



LX. Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado¹⁾.

[Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, ser. 5a, vol VIII, 1 (1899).]

...Per quanto riguarda le equazioni di sesto grado, possiamo valerci ora del gruppo elegante di 360 collineazioni piane, che fu scoperto dal sig. Valentiner (1889), e fu poi studiato a fondo, per la prima volta, dal sig. Wiman nel vol. 47 dei Math. Annalen (1895).

Siano x_1, x_2, \dots, x_6 le radici della equazione di sesto grado. Si devono cercare tre funzioni z_1, z_2, z_3 di queste radici, i cui rapporti subiscano le sostituzioni del gruppo nominato, in corrispondenza alle permutazioni pari delle x . Quelle funzioni non possono però esser *razionali*, giacchè il gruppo delle 360 collineazioni piane non è oloedricamente isomorfo ad un gruppo di sostituzioni lineari, omogenee, ternarie, come fu già osservato dal sig. Wiman. Sta invece il fatto che il minimo gruppo isomorfo di sostituzioni lineari, omogenee, ternarie, che si può costruire, contiene il numero triplo di operazioni del gruppo di collineazioni; e precisamente alla collineazione identica corrispondono le tre sostituzioni:

$$(1) \quad z'_1 = j^r z_1, \quad z'_2 = j^r z_2, \quad z'_3 = j^r z_3. \quad (j = e^{\frac{2i\pi}{3}}; r = 0, 1, 2).$$

Ora si domanda quale sia il modo più semplice per costruire tre funzioni *irrazionali* delle x_1, \dots, x_6 , i cui rapporti si permutino in corrispondenza col nostro gruppo di collineazioni. A tal fine io propongo di ricorrere alla teoria delle curve piane del terzo ordine, e in particolare dei loro flessi. Infatti una forma cubica ternaria delle z_1, z_2, z_3 , o delle variabili contragredienti w_1, w_2, w_3 , non subisce alcuna alterazione in conseguenza delle sostituzioni (1), e quindi essa subisce solo 360 trasformazioni in corrispondenza alle 3.360 sostituzioni delle w_1, w_2, w_3 . Segue che si possono subito formare delle funzioni razionali delle x_1, \dots, x_6 , le quali, in corrispondenza colle sostituzioni pari delle x , subiscano le stesse sostituzioni lineari che le diverse espressioni di terzo grado nelle w_1, w_2, w_3 . In altre parole: si può associare in modo covariante alle x_1, \dots, x_6 una curva del terzo ordine del piano z_1, z_2, z_3 . Ciò fatto, si può scegliere uno dei nove flessi della cubica come punto covariante rispetto alle x_1, \dots, x_6 . La determinazione di un tal flesso non esige, come è noto, altre irrazionalità che quelle esprimibili mediante radici cubiche e quadratiche. E così, col sussidio di irrazionalità accessorie, che si suole riguardare come elementare, si perviene alla meta.

¹⁾ Auszug aus einem Brief an Herrn Castelnuovo, vorgelegt in der Akademie-Sitzung vom 9. April 1899. [Wegen der ternären G_{360} , auf die hier Bezug genommen wird, siehe die Bemerkungen in der Einleitung auf S. 260 des vorliegenden Bandes oder die folgende Arbeit LXI. K.]

LXI. Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades¹⁾.

[Zuerst erschienen in dem Dirichletbande (Bd. 129) des Journals für reine und angewandte Mathematik (1905), wieder abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 61 (1905).]

Indem ich Ihrer werten Aufforderung entspreche, einen Beitrag zu dem Festbande des Journals zu schreiben, der dem Andenken Dirichlets gewidmet ist, greife ich auf eine Note zurück, die ich vor sechs Jahren in den Rendiconti dell' Accademia dei Lincei veröffentlichte und in der ich die Grundlinien einer *allgemeinen Auflösung der Gleichungen sechsten Grades* skizzierte²⁾. Ich stelle mir das Ziel, die dort nur angedeuteten Überlegungen ausführlicher und in mehr konkreter Form darzulegen. In der Tat hat selbst ein so genauer Kenner der einschlägigen Literatur, wie Herr Lachin, den in Betracht kommenden Ansatz nicht in seiner prinzipiellen Einfachheit aufgefaßt (wie ich weiter unten noch näher ausführe³⁾). Im übrigen handle ich unter den Impulsen meines alten Freundes Gordan, der sein großes algebraisches Können neuerdings der in Frage stehenden Problemstellung zugewandt hat. Herr Gordan wird eine erste einschlägige Abhandlung demnächst in den Math. Annalen veröffentlichen⁴⁾. Es ist dies aber nur ein Anfang; ich hoffe, daß es seinen fortgesetzten Bemühungen gelingen wird, den Gegenstand nach allen Seiten ebenso vollständig zu klären, wie uns dies früher gemeinsam mit der Theorie der Gleichungen fünften Grades geglückt ist.

Auf diese *Theorie der Gleichungen fünften Grades*, wie ich sie in meinen „Vorlesungen über das Ikosaeder“ (Leipzig 1884) zusammengefaßt

¹⁾ Auszug aus einem Schreiben an Herrn K. Hensel.

²⁾ Sitzung vom 9. April 1899, Rendiconti VIII (1^o semestre); *Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado* (estratto da una lettera al sig. Castelnuovo). [Vorstand als Nr. LX abgedruckt.]

³⁾ Moskauer Mathematische Sammlung, Bd. XXII, 1901, S. 181—218 (russisch).

⁴⁾ *Über die partiellen Differentialgleichungen des Valentinerproblems* (ein Beitrag zur Auflösung der allgemeinen Gleichungen sechsten Grades) [erschieden in den Math. Annalen, Bd. 61 (1905/06).] — Vgl. auch eine Mitteilung an den Heidelberger Internationalen Mathematiker-Kongreß (August 1904). [Weitere Angaben siehe am Schluß der gegenwärtigen Abhandlung.]



habe⁵⁾, möchte ich hier vorab in der Weise eingehen, daß ich diejenigen Momente hervorkehre, welche in den nachfolgenden, auf die Gleichungen sechsten Grades bezüglichen Überlegungen ihre genaue Weiterbildung finden sollen. Ich habe in Kapitel V des „Ikosaederbuches“ zweierlei Auflösungsverfahren der Gleichungen fünften Grades auseinandergesetzt (die sich übrigens nur durch die Reihenfolge der auszuführenden Schritte unterscheiden). Es wird sich hier um die *zweite* dieser Methoden handeln, die sich als eine organische Fortsetzung von Kroneckers (und Briosischis) Arbeiten über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades darstellt. In dem „Ikosaederbuch“ wird diese Methode — gleich der ersten — in geometrischer Form entwickelt, wobei spezielle, nur bei den Gleichungen fünften Grades hervortretende Beziehungen den Ausgangspunkt abgeben. Statt dessen greife ich hier auf die *algebraische* Begründung der Methode zurück, die ich (1879) in Bd. 15 der Math. Annalen entwickelte und mit Überlegungen über die Auflösung beliebiger höherer Gleichungen begleitete⁶⁾.

Die Ikosaedertheorie der Gleichungen fünften Grades und die mit ihr zusammenhängenden allgemeinen Überlegungen sind seitdem mehrfach von anderer Seite zur Darstellung gebracht worden, so insbesondere im zweiten Bande des ausgezeichneten *Lehrbuches der Algebra* von H. Weber (Braunschweig, zweite Auflage 1898, 1899), sowie in dem ausführlichen Bericht, den Herr Wiman in Bd. 1 der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften über *Endliche Gruppen linearer Substitutionen* erstattet hat (S. 522 bis 554, 1900). Trotzdem scheint es, daß die prinzipielle Bedeutung des ganzen Ansatzes im mathematischen Publikum immer noch vielfach nicht verstanden wird. Es handelt sich nicht um Überlegungen, welche sich *neben* die früheren Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades stellen, sondern um solche, die den Anspruch erheben, den eigentlichen Kern dieser früheren Untersuchungen auszumachen. Ich will versuchen, in dem folgenden Berichte dementsprechend die Hauptpunkte der Theorie (die sich dann später mutatis mutandis bei dem Ansatz für die Gleichungen sechsten Grades wiederfinden) so genau zu bezeichnen, als bei der gebotenen Kürze möglich scheint.

Das erste ist, daß wir die *Ikosaedergleichung*, d. h. die Gleichung sechzigsten Grades, welche in dem „Ikosaederbuch“ folgendermaßen ge-

⁵⁾ [Der Leser vergleiche neben dem Ikosaederbuch immer auch meine Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 12 (1877), die oben als Abh. LIV abgedruckt ist. K.]

⁶⁾ *Über die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade* (1879) [vorstehend als Abh. LVII abgedruckt]; vgl. insbesondere den § 4 daselbst („die Formeln von Kronecker und Briosischi für den fünften Grad“). [Im Gegensatz hierzu führte die oben abgedruckte Abh. LVIII die im Texte gemeinten geometrischen Betrachtungen, welche von den geradlinigen Erzeugenden der Flächen zweiten Grades ausgehen, weiter. K.]

schrieben wird:

$$(1) \quad \frac{H^3(x)}{1728 f^3(x)} = X$$

als eine *Normalgleichung sui generis* ansehen, welche sich vermöge ihrer ausgezeichneten Eigenschaften als die nächste Verallgemeinerung der „reinen“ Gleichungen:

$$(2) \quad x^n = X$$

darstellt. In der Tat lassen sich die 60 Wurzeln von (1) aus einer beliebigen derselben genau so durch 60 a priori bekannte lineare Substitutionen (die Ikosaedersubstitutionen) berechnen, wie die n Wurzeln von (2)

aus einer derselben durch die n Substitutionen $x' = e^{\frac{2\pi i k}{n}} \cdot x$. Nun erweist sich die Gruppe der Ikosaedersubstitutionen mit der Gruppe der 60 geraden Vertauschungen von fünf Dingen als isomorph. Hierdurch gewinnt der Abelsche Beweis, daß es unmöglich ist, die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades auf eine Reihenfolge reiner Gleichungen (2) zurückzuführen, seine positive Wendung. Die Aufgabe muß sein, die *Auflösung der Gleichungen fünften Grades mit Hilfe einer Ikosaedergleichung zu bewerkstelligen*. Und hier mögen wir einen algebraischen und einen transzendenten Teil der Untersuchung unterscheiden. Der erstere Teil wird sich damit beschäftigen, aus den Wurzeln z_1, \dots, z_3 einer vorgelegten Gleichung fünften Grades die Wurzel x einer Ikosaedergleichung (1) algebraisch zusammensetzen, den Parameter X der letzteren durch die Koeffizienten der Gleichung fünften Grades, bzw. die Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante, zu berechnen, endlich wieder die z_1, \dots, z_3 durch das x darzustellen. Der transzendente Teil aber wird die Aufgabe haben, die Wurzel x der Ikosaedergleichung aus dem Parameter X durch unendliche Prozesse zu berechnen. Dies gelingt genau so durch *hypergeometrische Reihen*, wie die transzendente Auflösung der Gleichung (2) durch die binomische Reihe. — In den „Vorlesungen über das Ikosaeder“ ist insbesondere nachgewiesen, daß *alle* algebraischen Untersuchungen, die man zum Zwecke der Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades angestellt hat, Umschreibungen des vorgenannten algebraischen Problems sind. Der transzendente Teil der Aufgabe wird nurmehr gestreift. Es wird aber klar ausgesprochen, welche Bewandnis es mit der sogenannten Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch *elliptische Funktionen* hat. Ich beziehe mich hier auf meine ausführlichen anderweitigen Darlegungen, die u. a. in die von Fricke und mir herausgegebenen *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* (Leipzig 1890, 1892) eingearbeitet sind. Zwischen der Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Funktionen und der Ikosaedertheorie besteht ein notwendiger



Zusammenhang. Setzt man in (1) für X die absolute Invariante J der elliptischen Modulfunktionen, so bekommt die Iksaedergröße x die einfache Bedeutung des „Hauptmoduls der Hauptkongruenzgruppe fünfter Stufe“. Alle Arten, die Auflösung der Gleichungen fünften Grades mit den elliptischen Funktionen in Zusammenhang zu bringen, beruhen auf diesem Fundamentalsatz. Insbesondere läßt sich x selbst durch elliptische θ -Reihen darstellen; es ist eine Formel von prinzipieller Einfachheit; man hat (wenn ich der Kürze halber die Jacobischen Bezeichnungen gebrauchen darf):

$$(3) \quad x = -q^{\frac{1}{5}} \frac{\partial_1 \left(\frac{2iK'\pi}{K}, q^{\frac{1}{5}} \right)}{\partial_1 \left(\frac{iK'\pi}{K}, q^{\frac{1}{5}} \right)}.$$

Die Benutzung dieser Formel zur Auflösung der Iksaedergleichung (oder ähnlicher Formeln zur Auflösung irgendwelcher Resolventen der Iksaedergleichung) ist aber genau so ein Umweg, wie die Lösung der reinen Gleichung (2) durch Logarithmen:

$$(4) \quad x = e^{\frac{1}{n} \log X}.$$

Muß man doch zuerst $\frac{K'}{K}$ bzw. $\log X$ aus X berechnen, ehe man die Formeln (3), (4) anwenden kann. Die Bedeutung der Formeln für die Auflösung ist höchstens eine praktische, falls man nämlich eine Logarithmentafel bzw. eine Tafel der elliptischen Perioden K, K' besitzt. Man möge also endlich aufhören, sich so auszudrücken, als wenn die Benutzung der elliptischen Funktionen das Wesentliche an der Theorie der Gleichungen fünften Grades wäre. Diese Ausdrucksweise ist nur ein Residuum der zufälligen historischen Entwicklung: die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen hat den ersten Ansatz gegeben, gewisse einfache algebraische Gleichungen aufzustellen (die Modulargleichungen und Multiplikatorgleichungen für den fünften Transformationsgrad), die der Iksaedergleichung nahe verwandt sind⁷⁾.

So viel über die Einführung des Iksaeders in die Theorie der Gleichungen fünften Grades im allgemeinen. Ich muß mich nunmehr ganz auf die algebraische Seite der Aufgabe beschränken. Und hier habe ich vor allen Dingen einen fundamentalen Satz über die Iksaedersubstitutionen zu erwähnen, der in der Folge besonders wichtig wird. Man kann von der Iksaedersubstitution der in (1) auftretenden Unbekannten x zu homogenen Substitutionsformeln übergehen (indem man x in den Sub-

⁷⁾ Eine direkte Methode für die Lösung des transzendenten Teiles der Aufgabe liefert die Anwendung der hypergeometrischen Reihen. Vgl. Abh. LIV, Abschnitt I, § 8, S. 331 f. K.]

stitutionsformeln überall durch x_1, x_2 ersetzt und Zähler und Nenner in zweckmäßiger Weise trennt). Wählt man dabei die Determinante der entstehenden binären Substitutionen gleich 1, so hat man 120 binäre Substitutionen; speziell entsprechen der identischen Substitution $x' = x$ die beiden

$$(5) \quad x'_1 = x_1, x'_2 = x_2 \quad \text{und} \quad x'_1 = -x_1, x'_2 = -x_2.$$

Und nun ist es auf keine Weise möglich (auch nicht, wenn man den Wert der Determinante abändert), aus solchen homogenen Substitutionen eine mit der nicht homogenen Substitutionsgruppe isomorphe Gruppe zusammenzusetzen, die weniger als 120 Substitutionen enthielte. Der Isomorphismus zwischen der Substitutionsgruppe des x und derjenigen der x_1, x_2 ist also notwendig ein mereodrischer! Dieser fundamentale Satz, der etwas abstrakt klingt, gibt der algebraischen Theorie der Gleichungen fünften Grades ihre eigentümliche Form, wie sofort näher darzulegen ist. Bemerken wir vorab, daß derselbe nicht etwa schwer zu beweisen ist. Auf S. 46, 47 des „Iksaederbuches“ ist er darauf zurückgeführt, daß die Gruppe der nicht homogenen Iksaedersubstitutionen u. a. sogenannte Vierergruppen enthält und daß für diese Vierergruppen bereits der entsprechende Satz gilt. Nehmen wir, um dies einzusehen, die einfachste Darstellung der nicht homogenen Vierergruppe, wie sie durch folgende vier Substitutionen gegeben ist:

$$(6) \quad \begin{aligned} \text{I: } \xi'_1 &= \xi_1, \\ \text{II: } \xi'_1 &= -\xi_1, \quad \text{III: } \xi'_1 = \frac{1}{\xi_1}, \quad \text{IV: } \xi'_1 = -\frac{1}{\xi_1}. \end{aligned}$$

Hier sind II, III, IV Substitutionen von der Periode 2 und es ist zugleich

$$(7) \quad \text{II III IV} = \text{I}.$$

Will man jetzt zu einer holodrisch isomorphen Gruppe homogener Substitutionen übergehen, so hat man I jedenfalls durch

$$\text{I': } \xi'_1 = \xi_1, \quad \xi'_2 = \xi_2,$$

zu ersetzen, II, III, IV aber

$$\text{II': } \xi'_1 = \mp \xi_1, \quad \xi'_2 = \pm \xi_2,$$

$$\text{III': } \xi'_1 = \pm \xi_2, \quad \xi'_2 = \pm \xi_1,$$

$$\text{IV': } \xi'_1 = \mp \xi_2, \quad \xi'_2 = \pm \xi_1$$

(wo in der einzelnen Horizontale je nach Belieben die oberen oder unteren Vorzeichen zu nehmen sind). Aber wie man hier auch die Vorzeichen wählen möge, die hier eingeführten Substitutionen II', III', IV' haben je die Determinante (-1) und es kann also unmöglich

$$\text{II' III' IV' = I'}$$

sein, wie es doch nach (7) bei holodrischem Isomorphismus der Fall sein



müßte! — Wir werden, nach dem so Bewiesenen, fortan unter den *homogenen Ikosaedersubstitutionen* kurzweg die 120 binären Substitutionen von der Determinante $+1$ verstehen, welche den 60 nicht homogenen Substitutionen des x entsprechen.

Ich werde nunmehr das zentrale Problem, dessen Erledigung uns obliegt, folgendermaßen formulieren: *man soll aus frei veränderlichen fünf Größen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 (den Wurzeln der Gleichung fünften Grades) eine Funktion $x(z_1, \dots, z_5)$ zusammensetzen, die bei den 60 geraden Vertauschungen der z die 60 Ikosaedersubstitutionen erleidet.* Aus unserem fundamentalen Satz folgt sofort, daß es eine derartige *rationale* Funktion von fünf frei veränderlichen Größen z nicht gibt (Ikosaederbuch S. 255). Man schreibe nämlich, indem man x in teilerfremde Polynome als Zähler und Nenner spaltet: $\frac{\varphi(z_1, \dots, z_5)}{\psi(z_1, \dots, z_5)}$. Die so eingeführten φ, ψ würden sich bei den 60 Vertauschungen der z notwendig *homogen* linear substituieren. Dabei würden diese homogenen Substitutionen den Ikosaedersubstitutionen des x einzeln entsprechen; man hätte also eine mit den unhomogenen Ikosaedersubstitutionen holoeidrisch isomorphe Gruppe binärer Substitutionen, und eine solche Gruppe existiert nicht, wie wir sahen.

Die *gesuchte Funktion* $x(z_1, \dots, z_5)$ muß also von ihren Argumenten *algebraisch abhängen*. Und damit sind wir in das Gebiet derjenigen Irrationalitäten der Gleichungstheorie geführt, die ich in meinem Ikosaederbuch (S. 158, 159) *akzessorische* nenne, weil sie zu den unmittelbar vorhandenen Irrationalitäten (den rationalen Funktionen der z) — mit denen es die Galoissche Gleichungstheorie nach ihrer gewöhnlichen Formulierung allein zu tun hat — als etwas Neues hinzutreten. Über die Leistungsfähigkeit dieser akzessorischen Irrationalitäten wissen wir vorläufig nichts Allgemeines. Wir sind vielmehr im einzelnen Falle auf tastende Versuche angewiesen. Sicher wird man bei der Auflösung irgendwelcher höheren Gleichung nur solche akzessorische Irrationalitäten zulassen wollen, die sich aus den symmetrischen Funktionen der Gleichungswurzeln, evtl. den vorgegebenen Affektfunktionen durch *niedere* Gleichungen berechnen. Bei den Gleichungen fünften Grades, die wir hier behandeln, gilt neben den symmetrischen Funktionen der z auch deren Differenzenprodukt (die Quadratwurzel aus der Diskriminante) als bekannt. *Der Erfolg zeigt, daß wir in mannigfacher Weise ein von den z ikosaedrisch abhängendes x konstruieren können, sobald wir nur die Quadratwurzel aus einer geeigneten rationalen Funktion dieser Größen adjungieren wollen*^{*)}. Die

^{*)} Hierzu kommt dann noch die fünfte Einheitswurzel $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, die in den Ikosaedersubstitutionen immerzu auftritt und die bei der Bildung eines geeigneten x

zweierlei Methoden zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades, welche ich in meinem „Ikosaederbuch“ gebe, unterscheiden sich nur durch den *Platz*, den sie der Adjunktion dieser akzessorischen Quadratwurzel anweisen. Bei der ersten Methode wird die akzessorische Quadratwurzel (indem man die Gleichung fünften Grades durch eine Tschirnhausen-Transformation in eine sogenannte Hauptgleichung fünften Grades verwandelt, d. h. eine Gleichung, bei der die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet) vorweggenommen. Bei der zweiten Methode wird zunächst ein Schritt auf das Ikosaederproblem zu getan und dann erst die akzessorische Quadratwurzel adjungiert. Wie bereits in der Einleitung gesagt, bevorzuge ich hier diese zweite Methode, indem ich ihre einzelnen Schritte in einer solchen Weise formelmäßig exponiere, daß sich der ganze Ansatz hernach in singemäßiger Weise auf die Gleichungen sechsten Grades übertragen läßt.

Hier in numerierter Reihenfolge die wesentlichen Überlegungen (der zweiten Methode):

1. Wenn x_1, x_2 die homogenen binären 120 Ikosaedersubstitutionen erleiden, so erfahren die Quadrate und Produkte

$$x_1^2, x_1 x_2, x_2^2$$

ihrerseits nur 60 homogene ternäre Substitutionen von der Determinante 1 (deren Gruppe den 60 nicht homogenen Ikosaedersubstitutionen von $\frac{x_1}{x_2}$ und damit den 60 geraden Vertauschungen der fünf Größen z_1, \dots, z_5 holoeidrisch isomorph ist).

2. Dasselbe gilt, nach den allgemeinen Grundsätzen der Invariantentheorie, von den Koeffizienten einer in den x_1, x_2 quadratischen binären Form. Ich werde eine solche Form hier, um unmittelbaren Anschluß an die (auch in meinem „Ikosaederbuch“ benutzte) Schreibweise von Kronecker und Brioschi zu haben, folgendermaßen bezeichnen:

$$(8) \quad A_1 x_1^2 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2.$$

Die $A_1, 2A_0, -A_2$ substituieren sich nach der Ausdrucksweise der Invariantentheorie zu den $x_1^2, x_1 x_2, x_2^2$ *kontragredient*.

3. Wir schließen, daß es ohne weiteres möglich sein wird, aus irgend vorgegebenen fünf Größen z_1, \dots, z_5 solche rationale Funktionen zu bilden, welche bei den geraden Vertauschungen der z sich genau so substituieren, wie die A_0, A_1, A_2 . In der Tat habe ich in der bereits in der Einleitung genannten Arbeit aus Bd. 15 der Math. Annalen [Abh. LVII] einen all-

dementsprechend jedenfalls zu benutzen ist. Zählen wir sie, wie man streng genommen tun müßte, mit zu den akzessorischen Irrationalitäten, so hat man akzessorische Irrationalitäten in der Gleichungstheorie von Anfang an, nämlich schon bei der Reduktion der zyklischen Gleichungen auf reine Gleichungen.



gemeinen Ansatz gegeben, demzufolge man immer, wenn zwei Größenreihen (hier die z und die A) holodrisch isomorphe homogene lineare Substitutionen erleiden, aus den Größen der einen Art in mannigfachster Weise rationale Funktionen zusammensetzen kann, die sich wie Größen der zweiten Art substituieren.

4. Wir reproduzieren hier nicht diesen allgemeinen Ansatz (was unnötig weitläufig wäre), sondern geben hier gleich die abgekürzte Form, in die er sich bei unserem speziellen Problem zusammenziehen läßt und in der er mit den auf Gleichungen fünften Grades bezüglichen Entwicklungen von Kronecker und Brioschi in unmittelbarem Kontakt tritt. Es handelt sich um folgende Punkte:

4a. Man kann aus den x_1, x_2 sechs quadratische Ausdrücke bilden:

$$(9) \quad \sqrt{5} \cdot x_1 x_2, \quad \varepsilon^r x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon^{4-r} x_2^2 \quad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}; r = 0, 1, 2, 3, 4),$$

die sich bei den Ikosaedersubstitutionen mit gewissen (hier nicht näher anzugebenden) Zeichenwechseln vertauschen.

4b. Sei ferner $v(z_1, \dots, z_5)$ eine rationale Funktion der z , die bei der zyklischen Vertauschung der in natürlicher Reihenfolge genommenen z ungeändert bleibt. Wir bilden die Differenz

$$v(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5) - v(z_5 z_4 z_3 z_2 z_1)$$

und erheben sie ins Quadrat. Wir haben dann eine „metazyklische“ Funktion, die u_r^2 heißen soll, während die fünf weiteren Werte, die aus ihr durch die geraden Vertauschungen der z entstehen, in geeigneter Reihenfolge mit u_r^2 bezeichnet werden mögen ($r = 0, 1, 2, 3, 4$). Man kann dann die Vorzeichen der verschiedenen u so wählen, daß sich die

$$(10) \quad u_r, u_r \quad (r = 0, 1, 2, 3, 4)$$

bei den geraden Vertauschungen der z genau so, nämlich auch mit denselben Zeichenwechseln, linear substituieren, wie die Ausdrücke (9) bei den korrespondierenden Ikosaedersubstitutionen der x_1, x_2 .

4c. Wir schließen, daß die folgende Form der z und der x

$$(11) \quad \Omega(z|x) = \sqrt{5} \cdot u_x \cdot x_1 x_2 + \sum u_r (\varepsilon^r x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon^{4-r} x_2^2)$$

ungeändert bleibt, wenn man auf die z die geraden Vertauschungen und gleichzeitig auf die x_1, x_2 die korrespondierenden Ikosaedersubstitutionen ausübt.

4d. Wir setzen jetzt, in Übereinstimmung mit (8):

$$\Omega(z|x) = A_1 x_1^2 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2$$

und finden durch Vergleich:

$$(12) \quad \begin{cases} 2A_0 = \sqrt{5} \cdot u_x + \sum u_r, \\ A_1 = \sum \varepsilon^r \cdot u_r, \\ A_2 = \sum \varepsilon^{4-r} \cdot u_r. \end{cases}$$

Hiermit haben wir in der Tat aus den z_1, \dots, z_5 Größen A_0, A_1, A_2 zusammengesetzt, die sich bei den geraden Vertauschungen der z in der gewollten Weise ternär substituieren.

5. Wir werden das hiermit erreichte Resultat in der Folge gelegentlich dahin kurz aussprechen, daß wir sagen: wir haben den z_1, \dots, z_5 eine quadratische binäre Form (8) „kovariant“ zugeordnet. Die Diskriminante von (8):

$$(13) \quad A = A_0^2 + A_1 A_2$$

ist als binäre Invariante dabei eine solche Funktion der z_1, \dots, z_5 , die sich bei den geraden Vertauschungen der z nicht ändert; sie ist also eine rationale Funktion der Koeffizienten der vorgelegten Gleichung fünften Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante.

Nun ist aber doch das Ziel, den z_1, \dots, z_5 nicht eine quadratische Form oder ein „Punktepaar“ des binären Gebietes:

$$(14) \quad A_1 x_1^2 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = 0,$$

sondern einen Quotienten $\frac{x_1}{x_2}$, einen „Punkt“, kovariant zuzuordnen. Wir erreichen dies in einfachster Weise, indem wir die quadratische Gleichung (14) auflösen und dementsprechend schreiben:

$$(15) \quad \frac{x_1}{x_2} = x = \frac{-A_0 + \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}}{A_1}.$$

6. Hiermit haben wir unsere zentrale Aufgabe gelöst: aus den z_1, \dots, z_5 ein solches x zusammensetzen, welches bei den geraden Vertauschungen der z die Ikosaedersubstitutionen erleidet. Man beachte, daß die A_0, A_1, A_2 nach Nr. 4d rationale Funktionen der z sind, bei deren Konstruktion keine andere Irrationalität als die fünfte Einheitswurzel ε benutzt ist. Und unter der Quadratwurzel steht (nach Nr. 5) eine solche Verbindung der A_0, A_1, A_2 , die sich bei den geraden Vertauschungen der z nicht ändert. Wir sind also mit Hilfe solcher akzessorischer Irrationalitäten zum Ziele gekommen, die man in der Theorie der Gleichungen fünften Grades füglich als niedere Irrationalitäten bezeichnen wird.

7. Wie man nun weiter den Parameter X der Ikosaedergleichung, der unser x (15) genügt, als Funktion der Koeffizienten der Gleichung fünften Grades, deren Wurzeln die z_1, \dots, z_5 sind, bzw. der Quadratwurzel aus



ihrer Diskriminante berechnet, und wie man schließlich die z mit Hilfe der Koeffizienten und der adjungierten Quadratwurzeln durch das x rational darstellt, also die Gleichung fünften Grades mit Hilfe der Ikosaedergleichung wirklich auflöst, möge hier, unter Verweis auf das „Ikosaederbuch“ unerörtert bleiben“).

8. Wohl aber möge noch zusammenfassend klar hervorgehoben werden, wieso man mit Fug und Recht von einer so gewonnenen *Auflösung* der Gleichungen fünften Grades reden kann. Es ist nicht nur eine Reihenfolge von Schritten angegeben, die man im gegebenen Falle numerisch würde durchlaufen können, so daß man die Zahlenwerte der z_1, \dots, z_5 tatsächlich erhält, es ist vielmehr auch eine volle funktionentheoretische Einsicht in die innere Natur des Auflösungsproblems erreicht. Schließlich sind doch die z_1, \dots, z_5 die verschiedenen Zweige einer von den Koeffizienten der Gleichung fünften Grades abhängigen fünfwertigen algebraischen Funktion von zunächst sehr unübersichtlicher Bauart. *Diese fünf Zweige werden in demjenigen Rationalitätsbereiche, der durch die Koeffizienten der Gleichung fünften Grades, die Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante und die zu adjungierenden akzessorischen Irrationalitäten gegeben wird, durch eine einzige, nur von einem, dem Rationalitätsbereiche angehörigen Parameter abhängige höhere Irrationalität durchsichtiger Bauart, die Ikosaederirrationalität, dargestellt.*

Ich möchte an dieser Stelle noch eine mehr persönliche Bemerkung über die Beziehung meiner Arbeiten über die Gleichungen fünften Grades zu denjenigen von Kronecker einschalten, um so lieber, als Sie ja, hochgeehrter Herr Kollege, über die Kroneckerschen Manuskripte verfügen und dadurch in der Lage sind, meine Angaben in authentischer Weise zu vervollständigen. Kronecker und Brioschi haben bekanntlich in ihren ersten Arbeiten über Gleichungen fünften Grades (aus dem Jahre 1858) gerade dieselben Größen A_0, A_1, A_2 benutzt, die ich vorhin (in Nr. 4b) angab; sie haben dann die Gleichung sechsten Grades konstruiert, der $\zeta = 5A_0^2$ genügt und die Brioschi wegen ihres engen Zusammenhanges mit gewissen von Jacobi für die Transformation der elliptischen Funktionen aufgestellten Gleichungen eine Jacobische Gleichung nennt; sie haben endlich angegeben, daß man durch Adjunktion einer Quadratwurzel zu einer Gleichung mit nur einem Parameter gelangen kann. Diese Quadratwurzel bezeichnet eine akzessorische Irrationalität, die der in Formel (15) benutzten gleichwertig ist. Weiterhin stellte dann Kronecker (1861) den fundamentalen Satz auf, den ich in meinem „Ikosaederbuch“ als Kroneckerschen Satz bezeichne und mit dessen Darlegung und Beweis

²⁾ [In den oben abgedruckten Abh. LIV u. LVII ist das „Problem der A “ in dem hier in Betracht kommenden Sinne nach einigen Richtungen weitergehend durchgeführt.]

ich mein Ikosaederbuch kröne; den Satz, daß es unmöglich sei, ohne Heranziehung akzessorischer Irrationalitäten von der allgemeinen Gleichung fünften Grades eine Resolvente mit nur einem Parameter zu bilden. Ich bewiese diesen Satz a. a. O., wie vorher (1877) in Bd. 12 der Math. Annalen [vgl. die oben abgedruckte Abh. LIV], indem ich mich auf die oben besprochene Eigenschaft der Ikosaedergruppe berufe, beim Übergang zur homogenen Schreibweise ihre Substitutionen mindestens zu verdoppeln; mein erster Beweis, den ich 1877 in den Sitzungsberichten der Erlanger physikalisch-medizinischen Sozietät gab (Sitzung vom 13. Januar), war noch wesentlich umständlicher. Ich habe nun vor 24 Jahren (Ostern 1881) Gelegenheit gehabt, mit Kronecker über diese Dinge ausführlich zu sprechen. Es ergab sich, daß Kronecker bei seinen Untersuchungen die Ikosaedersubstitutionen, denen er doch so nahe gekommen war, nicht gekannt und dementsprechend für seinen Hauptsatz keinen ausreichenden Beweis gefunden hatte! Es ist dies, wie ich meine, eine auch unter allgemeinen Gesichtspunkten sehr bemerkenswerte Tatsache. Denn sie bestätigt an einem besonders interessanten Falle, was Gauß so oft hervorhebt: daß die Auffindung wichtigster mathematischer Theoreme vielmehr Sache der Intuition als der Deduktion ist und daß die Herstellung der Beweise ein von der Auffindung der Theoreme sehr verschiedenes Geschäft ist. Ich bin später mit Kronecker auf den Gegenstand nie zurückgekommen, hörte aber vor einigen Jahren, daß Kronecker nach dem Erscheinen meines „Ikosaederbuches“ in einem Kolleg über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades zur Ikosaedertheorie Stellung genommen habe. Es würde mich (und jedenfalls auch andere Mathematiker) sehr interessieren, zu erfahren, was in den hinterlassenen Papieren von Kronecker über diese Dinge enthalten sein mag, und ich möchte also den Wunsch an Sie richten, das einschlägige Material zu sichten und bald zu publizieren¹⁰⁾.

Ein neuer Beweis des Kroneckerschen Satzes ist bekanntlich von Herrn Gordan in Bd. 29 der Math. Annalen gegeben worden (1887: *Über biquadratische Gleichungen*¹¹⁾). Derselbe ist insofern einfacher zu lesen als

¹⁰⁾ [Herr Hensel hat mir neuerdings in liebenswürdiger Weise sein einschlägiges Material zur Verfügung gestellt. Dasselbe umfaßt neben ca. 23 losen Manuskriptblättern von Kronecker selbst, die aber nichts Abgeschlossenes enthalten, eine von Stäckel ausgearbeitete, s. Z. von Kronecker autorisierte Nachschrift seiner Vorlesung vom Winter 1885/86 „Über die Affekte der Gleichungen, welche in der Theorie der elliptischen Funktionen auftreten.“ Ich werde weiter unten auf S. 503 f. darlegen, wie sich nunmehr die Sachlage darstellt. K.]

