor doppelt enthält, so habe ich die gesuchte Gleichung gefunden.*

Zu diesem Zwecke betrachte ich das System von 660 Kollineationen bei fünf Variablen, von dem schon in der Einleitung die Rede war. Indem ich die quadratischen Reste modulo 11 als Indizes wähle und so ordne, wie sie aus einem derselben durch Multiplikation mit 4 hervorgehen, nenne ich die Variablen

$$y_1,\ y_4,\ y_5,\ y_9,\ y_3.$$

Die 660 Kollineationen erwachsen dann durch Wiederholung und Kombination der folgenden zwei Operationen, $\left(\text{wo } \varrho = e^{\frac{2i\pi}{11}} \text{ gesetzt ist}\right)$:

[4]) Auch in den anderen Fällen genügt es, die Operation TS^3 zu betrachten.

$$
(2)\quad \begin{cases} S)\quad y_1' = \varrho y_1,\; y_4' = \varrho^4 y_4,\; y_5' = \varrho^5 y_5,\; y_9' = \varrho^9 y_9,\; y_3' = \varrho^3 y_3. \\ T)\quad \begin{cases} \sqrt{-11}\cdot y_1' = (\varrho^9-\varrho^2)y_1 + (\varrho^4-\varrho^7)y_4 + (\varrho^3-\varrho^8)y_5 \\ \qquad + (\varrho^5-\varrho^6)y_9 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_4' = (\varrho^4-\varrho^7)y_1 + (\varrho^3-\varrho^8)y_4 + (\varrho^5-\varrho^6)y_5 \\ \qquad + (\varrho^1-\varrho^{10})y_9 + (\varrho^9-\varrho^2)y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_5' = (\varrho^3-\varrho^8)y_1 + (\varrho^5-\varrho^6)y_4 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_5 \\ \qquad + (\varrho^9-\varrho^2)y_9 + (\varrho^4-\varrho^7)y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_9' = (\varrho^5-\varrho^6)y_1 + (\varrho^1-\varrho^{10})y_4 + (\varrho^9-\varrho^2)y_5 \\ \qquad + (\varrho^4-\varrho^7)y_9 + (\varrho^3-\varrho^8)y_3, \\ \sqrt{-11}\cdot y_3' = (\varrho^1-\varrho^{10})y_1 + (\varrho^9-\varrho^2)y_4 + (\varrho^4-\varrho^7)y_5 \\ \qquad + (\varrho^3-\varrho^8)y_9 + (\varrho^5-\varrho^6)y_3, \end{cases} \end{cases}
$$

denen sich als einfachste Kombination die zyklische Vertauschung zugesellt:

$$
(2\text{b})\qquad C)\quad y_1' = y_4,\quad y_4' = y_5,\quad y_5' = y_9,\quad y_9' = y_3,\quad y_3' = y_1.\text{[5]}
$$

Und zwar lassen sich sämtliche 660 Kollineationen durch die beiden Symbole angeben:

$$
C^\alpha S^\beta,\quad C^\alpha S^\beta T S^\gamma,
$$

wo man dem α die fünf Werte 0, 1, 2, 3, 4, dem β und dem γ die elf Werte 0, 1, 2, ..., 10 zu erteilen hat[6].

Diesem Substitutionssysteme entspricht im Sinne meines letzten Aufsatzes (Math. Annalen, Bd. 15 (1879), S. 256 [= Abh. LVII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 395 ff.]) ein „*Problem der y*", welches in allgemeinster Fassung so lautet: *Es sind sämtliche ganze Funktionen der y, die sich bei den 660 Kollineationen* (2) *nicht ändern, ihrem Zahlenwerte nach gegeben; man soll die unbekannten y berechnen.* Dies Problem hat jedenfalls die gewünschte Galoissche Gruppe, und mit ihm werde ich mich daher jetzt eine Zeit lang beschäftigen.

§ 4.

Ungeändert bleibende ganze Funktionen der y.

Es ist nicht meine Absicht, alle ungeändert bleibenden ganzen Funktionen der y mitzuteilen; dies würde jedenfalls eine weitläufige und vielleicht eine schwierige Aufgabe sein. Vielmehr definiere ich nur drei solche Funktionen, die ich später gebrauche. Die erste ist die Funktion *dritten Grades*:

$$
(3)\qquad \nabla = y_1^2 y_9 + y_4^2 y_3 + y_5^2 y_1 + y_9^2 y_4 + y_3^2 y_5,
$$

offenbar die niedrigste ungeändert bleibende Funktion. Die zweite ist ihre *Hessesche Determinante* vom fünften Grade:

$$
(4)\qquad H = \begin{vmatrix} y_9 & 0 & y_5 & y_1 & 0 \\ 0 & y_3 & 0 & y_9 & y_4 \\ y_5 & 0 & y_1 & 0 & y_3 \\ y_1 & y_9 & 0 & y_4 & 0 \\ 0 & y_4 & y_3 & 0 & y_5 \end{vmatrix},
$$

deren erste Unterdeterminanten später von Interesse werden. Die dritte ist eine *Funktion elften Grades:*

$$
(5)\qquad C = (y_1^{11} + y_4^{11} + y_5^{11} + y_9^{11} + y_3^{11}) + \dots,
$$

die man etwa definieren kann als numerisches Multiplum der Summe der elften Potenzen derjenigen 660 Werte, deren y_1 bei den 660 Kollineationen teilhaftig wird. Mit Rücksicht auf das erste in (5) angegebene Glied finde ich:

$$
(5\text{b})\qquad C = \frac{11}{118}(\Sigma y^{11}).
$$

Aus C und ∇ werde ich später die rationale Funktion 33-sten Grades und nullter Dimension:

$$
\frac{C^3}{\nabla^{11}}
$$

zusammensetzen.

§ 5.

Elfwertige ganze Funktionen der y.

Um die niedrigsten elfwertigen Funktionen der y zu finden, beginne ich damit, aus der Gesamtheit der Kollineationen (2) eine Untergruppe vom Index 11 (die sonach 60 Substitutionen enthält) auszuscheiden. Dies geschieht leicht, wenn man die eindeutige Beziehung benutzt, welche zwischen den 660 Kollineationen und denjenigen ganzzahligen linearen Substitutionen

$$
\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\qquad \alpha\delta - \beta\gamma \equiv R\ (\text{mod. } 11),
$$

die modulo 11 verschieden sind, besteht, und dann die Bettischen Formeln heranzieht, welche ich in Abh. LXXXIII, S. 79 dieses Bandes reproduziert habe.

[5] [Man findet durch Rechnung, daß sich C durch S und T folgendermaßen ausdrückt: $C = S^6 T S^2 T S^6 T$ (vgl. Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 417, Fußnote [28])). Die Produkte von Operationen sind in der vorliegenden Arbeit stets von links nach rechts zu lesen, $S^\alpha T^\beta$ z. B. soll also bedeuten, daß zuerst α-Mal die Operation S und dann β-Mal die Operation T angewandt wird. B.-H.]

[6] [Vgl. z. B. „Modulfunktionen", Bd. 2, S. 303.]

Offenbar kann man die beiden Kollineationen S, T den folgenden beiden ω-Substitutionen entsprechend setzen:

$$\omega' = \omega + 1, \quad \omega' = -\frac{1}{\omega},$$

(aus denen wieder alle anderen durch Wiederholung und Kombination hervorgehen). Dann entsprechen den zyklischen Vertauschungen C^a der fünf y:

$$(y_1, y_4, y_5, y_9, y_3)^a,$$

wie man leicht findet[7]), die Wiederholungen von

$$\omega' = 4\,\omega.$$

Nun erwächst nach den genannten Formeln eine Untergruppe vom Index 11, wenn man die Substitution

$$\omega' = 4\,\omega$$

mit folgender Substitution von der Periode 2 verbindet:

$$\omega' = \frac{\omega - 2}{\omega - 1} = \frac{-1}{\omega - 1} + 1;$$

die Untergruppe enthält dann von selbst die Substitution

$$\omega' = -\frac{1}{\omega}.$$ [8])

Indem wir zu den y zurückkehren, haben wir also die zyklische Vertauschung C der y mit der Kollineation $S^{-1}TS$ zu kombinieren. Die entstehende Untergruppe umfaßt von selbst die Kollineation T.

Aber man kennt von vornherein eine sehr einfache Funktion der y, die bei den Operationen C und T invariant bleibt: das ist die *Summe* der y:

$$p_\infty = y_1 + y_4 + y_5 + y_9 + y_3. \tag{6}$$

Wendet man auf sie die Kollineation $S^{-1}TS$ an, so kommt nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} p_0 = \frac{1}{\sqrt{-11}}\ \{ & y_1(2(\varrho^7 - \varrho^1) + (\varrho^9 - \varrho^{10})) \\ & + y_4(2(\varrho^6 - \varrho^4) + (\varrho^3 - \varrho^7)) \\ & + y_5(2(\varrho^2 - \varrho^5) + (\varrho^1 - \varrho^6)) \\ & + y_9(2(\varrho^8 - \varrho^9) + (\varrho^4 - \varrho^2)) \\ & + y_3(2(\varrho^{10} - \varrho^3) + (\varrho^5 - \varrho^8))\}, \end{aligned} \tag{7}$$

---

[7]) [Unter Benutzung der in Fußnote [5]) auf S. 146 angegebenen Formel für C.]

[8]) [Setzt man der Kürze halber $C^2 = U$ und $S^{-1}TS = V$, so findet man zunächst $T = VC^4VCVC$; hiernach ist es sofort klar, daß die aus V und C erzeugte Gruppe die sämtlichen auf S. 79 des vorliegenden Bandes unter IIIa angegebenen Bettischen Substitutionen enthält. Sie enthält aber auch nicht mehr Substitutionen; denn statt C und V sind auch U und V zur Erzeugung brauchbar, und für diese gelten die Relationen

$$U^5 = 1, \quad V^2 = 1, \quad (UV)^3 = 1,$$

die bekanntlich (nach Dyck, Math. Annalen, Bd. 20 (1881/82), S. 35) zur abstrakten Definition der Ikosaedergruppe dienen. B.-H.]

und vertauscht man hier die fünf y zyklisch, so entstehen noch vier weitere Ausdrücke, die

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4 \tag{8}$$

genannt werden sollen. — Da p_∞ bei zehn Kollineationen der Untergruppe ungeändert bleibt, so ist es gegenüber der Gesamtheit ihrer Kollineationen sechswertig; *d. h. die sechs Ausdrücke p werden bei den 60 Kollineationen der Untergruppe unter sich permutiert.* Die symmetrischen Funktionen der sechs p bleiben also bei sämtlichen Kollineationen der Untergruppe ungeändert; sie sind also gegenüber den 660 Kollineationen (2) elfwertig, sie müßten denn zu den überhaupt ungeändert bleibenden Funktionen gehören.

Demnach berechne man, um möglichst niedrige elfwertige Funktionen zu haben, die niedrigsten nicht verschwindenden symmetrischen Funktionen der p, also etwa die Summe der Quadrate und die Summe der Kuben. So findet man folgende Funktionen:

1. *Die Funktion zweiten Grades:*

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & (y_1^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_9^2 + y_3^2) \\ & - (y_1 y_9 + y_4 y_3 + y_5 y_1 + y_9 y_4 + y_3 y_5) \\ & + \frac{-1+\sqrt{-11}}{2}(y_1 y_4 + y_4 y_5 + y_5 y_9 + y_9 y_3 + y_3 y_1), \end{aligned} \tag{9}$$

2. *Die Funktion dritten Grades:*

$$\begin{aligned} f_0 = & (y_1^3 + y_4^3 + y_5^3 + y_9^3 + y_3^3) \\ & + 3(y_1^2 y_3 + y_4^2 y_1 + y_5^2 y_4 + y_9^2 y_5 + y_3^2 y_9) \\ & - 3(y_1 y_4 y_9 + y_4 y_5 y_3 + y_5 y_9 y_1 + y_9 y_3 y_4 + y_3 y_1 y_5) \\ & + \frac{1+\sqrt{-11}}{2}(y_1^2 y_5 + y_4^2 y_9 + y_5^2 y_3 + y_9^2 y_1 + y_3^2 y_4) \\ & - \frac{1+\sqrt{-11}}{2}(y_1 y_4 y_5 + y_4 y_5 y_9 + y_5 y_9 y_3 + y_9 y_3 y_1 + y_3 y_1 y_4) \\ & - (1+\sqrt{-11})(y_1^2 y_4 + y_4^2 y_5 + y_5^2 y_9 + y_9^2 y_3 + y_3^2 y_1). \end{aligned} \tag{10}$$

Die Funktion φ_0 stimmt mit $\frac{-1+\sqrt{-11}}{12}\sum p^2$ überein; die Funktion f_0 ist von $\frac{-\sqrt{-11}\,\Sigma p^3}{6}$ nur um ein Glied verschieden, das ein numerisches Multiplum von ∇ (3) ist. — Die elf Werte, welche φ_0 oder f_0 bei den 660 Kollineationen annimmt, und die ich φ_ν, bez. f_ν nennen will, erwachsen aus φ_0 und f_0, wenn man der Kollineation S^ν entsprechend statt y_{k^2} einträgt $\varrho^{k^2\nu}\cdot y_{k^2}$. — Ändert man in diesen Formeln das Vorzeichen von $\sqrt{-11}$, so bekommt man Ausdrücke φ'_ν, f'_ν, welche ebenfalls elfwertig sind und die sich auf die zweite Serie von Untergruppen vom Index 11 bezieht, die Betti a. a. O. ebenfalls angibt. Da sich aber für sie alle Betrachtungen ganz geradeso gestalten, wie für die φ_ν, f_ν, so werde ich sie in der Folge durchaus beiseite lassen. — Als elfwertige Funktionen nullter Dimension werde ich später

$$\frac{f_\nu}{\nabla} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi_\nu}{\nabla^{\frac{2}{3}}}$$

gebrauchen.

§ 6.

Spezialisierung des y-Problems.

Für unseren speziellen Zweck bedürfen wir nicht des *allgemeinen* „Problems der y“: in der Schlußgleichung $J = F(z)$, die wir suchen, soll nur der *eine* Parameter J vorkommen. Es handelt sich also darum, aus der vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der $y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3$ nunmehr in richtiger Weise eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, *eine Kurve*, auszuschneiden, die bei den 660 Kollineationen in sich übergeht, und das spezielle auf sie bezügliche „Problem der y“ durchzuführen.

Von dieser Kurve wissen wir, *daß sie das Bild der Galoisschen Resolvente der Transformationsgleichung sein muß*. Nun ist, wie ich früher ausführte (Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXII, S. 55 dieses Bandes]), die Galoissche Resolvente vorgestellt durch eine Riemannsche Fläche, die 660-blättrig über der Ebene J ausgebreitet ist und deren Blätter bei $J = 0$ zu je drei, bei $J = 1$ zu je zwei, bei $J = \infty$ zu je elf, sonst aber nirgends zusammenhängen, deren Geschlecht also $= 26$ ist[9]). Auf unserer Kurve muß es dementsprechend eine rationale Funktion J geben, welche jeden Wert in 660 und nur in 660 solchen Punkten annimmt, die durch die 660 Kollineationen auseinander hervorgehen; es darf unter diesen Gruppen von je 660 zusammengehörigen Punkten nur drei geben, welche aus einer geringeren Zahl von mehrfach zählenden Punkten bestehen: eine Gruppe von 220 dreifach zählenden Punkten, eine von 330 zweifach zählenden und eine von 60 elffach zählenden. Das Geschlecht der Kurve ist natürlich auch gleich 26. — Beachten wir ferner die Gleichung (1) $J = F(z)$. Sie sagt vor allen Dingen aus, daß es auf unserer Kurve eine rationale Funktion z gibt, welche jeden Wert in 60 und nur in solchen 60 Punkten annimmt, die durch die Kollineationen einer Untergruppe vom Index 11 auseinander hervorgehen. Die weiteren Eigenschaften der Funktion F: daß $F(z)$ eine rationale *ganze* Funktion elften Grades ist, daß es einen kubischen Faktor kubisch und $F(z) - 1$ einen

[9]) [Vgl. die ergänzende Bemerkung Nr. 1 auf S. 166 am Schluß dieser Arbeit.]

biquadratischen Faktor doppelt enthalten soll, sind bloße Konsequenzen des Gesagten[10]). Daß $F(z)$ eine *ganze Funktion elften Grades* ist, ergibt sich daraus, daß die 660 einem beliebigen Werte von J entsprechenden Punkte sich gegenüber den 60 Kollineationen der Untergruppe in $11 \cdot 60$ spalten, daß aber die 60 Punkte $J = \infty$ alle auseinander durch die Kollineationen der Untergruppe hervorgehen. Die anderen Eigenschaften folgen aus dem Verhalten der 220 Punkte $J = 0$ und der 330 Punkte $J = 1$. Es gibt unter den 660 Kollineationen, wie bekannt, $2 \cdot 55$ von der Periode 3, 55 von der Periode 2.[11]) Bei jeder Kollineation von der Periode 3 bleiben daher vier Punkte $J = 0$ fest, bei jeder Kollineation von der Periode 2 sechs Punkte $J = 1$. Aber die Untergruppe vom Index 11 enthält $2 \cdot 10$ Kollineationen von der Periode 3, 15 von der Periode 2. Die 220 Punkte $J = 0$ sondern sich also ihr gegenüber in $2 \cdot 20 + 3 \cdot 60$ und die 330 Punkte $J = 1$ in $3 \cdot 30 + 4 \cdot 60$. Und eben dies wird durch die gemeinten Eigenschaften von F ausgesagt.

Wenn es also gelingt, eine Raumkurve zu finden, auf welcher die Funktion J in der angegebenen Weise, auf welcher überdies eine Funktion z existiert, so muß sie von selbst zu einer Gleichung $J = F(z)$ hinleiten, die alle charakteristischen Eigenschaften besitzt und also die von uns gesuchte Gleichung ist.

Jetzt ist die niedrigste nur von den Verhältnissen der y abhängige rationale Funktion, die bei den 60 Kollineationen einer Untergruppe ungeändert bleibt, nach § 5:

$$(11) \qquad z = \frac{f_\nu}{\nabla},$$

eine Funktion vom dritten Grade. Sie soll, will ich voraussetzen, diejenige Funktion sein, welche auf unserer Kurve jeden Wert in 60 Punkten annimmt; ich werde also die Hypothese machen, *daß unsere Kurve von der 20-sten Ordnung sei, und weder auf $f_\nu = 0$, noch auf $\nabla = 0$ gelegen sei, noch auch dem gemeinsamen Schnitte von $f_\nu = 0$, $\nabla = 0$ begegne.* Ich will ferner annehmen, *daß sie nicht auf $C = 0$ liege und auch nicht dem Schnitte von $C = 0$, $\nabla = 0$ begegne.* Dann ist $\frac{C^3}{\nabla^{11}}$ eine Funktion, welche jeden Wert in 660 zusammengehörigen Punkten annimmt; für $C = 0$ erhält man nur 220 getrennte Punkte, für $\nabla = 0$ nur 60. Man sieht: *es müßte $J = k \cdot \frac{C^3}{\nabla^{11}}$ gesetzt werden,* wo k eine numerische Konstante ist.

[10]) Vgl. bei diesen Überlegungen die analogen Betrachtungen für die Transformation siebenter Ordnung, welche ich Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXIV, S. 113 ff., 119 ff. dieses Bandes] etwas ausführlicher entwickelt habe.

[11]) Vgl. hier und im folgenden bei solchen Angaben die betr. Kapitel in Serrets Traité d'algèbre supérieure, vol. II, [oder in den „Modulfunktionen“, Bd. 1, S. 435/36.]

Nun sage ich: *Wenn nur das Geschlecht unserer Kurve gleich 26 ist, so gibt es von selbst außer der Gruppe der dreifach zählenden 220 Punkte und der Gruppe der elffach zählenden 60 Punkte nur noch* ***eine*** *Gruppe von mehrfach zählenden Punkten, nämlich von 330 zweifach zählenden.* Denn denken wir uns die Kurve als Riemannsche Fläche 660-blättrig über der Ebene J ausgebreitet, so bekommen wir, wegen der 660 Transformationen der Kurve in sich, bei denen J ungeändert bleibt, jedenfalls eine *reguläre* Verzweigung (Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXIV, S. 122 dieses Bandes]), und wenn also irgendwo ν Blätter zusammenhängen, so hängen an dieser Stelle alle Blätter zu je ν zusammen. Man hat also

$$2p-2=660\left(-2+\sum\frac{\nu-1}{\nu}\right),$$

wo sich die Summe rechter Hand auf die verschiedenen Stellen der Ebene J bezieht, an denen Verzweigungen stattfinden. Soll nun $p=26$, ein Wert von ν gleich 3, ein anderer gleich 11 sein, so kann, wie man sofort zeigt, nur noch ein drittes ν unter dem Summenzeichen vorkommen, und dieses muß gleich 2 sein. Auch können wir, durch zweckmäßige Wahl von k, erreichen, daß J an der betr. Stelle gleich 1 wird.

Man sieht, wie sich alle diese Hypothesen zusammenschließen. *Es gilt, in dem Raume der y eine Kurve von der 20-sten Ordnung und dem Geschlechte 26 zu finden, welche bei den 660 Kollineationen in sich übergeht, und weder auf $f_\nu=0$, noch auf $\nabla=0$, noch endlich auf $C=0$ gelegen ist, auch nicht dem Schnitte von $f_\nu=0$ und $\nabla=0$, oder dem Schnitte von $C=0$ und $\nabla=0$ begegnet.*

§ 7.

Die Doppelkurve von $H=0$.

Falls unsere Kurve 20-ster Ordnung existiert, muß sie jedenfalls auf der Fläche (4): $H=0$ liegen[12]. Denn sonst gäbe es mit $H=0$ 100 Schnittpunkte, und diese 100 Punkte müßten durch die 660 Kollineationen unter sich permutiert werden, was unmöglich ist. — Nun erinnere man sich der Untersuchungen, vermöge deren man in der gewöhnlichen Raumgeometrie zeigt, daß die Hessesche einer Fläche dritter Ordnung zehn Knotenpunkte besitzt. Man setzt zu dem Zwecke gleichzeitig alle ersten Unterdeterminanten der Hesseschen Determinante gleich Null. Genau so kann man bei fünf Variabeln verfahren und erhält dann durch bekannte Methoden

[12]) Ich nenne hier *Fläche* jede Mannigfaltigkeit, die durch *eine* Gleichung dargestellt wird, also im vorliegenden Falle eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen, *Kurve* ein Gebiet von nur einer Dimension.

den allgemeinen Satz: *daß bei fünf Variabeln die Hessesche einer Fläche dritter Ordnung eine Doppelkurve von der 20-sten Ordnung und dem Geschlechte 26 besitzt.*

[Es seien nämlich $H_{ik}=0$ in irgendeiner Reihenfolge die 15 Gleichungen vierter Ordnung, die man durch Nullsetzen der ersten Unterdeterminanten von H erhält. Wegen der zwischen den H_{ik} bestehenden, in $y_1, y_4, \ldots, y_3$ identischen, Relationen sind diese Gleichungen für die Punkte einer Kurve verträglich. Irgend drei derselben bestimmen zunächst eine Kurve 64-ster Ordnung, von der sich aber verschiedene Bestandteile abtrennen, welche die übrigen H_{ik} nicht sämtlich zu Null machen. Die Betrachtung wird ganz ähnlich durchzuführen sein, wie Clebsch in Crelles Journal, Bd. 59 (1861) bei der Abzählung der Doppelpunkte der Hesseschen Fläche einer Fläche dritter Ordnung im dreidimensionalen Raum verfährt. (Vergl. auch Salmon-Fiedler, *Analyt. Geometrie des Raumes*, Bd. 2, 2. Aufl. (1874), S. 331—334 und S. 535—536.) Von hier aus erhält man die Ordnung gleich 20. — Wie ich das Geschlecht p der Doppelkurve vermöge ähnlicher allgemeiner Ansätze zu $p=26$ abzählte, kann ich nicht erinnern. Jedoch wird unten auf S. 155 für unsere spezielle Kurve $p=26$ nachgewiesen, und da dieselbe keinerlei Doppelpunkte besitzt, liegt kein Grund vor, daß ihr Geschlecht niedriger sei, als das der Doppelkurve der Hesseschen Fläche einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung im vierdimensionalen Raum. So läßt sich vom speziellen Fall der Rückschluß auf den allgemeinen machen.][13])

Es wird also auch, falls nicht besondere Verhältnisse störend einwirken, die Fläche $H=0$ eine solche Doppelkurve besitzen, und diese Doppelkurve wird durch die 660 Kollineationen in sich übergehen, da die Fläche $H=0$ es tut. Kann man zweifeln, daß eben diese Doppelkurve die von uns gesuchte Kurve ist? Dabei ist freilich zweierlei noch nachzuweisen: nämlich erstens, daß die im allgemeinen Falle richtigen Zahlen 20 und 26 für Ordnung und Geschlecht im besonderen Falle keine Modifikation erfahren, und zweitens, daß unsere Kurve auch die anderen, negativen Eigenschaften besitzt, welche wir angegeben haben.

Indem ich dem Beweise, zu dem ich mich sofort wende, vorgreife, spreche ich schon hier den Satz aus:

Die von uns gesuchte Kurve 20-ster Ordnung ist die Doppelkurve der Hesseschen Fläche $H=0$.

Zum Beweise bilde man zunächst alle Unterdeterminanten von H und setze sie gleich Null. So bekommt man ein Gleichungssystem, welches ich

$$(12)\qquad H_{ik}=0$$

[13]) [Zusatz beim Wiederabdruck. — Vgl. die ergänzende Bemerkung 5. auf S. 168 am Schlusse dieser Arbeit. K.]

貴重書

nennen will, und dessen Gleichungen aus folgenden drei

$$(13)\qquad \begin{cases} 0 = y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1, \\ 0 = y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9, \\ 0 = y_4^3 y_9 + y_9^3 y_5 + y_3^3 y_1, \end{cases}$$

durch zyklische Permutation der y hervorgehen.

Ich will nun die fünf Punkte, in denen vier von den fünf y verschwinden, als die Punkte I, IV, V, IX, III bezeichnen. Dann sieht man sofort:

Die fünf Punkte I, IV, V, IX, III *gehören unserer Kurve an.*

Und da sie den Flächen (5): $C = 0$ und $f_\nu = 0$ (§ 5): offenbar nicht angehören, so folgt:

Unsere Kurve liegt weder auf $C = 0$ noch auf $f_\nu = 0$.

Setzt man in (13) und die übrigen Gleichungen $H_{ik} = 0$ für eins der y den Wert Null, so folgt, daß noch drei, übrigens beliebige y verschwinden müssen. Daher:

Jede Ebene $y_{k^2} = 0$ schneidet unsere Kurve nur in vier Punkten, nämlich in denjenigen vier unter den fünf Punkten I, IV, V, IX, III, *welche nicht nach dem Index von y_{k^2} benannt sind.*

Man lasse nunmehr in einem der fünf Punkte, etwa im Punkte III, eine Reihenentwicklung eintreten, indem man $y_3 = 1$, $y_5 = dt$ setzt. Dann bekommt man aus den Gleichungen $H_{ik} = 0$ [14]) bis auf Glieder von höherer als der zehnten Ordnung:

$$y_1 = dt^{10}, \quad y_4 = dt^6, \quad y_5 = dt, \quad y_9 = -dt^3, \quad y_3 = 1,$$

und also für das Verhalten der y in sämtlichen fünf Punkten folgende Tabelle:

(14)

	y_1	y_4	y_5	y_9	y_3
I	1	dt^{10}	dt^6	dt	$-dt^3$
IV	$-dt^3$	1	dt^{10}	dt^6	dt
V	dt	$-dt^3$	1	dt^{10}	dt^6
IX	dt^6	dt	$-dt^3$	1	dt^{10}
III	dt^{10}	dt^6	dt	$-dt^3$	1

[14]) [Es genügt sogar, um die Rechnung durchzuführen, nur die Gleichungen zu benutzen, welche durch zyklische Vertauschung der Indizes aus der letzten der drei Gleichungen (13) hervorgehen. B.-H.]

Man sieht:

Die fünf Punkte sind einfache Punkte unserer Kurve.

Dann aber vor allem:

Die Kurve ist von der 20-sten Ordnung.

Denn die Summe der beim einzelnen y in der Tabelle vorkommenden Exponenten von dt ist $3 + 1 + 6 + 10 = 20$.

Jeder unserer fünf Punkte bleibt der Kollineation S: $y'_{k^2} = \varrho^{k^2} y_{k^2}$ ungeändert, bei der zyklischen Vertauschung C der y werden sie untereinander permutiert. Es entstehen aus den fünf Punkten bei den 660 Kollineationen daher nur 60. In ihnen sämtlich verschwindet ∇, weil es z. B. in I verschwindet. Dagegen verschwindet ∇ nicht identisch. Denn tragen wir in ∇ z. B. die auf I bezügliche Reihenentwicklung (14) ein, so kommt (mit dem von uns gewählten Maße der Genauigkeit) $\nabla = dt$. Also:

$\nabla = 0$ hat mit unserer Kurve 60 und nur 60 Schnittpunkte gemein, und in diesen verschwindet weder C noch f_ν.

Um alle charakteristischen Eigenschaften der von uns gesuchten Kurve beisammen zu haben, bleibt nur noch zu zeigen, *daß das Geschlecht gleich* 26 *ist.* Dies gelingt sehr einfach durch die Betrachtung gewisser Ungleichheiten. [Indem wir unsere Doppelkurve 20-ster Ordnung als Teilschnitt dreier Flächen vierter Ordnung betrachten, die wir $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$ nennen mögen, finden wir in bekannter Weise:][15])

$$p \leqq 71.$$

Andererseits ist p jedenfalls nicht kleiner als das Geschlecht einer in gerade Linien zerfallenen Kurve; also:

$$p \geqq -19.$$

[15]) [Beim Wiederabdruck an die Stelle einer ungenauen Formulierung des Originals gesetzt. — Man hat nämlich folgenden Ansatz: Es seien $u_y = 0$, $v_y = 0$ irgend zwei Ebenen, (u, v, H_1, H_2, H_3) die Funktionaldeterminate der beteiligten Formen, so sind die überall endlichen Integrale, die zu unserer Kurve 20-ster Ordnung gehören, jedenfalls in der Gestalt

$$\int \Phi_7 \frac{u_y\, dv_y - v_y\, du_y}{(u, v, H_1, H_2, H_3)}$$

enthalten, unter Φ_7 eine Form siebenten Grades der Variablen y verstanden. Die Fläche $\Phi_7 = 0$ unterliegt indessen der Bedingung, daß sie die Kurve 20-ster Ordnung in denjenigen k festen Punkten trifft, in denen diese den übrigen Bestandteilen der Schnittkurve von $H_1 = 0$, $H_2 = 0$, $H_3 = 0$ begegnet. Außerdem wird $\Phi_7 = 0$ die Kurve 20-ster Ordnung in $2p-2$ beweglichen Punkten schneiden. Hieraus folgt die Beziehung

$$k + 2p - 2 = 7 \cdot 20 = 140,$$

also insbesondere $p \leqq 71$. Indem weiterhin p als 26 fixiert wird, folgt, daß unsere $\Phi_7 = 0$ die Kurve 20-ster Ordnung im $140 - (2 \cdot 26 - 2) = 90$ festen Punkten schneiden muß, falls wir ein Integral erster Gattung vor uns haben wollen. K.]

Endlich aber läßt sich, wie ich im vorigen Paragraphen zeigte, folgende Gleichung anschreiben:

$$2p - 2 = 660\left(-2 + \sum \frac{\nu - 1}{\nu}\right).$$

Hier muß, wegen des Schnittes mit $C = 0$ *ein* ν gleich 3, und wegen des Schnittes mit $\nabla = 0$ ein anderes ν gleich 11 genommen werden. Nähme man nun kein drittes ν dazu, so würde

$$2p - 2 = -280, \qquad p = -139$$

sein. Nähme man aber das dritte ν gleich 3 oder noch größer, oder nähme man gar mehrere ν an, so käme:

$$2p - 2 \geqq 160, \qquad p \geqq 81.$$

Also ist nur noch ein ν da; dasselbe ist gleich 2; und p wird $= 26$, was zu beweisen war.

§ 8.

Die Gleichung $J = F(z)$.

Jetzt ist es eine einfache Rechenaufgabe, die Gleichung $J = F(z)$ zu bilden. Wir haben

$$(15)\qquad J = k \cdot \frac{C^3}{\nabla^{11}}, \qquad z_\nu = \frac{f_\nu}{\nabla}$$

zu setzen und zunächst mit unbestimmten Koeffizienten anzuschreiben[16]:

$$(16)\qquad J = k(z^2 + Az + B)(z^3 + az^2 + bz + c)^3,$$

oder auch:

$$(16\text{b})\qquad J - 1 = k(z^3 + \mathsf{A}z^2 + \mathsf{B}z + \Gamma)(z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z^2 + \delta)^2.$$

Sodann trage man eine der Reihenentwicklungen (14) in C, ∇ und f_ν ein. So kommt bis auf Glieder von höherer als der zehnten Dimension:

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &C = 1, \qquad \nabla = dt, \\ &f_\nu = \varrho^{9\nu} + \frac{1+\sqrt{-11}}{2}\varrho^{2\nu}\cdot dt^2 - 2\varrho^{4\nu}\cdot dt^3 + \frac{1+\sqrt{-11}}{2}\varrho^{6\nu}\cdot dt^4 \\ &\qquad + (1 + \sqrt{-11})\varrho^{8\nu}\cdot dt^5 - \frac{1+\sqrt{-11}}{2}\varrho^{10\nu}\cdot dt^6 + 3\varrho^{3\nu}\cdot dt^8 \\ &\qquad + 2\varrho^{5\nu}\cdot dt^9 - \frac{1+\sqrt{-11}}{2}\varrho^{7\nu}\cdot dt^{10}. \end{aligned}\right.$$

[16]) Das hier rechter Hand stehende k ist in der Tat dasselbe, wie das k in (15). Denn in $\frac{C^3}{\nabla^{11}}$ wie in z^{11} kommt im Zähler das Glied y_1^{33} mit $+1$ multipliziert vor.

Dies in (16) und (16b) eingesetzt gibt mit einer großen Zahl von Kontrollen:

$$(18)\qquad A = -3, \quad B = 5 - \sqrt{-11}.$$

$$a = 1, \quad b = -3\,\frac{1+\sqrt{-11}}{2}, \quad c = \frac{7-\sqrt{-11}}{2};$$

$$(18\text{b})\qquad \mathsf{A} = 4, \quad \mathsf{B} = \frac{7-5\sqrt{-11}}{2}, \quad \Gamma = 4 - 6\sqrt{-11},$$

$$\alpha = -2, \ \beta = 3\cdot\frac{1-\sqrt{-11}}{2}, \ \gamma = 5 + \sqrt{-11}, \ \delta = -3\cdot\frac{5+\sqrt{-11}}{2},$$

und die beiden so erhaltenen Werte von J und $J - 1$ stimmen in der Tat überein (was wieder eine Menge von Bestätigungen einschließt), wenn

$$(19)\qquad k = -\frac{1}{1728}$$

gesetzt wird.

Daher lautet die fertige Gleichung $J = F(z)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (20)\quad & J : J - 1 : 1 \\ & = \left(z^2 - 3z + (5 - \sqrt{-11})\right)\cdot\left(z^3 + z^2 - 3\cdot\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\cdot z + \frac{7-\sqrt{-11}}{2}\right)^3 \\ & :\left(z^3 + 4z^2 + \frac{7-5\sqrt{-11}}{2}\cdot z + (4 - 6\sqrt{-11})\right)\cdot \\ & \qquad \cdot\left(z^4 - 2z^3 + 3\cdot\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\cdot z^2 + (5+\sqrt{-11})z - 3\cdot\frac{5+\sqrt{-11}}{2}\right)^2 \\ & : -1728. \end{aligned}$$

§ 9.

Die zweite Form der Gleichung des elften Grades.

Neben die so gewonnene Gleichung stellt sich nun noch eine zweite, ebenfalls sehr einfache, wenn man nicht von der elfwertigen Funktion *dritten* Grades f_ν (10), sondern von der Funktion *zweiten* Grades φ_ν (9) ausgeht. Ich beweise zunächst den Satz:

Vermöge der Relationen $H_{ik} = 0$ (12) reduzieren sich alle bei den 660 Kollineationen ungeändert bleibenden ganzen Funktionen der y auf ganze Funktionen von ∇ und C.

Eine ungeändert bleibende Funktion der y, gleich Null gesetzt, stellt eine Fläche vor, welche entweder unsere Kurve enthält — und dann wird die Funktion vermöge der $H_{ik} = 0$ identisch Null sein — oder dieselbe in solchen Punkten schneidet, die bei den 660 Kollineationen untereinander permutiert werden. Unter ihnen können sich eine gewisse Anzahl von Malen die 60 Punkte $\nabla = 0$ finden, ebenso beliebig oft die 220 Punkte $C = 0$, dann irgendwelche Gruppen von 660 getrennten Punkten,

貴重書

die durch $C^3 - \lambda\nabla^{11} = 0$ dargestellt sind, wo λ eine geeignete Konstante bedeutet. Dagegen kann die Gruppe der 330 Punkte $J = 1$ nur eine *paare* Anzahl von Malen auftreten, weil die Gesamtzahl der Punkte durch 20 teilbar sein muß, 330 aber nur durch 10 teilbar ist. *Doppeltzählend* wird diese Gruppe aber auch durch eine Kombination von C und ∇ dargestellt, nämlich, da $J = 1$ ist, durch $C^3 + 1728\,\nabla^{11} = 0$; sämtliche Schnittpunkte also können mit der richtigen Multiplizität ausgeschnitten werden, indem man eine geeignete Funktion von ∇ und C gleich Null setzt, was zu beweisen war. —

Daher genügen vermöge der Relationen $H_{ik} = 0$ die elf φ_k einer Gleichung elften Grades, deren Koeffizienten ganze Funktionen von ∇ und C sind.

Mit Rücksicht auf den Grad der in Betracht kommenden Funktionen können wir sofort mit unbestimmten Zahlenfaktoren anschreiben:

(21) $$\varphi^{11} + \alpha\nabla^2\cdot\varphi^8 + \beta\nabla^4\cdot\varphi^5 + \gamma\nabla C\cdot\varphi^4 + \delta\nabla^6\cdot\varphi^2 + \varepsilon\nabla^3 C\cdot\varphi + \zeta\cdot C^2 = 0.$$

Die Zahlenfaktoren bestimmt man wieder vermöge der Reihenentwicklungen (14). Man hat ihnen zufolge:

(22) $$\varphi_\nu = \varrho^{6\nu} - \varrho^{8\nu}\cdot dt + \varrho^{10\nu}\cdot dt^2 + \frac{1-\sqrt{-11}}{2}\varrho^{\nu}\cdot dt^3 + \frac{1-\sqrt{-11}}{2}\varrho^{3\nu}\cdot dt^4$$
$$+ \left[\frac{-1+\sqrt{-11}}{2}\varrho^{9\nu}\cdot dt^7 + \varrho^{2\nu}\cdot dt^9 + \frac{-1+\sqrt{-11}}{2}\varrho^{4\nu}\cdot dt^{10} + \dots\right]$$

und findet also:

(23) $$\alpha = -22, \quad \beta = 11(9 - 2\sqrt{-11}), \quad \gamma = 11, \quad \delta = 88\sqrt{-11}.$$
$$\varepsilon = \frac{11(-3+\sqrt{-11})}{2}, \quad \zeta = -1.$$

Ich will noch

(24) $$\frac{\varphi_\nu}{\nabla^{2/3}} = \xi_\nu$$

setzen und für $\frac{C^3}{\nabla^{11}}$ einführen: $-1728\,J = -1728\,\frac{g_2^3}{\Delta}$. *Dann erhält die neue Gleichung elften Grades folgende Form:*

(25) $$\xi^{11} - 22\cdot\xi^8 + 11(9 - 2\sqrt{-11})\,\xi^5 - 11\cdot\frac{12 g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi^4 + 88\sqrt{-11}\cdot\xi^2$$
$$- 11\cdot\frac{-3+\sqrt{-11}}{2}\cdot\frac{12 g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi - \frac{144\,g_2^2}{\sqrt[3]{\Delta^2}} = 0.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, wie diese Gleichung mit Gleichung (20) zusammenhängt. Die Fläche $\varphi_\nu = 0$ schneidet aus unserer Kurve 40 Punkte aus, die sich bei den 60 Kollineationen der Untergruppe untereinander permutieren. Dies können, dem Früheren zufolge, nur diejenigen $2\cdot 20$ Punkte sein, welche je bei zwei Kollineationen von der Periode 3 fest-

bleiben, d. h. dieselben Punkte, für welche man nach Gleichung (20) hatte:
$$z^2 - 3z + (5 - \sqrt{-11}) = 0.$$

In der Tat zeigen die Reihenentwicklungen (14), daß folgende Relation besteht (natürlich immer vermöge der $H_{ik} = 0$):

(26) $$\varphi_\nu^3 = f_\nu^2 - 3 f_\nu\nabla + (5 - \sqrt{-11})\nabla^2,$$

und *daß man also von der Gleichung* (25) *zu der Gleichung* (20) *kommt, indem man setzt:*

(27) $$\xi^3 = z^2 - 3z + (5 - \sqrt{-11}).$$

Die direkte Verifikation dieser Angabe, die wieder eine Reihe von Kontrollen für die Zahlenkoeffizienten einschließt, hat keinerlei Schwierigkeit.

§ 10.

Zusammenstellung der bisherigen Resultate.

Fassen wir zusammen, so sind wir für *die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Funktionen* nunmehr zu folgenden Resultaten gekommen:

1. *Die Galoissche Resolvente* 660-*ten Grades läßt sich folgendermaßen anschreiben:* Man unterwerfe die fünf Verhältnisgrößen
$$y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3$$
den 15 Relationen $H_{ik} = 0$ (vgl. (12) resp. (13)) und setze[17]):
$$\frac{-C^3}{1728\,\nabla^{11}} = J,$$
wo ∇ die Funktion dritten Grades (2), C die Funktion elften Grades (4) bezeichnet. — Hat man *ein* Lösungssystem dieser Gleichungen gefunden, so ergeben sich alle anderen durch die Kollineationen des § 3.

2. *Es gibt zwei einfachste Formen der Resolvente elften Grades.* Die eine, von uns zu Anfang allein betrachtete, lautet (20):

$$J : J - 1 : 1$$
$$= (z^2 - 3z + (5 - \sqrt{-11}))\cdot\left(z^3 + z^2 - 3\cdot\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\cdot z + \frac{7-\sqrt{-11}}{2}\right)^3$$
$$:\left(z^3 + 4z^2 + \frac{7-5\sqrt{-11}}{2}\cdot z + (4 - 6\sqrt{-11})\right).$$
$$\cdot\left(z^4 - 2z^3 + 3\cdot\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\cdot z^2 + (5+\sqrt{-11})z - 3\cdot\frac{5+\sqrt{-11}}{2}\right)^2$$
$$: -1728;$$

---

[17]) Wollte man nicht die Verhältnisse der y, sondern die y selbst betrachten, so könnte man schreiben:
$$C = 12 g_2, \qquad \nabla = -\sqrt[11]{\Delta},$$
man müßte dann also g_2 und $\sqrt[11]{\Delta}$ adjungieren.

ihre elf Wurzeln sind durch die Formel gegeben:

$$z_\nu = \frac{f_\nu}{\nabla},$$

wo f_ν durch Gleichung (10) definiert ist.

Die zweite Form wird durch (25) vorgestellt:

$$0 = \xi^{11} - 22\cdot\xi^8 + 11(9 - 2\sqrt{-11})\cdot\xi^5 - 11\cdot\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\cdot\xi^4 + 88\cdot\sqrt{-11}\cdot\xi^3$$
$$- 11\cdot\frac{-3+\sqrt{-11}}{2}\cdot\frac{12g_2}{\sqrt[3]{\Delta^2}}\cdot\xi - \frac{144g_2{}^2}{\sqrt[3]{\nabla^2}};$$

und ihre Wurzeln sind:

$$\xi_\nu = \frac{\varphi_\nu}{\nabla^{\frac{2}{3}}},$$

unter φ_ν die Funktionen (9) verstanden.

§ 11.
Zusammenhang mit der Gleichung zwölften Grades.

Ich wünsche nun noch zu zeigen, wie die Größen y mit der Multiplikatorgleichung zwölften Grades, die ich neuerdings mitteilte[18]), zusammenhängen und wie man dementsprechend das vorstehend formulierte Problem 660-ten Grades, resp. die Gleichungen elften Grades auf transzendentem Wege lösen kann. Ich setze zunächst die ausgerechnete Gleichung zwölften Grades noch einmal her:

$$(28)\quad \mathbf{z}^{12} - 90\cdot 11\cdot\sqrt[2]{\Delta}\cdot\mathbf{z}^6 + 40\cdot 11\cdot 12g_2\cdot\sqrt[3]{\Delta}\cdot\mathbf{z}^4 - 15\cdot 11\cdot 216g_3\cdot\sqrt[4]{\Delta}\cdot\mathbf{z}^3$$
$$+ 2\cdot 11\cdot(12g_2)^2\cdot\sqrt[6]{\Delta}\cdot\mathbf{z}^2 - 12g_2\cdot 216g_3\cdot\sqrt[12]{\Delta}\cdot\mathbf{z} - 11\cdot\Delta = 0,$$

und gebe vor allen Dingen an, wie sich ihre Wurzeln als Funktionen des Periodenverhältnisses $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ des elliptischen Integrals, resp. als Funktionen von $q^2 = e^{2i\pi\omega}$ darstellen lassen. Bekanntlich ist (28) eine Jacobische Gleichung. Setzt man dementsprechend:

$$(29)\quad \begin{cases} \sqrt{\mathbf{z}_\infty} = \sqrt{-11}\cdot A_0, \\ \sqrt{\mathbf{z}_\nu} = \qquad A_0 + \varrho^\nu A_1 + \varrho^{4\nu}A_4 + \varrho^{5\nu}A_5 + \varrho^{9\nu}A_9 + \varrho^{3\nu}A_3, \\ \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, 10) \end{cases}$$

(worin ich nur dadurch von der Jacobischen Beziehung abweiche, daß ich als Indizes der A die quadratischen Reste modulo 11 verwende), so erhält man auf bekanntem Wege für *ein* Wertsystem der A folgende Formeln:

[18]) Vgl. Math. Annalen, Bd. 15 (1878/79) [= vorstehend abgedruckte Note Nr. LXXXV, S. 139].

$$(30)\quad \begin{cases} \mu A_0 = q^{\frac{121}{132}}\cdot\sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{33h^2+55h+22}, \\ \mu A_1 = q^{\frac{1}{132}}\cdot\left\{\sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h}\cdot q^{33h^2+h} + \sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{33h^2+43h+14}\right\}, \\ \mu A_4 = q^{\frac{37}{132}}\cdot\left\{\sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h}\cdot q^{33h^2+13h+1} + \sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{33h^2+31h+7}\right\}, \\ \mu A_5 = q^{\frac{49}{132}}\cdot\left\{\sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h}\cdot q^{33h^2+37h+10} + \sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{33h^2+7h}\right\}, \\ \mu A_9 = q^{\frac{97}{132}}\cdot\left\{\sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h+1}\cdot q^{33h^2+19h+2} + \sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h}\cdot q^{33h^2+25h+4}\right\}, \\ \mu A_3 = q^{\frac{25}{132}}\cdot\left\{\sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h}\cdot q^{33h^2+49h+18} + \sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^{h}\cdot q^{33h^2+61h+28}\right\}, \end{cases}$$

wo μ den Proportionalitätsfaktor $\sqrt{\frac{\omega_2}{2\pi}}$ bedeutet[19]).