¹¹⁾ Man vergleiche auch die Darstellung des Gordanschen Beweises in den Lehrbüchern der Algebra von Weber und von Netto. [In seinem Nachruf auf Gordan in Bd. 75 der Math. Annalen (1913/14), S. 14–25 hat M. Noether einen genauen Vergleich des Gordanschen Beweises mit dem meinigen angestellt. K.]



der meinige, als er auf eine explizite Kenntnis der Iksaeadersubstitutionen nirgends Bezug nimmt. Trotzdem hängt derselbe, wie ich hier bemerken möchte, mit dem Grundgedanken meines Beweises auf das genaueste zusammen. Wir beide benutzen im Anschluß an eine Entwicklung von Herrn Lüroth einen Hilfssatz, der sich folgendermaßen formulieren läßt: Wenn eine Gleichung n -ten Grades mit frei veränderlichen Wurzeln z_1, z_2, \dots, z_n eine rationale Resolvente mit nur einem Parameter besitzen soll, dann muß es eine rationale Funktion x der Wurzeln z_1, \dots, z_n geben, die sich bei den zur Galoisschen Gruppe der Gleichung gehörigen Vertauschungen der z *linear mit konstanten Koeffizienten* transformiert. Wir benutzen ferner gemeinsam die Überlegung, daß sich diese Gruppe linearer Substitutionen beim Übergang zur binären Schreibweise in eine holoedrisch isomorphe Gruppe binärer linearer Substitutionen umsetzen lassen muß. Natürlich muß diese Gruppe andererseits mit der Galoisschen Gruppe der vorgelegten Gleichung modulo einer ausgezeichneten Untergruppe der letzteren isomorph sein. Jetzt habe ich auf S. 44 bis 47 meines „Iksaaderbuches“ den Satz gegeben, daß nur folgende Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen sich holoedrisch isomorph in die binäre Form umsetzen lassen: 1. Die zyklischen Gruppen, 2. Die Diedergruppen von ungeradem n . Es folgt, daß eine Gleichung n -ten Grades mit frei veränderlichen Wurzeln z_1, \dots, z_n nur dann eine rationale Resolvente mit nur einem Parameter zuläßt (die dann sofort in eine reine Gleichung, bzw. eine Dieder Gleichung von ungeradem n umgesetzt werden kann), wenn ihre Galoissche Gruppe modulo einer ausgezeichneten Untergruppe zu einer zyklischen Gruppe oder einer Diedergruppe von ungeradem n isomorph ist. Eine zugehörige Resolvente mit nur einem Parameter läßt sich dann nach den Prinzipien meiner Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 15 [vorstehend als Abh. LVII abgedruckt] auch sogleich herstellen. Der so ausgesprochene allgemeine Satz umfaßt nun sowohl den Gordanschen als meinen Beweis des Kroneckerschen Satzes. Mein Beweis erledigt sich in der Tat durch den Hinweis, daß die Gruppe einer Gleichung fünften Grades mit adjungierter Quadratwurzel aus der Diskriminante [im Sinne von Galois] „einfach“ ist und die ihr holoedrisch isomorphe Iksaadergruppe linearer Substitutionen einer Veränderlichen nicht unter die Voraussetzungen unseres Satzes fällt. Der Gordansche Beweis dagegen benutzt, wenn ich ihn recht verstehe, die selbstverständliche Tatsache, daß die betreffende Gruppe wie jede Gruppe sich selbst als ausgezeichnete Untergruppe enthält. Modulo dieser Untergruppe ist sie zur Identität kongruent. Und die identische Substitution fällt unter die Voraussetzung unseres Satzes. Es gibt also in der Tat Resolventen mit einem Parameter, die aber für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades gänzlich unbrauchbar sind, nämlich *lineare*,

deren Wurzel eine solche Funktion der z_1, \dots, z_n ist, welche bei den geraden Vertauschungen der z ihren Wert überhaupt nicht ändert! Aber andere (rationale) Resolventen mit nur einem Parameter gibt es nicht, oder besser: jede rationale Resolvente unserer Gleichung fünften Grades mit nur einem Parameter ist linear und also unbrauchbar.

So viel über die Iksaadersubstitutionen und die durch sie vermittelte Auflösung der Gleichungen fünften Grades. An Stelle der „unären“ Sub-

stitutionen $x' = \epsilon^{\frac{z_1 z_2 k}{n}} x$, welche die Wurzeln einer *reinen* Gleichung untereinander verknüpfen, sind „binäre“ lineare Substitutionen zweier homogenen Variablen x_1, x_2 getreten. Und hiermit ist zugleich der Weg zu neuen Verallgemeinerungen geöffnet. Man hat einfach Gruppen linearer Substitutionen *mehrerer* homogener Variablen heranzuziehen! Ich kann hier unmöglich die Überlegungen wiederholen, die ich in dieser Hinsicht zuerst im 15. Bande der Math. Annalen (1879) [vgl. Abh. LVII] gab, oder die Ausführungen nennen, die sich später darangeschlossen haben. Es genüge, diesbezüglich auf Webers Lehrbuch und auf den ebenfalls bereits zitierten Enzyklopädieartikel von Wiman zu verweisen¹²⁾. Wir denken uns in der Folge eine *Gleichung sechsten Grades nebst der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante* gegeben, deren Galoissche Gruppe also aus den 360 geraden Vertauschungen der Wurzeln z_1, z_2, \dots, z_6 besteht. Es wird darauf ankommen, die kleinste Zahl homogener x_1, x_2, \dots, x_n zu benutzen, bei denen eine mit diesen 360 Vertauschungen isomorphe Gruppe linearer Substitutionen möglich ist. Erwies sich dieser Isomorphismus als holoedrisch, so würden wir nach der Vorschrift meiner Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 15 [vorstehend als Abh. LVII abgedruckt] sofort rationale Funktionen der z_1, z_2, \dots, z_6 hinschreiben können, die sich bei den 360 geraden Vertauschungen der z wie die x_1, \dots, x_n linear substituieren. Aber es zeigt sich, daß auch hier (wie bei den Gleichungen fünften Grades) der Isomorphismus ein meroedrischer [von der Art ist, daß jeder Vertauschung der z mehrere (drei) lineare Substitutionen der x entsprechen], so daß wir vor die Frage gestellt werden, ob wir, bzw. wie wir mit Hilfe niederer akzessorischer Irrationalitäten überhaupt durchkommen?

Einen ersten Ansatz zur Erledigung der so formulierten Fragestellung habe ich in Bd. 28 der Math. Annalen gemacht (1886. *Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades*) [vgl. die vorstehend abgedruckte Abh. LVIII]. Daß es eine *ternäre* Gruppe linearer Substitutionen geben sollte, die mit den 360 geraden Vertauschungen von

¹²⁾ Eine erste übersichtliche Orientierung gibt auch der Vortrag IX meines gelegentlich der Weltausstellung in Chicago gehaltenen *Evanston Colloquium* (Macmillan, New-York, 1894). [Vgl. die Vorbemerkungen im gegenwärtigen Bande, S. 260.]



sechs Dingen isomorph wäre, schien damals, auf Grund der vorläufigen Untersuchung dieser Frage durch Herrn C. Jordan, ausgeschlossen; eine solche Gruppe wurde erst 1889 von Herrn Valentiner entdeckt (Bd. 6 der Serie V der Abhandlungen der Dänischen Akademie: *De endelige Transformations-Gruppens Theori*) und nach Struktur und zugehörigen fundamentalen Invarianten zum erstenmal von Herrn Wiman 1895 untersucht (Math. Annalen, Bd. 47: *Über eine einfache Gruppe von 360 ebenen Kollineationen*). Ich habe mir also damals für die allgemeine Gleichung sechsten Grades — und zugleich auch für die allgemeine Gleichung siebenten Grades — eine isomorphe Gruppe *quaternärer* Kollineationen konstruiert, und habe gezeigt, daß man bei der Zurückführung der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades auf die entsprechenden quaternären Gleichungsprobleme je mit zwei akzessorischen Quadratwurzeln ausreicht¹³⁾.

Der hiermit gegebene Ansatz ist nun, was die Gleichungen sechsten Grades angeht, auf die wir uns hier beschränken¹⁴⁾, seit der Entdeckung der Valentiner-Wimangruppe bis auf weiteres überflüssig geworden. Ich bemerke dies ausdrücklich, weil hier die Stelle ist, wo Herr Lahtin, wie zu Eingang dieses Briefes erwähnt, einen unnötigen Umweg macht. Um nämlich die Gleichungen sechsten Grades mit der Valentinergruppe in Verbindung zu bringen, geht Herr Lahtin durch die in Bd. 28 der Math. Annalen [Abb. LVIII] gegebene Entwicklung hindurch. Dies ist nicht uninteressant¹⁵⁾, aber für den nächsten hier zu erreichenden Zweck keineswegs notwendig.

¹³⁾ Die Gruppe, welche ich a. a. O. für die Gleichungen sechsten Grades in Vorschlag bringe, enthält sogar 720 Kollineationen, so daß es bei ihrer Benutzung nicht nötig ist, die Quadratwurzel aus der Diskriminante der Gleichung sechsten Grades vorab zu adjungieren. Dagegen umfaßt die Gruppe, welche den Gleichungen siebenten Grades entspricht, nur $\frac{7!}{2} = 2520$ Kollineationen.

¹⁴⁾ Für die Gleichungen siebenten Grades bleibt der quaternäre Ansatz bestehen; es ist aber unmöglich, die hierauf bezüglichen interessanten Fragen im Texte weiter zu verfolgen.

¹⁵⁾ Herr Lahtin bemerkt, daß sich bei der quaternären Gruppe die Flächen zweiten Grades im Raume ganz ähnlich linear vertauschen, wie bei der Valentiner-Wimangruppe die Kurven dritter Ordnung der Ebene. Von hier aus kann man (wie ich beiläufig bemerkt sei) ohne besonderer Mühe zu derselben Form Σ gelangen, die ich unten unter (19) mitteile. Man hat nur zu beachten, daß die Wurzeln z_1, z_2, \dots, z_6 der Gleichung sechsten Grades, und ebenso deren Quadrate $z_1^2, z_2^2, \dots, z_6^2$ nach meinen Entwicklungen in Bd. 28 der Math. Annalen [vgl. Abb. LVIII] im Raume einen linearen Komplex festlegen, und daß diese beiden Komplexe zusammen mit dem ebendort eingeführten „Einheitskomplex“ durch ihre gemeinsamen Linien eine Fläche zweiten Grades bestimmen. Irgendeine akzessorische Irrationalität tritt hierbei noch nicht auf. Es ist dann in keiner Weise nötig, sich beim Übergang vom Raume zur Ebene so, wie Herr Lahtin tut, auf die verhältnismäßig komplizierten Formeln zu beziehen, durch welche ich in Bd. 28 der Math. Annalen den Wurzeln z_1, \dots, z_6 einen Raumpunkt zugeordnet habe. Also auch in dieser Hinsicht kann der Ansatz von Herrn Lahtin noch abgekürzt werden.

Der Übergang von den Gleichungen sechsten Grades zur Valentiner-Wimangruppe, wie ich ihn in meiner römischen Note von 1899 [vorstehend als Nr. LX abgedruckt] andeutete und den ich jetzt ausführlicher exponieren will, bedarf der Anlehnung an die quaternäre Substitutionsgruppe in keiner Weise. Der Deutlichkeit halber will ich die in Betracht kommenden Überlegungen wieder in eine Reihe von Nummern spalten, deren Aufeinanderfolge die Analogie mit dem oben bei den Gleichungen fünften Grades befolgten Gedankengange deutlich hervortreten läßt. Folgendermaßen:

1. Die Aufgabe ist, aus frei veränderlichen sechs Größen z_1, z_2, \dots, z_6 solche drei Funktionen x_1, x_2, x_3 zusammensetzen, deren Verhältnisse bei den 360 geraden Vertauschungen der z die 360 Kollineationen der Valentiner-Wimangruppe erleiden.

1a. Nun hat bereits Herr Wiman a. a. O. bemerkt, daß sich die Anzahl der Valentineroperationen, wenn man von den Kollineationen der Ebene zu den entsprechenden ternären linearen Substitutionen übergeht, mindestens verdreifacht. Es ist also von vornherein ausgeschlossen, daß die gesuchten x_1, x_2, x_3 rationale Funktionen der z_1, z_2, \dots, z_6 sein könnten. Wir wollen die homogenen Valentinersubstitutionen fortan so fixieren, daß ihre Determinante durchweg gleich Eins ist. Ihre Zahl beträgt dann genau $3 \cdot 360 = 1080$ und es entsprechen der identischen Kollineation die drei Substitutionen:

$$(16) \quad x'_1 = j^r x_1, \quad x'_2 = j^r x_2, \quad x'_3 = j^r x_3 \quad (j = e^{\frac{2\pi i}{3}}; r = 0, 1, 2).$$

1b. Wir bemerken jetzt, daß bei diesen 1080 homogenen Substitutionen die zehn Glieder dritter Ordnung, die man aus den x aufbauen kann:

$$x_1^3, x_1^2 x_2, \dots$$

ihrerseits nur 360 lineare Substitutionen erleiden (deren Gruppe mit der Gruppe der geraden Vertauschungen der z_1, z_2, \dots, z_6 holoedrisch isomorph sein wird).

2. Wir bilden nun ferner eine beliebige kubische ternäre Form

$$a_{111} x_1^3 + 3 a_{112} x_1^2 x_2 + \dots$$

(die, gleich Null gesetzt, eine „Kurve dritter Ordnung“ in der Ebene der x darstellt). Die Koeffizienten $a_{111}, 3 a_{112}, \dots$ verhalten sich bei beliebigen linearen Substitutionen der x_1, x_2, x_3 zu den $x_1^3, x_1^2 x_2, \dots$ kontragredient. Sie erleiden also bei den Substitutionen der Valentinergruppe ebenfalls genau 360 lineare Substitutionen, die mit den 360 geraden Vertauschungen der z_1, z_2, \dots, z_6 eindeutig zusammengeordnet werden können.



3. Wir schließen hieraus, daß es ohne weiteres möglich ist, zehn rationale Polynome der frei veränderlichen Größen z_1, z_2, \dots, z_6 zu bilden:

$$q_{111}, q_{112}, \dots$$

welche sich bei den geraden Vertauschungen der z genau so substituieren, wie die

$$a_{111}, a_{112}, \dots,$$

bei den korrespondierenden Substitutionen der Valentinergruppe, — also den Wurzeln z , wie wir es kurz ausdrücken, in rationaler Weise eine Kurve dritter Ordnung *kovariant* zuzuordnen.

3a. Um es anders auszudrücken: Man kann auf mannigfache Weise, ohne Benutzung akzessorischer Irrationalitäten¹⁶⁾, eine von den z und x abhängige, in den x kubische Form bilden:

$$(17) \quad \Omega(z_1, \dots, z_6 | x_1, x_2, x_3) = q_{111} x_1^3 + 3 q_{112} x_1^2 x_2, \dots$$

welche unverändert bleibt, wenn man auf x_1, x_2, x_3 die Valentiner substitutionen und gleichzeitig auf die z_1, \dots, z_6 die korrespondierenden geraden Vertauschungen ausübt.

4. Was die wirkliche Herstellung einer solchen Form Ω angeht, so unterlasse ich wieder, den allgemeinen aber weitläufigen Prozeß heranzuziehen, den ich für alle derartigen Aufgaben in Bd. 15 der Math. Annalen [Abh. LVII] gab, sondern entwickle, genau wie bei den Gleichungen fünften Grades an der entsprechenden Stelle, eine abgekürzte Methode, die sich (im Laufe des vergangenen Winters) aus meiner Korrespondenz mit Herrn Gordan ergeben hat. Man hat folgende Beziehungen zu kombinieren:

4a. Bei den 360 Kollineationen der Valentiner-Wimangruppe spielen, wie zuerst Herr Wiman nachwies, zwei Systeme von je sechs Kegelschnitten eine wichtige Rolle. Die sechs Kegelschnitte jedes der beiden Systeme vertauschen sich bei den 360 Kollineationen auf 360 Weisen unter sich. Die Gleichungen dieser 2·6 Kegelschnitte sind (bei Zugrundelegung eines geeigneten kanonischen Koordinatensystems) zuerst von Herrn Gerbaldi aufgestellt worden (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XII, 1898: *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane, I*; vgl. auch die bereits 1882 in den Atti di Torino, Bd. XVII, S. 358 ff. veröffentlichte Note: *Sui gruppi di sei coniche in involuzione*). Ich will hier die korrespondierenden ternären quadratischen Formen, indem ich mich auf das eine System von sechs Kegelschnitten beschränke, nach dem Vorgange von Herrn Gordan gleich mit der Determinante 1 ausstatten. Wir können dann schreiben:

¹⁶⁾ Abgesehen natürlich von den numerischen Irrationalitäten, welche in den Substitutionen der Valentiner-Wimangruppe auftreten. Es sind dies (in Übereinstimmung mit den im Texte folgenden Formeln (18) usw.) die Quadratwurzeln $\sqrt{-3}$ und $\sqrt{5}$.

$$(18) \quad \begin{cases} k_1 = x_1^2 + j x_2^2 + j^2 x_3^2, \\ k_2 = x_1^2 + j^2 x_2^2 + j x_3^2, \\ k_3 = \frac{-1 - \sqrt{-15}}{8} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \left(\frac{-3 - \sqrt{-15}}{4}\right) (x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2), \\ k_4 = \frac{-1 + \sqrt{-15}}{8} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \left(\frac{-3 + \sqrt{-15}}{4}\right) (x_2 x_3 - x_3 x_1 - x_1 x_2), \\ k_5 = \frac{-1 - \sqrt{-15}}{8} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \left(\frac{-3 + \sqrt{-15}}{4}\right) (-x_2 x_3 + x_3 x_1 - x_1 x_2), \\ k_6 = \frac{-1 + \sqrt{-15}}{8} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \left(\frac{-3 - \sqrt{-15}}{4}\right) (-x_2 x_3 - x_3 x_1 + x_1 x_2). \end{cases}$$

Die k_1, \dots, k_6 sind durch die Forderung, daß ihre Determinante gleich 1 sein soll, nur je bis auf eine dritte Einheitswurzel bestimmt. In der Tat vertauschen sich auch die vorstehenden k bei den 1080 Valentiner substitutionen unter Multiplikation mit gewissen dritten Einheitswurzeln.

4b. Wir wollen nunmehr aus irgend drei der k :

$$k', k'', k'''$$

eine in deren Koeffizienten trilineare Kovariante und eine ebensolche Invariante bilden. — Als erstere wählen wir die *Funktionaldeterminante* $|k' k'' k'''|$, die bei Vertauschung zweier k ihr Vorzeichen wechselt. Als Invariante nehmen wir eine symmetrische Verbindung der Koeffizienten der drei k , nämlich denjenigen Ausdruck, der bei der Entwicklung der Koeffizientendeterminante der Form $\lambda' k' + \lambda'' k'' + \lambda''' k'''$ mit $\lambda' \lambda'' \lambda'''$ multipliziert erscheint. Ich will denselben hier vorübergehend mit $(k' k'' k''')$ bezeichnen; es ist dies im vorliegenden Falle eine einfache numerische Größe. Wir bilden jetzt, für alle möglichen Tripel k', k'', k''' , den Quotienten

$$\frac{|k' k'' k'''|}{(k' k'' k''')}.$$

Man zeigt, daß die 20 so erhaltenen Terme sich bei den 1080 Substitutionen der Valentiner-Wimangruppe genau so unter evtl. Vorzeichenänderung vertauschen, wie die 20 Differenzenprodukte

$$(z'' - z''')(z''' - z')(z' - z'')$$

bei den korrespondierenden geraden Vertauschungen der z .

4c. Daher haben wir in der über alle Tripel erstreckten Summe

$$(19) \quad \Sigma (z'' - z''')(z''' - z')(z' - z'') \cdot \frac{|k' k'' k'''|}{(k' k'' k''')}$$

ein einfaches Beispiel einer solchen Form

$$\Omega(z_1, \dots, z_6 | x_1, x_2, x_3),$$

wie wir sie in Nr. 3a suchten.



Allgemeinere Beispiele (die wir im folgenden indes nicht brauchen) erhält man, wenn man in (19) statt des Differenzenprodukts der z', z'', z''' irgend-eine Determinante

$$\begin{vmatrix} z'^{\alpha} & z''^{\alpha} & z'''^{\alpha} \\ z'^{\beta} & z''^{\beta} & z'''^{\beta} \\ z'^{\gamma} & z''^{\gamma} & z'''^{\gamma} \end{vmatrix}$$

einsetzt.

4d. Ordnen wir jetzt die Summe (19) nach den sukzessiven Gliedern $x_1^3, x_1^2 x_2, \dots$, indem wir wie in Formel (17) schreiben:

$$(20) \quad \Sigma = \varphi_{111} \cdot x_1^3 + 3 \varphi_{112} \cdot x_1^2 x_2 + \dots,$$

so haben wir in den $\varphi_{111}, \varphi_{112}, \dots$ genau solche rationale Funktionen der z_1, \dots, z_6 , wie wir sie in Nr. 3a suchten.

5. Es wird nun darauf ankommen, der *Kurve dritter Ordnung*

$$(21) \quad \Sigma = 0$$

(deren Koeffizienten rational von den z abhängen, [die also den z kovariant zugeordnet ist.] einen Punkt $x_1 : x_2 : x_3$ unter Heranziehung möglicher niedriger akzessorischer Irrationalitäten *in kovarianter Weise* zuzuordnen.

Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung bietet hierzu verschiedene Möglichkeiten. Ich will hier der Kürze halber, wie ich es in meiner römischen Note [Nr. XL] tat, einen *Wendepunkt* der Kurve dritter Ordnung wählen. In der Tat verlangt die Bestimmung eines solchen Wendepunktes nach der bekannten Theorie von Hesse nur solche Irrationalitäten, welche man bei der Auflösung der Gleichungen sechsten Grades als niedrigere Irrationalitäten ansehen kann: Quadratwurzeln und Kubikwurzeln. (Die Einzelheiten sollen hier unerörtert bleiben.) Andererseits ist der Wendepunkt mit der Kurve dritter Ordnung gewiß in kovarianter Weise verknüpft: wenn man auf die Kurve und den auf ihr gewählten Wendepunkt irgendeine Kollineation ausübt, so wird man auf der entstehenden neuen Kurve unter den neun überhaupt auf ihr vorhandenen Wendepunkten jedesmal einen bestimmten erhalten. Es gilt dies insbesondere von den 360 Kollineationen der Valentiner-Wimangruppe.

6. Wir denken uns jetzt in die Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ des von uns gewählten Wendepunktes statt der Koeffizienten $\varphi_{111}, \varphi_{112}, \dots$ der Kurve dritter Ordnung ihre aus (20) resultierenden Werte in den z_1, \dots, z_6 eingetragen.

6a. Wenn wir in diesen Ausdrücken der $x_1 : x_2 : x_3$ die z_1, \dots, z_6 beliebig in gerader Weise vertauschen, erleiden sie die eindeutig bestimmten Kollineationen der Valentiner-Wimangruppe. Wir schließen daraus, daß

die rationalen Funktionen der z_1, \dots, z_6 , welche nach Anbringung aller Reduktionen in den Ausdrücken der $x_1 : x_2 : x_3$ unterhalb der auftretenden Quadratwurzeln und Kubikwurzeln verbleiben, bei den geraden Vertauschungen der z ungeändert bleiben. Sie können also als rationale Funktionen der Koeffizienten der vorgelegten Gleichung sechsten Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante dargestellt werden. Daher werden wir die bei der Ausrechnung des Wendepunktes erforderlichen Irrationalitäten mit Fug und Recht als akzessorische Irrationalitäten *niederer Charakters* bezeichnen dürfen.

6b. Wir haben also mit der Berechnung der Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ eines Wendepunktes unserer C_3 in der Tat der Aufgabe entsprochen, auf die es hier ankam: *aus den frei veränderlichen z unter Adjunktion akzessorischer Irrationalitäten elementaren Charakters Größen $x_1 : x_2 : x_3$ zu bilden, welche bei den geraden Vertauschungen der z die 360 Kollineationen der Valentiner-Wimangruppe erleiden.*

Dies ist die Ausführung des speziellen Inhaltes meiner römischen Note [Nr. LX], welche ich hier zu geben dachte.

6c. Man wird vielleicht noch eine genauere Auseinandersetzung der in Nr. 6a benutzten Schlußweise wünschen. Am einfachsten wäre es, an der Kurve (21) die bekannten Gleichungen, die zur Bestimmung eines Wendepunktes einer Kurve dritter Ordnung führen, alle durchzurechnen und die Richtigkeit der Behauptung damit tatsächlich zu bestätigen. Im übrigen kann man, wie mir Herr Gordan bemerkt, die ganze Schwierigkeit der Schlußfolgerung folgendermaßen umgehen. Man stelle einfach die Gleichung neunten Grades auf, der die neun Werte genügen, welche eine absolute Invariante der Valentiner-Wimangruppe (z. B. das sogleich zu nennende v) in den neun Wendepunkten annimmt! Diese Gleichung muß für alle 360 Kurven dritter Ordnung (welche durch die Substitutionen der Valentiner-Wimangruppe und also durch gerade Vertauschung der z auseinander hervorgehen) dieselbe sein. Ihre Koeffizienten sind also nach Wegwerfung gleichgültiger Faktoren selbst solche rationale Funktionen der z , welche sich bei den geraden Vertauschungen der z nicht ändern. Dabei kann der Affekt dieser Gleichung neunten Grades kein anderer sein, als der der ursprünglichen Wendepunktsgleichung. Sie wird also ebenfalls durch Quadratwurzeln und Kubikwurzeln gelöst, unter denen dann aber selbstverständlicherweise nur solche rationale Funktionen der z stehen, die sich bei den geraden Vertauschungen der z nicht ändern. Adjungieren wir jetzt einen der so resultierenden neun Werte unserer absoluten Invariante (also etwa des v), so wird sich aus ihm und der Gleichung (21) der Kurve dritter Ordnung, bzw. der Gleichung ihrer Hesseschen Kurve, der zugehörige einzelne Wendepunkt $x_1 : x_2 : x_3$ rational berechnen. Und



damit ist die Behauptung der Nr. 6a, betreffend die bei der Berechnung des Wendepunktes erforderlichen Irrationalitäten, von selbst mit bewiesen.

7a. Die weitere Behandlung der Gleichungen sechsten Grades wird nun ohnehin in der Weise erfolgen müssen, daß wir für den herausgegriffenen Wendepunkt unserer Kurve dritter Ordnung die absoluten Invarianten der Valentiner-Wimangruppe berechnen. Nach den Angaben von Herrn Wiman hat die Valentiner-Wimangruppe drei niedrigste Invarianten:

$$(22) \quad F, H, \Phi$$

beziehungsweise von den Graden 6, 12 und 30 in den x_1, x_2, x_3 . Aus ihnen setzen sich die beiden fundamentalen absoluten Invarianten zusammen, die ich im Anschlusse an die sogleich zu nennende Arbeit von Herrn Lachtin hier mit v und w bezeichne:

$$(23) \quad v = \frac{\Phi}{F^3}, \quad w = \frac{H}{F^2}.$$

Tragen wir hier für $x_1 : x_2 : x_3$ die Koordinaten unseres Wendepunktes ein, so werden die v, w rationale Funktionen der Koeffizienten der Gleichung sechsten Grades und der Quadratwurzel aus ihrer Diskriminante bzw. der zwischendurch eingeführten akzessorischen Irrationalitäten. Die Berechnung der $x_1 : x_2 : x_3$ aus den somit bekannten v, w ist das Normalproblem, auf welches wir die Auflösung der Gleichungen sechsten Grades reduzieren. Es ist, so wie es nun vor uns steht, ein Problem mit zwei willkürlichen Parametern, dadurch ausgezeichnet, daß sich alle seine 360 Lösungssysteme $x_1 : x_2 : x_3$ aus einem beliebigen derselben durch die 360 von vornherein bekannten Kollineationen der Valentiner-Wimangruppe ergeben. Irgendeine Methode, die Parameterzahl mit Hilfe fernerer niederer Irrationalitäten auf eins herabzudrücken, ist nicht zur Hand. Versucht man beispielsweise dem Wendepunkte $x_1 : x_2 : x_3$, den wir auswählten, einen Punkt $x'_1 : x'_2 : x'_3$ der Kurve sechster Ordnung $F=0$ in kovarianter Weise zuzuordnen und damit statt des Normalproblems (23) das folgende zu setzen:

$$(24) \quad F' = 0, \quad t' = \frac{\Phi'^3}{H'^3},$$

so stößt man bei dem gewöhnlichen Ansatz (Schnitt der Kurve $F=0$ mit einer vom Punkte $x_1 : x_2 : x_3$ kovariant abhängenden geraden Linie) auf eine Hilfsgleichung, die selbst wieder vom sechsten Grade ist!

Der Vollständigkeit wegen verlangen wir endlich noch Umkehrformeln aufzustellen, d. h. die Wurzeln z_1, \dots, z_6 der vorgelegten Gleichung sechsten Grades durch das einzelne Lösungssystem $x_1 : x_2 : x_3$ von (23) und die als bekannt vorausgesetzten Größen rational zu berechnen. Hiermit ist der

algebraische Teil der von uns hier zu skizzierenden Auflösung der Gleichungen sechsten Grades vollständig umschrieben¹⁷⁾.

7b. Der transzendente Teil aber wird verlangen, aus den Gleichungen (23) die $x_1 : x_2 : x_3$ irgendwie durch unendliche Prozesse wirklich zu berechnen. Einen ersten Ansatz hierzu macht Herr Lachtin in einer umfangreichen Arbeit, welche zuerst russisch (1901) im 22. Bande der Moskauer Mathematischen Sammlung und dann 1902 in deutscher Bearbeitung in Bd. 56 der Math. Annalen erschienen ist¹⁸⁾.

Schreiben wir:

$$(25) \quad y_1 = \frac{x_1}{\sqrt[3]{F}}, \quad y_2 = \frac{x_2}{\sqrt[3]{F}}, \quad y_3 = \frac{x_3}{\sqrt[3]{F}},$$

so erweisen sich die y als Lösungssystem von drei simultanen partiellen Differentialgleichungen, welche die drei zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}$$

durch die beiden ersten $\left(\frac{\partial y}{\partial v} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial w}\right)$ und das y selbst linear ausdrücken.

Herr Lachtin hat a. a. O. gezeigt, daß die Koeffizienten dieser Differentialgleichungen rationale ganze Funktionen der absoluten Invarianten v, w sind, die gewisse angebbare Grade nicht übersteigen. Dagegen hat er die numerischen Koeffizienten dieser Polynome nicht ausgerechnet. Die hier verbleibende Lücke wird nun gerade durch die Arbeit des Herrn Gordan, auf die ich im Eingang dieses Briefes verweise, ausgefüllt. In der Tat ist es Herrn Gordan dort gelungen, die in Rede stehenden partiellen Differentialgleichungen explizite aufzustellen. Es ist damit ermöglicht, die y_1, y_2, y_3 nach Potenzen von v und w oder auch von beliebigen linearen Funktionen von v resp. w in Reihen zu entwickeln, und es kann dann nicht mehr schwer sein, die Bereiche zu bestimmen, in denen die verschiedenartigen so entstehenden Reihen konvergieren, — also das transzendente Problem in direkter Weise zu lösen¹⁹⁾.

8. Der Vollständigkeit wegen muß hinzugefügt werden, daß das spezielle, durch die Gleichungen (24) vorgestellte Normalproblem bereits eingehender funktionentheoretisch diskutiert ist. Herr Fricke hat 1896 auf der Frank-

¹⁷⁾ Man denke unwillkürlich daran, die Betrachtungen des Textes nach dem Muster der Erörterungen, die ich auf Grund der Gordan'schen Arbeiten auf S. 426 ff. zu den Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen gegeben habe, zu vervollständigen. K.]

¹⁸⁾ Die Differentialreste einer algebraischen Gleichung sechsten Grades allgemeiner Art. (Math. Annalen, Bd. 56, S. 445—481.)

¹⁹⁾ [Die Aufstellung dieses Differentialgleichungssystems entspricht ganz dem, was Herr Boulangier für die G_{216} und G_{108} geleistet hat. Vgl. hierzu die Fußnote¹²⁾ auf S. 423. K.]



furter Naturforscherversammlung die der Valentiner-Wimangruppe entsprechende Zerlegung der zur Kurve $F=0$ gehörenden Riemannschen Fläche (vom Geschlecht 10) in Fundamentalbereiche behandelt und eine nahe Beziehung derselben zur Zerlegung der Halbebene in Kreisbogendreiecke von den Winkeln

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$$

bemerk²⁰⁾. Herr Lachtin hat dann 1898 im 51. Bande der Math. Annalen²¹⁾ diese Angaben bestätigt und die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung aufgestellt, welcher — im Falle der Gleichungen (24) — die mit einem geeigneten Faktor multiplizierten Größen x , in bezug auf den Parameter t genügen.

Ich bin am Ende meiner Darlegungen. Die Analogie der vorgeschlagenen Auflösung der Gleichungen sechsten Grades mit der Auflösung der Gleichungen fünften Grades durch die Ikosaedergleichung tritt, hoffe ich, überzeugend hervor. Eine feinere Durchführung der Einzelheiten, wie sie für die Gleichungen fünften Grades seinerzeit von Herrn Gordan und mir gegeben wurde und in geometrischer Form in meinen „Vorlesungen über das Ikosäeder“ zur Darstellung gelangte, muß vorbehalten werden.

Göttingen, den 22. März 1905.

[Gordan hat den vorstehend berührten Fragen nur noch eine einleitende Abhandlung widmen können. (Math. Annalen, Bd. 68, 1909/10: *Über eine Kleinische Bilinearform*.) Er erreicht dort eine wesentliche Vereinfachung der zur Bildung geeigneter x_1, x_2, x_3 erforderlichen akzessorischen Irrationalität. Statt der Kurve dritter Ordnung der x -Ebene, welche ich dem Wertsystem z_1, \dots, z_6 rational zuordnete, benutzt er nämlich einen Konnex (1,1), also eine in den x und den kontragredienten u bilineare Form (deren Koeffizienten wieder so als rationale ganze Funktionen der z angesetzt werden müssen, daß die Form bei den 360 Vertauschungen der z und den entsprechenden linearen Substitutionen der x und u unverändert bleibt). Um dann einen zu den Vertauschungen der z „kovarianten“ Punkt x zu finden, hat man nur mehr eine Wurzel einer leicht aufzustellenden kubischen Gleichung zu bestimmen, nämlich einen Fixpunkt des Konnexes aufzusuchen.

²⁰⁾ Vgl. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 5: *Über eine einfache Gruppe von 360 Operationen*. [Herr Fricke hat in der Folge seine einschlägigen Untersuchungen noch wesentlich fortgesetzt und insbesondere die hauptsächlichsten Resolventen, welche das Problem der G_{360} für $F=0$ besitzt, vom funktionentheoretischen Standpunkte aus einheitlich abgeleitet. Vgl. die zusammenfassende Darstellung von 1912 im Anhang zu Bd. II der von Fricke und mir herausgegebenen Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen (S. 554—662; ein Beitrag zur Transformationstheorie der automorphen Funktionen). K.]

²¹⁾ *Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung sechsten Grades mit einer Gruppe 360. Ordnung*. (Math. Annalen, Bd. 51, 1898/99, S. 463—472.)

Insbesondere gelingt es Gordan, eine Bilinearform der gewollten Art aufzustellen, deren Grad in den z sechs beträgt. Indessen hat Herr Coble bald darauf durch systematischen Formenbildungsprozeß gezeigt (Math. Annalen, Bd. 70, 1910/11), daß man nur bis zum vierten Grade zu gehen braucht. Er stellt auch die zugehörige kubische Gleichung wirklich auf und skizziert den weiteren Gang der dann noch zur Bestimmung der z erforderlichen algebraischen Rechnung. K.]

Ich gebe zum Schluß hier noch die auf S. 491 Fußnote ¹⁰⁾ in Aussicht gestellten, auf den Kroneckerschen Satz bezüglichen Ausführungen.

Vorab der Vollständigkeit halber einige kurze Andeutungen über meinen ursprünglichen Beweis vom Januar 1877. Ich hatte damals mit dem Umstande operiert, daß alle Ikosederformen, und auch die Tetraederform, *geraden* Grad besitzen. Dieser Umstand ist natürlich seinerseits eine Folge der von mir in Abh. LIV in den Vordergrund gerückten Verdoppelung der Anzahl der *homogenen* Substitutionen, welche sonach auch damals bereits der eigentliche Beweisgrund war.

Im Übrigen habe ich noch genauer auf die Bezugnahme zwischen Kronecker und mir von Ostern 1881 einzugehen. Kronecker hat mir damals ein aus dem Jahre 1861 stammendes Manuskript vorgelegt, von dem ich den für mich in Betracht kommenden Teil abschreiben konnte (die Abschrift trägt das Datum des 23. März). Kronecker setzt dort zum Beweis seines Theorems genau so ein, wie ich es später getan habe, indem er den Lürothschen Satz betr. rationale Kurven (den dieser in den Math. Annalen, Bd. 9 [1875] voröffentlicht hat) antizipiert und von da zu der Aufgabe kommt, aus fünf frei veränderlichen Größen x_0, \dots, x_4 eine rationale Funktion $\frac{\varphi}{\psi}$ zu bilden, welche sich bei den 60 geraden Vertauschungen der x linear transformiert. Dann aber begegnet ihm ein merkwürdiger Lapsus. Da sich Kronecker mit dem allgemeinen Begriff einer Gruppe linearer Substitution (einer Veränderlichen) damals noch nicht vertraut gemacht hatte, schließt er irrthümlicherweise, die in Betracht kommenden 60 linearen Transformationen müßten aus der Wiederholung derselben linearen Substitution entstehen, $\frac{\varphi}{\psi}$ also von einer zyklischen Gleichung 60. Grades abhängen, was (nach Galoisschen Grundsätzen) selbstverständlich unmöglich ist. Bei dieser Überlegung hatte sich Kronecker damals beruhigt.

In der Vorlesung von 1885—86 ist dieser Fehler natürlich richtiggestellt. Ganz wie bei mir wird geschlossen, daß sich bei den geraden Vertauschungen der an sich durchaus willkürlichen x_0, \dots, x_4 die Polynome φ und ψ binär linear substituieren müßten, ferner, daß ein solches binäres Verhalten bereits unmöglich ist, wenn man eines der x festhält und nur die andern x in gerader Weise vertauscht. Bei dem Beweise dieser Unmöglichkeit finde ich noch eine unnötige Komplikation. Ich zeigte oben, S. 485, daß schon bei der Vierergruppe (welche die vier x paarweise vertauscht) die in Betracht kommende Unmöglichkeit hervortritt. Statt dessen kombiniert Kronecker, um zu einem Widerspruch zu gelangen, eine Operation der Vierergruppe mit der zyklischen Vertauschung dreier x . Das ist weniger durchsichtig.

Abgesehen von diesem Nebenpunkte ist sachlich volle Übereinstimmung vorhanden. Es bleibt nur eine subjektive Differenz, die ich schon auf S. 158, 159 des Ikosäederbuches ausführlich zur Sprache brachte, die ich aber wegen ihrer Wichtigkeit auch hier nicht unberührt lassen will. Kronecker hat das Verdienst, eben bei seinen Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, zwischen den natürlichen Irrationalitäten (welche rationale Funktionen der x_0, \dots, x_4 sind) und den anderen, die ich akzessorische nenne, zum ersten Male klar unterschieden zu haben. In seiner ersten Mitteilung von 1858²²⁾ macht er übrigens selbst noch un-

²²⁾ Comptes Rendus 1858, I (Bd. 46) (Brief an Hermite).



bedenklich von einer akzessorischen Quadratwurzel Gebrauch. Erst in der späteren Arbeit von 1861²³⁾ glaubt er, den Gebrauch akzessorischer Irrationalitäten in der Gleichungstheorie überhaupt untersagen zu sollen. In seiner Vorlesung 1885—86 hält er an diesem Verdikt fest: die Verwendung der akzessorischen Irrationalitäten sei „algebraisch wertlos“, weil sie die „Gattungen auseinanderreiße“. Um dieser Forderung Nachdruck zu geben, nennt er sie das „Abelsche Postulat“. — Dem gegenüber bin ich in meinen hier vorstehend abgedruckten Arbeiten, wie im Icosaederbuch, gleich anderen Autoren der Natur und der Leistungsfähigkeit der gegebenenfalls auftretenden akzessorischen Irrationalitäten nach Möglichkeit nachgegangen.

Es liegt hier ein prinzipieller Unterschied in der Denkweise vor. Ich will nicht noch erst besonders urgieren, daß Abel bei seinen Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen durch Wurzelzeichen fortgesetzt die Einheitswurzeln ε verwendet, die im Zusammenhang seiner Betrachtungen doch auch akzessorische Irrationalitäten sind (vgl. oben S. 486 Fußnote *)), was übrigens Kronecker weiterhin selbst ebenfalls tut, weil er sonst überhaupt nicht vom Zusammenhang der Gleichung fünften Grades mit den Jacobischen Gleichungen sechsten Grades würde handeln können. Ich will auch nicht ausführen, daß es allgemein in der Zahlentheorie wie in der Funktionentheorie in vielen Fällen vorteilhaft ist, Verhältnisse in algebraischen Körpern durch einfache Beziehungen in übergeordneten algebraischen, ja transzendenten Körpern zu erläutern. Sondern ich will nur das Grundsätzliche betonen. Soll man, wo sich neue Erscheinungen (also hier die Leistungsfähigkeit der akzessorischen Irrationalitäten) darbieten, zugunsten einer einmal gefaßten systematischen Ideenbildung die Weiterentwicklung abschneiden, oder vielmehr das systematische Denken als zu eng zurückschieben und den neuen Problemen unbefangen nachgehen? Soll man Dogmatiker sein oder wie ein Naturforscher bemüht sein, aus den Dingen selbst immer neu zu lernen?

Aus den Originalnotizen Kroneckers, die mir Herr Hensel übersandte, ist nichts besonderes zu entnehmen. Es handelt sich in der Hauptsache um 23 einseitig beschriebene Folioblätter, von denen sich 1—10 auf die Arbeit von 1858 und 11—23 auf die von 1861 beziehen. Bemerkenswert ist, daß die Stellen, die ich mir 1881 abschrieb, darin fehlen. Dafür finden sich auf den Rückseiten der Blätter 17, 18 Rechnungen mit fünften Einheitswurzeln, vermöge deren sich Kronecker offenbar überzeugt hat, daß die G_{60} der gebrochenen Ikosandersubstitutionen wirklich existiert.

Die Kritik, die ich hiernach an dem übersandten Material übe, soll der hohen Stellung, welche ich den Kroneckerschen Untersuchungen über die Gleichungen fünften Grades in den vorstehend wiedergegebenen Abhandlungen wie insbesondere in der historischen Darstellung des Icosaederbuches (vgl. S. 141—161 daselbst) zuweise, in keiner Weise etwas abbrehen. Kronecker hat zuerst den Pfad gefunden, der in die prinzipiellen Fragen der Theorie hineinführt, nur ist er ihn anfangs nicht zu Ende gegangen und hat später, wenigstens formal, abgelehnt, andere auf dem weiteren Wege zu begleiten. K.]

²³⁾ Berliner Monatsberichte 1861, abgedruckt in Crelles Journal, Bd. 59.

Zur mathematischen Physik.

A. Lineare Differentialgleichungen.

(Abhandlung LXII bis LXIX.)

B. Allgemeine Mechanik.

(Abhandlung LXX bis LXXX.)



Zur Entstehung meiner Beiträge zur mathematischen Physik.

An verschiedenen Stellen dieser Ausgabe (z. B. in Bd. 1, S. 50, in Bd. 2, S. 259) habe ich mein ursprüngliches Interesse für Physik erwähnt. Ich wollte die verschiedenen Gebiete der Mathematik nur assimilieren, um mich dann, so ausgerüstet, der physikalischen Forschung zuzuwenden. Die Umstände haben es aber mit sich gebracht, daß ich mich diesem Ziele nur sehr wenig nähern konnte. Die kleinen Aufsätze, welche hier als dritter Abschnitt des 2. Bandes folgen, mögen das Wichtigste wiedergeben, was ich auf physikalischem Gebiete veröffentlicht habe (abgesehen von den bereits in Bd. 1 dieser Ausgabe abgedruckten Abhandlungen XXIX bis XXXIII zur Relativitätstheorie). Es handelt sich im vorliegenden Bande einerseits um Arbeiten über lineare Differentialgleichungen der Physik, speziell Lamé'sche Funktionen, hypergeometrische Funktionen und Oszillationsfragen (Abh. LXII bis LXIX), andererseits um kleinere Beiträge zur Mechanik (Abh. LXX bis LXXX). Bei der ersten Gruppe dieser Arbeiten leitet die Entwicklung fast unwillkürlich auf funktionentheoretische Fragen über, die im Zusammenhang erst in Bd. 3 behandelt werden sollen, wodurch die Abgrenzung der beiden Bände einigermaßen unscharf wird. Immerhin kommen bei den hier abgedruckten Arbeiten wesentlich Realitätsfragen zur Sprache. Bei der zweiten Gruppe war es nirgends mein Bestreben, neue physikalische Theorien aufzustellen, sondern nur, überkommene mathematische Ansätze (die durchaus der Phänomenologie angehören) zu klären, bzw. ihr Ergebnis der Anschauung zugänglich zu machen.

Die erste förderliche Anregung für meine diesbezüglichen Arbeiten empfing ich bei meiner Übersiedelung nach Leipzig 1880 durch den Verkehr mit Carl Neumann. Von hier aus sind die beiden Aufsätze über Lamé'sche Funktionen entstanden, die ich 1881 in den Math. Annalen Bd. 18 veröffentlichte (Abh. LXII und LXIII). Auch meine Schrift über „Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale“, die ich 1882 folgen ließ, die jedoch erst in Bd. 3 dieser Ausgabe als Abh. XCIX zum Abdruck kommen wird, läßt die physikalische Beeinflussung nicht verkennen; sie nimmt ihren Ausgangspunkt geradezu vom physikalischen Denken. Aber erst in meinen ersten Göttinger Jahren (von Ostern 1886 an) bin ich dazu gekommen, zusammenhängende Vorlesungen über Mechanik und mathematische Physik aufzunehmen. (Vgl. die Bemerkungen auf S. 259 des vorliegenden Bandes.) Wiederholte Besuche in Frankreich und insbesondere in England haben mich in meinen Bestrebungen wesentlich gefördert und meinen Blick erweitert. Auf dem Gebiete der Differentialgleichungen mögen neben meinen weiteren Aufsätzen über Lamé'sche Funktionen, hypergeometrische Funktionen und Oszillationsfragen (Abh. LXIV bis LXIX) hier gleich folgende zwei Bücher genannt werden: Poekels, Über die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik“ (Leipzig 1891) und Böcher, Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie“ (Leipzig 1894), welche beide aus von mir gehaltenen Vorlesungen entstanden sind, wie die Verfasser im einzelnen belegen, und von denen ich das erste außerdem mit eigenen



Bemerkungen versehen habe. Meinem Bekanntwerden mit der englischen Mechanik, besonders mit den Ideen Hamiltons und Maxwells verdanken die Nr. LXX bis LXXII und LXXVII bis LXXVIII ihre Entstehung. Im Zusammenhang hiermit sei erwähnt, daß die deutschen Ausgaben folgender englischer Lehrbücher von mir veranlaßt wurden: Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper (Leipzig 1893), Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (Leipzig 1907), Love, Lehrbuch der Elastizität (Leipzig 1907).

Im übrigen machte ich schon an einer anderen Stelle dieser Ausgabe die Bemerkung, daß sich mein ganzes Arbeitsprogramm von 1892 an fortschreitend geändert hat, da ich infolge Schwarz' Wegberufung nach Berlin die Verpflichtung empfand, den mathematischen Unterrichtsbetrieb an der Universität Göttingen *allseitig* auszugestalten. Indem H. Weber und bald darauf an seiner Stelle Hilbert mir zur Seite traten, welche an ihrem Teile eine weitgehende *rein* mathematische Lehrtätigkeit entwickelten, wandte ich mich wesentlich der organisatorischen Seite der Universitätsaufgabe zu. Den Wendepunkt bildet sozusagen die unter Nr. LXXIII abgedruckte Begrüßungsrede, die ich bei der Eröffnung der mit der Chicagoer Weltausstellung von 1893 verknüpften wissenschaftlichen Kongresse hielt. [Über meine an diesen Kongreß anschließenden Vorlesungen in Evanston (Illinois) machte ich schon auf S. 5 dieses Bandes einige Bemerkungen¹⁾.] Die amerikanische Reise gab mir dann weitere Impulse, für deren Durchführung ich die weitgehende und entscheidende Unterstützung von Althoff erhielt, der damals im Ministerium noch Referent für die Universitäten war, aber bereits einen weit über diese Stellung hinausgehenden Einfluß auf den gesamten Unterrichtsbetrieb entwickelte. Ich muß geradezu sagen, daß die außerordentlich anregende Kraft, welche Althoff allen Disziplinen des Wissenschaftsbetriebes und später des Unterrichtes überhaupt hat zuteil werden lassen, auch mich in ihren Bann geschlagen und für lange Jahre meine Tätigkeit bestimmt hat. Die eine der beiden Hauptaufgaben, denen ich mich zuwandte, bezog sich darauf, an der Universität und zunächst in Göttingen durch Gründung und Belebung neuer Institute, die wichtigsten Zweige der Angewandten Mathematik und Physik, die seit dem Tode von Gauß mehr und mehr verkümmert waren, wieder zur Geltung zu bringen. Die andere Aufgabe bestand darin, dem Unterricht an den Schulen eine dem längst erreichten Fortschritt der Wissenschaften entsprechende Prägung zu geben. Diese beiden Aufgaben haben mich in den folgenden zwei Jahrzehnten um so mehr beschäftigt, als es nicht nur darauf ankam, äußere Einrichtungen zu schaffen, sondern auch deren Betrieb gegen allerlei Widerstände wirklich zu beleben.

Dabei konnte nicht davon die Rede sein, daß ich auf Vernachlässigung der Reinen Mathematik hinarbeitete. blieb ich doch z. B. all die Jahre hindurch in der Redaktion der Mathematischen Annalen, in die ich seit Clebschs Tode (1872) eingetreten war. Ihren klarsten Ausdruck findet meine Tendenz in dem Unternehmen der mathematischen Enzyklopädie, an dem ich von seinen Anfängen an (Herbst 1894) wesentlich mitgearbeitet habe. Es sollte über den Stand der ganzen Mathematik, einschließlich ihrer Anwendungen, Bericht erstattet werden. Da gerade die „Anwendungen“ besondere Schwierigkeiten machten (weil zwischen ihren Vertretern und denen der Reinen Mathematik Entfremdung eingetreten war), spannte ich mich für diese besonders ein. Ich unternahm behufs Anknüpfung persönlicher Beziehungen (um für die einzelnen Artikel geeignete Bearbeiter zu finden) vielfache Reisen und habe insbesondere von 1899 ab die Redaktion des Bandes Mechanik selbst geleitet, wobei mir bald Conrad Müller, der zunächst Assistent bei mir war, als wichtigster Mitarbeiter zur Seite trat. Das Werk ist ja noch nicht abgeschlossen; aber soviel darf wohl schon jetzt ausgesprochen werden, daß es gelungen ist, eine große Zahl geeigneter Mitarbeiter der verschiedensten Richtungen für ein gemeinsames Ziel dauernd in Anspruch zu nehmen.

¹⁾ Eine dieser Vorlesungen ist als Nr. XLVI im vorliegenden Bande abgedruckt.

Ich habe aber auch sonst immer mehr den Weg eingeschlagen, nicht selbst die Arbeiten auszuführen, sondern durch Gewinnung anderer Persönlichkeiten die wertvoll erscheinenden Ziele beratend und beschlußfassend zu fördern. Durch die Unterstützung von Althoff gelang mir insbesondere 1898 das Zustandekommen einer „Göttinger Vereinigung zur Förderung der Angewandten Mathematik und Physik“ aus maßgebenden Vertretern der deutschen Großindustrie, welche die naturgemäß knappen Beiträge des Staates zum Bau und zur Einrichtung neuer Universitätsinstitute durch freie Spenden wesentlich unterstützten. Es ist in der Folge durch diese Vereinigung für die Göttinger Universitätseinrichtungen viel Wertvolles geschaffen worden. Um diese Neugründungen zu beleben, habe ich namentlich auch vielfach an den Seminaren teilgenommen, welche meine neuberufenen Kollegen über Angewandte Mathematik, einschließlich Geodäsie, Astronomie und Versicherungswesen, sowie über technische Mechanik und technische Elektrizitätslehre veranstalteten. Von dem ganzen auf diese Dinge bezüglichen Betrieb kann in der gegenwärtigen Ausgabe, in der es sich nur um den Wiederabdruck selbständig wissenschaftlicher Arbeiten im engeren Sinne handelt, nur wenig die Rede sein. Es mußte aber überhaupt davon gesprochen werden, weil sonst die Entstehung der kleineren Beiträge Nr. LXXIV bis LXXX unverständlich ist. Die Einzelheiten der Entwicklung schildern zwei Festschriften, welche die Göttinger Vereinigung 1908 und 1918 gelegentlich ihres 10jährigen und 20jährigen Bestehens ausgab, sowie eine weitere Festschrift „Die physikalischen Institute der Universität Göttingen“ (1906). Diese sind zwar überhaupt nicht im Buchhandel erschienen; jedoch sind Exemplare derselben zusammen mit den umfangreichen Protokollen, welche über die jeweiligen Versammlungen der Vereinigung berichten, auf der Göttinger Universitätsbibliothek zur Einsichtnahme hinterlegt. Für die Fernerstehenden geben das beste Bild über die ganzen hiernach in Betracht kommenden Bestrebungen zur Förderung der Angewandten Mathematik und Physik die beiden Bände, die ich mit meinem verstorbenen Freunde E. Riecke zusammen veröffentlichte: „Über Angewandte Mathematik und Physik und ihre Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen“ (Leipzig 1900) und „Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts“ (Leipzig 1902).

Beide Schriften sind bei Gelegenheit von Ferienkursen für die Fortbildung der Oberlehrer entstanden. Diese Ferienkurse waren damals Neueinrichtungen, und speziell habe ich es durchgesetzt, daß auch die Mathematik an ihnen beteiligt wurde. Hiermit komme ich zu meinen Bestrebungen, dem Schulunterricht eine neuzeitliche Prägung zu geben. Für den Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, der Ostern 1895 in Göttingen zum ersten Male tagte, ließ ich das Buch „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie“ (Leipzig 1895) erscheinen, das Herr Tägerl nach einer Vorlesung von mir ausgearbeitet hat. Als Festgabe für den gleichen Verein sollte 1896 ein Schriftchen über den Kreisels folgen. Aus meinen diesbezüglichen Vorlesungen ist aber unter den Händen meines damaligen Assistenten Sommerfeld ein umfangreiches Buch geworden: „Über die Theorie des Kreisels“ (erschienen in vier Heften, Leipzig 1897 bis 1910). In den Ideenkreis der Kreiselslehre gehören die unten abgedruckten Nr. LXXIV bis LXXVI, von denen die beiden letzten gelegentlich einer zweiten Reise nach Amerika 1896 zum Jubiläum der Universität in Princeton entstanden sind. Ich möchte ferner meine von Schimmack herausgegebenen Vorlesungen: „Vorträge über den mathematischen Unterricht“ (Leipzig 1906), sowie die von Hellinger ausgearbeitete Vorlesung: „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ (Autographie in zwei Teilen, Leipzig 1908/09) erwähnen, von denen die erste die Art des Mathematikunterrichts an den verschiedenen Schulstufen vergleicht und insbesondere auch über die Entwicklung der Göttinger Universitätseinrichtungen Bericht erstattet, während die zweite solche wissenschaftliche Probleme behandelt, die der Lehrer an den höheren Schulen unbedingt kennen sollte, um seinem Unterricht die richtige Orientierung zu geben. Diese Vorlesungen sind ganz im Sinne der von der Versammlung deutscher Naturforscher



und Ärzte auf Grund langer Kommissionsverhandlungen 1905 ausgegebenen Meraner Lehrpläne, bei deren Aufstellung ich wesentlich mitwirkte, gehalten. Schon vorher hatte ich an den verschiedensten Schulkonferenzen teilgenommen, und von 1905 an habe ich 10 Jahre lang die in Betracht kommenden Interessen im preußischen Herrenhaus als Vertreter der Universität verfochten. Ich habe mich damals insbesondere auch für die zweckmäßige Ausgestaltung der Fachschulen und schließlich der Volksschulen interessiert. Gleichzeitig (1908) trat ich an die Spitze der vom Internationalen Mathematiker-Kongreß in Rom eingesetzten Internationalen Mathematischen Unterrichts-Kommission (IMUK), welche über die Didaktik und Organisation des mathematischen Unterrichts sämtlicher zivilisierter Länder berichtete. Hierbei ist Deutschland mit 5 Bänden (= 9 Teilbänden): „Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die IMUK“ (Leipzig 1909 bis 1916) und mit einem Band: „Berichte und Mitteilungen, veranlaßt durch die IMUK“ (Leipzig 1909 bis 1917) vertreten. Der Weltkrieg hat diesem Zusammenarbeiten selbstverständlich ein Ende gemacht. Immerhin ist umfangreiches Material verarbeitet worden; über das Geleistete gibt ein Schlußbericht des Generalsekretärs Fehr (veröffentlicht im L'Enseignement Mathématique, Bd. 21, 1920/21) zusammenfassende Auskunft. Hoffentlich ist die große Arbeit trotz der Verschiebung aller Verhältnisse nicht verloren, sondern wird in einer glücklicheren Periode wieder zur Geltung kommen.

Ich habe oben erzählt, wie ich bestrebt war, den universellen Geist von Gauß in Anpassung an die neuzeitlichen Verhältnisse wieder im Mathematikunterricht der Universität Geltung zu verschaffen. Im Zusammenhang damit möchte ich noch erwähnen, daß ich 1897 nach dem Tode Scherings die Leitung der Herausgabe von Gauß' Werken übernahm. Meine wichtigsten Mitarbeiter, in deren Händen die eigentliche Redaktion dieses Unternehmens lag, waren Brendel und später neben ihm Schlesinger. Für die einzelnen Hauptkapitel wurden geeignete Bearbeiter herangezogen. Über diese Tätigkeit habe ich bisher 14 Berichte in den Göttinger Nachrichten (wieder abgedruckt in den Mathematischen Annalen) veröffentlicht. Es sind einige neue Bände mit wertvollem Material erschienen, die unsere Kenntnis von Gauß' Arbeiten wesentlich vervollständigen, und der Abschluß der Ausgabe ist in Sicht.

Es ist manchem Mathematiker so gegangen, daß auf seine wissenschaftlich produktive Periode eine mehr praktisch aktive folgte. Das Ideal, nach beiden Seiten gleichzeitig tätig zu sein, läßt sich in unserer unruhigen Zeit wohl kaum mehr verwirklichen. Rückblickend bin ich nun zu meinen rein mathematischen Arbeiten zurückgekehrt. Um so lieber gebe ich hier an, wie ich mich insbesondere über den Betrieb der Anwendungen bei Gelegenheit geäußert habe.

Auf dem dritten Internationalen Mathematiker-Kongreß zu Heidelberg (1904) machte ich bei der Eröffnung der Abteilung für Angewandte Mathematik folgende Ausführungen²⁾: „... Vergleicht man die Gesamtwissenschaft der Mathematik mit einer Festung, so repräsentieren die verschiedenen Teile der Angewandten Mathematik die Außenforts, welche die Innenwerke nach allen Richtungen umgeben, und über welche die Verbindung mit dem Vorgelände hinüberführt. Gemeinsam allen Teilen der Angewandten Mathematik ist dementsprechend nur dies, daß der mathematische Gedanke bei ihnen in notwendige und untrennbare Verbindung zu einem Gebiete anderweiter wissenschaftlicher Fragestellungen tritt. Die Angewandte Mathematik steht dadurch in ausgesprochenem Gegensatz zu demjenigen Zweige unserer Wissenschaft, den man als Zitadelle der Festung ansehen mag, zur formalen Mathematik (im Leibnizschen Sinne), d. h. zu derjenigen Behandlung mathematischer Fragen, welche nach Möglichkeit von jeder konkreten Bedeutung der vorkommenden Größen oder Symbole absieht und nur nach den äußerlichen Gesetzen fragt, nach denen dieselben kombiniert werden sollen.“

²⁾ Vgl. die Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, herausgegeben von Krazer, Leipzig 1905, S. 396 bis 397.

„Zum Gedeihen der Wissenschaft ist ohne Zweifel die freie Entwicklung aller ihrer Teile erforderlich. Die Angewandte Mathematik übernimmt dabei die doppelte Aufgabe, den zentralen Teilen immer wieder von außen neue Anregungen zuzuführen und umgekehrt die Erträge der zentralen Forschung nach außen zur Wirkung zu bringen. Die Geltung der Mathematik innerhalb des weiten Bereiches sonstiger wesentlicher Interessen erscheint daher in erster Linie an die erfolgreiche Betätigung der Vertreter der Angewandten Mathematik gebunden. Daher sollen wir insbesondere an derjenigen Stelle einsetzen, wo die ausgiebigste Gelegenheit zu einer Einwirkung der Mathematik auf weitere Kreise gegeben ist: beim *Jugendunterricht*...“

In der Vorrede zum vierten Bande der mathematischen Enzyklopädie (Mechanik, erschienen 1908) sagte ich: „... Mechanik, überhaupt Angewandte Mathematik, kann nur durch *intensive Beschäftigung mit den Dingen selbst* gelernt werden; die Literatur gibt nur eine Beihilfe. Anleitung zum Beobachten mechanischer Vorgänge von früher Jugend an, und auf höherer Stufe Verbindung des mathematischen Nachdenkens mit der Arbeit im Laboratorium, das ist, was behufs gesunder Weiterbildung der Mechanik daneben und vor allen Dingen in die Wege geleitet werden muß. Die moderne Entwicklung hat ja auch in dieser Hinsicht in vielversprechender Weise eingesetzt. Möge die Wissenschaft der Mechanik, die eine Grunddisziplin aller Naturwissenschaft ist, solcherweise einer neuen Blüte entgegengeführt werden. Möge insbesondere auch das Wort Leonardo da Vinci sich wieder bewahrheiten, daß die Mechanik das Paradies der Mathematiker ist!...“

Die Gründung der neuen „Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik“ begrüßte ich mit folgenden Worten³⁾: „... Wenn man die Darstellungen auch hervorragender Autoren vergleicht, findet man als Aufgabe der mathematischen Naturwissenschaft meistens nur angegeben, bei gegebenen Prämissen den weiteren Verlauf der Erscheinungen den Naturgesetzen entsprechend zu bestimmen, sagen wir die Bahn eines Geschosses, welches mit bestimmter Geschwindigkeit in bestimmter Richtung geschleudert wird, oder auch den Verlauf eines Lichtstrahles, der ein gegebenes optisches Instrument durchsetzt. Aber es gibt eine darüber hinausgehende Problemstellung, die gleicherweise der mathematischen Überlegung unterliegt: das Geschöß soll so geschleudert werden, daß es ein bestimmtes Ziel erreicht, das Instrument so konstruiert werden, daß die mit seiner Hilfe zustande kommende Abbildung eine möglichst vollkommene ist. Also neben die kausale Erklärung bei gegebenen Daten tritt die Forderung geeigneter Festlegung der Anfangsbedingungen nach dem Gesichtspunkte größter Zweckmäßigkeit. Es scheint mir, daß hiermit eine besondere Aufgabe aller Angewandten Mathematik bezeichnet ist, eine Aufgabe zudem, die der Denkweise und der Berufstätigkeit des schlafenden Ingenieurs besonders naheliegt. Um in der Sprache unserer Pädagogen zu reden: es ist recht eigentlich *funktionales Denken*, welches hier verlangt wird: der volle Überblick über den Zusammenhang der Ergebnisse mit den jeweiligen Daten der Aufgabe... *Das Ziel der theoretischen Naturwissenschaft, soll nicht nur passives Verstehen, sondern eine aktive Beherrschung der Natur sein*...“

³⁾ Vgl. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. 65 (1921), S. 332. — Näheres über meine Beziehungen zu den Ingenieuren, die für mich alle die Zeit besonders wichtig gewesen ist, siehe unten in den Bemerkungen am Schluß der Abh. LXXVI u. LXXX.



LXII. Über Lamésche Funktionen.

[Math. Annalen, Bd. 18 (1881).]

Im folgenden beabsichtige ich, eine Eigenschaft der Laméschen Funktionen zu beweisen, die bei geometrischer Betrachtungsweise außerordentlich nahe liegt, aber doch nicht bemerkt zu sein scheint. Mein Theorem bezieht sich unterschiedslos auf die Laméschen Funktionen aller Ordnungen¹⁾, mag aber zunächst hier nur für die Laméschen Funktionen zweiter Ordnung (die gewöhnlichen Laméschen Funktionen) ausgesprochen werden. Diese Funktionen sind, von den eventuell vorkommenden, dann aber nur einfach zutretenden Faktoren $\sqrt{\lambda^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$ abgesehen, ganze Funktionen von λ^2 , von denen jedesmal $(\tau + 1)$ Funktionen des Grades τ zusammengehören (vgl. § 2 des Nachfolgenden). Man weiß, daß diese Funktionen alle verschieden und dabei reell sind, man weiß ferner, daß sie, gleich Null gesetzt, je τ getrennte reelle Wurzeln ergeben, die alle in dem Intervalle von 0 bis c^2 enthalten sind, — und zwar in der Weise, daß keine Wurzel mit 0 oder mit c^2 oder auch mit dem zwischen 0 und c^2 eingeschalteten Werte b^2 zusammenfällt. Mein Theorem bezieht sich auf die Art und Weise, wie die so entstehenden $(\tau + 1)$ Serien von je τ Größen auf die Teilintervalle von 0 bis b^2 und von b^2 bis c^2 verteilt sind. Rein kombinatorisch genommen, hat man für die Verteilung von τ Größen auf zwei Intervalle $(\tau + 1)$ Möglichkeiten: man wird in das eine Intervall τ_1 Größen legen, in das andere $\tau - \tau_1$, und nun τ_1 von 0 bis τ laufen lassen. Mein Satz ist: *daß jede dieser Möglichkeiten bei einer, und natürlich nur bei einer, unserer $(\tau + 1)$ Laméschen Funktionen eintrifft, daß also die Funktionen und die verschiedenen Verteilungsweisen der Wurzeln einander eindeutig entsprechen.* — Der Beweis ist, wie ich schon andeutete, so einfach wie möglich. Es

¹⁾ Siche hier und im folgenden: Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Berlin bei Reimer, zweite Auflage, 1878 (später als H. K. zitiert). Bezeichnungen oder Sätze, die ich ohne nähere Erläuterung anwende, sind diesem Werke entnommen.

kommt nur darauf an, sich auf der Kugel die geometrische Bedeutung der Laméschen Produkte $E(\mu^2) \cdot E(\nu^2)$ klarzumachen und dann die auf der Kugel gewöhnlich benutzten Polarkoordinaten als einen Grenzfall der bei dieser Interpretation verwandten elliptischen Koordinaten zu betrachten.

§ 1.

Elliptische Koordinaten auf der Kugel.

Im genauen Anschlusse an die Bezeichnungweise des Heineschen Buches seien die elliptischen Koordinaten μ^2 , ν^2 eines Punktes der Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

als die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$(1) \quad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 0$$

erklärt. Es soll b^2 , wie schon erwähnt, kleiner als c^2 sein. Dann liegt die eine Wurzel, die ich μ^2 nennen will, zwischen b^2 und c^2 , die zweite, die mit ν^2 bezeichnet sein soll, zwischen 0 und b^2 . Wenn im folgenden gesagt wird, daß $\lambda^2 = \mu^2$ oder $= \nu^2$ sei, so wird damit angedeutet, daß die an sich unbeschränkt veränderliche Größe λ^2 in eins der genannten Intervalle eingeschlossen sei.

Die Gleichung (1) stellt geometrisch eine Schar von Kegeln zweiter Ordnung mit gemeinsamen Fokallinien dar, wobei man zur Bestimmung der letzteren die beiden Gleichungen

$$(2) \quad y = 0, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 0$$

erhält. Diese Fokallinien werden natürlich von sämtlichen Kegeln — sofern die letzteren reell sind — eingeschlossen. Aber übrigens haben die Kegel $\lambda^2 = \mu^2$ und $\lambda^2 = \nu^2$ verschiedene Lage. Die ersteren, die ich *Kegel der ersten Art* nennen will, umschließen die Z -Achse; die *Kegel der zweiten Art* sind um die X -Achse herumgelegt. Dabei beachte man, daß beide Kegelsysteme als Grenzfälle zwei (doppeltzählende) Koordinatenebenen enthalten; die Kegel erster Art für $\lambda^2 = c^2$ die XY -, für $\lambda^2 = b^2$ die XZ -Ebene, die Kegel zweiter Art für $\lambda^2 = b^2$ ebenfalls die XZ -, für $\lambda^2 = 0$ die YZ -Ebene. Ich werde diese Ebenen die *Hauptebenen*, die Kreise, in denen sie die Kugel durchdringen, die *Hauptkreise* nennen. Von den Hauptkreisen abgesehen, besteht jede Kurve $\lambda^2 = \mu^2$ oder $\lambda^2 = \nu^2$ auf der Kugel aus *zwei* Ovalen, deren Lage in dem einen oder anderen Falle leicht vorzustellen ist.

Es gilt nun vor allem, den Grenzübergang deutlich aufzufassen, der eintritt, wenn $b^2 = c^2$ wird. Zuvörderst sieht man, daß dann die beiden



Fokallinien (2) in die X-Achse zusammenfallen. In ihr schneiden sich übrigens nach wie vor die beiden Hauptkreise $y=0$, $z=0$, die ich nun als *Hauptmeridiane* bezeichnen will. Auch der dritte Hauptkreis, $x=0$, der jetzt der *Äquator* heißen soll, ist völlig unverändert geblieben. Dagegen haben sich die übrigen Kurven der ersten oder zweiten Art wesentlich umgestaltet: *Die einzelne Kurve erster Art ist in zwei gegen XZ (oder XY) unter gleichem Winkel geneigte Meridiane zerfallen; die Kurve zweiter Art in zwei Parallelkreise, welche vom Äquator beiderseitig gleich weit abstehen.* Zum Beweise appelliere ich an die geometrische Anschauung. Will man es auf analytischem Wege einsehen, so setze man in (1) zunächst einmal b^2 schlechthin gleich c^2 ; die dann entstehende Gleichung:

$$(3) \quad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2+z^2}{\lambda^2-b^2} = 0$$

definiert für $\lambda^2 = r^2$ auf der Kugel die gewollten Parallelkreise. Ein andermal setze man zuvörderst:

$$c^2 = b^2 + \varepsilon^2, \quad \lambda^2 = \mu^2 = b^2 + \varepsilon'^2,$$

— wo ε größer als ε' sein soll —, und lasse nun ε , ε' unabhängig voneinander unendlich klein werden. So reduziert sich (1) nach Wegwerfung verschwindender Größen auf folgende Gleichung:

$$(4) \quad y^2 = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon'^2} \cdot z^2,$$

und diese repräsentiert in der Tat zwei gegen XZ gleich stark geneigte Meridiane.

§ 2.

Definition der Laméschen Funktionen.

Die Kugelfunktion mit zwei Variablen werde für das Folgende in bekannter Weise definiert als *homogene Funktion* f von x , y , z , die der Gleichung

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

genügt²⁾. Der Grad der Kugelfunktion ist dann der Grad von f in x , y , z .

Es wird nun Kugelfunktionen n -ten Grades geben können, die, abgesehen von etwa vortretenden Faktoren x , oder y , oder z (die aber nur

²⁾ Ich möchte hier insbesondere auf die Darstellung verweisen, welche Maxwell in seinem Treatise on electricity and magnetism (Cambridge 1873) gegeben hat. — Vielleicht hat die Bemerkung Interesse, die sich auf Grund der dort entwickelten Definition unmittelbar ergibt: daß die 15 Symmetrieebenen des Ikosaeders die Nullstellen einer Kugelfunktion repräsentieren.

in einfacher Multiplizität vorhanden sein sollen) in lauter Faktoren von der in (1) vorkommenden Gestalt zerfallen:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2}.$$

Gleich Null gesetzt, repräsentiert ein solches f ein Aggregat von Kegeln (1), dem eventuell noch einige Koordinatenebenen zutreten. Auf der Kugel werden wir also als Nullstellen von f eine Anzahl Kurven der ersten oder zweiten Art haben, vielleicht verbunden mit einigen der Hauptkreise. Eine solche Funktion f soll im folgenden eine *Lamésche Funktion vom n -ten Grade* genannt werden, und zwar, der Deutlichkeit halber, eine *Lamésche Funktion von zwei Parametern*.

Der Zusammenhang dieser Definition mit der gewöhnlichen ergibt sich sofort, wenn man statt der x , y , z der Kugelpunkte die elliptischen Koordinaten μ^2 , ν^2 einführt. Zu dem Zwecke hat man, der bekannten Theorie zufolge, zuvörderst die Gesamtheit der auf der Kugel befindlichen Nullstellen durch eine Gleichung in λ^2 darzustellen:

$$E(\lambda^2) = 0;$$

dann ist, von einem konstanten Faktor abgesehen, der uns hier gleichgültig sein wird, f gleich dem Produkte

$$E(\mu^2) \cdot E(\nu^2).$$

Der einzelne Faktor dieses sogenannten Laméschen Produktes ist das, was man gewöhnlich als Lamésche Funktion schlechthin bezeichnet; im Gegensatz zur Funktion f könnte man ihn eine Lamésche Funktion mit nur einem Parameter nennen.

Die Funktion $E(\lambda^2)$ enthält, den etwa vorhandenen Hauptkreisen entsprechend, eine Anzahl Faktoren der Art $\sqrt{\lambda^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$, $\sqrt{\lambda^2 - c^2}$; nach Abtrennung derselben reduziert sie sich auf eine ganze Funktion von λ^2 :

$$\varphi_\tau(\lambda^2).$$

Der Index τ soll dabei den Grad von φ in λ^2 bedeuten. Lamésche Funktionen desselben Grades, die hinsichtlich der auf die Hauptkreise bezüglichen Quadratwurzeln übereinstimmen, mögen demselben Typus zugerechnet werden. Es gibt dann, wie in der Einleitung bemerkt, jedesmal $(\tau+1)$ Funktionen desselben Typus.

Des Näheren stellt sich bei gegebenem n die Sache folgendermaßen:

1. *Sei n gerade.* Dann muß mit dem Aggregat der Kegel (1) notwendig eine paare Anzahl von Hauptebenen verbunden sein. Man hat also folgende vier Typen, deren Bezeichnung nach dem Voraufgeschickten ohne weitere Erläuterung verständlich sein wird:



$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I.} \quad E = \varphi_n(\lambda^2), \\ \text{II.} \quad E = \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{n-2}(\lambda^2), \\ \text{III.} \quad E = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \sqrt{\lambda^2} \cdot \varphi_{n-2}(\lambda^2), \\ \text{IV.} \quad E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \varphi_{n-2}(\lambda^2). \end{array} \right.$$

Von Funktionen der ersten Art gibt es, dem wiederholt angeführten Satze entsprechend, $\frac{n+2}{2}$, von Funktionen der übrigen Arten je $\frac{n}{2}$, im ganzen also $(2n+1)$ Lamésche Funktionen des n -ten Grades, wie es sein muß.

2. Sei n ungerade. Dann hat man die vier Typen:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I.} \quad E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{n-3}(\lambda^2), \\ \text{II.} \quad E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \varphi_{n-1}(\lambda^2), \\ \text{III.} \quad E = \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \varphi_{n-1}(\lambda^2), \\ \text{IV.} \quad E = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{n-1}(\lambda^2). \end{array} \right.$$

Auch diese Tabelle ergibt, dem erwähnten Satze zufolge, $(2n+1)$ Lamésche Funktionen des n -ten Grades.