Solcher Wertsysteme gibt es 660·24, nämlich 660 wegen der Galoisschen Gruppe der Modulargleichung, und 24 wegen der in (28) vorkommenden zwölften Wurzel und der in (29) stehenden Quadratwurzel. Aber man sieht leicht, daß sich je 24 Wertsysteme nur durch eine 24-ste Einheitswurzel unterscheiden, *daß also die Verhältnisse der A bloß 660-wertig sind.* In der Tat, läßt man in den Formeln (30) ω um 11 Einheiten wachsen, so erhalten sämtliche A eine 24-te Einheitswurzel, aber

[19]) [Damit die Formeln (29), (30) zusammenbestehen, müssen die Wurzeln $\mathbf{z}_\nu$ der Multiplikatorgleichung in die richtige Reihenfolge gebracht werden, die von der sonst üblichen abweicht, nämlich:

$$\mathbf{z}_\infty = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)\cdot(-11)\cdot q^{\frac{11}{6}}\cdot\prod(1-q^{22\lambda})^2$$
$$\mathbf{z}_\nu = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)\cdot\varrho^{2\nu}\cdot q^{\frac{1}{66}}\cdot\prod\left(1-\varrho^{2\nu\lambda}q^{\frac{2}{11}\lambda}\right)^2$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots, 10).$$

Der allgemeine Ausdruck für die Reihenentwicklungen (30) mit von Null verschiedenem Index k^2 (mod 11) lautet:

$$\mu\cdot A_{k^2} = q^{\frac{1}{132}}\cdot\left\{\sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^h\cdot q^{33h^2-(11+12k)h+\frac{2(k+1)(6k+5)}{11}}\right.$$
$$\left.+\sum'^{+\infty}_{-\infty}(-1)^h\cdot q^{33h^2-(11-12k)h+\frac{2(k-1)(6k-5)}{11}}\right\}.$$

Im Texte ist nur an einigen Stellen der Summationsbuchstabe h durch $h+1$ bzw. $h+2$ ersetzt. B.-H.]

diese ist bei allen A dieselbe, und rührt nur von dem rechter Hand gemeinsam auftretenden Faktor $q^{\frac{1}{132}}$ her. — Ebenso waren, nach den früheren Betrachtungen, die Verhältnisse der y 660-wertig. Es ergibt sich also die Möglichkeit: *die Verhältnisse der y durch die Verhältnisse der A und diese durch jene rational auszudrücken*, und dies ist die präzise Formulierung des Problems, mit dem wir uns jetzt noch zu beschäftigen haben.

§ 12.

Zugehörige Formeln.

Die Betrachtungen, welche nötig sind, um das äußerst einfache Resultat abzuleiten, fasse ich in eine Reihe einzelner Bemerkungen zusammen. Dabei will ich ausdrücklich betonen, daß ich wohl kaum zu diesem Gedankengange geführt worden wäre, hätte nicht bei den Transformationsgraden 5 und 7 ein ganz ähnliches Resultat vorgelegen[20]).

1. Die 660 Wertsysteme der $A_0 : A_1 : A_4 : A_5 : A_9 : A_3$ ergeben sich nach meiner Darstellung in Bd. 15 der Math. Annalen (1879), S. 276 [= Abh. LVII, Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 417] aus einem derselben durch 660 a priori bekannte Kollineationen, aus denen ich folgende zwei herausgreife:

$$(31)\quad \begin{cases} S': & A_0' = A_0, & A_1' = \varrho A_1, & A_4' = \varrho^4 A_4, & A_5' = \varrho^5 A_5, \\ & & & A_9' = \varrho^9 A_9, & A_3' = \varrho^3 A_3, \\ C': & A_0' = A_0, & A_1' = A_4, & A_4' = A_5, & A_5' = A_9, \\ & & & A_9' = A_3, & A_3' = A_1. \end{cases}$$

2. Die eindeutige Zuordnung zwischen den Verhältnissen der A und den Verhältnissen der y läßt sich auf 660 verschiedene Weisen treffen. Denn hat man eine solche Zuordnuug durchgeführt, so kann man nachträglich die y oder die A noch einer beliebigen der 660 Kollineationen unterwerfen. Daher kann man es jedenfalls erreichen, daß den Wiederholungen von S:

$$y_1' = \varrho y_1, \quad y_4' = \varrho^4 y_4, \quad y_5' = \varrho^5 y_5, \quad y_9' = \varrho^9 y_9, \quad y_3' = \varrho^3 y_3$$

die Wiederholungen von S' und den zyklischen Vertauschungen

$$(y_1\, y_4\, y_5\, y_9\, y_3)$$

die Wiederholungen von C' entsprechen.

3. Ich sage nun, daß unter dieser Voraussetzung der zyklischen Substitution C:

$$y_1' = y_4, \quad y_4' = y_5, \quad y_5' = y_9, \quad y_9' = y_3, \quad y_3' = y_1$$

[20]) Wie sich das analoge Theorem bei beliebigem Transformationsgrade gestaltet, beabsichtige ich demnächst zu zeigen. [Vgl. Math. Annalen, Bd. 17 (1881) [= Abh. LXXXIX im vorliegenden Bande, S. 190, Fußnote [11]).]

notwendig die zyklische Vertauschung C' selbst, nicht irgendeine Wiederholung derselben entspricht. Denn sei etwa:

$$\frac{A_1}{A_0} = R(y_1, y_4, y_5, y_9, y_3),$$

wo R eine rationale Funktion von nullter Dimension sein soll. Multiplizieren wir jetzt, der Kollineation S entsprechend, jedes y_{k^2} mit ϱ^{k^2}, so erhält R, nach Voraussetzung, irgendeine elfte Einheitswurzel ϱ^{ν} als Faktor. Nun bilden wir, indem wir die Kollineation C anwenden:

$$R(y_4, y_5, y_9, y_3, y_1).$$

Schreiben wir jetzt statt y_{k^2} bez. $\varrho^{k^2} \cdot y_{k^2}$, so muß $\varrho^{4\nu}$ als Faktor vortreten. Daher kann $R(y_4, y_5, y_9, y_3, y_1)$ nur gleich $\frac{A_4}{A_0}$ sein, was zu beweisen war.

4. Die fünf Punkte I, IV, V, IX, III (vgl. § 7) waren auf der y-Kurve dadurch charakterisiert, daß sie gleichzeitig bei der Kollineation S (und ihren Wiederholungen) ungeändert bleiben. Ihnen werden auf der Kurve der A (wenn diese geometrische Redeweise gestattet ist!) fünf Punkte entsprechen, welche die Substitution S' zulassen. *Offenbar sind es diejenigen fünf Punkte, in denen A_0 und vier der übrigen A verschwinden.* Denn erstens bleiben diese Punkte, wie evident ist, bei der Kollineation S' ungeändert, und zweitens gehören sie der Kurve der A an. Hebt man nämlich aus den Ausdrücken rechter Hand in (30) zunächst den gemeinsamen Faktor $q^{\frac{1}{132}}$ fort und setzt dann $q = 0$, so erhält man

$$A_0 = 0, \quad A_1 \gtrless 0, \quad A_4 = A_5 = A_9 = A_3 = 0,$$

so daß unsere Behauptung für einen der fünf Punkte richtig ist; aus dem einen Punkte gehen aber die vier anderen durch die zyklische Vertauschung C' hervor. Ich werde diese Punkte I′, IV′, V′, IX′, III′ nennen.

5. Den Bemerkungen 2., 3. zufolge kann man den Punkt I einem beliebigen der Punkte I′ ... III′ zuordnen; hat man aber z. B. I dem IV′ entsprechend gesetzt, so korrespondieren IV, V, IX, III notwendig dem V′, IX′, III′, I′.

6. A_0 kann nur in den Punkten I′ ... III′ zu Null werden. Denn wenn A_0 gleich Null ist, so ist nach Gl. (29) eine der Wurzeln $\mathbf{z}$ gleich Null, also, nach (28), $\Delta = 0$ oder $J = \infty$. Es gibt 60 Punkte $J = \infty$, aber nur in fünf derselben kann die einzelne Wurzel $\mathbf{z}$ gleich Null sein. Denn in den fünf Punkten I′ ... III′ verschwindet, (29) zufolge, nur $\mathbf{z}_{\infty}$, keine der anderen Wurzeln $\mathbf{z}_{\nu}$.

7. Nachdem ich in (30) rechter Hand den gemeinsamen Faktor $q^{\frac{1}{132}}$ weggehoben, will ich $q^{\frac{2}{11}} = -ds$ setzen. Dann erweisen sich die

$$A_0, A_1, A_4, A_5, A_9, A_3$$

in erster Annäherung proportional zu:

$$-ds^5,\ 1,\ -ds^7,\ -ds^2,\ ds^{15},\ ds.$$

Dies gibt folgende Tabelle für das Verhalten der A in den Punkten I′ . . . III′:

(32)

	A_0	A_1	A_4	A_5	A_9	A_3
I′	$-ds^5$	1	$-ds^7$	$-ds^2$	$+ds^{15}$	$+ds$
IV′	$-ds^5$	$+ds$	1	$-ds^7$	$-ds^2$	$+ds^{15}$
V′	$-ds^5$	$+ds^{15}$	$+ds$	1	$-ds^7$	$-ds^2$
IX′	$-ds^5$	$-ds^2$	$+ds^{15}$	$+ds$	1	$-ds^7$
III′	$-ds^5$	$-ds^7$	$-ds^2$	$+ds^{15}$	$+ds$	1

8. *Die Kurve der A hat die 25-te Ordnung.* Denn die Summe der Exponenten von ds in der auf A_0 bezüglichen Kolonne der vorstehenden Tabelle ist 25. Aber auch die Summe der Exponenten von ds in einer auf ein beliebiges anderes A bezüglichen Kolonne ist 25. *Also werden die anderen A ebenfalls außer in den Punkten I′ . . . III′ nirgendwo gleich Null.*

Insbesondere ergibt sich:

$$A_0^5 + A_1 A_4 A_5 A_9 A_3 = 0, \tag{33}$$

eine Relation, von der Brioschi gelegentlich Gebrauch macht[21]).

9. Man bilde jetzt folgende Verhältnisse der y:

$$\frac{y_4}{y_5},\quad \frac{y_5}{y_9},\quad \frac{y_9}{y_3},\quad \frac{y_3}{y_1},\quad \frac{y_1}{y_4}.$$

Da die y nirgendwo außer in den Punkten I . . . III Null werden, so erhält man für das Null- und Unendlichwerden dieser Funktionen folgende Tabelle (vgl. (14)):

[21]) *Sopra una classe di equazioni modulari.* Annali die Matematica, ser. 2, t. IX (1878/79), S. 167 ff. [= Opere matematiche, Nr. LXXV, t. II., S. 193.] [Die Gleichung (33) ergibt sich aus folgender Überlegung Würde die Kurve der A nicht auf der durch sie dargestellten Fläche liegen, so hätte sie mit dieser 125 Schnittpunkte gemeinsam. Die Gesamtordnung des Verschwindens der Form $A_0^5 + A_1 A_4 A_5 A_9 A_3$ auf der Kurve der A ist aber gemäß unseren Formeln (32) größer als 125 und diese Kurve ist irreduzibel. K.]

(34)

I	$+dt^4$	$+dt^5$	$-dt^{-2}$	$-dt^3$	$+dt^{-10}$
IV	$+dt^{-10}$	$+dt^4$	$+dt^5$	$-dt^{-2}$	$-dt^3$
V	$-dt^3$	$+dt^{-10}$	$+dt^4$	$+dt^5$	$-dt^{-2}$
IX	$-dt^{-2}$	$-dt^3$	$+dt^{-10}$	$+dt^4$	$+dt^5$
III	$+dt^5$	$-dt^{-2}$	$-dt^3$	$+dt^{-10}$	$+dt^4$

10. Andererseits bilde man folgende Verhältnisse der A:

$$-\frac{A_0}{A_1},\quad -\frac{A_0}{A_4},\quad -\frac{A_0}{A_5},\quad -\frac{A_0}{A_9},\quad -\frac{A_0}{A_3}.$$

Sie werden nur in den Punkten I′ . . . III′ Null oder unendlich, und zwar findet man aus (32) folgendes Schema:

(35)

I′	$+ds^5$	$-ds^{-2}$	$-ds^3$	$+ds^{-10}$	$+ds^4$
IV′	$+ds^4$	$+ds^5$	$-ds^{-2}$	$-ds^3$	$+ds^{-10}$
V′	$+ds^{-10}$	$+ds^4$	$+ds^5$	$-ds^{-2}$	$-ds^3$
IX′	$-ds^3$	$+ds^{-10}$	$+ds^4$	$+ds^5$	$-ds^{-2}$
III′	$-ds^{-2}$	$-ds^3$	$+ds^{-10}$	$+ds^4$	$+ds^5$

11. Jetzt ordne man dem I das IV′, und also, nach 5., dem IV, V, IX, III bzw. das V′, IX′, III′, I′ zu. Dann werden, wie ein Blick auf die Tabellen lehrt,

$$\frac{y_4}{y_5},\quad \frac{y_5}{y_9},\quad \frac{y_9}{y_3},\quad \frac{y_3}{y_1},\quad \frac{y_1}{y_4}$$

und

$$-\frac{A_0}{A_1},\quad -\frac{A_0}{A_4},\quad -\frac{A_0}{A_5},\quad -\frac{A_0}{A_9},\quad -\frac{A_0}{A_3}$$

an entsprechenden Stellen und in demselben Maße Null und Unendlich, und sind demnach resp. einander gleich zu setzen. *Man hat also folgende Formeln, die das von uns gestellte Problem erledigen und die in § 10 zusammengestellten Resultate im angegebenen Sinne ergänzen:*

$$\frac{y_4}{y_5} = -\frac{A_0}{A_1},\quad \frac{y_5}{y_9} = -\frac{A_0}{A_4},\quad \frac{y_9}{y_3} = -\frac{A_0}{A_5},\quad \frac{y_3}{y_1} = -\frac{A_0}{A_9},\quad \frac{y_1}{y_4} = -\frac{A_0}{A_3}. \tag{36}$$

Ebenhausen, den 15. August 1879.

[Ergänzende Bemerkungen zur vorstehend abgedruckten Abhandlung Nr. LXXXVI.]

[1. *Die regulär eingeteilten Riemannschen Flächen der Galoisschen Resolventen der Modulargleichung.* Bereits in der Abhandlung Nr. LXXXIV über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen war davon die Rede (vgl. S. 122/23 im vorliegenden Bande, Fußnote [24])), daß Dyck die zu den Galoisschen Resolventen der Modulargleichungen von primzahligem Transformationsgrade gehörigen regulär-symmetrischen Riemannschen Flächen einem Spezialstudium unterworfen hat. Da er seinen hierauf bezüglichen Aufsatz [22]) gerade mit einer den Fall $n = 11$ illustrierenden Tafel begleitet hat, mag an dieser Stelle über Dycks Untersuchung berichtet werden. Genau wie bei $n = 7$ setzt sich bei beliebigem ungeradem primzahligem n die regulär eingeteilte Oberfläche aus $\frac{n \cdot (n^2 - 1)}{2}$ Doppeldreiecken zusammen, und wieder wird man $\frac{n^2 - 1}{2}$ Punkte a, $\frac{n \cdot (n^2 - 1)}{6}$ Punkte b und $\frac{n \cdot (n^2 - 1)}{4}$ Punkte c unterscheiden, in denen je n, bzw. je 3, bzw. je 2 Doppeldreiecke aneinander stoßen. Wir gelangen zu einer ersten, vorläufigen Übersicht über unsere Fläche, indem wir je n solche Doppeldreiecke, die in einem Punkte a zusammenkommen, zu einem n-Eck vereinigen und also die Fläche aus $\frac{n^2 - 1}{2}$ n-Ecken aufbauen. Des weiteren werden wir diese n-Ecke zu noch größeren Aggregaten von Elementardreiecken, sogenannten „Polygonkränzen" oder „Rädern" zusammenfassen, indem wir je ein n-Eck mit den n an seine freien Kanten angrenzenden n-Ecken vereinigen. Es zeigt sich dann, daß es auf $n + 1$ verschiedene Weisen möglich ist, $\frac{n-1}{2}$ Punkte a derart herauszugreifen, daß diejenigen Räder, welche diese Punkte a zu Zentren haben, zusammengenommen gerade unsere Fläche erschöpfen. Jeder solchen Zerlegung der Fläche in $\frac{n-1}{2}$ Räder entspricht eine unter den $n + 1$ gleichberechtigten zyklischen Untergruppen der Ordnung n, welche in der zu unserer Fläche gehörigen Gesamtgruppe enthalten sind, indem die Untergruppe die $\frac{n-1}{2}$ herausgegriffenen Punkte a festläßt und die einzelnen Räder um diese Zentren dreht, und zwar in der Weise, daß je zwei Räder gleichzeitig verschiedene Drehungswinkel erhalten; dreht sich nämlich z. B. ein erstes Rad um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$, so stimmen in den Drehungswinkeln $\frac{2\varkappa\pi}{n}$ der $\frac{n-1}{2}$ Räder die Zahlen $\varkappa$ in ihrer Gesamtheit mit den $\frac{n-1}{2}$ quadratischen Resten (mod n) überein.

Um nun ein Bild unserer Fläche zu entwerfen, wird man — wenigstens, wenn ihr Geschlecht $p > 0$ ist — vorteilhafterweise die Zusammenheftung der $\frac{n-1}{2}$ Räder nicht wirklich vollziehen, sondern besser die einzelnen Räder nebeneinander zeichnen und in einer beigefügten Tabelle die Zusammengehörigkeit der Kanten angeben [23]). In den niedersten Fällen gestalten sich demnach die Ergebnisse folgendermaßen:

[22]) *Versuch einer übersichtlichen Darstellung der Riemannschen Fläche, welche der Galoisschen Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformation der elliptischen Funktionen entspricht.* Math. Annalen, Bd. 18 (1881), S. 507—527.

[23]) Hier ist ein schönes konkretes Beispiel für Riemannsche Flächen, die aus einzelnen „Flächenkalotten" mit zusammengeordneten Rändern bestehen, wie ich sie bei den abstrakt funktionentheoretischen Überlegungen benutzt habe, die unten in Abhandlung Nr. CIII wieder abgedruckt werden.

Für $n = 3$ haben wir ein Rad aus 4 Dreiecken, das sich zu einem Tetraeder zusammenbiegen läßt, für $n = 5$ zwei Räder aus 6 Fünfecken, entsprechend der Zerlegung des Pentagondodekaeders in zwei gleiche Hälften, für $n = 7$ drei Räder aus 8 Siebenecken, wie schon in Fußnote [28]) auf S. 131 angedeutet, und für $n = 11$ fünf Räder aus 12 Elfecken. Ein solches hat nun eben Dyck auf einer seiner Arbeit beigegebenen Tafel veranschaulicht. Die Zeichnung ist dabei wieder so entworfen, daß das zentrale Elfeck als Kreisbogenelfeck in die Mitte eines Orthogonalkreises gelegt ist und die 11 übrigen Elfecke gleichfalls als zu demselben Orthogonalkreis gehörige Kreisbogenfiguren darumgelagert sind. So werden die Verhältnisse auch auf dieser, immerhin recht komplizierten Riemannschen Fläche, anschaulich klar.

Auch über die Symmetrielinien unserer Flächen macht Dyck für beliebige ungerade Primzahlen n allgemeine Angaben.

2. *Die Resolventen elften Grades und das Formenproblem der y.* Wir unterscheiden nach § 10 zweierlei einfachste Arten der Resolventen elften Grades, eine funktionentheoretische und eine formentheoretische. Beide treten selbstverständlich in zweierlei Gestalt auf, je nachdem für $\sqrt{-11}$ gesetzt wird $+i\sqrt{11}$ oder $-i\sqrt{11}$ (vgl. S. 149/150 Schluß von § 5). Man wird fragen, ob sich an die formentheoretischen Gleichungen nicht ähnliche algebraische Überlegungen knüpfen lassen, wie Gordan sie bei den entsprechenden Gleichungen für $n = 7$ durchgeführt hat. (Vgl. Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 426—438.) Der erste Schritt hierzu wäre die Aufstellung eines vollen Systems aller Formen in den y, die bei den Substitutionen der Gruppe (2), S. 146, ungeändert bleiben. Daran wird man ein „allgemeines" Formenproblem der y knüpfen (vgl. S. 146) und fragen, welcher akzessorischer Irrationalitäten es bedarf, um dasselbe auf das „spezielle" Problem, bei welchem der Punkt y auf der Doppelkurve von $H = 0$ liegt, zurückzuführen. Sodann wären die Gleichungen (21), (23) auf den allgemeinen Fall zu übertragen; nachdem das volle Formensystem vorhanden ist, erfordert diese Aufgabe nur noch elementare algebraische Rechnungen [24]). Weiterhin ist die Beziehung der beiden Gleichungen elften Grades zueinander von Interesse. Versteht man in Formel (9) auf S. 149 unter $\sqrt{-11}$ den Wert $+i\sqrt{11}$ und nennt den Ausdruck, der aus φ_ν durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ hervorgeht, ψ_ν, so findet man, im Anschluß an Fricke, „Modulfunktionen", Bd. 2, S. 429, die $2 \cdot 11$ linearen Gleichungen

$$\frac{-1 + i\sqrt{21}}{2} \cdot \psi_\nu = \varphi_{\nu-1} + \varphi_{\nu-4} + \varphi_{\nu-5} + \varphi_{\nu-9} + \varphi_{\nu-3}$$

$$\frac{-1 - i\sqrt{11}}{2} \cdot \varphi_\nu = \psi_{\nu+1} + \psi_{\nu+4} + \psi_{\nu+5} + \psi_{\nu+9} + \psi_{\nu+3}.$$

Diese Beziehungen sind völlig analog denjenigen, welche Gordan zwischen den Wurzeln der entsprechenden Gleichungen bei $n = 7$ gefunden hat. (Vgl. Formel (14) auf S. 432 in Bd. 2 dieser Ausgabe.) Wird sich nun der Affekt der beiden Gleichungen dadurch festlegen lassen, daß man nebeneinander die symmetrischen Funktionen der φ und der ψ kennt? Und wird sich danach eine allgemeine Theorie der Gleichungen elften Grades von dem in Betracht kommenden Affekt entwickeln lassen nach dem Muster der Gordanschen Theorie der Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen?

3. *Die Resolventen zwölften Grades.* Ich habe in der Note Nr. LXXXV die einfachste formentheoretische Gestalt der Resolvente zwölften Grades (Multiplikator-

[24]) Es versteht sich, daß man auch daran denken wird, die formentheoretische Resolvente zwölften Grades, die ich Multiplikatorgleichung erster Stufe zu nennen pflege, in entsprechender Weise zu verallgemeinern und zu dem „allgemeinen" Problem der A in Beziehung zu setzen, womit eine Theorie der Jacobischen Gleichungen zwölften Grades begründet würde.

gleichung erster Stufe) hergestellt. Fricke hat aber in Bd. 2 der „Modulfunktionen", S. 440[25]) auch die funktionentheoretische Gestalt der Resolvente zwölften Grades vollständig entwickeln können, wobei sein Resultat nach Auspotenzierung der Klammerausdrücke mit den Formeln übereinstimmt, die Kiepert in Bd. 32 der Math. Annalen (1887/88), S. 97 mitgeteilt hat. Wie auf S. 35 des vorliegenden Bandes angegeben, erhält das Fundamentalpolygon für die Transformation elfter Ordnung das Geschlecht $p = 1$, läßt sich also zweiblättrig über einer komplexen Ebene ausbreiten. Der allgemeine Ansatz, den nun Fricke hier und in zahlreichen höheren Fällen, in denen das Fundamentalpolygon hyperelliptisch ist, verfolgt[26]), besteht darin, daß man zunächst auf das Klassenpolygon (vgl. Fußnote [18]) auf S. 35/36 in diesem Bande) zurückgreift, für welches in den genannten Fällen $p = 0$ wird[27]), und sich eine einwertige Funktion τ des Klassenpolygons verschafft. Zu jedem Werte von τ gehören dann noch zwei Stellen des Fundamentalpolygons, die am einfachsten durch das Vorzeichen einer zweiten Funktion τ' unterschieden werden, für die man etwa die folgende wählen mag:

$$\tau'^2 = (\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2) \ldots (\tau - \tau_k),$$

unter $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ die Verzweigungsstellen verstanden, welche das Fundamentalpolygon in bezug auf die das Klassenpolygon abbildende komplexe τ Ebene besitzt. Nunmehr drückt sich die Transformation n-ter Ordnung durch ein Gleichungssystem aus:

$$\begin{aligned} J\ : J\ - 1 : 1 &= G_1(\tau, \tau')\ \ : G_2(\tau, \tau')\ \ : G_3(\tau, \tau') \\ J' : J' = 1 : 1 &= G_1(\tau, -\tau') : G_2(\tau, -\tau') : G_3(\tau, -\tau'). \end{aligned}$$

Hier bedeutet J' den transformierten Wert von J, und G_1, G_2, G_3 sind ganze rationale Funktionen der beigefügten Argumente, auf deren Bestimmung die Aufgabe der Transformation jetzt hinausläuft. In unserem Falle $n = 11$ findet Fricke:

$$\tau'^2 = 1 - 20\,\tau + 56\,\tau^2 - 44\,\tau^3,$$

$$\begin{aligned} J : J - 1 : 1 = {} & [2^5 \cdot 11 \cdot \tau^2 - 2^4 \cdot 23 \cdot \tau + 61 - 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \tau']^3 \\ & : [7\,(2^3 \cdot 11^2 \cdot \tau^3 - 2^6 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \tau^2 + 2^4 \cdot 3 \cdot 23\,\tau - 5 \cdot 19) \\ & \qquad - 2 \cdot 3^2 \cdot \tau'(2^3 \cdot 11 \cdot \tau - 37)]^2 \\ & : 2^4 \cdot 3^3 \cdot \tau\,[2^3 \cdot 11 \cdot \tau^2 - 3 \cdot 7 \cdot \tau + 1 - \tau'(11\,\tau - 1)]^2; \end{aligned}$$

J' entsteht hieraus durch Zeichenwechsel von τ'.

4. *Die Integrale elfter Stufe.* Ebenso wie die zu dem Fundamentalpolygon siebenter Stufe gehörigen überall endlichen Integrale hat Hurwitz auch die zur elften Stufe gehörigen untersucht (Sächs. Berichte, Bd. 36 (1884)). Die Einzelheiten möge man in den „Modulfunktionen", Bd. 2, Abschnitt VI nachlesen, wo sie ausführlich zur Darstellung gelangt sind.

5. *Die Doppelkurve der Hesseschen Fläche.* Während der Korrektur erhalte ich von Herrn Segre aus Turin die Mitteilung (datiert vom 11. Nov. 1922), daß einer seiner Schüler, der auf seine Veranlassung die auf S. 153 in einem Spezialfall behandelte Frage nach dem Geschlecht der Doppelkurve der Hesseschen Fläche einer algebraischen Fläche im vierdimensionalen Raum untersucht hat, zu folgendem allgemeinen Resultat gelangt ist: Setzt man eine symmetrische fünfreihige Determinante, deren Elemente Formen m-ten Grades sind, gleich Null, so enthält die hierdurch definierte algebraische Fläche eine Doppelkurve von der Ordnung $20\,m^2$ und vom Geschlechte $75\,m^4 - 50\,m^3 + 1$. Für $m = 1$ ergeben sich in der Tat, wie im Texte, die Zahlen 20 und 26. K.]

---

[25]) und schon vorher in Bd. 40 der Math. Annalen (1891/92), S. 485.

[26]) Die betreffende Theorie ist unter Durchführung zahlreicher Beispiele, namentlich auch in Bd. 2 des neuen Frickeschen Lehrbuches, auseinandergesetzt.

[27]) Bis zum Transformationsgrade $n = 72$ findet Fricke Klassenpolygone vom Geschlechte Null in folgenden 36 Fällen:
$n = 2, 3, \ldots, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 35, 36, 39, 41, 47, 49, 50, 71.$
(Vgl. das eben genannte Lehrbuch, Bd. 2, S. 367.)

LXXXVII. Zur [Systematik der] Theorie der elliptischen Modulfunktionen[1]).

[Zuerst erschienen in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu München, Sitzung vom 6. Dezember 1879; wieder abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 17 (1880/81).]

Durch eine Reihe von Arbeiten, die im 14. und 15. Bande der Math. Annalen veröffentlicht [und in diesem Bande vorstehend abgedruckt] sind, bin ich allmählich zu einer allgemeinen und im wesentlichen neuen Auffassung der elliptischen Modulfunktionen geführt worden. Indem ich im folgenden einige auf diese Auffassung bezüglichen Ideen entwickele, ist meine besondere Absicht, zu zeigen, daß die verschiedenen Formen, welche man den Modulargleichungen erteilt hat und die in gewissermaßen verwirrender Mannigfaltigkeit bisher unvermittelt nebeneinander standen, sich einem einfachen, allgemeinen Prinzipe als sehr spezielle Fälle einordnen.

§ 1.

Allgemeines über elliptische Modulfunktionen.

Die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, wie ich sie auffasse, hat es mit *allen* solchen eindeutigen Funktionen einer Variablen ω zu tun, welche gegenüber ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante Eins:

$$\omega' = \frac{\alpha\,\omega + \beta}{\gamma\,\omega + \delta}$$

ungeändert bleiben. Diese Substitutionen brauchen im einzelnen Falle die Gesamtheit aller ganzzahligen Substitutionen dieser Art durchaus nicht zu erschöpfen; sie bilden also, allgemein zu reden, eine in der

---

[1]) [Wie schon in den Vorbemerkungen erwähnt, ist die im folgenden entworfene Disposition den „Modulfunktionen" zugrunde gelegt. Dementsprechend dürfte ein ständiger Vergleich mit diesem Werke für das Lesen der vorliegenden Note besonders empfehlenswert sein. — Eigentümlicherweise finden in der vorliegenden Note nur die *Modulfunktionen*, nicht aber die *Modulformen* eine systematische Behandlung. Ich habe diese Lücke zu Beginn des unten abgedruckten Referates Nr. XCII ergänzt. K.]

Gesamtheit enthaltene *Untergruppe*. Daher scheint es mir ein erster wichtiger Schritt zu einem planmäßigen Studium der elliptischen Modulfunktionen zu sein, daß man alle in der erwähnten Gesamtheit enthaltenen Untergruppen aufstellt und nach sachgemäßen Rücksichten klassifiziert. Meine heutige Darlegung soll sich, soweit sie sich auf derartige allgemeine Fragen bezieht, auf die Besprechung einiger Klassifikationsprinzipien und der aus ihnen hervorgehenden funktionentheoretischen Folgerungen beschränken. Ich nehme dabei an, was freilich eine große Beschränkung ist, daß die in Betracht kommenden Untergruppen einen *endlichen* Index haben, d. h. daß sie einen endlichen Teil der Gesamtheit aller ω-Substitutionen umfassen.

Zuvörderst ist ersichtlich, daß alle die Gesichtspunkte, die man, seit Galois, bei endlichen Gruppen von Transformationen kennt, auch bei unendlichen Gruppen, und somit bei der Gruppe aller ω-Substitutionen, ihre Bedeutung behalten. Ich spreche demnach von *ausgezeichneten* Untergruppen, indem ich darunter solche verstehe, die mit der Gesamtheit aller ω-Substitutionen vertauschbar sind, — oder auch von *relativ ausgezeichneten* Untergruppen, die, in einer umfassenderen Untergruppe enthalten, sich wenigstens mit den Substitutionen dieser umfassenderen Untergruppe vertauschbar erweisen. Eine leichte Überlegung zeigt, daß in der Tat die Gesamtheit der ω-Substitutionen die verschiedenartigsten ausgezeichneten Untergruppen enthält, daß also die Gesamtheit, um den Galoisschen Ausdruck zu gebrauchen, eine „zusammengesetzte" und sogar eine höchst zusammengesetzte Gruppe ausmacht.

Mein *zweites* Klassifikationsprinzip gründet sich auf die *arithmetische* Natur der Substitutionskoeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, welche bei Substitutionen der Untergruppe vorkommen. Es ist dieses Prinzip gewissermaßen ein empirisches. Es hat sich nämlich gezeigt, daß sich die bei einer Untergruppe auftretenden $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in vielen Fällen dadurch charakterisieren lassen, daß man Kongruenzen angibt, denen diese Koeffizienten in bezug auf einen Zahlenmodul m genügen. Ich spreche dann von einer *Kongruenzgruppe*, und zwar *der m-ten Stufe*, sofern m die kleinste Zahl ist, die zur Definition der Untergruppe ausreicht. Aber es muß stark hervorgehoben werden, daß durchaus nicht alle Untergruppen Kongruenzgruppen sind. Die Kongruenzgruppen sind diejenigen, mit denen man sich bisher fast ausschließlich beschäftigt hat; die anderen Gruppen scheinen deshalb nicht weniger interessant; nur sind sie zunächst weniger zugänglich[2]).

[2]) [Zwei Kriterien zur Entscheidung, ob eine vorgelegte Gruppe Kongruenzgruppe ist oder nicht, gab Hurwitz in seiner auf S. 137 des vorliegenden Bandes, Fußnote [2]) genannten Dissertation an. (Vgl. Math. Annalen, Bd. 18 (1881), S. 541.) — Im übrigen sind die Nichtkongruenzgruppen auch heute noch fast gänzlich unerforscht. K.]

Ich komme nun zu meinem dritten, *funktionentheoretischen* Einteilungsprinzipe. Dasselbe dürfte insofern das wichtigste sein, als sich vermöge desselben gewisse Schwierigkeiten, welche sich bisher einem weiteren Fortschritt in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen entgegengestellt hatten, einfach wegheben. — Ich muß dabei auf die bereits zu Eingang dieser Mitteilung zitierten Arbeiten zurückgreifen. Ich zeigte in denselben an verschiedenen Stellen [Abh. LXXXII, S. 35 ff., Abh. LXXXIII, S. 80 ff., usw. im vorliegenden Bande], daß jeder in der Gesamtheit der ω-Substitutionen enthaltenen Untergruppe vom Index μ in der ω-Ebene ein gewisses, noch in vielen Hinsichten willkürliches, *Fundamentalpolygon* entspricht, das aus 2μ, abwechselnd schraffierten und nicht schraffierten, „Elementardreiecken" besteht, und dessen Kanten vermöge der Substitutionen der Untergruppe paarweise zusammengehören[3]). Die geschlossene Fläche, welche durch Vereinigung der zusammengehörigen Kanten des Fundamentalpolygons entsteht, besitzt, im Sinne der Analysis situs, ein gewisses Geschlecht, p, — und der Zahlenwert dieses p, welches ich kurz als *Geschlecht der Untergruppe* bezeichne, ist mein funktionentheoretisches Einteilungsprinzip. Es gilt vor allen Dingen, zu unterscheiden, ob $p = 0$ ist, oder nicht.

An die so exponierte Theorie der Untergruppen schließt sich nun eine Lehre von den *zugehörigen Moduln*, d. h. von solchen *eindeutigen* Funktionen von ω, $M(\omega)$, die bei den Substitutionen der Untergruppe, nicht aber bei anderen Substitutionen ungeändert bleiben. Aus naheliegenden Gründen betrachte ich hier, wo es sich um Untergruppen von endlichem Index handelt, nur solche Moduln, die innerhalb der durch das Fundamentalpolygon definierten geschlossenen Fläche keine Unstetigkeiten höherer Art[4]) besitzen; ich nenne sie *algebraische* Moduln. Hier wird nun sogleich das Geschlecht der Untergruppe von Wichtigkeit.

Ist $p = 0$, so kann man einen zugehörigen algebraischen Modul so wählen, daß er jeden vorgegebenen Wert im Fundamentalpolygon nur einmal annimmt. Ist aber $p > 0$, so muß man, um den einzelnen Punkt des Fundamentalpolygons zu bezeichnen, mindestens zwei Moduln gleichzeitig betrachten, zwischen denen dann eine Gleichung von dem betreffenden p besteht. — Dementsprechend rede ich im ersten Falle von einem *Hauptmodul*, im zweiten von den *Moduln eines vollen Systems*, wobei selbstverständlich ist, daß man, im zweiten Falle, statt zweier

[3]) [Auch diese Behauptung begründete Hurwitz in seiner soeben genannten Arbeit ausführlicher. Vgl. ebenda, S. 537 ff. K.]

[4]) [D. h.: $M(\omega)$ soll sich an jeder Stelle verhalten wie eine algebraische Funktion von J.]

Moduln eventuell eine größere Zahl von Moduln verwerten kann, die dann an eine Reihe algebraischer Identitäten gebunden ist.

Man hat nun sofort folgenden Satz:

Alle zur Untergruppe gehörigen algebraischen Moduln, sowie alle algebraischen Moduln, die einer umfassenderen Untergruppe angehören, drücken sich, für $p = 0$, durch den Hauptmodul, andernfalls durch die Moduln des vollen Systems rational aus.

Dann aber nachstehendes Resultat, vermöge dessen, wie ich schon andeutete, eine vielfach aufgeworfene Frage erledigt wird:

Soll ω' mit ω durch eine Substitution einer vorgelegten Untergruppe zusammenhängen, so ist, falls $p = 0$, nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, daß der Hauptmodul, berechnet für ω, mit dem für ω' berechneten Hauptmodul übereinstimmt. Ist aber $p > 0$, so ist für den gleichen Schluß die Gleichheit aller Moduln eines vollen Systems erforderlich. —

Übrigens spreche ich, den anderen bei den Untergruppen getroffenen Unterscheidungen entsprechend, von *Kongruenzmoduln* (der m-ten Stufe), sowie von *ausgezeichneten Moduln*. Nur bezüglich letzterer sei hier eine Bemerkung gestattet. Wenn die Moduln $M(\omega)$, $M_1(\omega), \ldots$ das volle System einer ausgezeichneten Untergruppe bilden, so drücken sich, wie man sofort sieht, alle Werte $M\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$, $M_1\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right), \ldots$ durch die ursprünglichen Werte rational aus. Nun zeigen die Überlegungen, die ich Math. Annalen, Bd. 15 (1879), S. 251 ff. [= Abh. LVII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 390 ff.] entwickelte, daß man in solchen Fällen $M, M_1, \ldots$ so wählen kann, daß die rationalen Ausdrücke in *lineare* übergehen[5]). Etwas Ähnliches gilt für solche Untergruppen, die nicht schlechthin, sondern nur relativ ausgezeichnet sind. — Eine solche Wahl scheint in vielen Beziehungen zweckmäßig, wie ich noch weiter unten hervorzuheben habe, und in der Tat hat man auch früher, ohne die in Rede stehenden allgemeinen Überlegungen zu haben, ausgezeichnete Moduln, wenn sie auftraten, immer diesem Prinzipe entsprechend gewählt.

Zu den somit zur Sprache gebrachten allgemeinen Definitionen möchte ich hier nur einige wenige Beispiele anführen, indem ich übrigens auf meine anderen neueren Publikationen verweise:

1. Die Theorie der Modulfunktionen bekommt dadurch einen besonders einfachen Charakter, daß die Gesamtheit aller ω-Substitutionen, als Gruppe aufgefaßt, das Geschlecht *Null* besitzt. Deshalb gibt es einen

[5]) [Vgl. „Modulfunktionen", Bd. 1, S. 602 ff.]

Hauptmodul, der allen anderen Moduln übergeordnet ist, *die absolute Invariante J* (Herrn Dedekinds Valenz, vgl. Crelles Journal Bd. 83 (1877)).

2. *Die ν-te Wurzel aus dem Legendreschen $\varkappa^2$, sowie die ν-te Wurzel aus $\varkappa^2\varkappa'^2$ ist für jedes ganzzahlige ν ein Hauptmodul.* Eine naheliegende Frage ist die, weshalb in der bisher üblichen Theorie von diesen Moduln nur eine kleine Zahl auftrat, nämlich $\varkappa^2$, $\varkappa$, $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\varkappa^2\varkappa'^2$, $\varkappa\varkappa'$, $\sqrt{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[3]{\varkappa^2\varkappa'^2}$, $\sqrt[3]{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[6]{\varkappa\varkappa'}$, $\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}$. Die Antwort ist, daß unter allen Moduln $\sqrt[\nu]{\varkappa^2}$, $\sqrt[\nu]{\varkappa^2\varkappa'^2}$ *nur diese* Kongruenzmoduln sind[6]).

3. Als einen Hauptmodul fünfter Stufe und zugleich als einen „ausgezeichneten" Modul, der sich bei beliebigen ω-Substitutionen linear transformiert, bringe ich hier die *Ikosaederirrationalität* η in Erinnerung (dieser Band, S. 62). Desgleichen als volle Systeme ausgezeichneter Moduln von der siebenten Stufe (die auch nach dem Prinzip der linearen Transformation gewählt sind): einmal die drei Verhältnisgrößen $\lambda : \mu : \nu$ (dieser Band, S. 118), zwischen denen die Gleichung besteht:

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0,$$

dann die vier Verhältnisgrößen $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ (Math. Annalen, Bd. 15 (1879), S. 268 [= Abh. LVII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 408]), für die man folgende Relationen hat:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_0 & -x_2\sqrt{2} & 0 \\ x_2 & 0 & x_0 & -x_3\sqrt{2} \\ x_3 & -x_1\sqrt{2} & 0 & x_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Das zugehörige Geschlecht ist gleich drei.

§ 2.

Anwendung auf die Transformationstheorie.

Unter *Transformation n-ter Ordnung* sei der Übergang von ω zu $\omega' = \frac{\omega}{n}$ verstanden, oder, was noch vorteilhafter ist, weil es die Umkehrbarkeit der in Betracht kommenden Operation deutlicher hervortreten läßt, der Übergang von ω zu $\omega' = -\frac{n}{\omega}$. Dann ist das allgemeinste Problem, welches man aufstellen mag, dieses:

Man soll alle algebraischen Gleichungen angeben, die, einem solchen Übergange entsprechend, zwischen irgendwie gegebenen algebraischen Moduln und ihren transformierten Werten statthaben.

[6]) [Beweise für die Behauptung des Textes veröffentlichten gleichzeitig Fricke und Pick, beide in den Math. Annalen, Bd. 28 (1886/87). Vgl. auch „Modulfunktionen", Bd. 1, S. 656 ff. K.]

Es ist nun keineswegs meine Absicht, dies Problem in voller Allgemeinheit hier zu behandeln. Vielmehr genügt mir ein viel bescheideneres Ziel. Ich erinnere zunächst an die Gleichungen, welche zwischen $J(\omega)$ und $J(\omega') = J'$ bestehen und die man als Prototyp aller Modulargleichungen erachten kann. Sodann wünsche ich zu zeigen, *daß es unendlich viele von vornherein erkennbare Fälle gibt, in denen Gleichungssysteme auftreten, welche mit den zwischen J und J' bestehenden Transformationsgleichungen in allen wesentlichen Eigenschaften übereinstimmen.* — Als wesentlich erachte ich dabei den *Grad* der Gleichung, ihre *Galoissche Gruppe* und die *Vertauschbarkeit* der in ihr auftretenden Argumente.

Den eigentlichen Kern meiner bez. Überlegung bildet ein gruppentheoretischer Satz, der als selbstverständlich gelten kann. Es handelt sich darum, einzusehen, daß zwei Untergruppen m-ter und n-ter Stufe, *sobald m und n teilerfremd sind*, eine Untergruppe $m \cdot n$-ter Stufe gemein haben, die innerhalb der Gruppe m-ter Stufe dieselbe Stellung einnimmt wie die Gruppe n-ter Stufe innerhalb der Gesamtheit der ω-Substitutionen. Und dies folgt einfach daraus, daß irgendwelche Kongruenzen, denen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ modulo m unterworfen sein mögen, mit anderen Kongruenzen, denen dieselben Zahlen modulo n genügen sollen, in keiner Weise kollidieren können, sobald m und n, wie vorausgesetzt, relativ prim sind.

Auf Grund dieser Anschauung prüfe man jetzt die Schlüsse, welche zur Existenz der zwischen J und J' bestehenden Transformationsgleichung und ihren Eigenschaften hinleiten[7]). Man sieht dann sofort, daß der *gruppentheoretische* Teil derselben ungeändert bleibt, wenn man an die Stelle der Gesamtheit der ω-Substitutionen irgendeine Untergruppe m-ter Stufe setzt, sofern m zum Transformationsgrade n relativ prim ist. — Und nun handelt es sich, will man zu meinem allgemeinen Satze kommen, nur noch darum, dies gruppentheoretische Resultat funktionentheoretisch zu interpretieren. Offenbar muß man, dem Obigen zufolge, unterscheiden, ob das *Geschlecht* der Untergruppe m-ter Stufe gleich Null ist oder nicht. Im ersteren Falle kann man auch funktionentheoretisch so weiter schließen, wie man es bei der absoluten Invariante J tat; nur tritt an die Stelle von J der betr. *Hauptmodul.* Wir haben dann folgenden ersten Satz:

Ist M ein Hauptmodul m-ter Stufe, so bestehen für alle Transformationsgrade n, die zu m relativ prim sind, zwischen $M(\omega) = M$ und $M\left(-\frac{n}{\omega}\right) = M'$ Gleichungen, die nach Grad, Galoisscher Gruppe und Vertauschbarkeit der Argumente mit den zwischen J und J' bestehenden Transformationsgleichungen übereinstimmen.

[7]) Man kann diese Schlüsse sehr knapp zusammenziehen, so daß gar keine Rechnung mehr erforderlich ist. Vgl. die Darstellung bei Dedekind, Crelles Journal Bd. 83 (1877), wo indes die Galoissche Gruppe nicht bestimmt wird.

Im zweiten Falle bedarf das Schlußverfahren einer Modifikation, die aber, nach dem Vorausgegangenen, nicht mehr schwer zu finden ist. Statt der *einen* Invariante J muß man jetzt *sämtliche* Moduln $M, M_1, \ldots$ eines vollen Systems gleichzeitig betrachten. Zwischen den *Wertsystemen* $M(\omega) = M,\ M_1(\omega) = M_1, \ldots$ und $M\left(-\frac{n}{\omega}\right) = M'$, $M_1\left(-\frac{n}{\omega}\right) = M_1', \ldots$ findet jetzt ein Entsprechen statt, das dem zwischen J und J' durchaus analog ist. Man hat also statt einer Gleichung zwischen zwei Größen das, was die Geometer eine „*Korrespondenz*" nennen, und zwar eine Korrespondenz auf einer „*Kurve vom Geschlechte p*".

Grad und Galoissche Gruppe dieser Korrespondenz sind wieder dieselben, wie bei der zwischen J und J' bestehenden Gleichung; auch ist die Korrespondenz, wie jene Gleichung, in den zweierlei in Betracht kommenden Argumenten symmetrisch.

Es ist kein Grund vorhanden, derartige Korrespondenzen nicht ebenso in Betracht zu ziehen, wie jene Gleichungen; *wir haben also schließlich für jeden Transformationsgrad n unendlich viele Gleichungssysteme, die sämtlich als Modulargleichungen bezeichnet werden können;* und dies ist der Satz, um dessen Ableitung es sich bei der heutigen Gelegenheit handelte[8]).

Daß sich nun, wie in der Einleitung bemerkt, sämtliche bisher aufgestellten Modulargleichungen in das so gewonnene allgemeine Schema als sehr spezielle Fälle einordnen, ist leicht zu sehen[9]); ein spezieller

[8]) [Daß Hurwitz die hier besprochenen Untersuchungen später sehr viel weiter geführt hat, wurde in den Vorbemerkungen (S. 6) hervorgehoben. Die genauen Zitate sind:

Zur Theorie der Modulargleichungen, Gött. Nachrichten 1883, S. 350.

Über Relationen zwischen den Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante, Math. Annalen, Bd. 25 (1884/85).

Über Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante, Sächsische Berichte, Bd. 36 (1884). (Von der vorigen Arbeit verschieden.)

Über Klassenzahlrelationen und Modularkorrespondenzen primzahliger Stufe, Sächsische Berichte, Bd. 37 (1885).

Über algebraische Korrespondenzen und das verallgemeinerte Korresondenzprinzip, Sächsische Berichte, Bd. 38 (1886), wiederabgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 28 (1887). K.]

[9]) Ich betone ausdrücklich, daß es sich im Texte nur um *Modular*gleichungen handelt (bei denen Vertauschbarkeit der Argumente statthat), nicht aber um *Multiplikator*gleichungen oder andere verwandte Gleichungen, [wie sie in den vorangehenden Aufsätzen vorkommen. Für die allgemeine Begriffsbestimmung der „Multiplikatorgleichungen" vergl. S. 278 in Nr. XCII des vorliegenden Bandes].

Nachweis würde hier zu weit führen. Ich erinnere nur an die Jacobi-Sohnkesche Modulargleichungen für $\sqrt[4]{\varkappa}$, an die Schröterschen Modulargleichungen in irrationaler Form, usw. [oder auch an die von Joubert[10]) betrachteten Modulargleichungen für $\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'}$ und diejenigen von Schläfli[11]) für $\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}$, auf die Weber in seinem Lehrbuche der elliptischen Funktionen fortgesetzt Bezug nimmt.] Dabei ist freilich eine gewisse Kritik nötig, sobald es sich um Korrespondenzen handelt. Natürlich muß man bei einer solchen Korrespondenz immer den zwischen $M, M_1, \ldots$ einerseits, und den zwischen $M', M_1', \ldots$ andererseits bestehenden Identitäten Rechnung tragen. Aber auch dann wird die Korrespondenz nicht immer durch *eine* Gleichung zwischen den $M, M_1, \ldots$ und den $M', M_1', \ldots$ definiert sein. Hat man also durch irgendeine Methode *eine* solche Gleichung gefunden, so bleibt zu untersuchen, ob sie zur vollen Definition der gewollten Korrespondenz ausreicht, und wenn es nicht der Fall ist, so muß man eben noch weitere Relationen zwischen den M, M' aufsuchen[12]). —

Noch folgende Bemerkung möge hier eine Stelle finden. Es sollen die Moduln $M, M_1, \ldots$ der m-ten Stufe *ausgezeichnet* und dabei so gewählt sein, daß sie sich bei beliebiger ω-Substitution linear transformieren. Dann sieht man leicht, daß die zwischen den M und M' bestehenden Relationen bei gewissen *simultanen* linearen Transformationen der M, M' ungeändert bleiben müssen. Handelt es sich also darum, die fraglichen Relationen explizite herzustellen, so kann es vorteilhaft sein, vorher alle von M, M' abhängenden Ausdrücke zu bilden, die diese Eigenschaft der

[10]) [*Sur diverses équations analogues aux équations modulaires*, Comptes rendus, Bd. 47 (1858).]