§ 3.

Bedeutung und Beweis meines Theorems.

Wie schon in der Einleitung berichtet, hat man vor allem den Satz, daß die verschiedenen ganzen Funktionen $\varphi_n(\lambda^2)$ gleich Null gesetzt lauter getrennte, reelle Wurzeln ergeben, die sämtlich in dem Intervalle von 0 bis c^2 liegen und weder mit 0 noch mit b^2 oder mit c^2 zusammenfallen. Für unsere geometrische Auffassungsweise heißt dies, daß $f = E(\mu^2) \cdot E(r^2)$, von den Hauptkreisen abgesehen, auf der Kugel für τ getrennte reelle Kurven verschwindet, welche sich, nach einem zunächst unbekanntem Gesetze, auf die Kurven der ersten und die Kurven der zweiten Art verteilen. Eben dieses Gesetz will mein Theorem aufdecken. Es besagt, daß die $\tau+1$ demselben Typus angehörig Laméschen Funktionen genau den verschiedenen hier denkbaren Verteilungsmöglichkeiten entsprechen.

Zum Beweise halte man an der geometrischen Auffassungsweise fest, und lasse nun den Grenzübergang des § 1 eintreten, welcher der Annahme $b^2 = c^2$ entspricht!

Da niemals zwei Kurven der ersten oder der zweiten Art miteinander oder mit einem Hauptkreise zusammenfallen können, so degeneriert jede Kurve der ersten Art in zwei (gleich stark gegen XZ geneigte) Meridiane, jede Kurve der zweiten Art in zwei (gleichweit vom Äquator abstehende) Parallelkreise. Mittlerweise hat die Funktion

$$f(x, y, z) = E(\mu^2) \cdot E(r^2)$$

nicht aufgehört, der Differentialgleichung

$$\Delta_2 f = 0$$

zu genügen. Die elliptischen Koordinaten μ^2 , r^2 aber sind in die gewöhnlichen Polarkoordinaten φ , ϑ übergegangen, die, im Anschlusse an (3), (4) durch folgende Gleichungen definiert sind:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \cos \vartheta, \quad y = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad z = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \\ \cos \varphi = \frac{e'}{e}, \quad \cos \vartheta = \frac{r}{b}. \end{array} \right.$$

Man hat also vor allen Dingen (wegen der Lage der Nullstellen):

Die Funktion $f(x, y, z)$ ist in eine der $(2n+1)$ in bezug auf die X -Achse symmetrischen Kugelfunktionen verwandelt, die in üblicher Bezeichnung lauten:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \cos h \varphi, \\ P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \sin h \varphi. \end{array} \right.$$

Hier hat h in der ersten Zeile die Werte 0, 1, ..., n , in der zweiten Zeile die Werte 1, 2, ..., n zu durchlaufen.

Aber zugleich ist ersichtlich, in welche der $(2n+1)$ Funktionen (8) f übergegangen ist.

Zunächst, was die Unterscheidung der beiden in (8) enthaltenen Formen angeht, so hat man offenbar die Regel:

Es entsteht $P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \sin h \varphi$ oder $P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \cos h \varphi$, je nachdem $f(x, y, z)$ für $y=0$ verschwindet, oder nicht, je nachdem also das zugehörige $E(\lambda^2)$ den Faktor $\sqrt{\lambda^2 - b^2}$ enthält oder nicht.

Dann aber können wir auch innerhalb der beiden Arten sondern. In der Tat erkennt man sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes:

War τ_1 die Anzahl der Kurven erster Art, für welche $f(x, y, z)$ verschwand, und befanden sich unter den Verschwindungskurven des weiteren noch σ Hauptmeridiane (wo σ nur 0, 1, 2 sein kann), so ist für die zugehörige Funktion (8) $h = 2\tau_1 + \sigma$.

Hiermit aber ist die fragliche Funktion (8) vollkommen bestimmt.

Nun sage ich, daß auch umgekehrt beim Grenzübergange die einzelne Funktion (8) nur aus einer einzigen Laméschen Funktion entstehen kann.



Denn man weiß, daß die $(2n+1)$ zum Vergleich kommenden Funktionen (8) gleich den $(2n+1)$ überhaupt vorhandenen Laméschen Funktionen linear unabhängig sind.

Aus allen diesen Sätzen aber folgt unser Theorem unmittelbar. Man kennt bei der einzelnen Funktion (8) von vornherein die Meridiane, für welche sie verschwindet. Daher kann man auf die Anzahl der Kurven erster (oder zweiter) Art, für welche die verschiedenen Laméschen Funktionen verschwinden, den Rückschluß machen. Es wird genügen, dies nur an einem der 8 Fälle, die man, dem vorigen Paragraphen zufolge, bei geradem resp. ungeradem n zu unterscheiden hat, ins einzelne darzulegen.

Ich nehme zu dem Zwecke bei ungeradem n (Tab. (6)) den ersten Fall:

$$E = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - b^2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - c^2} \cdot \varphi_{n-3}(\lambda^2).$$

Ein solches E verschwindet für die Hauptmeridiane $y=0$ und $z=0$, zudem für den Äquator, $x=0$. Daher entspricht ihm eine Funktion

$$P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \sin h \varphi$$

mit geradem h . Nun gibt es solcher Funktionen (für $h=2, 4, \dots, (n-1)$) im ganzen $\frac{n-1}{2}$, also ebenso viele, als Funktionen E des herausgegriffenen

Typus. Die $\frac{(n-1)}{2}$ Funktionen der zweierlei Arten entsprechen einander also eindeutig. Aber

$$P_{(h)}^{(n)}(\cos \vartheta) \cdot \sin h \varphi$$

verschwindet (für gerades h) in $(h-2)$ Meridianen, die von den Hauptmeridianen verschieden sind. Daher verschwinden die $\frac{(n-1)}{2}$ Funktionen $E(\lambda^2)$ des von mir herausgegriffenen Typus beziehungsweise in $\frac{(h-2)}{2}$ Kurven der ersten Art, wo h die Werte $2, 4, \dots, (n-1)$ zu durchlaufen hat. Sie sind also durch die Anzahl der Wurzeln λ^2 verschieden, welche

$$\varphi_{n-3}(\lambda^2) = 0$$

zwischen b^2 und c^2 ergibt, — und eben dieses behauptet mein Theorem.

Daß sich das Theorem in den übrigen Fällen ganz ebenso ergibt, bedarf wohl keiner Erläuterung mehr.

Man erkennt das Charakteristische dieses Beweises. Hätte man, wie es gewöhnlich geschieht, λ^2 einfach als Abszisse gedeutet und dementsprechend $E(\lambda^2)$ interpretiert, so hätte sich das Intervall $b^2 \dots c^2$ beim Grenzübergang in einen einzelnen Punkt zusammengezogen und es würde einer tiefer gehenden Untersuchung vorbehalten geblieben sein, die verschiedenen Wurzeln von $E(\lambda^2) = 0$, die in diesem Punkt koinzidieren, nach ihrem Ursprunge

zu klassifizieren. Indem wir statt dessen $E(\mu^2) \cdot E(\nu^2)$ auf der Kugel deuten, verliert der Grenzübergang für die geometrische Auffassung jegliche Unstetigkeit, und das Theorem, um welches es sich handelt, bietet sich unmittelbar.

§ 4.

Das Theorem für die Laméschen Funktionen der p -ten Ordnung³⁾.

Bei den Laméschen Funktionen p -ter Ordnung treten an Stelle der drei Werte $\lambda^2 = 0, b^2, c^2$ im ganzen $p+1$, die, reell und positiv vorausgesetzt, in steigender Größenordnung mit $a_0^2, a_1^2, \dots, a_p^2$ bezeichnet sein mögen. Eine Lamésche Funktion des n -ten Grades $E^{(m)}(p, \lambda^2)$ enthält als einfach vertretende Faktoren eine gewisse Anzahl, m , von Quadratwurzeln:

$$\sqrt{\lambda^2 - a_0^2}, \sqrt{\lambda^2 - a_1^2}, \dots, \sqrt{\lambda^2 - a_p^2}$$

— wo m mit n zusammen gerade oder ungerade sein muß, aber übrigens beliebig ist — und außerdem eine ganze Funktion $\left(\frac{n-m}{2}\right)$ -ten Grades von λ^2 $\varphi_{n-m}(\lambda^2)$. Es mögen wieder alle diejenigen Funktionen, welche hinsichtlich der vortretenden Quadratwurzeln übereinstimmen, demselben Typus zugerechnet werden. Die Zahl der linear unabhängigen Funktionen des einzelnen Typus ist dann jeweils:

$$\frac{(\tau+1)(\tau+2)\dots(\tau+p-1)}{1 \cdot 2 \dots p-1},$$

wo τ der Abkürzung halber statt $\frac{n-m}{2}$ geschrieben ist. Man bemerkt, daß dies gerade diejenige Zahl ist, welche angibt, auf wie viele verschiedene Weisen τ Punkte über p Intervalle verteilt werden können.

Mein Theorem ist nun dies: daß diese Übereinstimmung keine zufällige ist. Vielmehr sage ich:

1. daß jedes Polynom $\varphi_r(\lambda^2)$, gleich Null gesetzt, r getrennte, reelle Wurzeln ergibt, welche alle zwischen a_0^2 und a_p^2 inne liegen, ohne mit diesen Grenzen oder den Größen $a_1^2 \dots a_{p-1}^2$ zusammenzufallen;

2. daß die verschiedenen zu demselben Typus gehörigen Polynome $\varphi_r(\lambda^2)$ sich durch den Modus der Verteilung ihrer Wurzeln auf die p Intervalle von a_0^2 bis a_1^2 , von a_1^2 bis a_2^2 , ..., von a_{p-1}^2 bis a_p^2 unterscheiden, so zwar, daß jeder Verteilungsart eine und nur eine Funktion $\varphi_r(\lambda^2)$ entspricht.

Der erste Teil dieses Satzes kann geradeso bewiesen werden, wie dies hinsichtlich der Laméschen Funktionen zweiter Ordnung seit lange geschehen ist; man vergleiche das Heinesche Buch. Um den zweiten Teil

³⁾ Vgl. H. K. S. 445.



des Satzes einzusehen, hat man vor allem die Art und Weise zu überlegen, wie die Kugel des Raumes $(x_0 \dots x_p)$ von $(p+1)$ Dimensionen:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_p^2 = 1$$

durch die allgemeinen elliptischen Polarkoordinaten

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2,$$

die mittels folgender Gleichung eingeführt werden:

$$(9) \quad \frac{x_0^2}{\lambda^2 - a_0^2} + \frac{x_1^2}{\lambda^2 - a_1^2} + \dots + \frac{x_p^2}{\lambda^2 - a_p^2} = 0,$$

in p Serien von $(p-1)$ -fach ausgedehnten Gebieten zerlegt wird. Sodann lasse man $a_1^2, a_2^2, \dots, a_p^2$ allmählich einander gleich werden, wobei sich die elliptischen Koordinaten in die gewöhnlichen Polarkoordinaten $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p$ verwandeln, die durch folgende Gleichungen definiert sind:

$$(10) \quad \begin{cases} x_0 = \cos \vartheta_1, \\ x_1 = \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2, \\ \dots \\ x_{p-2} = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{p-2} \cos \vartheta_{p-1}, \\ x_{p-1} = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{p-1} \cos \vartheta_p, \\ x_p = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \dots \sin \vartheta_{p-1} \sin \vartheta_p. \end{cases}$$

Dann verwandelt sich das Lamésche Produkt

$$E^{(n)}(p, \lambda_1^2) \cdot E^{(n)}(p, \lambda_2^2) \dots E^{(n)}(p, \lambda_p^2)$$

notwendig in eine Kugelfunktion des folgenden Typus¹⁾:

$$(11) \quad P_{(n_1)}^{(n)}(p, \cos \vartheta_1) \cdot P_{(n_2)}^{(n_1)}(p, \cos \vartheta_2) \dots P_{(n_{p-1})}^{(n_{p-2})}(p, \cos \vartheta_{p-1}) \cdot [\vartheta_p].$$

Hier soll $[\vartheta_p]$, je nachdem,

$$\cos(n_{p-1} \cdot \vartheta_p) \quad \text{oder} \quad \sin(n_{p-1} \cdot \vartheta_p)$$

bedeuten, und

$$n, n_1, \dots, n_{p-1}$$

soll irgendein Zahlensystem sein, für welches keine der Differenzen

$$n - n_1, n_1 - n_2, \dots, n_{p-2} - n_{p-1}$$

negativ ist. Man überblickt die verschiedenen reellen Gebiete, für welche eine solche Funktion (11) auf der Kugel verschwindet. In ähnlicher Weise müssen daher die Nullstellen des Produktes

$$E^{(n)}(p, \lambda^2) \cdot E^{(n)}(p, \lambda_2^2) \dots E^{(n)}(p, \lambda_p^2)$$

angeordnet sein. Und eben dies behauptet, nur in analytischer Formulierung, der vorstehend ausgesprochene Satz.

Leipzig, Mitte Januar 1881.

¹⁾ H. K. S. 461.

LXIII. Über [die Randwertaufgabe des Potentials für] Körper, welche von konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind.

[Math. Annalen, Bd. 18 (1881).]

In dem Werke über *theoretische Physik* der Herren Thomson und Tait¹⁾ findet sich ein bemerkenswerter Abschnitt über Kugelfunktionen, in welchem eine Reihe neuer Ideen in nur zu knapper Form entwickelt sind. Es seien r, ϑ, φ die gewöhnlichen Polarkoordinaten im Raume. Dann kommen die betreffenden Angaben im wesentlichen darauf hinaus, daß man für jeden Körper, der von irgendwelchen Flächen $r = \text{Const.}, \vartheta = \text{Const.}, \varphi = \text{Const.}$ begrenzt ist, die fundamentale Potentialaufgabe²⁾ durch richtige Verallgemeinerung der gewöhnlichen Kugelfunktionen erledigen könne. Dabei fehlt allerdings jeder Ansatz zur Erbringung der notwendigen Konvergenzbeweise; auch ist die Darstellung in einer Weise skizzenhaft, daß es fast unmöglich scheint, den Sinn mancher einzelnen Behauptung zu verstehen. Trotzdem wird jeder Mathematiker in den genannten Entwicklungen einen wesentlichen Fortschritt auf dem hier in Rede stehenden Gebiete erkennen.

¹⁾ Theoretische Physik, deutsch von Helmholtz und Wertheim, I. Teil, Braunschweig 1871 (vgl. S. 156—178 daselbst). — Das Original erschien bekanntlich unter dem Titel „Natural Philosophy“, 1867, doch scheint der Abschnitt über Kugelfunktionen zu denjenigen Teilen des Werkes zu gehören, die, einer Bemerkung der Vorrede zufolge, bereits früher gedruckt worden sind. Wenigstens zitiert Herr Thomson den betreffenden „Appendix B“ schon im Jahre 1862; vgl. eine Arbeit in den Philosophical Transactions vom Jahre 1863: „Dynamical Problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid.“ — In einer neuen Auflage der „Natural Philosophy“ (Cambridge 1879) findet sich derselbe Abschnitt wesentlich umgearbeitet und erweitert; doch scheint auch diese Darstellung zum unmittelbaren Verständnisse noch nicht ausföhrlich genug.

²⁾ Als solche sei das Problem bezeichnet: aus den Werten des Potentials in den Punkten einer Oberfläche den Verlauf desselben im Inneren des von der Oberfläche begrenzten Körpers zu bestimmen.



Wiederholte Versuche, mir denselben verständlich zu machen, ließen die Frage in mir entstehen, ob nicht das Analoge durch Verallgemeinerung der Laméschen Funktionen für einen Körper zu leisten sei, der von irgendwelchen konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt ist. Man würde dann ein allgemeineres Problem erledigt haben, welches das speziellere der Kugelfunktionen als Grenzfall in sich schließt, und, da es die verschiedenen sonst zu unterscheidenden Möglichkeiten gleichförmig umfaßt, einen leichteren und vollständigeren Überblick über letztere ermöglicht.

Unter vorläufiger Beiseitelassung aller Konvergenzbetrachtungen ist es mir nun in der Tat gelungen, dies allgemeinere Problem zu erledigen. Der Unterschied ist nur der, daß man fortwährend sozusagen mit *impliziten* Formeln arbeitet. Wo man im Falle der Kugelfunktionen a priori bekannte Reihenentwicklungen unmittelbar hinschreibt, hat man es hier mit Lösungen der Laméschen Differentialgleichung zu tun, für welche die in der Differentialgleichung auftretenden Konstanten selbst erst, allgemein zu reden, aus transzendenten Gleichungen berechnet werden müssen³⁾. Aber dies hindert nicht, daß diese Konstanten und die zugehörigen Funktionen *durchaus eindeutig* bestimmt sind, und hierauf allein kommt es bei der allgemeinen Entwicklung an.

Ich werde im folgenden den etwas weitschichtigen Stoff so ordnen, daß ich vor allen Dingen solche Körper betrachte, die sechs verschiedene Begrenzungsflächen besitzen. Unter ihnen mögen diejenigen voranstehen, welche sich durch keine Hauptebene (Koordinatenebene) des konfokalen Flächensystems hindurchziehen (§ 1—5); die Betrachtung komplizierterer Fälle macht hernach keine besonderen Schwierigkeiten mehr (§ 6). Nun erst gehe ich zur Behandlung von Körpern über, die weniger als sechs Begrenzungsflächen haben. Doch beschränke ich mich dabei, um ermüdende Aufzählungen zu vermeiden, im wesentlichen auf das Vollellipsoid, und zeige (§ 7), daß Lamés ursprüngliche Behandlung dieses Falles genau diejenige ist, welche aus meinem allgemeinen Ansatz hervorgeht. Dabei wird das Theorem von prinzipieller Wichtigkeit, welches ich neuerdings in den Math. Annalen in einer Note über Lamésche Funktionen⁴⁾ publiziert habe.

³⁾ Etwas ähnliches kennt man von den Reihenentwicklungen, die nach Besselschen Funktionen von beliebigem Index fortschreiten. — Man vergleiche auch verschiedene Aufsätze von Liouville und Sturm in den ersten Bänden des Liouville'schen Journals; dieselben haben mit den im Texte zu entwickelnden Anschauungen viele Berührungspunkte. [Ich bin auf diese Abhandlungen s. Z. erst nachträglich aufmerksam gemacht worden, so daß die nahen Beziehungen beider Betrachtungsweisen leider nicht herausgearbeitet sind. Man sehe hierzu den Artikel von Böcher „Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen“ (abgeschlossen 1900) in Bd. II, der mathematischen Enzyklopädie. K.]

⁴⁾ Math. Annalen, Bd. 18 (1881) [siehe die vorstehende Abb. LXII].

§ 1.

Die elliptischen Koordinaten im Raume und die Lamésche Differentialgleichung.

Zur Definition der elliptischen Koordinaten werde ich setzen⁵⁾:

$$(1) \quad \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - k^2} + \frac{z^2}{\lambda - 1} = 1,$$

wo der „Modul“ k^2 als reelle positive Größe < 1 genommen werden soll. Dann sind, wie man weiß, die drei Wurzeln λ bei reellen x, y, z reell; ich will sie μ, ν, ϱ nennen, wo μ den *zweischaligen Hyperboloiden*, ν den *Regelflächen* (den einschaligen Hyperboloiden), ϱ den *Ellipsoiden* des konfokalen Systems entsprechen mag. Man hat in bekannter Weise:

$$(2) \quad \begin{cases} 0 \leq \mu \leq k^2, \\ k^2 \leq \nu \leq 1, \\ 1 \leq \varrho \leq +\infty. \end{cases}$$

Es sei nun t das elliptische Integral:

$$(3) \quad t = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot \lambda - k^2 \cdot \lambda - 1}};$$

für $\lambda = \mu, \nu, \varrho$ verwandele sich t in u, v, w . Dann schreibt sich, wie man weiß, die Differentialgleichung des Potentials in folgender Gestalt:

$$(4) \quad \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}}{\mu - \nu - \mu - \varrho} + \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}}{\nu - \varrho \cdot \nu - \mu} + \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2}}{\varrho - \mu \cdot \varrho - \nu} = 0,$$

und man genügt ihr, nach Lamé, indem man Φ gleich dem Produkte dreier Funktionen setzt, deren einzelne nur von einem Argumente abhängt:

$$(5) \quad \Phi = \bar{E}_1(u) \cdot \bar{E}_2(v) \cdot \bar{E}_3(w) = E_1(\mu) \cdot E_2(\nu) \cdot E_3(\varrho),$$

und die verschiedenen \bar{E} derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung unterwirft:

$$(6) \quad \frac{d^2 \bar{E}(t)}{dt^2} = (A\lambda + B) \cdot \bar{E}(t).$$

Daß in dieser „Laméschen Differentialgleichung“ A und B zunächst beliebige reelle Konstante bedeuten können, daß ferner $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ irgend drei partikuläre Lösungen der Differentialgleichung bedeuten dürfen, ist a priori deutlich, und es brauchte hier gar nicht hervorgehoben zu werden,

⁵⁾ Diese Definition ist in der Bezeichnung von derjenigen verschieden, die ich im Anschlusse an Heines Kugelfunktionen in meiner vorigen Note über Lamésche Funktionen [= Abb. LXII] gebraucht habe.



wenn nicht durch Lamé's eigene Intentionen und die Untersuchungen Späterer eine mehr partikuläre Auffassung sich Bahn gebrochen hätte. Indem Lamé $E(\lambda)$ als ganze rationale Funktion von $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt{\lambda - k^2}$, $\sqrt{\lambda - 1}$ bestimmen wollte, verwandelte sich für ihn A in $\frac{s(s+1)}{4}$ und B unterlag einer bestimmten, numerischen, algebraischen Gleichung; die Partikularlösungen E_1, E_2, E_3 wurden identisch. Es hat dann später Hermite in seinen vielgenannten Untersuchungen über die Integration der Lamé'schen Differentialgleichung an der Annahme $A = \frac{s(s+1)}{4}$ festgehalten und nur B beliebig genommen; das Gleiche gilt von den zahlreichen Arbeiten anderer, die sich an die seinigen anschließen.

§ 2.

Allgemeiner Ansatz für einen Körper, der von sechs konfokalen Flächen begrenzt ist und die Koordinatenebenen nicht durchdringt.

Es sei nun ein Körper gegeben, der von sechs konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt ist: den beiden zweisehaligen Hyperboloiden $\mu = a_1$ und $\mu = a_2$ ($a_1 < a_2$), den beiden Regelflächen $r = b_1$ und $r = b_2$ ($b_1 < b_2$), und den beiden Ellipsoiden $\varrho = c_1$ und $\varrho = c_2$ ($c_1 < c_2$). Indem wir hinzufügen, daß sich der Körper durch keine der drei Hauptebenen des konfokalen Systems hindurch erstrecken soll, ist er im wesentlichen völlig bestimmt; denn wir wollen immer an der Voraussetzung festhalten, daß er durchaus im Endlichen gelegen sei. — Auf seinen sechs Begrenzungsflächen seien jetzt, nach einem willkürlichen Gesetze, Potentialwerte gegeben; es handelt sich darum, die zugehörigen Potentialwerte für das Innere des Körpers zu finden.

Bekanntlich dekomponiert man eine solche Aufgabe zweckmäßigerweise in sechs Einzelprobleme. Man läßt die Potentialwerte jeweils nur auf einer der begrenzenden Flächen beliebig gegeben, auf den anderen gleichförmig Null sein und sucht die solcher Annahme entsprechenden Potentialwerte des Innern; hernach addiert man die sechs so gefundenen Partikularpotentiale.

Die Vermutung muß nun offenbar die sein, daß man jedes solche Partikularpotential durch eine unendliche Reihe passend ausgewählter Lamé'scher Produkte darstellen könne:

$$(7) \quad \psi(\mu, r, \varrho) = \sum C \cdot E_1(\mu) \cdot E_2(r) \cdot E_3(\varrho).$$

Ich verzichte fürs erste, wie schon in der Einleitung bemerkt, darauf, die Zulässigkeit einer solchen Reihenentwicklung im Sinne der modernen An-

forderungen *strenge* zu beweisen⁶⁾. Vielmehr wünsche ich nur zu zeigen, daß man in der Tat eine und nur eine solche Reihenentwicklung aufstellen kann, die den übrigens bekannten Reihenentwicklungen willkürlicher Funktionen *analog* ist. Ich gründe diese Analogie auf das Vorhandensein gewisser *Haupteigenschaften*, die bei der gewöhnlichen Fourierschen Reihe bereits genügend hervortreten.

Es sei in dem Intervalle von 0 bis π

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots$$

Dann fasse ich das wesentliche Verhalten der rechter Hand auftretenden Funktionen in den folgenden Sätzen zusammen:

1. sie sind im Intervalle von $x = 0$ bis $x = \pi$ durchaus endlich und werden an den Grenzen sämtlich gleich Null;
2. zwischen diesen Grenzen verschwindet die erste Funktion keinmal, die zweite einmal, usf., so daß jeder Zahl von Verschwindungsstellen eine und nur eine Funktion entspricht;
3. für irgend zwei verschiedene Funktionen hat man die sogenannte Integraleigenschaft:

$$\int_0^\pi \sin px \cdot \sin qx \cdot dx = 0; \quad -$$

und verlange nun, daß unsere Reihenentwicklung dieselben Eigenschaften mutatis mutandis aufweise.

Ich will dabei, um die Ideen zu fixieren, hier und im folgenden annehmen, die sechste Begrenzungsfläche unseres Körpers sei diejenige, welche dem Ellipsoid $\varrho = c_2$ angehört. Dann soll also $\psi(\mu, r, \varrho)$ für $\mu = a_1$ und $\mu = a_2$, sodann für $r = b_1$ und $r = b_2$, sowie für $\varrho = c_1$ verschwinden; es soll endlich $\psi(\mu, r, c_2)$, während μ von a_1 bis a_2 und r von b_1 bis b_2 läuft, eine in diesem Bereiche willkürlich gegebene Funktion repräsentieren. Zu dem Zwecke müssen wir der Reihenentwicklung (7), der entwickelten Analogie zufolge, die folgenden Bedingungen auferlegen:

1. Man hat die Konstanten A, B der definierenden Lamé'schen Differentialgleichungen, man hat ferner die zugehörigen Partikularlösungen E_1, E_2, E_3 in der Weise auszuwählen, daß folgende Gleichungen *stathaben*:

$$E_1(a_1) = 0, \quad E_1(a_2) = 0; \quad E_2(b_1) = 0, \quad E_2(b_2) = 0; \quad E_3(c_1) = 0,$$

während gleichzeitig die E innerhalb ihrer Intervalle endlich bleiben.

⁶⁾ [Den noch fehlenden Beweis, daß jedenfalls jede zweimal stetig differenzierbare Funktion eine solche Reihenentwicklung gestattet, hat Herr Hilb mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen in den Math. Annalen, Bd. 63 (1906) erbracht.]



2. Unter m, n irgend zwei ganze Zahlen verstanden (die auch Null sein können) muß immer ein und nur ein Produkt

$$E_1(\mu) \cdot E_2(\nu) \cdot E_3(\varrho)$$

existieren, welches m -mal zwischen a_1 und a_2 und n -mal zwischen b_1 und b_2 verschwindet. — Ich werde ein solches Produkt in Zukunft als

$$(E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)_{m,n}$$

bezeichnen.

3. Für die so definierten unendlich vielen Produkte soll z. B. für das in Betracht kommende Oberflächenstück des Ellipsoids $\varrho = c_2$ die Integraleigenschaft bestehen:

$$(8) \quad \int (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)_{m,n} \cdot (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3)_{m',n'} \cdot (v - \mu) du dv = 0,$$

wo die Integration über den Bereich $a_1 \leq u \leq a_2$ und $\beta_1 \leq v \leq \beta_2$ zu erstrecken ist. Dabei bedeuten $t = a_1, a_2$; β_1, β_2 die Werte, welche $\lambda = a_1, a_2$; b_1, b_2 entsprechen⁷⁾.

Mein Nachweis wird sich darauf beschränken dürfen, die Verträglichkeit und die Vollständigkeit dieses Systems von Bedingungen hervortreten zu lassen. Dies soll in den folgenden Paragraphen geleistet werden.

§ 3.

Reduktion der Bedingungen.

Ein Teil der somit aufgestellten Bedingungen ist eine Folge der übrigen oder läßt sich auf unmittelbare Weise erledigen.

In dieser Richtung behaupte ich zunächst, daß zufolge der Definition der Laméschen Funktionen die Integraleigenschaft 3. eine Folge von 1. ist.

Zum Beweise sei der Kürze halber

$$[E_1(\mu) \cdot E_2(\nu) \cdot E_3(\varrho)]_{m,n} = \varphi_{m,n}$$

gesetzt. Dann folgt für zwei verschiedene φ , da beide der Differentialgleichung des Potentials genügen, aus dem Greenschen Satze sofort, daß das über die Oberfläche unseres Körpers ausgedehnte Doppelintegral:

$$\int \left\{ \varphi_{m,n} \cdot \frac{\partial \varphi_{m',n'}}{\partial n} - \varphi_{m',n'} \cdot \frac{\partial \varphi_{m,n}}{\partial n} \right\} d\omega$$

gleich Null ist; $d\omega$ ist dabei das Flächenelement der verschiedenen Begrenzungsflächen, $\frac{\partial}{\partial n}$ bedeutet eine Differentiation nach der jeweiligen, in

⁷⁾ [Beim Wiederabdruck wurde ein Fehler in Formel (8) und den entsprechenden Formeln des § 3 verbessert.]

bestimmtem Sinne genommenen, Normale. Fünf unserer Begrenzungsflächen liefern aber überhaupt keinen Beitrag zu diesem Integral, da für sie $\varphi_{m,n}$ und $\varphi_{m',n'}$ beide verschwinden. Bei der sechsten Fläche, dem Ellipsoid $\varrho = c_2$, fällt die Normale der Richtung nach mit dem Durchschnitte der Flächen $\mu = \text{Const.}$, $\nu = \text{Const.}$ zusammen, $\frac{\partial}{\partial n}$ wird mit $\frac{\partial}{\partial \varrho}$ proportional⁸⁾. Daher ist:

$$\frac{\partial \varphi_{m,n}}{\partial n} = [E_1(\mu) \cdot E_2(\nu)]_{m,n} \cdot 2 \sqrt{\frac{\varrho \cdot \varrho - k^2 \cdot \varrho - 1}{\varrho - \mu \cdot \varrho - \nu}} \frac{\partial E_3(\varrho)_{m,n}}{\partial \varrho}$$

und es folgt, wenn man von einem nicht in Betracht kommenden Faktor absieht:

$$\left\{ (E_3)_{m,n} \left(\frac{\partial E_3}{\partial \varrho} \right)_{m',n'} - (E_3)_{m',n'} \left(\frac{\partial E_3}{\partial \varrho} \right)_{m,n} \right\} \cdot \int (E_1 \cdot E_2)_{m,n} (E_1 \cdot E_2)_{m',n'} \frac{d\omega}{\sqrt{\varrho - \mu \cdot \varrho - \nu}} = 0.$$

Hier kann der erste Faktor:

$$(E_3)_{m,n} \left(\frac{\partial E_3}{\partial \varrho} \right)_{m',n'} - (E_3)_{m',n'} \left(\frac{\partial E_3}{\partial \varrho} \right)_{m,n}$$

nicht identisch Null sein. Denn sonst würde durch Integration folgen:

$$(E_3)_{m,n} = \text{Const.} (E_3)_{m',n'}$$

während doch die beiden E_3 verschiedenen Laméschen Differentialgleichungen genügen sollen. Somit folgt das Verschwinden des anderen Faktors und also⁹⁾ das Verschwinden von (8), was zu beweisen war.

Ich sage ferner, daß man den Gleichungen

$$E_1(a_1) = 0, \quad E_2(b_1) = 0, \quad E_3(c_1) = 0,$$

die unter (1) mit aufgeführt sind, durch bloße Wahl der Partikularlösungen E_1, E_2, E_3 der Laméschen Differentialgleichung genügen kann.

Im Interesse des Folgenden will ich dies, so einfach es ist, geometrisch erläutern. Ich will λ (also evtl. μ, ν oder ϱ) als Abszisse deuten und somit von einer Kurve (E, λ) sprechen. E genügt in bezug auf λ einer Differentialgleichung zweiter Ordnung; man darf also zur Individualisierung der Kurve (E, λ) einen Punkt derselben und die Tangente in diesem Punkte beliebig annehmen. Unsere Forderung ist hiernach gewiß erfüllbar; denn sie verlangt nur, drei Kurven $(E_1, \lambda), (E_2, \lambda), (E_3, \lambda)$

⁸⁾ Es ist

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} = \sqrt{\frac{\varrho \cdot \varrho - k^2 \cdot \varrho - 1}{\varrho - \mu \cdot \varrho - \nu}} \frac{\partial}{\partial \varrho}.$$

⁹⁾ Es ist $d\omega = \frac{d\mu \cdot d\nu}{4} \sqrt{\frac{-(\nu - \mu)^2 (\varrho - \mu) (\varrho - \nu)}{\mu \cdot \mu - k^2 \cdot \mu - 1 \cdot \nu \cdot \nu - k^2 \cdot \nu - 1}}$
 $= \frac{\nu - \mu}{2} \sqrt{-(\varrho - \mu) (\varrho - \nu)} du dv.$



so zu bestimmen, daß sie beziehungsweise durch die drei Punkte der Abszissenachse $\lambda = a_1$, $\lambda = b_1$, $\lambda = c_1$ hindurchlaufen. Sie ist sogar auf unendlich viele Weisen zu erfüllen, indem man die Richtungen der Kurven in diesen Punkten beliebig annehmen kann. Indess ist die sonach existierende Unbestimmtheit für unsere Zwecke gleichgültig. Denn eine Änderung der Anfangsrichtung bedeutet ja nur, daß das betr. E mit einem konstanten Faktor multipliziert wird, und ist also für unseren Ansatz, in welchem $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$ ohnehin mit einem beliebigen Faktor verbunden ist, durchaus irrelevant. — Diesen Überlegungen entsprechend will ich fernerhin unter E_1, E_2, E_3 drei solche Partikularlösungen verstehen, welche die Bedingungen

$$E_1(a_1) = 0, \quad E_2(b_1) = 0, \quad E_3(c_1) = 0$$

jedenfalls erfüllen.

Daß diese E_1, E_2, E_3 in den für sie in Betracht kommenden Intervallen dann *jedenfalls endlich* sind, wie wir unter (1) ebenfalls verlangten, folgt aus der Form der Laméschen Differentialgleichung auf Grund bekannter Konvergenzbetrachtungen.

Es bleibt also nur noch den Gleichungen

$$E_1(a_2) = 0, \quad E_2(b_2) = 0,$$

es bleibt ferner der Forderung (2) zu genügen. Für beides hat man noch die Konstanten A, B der Laméschen Differentialgleichung zur vollen Verfügung. Sie aber reichen auch gerade aus, um beides zu erzielen. Dies zu beweisen ist die Aufgabe der folgenden beiden Paragraphen. Ich betrachte zu dem Zwecke neben λ abwechselnd auch das Integral t als unabhängige Variable und stelle also neben die Kurven (E, λ) die entsprechenden Kurven (\bar{E}, t) .

§ 4.

Der Verlauf der Kurven (\bar{E}, t) .

Die geometrische Beziehung zwischen λ und dem Integrale t :

$$t = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2 \lambda - 1}}$$

ist aus der Theorie der elliptischen Integrale genügend bekannt. Wir haben hier nur die reellen Werte von λ von 0 bis $+\infty$ ins Auge zu fassen, die sich auf die drei Intervalle von 0 bis k^2 , von k^2 bis 1 und von 1 bis $+\infty$ verteilen. Läuft λ von 0 bis k^2 , so bewegt sich t als ebenfalls *reelle* Größe von 0 bis ω_1 , wo $2\omega_1$ die reelle Periode des elliptischen Integrals bedeutet und der größeren Bestimmtheit wegen positiv gedacht werden mag. Wächst λ über k^2 hinaus, so erhält t zunächst *rein*

imaginäre Zuwächse, bis es, für $\lambda = 1$, in $\omega_1 + i\omega_2$ übergegangen ist, wo $2i\omega_2$ die imaginäre Periode des Integrals bedeuten soll und ω_2 ebenfalls eine positive Größe vorstellen mag. Für $\lambda > 1$ entsprechen den reellen Inkrementen von λ wieder reelle Änderungen von t , und erteilt man, was gestattet ist, dem $\frac{dt}{d\lambda}$ in diesem Intervalle das negative Vorzeichen, so geht t für $\lambda = +\infty$ in $i\omega_2$ über. Der ganze Weg, den t in seiner komplexen Ebene zurücklegt, wenn λ von 0 bis $+\infty$ läuft, ist sonach durch folgende Figur gegeben:

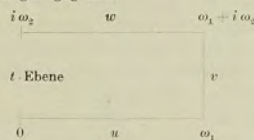


Fig. 1

Ich habe die Buchstaben u, v, w hinzugeschrieben, entsprechend den partikulären Benennungen, welche t in den betr. Intervallen trägt (vgl. § 1). Über diesem Linienzuge als Basis denke man sich nun die Kurven (E, t) konstruiert, indem man \bar{E} etwa als vertikale Ordinate senkrecht gegen die komplexe Ebene t aufträgt. Im allgemeinen wird (\bar{E}, t) von (E, λ) der Gestalt nach verschieden sein; auf das merkwürdige Verhalten an den Stellen $\lambda = 0, k^2, 1, \infty$ habe ich hernach noch besonders aufmerksam zu machen. Aber (\bar{E}, t) wird dann und nur dann die Ebene t treffen, wenn (E, λ) die Abszissenachse λ trifft, — und das ist fürs erste die Hauptsache.

Es mögen wieder $t = \alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$ die Werte sein, welche $\lambda = a_1, a_2; b_1, b_2$ entsprechen; vergleiche die beige-setzte Figur:

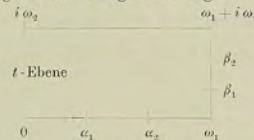


Fig. 2

Dann betrachten wir eine Kurve (\bar{E}_1, u) , die von $u = \alpha_1$, eine andere (\bar{E}_1, v) , die von $v = \beta_1$ ausläuft, und unser Nachweis hat sich dem vorigen Paragraphen zufolge darauf zu beschränken, zu zeigen: daß es immer ein einziges Wertepaar A, B der Konstanten in der Laméschen Differentialgleichung gibt, für welches (E_1, u) zwischen α_1 und α_2 und (E_2, v) zwischen β_1 und β_2 genau $(m+1)$, beziehungsweise $(n+1)$ Halboszillationen ausführt.



Nun kann man aber über den Verlauf der Kurven (\bar{E}, t) aus der Differentialgleichung (6), die man folgendermaßen schreiben mag:

$$(9) \quad \frac{d^2 \bar{E}}{dt^2} = A\lambda + B,$$

gewisse allgemeine Schlüsse ziehen. Wenn nämlich dt ein *reelles* Inkrement bedeutet, so sagt ein positiver Wert der linken Seite in (9), daß die Kurve (\bar{E}, t) der Ebene t die *konvexe* Seite zuehrt, daß die Kurve (\bar{E}, t) , wie ich einen Augenblick sagen will, in bezug auf die Ebene t *divergiert*; ein negativer Wert bedeutet *Konvergenz* der Kurve. Ist aber dt rein imaginär (wie im Intervalle v), so wird die Bedeutung, wie man sofort sieht, genau umgekehrt: dem positiven Werte entspricht die Konvergenz, dem negativen die Divergenz.

Hierzu nun nehme man den Satz: *daß eine stark konvergierende Kurve notwendig bereits im kleinen Intervalle oszilliert*, sowie den fernerer, *daß $A\lambda + B$ höchstens einmal* (wenn nämlich $-\frac{A}{B}$ positiv ist) *zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = +\infty$ das Zeichen wechselt*. So scheint es von vornherein möglich, für (\bar{E}_1, u) und (\bar{E}_2, v) das oben Verlangte zu erzielen. Man wird $A\lambda + B$ für $\lambda = a_1$ jedenfalls negativ, für $\lambda = b_2$ jedenfalls positiv nehmen müssen, da (\bar{E}_1, u) im Intervalle (a_1, a_2) und (\bar{E}_2, v) im Intervalle (β_1, β_2) oszillieren soll. Ich sage aber geradezu, *daß die Zahl dieser Oszillationen ausreicht, um A und B eindeutig zu bestimmen*¹⁰⁾. Man ersieht dies am besten, wenn man wieder λ als Abszissenachse einführt und $\eta = A\lambda + B$ als Gleichung einer geraden Linie deutet, wie dies nun geschehen mag.

§ 5.

Bestimmung der Konstanten A, B .

Der Ausdruck $\eta = A\lambda + B$ soll jetzt, wie bereits gesagt, über der Abszissenachse λ als gerade Linie gedeutet werden, und wir fragen zunächst, wie diese gerade Linie verlaufen muß, damit wenigstens die Kurve (E_1, λ) in ihrem Intervalle die richtige Zahl von Halboszillationen ausführt, beziehungsweise, welche *Envelope* von den unendlich vielen Geraden, die dieser *einen* Bedingung genügen, umhüllt wird.

Sicher hat diese Enveloppe eine horizontale Tangente. Man setze in (9) $A = 0$. So kommt

$$\frac{d^2 \bar{E}}{dt^2} = B$$

¹⁰⁾ [Von hier stammt der Name Oszillationstheorem, den ich später viel gebraucht. Vgl. z. B. Abb. LXIV. K.]

und also, wegen $\bar{E}_1(a_1) = 0$:

$$\bar{E}_1 = \sin \sqrt{-B}(u - a_1).$$

Die somit gegebene Kurve (\bar{E}_1, u) vollführt nun von $u = a_1$ bis $u = a_2$ $(m+1)$ Halboszillationen, wenn

$$\sqrt{-B}(a_2 - a_1) = (m+1)\pi$$

genommen wird. *Wir haben also als horizontale Tangente unserer Enveloppe:*

$$\eta = -\frac{(m+1)^2 \pi^2}{(a_1 - a_2)^2}.$$

Man überzeugt sich ferner, *daß unsere Enveloppe kein Paar paralleler Tangenten, also auch keine Wendetangente besitzen kann*. Denn ist $\eta = A\lambda + B$, $\eta' = A$, so ist (mit Rücksicht auf das Vorzeichen) η im ganzen Intervalle (a_1, a_2) entweder größer oder kleiner als η' , und die Kurve E_1 , welche η entspricht, oszilliert daher durchweg langsamer oder schneller als die Kurve für η' .

Nunmehr nehme man A sehr groß positiv, B so, daß trotzdem $Aa_1 + B$ einen negativen und zwar einen sehr stark negativen Wert repräsentiert. Dann oszilliert die Kurve (E_1, λ) in der Nähe von $\lambda = a_1$ sehr lebhaft, und schon in einem kleinen Intervalle hinter a_1 werden $(m+1)$ Halboszillationen eingetreten sein. Wir müssen also B so wählen, daß $A\lambda + B$ dicht hinter $\lambda = a_1$ bereits verschwindet, und von da ab positiv wird, daß also die betr. Kurve (E_1, u) sehr bald hinter a_1 von der Konvergenz zur Divergenz übergeht. — Analoge Betrachtungen gelten für solche Ausdrücke $A\lambda + B$, die für $\lambda = a_2$ einen bedeutenden negativen Wert aufweisen, während gleichzeitig (E_1, λ) nur $\left(\frac{m+1}{2}\right)$ mal im Intervall (a_1, a_2) oszillieren soll. Das heißt aber geometrisch: *daß unsere Enveloppe sich von der bereits bestimmten horizontalen Tangente nach abwärts zieht, und daß sie die beiden Linien $\lambda = a_1$ und $\lambda = a_2$ zu Asymptoten hat*.

Alles in allem genommen hat also unsere Enveloppe schematisch folgende Gestalt:

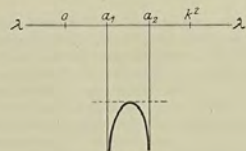


Fig. 3.

Ganz analoge Betrachtungen stelle man nunmehr für das Intervall (b_1, b_2) an, in welchem $(n+1)$ Halbozillationen von (E_2, λ) eintreten sollen. Dann wird nur, mit Rücksicht auf das rein imaginäre dv , der Unterschied Platz greifen, daß die betr. Horizontaltangente eine positive Ordinate besitzt und die Enveloppe nach oben gekehrt ist. Die beiden Enveloppen haben also gegeneinander die folgende Lage:

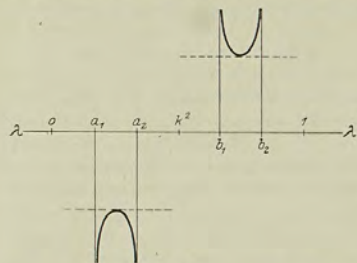


Fig. 4.

Nun waren unsere Behauptungen gegen Ende des vorigen Paragraphen auf den einen Satz zurückgeführt worden, daß die Zahlen m, n , welche das Verhalten der Kurven E_1, E_2 in ihren bez. Intervallen charakterisieren, allein hinreichen, um A, B zu bestimmen. Dies heißt offenbar, daß unsere zwei Enveloppen eine und nur eine gemeinsame Tangente besitzen sollen. Und daß dies in der Tat zutrifft, daß also unser Beweis erledigt ist, zeigt ein Blick auf unsere Figur. Zwei Kurven, die so gegeneinander liegen, wie unsere beiden Enveloppen, haben notwendig eine und nur eine gemeinsame Tangente. Man kann also in der Tat die Bedingungen des § 2 befriedigen und das dort formulierte Problem in dem auseinander gesetzten Sinne erledigen¹¹⁾.

Man beachte noch dieses. Im Falle der letzten Figur ist A notwendig positiv. Setzen wir also $A = \frac{s(s+1)}{4}$ und nennen s den Grad der Laméschen Funktion, so ist der Grad ein reeller. Hätten wir dagegen das Intervall (b_1, b_2) (zwischen k^2 und 1) mit dem Intervalle (c_1, c_2) (zwischen 1 und $+\infty$) zu kombinieren gehabt, uns also damit beschäftigt, eine willkürliche Funktion zu repräsentieren, die auf einem Stücke eines zweischaligen

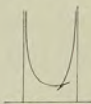


Fig. 5.

¹¹⁾ [Es wurde mir später gesagt, daß die Hüllkurve auch so gestaltet sein kann, wie es bestehende Figur zeigt; sie bietet dann also Vorkommnisse dar, wie sie früher (in Abh. XXXIX dieses Bandes) bei Kurven vierter Klasse ausführlich besprochen wurden. Für die im Text angestellten Betrachtungen, welche die Kurven als Umhüllungsgebilde von Geraden ansehen, macht dies keinen Unterschied. Man übersetze die Sachlage in das Dualistische. Dann handelt es sich etwa darum, daß zwei einander überkreuzende Kurven, deren Ordinaten mit wachsender Abszisse bez. zunehmen und abnehmen, sich gerade einmal treffen, unabhängig davon, ob die Kurven ein wenig geschlängelt sind oder nicht. K.]

Hyperboloids gegeben ist, so wäre A notwendig negativ, s also imaginär von der Form $-\frac{1}{2} + is'$ geworden. Dasselbe wäre eingetreten, wenn wir Ozillationen einerseits zwischen a_1, a_2 , andererseits zwischen c_1, c_2 verlangt hätten und $\frac{(m+1)^2}{(a_1 - a_2)^2}$ kleiner als $\frac{(r+1)^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}$ gewesen wäre (γ_1, γ_2 sollen die Integralwerte bedeuten, die c_1, c_2 entsprechen, und $r+1$ die Zahl der Halbozillationen zwischen c_1, c_2 sein). Diese Bemerkungen schließen als partikuläre Fälle gewisse Sätze in sich, die man aus der Theorie der Kugelfunktionen kennt¹²⁾.

§ 6.

Körper, begrenzt von beliebigen sechs konfokalen Flächen.

Es hat jetzt keinerlei Schwierigkeit, diese Untersuchungen auf den Fall eines beliebigen, endlichen, von sechs konfokalen Flächen begrenzten Körpers auszudehnen, mag sich der Körper von einem Oktanten des Koordinatensystems in einen zweiten hinüberziehen oder mag er sogar so gedacht werden, daß er gewisse Teile des Raumes mehrfach ausfüllt¹³⁾. Man wird einen solchen Körper in der Weise beschreiben, daß man nicht nur die Parameter $a_1, a_2; b_1, b_2$ und c_1, c_2 der begrenzenden Flächen angibt, sondern hinzufügt, wie durch das Innere des Körpers hindurch a_1 in a_2, b_1 in b_2, c_1 in c_2 übergeht. Die folgenden drei Figuren, welche sich nur auf das Intervall a_1, a_2 beziehen, werden genügen, um die unbegrenzt vielen hier denkbaren Möglichkeiten verständlich zu machen, und zugleich erläutern, wie man jeden Körper der gemeinten Art durch eine schematische Figur definieren kann:

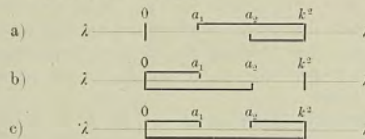


Fig. 6.

¹²⁾ Kugelfunktionen von imaginärem Grade werden bei Thomson und Tait in dem genannten Appendix erwähnt. Andererseits wurde bekanntlich Herr Mehler zur Betrachtung derselben geführt; er nennt dieselben Kegelfunktionen. Man vgl. die Aufsätze von Mehler und Neumann im 18. Bd. der Math. Annalen (1881), S. 161 und S. 195 ff. — Ich will dabei hinzufügen, daß der erste auf Kegelfunktionen bezügliche Aufsatz des Herrn Mehler im 68. Bande des Crelleschen Journals erschien (1868) und von 1867 datiert ist.

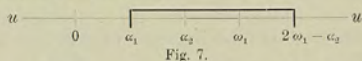
¹³⁾ Es hat keinen Zweck, diese Möglichkeit hier auszuschließen, weil die Methode der Behandlung für sie dieselbe ist, wie im anderen Falle.

Die Modifikation, der unsere bisherigen Betrachtungen zu unterwerfen sind, ist durch diese Figuren von selbst gegeben. Es handelt sich im wesentlichen darum, zu untersuchen, wie die Konstanten A, B der Lamé'schen Differentialgleichung beschaffen sein müssen, damit die Kurve (E_1, λ) eine beliebig vorgegebene Zahl $(m+1)$ von Halboszillationen ausführt, wenn a_1 auf dem vorgeschriebenen Wege in a_2 übergeht. Wir werden also zunächst untersuchen, wie sich allgemein die Kurve (E_1, λ) verhält, wenn das zwischen a_1 und a_2 bewegliche λ an einer Grenze $\lambda = k^2$ oder $\lambda = 0$ anlangt und dann seinen Bewegungssinn umkehrt. Sodann werden wir fragen, wie nunmehr die Enveloppe aller derjenigen Linien $\eta = A\lambda + B$ beschaffen sein wird, für welche (E_1, λ) im gegebenen Intervall die gewünschte Zahl von Nullstellen aufweist.

Was den ersten Punkt betrifft, so beachte man vor allem, daß das Integral

$$t = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot \lambda - k^2 \cdot \lambda - 1}}$$

bei der genannten Umkehr von λ ungehindert weiterläuft. Ich will des bestimmteren Ausdrucks wegen den Fall der Figur 6a zugrunde legen, bei welchem die Umkehr in $\lambda = k^2$ erfolgt. Wenn dann t von 0 auslaufend bei $\lambda = a_1, a_2, k^2$, wie wir oben annahmen, die Werte $\omega_1, \omega_2, \omega_1$ aufweist, so erreicht es, während λ von k^2 zu a_2 zurückkehrt, den Wert $2\omega_1 - \omega_2$, wie nachstehende Figur erläutert:



Hinsichtlich der Kurve (E_1, u) ist also nur dieses geändert, daß das Intervall, in welchem die $(m+1)$ Halboszillationen stattzufinden haben, über ω_1 hinausgreift: Eine Änderung, die für unsere Betrachtungen durchaus irrelevant ist. Hieraus folgt zumal, daß E_1 auch im neuen Intervalle durchaus endlich bleibt.

Wir übertragen jetzt (E_1, u) in (E_1, λ) , indem wir bei jedem λ als Ordinate diejenigen E auftragen, welche den entsprechenden Werten von u zugeordnet sind. Hierbei will insbesondere berücksichtigt sein, wie sich (E_1, λ) an der Stelle $\lambda = k^2$ verhält. Man hat allgemein:

$$\frac{dE}{du} = \frac{dE}{d\lambda} \cdot \sqrt{\lambda \cdot \lambda - k^2 \cdot \lambda - 1}$$

Wenn also $\frac{dE}{du}$ an der betreffenden Stelle nicht verschwindet, so ist $\frac{dE}{d\lambda}$ notwendig unendlich groß; die Linie $\lambda = k^2$ wird von der Kurve (E_1, λ) in einem bestimmten Punkte berührt; vom Berührungspunkte ab läuft

die Kurve, indem sie sich umbiegt, mit einem neuen Zweige rückwärts. Wenn aber $\frac{dE}{du}$ gleich Null ist, so kommt durch fortgesetztes Differenzieren:

$$\left(\frac{dE}{d\lambda}\right)_{\lambda=k^2} = \frac{2 \cdot \frac{d^2 E}{du^2}}{k^2(k^2-1)} = \frac{2E(Ak^2+B)}{k^2(k^2-1)}$$

Überdies beachte man, daß die Kurve (E_1, u) jetzt notwendig in bezug auf $u = \omega_1$ symmetrisch ist. Die Kurve (E_1, λ) existiert jetzt also nur in einem Zuge, der von $\lambda = a_1$ bis $\lambda = k^2$ und dann rückwärts von $\lambda = k^2$ bis $\lambda = a_2$ durchlaufen wird. Derselbe trifft die Linie $\lambda = k^2$ unter einem Winkel, der von den Werten der A, B, E abhängt. Es ist hier also die Möglichkeit gegeben, daß (E_1, λ) in das zweite Intervall $k^2 \leq \lambda \leq 1$ hinein reell fortgesetzt wird.

Diese Überlegungen hindern in keiner Weise die Betrachtung der Enveloppen des § 5; die Resultate gestalten sich nur etwas anders. Zuvörderst ist ersichtlich, daß die horizontale Tangente der Enveloppe die folgende geworden ist:

$$\eta = \frac{(m+1)^2 \pi^2}{(2\omega_1 - \omega_1 - \omega_2)^2}$$

Dann aber sage ich (indem ich immer am Falle der Figur 1 festhalte), daß $\lambda = a_1$ allerdings Asymptote geblieben ist, daß die andere Asymptote aber in $\lambda = k^2$ übergegangen ist, daß also die Enveloppe eine Gestalt hat, wie sie folgende Figur versinnlicht:

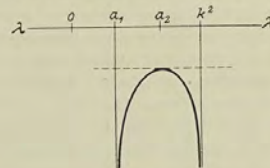


Fig. 8.

In der Tat, wenn $\eta = A\xi + B$ eine sehr steile Linie vorstellt, so darf derjenige Teil des uns vorgeschriebenen Intervalls, in welchem η negativ ist und in welchem daher die Oszillationen unserer Kurve stattfinden, nur sehr wenig ausgedehnt sein. Dieser Überlegung läßt sich aber nur Rechnung tragen, indem wir die Asymptoten in der angegebenen Weise wählen. —

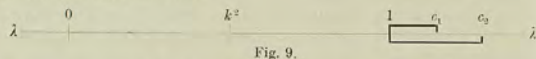


Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß sich die Lage der Asymptoten und somit die Gesamtgestalt der Enveloppe in allen übrigen Fällen ähnlich bestimmt; im Falle der Figur 6c z. B. würden $\lambda = 0$ und $\lambda = k^2$ die beiden Asymptoten sein.

Man sieht aber sofort, daß die so gewonnenen Enveloppen noch immer dieselbe Schlußweise gestatten, wie sie in § 5 für den dort betrachteten speziellen Fall begründet wurde. *Zwei Enveloppen über verschiedenen Intervallen haben immer eine und nur eine gemeinsame Tangente, mag der Weg, der innerhalb des einzelnen Intervalls vom einem Endpunkte zum anderen Endpunkte führt, beschaffen sein wie er will.*

Diese Schlußweise bildet aber den Kern unserer Überlegungen, und es bleiben die letzteren also auch für den allgemeinen uns jetzt vorliegenden Fall in Geltung, was zu beweisen war.

Vielleicht ist es zur vollen Deutlichkeit nützlich, noch eine Bemerkung über den Wert $E_3(c_2)$ hinzuzufügen. Es können c_1 und c_2 so verbunden sein, wie die Figur aufweist:



Man wird dann unter $E_3(c_2)$ denjenigen Wert verstehen, den E_3 annimmt, wenn λ von c_1 aus zunächst bis 1 abnimmt und dann erst bis c_2 wächst.

§ 7.

Das Vollellipsoid.

Wenn die vorhergehenden Untersuchungen für einen Körper verwertet werden sollen, der weniger als sechs verschiedene Begrenzungsflächen hat, so bedürfen sie zunächst einer gewissen Verallgemeinerung. Unsere Funktionen E_1, E_2, E_3 waren dadurch bestimmt, daß sie für gewisse feste Werte von λ und außerdem eine gewisse Anzahl von Malen zwischen diesen Werten verschwinden sollten. Aber man sieht leicht, daß dieselbe Methode, vermöge deren wir die eindeutige Bestimmtheit der betr. E_1, E_2, E_3 erschlossen, auch noch in anderen Fällen anwendbar ist. Wir können sie z. B. Wort für Wort wiederholen, wenn E_1 zwischen a_1 und a_2 nach wie vor m -mal verschwinden soll, aber bei a_1 und a_2 irgendwelchen anderen Bedingungen genügt, z. B. einen verschwindenden Differentialquotienten $\frac{dE}{du}$ besitzt.

Diese Bemerkung findet bei Körpern der nun zu betrachtenden Art im folgenden Sinne Verwertung. Solche Körper besitzen notwendig eine oder mehrere *Symmetrieebenen*. Nun ist es ein allgemeines Verfahren,

dessen man sich bei der Potentialaufgabe für symmetrische Körper seit je bedient: daß man einen solchen Körper längs der Symmetrieebenen zerschneidet und dann für den einzelnen so entstehenden Teil gewisse Fundamentalaufgaben löst. Dieselben verlangen sämtlich, ein Potential so zu bestimmen, daß es auf der ursprünglichen Oberfläche des bei der Zerschneidung entstandenen Teiles willkürlich vorgegebene Werte annimmt; sie unterscheiden sich dadurch, daß auf der einzelnen begrenzenden Ebene entweder das Potential selbst oder aber sein nach der Normale genommener Differentialquotient verschwinden soll. Die Lösung der anfänglichen Potentialaufgabe erwächst, indem wir die verschiedenen bei diesen Einzelproblemen gefundenen Potentiale durch die Symmetrieebenen hindurch fortsetzen und übrigens zusammenaddieren.

Betrachten wir nun gleich den Fall des Vollellipsoids. Wir zerschneiden dasselbe vorab längs seiner drei Symmetrieebenen. Der so entstehende *Oktant* kann als ein Körper aufgefaßt werden, der von sechs konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt ist. Nur die eine Begrenzungsebene nämlich vertritt eine einzelne Fläche zweiten Grades: das ist die Koordinatenebene YZ und die Fläche $\mu = 0$. Die beiden anderen repräsentieren Stücke von verschiedenen Flächen; die Ebene XY z. B. gehört zum Teil (soweit sie von der Fokalellipse des Systems umschlossen wird) dem Ellipsoid $\varrho = 1$, zum Teil der Regelfläche $\nu = 1$ an. — Für diesen Oktanten haben wir nun, indem wir bei jeder der drei Koordinatenebenen die beiden in Betracht kommenden Annahmen auseinanderhalten, im ganzen acht Einzelprobleme zu unterscheiden.

Es wird genügen, nur die beiden extremen Fälle genauer zu besprechen: bei dem einen handelt es sich um Herstellung eines Potentials, das auf sämtlichen drei Koordinatenebenen verschwindet, bei dem anderen soll der nach der Normale genommene Differentialquotient bei sämtlichen drei Koordinatenebenen gleich Null sein.

Im ersten Falle haben wir nur einen besonderen Fall der in §§ 2–5 behandelten Aufgabe: a_1 rückt in $\lambda = 0$, a_2 und b_1 fallen in $\lambda = k^2$, b_2 und c_1 in $\lambda = 1$ zusammen. Dies hat zur Folge, daß E_1, E_2, E_3 von etwa zutretenden irrelevanten Faktoren abgesehen, dieselbe Partikulärlösung der Laméschen Differentialgleichung vorstellen. Denn E_1 und E_3 verschwinden nun beide für $\lambda = k^2$, E_2 und E_3 beide für $\lambda = 1$. Allerdings läßt sich E_1 , da (E_1, λ) dem früheren zufolge die Linie $\lambda = k^2$ berührt, nicht *reell* über diese Linie hinaus fortsetzen. Aber eine leichte Überlegung läßt erkennen, daß E_1 in dem Intervalle $(\lambda > k^2)$ rein imaginär ist, also nach Abtrennung des irrelevanten Faktors i das gewollte E_2 liefert. — Alles übrige bleibt so wie im allgemeinen Falle. Die verschiedenen E_1, E_2, E_3 , welche in der Reihenentwicklung des gesuchten Potentials auf-



treten, entsprechen nach wie vor den verschiedenen möglichen Zahlenkombinationen m, n , die die Anzahl der Verschwindungsstellen in den Intervallen $0 - k^2$ und $k^2 - 1$ ergeben.

Im zweiten Falle haben wir die neue Form der Grenzbedingungen. Für $\mu = 0$, k^2 soll $\frac{d\bar{E}_1}{du}$, für $\nu = k^2$, 1 soll $\frac{d\bar{E}_2}{dv}$ und für $\varrho = 1$ soll $\frac{d\bar{E}_3}{dw}$ verschwinden¹⁴⁾. Hieraus ergibt sich ohne weiteres (wie schon im vorigen Paragraphen angedeutet wurde), daß E_1, E_2, E_3 nur verschiedene Benennungen derselben Partikulärlösung E sind; denn die Kurve (E_1, λ) z. B. zieht sich jetzt vom Intervalle μ in das Intervall ν ungehindert hinüber. Übrigens aber werden wir zur Lösung unserer Potentialaufgabe genau an den Bedingungen des § 2 festhalten. Wir werden das gesuchte Potential aus einer unendlichen Zahl von Produkten $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$ zusammensetzen, von denen das einzelne wieder durch die Anzahl m seiner Verschwindungsstellen im Intervalle μ und die Anzahl n seiner Verschwindungsstellen im Intervalle ν charakterisiert sein wird. Daß für eine solche Reihenentwicklung auch wieder die Integraleigenschaft gilt, folgt ähnlich wie in § 3 aus dem Greenschen Satze.

In entsprechender Weise behandle man die übrigen sechs Fälle. Dann ist man offenbar genau zu demjenigen Verfahren gekommen, welches Lamé für das dreiaxige Ellipsoid aufgestellt hat. Denn ich zeigte in meiner bereits in der Einleitung zitierten Note [Abh. LXII], daß die gewöhnlichen Laméschen Funktionen genau in der Weise ihre Nullstellen über die beiden Intervalle μ, ν verteilt haben, wie wir es hier von den sukzessiven Gliedern unserer Reihenentwicklung verlangen. In einer Hinsicht führt Lamés ursprünglicher Ansatz weiter als der meinige. Man verstehe unter $\sigma, \sigma', \sigma''$ Eins oder Null, je nachdem $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$ für $\lambda = 0, k^2, 1$ verschwindet, oder nicht. Dann folgt bei Lamé sofort, daß A , die erste in der Differentialgleichung auftretende Konstante, den folgenden Wert hat:

$$A = \frac{(2(m+n) + \sigma + \sigma' + \sigma'')(2(m+n) + \sigma + \sigma' + \sigma'' + 1)}{4} \quad (13).$$

Bei der von mir gegebenen Entwicklung bedürfte es dazu zuvörderst des Nachweises, daß $E_1 = E_2 = E_3$ im vorliegenden Falle eine algebraische

¹⁴⁾ Vgl. die Formel für $\frac{dE}{du}$ auf S. 534 und die für $\frac{\partial}{\partial n}$ in der Fußnote *) auf S. 527.

¹⁵⁾ [Die zur linearen Differentialgleichung (6) gehörigen Exponenten bei ∞ sind

$$-\frac{2(m+n) + \sigma + \sigma' + \sigma''}{2} \quad \text{und} \quad +\frac{2(m+n) + \sigma + \sigma' + \sigma'' + 1}{2}. \quad \text{K.}]$$

Funktion von λ ist¹⁶⁾. — Dagegen liegt bei Lamé das Theorem über die Verteilung der Nullstellen auf die verschiedenen Intervalle ziemlich fern¹⁷⁾, während es bei meiner nunmehrigen Darstellung als selbstverständlicher Ausgangspunkt gilt.

Leipzig, den 14. März 1881.

¹⁶⁾ [Den Nachweis hierfür findet man in dem Buch von Böcher: „Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie“, Leipzig 1894, S. 213f.]

¹⁷⁾ Offenbar bedeutet dies Theorem für die Berechnung der gewöhnlichen Laméschen Funktionen, daß man die Gleichungen höheren Grades, von denen die Bestimmung der zugehörigen Konstanten B abhängt, a priori separieren kann. Ich möchte mir vorbehalten, auf diesen Gegenstand bei einer späteren Gelegenheit einzugehen. [Siehe unten Abh. LXVI.]



LXIV. Zur Theorie der allgemeinen Laméschen Funktionen.

[Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen v. J. 1890. Nr. 4 (Sitzung vom 1. März 1890).]

Eine Vorlesung über Lamésche Funktionen, welche ich während des nun zu Ende gehenden Wintersemesters (1889/90) hielt, gab mir Gelegenheit, zu Auffassungen und Fragestellungen zurückzukehren, mit denen ich mich im Winter 1880—81 beschäftigt hatte¹⁾. Ich zweifelte von vornherein nicht, daß es gelingen müsse, auf dem damals eingeschlagenen Wege noch ein Stück weiter zu kommen. Ich hatte mir auch die Ansicht gebildet, daß eine richtige, von geometrischen bzw. physikalischen Gesichtspunkten ausgehende Theorie der Laméschen Funktionen für die allgemeine Lehre von den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorbildlich sein müsse. Der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften möchte ich nachstehend einige Resultate vorlegen, welche ich in der hiermit bezeichneten Richtung gefunden habe.

Wir fragen zunächst nach der zweckmäßigsten Definition der zu einem n -fach ausgedehnten Raume (R_n) gehörigen Laméschen Differentialgleichung. In dieser Hinsicht beginnt man herkömmlicherweise mit dem System der konfokalen Flächen zweiten Grades

$$(1) \quad \frac{x_1^2}{\lambda - e_1} + \dots + \frac{x_n^2}{\lambda - e_n} = 1$$

und findet durch bekannte Umformungen der Potentialgleichung die Lamésche Gleichung in der Gestalt:

$$(2) \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = (A\lambda^{n-2} + B\lambda^{n-3} + \dots + N)E,$$

wo

$$(3) \quad t = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad f(\lambda) = (\lambda - e_1) \dots (\lambda - e_n);$$

¹⁾ Vgl. die zwei Aufsätze im 18. Bande der Math. Annalen: „Über Lamésche Funktionen“ [= Abh. LXII], „Über die [Randwertaufgabe des Potentials für] Körper, welche von konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind“ [= Abh. LXIII].

ich habe schon bei früherer Gelegenheit hervorgehoben (in dem zweiten der soeben zitierten Aufsätze), daß es zweckmäßig ist, die hier auftretenden Konstanten A, B, \dots, N zunächst als unbeschränkt veränderlich zu betrachten und dadurch der gewöhnlichen Begriffsbestimmung der Laméschen Funktionen gegenüber eine Erweiterung eintreten zu lassen²⁾. Nun kann man aber den durch (1) gegebenen Ausgangspunkt beanstanden. In der Potentialtheorie, wo fortgesetzt Transformationen durch reziproke Radien in Betracht zu ziehen sind, ist das System der konfokalen Flächen zweiten Grades kein wirklich allgemeines Orthogonalsystem; als solches erscheint vielmehr erst das von Darboux und Moutard im Jahre 1864 aufgestellte System der *konfokalen Zykliden*, ein System von Flächen vierter Ordnung, das sich bei Verwendung überzähliger, homogener Koordinaten (x_1, \dots, x_{n+2}) (sogenannter polysphärischer Koordinaten) durch die zwei Gleichungen darstellen läßt:

$$(4) \quad \sum_1^{n+2} x_i^2 = 0, \quad \sum_1^{n+2} \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = 0.$$

Herr Wangerin ist der erste gewesen, der nachwies, daß man unter Zugrundelegung eines solchen Zyklidensystems in der Tat eine Theorie ganz ähnlich der Laméschen aufbauen kann³⁾. Seine Rechnungen beziehen sich allerdings nur auf $n=3$; es ist aber nicht schwer, sein Resultat auf beliebiges n zu übertragen; es tritt dann an Stelle von (2) die folgende Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = \left(\frac{4-n^2}{16} \lambda^n + \frac{n^2-2n}{16} \sum_1^{n+2} e_i \lambda^{n-1} + A\lambda^{n-2} + \dots + N \right) E,$$

wo t wiederum das Integral bezeichnet:

$$(6) \quad t = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

$f(\lambda)$ aber die Funktion $(n+2)$ -ten Grades bedeutet:

$$(7) \quad f(\lambda) = (\lambda - e_1) \dots (\lambda - e_{n+2}).$$

Offenbar kann man statt (5) auch schreiben:

$$(8) \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = \left(\frac{2-n}{16(n+1)} f''(\lambda) + a\lambda^{n-2} + \dots + \nu \right) E,$$

²⁾ Lamé und Heine bestimmen A, B, \dots bekanntlich so, daß eine Partikularlösung von (2) algebraisch wird; Hermite führt bei seinen allgemeineren, auf $n=3$ bezüglichen Untersuchungen, für A immer noch den besonderen im algebraischen Falle eintretenden Wert $\frac{s(s+1)}{4}$ ein (wo s eine positive ganze Zahl) und läßt dann freilich B beliebig. [Vgl. die unten folgende Abb. LXVII.]

³⁾ Crelles Journal, Bd. 82, 1876. Vgl. auch Darboux in den Comptes Rendus der Pariser Akademie, 1876, II, Bd. 83.



wo nun die α, \dots, ν beliebig sind. Es scheint fast, als habe man diesen Gleichungen (5), (8) bisher nur wenig Bedeutung beigelegt. Sicher kann man die Gleichung (2) als Spezialfall derselben auffassen (der entsteht, wenn man ϵ_{n+1} und ϵ_{n+2} unendlich werden läßt); aber es lag näher, (5) oder (8) als besonderen Fall derjenigen Gleichungen (2) zu deuten, die dem Raume von $(n+2)$ Dimensionen entsprechen. Und dieser Fall schien anfangs kein besonderes Interesse darzubieten, weil man die $(n-1)$ bei ihm noch zur Verfügung stehenden Konstanten keineswegs so bestimmen kann, daß eins der zugehörigen E algebraisch wird. Auch hat die Form der neuen Differentialgleichung (5), (8) zunächst wenig Ansprechendes. Singuläre Punkte hat dieselbe, wie dies natürlich scheint, bei $\lambda = \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+2}$; aber auch $\lambda = \infty$, d. h. ein Wert, der für das Zyklidensystem (4) vom geometrischen Standpunkt aus ohne jede spezifische Bedeutung ist, erscheint als singulärer Punkt. Die zu $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+2}$ gehörigen Exponenten berechnen sich dabei als $\frac{1}{2}$ und 0, die zu ∞ gehörigen als

$$\frac{n-2}{4} + 1 \text{ und } \frac{n-2}{4}.$$

Inzwischen gelingt es durch eine ganz unbedeutende formale Abänderung unsere Gleichung in ganz anderem Lichte erscheinen zu lassen. Die bei $\lambda = \infty$ auftretenden Exponenten leiten auf den richtigen Weg. Man setze nämlich, homogen machend,

$$\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$$

und schreibe

$$(9) \quad E(\lambda) = \lambda_2^{\frac{n-2}{4}} \cdot F(\lambda_1, \lambda_2),$$

wo F jetzt eine homogene Funktion (eine *Form*) von λ_1, λ_2 vom Grade

$$\frac{2-n}{4}$$

sein wird, die ich gleich als *Lamésche Form* bezeichnen will. Sei ferner jetzt unter f die Form $(n+2)$ -ten Grades verstanden:

$$(10) \quad f = (\lambda_1 - \epsilon_1 \lambda_2) \dots (\lambda_1 - \epsilon_{n+2} \lambda_2).$$

Man erhält dann (nach kurzer Umrechnung mittels des Eulerschen Theorems) ein Resultat, welches nur noch von der Form f als solcher abhängig ist; man findet nämlich:

$$(11) \quad (f, F)_2 = \varphi \cdot F,$$

wo $(f, F)_2$ die *zweite Überschiebung* der Formen f und F vorstellt, φ aber eine *durchaus beliebige rationale ganze Form* $(n-2)$ -ten Grades ist.