[11]) [Beiläufig in der Note: *Beweis der Hermitesche Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunktionen*, Crelles Journal, Bd. 72 (1870), S. 364.]

[12]) Herr Stud. Hurwitz, der mich bei solchen Untersuchungen unterstützte, wurde dabei für den 23. und 47. Transformationsgrad zu folgenden eleganten Gleichungen geführt:

$$\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} + \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} = 1,$$

$$\left[2\left(\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} + 1\right) + \sqrt[3]{4}\,\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}\right]^2 = 8\left(\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} + 1\right) - 7\sqrt[3]{16}\,\sqrt[6]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}.$$

Hier bedeuten λ, λ' in der üblichen Weise die transformierten Werte von $\varkappa, \varkappa'$. Das volle System der in Betracht kommenden Moduln ist durch

$$\sqrt[4]{\varkappa},\ \sqrt[4]{\varkappa'},\ \sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}$$

gegeben, zwischen denen folgende Identitäten bestehen:

$$\left(\sqrt[4]{\varkappa}\right)^8 + \left(\sqrt[4]{\varkappa'}\right)^8 = 1,\quad \left(\sqrt[12]{\varkappa\varkappa'}\right)^3 = \sqrt[4]{\varkappa}\cdot\sqrt[4]{\varkappa'};$$

die zugehörige Untergruppe ist von der 48. Stufe. — Jede der beiden angegebenen Gleichungen stellt die bei ihr in Betracht kommende Korrespondenz rein dar. [Bei dem Wiederabdruck wurde die zweite Formel auf Grund einer brieflichen Mitteilung von Hurwitz an mich vom Oktober 1883 berichtigt. K.]

Unveränderlichkeit besitzen. Eine solche Untersuchung, die der *linearen Invariantentheorie*[13]) angehört, kann z. B. mit Nutzen bei den gewöhnlich betrachteten, zwischen $\varkappa^2$ und λ^2 bestehenden Gleichungen durchgeführt werden[14]). Ich habe denselben Gedanken bereits früher (Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXII in diesem Bande, S. 67—69]) benutzt, um für die niedrigsten Transformationsgrade die *Ikosaedermodulargleichungen* ohne weiteres hinzuschreiben. Ich habe ihn neuerdings herangezogen, um wenigstens einige Modularkorrespondenzen der *siebenten Stufe* zu bilden. Die Moduln, welche ich dabei verwende, und die zwischen ihnen bestehenden identischen Relationen wurden bereits oben genannt. Ich kann also sofort die Resultate anführen, was nunmehr zum Schlusse geschehen mag. Es sind folgende:

1. *Für $n = 3$ und $n = 5$ erhält man nachstehende einfache lineare Gleichungen, deren jede zur Definition der bei ihr in Betracht kommenden Korrespondenz ausreicht:*

$$\lambda'\lambda + \mu'\mu + \nu'\nu = 0, \quad {}^{15})$$

$$x_0'x_0 + x_1'x_1 + x_2'x_2 + x_3'x_3 = 0.$$

2. *Die Modularkorrespondenz für $n = 2$ wird durch irgend zwei der folgenden drei Gleichungen völlig definiert:*

$$x_0'x_1 + x_1'x_0 - \sqrt{2}\cdot x_2'x_2 = 0,$$
$$x_0'x_2 + x_2'x_0 - \sqrt{2}\cdot x_3'x_3 = 0,$$
$$x_0'x_3 + x_3'x_0 - \sqrt{2}\cdot x_1'x_1 = 0. \quad {}^{16})$$

[13]) Natürlich gilt etwas Ähnliches in beschränkterem Sinne, wenn es sich nicht um ausgezeichnete Moduln schlechthin, sondern um „relativ ausgezeichnete" Moduln handelt. Hierher gehören z. B. die bekannten Regeln, welche die Art der Glieder bestimmen, die in den zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\lambda}$ bestehenden Gleichungen auftreten.

[14]) [Vgl. des weiteren auch die unten abgedruckten Referate Nr. XCI und Nr. XCII.]

[15]) Diese Gleichung stellt sich vermöge ihrer dreigliedrigen Form unmittelbar neben die bekannten Formen:

$$\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} = 1,\quad \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} = 1,$$

die Legendre für den dritten Grad und Gützlaff für den siebenten Grad gewonnen haben.

[16]) [Vielleicht hat die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen einiges Interesse. Die Kurve

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_0 & -x_2\sqrt{2} & 0 \\ x_2 & 0 & x_0 & -x_3\sqrt{2} \\ x_3 & -x_1\sqrt{2} & 0 & x_0 \end{vmatrix} = 0$$

3. *Für $n = 4$ bekommt man das einfachste*[17]) *Resultat, wenn man die $\lambda : \mu : \nu$ heranzieht. Die Korrespondenz ist dann nämlich durch die eine Formel gegeben:*

$$(\lambda'^2 \cdot \lambda\mu + \mu'^2 \cdot \mu\nu + \nu'^2 \cdot \nu\lambda) + (\lambda^2 \cdot \lambda'\mu' + \mu^2 \cdot \mu'\nu' + \nu^2 \cdot \nu'\lambda') = 0,$$

sofern ausdrücklich festgesetzt wird, daß man von der evidenten (doppeltzählenden) Lösung

$$\lambda' : \mu' : \nu' = \lambda : \mu : \nu$$

absehen soll.

München, im November 1879.

---

ist die Hessesche Kegelspitzenkurve für das Netz von Flächen zweiter Ordnung durch die acht Grundpunkte

$$\Pi_\infty = -\sqrt{-7}\, u_0 = 0$$
$$\Pi_\nu = \quad u_0 + \sqrt{2}\,(\gamma^{6\nu} u_1 + \gamma^{3\nu} u_2 + \gamma^{5\nu} u_3) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, 6).$$

(Vgl. Math. Annalen, Bd. 15 (1879), S. 270 = Abh. LVII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 410.) Diese Kurve ist also von der sechsten Ordnung, hat das Geschlecht $p = 3$, und ihre dreifachen Sekanten bilden, wie M. Noether gezeigt hat (Math. Annalen, Bd. 3 (1870/71), S. 555), eine Linienfläche achter Ordnung, auf der sie selbst als dreifache Kurve gelegen ist. Eben diese Linienfläche wird durch die drei Gleichungen des Textes definiert und auf die Kurve sechster Ordnung eindeutig bezogen, indem durch die Korrespondenz jedem auf der Kurve gelegenen Punkte $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ eine bestimmte dreifache Sekante zugeordnet wird, die auf der Kurve gerade die drei gesuchten Punkte $x_0' : x_1' : x_2' : x_3'$ ausschneidet. K.]

[17]) Ich hatte zunächst nur mit den $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ operiert; das Resultat, wie es im Texte mitgeteilt ist, rührt von Herrn Hurwitz her.

LXXXVIII. Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung.

[Zuerst erschienen in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu München, Sitzung vom 3. Juli 1880; wie der abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 17 (1880/81).]

Der Hauptgesichtspunkt, mit dem ich bisher in der Theorie der elliptischen Funktionen gearbeitet habe, läßt sich mit zwei Worten kennzeichnen. Ich wünschte, dem Legendreschen Modul $\varkappa^2$ nicht diejenige Alleinherrschaft zu lassen, welche er bisher fast unbestritten besaß. Einmal muß er in manchem Betracht, wie dies bereits die Weierstrassischen Vorlesungen gezeigt haben, hinter der rationalen Invariante J zurücktreten, andererseits aber bildet er als *Modul zweiter Stufe* das Anfangsglied einer unendlichen Kette von Moduln, die alle in vieler Hinsicht gleichberechtigt sind und eine gleichmäßige Berücksichtigung verlangen. In meiner ersten der K. Akademie vorgelegten Arbeit[1]) zeigte ich in diesem Sinne, daß sich der Begriff der Modulargleichungen wesentlich erweitern lasse. Herr Gierster publizierte im Anschlusse hieran eine Untersuchung[2]), derzufolge die neuen Modulargleichungen für zahlentheoretische Zwecke [nämlich die Aufstellung von Klassenzahlrelationen höherer Stufe] ebenso mit Nutzen verwertet werden können, wie die früheren. Ich wünsche heute denselben Grundgedanken, allerdings nur in allgemeinen Zügen, nach einer dritten Richtung auszuführen, indem ich nicht nur, wie bisher, Modulfunktionen (von ω_1, ω_2), sondern doppeltperiodische Funktionen (von u, ω_1, ω_2) in Betracht ziehe. Als einfachste Gestalt des elliptischen Integrals erster Gattung wählt man zumeist die Normalform[3]):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot \overline{1-x} \cdot \overline{1-\varkappa^2 x}}}.$$

---

[1]) Sitzungsbericht vom 6. Dez. 1879. [Vgl. die vorstehend abgedruckte Arbeit Nr. LXXXVII.]

[2]) Sitzungsbericht vom 5. Febr. 1880 (abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 17, S. 74 ff.)

[3]) Daß man im Anschlusse an die gewöhnliche Behandlungsweise diese Form und nicht die aus ihr durch quadratische Transformation hervorgehende Legendresche

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\overline{1-x^2} \cdot \overline{1-\varkappa^2 x^2}}}$$

Ich beabsichtige zu zeigen, *daß ebenso einfache Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung existieren, in denen die Moduln dritter, vierter, fünfter usw. Stufe als Konstante auftreten, so daß also die vorstehende Form nicht als Normalform schlechthin, sondern nur als solche zweiter Stufe erscheint, an die sich, den unendlich vielen Werten von n entsprechend, unendlich viele Normalformen n-ter Stufe anreihen.* Dabei möchte ich späteren Untersuchungen vorbehalten, zu beweisen, daß sich an jede dieser Normalformen in vollem Umfange analoge Untersuchungen anknüpfen lassen, wie man solche an die gewöhnliche Form in mannigfachster Weise angeschlossen hat.

Es kann sich bei einer solchen Theorie zuvörderst nicht um neue Tatsachen, sondern nur um neue Auffassung bekannter Tatsachen handeln. In der Tat sind meine ersten Sätze nichts anderes als eine Umstellung der bekannten Hermiteschen Sätze über Θ-Produkte, wobei ich nur äußerlich, im Anschlusse an die Weierstrassischen Vorlesungen, insofern eine Umänderung treffe, als ich statt der Funktion Θ, deren unendlich viele Formen für meine Zwecke gleichberechtigt sein würden, die nur in einer Form existierende Function σ setze.

Man betrachte verschiedene Produkte aus je n Faktoren σ:

$$\sigma(u-a_1)\cdot\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n),$$
$$\sigma(u-b_1)\cdot\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n), \text{ usw.}$$

wo

$$\Sigma a = \Sigma b = \text{usw.}$$

sein soll. Dann behaupten die hier in Betracht kommenden Hermiteschen Sätze: *daß der Quotient je zweier solcher Produkte eine doppeltperiodische Funktion von u ist mit denjenigen Perioden ω_1, ω_2, die bei der Bildung der σ-Funktion benutzt wurden*, sowie: *daß sich alle solche Produkte aus n unabhängigen derselben linear zusammensetzen lassen.* — Ich schreibe nun, indem ich n unabhängige Produkte dieser Art auswähle

als eigentliche Normalform betrachten soll, habe ich u. a. Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXII des vorliegenden Bandes. S. 18/19] auseinandergesetzt. Will man doch an letzterer festhalten, so operiert man, im Sinne der weiteren Auseinandersetzungen des Textes, mit einer Normalform *vierter* Stufe. $\sqrt{\varkappa}$ ist dann die Oktaederirrationalität (Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXII dieses Bandes, S. 59]). [Die Normalform des Textes habe ich später, einem Vorschlage meines damaligen Kollegen Scheibner folgend, als die Riemannsche bezeichnet, weil Riemann sie, ausgehend von seinen allgemeinen Prinzipien für die Behandlung der Integrale algebraischer Funktionen, an die Spitze stellt. Diese Auffassung findet ihre volle Bestätigung in den von Stahl 1899 herausgegebenen Riemannschen Vorlesungen über elliptische Funktionen von 1861/62. Übrigens tritt die Normalform als solche im Grunde auch bei Jacobi auf, jedoch immer nur als Übergangsstadium, weil Jacobi der historischen Kontinuität zuliebe von ihr stets sogleich zu der zuletzt angeschriebenen Form übergeht. Vgl. auch „Modulfunktionen", Bd. 1. S. 24 ff. K.]

und unter $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ homogene Variable, unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstehe:

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho x_0 \;\;= \sigma(u-a_1)\cdot\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n),\\ \varrho x_1 \;\;= \sigma(u-b_1)\cdot\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n),\\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -\\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -\\ \varrho x_{n-1} = \sigma(u-n_1)\cdot\sigma(u-n_2)\ldots\sigma(u-n_n). \end{cases}$$

Die x betrachte ich sodann, des kürzeren Ausdrucks wegen, als Koordinaten eines Punktes des Raumes von $(n-1)$ Dimensionen. In diesem Raume stellen die Formeln (1) eine Kurve dar, die, infolge der voraufgeschickten Sätze, *das Geschlecht* 1 und *die Ordnung* n besitzt. Ich will dieselbe *eine elliptische Kurve der n-ten Stufe* nennen. Man kann die Variable u definieren, indem man sie als Integral an einer solchen Kurve hinerstreckt; ich spreche dann von *einem Integral der n-ten Stufe*[1]).

Die niedrigste in Betracht kommende Stufe ist natürlich die *zweite*, da es keine doppeltperiodischen Funktionen der ersten Stufe gibt. Die zugehörige Kurve ist die gerade Linie $\frac{x_0}{x_1}$ *doppelt überdeckt*, und, wie man leicht sieht, *mit vier Verzweigungspunkten (sommets) versehen.* Das Integral zweiter Stufe ist kein anderes, als dasjenige, welches man gewöhnlich als elliptisches Integral (erster Gattung) schlechthin bezeichnet, nämlich:

$$\int \frac{x_1\,dx_0 - x_0\,dx_1}{\sqrt{f(x_0, x_1)}},$$

wo f irgendeine homogene biquadratische Form von x_0, x_1 bedeutet, die, gleich Null gesetzt, die Lage der Verzweigungspunkte auf $\frac{x_0}{x_1}$ fixiert.

Für die *dritte* Stufe erhält man, wie bekannt, aus (1) die allgemeine Kurve dritter Ordnung der Ebene $x_0 : x_1 : x_2$. Ein Integral dritter Stufe ist also ein solches, welches an einer ebenen Kurve dritter Ordnung hinerstreckt ist. Ich brauche hier nicht noch besonders an die elegante Schreibweise zu erinnern, die Aronhold für solche Integrale eingeführt hat. Nur das will ich betonen, um meiner Grundanschauung wiederholten Ausdruck zu geben, daß ich die Integrale dritter Stufe nicht etwa, wie man dies bisher fast durchgängig tat, auf Integrale zweiter Stufe zurückführen, vielmehr dieselben einer direkten Behandlung unterwerfen will. Dieselbe Bemerkung gilt natürlich hinsichtlich der Integrale der höheren Stufen.

[1]) [Später habe ich diese Benennung unter Festhaltung der Kurve n-ter Ordnung in verändertem Sinne gebraucht und habe seitdem die spätere Anwendungsweise der Benennung beibehalten. Vgl. Abh. XC, S. 201/202 in diesem Bande. K.]

Die Integrale *vierter* Stufe werden sich auf die gewöhnliche Raumkurve vierter Ordnung beziehen, welche der volle Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung ist, die Integrale *fünfter* Stufe auf eine Kurve fünfter Ordnung des Raumes von vier Dimensionen, usw. Was die algebraische Darstellung dieser höheren Kurven angeht, so findet man dieselbe der Art nach ohne weiteres durch den zweiterwähnten Hermiteschen Satz. Aus fünf fünfgliedrigen σ-Produkten: x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 lassen sich $\frac{5\cdot 6}{2} =$ 15 Glieder zweiter Ordnung bilden, deren jedes an 10 Stellen des Periodenparallelogramms gleich Null wird. *Daher bestehen* $15 - 10 = 5$ *quadratische Gleichungen zwischen den* x, *und unsere Kurve erscheint als der Schnitt von fünf richtig gewählten Flächen zweiten Grades des Raumes von vier Dimensionen.* — Ähnlich in allen höheren Fällen.

Alle diese „elliptischen Kurven" besitzen nun in vielfacher Hinsicht analoge Eigenschaften. Sie haben z. B. alle nur zwei rationale Invarianten, die dem g_2 und g_3 des elliptischen Integrals entsprechen. Bei allen gibt es, den berühmten Formeln analog, die Hermite für $n = 2$ [5]) und Brioschi für $n = 3$ [6]) gegeben haben, rationale Multiplikationsformeln vom Grade n^2, die ohne weiteres das an der Kurve hinerstreckte Integral in

$$\frac{1}{n}\int\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

verwandeln, usw. Ich will bei diesen allgemeinen Analogien nicht verweilen, sondern gehe nunmehr sofort zur Besprechung des Hauptpunktes der heutigen Mitteilung über, zur Lehre von den (irrationalen) *Normalformen*, die man den Kurven n-ter Stufe und damit den zugehörigen Integralen erteilen kann.

Das Mittel zur Herstellung dieser Normalformen liegt einfach in einer geeigneten linearen Transformation der x, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in einer geschickten Wahl der Konstante $a_i, b_i \ldots n_i$ in Formel (1). Indem man diese Konstanten gleich n-ten Teilen der Perioden wählt, erreicht man, daß in den algebraischen Gleichungen der Kurve n-ter Stufe, und also auch im zugehörigen Integrale, nur noch wesentliche (invariante, aber irrationale) Konstante vorkommen, *und diese Konstanten erweisen sich dann als Moduln der* n-*ten Stufe.*

Ich kann dies heute nur für die beiden niedrigsten Stufen, die neues bieten, einigermaßen ausführen, nämlich für die *dritte* und die *fünfte* Stufe.

[5]) Crelles Journal Bd. 52, S. 8, (1854) [= Oeuvres mathématiques, tome I., S. 359—360. — Den Zahlenfaktor 2 hat erst Cayley fixiert. Siehe Crelles Journal, Bd. 55 (1856/58) = Collected Math. Papers, vol. IV., S. 69.]

[6]) Crelles Journal, Bd. 63, S. 32—33, (1863) [= Opere matematiche Nr. CCLXII, tomo V., S. 407].

Bei der dritten Stufe handelt es sich darum, die bekannte Theorie der Wendepunkte der ebenen Kurven dritter Ordnung in Beziehung zu der früher von mir entwickelten Theorie der Moduln dritter Stufe (der Tetraederirrationalität) zu setzen. Die fünfte Stufe hat Herr Bianchi in letzter Zeit auf meine Anregung hin untersucht, und es sind wesentlich von ihm gefundene Resultate, die ich im folgenden mitteile. Herr Bianchi wird eine ausführlichere Darlegung dieses Gegenstandes demnächst in den mathematischen Annalen veröffentlichen[7]).

Bei den ebenen Kurven *dritter* Ordnung erinnere ich an die Existenz der vier Wendepunktsdreiecke und an die Normalform, die man, nach Hesse, erhält, wenn man eins der Wendedreiecke als Koordinatendreieck zugrunde legt. Bekanntlich lautet die letztere:

$$(2) \qquad x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + 6\,a\,x_0 x_1 x_2 = 0.$$

Alles, was ich hier hinzufüge, ist, *daß die hier vorkommende Konstante* a *für das an der Kurve dritter Ordnung hinerstreckte Integral die Tetraederirrationalität ist.* In der Tat, man vergleiche die Formel, die etwa in Lindemanns Vorlesungen von Clebsch Bd. 1, S. 569 für den Zusammenhang der Größe a mit der absoluten Invariante $\frac{S^3}{T^2}$ gegeben ist, mit der Gestalt, die ich in den Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXII dieses Bandes, S. 58] der Tetraedergleichung erteilte. Trägt man der Verschiedenheit der angewandten Bezeichnung Rechnung, so sieht man, daß beide Gleichungen genau übereinstimmen.

Man bilde jetzt das zur Kurve (2) gehörige Integral. Dasselbe kann folgende einfache Form annehmen:

$$(3) \qquad \int\frac{x_1\,dx_0 - x_0\,dx_1}{x_2^2 + 2\,a\,x_0 x_1},$$

oder auch eine der beiden anderen Formen, die aus dieser durch zyklische Vertauschung der x_0, x_1, x_2 entstehen. *Hier haben wir nun, was ich als Normalform dritter Stufe bezeichne.* Die in (3) vorkommenden Variablen sind durch die Gleichung (2) verknüpft; aber in beiden Ausdrücken, (2) und (3), kommt nur eine Konstante (ein Modul) vor: die Tetraederirrationalität.

Bei der Normalform *fünfter Stufe*[8]) mußte Herr Bianchi mit der in (1) enthaltenen transzendenten Definition beginnen, da ja die algebraische Definition der Kurve erst zu finden ist. Übrigens erkennt man so-

[7]) [Siehe Math. Annalen, Bd. 17 (1880/81), S. 234—262.]

[8]) [Die vierte Stufe behandelte E. Lange in einer Leipziger Dissertation (1881) *Über die 16 Wendeberührungspunkte der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies.* (Abgedruckt in Schlömilchs Zeitschrift, Bd. 28 (1883).) K.]

fort, daß die Kurve fünfter Stufe, den neun Wendepunkten der Kurve dritter Ordnung entsprechend, 25 singuläre Punkte besitzt, in denen je eine Ebene fünfpunktig schneidet. Diese 25 Punkte liegen sehr oft zu je 5 in einer Ebene, und aus diesen Ebenen lassen sich, den vier Wendedreiecken der ebenen Kurve dritter Ordnung entsprechend, insbesondere *sechs ausgezeichnete Pentaeder* zusammensetzen. Legt man eins derselben als Koordinatenpentaeder zugrunde, so erhält unsere Kurve, nach kurzen Zwischenüberlegungen, schließlich folgende fünf Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \varphi_0 = x_0^2 + a x_2 x_3 - \frac{1}{a} x_1 x_4 = 0, \\ \varphi_1 = x_1^2 + a x_3 x_4 - \frac{1}{a} x_2 x_0 = 0, \\ \varphi_2 = x_2^2 + a x_4 x_0 - \frac{1}{a} x_3 x_1 = 0, \\ \varphi_3 = x_3^2 + a x_0 x_1 - \frac{1}{a} x_4 x_2 = 0, \\ \varphi_4 = x_4^2 + a x_1 x_2 - \frac{1}{a} x_0 x_3 = 0. \end{cases}$$

Hier kommt wieder nur *eine* Konstante a vor und diese Konstante a erweist sich als identisch mit der *Ikosaederirrationalität*, wie ich sie immer verwandt habe.

Um jetzt das Integral fünfter Stufe aufzustellen, haben wir uns nur noch Rechenschaft zu geben, welche Kurve dritter Ordnung irgend drei der Flächen φ (4) noch außer der von uns in Betracht zu ziehenden Kurve fünfter Ordnung gemein haben. Man findet, daß dies eine ebene Kurve ist, die z. B. für die drei Flächen φ_0, φ_1, φ_2 in der Ebene $x_1 = 0$ enthalten ist. Hiernach hat man für das an der Kurve hinerstreckte Integral nach bekannten Regeln (vgl. M. Noether, Math. Annalen, Bd. 8, (1875), S. 510), unter u_x, v_x irgend zwei lineare Ausdrücke, unter C eine willkürliche Konstante verstanden:

$$(5) \qquad C \int \frac{(v_x\, du_x - u_x\, dv_x) \cdot x_1}{|\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 u_x v_x|}.$$

Der im Nenner stehende Ausdruck bedeutet dabei die Funktionaldeterminante der hingeschriebenen Funktionen.

Die so- gewonnene Formel läßt sich aber noch in doppelter Weise vereinfachen. Einmal kann man, wie selbstverständlich, die linearen Ausdrücke u_x, v_x beliebig spezialisieren und also z. B. mit irgend zwei der x zusammenfallen lassen. Dann aber gelingt es, vermöge der Gleichungen $\varphi = 0$, die im Nenner stehende Funktionaldeterminante durch das x_1 des Zählers zu dividieren (wie dies a priori aus dem Abelschen Theoreme erschlossen werden kann). Man erhält so schließlich, wenn man die Konstante C benutzt, um unnötige Faktoren zu entfernen, *zehn unter sich*

gleichwertige einfachste Schreibweisen für unser Integral. Zwei derselben sind diese:

$$(6) \qquad \int \frac{x_1\, dx_0 - x_0\, dx_1}{5a^3 x_2 x_4 - (2a^3 + 1) x_0 x_1} = \int \frac{x_2\, dx_0 - x_0\, dx_2}{5a^2 x_3 x_4 - (2 - a^5) x_0 x_2},$$

und die übrigen acht ergeben sich aus diesen zwei durch zyklische Vertauschung der x. [9])

[9]) Es ist mir neuerdings gelungen, die im Texte berührten Resultate wesentlich zu verallgemeinern. [Siehe Abh. LXXXIX, besonders Fußnote [12]) auf S. 190.] Hierdurch werden meine früheren Entwicklungen über Transformation siebenter und elfter Ordnung (Math. Annalen, Bde. 14 u. 15 (1878/79) [= Abh. LXXXIV u. LXXXVI in diesem Bande]) ganz ebenso an die gewöhnliche Theorie der doppeltperiodischen Funktionen angeschlossen, wie dies hinsichtlich meiner Behandlung der Transformation fünfter Ordnung durch Herrn Bianchi geschehen ist. (Zusatz bei der ursprünglichen Korrektur, Ende August 1880.)

LXXXIX. Über gewisse Teilwerte der Θ-Funktion.

[Math. Annalen, Bd. 17 (1881).]

Bei meinen Untersuchungen über Transformation fünfter, siebenter und elfter Ordnung der elliptischen Funktionen, die ich (1878/79) im 14. und 15. Bande der Math. Annalen [= Abh. LXXXII, LXXXIV und LXXXVI im vorliegenden Bande] publiziert habe, bediente ich mich als geeigneter Moduln gewisser Systeme von Verhältnisgrößen, deren Existenz und Eigenart ich durch geometrisch-funktionentheoretische Methoden erschloß. Beim jetzigen Stande unserer Kenntnisse liegt es in der Natur dieser Methoden, nur auf die allerniedersten Fälle anwendbar zu sein. Wollte ich also meine Resultate auf den Fall eines beliebigen Transformationsgrades n ausdehnen, so mußte ich dieselben mit der gewöhnlichen Theorie der ϑ-Funktionen in möglichst unmittelbaren Zusammenhang zu bringen suchen. Dies gelingt in der Tat, wie ich zeigen werde, in äußerst einfacher Weise. *Die von mir benutzten Verhältnisgrößen sind geradezu gewissen Teilwerten der Funktion $\vartheta_1(x, q)$ proportional*[1], *und man kann aus den gewöhnlichen Reihenentwicklungen der ϑ-Funktionen mit leichter Mühe für beliebiges ungerades n Resultate ableiten, welche die früher von mir gefundenen als besondere Fälle einschließen.*

Ich erachte die früheren Betrachtungen darum nicht für überflüssig. Denn abgesehen von dem Interesse, das solchen direkten Überlegungen in allen Fällen innewohnt, haben sie erst auf den Weg gewiesen, der meiner Meinung nach allgemein zweckmäßigerweise einzuschlagen ist. Indem dieser Weg Schwierigkeiten trennt, die man früher vereinigt glaubte[2]), führt er,

[1]) Ich gebrauche im folgenden, weil es so am einfachsten wird, durchweg die gewöhnliche Jacobische Bezeichnungsweise, von der ich nur in dem einen Punkte abweiche, daß ich, im Anschlusse an meine früheren Arbeiten, die Perioden ω_1, ω_2, ihren Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ mit ω benenne (so daß also $q = e^{i\pi\omega}$ wird).

[2]) Ich möchte z. B. auf Herrn Görings Arbeit: *Untersuchungen über die Teilwerte der Jacobischen Thetafunktionen usw.* im 7. Bande der Math. Annalen (1874) verweisen. Indem dort die Teilwerte von ϑ_1 immer gleichzeitig mit denen von ϑ, ϑ_2, ϑ_3 betrachtet werden, beschäftigt sich die Untersuchung vielmehr mit der $2n$-Teilung als

wenn ich nicht irre, zu einer *einfachsten* Behandlungsweise des Transformationsproblems der elliptischen Funktionen.

Die im folgenden eingehaltene Anordnung des Stoffes ergab sich aus dem Wunsche, die früher von mir benutzten Größen möglichst unmittelbar mit den Werten gewisser Teil-Thetas zu identifizieren. Erst in den folgenden Paragraphen stelle ich die allgemeinen Relationen auf, welche die alten Resultate als spezielle Fälle umfassen.

§ 1.
Rekapitulation der früheren Ergebnisse.

Ich beginne mit einer kurzen Übersicht der früher von mir erhaltenen Resultate, soweit dieselben zum Verständnisse des folgenden bekannt sein müssen.

1. In sämtlichen von mir betrachteten Fällen ($n = 5, 7, 11$) bediente ich mich gewisser Systeme von $\frac{n-1}{2}$ Verhältnisgrößen, die bei solchen linearen Transformationen der Perioden ω_1, ω_2, welche modulo n zur Identität kongruent sind, ungeändert bleiben und sich bei beliebiger linearer Transformation selber linear mit konstanten Koeffizienten in charakteristischer Weise transformieren[3]).

2. Bei $n = 5$ nannte ich die zwei sonach in Betracht kommenden Größen η_1, η_2; ihren Quotienten bezeichnete ich als *Ikosaederirrationalität*[4]).

3. Die drei bei $n = 7$ vorkommenden Größen benannte ich λ, μ, ν. Sie waren an die Gleichung vierter Ordnung

$$\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0 \tag{1}$$

gebunden und werden von mir dementsprechend als Koordinaten des Punktes einer Kurve vierter Ordnung gedeutet[5]).

4. Um die fünf Größen bei $n = 11$ zweckmäßig zu bezeichnen, wählte ich die quadratischen Reste modulo 11 als Indizes und unterschied also:

$$y_1,\ y_4,\ y_5,\ y_9,\ y_3.$$

der n-Teilung. — [Meiner Auffassungsweise sehr benachbart sind die auf S. 139 des vorliegenden Bandes genannten Kiepertschen Arbeiten, auf die im folgenden mehrfach zurückgegriffen wird. K.]

[3]) Vgl. die auf ein beliebiges primzahliges n bezügliche Darstellung im 15. Bande der Math. Annalen (1879), S. 275—278 [= Abh. LVII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 416—419].

[4]) Vgl. etwa Math. Annalen, Bd. 12, (1877), S. 505—508 [= Abh. LIV in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 324—327] und Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXII im vorliegenden Bande, S. 62].

[5]) Siehe Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXIV des vorliegenden Bandes, S. 90 ff.].

Zwischen ihnen bestanden im ganzen 15 biquadratische Identitäten, von denen drei die folgenden sind:

$$(2)\qquad 0 = y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1 ,$$

$$(3)\qquad 0 = y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9 ,$$

$$(4)\qquad 0 = y_4^3 y_9 + y_9^3 y_5 + y_3^3 y_1 .$$

Die übrigen ergeben sich aus diesen durch Multiplikation der Indizes resp. mit $4, 5, 9, 3$. Deutete man die y als Punktkoordinaten eines vierdimensionalen Raumes, so durchlief der Punkt y bei wechselndem Periodenverhältnisse ω eine Kurve der 20. Ordnung[6]).

5. In sämtlichen drei Fällen ergab sich eine enge Beziehung der vorgenannten Größen zu den Wurzeln der neuen *Multiplikatorgleichungen* [*erster Stufe*][7]). Nennt man diese Wurzeln in bekannter Weise $z_\infty, z_0, \ldots, z_{n-1}$, und setzt, da man es mit einer Jacobischen Gleichung zu tun hat:

$$\sqrt{z_\infty} = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n} \cdot A_0 ,$$

$$\sqrt{z_\nu} = A_0 + \varepsilon^{36\nu} A_1 + \varepsilon^{4\cdot 36\nu} A_2 + \ldots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 36\nu} A_{\frac{n-1}{2}} ,$$

$$\left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}\right),$$

so findet man bis auf einen hier nicht weiter in Betracht kommenden Faktor ϱ:

$$(5)\qquad \begin{cases} \varrho A_0 = \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \cdot q^{\frac{(6\lambda+1)^2 n}{12}} , \\ \varrho A_\alpha = (-1)^\alpha \cdot \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} (-1)^\lambda \left\{ q^{\frac{((6\lambda+1)n+6\alpha)^2}{12n}} + q^{\frac{((6\lambda+1)n-6\alpha)^2}{12n}} \right\} . \end{cases}$$ [8])

Unter Festhaltung der hiermit eingeführten Bezeichnungsweise lautet mein Resultat bei $n = 5$:

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = -q^{-\frac{2}{5}} + \ldots = \frac{A_1}{A_0}, \qquad \frac{\eta_2}{\eta_1} = -q^{+\frac{2}{5}} + \ldots = -\frac{A_2}{A_0},$$

(vgl. Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXII dieses Bandes, S. 62]),

[6]) Siehe Math. Annalen, Bd. 15 (1879) [= Abh. LXXXVI im vorliegenden Bande, S. 140 ff.].

[7]) Vgl. Math. Annalen, Bd. 15 (1878/79) [= Abh. LXXXV im vorliegenden Bande, S. 137 ff.], sowie Kiepert in Crelles Journal, Bd. 87 (1879), S. 199 ff.

[8]) [Zum Vergleich mit den in diesem Bande vorangehend abgedruckten Arbeiten mögen folgende Angaben dienen: Die (bei $n = 7$) auf S. 117/118 mit A_0, A_1, A_2, A_3 bezeichneten Größen sind proportional zu den hier mit A_0, A_3, A_1, A_2 bezeichneten. Was ferner (bei $n = 11$) auf S. 161 $\mu A_0, \mu A_1, \mu A_4, \mu A_9, \mu A_3$ hieß, stimmt genau überein mit dem hier mit $\varrho A_0, \varrho A_2, \varrho A_4, \varrho A_3, \varrho A_5, \varrho A_1$ Bezeichneten. B.-H.]

bei $n = 7$:

$$\frac{\mu}{\lambda} = -q^{-\frac{4}{7}} + \ldots = \frac{A_1}{A_0}, \qquad \frac{\nu}{\mu} = +q^{-\frac{2}{7}} + \ldots = \frac{A_2}{A_0},$$

$$\frac{\lambda}{\nu} = -q^{+\frac{6}{7}} + \ldots = \frac{A_3}{A_0},$$

(vgl. Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXIV dieses Bandes, S. 118]),

und bei $n = 11$:

$$\frac{y_5}{y_4} = +q^{-\frac{8}{11}} + \ldots = -\frac{A_2}{A_0}, \qquad \frac{y_9}{y_5} = -q^{-\frac{10}{11}} + \ldots = -\frac{A_4}{A_0},$$

$$\frac{y_3}{y_9} = -q^{+\frac{4}{11}} + \ldots = -\frac{A_3}{A_0}, \qquad \frac{y_1}{y_3} = +q^{-\frac{6}{11}} + \ldots = -\frac{A_5}{A_0},$$

$$\frac{y_4}{y_1} = +q^{+\frac{20}{11}} + \ldots = -\frac{A_1}{A_0},$$

(vgl. Math. Annalen, Bd. 15 (1879) [= Abh. LXXXVI dieses Bandes, S. 165]).

Ich habe dabei der besseren Orientierung wegen die niedrigsten Glieder angegeben, die in den Reihenentwicklungen der betreffenden Quotienten nach Potenzen von q auftreten.

§ 2.

Die von mir benutzten Größen sind Teilwerte von ϑ_1.

Man hat bekanntlich[9]):

$$\frac{\vartheta(x, q^n) \cdot \vartheta_2(x, q^n) \cdot \vartheta_3(x, q^n)}{2 q^{\frac{n}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\nu=\infty} (1 - q^{2\nu n})^2} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} (-1)^\lambda q^{\frac{(6\lambda+1)^2 n}{12}} \cdot \cos(6\lambda + 1) x .$$

Daher folgt für $q = e^{i\pi\omega}$:

$$\frac{A_\alpha}{A_0} = (-1)^\alpha \cdot 2 \cdot q^{\frac{3\alpha^2}{n}} \cdot \frac{\vartheta(\alpha\omega\pi, q^n) \cdot \vartheta_2(\alpha\omega\pi, q^n) \cdot \vartheta_3(\alpha\omega\pi, q^n)}{\vartheta(0, q^n) \cdot \vartheta_2(0, q^n) \cdot \vartheta_3(0, q^n)} .$$

Nun aber ist allgemein:

$$2 \cdot \frac{\vartheta(x, q) \cdot \vartheta_2(x, q) \cdot \vartheta_3(x, q)}{\vartheta(0, q) \cdot \vartheta_2(0, q) \cdot \vartheta_3(0, q)} = \frac{\vartheta_1(2x, q)}{\vartheta_1(x, q)} .$$

[9]) Vgl. Kiepert in Crelles Journal. Bd. 87 (1879), S. 213, Formel (31) daselbst, wo indessen der Exponent im Vorzeichen zu ändern ist [oder jetzt auch: Fricke, *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen* (1915/16), Bd. 1, S. 433].

Somit ergibt sich:

$$\frac{A_\alpha}{A_0} = (-1)^\alpha \cdot q^{\frac{3\alpha^2}{n}} \cdot \frac{\vartheta_1(2\alpha\omega\pi, q^n)}{\vartheta_1(\alpha\omega\pi, q^n)}. \tag{6}$$ [10])

Ich will der Kürze halber schreiben:

$$\sigma z_\alpha = (-1)^\alpha \cdot q^{\frac{\alpha^2}{n}} \cdot \vartheta_1(\alpha\omega\pi, q^n), \tag{7}$$

wo σ einen erst später zu bestimmenden Faktor bedeuten mag und α von 1 bis $(n-1)$ laufen soll, wobei übrigens nur $\frac{n-1}{2}$ wesentlich verschiedene Größen z_α entstehen, indem (für ungerades n)

$$z_{n-\alpha} = -z_\alpha \tag{8}$$

wird. *Dann hat man:*

$$\frac{A_\alpha}{A_0} = \frac{z_{2\alpha}}{z_\alpha}. \tag{9}$$ [11])

Und hieraus folgt unmittelbar, *daß die von mir bei $n = 5, 7, 11$ benutzten Verhältnisgrößen im wesentlichen mit den z_α übereinstimmen.* In der Tat ergibt ein Vergleich der soeben angeführten Formeln:

1. *bei* $n = 5$:

$$\eta_1 : \eta_2 = z_2 : z_1, \tag{10}$$ [12])

2. *bei* $n = 7$:

$$\lambda : \mu : \nu = z_1 : z_2 : z_4, \tag{11}$$

3. *bei* $n = 11$:

$$y_1 : y_4 : y_5 : y_9 : y_3 = z_1 : z_9 : z_4 : z_3 : z_5. \tag{12}$$

---

[10]) Aus dieser Formel folgt ein interessantes Resultat. Einmal kommt in Übereinstimmung mit dem, was bei 5, 7, 11 bekannt ist, durch Ausmultiplikation sämtlicher Gleichungen für $\alpha = 1, 2, \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)$:

$$A_0^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} A_1 A_2 \cdots A_{\frac{n-1}{2}}.$$

Aber das Bemerkenswerte ist, daß sich diese Relation in d Relationen spaltet, wenn d die größte Zahl ist, für welche $4^{\frac{n-1}{2d}} \equiv 1 \pmod n$ ist; man hat zu dem Zwecke nur immer diejenigen Gleichungen (6) miteinander zu multiplizieren, welche, unter α einen beliebigen Anfangswert verstanden, $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \ldots, 2^{\left(\frac{n-1}{2d}-1\right)} \cdot \alpha$ entsprechen.

[11]) Mit dieser Formel und den weiteren Betrachtungen über das Verhalten der z_α ist die Bemerkung erledigt, die ich im 15. Bande der Math. Annalen (1879) [= Abh. LXXXVI des vorliegenden Bandes, S. 162] unter der Seite zufügte.

[12]) Diese Formel stimmt materiell mit derjenigen überein, die Herr Bianchi S. 252 in Bd. 17 der Math. Annalen (1880/81) gegeben hat. In der Tat ist es diese Bianchische Formel gewesen, die mich zu den hier im Texte entwickelten Resultaten hingeleitet hat; vgl. die Bemerkung unter der Seite, Math. Annalen, Bd. 17 (1880/81) [= Abh. LXXXVIII dieses Bandes, S. 185, Fußnote [9])]. — Die Formeln (10), (11), (12) teilte ich im Oktober 1880 der London Mathematical Society mit. [Vgl. deren Proceedings, Bd. 11 (1. Serie), S. 151, 152].

§ 3.

Verhalten der z bei linearer Transformation der Perioden ω_1, ω_2.

Ich wünsche nun zu zeigen, daß die z_α allgemein, bei beliebigem ungeraden n, sich ähnlich verhalten, wie bei 5, 7, 11. Hierzu ist vor allen Dingen erforderlich, die Änderungen anzugeben, welche die z_α bei linearer Transformation der Perioden erleiden. Ich werde zu dem Zwecke dem in (7) vorkommenden, noch unbestimmten Faktor σ einen solchen Wert erteilen, daß möglichst einfache Formeln resultieren.

Vor allen Dingen versehe man das Produkt

$$(-1)^\alpha \cdot q^{\frac{\alpha^2}{n}} \cdot \vartheta_1(\alpha\omega\pi, q^n)$$

mit dem Faktor $\sqrt{\frac{\pi}{\omega_2}}$; es würde sonst bei Vertauschung von ω_1 und ω_2 das neue z_α einen Faktor $\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}$ bekommen, der bei dem ursprünglichen z_α kein Analogon hätte. Dann aber benutze man einen Kunstgriff, um die achten Einheitswurzeln zu entfernen, die bei Transformation der ϑ-Funktionen so störend dazwischenzutreten pflegen: *Man behafte nämlich unsere Größen mit dem gemeinsamen Nenner:*

$$\left\{\left(\sqrt{\frac{\pi}{\omega_2}}\right)^3 \cdot \vartheta_1'(0, q)\right\}^n.$$

Ich setze also definitiv:

$$z_\alpha = (-1)^\alpha \left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \frac{q^{\frac{\alpha^2}{n}} \cdot \vartheta_1(\alpha\omega\pi, q^n)}{\vartheta_1'(0, q)^n}. \tag{13}$$ [13])

Für die so normierten z ergibt sich nun folgendes Verhalten bei linearer Transformation von ω_1, ω_2:

1. Sei $\omega_1' = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_2' = \omega_2$, so kommt unmittelbar:

$$z_\alpha(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = \varepsilon^{\frac{\alpha(\alpha-n)}{2}} \cdot z_\alpha(\omega_1, \omega_2), \tag{14}$$

wo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ gesetzt ist.

2. Sei $\omega_1' = -\omega_2$, $\omega_2' = +\omega_1$, so ergibt sich zunächst:

$$z_\alpha(-\omega_2, \omega_1) = (-1)^\alpha \left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{\alpha^2 i\pi}{n\omega}} \cdot \vartheta_1\left(-\frac{\alpha\pi}{\omega}, e^{-\frac{n i\pi}{\omega}}\right)}{\vartheta_1'\left(0, e^{-\frac{i\pi}{\omega}}\right)^n}.$$

---

[13]) [Es ist bemerkenswert, daß M. Krause von ganz anderem Ausgangspunkte aus im wesentlichen zu denselben Größen geführt wurde. Vgl. sein Lehrbuch über doppeltperiodische Funktionen (Leipzig 1895), Bd. 1, S. 282 ff. K.]

Dies setzt sich vermöge bekannter Formeln in nachstehende Gleichung um:

$$z_\alpha(-\omega_2, \omega_1) = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n}} \left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha\pi}{n}, q^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta_1'(0,q)^n}.$$ [14]

Andererseits konstatiert man mit Leichtigkeit das Vorhandensein folgender, bisher, wie es scheint, noch nicht bemerkter[15] ϑ-Relation:

$$(15)\qquad (-1)^\alpha\,\vartheta_1\left(\frac{\alpha\pi}{n}, q^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta} - \varepsilon^{-\alpha\beta})\left((-1)^\beta \cdot q^{\frac{\beta^2}{n}} \cdot \vartheta_1(\beta\omega\pi, q^n)\right).$$

Daher folgt:

$$(16)\qquad \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n} \cdot z_\alpha(-\omega_2, \omega_1) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sum_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta} - \varepsilon^{-\alpha\beta}) \cdot z_\beta(\omega_1, \omega_2).$$ [16]

Dies ist aber im wesentlichen dasjenige Verhalten, welches ich bei $n = 5$, 7, 11 *benutzt habe.*

§ 4.

Die Kurve der z.[17]

Indem ich jetzt n als ungerade Primzahl voraussetze, sollen die Verhältnisse der $\frac{n-1}{2}$ Größen z_α als homogene Koordinaten eines Raumes von

[14]) [Das Zeichen $\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}$ steht hier in der Bedeutung $i^{\frac{n-1}{2}}$ und entstammt allein der Anwendung der Formel, die das Verhalten der Funktion $\vartheta_1(x, q)$ gegenüber der *speziellen* Transformation $\omega_1' = -\omega_2$, $\omega_2' = \omega_1$ angibt. Die feinere Theorie der Vorzeichen der Gaussischen Summen oder die (mit letzterer in nahem Zusammenhange stehende) Bestimmung der achten Einheitswurzeln, die bei beliebiger unimodularer Transformation der Thetafunktionen auftreten, kommt hier nicht in Betracht, wie überhaupt an keiner Stelle meiner Arbeiten. Im übrigen vgl. auch Fußnote [40]) unten auf S. 243. K.]

[15]) [Vgl. die Richtigstellung dieser Angabe in Abh. XC auf S. 245/246 dieses Bandes. — Übrigens läßt sich die Formel ein wenig verallgemeinern, siehe Formel (111) in Abh. XC auf S. 245 des vorliegenden Bandes. K.]

[16]) [Etwas kürzer zusammengezogen heißt die Formel:

$$-\sqrt{n} \cdot z_\alpha(-\omega_2, \omega_1) = i^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sum_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta} - \varepsilon^{-\alpha\beta})\, z_\beta(\omega_1, \omega_2).$$

Im übrigen vgl. den Zusatz am Schluß dieser Arbeit, S. 196ff. B.-H.]

[17]) [Ergänzende Bemerkungen zu einzelnen Beweisen in diesem Paragraphen sind im Zusatz am Schluß dieser Arbeit auf S. 196ff. zusammengestellt.]

$\frac{n-3}{2}$ Dimensionen betrachtet werden. Bewegt sich die absolute Invariante J, und also ω, in der komplexen Ebene, so durchläuft der „Punkt“ z eine Kurve. Zuvörderst beachte man, daß die Verhältnisse zweier beliebiger z_α nach ganzen Potenzen von $t = q^{\frac{2}{n}}$ entwickelt werden können, wobei höchstens eine endliche Anzahl von negativen Exponenten auftritt. Daher folgt, mit Rücksicht auf bekannte Eigenschaften der ϑ-Funktionen:

Die Kurve der z ist eine algebraische Kurve.

Nun folgt aus (14), (16), daß die Quotienten $\frac{z_\alpha}{z_\beta}$ sämtlich bei solchen linearen Substitutionen von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ungeändert bleiben, die modulo n zur Identität kongruent sind, daß aber Analoges bei keiner anderen linearen Substitution eintritt. Die Kurve ist also auf diejenige über der J-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche eindeutig bezogen, welche das Bild der Galoisschen Resolvente der Modulargleichung für Transformation n-ter Ordnung ist. Ich gab bereits Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [= Abh. LXXXII dieses Bandes, S. 55] an, daß die $\frac{n(n^2-1)}{2}$ Blätter dieser Fläche bei $J = 0$ zu je 3, bei $J = 1$ zu je 2, bei $J = \infty$ zu je n, und sonst nirgends, zusammenhängen. Dementsprechend können wir sagen:

Das Geschlecht unserer Kurve ist $p = \frac{n+2\cdot n-3\cdot n-5}{24}$.

Die Kurve geht durch $\frac{n(n^2-1)}{2}$ Kollineationen in sich über. Vermöge derselben werden ihre Punkte zu je $\frac{n(n^2-1)}{2}$ zusammengruppiert. Die zusammengehörigen Punkte sind im allgemeinen verschieden; nur für $J = 0$ fallen sie zu je 3, für $J = 1$ zu je 2, für $J = \infty$ zu je n zusammen. Hierdurch ist J als rationale Funktion der Koordinaten charakterisiert.

Um jetzt die Ordnung unserer Kurve zu bestimmen, zählen wir die Verschwindungsstellen irgendeiner hinlänglich allgemeinen linear-gebrochenen Funktion der z ab, z. B. von $\frac{z_1}{\sum u_i z_i}$, wo keiner der Koeffizienten u_i gleich Null sein soll. Aus der Produktzerlegung der ϑ-Funktion[18] folgt der Satz,

[18]) [Für z_α erhält man die Produktdarstellung:

$$z_\alpha = \frac{(-1)^\alpha \cdot i}{2^n} \cdot \left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \left(q^{\frac{-\alpha(n-\alpha)}{n}} - q^{\frac{\alpha(n+\alpha)}{n}}\right)$$

$$\cdot \frac{\Pi(1-q^{2\lambda n}) \cdot \Pi(1-q^{2(\lambda n+\alpha)}) \cdot \Pi(1-q^{2(\lambda n-\alpha)})}{\Pi(1-q^{2\lambda})^{3n}}.$$

B.-H.]

daß ein solcher Quotient nur in den Punkten $J = \infty$ verschwinden kann. Diese $\frac{n^2-1}{2}$ Punkte müssen wir jetzt genauer betrachten. Ihre Unterscheidung kommt darauf zurück, daß alle reellen, rationalen Werte von ω, jeweils auf ihre kleinste Benennung gebracht, [in einer und nur einer der $\frac{n^2-1}{2}$ Zahlenreihen $\frac{\pm \varkappa + rn}{\pm \lambda + sn}$ $(r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ enthalten sind, wo $\varkappa$, λ unabhängig von einander die Werte $0, 1, \dots (n-1)$ durchlaufen sollen und nur die eine Kombination $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$ ausgeschlossen bleibt. Ein gemeinsamer Zeichenwechsel in Zähler und Nenner gilt dabei, wie durch das $\pm$ angedeutet, als unwesentlich][19]. Ich will nun insbesondere die $\frac{n-1}{2}$ Punkte herausgreifen, in denen $\lambda = 0$ ist; sie sollen dem Werte von $\varkappa$ entsprechend mit I, II, … $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ bezeichnet sein. Der Punkt I wird derjenige sein, in welchem q gleich Null wird, auf den sich also unsere Reihenentwicklungen beziehen.

Nun wurde bereits erwähnt, daß diese Reihenentwicklungen nach ganzen Potenzen fortschreiten, wenn man statt q

$$t = q^{\frac{2}{n}} \tag{17}$$

einführt. Das niedrigste Glied, welches sich dann bei z_α einstellt, enthält die Potenz $t^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}$. Daher folgt:

Im Punkte I wird z_α $\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}$*-fach unendlich.*

Insbesondere $z_{\frac{n-1}{2}}$ wird am stärksten unendlich, nämlich $\frac{n^2-1}{8}$-fach. Ebenso stark wird $\sum u_i z_i$ unendlich, da wir voraussetzen, daß keiner der Koeffizienten u_i verschwinde. Somit kommt:

Die Funktion $\frac{z_\alpha}{\sum u_i z_i}$ *wird im Punkte I* $\left(\frac{n^2-1}{8} - \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}\right)$*-fach gleich Null.*

Nun wird, wie man sofort sieht, $\frac{z_1}{\sum u_i z_i}$ in den Punkten I, II, … $\left(\frac{N-1}{2}\right)$ zusammengenommen ebenso oft zu Null, wie die verschiedenen $\frac{z_\alpha}{\sum u_i z_i}$ zusammengenommen im Punkte I.

Die Gesamtheit der uns sonach bekannten Nullstellen unserer Funktionen beträgt:

$$\sum_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n^2-1}{8} - \frac{\alpha(n-\alpha)}{2}\right) = \frac{(n-3)(n^2-1)}{48}.$$

[19] [Bei dem Wiederabdruck der Klarheit halber unwesentlich geändert. B.-H.]

Daß es nun keine anderen Nullstellen mehr gibt, daß also $\frac{z_1}{\sum u_i z_i}$ in den übrigen Punkten $J = \infty$ jedenfalls nicht verschwindet, folgt aus (14), (16). Denn diesen Formeln zufolge erfährt z_1, wenn man den Punkt I in einen der noch in Frage stehenden Punkte $J = \infty$ überführen will, eine lineare Substitution, in der das Glied mit $z_{\frac{n-1}{2}}$ nicht verschwindet[20]; z_1 selbst wird also in allen diesen Punkten $\frac{n^2-1}{8}$-fach unendlich, d. h. es wird mindestens ebenso stark unendlich, wie $\sum u_i z_i$. Mithin:

Die Kurve der z ist von der Ordnung $\frac{(n-3)(n^2-1)}{48}$.

Auch dies wieder stimmt mit den früheren Resultaten bei 5, 7, 11, wo wir 1, 4, 20 als betr. Ordnung fanden[21].

§ 5.

Biquadratische Relationen zwischen den z.

Ich wünsche nun noch von der allgemeinen Definition der z_α aus das Vorhandensein der biquadratischen Relationen zu erklären, von denen in § 1 für $n = 7$, 11 die Rede war. Dies gelingt sofort vermöge der bekannten [von Weierstrass herrührenden] Formel:

$$\begin{aligned} &\vartheta_1(v+w)\,\vartheta_1(v-w)\,\vartheta_1(t+u)\,\vartheta_1(t-u) \\ +\,&\vartheta_1(w+u)\,\vartheta_1(w-u)\,\vartheta_1(t+v)\,\vartheta_1(t-v) \\ +\,&\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_1(u-v)\,\vartheta_1(t+w)\,\vartheta_1(t-w) = 0. \end{aligned}$$

Aus ihr derivieren wir nämlich, wie man sofort sieht, unter i, k, l, m irgend vier voneinander verschiedene Zahlen verstanden, die folgenden Relationen zwischen den z:

$$z_{l+m} z_{l-m} z_{i+k} z_{i-k} + z_{m+k} z_{m-k} z_{i+l} z_{i-l} + z_{k+l} z_{k-l} z_{i+m} z_{i-m} = 0. \tag{18}$$

Nimmt man hier $n = 7$, so hat man die eine Relation:

$$z_1^3 z_2 + z_2^3 z_3 + z_3^3 z_1 = 0,$$

die mit der oben angegebenen (1) zusammenfällt. Nimmt man $n = 11$, so erhält man von den 15 Beziehungen (2), (3), (4) zunächst nur die-

[20] Man vergleiche, was über Kombination solcher Substitutionen Math. Annalen, Bd. 15 (1879) [= Abh. LXXXVI dieses Bandes, S. 146], gesagt ist.

[21] Man kann genau ebenso die Ordnung der Kurve A des § 1 bestimmen und findet

$$\frac{(n-1)(n^2-1)}{48},$$

also 2, 6, 25 für $n = 5$, 7, 11, wie es sein muß. Die Kurve der A ist durch die Formeln (9) umkehrbar eindeutig auf die Kurve der z bezogen.

貴重書

jenigen 10, die aus drei Gliedern bestehen. Aus diesen kann man aber die fünf viergliedrigen als algebraische Folge ableiten. Denn es ist:

$$y_4 y_5 y_9 y_3 - y_1^2 y_5 y_3 + y_1^2 y_4^2 + y_3^3 y_1$$
$$= \frac{1}{y_9}\{-y_3(y_1^2 y_5 y_9 - y_4^2 y_5 y_3 - y_3^2 y_1 y_9) - y_4(y_3^2 y_4 y_5 - y_1^2 y_4 y_9 - y_9^2 y_3 y_5)\}.$$

Also auch bei $n = 11$ ergeben sich sämtliche Gleichungen aus bekannten Eigenschaften der ϑ-Funktion.

Leipzig, den 3. Januar 1881.

[Erläuternde Bemerkungen zu einzelnen Stellen des vorstehenden Aufsatzes Nr. LXXXIX.]

[1. *Zu den Formeln* (14), (16) *auf S.* 191/192. Die Formeln (14), (16) des Textes stimmen im wesentlichen überein mit den Formeln (28), (29), die für den Fall einer ungeraden Primzahl n Math. Annalen, Bd. 15 (1879), S. 277 = Abh. LVII in Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 418 mitgeteilt wurden. Der daselbst für die Tatsache, daß die angegebenen Substitutionen eine *endliche* Gruppe erzeugen, gegebene Beweis gilt jedoch nur unter der Voraussetzung n = Primzahl, und seine Verallgemeinerung auf beliebige ungerade n würde jedenfalls einige Komplikationen verursachen. Für beliebiges ungerades n sei in dieser Hinsicht auf § 15 der folgenden Abh. XC, S. 241, verwiesen, wo der entsprechende Beweis für die allgemeineren Größen $X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2)$, deren Nullwerte die z_α ja im wesentlichen sind, unter Benutzung geometrischer Überlegungen erbracht wird.

Um die Beziehung der oben zitierten Formeln (28), (29) zu den jetzigen herzustellen, empfiehlt es sich, vorab durch eine leichte äußere Modifikation diese beiden Substitutionssysteme auf eine übereinstimmende Gestalt zu bringen. Man setze nämlich in (28) $\left(\frac{k}{n}\right) y_k$ an Stelle von y_k und beachte ferner, daß in (29) das Quadrat der Substitution 3. $y_k' = -y_k$ lautet, so daß man in (29), 2. und (29), 3. auf der rechten Seite auch die umgekehrten Vorzeichen benutzen darf. Schreiben wir noch, um den Vergleich zu erleichtern, z_α statt y_k und ε statt ϱ, so haben wir an Stelle der Substitutionen (28), (29) für $n \equiv 1 \pmod 4$ und $n \equiv 3 \pmod 4$ einheitlich die folgenden gewonnen:

$$\overline{S}: \qquad z_\alpha' = \varepsilon^{\alpha^2} z_\alpha$$
$$\overline{U}: \qquad z_\alpha' = \mp z_{\pm g\alpha}$$
$$\overline{T}: \qquad -\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n} \cdot z_\alpha' = \sum_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{2\alpha\beta} - \varepsilon^{-2\alpha\beta}) z_\beta .$$

Hier bedeutet $\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}$ den Wert $+1$ oder $+i$, je nachdem $n \equiv 1$ oder $n \equiv 3 \pmod 4$ ist; g ist eine primitive Wurzel $(\mathrm{mod}\ n)$, $\pm g\alpha$ derjenige von den beiden zu den Zahlen $+g\alpha$ und $-g\alpha$ im Systeme der kleinsten nicht negativen Reste $(\mathrm{mod}\ n)$ kongruenten Repräsentanten, welcher $\leqq \frac{n-1}{2}$ ist, und in der rechten Seite von $\overline{U}$ gelten stets beidemal übereinstimmend die oberen oder die unteren Zeichen [22]).

[22]) $\overline{U}$ läßt sich natürlich durch Kombination von $\overline{S}$ und $\overline{T}$ herstellen. Vgl. Bd. 2 dieser Ausgabe, S. 417, Fußnote [28]).

Ich behaupte jetzt: *Unsere im Texte gefundenen Substitutionen* (14), (16), die wir S und T nennen mögen, *sind Kombinationen der eben angeschriebenen* $\overline{S}$, $\overline{T}$, $\overline{U}$. In der Tat, sei λ die Lösung der Kongruenz $2\lambda \equiv 1 \pmod n$, so finden wir, wenn wir beachten, daß von den beiden Zahlen α, $n-\alpha$ stets die eine gerade ist,

$$S = \overline{S}^{\lambda},$$

ferner

$$\overline{T} \cdot \overline{U}^{-\mathrm{ind}\, 2}: \qquad \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n} \cdot z_\alpha' = \left(\frac{2}{n}\right) \cdot \sum_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}} (\varepsilon^{\alpha\beta} - \varepsilon^{-\alpha\beta}) z_\beta .$$

Indem wir für $\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}$ die oben angegebene Bedeutung $+1$ oder $+i$, für $\left(\frac{2}{n}\right)$ aber $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ eintragen und die verschiedenen Werte von $n \pmod 8$ unterscheiden, finden wir

$$\frac{\left(\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}} = i^{\frac{n-1}{2}},$$

so daß $\overline{T} \cdot \overline{U}^{-\mathrm{ind}\, 2}$ wirklich mit T übereinstimmt.

Daß die Substitutionen $\overline{S}$, $\overline{T}$, $\overline{U}$ auch für nicht primzahliges n sich aus S und T zusammensetzen lassen müssen, und umgekehrt, entnimmt man den Ausführungen, die Fricke in Bd. 2 der „Modulfunktionen", S. 309 ff. im Anschluß an eine Arbeit von Kronecker in den Berliner Monatsberichten von 1861 gibt. Nur kann man die expliziten Formeln für den Zusammenhang zwischen den $\overline{S}$, $\overline{T}$, $\overline{U}$ einerseits und den S, T andererseits bei allgemeinen n nicht so ohne weiteres hinschreiben.

2. *Zum Beweise, daß die Kurve der z algebraisch ist.* Aus der Darstellung der z_0 durch die ϑ-Funktion entnimmt man, daß die Verhältnisse je zweier z sich an jeder Stelle des Fundamentalpolygons (der Galoisschen Resolvente) verhalten, wie algebraische Funktionen von $J(\omega)$. Da sie überdies infolge der Endlichkeit der aus (14), (16) erzeugten Substitutionsgruppe bei gegebenen J nur endlich vieler Werte fähig sind, sind es algebraische Funktionen von J, w. z. b. w.

3. *Über die eindeutige Beziehung der Kurve der z auf die Riemannsche Fläche der Galoisschen Resolvente.* Im Texte ist nur bewiesen, daß die Verhältnisse $\frac{z_\alpha}{z_\beta}$ auf der Riemannschen Fläche, die zur Galoisschen Resolvente der Modulargleichung für den n-ten Transformationsgrad gehört, eindeutig sind, nicht aber, daß die Wurzeln der Galoisschen Resolvente sich auch umgekehrt rational durch die Verhältnisse der z und durch J ausdrücken lassen. So bliebe also zunächst noch die Möglichkeit, daß die Kurve der z mehrfach durchlaufen würde, während sich der Bildpunkt nur einmal über die genannte Riemannsche Fläche bewegt. Um diese Annahme zu widerlegen, beachte man, daß vermöge der aus (14), (16) erzeugten Substitutionsgruppe das Verhältnis $\frac{z_1}{z_2}$ $\frac{n \cdot (n^2-1)}{2}$ Werte erhält, von denen im allgemeinen (d. h. abgesehen von höchstens endlich vielen Punkten der Riemannschen Fläche) keine zwei gleich sind. Diese Werte, die also alle rational von den z_α abhängen, permutieren sich bei Anwendung der ω-Substitutionen holoedrisch isomorph mit den Wurzeln der Galoisschen Resolvente der Modulargleichung, so daß man nach bekannten Regeln der Algebra rückwärts die letzteren (in dem durch Adjunktion von $J(\omega)$ zur Gesamtheit der rationalen Zahlen entstehenden Körper) rational durch die ersteren, d. h. die Wurzeln der Galoisschen Resolvente rational mit konstanten Koeffizienten durch die z_0 und J ausdrücken kann, w. z. b. w. B.-H.]

貴重書

XC. Über die elliptischen Normalkurven der n-ten Ordnung.

[Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der Sächsischen Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 13, Nr. IV (1885).]

Inhalt.

Einleitung.

Unter elliptischen Normalkurven der n-ten Ordnung sollen im folgenden diejenigen Kurven n-ter Ordnung vom Geschlechte Eins verstanden sein, die im Raume von $(n-1)$ Dimensionen gelegen sind, die also, unter $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ homogene Koordinaten verstanden, mit Benutzung n-gliedriger, linear unabhängiger σ-Produkte folgendermaßen definiert werden können:

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\varrho x_0 &= A \cdot \prod_1^n \sigma(u - a_i),\\
\varrho x_1 &= B \cdot \prod_1^n \sigma(u - b_i),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\varrho x_{n-1} &= N \cdot \prod_1^n \sigma(u - n_i),
\end{aligned}
\right.
$$

wo $\sum a_i = \sum b_i = \ldots = \sum n_i$ zu nehmen ist[1]). Ich werde zunächst untersuchen, wie sich diese Kurven unter Zugrundelegung verschiedener ausgezeichneter Koordinatensysteme algebraisch darstellen, sodann den Übergang erforschen, der von der einen Darstellungsweise zur anderen hinüberführt und endlich die solchergestalt gewonnenen Resultate für die Theorie der Moduln n-ter Stufe verwerten. Dabei beschränke ich mich, wie gleich hier bemerkt sei, durchweg auf den Fall eines ungeraden n, was aber keineswegs durch die Methode der Untersuchung verlangt wird, sondern nur durch Rücksichten praktischer Natur geboten schien[2]). Die Untersuchungen über Teilwerte der σ-Funktion, welche ich im ersten Abschnitte zusammenstelle, wolle man als eine Art von Einleitung betrachten; ich mußte sie gesondert voraufschicken, um bei der Betrachtung der Normalkurven nicht immer wieder durch die Ableitung von Hilfsformeln unterbrochen zu werden.

Die Ideen, welche hiernach im Zusammenhange entwickelt werden sollen, sind dieselben, welche ich vor nun fünf Jahren in einer der Münchener Akademie vorgelegten Note skizziert habe[3]) und die dann für $n = 3$ und $n = 5$ von Herrn Bianchi in einer wichtigen Arbeit, die ich noch oft zu

[1]) Was die geometrische Theorie dieser Kurven angeht, so vergleiche man namentlich auch: Clifford, *On the Classification of Loci*, Philosophical Transactions, London 1878 [= Mathematical papers, S. 305 ff.].

[2]) [In der Tat hat Hurwitz, wie schon in den Vorbemerkungen berichtet wurde, die Untersuchungen für gerades n ergänzt. (Math. Annalen, Bd. 27 (1886), S. 183—233.) K.]

[3]) Sitzungsberichte der Münchener Akademie vom Juli 1880: *Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* (vgl. auch Math. Annalen Bd. 17 (1880/81), wo die Note wieder abgedruckt ist) [= Nr. LXXXVIII im vorliegenden Bande].

nennen haben werde, weiter ausgeführt worden sind[4]). Eben diese Ideen liegen meiner weiteren Note: *Über gewisse Teilwerte der ϑ-Funktion*[5]) zugrunde, in der man u. a. bereits den größeren Teil der Resultate, welche nun für Moduln n-ter Stufe in systematischer Weise abgeleitet werden sollen, in knapper Form zusammengestellt finden wird. Ich bin damals durch äußere Verhältnisse von der ausführlichen Darlegung der betreffenden Überlegungen abgehalten worden[6]), und nun erst im vergangenen Herbst zu denselben wieder zurückgekehrt, wo ich dann zunächst in den Berichten der Königl. Sächsischen Gesellschaft eine vorläufige Note publizierte[7]), um jetzt eine zusammenhängende Entwicklung folgen zu lassen. Vergleicht man den Inhalt der letztgenannten Note oder auch die folgende Darstellung mit den vorgenannten früheren Arbeiten, so wird man bemerken, daß ich mich jetzt mehr von den direkten Methoden der analytischen Geometrie entfernt und der eigentlichen Theorie der doppeltperiodischen Funktionen zugewandt habe. Ich hätte vielleicht ganz die geometrische Ausdrucksweise vermeiden und nur von n-gliedrigen σ-Produkten und den zwischen ihnen bestehenden algebraischen Relationen sprechen sollen: es würde sich dann in der vorliegenden Abhandlung um solche Entwicklungen handeln, die man *der Lehre von der Transformation und Teilung der elliptischen Funktionen* zuweisen kann. Wenn ich trotzdem die geometrische Redeweise nicht habe fallen lassen, so geschah dies einmal, um die Geometer (im engeren Sinne des Wortes) für die hier vorliegenden Fragen zu interessieren, dann aber namentlich auch, weil ich gern an dem Grundsatze festhalte, daß auch in Fragen der reinen Analysis die analytisch-geometrische Darstellung sehr wesentlich zur klaren Erfassung der Aufgabe und überhaupt zur Formulierung zweckmäßiger Fragestellungen beiträgt.

Was die Bezeichnungen, die ich verwende, angeht, so bemerke ich gleich hier das Folgende.

---

[4]) *Über die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung*, Bd. 17 der Math. Annalen (1880/81), S. 234 ff.

[5]) Bd. 17 der Math. Annalen (1881) [= der vorstehend abgedruckten Abh. LXXXIX].

[6]) In der Zwischenzeit hat Herr Lange den Fall $n = 4$ in seiner Dissertation bearbeitet (Leipzig 1881): *Über die 16 Wendeberührungspunkte der Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies* (abgedruckt im 28. Bande von Schlömilchs Zeitschrift (1883)).

[7]) Sitzung vom 14. November 1884: *Zur Theorie der elliptischen Funktionen n-ter Stufe*. Anschließend an diese Note habe ich im Wintersemester 1884/85 in meinem Seminare zahlreiche Vorträge über denselben Gegenstand gehalten, [an welche später die Leipziger Dissertationen anknüpften, über die in Nr. XCI und Nr. XCII berichtet wird. — Die genannte Note wird in der jetzigen Gesamtausgabe nicht mit abgedruckt, weil ihr Inhalt in die vorliegende Abhandlung in ausführlicherer Form vollständig aufgenommen ist. K.]

Zunächst, was die **Formeln** betrifft, so schließe ich mich teils an **Jacobi**, teils auch, wo es wesentlich ist, an Herrn **Weierstrass** an, wobei ich freilich (wie dies bereits Herr **Bianchi** getan) insofern wieder abweiche, als ich die Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung nicht 2ω, $2\omega'$, bez. 2η, $2\eta'$, sondern ω_1, ω_2, resp. η_1, η_2 nenne. Der imaginäre Teil von $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ kann bekanntlich nach Belieben positiv oder negativ geommen werden, es muß nur an der einmal getroffenen Verabredung festgehalten werden[8]). Indem ich ihn als *positiv* voraussetze, nimmt die Legendresche Relation, die späterhin bei fast allen Zwischenrechnungen zu benutzen sein wird, die folgende Gestalt an:

$$\omega_1 \eta_2 - \omega_2 \eta_1 = 2 i \pi. \tag{2}$$

Ich schreibe dann:

$$e^{i\pi \frac{\omega_1}{\omega_2}} = q, \quad e^{-i\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}} = r,^{9)} \quad g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta. \tag{3}$$

Sei ferner, was die **Ausdrucksweise** angeht, der folgende Punkt hervorgehoben. Alle solche linearen Transformationen von ω_1, ω_2:

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

welche den Bedingungen genügen:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{n},$$

nenne ich, wie früher bereits geschah, ***modulo n zur Identität kongruent***, und rechne nun jede irgendwie gegebene elliptische Funktion (mag dieselbe das u enthalten oder nicht) ***zur n-ten Stufe***, wenn sie bei sämtlichen in Rede stehenden linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ungeändert bleibt, — es sei denn, daß die Unveränderlichkeit schon bei einer Zahl $m < n$ eintritt, worauf die vorgelegte Funktion der m-ten Stufe zuzuweisen sein wird. Die hiermit gegebene Definition umfaßt ohne weiteres auch den Fall eines elliptischen Integrals erster Gattung und weicht daher von derjenigen ab, die ich betreffs des Integrals in meiner vorgenannten Münchener Note [Nr. LXXXVIII] verwandt habe. Wenn wir ein elliptisches Integral erster

---

[8]) [In dem Original war in Übereinstimmung mit **Bianchi** (bzw. **Hermite**), aber entgegen **Kleins** früheren Arbeiten der imaginäre Teil von $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ positiv vorausgesetzt. Beim Wiederabdruck wurden die in den vorangehenden Arbeiten benutzten Bezeichnungen wiederhergestellt, die auch in den „Modulfunktionen" und dem Buche von **Fricke** über elliptische Funktionen verwandt sind. B.-H.]

[9]) [Für den Vergleich mit den „Modulfunktionen" mag bemerkt werden, daß die dort mit r bezeichnete Größe mit der hier so genannten nichts zu tun hat, indem dort $r = q^2 = e^{2i\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}}$ gesetzt ist.]

Gattung, wie damals geschah und in der Folge wieder in Betracht kommen soll, an einer der elliptischen Normalkurven n-ter Ordnung hin erstrecken, so ist es darum noch nicht im Sinne der jetzigen Ausdrucksweise von der n-ten Stufe. Es hat nur insofern Beziehung zur n-ten Stufe, als man die genannte Kurve mit besonderer Leichtigkeit auf ein Koordinatensystem beziehen kann, bei dem das Integral von der n-ten Stufe wird. Eben dieses war nun freilich der Kern meiner damaligen Entwicklung, so daß die abweichende Ausdrucksweise, die ich übrigens ausdrücklich zurücknehme, mit der hier zu gebrauchenden nicht in direktem Widerspruche steht.

Ich erinnere hier noch an einige Formeln, welche fernerhin fortwährend zu Hilfe zu nehmen sind. Vor allem haben wir die Fundamentaleigenschaft der σ-Funktion festzuhalten:

$$\begin{aligned}(4)\qquad &\sigma(u+m_1\omega_1+m_2\omega_2)\\ &=(-1)^{m_1m_2+m_1+m_2}\cdot e^{(m_1\eta_1+m_2\eta_2)\left(u+\frac{m_1\omega_1+m_2\omega_2}{2}\right)}\cdot\sigma(u),\end{aligned}$$

sodann ihre Beziehung zur ϑ-Funktion:

$$\begin{aligned}(5)\qquad \sigma(u) &= \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\cdot\frac{e^{\frac{\eta_2u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt[8]{\Delta}}\cdot\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2},\,q\right)\\ &= e^{\frac{3i\pi}{4}}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\cdot\frac{e^{\frac{\eta_1u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt[8]{\Delta}}\cdot\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1},\,r\right).\end{aligned}$$

Hier ist ϑ_1 in bekannter Weise:

$$(6)\qquad \vartheta_1(x,q)=\frac{1}{i}\sum_0^\infty(-1)^h q^{\frac{(2h+1)^2}{4}}\left\{e^{(2h+1)ix}-e^{-(2h+1)ix}\right\},$$

während $\sqrt[8]{\Delta}$ durch folgende Formeln definiert sein mag, welche $\sqrt[24]{\Delta}$ darstellen:[10])

$$\begin{aligned}(7)\qquad \sqrt[24]{\Delta} &= \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\cdot q^{\frac{1}{12}}\cdot\prod_1^\infty(1-q^{2h})\\ &= e^{-\frac{i\pi}{4}}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\cdot r^{\frac{1}{12}}\cdot\prod_1^\infty(1-r^{2k}).\end{aligned}$$

[10]) [Durch die Formeln (7) ist $\sqrt[24]{\Delta}$ nur bis auf das Vorzeichen definiert. In der Tat ist es *keine eindeutige* Modulform mehr. Im Texte kommt es jedoch nie isoliert vor, sondern stets in Verbindungen wie z. B. $\sqrt[24]{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta^n}}$ (wo $\overline{\Delta}$ durch (11) definiert ist), die für ungerades n wieder *eindeutige* Modulformen ergeben. K.]

Wir schreiben jetzt ausführlicher $\sigma(u\,|\,\omega_1,\omega_2)$ für $\sigma(u)$, $\Delta(\omega_1,\omega_2)$ für Δ und lassen Transformation n-ter Ordnung eintreten, indem wir setzen:

$$(8)\qquad \overline{\omega}_1=\omega_1,\quad \overline{\omega}_2=\frac{\omega_2}{n}.$$

Es ist dann der Legendreschen Relation zufolge:

$$(9)\qquad \frac{\overline{\eta}_1}{2\overline{\omega}_1}-\frac{n\eta_1}{2\omega_1}=\frac{\overline{\eta}_2}{2\overline{\omega}_2}-\frac{n\eta_2}{2\omega_2}.$$

Den gemeinsamen Wert dieser Ausdrücke bezeichne ich, wie dies auch sonst üblich ist, mit G_1 (siehe z. B. auch Felix Müller, *De transformatione functionum ellipticarum*, Berlin 1867). Der folgende Quotient:

$$(10)\qquad e^{-G_1u^2}\cdot\frac{\sigma\left(u\,|\,\omega_1,\frac{\omega_2}{n}\right)}{\sigma(u\,|\,\omega_1,\omega_2)^n}$$

stellt dann diejenige doppeltperiodische Funktion von u (mit den Perioden ω_1,ω_2) vor, welche bei allen Untersuchungen über Transformation n-ter Ordnung zugrunde zu legen ist. Wir werden dieselbe in der Folge noch so modifizieren, daß wir sie mit $\sqrt[8]{\overline{\Delta}:\Delta^n}$ multiplizieren[11]), wo Δ den ursprünglichen Wert der Diskriminante, $\overline{\Delta}$ aber den transformierten Wert bedeutet:

$$(11)\qquad \overline{\Delta}=\Delta\left(\omega_1,\frac{\omega_2}{n}\right).$$

Sie verwandelt sich dadurch in einen einfachen ϑ-Quotienten, den wir in der doppelten Form schreiben können:

$$(12)\qquad \sqrt{n}\cdot\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{nu\pi}{\omega_2},\,q^n\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2},\,q\right)^n}=\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1},\,r^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1},\,r\right)^n}.$$

Abschnitt I.

Über die Teilwerte der σ-Funktion.

§ 1.

Definition der Teilwerte.

Die Lehre von der Teilung der elliptischen Funktionen wird gewöhnlich in der Weise vorgetragen, daß nur von doppeltperiodischen Funk-

[11]) [$\sqrt[8]{\Delta}$ an sich stammt vom Übergang zur Thetafunktion. $\sqrt[8]{\overline{\Delta}:\Delta^n}$ wird gewählt, um bei ungeradem n eine *eindeutige* Modulform zu haben. Vgl. die letzte Fußnote. K.]

tionen im engeren Sinne, also (sofern wir uns an Weierstrass' Bezeichnung anschließen wollen) von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ darin die Rede ist. Inzwischen zeigt eine aufmerksame Betrachtung der von verschiedenen Seiten entwickelten Formeln, daß es zweckmäßig ist, auch Teilwerte der σ-Funktion selbst in geeigneter Weise in Betracht zu ziehen. In der Tat treten [soviel ich weiß] solche Teilwerte auch bisher fortwährend in den Zwischenrechnungen auf, nur daß man dieselben noch nicht einzeln derart in absoluter Weise fixiert hat, daß jeder von ihnen eine algebraische Funktion der Invarianten g_2, g_3 vorstellt[12]). Ich wünsche im gegenwärtigen Abschnitte den hiermit bezeichneten Gedanken auszuführen und die Beziehung der neuen Teilgrößen zu den früheren (den Teilwerten von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$) festzustellen.

Ich setze allgemein:

$$\text{(13)}\quad \sigma_{x,y}(u \mid \omega_1, \omega_2) = e^{(x\eta_1 + y\eta_2)\left(u - \frac{x\omega_1 + y\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma(u - x\omega_1 - y\omega_2 \mid \omega_1, \omega_2),$$

insbesondere auch für den Nullwert kurzweg:

$$\text{(14)}\quad \sigma_{x,y}(0 \mid \omega_1, \omega_2) = \sigma_{x,y}(\omega_1, \omega_2).$$

Bei der Teilung durch n oder der Transformation n-ter Ordnung sollen von diesen Funktionen insbesondere diejenigen in Betracht kommen, bei denen x, y rationale Zahlen mit dem Nenner n sind. Sei demensprechend

$$\text{(15)}\quad x = \frac{\lambda}{n}, \quad y = \frac{\mu}{n}.$$

Ich werde dann zumeist, insofern kein Mißverständnis zu befürchten ist, den Nenner n einfach unterdrücken, und also die in Betracht kommenden Funktionen folgendermaßen schreiben:

$$\text{(16)}\quad \sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2), \quad \sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1, \omega_2),$$

oder auch kurzweg, wenn ω_1, ω_2 als selbstverständliche Argumente gelten:

$$\text{(16b)}\quad \sigma_{\lambda,\mu}(u), \quad \sigma_{\lambda,\mu}.$$

Die Nullwerte $\sigma_{\lambda,\mu}$ und die Quotienten $\sigma_{\lambda,\mu}(u) : \sigma(u)$ sind algebraische Funktionen von g_2, g_3 [und natürlich von $\wp(u)$, $\wp'(u)$].

Um dies zu zeigen, bedürfen wir einmal der Sätze, welche im folgenden Paragraphen über das Verhalten unserer Funktionen bei linearer

[12]) Man sehe hier und im folgenden die bereits auf S. 139 genannten Arbeiten von Kiepert, zu denen sich die allernächsten Beziehungen ergeben. Was ältere Untersuchungen angeht, so will ich insbesondere auf die Habilitationsschrift von Herrn Schröter (Breslau 1855) verweisen, in welcher die Teilwerte der ϑ-Funktion in einer meinen eigenen Tendenzen nahe verwandten Weise eingeführt werden, aber doch immer nur, da die Kenntnis der σ-Funktion fehlt, bis auf einen allen gemeinsamen Faktor definiert erscheinen.

Transformation der Perioden aufgestellt werden sollen, und die darauf hinauslaufen, daß unsere Funktionen bei genannter Transformation nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte annehmen. Wir bedürfen andererseits der Reihenentwicklungen unserer Größen nach Potenzen von q, die wir finden, indem wir auf den Zusammenhang der σ-Funktion mit der ϑ-Funktion zurückgehen. Wir haben nach kurzer Zwischenrechnung:

$$\text{(17)}\quad \frac{\sigma_{x,y}(u)}{\sigma(u)} = e^{\frac{-2i\pi x}{\omega_2}\left(u - \frac{x\omega_1 + y\omega_2}{2}\right)} \cdot \frac{\vartheta_1\left((u - x\omega_1 - y\omega_2)\frac{\pi}{\omega_2}, q\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2}, q\right)}.$$

Der Faktor, mit welchem hier rechter Hand der ϑ-Quotient multipliziert ist, läßt sich in folgende Form setzen:

$$e^{i\pi xy} \cdot q^{x^2} \cdot e^{\frac{-2i\pi xu}{\omega_2}}.$$

Unser Satz beruht wesentlich darauf, daß hier q mit einem Exponenten verbunden erscheint, der unter der Voraussetzung (15) eine rationale Zahl wird. Denn dies besagt vermöge einer Schlußweise, die in meinen früheren Arbeiten über elliptische Modulfunktionen vorgebildet ist, daß die endlichwertige Funktion von g_2, g_3, mit der wir es zu tun haben, in bezug auf g_2, g_3 nirgendwo eine wesentliche Singularität besitzt. Ich darf mich hier um so mehr mit dieser Andeutung begnügen, als wir ohnehin demnächst zur Wertbestimmung unseres Quotienten (17), bez. des Nullwertes $\sigma_{\lambda,\mu}$ explizite Formeln aufstellen werden.

Möge folgende beiläufige Bemerkung zur allgemeinen Systematik der elliptischen Funktionen gleich hier eine Stelle finden. So wie die Funktion ϑ_1, der Formel (5) entsprechend, von $\sigma(u)$ $(= \sigma_{0,0}(u))$ nur um einen Faktor abweicht, so stimmen die drei anderen ϑ-Funktionen:

$$\text{(18)}\quad \vartheta(x, q), \quad \vartheta_2(x, q), \quad \vartheta_3(x, q),$$

welche man im Anschlusse an Jacobi und Hermite mit ϑ_1 zusammen zu betrachten und der Theorie der elliptischen Funktionen gleichförmig zugrunde zu legen pflegt, in der Hauptsache mit denjenigen $\sigma_{x,y}(u)$ überein, die

$$x = \tfrac{1}{2}, \; y = 0; \quad x = 0, \; y = \tfrac{1}{2}; \quad x = \tfrac{1}{2}, \; y = \tfrac{1}{2}$$

entsprechen[13]). *Es bietet sich hier der Gedanke, die Jacobi-Hermite-*

[13]) In Weierstrass' Vorlesungen werden die drei ϑ-Funktionen (18) bekanntlich durch $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ ersetzt; es sind dies unsere drei σ-Funktionen

$$\sigma_{\frac{1}{2},0}(u), \quad \sigma_{0,\frac{1}{2}}(u), \quad \sigma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(u),$$

jede dividiert durch ihren Nullwert (so daß $\sigma_1(0)$, $\sigma_2(0)$, $\sigma_3(0)$ bei Weierstrass übereinstimmend gleich 1 sind).

sche Theorie so zu generalisieren, daß man für beliebig anzunehmendes n die n^2 Größen

$$\sigma_{\frac{\lambda}{n}, \frac{\mu}{n}}(u) \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots, (n-1)) \tag{19}$$

simultan betrachtet. Dieser Gedanke ist gewissermaßen in der Theorie der Normalkurven von der Ordnung n^2 enthalten, wie ich indes nicht ausführen will[14]). Es ist derselbe Gedanke, dessen Durchführung neuerdings von den Herren Prym und Krazer in Angriff genommen worden ist[15]). Indem die genannten Autoren von der ϑ-Reihe ausgehen und diese gleich für p Veränderliche in Betracht ziehen, erhalten sie eine ϑ-Relation von außerordentlicher Allgemeinheit. Ich werde im folgenden der so gewonnenen Thetarelation noch zu gedenken haben. Indem ich mich durchaus auf den Fall $p = 1$ beschränke, notiere ich hier als Unterschied, daß die genannten Forscher nicht von $\vartheta_1(x, q)$ ausgehen, wie dies durch (17) indiziert wird, sondern von $\vartheta(x, q)$. Für die Technik der ϑ-Relationen kommt dieser Unterschied, wie selbstverständlich, nur unwesentlich in Betracht. Wenn aber die auftretenden Formeln, was in der Folge bei uns geschehen muß, auf ihr Verhalten bei linearer Transformation der Perioden untersucht werden sollen, so ist es durchaus nötig, an dem ϑ_1 als der richtigen Fundamentalfunktion festzuhalten, und es dürfte sich dann überhaupt empfehlen, mit den Funktionen $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$, wie wir sie vorstehend definierten, zu operieren, insofern dann alle störenden Exponentialfaktoren, die sonst immer wieder in Betracht gezogen werden müssen, mit einem Schlage wegfallen.

Die allgemeinen Funktionen $\sigma_{x,y}(u)$, die wir in (13) definierten, treten in natürlich anderer Bezeichnung ebenfalls verschiedentlich in der Literatur auf. Ich will diesbezüglich hier nur hervorheben, daß die „analytische Invariante Λ“, welche Herr Kronecker in seinen neuesten Untersuchungen zur Theorie der elliptischen Funktionen einführt[16]), in unserer Bezeichnung $\log\left|\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{x,y}\right|$ ist (wo $\left|\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{x,y}\right|$ den absoluten Betrag von $\sqrt[12]{\Delta}\cdot\sigma_{x,y}$ bedeuten soll).

---

[14]) Vgl. für $n = 4$ die schon genannte Dissertation von Lange.

[15]) Acta Mathematica, Bd. 3 (1883/84): *Über die Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel*; vgl. auch den vorausgehenden Aufsatz von Krazer im 22. Bande der Math. Annalen (1883): *Über Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind.* Herr Krazer hat dort allein den Fall $p = 1$ in Betracht gezogen und übrigens seine Formeln mit den bereits genannten auf $n = 3$ bezüglichen Untersuchungen von Herrn Bianchi in Verbindung gesetzt.

[16]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1883; siehe insbesondere S. 497 bis 506, 525 bis 530 daselbst.

§ 2.

Verhalten der Teilwerte bei linearer Veränderung der Argumente.

Wir haben unsere $\sigma_{\lambda,\mu}$ soeben (Formel (19)) der Einschränkung $\lambda, \mu = 0, 1, \ldots (n-1)$ unterworfen. Diese Einschränkung ist selbstverständlich unwesentlich. Vermehrt man nämlich λ und μ um irgendwelche ganzzahlige Multipla von n, so erhält man folgende Formel:

$$\sigma_{\lambda+ln, \mu+mn}(u) = (-1)^{lm+l+m} \cdot e^{\frac{-i\pi}{n}(l\mu - m\lambda)} \cdot \sigma_{\lambda,\mu}(u). \tag{20}$$

Es ist also $\sigma_{\lambda+ln, \mu+mn}(u)$ von $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ nur um einen konstanten Faktor verschieden. Die Zahl der linear unabhängigen Nullwerte der $\sigma_{\lambda,\mu}$ reduziert sich noch weiter. Einmal nämlich ist $\sigma_{0,0} = \sigma(0) = 0$, andererseits aber findet man:

$$e^{(\mu-\lambda)\frac{i\pi}{n}} \cdot \sigma_{\lambda,\mu} = \sigma_{n-\lambda, n-\mu}, \tag{21}$$

so daß beispielsweise bei ungeradem n nur $\frac{n^2-1}{2}$ Größen $\sigma_{\lambda,\mu}$ zu unterscheiden sind.

Ich stelle nunmehr einige Formeln zusammen, welche sich auf das Verhalten unserer Teilwerte einerseits bei *Vermehrung des u um Multipla der Perioden*, andererseits bei *linearer Transformation der Perioden* beziehen.

In ersterer Hinsicht berechnen wir sofort:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\lambda,\mu}(u + l\omega_1 + m\omega_2) \\ &= e^{\frac{2i\pi(l\mu - m\lambda)}{n}} \cdot (-1)^{lm+l+m} \cdot e^{(l\eta_1 + m\eta_2)\left(u + \frac{l\omega_1 + m\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma_{\lambda,\mu}(u), \end{aligned} \tag{22}$$

woraus für den Quotienten $\sigma_{\lambda,\mu}(u) : \sigma(u)$ das nachstehende Verhalten folgt:

$$\frac{\sigma_{\lambda,\mu}(u + l\omega_1 + m\omega_2)}{\sigma(u + l\omega_1 + m\omega_2)} = e^{\frac{2i\pi(l\mu - m\lambda)}{n}} \cdot \frac{\sigma_{\lambda,\mu}(u)}{\sigma(u)}. \tag{23}$$

Der Quotient $\sigma_{\lambda,\mu}(u) : \sigma(u)$ hat also die Eigenschaft, bei Vermehrung des u um Multipla der Perioden bis auf eine bestimmte als Faktor vortretende n-te Einheitswurzel ungeändert zu bleiben[17]).

---

[17]) Man vgl. Kiepert im 76. Bande des Journals für Mathematik (1872/73), S. 28 ff., oder auch Jacobis alte Abhandlung: *De functionibus ellipticis commentatio prima*, Crelles Journal Bd. 4 (1829) [= Ges. Werke, Bd. 1], wo unter anderer Bezeichnung dasselbe Theorem bereits vorkommt. Ich möchte gleich hier bei der ersten sich darbietenden Gelegenheit generell auf jene Arbeiten verweisen, die Jacobi bald nach Publikation der Fundamenta folgen ließ, indem ich wesentlich dort die Rechnungsmethoden gefunden habe, deren ich mich weiterhin für meine Zwecke bediene, was immer wieder durch besondere Zitate nachzuweisen zu weitläufig sein würde.

Wir notieren noch folgende Formel

$$\sigma_{\lambda,\mu}(-u) = -\sigma_{-\lambda,-\mu}(u) \tag{24}$$

(die der Formel (22) gewissermaßen koordiniert ist) und wenden uns zur linearen Transformation der Perioden. Ich will mich dabei der Einfachheit halber auf solche Transformationen beschränken, die modulo n zur Identität kongruent sind, die also folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\begin{cases} \omega_1' = (an+1)\omega_1 + bn\cdot\omega_2, \\ \omega_2' = cn\cdot\omega_1 + (dn+1)\omega_2, \end{cases} \tag{25}$$

wo

$$(ad-bc)n + (a+d) = 0. \tag{25b}$$

Berücksichtigen wir, daß den Substitutionen (25) entsprechend für die η_1, η_2 durchaus ähnliche Formeln bestehen:

$$\eta_1' = (an+1)\eta_1 + bn\cdot\eta_2,$$
$$\eta_2' = cn\cdot\eta_1 + (dn+1)\eta_2,$$

so finden wir nach kurzer Rechnung:

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1', \omega_2') \tag{26}$$
$$= (-1)^{\lambda^2(ab+a+b)+\lambda\mu(ad+bc)+\mu^2(cd+c+d)} \cdot e^{\frac{i\pi}{n}(b\lambda^2+(d-a)\lambda\mu-c\mu^2)} \cdot \sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2).$$ [18])

Diese Formel ist gewissermaßen der eben abgeleiteten (23) analog. *Die Funktionen $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$, oder ihre Nullwerte $\sigma_{\lambda,\mu}$, erscheinen, als Modulfunktionen aufgefaßt, nicht etwa direkt als Funktionen n-ter Stufe. Vielmehr gehören sie zu denjenigen Funktionen, welche man der n-ten Stufe adjungiert nennen könnte, insofern sie sich bei linearen Substitutionen, die modulo n zur Identität kongruent sind, nur um eine als Faktor vortretende Einheitswurzel ändern.* Solche Funktionen benutzt man mit Vorteil, um aus ihnen als Faktoren Moduln der n-ten Stufe zusammenzusetzen, wozu wir im folgenden vielfache Beispiele kennen lernen werden.

Was den in (26) auftretenden Faktor angeht, so erscheint derselbe zunächst als eine $2n$-te Einheitswurzel. Indes ist leicht zu sehen, daß sich derselbe bei ungeradem n (dem einzigen Falle, den wir fernerhin behandeln) zu einer n-ten Einheitswurzel zusammenzieht. Aus (25b) folgt nämlich, daß für ungerade n immer folgende Relationen statthaben:

$$ab + a \equiv cd + d \equiv 0, \quad ad + bc \equiv a - d \pmod{2}.$$

[18]) Übrigens hat man, wie ebenfalls angeführt sei, bei beliebiger [unimodularer] linearer Transformation der ω_1, ω_2:

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,$$
$$\omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2$$

die folgende Formel:

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1', \omega_2') = \sigma_{\alpha\lambda+\gamma\mu,\,\beta\lambda+\delta\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

Wir können daher (26), indem wir für (-1) die Größe $e^{i\pi}$ einführen und übrigens, wie immer im folgenden, ε für $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ schreiben, folgendermaßen umgestalten:

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1', \omega_2') = \varepsilon^{\frac{n-1}{2}(-b\lambda^2+(a-d)\lambda\mu+c\mu^2)} \cdot \sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1\ \omega_2), \tag{26b}$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. *Die n-te Potenz*

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2)^n$$

erweist sich jetzt als Modulfunktion der n-ten Stufe. — Übrigens sieht man leicht, daß der in (26b) auftretende Exponentialfaktor für sämtliche $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ gleichzeitig nur dann in Wegfall kommt, wenn b, c und $(a-d)$, und also, wegen (25b), auch a und d einzeln durch n teilbar sind. *In diesem Sinne gehört das System der $\sigma_{\lambda,\mu}(u \mid \omega_1, \omega_2)$ bei ungeradem n zur Stufe n^2.*

§ 3.

Herstellung anderer Größen aus den Teilwerten.

Wir gedachten bereits der Möglichkeit, aus den Quotienten $\sigma_{\lambda,\mu}(u) : \sigma(u)$ (oder auch aus den Nullwerten $\sigma_{\lambda,\mu}$) solche Modulfunktionen zusammenzusetzen, welche der n-ten Stufe angehören; Formel (23) bietet die Möglichkeit, die Formeln zugleich so einzurichten, daß die entstehende Funktion in u um ω_1, ω_2 doppeltperiodisch ist. Ich wünsche hier hervorzuheben, daß sämtliche Hauptfunktionen der Teilungs- oder Transformationstheorie auf solche Weise entstehen.

Erinnern wir uns zunächst der Fundamentalformeln:

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\cdot\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\cdot\sigma(v)^2}, \quad \wp'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma(u)^4}. \tag{27}$$

Wir schließen aus ihnen:

$$\wp\left(u - \frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right) - \wp\left(\frac{\lambda'\omega_1+\mu'\omega_2}{n}\right) = -\frac{\sigma_{\lambda+\lambda',\mu+\mu'}(u)\cdot\sigma_{\lambda-\lambda',\mu-\mu'}(u)}{\sigma_{\lambda,\mu}(u)^2\cdot\sigma_{\lambda',\mu'}^2}, \tag{28}$$

$$\wp'\left(u - \frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right) = -\frac{\sigma_{2\lambda,2\mu}(2u)}{\sigma_{\lambda,\mu}(u)^4}. \tag{29}$$

Setzen wir hier $u = 0$, so erfahren wir ohne weiteres die Teilgrößen $\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ als Funktionen der $\sigma_{\lambda,\mu}$. Aber auch die $\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ werden wir als solche berechnen, wenn wir noch hinzunehmen, daß die Summe $\sum\left(\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)\right)$, ausgedehnt über alle $\frac{n^2-1}{2}$ unterschiedenen Teilgrößen, bekanntermaßen gleich 0 ist.