Dieses Resultat erscheint so einfach, daß man nicht umhin kann, dasselbe überhaupt an die Spitze der Theorie der Laméschen Funktionen zu stellen und dementsprechend *Lamésche Funktionen, oder vielmehr*

Lamésche Formen, des R_n geradezu als solche Formen $\binom{2-n}{4}$ -ten Grades von λ_1, λ_2 zu definieren, welche zweimal über eine gegebene f_{n+2} geschoben, sich selbst bis auf einen Faktor φ_{n-2} reproduzieren⁴⁾. Die einzigen singulären Stellen der so definierten F sind, wie bereits angedeutet, die Wurzeln von $f=0$. Sind diese Wurzeln alle getrennt (wie wir bisher stillschweigend voraussetzten), so gehören zu jeder einzelnen derselben die soeben genannten Exponenten $\frac{1}{2}$ und 0, — rücken aber irgendwo zwei oder mehrere derselben zusammen, so erhält man höhere Exponenten bzw. irreguläres Verhalten. Der gewöhnliche Fall der durch (2) definierten Funktion entsteht, wenn f eine Doppelwurzel erhält (die man dann nach $\lambda = \infty$ wirft). Übrigens kann man, wenn man f mit beliebig vielfachen Wurzeln ausstatten will und sich vorbehält, von der Form F der homogenen Variablen λ_1, λ_2 durch Zufügung irgendwelcher Faktoren zu Funktionen von λ zurückzugehen, *sämtliche lineare Differentialgleichungen zweiter*

⁴⁾ [Hilbert scheint der erste gewesen zu sein, der so, wie es im Text geschieht, eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung durch ein Aggregat von Überschiebungen ersetzt hat; siehe seine Königsberger Dissertation von 1885 (im Auszug abgedruckt in den Math. Annalen Bd. 30, S. 15 ff.), wo die Differentialgleichung der Kugelfunktionen bzw. die allgemeine hypergeometrische Differentialgleichung homogenisiert werden. Es ist dabei aber immer noch vorwiegend an den Fall der rationalen ganzen Lösungen gedacht. Erst in der Mitteilung von Pick an die Wiener Akademie vom 14. Juli 1887 (Berichte Bd. 96, S. 872) wird nachdrücklich betont, daß auch im Falle transzendenter Lösungen das gleiche Verfahren anwendbar und in mancherlei Hinsicht vorteilhaft ist. Die Entwicklungen, welche Pick dort für den Hermiteschen Fall gibt (vgl. die hier folgende Arbeit LXVII), gehen indes nach einer anderen Richtung als die im Text gegebenen. Er hat zunächst eine Differentialgleichung mit vier singulären Punkten, welche bzw. die Exponenten

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{s}{2} \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{s+1}{2} \end{array}$$

besitzen. Durch eine in der Theorie der elliptischen Funktionen übliche algebraische Transformation kann sie in eine andere, ebenfalls mit vier singulären Punkten verwandelt werden, die nun aber sämtlich die Exponenten $-\frac{s}{2}, +\frac{s+1}{2}$ besitzen. Seien diese vier singulären Punkte durch $f(x_1, x_2) = 0$ gegeben, so führt Pick statt

der Lösung v der Differentialgleichung die Form $\varphi = v \cdot f^{\frac{s}{2}}$ oder auch die andere $\varphi = v \cdot f^{-\frac{s+1}{2}}$ ein, worauf die zweite Überschiebung von f und φ gleich $C \cdot \varphi$ bzw. die zweite Überschiebung von f und φ gleich $C' \cdot \varphi$ wird. Merkwürdigerweise findet sich genau dieselbe Umformung der Hermite-Laméschen Differentialgleichung in der Darstellung, welche Halphen von der Gesamtheorie dieser Gleichung in Bd. 2 seiner Theorie des fonctions elliptiques gibt (1888, vgl. S. 472–473), nur daß hier wieder alle Aufmerksamkeit darauf gerichtet ist, die polynomialen Lösungen herauszuheben. K.] — Es ist wohl kein Zweifel, daß die geeignete Verwendung homogener Variabler in der Theorie der linearen Differentialgleichungen noch vielfache Vereinfachungen nach sich ziehen wird.



Ordnung mit rationalen Koeffizienten unter (11) rubricieren. Die Lamésche Differentialgleichung hat also in der Tat eine wesentlich allgemeinere Bedeutung. Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe z. B. entsteht aus (11), wenn man f als eine Form sechsten Grades einführt, die ein volles Quadrat ist.

Noch ein weiterer funktionentheoretischer Gesichtspunkt spielt hier herein. Wählt man f wieder als Form sechsten Grades, aber nun mit getrennten Wurzeln, so definiert (11) solche Formen F vom Grade $-\frac{1}{2}$, welche auf dem hyperelliptischen Gebilde \sqrt{f} durchaus unverzweigt sind. Man überzeugt sich leicht, daß diese F unter allen Formen, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten genügen, die einzigen sind, welche die genannte Eigenschaft besitzen. Nicht so bei höherem Grade von f . Sei $n = 2p$ gesetzt, p aber > 2 genommen, so werden die allgemeinsten zum hyperelliptischen Gebilde $\sqrt{f_{2p+2}}$ gehörigen unverzweigten F durch die Gleichung geliefert:

$$(12) \quad (f, F)_2 = (q_{2p-2} + \psi_{p-3} \sqrt{f}) \cdot F,$$

die sich von (11) durch das Glied mit \sqrt{f} unterscheidet. Die Anzahl der hier in q und ψ zusammen enthaltenen willkürlichen Konstanten ist $3p - 3$, der Grad von F gleich $-\frac{p-1}{2}$. Die Theorie von (11) wird als Vorbereitung der allgemeinen Theorie der Gleichungen (12) erachtet werden können⁵⁾.

⁵⁾ Sind F_1, F_2 irgend zwei Partikularlösungen von (12), so ist der Quotient $\eta = F_1 : F_2$ eine auf dem hyperelliptischen Gebilde unverzweigte „Funktion“, welche bei jedem geschlossenen Umlaufe über die zu \sqrt{f} gehörige Riemannsche Fläche hin sich in der Gestalt $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ reproduziert. Daß es auf jedem algebraischen Gebilde,

dessen $p > 1$, ∞^{2p-3} wesentlich verschiedene (durch ihre Differentialgleichung unterschiedene) derartige η -Funktionen gibt, ist bekannt (vgl. z. B. meine „Neuen Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie“ im 21. Bande der Mathem. Annalen. 1882 [wird in Bd. 3 dieser Ausgabe unter Nr. CIII abgedruckt]). Man hatte aber bisher, soviel ich weiß, diese η noch nicht in zwei Formen F_1, F_2 als Zähler und Nenner derart gespalten, daß F_1 und F_2 für sich genommen auf dem algebraischen Gebilde gleichfalls unverzweigt sind. Dies gelingt aber sofort allgemein, wenn man diejenigen Erläuterungen heranzieht, die ich über die auf beliebigen algebraischen Gebilden existierenden Formen neuerdings gegeben habe (Zur Theorie der Abelschen Funktionen. Math. Annalen, Bd. 36. [Auch diese Arbeit kommt erst in Bd. 3 gegenwärtiger Ausgabe als Nr. XCVII zum Abdruck.]) Der Grad der betr. F_1, F_2 in den zum Gebilde gehörigen Riemannschen Formen q ist allemal gleich $-\frac{1}{2}$, in Übereinstimmung mit dem, was im Texte speziell für hyperelliptische Gebilde bemerkt ist. [Hinsichtlich der allgemeinen algebraischen Gebilde vgl. die unten in Nr. LXIX auf S. 585, 586 gemachten Bemerkungen.]

⁶⁾ [Bis hierher ist die vorstehende Arbeit fast wörtlich in den Math. Annalen Bd. 38 (1890) als erster Teil der Abhandlung „Über Normierung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ abgedruckt. Der zweite Teil dieser letztgenannten Arbeit folgt hier als Abb. LXVI unter dem neuen Titel: „Zur Darstellung der hypergeometrischen Funktion durch bestimmte Integrale.“]

Ich muß nun etwas genauer auf die zweite der beiden zu Anfang genannten Arbeiten aus Band 18 der Math. Annalen eingehen (Über [die Randwertaufgabe des Potentials für] Körper, welche von konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind [= Abb. LXIII]). Indem ich mir, für den besonderen Fall $n = 3$, unter Zugrundelegung der konfokalen Flächen zweiten Grades (1) die geometrische Bedeutung der in der Potentialtheorie auftretenden Produkte Laméscher Funktionen klar machte, wurde ich dort für die zugehörige Lamésche Differentialgleichung:

$$(13) \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = (A\lambda + B)E$$

zu einem Theorem geführt, welches ich kurz als *Oszillationstheorem* bezeichnen möchte, weil in demselben von den Oszillationen die Rede ist, welche geeignete Partikularlösungen $E(\lambda)$ von (13) in gegebenen Intervallen der λ -Achse ausführen. Ich bemerkte nämlich, daß man die in (13) auftretenden Konstanten A, B gerade auf eine Weise so bestimmen kann, daß für zwei beliebig gegebene Segmente S, T der λ -Achse (welche nur über keinen singulären Punkt hinausgreifen sollen) je eine Partikularlösung $E(\lambda)$ existiert, welche für ihr Segment die Bedingungen befriedigt:

an den beiden Enden des Segmentes gegebene Werte von $\frac{E'}{E}$ darzubieten (wo $E' = \frac{dE}{dt}$), innerhalb des Segmentes aber eine vorgeschriebene Anzahl von Malen zu verschwinden. Die gewöhnlich allein betrachteten, zur Gleichungsform (13) gehörigen algebraischen $E(\lambda)$ erhielt ich dabei, indem ich die Segmente S, T mit den von e_1 bis e_2 bzw. von e_2 bis e_3 reichenden Stücken der λ -Achse zusammenfallen ließ und bei jedem einzelnen e_i $E = 0$ oder auch $E' = 0$ als Grenzbedingung vorschrieb. Hieran schloß sich der Nachweis, daß man bei allgemeiner Wahl der S, T Funktionen E erhält, mittels deren man für einen beliebigen von sechs konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzten Körper Reihenentwicklungen aufstellen kann, die für diesen das fundamentale Potentialproblem in derselben Weise lösen, wie dies Lamés eigene Reihen für das dreiachsige Ellipsoid tun. Es ist leicht, alle diese Betrachtungen mutatis mutandis an die allgemeine (einem beliebigen Werte von n zugehörige) Differentialgleichung (11) anzuknüpfen: die $(n-1)$ dortselbst in q enthaltenen unbestimmten Konstanten werden festgelegt werden können, indem man betreffs $(n-1)$ auf der λ -Achse gegebener Segmente geeignete Forderungen stellt; die fundamentale Potentialaufgabe wird sich dann für solche Raunteile des R_n behandeln lassen, die von $2n$ konfokalen Zykliden begrenzt sind. Die solchergestalt entstehenden Lösungen begreifen die große Mehrzahl aller Reihenentwicklungen (und Integraldarstellungen) in sich, welche die Potentialtheorie kennt; es wird so in einem Gebiete, in welchem



bislang viele Einzelheiten unvermittelt nebeneinander standen, Übersicht und Ordnung eingeführt. Es ist nicht meine Absicht, dies hier genauer durchzuführen; es muß dies einer ausführlichen Einzeldarstellung vorbehalten bleiben⁷⁾. Die folgenden Bemerkungen sollen sich vielmehr darauf beziehen, aus dem genannten Oszillationstheorem Folgerungen nach einer anderen Seite zu ziehen. Ich werde nämlich λ fortan als eine komplexe Variable betrachten und von der *konformen Abbildung* handeln, welche der Quotient η irgend zweier Partikularlösungen F_1, F_2 einer durch das Oszillationstheorem festgelegten Laméschen Differentialgleichung von der Halbebene λ entwirft.

Sei $f=0$ der Einfachheit halber mit durchaus reellen, getrennten Wurzeln vorausgesetzt. Der allgemeine Charakter des in der η -Ebene gelegenen Bildes ist dann mit Rücksicht auf die über die singulären Punkte e_1, \dots, e_{n+2} früher gemachten Angaben durch ein bekanntes, zuerst von Schwarz⁸⁾ aufgestelltes Theorem festgelegt. Es wird sich in der η -Ebene um ein *Kreisbogenpolygon* handeln, dessen Inneres keinen Windungspunkt einschließt, dessen sämtliche Winkel rechte sind, und dessen $(n+2)$ Seiten selbstverständlich den aufeinanderfolgenden Stücken der λ -Achse von e_1 bis e_2 , von e_2 bis e_3, \dots , von e_{n+2} bis e_1 entsprechen. Ich will nun weiter der Einfachheit halber annehmen, daß die Segmente S, T, \dots , von denen das Oszillationstheorem handelt, je von einem singulären Punkte e_i bis zum nächstfolgenden e_{i+1} hinreichen; daß ferner die Partikularlösungen F , welche den einzelnen Segmenten zugehören (und die also innerhalb dieser Segmente je eine vorgeschriebene Anzahl von Nullstellen haben) an den Enden des Segmentes $F=0$ oder $F'=0$ [wo $F' = \frac{dF}{d\lambda}$] befriedigen sollen. Die Behauptung ist, daß unter so bewandten Umständen die *Ausdehnung desjenigen Kreisbogenstückes der η -Ebene, welches dem einzelnen Segmente $e_i - e_{i+1}$ zugehört, genau angegeben werden kann*. Es genügt zu dem Zwecke, neben dem zu unserem Segmente gehörigen, in diesem Segmente reellen F irgendeine andere im Segmente reelle Partikularlösung (F') zu betrachten und zunächst $\eta = \frac{F}{F'}$ zu setzen. Indem sich die Nullstellen von F und (F') innerhalb des Segmentes notwendig wechselseitig separieren, ergibt sich sofort:

Satz 1. Wenn in e_i und e_{i+1} für die zum Segmente gehörige Partikularlösung übereinstimmend $F=0$ vorgeschrieben ist, so *überschlägt*

⁷⁾ [Diese hat in der Folge Böcher in dem Buche „Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie“ (1894, bei Teubner) gegeben; siehe auch die Bemerkung auf S. 592 Fußnote ¹⁴⁾. Die von Böcher nicht behandelten Konvergenzfragen hat Hilb auch für Zykliedensechsfache erledigt; vgl. S. 525 Fußnote ⁹⁾.]

⁸⁾ [Daß dies Theorem schon Riemann bekannt war, soll im folgenden nicht immer erwähnt werden. Vgl. die Fußnote ¹⁾ auf S. 256 dieses Bandes.]

sich der dem Segmente in der η -Ebene zugehörige Kreisbogen genau $(m+1)$ mal (unter m die Anzahl der Nullstellen von F im Segmente verstanden). Die Bilder ζ_i und ζ_{i+1} von e_i und e_{i+1} fallen also auf dem betreffenden Kreisbogen zusammen. Von ihnen aus biegen dann die weiteren Kreisbogen, die den jenseits e_i und e_{i+1} folgenden Stücken der λ -Achse entsprechen, rechtwinklig ab, berühren sich also in ihrer gemeinsamen Einmündungsstelle.

Etwas mehr Mühe verursacht die Erledigung der anderen Fälle; ich führe dies nicht im einzelnen aus, sondern gebe gleich die Resultate. Man erhält:

Satz 2. Ist in e_i $F=0$, dagegen in e_{i+1} $F'=0$ vorgeschrieben, so wird es sich in der η -Ebene sozusagen nur noch um $(m + \frac{1}{2})$ -malige *Umspannung eines Kreises* handeln. Die Bilder ζ_i und ζ_{i+1} von e_i und e_{i+1} werden nämlich auf dem sie verbindenden Kreisbogen derartig getrennt liegen, daß der in ζ_{i+1} rechtwinklig abbiegende Kreisbogen (welcher dem jenseits e_{i+1} folgenden Stücke der λ -Achse entspricht) verlängert durch ζ_i hindurchgeht (und dort dann den anderen, von ζ_i rechtwinklig abbiegenden Kreisbogen berührt).

Satz 3. Ist endlich sowohl in e_i wie in e_{i+1} $F'=0$ gegeben, so wird unsere Polygoneite ihren Kreis nur noch *wenig mehr als m -fach umspannen*; die beiden weiteren Polygoneiten, welche in ζ_i und ζ_{i+1} rechtwinklig abbiegen, werden sich auch jetzt berühren, *aber in einem von ζ_i und ζ_{i+1} verschiedenen Punkte* (der übrigens selbstverständlich seinerseits auch dem Kreise angehört, längs dessen sich die erste Polygoneite erstreckt⁹⁾).

Die Bedeutung des Oszillationstheorems aber wird die, daß bei gegebenem f , d. h. bei gegebenen $e_1 \dots e_{n+2}$, das zugehörige Kreisbogenpolygon der η -Ebene *völlig bestimmt ist*¹⁰⁾, sobald ich von $(n-1)$ seiner Seiten ein Verhalten im Sinne von Satz 1, 2 oder 3 vorschreibe. Ich

⁹⁾ [Zu den drei eben besprochenen Fällen seien hier noch Figuren für $m=0$ gegeben, welche ich meiner unter Nr. LXIX besprochenen autographierten Vorlesung

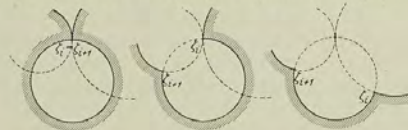


Fig. 1.

v. J. 1894 über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung entnehme. Vgl. S. 308 dasselbst. K.]

¹⁰⁾ D. h. von linearen Transformationen des η abgesehen völlig bestimmt ist.

zweifle nicht, daß dieser Satz eine allgemeine Bedeutung für die Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung besitzt. Denn er führt dazu, wenn die singulären Stellen einer Differentialgleichung mit den zugehörigen Exponenten gegeben sind, als weitere Bestimmungsstücke der Differentialgleichung allgemein die *Längen* der in der η -Ebene auftretenden Polygonseiten einzuführen.

Möge hier aus unserem Satze nur eine ganz partikuläre funktionentheoretische Folgerung gezogen werden. Sei f insbesondere vom sechsten Grade; wir nehmen die Verschwindungspunkte von f wieder getrennt und reell, und benennen sie nach ihrer Aufeinanderfolge auf der λ -Achse mit e_1, e_2, \dots, e_6 . Ich werde nun die drei Intervalle von e_1 bis e_2 , von e_3 bis e_4 , von e_5 bis e_6 ins Auge fassen und für jedes derselben ein Verhalten im Sinne von Satz 2. vorschreiben, indem ich gleichzeitig die zugehörigen m sämtlich gleich Null setze. Mögen wir jetzt η insbesondere so wählen, daß das Bild des von e_3 bis e_4 reichenden Stückes der λ -Achse in der η -Ebene geradlinig wird. Eine leichte geometrische Überlegung zeigt dann, daß infolge von 2. und der allgemeinen dadurch entstehenden Lageverhältnisse die Bilder der Intervalle von e_2 bis e_3 und von e_4 bis e_5 gleichfalls geradlinig werden und *in dieselbe gerade Linie hineinfallen*. Den Intervallen $e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6$ aber entsprechen einfach *von dieser geraden Linie begrenzte Halbkreise*. (Das Polygon der η -Ebene läßt sich am kürzesten beschreiben als eine von einer Geraden begrenzte Halbebene, aus welcher man vom Rande aus drei halbe Kreisscheiben herausgeschnitten hat.) Wollen wir jetzt die ganze λ -Ebene in Betracht ziehen, nachdem wir dieselbe längs der drei Segmente $e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_5 - e_6$ der reellen Achse mit Einschnitten versehen haben! Offenbar entspricht derselben jetzt *ein schlichtes, von drei Vollkreisen umgrenztes Stück der η -Ebene*.

Wir erhalten hieraus ein Bild der zur hyperelliptischen Irrationalität \sqrt{f} gehörigen Riemannschen Fläche, indem wir dem genannten Stücke der η -Ebene noch eines derjenigen hinzufügen, welche sich aus ihm durch Inversion an einem seiner drei Begrenzungskreise ergeben. *Hiermit aber ist für den Fall des hyperelliptischen Gebildes \sqrt{f} diejenige konforme Abbildung geleistet, deren Möglichkeit und Bestimmtheit ich in Band 19 der Math. Annalen (Weihnachten 1881) für beliebige algebraische Gebilde behauptet habe¹¹⁾*. Es war bis jetzt nicht gelungen, dieses letztere Theorem auf andere Art als durch Kontinuitätsbetrachtungen zu erweisen, die von der in der η -Ebene gelegenen Figur ihren Ausgang nehmen: hier haben wir, allerdings nur für den einfachen Fall eines hyperelliptischen

¹¹⁾ Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich. (Erste Mitteilung.) [Diese Abh. wird in Bd. 3 gegenwärtiger Ausgabe als Nr. CI abgedruckt.]

Gebildes mit sechs reellen Verzweigungspunkten, eine Konstruktion des betr. η vom gegebenen algebraischen Gebilde aus.

Es knüpft sich hieran noch eine weitere neue Bemerkung, welche auf die oben gegebene Einführung homogener Variabler zurückgeht. Bekanntlich sind λ und $\sqrt{f(\lambda)}$ in dem soeben gefundenen η eindeutig; sie stellen solche eindeutige Funktionen von η vor, welche sich bei unendlich vielen linearen Substitutionen von η reproduzieren (ich möchte vorschlagen, solche Funktionen überhaupt *automorphe Funktionen* von η zu nennen). Auch die Integrale

$$u_1 = \int \lambda_1 d\omega, \quad u_2 = \int \lambda_2 d\omega,$$

wo

$$d\omega = \frac{(\lambda d\lambda)}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

werden eindeutig in η . Nun hatten wir doch von vornherein $\eta = F_1 : F_2$ gesetzt, wo F_1, F_2 Formen $(-1/2)$ -ter Dimension in λ_1, λ_2 waren. Man findet hieraus unter Benutzung der Differentialgleichung (11):

$$(14) \quad F_2 dF_1 - F_1 dF_2 = x d\omega,$$

wo x eine unbestimmt bleibende numerische Konstante. Jetzt ist

$$d\eta = \frac{F_2 dF_1 - F_1 dF_2}{F_2^2}.$$

Wir erhalten also:

$$(15) \quad \lambda_1 = \frac{x}{F_2^2} \cdot \frac{du_1}{d\eta}, \quad \lambda_2 = \frac{x}{F_2^2} \cdot \frac{du_2}{d\eta},$$

so daß sich λ_1, λ_2 als eindeutige Formen (-2) -ten Grades von F_1, F_2 darstellen. Übrigens weist man leicht nach (oder schließt es aus (14)), daß F_1, F_2 den unendlich vielen linearen Substitutionen von η entsprechend selber binäre lineare Substitutionen von der Determinante 1 erleiden. Bei diesen bleiben dann λ_1, λ_2 ungeändert; ich schlage dementsprechend vor, *dieselben als automorphe Formen von F_1, F_2 zu bezeichnen*.

Auch dieses Resultat verallgemeinert sich auf beliebige algebraische Gebilde. Sei nämlich η auf einem solchen Gebilde unverzweigt. *Setzt man dann η gleich dem Quotienten zweier Formen F_1, F_2 , welche auf dem algebraischen Gebilde selber unverzweigt sind* (vgl. die Fußnote ⁵⁾ zu S. 544), *so hat man immer Formel (14)*. Dabei bedeutet $d\omega$ denjenigen zum algebraischen Gebilde gehörigen Differentialausdruck, welchen ich im vorigen Jahre in meiner ersten der Sozietät vorgelegten Note: „Zur Theorie der Abelschen Funktionen“ eingeführt habe¹²⁾.

¹²⁾ Vgl. auch den schon oben genannten Aufsatz in Bd. 36 der Math. Annalen [= Abh. XC VII in Bd. 3 dieser Ausgabe].



LXV. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.

[Math. Annalen, Bd. 37 (1890).]

Nachstehend entwickle ich einige Betrachtungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$F(l, m, n, x) = 1 + \frac{l \cdot m}{1 \cdot n} x + \frac{l \cdot l + 1 \cdot m \cdot m + 1}{1 \cdot 2 \cdot n \cdot n + 1} x^2 + \dots$$

welche darin gipfeln, daß ich die Anzahl der Nullstellen bestimme, die F zwischen $x = 0$ und $x = 1$ besitzt. Ich hoffe, daß nicht nur das so erhaltene Resultat einiges Interesse erregt¹⁾, sondern auch die zur Herleitung desselben angewandte Methode. Irre ich nicht, so wird diese Methode bei der ferneren Untersuchung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung noch mannigfache Dienste leisten können.

§ 1.

Von der charakteristischen Zahl X , welche einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich eines Intervalls zukommt.

Sei irgendwelche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung vorgelegt:

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + p \cdot \frac{dy}{dx} + q \cdot y = 0,$$

deren Koeffizienten p, q zunächst nur der einen Bedingung unterworfen sein sollen, *reell* zu sein (wie wir denn überhaupt zunächst nur reelle Werte auch der Variablen x, y in Betracht ziehen). Wir grenzen auf der X -Achse irgendein Intervall AB ab, welches weder einen singulären

¹⁾ In der Tat dürfte dieses Resultat neu sein; es scheint nicht, daß die im Texte bezeichnete Frage, trotz ihrer Einfachheit, bisher von anderer Seite behandelt wurde; von speziellen Fällen, wie Kugelfunktionen usw., natürlich abgesehen. — Stieltjes in Bd. 100 der *Comptes Rendus* (1885) und Hilbert in Bd. 103 des *Journal für Mathematik* (1887) behandeln den Fall der mit einer endlichen Gliederzahl abbrechenden hypergeometrischen Reihe. [Sie beschränken sich aber darauf, die Gesamtzahl der reellen Wurzeln von $F = 0$ abzuzählen, zum Teil auch abzugrenzen, nicht aber für die einzelnen Intervalle $\infty 0, 0 1, 1 \infty$ die Anzahlen zu bestimmen. K.]

Punkt von (1) enthalten, noch an einen solchen heranziehen soll, und betrachten den Verlauf, welchen irgendwelche reelle Lösung y von (1) in diesem Intervalle nimmt. Wird y im genannten Intervalle, indem es immer wieder durch Null hindurchgeht, auf und ab oszillieren, oder wird es, wenn überhaupt, nur einmal zu Null werden? Und wie groß wird im ersteren Falle die Zahl der in unser Intervall fallenden Nullstellen sein?

Die so bezeichneten Fragen liegen jedenfalls außerordentlich nahe. Aber es scheint, daß dieselben seit den schönen Untersuchungen von Sturm in den Bänden 1 und 2 von Liouvilles *Journal* (1836–37) kaum mehr ernstlich bearbeitet worden sind. Sturm gibt dort u. a. das wichtige Theorem, daß die Nullstellen irgend zweier linear-unabhängiger Lösungen y_1, y_2 von (1) im Intervalle AB notwendig abwechseln (so daß also in unserem Intervalle die Wurzeln der Gleichung $y_1 = 0$ von denjenigen der Gleichung $y_2 = 0$ separiert werden, und umgekehrt). Anschließend hieran will ich dem Intervalle AB bezüglich der Differentialgleichung (1) eine bestimmte charakteristische Zahl zuordnen, welche fernerhin mit X bezeichnet werden soll. Sei nämlich y_2 eine solche Lösung von (1), welche in dem einen Endpunkte des Intervalls, etwa in A , verschwindet. Mit X bezeichne ich sodann die Anzahl der Nullstellen, welche dieses y_2 im Innern des Intervalls besitzt (so daß also nicht nur die Nullstelle in A nicht mitgezählt wird, sondern auch nicht eine etwa nach B fallende Nullstelle). Aus dem Sturmischen Satze folgt dann sofort, daß jede andere Partikularlösung y_1 von (1) innerhalb AB mindestens X -mal und höchstens $(X+1)$ -mal verschwindet. Auf dieses X nun richten wir unsere Fragestellung. Wir werden verlangen dürfen, bei irgendwelcher gegebenen Differentialgleichung (1) für jedes Intervall AB die Zahl X wirklich zu berechnen. Die so bezeichnete Problemstellung wird sofort noch ein wenig erweitert werden, übrigens in der vorliegenden Arbeit nur im ganz speziellen Falle zur Erledigung gelangen.

§ 2.

Einführung des Quotienten $y_1 : y_2 = \eta$.

Unter y_1, y_2 mögen wieder zwei solche Partikularlösungen von (1) verstanden werden, wie wir sie gerade betrachteten, so also, daß y_1 von y_2 linear unabhängig ist, und y_2 im Punkte A verschwindet. Der bestimmteren Ausdrucksweise halber will ich noch annehmen, daß y_1 im Punkte A negativ sei, während y_2 von A beginnend positive Werte annehmen mag. Wir bilden uns den Quotienten $y_1 : y_2 = \eta$ und fragen, wieso in den Werten, die er längs des Intervalls AB annimmt, die charakteristische Zahl X zur Geltung gelangt. Offenbar beginnt η bei $x = A$



mit dem Werte $-\infty$ und geht, während x von A bis B läuft, im ganzen X -mal durch ∞ hindurch. Aber zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Unendlichkeitsstellen unseres η liegt dem Sturmischen Satze zufolge eine und nur eine Nullstelle desselben. Wir verallgemeinern dies leicht, indem wir neben y_2 und y_1 irgendeine lineare Kombination $y_1 - Cy_2$ ins Auge fassen und auf sie und y_2 den Sturmischen Satz anwenden. Wir erkennen dann, daß η zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Unendlichkeitsstellen überhaupt jeden reellen Wert C einmal und nur einmal annimmt. Während x von A bis B läuft, läuft hiernach η , ohne zwischen durch umzukehren oder auch nur stehen zu bleiben, immer wiederholt von $-\infty$ bis $+\infty$. Und zwar vollendet es diesen Weg im ganzen X -mal, — eine Aussage, bei welcher der Endpunkt B als nicht mehr unserem Intervalle angehörig angesehen wird, weil sonst in dem besonderen Falle, daß B Nullstelle für y_2 ist, $(X+1)$ Durchlaufungen der genannten Wertreihe zu zählen sein würden.

An die so gewonnene neue Bedeutung des X knüpft nun sofort die Verallgemeinerung, welche wir gerade in Aussicht stellten. Ich will annehmen, daß unsere Differentialgleichung (1) eine Reihe reeller singulärer Punkte besitzen möge, die mit $x=a, x=b, \dots$ bezeichnet sein sollen. Ich setze ferner der Einfachheit halber voraus, daß sich die Lösungen unserer Differentialgleichung in einem solchen Punkte nicht nur regulär verhalten, sondern zu reellen Exponenten gehören. Wir können dann von dem Werte, den der Quotient η irgend zweier Partikularlösungen y_1, y_2 von (1) im singulären Punkte annimmt, als von einer wohldefinierten Größe sprechen. Nur können wir y_1, y_2 im allgemeinen nicht so wählen, daß das eine in $x=a$ von Null verschieden ist, das andere verschwindet: wir können sie aber so aussuchen, daß ihr Quotient $y_1 : y_2 = \eta$ bei $x=a$ unendlich wird, oder, um es bestimmter zu sagen, negativ unendlich wird, wenn wir aus unserem Intervalle auf den Punkt $x=a$ zusehen. Infolgedessen können wir jetzt die Definition unseres X auf solche Intervalle ausdehnen, die einerseits oder auch beiderseits an einen singulären Punkt heranreichen. Wir wählen einfach ein solches η , welches in dem einen Endpunkte des Intervalls (der mit dem singulären Punkte a zusammenfallen mag) negativ unendlich wird, und zählen ab, wie oft dasselbe, während x von a ausgehend das Intervall überstreicht, seinerseits den Weg von $-\infty$ bis $+\infty$ vollendet. Den anderen Endpunkt des Intervalls betrachten wir dabei natürlich, um mit unseren bisherigen Festsetzungen in Übereinstimmung zu bleiben, als selbst dem Intervall nicht mehr zugehörig.

Hiermit bietet sich zugleich eine erste Einschränkung der Fragestellung des vorigen Paragraphen. Es seien a, b, c, \dots, n die aufeinanderfolgenden singulären Punkte, welche die X -Achse trägt. Dann interessieren uns von

allen Intervallen, die man auf der X -Achse abgrenzen kann, jedenfalls die am meisten, die von einem singulären Punkte zum nächstfolgenden hinreichen, d. h. die Intervalle ab, bc, \dots, na selbst. Wir wollen unsere anfängliche Forderung also dahin einschränken, daß wir bei gegebener Differentialgleichung (1) nur für diese Intervalle die Bestimmung des zugehörigen X verlangen.

§ 3.

Inbetrachtung komplexer Werte der Variablen.

Wir ziehen jetzt neben den reellen Werten von x und η beliebige komplexe Werte derselben in Betracht und denken uns diese in einer X -Ebene, bez. H -Ebene gedeutet. Zugleich wollen wir betreffs der Differentialgleichung (1) einige vereinfachende Annahmen machen. Wir wollen nämlich fortan voraussetzen, die Koeffizienten p, q in (1) seien rationale Funktionen von x , wohlverstanden rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten (damit die anfängliche Forderung reeller p, q aufrecht erhalten bleibt), und ihre sämtlichen Unendlichkeitspunkte seien durch Angabe der reellen Unendlichkeitspunkte a, b, c, \dots, n bereits erschöpft. Wir zerschneiden jetzt die X -Ebene längs ihrer reellen Achse und erhalten so zwei Halbebenen, von denen wir die eine, etwa die positive, der weiteren Betrachtung zugrunde legen. Wir bezeichnen ferner mit η den Quotienten, irgend zweier, nicht notwendig reeller Partikularlösungen von (1). So können wir das konforme Abbild, welches ein solches η von der Halbebene X entwirft, nach den Untersuchungen von Herrn Schwarz²⁾ sehr einfach bezeichnen. Dasselbe stellt nämlich ein Kreisbogen- n -Eck vor, dessen Ecken den singulären Punkten a, b, \dots, n der X -Achse entsprechen; die Eckenwinkel sind beziehungsweise $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi, \dots$, unter λ, μ, ν, \dots die Exponentendifferenzen verstanden, welche zu den einzelnen singulären Punkten zugehören. — Ersetzen wir das anfänglich gewählte η durch irgendein anderes, so bedeutet dies einfach den Übergang zu einem [direkt] kreisverwandten Polygon. Wir wollen nur festsetzen, daß fernerhin kreisverwandte Figuren als nicht wesentlich verschieden gelten sollen. Dann wird also zwischen den Polygonen verschiedener Partikularlösungen η nicht weiter zu unterscheiden sein; wir können vielmehr schlechtweg von dem Kreisbogenpolygon der η -Ebene sprechen.

²⁾ Vgl. insbesondere dessen Abhandlung (die auch den folgenden Entwicklungen des Textes durchweg zugrunde liegt): Über diejenigen Fälle, in denen die Gaußsche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes ist (Crelles Journal, Bd. 75, 1871—72, oder auch Gesammelte mathematische Abhandlungen (Berlin bei Springer, 1890), Bd. 2, S. 211—259).



Und wie werden nun in der Gestalt dieses Polygons die charakteristischen Zahlen X hervortreten, die wir am Schlusse des vorigen Paragraphen des näheren bezeichneten? Das zum Intervalle ab gehörige X (um nur von diesem zu sprechen) bedeutete dort die Anzahl von Malen, daß ein in bestimmter Weise gewähltes η , von $-\infty$ beginnend, längs der reellen Achse der η -Ebene nach $+\infty$ hinlief, während sich x von a bis b bewegte. Das allgemeine η (welches eine kreisverwandte Figur beschreibt) wird augenscheinlich unterdessen, von irgendwelchem Werte beginnend, eine bestimmte Kreisperipherie X -mal überstreichen. Das X unseres Intervalles ab erscheint also als die Anzahl von Malen, daß die zugehörige Seite des Polygons der η -Ebene eine volle Kreisperipherie umspannt, oder, was dasselbe ist, als die Anzahl von Malen, daß die betreffende Polygonseite sich selbst überschlägt. Dabei müssen wir natürlich eine Festsetzung treffen, welche der früheren Verabredung, daß der Endpunkt b nicht mit zum Intervalle gezählt werden sollte, entspricht. Sollte nämlich der Endpunkt unserer Kreisbogenseite mit dem Anfangspunkte derselben zusammenfallen, so werden wir das doch nicht als volle Umspannung einer Kreisperipherie gelten lassen und bei der Berechnung des X also nicht mitzählen.

So hat denn die Fragestellung des § 2 eine sehr anschauliche Form angenommen: Wir sollen das Polygon der η -Ebene (mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \dots$) betrachten und zusehen, wie groß die Anzahl voller Kreisperipherien ist, die im Sinne der gerade getroffenen Verabredung von jeder Seite dieses Polygons umspannt wird.

§ 4.

Spezieller Ansatz für die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

Wir spezialisieren jetzt unsere Betrachtungen auf den einfachsten Fall, der allein hier zur Erledigung kommen soll, indem wir nämlich an Stelle von (1) insbesondere die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe $F(l, m, n, x)$ setzen. Bekanntlich hat diese Differentialgleichung nur drei singuläre Punkte:

$$(2) \quad a = 0, \quad b = \infty, \quad c = 1$$

und in ihnen als Exponenten:

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda' = 0, & \mu' = l, & \nu' = 0, \\ \lambda'' = 1 - n, & \mu'' = m, & \nu'' = n - l - m; \end{cases}$$

die hypergeometrische Reihe $F(l, m, n, x)$ bezeichnet diejenige Partikularlösung, welche in der Umgebung des Punktes a (d. h. des Punktes $x = 0$) dem Exponenten $\lambda' = 0$ zugehört. Ich will hier die zugehörigen Expo-

nentendifferenzen gleich als wesentlich positive Größen einführen und schreibe in diesem Sinne:

$$(4) \quad \lambda = |1 - n|, \quad \mu = |l - m|, \quad \nu = |n - l - m|.$$

Das Polygon der η -Ebene wird ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$. Und nun ist die einfache Aufgabe, zuzusehen, wie oft sich bei einem solchen Dreiecke die einzelnen Kreisbogenseiten überschlagen mögen, oder, wenn wir die Sache anschauungsmäßig ins einzelne ausgestalten wollen: klar zu entwickeln, wie ein Kreisbogendreieck mit irgendwelchen Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ gestaltet ist. Um den Sinn der letzteren Frage richtig zu verstehen, müssen wir uns vor Augen halten, daß unsere λ, μ, ν beliebig große positive Zahlen sein können, so daß wir ganz wesentlich auch solche Kreisbogendreiecke zu betrachten haben, bei denen in den Ecken Windungspunkte liegen. Übrigens besitzt unsere Frage durchaus elementargeometrischen Charakter: indem wir uns unser Dreieck in bekannter Weise durch stereographische Projektion auf die Kugel übertragen denken, können wir die sogleich zu gebende Erledigung unserer Aufgabe geradezu als einen Beitrag zur sphärischen Trigonometrie bezeichnen³⁾.