Was Transformationstheorie betrifft, so gedenken wir der drei Fundamentalfunktionen, die wir unter (10) bis (12) einführten. Wir haben zunächst in bekannter Weise:

$$(30)\qquad e^{-G_1 u^2}\cdot\frac{\sigma\left(u\,\middle|\,\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)}{\sigma(u\,|\,\omega_1, \omega_2)^n}=\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\wp(u)-\wp\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)\right).$$

Greifen wir hier auf (28) zurück, so kommt:

$$(31)\qquad e^{-G_1 u^2}\cdot\sigma\left(u\,\middle|\,\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\prod\limits_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu}(u)}{\left(\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu}\right)^2}.$$

Wir behandeln ferner den Quotienten

$$\sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$$

mit der Produktentwicklung (7). Herr **Kiepert** hat bereits bemerkt, daß man das entstehende Produkt nach Abtrennung eines Exponentialfaktors als Aggregat von $\frac{n-1}{2}$ Faktoren $\sigma\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\,\middle|\,\omega_1, \omega_2\right)$ darstellen kann (vgl. Crelles Journal, Bd. 87 (1879), S. 203). Führen wir die Bezeichnung $\sigma_{\lambda,\mu}$ ein, so fallen aus seiner Formel alle Exponentialgrößen fort und wir haben einfach:

$$(32)\qquad \sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu}.$$

Wir kombinieren endlich (31), (32) in geeigneter Weise. So kommt, der Formel (12) entsprechend:

$$(33)\qquad \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}\cdot e^{-G_1u^2}\cdot\sigma\left(u\,\middle|\,\omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)=\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu}\cdot\prod_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu}(u),$$

womit in der Tat in allen Fällen die gewollte Darstellung geleistet ist.

§ 4.

Beziehung unserer Teilwerte auf die $\wp_{\lambda,\mu}$, $\wp'_{\lambda,\mu}$.

Es ist ein Hauptsatz in der Theorie der Modulfunktionen n-ter Stufe, daß alle zu ihnen gehörigen, von g_2, g_3 algebraisch abhängenden Funktionen in den $\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ rational sind. Man wird verlangen, daß solche Verbindungen der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ oder der $\sigma_{\lambda,\mu}$, welche der Formel (26) nach unter die Bedingungen des Satzes fallen, explizit als rationale Funktionen der $\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ darzustellen.

Ich will dies hier nur für zweierlei Kombinationen der $\sigma_{\lambda,\mu}$ durchführen, nämlich erstens (unter der immer festgehaltenen Annahme, daß n ungerade sei) für die n-ten Potenzen der $\sigma_{\lambda,0}$, zweitens aber für $\sqrt[8]{\Delta:\Delta^n}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}}(\sigma_{0,\mu})^3$ oder auch, unter der Annahme, daß $n \not\equiv 0$ (mod. 3), für $\sqrt[24]{\Delta:\Delta^n}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu}$ (wobei die Einschränkung, der wir das n unterwerfen, in dem Umstande seine Erklärung findet, daß für $n\equiv 0$ (mod. 3), eben infolge von (26), $\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu}$ gar keine Modulfunktion der n-ten Stufe ist).

1. Was die in Rede stehende n-te Potenz von $\sigma_{\lambda,0}$ angeht, so gewinnen wir dieselbe am einfachsten, indem wir zunächst durch geeignete Ausmultiplikation aus (28) die Formel ableiten:

$$(35)\qquad \left(\frac{\sigma_{\lambda,0}(u)}{\sigma(u)}\right)^n=(-1)^{\lambda}\cdot\frac{\prod\limits_{\varrho=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\wp(u)-\wp\left(\frac{\varrho\omega_1}{n}\right)\right)}{\prod\limits_{\varrho=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\wp\left(u-\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)-\wp\left(\frac{\varrho\omega_1}{n}\right)\right)},$$

dann mit $\sigma(u)^n$ heraufmultiplizieren und $u=0$ setzen. Solcherweise kommt:

$$(36)\qquad (\sigma_{\lambda,0})^n=\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)\cdot\prod\limits_{\varrho=1}^{\frac{n-1}{2}}{}'\left(\wp\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)-\wp\left(\frac{\varrho\omega_1}{n}\right)\right)},$$

wo der dem Produktzeichen beigefügte Akzent bedeuten soll, daß der dem Werte $\varrho=\lambda$ entsprechende Faktor auszulassen ist.

2. Den Wert von $\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu}{}^3$ finden wir sofort aus (29). Das Resultat ist:

$$(37)\qquad \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu}{}^{3} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^{n}}} = \frac{1}{\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}} \wp'\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)}.$$

Sei nun, für $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, $n = 6g \pm 1$. Für diesen Fall gibt bereits Herr **Kiepert** im 87. Bande des Crelleschen Journals (1879), S. 202) eine Formel an, deren Beweis aus (28) fließt, und die in unserer Bezeichnung folgendermaßen lautet:

$$(38)\qquad \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu}{}^{2} = \sqrt[12]{\frac{\Delta}{\Delta^{n}}} = \frac{\pm 1}{\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\wp\left(\frac{2\mu\omega_2}{n}\right) - \wp\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)\right)}. \;[19])$$

Wir erhalten $\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^{n}}}$, indem wir (37) durch (38) beiderseitig dividieren[20]).

Abschnitt II.

Die Normalkurven n-ter Ordnung im allgemeinen und ihre zwiefache algebraische Darstellung.

§ 5.

Grundlegende Sätze.

Die Definition der Normalkurven n-ter Ordnung, die wir in Formel (1) voranstellten und an die wir jetzt anzuknüpfen haben, kann unbeschadet der Allgemeingültigkeit noch etwas partikulärer gefaßt werden. Wir verlangten bei (1), daß die Residuensummen Σa_i usw. einander gleich sein sollten. Wir wollen fortan voraussetzen, daß folgende Gleichungen statthaben:

$$(39)\qquad \Sigma a_i = \Sigma b_i = \ldots = \Sigma n_i = 0.$$

Die hierin liegende Umänderung ist durchaus unwesentlich, insofern sie nur eine Vermehrung des ursprünglich eingeführten Parameters u um eine geeignete Konstante bedeutet; sie erleichtert aber die Ausdrucksweise.

[19]) [Auf der rechten Seite gilt $+1$ oder -1, je nachdem n die Form $6g+1$ oder $6g-1$ hat. B.-H.]

[20]) [Wie schon auf S. 51, in Fußnote [32]) erwähnt, bilden diese Formeln den Ausgangspunkt für **Kieperts** Untersuchungen. K.]

Wir vermehren jetzt u in (1) um Multipla von Perioden. Die Rechnung gibt, daß die Verhältnisse der x bei dieser Umänderung völlig ungeändert bleiben. *Es genügt also, daß der Parameter u das durch ω_1, ω_2 fixierte Periodenparallelogramm überstreicht, damit der Punkt $x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1}$ jede Stelle der Normalkurve erreiche.*

Wir erinnern ferner, daß die σ-Produkte, welche in (1) auftreten, linear-unabhängig sein sollten. Dies heißt geometrisch, *daß unsere Kurve dem Raume von $(n-1)$ Dimensionen eigentlich angehört und nicht etwa schon in einen linearen Raum von einer geringeren Dimensionenzahl eingeschlossen ist.*

Wir ziehen endlich, als hauptsächliches Hilfsmittel für alles Folgende, den sogenannten Hermiteschen Satz heran[21]). Demselben zufolge verschwindet eine homogene ganze Funktion m-ten Grades der $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, aufgefaßt als Funktion von u, an mn Stellen des Periodenparallelogramms der u-Ebene und zwar an solchen mn Stellen, deren Argumente $u_1, u_2, \ldots$ der folgenden Bedingung genügen, bei welcher λ, μ ganze Zahlen bedeuten:

$$(40)\qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_{mn} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2;$$

umgekehrt aber, wenn die Bedingung (40) statt hat, so ist das Produkt:

$$(41)\qquad e^{(\lambda\eta_1 + \mu\eta_2)\left(u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{2}\right)} \cdot \prod_{1}^{mn} \sigma(u - u_i)$$

als ganze homogene Funktion m-ten Grades der $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ darstellbar.

Sei hier erstlich $m = 1$. So haben wir, daß jede lineare Verbindung der x n-mal auf unserer Normalkurve verschwindet, *daß also unsere Normalkurve in der Tat von der n-ten Ordnung ist.* Wir wollen jetzt neben $x_0, \ldots, x_{n-1}$ andere n Größen $x_0', \ldots, x_{n-1}'$ betrachten, welche ebenfalls zu linear-unabhängigen n-gliedrigen σ-Produkten von der Residuensumme Null proportional sein sollen. Der Hermitesche Satz besagt, daß sich die x' in den x und die x in den x' homogen linear darstellen lassen. *Je zwei Normalkurven n-ter Ordnung sind also kollinear verwandt, oder auch, anders ausgedrückt: es gibt für die projektive Auffassung nur eine Normalkurve n-ter Ordnung.* Bei Formulierung dieses Satzes werden natürlich die Perioden ω_1, ω_2 als konstante Größen betrachtet. — Wir wollen uns ferner die n Größen x' so eingerichtet denken, daß $x_0', x_1', \ldots, x_{n-2}'$ gemeinsam für $u = u_0$ verschwinden (daß also der Punkt

$$x_0 = x_1' = \ldots = x_{n-2}' = 0$$

[21]) **Hermite**, *Lettre à Mr. Jacobi* (vom August 1844). Siehe Crelles Journal, Bd. 32 (1846) oder **Jacobis** gesammelte Werke, Bd. 2 (insbesondere S. 102), [oder Oeuvres mathématiques de **Ch. Hermite**, tome I., S. 18 ff.].

unserer Kurve angehört). Lassen wir dann x'_{n-1} beiseite und deuten $x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_{n-2}$ im Raume von $(n-2)$ Dimensionen, so haben wir in diesem, da $\sigma(u-u_0)$ aus jedem der n-gliedrigen σ-Produkte als gemeinsamer Faktor herausfällt, eine Normalkurve von der $(n-1)$-ten Ordnung. *Die Normalkurve $(n-1)$-ter Ordnung kann also aus der Normalkurve n-ter Ordnung durch Projektion von einem beliebigen ihrer Punkte aus gewonnen werden.* Wir wollen jetzt den niedersten Fall $n=2$ außer Betracht lassen, der überhaupt als Grenzfall zu erachten ist[22]). Für $n=3$ haben wir in der Ebene eine eigentliche Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt. Von hier steigen wir zur Normalkurve vierter, fünfter Ordnung usw. auf, indem wir immer die niedere Normalkurve als die Projektion der nächstfolgenden betrachten. Wir schließen dann, *daß auch für $n > 3$ die Normalkurve n-ter Ordnung keinerlei vielfache Punkte oder mehrfach zählende Kurvenzüge besitzen kann*, daß also nur solche Parameterwerte u, u', welche bis auf Multipla der Perioden übereinstimmen, dieselben Verhältnisse der $x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1}$ ergeben können. *Die Normalkurve und das Periodenparallelogramm der u-Ebene sind demnach Punkt für Punkt eindeutig aufeinander bezogen.*

Sei ferner $m > 1$. Eine Gleichung m-ten Grades zwischen n homogenen Veränderlichen enthält

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-1)!} - 1$$

willkürliche Konstanten, während nach (40), (41) von den mn Schnittpunkten unserer Normalkurve mit einer Fläche m-ter Ordnung genau $(mn-1)$ willkürlich sind. *Daher gehen*

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-1)!} - mn$$

linear unabhängige Flächen m-ter Ordnung durch unsere Normalkurve hindurch, beispielsweise $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängige Flächen zweiter Ordnung.

Wir betrachten endlich die *eindeutigen Transformationen der Normalkurve in sich.* Es gilt, den Parameter u eines ersten Punktes mit dem Parameter u' eines zweiten Punktes der Normalkurve derart zu verbinden, daß eine Vermehrung von u um Perioden eine ebensolche Vermehrung von u' nach sich zieht und umgekehrt. Von den besonderen Fällen, in denen g_2 oder g_3 oder gar Δ verschwindet, will ich hier absehen. Dann

[22]) Vgl. hier überall meine Erläuterungen in der vorgenannten, der Münchener Akademie vorgelegten Note [= Nr. LXXXVIII in diesem Bande].

wird die allgemeinste Lösung der gestellten Aufgabe bekanntlich durch die Formel geliefert:

$$u' = \pm u + C, \tag{42}$$

wo nach Belieben das $+$ oder das $-$ Zeichen zu nehmen und C durchaus willkürlich ist, übrigens eine Vermehrung des C um Multipla der Perioden geometrisch für uns keine Bedeutung hat.

Wir fragen, wie sich diese eindeutigen Transformationen bei Benutzung der Koordinaten $x_0, \ldots, x_{n-1}$ algebraisch darstellen. Um die Koordinaten $x'_0, \ldots, x'_{n-1}$ des transformierten Punktes zu erhalten, werden wir $\pm u + C$ für u in (1) eintragen, also schreiben

$$\varrho x'_0 = A \prod_1^n \sigma(\pm u + C - a_i) \qquad \text{usw.}$$

Da $\sigma(-u) = -\sigma(u)$ und $\Sigma a_i = \Sigma b_i = \ldots = 0$, so ist die Residuensumme der n hier entstehenden σ-Produkte je $\mp nC$. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden, je nachdem nC modulo der Perioden ω_1, ω_2 zu Null kongruent ist, oder nicht.

Ersterer Fall tritt nur für diejenigen Werte von C ein, welche die Form haben: $\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$, wo die ganzen Zahlen λ, μ noch je auf das Intervall von 0 bis $(n-1)$ eingeschränkt werden können, so daß hier im ganzen n^2 verschiedene Werte von C in Betracht kommen. Die neuen Koordinaten $x'_0, \ldots, x'_{n-1}$ sind dann, dem Hermiteschen Satze zufolge, mit *linearen* Verbindungen der $x_0, \ldots, x_{n-1}$ proportional. *Die Normalkurve geht also, den $2n^2$ Substitutionen*

$$u' = \pm u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \tag{43}$$

entsprechend, durch $2n^2$ Kollineationen des Raumes in sich über.

Im zweiten Falle können wir die n-gliedrigen σ-Produkte $x'_0, \ldots, x'_{n-1}$ nur so mit möglichst niedrigen ganzen Funktionen der $x_0, \ldots, x_{n-1}$ proportional setzen, daß wir sie vorab durch gemeinsame Zufügung irgendeines neuen n-gliedrigen σ-Produkts

$$\prod_1^n \sigma(u - s_i),$$

dessen Residuensumme $= \mp nC + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ ist, zu $2n$-gliedrigen σ-Produkten ergänzen, deren Residuensumme $(= \lambda\omega_1 + \mu\omega_2)$ unter die Bedingungen des Hermiteschen Satzes fällt. Die so modifizierten x' werden dann zu ganzen Funktionen zweiten Grades der $x_0, \ldots, x_{n-1}$ proportional (allgemeines „Additionstheorem" der x, ein Gegenstand, den ich nicht weiter verfolge).

§ 6.

Von der algebraischen Darstellung der Normalkurven.

Was die algebraische Darstellung der Normalkurven, d. h. die Darstellung durch algebraische, zwischen den $x_0, \ldots, x_{n-1}$ bestehende Gleichungen angeht, so ist diese in allgemeinster Form nur für die kleinsten n, bei $n = 2, 3, 4$ bekannt: bei $n = 2$ haben wir überhaupt keine Gleichung, bei $n = 3$ eine einzelne Gleichung dritten Grades, bei $n = 4$ irgend zwei Gleichungen zweiten Grades zur Definition der Kurve anzuschreiben. Ich werde später zeigen, was Herr Bianchi speziell bei $n = 5$ nachwies, daß nämlich für größere Werte von n unsere Normalkurve immer als Schnitt der bereits genannten $\frac{n(n-3)}{2}$ Flächen zweiter Ordnung, welche durch sie hindurchgehen, definiert werden kann. Aber diese Flächen zweiter Ordnung sind keineswegs voneinander unabhängig, und es ist eine durchaus offene Frage, wie man in allgemeinster Weise $\frac{n(n-3)}{2}$ Gleichungen zweiten Grades zwischen n homogenen Veränderlichen hinzuschreiben hat, damit die entsprechenden Flächen zweiten Grades eine Normalkurve der n-ten Ordnung gemein haben. Handelt es sich um Definition der Normalkurven n-ter Ordnung durch algebraische Gleichungen, so wird man hiernach bis auf weiteres *besondere Koordinatensysteme* zugrunde zu legen haben. Eben hierdurch gewinnen dann unsere Betrachtungen Bedeutung für die Theorie der elliptischen Modulfunktionen im engeren Sinne.

Ich werde den bezeichneten Gedanken, der sehr verschiedener Modifikationen fähig ist, des weiteren in doppelter Weise ausführen. Die zu benutzenden Koordinatensysteme sollen beide in engster Beziehung zu denjenigen n^2 Punkten der Normalkurve stehen, welche ich die *singulären* nenne. *Es sind dies diejenigen n^2 Punkte, deren Parameter u in der Form enthalten sind:*

$$u = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}. \tag{44}$$

Die geometrische Eigentümlichkeit dieser Punkte liegt ohne weiteres zutage, indem für jeden derselben

$$nu \equiv 0 \ (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$$

ist, der einzelne Punkt also, n-fach gezählt, den vollen Schnitt der Normalkurve mit einer zutretenden Ebene vorstellt; es sind, um einen Ausdruck der analytischen Geometrie des Raumes von 3 Dimensionen zu entnehmen, die *Hyperoskulationspunkte* der Raumkurve. — Beispiel, $n = 3$ entprechend: die 9 Wendepunkte der ebenen Kurve dritter Ordnung.

Eben das Beispiel der ebenen Kurve dritter Ordnung mag nun dazu dienen, um die beiden Koordinatensysteme, welche fortan benutzt werden sollen, und von denen ich das eine das ***kanonische***, das andere das ***singuläre*** System nenne, nach ihren Haupteigenschaften zu charakterisieren.

A. Das kanonische Koordinatensystem der C_3.

Es seien $\wp(u)$, $\wp'(u)$ die Weierstrassischen Funktionen, zwischen denen die Relation statthat:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \tag{45}$$

Ich setze nun einfach:

$$\wp' = \frac{x_2}{x_0}, \quad \wp = \frac{x_1}{x_0}, \tag{46}$$

und betrachte die $x_0 : x_1 : x_2$ als Koordinaten eines Punktes der Ebene. Aus (45) erhalten wir

$$x_0 x_2^2 = 4x_1^3 - g_2 x_0^2 x_1 - g_3 x_0^3, \tag{47}$$

der Punkt durchläuft also eine Kurve dritter Ordnung. Die einfache Gestalt, welche die Gleichung dieser Kurve darbietet, ist eben diejenige, die ich die *kanonische* nenne.

Bemerken wir vor allem, daß die durch (46) gegebene Einführung der $x_0 : x_1 : x_2$ als spezieller Fall unter den Formeln (1) inbegriffen ist. Sei nämlich der Kürze halber geschrieben:

$$\wp(u) = \frac{\Sigma(u)}{\sigma(u)^2}, \quad \wp'(u) = -2\frac{\mathsf{T}(u)}{\sigma(u)^3}, \tag{48}$$

wo $\Sigma(u)$, $\mathsf{T}(u)$ zwei wohlbekannte, aus 2 bez. 3 Faktoren bestehende σ-Produkte vorstellen. Wir können dann (46) sofort durch folgende Formeln ersetzen:

$$\varrho x_0 = \sigma(u)^3, \quad \varrho x_1 = \sigma(u)\cdot\Sigma(u), \quad \varrho x_2 = -2\mathsf{T}(u), \tag{49}$$

die sich auch formal unter die allgemeine Definition (1) subsumieren.

Suchen wir ferner das Koordinatensystem, welches bei (47) zugrunde liegt, geometrisch zu verstehen. Wir erkennen sofort, daß $x_0 = x_1 = 0$ einen der neun Wendepunkte unserer Kurve, $x_0 = 0$ die zugehörige Wendetangente, $x_2 = 0$ die harmonische Polare vorstellt. Die geometrische Definition von $x_1 = 0$ ist ein wenig komplizierter. Die Linie $x_1 = 0$ ist unter den Geraden des Büschels $x_0 + \lambda x_1 = 0$ diejenige, welche der Wendetangente $x_0 = 0$ als erste [geradlinige] Polare in bezug auf die drei weiteren vom Wendepunkte ($x_0 = x_1 = 0$) an die Kurve laufenden Tangenten korrespondiert. — Den 18 Kollineationen entsprechend, welche die C_3 in sich überführen, kann man bei gegebener C_3 die Gleichungsform (47) auf 18 Weisen herstellen. Ein jeder der 9 Wendepunkte gibt allerdings nur zu einem kanonischen Koordinaten-dreiecke Anlaß, aber zu jedem Dreiecke gehören zwei kanonische Darstellungen, indem (47) ungeändert bleibt, wenn wir x_2 im Vorzeichen ändern, was eine der 18 in Aussicht genommenen Kollineationen ist.

Wir besprechen noch die in (47) auftretenden Koeffizienten. Dieselben sind, als Modulfunktionen betrachtet, von der ersten Stufe, wie a priori notwendig, wenn man bemerkt, daß $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ selbst, — oder auch $\sigma(u)$, $\Sigma(u)$, $\mathrm{T}(u)$ — der ersten Stufe angehören. Dem entspricht, was ich hier ohne Beweis anführe, daß die in (47) auftretenden g_2, g_3 von den rationalen Invarianten vierten und sechsten Grades, welche die durch (47) dargestellte Kurve dritter Ordnung im Sinne der Aronholdschen Theorie besitzt, nur durch Zahlenfaktoren verschieden sind[23]). *Trotzdem also eine beliebig gegebene Kurve dritter Ordnung auf 18 Weisen in die Gleichungsform* (47) *gesetzt werden kann, sind die in dieser Gleichungsform auftretenden Koeffizienten von vornherein rational bekannt.* Der Grund hierfür liegt in der schon hervorgehobenen Tatsache, daß sämtliche 18 kanonische Darstellungen einer Kurve dritter Ordnung aus einer derselben vermöge derjenigen Kollineationen hervorgehen, welche, anders aufgefaßt, die Kurve dritter Ordnung in sich selbst überführen[24]).

B. Das singuläre Koordinatensystem der C_3.

Bekanntlich liegen die 9 Wendepunkte einer ebenen Kurve dritter Ordnung zwölfmal zu drei auf einer Geraden, worauf man aus den zwölf solcherweise entstehenden „Wendelinien" vier Dreiecke (die „Wendedreiecke" der Kurve) zusammensetzen kann, derart, daß die drei Seiten des einzelnen Dreiecks zusammengenommen sämtliche neun Wendepunkte enthalten. Jetzt lassen wir die drei Achsen des Koordinatensystems x_0, x_1, x_2 mit den drei Seiten eines Wendedreiecks zusammenfallen und fixieren die absoluten Werte von $x_0 : x_1 : x_2$ in solcher Weise, daß die Kurve bei zyklischer Vertauschung der drei Koordinaten in sich übergeht. *So entsteht die sogenannte Hessesche Normalform der Kurvengleichung:*

$$(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) + 6\,a \cdot x_0 x_1 x_2 = 0, \tag{50}$$

welche wir hier als die *singuläre* Gleichungsform bezeichnen.

[23]) [Es ist nämlich $S = \frac{-4}{27} g_2$, $T = \frac{64}{27} g_3$, wo S und T die Aronholdschen Bezeichnungen sind. B.-H.]

[24]) Ich habe die Verhältnisse des kanonischen Koordinatensystems bei den Kurven dritter Ordnung so ausführlich besprochen, weil ich glaubte, damit zugleich seine geometrische Bedeutung für die höheren Normalkurven (bei denen ich die jetzt im Texte gegebenen Erläuterungen nicht noch einmal wiederholen werde) hinreichend bezeichnen zu können. Merkwürdigerweise wurde das kanonische Koordinatensystem bei den Kurven dritter Ordnung von den Geometern bisher nur wenig und bei den Raumkurven vierter Ordnung wohl gar nicht betrachtet.

Die transzendente Definition der in (50) auftretenden x_0, x_1, x_2 (welche bei der Verallgemeinerung zugrunde gelegt werden muß) ist äußerst einfach. Bezeichnen wir mit Clebsch den Wendepunkt, dessen Argument $\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$ ist, mit (λ, μ), so enthalten die geraden Linien $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ etwa diejenigen Wendepunkte, welche in folgendem Schema je in eine Horizontalreihe zusammengestellt sind:

$$\left\{\begin{array}{lll} 00, & 01, & 02; \\ 10, & 11, & 12; \\ 20, & 21, & 22. \end{array}\right. \tag{51}$$

Gleichzeitig wird diejenige Kollineation, welche durch eine zyklische Vertauschung der x_0, x_1, x_2 vorgestellt wird, in transzendenter Form gegeben sein, indem man u um ein Drittel der ersten Periode vermehrt. Daß diese Angaben genügen, um die x_0, x_1, x_2 bestimmten dreigliedrigen σ-Produkten proportional zu setzen, möge man a. a. O. bei Bianchi nachsehen. Ich selbst verschiebe die betreffende Erörterung bis später, wo für ein beliebiges ungerades n aus den entsprechenden Bedingungen singuläre $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ gewonnen werden sollen.

§ 7.

Zweierlei Koordinatensysteme bei beliebiger Normalkurve.

Wenn es sich jetzt darum handelt, die zweierlei Koordinatensysteme von der Normalkurve dritter Ordnung auf die Normalkurve n-ter Ordnung zu übertragen, so ist dies an sich, wie jede Verallgemeinerung, eine unbestimmte Aufgabe.

Ich suche die kanonische Darstellung in der Weise zu übertragen, daß ich, der Formel (46) *entsprechend, die $x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1}$ mit geeigneten Potenzen und Produkten von $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ proportional setze.* Es muß dies nur in solcher Weise geschehen, daß durch Heraufmultiplizieren mit $\sigma(u)^n$ überall n-gliedrige σ-Produkte entstehen, und zwar solche, die untereinander linear unabhängig sind. Beispielsweise dürfte bei ungeradem n sich folgender Ansatz empfehlen:

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 : x_1 \ldots : x_{\frac{n-1}{2}} : x_{\frac{n+1}{2}} : x_{\frac{n+3}{2}} : \ldots : x_{n-1} \\ = 1 : \wp(u) : \ldots : \wp(u)^{\frac{n-1}{2}} : \wp'(u) : \wp'(u)\wp(u) : \ldots : \wp'(u)\wp(u)^{\frac{n-3}{2}}, \end{array}\right. \tag{52}$$

dem für gerades n der folgende zur Seite steht:

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 : x_1 : \ldots : x_{\frac{n}{2}} : x_{\frac{n+2}{2}} : x_{\frac{n+4}{2}} : \ldots : x_{n-1} \\ = 1 : \wp(u) : \ldots : \wp(u)^{\frac{n}{2}} : \wp'(u) : \wp'(u)\wp(u) : \ldots : \wp'(u)\wp(u)^{\frac{n-4}{2}}. \end{array}\right. \tag{52b}$$

Vielleicht auch scheint es eleganter, statt (52) und (52b) die einheitliche Formel zugrunde legen, die schließlich dasselbe leistet:

$$(53) \qquad \begin{cases} x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_{n-1} \\ = 1 : \wp(u) : \wp'(u) : \wp''(u) : \ldots : \wp^{(n-2)}(u) \end{cases}$$

(wo der Index $(n-2)$ eine $(n-2)$fache Differentiation bedeutet), doch meine ich, daß man mit den Koordinaten (52) besser rechnet.

Schwieriger, weil um vieles mannigfaltiger, ist die Verallgemeinerung der *singulären* Darstellung. Wir werden an Stelle des Wendedreiecks jedenfalls ein solches Polyeder der Koordinatenbestimmung zugrunde legen wollen, dessen n Ebenen zusammengenommen sämtliche n^2 singuläre Punkte enthalten. Daß es in allen Fällen solche Polyeder gibt, beweist man leicht auf dem Wege des Versuches mit Hilfe des Abelschen Theorems (indem immer solche n singuläre Punkte in einer Ebene liegen, deren Argumente zueinander addiert eine Summe ergeben, die modulo ω_1, ω_2 gleich Null ist). Nun wird aber die Zahl dieser Polyeder bei wachsendem n übergroß, und eine nähere Überlegung zeigt, daß die entstehenden Polyeder nicht etwa, wie die Wendedreiecke bei der Kurve dritter Ordnung, alle gleichberechtigt sind (was man mit Hilfe der $2n^2$ Kollineationen und übrigens durch lineare Transformationen der Perioden ω_1, ω_2 untersucht), daß selbige vielmehr verschiedenartigen Klassen angehören. So findet Herr Lange in seiner wiederholt genannten Dissertation, daß bei $n = 4$ im ganzen 745 Tetraeder der gewünschten Beschaffenheit existieren, welche sich den genannten Operationen gegenüber auf sechs verschiedene Klassen verteilen. An und für sich scheint es nicht schwierig, bei beliebigem n diese Aufzählung zu wiederholen und nun für jedes der so entstehenden Polyeder als Koordinatenpolyeder die algebraische Darstellung der Normalkurve zu diskutieren[25]). Aber praktische Rücksichten lassen bei gegenwärtiger Gelegenheit betreffs der formulierten Aufgabe eine Beschränkung als durchaus notwendig erscheinen.

Indem ich mich, was die singuläre Darstellung angeht, im folgenden auf den Fall des ungeraden n beschränke, will ich ein Koordinatensystem

[25]) Vielleicht sollte man überhaupt alle Koordinatensysteme in Betracht ziehen, deren Ebenen die Eigenschaft haben, der Kurve nur in singulären Punkten zu begegnen, ohne darum auszuschließen, daß einige singuläre Punkte möglicherweise mehrfach als Schnittpunkte auftreten und dafür dann andere singuläre Punkte unter den Schnittpunkten fehlen. Fassen wir die Aufgabe so, so gibt es bereits bei der ebenen Kurve dritter Ordnung verschiedenartige singuläre Koordinatensysteme. Es entsteht dann beispielsweise die vielfach benutzte Gleichungsform:

$$(x_0 + x_1 + x_2)^3 - 6k \cdot x_0 x_1 x_2 = 0,$$

wo $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ drei Wendetangenten der Kurve vorstellen, deren Berührungspunkte in gerader Linie liegen usw. usw.

einführen, welches, dem Wendedreiecke (51) *entsprechend, durch folgendes Schema gegeben ist:*

$$(54) \qquad \left| \begin{array}{ccccc} 0,\,0 & 0,\,1 & 0,\,2 & \ldots\ldots & 0,\,n-1 \\ 1,\,0 & 1,\,1 & 1,\,2 & \ldots\ldots & 1,\,n-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1,\,0 & n-1,\,1 & n-1,\,2 & \ldots & n-1,\,n-1 \end{array} \right|$$

Die Aufstellung zugehöriger x mit Hilfe n-gliedriger σ-Produkte mag noch wieder verschoben werden, bis wir sie in § 9 im Zusammenhange behandeln.

§ 8.

Die Normalkurve n-ter Ordnung in kanonischer Darstellung.

Das im vorigen Paragraphen unter (52), (52b) definierte kanonische Koordinatensystem soll jetzt insoweit benutzt werden, als wir mit seiner Hilfe die *Flächen zweiten Grades* untersuchen wollen, welche durch die Normalkurve hindurchgehen. Ich will bei den verschiedenen Überlegungen, die diesbezüglich nötig werden, von den Fällen des geraden oder des ungeraden n alternierend immer nur einen berücksichtigen; der Leser wird mit Leichtigkeit die kleinen Umsetzungen vornehmen, welche jedesmal von dem einen Falle zum andern führen.

Es handelt sich vor allem um *wirkliche Aufstellung* der $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängigen quadratischen Relationen. Ich nehme dabei n ungerade und will die Formeln (52) der einfacheren Ausdrucksweise halber eine Zeit lang so schreiben, daß ich $x_{\frac{n+1}{2}}, \ldots, x_{n-1}$ durch $y_0, \ldots, y_{\frac{n-3}{2}}$ ersetze und bei $\wp(u)$, $\wp'(u)$ das Argument u unterdrücke. Die Formeln lauten dann:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_{\frac{n-1}{2}} : y_0 : y_1 : \ldots : y_{\frac{n-3}{2}}$$

$$= 1 : \wp : \ldots : \wp^{\frac{n-1}{2}} : \wp' : \wp'\wp : \ldots : \wp'\wp^{\frac{n-3}{2}},$$

wo $\wp'$ mit $\wp$ durch die Relation verbunden ist:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Die nähere Überlegung ergibt nun vier Arten von quadratischen Relationen:

1. Binomische Relationen von der Gestalt:

$$x_i x_k = x_{i'} x_{k'},$$

die auftreten, weil die beiden zu Vergleich kommenden Produkte je derselben Potenz von $\wp$ gleich werden. Beispiel: $x_0 x_2 = x_1^2$ usw. Solcher Relationen entstehen ebenso viele, als es linear-unabhängige Flächen zweiten Grades gibt, welche durch die rationale Raumkurve $\left(\frac{n-1}{2}\right)$-ten Grades des Raumes von $\frac{n-1}{2}$ Dimensionen:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_{\frac{n-1}{2}} = 1 : \wp : \ldots : \wp^{\frac{n-1}{2}}$$

hindurchlaufen, nämlich $\frac{n-1 \cdot n-3}{8}$.

2. Binomische Relationen vom Typus:

$$y_i y_k = y_{i'} y_{k'}.$$

Die Abzählung (welche wieder an einer rationalen Raumkurve, die aber nun von der $\left(\frac{n-3}{2}\right)$-ten Ordnung ist und im Raume von $\frac{n-3}{2}$ Dimensionen liegt, gedeutet werden kann) liefert $\frac{n-3 \cdot n-5}{8}$ Relationen dieser Art.

3. Binomische Relationen, welche beiderseits ein y enthalten:

$$y_i x_k = y_{i'} x_{k'}.$$

Im ganzen kommen $\frac{n-1 \cdot n-3}{4}$ hierher gehörige Gleichungen.

4. Quadrinomische Relationen, die entstehen, indem wir das Produkt $y_i y_k$ durch Einsetzen des für $\wp'^2$ vorgegebenen Wertes als Funktion von $\wp$ allein darstellen und die drei dabei hervorkommenden Terme durch Produkte zweier x ersetzen. Bei der Abzählung müssen wir beachten, daß von allen Produkten $y_i y_k$, die einander gleich sind, und ebenso von allen Produkten $x_i x_k$, die einander gleich sind, immer nur eines benutzt werden darf (insofern der Gleichheit verschiedener derartiger Produkte bereits durch 1., 2. Rechnung getragen ist). Daher wird die Anzahl der neuen Relationen relativ gering; sie beträgt nur $(n-3)$.

Addieren wir zusammen, so haben wir

$$(n-3)\left[\frac{n-1}{8} + \frac{n-5}{8} + \frac{n-1}{4} + 1\right]$$

linear unabhängige quadratische Relationen gefunden. Dies ist aber gerade $\frac{n(n-3)}{2}$, so daß wir in der Tat sämtliche Relationen dieser Art gewonnen haben.

Ich werde jetzt weiter zeigen, daß für $n > 3$ *die* $\frac{n(n-3)}{2}$ *quadratischen Relationen hinreichen, um die Normalkurve n-ter Ordnung als solche algebraisch zu definieren.* Es handelt sich um den Nachweis, daß

unsere $\frac{n(n-3)}{2}$ Flächen zweiten Grades außer der Normalkurve nicht noch andere Bestandteile gemein haben. Ich zeige dies durch vollständige Induktion, indem ich zunächst annehme, daß unser Satz für ein gegebenes $(n-1)$ richtig sei, und dann schließe, daß er auch bei n selbst gelten muß. Da unser Satz bei $n = 4$ zutrifft, so muß er allgemein richtig sein[26].

Der Beweis selbst ist jetzt äußerst einfach. Ich will wieder n als ungerade Zahl annehmen. Dann unterscheiden sich die für die Kurve n-ter Ordnung geltenden Formeln von denjenigen, die für die Kurve $(n-1)$-ter Ordnung in Betracht kommen dadurch, daß sie eine Koordinate, nämlich $y_{\frac{n-3}{2}}$, mehr enthalten. Wir scheiden jetzt die für die Kurve n-ter Ordnung geltenden quadratischen Relationen in solche, welche $y_{\frac{n-3}{2}}$ enthalten, und solche, welche es nicht tun. Erstere lassen $y_{\frac{n-3}{2}}$ in mannigfacher Weise als rationale Funktion der anderen Koordinaten berechnen. Nun zeigt ein Blick auf die so entstehenden rationalen Funktionen, daß selbige nicht etwa alle gleichzeitig für ein und dasselbe der Normalkurve $(n-1)$-ter Ordnung angehörige Wertsystem der $x_0, \ldots, x_{\frac{n-1}{2}}, y_0, \ldots, y_{\frac{n-5}{2}}$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, [so daß die Beziehung zwischen Kurve $(n-1)$-ter Ordnung und der n-ter Ordnung durchweg eindeutig ist]. Nimmt man dies mit der Voraussetzung zusammen, die wir machen müssen: daß nämlich jene quadratischen Relationen, welche $y_{\frac{n-3}{2}}$ nicht enthalten, die Kurven $(n-1)$-ter Ordnung rein darstellen, so ist, wie man erkennt, unsere Behauptung erwiesen[27].

§ 9.

Das singuläre Koordinatensystem bei der Normalkurve n-ter Ordnung.

Indem ich mich jetzt bei beliebigem (als ungerade vorausgesetzten) n zur Betrachtung des *singulären* Systems wende, werde ich die Koordi-

[26]) Man sehe auch Bianchi, a. a. O., wo unser Satz für $n = 5$ unter Benutzung des singulären Koordinatensystems erwiesen wird.

[27]) Ich habe den Beweis des Textes an die kanonische Darstellung angeknüpft, weil dadurch die Ausdrucksweise bequemer wird. Es ist aber nicht schwer, den Beweis unter Beibehaltung seines Grundgedankens so zu modifizieren, daß er der konkreten Formeln gar nicht mehr bedarf. Man hat nur zu beachten, daß die Projektion der Kurve n-ter Ordnung von einem *beliebigen* ihrer Punkte aus immer wieder eine Normalkurve $(n-1)$-ter Ordnung liefert, welche ihrerseits durch die zugehörigen quadratischen Relationen rein dargestellt wird. Dies aber wäre unmöglich, wenn die zur Kurve n-ter Ordnung gehörigen Relationen außer der Kurve noch irgendwelche sonstigen Elemente gemein hätten. [Vgl. die Ausführung dieses Gedankens in „Modulfunktionen", Bd. 2, S. 245/246.]

naten fortan zur Unterscheidung mit großen Buchstaben bezeichnen ($X_0, \ldots, X_{n-1}$, allgemein X_α). Wir haben die X_α in (54) nur erst so weit definiert, daß wir angaben, an welchen Stellen des Periodenparallelogramms der u-Ebene dieselben verschwinden sollen, was in folgender Formel seinen Ausdruck findet:

$$(55)\qquad \varrho X_\alpha(u) = M_\alpha \cdot \prod_{\mu=0}^{n-1} \sigma\left(u - \frac{\alpha\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right),$$

wo M_α einen Term bedeutet, der in der u-Ebene nirgends Null ist. Wir werden M_α erstlich in der Weise zu bestimmen haben, daß die Verhältnisse der X_α und überhaupt die Quotienten $X_\alpha(u) : \sigma(u)^n$ doppeltperiodische Funktionen von u mit den Perioden ω_1, ω_2 werden, dann aber, entsprechend der singulären Darstellung der Kurve dritter Ordnung, auch so, daß eine Vermehrung des u um $\frac{\omega_1}{n}$ die Verhältnisse der X_α zyklisch vertauscht.

Ich erinnere hier zunächst an die Formeln (31) und (10). Ersterer zufolge ist:

$$e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \prod\limits_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu}(u)}{\left(\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu}\right)^2},$$

während wir bei Formel (10) angaben, daß

$$\frac{e^{-G_2 u^2} \cdot \sigma\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)}{\sigma(u \,|\, \omega_1, \omega_2)^n}$$

eine doppeltperiodische Funktion von u mit den Perioden ω_1, ω_2 ist. *Daher wollen wir jedenfalls setzen:*

$$(56)\qquad \varrho X_0(u) = e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right).$$

Wir nehmen jetzt die Bezeichnung $\sigma_{\lambda,\mu}(u \,|\, \omega_1, \omega_2)$ des ersten Abschnitts wieder auf. Nach der dort gegebenen Definition ist

$$\sigma_{\alpha,0}\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right) = e^{\frac{\alpha\bar{\eta}_1}{n}\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{2n}\right)} \cdot \sigma\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n} \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)$$

(wo $\bar{\eta}_1$ den transformierten Wert von η_1 bezeichnet), also eine Funktion, welche, wie unser X_α, für

$$u = \frac{\alpha\omega_1 + \mu\omega_2}{n} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

verschwindet. Gleichzeitig ist nach (23)

$$\frac{\sigma_{\alpha,0}\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)}{\sigma\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)}$$

eine doppeltperiodische Funktion von u mit den Perioden ω_1, ω_2. *Vergleichen wir noch (56), so sehen wir, daß wir jedenfalls der ersten an die X_α gestellten Anforderung gerecht werden, indem wir allgemein setzen:*

$$(57)\qquad \varrho X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma_{\alpha,0}\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right).$$

Hiermit ist aber in der Tat auch der zweiten Forderung (der Forderung zyklischer Vertauschung der X_α bei Vermehrung des u um $\frac{\omega_1}{n}$) Genüge geleistet. Man findet nämlich nach kurzer Rechnung:

$$(58)\qquad X_{n+\alpha}(u) = X_\alpha(u),$$

$$(59)\qquad X_\alpha\left(u + \frac{\lambda\omega_1}{n}\right) = (-1)^\lambda \cdot e^{\lambda\eta_1\left(u + \frac{\lambda\omega_1}{2n}\right)} \cdot X_{\alpha-\lambda}(u),$$

wo der dem $X_{\alpha-\lambda}$ zugesetzte Faktor von α unabhängig ist, so daß für die *Verhältnisse* der X_α in der Tat eine zyklische Vertauschung vorliegt[28]). Wir können geradezu schreiben:

$$(60)\qquad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot e^{\alpha\eta_1\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{2n}\right)} \cdot X_0\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right).$$

Übrigens können wir die X_α auch ohne Benutzung der Transformationstheorie definieren. Indem wir die Formel (57) mit (31) kombinieren, erhalten wir:

$$(61)\qquad \varrho X_\alpha(u) = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\alpha} \cdot \frac{\prod\limits_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \sigma_{\alpha,\mu}(u)}{\left(\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu}\right)^2}.$$

Der Proportionalitätsfaktor ϱ, der in allen diesen Formeln ((57), (58), (61)) auftritt, ist als solcher natürlich unbestimmt. Ich will aber schon hier angeben, daß wir ihn im folgenden Paragraphen mit Rücksicht auf

[28]) Man beachte noch, daß der Formel (58) zufolge der Index α fortan als eine beliebig veränderliche ganze Zahl betrachtet werden kann, deren Wert dann selbstverständlich nur modulo n in Betracht zu ziehen ist.

spätere Zwecke, die über die [hier gebrauchte] geometrische Deutung hinausgreifen, in absoluter Weise fixieren werden[29]).

Wir prüfen noch das Verhalten unserer X_α bei Vermehrung des u um n-te Teile der zweiten Periode, wie bei Zeichenwechsel des u. Die Rechnung gibt:

$$(62) \qquad X_\alpha\left(u+\frac{\mu\omega_2}{n}\right)=(-1)^\mu\cdot e^{\mu\eta_2\left(u+\frac{\mu\omega_2}{2n}\right)}\cdot\varepsilon^{-\alpha\mu}\cdot X_\alpha(u),$$

$$(63) \qquad X_\alpha(-u) \qquad = -X_{n-\alpha}(u).$$

Die Formeln (59), (62), (63) *stellen bei Zugrundelegung der* X_α *die* $2n^2$ *Kollineationen vor, welche unsere Normalkurve in sich selbst überführen.* Man beachte wohl, daß das Koordinatenpolyeder der X_α, d. h. der Inbegriff der Ebenen

$$X_0=0, \quad X_1=0, \ \ldots$$

bei diesen Kollineationen nicht geändert wird, was einen wesentlichen Unterschied des singulären Systems gegenüber dem kanonischen bezeichnet[30]).

Formel (63) gibt uns jetzt Anlaß, folgende Kombinationen einzuführen:

$$(64) \qquad Y_0=X_0, \quad Y_1=X_1+X_{n-1}, \ \ldots, \ Y_{\frac{n-1}{2}}=X_{\frac{n-1}{2}}+X_{\frac{n+1}{2}}.$$

$$(65) \qquad Z_0=0, \quad Z_1=X_1-X_{n-1}, \ \ldots, \ Z_{\frac{n-1}{2}}=X_{\frac{n-1}{1}}-X_{\frac{n+1}{2}}.$$

wo die Y_α *ungerade*, die Z_α *gerade* Funktionen von u sind. Ich werde diese Formeln zumeist so benutzen, daß ich auch in ihnen wieder α als eine modulo n zu betrachtende, aber übrigens beliebige ganze Zahl voraussetze, wo dann

$$(66) \qquad Y_\alpha(u)=Y_{-\alpha}(u), \quad Z_\alpha(u)=-Z_{-\alpha}(u)$$

sein wird. Endlich werde ich gleich hier für die Nullwerte der Z_α und der Differentialquotienten der Y_α diejenige Bezeichnung einführen, die später immer verwendet werden soll. *Ich setze:*

$$(67) \qquad Z_\alpha(0)=2z_\alpha, \quad \left(\frac{dY_\alpha(u)}{du}\right)_{u=0}=y'_\alpha.$$

---

[29]) Dies eben ist der wesentliche Punkt, in welchem meine Theorie der X_α von der durch Herrn Bianchi bei $n=3$ und $n=5$ entwickelten abweicht.

[30]) Und zwar speziell des singulären Systems, das wir in (54) auswählten, resp. der anderen, die wir später aus ihm durch lineare Transformation der Perioden ableiten werden. Hätten wir die allgemeinen singulären Systeme eingeführt, von denen in § 7 die Rede war, so würden sich wesentlich kompliziertere Verhältnisse eingestellt haben.

§ 10.

Normierung der X_α[31]).

Unsere Einführung der X_α würde unvollständig sein, wenn wir nicht ausdrücklich nachwiesen, daß dieselben linear unabhängig sind, d. h. daß zwischen ihnen keine Relation der folgenden Art besteht:

$$(68) \qquad \sum c_\alpha X_\alpha=0,$$

wo die c_α von u unabhängige Größen bedeuten sollen. Hiermit verbinde ich dann gleich die in Aussicht genommene *Normierung* der X_α (bez. der $Y_\alpha, Z_\alpha, y'_\alpha, z_\alpha$). Man hat es als ein Postulat zu betrachten, dessen Berechtigung in den Entwicklungen des folgenden Abschnittes noch hervortreten soll, *daß in Fragen der hier vorliegenden Art die ϑ-Funktionen immer diejenigen Funktionen sind, denen man möglichst nahezukommen suchen muß.* Nun sahen wir bereits in (12) der Einleitung, daß die Fundamentalfunktion der Transformationstheorie

$$e^{-G_1u^2}\cdot\frac{\sigma\left(u\,\middle|\,\omega_1,\frac{\omega_2}{n}\right)}{\sigma(u\,|\,\omega_1,\omega_2)^n}$$

selbst keinen einfachen Thetaquotienten vorstellt, wohl aber in einen solchen durch Multiplikation mit $\sqrt[8]{\Delta:\Delta^n}$ verwandelt werden kann. *Dementsprechend wollen wir fortan in* (56), (57), (61), $\frac{1}{\varrho}=\sqrt[8]{\Delta:\Delta^n}$ *nehmen und also die Werte der* $X_\alpha(u)$ *folgendermaßen absolut fixieren:*

$$(69) \qquad X_\alpha(u)=(-1)^\alpha\cdot\sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}\cdot e^{-G_1u^2}\cdot\sigma_{\alpha,0}\left(u\,\middle|\,\omega_1,\frac{\omega_2}{n}\right),$$

oder auch, was mit Rücksicht auf (32), (33) *dasselbe ist:*

$$(70) \qquad X_\alpha(u)=(-1)^\alpha\cdot\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0,\mu}\cdot\prod_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}\sigma_{\alpha,\mu}(u).$$

---

[31]) [Der Ausdruck „Normierung“ ist hier in anderem Sinne gebraucht, als in meinen früheren Arbeiten (z. B. in Abh. LXXXII, S. 47), ja beinahe in entgegengesetzter Bedeutung. Damals nannte ich ein elliptisches Integral normiert, wenn es in den Perioden die Dimension Null hatte, so daß seine obere Grenze nur von den Verhältnissen $u:\omega_1:\omega_2$, nicht aber von den Größen u, ω_1, ω_2 einzeln abhing. Hier dagegen bedeutet Normierung die Behaftung der X_α mit einer geeigneten Modulform als Faktor, um ein möglichst einfaches Verhalten den homogenen ω-Substitutionen gegenüber zu erzielen. (Siehe weiter unten §§ 15, ff.) So ist z. B. das Integral in Formel (137) dieser Abhandlung, S. 254, zwar mit den im jetzigen Sinne normierten X_α gebildet, es ist aber nicht im früheren Sinne normiert, da es in den Perioden ersichtlich die Dimension $+1$ hat. K.]

Unter Benutzung des Funktionszeichens ϑ_1 haben wir jetzt nach (5) folgende Darstellung der $X_\alpha(u)$:[32])

$$(71)\quad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_2}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot e^{\frac{-2i\pi u\alpha}{\omega_2}} \cdot q^{\frac{\alpha^2}{n}}}{\sqrt[8]{\Delta^n}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{nu - \alpha\omega_1}{\omega_2} \cdot \pi,\; q^n\right),$$

oder auch

$$(72)\quad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \cdot e^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt[8]{\Delta^n}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1} - \frac{\alpha\pi}{n},\; r^{\frac{1}{n}}\right),$$

was uns vermöge (6) die folgenden Reihenentwicklungen ergibt:

$$(73)\quad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{i \cdot q^{\frac{n}{4}} \cdot \prod (1 - q^{2h})^{3n}} \times$$

$$\times \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \left\{ \begin{array}{l} \quad q^{\frac{[(2h+1)n - 2\alpha]^2}{4n}} \cdot e^{[(2h+1)n - 2\alpha]\frac{u\pi i}{\omega_2}} \\ - q^{\frac{[-(2h+1)n - 2\alpha]^2}{4n}} \cdot e^{[-(2h+1)n - 2\alpha]\frac{u\pi i}{\omega_2}} \end{array} \right\},$$

bzw.:

$$(74)\quad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot \left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot e^{-(n-1)\frac{i\pi}{4}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{i \cdot r^{\frac{n}{4}} \cdot \prod (1 - r^{2k})^{3n}} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot r^{\frac{(2k+1)^2}{4n}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \quad e^{\frac{-(2k+1)i\pi\alpha}{n}} \cdot e^{(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ - e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} \cdot e^{-(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array} \right\}.$$

Ich habe diese Reihenentwicklungen so ausführlich mitgeteilt, weil ich sie später noch benutzen werde. Die ***Unabhängigkeit*** der X_α im

[32]) Insbesondere sind also die Nullwerte z_α durch die Formel gegeben:

$$z_\alpha = (-1)^{\alpha+1} \cdot \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_2}} \cdot \frac{q^{\frac{\alpha^2}{n}}}{\sqrt[8]{\Delta^n}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\alpha\omega_1\pi}{\omega_2},\; q^n\right)$$

und stimmen daher bis auf einen [von α unabhängigen] Zahlenfaktor mit denjenigen Größen überein, die ich in meiner Notiz: *Über gewisse Teilwerte der ϑ-Funktion* in Bd. 17 der Math. Annalen (1881) [= Abh. LXXXIX, S. 191 des vorliegenden Bandes] eben auch als z_α bezeichnet habe. Die Relationen zwischen den z_α, die ich damals mitteilte, werden sich weiterhin aus allgemeineren Beziehungen, welche die $X_\alpha(u)$ betreffen, ergeben, indem wir $u = 0$ setzen.

Sinne von (68) ergibt sich am einfachsten aus (74), indem die X_α dort mit Hilfe der Multiplikatoren

$$e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}}, \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, & 1, \ldots, (n-1) \\ k = 0, & 1, \ldots, (n-1) \end{pmatrix},$$

deren Determinante nicht verschwindet, aus n durchaus verschiedenen Reihenentwicklungen linear zusammengesetzt erscheinen.

Aus (72) wollen wir noch folgende Formel ableiten, die ebenfalls später benutzt wird, und in der C eine numerische Konstante bedeutet, deren Wert uns nicht weiter interessiert:

$$(75)\quad \frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = C \cdot \omega_1^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1} - \frac{\alpha\pi}{n},\; r^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1},\; r\right)^n}.$$

Ich habe diese Formel hierhergesetzt, um von vornherein den Vergleich unserer Größen X_α, Y_α, Z_α mit denjenigen Funktionen, welche die Transformationstheorie gewöhnlich betrachtet, nahezulegen. Sieht man von dem Umstande ab, daß meistens neben ϑ_1 immer auch ϑ, ϑ_2, ϑ_3 gebraucht werden (siehe oben, § 1), daß ferner bei der üblichen Darstellung von gemeinsamen Faktoren $\omega_1^{\frac{n-1}{2}}$ usw. kurzweg abstrahiert wird, so erweisen sich die Kombinationen:

$$\frac{Y_0(u)}{\sigma(u)^n} = \frac{X_0(u)}{\sigma(u)^n}, \qquad \frac{Y_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = \frac{X_\alpha(u) + X_{n-\alpha}(u)}{\sigma(u)^n},$$

$$\left(\alpha = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}\right)$$

als wohlbekannte Größen der Transformationstheorie. Dagegen scheint es nicht, daß man die Ausdrücke (75) einzeln, oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß man neben den $Y_\alpha(u) : \sigma(u)^n$ die Kombinationen

$$\frac{Z_\alpha(u)}{\sigma(u)^n}$$

betrachtet hat. Nun sind aber nach meiner Auffassung gerade diese Kombinationen (bzw. unter den Nullwerten die z_α) die wichtigsten. Ich möchte es also für wahrscheinlich halten, daß eine Einführung derselben in die eigentliche Transformationstheorie, resp. eine Erweiterung der Transformationstheorie bis zu dem Punkte, wo die genannten Kombinationen in die Betrachtung eintreten, von großem Vorteil sein wird.

§ 11.
Die quadratischen Relationen zwischen den X_α und das Integral erster Gattung n-ter Stufe.

Wir gehen für einen Augenblick zur geometrischen Theorie der Normalkurven n-ter Ordnung zurück (wobei die gerade getroffene Normierung der X_α noch ohne Bedeutung ist). Es soll sich darum handeln, *die Normalkurve n-ter Ordnung unter Zugrundelegung der X_α algebraisch darzustellen*, wozu es nach § 8 genügt, $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängige quadratische Relationen zwischen den X_α aufzufinden. *Ich sage, daß wir solche Relationen sofort gewinnen, wenn wir von der wohlbekannten [von Weierstrass herrührenden] σ-Relation ausgehen:*

$$\begin{aligned}(76)\qquad &\sigma(t+u)\cdot\sigma(t-u)\cdot\sigma(v+w)\cdot\sigma(v-w)\\ &+\sigma(t+v)\cdot\sigma(t-v)\cdot\sigma(w+u)\cdot\sigma(w-u)\\ &+\sigma(t+w)\cdot\sigma(t-w)\cdot\sigma(u+v)\cdot\sigma(u-v)=0.\end{aligned}$$

Man verstehe hier nämlich unter σ speziell die σ-Funktion mit den Perioden $\omega_1, \frac{\omega_2}{n}$ und substituiere nun für t, u, v, w die folgenden Argumente:

$$\frac{u}{2}-\frac{\alpha_1\omega_1}{n},\quad \frac{u}{2}-\frac{\alpha_2\omega_1}{n},\quad \frac{u}{2}-\frac{\alpha_3\omega_1}{n},\quad \frac{u}{2}-\frac{\alpha_4\omega_1}{n}.$$

Wir bekommen dann eine Gleichung, die sich vermöge der in (61) oder (69) enthaltenen Definition der X_α und der Bezeichnung z_α für die Nullwerte sofort in folgende umsetzt:

$$\begin{aligned}(77)\qquad &z_{\alpha_1-\alpha_2}\cdot z_{\alpha_3-\alpha_4}\cdot X_{\alpha_1+\alpha_2}\cdot X_{\alpha_3+\alpha_4}\\ &+z_{\alpha_1-\alpha_3}\cdot z_{\alpha_4-\alpha_2}\cdot X_{\alpha_1+\alpha_3}\cdot X_{\alpha_4+\alpha_2}\\ &+z_{\alpha_1-\alpha_4}\cdot z_{\alpha_2-\alpha_3}\cdot X_{\alpha_1+\alpha_4}\cdot X_{\alpha_2+\alpha_3}=0\end{aligned}$$ [33]).

Ich behaupte, daß in diese eine Formel die $\frac{n(n-3)}{2}$ gesuchten quadratischen Relationen bereits eingeschlossen sind.

Zum Beweise beachte man, daß jede in (77) einbegriffene Gleichung nur Glieder $X_i X_k$ von einer bestimmten Indexsumme $(i+k)=s$ enthält. Linear abhängig können also nur solche Gleichungen sein, welche dasselbe s besitzen. *Unter ihnen finden sich nun*, wie ich zunächst bemerke,

[33]) Man vergleiche wieder die Bianchische Arbeit, wo die Formeln für $n=5$ auf analytisch-geometrischem Wege gewonnen werden. Übrigens finden sich die Relationen für $n=5$ (und zwar auf ganz ähnliche Weise, wie bei Bianchi, abgeleitet) auch in Halphens Abhandlung: *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (siehe S. 289 des Bd. 18 der »Mémoires présentés à l'Académie des Sciences de Paris« (1883)). — Setzt man in (77) $u=0$, so hat man die biquadratischen Relationen zwischen den z_α, die ich in Bd. 17 der Math. Annalen (1881) [= S. 195 in Nr. LXXXIX des vorliegenden Bandes] angab.

jedesmal $\frac{n-3}{2}$ unabhängige. Wählt man nämlich irgend zwei Terme von der Indexsumme s nach Belieben aus: $X_i X_{s-i}$ und $X_{i'} X_{s-i'}$, so gestattet (77), alle $\frac{n-3}{2}$ anderen Terme derselben Indexsumme durch diese linear auszudrücken. *Jetzt kann s im ganzen die n Werte haben:* $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. Daher kommen in der Tat $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängige Relationen, was zu beweisen war.

Ich will von den Formeln (77) hier noch eine Anwendung machen, vermöge deren ich der ursprünglichen Forderung gerecht werde, von der ich in meiner Note: *Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* [= Nr. LXXXVIII im vorliegenden Bande] ausgegangen bin. *Es soll sich darum handeln, die Formeln (69) zu invertieren, d. h. die Variable u durch die Größen X_α auszudrücken.* Die Größe u erscheint dabei als an der Normalkurve hin erstrecktes Integral erster Gattung und zwar speziell als „Integral erster Gattung n-ter Stufe", insofern in dem Ausdrucke des Integrals als Koeffizienten der Variabelen die Größen y'_α, z_α auftreten, welche ihrerseits zur n-ten Stufe gehören, wie ich bald ausführlich nachweisen werde.

Die Rechnung selbst verläuft folgendermaßen. Es seien α, β irgend zwei in bezug auf n als Modul verschiedene Indizes. Wir bilden uns dann, indem wir $X_\alpha(u):X_\beta(u)$ nach u differentiieren, den Ausdruck:

$$(78)\qquad \frac{X_\beta\cdot dX_\alpha - X_\alpha\cdot dX_\beta}{X_\beta^2\cdot du}.$$

Derselbe ist eine doppeltperiodische Funktion von u, welche $2n$-mal (je zweimal an jeder Stelle $X_\beta=0$) im Periodenparallelogramme der u-Ebene unendlich und also auch $2n$-mal daselbst gleich Null wird. Er läßt sich also nach dem Hermiteschen Satze in die Gestalt setzen:

$$(79)\qquad \frac{\Sigma a_{ik} X_i X_k}{X_\beta^2},$$

wo die Summe zunächst über alle Indexkombinationen i, k zu nehmen ist. Wir werden unser Ziel erreicht haben, sobald wir die hier auftretenden a_{ik} kennen; denn wir haben dann durch Umkehr des Differentiationsprozesses:

$$(80)\qquad u=\int\frac{X_\beta\cdot dX_\alpha - X_\alpha\cdot dX_\beta}{\Sigma a_{ik} X_i X_k}.$$

Ich sage jetzt zunächst, daß die a_{ik} der Mehrzahl nach gleich Null genommen werden können. Zunächst nämlich folgt, wenn wir Formel (62) in Anwendung bringen, also das u in den $X(u)$ um $\frac{\mu\omega_2}{n}$ vermehren, wobei du ungeändert bleibt, daß alle diejenigen in (80) auftretenden Terme sich gegenseitig wegheben, deren Indexsumme $(i+k)$ von $(\alpha+\beta)$ verschieden ist. Unter je dreien der sonach allein in Betracht kommenden Glieder $X_i X_k$ besteht aber, wie wir gerade sahen, eine lineare Relation. *Wir können unsere Summe also auf eine lineare Kombination irgend zweier dieser Glieder beschränken.*

Ich setze dem Gesagten entsprechend, indem ich mit γ eine Zahl bezeichne, welche weder mit α noch mit β modulo n kongruent ist:

$$X_\beta \cdot \frac{dX_\alpha}{du} - X_\alpha \cdot \frac{dX_\beta}{du} = a \cdot X_\alpha X_\beta + b \cdot X_\gamma X_{\alpha+\beta-\gamma}, \tag{81}$$

wo jetzt nur noch die beiden Konstanten a, b zu bestimmen sind. Dies aber gelingt sofort, wenn wir die Nullwerte y'_α, z_α als bekannt erachten. Durch geeignete Anwendung von (59) leiten wir nämlich aus (81) zunächst folgende zwei Gleichungen ab:

$$X_{\beta-\gamma} \cdot \frac{dX_{\alpha-\gamma}}{du} - X_{\alpha-\gamma} \cdot \frac{dX_{\beta-\gamma}}{du} = a \cdot X_{\alpha-\gamma} X_{\beta-\gamma} + b \cdot X_0 X_{\alpha+\beta-2\gamma},$$

$$X_{\beta-\alpha} \cdot \frac{dX_0}{du} - X_0 \cdot \frac{dX_{\beta-\alpha}}{du} = a \cdot X_0 X_{\beta-\alpha} + b \cdot X_{\gamma-\alpha} X_{\beta-\gamma},$$

und erhalten hieraus, indem wir $u = 0$ setzen:

$$\begin{cases} z_{\beta-\gamma} \cdot y'_{\alpha-\gamma} - z_{\alpha-\gamma} \cdot y'_{\beta-\gamma} = 2a \cdot z_{\alpha-\gamma} z_{\beta-\gamma}, \\ \qquad z_{\beta-\alpha} \cdot y'_0 \qquad = \quad b \cdot z_{\gamma-\alpha} z_{\beta-\gamma}, \end{cases} \tag{82}$$

was unmittelbar die gewünschten Formeln sind. Tragen wir in (81), bez. (80) ein, *so haben wir folgenden allgemeinen Wert des Integrals erster Gattung n-ter Stufe erhalten:*

$$u = \int \frac{2 z_{\alpha-\gamma} z_{\beta-\gamma} (X_\alpha dX_\beta - X_\beta dX_\alpha)}{(z_{\beta-\gamma} y'_{\alpha-\gamma} - z_{\alpha-\gamma} y'_{\beta-\gamma}) X_\alpha X_\beta + 2 z_{\alpha-\beta} y'_0 \cdot X_\gamma X_{\alpha+\beta-\gamma}}. \tag{83}$$

Beispielsweise also bei $n = 5$, indem wir $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$ setzen:

$$u = \int \frac{2 z_1 z_2 (X_1 dX_2 - X_2 dX_1)}{(z_2 y'_1 - z_1 y'_2) X_1 X_2 - 2 z_1 y'_0 \cdot X_0 X_3}. \tag{84}$$

Dies Resultat muß mit demjenigen stimmen, welches Herr Bianchi auf S. 261, 262 seiner Arbeit eben auch für $n = 5$ abgeleitet hat. Wir verschieben den Vergleich bis zum Schlusse, indem wir behufs Durchführung desselben den Zusammenhang der y'_α und z_α kennen müssen, dieser aber erst in den letzten Paragraphen des folgenden Abschnitts abgeleitet werden kann.

Abschnitt III.

Die y'_α, z_α als Fundamentalmoduln. Koordinatenverwandlungen bei der Normalkurve. Die $\overline{X}_\gamma(u)$ und die A_γ.

§ 12.

Die y'_α, z_α als Fundamentalmoduln der n-ten Stufe.

Der schließliche Zielpunkt, dem ich mit gegenwärtiger Arbeit zustrebe, besteht in der Erkenntnis gewisser Fundamentaleigenschaften der normierten Moduln y'_α und z_α, bez. solcher Größen, die aus ihnen abgeleitet sind. Ich wünsche in dieser Hinsicht hier zunächst zu zeigen, daß die y'_α, z_α zusammengenommen ein volles Modulsystem der n-ten Stufe bilden, und zwar in der Weise, daß ich erstlich die y'_α, z_α rational durch die Teilwerte $\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ ausdrücke, dann aber die Mittel gebe, um rückwärts diese Teilwerte als rationale Funktionen der y'_α, z_α zu berechnen.

Die erste der angedeuteten Aufgaben erledigt sich sofort, wenn wir Formel (70) zugrunde legen und dementsprechend schreiben:

$$\frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = (-1)^\alpha \cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0,\mu}^3 \cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sigma_{\alpha,\mu}(u) \cdot \sigma_{\alpha,-\mu}(u)}{\sigma_{0,\mu}^2 \cdot \sigma_{\alpha,0}(u)^2} \cdot \left[\frac{\sigma_{\alpha,0}(u)}{\sigma(u)}\right]^n. \tag{85}$$

Die dreierlei rechterseits auftretenden Faktoren sind bereits früher (Formel (37), (28) und (35)), in dem hier in Betracht kommenden Sinne ausgewertet worden. Tragen wir ein, so ergibt sich:

$$\frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \wp'\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)} \cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\wp\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)\right] \cdot \prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{\wp(u) - \wp\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)}{\wp\left(u - \frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)}\right]. \tag{86}$$

Es ist dies sozusagen die Stammformel, aus welcher die Ausdrücke der z_α, y'_α hervorkommen: wir finden die z_α, indem wir $u = 0$ setzen, die y'_α, wenn wir zuerst mit $\sigma(u)^n$ multiplizieren, nach u differentiieren und dann $u = 0$ nehmen. Ich will hier der Kürze halber nur folgende zwei Formeln zusammenstellen:

$$z_\alpha = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \wp'\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)} \cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\wp\left(\frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)\right] \cdot \prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}}{}' \frac{1}{\wp\left(\frac{\alpha\omega_1}{n}\right) - \wp\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)} \cdot \frac{1}{\wp'\left(\frac{\alpha\omega_1}{n}\right)}, \tag{87}$$

wo der dem letzten Produktzeichen beigesetzte Akzent bedeutet, daß ein bestimmtes Glied (dasjenige, welches $\lambda = \alpha$ entsprechen würde) bei der Produktbildung auszulassen ist, — ferner:

$$(88) \qquad y_0' = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\prod\limits_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \wp'\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)}$$

was nur eine andere Form von (37) ist.

Um jetzt rückwärts die Teilwerte $\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ usw. durch die y_α', z_α auszudrücken, gehe ich von der wichtigen Formel aus, welche Jacobi der sogenannten umgekehrten Transformation zugrunde gelegt hat[34]), und die in unserer Bezeichnung folgendermaßen lautet[35]):

$$(89) \qquad \sum_{\mu=0}^{n-1}{}' \varepsilon^{-\alpha\mu} \cdot \frac{d\log\sigma\left(u - \frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)}{du} = \frac{\eta_2}{1-\varepsilon^{-\alpha}} + \frac{y_0' \cdot X_{\alpha+\lambda}(u)}{z_\alpha \cdot X_\lambda(u)}.$$

Indem wir diese Formel einmal nach u differentiieren und dann $u = 0$ setzen, bekommen wir lineare Gleichungen für die Teilwerte $\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, aus denen wir letztere mit leichter Mühe bestimmen können, — vorausgesetzt natürlich, daß wir die auf der rechten Seite auftretenden Größen zu berechnen wissen. Nun beginnt die Reihenentwicklung von $X_0(u)$ mit $y_0' \cdot u$ und enthält nur ungerade Potenzen von u, während die Entwicklung der übrigen $X_\alpha(u)$ mit den Termen $z_\alpha + \frac{y_\alpha'}{2} \cdot u$ einsetzt. Hieran anknüpfend werden wir in § 14 alle höheren Terme der in Rede stehenden Entwicklungen rational durch die y_α', z_α ausdrücken. Ist dies geschehen, so kennen wir in der Tat alle Größen, welche bei der Diskussion von (89) rechterseits auftreten, und können dann die gewünschte Berechnung der Teilwerte von $\wp(u)$, $\wp'(u)$, — oder auch von $\wp''(u)$ usw. — mit Leichtigkeit durchführen.

Ich will den Verlauf der Rechnung hier nur für die Teilwerte von $\wp(u)$ und zwar diejenigen derselben, bei denen $\lambda = 0$ ist, genauer angeben. Wir haben aus (89) durch einmalige Differentiation nach u:

$$(90) \qquad \sum_{\mu=0}^{n-1}{}' \varepsilon^{-\mu\alpha} \cdot \wp\left(u - \frac{\mu\omega_2}{n}\right) = \frac{y_0'\left(X_\alpha \frac{dX_0}{du} - X_0 \frac{dX_\alpha}{du}\right)}{z_\alpha \cdot X_0^2}.$$

[34]) Jacobi: Crelles Journal, Bd. 3 (1828) = Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 272 ff.

[35]) Die hier mitgeteilte Umsetzung der Jacobischen Formel rührt von Herrn Kiepert her, vgl. Bd. 76 des Crelleschen Journals (1872/73), S. 37, 38. Man sehe weiter Frobenius und Stickelberger in Bd. 88 ebenda (1880), S. 169 ff.

Nun sei unter Benutzung der in § 14 einzuführenden Bezeichnung:

$$(91) \qquad X_0(u) = y_0' \cdot u + a_{0,1} \cdot u^3 + \cdots,$$

sowie für $\alpha \not\equiv 0 \pmod{n}$:

$$(92) \qquad X_\alpha(u) = z_\alpha + \frac{y_\alpha'}{2} \cdot u + b_{\alpha,1} \cdot u^2 + \cdots.$$

Indem wir diese Entwicklungen in (90) eintragen und nach Potenzen von u ordnen, kommt:

$$(93) \qquad \sum_{\mu=1}^{n-1}{}' \varepsilon^{-\mu\alpha} \cdot \wp\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right) = \frac{a_{0,1}}{y_0'} - \frac{b_{\alpha,1}}{z_\alpha}.$$

Hier kann α nach Belieben gleich $1, 2, \ldots, (n-1)$ genommen werden; wir haben also ebenso viele lineare Gleichungen als Unbekannte $\wp\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)$.[36]) Um aber diese Gleichnngen elegant auflösen zu können, setzen wir noch eine Relation hinzu, die aus (86) hervorgeht. Schreiben wir nämlich in (86) $\alpha = 0$, so kommt:

$$\frac{X_0(u)}{\sigma(u)^n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\wp(u) - \wp\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)},$$

und hieraus, indem wir nach Potenzen von u ordnen und (88) heranziehen:

$$(94) \qquad \sum_{\mu=1}^{n-1}{}' \wp\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right) = -\frac{2a_{0,1}}{y_0'}.$$

Die Kombination von (93), (94) *ergibt jetzt folgendes Resultat:*

$$(95) \qquad \wp\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right) = -\frac{3}{n} \cdot \frac{a_{0,1}}{y_0'} - \sum_{\alpha=1}^{\frac{n-1}{2}}{}' \frac{\varepsilon^{\mu\alpha} + \varepsilon^{-\mu\alpha}}{n} \cdot \frac{b_{\alpha,1}}{z_\alpha},$$

was die gewünschte Endformel ist[37]).

[36]) Natürlich ist $\wp\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right) = \wp\left(\frac{-\mu\omega_2}{n}\right)$, wovon ich im Texte der bequemeren Ausdrucksweise wegen keinen Gebrauch mache.

[37]) Man vgl. hierzu die ganz ähnliche Rechnung, vermöge deren Herr Kronecker in den Berliner Monatsberichten von 1875 (S. 498 ff. daselbst) die Teilwerte von $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ durch die Wurzeln der Jacobischen Modular- und Multiplikatorgleichung ausdrückt.

Ich berühre hier noch einen verwandten Gegenstand, auf den zuerst Herr Sylow in den Berichten der Akademie zu Christiania von 1864 eingegangen ist, nachdem Abel bereits einige diesbezügliche Andeutungen gegeben hatte, die *linearen Relationen* nämlich, welche zwischen den Teilwerten der elliptischen Funktionen bestehen. Wie Herr Engel nachgewiesen hat (Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissen-

§ 13.

Koordinatenverwandlungen bei der Normalkurve.

Unsere weiteren Untersuchungen knüpfen aufs Neue an eine direkte geometrische Betrachtung der Normalkurve n-ter Ordnung an.

Wir haben bislang zwei Darstellungen der Normalkurve einander gegenübergestellt: die *kanonische* Darstellung des § 7 und die *singuläre* Darstellung der §§ 9 bis 11. Aber jede dieser Darstellungen ist nur eine unter einer Anzahl gleichberechtigter. Wir gewinnen die letzteren, wie wir schon sagten, indem wir einerseits u den charakteristischen Umformungen unterwerfen:

$$u' = u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}, \tag{96}$$

$$u' = -u, \tag{97}$$

indem wir andererseits ω_1, ω_2 in beliebiger Weise linear transformieren:

$$\begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2. \end{cases} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{98}$$

Was speziell die *kanonische* Darstellung angeht, so bemerkten wir bereits, daß sie mit Modulfunktionen erster Stufe zu tun hat, so daß sie

---

schaften vom Juli 1884) lauten dieselben unter Zugrundelegung der Weierstrassschen Bezeichnungen folgendermaßen:

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{2\lambda\mu}}{\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)} = 0, \quad \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{2\lambda\mu}\cdot\wp\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)} = 0.$$

Man leitet diese Relationen (was Herr Engel [im Anschluß an eine von mir gehaltene Vorlesung] unter leichter Modifikation der Bezeichnungen a. a. O. ausführt) unmittelbar aus Formel (89) des Textes ab, wenn man zunächst 2λ statt λ schreibt, dann für u der Reihe nach

$$\frac{\lambda\omega_1}{n} + \frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{\lambda\omega_1}{n} + \frac{\omega_2}{2}, \quad \frac{\lambda\omega_1}{n} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

einträgt und endlich die so entstehenden drei Gleichungen nach Multiplikation mit gewissen Faktoren, deren Summe gleich Null ist, zusammenaddiert —, worauf der Umstand zur Geltung kommt, daß der Quotient

$$X_{2\lambda}(u) : X_0(u)$$

für die genannten drei Werte von u genau denselben Wert annimmt. Letzterer Satz kann, wie hier hervorgehoben werden soll, in eleganter Weise als Eigenschaft der Normalkurve n-ter Ordnung gedeutet werden. Wenn ich hierauf im Texte nicht eingehe, so geschieht es, weil es sich dabei um Lageneigentümlichkeiten solcher Punkte der Normalkurve handelt, deren Argumente von den Argumenten der singulären Punkte um halbe Perioden abweichen, wir aber mit den Lagenverhältnissen der singulären Punkte bereits hinreichend beschäftigt sind. [Die Bedeutung der „Abelschen Relationen" liegt vor allem darin, daß sie erkennen lassen, daß die ε für die speziellen Teilungsgleichungen natürliche Irrationalitäten sind. K.]

gegenüber den Transformationen (98) durchaus ungeändert bleibt. Aber auch die Umformung (97) bewirkte nur eine unbedeutetende Umänderung des kanonischen Koordinatensystems. *Es gibt also im wesentlichen n^2 unterschiedene Koordinatensysteme, welche aus einem beliebigen derselben durch die Umformungen* (96) *hervorgehen.*

Gewissermaßen umgekehrt ist es bei der *singulären* Darstellung. Nach den Formeln des § 9 bleibt das singuläre Koordinatensystem nicht nur bei (97), sondern überhaupt bei allen Transformationen (96) in der Hauptsache ungeändert. *Wollen wir andere, gleichberechtigte Systeme finden, so müssen wir die Operationen* (98) *anwenden.* Es ist leicht zu sehen, daß die Anzahl der gleichberechtigten Systeme mit der Zahl der unterschiedenen Transformationen n-ter Ordnung der elliptischen Funktionen zusammenfällt. Die Ebenen des singulären Koordinatensystems entstehen nämlich auf alle Fälle aus der ersten, $X_0(u) = 0$, durch die Umformungen (96). Es fragt sich also nur, auf wie viele Weisen die Ebene X_0 angenommen werden kann. Nun ist, wie wir früher sahen

$$\frac{X_0(u)}{\sigma(u)^n} = \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}\cdot e^{-G_1 u^2}\cdot\frac{\sigma\left(u \,\middle|\, \omega_1, \frac{\omega_2}{n}\right)}{\sigma(u \,|\, \omega_1, \omega_2)^n};$$

jedes X_0 korrespondiert also einer bestimmten Transformation n-ter Ordnung und umgekehrt. *Die Anzahl der wesentlich unterschiedenen singulären Koordinatensysteme ist daher, der bekannten Formel zufolge:*

$$N = n\prod\left(1 + \frac{1}{p}\right), \tag{99}$$

wo das Produkt über alle unterschiedenen Primfaktoren der Zahl n zu erstrecken ist.

Es entsteht jetzt das Problem, den Zusammenhang aller dieser verschiedenartigen Koordinatensysteme darzulegen. Wir wollen dabei jenes singuläre System, welches wir in § 9 einführten, und das wir fernerhin als *erstes* singuläres System bezeichnen, zum Ausgangspunkte wählen, alle in Betracht kommenden Konstanten aber durch die zum ersten Systeme gehörigen y'_α, z_α darzustellen suchen. Unsere erste Aufgabe wird sein, mit dem genannten Systeme das kanonische Koordinatensystem des § 8 in Verbindung setzen. Eine fernere Betrachtung der anderen kanonischen Koordinatensysteme erscheint dann überflüssig, weil selbige aus dem ersten kanonischen Systeme durch die n^2 Kollineationen hervorgehen, die (96) entsprechen, diese Kollineationen aber unter Zugrundelegung des ersten singulären Systems, wie wir in § 9 sahen, äußerst einfache Formeln erhalten. So bleibt denn nur noch der Zusammenhang des ersten singulären Systems mit den anderen singulären Systemen zu erforschen,

貴重書

eine Aufgabe, die selbst späterhin in mehrere Einzelprobleme zerlegt werden wird.

Indem ich nunmehr die angedeuteten Aufgaben hintereinander behandle, halte ich durchweg an der geometrischen Ausdrucksweise fest. Für den Kundigen aber muß unmittelbar einleuchten, daß es sich analytisch zu reden, um die Grundprobleme der Transformationstheorie handelt, wobei sich unsere Behandlung von der sonst üblichen dadurch unterscheidet, daß der Wert $u=0$, den man gemeinhin auszeichnet, nur als einer unter den n^2 Werten $u=\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}$ betrachtet wird $(\lambda, \mu = 0, 1, \dots (n-1))$. Eben hierin liegt die „Erweiterung“ des Transformationsproblems, von der am Schlusse des § 10 die Rede war. Diese Erweiterung ist bei uns unabweisbar, insofern doch alle singulären Punkte der Normalkurve geometrisch gleichberechtigt erscheinen.

§ 14.

Über die Verbindung des ersten singulären Systems mit dem ersten kanonischen.

Um jetzt die erste unserer Aufgaben zu behandeln, wird es von vornherein gut sein, zwischen geraden und ungeraden Funktionen von u zu unterscheiden und also statt der X_α die Kombinationen Y_α, Z_α einzuführen, die wir in (64), (65) definierten. Die Quotienten $Y_\alpha(u):\sigma(u)^n$ sind gerade, die Quotienten $Z_\alpha(u):\sigma(u)^n$ ungerade Funktionen von u, übrigens beide ganze lineare Funktionen der kanonischen Variabelen (52):

$$1,\quad \wp(u),\quad \wp(u)^2,\ \dots,\quad \wp(u)^{\frac{n-1}{2}},$$

$$\wp'(u),\quad \wp'(u)\cdot\wp(u),\quad \dots,\quad \wp'(u)\cdot\wp(u)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Berücksichtigen wir noch die Benennungen y'_α, z_α für die Nullwerte, so können wir jedenfalls schreiben:

$$\frac{Y_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = y'_\alpha\cdot\wp(u)^{\frac{n-1}{2}} + a_{\alpha,1}\cdot\wp(u)^{\frac{n-3}{2}} + \dots + a_{\alpha,\frac{n-1}{2}}, \tag{100}$$

$$\frac{Z_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = -\wp'(u)\left(z_\alpha\cdot\wp(u)^{\frac{n-3}{2}} + b_{\alpha,1}\cdot\wp(u)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + b_{\alpha,\frac{n-3}{2}}\right), \tag{101}$$

(wo die Bezeichnung mit der in (91), (92) verwandten übereinstimmt). *Unsere Aufgabe wird darauf zurückkommen, die sukzessiven Koeffizienten $a_{\alpha,\varkappa}$, $b_{\alpha,\varkappa}$ zu berechnen.* Zu dem Zwecke mögen wir die Entwicklungen (100), (101) in die für die X_α geltenden quadratischen Relationen eintragen und verlangen, daß alle entstehenden Gleichungen vermöge der einen, welche $\wp(u)$ mit $\wp'(u)$ verknüpft, zu identischen werden sollen.

Die zahlreichen Relationen, welche wir so erhalten, müssen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten jedenfalls ausreichen, insofern ja die Normalkurve n-ter Ordnung durch die zugehörigen quadratischen Relationen vollkommen definiert ist. Inzwischen haben wir ein sehr viel übersichtlicheres Mittel, um die gesuchten Größen durch die z_α, y'_α und ihre nach g_2, g_3 genommmenen Differentialquotienten auszudrücken. *Einem bekannten Jacobischen Gedanken folgend, werden wir nämlich eine lineare partielle Differentialgleichung aufstellen, der $Y_\alpha(u):\sigma(u)^n$ und $Z_\alpha(u):\sigma(u)^n$ als Funktion von $\wp(u)=\wp$, g_2, g_3 genügen. Diese Differentialgleichung gestattet uns dann, jeden der gesuchten Koeffizienten rekurrent aus den vorangehenden zu berechnen.*

Um die in Rede stehende Differentialgleichung zu gewinnen, gehen wir von (75) aus:

$$\frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = C\cdot\omega_1^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1}-\frac{\alpha\pi}{n},\ r^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1},\ r\right)^n}$$

und stellen zunächst die wohlbekannte Differentialgleichung auf, welcher der rechts stehende ϑ_1-Quotient in bezug auf $\frac{u}{\omega_2}$, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ als unabhängige Variabele genügt. Sodann gestalten wir diese Differentialgleichung um, indem wir für den ϑ-Quotienten den Ausdruck $X_\alpha(u):(\omega_1^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sigma(u)^n)$ substituieren, beachten, daß er eine homogene Funktion der Variabelen u, ω_1, ω_2 ist, und endlich statt u, ω_1, ω_2 die Größen $\wp, g_2, g_3$ als unabhängige Veränderliche einführen. Hier nun bewährt sich die Normierung, die wir für die X_α in § 10 verabredet haben. Der Erfolg ist nämlich der, daß die in der schließlich resultierenden Differentialgleichung auftretenden Koeffizienten *rationale* Funktionen von g_2, g_3 werden.

Ich werde hier nicht in die Einzelheiten der Rechnung eingehen. Für denjenigen Quotienten nämlich, den wir $X_0(u):\sigma(u)^n$ nennen, hat bereits Herr Kiepert die Rechnung durchgeführt (Bd. 88 des Crelleschen Journals (1880), S. 209; siehe auch Frobenius und Stickelberger, Bd. 92 ebenda (1882), S. 327), und es ist von vornherein klar, daß die fragliche Differentialgleichung von dem Index α ganz unabhängig ist. Ich darf mich also darauf beschränken, das Resultat kurz anzugeben. Dasselbe läuft darauf hinaus, *daß sämtliche Größen*

$$\frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n},\quad \textit{oder auch}\quad \frac{Y_\alpha(u)}{\sigma(u)^n},\quad \frac{Z_\alpha(u)}{\sigma(u)^n},$$

die ich zusammenfassend mit ϱ bezeichnen will, der folgenden partiellen Differentialgleichung genügen:

貴重書

$$(102)\qquad (4\wp^3 - g_2\wp - g_3)\cdot\frac{\partial^2\varrho}{\partial\wp^2} + \left[(6-4n)\wp^2 + \frac{4n-3}{6}\cdot g_2\right]\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial\wp}$$
$$-\frac{2n}{3}\left(18g_3\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial g_2} + g_2^2\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial g_3}\right) + n(n-1)\wp\cdot\varrho = 0,$$

der dann noch die Homogeneitätsrelation zutritt:

$$(103)\qquad \wp\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial\wp} + 2g_2\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial g_2} + 3g_3\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial g_3} = \frac{n-1}{4}\cdot\varrho.$$

Eine Betrachtung der Gleichungssysteme, welche die y'_α, z_α mit g_2, g_3 verknüpfen, liegt außerhalb der Grenzen der gegenwärtigen Darstellung. Ich werde also auch bei der Berechnung der in (100), (101) auftretenden Koeffizienten mit Hilfe von (102), (103) nicht länger verweilen, und bemerke nur, daß sich dieselbe in den niedersten Fällen $n = 3, 5, 7$ sehr einfach gestaltet[38]).

Übrigens aber mögen folgende Bemerkungen hier noch eine Stelle finden. Ich will einen Augenblick, wie früher bereits geschah, $\wp(u) = \Sigma(u):\sigma(u)^2$, $\wp'(u) = -2\,\mathsf{T}(u):\sigma(u)^3$ setzen. Wir erreichen dann durch Inversion der Formeln (100), (101), daß wir alle Produkte

$$\sigma(u)^a\cdot\Sigma(u)^b\cdot\mathsf{T}(u)^c,\quad \text{wo}\quad a+2b+3c=n,$$

als lineare homogene Funktionen der $X_\alpha(u)$ darstellen können. Aus den so gewonnenen Formeln erhalten wir dann leicht entsprechende Ausdrücke für die

$$\sigma\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)^a\cdot\Sigma\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)^b\cdot\mathsf{T}\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)^c.$$

Schließlich können wir aus den so entstehenden Resultaten insbesondere die Funktionen $\wp\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $\wp'\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ in ihrer Abhängigkeit von den $X_\alpha(u)$ und die Teilwerte $\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $\wp'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ als Funktionen der y'_α, z_α berechnen, wodurch wir auf anderem Wege zu demselben Ziele geführt werden, das wir in § 12 mit Hilfe der Formel (89) erreicht haben.

§ 15.

Verhalten der X_α bei linearer Transformation von ω_1, ω_2.

Um jetzt den Übergang von dem ersten singulären Systeme zu allen anderen zu finden, haben wir § 13 zufolge das Verhalten der X_α, die wir jetzt ausführlicher als

$$X_\alpha(u\,|\,\omega_1, \omega_2)$$

bezeichnen, bei linearer Transformation von ω_1, ω_2 in Betracht zu ziehen.

[38]) Was die $a_{0,k}$ betrifft, so sehe man auch Kiepert a. a. O.

Jeder einzelnen solchen Transformation entsprechend haben wir nach dem Hermiteschen Satze jedenfalls eine Formel:

$$(104)\qquad X_\alpha(u\,|\,\omega'_1, \omega'_2) = \sum c_{\alpha\beta}\cdot X_\beta(u\,|\,\omega_1, \omega_2),$$

wo die $c_{\alpha\beta}$ von u unabhängig sind. Hier nun bewährt sich aufs neue die Normierung der X_α. *Wir werden nämlich finden, daß die $c_{\alpha\beta}$ auch von ω_1, ω_2 nicht abhängen, daß also die X_α bei linearer Transformation der Perioden sich linear homogen mit konstanten Koeffizienten substituieren.*

Der ferneren Entwicklung wollen wir folgende Bemerkung vorausschicken. Wir haben die X_α soeben (§ 14) aus Funktionen der ersten Stufe mit Hilfe von Koeffizienten zusammengesetzt, die selbst zur n-ten Stufe gehören. Daher bleiben die X_α sicher bei allen denjenigen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ungeändert, die modulo n zur Identität kongruent sind. Sie bleiben aber auch bei keinen anderen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ungeändert: ein Blick auf das Schema (54) genügt, um uns davon zu überzeugen. Daher schließen wir, daß die X_α bei solchen linearen Transformationen von ω_1, ω_2, und nur bei solchen Transformationen, welche modulo n zueinander kongruent sind, übereinstimmende Änderungen erleiden. Mit anderen Worten: *Die Gruppe der linearen Substitutionen, denen unsere X_α bei linearer Transformation der Perioden ω_1, ω_2 unterliegen, ist mit dem Inbegriff der durch das Kongruenzzeichen definierten Operationen:*

$$(105)\qquad \begin{cases}\omega'_1 \equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,\\ \omega'_2 \equiv \gamma\omega_1 + \delta\omega_2,\end{cases}\qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1)\ (\mathrm{mod}\ n)$$

holoedrisch isomorph.

Um jetzt zu wirklichen Formeln zu schreiten, erinnern wir uns vor allen Dingen, daß sämtliche lineare Transformationen von ω_1, ω_2 sich aus folgenden beiden, die wir S und T nennen:

$$S:\begin{cases}\omega'_1 = \omega_1 + \omega_2,\\ \omega'_2 = \qquad\ \ \omega_2,\end{cases}\qquad T:\begin{cases}\omega'_1 = \qquad -\omega_2,\\ \omega'_2 = \omega_1\qquad\quad ,\end{cases}$$

durch Wiederholung und Kombination ableiten lassen. Es wird also genügen, daß wir die zwei gerade diesen Transformationen entsprechenden Substitutionen der X_α (die selbst wieder S und T genannt werden sollen) berechnen. Dies geschieht bei S sofort vermöge (75). Wir finden, in Übereinstimmung mit der vorangestellten Behauptung über den Charakter der in (104) auftretenden Koeffizienten:

$$(106)\qquad S:\ X_\alpha(u\,|\,\omega_1+\omega_2, \omega_2) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}\cdot X_\alpha(u\,|\,\omega_1, \omega_2).$$

Die Formel für $X_\alpha(u \mid -\omega_2, \omega_1)$ können wir jetzt gewinnen, indem wir die Entwicklungen (73), (74) vergleichen. Ehe ich dies jedoch ausführe, will ich das Bildungsgesetz des entstehenden Ausdrucks, soweit dasselbe von der Normierung der X_α unabhängig ist, zu erforschen suchen, was nunmehr geschehen soll.

§ 16.

Vorläufige Betrachtung von $X_\alpha(u \mid -\omega_2, \omega_1)$.

Wir setzen, der Formel (104) entsprechend:

$$X_\alpha(u \mid -\omega_2, \omega_1) = \sum_{\beta=0}^{n-1} c_{\alpha\beta} \cdot X_\beta(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

und vermehren hier u das eine Mal um $\frac{\lambda\omega_1}{n}$, das andere Mal um $-\frac{\mu\omega_2}{n}$. In (59), (62) hatten wir bestimmt, welche Umänderungen die ursprünglichen X_α dabei erleiden; die Änderungen der $X_\alpha(u \mid -\omega_2, \omega_1)$ ergeben sich daraus durch bloße Buchstabenvertauschung. Wir gewinnen so die Formeln:

$$\varepsilon^{-\lambda\alpha} X_\alpha(u \mid -\omega_2, \omega_1) = \sum_{\beta=0}^{n-1} c_{\alpha\beta} \cdot X_{\beta-\lambda}(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

$$X_{\alpha-\mu}(u \mid -\omega_2, \omega_1) = \sum_{\beta=0}^{n-1} c_{\alpha\beta} \cdot \varepsilon^{+\mu\beta} X_\beta(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

die wir auch folgendermaßen schreiben können:

$$X_\alpha(u \mid -\omega_2, \omega_1) = \sum_{\beta=0}^{n-1} c_{\alpha,\beta+\lambda} \cdot \varepsilon^{+\lambda\alpha} X_\beta(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

$$X_\alpha(u \mid -\omega_2, \omega_1) = \sum_{\beta=0}^{n-1} c_{\alpha+\mu,\beta} \cdot \varepsilon^{+\mu\beta} X_\beta(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

(wo jetzt die Indizes unbeschränkt veränderliche ganze Zahlen sein sollen, die allein modulo n in Betracht kommen). *Daher ist überhaupt:*

$$c_{\alpha,\beta+\lambda} = \varepsilon^{-\lambda\alpha} \cdot c_{\alpha\beta}, \quad c_{\alpha+\mu,\beta} = \varepsilon^{-\mu\beta} \cdot c_{\alpha\beta}$$

und also:

$$c_{\alpha\beta} = \varepsilon^{-\alpha\beta} \cdot c_{00}.$$

Schreiben wir noch C für c_{00} und lassen der Symmetrie halber die Summation über β von $-\frac{n-1}{2}$ bis $+\frac{n-1}{2}$ gehen, so haben wir:

$$X_\alpha(u \mid -\omega_2, \omega_1) = C \cdot \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{-\alpha\beta} \cdot X_\beta(u \mid \omega_1, \omega_2), \tag{107}$$

eine Formel, auf die schon Herr Bianchi auf S. 243 seiner Arbeit hinweist[39]).

Den eigentlichen Erfolg der Normierung hat man nun, soweit Formel (107) *in Betracht kommt, darin zu erblicken, daß C eine konstante Größe wird.* Nehmen wir nämlich an, daß C konstant sei, so ist dasselbe, wie ich jetzt zeigen will, vollständig gegeben. Zu dem Zwecke beachte man zunächst, daß eine Wiederholung von T aus ω_1, ω_2 die negativen $-\omega_1$, $-\omega_2$ macht, während sich für $X_\alpha(u \mid -\omega_1, -\omega_2)$ folgende Formel ergibt:

$$\begin{aligned} X_\alpha(u \mid -\omega_1, -\omega_2) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot X_\alpha(-u \mid \omega_1, \omega_2) \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot X_{n-\alpha}(u \mid \omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{108}$$

Nun gibt die Wiederholung von (107), sofern wir C konstant nehmen:

$$X_\alpha(u \mid -\omega_1, -\omega_2) = n \cdot C^2 \cdot X_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2).$$

Die Konstante C hat also jedenfalls folgenden Wert:

$$C = \pm \frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Ich behaupte aber, daß nur das obere Vorzeichen zulässig ist. Man findet dies Resultat, wenn man in Betracht zieht, daß die Operation ST, dreimal hintereinander auf ω_1, ω_2 angewandt, $-\omega_1, -\omega_2$ ergibt, und nun bei Zusammensetzung der auf die X_α bezüglichen Substitutionen die Theorie der *Gaussischen Summen* in Anwendung bringt[40]).

[39]) In der Tat hat Herr Bianchi bei $n = 3$ und $n = 5$ ganz ähnliche Überlegungen benutzt, wie ich sie im Texte für beliebiges ungerades n gebe.

[40]) [Die Theorie der Gaussischen Summen ist nur dann erforderlich, wenn man verlangt, C durch $\sqrt{n}$ auszudrücken. Da aber der Formel (109) an sich schon der Rationalitätsbereich der n-ten Einheitswurzeln zugrunde liegt, ist es vielleicht richtiger, den Ausdruck der Gaussischen Summe als rationale Funktion von ε stehen zu lassen. Die im Texte angedeutete Rechnung liefert in der Tat das Resultat

$$C^3 = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \cdot n \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^{\nu^2}}.$$

Vergleicht man dies mit dem schon bekannten Ergebnis $n \cdot C^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$, so erhält man

$$C = \frac{1}{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^{\nu^2}}.$$

Hieraus folgt insbesondere, daß $\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^{\nu^2}\right)^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n$ ist. Auf die Entwicklung von

Unter der Voraussetzung, daß C konstant sei, muß also die in Betracht kommende Formel lauten:

$$(109)\quad (-i)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt{n} \cdot X_\alpha(u \,|\, -\omega_2, \omega_1) = \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}' \varepsilon^{-\alpha\beta} \cdot X_\beta(u \,|\, -\omega_1, \omega_2),$$

was wir im folgenden Paragraphen durch direkte Rechnung bestätigen[41].

§ 17.