Jedenfalls gibt uns die analytische Fragestellung, von der wir ausgehen, zur Behandlung dieser geometrischen Aufgabe einen ersten wesentlichen Ansatz. In (4) können die λ, μ, ν ganz beliebig angenommen werden. Deshalb muß es für jedes Wertetripel λ, μ, ν zugehörige Kreisbogendreiecke wirklich geben. Ich will doch die Differentialgleichung dritter Ordnung hersetzen, der das betreffende η genügt. Dieselbe lautet bekanntlich:

$$(5) \quad \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \frac{1 - \lambda^2}{x^2} + \frac{1 - \nu^2}{(1 - x)^2} + \frac{1 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2}{x(1 - x)}.$$

³⁾ Ich verstehe hier unter „sphärischer Trigonometrie“ überhaupt die Lehre von denjenigen Kugelfiguren, die von drei Ebenen umgrenzt werden. Die gewöhnliche Voraussetzung der niederen sphärischen Trigonometrie, daß sich nämlich diese drei Ebenen im Mittelpunkte der Kugel schneiden, läßt sich bekanntlich immer durch Anwendung einer geeigneten Kreisverwandtschaft realisieren, sofern sich nur die Ebenen in einem Punkte des Kugelinneren treffen. Zieht man dagegen Ebenen in Betracht, die sich auf der Kugel oder gar außerhalb derselben treffen, so wird man das eine Mal die Formeln der ebenen Trigonometrie, das andere Mal diejenigen der pseudosphärischen Trigonometrie zu verwenden haben. Die Fragestellung des Textes steht oberhalb dieser Unterscheidungen, sie bezeichnet einen Punkt, in welchem die genannten dreierlei Trigonometrien gleichförmig unvollständig sind. Sämtliche Trigonometrien gehen nämlich stillschweigend von der Annahme aus, daß kein Dreiecks-winkel $> 2\pi$ sei und daß keine Dreiecksseite mehr als eine volle Kreislinie umspanne. Infolgedessen beschränken sie sich darauf, die gegenseitige Abhängigkeit der „trigonometrischen Funktionen“ der Winkel und Seitenlängen nachzuweisen. Die Ergänzung, welche durch die im Texte zu gebenden Entwicklungen hinzukommt, bezieht sich darauf, daß auch die absoluten Beträge der Winkel und Seitenlängen (die sich nicht durch Sinus und Kosinus festlegen lassen) in Abhängigkeit gesetzt werden.



Jetzt kommt man auf diese Differentialgleichung mit Notwendigkeit, wenn man es unternimmt, ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ derart auf unsere Halbebene X abzubilden, daß den Ecken beziehungsweise die Stellen $x=0, \infty, 1$ entsprechen. Andererseits drückt sich die allgemeine Lösung von (5) in einer beliebigen Partikularlösung η derselben in der Gestalt $\frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ aus. Wir schließen: *Haben wir ein erstes Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ konstruiert, so ergibt sich aus ihm jedes andere [mit demselben Umlaufssinn durch direkte] Kreisverwandtschaft. Besonders diesen zweiten Satz brauchen wir im folgenden immerzu, indem wir uns, wenn es sich um allgemeine Aussagen über Kreisbogendreiecke gegebener Winkel handelt, schlechtweg auf eine einzelne Figur als hinreichenden Beweisgrund beziehen⁴⁾.*

§ 5.

Allgemeines über Kreisbogendreiecke.

Die fernere Behandlung unserer geometrischen Frage gestaltet sich einfacher als man erwarten sollte. Ich finde, daß man nur zwei Arten von Dreiecken auseinanderzuhalten hat. Indem ich hier zunächst von den speziellen Formeln (4) absehe, durch die wir die Buchstaben λ, μ, ν ursprünglich eingeführt haben, will ich die λ, μ, ν , durch die wir die Dreieckswinkel festlegen, bis auf weiteres der Größe nach geordnet denken:

$$(6) \quad \lambda \geq \mu \geq \nu.$$

Dreiecke erster Art sind mir dann solche, bei denen

$$(7) \quad \lambda \leq \mu + \nu,$$

Dreiecke zweiter Art die anderen, für die

$$(8) \quad \lambda > \mu + \nu.$$

Für beide Arten von Dreiecken entwickle ich hier vor allem einen arithmetischen Ansatz, den ich als *Reduktion* bezeichne.

Um ein Dreieck erster Art zu reduzieren, setze ich:

$$\lambda = \beta + \gamma,$$

$$\mu = \gamma + \alpha,$$

$$\nu = \alpha + \beta,$$

und erhalte so in:

⁴⁾ Die beiden Sätze des Textes müssen sich natürlich auch elementargeometrisch beweisen lassen; ob dies in gleicher Kürze gelingt? [Einen elementargeometrischen Beweis für den ersten dieser Sätze hat Schilling in seiner Göttinger Dissertation (Math. Annalen, Bd. 44, 1894) gegeben. Dasselbst findet man u. a. einen einfacheren Beweis für die Formel (17) der gegenwärtigen Abhandlung.]

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\mu + \nu - \lambda}{2}, \\ \beta = \frac{\nu + \lambda - \mu}{2}, \\ \gamma = \frac{\lambda + \mu - \nu}{2}. \end{cases}$$

drei Zahlen, die wegen (6), (7) ≥ 0 sind. Die größten, in α, β, γ beziehungsweise enthaltenen, ganzen Zahlen nenne ich jetzt a, b, c ⁵⁾ und schreibe dementsprechend:

$$(10) \quad \alpha = a + \alpha_0, \quad \beta = b + \beta_0, \quad \gamma = c + \gamma_0.$$

Wir setzen ferner:

$$(11) \quad \lambda_0 = \beta_0 + \gamma_0, \quad \mu_0 = \gamma_0 + \alpha_0, \quad \nu_0 = \alpha_0 + \beta_0.$$

Wir haben dann offenbar

$$(12) \quad \lambda = \lambda_0 + b + c, \quad \mu = \mu_0 + c + a, \quad \nu = \nu_0 + a + b.$$

Hier sind die a, b, c irgendwelche positive ganze Zahlen, die λ_0, μ_0, ν_0 aber bedeuten drei Größen, von denen keine ≥ 2 oder größer als die Summe der beiden anderen wäre. Das Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda_0\pi, \mu_0\pi, \nu_0\pi$ ist hiernach selbst ein Kreisbogendreieck der ersten Art. Ich bezeichne dasselbe als das zum gegebenen Dreieck gehörige *reduzierte Dreieck*.

Für Dreiecke zweiter Art (8) gestaltet sich die Reduktion wesentlich einfacher. Ich verstehe unter m, n die größten ganzen in μ, ν enthaltenen Zahlen und schreibe:

$$(13) \quad \lambda = m + n + \lambda_0, \quad \mu = m + \mu_0, \quad \nu = n + \nu_0,$$

wobei $\lambda_0 > \mu_0 + \nu_0$. Wieder bezeichne ich das Dreieck mit den Winkeln $\lambda_0\pi, \mu_0\pi, \nu_0\pi$ als *reduziertes Dreieck*. Ein *reduziertes Dreieck zweiter Art ist einfach ein solches Dreieck zweiter Art, dessen kleinere Winkel $< \pi$ sind*. Die Zahlen m, n in (13) bedeuten dabei beliebige positive ganze Zahlen. —

Unsere fernere Aufgabe ist uns jetzt klar vorgezeichnet: wir haben uns deutlich zu machen, was reduzierte Dreiecke der einen oder anderen Art geometrisch sind, und insbesondere zuzusehen, was die Formeln (12), (13) geometrisch besagen, durch die wir bez. vom reduzierten Dreiecke zum allgemeinen Dreiecke aufsteigen. —

Dabei denken wir uns die Dreiecke, wie schon oben angedeutet wurde, am besten von vornherein auf die Kugel übertragen, und so mögen also auch die folgenden Zeichnungen als stereographische Abbilder sphärischer Figuren aufgefaßt werden.

⁵⁾ [Um Verwechslungen vorzubeugen, sei ausdrücklich hervorgehoben, daß in den §§ 5–7 die Buchstaben a, b, c und m, n vorübergehend eine andere Bedeutung haben als in den übrigen Paragraphen dieser Arbeit.]

§ 6.

Von den Kreisbogendreiecken der ersten Art.

Hier zunächst eine kleine Musterkarte reduzierter Kreisbogendreiecke der ersten Art (auf der jeweils durch Schraffierung angedeutet ist, welchen Teil der Ebene, bez. der Kugel ich als die Dreiecksfläche ansehen will):

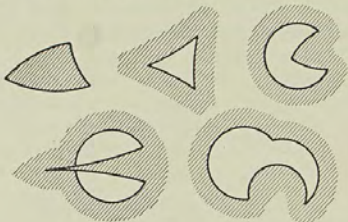


Fig. 1.

Man abstrahiert aus solchen Beispielen die Regel:

Bei einem reduzierten Kreisbogendreiecke erster Art kommt es niemals vor, daß sich eine der Dreiecksseiten selbst überschlägt.

Um diese Regel zu beweisen, beachte man Formel (11). Man erhält sämtliche reduzierten Kreisbogendreiecke erster Art, wenn man in ihr die $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ unabhängig voneinander alle Werte von 0 bis 1 (mit Ausnahme der 1) durchlaufen läßt. Die Mannigfaltigkeit der reduzierten Kreisbogendreiecke erster Art bildet also ein Kontinuum. Nun aber gibt es, wie wir gerade sahen, sicher solche reduzierte Dreiecke der ersten Art, bei denen sich keine der drei Seiten überschlägt. Sollte es demgegenüber auch Dreiecke erster Art geben, deren Seiten sich (zum Teil, oder alle) überschlagen, so müßte auch die Übergangsform vorkommen, bei der eine Seite gerade einen vollen Kreis ausmacht, während die beiden anderen noch kleiner als ein Vollkreis sind. Man wird aber vergebens versuchen, eine solche Übergangsform zu zeichnen: so wie man es zwingen will (vgl. die nebenstehende Figur), so hat man ersichtlich ein Dreieck der zweiten Art:



Fig. 2.

Wir wenden uns jetzt gleich zu den Formeln (12). Offenbar können wir die allgemeinsten Formeln dieser Art in der Weise entstehen lassen,

daß wir a, b, c zuerst alle gleich Null nehmen und sie dann unabhängig voneinander beliebig wiederholt um eine Einheit wachsen lassen. Um den durch (12) bezeichneten Prozeß der Reduktion geometrisch zu verstehen, werden wir fragen dürfen, was der einzelne hiermit bezeichnete Schritt (d. h. das Anwachsen von a , oder b , oder c je um eine weitere Einheit) geometrisch besagt. Beginnen wir also damit, eine der Größen, vielleicht a , gleich 1 zu nehmen, während die anderen beiden gleich 0 bleiben. In der nebenstehenden Figur, welche ein reduziertes Dreieck vorstellt, wolle man diejenige Seite ins Auge fassen, die dem Winkel $2_0\pi$ gegenüberliegt:

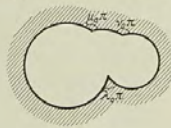


Fig. 3.

Indem wir jetzt a gleich 1 nehmen, sollen wir $\mu_0\pi$ und $\nu_0\pi$ in $(\mu_0 + 1)\pi$, bez. $(\nu_0 + 1)\pi$ verwandeln. Das heißt aber offenbar, daß unserem Dreieck eine ganze Kreisscheibe (oder besser gesagt, da wir ja auf der Kugel operieren wollen: eine Kugelkalotte) angehängt wird, wie dies die nachstehende Figur schildert:

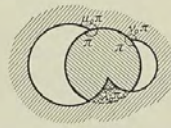


Fig. 4.

Die Dreiecksseite, welche dem Winkel 2π gegenüberliegt, ist dabei, wie wir kurz sagen dürfen, durch ihr Komplement ersetzt worden, d. h. durch ein Kreisbogenstück, welches ebensowenig sich überschlägt, wie die ursprüngliche Dreiecksseite selbst. Aber mit dieser Eigenschaft der komplementären Seite ist die Möglichkeit gegeben, den gerade ausgeführten Schritt noch einmal zu wiederholen, indem wir a zu 2 werden lassen und also die beiden Winkel gleich $(\mu_0 + 2)\pi$ und $(\nu_0 + 2)\pi$ nehmen. Wir haben jetzt einfach an unsere komplementäre Seite eine Kugelkalotte (eine Kreisscheibe) anzuhängen, diejenige, welche in unserer Figur, so wie wir dieselbe gezeichnet haben, das Äußere des Kreises (μ_0, ν_0) ausmacht. Die Dreiecksseite ist dadurch wieder die alte geworden, in den sie abschließenden Ecken liegen jetzt aber Windungspunkte.



Das neue Dreieck besteht, können wir sagen, aus der Summe des anfänglichen (reduzierten) Dreiecks und der einfach gerechneten Gesamtkugelkalotte. — Nichts hindert jetzt, die so geschilderten beiden Operationen alternierend beliebig oft zu wiederholen, und so a zu einer beliebig großen ganzen Zahl anwachsen zu lassen. Bei jedem neuen Schritte wächst die bis dahin erhaltene Dreiecksfläche erneut um die eine oder die andere Kugelkalotte, und wenn wir das eine Mal die ursprüngliche Dreiecksseite als Begrenzung erhalten hatten, so folgt das nächste Mal das Komplement, und umgekehrt. — Ganz ähnlich machen wir es jetzt hinterher mit b und mit c . Die geometrische Operation ist dabei ganz dieselbe, wie bei a , nur daß jetzt die zweite, resp. die dritte Seite des ursprünglichen reduzierten Dreiecks in Anspruch genommen und alternierend in ihr Komplement verwandelt wird oder in ursprünglicher Form wieder erscheint. —

Der hiermit geschilderte Prozeß ist alles in allem so einfach, daß er in der Tat, wie wir es in Aussicht nahmen, ein völlig anschauliches Bild von der Gestalt des allgemeinen Kreisbogendreiecks erster Art vermitteln dürfte. Uns interessiert dabei natürlich vor allen Dingen, was über die Längen der jedesmaligen Dreiecksseiten ausgesagt werden kann. In dieser Hinsicht haben wir offenbar:

Bei einem Kreisbogendreiecke erster Art bleibt ausgeschlossen, daß sich auch nur eine seiner drei Seiten überschlägt.

§ 7.

Von den Kreisbogendreiecken der zweiten Art.

Die Dreiecke zweiter Art erledigen sich jetzt sehr rasch.

Betrachten wir zuerst, was der einfachste Fall ist, ein Dreieck zweiter Art mit zwei rechten Winkeln (bei dem also $\mu_0 = \nu_0 = \frac{1}{2}$ ist, vgl. die Figur):



Fig. 5.

Da hat es keine Schwierigkeit, sich den Winkel $\lambda_0\pi$ beliebig groß (auch $> 2\pi$) zu denken, und es ist offenbar, daß sich dabei die ihm gegenüberliegende Seite

$$(14) \quad E \left(\frac{\lambda_0}{2} \right)\text{-mal}$$

überschlägt, unter E die größte ganze Zahl verstanden, welche in $\frac{\lambda_0}{2}$ enthalten ist, oder genauer, da wir es noch nicht als volle Überschlagung

rechnen wollten, wenn Anfangspunkt und Endpunkt einer Seite gerade zusammenfallen: unter E die größte ganze Zahl verstanden, welche von $\frac{\lambda_0}{2}$ überschritten wird. Die beiden anderen Dreiecksseiten überschlagen sich natürlich nicht.

Von Fig. 5 gehen wir nun leicht zu einem reduzierten Dreiecke zweiter Art über, bei welchem μ_0 und ν_0 nicht gerade gleich $\frac{1}{2}$ sind. Wir haben einfach entlang einer jeden der beiden kurzen Seiten der Fig. 5 (dieser Ausdruck ist ja wohl ohne weitere Erläuterung verständlich) ein Kreissegment entweder wegzunehmen oder auch hinzuzufügen. Ich erläutere hier beides durch eine Figur, indem ich $\nu_0 = \frac{1}{2}$ lasse, aber μ_0 das eine Mal kleiner, das andere Mal größer als $\frac{1}{2}$ nehme:

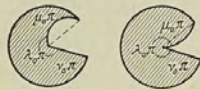


Fig. 6.

Bei dieser Änderung behalten die beiden kurzen Seiten augenscheinlich ihre Eigenschaft, sich nicht zu überschlagen. Ob es die dritte Seite (die lange Seite, wie wir sagen wollen) tut oder nicht, konstatieren wir am leichtesten, indem wir ein Hilfsdreieck mit zwei rechten Winkeln konstruieren, welches mit dem gegebenen Dreiecke die Ecken und die lange Seite gemein hat; ich habe die kurzen Seiten dieses Hilfsdreiecks, soweit sie nicht mit Seiten der ursprünglichen Dreiecke zusammenfallen, in der Figur punktiert. Der Winkel, welcher in diesem Hilfsdreiecke der langen Seite gegenüberliegt, ist augenscheinlich

$$(\lambda_0 - \mu_0 - \nu_0 + 1)\pi.$$

Daher ist die Anzahl der vollen Überschlagungen, welche unsere lange Seite im Sinne von (14) darbietet:

$$(15) \quad E \left(\frac{\lambda_0 - \mu_0 - \nu_0 + 1}{2} \right).$$

Nichts ist jetzt leichter, als vom reduzierten Dreiecke der zweiten Art zum allgemeinen überzugehen. Die Formeln (13) belehren uns, daß wir dies erreichen, indem wir die Zahlen m, n von Null beginnend, unabhängig voneinander beliebig oft um eine Einheit wachsen lassen und dadurch das eine Mal die Winkel $\lambda\pi, \mu\pi$, das andere Mal $\lambda\pi$ und $\nu\pi$ immer wieder um π vermehren. Aber die Dreiecksseiten, welche die Winkel $\lambda\pi, \mu\pi$, resp. $\lambda\pi, \nu\pi$ verbinden, überschlagen sich nicht, wie



wir wissen. Daher handelt es sich hier geometrisch um wiederholte Anwendung ganz derselben Operation, die wir soeben bei den Dreiecken erster Art schilderten, und die in der Anhängung einer Kugelkalotte an eine sich nicht überschlagende Dreiecksseite bestand. Die einzelne kurze Seite unseres reduzierten Dreiecks wird dabei bald in ihr Komplement verwandelt, bald kommt sie wieder in ihrer ursprünglichen Form zum Vorschein, wie wir hier kaum erneut zu schildern haben. — Damit aber haben wir in der Tat eine ganz klare Vorstellung von dem Zustandekommen eines allgemeinen Kreisbogendreiecks der zweiten Art gewonnen. Man beachte noch, daß vermöge (13):

$$\lambda - \mu - \nu = \lambda_0 - \mu_0 - \nu_0.$$

Indem wir auf (15) zurückgreifen, haben wir offenbar:

Auch bei einem Dreiecke zweiter Art überschlagen sich diejenigen Seiten nicht, welche den beiden kleineren Winkeln gegenüberliegen. Die dritte Seite aber bietet evtl. eine größere Zahl von Selbstüberschlagungen dar; diese Zahl ist durch

$$(16) \quad E\left(\frac{\lambda - \mu - \nu + 1}{2}\right)$$

gegeben.

§ 8.

Das allgemeine geometrische Resultat. Die Charakteristik X der hypergeometrischen Differentialgleichung für das Intervall $\overline{01}$.

Ehe ich jetzt zur anfänglichen analytischen Fragestellung des § 4 zurückkehre, fasse ich vorab die inzwischen gewonnenen geometrischen Resultate in einen allgemeinen Satz zusammen. Wir erreichen dies, indem wir die Bedeutung des E noch dahin modifizieren, daß es die größte ganze, positive Zahl sein soll, welche von dem dem E beigesetzten Argumente überschritten wird, — so daß also E allemal Null ist, wenn das Argument negativ oder ≤ 1 ist. Wir können dann nämlich jede Größenordnung der Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$, wie auch die Unterscheidung der Dreiecke erster und zweiter Art aufgeben und so sagen:

In einem Kreisbogendreiecke mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ überschlägt sich die dem beliebigen Winkel $\lambda\pi$ gegenüberliegende Seite so oft, als das Symbol

$$(17) \quad E\left(\frac{\lambda - \mu - \nu + 1}{2}\right)$$

angibt.

In der Tat: dieses E ist bei Dreiecken erster Art immer Null, bei Dreiecken zweiter Art aber nur dann eventuell von Null verschieden, wenn λ gerade den größten der drei Winkel bezeichnet: in diesem Falle aber stimmt (17) mit (16).

Und nun gehen wir zur hypergeometrischen Differentialgleichung zurück. Wir wollen uns da gleich auf das Intervall $\overline{01}$ der X -Achse beschränken, das uns von Anfang an besonders interessierte. Offenbar haben wir mit Rücksicht auf die Formeln (4):

Die charakteristische Zahl X , welche dem Intervalle $\overline{01}$ hinsichtlich der hypergeometrischen Differentialgleichung zukommt, ist durch folgende Formel gegeben:

$$(18) \quad X = E\left(\frac{|l-m| - |1-n| - |n-l-m| + 1}{2}\right).$$

Wir wollen diese Formel noch etwas spezifizieren. Erstlich wollen wir annehmen, daß $l \geq m$ sei, worin keine Partikularisation liegt; wir können dann statt $|l-m|$ einfach $(l-m)$ schreiben. Übrigens aber unterscheiden wir, ob $(1-n)$ und $(n-l-m) \leq 0$ oder ≥ 0 sind (das Nullsein wird, weil es keinen Unterschied macht, jeder der beiden Möglichkeiten zugerechnet). Wir erhalten so folgende Tabelle:

	$n-l-m \leq 0$	$n-l-m \geq 0$
$1-n \leq 0$	$X = E(1-m)$	$X = E(l-n+1)$
$1-n \geq 0$	$X = E(n-m)$	$X = E(l)$

§ 9.

Von den Nullstellen der hypergeometrischen Reihe F im Intervalle $\overline{01}$.

Die Formeln (18) und (19) bezeichnen das eigentliche in dieser Arbeit abzuleitende Resultat. Inzwischen wollen wir dasselbe jetzt noch so umsetzen, daß jene elementare Frage erledigt wird, welche in der Einleitung bezeichnet wurde: *Wie oft verschwindet die hypergeometrische Reihe*

$$F(l, m, n, x)$$

im Intervall von $x=0$ bis $x=1$?

Wir müssen hier einige Vorbemerkungen machen.

Erstlich bemerken wir, daß, wegen des Bildungsgesetzes der Reihe F , das sogenannte dritte Element n niemals Null oder eine negative ganze Zahl sein kann: es würden sonst alle Glieder der Reihe von einer bestimmten Grenze ab unendlich groß sein. Daher ist die im folgenden verschiedentlich auftretende Konstante $\Gamma(n)$ notwendig eine endliche Größe.

Zweitens erinnern wir daran, daß die Reihe F für $x=1$ nur unter der Voraussetzung $(n-l-m) > 0$ konvergiert. Es kann uns das aber nicht hindern, auch im Falle $(n-l-m) \leq 0$ von dem Werte zu sprechen, den die Funktion F von x , wenn man von $x=0$ kommend auf $x=1$



zuschreitet, bei $x=1$ annimmt. Dieser Wert ist dann freilich immer unendlich; aber es wird unterschieden werden können, ob er positiv oder negativ unendlich ist. —

Wir handeln ferner von den verschiedenen Lösungen, welche unsere Differentialgleichung in der Umgebung des Punktes $x=0$ besitzt:

Ist n keine ganze Zahl, so existiert daselbst neben F eine zweite Partikularlösung G , die wir in die Form setzen können

$$(20) \quad G = x^{1-n} \cdot \mathfrak{P}(x),$$

unter $\mathfrak{P}(x)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe verstanden, in welcher das konstante Glied (das Glied nullter Dimension) von Null verschieden ist. Dieses G wird also für $x=0$ unendlich, sobald $1-n < 0$, dagegen Null, sobald $1-n > 0$. — Ist aber n ganzzahlig (was nach der gerade gemachten Bemerkung $n > 0$, also $1-n \leq 0$ bedingt), so tritt neben F eine Partikularlösung G , deren analytischer Ausdruck einen Logarithmus enthält, und die daher für $x=0$ jedenfalls unendlich wird. — Hiermit halten wir zusammen, daß F selbst für $x=0$ gleich 1 ist. So folgt:

Ist $(1-n) \leq 0$, so wird bei $x=0$ $\frac{G}{F}$ unendlich, ist $(1-n) > 0$, so $\frac{F}{G}$.

Wir erinnern uns jetzt der Formeln (18), (19) für X und der Bedeutung, welche wir der Zahl X in § 1 und § 2 erteilten. So haben wir offenbar den Satz:

Für $(1-n) \leq 0$ verschwindet F , für $(1-n) > 0$ verschwindet G im Inneren des Intervalls $\overline{01}$ genau X -mal.

Hiermit ist die Frage nach der Zahl der Nullstellen von F nur erst im Falle $(1-n) \leq 0$ entschieden, im anderen Falle können wir nach § 1 vorab nur erst sagen:

Ist $(1-n) > 0$, so ist die Anzahl der Nullstellen von F im Intervalle $\overline{01}$ entweder X oder $X+1$.

Zwischen den beiden hier vorliegenden Möglichkeiten unterscheide ich nun durch eine Hilfsbetrachtung, indem ich nämlich das Verhalten der Lösung F unserer Differentialgleichung und einer anderen linear unabhängigen Lösung, die wieder G heißen soll, bei $x=1$ in Betracht ziehe.

In dieser Hinsicht können wir nach § 1, 2 jedenfalls sagen:

Satz 1: Wird $\frac{G}{F}$ bei $x=1$ unendlich, so hat F im Intervalle $\overline{01}$ genau X Nullstellen.

Die Bedeutung der Charakteristik X eines Intervalls bleibt nämlich dieselbe, mögen wir das Intervall mit seinem einen oder seinem anderen

Endpunkte beginnen. — Übrigens kann $\frac{G}{F} = \infty$ bei $x=1$ entweder so eintreten, daß G endlich bleibt, während F verschwindet, oder auch so, daß G unendlich wird, während F endlich bleibt. —

Liegt nun aber der hiermit besprochene Fall nicht vor, so suche ich das Vorzeichen zu bestimmen, welches die durch F gegebene Funktion bei $x=1$ besitzt (sofern wir uns dem Werte $x=1$ von $x=0$ kommend nähern). Indem F für $x=0$ gleich 1, d. h. positiv ist, werden wir offenbar haben:

Satz 2: Je nachdem F bei $x=1$ positiv oder negativ ist, werden wir im Intervalle $\overline{01}$ eine gerade oder eine ungerade Zahl von Nullstellen des F haben;

und dies ist dann der Satz, durch den wir gegebenenfalls zwischen den beiden Zahlen X und $X+1$ entscheiden können. —

Es gilt jetzt, den so gefundenen allgemeinen Ansatz ins einzelne durchzuführen. Ich unterscheide dabei, ob $(n-l-m) > 0$, < 0 , $= 0$.

a) Erste Annahme: $(n-l-m) > 0$, $(1-n) > 0$.

Für $(n-l-m) > 0$ konvergiert F bei $x=1$ bekanntlich zu dem Werte:

$$(21) \quad \frac{\Gamma(n) \cdot \Gamma(n-l-m)}{\Gamma(n-l) \cdot \Gamma(n-m)},$$

der jedenfalls endlich ist (vgl. die oben über $\Gamma(n)$ vorausgeschickte Bemerkung) und verschwindet, wenn $(n-l)$ oder $(n-m)$ Null oder eine negative ganze Zahl ist. Im letzteren Falle findet Satz 1 Anwendung und wir sagen also:

Ist $(1-n)$ und $(n-l-m) > 0$ und $(n-l)$ oder $(n-m)$ Null oder eine negative ganze Zahl, so hat F im Intervalle $\overline{01}$ X Nullstellen.

Andernfalls untersuchen wir das Vorzeichen von (21). Da $(n-l-m) > 0$, so ist $\Gamma(n-l-m)$ positiv, und das Vorzeichen von (21) stimmt mit demjenigen des Produktes $\Gamma(n) \cdot \Gamma(n-l) \cdot \Gamma(n-m)$ überein. Wir sagen also nach Satz 2:

Ist $(1-n)$ und $(n-l-m) > 0$, aber weder $(n-l)$ noch $(n-m)$ Null oder eine negative ganze Zahl, so wird von den beiden Zahlen X und $X+1$ die gerade oder die ungerade richtig sein, je nachdem das Produkt $\Gamma(n) \cdot \Gamma(n-l) \cdot \Gamma(n-m)$ positiv oder negativ ausfällt.

b) Zweite Annahme: $(n-l-m) < 0$, $(1-n) > 0$.

Ist $(n-l-m)$ nicht ganzzahlig, so haben wir in der Umgebung des Punktes $x=1$ eine Lösung G unserer Differentialgleichung, für welche die Darstellung besteht

$$(1-x)^{n-l-m} \cdot \mathfrak{P}(1-x);$$



ist aber $(n-l-m)$ ganzzahlig, so gibt es Lösungen G , in deren analytische Darstellung der Logarithmus von $(1-x)$ eingeht. Daher existiert also, wenn wir jetzt die Annahme $(n-l-m) < 0$ machen, auf alle Fälle eine Lösung G , welche bei $x=1$ unendlich wird. Wir werden hiernach die Voraussetzung des Satzes 1 haben, sobald im vorliegenden Falle F für $x=1$ endlich bleibt. Dies tritt nun (man denke an das Bildungsgesetz der aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe F) jedenfalls dann ein, wenn l oder m Null oder eine negative ganze Zahl ist. Daher haben wir vorab:

Ist $(1-n) > 0$ und $(n-l-m) < 0$ und l oder m Null oder eine negative ganze Zahl, so hat F im Intervalle $\overline{01}$ X Nullstellen.

Andernfalls lassen wir (um Satz 2 anwenden zu können) eine Transformation unserer hypergeometrischen Reihe eintreten. Wir haben:

$$(23) \quad F(l, m, n, x) = (1-x)^{n-l-m} \cdot F(n-l, n-m, n, x).$$

Hier wird der erste der beiden rechts stehenden Faktoren, indem wir von $x=0$ auf $x=1$ zuschreiten, positiv unendlich, und kann also bei der Beurteilung des uns interessierenden Vorzeichens beiseite gelassen werden. Der andere Faktor aber (die neue hypergeometrische Reihe) konvergiert bei $x=1$ zu dem Werte:

$$(24) \quad \frac{\Gamma(n) \cdot \Gamma(l+m-n)}{\Gamma(l) \cdot \Gamma(m)},$$

den wir nun gerade so diskutieren, wie vorhin den Wert (21). Wir erkennen zunächst, daß (24) jedenfalls endlich ist und nur in denjenigen beiden Fällen verschwindet, die wir schon vorweggenommen haben (daß nämlich l oder m Null oder eine negative ganze Zahl ist). In allen anderen Fällen stimmt das Vorzeichen von (24) mit dem des Produktes $\Gamma(l) \cdot \Gamma(m) \cdot \Gamma(n)$ überein. Wir folgern also:

Ist $(1-n) > 0$ und $(n-l-m) < 0$ und weder l noch m Null oder eine negative ganze Zahl, so gilt von den beiden Zahlen X und $X+1$ die gerade oder die ungerade, je nachdem das Produkt $\Gamma(l) \cdot \Gamma(m) \cdot \Gamma(n)$ positiv oder negativ ist.

c) Dritte Annahme: $(n-l-m) = 0$, $(1-n) > 0$.

Diese Annahme werden wir hier als Grenzfall zwischen den Annahmen a) und b) gelten lassen. In der Tat werden die beiden unter a) aufgeführten Sätze mit den unter b) gegebenen identisch, sobald wir in ihnen $n-l-m=0$ nehmen und also $n-l=m$, $n-m=l$ setzen. Ich unterlasse es, noch länger hierbei zu verweilen. —

Hiernit ist die Zahl der Nullstellen von F im Intervalle $\overline{01}$ in jedem Falle sichergestellt*).

Natürlich würden wir auch für $(1-n) \leq 0$ (wo sich oben die Zahl der Nullstellen ohne weiteres gleich X fand) das Verhalten von F bei $x=1$ in Betracht ziehen können. Wenn dabei im Resultat schließlich alle Fallunterscheidungen wegfallen, so liegt dies daran, daß für $(1-n) \leq 0$ $\Gamma(n)$ ein festes Vorzeichen hat, was für $(1-n) > 0$ selbstverständlich nicht der Fall ist.

Göttingen, den 5. September 1890.

* Ich habe die sämtlichen in Texte entwickelten Sätze während des verflossenen Juli in meiner Vorlesung über Differentialgleichungen vorgetragen, auch der Göttinger Societät der Wissenschaften am 1. August darüber Mitteilung gemacht (vgl. Göttinger Nachrichten vom Jahre 1890, Nr. 10). [Vgl. ferner einen Vortrag vor der mathematischen Sektion der Bremer Naturforscherversammlung, vom 16. September 1890. Siehe auch die Note von Hurwitz in den Göttinger Nachrichten v. J. 1890 (Sitzung vom 6. Dezember), in welcher Sturmische Ketten aus verwandten hypergeometrischen Funktionen aufgestellt werden. Die dort benutzten Methoden sind von den meinen nur äußerlich verschieden, weil ja alle die Dreiecke, die ich aus einem reduzierten Dreiecke durch Anhängung herstelle, verwandt sind. — Wegen weiterer Anwendungen der geometrischen Methode zur Bestimmung der Nullstellen der hypergeometrischen Funktion siehe Nr. 18d in dem Artikel von Hilb über lineare Differentialgleichungen in Bd. II₂ der mathematischen Enzyklopädie (abgeschlossen 1913). Außerdem vgl. die Note von Hilb und Falckenberg „Die Anzahl der Nullstellen des Hankelschen Funktion“ in den Göttinger Nachrichten v. J. 1916. K.]



LXVI. Zur Darstellung der hypergeometrischen Funktion durch bestimmte Integrale.

[Math. Annalen, Bd. 38 (1891)¹⁾.]

Bekanntlich hat die Theorie der bestimmten Integrale in den letzten Jahren dadurch einen bemerkenswerten neuen Aufschwung genommen, daß man sich entschloß, die Integrale ganz allgemein durch geschlossene Wege im komplexen Gebiete (auf denen die zu integrierende Funktion ihren Anfangswert wieder annimmt) zu definieren, — wobei denn alle die Ausnahmen, welche die ältere Theorie wegen des Unendlichwerdens der zu integrierenden Funktion statuieren mußte, oder auch die Kunstgriffe, zu denen sie in solchen Fällen ihre Zuflucht nahm, von selbst in Wegfall kommen²⁾. Ich möchte nun darauf hinweisen, daß die Darstellung dieser Verhältnisse noch um vieles eleganter wird, wenn man sich entschließt,

¹⁾ [Vorliegende Abhandlung ist der zweite Teil der in den Math. Annalen, Bd. 38 unter dem Titel „Über Normierung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung“ erschienenen Arbeit. Der erste Teil derselben stimmt, wie schon bemerkt, mit dem ersten Teil der oben abgedruckten Abhandlung LXIV „Zur Theorie der allgemeinen Laméschen Funktionen“ aus den Göttinger Nachrichten v. J. 1890 überein. Siehe auch die Fußnote ²⁾ auf Seite 544.]