Berechnung von $X_\alpha\,(u\,|\,-\omega_2, \omega_1)$ mit Hilfe der Reihenentwicklungen.

Um Formel (109) auf direktem Wege abzuleiten, gehen wir zur Doppelformel (73), (74) zurück und ordnen die Rechnung etwa folgendermaßen.

Wir knüpfen zuerst an (73) an. Indem wir der Kürze halber setzen:

$$\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{i \cdot q^{\frac{n}{4}} \cdot \prod (1-q^{2h})^{3n}} = M,$$

finden wir:

$$\sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}' \varepsilon^{-\alpha\beta} \cdot X_\beta(u \,|\, \omega_1, \omega_2)$$

$$= \sqrt{n} \cdot M \cdot \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}' \sum_{h=0}^{\infty}{}' (-1)^{\beta+h} \cdot \varepsilon^{-\alpha\beta} \cdot \left\{ \begin{array}{l} q^{\frac{[(2h+1)n-2\beta]^2}{4n}} \cdot e^{[(2h+1)n-2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_2}} \\ -q^{\frac{[-(2h+1)n-2\beta]^2}{4n}} \cdot e^{[-(2h+1)n-2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_2}} \end{array} \right\},$$

oder, wenn wir je zwei Terme, welche dieselbe Potenz von q enthalten, zusammennehmen:

$$(110)\quad \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}' \varepsilon^{-\alpha\beta} \cdot X_\beta(u \,|\, \omega_1, \omega_2)$$

$$= \sqrt{n} \cdot M \cdot \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}' \sum_{h=0}^{\infty}{}' (-1)^{\beta+h} \cdot q^{\frac{[(2h+1)n+2\beta]^2}{4n}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^{\alpha\beta} \cdot e^{[(2h+1)n+2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_2}} \\ -\varepsilon^{-\alpha\beta} \cdot e^{[-(2h+1)n-2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_2}} \end{array} \right\}.$$

§ 17 läßt sich dann umgekehrt die Vorzeichenbestimmung der Gaussischen Summen stützen. So hat auch Fricke in den „Modulfunktionen", Bd. 2, S. 304ff. die Darstellung gewandt. B.-H.]

[41]) Bei dieser ganzen Betrachtungsweise ist natürlich der Umstand wesentlich, daß wir den imaginären Teil von $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ positiv genommen haben. Hätten wir ihn negativ vorausgesetzt, so müßte in (106), (109) übereinstimmend ε durch ε^{-1}, i aber durch $-i$ ersetzt werden.

Mit dieser Formel bringen wir jetzt die andere zum Vergleich, welche sich aus (74) für $X_\alpha(u \,|\, -\omega_2, \omega_1)$ ergibt und die folgendermaßen lautet:

$$X_\alpha(u \,|\, -\omega_2, \omega_1)$$

$$= e^{-(n-1)\frac{\pi i}{4}} \cdot (-1)^\alpha \cdot M \cdot \sum_{k=0}^{\infty}{}' (-1)^k \cdot q^{\frac{(2k+1)^2}{4n}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} \cdot e^{-(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \\ -e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} \cdot e^{(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \end{array} \right\}.$$

Wir verwandeln zu dem Zwecke die in (110) rechter Hand auftretende Doppelsumme, indem wir $(2h+1)n + 2\beta = 2k+1$ setzen und nun k von 0 bis ∞ laufen lassen. Dabei wird $(-1)^{h+\beta} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (-1)^k$ sein, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ aber durch folgenden Ausdruck ersetzt werden können: $(-1)^\alpha \cdot e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}}$. Solcherweise kommt:

$$\sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}' \varepsilon^{-\alpha\beta} \cdot X_\beta(u \,|\, \omega_1, \omega_2)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt{n} \cdot (-1)^\alpha \cdot M \cdot \sum_{k=0}^{\infty}{}' (-1)^k \cdot q^{\frac{(2k+1)^2}{4n}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} \cdot e^{(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \\ -e^{-\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} \cdot e^{-(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \end{array} \right\}.$$

Daher lesen wir ab:

$$X_\alpha(u \,|\, -\omega_2, \omega_1) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-(n-1)\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}' \varepsilon^{-\alpha\beta} \cdot X_\beta(u \,|\, \omega_1, \omega_2),$$

was mit der in Aussicht genommenen Formel (109) übereinstimmt.

Überblicken wir diese Rechnung genauer, so handelt es sich im Grunde um Beweis und Anwendung einer bestimmten Thetarelation, die wir nach Wegwerfung überschießender Faktoren etwa folgendermaßen schreiben können:

$$(111)\quad (-1)^\alpha \cdot \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2} - \frac{\alpha\pi}{n},\, q^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}' (-1)^\beta \cdot \varepsilon^{\alpha\beta} \cdot q^{\frac{\beta^2}{n}} \cdot e^{-\frac{2\beta u\pi i}{\omega_2}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{nu - \beta\omega_1}{\omega_2}\pi,\, q^n\right).$$

Diese Relation als solche ist nicht neu [wohl aber ihre gruppentheoretische Verwertung], wie ich in Berichtigung einer früheren Angabe[42]) hier ausdrücklich bemerken will; man findet sie beispielsweise mit unwesentlichen

[42]) [Siehe S. 192 in diesem Bande.]

Abweichungen bei Schröter (*Habilitationsschrift*, Breslau 1855), bei Brioschi in Bd. 59 der Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1858, *Sur diverses équations analogues aux équation modulaires* [= Opere matematiche, Nr. CLXXV, tomo IV., S. 327]), bei Scheibner in Bd. 14 der Berichte der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (1862, *Über periodische Funktionen*), usw. usw. Beiläufig bemerkt: die letztgenannte Relation gestattet überhaupt, unter Zugrundelegung der X_α die Gleichung jeder Ebene anzuschreiben, welche der Normalkurve ausschließlich in singulären Punkten begegnet. An sie also könnte man anknüpfen, wenn man von den X_α zu allen den verschiedenen Koordinatensystemen übergehen wollte, von welchen in § 7 die Rede war.

§ 18.

Verhalten der Y_α, Z_α. Charakter der entstehenden Substitutionsgruppen.

Um jetzt das Verhalten der Y_α, Z_α bei linearer Transformation der Perioden zu studieren, stelle ich die beiden auf die X_α bezüglichen Formeln für S, T noch einmal zusammen. Wir hatten in (106), (109):

$$(112)\quad \begin{cases} S:\ X_\alpha(u\,|\,\omega_1+\omega_2,\omega_2) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}\cdot X_\alpha(u\,|\,\omega_1,\omega_2), \\ T:\ (-i)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{n}\cdot X_\alpha(u\,|-\omega_2,\omega_1) = \sum\limits_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{-\alpha\beta}\cdot X_\beta(u\,|\,\omega_1,\omega_2). \end{cases}$$

Führen wir jetzt statt der X_α die Y_α, Z_α ein (siehe (64), (65)), so ergibt sich jedenfalls, *daß sich die $\frac{n+1}{2}$ Größen Y_α, und ebenso die $\frac{n-1}{2}$ Größen Z_α, linear für sich substituieren;* denn die Z_α sind gerade, die Y_α ungerade Funktionen von u. *Des näheren findet man:*

1. *für die Y_α:*

$$(113)\quad \begin{cases} S:\ Y_\alpha(u\,|\,\omega_1+\omega_2,\omega_2) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}\cdot Y_\alpha(u\,|\,\omega_1,\omega_2), \\ T:\ \begin{cases} (-i)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{n}\cdot Y_0(u\,|-\omega_2,\omega_1) = \sum\limits_{\beta=0}^{\frac{n-1}{2}} Y_\beta(u\,|\,\omega_1,\omega_2), \\ (-i)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{n}\cdot Y_\alpha(u\,|-\omega_2,\omega_1) = 2Y_0(u\,|\,\omega_1,\omega_2) \\ \qquad + \sum\limits_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}}(\varepsilon^{\alpha\beta}+\varepsilon^{-\alpha\beta})\cdot Y_\beta(u\,|\,\omega_1,\omega_2). \end{cases} \end{cases}$$

(*wo α in der letzten Formel nur die Werte* 1, 2, ..., $\frac{n-1}{2}$ *zu durchlaufen hat*);

2. *für die Z_α, unter derselben Beschränkung für die Werte von α:*

$$(114)\quad \begin{cases} S:\ Z_\alpha(u\,|\,\omega_1+\omega_2,\omega_2) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}}\cdot Z_\alpha(u\,|\,\omega_1,\omega_2), \\ T:\ (-i)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{n}\cdot Z_\alpha(u\,|-\omega_2,\omega_1) = -\sum\limits_{\beta=1}^{\frac{n-1}{2}}(\varepsilon^{\alpha\beta}-\varepsilon^{-\alpha\beta})\cdot Z_\beta(u\,|\,\omega_1,\omega_2). \end{cases}$$

Alle diese Formeln bleiben natürlich bestehen, wenn man das u irgendwelchem konstanten Werte gleichsetzt. *Insbesondere gelten die* (113) *für die y'_α und die weiteren in* (100) *auftretenden Koeffizienten $a_{\alpha,k}$, die* (114) *für die z_α und die in* (101) *definierten $b_{\alpha,k}$.*

Von den hiermit gefundenen Resultaten ist dasjenige, welches durch (113) ausgedrückt wird, seit lange bekannt. Man spricht es gewöhnlich so aus, daß man die *Gleichung* in Betracht zieht, von welcher die verschiedenen Werte abhängen, die $Y_0(u):\sigma(u)^n$ (gleich $X_0(u):\sigma(u)^n$) bei linearer Transformation der Perioden annimmt, und nun als besondere Eigenschaft dieser Gleichungen hinstellt, daß alle ihre Wurzeln sich aus $\frac{n+1}{2}$ Größen, eben unseren $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{\frac{n-1}{2}}$, linear zusammensetzen[43]). Ich will hier an die ursprünglichen Untersuchungen von Jacobi, die in dieser Richtung liegen[44]), wie an die weitergehenden Entwicklungen der Herren Brioschi[45]) und Kronecker[46]) nur beiläufig erinnern. Ein Vergleich ihrer Untersuchungen mit den unserigen wird dadurch erschwert, daß sie nicht nach Potenzen von $\wp(u)$, sondern von $\sin^2\mathrm{am}\ u$ entwickeln (wodurch die Entwicklungskoeffizienten unnötigerweise von der $2n$-ten Stufe werden,

[43]) Man sehe etwa die Exkurse über „Jacobische" Gleichungen in meinem „*Ikosaederbuch*" (Leipzig 1884), Abschnitt II, Kapitel 1, § 3 u. § 5. Ich habe dort in Übereinstimmung mit Herrn Brioschi die Ausdrucksweise so gewählt, daß $\left(\frac{X_0(u)}{\sigma(u)^n}\right)^2$ als Unbekannte gilt und also die „Quadratwurzeln aus den Wurzeln" sich linear aus $\frac{n+1}{2}$ Größen zusammensetzen lassen. Im gegenwärtigen Texte dagegen halte ich auch weiter unten daran fest, daß $X_\alpha(u):\sigma(u)^n$ selbst als Wurzel der Jacobischen Gleichung betrachtet werden soll.

[44]) Crelles Journal, Bd. 3 (1828) = Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 261.

[45]) Vgl. die bereits zitierte Arbeit in Bd. 47 der Comptes Rendus (1858) [= Opere matematiche, Nr. CLXXV, tomo IV., S. 327 ff.], sowie eine Abhandlung im Jahrgange 1866 der Atti della R. Accademia di Napoli, Bd. 3 [= Opere matematiche, Nr. CLXII, tomo IV., S. 161].

[46]) Berliner Monatsberichte von 1861 (*Bericht über algebraische Arbeiten*). [Ferner: Berliner Monatsberichte 1879 (*Entwicklungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen*)].

während sie bei uns von der n-ten Stufe sind). Die Entwicklung von $X_0(u):\sigma(u)^n$ nach Potenzen von $\wp(u)$ findet sich zuerst bei Herrn Kiepert ausgeführt, wie wir bereits in § 14 erwähnten.

Dagegen erscheinen die Formeln (114), soweit ich nicht selbst auf dieselben bei früheren Gelegenheiten aufmerksam machte, als neu. Vom Ikosaeder ausgehend habe ich zuerst in Bd. 15 der Math. Annalen (1879), S. 275 ff. [= Abh. LVII, S. 416 in Bd. 2 dieser Ausgabe] darauf hingewiesen, daß der auf $\frac{n+1}{2}$ Variabele bezüglichen Substitutionsgruppe der Jacobischen Gleichungen eine andere, auf $\frac{n-1}{2}$ Variabele bezügliche Substitutionsgruppe zur Seite steht, wobei zwischen diesen Gruppen ein merkwürdiger Gegensatz statthat: *Ist* $n \equiv 3 \pmod 4$, *so ist die erste dieser Gruppen mit den modulo n betrachteten linearen Transformationen von ω_1, ω_2 holoedrisch, die zweite hemiedrisch isomorph; für* $n \equiv 1 \pmod 4$ *ist es genau umgekehrt*[47]). Dieser Satz erscheint jetzt in einem neuen Lichte, indem beiderlei Substitutionsgruppen ihre Entstehung in der einen Gruppe der X_α (112) finden. Letztere Gruppe ist, wie wir wissen, mit der Gruppe der zu Vergleich stehenden ω-Transformationen immer holoedrisch isomorph. Der verschiedene Charakter der für die Y_α und die Z_α geltenden Gruppen erklärt sich aus dem verschiedenen Verhalten dieser Größen gegenüber der Operation $\omega_1' = -\omega_1$, $\omega_2' = -\omega_2$. Aus Formel (108) nämlich:

$$X_\alpha(u \mid -\omega_1, -\omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot X_{n-\alpha}(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

folgt einerseits:

$$(115) \qquad Y_\alpha(u \mid -\omega_1, -\omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot Y_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

andererseits aber:

$$(116) \qquad Z_\alpha(u \mid -\omega_1, -\omega_2) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot Z_\alpha(u \mid \omega_1, \omega_2),$$

wo nun die Unterscheidung der beiden Fälle $n \equiv \pm 1 \pmod{4}$ unmittelbar hervorspringt.

§ 19.

Der besondere Fall $n = 3$. Die Größen $\overline{X}_\gamma(u)$ usw.

Das Formelsystem (114) wird besonders einfach für $n = 3$, wo es für die eine dann allein vorhandene Größe:

$$(117) \qquad Z_1(u) = X_1(u) - X_2(u)$$

[47]) Wegen der allgemeinsten Definition dieser Gruppen und ihrer prinzipiellen Stellung in der Theorie der elliptischen Funktionen wolle man insbesondere auch die neuerdings im 25. Bande der Math. Annalen (1885) erschienene Arbeit von Herrn Morera vergleichen: *Über einige Bildungsgesetze in der Theorie der Teilung und der Transformation der elliptischen Funktionen.*

das folgende Verhalten aussagt:

$$(118) \qquad \begin{cases} Z_1(u \mid \omega_1 + \omega_2, \omega_2) = \varepsilon^2 \cdot Z_1(u \mid \omega_1, \omega_2), \\ Z_1(u \mid -\omega_2, \omega_1) \quad = \quad Z_1(u \mid \omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Wir werden diese Formeln besser verstehen, wenn wir einerseits den Nullwert z_1 durch g_2, g_3, Δ darzustellen suchen, andererseits aber Formel (101) heranziehen, derzufolge $Z_1(u):\sigma(u)^3$ gleich $-z_1 \cdot \wp'(u)$ ist. Um z_1 zu gewinnen, trage ich in (117) für X_1, X_2 die entsprechenden Ausdrücke (71) ein. Dies gibt:

$$(119) \qquad Z_1(u) = -\sqrt{\frac{6\pi}{\omega_2}} \cdot \frac{e^{\frac{3\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt[8]{\Delta^3}} \cdot \left[q^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-\frac{2i\pi u}{\omega_2}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{3u\pi - \omega_1\pi}{\omega_2}, q^3\right) \right.$$
$$\left. + q^{\frac{4}{3}} \cdot e^{-\frac{4i\pi u}{\omega_2}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{3u\pi - 2\omega_1\pi}{\omega_2}, q^3\right) \right],$$

oder zusammengezogen:

$$(120) \quad Z_1(u) = i\sqrt{\frac{6\pi}{\omega_2}} \cdot \frac{e^{\frac{3\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt[8]{\Delta^3}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^k \cdot q^{\frac{(6k+1)^2}{12}} \cdot \left\{ \begin{matrix} e^{(6k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \\ + e^{-(6k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \end{matrix} \right\}.$$

Für z_1 kommt also (indem wir vorstehend $u = 0$ setzen):

$$(121) \qquad z_1 = \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt[8]{\Delta^3}} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' (-1)^k \cdot q^{\frac{(6k+1)^2}{12}} \right\}.$$

Hier ist nun der in der geschweiften Klammer stehende Teil die bekannte Reihenentwicklung für $\sqrt[24]{\Delta}$ (welche der unter (7) gegebenen Produktentwicklung entspricht). *Der Nullwert z_1 erhält also folgende Bedeutung*[48]):

$$(122) \qquad z_1 = \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\Delta}}.$$

Wir setzen jetzt wieder $\wp'(u) = -2\mathsf{T}(u):\sigma(u)^3$. Dann folgt aus der bereits angezogenen Formel (101):

$$(123) \qquad Z_1(u) = 2z_1 \cdot \mathsf{T}(u) = \frac{2i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\Delta}} \cdot \mathsf{T}(u),$$

womit in der Tat das Verhalten von $Z_1(u)$ bei linearer Transformation der Perioden erklärt ist, insofern $\mathsf{T}(u)$ als Modulfunktion zur ersten Stufe gehört.

[48]) Siehe hier und im folgenden auch Brioschi, Annali di Matematica, ser. 2, t. XII. (1883/84), S. 49 ff. [= Opere matematiche, Nr. LXXXVI, tomo II., S. 295].

Ich werde nun zeigen, *daß wir auf Grund dieser Entwicklung für solche ungerade n, die nicht durch 3 teilbar sind, neue Größen zusammensetzen können, die sich bei linearer Transformation der Perioden ganz ähnlich wie die X_α verhalten.* Einen ersten Schritt hierzu hat schon Herr Kiepert getan (Crelles Journal Bd. 87 (1879), S. 213), indem er von folgender Reihenentwicklung ausging (die sich durch Zusammenstellung von (120) und (123) ergibt):

$$(124)\qquad \mathsf{T}(u)=\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\cdot\frac{e^{\frac{3\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{2\sqrt[24]{\Delta}}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'(-1)^k\cdot q^{\frac{(6k+1)^2}{12}}\cdot\left\{\begin{array}{l} e^{(6k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \\ +\,e^{-(6k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}}\end{array}\right\}$$

und mit ihrer Hilfe schloß, daß

$$(125)\qquad \sqrt[24]{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta^n}}\cdot e^{-3G_1u^2}\cdot\mathsf{T}\left(u\,\middle|\,\omega_1,\frac{\omega_2}{n}\right)$$

zusammen mit den Werten, die aus ihm durch lineare Transformation der Perioden entstehen, für $n\not\equiv 0$ (mod. 3) einer Jacobischen Gleichung genügt, — einer Jacobischen Gleichung, die als speziellen Fall $(u=0)$ die wohlbekannte Gleichung einschließt, deren Wurzeln die verschiedenen Werte von $\sqrt[24]{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta^n}}$ sind[49]. Auf demselben Wege, nämlich ausgehend von der Reihenentwicklung (124), würde man auch die in Aussicht genommenen neuen Größen, die den X_α koordiniert sind, gewinnen können, wobei die T-Funktion eine ganz ähnliche Rolle spielen müßte, wie bei der Aufstellung der X_α die σ-Funktion[50]. Inzwischen ziehe ich vor, die neuen Größen (die ich $\overline{X}_\gamma(u)$ nenne) aus den X_α selbst durch geeignete Kombination verschiedener X_α herzuleiten.

Es seien X_α jetzt diejenigen Größen X, welche sich auf die Zahl $3n$ beziehen (wo die ungerade Zahl n selbst durch 3 nicht teilbar sein

[49]) Es ist dies diejenige Gleichung, welche ich sonst als *Multiplikatorgleichung erster Stufe* bezeichnet habe. [Für weitere Literaturangaben siehe die Arbeit Nr. LXXXV im vorliegenden Bande.]

[50]) Man vgl. meine Note vom November 1884 (in den Berichten der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss.), wo eben das im Texte angedeutete Verfahren durchgeführt ist. [Bildet man nämlich in völliger Analogie zu den Sigma-Teilwerten auch Teilwerte der Funktion T:

$$\mathsf{T}_{\lambda,\mu}=e^{3\frac{\lambda\eta_1+\mu\eta_2}{n}\left(u-\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)}\cdot\mathsf{T}\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\,\middle|\,\omega_1,\omega_2\right),$$

so drücken sich die $\overline{X}_\gamma(u\,|\,\omega_1,\omega_2)$ aus Formel (126) durch die T-Teilwerte in ähnlicher Weise aus, wie die $X_\alpha(u\,|\,\omega_1,\omega_2)$ nach Formel (69), S. 227 durch die Sigma-Teilwerte, nämlich

$$\overline{X}_\gamma(u\,|\,\omega_1,\omega_2)=(-1)^\gamma\cdot\sqrt[24]{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta^n}}\cdot e^{-3G_1u^2}\cdot\mathsf{T}_{\gamma,0}\left(u\,\middle|\,\omega_1,\frac{\omega_2}{n}\right).$$

K.]

soll). Dann sind die $\overline{X}_\gamma(u)$, um die es sich handelt, durch folgende Formel gegeben:

$$(126)\quad \overline{X}_\gamma(u\,|\,\omega_1,\omega_2)=\frac{\sqrt[3]{\Delta^n}}{2i\sqrt{3}}\big(X_{3\gamma+n}(u\,|\,\omega_1,\omega_2)-X_{3\gamma+2n}(u\,|\,\omega_1,\omega_2)\big),$$

welche für $\gamma=0$ den Ausdruck (125) vorstellt.

Um das Verhalten der $\overline{X}_\gamma$ bei linearer Transformation zu erforschen, brauchen wir nur die für die X_α geltenden Substitutionsformeln (in denen natürlich n durch $3n$ zu ersetzen ist) in geeigneter Weise zusammenzuziehen. Wir finden nach kurzer Zwischenrechnung[51]):

$$(127)\quad \begin{cases} S:\ \overline{X}_\gamma(u\,|\,\omega_1+\omega_2,\omega_2) = \varepsilon^{-\frac{3\gamma(n-\gamma)}{2}}\cdot\overline{X}_\gamma(u\,|\,\omega_1,\omega_2), \\ T:\ \left(\frac{3}{n}\right)\cdot(-i)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{n}\cdot\overline{X}_\gamma(u\,|-\omega_2,\omega_1)=\sum\limits_{\delta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}'\varepsilon^{-3\gamma\delta}\cdot\overline{X}_\delta(u\,|\,\omega_1,\omega_2), \end{cases}$$

also in der Tat Formeln, welche genau den für die alten X_α geltenden entsprechen, nur daß ε überall durch ε^3 ersetzt ist (was sich denn auch in dem Legendreschen Zeichen ausdrückt, welches linker Hand dem Zahlenfaktor $(-i)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{n}$ zugesetzt ist.

Aus den $\overline{X}_\gamma$ können wir jetzt wieder Systeme von $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ Größen ableiten, die sich für sich genommen substituieren. Indem ich dieselben, der Analogie mit der früheren Entwicklung folgend, $\overline{Y}_\gamma$ und $\overline{Z}_\gamma$ nenne, habe ich:

$$(128)\quad \begin{cases} \overline{Y}_0=\overline{X}_0,\ \overline{Y}_1=\overline{X}_1+\overline{X}_{n-1},\ \ldots,\ \overline{Y}_{\frac{n-1}{2}}=\overline{X}_{\frac{n-1}{2}}+\overline{X}_{\frac{n+1}{2}}, \\ \qquad\qquad\ \overline{Z}_1=\overline{X}_1-\overline{X}_{n-1},\ \ldots,\ \overline{Z}_{\frac{n-1}{2}}=\overline{X}_{\frac{n-1}{2}}-\overline{X}_{\frac{n+1}{2}}. \end{cases}$$

Hier ist $\overline{Y}_0=\overline{X}_0$, wie wir bereits bemerkten, dem Ausdrucke (125) gleich, *die $\overline{Y}_\gamma$ aber überhaupt sind die Teilgrößen, aus denen sich die verschiedenen Werte, welche $\overline{Y}_0$ bei linearer Transformation der Perioden annimmt, nach dem Jacobischen Schema zusammensetzen.* Insbesondere also sind die Nullwerte $\overline{Y}_\gamma(0)$ diejenigen Teilgrößen, welche zu der für $\sqrt[24]{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta^n}}$ geltenden Jacobischen Gleichung gehören. Ich habe diese Teilgrößen in Bd. 17 der Math. Annalen (1881) [= Nr. LXXXIX, S. 188 des vorliegenden Bandes] (wo eben die Betrachtungen, die ich im folgenden Paragraphen

[51]) [Diese ist in „Modulfunktionen“, Bd. 2, S. 321—323 ausführlich dargelegt.]

貴重書

ausführe, bereits angedeutet sind), mit $A_0, A_1, \ldots, A_{\frac{n-1}{2}}$ bezeichnet und will hier diese Benennung festhalten. Die Größen A_γ des folgenden Paragraphen sind also in nachstehender Weise definiert:

$$(129) \qquad A_\gamma = \overline{Y}_\gamma(0).$$

§ 20.

Verbindung der y'_α und z_α mit Hilfe der A_γ.

Mit den Ausdrücken A_γ ist ein neues System von Moduln n-ter Stufe gewonnen, welches insofern besondere Beachtung verdient, als es ebensowohl mit den y'_α als den z_α, wie ich jetzt zeigen werde, in einfachster Beziehung steht und also die Verbindung dieser beiden Modulsysteme vermittelt. Allerdings gelten die entstehenden Formeln, wie selbstverständlich, nur für $n \not\equiv 0 \pmod 3$, was aber den besonders wichtigen Fall, in welchem n eine Primzahl > 3 ist, einschließt.

Um mit den y'_α zu beginnen, so haben wir jedenfalls die Formel:

$$(130) \qquad y'_0 = A_0{}^3.$$

Lassen wir hier beiderseits die Operation T eintreten, so erhalten wir:

$$\pm n \cdot \sum_{\alpha=0}^{\frac{n-1}{2}} y'_\alpha = \left(\sum_{\gamma=0}^{\frac{n-1}{2}} A_\gamma \right)^3,$$

wo das $+$ oder $-$ Zeichen anzuwenden ist, je nachdem $(n-1)$ oder $(n+1)$ durch 6 teilbar ist. Hieraus aber folgt weiter, indem wir ν-mal mit S operieren:

$$(131) \qquad \pm n \sum_{\alpha=0}^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{-\nu \frac{\alpha \cdot n - \alpha}{2}} \cdot y'_\alpha = \left(\sum_{\gamma=0}^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{-3\nu \frac{\gamma(n-\gamma)}{2}} \cdot A_\gamma \right)^3.$$

Nun müssen in dieser Gleichung, wie schon Herr Brioschi bemerkt hat[52], die Potenzen von ε linker und rechter Hand übereinstimmen. Dies gibt einmal $\frac{n-1}{2}$ kubische Relationen für die A_γ, *andererseits aber*, worauf es hier ankommt, *die y'_α als rationale ganze Funktionen dritten Grades der A_γ, so daß die y'_α überall zweckmäßigerweise durch die A_γ ersetzt werden können.*

Die Beziehung zu den z_α gestaltet sich nicht minder einfach. Wir haben folgende Relation voranzustellen (die nichts anderes als eine wohlbekannte σ-Relation ist):

$$\mathsf{T}(u) = \frac{\sigma(2u)}{2\sigma(u)},$$

[52]) *Sopra una classe di equazioni modulari*, Annali di Matematica, ser. 2, t. IX. (1878/79), S. 167 ff. [= Opere matematiche, Nr. LXXV, tomo II., S. 193].

aus der wir dann mit leichter Mühe die Formel ableiten:

$$(132) \qquad \frac{\overline{X}_\gamma(u)}{A_0} = \frac{X_{2\gamma}(2u)}{X_\gamma(u)},$$

(unter X_γ die zur ursprünglichen Zahl n gehörigen X verstanden). Wir setzen jetzt $u = 0$ und haben:

$$(133) \qquad \frac{A_\gamma}{A_0} = \frac{z_{2\gamma}}{z_\gamma},$$

so daß wir jedenfalls die Verhältnisse der A durch die Verhältnisse der z, oder auch, wenn wir wollen, sämmtliche vorkommende Moduln durch die z_α und die eine Größe A_0 rational darstellen können.

Wird auch A_0 selbst eine rationale Funktion der z_α sein[53])? Eine nähere Überlegung, welche ich hier nicht ausführe, zeigt, daß dies in der Tat für $n \equiv 1 \pmod 4$ der Fall ist, während für $n \equiv 3 \pmod 4$ erst A_0^2 in den z_α rational wird und die Berechnung des A_0 aus den z_α also eine Quadratwurzel erfordert. Es ist diese Unterscheidung darin begründet, daß die z_α von der $\frac{3n-1}{2}$-ten Dimension in ω_1, ω_2 sind, A_0 aber von der $\frac{n-1}{2}$-ten Dimension, daß also die z_α und die A_γ in bezug auf ω_1, ω_2 abwechselnd geraden und ungeraden Charakter haben.

Ich will hier wenigstens eine der Formeln angeben, welche A_0 mit den z_α verknüpft, und zwar deshalb, weil sie bei $n = 5$ und $n = 7$ bereits ausreicht, um A_0, bzw. A_0^2 rational durch die z_α darzustellen. Es ist folgende:

$$(134) \qquad \prod_1^{\frac{n-1}{2}} z_\alpha \cdot \Delta^{\frac{n^2-1}{24}} = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{n} \cdot A_0^{\frac{n-3}{2}}.$$

Unter Zugrundelegung derselben mögen wir insbesondere den Fall $n = 5$ durchrechnen. Aus (134) wird:

$$(135) \qquad A_0 = \frac{z_1 z_2 \cdot \Delta}{\sqrt{5}},$$

also aus (133):

$$(135\,\mathrm{b}) \qquad A_1 = \frac{z_2^2 \cdot \Delta}{\sqrt{5}}, \quad A_2 = \frac{-z_1^2 \cdot \Delta}{\sqrt{5}}.$$

Dies tragen wir in (131) ein und erhalten:

$$(136) \quad y'_0 = \frac{z_1^3 z_2^3 \cdot \Delta^3}{5\sqrt{5}}, \quad y'_1 = \frac{(z_1^6 - 3 z_1 z_2^5) \cdot \Delta^3}{25\sqrt{5}}, \quad y'_2 = \frac{(-3 z_1^5 z_2 - z_2^6) \cdot \Delta^3}{25\sqrt{5}},$$

[53]) In der wiederholt genannten Note vom November 1884 habe ich die Sache gerade umgekehrt gewandt, indem ich A_0 als Wurzel der Multiplikatorgleichung erster Stufe betrachtete und nun nach der Bestimmung der z_α fragte.

so daß bei $n = 5$ jetzt alle von uns betrachteten Modulsysteme durch z_1, z_2 allein ausgedrückt sind.

Wir wollen die Formeln (136) noch in (84) eintragen. Wir finden dann für das „Integral erster Gattung fünfter Stufe“:

$$(137) \qquad u = \int \frac{25\sqrt{5}\,(X_1\,dX_2 - X_2\,dX_1)}{((2z_1^5 - z_2^5)X_1X_2 - 5z_1^3z_2^2X_0X_3)\cdot\Delta^3},$$

womit wir nun auch in der Bestimmung von u den Anschluß an Bianchis ursprüngliche Formel gewonnen haben (siehe Bd. 17 der Math. Annalen (1880/81), S. 261, 262). Die unbestimmte Konstante C, welche bei Herrn Bianchi als Faktor auftritt, und die in (137) fehlt, findet dadurch ihre Begründung, daß Herr Bianchi nirgendwo die absoluten Werte der X_α fixiert hat und also auch nicht die z_1, z_2 selbst, sondern nur deren Quotienten in Betracht zieht.

Wir haben hiermit die Theorie der y'_α und z_α, wie der A_γ, so weit entwickelt, als sie sich ungezwungen an die Theorie der Normalkurven anschließt. Ich betrachte dies alles nur als Vorbereitung zu einer tiefergehenden Untersuchung der genannten Modulsysteme, die aber nach Umfang und Inhalt einer gesonderten Darstellung vorbehalten bleiben muß[54].

Düsseldorf, den 10. April 1885.

[54]) [Der Ansatz, der mir in § 19 den Übergang zu den A_γ vermittelte, nämlich durch bilineare Kombination der zu verschiedenen Werten von n gehörigen X_α von verschiedenen Argumenten — in § 19 sind es die zu 3 gehörigen $X_\alpha(o) = z_\alpha$ und die zu $3n$ gehörigen $X_\alpha(u)$ — neue Systeme elliptischer Funktionen zu gewinnen, die sich bei Periodentransformationen linear mit konstanten Koeffizienten substituieren, wurde, wie schon in den Vorbemerkungen erwähnt, von Hurwitz, Math. Annalen, Bd. 27. (1886), in systematischer Weise verallgemeinert und zur Gewinnung neuer Modulsysteme n-ter Stufe verwandt. Diese sind dadurch charakterisiert, daß in ihren Potenzreihenentwicklungen nach q^2 als Exponenten die zur Diskriminante $-n$ bzw. $-4n$ gehörenden quadratischen binären Formen auftreten. Alle diese Entwicklungen hat Fricke in vervollständigter Form in Bd. 2 der „Modulfunktionen“ sowie im zweiten Bande seines neuen Lehrbuchs (1921/22) ausführlich dargestellt. K.]

XCI. Neue Untersuchungen über elliptische Funktionen und Modulfunktionen. Erster Bericht[1]).

[Berichte der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-physische Klasse. Sitzung am 2. März 1885.]

§ 1.

Die Betrachtungen, welche ich in meiner vorigen Note[2]) der Gesellschaft der Wissenschaften unterbreitete, sind ursprünglich dadurch veranlaßt worden, daß ich die Fälle kleiner Primzahlen: $n = 2, 3, 5, 7, 11$ einer direkten funktionentheoretischen Untersuchung unterwarf[3]) und dadurch einen Fingerzeig erhielt, in welcher Richtung auch bei höheren Primzahlen einfache Modulsysteme zu finden sein möchten. Die solchergestalt erhaltenen Resultate erwiesen sich dann überhaupt für ungerade Zahlen als gültig, oder doch für solche ungerade Zahlen, welche nicht durch drei teilbar sind. Es ist aber keineswegs ausgeschlossen, daß für zusammengesetzte Zahlen dieser Art noch einfachere Modulsysteme existieren mögen[4]), während die Moduln gerader Stufe allgemein noch zu behandeln bleiben[5]). Unter diesen Umständen schien es nützlich, jene direkte funktionentheoretische Methode, die ihrer Natur nach nur bei kleinen Zahlen durchführbar ist, auf kleine *zusammengesetzte* Zahlen an-

[1]) [Die Titel dieser und der nächstfolgenden Arbeit Nr. XCII wurden beim Wiederabdruck unwesentlich geändert, um bei den beiden Noten XCI und XCII Gleichklang zu erzielen. In der Tat sind beide Berichte ihrem Inhalte nach nahe verwandt und der zweite wiederholt in manchen Punkten den ersten, da er seinerzeit an einen anderen Leserkreis gerichtet war. Auch finden sich in Nr. XCII Zitate auf die ersten Publikationen der besprochenen Untersuchungen, während zur Zeit der Abfassung der vorliegenden Note die Veröffentlichungen noch nicht vorlagen. K.]

[2]) *Zur Theorie der elliptischen Funktionen n-ter Stufe* (Sitzung vom 14. Nov. 1884). [Der Inhalt dieser in der vorliegenden Gesamtausgabe nicht reproduzierten Note ist in ausführlicherer Form enthalten in der vorstehend abgedruckten Abh. XC über elliptische Normalkurven.]

[3]) Vgl. meine bez. Arbeiten in den Bänden 14 und 15 der Math. Annalen (1878/79) [= Nr. LXXXII bis LXXXVI in diesem Bande].

[4]) Eine gleiche Vermutung äußerte mir gelegentlich Herr Kiepert. [Vgl. die auf S. 139 genauer zitierten Arbeiten in den Bänden 32 und 37 der Math. Annalen (1888 und 1890).] Man sehe auch die neueste Arbeit von Herrn Weber, Bd. 6 der Acta Mathematica (1885).

[5]) [Dies ist später durch Hurwitz geschehen, vgl. das Zitat auf S. 199, Fußnote[2]).]

zuwenden. Ein Mitglied meines Seminars, Herr **Fricke**, hat sich mit der hierdurch bezeichneten Fragestellung ausführlich beschäftigt, und ich möchte im folgenden zunächst über die hauptsächlichen von ihm erhaltenen Resultate Bericht erstatten. Die Beweise, welche ich unterdrücke, beruhen in allen Fällen auf direkter Betrachtung der zugehörigen Fundamentalpolygone der ω-Ebene (ω = Periodenverhältnis).

Erinnern wir uns zunächst der Fälle $n = 2$, 3. In beiden Fällen existiert ein einziger sogenannter *Hauptmodul*, durch welchen sich alle anderen Moduln derselben Stufe rational darstellen. Es ist dies bei $n = 2$ das *Doppelverhältnis* λ, welches mit der absoluten Invariante J durch eine Diedergleichung sechsten Grades verbunden ist[6]):

$$(1)\quad J : J - 1 : 1 = 4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3 : (2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 2)^2 : 27\lambda^2(1-\lambda)^2,$$

bei $n = 3$ die *Tetraederirrationalität* a, deren Verbindung mit J durch folgende Gleichung fixiert sei[7]):

$$(2)\qquad J : J - 1 : 1 = (a^4 + 8a)^3 : (a^6 - 20a^3 - 8)^2 : 64(a^3 - 1)^3.$$

Auch bei $n = 4$ existiert, wie ich früher ausführlich zeigte[8]), ein Hauptmodul, die *Oktaederirrationalität* o, definiert durch die Gleichung 24sten Grades:

$$(3)\quad J : J - 1 : 1 = (o^8 + 14o^4 + 1)^3 : (o^{12} - 33o^8 - 33o^4 + 1)^2 : 108\,o^4(o^4 - 1)^4.$$

Herr **Fricke** hat nun zunächst, um die *vierte* Stufe an die *zweite* anzuschließen, den Zusammenhang zwischen o und λ klargelegt. Wir schreiben in gewöhnlicher Weise für $\lambda(\omega)$ das Legendresche $\varkappa^2$ und wählen $\varkappa(\omega)$ insbesondere so, daß

$$\varkappa(0) = 0,\quad \varkappa(1) = 1,\qquad \varkappa(i\infty) = \infty$$

ist, während

$$o(\tfrac{1}{2}) = 0,\quad o(0) = 1,\qquad o(i\infty) = \infty$$

sein soll[9]). Setzen wir dann noch in üblicher Weise

$$\varkappa' = \sqrt{1 - \varkappa^2}$$

[6]) Vgl. wegen der im Text gebrauchten Ausdrucksweise außer den bereits genannten, in den Math. Annalen publizierten [und vorangehend abgedruckten] Arbeiten mein „Ikosaederbuch" (Leipzig 1884). — Übrigens ist λ dieselbe Größe, welche bei **Legendre** und **Jacobi** als $\varkappa^2$ bezeichnet wird, eine Benennung, auf die ich später im Texte zurückgreife.

[7]) „Ikosaederbuch", S. 133. [Siehe auch S. 58 in Abh. LXXXII im vorliegenden Bande. Die hier gebrauchte Größe a ist mit der dort gebrauchten $\frac{x_1}{x_2}$ durch die Gleichung $a = -2\frac{x_1}{x_2}$ verknüpft. B.-H.]

[8]) Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79), [= Abh. LXXXII im vorliegenden Bande, S. 59].

[9]) [Gemäß dieser Festsetzung besteht zwischen λ nnd der in Abh. LXXXII gebrauchten Größe σ die Beziehung $\lambda = \frac{\sigma - 1}{\sigma}$. B.-H.]

und nehmen $\varkappa'(0) = 1$, so kommt:

$$(4)\qquad o = \varkappa' - i\varkappa,\quad \varkappa = i\,\frac{o^2 - 1}{2o},\quad \varkappa' = \frac{o^2 + 1}{2o}.$$

Wir betrachten ferner die *sechste* Stufe. Das aus 72 Doppeldreiecken bestehende Fundamentalpolygon der sechsten Stufe gehört zum Geschlechte $p = 1$. Daher wird sich ein volles Modulsystem sechster Stufe nur durch Nebeneinanderstellung mindestens zweier Moduln erreichen lassen. Am nächsten liegt es, in diesem Sinne die beiden Größen λ und a (mit denen man in der Tat ausreicht) simultan zu betrachten. Das Fundamentalpolygon erscheint dann eindeutig auf die Kurve bezogen, deren Gleichung sich durch Elimination von J aus (1) und (2) ergibt:

$$(5)\qquad 256 \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} = 27 \cdot \frac{a^3(a^3 + 8)^3}{(a^3 - 1)^3}.$$

Inzwischen erscheint es zweckmäßig, die beiden Moduln λ und a durch zwei andere x, y zu ersetzen, indem wir schreiben:

$$(6)\qquad \lambda = \frac{(3 - y)^3 \cdot (1 + y)}{16\,y^3},\quad a = \frac{x^3 + 4}{3x^2}.$$

Die Elimination von λ und a zwischen (5), (6) ergibt dann nämlich:

$$(7)\qquad y^2 = x^3 + 1$$

und es erscheint also die Kurve vom Geschlechte $p = 1$ auf die für sie geltende *Normalform* bezogen. Will man x und y rational durch λ und a ausdrücken, so hat dies keine Schwierigkeit, führt aber zu Formeln, die wir der Kürze halber hier weglassen müssen.

Im Falle der *achten* Stufe, den wir nunmehr betrachten, kommt ein Fundamentalpolygon von 192 Doppeldreiecken und dem Geschlechte $p = 5$ in Betracht. Zugehörige Moduln sind, wie selbstverständlich, die Quadratwurzeln $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$. *Es ist aber sehr wichtig, zu bemerken, daß sie allein genommen noch nicht ausreichen, um die einzelne Stelle des Fundamentalpolygons zu fixieren.* Vielmehr gehören zu jedem Punkte der durch $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ bestimmten ebenen Kurve vom Geschlechte 3 und der Gleichung[9a]):

$$(8)\qquad (\sqrt{\varkappa})^4 + (\sqrt{\varkappa'})^4 = 1$$

immer noch zwei Stellen des Polygons. *Um eine eindeutige Beziehung zu erhalten, müssen wir zu $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ etwa noch folgende Größe hinzunehmen:*

$$(9)\qquad \sqrt{o} = \sqrt{\varkappa' - i\varkappa}.$$

Wir haben dann neben (8) noch folgende Relation:

$$(10)\qquad (\sqrt{o})^2 = (\sqrt{\varkappa'})^2 - i(\sqrt{\varkappa})^2$$

und also unser Fundamentalpolygon eindeutig auf eine (durch (8), (10) dargestellte) Raumkurve achter Ordnung abgebildet. — Des näheren wollen

[9a]) [Vgl. die auf S. 136 genannte Arbeit von **Dyck**, Math. Annalen, Bd. 17 (1880/81).]

wir die hier angeführten Wurzelzeichen in der Folge so fixiert denken, daß

$$\sqrt{\varkappa(1)} = 1, \quad \sqrt{\varkappa'(0)} = 1, \quad \sqrt{o(0)} = 1$$

wird.

Wir schreiten zu $n = 9$. Wir haben dann 324 Doppeldreiecke und das Geschlecht $p = 10$ des Fundamentalpolygons. Sei $\varrho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. *Eine einfache Überlegung zeigt dann, daß ein volles Modulsystem der neunten Stufe durch Nebeneinanderstellung der folgenden Kubikwurzeln gegeben ist:*

$$(11) \qquad \sqrt[3]{a-1}, \quad \sqrt[3]{a-\varrho}, \quad \sqrt[3]{a-\varrho^2}.$$

Zwischen denselben bestehen die selbstverständlichen Relationen:

$$(12) \qquad \left(\sqrt[3]{a-1}\right)^3 + 1 = \left(\sqrt[3]{a-\varrho}\right)^3 + \varrho = \left(\sqrt[3]{a-\varrho^2}\right)^3 + \varrho^2;$$

das Fundamentalpolygon erscheint also vermöge unserer Darstellung eindeutig auf eine Raumkurve neunter Ordnung bezogen.

Wir erledigen endlich noch den Fall $n = 16$. Es handelt sich um ein Fundamentalpolygon von 1536 Doppeldreiecken und dem Geschlechte $p = 81$. Zugehörige Moduln sind vor allen Dingen:

$$(13) \qquad \sqrt[4]{\varkappa}, \quad \sqrt[4]{\varkappa'},$$

zwischen denen die Relation besteht:

$$(14) \qquad \left(\sqrt[4]{\varkappa}\right)^8 + \left(\sqrt[4]{\varkappa'}\right)^8 = 1,$$

aber allein genommen reichen dieselben wieder keineswegs aus, um die einzelne Stelle des Fundamentalpolygons festzulegen. Wollen wir ein volles Modulsystem der 16-ten Stufe haben, so können wir einmal, wie bei der achten Stufe, die Quadratwurzel aus der Oktaederirrationalität:

$$(15) \qquad \sqrt{o}$$

hinzunehmen, worauf neben (14) die folgende Gleichung tritt:

$$(16) \qquad \left(\sqrt{o}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{\varkappa'}\right)^4 - i\left(\sqrt[4]{\varkappa}\right)^4.$$

Aber hiermit reichen wir noch nicht aus; wir müssen überdies noch eine zweite Irrationalität adjungieren, welche selbst wieder mit den vorgenannten Moduln durch eine quadratische Gleichung zusammenhängt. Als derartige Irrationalität bringt Herr Fricke insbesondere in Vorschlag:

$$(17) \qquad \sqrt{\frac{\sqrt{2\varkappa'} + \sqrt{\varkappa' + i\varkappa}}{\sqrt{2\varkappa'} - \sqrt{\varkappa' - i\varkappa}}}.$$

Zwischen den so definierten Moduln bez. Modulsystemen ergeben sich natürlich bei Transformation zweiter oder dritter Ordnung von ω zahlreiche Zusammenhänge, von denen hier die einfachsten erwähnt werden sollen[10]).

[10]) Man könnte insbesondere immer auch die transformierten Werte von J in Betracht ziehen, doch haben die betreffenden Formeln wegen ihrer Kompliziertheit kein sonderliches Interesse.

1. Es ist:

$$(18) \qquad \lambda\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{(o-1)^4}{8o(1+o^2)}, \quad \lambda\left(\frac{\omega+1}{2}\right) = \frac{(1+io)^4}{8io(1-o^2)},$$

$$\lambda(2\omega) = 1 - o^4;\ ^{11})$$

analog:

$$(19) \qquad \lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = -\frac{\left(1+\varkappa'-2\sqrt{\varkappa'}\right)^2}{8\sqrt{\varkappa'}(1+\varkappa')},$$

$$(20) \qquad \lambda\left(\frac{\omega}{8}\right) = -\frac{\left[\left(1+\sqrt{\varkappa'}\right)^2 - 2\sqrt{2}\sqrt[4]{\varkappa'}\sqrt{1+\varkappa'}\right]^2}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\varkappa'}\sqrt{1+\varkappa'}\left(1+\sqrt{\varkappa'}\right)^2}, \text{ usw.}$$

2. Von den transformierten Werten von o kommen insbesondere die folgenden in Betracht:

$$(21) \qquad o\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\varkappa'}, \quad o\left(\frac{\omega+1}{2}\right) = -i\sqrt{\varkappa}, \quad o(2\omega) = \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\varkappa'} + \sqrt{\varkappa}}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\varkappa'} - \sqrt{\varkappa}}$$

$$(22) \qquad o\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1+o}{2\sqrt[4]{\varkappa'}\cdot\sqrt{o}}, \text{ usw.}$$

3. Endlich hat man für Transformation dritter Ordnung der Tetraederirrationalität, wenn man die Moduln neunter Stufe (11) der Kürze halber bez. mit x, y, z bezeichnet:

$$(23) \qquad a\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{a+2}{yz}, \quad \text{usw.}, \quad a(3\omega) = \frac{a+2xyz}{a-xyz}.\ ^{12})$$

Andererseits wird man fragen, wie die eingeführten Moduln mit den *Teilwerten der elliptischen Funktionen* zusammenhängen. Es muß dabei

[11]) Bei anderer Fixierung von o wird diese Formel einfach:

$$\lambda(2\omega) = o^4.$$

[12]) Ebenso, wie man die wiederholte quadratische Transformation verwenden kann, um aus gegebenem λ das zugehörige ω zu berechnen, kann man die Formel des Textes dazu benutzen, um bei gegebenem a das Entsprechende zu erreichen. Für sehr kleine Werte von q $(= e^{i\pi\omega})$ ist ω annäherungsweise $= -\frac{3}{2i\pi}\log(3a-3)$. Sei nun abkürzend $a_\nu = a(3^\nu\omega)$, worauf wir dem Texte die Formelkette entnehmen:

. . . .

$$a_\nu = \frac{a_{\nu-1} + 2\cdot\sqrt[3]{a_{\nu-1}^3 - 1}}{a_{\nu-1} - \sqrt[3]{a_{\nu-1}^3 - 1}},$$

$$a_{\nu+1} = \frac{a_\nu + 2\cdot\sqrt[3]{a_\nu^3 - 1}}{a_\nu - \sqrt[3]{a_\nu^3 - 1}},$$

. . . .

Dann ist allgemein:

$$\omega = \left[\frac{i\log(3a_\nu - 3)}{2\pi\cdot 3^{\nu-1}}\right]_{\lim \nu = \infty}.$$

貴重書

wohl beachtet werden, daß Weierstrass' elliptische Funktionen (die einzigen, die wir hier gebrauchen) homogene Funktionen der beiden Variabelen ω_1, ω_2 sind, während unsere Moduln nur von dem Verhältnisse $\omega_1 : \omega_2$ abhängen. Es ist daher zweckmäßig, unsere Moduln λ, a, o selbst in Zähler und Nenner zu spalten:

$$(24)\qquad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad a = \frac{a_1}{a_2}, \quad o = \frac{o_1}{o_2},$$

wobei wir nun Zähler und Nenner (übrigens in Übereinstimmung mit den Fundamentalgleichungen (1), (2), (3)) definieren werden, indem wir bestimmte Darstellungen von g_2 und g_3 durch λ_1, λ_2 usw. verlangen.

Zunächst, was die *Teilwerte von* $\wp(u)$ angeht, so findet Herr Fricke folgende Resultate[13]).

1. Sei $n = 2$ und

$$(25)\qquad \frac{3\,g_3}{g_2} = \frac{-2\,\lambda_1^3 + 3\,\lambda_1^2\,\lambda_2 + 3\,\lambda_1\,\lambda_2^2 - 2\,\lambda_2^3}{\lambda_1^2 - \lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_2^2},$$

so wird:

$$(26)\quad \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \lambda_1 - 2\,\lambda_2, \quad \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = \lambda_2 - 2\,\lambda_1, \quad \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = \lambda_1 + \lambda_2,$$

oder auch (indem wir die Weierstrassische Bezeichnung e_1, e_2, e_3 für die drei Teilwerte aufnehmen):

$$(27)\quad e_1 - e_2 = 3\,(\lambda_1 - \lambda_2), \quad e_1 - e_3 = -3\,\lambda_2, \quad e_2 - e_3 = -3\,\lambda_1.$$

2. Im Falle $n = 3$ bestimme man a_1, a_2 in Übereinstimmung mit folgender Gleichung:

$$(28)\qquad \frac{2\,g_2}{3\,g_3} = -\frac{a_1\,(a_1^3 + 8\,a_2^3)}{a_1^6 - 20\,a_1^3\,a_2^3 - 8\,a_2^6}.$$

Es gelten dann nachstehende Formeln:

$$(29)\quad \begin{aligned} &\sqrt{\wp\left(\frac{\omega_1}{3}\right)} = a_1 + 2\,a_2, &&\sqrt{\wp\left(\frac{\omega_2}{3}\right)} = i\sqrt{3}\cdot a_1, \\ &\sqrt{\wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{3}\right)} = a_1 + 2\,\varrho\,a_2, &&\sqrt{\wp\left(\frac{\omega_1 + 2\,\omega_2}{3}\right)} = a_1 + 2\,\varrho^2\,a_2. \end{aligned}$$

3. Endlich sei $n = 4$. Wir unterwerfen o_1, o_2 der folgenden Bedingung:

$$(30)\qquad \frac{g_2}{g_3} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{o_1^8 + 14\,o_1^4\,o_2^4 + o_2^8}{o_1^{12} - 33\,o_1^8\,o_2^4 - 33\,o_1^4\,o_2^8 + o_2^{12}}.$$

[13]) [In den folgenden Formeln (25) bis (42) wurden beim Wiederabdruck gegenüber dem Original leichte Veränderungen vorgenommen, die damit zusammenhängen, daß im Original, im Anschluß an die damalige Fassung der Abhandlung XC über die elliptischen Normalkurven, $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ als Periodenverhältnis zugrunde gelegt war, hier aber, um mit dem sonst in diesem Bande eingehaltenen Brauch in Einklang zu bleiben, $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ als Periodenverhältnis gebraucht bezw. mit positivem imaginärem Teil versehen gedacht wird. (Vgl. Fußnote [5]) auf S. 201.) B.-H.]

Dann kommt:

$$(31)\quad \begin{cases} \wp\left(\frac{\omega_1}{4}\right) = (o_1 - o_2)^4 - 2\,o_1\,o_2\,(o_1^2 + o_2^2), \\ \wp\left(\frac{2\,\omega_1 + \omega_2}{4}\right) = -5\,o_1^4 + o_2^4, \\ \wp\left(\frac{\omega_2}{4}\right) = o_1^4 - 5\,o_2^4, \\ \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{4}\right) = (o_1 - i\,o_2)^4 - 2\,i\,o_1\,o_2\,(o_1^2 - o_2^2), \\ \wp\left(\frac{\omega_1 + 2\,\omega_2}{4}\right) = (o_1 + o_2)^4 + 2\,o_1\,o_2\,(o_1^2 + o_2^2), \\ \wp\left(\frac{\omega_1 + 3\,\omega_2}{4}\right) = (o_1 + i\,o_2)^4 + 2\,i\,o_1\,o_2\,(o_1^2 - o_2^2). \end{cases}$$

Wichtiger erscheinen auch hier wieder die *Teilwerte von* σ, die ich in meiner vorigen Note [vgl. statt ihrer Abh. XC, S. 204 im vorliegenden Bande] mit $\sigma_{\lambda,\mu}$ bezeichnete und durch die Formel definierte:

$$(32)\qquad \sigma_{\lambda,\mu} = -e^{-\frac{(\lambda\,\eta_1 + \mu\,\eta_2)\;(\lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2)}{2\,n^2}}\cdot\sigma\left(\frac{\lambda\,\omega_1 + \mu\,\omega_2}{n}\right);$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist, ist bereits die n-te Potenz von $\sigma_{\lambda,\mu}$, oder erst die $2\,n$-te, eine Modulform der n-ten Stufe. Herr Fricke findet für die Darstellung der in Rede stehenden Potenzen von $\sigma_{\lambda,\mu}$ in den einzelnen von ihm behandelten Fällen folgende Resultate.

1. Sei $n = 2$ und dabei λ_1, λ_2 in der Art gewählt, daß

$$(33)\qquad g_2 = +\frac{16}{3}\cdot\frac{\lambda_1^2 - \lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\,\lambda_2\,(\lambda_2 - \lambda_1)}.$$

Dann kommt für die Teilwerte von σ:

$$(34)\qquad \sigma_{10}^4 = \lambda_1, \quad \sigma_{01}^4 = -\lambda_2, \quad \sigma_{11}^4 = -\lambda_1 + \lambda_2.$$

2. Im Falle $n = 3$ setzen wir

$$(35)\qquad 24\,g_3 = -\frac{a_1^6 - 20\,a_1^3\,a_2^3 - 8\,a_2^6}{a_2^2\,(a_1^3 - a_2^3)^2}$$

wir finden dann[14])

$$(36)\quad \begin{aligned} &\sigma_{01}^3 = \sqrt{-3}\cdot a_2, &&\sigma_{10}^3 = a_1 - a_2, \\ &\sigma_{11}^3 = a_1\,\varrho^2 - a_2, &&\sigma_{12}^3 = a_1\,\varrho - a_2, \end{aligned}$$

vier Ausdrücke, deren nahe Beziehung zu den oben eingeführten Moduln neunter Stufe ersichtlich ist.

3. Für $n = 4$ nehmen wir:

$$(37)\qquad g_2^2 = \frac{1}{18}\cdot\frac{(o_1^8 + 14\,o_1^4\,o_2^4 + o_2^8)^2}{o_1^3\,o_2^3\,(o_1^4 - o_2^4)^3}.$$

[14]) Man vgl. auch Bianchi im 17. Bande der Math. Annalen (1880/81), S. 244.

Es kommen dann folgende Darstellungen der Teil-Sigma:

$$(38)\quad \begin{cases} \sigma_{01}^8 = 2\,\dfrac{o_2^3}{o_1}, & \sigma_{21}^8 = -2\,\dfrac{o_1^3}{o_2}, \\[2mm] \sigma_{10}^8 = \dfrac{(o_1-o_2)^3}{o_1+o_2}, & \sigma_{12}^8 = -\dfrac{(o_1+o_2)^3}{o_1-o_2}, \\[2mm] \sigma_{11}^8 = \dfrac{(o_1-io_2)^3}{o_1+io_2}, & \sigma_{13}^8 = -\dfrac{(o_1+io_2)^3}{o_1-io_2}. \end{cases}$$

Ihnen laufen die folgenden Formeln parallel, bei denen rechter Hand die in (34) bestimmten zweiten Teilwerte gebraucht werden, die ich der Reihe nach, um jedes Mißverständnis zu vermeiden, mit μ, ν, ϱ bezeichnen will:

$$(39)\quad \begin{cases} \sigma_{01}^4 = \dfrac{i-1}{2\sqrt{2}}\cdot\varrho\nu(\varrho^2+i\nu^2), & \sigma_{21}^4 = \dfrac{1-i}{2\sqrt{2}}\cdot\varrho\nu(\nu^2+i\varrho^2), \\[2mm] \sigma_{10}^4 = \dfrac{i-1}{2\sqrt{2}}\cdot\mu\varrho(\varrho^2+i\mu^2), & \sigma_{12}^4 = \dfrac{1-i}{2\sqrt{2}}\cdot\mu\varrho(\mu^2+i\varrho^2), \\[2mm] \sigma_{11}^4 = \dfrac{1-i}{2\sqrt{2}}\cdot\mu\nu(\nu^2+i\mu^2), & \sigma_{13}^4 = \dfrac{i-1}{2\sqrt{2}}\cdot\mu\nu(\mu^2+i\nu^2), \end{cases}$$

Die Formeln, welche die *zweiten* Potenzen der vorliegenden $\sigma_{\lambda,\mu}$ durch die Moduln 16-ter Stufe darstellen, werden zu kompliziert, um hier eine Stelle finden zu können.

4. Sei endlich $n=8$. Es möge genügen, eine einzige der dann in Betracht kommenden Formeln anzuführen. Es wird:

$$(40)\quad \sigma_{10} = -e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{128}}\cdot\sigma\left(\frac{\omega_1}{8}\right)$$

$$= -e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{32}}\cdot\sigma\left(\frac{\omega_1}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt[16]{8}\cdot\sqrt[8]{\varkappa'}\cdot\sqrt[32]{\varkappa'}\cdot\sqrt[16]{1+\varkappa'}}{\sqrt[4]{1+\sqrt{\varkappa'}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\varkappa'}+\sqrt{1+\varkappa'}}}.$$

Neben diese Darstellungen der $\sigma_{\lambda,\mu}$ durch unsere Moduln stellen sich natürlich andere, welche unsere Moduln durch die $\sigma_{\lambda,\mu}$ ausdrücken. Dieselben erscheinen um so bemerkenswerter, als die $\sigma_{\lambda,\mu}$ von vornherein für sämtliche Stufen bekannt sind und wir also hoffen dürfen, bei höheren Stufen einfachste Modulsysteme zu finden, indem wir analoge Kombinationen der $\sigma_{\lambda,\mu}$ heranziehen, wie sie für niedere Stufen in unseren Formeln sich tatsächlich einstellen. Herr Fricke bemerkt in dieser Hinsicht insbesondere folgende Darstellungen der Moduln 16-ter Stufe.

1. Unter $\sigma_{\lambda,\mu}$ die vierten Teilwerte verstanden hat man:

$$(41)\quad \sqrt[4]{\varkappa}:\sqrt[4]{\varkappa'}:\sqrt[8]{-1} = \sigma_{10}\,\sigma_{12}:\sigma_{11}\,\sigma_{13}:\sigma_{01}\,\sigma_{21}.$$

2. Ferner, unter $\sigma_{\lambda,\mu}$ die achten Teilwerte verstanden:

$$(42)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{o}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{2\varkappa'}-\sqrt{\varkappa'-i\varkappa}}{\sqrt{2\varkappa'}+\sqrt{\varkappa'+i\varkappa}}} = \dfrac{\sigma_{10}\cdot\sigma_{12}\cdot\sigma_{14}\cdot\sigma_{16}}{\sigma_{30}\cdot\sigma_{32}\cdot\sigma_{34}\cdot\sigma_{36}}, \\[2mm] \varepsilon\sqrt{o}\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{2\varkappa}+\sqrt{\varkappa-i\varkappa'}}{\sqrt{2\varkappa}-\sqrt{\varkappa+i\varkappa'}}} = \dfrac{\sigma_{11}\cdot\sigma_{13}\cdot\sigma_{15}\cdot\sigma_{17}}{\sigma_{31}\cdot\sigma_{33}\cdot\sigma_{35}\cdot\sigma_{37}}, \\[2mm] \varepsilon\cdot\dfrac{\sqrt{1-\varkappa'}}{\sqrt{\varkappa}}\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{2\varkappa'}-\sqrt{1-\varkappa'}}{\sqrt{2\varkappa'}+\sqrt{1+\varkappa'}}} = \dfrac{\sigma_{01}\cdot\sigma_{21}\cdot\sigma_{41}\cdot\sigma_{61}}{\sigma_{03}\cdot\sigma_{23}\cdot\sigma_{43}\cdot\sigma_{63}}. \end{cases}$$

Der Buchstabe ε bedeutet dabei eine 32-ste Einheitswurzel.

§ 2.

An die Theorie der Moduln schließt sich naturgemäß die Lehre von den *Modulargleichungen*. Eigentliche Modulargleichungen existieren bekanntlich nur für Hauptmoduln und bei ihnen auch nur für diejenigen Transformationsgrade, welche zur Stufe des Hauptmoduls relativ prim sind[15]). Nun zeichnen sich unter allen Hauptmoduln die drei, die wir vorhin voranstellten: das Doppelverhältnis λ, die Tetraederirrationalität a, die Oktaederirrationalität o, denen dann noch die *Ikosaederirrationalität* (die wir η nennen wollen) hinzutritt, dadurch aus, daß sie zugleich Galoissche Moduln ihrer Stufe sind und sich daher bei beliebiger Transformation von ω selber linear substituieren. Infolgedessen haben die für sie geltenden Modulargleichungen die charakteristische Eigenschaft, durch gewisse simultane, lineare Substitutionen, denen einerseits der ursprüngliche, andererseits der transformierte Modul zu unterwerfen ist, in sich selbst überzugehen.

Außerdem bleiben die Modulargleichungen, wie selbstverständlich, bei Vertauschung des unsprünglichen Moduls mit dem transformierten ungeändert bestehen. Handelt es sich jetzt um Aufstellung der Modulargleichungen, so wird man zweckmäßigerweise in der Art beginnen, daß man vorab die allgemeine Form derjenigen Gleichungen zu bestimmen sucht, die bei den erwähnten Prozessen invariant bleiben: die wirkliche Berechnung der Modulargleichung im gegebenen Falle muß dann auf Auswertung nur weniger Zahlenkoeffizienten mit Hilfe der für λ, a, o, η geltenden, nach q fortschreitenden Reihenentwicklungen zurückkommen.

Der hiermit bezeichnete Ansatz, den ich schon bei früherer Gelegenheit zur Sprache gebracht hatte[16]), ist jetzt von Herrn Friedrich durchgeführt worden. Es handelte sich dabei einmal zur Fixierung der auf

[15]) Vgl. etwa Bd. 17 der Math. Annalen (1880/81) [= Abh. LXXXVII im vorliegenden Bande, S. 174].

[16]) Vgl. Math. Annalen, Bd. 17 (1880/81) [= Abh. LXXXVII des vorliegenden Bandes S. 176/177].

貴重書

den ursprünglichen und den transformierten Modul auszuübenden simultanen Substitutionen um geschickte Wahl der zur Transformation gehörigen Repräsentanten, es handelte sich dann aber ferner um *algebraische*, der *Invariantentheorie* entnommene Prozesse, welche an diejenigen Theorien anknüpfen, die ich neuerdings in meinem „Ikosaederbuch" dargestellt habe.

Modulargleichungen für das Doppelverhältnis λ.

Im Falle des *Doppelverhältnisses* λ (dessen Stufe die zweite ist) kommen als Transformationsgrade n beliebige ungerade Zahlen in Betracht. Nennen wir den transformierten Wert μ, so kann man, wie Herr Friedrich zeigt, μ in allen Fällen so wählen, daß es mit λ zusammen je dieselben Doppelverhältnissubstitutionen erfährt. Wir nehmen λ gleich $\lambda_1 : \lambda_2$, μ gleich $\mu_1 : \mu_2$ und ersetzen die linearen Substitutionen von λ bez. μ je durch die ihnen entsprechenden homogenen von der Determinante Eins. Alle homogenen ganzen Funktionen von λ_1, λ_2 allein, welche bei den in Rede stehenden Substitutionen ungeändert bleiben, sind bekanntlich ganze Funktionen der folgenden drei einfachsten unter ihnen:

$$(43)\quad \begin{cases} (\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)^2, \\ (\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2)^2, \\ (\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2)(2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3). \text{ [17]} \end{cases}$$

Aus ihnen leitet man dann leicht alle Formen ab, welche λ und μ gleichzeitig enthalten und bei den simultanen Substitutionen dieser Größen ungeändert bleiben: die in Rede stehenden Formen setzen sich aus der Determinante $(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)$ und den nach μ_1, μ_2 genommenen Polaren der Formen (43) zusammen. Nunmehr beachte man noch, daß die Modulargleichung bei Vertauschung von λ und μ ungeändert bleiben soll. *Schließlich ergibt sich, daß die linke Seite der Modulargleichung eine ganze Funktion der folgenden vier Ausdrücke sein muß:*

$$(45)\quad \begin{cases} A_2 = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2, \\ A_2' = (2\lambda_1\mu_1 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 + 2\lambda_2\mu_2)^2, \\ A_4 = (2\lambda_1\mu_1 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 + 2\lambda_2\mu_2)(\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2)(\mu_1^2\mu_2 - \mu_1\mu_2^2), \\ A_6 = (\lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2)^2\,(\mu_1^2\mu_2 - \mu_1\mu_1^2)^2. \end{cases}$$

Beispielsweise kommt für $n = 3, 5, 7$ der Reihe nach:

$$(46)\quad \begin{cases} n = 3: & A_2^2 - 128\,A_4 = 0, \\ n = 5: & A_2^3 - 512\,(16\,A_2'A_4 - 9\,A_2A_4 - 32\cdot 27\,A_6) = 0, \\ n = 7: & A_2^4 - 256\,(2^{11}A_2'^2A_4 - 19\cdot 2^7A_2A_2'A_4 + 13\cdot 3^2\cdot 5\,A_2^2A_4 \\ & \quad + 125\cdot 2^6\cdot 3^3A_2'A_6 - 125\cdot 2^7\cdot 3^3A_2A_6) = 0. \end{cases}$$

[17]) „Ikosaederbuch", S. 63. — Man vgl. auch Gleichung (1) des Textes.

Die Gleichungen für $n = 3, 5$ finden sich bereits in Jacobis Fundamenta (1829) (= Bd. 1, S. 122, 123 der Gesammelten Werke), worauf hier um so mehr verwiesen sei, als der Fortschritt der Methode, welcher hier vorliegt, beim Vergleiche unverkennbar hervortritt.

Modulargleichungen des Tetraeders.

Bei der *Tetraederirrationalität* a müssen wir unterscheiden, ob der Transformationsgrad n zu 1 oder 2 modulo 3 kongruent ist. Beidemal schreiben wir $a_1 : a_2$ für a und $b_1 : b_2$ für den transformierten Wert. Wir haben ferner von folgenden, die a_1, a_2 allein enthaltenden Formen auszugehen[18]):

$$(47)\quad \begin{cases} a_1^6 - 20\,a_1^3a_2^3 - 8\,a_2^6, \\ (a_1^3a_2 - a_2^4)(a_1^4 + 8\,a_1a_2^3), \\ (a_1^3a_2 - a_2^4)^3. \end{cases}$$

Ist jetzt $n \equiv 1 \pmod{3}$, so kann man $b_1 : b_2$ so wählen, daß es je dieselben Substitutionen erleidet wie $a_1 : a_2$. Im anderen Falle gilt der analoge Satz, sofern man für $b_1 : b_2$ setzt $-2\,b_2 : b_1$. Schließlich bekommen wir in beiden Fällen vier Funktionen, aus denen sich die linke Seite der Modulargleichung zusammensetzen muß. *Es sind dies bei $n \equiv 1$ (mod. 3):*

$$(48)\quad \begin{cases} D_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2, \\ D_3 = -a_1^3b_1^3 + a_1^3b_2^3 + 9\,a_1^2a_2b_1b_2^2 + 9\,a_1a_2^2b_1^2b_2 + a_2^3b_1^3 \\ \qquad\qquad + 8\,a_2^3b_2^3, \\ D_4 = (a_1^3a_2 - a_2^4)(b_1^4 + 8\,b_1b_2^3) + (b_1^3b_2 - b_2^4)(a_1^4 + 8\,a_1a_2^3), \\ D_6 = (a_1^3a_2 - a_2^4)(b_1^3b_2 - b_2^4)(a_1^2b_1b_2 + a_1a_2b_1^2 - 2\,a_2^2b_2^2), \end{cases}$$

dagegen im anderen Falle:

$$(49)\quad \begin{cases} E_1 = a_1b_1 + 2\,a_2b_2, \\ E_3 = a_1^3b_1^3 - 18\,a_1^2a_2b_1^2b_2 + 36\,a_1a_2^2b_1b_2^2 - 8\,a_2^3b_2^3 + 8\,a_1^3b_2^3 \\ \qquad\qquad + 8\,a_2^3b_1^3, \\ E_4 = (a_1^3a_2 - a_2^4)(b_1^3b_2 - b_2^4), \\ E_6 = (a_1^3a_2 - a_2^4)(b_1^4 + 8\,b_1b_2^3)(a_1^2b_1b_2 - 2\,a_1a_2b_2^2 + a_2^2b_1^2) \\ \qquad + (a_1^4 + 8\,a_1a_2^3)(b_1^3b_2 - b_2^4)(a_1^2b_2^2 + a_1a_2b_1^2 - 2\,a_2^2b_1b_2). \end{cases}$$

Beispiele von Modulargleichungen der Tetraederirrationalität sind folgende:

$$(50)\quad \begin{cases} n = 2: & E_1^3 - E_3 = 0 \\ n = 4: & 3^3D_6 - D_2^3 = 0 \\ n = 5: & (E_1^3 - E_3)^2 - 2^6\cdot 3^4E_1^2E_4 = 0 \\ n = 7: & 3^{11}(D_4^2 - D_3^2D_2) - 4\cdot 3^5D_2^4 - 2^5\cdot 7\,D_2D_6 = 0. \end{cases}$$

[18]) Siehe oben Gleichung (2); „Ikosaederbuch", S. 63.

貴重書

Auch bei *Oktaeder* und *Ikosaeder* sind die Verhältnisse ganz ähnlich; es wird genügen, wenn ich die in den einzelnen Fällen geltenden Resultate tabellarisch angebe. Dabei ist wieder $o_1 : o_2$ für o, $\eta_1 : \eta_2$ für η gesetzt, während die transformierten Werte beziehungsweise mit $p_1 : p_2$ und $\zeta_1 : \zeta_2$ benannt wurden.

Modulargleichungen des Oktaeders.

1. $n \equiv 1$ (mod. 4). Die Irrationalitäten o und p erfahren simultan je dieselben Substitutionen. Grundformen, aus denen sich die linke Seite der Modulargleichung zusammensetzen muß, sind:

$$(51)\quad \begin{cases} D_2 = (o_1 p_2 - o_2 p_1)^2, \\ D_4 = 5\, o_1^4 p_1^4 + o_2^4 p_1^4 + 16\, o_1 o_2^3 p_1^3 p_2 + 36\, o_1^2 o_2^2 p_1^2 p_2^2 \\ \qquad + 16\, o_1^3 o_2 p_1 p_2^3 + o_1^4 p_2^4 + 5\, o_2^4 p_2^4, \\ D_6 = (o_1^3 p_1^2 p_2 + o_1^2 o_2 p_1^3 - o_1 o_2^2 p_2^3 - o_2^3 p_1 p_2^2)^2, \\ D_{12} = ((o_1^6 p_1^6 + o_2^6 p_2^6) - (o_1^2 p_1^2 + o_2^2 p_2^2) \cdot (o_1^4 p_2^4 + 8\, o_1^3 o_2 p_1 p_2^3 \\ \qquad + 15\, o_1^2 o_2^2 p_1^2 p_2^2 + 8\, o_1 o_2^3 p_1^3 p_2 + o_2^4 p_1^4))^2. \end{cases}$$

2. $n \equiv 3$ (mod. 4). Die Substitutionen für o und p unterscheiden wir durch das Vorzeichen von i $(= \sqrt{-1})$. Volles Formensystem:

$$(52)\quad \begin{cases} E_1 = o_1 p_1 + o_2 p_2, \\ E_4 = o_1^4 p_1^4 - 16\, o_1^3 o_2 p_1^3 p_2 + 36\, o_1^2 o_2^2 p_1^2 p_2^2 - 16\, o_1 o_2^3 p_1 p_2^3 \\ \qquad + o_2^4 p_2^4 + 5\, o_1^4 p_2^4 + 5\, o_2^4 p_1^4, \\ E_6 = (o_1^3 p_1 p_2^2 - o_1^2 o_2 p_2^3 - o_1 o_2^2 p_1^3 + o_2^3 p_1 p_2^2)^2, \\ E_{12} = ((o_1^6 p_2^6 + o_2^6 p_1^6) - (o_1^2 p_2^2 + o_2^2 p_1^2) \cdot (o_1^4 p_1^4 - 8\, o_1^3 o_2 p_1^3 p_2 \\ \qquad + 15\, o_1^2 o_2^2 p_1^2 p_2^2 - 8\, o_1 o_2^3 p_1 p_2^3 + o_2^4 p_2^4))^2. \end{cases}$$

3. Beispiele. Man findet:

$$(53)\quad \begin{cases} n = 3: \quad E_1^4 - E_4 = 0, \\ n = 5: \quad 20\, D_6 - 4\, D_2 D_4 - D_2^3 = 0, \\ n = 7: \quad 79\, E_1^8 - 78\, E_1^4 E_4 - E_4^2 + 400\, E_1^2 E_6 = 0. \end{cases}$$

Die ersten dieser beiden Gleichungen sind übrigens in anderer Form wohlbekannt. Da nämlich $o(\omega)$, wie oben erwähnt, bei geeigneter Fixierung des in Betracht zu nehmenden Funktionszweiges mit $\sqrt[4]{\lambda(2\omega)} = \sqrt{\varkappa(2\omega)}$ gleichbedeutend ist, so sind die Modulargleichungen der Oktaederirrationalität mit den für $\sqrt{\varkappa}$ geltenden identisch; letztere aber finden sich für $n = 3, 5$ beispielsweise bei Cayley im 164-sten Bande der Philosophical Transactions (1873/74), S. 451, 452 [= Collected mathematical papers, vol. IX, S. 170—173] aufgestellt.

Modulargleichungen des Ikosaeders.

1. $n \equiv 1$ (mod. 5). Die Substitutionen von η und ζ sind dieselben. Es gibt vier Grundformen:

$$(54)\quad \begin{cases} D_2 = (\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1)^2, \\ D_6, \quad D_{10}, \quad D_{15}, \end{cases}$$

wo D_6, D_{10}, D_{15} aus den wohlbekannten Ikosaederformen:

$$(55)\quad \begin{cases} f = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^{10} + 11\, \eta_1^5 \eta_2^5 - \eta_2^{10}), \\ H = -(\eta_1^{20} + \eta_2^{20}) + 228\, (\eta_1^{15} \eta_2^5 - \eta_1^5 \eta_2^{15}) - 494\, \eta_1^{10} \eta_2^{10}, \\ T = (\eta_1^{30} + \eta_2^{30}) + 522\, (\eta_1^{25} \eta_2^5 - \eta_1^5 \eta_2^{25}) \\ \qquad - 10005\, (\eta_1^{20} \eta_2^{10} + \eta_1^{10} \eta_2^{20}) \end{cases}$$

beziehungsweise durch sechs-, zehn-, fünfzehnmalige Polarisation nach ζ_1, ζ_2 erwachsen.

2. $n \equiv 4$ (mod. 5). Vier Grundformen:

$$(56)\quad E_1, \quad E_6, \quad E_{10}, \quad E_{15},$$

wo

$$E_1 = \eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2,$$

während E_6, E_{10}, E_{15} aus den gerade genannten D_6, D_{10}, D_{15} hervorgehen, indem man ζ_1, ζ_2 durch $-\zeta_2, \zeta_1$ ersetzt.

3. $n \equiv 2$ (mod. 5). Die Substitutionen von ζ_1, ζ_2 ergeben sich aus denjenigen von η_1, η_2 durch Verwandlung der fünften Einheitswurzel ε in ε^2. Es gibt drei Grundformen, dieselben, welche Herr Gordan im 13. Bande der Math. Annalen (1878), S. 379, 381 [vgl. den Zusatz auf S. 380 bis 384 des zweiten Bandes dieser Ausgabe] unter der Benennung f, φ, ψ aufgestellt hat. Wir schreiben:

$$(57)\quad \begin{cases} \varphi = \eta_1^3 \zeta_1^2 \zeta_2 + \eta_1^2 \eta_2 \zeta_2^3 + \eta_1 \eta_2^2 \zeta_1^3 - \eta_2^3 \zeta_1 \zeta_2^2, \\ \psi = -\eta_1^4 \zeta_1 \zeta_2^3 + \eta_1^3 \eta_2 \zeta_1^4 + 3\, \eta_1^2 \eta_2^2 \zeta_1^2 \zeta_2^2 - \eta_1 \eta_2^3 \zeta_2^4 + \eta_2^4 \zeta_1^3 \zeta_2, \\ \chi = \eta_1^5 \zeta_1^5 + \eta_1^5 \zeta_2^5 - \eta_2^5 \zeta_1^5 + \eta_2^5 \zeta_2^5 + \\ \qquad + 10\, \eta_1 \eta_2 \zeta_1 \zeta_2 (-\eta_1^3 \zeta_1^2 \zeta_2 + \eta_1^2 \eta_2 \zeta_2^3 + \eta_1 \eta_2^2 \zeta_1^3 + \eta_2^3 \zeta_1 \zeta_2^2). \end{cases}$$

4. $n \equiv 3$ (mod. 1). Drei Grundformen:

$$(58)\quad \varphi', \quad \psi', \quad \chi',$$

die sich aus den gerade genannten ergeben, wenn wir ζ_1, ζ_2 durch $-\zeta_2, \zeta_1$ ersetzen.

5. Beispiele von Ikosaedermodulargleichungen:

$$\begin{cases} n = 2: \quad \varphi = 0, \\ n = 3: \quad \psi' = 0, \\ n = 4: \quad E_1^6 - E_6 = 0, \\ n = 6: \quad 11 \cdot 17\, D_6^2 - 18 \cdot 49\, D_2 D_{10} + 121 \cdot 16\, D_2^3 D_6 \\ \qquad - 17 \cdot 73\, D_2^6 = 0, \end{cases}$$

$$(59)\quad \begin{cases} n=7: & \psi^2-\varphi\chi=0\,, \\ n=8: & \varphi'^4-\varphi'\psi'\chi'+\psi'^3=0\,, \\ n=9: & 11\cdot 17\,E_6^2+6\cdot 49\,E_1^2\,E_{10}+11\cdot 16\cdot 53\,E_1^6\,E_6- \\ & \qquad -17\cdot 577\,E_1^{12}=0\,, \\ n=11: & 11\cdot 17\,D_6^2-18\cdot 49\,D_2\,D_{10}-11\cdot 8\cdot 335\,D_2^3\,D_6- \\ & \qquad -17\cdot 75841\,D_2^6=0\,. \\ n=13: & \varphi'^3\chi'-\varphi'^2\psi'^2-\psi'\chi'^2=0\,. \end{cases}$$

(Man vergleiche hierzu die Entwicklungen in meinem „Ikosaederbuch", sowie insbesondere Bd. 14 der Math. Annalen (1878/79) [= Abh. LXXXII, S. 68 in diesem Bande], wo die Resultate für $n=2, 3, 4$ bereits angegeben sind.)

§ 3.

Die Theorie der Modulargleichungen findet in derjenigen der *Modularkorrespondenzen* ihre natürliche Fortsetzung. Sind allgemein $M_1, M_2, \ldots$ die Moduln eines zur ϱ-ten Stufe gehörigen vollen Systems, so findet zwischen $M_1, M_2, \ldots$ einerseits und den transformierten Werten $M_1, M_2, \ldots$ andererseits für jeden zu ϱ relativ primen Transformationsgrad n ein Entsprechen statt, welches nach Grad, Galoisscher Gruppe und Vertauschbarkeit der Argumente mit den eigentlichen Modulargleichungen übereinstimmt[19]). Hiermit ist aber noch keineswegs gesagt, wie sich im gegebenen Falle dieses Entsprechen analytisch darstellt. Zwischen $M_1, M_2, \ldots$ nämlich und ebenso zwischen $M_1', M_2', \ldots$ bestehen, allgemein zu reden, höhere algebraische Relationen, und es ist die Beziehung der in Aussicht genommenen Korrespondenz zu diesen Relationen von vornherein durchaus unbekannt. Die hierin liegende prinzipielle Schwierigkeit ist nur erst neuerdings von Herrn Hurwitz durch Heranziehen der zugehörigen überall endlichen Abelschen Integrale überwunden worden. Herr Hurwitz hat in diesem Sinne in einer im Jahre 1883 publizierten Note[20]) die Modularkorrespondenzen behandelt, zu denen

$$(60)\qquad M_1=\sqrt{\varkappa}\,,\quad M_2=\sqrt{\varkappa'}$$

Anlaß geben, neuerdings, im 25. Bande der Math. Annalen (1885), die anderen, die sich auf

$$(61)\qquad M_1=\frac{z_1}{z_3}\,,\quad M_2=\frac{z_2}{z_3}$$

beziehen, wo z_1, z_2, z_3 speziell für $n=7$ diejenigen Größen sind, die ich

[19]) Vgl. wieder Math. Annalen, Bd. 17, (1880/81) [= Nr. LXXXVII, S. 175 im vorliegenden Bande].

[20]) Göttinger Nachrichten (1883), S. 350ff. [Vgl. auch die weiteren Zitate in Fußnote *) auf S. 175 im vorliegenden Bande.]

in meiner vorigen Note für beliebige ungerade Stufen einführte. Auch die zahlentheoretischen auf die elfte Stufe bezüglichen Resultate, welche ich der Gesellschaft der Wissenschaften im vergangenen Dezember vorlegte, sind von Herrn Hurwitz durch das Studium höherer Modularkorrespondenzen gewonnen worden.

Inzwischen handelt es sich bei den in Rede stehenden Untersuchungen nur um die allgemeine *Form* der die Modularkorrespondenzen definierenden Gleichungen, nicht eigentlich um *wirkliche Aufstellung* derselben. Letztere aber muß um so mehr Interesse haben, als einzelne besonders einfache Resultate in dieser Richtung bereits seit langem bekannt sind[21]). Ich glaubte also Herrn E. Fiedler ein richtiges Thema zu stellen, indem ich ihm eine eingehende Bearbeitung der für $\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ geltenden Modularkorrespondenzen, sowie der weiteren, denen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa'}$ genügen, in Vorschlag brachte. Ich werde hier nur von den Resultaten für den letzteren Fall berichten. Die Überlegungen, welche Herr E. Fiedler bei Ableitung derselben anzustellen hatte, bewegen sich übrigens, wenn man von der durch die Abelschen Integrale veranlaßten Komplikation absieht, in einer ganz ähnlichen Richtung, wie diejenigen von Herrn Friedrich, nur daß statt der simultanen *binären* Substitutionen zweier Reihen von Variabelen simultane *ternäre* Substitutionen in Betracht zu ziehen sind.

Setzen wir zunächst mit Herrn E. Fiedler:

$$(62)\qquad x_1 : x_2 : x_3 = \sqrt[4]{\varkappa} : \sqrt[4]{\varkappa'} : e^{\frac{i\pi}{8}}\,.$$

Wir haben dann:

$$(63)\qquad x_1^8+x_2^8+x_3^8=0$$

und damit die Gleichung einer ebenen Kurve achter Ordnung vom Geschlechte $p=21$. Dieselbe geht, wie leicht ersichtlich, bei 384 Kollineationen in sich über. Wir wollen die letzteren in homogener Form schreiben, indem wir die absoluten Werte der Substitutionskoeffizienten in geeigneter Weise fixieren. Beispielsweise sollen drei der Kollineationen durch folgende Formeln vorgestellt sein:

$$(64)\quad \begin{cases} \text{a)}\ x_1'=\varepsilon x_1\,, & x_2'=x_2\,, & x_3'=x_3\,; & \left(\varepsilon=e^{\frac{i\pi}{4}}\right); \\ \text{b)}\ x_1'=\ x_2\,, & x_2'=x_1\,, & x_3'=x_3\,; & \\ \text{c)}\ x_1'=\ x_2\,, & x_2'=x_3\,, & x_3'=x_1\,. & \end{cases}$$

Die anderen ergeben sich aus ihnen durch Wiederholung und Kombination.

[21]) Vgl. abermals Math. Annalen, Bd. 17, (1880/81) [= Nr. LXXXVII S. 176ff. im vorliegenden Bande].

Wir gehen einen Augenblick auf die Abhängigkeit der $x_1 : x_2 : x_3$ von ω zurück. Zuvörderst konstatieren wir, daß $x_1 : x_2 : x_3$ bei allen denjenigen und nur denjenigen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

ungeändert bleiben, deren Koeffizienten α, β, γ, δ modulo 16 einer der folgenden Kongruenzen genügen:

$$(65) \qquad \left.\begin{cases} \alpha \equiv \delta \equiv \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ \pm 9 \end{Bmatrix} & \beta \equiv \gamma \equiv 0, \\ \alpha \equiv \delta \equiv \begin{Bmatrix} \pm 3 \\ \pm 11 \end{Bmatrix} & \beta \equiv \gamma \equiv 8, \end{cases}\right\} \text{mod. } 16. \text{ [22]}$$

Andererseits bemerken wir, daß die Substitutionen a), b), c) (64) beispielsweise bei denjenigen linearen Transformationen von ω entstehen, die in bekannter Weise durch

$$S^2, \quad T \quad \text{und} \quad S^{-1}TS^{-2}$$

zu bezeichnen sind,

Es seien jetzt $z_1 : z_2 : z_3$ diejenigen Werte, welche aus $x_1 : x_2 : x_3$ hervorgehen, wenn wir ω durch $\frac{\omega}{n}$ ersetzen (unter n eine ungerade Zahl verstanden). Wir schreiben ferner:

$$(66) \qquad y_1 : y_2 : y_3 = z_1 : \left(\frac{2}{n}\right) z_2 : e^{(n-1)\frac{i\pi}{8}} \cdot z_3,$$

wo $\left(\frac{2}{n}\right)$ das Legendresche Zeichen bedeuten soll.

Dann ergibt sich als erstes Resultat folgendes: *daß die zwischen dem Punkte x und dem ebenfalls der Kurve achter Ordnung angehörigen Punkte y bestehende Modularkorrespondenz ungeändert bleibt, wenn man die x den Substitutionen* a), b) c) (64), *die y aber simultan den folgenden unterwirft:*

$$(67) \qquad \begin{cases} \text{a}')\ y_1' = \varepsilon^n y_1, & y_2' = y_2, & y_3' = y_3; \\ \text{b}')\ y_1' = y_2, & y_2' = y_1, & y_3' = y_3; \\ \text{c}')\ y_1' = y_2, & y_2' = y_3, & y_3' = y_1. \end{cases}$$

Des weiteren hat man in die Betrachtung der überall endlichen zur Kurve achter Ordnung gehörigen Integrale einzutreten. Ich will von den bez. Resultaten, die noch nicht vollständig abgeschlossen dastehen, nur dieses einfachste erwähnen: *daß nämlich für $n \equiv 7$ (mod. 8) die Modularkorrespondenz durch eine einzige zwischen x und y bestehende Gleichung ausgedrückt wird:*

[22]) Hiermit ist genauer präzisiert, was oben über $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa'}$ als Moduln sechzehnter Stufe gesagt wurde.

$$(68) \qquad f(x_1, x_2, x_3;\ \ y_1, y_2, y_3) = 0,$$

indem die Punkte y, welche demselben Punkte x korrespondieren (und umgekehrt die Punkte x, welche demselben y entsprechen), das volle Schnittpunktsystem der Kurve achter Ordnung mit einer zutretenden Kurve bilden.

Der Grad von $f = 0$ in den x oder den y ist natürlich $= \frac{N}{8}$, unter N den Grad der Modulargleichung verstanden. Vertauscht man die x mit den y, so muß die *Gleichung* $f = 0$ ungeändert bleiben; eine nähere Überlegung, die auf der Irreduzibilität der Modularkorrespondenz basiert, die wir aber hier nicht ausführen können, beweist, daß das Gleiche bereits für die linke Seite der Gleichung, d. h. für die *Form* f selbst gilt. Außerdem muß f völlig ungeändert bleiben, wenn man die Substitutionen (64), (67) simultan zur Anwendung bringt.

Versucht man nun vorab, alle Formen f zu bilden, welche gegenüber den genannten Prozessen invariant sind, so kommt man zu einem äußerst einfachen Resultate. *Alle diese Formen nämlich setzen sich aus folgenden drei niedrigsten zusammen:*

$$(69) \qquad \begin{cases} S_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \\ S_2 = x_2 x_3 y_2 y_3 + x_3 x_1 y_3 y_1 + x_1 x_2 y_1 y_2, \\ S_3 = x_1 x_2 x_3 y_1 y_2 y_3. \end{cases}$$

Wir werden dieses Resultat am besten verstehen, wenn wir für $x_1 : x_2 : x_3$ die ihnen proportionalen Werte (62) und entsprechend für $y_1 : y_2 : y_3$ in Übereinstimmung mit (66) die folgenden Ausdrücke eintragen:

$$(70) \qquad \sqrt[4]{\lambda} : \sqrt[4]{\lambda'} : \mp e^{-\frac{i\pi}{8}},$$

wo λ, λ' die transformierten Werte von $\varkappa, \varkappa'$ bezeichnen und das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem $n \equiv 7$ oder $n \equiv 15$ (mod. 16) ist. Wir finden so:

Ist $n \equiv 7$ (mod. 16), so ist die linke Seite der zwischen $\sqrt[4]{\varkappa}$, $\sqrt[4]{\varkappa'}$ und $\sqrt[4]{\lambda}$, $\sqrt[4]{\lambda'}$ bestehenden Modularkorrespondenz eine ganze Funktion der drei Ausdrücke:

$$(71) \qquad \begin{cases} S_1 = \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - 1, \\ S_2 = \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} - \sqrt[4]{\varkappa\lambda} - \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'}, \\ S_3 = -\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}; \end{cases}$$

ist aber $n \equiv 15$ *(mod. 16), so gilt das entsprechende Theorem unter Zugrundelegung folgender drei Terme:*

$$(72)\quad \begin{cases} S_1 = \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} + 1, \\ S_2 = \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} + \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'}, \\ S_3 = \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}. \end{cases}$$

Sei noch:

$$(73)\qquad S_2' = S_1^2 - 4S_2.$$

Dann bekommt man beispielsweise im ersten Falle:

$$(74)\quad \begin{cases} \text{für } n = 7: & S_1 = 0, \\ \text{,, } n = 23: & S_1^3 - 4S_3 = 0, \\ \text{,, } n = 39: & S_1^5 S_2' - 4S_3(S_2'^2 + 5S_1^2S_2' - 2S_1^4) - 144\,S_1S_3^2 = 0, \\ \text{,, } n = 55: & S_1^7 S_2' - 4S_3(S_2'^3 + 7S_1^2S_2'^2 + 10S_1^4S_2' - 2S_1^6) \\ & \quad - 16\,S_1S_3^2(6S_2' + 19S_1^2) + 512\,S_3^3 = 0, \\ \text{,, } n = 71: & S_1^9 - 4S_3(S_2'^3 + 9S_1^2S_2'^2 + 21\,S_1^4S_2' + 12\,S_1^6) \\ & \quad - 16\,S_1S_3^2(6S_2' + 7S_1^2) - 64\,S_3^3 = 0 \end{cases}$$

und im zweiten Falle:

$$(75)\quad \begin{cases} \text{für } n = 15: & S_1S_2' + 4S_3 = 0, \\ \text{,, } n = 31: & S_2'^2 - 4S_1S_3 = 0, \\ \text{,, } n = 47: & S_2'^3 - 4S_1S_3(6S_2' + S_1^2) - 128\,S_3^2 = 0, \\ \text{,, } n = 79: & S_2'^5 - 4S_1S_3(21\,S_2'^3 + 28\,S_1^2S_2'^2 + 10\,S_1^4S_2' + S_1^6) \\ & \quad - 16S_3^2(24S_2'^2 + 26S_1^2S_2' + 7S_1^4) + 512S_1S_3^3 = 0. \end{cases}$$

Bekannt waren von diesen Gleichungen bisher nur diejenigen für $n = 7$ (Gützlaff, Crelles Journal, Bd. 12 (1834)) und $n = 23$ (Hurwitz, Math. Annalen, Bd. 17, (1880/81), S. 69 [= Fußnote [12]) in meiner oben abgedruckten Arbeit Nr. LXXXVII, S. 176 im vorliegenden Bande], siehe auch Schröter, Acta Mathematica, Bd. 5 (1884/85) S. 208), aber auch die anderen Gleichungen sind, wie man sieht, keineswegs kompliziert und enthalten nur eine relativ geringe Zahl solcher Koeffizienten, die auf empirischem Wege haben bestimmt werden müssen. Daß in diesen Gleichungen gewisse Terme, $S_1^\alpha S_2'^\beta S_3^\gamma$ nicht vorkommen, die ihrer Dimensionen nach vorkommen könnten, ist allemal schon aus den Anfangstermen der für S_1, S_2', S_3 geltenden Reihenentwicklungen zu erkennen.

Herr E. Fiedler hat auch einige derjenigen Fälle untersucht, in denen n, ohne selbst von der Form $8h + 7$ zu sein, doch einen Primfaktor dieser Gestalt in nicht gerader Potenz enthält. Die Analogie mit den für

$\sqrt{\varkappa}$, $\sqrt{\varkappa'}$ geltenden Modularkorrespondenzen läßt vermuten und die Untersuchung der Abelschen Integrale bestätigt es jedenfalls für kleine Transformationszahlen, daß auch in diesem Falle die Modularkorrespondenz zwischen x und y sich durch nur eine Gleichung rein darstellt. Die fundamentalen Invarianten, aus denen sich die linke Seite der betreffenden Gleichung zusammensetzt, gestalten sich dann freilich wesentlich anders. Sei beispielsweise $n = 21$. Wir setzen:

$$Z = \varkappa\lambda + \varkappa'\lambda' - 1,$$

$$(76)\quad V = -(\sqrt{\varkappa\lambda'} + \sqrt{\varkappa'\lambda})\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} + (\sqrt{\varkappa'} - \sqrt{\lambda'})\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - (\sqrt{\varkappa} - \sqrt{\lambda})\sqrt[4]{\varkappa\lambda},$$

und finden zur Darstellung der Modularkorrespondenz:

$$(77)\qquad Z - 2V = 0.$$

Analog kommt für $n = 35$ die Gleichung:

$$(78)\qquad Z_1^3 - 8Z_1Z_2 + 8Z_3 + 4W = 0,$$

wo Z_1, Z_2, Z_3, W folgende Invarianten bedeuten:

$$(79)\quad \begin{cases} Z_1 = \sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} - 1, \\ Z_2 = \sqrt{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} - \sqrt{\varkappa\lambda} - \sqrt{\varkappa'\lambda'}, \\ Z_3 = -\sqrt{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}, \\ W = -(\varkappa\lambda' + \varkappa'\lambda)\sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} + (\varkappa' - \lambda')\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - (\varkappa - \lambda)\sqrt[4]{\varkappa\lambda}. \end{cases}$$