²⁾ Vgl. Camille Jordan in Bd. III seines Cours d'analyse, S. 241 ff. (1887). — Nekrassoff in der „Mathematischen Sammlung“ der Moskauer mathematischen Gesellschaft von 1887 an (die genaueren Zitate vgl. bei Pochhammer in Bd. 37 der Math. Annalen, S. 543). — Pochhammer in den Bänden 35, 36, 37 (1890) der Math. Annalen. — Die Idee selbst geht wohl unzweifelhaft auf Riemann zurück, der ja die Perioden der Abelschen Integrale in entsprechender Weise definierte (durch geschlossene Wege auf den zugehörigen Riemannschen Flächen). Indessen finden sich, was den allgemeinen Ansatz und seine Bedeutung für die Theorie der gewöhnlich betrachteten bestimmten Integrale angeht, in Riemanns publizierten Arbeiten nur Andeutungen (vgl. Werke, 1. Aufl., S. 77, 137, 404, 2. Aufl., S. 82, 146, 426), an welche dann zunächst Hankel (Schlömilchs Zeitschrift, Bd. 9, 1864) und Thomae (ebenda, Bd. 14, 1869) anknüpften, die aber immer noch an den *schleifenförmigen* Integrationswegen festhielten, d. h. an Integrationswegen, die, von einem bestimmten Punkte auslaufend zu eben diesem bestimmten Punkte zurückführen, womit die ganze Allgemeinheit, die hier anzustreben ist, sozusagen erst zur Hälfte erreicht ist. [Genaueres über Riemanns Ideen ist jetzt aus den von Wirtinger und Noether herausgegebenen Nachrichten zu Riemanns Werken zu entnehmen. Siehe daselbst S. 69–75.]

auch hier *homogene Veränderliche* anzuwenden. Unter $(za) \dots$ die Determinanten $(z_1 a_2 - z_2 a_1)$ usw. verstanden, wird man zunächst Integrale der folgenden Art betrachten:

$$(1) \quad \int (za)^\alpha (zb)^\beta \dots (zx)^\nu (zdz),$$

wo $\alpha + \beta + \dots + \nu$ natürlich gleich (-2) zu nehmen ist und die Integration über solche geschlossene Kurven der z -Ebene zu nehmen ist, wie sie Herr Pochhammer als Doppelumläufe bezeichnet. Ist die Zahl n der hier auftretenden singulären Punkte gleich 2, so verschwindet das Integral identisch; ist sie gleich 3, so hat man im wesentlichen ein Eulersches Integral erster Gattung (bei welchem dann die Gleichberechtigung der drei Exponenten α, β, γ , die sonst auf indirektem Wege erschlossen wird, unmittelbar hervortritt). Für $n = 4$ kommen diejenigen Integrale, durch welche man die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihen integriert, beziehungsweise die Riemannsche P -Funktion darstellen kann. Auch bei letzterer ist selbstverständlich der Gebrauch homogener Variabler indiziert. Riemann unterwirft die Exponenten seiner Funktion

$$(2) \quad P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}$$

bekanntlich der Bedingung, als Summe die Eins zu geben:

$$(3) \quad \lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 1,$$

und an dieser Bedingung ändert sich nichts, wenn wir P mit einem geeigneten Faktor multiplizieren, der nur bei $x = a, b, c$ unendlich wird, beziehungsweise verschwindet:

$$(4) \quad (x-a)^l \cdot (x-b)^m \cdot (x-c)^n \cdot P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix} \\ = P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' + l & \mu' + m & \nu' + n & x \\ \lambda'' + l & \mu'' + m & \nu'' + n & \end{vmatrix}.$$

In der Tat muß ja hier $l + m + n = 0$ genommen werden, weil anderenfalls der Punkt $x = \infty$ singulär werden würde. *Indem wir homogene Variable einführen, können wir die Bedingung (3) beiseite schieben.* Schreiben wir nämlich statt der in (4) auftretenden Differenzen $(x-a)$ usw. entsprechende Determinanten $(x_1 a_2 - x_2 a_1), \dots$, so hindert nichts, eine Funktion Π der homogenen Veränderlichen x_1, x_2 (eine Form durch die Gleichung zu definieren:



$$(5) \quad \Pi = (xa)^l \cdot (xb)^m \cdot (xc)^n \cdot P \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix},$$

wo nun die l, m, n beliebig anzunehmen sind. Wir bezeichnen dieses Π , indem wir für $\lambda' + l, \dots$ wieder kurz λ', \dots schreiben, mit

$$(6) \quad \Pi \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x_1, x_2 \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix};$$

die Summe $\frac{\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' - 1}{2}$ stellt dann den Grad dar, welchen das Π in x_1, x_2 besitzt.

Indem wir die l, m, n in (5) zweckmäßig wählen, können wir dieses Π natürlich in verschiedener Weise normieren. Sei der Kürze halber:

$$(7) \quad \lambda' - \lambda'' = \lambda, \quad \mu' - \mu'' = \mu, \quad \nu' - \nu'' = \nu.$$

Dann können wir als Normal- Π beispielsweise das folgende betrachten:

$$(8) \quad \Pi \begin{vmatrix} a & b & c \\ +\frac{\lambda}{2} & +\frac{\mu}{2} & +\frac{\nu}{2} & x_1, x_2 \\ -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\mu}{2} & -\frac{\nu}{2} & \end{vmatrix},$$

oder auch das folgende:

$$(9) \quad \Pi \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu & x_1, x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix},$$

(welches auf acht Weisen herzustellen ist, weil die λ, μ, ν in (7), indem man die λ', λ'' usw. in ihrer Reihenfolge vertauscht, beliebig im Vorzeichen geändert werden können). Hier ist das durch Formel (8) gegebene Π , vom Grade $-\frac{1}{2}$ in den x_1, x_2 , dasjenige, welches durch die normierte Differentialgleichung bestimmt wird, von der [in Abh. LXIV, Gleichung (11), S. 542] die Rede war:

$$(10) \quad (\Pi, f)_2 = \varphi \cdot \Pi,$$

wo nun $f = (xa)^2 (xb)^2 (xc)^2$ zu nehmen ist und die quadratische Form φ in einfacher Weise von den λ, μ, ν abhängt³⁾. Andererseits ist das durch (9) gegebene Π gerade dasjenige, welches unmittelbar durch ein bestimmtes Integral von der Form (1) gegeben wird:

³⁾ Man findet des näheren:

$$\varphi = \frac{5}{8} \{ (8\lambda^2 + 1)(ab)(ac)(xb)(xc) + (8\mu^2 + 1)(bc)(ba)(xc)(xa) + (8\nu^2 + 1)(ca)(cb)(xa)(xb) \}.$$

$$(11) \quad \Pi \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu & x_1, x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix} \\ = \int (za)^{\frac{-1+\lambda-\mu-\nu}{2}} \cdot (zb)^{\frac{-1+\mu-\nu-\lambda}{2}} \cdot (zc)^{\frac{-1+\nu-\lambda-\mu}{2}} \cdot (zx)^{\frac{-1+\lambda+\mu+\nu}{2}} \cdot (zdz),$$

(das Integral wieder über Doppelumläufe des z erstreckt). Es ist nicht unwichtig, diese Formel so aufzufassen, daß man das Integral geradezu als Definition des linker Hand stehenden Π gelten läßt. Man erreicht dann, daß Π nicht nur von x_1, x_2 , sondern auch von $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2$ wie von den Exponenten λ, μ, ν in ganz bestimmter Weise abhängt⁴⁾: Π erscheint als eine Kovariante der vier Reihen kogredienter binärer Veränderlicher $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2$; es erscheint überdies als ganze Funktion der Exponenten λ, μ, ν . In letzterem Umstande liegt es begründet, daß man nun hier keinerlei, z. B. ganzzahlige Wertsysteme der λ, μ, ν bei der Definition auszuschließen hat; vielmehr sind alle besonderen Verhältnisse, die sich bei einzelnen Wertsystemen der λ, μ, ν einstellen mögen, aus der allgemeinen Theorie durch Grenzübergang abzuleiten. — Ich hoffe sehr, daß im Sinne dieser Andeutungen eine zusammenhängende Darstellung sämtlicher Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion von anderer Seite in nicht zu ferner Zeit veröffentlicht wird⁵⁾; ich selbst habe die Grundzüge einer solchen Ableitung im Sommersemester 1890 vorgetragen.

Schließen wir aus, daß die λ, μ, ν rein imaginär sind, so gibt es unter den acht jedesmal zusammengehörigen Fällen (9) einen, dessen λ, μ, ν in ihrem reellen Teile positiv sind. Die Zweige Π_1, Π_2 des betreffenden Π sind als Formen von x_1, x_2 überall endlich, ohne irgendwo eine gemeinsame Nullstelle zu besitzen. Man wird daher die so partikularisierten Π_1, Π_2 zugrunde legen, wenn es sich darum handelt, x_1, x_2 rückwärts als Formen der Π_1, Π_2 darzustellen. Dies ist bekanntlich insbesondere dann anzustreben, wenn die λ, μ, ν den reziproken Werten dreier reeller ganzer Zahlen l, m, n gleich sind. Indem wir l, m, n gleich als positiv voraussetzen, hat das in Rede stehende Π in den x_1, x_2 dann den Grad:

$$\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right) : 2;$$

⁴⁾ Hiermit dürfte geleistet sein, was Riemann beabsichtigte, als er sich (Werke, 1. Aufl., S. 76—77; 2. Aufl., S. 81—82) dahin äußerte, daß der Ausdruck der P -Funktion durch ein bestimmtes Integral zur Bestimmung der in den Fundamentalzweigen P^1, P^2, \dots noch willkürlich gebliebenen Faktoren benutzt werden solle. Allerdings verwendet Riemann ja keine homogenen Variablen; ich nehme an, daß er eben hierdurch gehindert war, die Sache zu einem guten Abschluß zu bringen.

⁵⁾ [Dies ist in der 1892 erschienenen Göttinger Dissertation von Schellenberg geschehen.]



die x_1, x_2 sind also in dem Π_1, Π_2 vom Grade:

$$(12) \quad 2: \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right).$$

Es ist dies die zuerst von Halphen gefundene Zahl (Comptes Rendus, (1881, I) Bd. 94)⁶⁾. Die neue Ableitung, welche hier für diese Zahl gegeben ist, oder vielmehr die neue Bedeutung, unter der dieselbe hier auftritt, dürfte unter prinzipiellen Gesichtspunkten bemerkenswert sein.

Göttingen, den 23. Dezember 1890.

⁶⁾ Vgl. die bez. Erläuterungen auf S. 129 des Bandes I meiner von Herrn Fricke bearbeiteten *Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen* (Leipzig 1890).

LXVII. Über den Hermiteschen Fall der Laméschen Differentialgleichung.

[Math. Annalen, Bd. 40 (1892).]

Schreiben wir

$$(1) \quad t = \int \frac{dp}{\sqrt{4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)^2}}$$

und betrachten die Differentialgleichung:

$$(2) \quad \frac{d^2 E}{dt^2} = (A p + B) E,$$

so läuft Lamés ursprüngliche Theorie darauf hinaus, alle Fälle aufzuzählen, in denen (2) ein partikuläres Integral der folgenden Form besitzt:

$$(3) \quad E = (p - e_1)^{\varepsilon_1} \cdot (p - e_2)^{\varepsilon_2} \cdot (p - e_3)^{\varepsilon_3} \varphi_k(p);$$

hier bedeuten die $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nach Belieben 0 oder 1, und $\varphi_k(p)$ ist ein Polynom von irgendwelchem k -ten Grade. Sei noch

$$(4) \quad \frac{n}{2} = k + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2}.$$

Dann läßt sich Lamés Resultat dahin aussprechen, daß jedenfalls

$$(5) \quad A = n(n+1)$$

genommen werden muß, und darauf B aus einer algebraischen Gleichung $(k+1)$ -ten Grades zu bestimmen ist. Nun ist bekanntlich Hermites Verdienst, den allgemeinen Fall der Differentialgleichung (2) näher betrachtet zu haben, bei dem zwar A den in (5) gegebenen Wert hat, B aber beliebig bleibt. Ich beabsichtige hier keineswegs ausführlich auf die Hermiteschen Resultate einzugehen, ich brauche von denselben nur, daß *in allen Fällen der Hermiteschen Differentialgleichung zwei Partikular-*

¹⁾ [Es sei hervorgehoben, daß der hier verwendete Parameter t die Hälfte des in den Abh. LXIII und LXIV benutzten Parameters t ist.]



lösungen E_1 und E_2 der Gleichung gefunden werden können derart, daß das Produkt

$$(6) \quad E_1 \cdot E_2 = F(p)$$

ein Polynom n -ten Grades von p ist. Liegt der von Lamé selbst betrachtete Spezialfall vor, so sind diese E_1 und E_2 untereinander identisch, $F(p)$ ist dann das Quadrat des in (3) gegebenen Ausdrucks. Es ist dies zugleich der einzige Fall, in welchem $F(p) = 0$ eine Doppelwurzel besitzen kann oder eine Wurzel, die gleich e_1 oder e_2 oder e_3 wäre²⁾.

Jetzt kennt man die schönen Realitätstheoreme, welche für die Laméschen Polynome q_k gelten: daß die $(k+1)$ überhaupt vorhandenen q_k alle reell sind und gleich Null gesetzt lauter reelle, voneinander verschiedene Wurzeln liefern, welche zwischen e_1 und e_2 , bez. e_2 und e_3 zu suchen sind, wobei sich die einzelnen q_k voneinander durch die Art und Weise unterscheiden, wie ihre Wurzeln auf die genannten beiden Intervalle verteilt sind³⁾. Ich habe mich nun gefragt, in welchen allgemeineren Eigenschaften des Hermiteschen Falles diese Realitätstheoreme enthalten sein mögen. Man denke sich in $F = 0$ die beiden Größen p und B als rechtwinkelige Koordinaten; dann wird es darauf ankommen, die Gestalt der Kurve $F(p, B) = 0$ wenigstens schematisch festzulegen. Diese Gestalt ist natürlich vom Werte der Zahl n abhängig; man wird dieselbe aber nach einer leicht erkennbaren Regel für jedes n zeichnen können, sobald man sie für ein hinreichend großes ungerades n und für ein ebensolches gerades n kennt. Statt aller weiteren Erklärung will ich hier also einfach die beiden Figuren⁴⁾ hersetzen, die sich auf $n = 5$ und $n = 6$ beziehen (siehe nebenstehende Fig. 1 und 2).

In diesen Figuren fallen zunächst die $2n+1$ (also die 11, bez. 13) horizontalen geraden Linien auf, welche (in ihren Schnittpunkten mit der Kurve) die Quadrate Laméscher Ausdrücke (3) vom Grade $\frac{n}{2}$ bez. $\frac{n}{2}$ liefern;

²⁾ Man vgl. etwa die Darstellung im zweiten Bande von Halphens *Traité des fonctions elliptiques* (1888). [Hermites erste Mitteilungen 1872 finden sich in den Feuilles lithographiés de l'Ecole Polytechnique, dann in der Artikelserie „Sur quelques applications des fonctions elliptiques“ in den Comptes Rendus, Bd. 85–94. (1877–1882.) = Oeuvres, t. 3. pag. 266 ff. K.]

³⁾ Letzterer Umstand wurde von mir zuerst in Bd. 18 der *Math. Annalen* dargestellt (1881). [Siehe *Abh. LXII*.] Daran schließen sich die Entwicklungen von Liapunoff (Petersburger Magisterschrift, 1884), Stieltjes (*Acta VI*, S. 321 ff., 1884 [= Oeuvres, t. 1. Nr. XXXIX]), Markoff (*Annalen* 27, S. 143 ff., 1885), Poincaré (*Acta VI*, S. 299 ff., 1885). [Liapunoff hat zuerst die von mir weiterhin angegebene Aufeinanderfolge der ausgezeichneten B , aber nicht die hier gegebenen Kurvengestalten. K.]

⁴⁾ [Die Figuren sollen nur schematische Bedeutung haben. Quantitativ exakt untersucht die Verhältnisse für die niedrigsten Werte von n ($n = 1, 2$) Fr. Winston in ihrer Göttinger Dissertation 1897. Vgl. auch einen Brief von Markoff an mich in den *Math. Annalen* Bd. 47 (1886). K.]

ich will die konstanten Ordinaten dieser Geraden (wie in den Figuren angedeutet ist) mit B_1, \dots, B_{11} , bez. B_1, \dots, B_{13} bezeichnen.

Eine jede dieser horizontalen Geraden $B = B_i$ hat, wie es sein soll, die Eigenschaft, unsere Kurve $F = 0$ in allen Schnittpunkten zu berühren, für die p nicht gerade e_1 oder e_2 oder e_3 ist; in letzteren Punkten findet ein einfacher Schnitt statt. Dabei hat jede einzelne der Geraden ihre eigene Verteilungsweise der Schnittpunkte auf die Werte $p = e_1, e_2, e_3$,

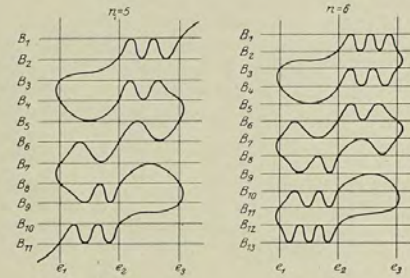


Fig. 1.

Fig. 2.

beziehungsweise die beiden zwischen diesen Werten eingeschlossenen Intervalle der p -Achse. Zugleich erkennt man (was bisher in dieser einfachen Weise wohl nicht bekannt war), wie die $2n+1$ Werte der B_i je nach dieser Verteilungsweise der Schnittpunkte der Größe nach aufeinander folgen.

Ist nun irgendein Wert von B gegeben, der nicht zu den B_i gehört, und fragen wir, wie viele reelle Wurzeln die Gleichung $F = 0$ für denselben aufweisen mag, so belehrt uns darüber ein Blick auf die Figur. Insbesondere werden wir, wenn $B > B_1$ oder $< B_{2n+1}$ ist, bei ungeradem n nur einen reellen Schnittpunkt haben (der rechts von e_3 , bez. links von e_1 zu suchen ist), bei geradem n aber keinen reellen Schnittpunkt. Nur in den Zwischenlagen haben wir eine größere Zahl von Schnittpunkten, worüber ich wohl keine spezifizierten Sätze aufzustellen brauche. Die Schnittpunkte verteilen sich übrigens, wie man findet, jeweils abwechselnd auf die Hermiteschen E_1, E_2 .

Gelegentlich meiner Untersuchung über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe in Bd. 37 der *Math. Annalen* (1890) [vgl. die vorstehende *Abh. LXV*] habe ich den Begriff der Charakteristik X festgelegt, der einer linearen Differentialgleichung bezüglich eines Intervalls der



p -Achse zukommt. Man wird verlangen, diese Charakteristiken X im Falle der Hermiteschen Differentialgleichung für die vier Intervalle

$$-\infty, e_1; e_1, e_2; e_2, e_3; e_3, +\infty$$

anzugeben. In dieser Hinsicht gebe ich zunächst die folgenden beiden Figuren, welche die Frage unter den Voraussetzungen $n = 5$ und $n = 6$ für die Laméschen Ausnahmefälle beantworten:

$n=5$				
B_1	0	2	0	0
B_2	0	2	0	0
B_3	0	2	0	0
B_4	0	1	2	0
B_5	0	1	1	0
B_6	0	1	1	0
B_7	0	1	1	0
B_8	0	2	1	0
B_9	0	2	0	0
B_{10}	0	2	0	0
B_{11}	0	2	0	0
B_{12}	0	2	0	0

Fig. 3.

$n=6$				
B_1	0	3	0	0
B_2	0	3	0	0
B_3	0	3	0	0
B_4	0	1	2	0
B_5	0	1	2	0
B_6	0	1	2	0
B_7	0	1	1	0
B_8	0	2	1	0
B_9	0	2	1	0
B_{10}	0	2	0	0
B_{11}	0	2	0	0
B_{12}	0	3	0	0
B_{13}	0	3	0	0

Fig. 4.

Entsprechende Figuren entwirft man sofort für beliebige ungerade oder gerade Werte von n . Und nun hat man für die Hermitesche Differentialgleichung die Regel:

Liegt B zwischen B_i und B_{i+1} , so wird die Charakteristik X des einzelnen Intervalls je mit der kleineren der beiden Charakteristiken übereinstimmen, die dem Intervalle für $B = B_i$ und $B = B_{i+1}$ entsprechen.

Es bleibt der Fall zu betrachten, daß $B > B_1$ oder $< B_{2n+1}$ ist. Elementare Betrachtungen ergeben hierfür die folgenden Schemata

$$\left\{ \begin{array}{l} B > B_1 \\ B < B_{2n+1} \end{array} \right. \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X'' & 0 & X' & 0 \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & \\ \hline 0 & X' & 0 & X'' \\ \hline e_1 & e_2 & e_3 & \end{array} \end{array}$$

Fig. 5.

wobei X', X'' zwei Zahlen sind, von denen die erstere $\geq \left[\frac{n}{2}\right]$, die zweite ≥ 0 ist, und von denen jede einzelne, sofern man nur B groß genug ($> B_1$) oder klein genug ($< B_{2n+1}$) nimmt, beliebig anwachsen kann.

Aber hiermit ist noch nicht gegeben, wie X' und X'' in jedem Falle zusammenhängen. Um hierüber Klarheit zu bekommen, habe ich die *Kreisbogenvierecke* betrachtet, welche im Falle unserer Differentialgleichung

eben die Bedeutung haben, wie die von mir in Bd. 37 der Math. Annalen [siehe Abh. LXV] betrachteten *Kreisbogendreiecke* für die damals zu untersuchende hypergeometrische Differentialgleichung. Das Resultat ist, daß in allen Fällen die einfache Beziehung

$$(7) \quad X' = X'' + \left[\frac{n}{2}\right]$$

besteht.

Ich hoffe, daß die hiermit genannten einfachen Sätze für die Anwendungen nützlich sein können. Ihnen gehen andere parallel, die sich auf den Grenzfall der Funktionen des zweiaxigen Zylinders beziehen (wo e_1 oder e_2 ins Unendliche gerückt ist), und die ich gleich den hier mitgeteilten bereits im vergangenen Winter in meiner Vorlesung über lineare Differentialgleichungen ausgesprochen und abgeleitet habe³⁾.

Göttingen, im September 1891.

³⁾ [Vollständige Angaben folgen weiter unten in dem Referate LXIX über die im Sommer 1894 von mir gehaltene Vorlesung über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. In der bez. Autographic sind insbesondere auch die Gestalten der abbildenden Polygone durch zahlreiche Figuren erläutert. K.]



LXVIII. Autographierte Vorlesungshefte ¹⁾.

[Math. Annalen, Bd. 45 (1894).]

Die hypergeometrische Funktion.

(Vorlesung im W.-S. 1893/94.) ²⁾

Die hypergeometrische Funktion ist im Vergleich zu den elliptischen Funktionen, denen sie an Wichtigkeit gleich steht, in den Lehrbüchern bislang auffallend vernachlässigt worden. Zudem sind die Darstellungen, die ich kenne, fast nur auf den äußeren Aufbau der Formeln gerichtet. Die großen Gedanken, welche Riemann in die Theorie eingeführt hat, scheinen im Bewußtsein der heutigen Generation, trotzdem sie die Grundlage aller weiteren Entwicklung bilden, vielfach beiseite geschoben und verkümmert.

Wir haben zunächst Riemanns Abhandlung von 1857 (Nr. IV der gesammelten Werke). Der Zielpunkt ist hier, das Wesen der hypergeometrischen Funktion aus ihrem Verhalten bei Umkreisung der singulären Punkte zu verstehen. Die aus derselben Zeit stammenden Fragmente, welche in den gesammelten Werken unter Nr. XXI abgedruckt sind, belehren uns, wie Riemann im gleichen Sinne eine allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung zu schaffen beabsichtigte. Auch hier sollte die Gruppe der linearen Substitutionen, welche irgend n linear unabhängige Lösungen bei Durchlaufung geschlossener Wege erfahren, voranstellen. — Mit diesem Ansatz verbindet sich dann, was speziell die linearen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung angeht, eine geometrische Methode. Dieselbe betrachtet die konforme Abbildung, welche der Quotient

¹⁾ [Dieses und das folgende Selbstreferat sollen das Studium der bezüglichen autographierten Vorlesungshefte selbst keineswegs überflüssig machen. Beide Vorlesungsreferate berühren sich infolge ihres funktionentheoretischen Inhalts mit den in Bd. 3 dieser Ausgabe abdruckenden Abhandlungen; sie sind aber wegen der in ihnen behandelten Realitätstheoreme bereits hierher gestellt. K.]

²⁾ [Die Ausarbeitung wurde von E. Ritter hergestellt. Der erste Abdruck erschien 1894, ein zweiter Abdruck 1906. (In Kommission bei B. G. Teubner.)]

zweier Partikularlösungen der Gleichung (insbesondere also der Quotient zweier Zweige der hypergeometrischen Funktion) von der Ebene der unabhängigen Variablen entwirft. Leider besitzen wir hierüber von Riemann selbst nur zerstreute Notizen (man vgl. die Abhandlung über die Minimalflächen sowie verschiedene andere Teile des Nachlasses ³⁾). Es ist das große Verdienst von Schwarz, in seiner Abhandlung in Bd. 75 des Crelleschen Journals (1872) [abgedruckt in Bd. II seiner gesammelten Abhandlungen] den Gegenstand zum ersten Male wenigstens nach bestimmten Richtungen zur Geltung gebracht zu haben. Daran schließt sich die lange Reihe der neueren Arbeiten über die Polyederfunktionen, die elliptischen Modulfunktionen und die allgemeinen eindeutigen automorphen Funktionen. Aber hiermit ist die Tragweite der Methode noch nicht erschöpft. Ich darf wegen weitergehender Entwicklungen auf meine Arbeiten in Band 37 und 40 der Math. Annalen [= Abh. LXV und LXVII der vorliegenden Ausgabe], sowie auf die eben nun in Band 44 daselbst publizierte Untersuchungen des Herrn Schilling verweisen ⁴⁾.

Diesen ganzen Komplex von Auffassungen und Methoden in einer dem heutigen Stande der Theorie entsprechenden Form zunächst an dem Beispiel der hypergeometrischen Funktion darzulegen, ist das Ziel meiner Vorlesung gewesen. Ich hoffe, im kommenden Semester eine allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Darstellung zu bringen, bei der die gleichen Momente zur Geltung kommen sollen ⁵⁾.

Meine Vorlesung spaltet sich dem Gesagten zufolge in zwei Teile.

Teil I gibt eine Übersicht über die ältere analytische Theorie, bis zu Riemanns Arbeit 1857 inklusive. Ich bespreche dabei insbesondere auch die Definition durch bestimmte Integrale, wobei die Idee des *Doppelumlaufs* in den Vordergrund gestellt wird. Auch führe ich hier die homogenen Formulierungen ein, von denen in Band 38 der Math. Annalen die Rede ist, und die ich weiterhin immer wieder gebrauche. [Vgl. die vorstehende Abh. LXVI.]

Teil II ist dann ausschließlich der geometrischen Theorie gewidmet, wobei ich mich fortgesetzt auf die soeben genannte Schillingsche Arbeit beziehen darf.

Es handelt sich zunächst um einen Exkurs über *sphärische Trigonometrie*.

³⁾ [Man sehe indes auch die auf S. 256 Fußnote ¹⁾ des vorliegenden Bandes wiedergegebenen Nachrichten über ein später erst bekannt gewordenes Riemannsches Vorlesungsheft. Abgedruckt in den Nachträgen zu Riemanns Werken, S. 69—93. K.]

⁴⁾ [Wegen weiterer Literatur vgl. die Artikel von Hilb über „lineare Differentialgleichungen“ in Bd. II, und von Sommer über „elementare Geometrie vom Standpunkt der neueren Analysis“ in Bd. III, der mathematischen Enzyklopädie.]

⁵⁾ [Vgl. hierzu das folgende Selbstreferat LXIX.]



Die allgemeinen Grundlagen der sphärischen Trigonometrie sind dem eindringenden analytischen Verständnisse neuerdings von Herrn Study in besonders durchsichtiger Weise zugänglich gemacht worden⁶⁾. Herr Study hält dabei, was die geometrischen Figuren angeht, an der Annahme reeller Winkel und Seiten fest. Dagegen hat Schilling eine einfache Figur konstruiert, die der Annahme beliebig komplexer Elemente entspricht⁷⁾. Ich zeige, wie man von den analytischen Formeln aus mit Notwendigkeit zu der Schillingschen Figur gelangt. Ich wende mich sodann zu meinen Entwicklungen von Bd. 37. [Abh. LXV.] Der Dreiecksbegriff, den ich dort benutze, unterscheidet sich von dem Studyschen dadurch, daß ich dem Dreieck nicht nur Ecken und Seiten, sondern auch eine Fläche beilege (die wie eine „Membran“ in die Seiten eingespannt ist). Indem ich diese Fläche in jedem Falle wirklich konstruiere, erhalte ich jene Relationen zwischen den absoluten Beträgen der Winkel $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ und Seiten $l\pi, m\pi, n\pi$, welche ich als die *Ergänzungsrelationen* der sphärischen Trigonometrie bezeichne:

$$E\left(\frac{l}{2}\right) = E\left(\frac{\lambda - \mu - \nu + 1}{2}\right), \text{ usw.}$$

Die Winkelzahlen λ, μ, ν sind hier wieder zunächst als reell gedacht; hoffentlich führt Herr Schilling den Gegenstand auch für den Fall komplexer λ, μ, ν bald zum glücklichen Abschluß⁸⁾. — Noch darf ich hervorheben, daß ich bei meinen Entwicklungen die „verwandten“ sphärischen Dreiecke, d. h. diejenigen, welche zu demselben Dreikant gehören, immer gleichzeitig betrachte. Verwandte Dreiecke sind Gegenbilder verwandter, d. h. gleichgruppiger hypergeometrischer Funktionen. Die Figuren zeigen, daß die Theorie dieser verwandten Funktionen [nämlich für die Grenzfälle] bisher noch nicht hinreichend ins einzelne durchgebildet wurde.

An diese geometrischen Entwicklungen schließt sich eine längere Reihe von Folgerungen betr. die hypergeometrische Funktion. Da ist zunächst die Bestimmung der Zahl der reellen Nullstellen der hypergeometrischen Reihe zwischen $x=0$ und $x=1$, wie ich dies schon in Bd. 37 ausführte. [Vgl. Abh. LXV.] Ich schließe daran u. a. Theoreme über die Nullstellen derjenigen Determinanten, die sich aus entsprechenden Zweigen zweier verwandter hypergeometrischer Funktionen zusammensetzen lassen. Ich untersuche ferner (im Anschlusse an die Abhandlung von Schwarz, doch über dieselbe mannigfach hinausgehend), wann sich die hypergeometrische

⁶⁾ Nr. 2 des 20. Bandes der math.-phys. Abhandlungen der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig, 1893.

⁷⁾ [Wegen der Schillingschen Figur vgl. die Bemerkungen auf S. 408 des Bandes I dieses Wiederabdruckes.]

⁸⁾ [Vgl. Schilling in den Math. Annalen, Bd. 46 (1895).]

Funktion auf niedrigere Funktionen reduzieren läßt. Es ergibt sich eine volle Liste der rationalen Fälle, der algebraischen Fälle, sowie derjenigen, die sich durch unbestimmte Integrale multiplikativer Funktionen ausdrücken lassen. Hiermit ist, für die hypergeometrische Funktion, die von Picard und Vessiot vorgeschlagene Klassifikation im Prinzip durchgeführt und alle die früher von Markoff u. a. aufgezählten speziellen Fälle finden ihre systematische Stellung. — Ich wende mich endlich zu der Frage der eindeutigen Darstellung, wobei der Satz, den ich in Bd. 14 der Math. Annalen, S. 128 (1878)⁹⁾ gab, daß sich alle hypergeometrischen Funktionen durch eindeutige Funktionen des elliptischen Periodenverhältnisses darstellen lassen, den naturgemäßen Abschluß bildet¹⁰⁾. — Was die Herstellung von Formeln

⁹⁾ [Vgl. Abh. LXXXII, Abschnitt II, § 2 in Bd. 3 dieser Gesamtausgabe.]

¹⁰⁾ [Dieser wichtige Satz ist, wie ich gleich, als ich Riemanns Vorlesung kennen lernte, in den Göttinger Nachrichten v. J. 1897, S. 190 bekannt machte, in der Tat schon von Riemann in seiner Vorlesung von 1858/59 gegeben worden. Vgl. wieder die 1901 von M. Noether und W. Wirtinger herausgegebenen Nachträge zu Riemanns Werken, S. 93. Papperitz hat in den Math. Annalen, Bd. 34 (1888) die Uniformisierung der hypergeometrischen Funktion durch direkte Berechnung der Poincaréschen Z-Reihen behandelt. Wesentlich übersichtlicher ist die von Wirtinger gegebene Formel in den Wiener Akademieberichten, II a, Bd. 111 (1902). Man gehe von der Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion aus:

$$P\left(\begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ \lambda & \frac{\mu - \lambda - \nu + 1}{2} & \nu; x \end{matrix}\right) \\ = \int_z^{\frac{\mu - \lambda - \nu + 1}{2}} \frac{z^{\frac{\mu - \lambda - \nu + 1}{2}} (1 - z)^{\frac{\nu - \lambda - \mu - 1}{2}} (1 - xz)^{\frac{\lambda + \mu + \nu - 1}{2}} dz}{z^{\frac{\mu - \lambda - \nu + 1}{2}} (1 - z)^{\frac{\nu - \lambda - \mu - 1}{2}} (1 - xz)^{\frac{\lambda + \mu + \nu - 1}{2}} dz,$$

wo das Integral über einen Doppelumlauf um die Punkte $z=0$ und $z=1$ zu erstrecken ist. Führt man hier das elliptische Integral erster Gattung

$$v = \frac{1}{2} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-xz)}}$$

als neue Variable ein, bezeichnet seine beiden Perioden mit $2K$ und $2iK'$ und setzt endlich noch $u = \frac{v}{2K}$, so geht die Integraldarstellung unserer P -Funktion über in:

$$4x^{\frac{r-1}{2}} (1-x)^{\frac{\lambda-\mu}{2}} K \int \theta_{00}^{\lambda+\mu+\nu}(u) \cdot \theta_{01}^{\lambda-\mu-\nu}(u) \cdot \theta_{10}^{\nu-\lambda-\mu}(u) \cdot \theta_{11}^{\mu-\lambda-\nu}(u) \cdot du,$$

wo der dem Doppelumlauf in der z -Ebene entsprechende Integrationsweg in der u -Ebene die Punkte $u=0$ und $u=2$ oder zwei diesen äquivalente Punkte des Periodengitters $\left(\frac{1}{2}, \frac{iK'}{2K}\right)$ verbindet. (Integrale dieser Art kommen, wie Wirtinger hervorhebt, bereits in Riemanns hinterlassenen Manuskripten — aber ohne jede Erläuterung —



betrifft, so beschränke ich mich bei allen diesen Entwicklungen auf ein bloßes Referat, verweise aber insbesondere auf die Dissertation von O. Fischer (Leipzig 1885)¹¹⁾, weil ich der Meinung bin, daß die Methoden, mit denen dort die zum Ikosaeder gehörigen hypergeometrischen Funktionen behandelt werden, in richtiger Weise aufgefaßt allgemeine Bedeutung haben möchten.

Göttingen, im März 1894.

vor.) Führt man diese Integration aus, so erhält man Potenzreihen, die nach $q = e^{-\frac{K'}{K}}$ fortschreiten; da nun auch das Doppelverhältnis z eine eindeutige Funktion des Periodenquotienten $\frac{iK'}{K}$ ist, so hat man die gewünschte Darstellung der P -Funktion

als eindeutige Funktion von $\frac{K'}{K}$, mit dem Faktor K multipliziert. K.]

¹¹⁾ [Einige Angaben über dieselbe findet man oben S. 317, Fußnote ⁴⁾, sowie S. 346, Fußnote ²⁰⁾. K.]

LXIX. Autographierte Vorlesungshefte.

[Math. Annalen, Bd. 46 (1895).]

Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

(Vorlesung im Sommersemester 1894.)¹⁾

In Fortsetzung des unter dem Titel „Die hypergeometrische Funktion“ in Band 45 der Annalen gegebenen ersten Referates [vgl. die vorstehende Nr. LXVIII] berichte ich nachfolgend über die damals bereits angekündigte Vorlesung über lineare homogene totale Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Dieselbe war von vornherein als Fortsetzung der früher besprochenen Vorlesung über die hypergeometrische Funktion gedacht, so daß ich den Leser in erster Linie bitten muß, sich den Inhalt der letzteren wieder vergegenwärtigen zu wollen. Übrigens aber kann ich die Gesichtspunkte, welche ich bei der Vorlesung verfolgte, nicht besser bezeichnen als durch Voranstellung einiger Bemerkungen über die Theorie der Abelschen Integrale:

1. In der Theorie der Abelschen Integrale ist es zweifellos eine wichtige Aufgabe, die Integrale durch möglichst einfache und symmetrische algebraische Formeln darzustellen. Dieser Aufgabe habe ich in Band 36 der Math. Annalen [als Abh. XCVII in Bd. 3 dieser Ausgabe abgedruckt] dadurch entsprochen, daß ich mir das algebraische Gebilde in Gestalt einer „kanonischen Fläche“ gegeben dachte und übrigens statt der unabhängigen Veränderlichen x homogene Veränderliche x_1, x_2 einführte. Die kanonischen Flächen sind Riemannsche Flächen, deren Blätterzahl m ein Teiler von $2p - 2$ ist, so daß $2p - 2 = m\delta$ gesetzt werden kann, und die insbesondere so beschaffen sind, daß die $2m + 2p - 2$ Verzweigungspunkte die Nullstellen einer ganzen algebraischen Form der x_1, x_2 vom Grade $(\delta + 2)$, der sogenannten *Verzweigungsform* sind, die ich mit σ bezeichne. Die geeignete algebraische Darstellung eines Integrales u ergibt sich von hier aus, indem man den Quotienten $\frac{\sigma \cdot du}{\sigma dx}$ als eine algebraische Funktion der x_1, x_2 vom Grade δ anschreibt.

¹⁾ [Die Ausarbeitung wurde wieder von E. Ritter hergestellt. Der erste Abdruck erschien 1894, ein zweiter Abdruck 1906. (In Kommission bei B. G. Teubner.)]



2. Des weiteren aber wird man die transzendente Natur des Integrals studieren, die in seiner *Periodizität* ihren prägnanten Ausdruck findet. In dieser Hinsicht kann man fragen:

a) ob man, bez. wann man ein Abelsches Integral auf niedere Transzendenten, wie Logarithmen oder elliptische Integrale usw., zu reduzieren vermag,

weiter aber:

b) wie man ein Integral auf dem als gegeben vorausgesetzten Gebilde durch seine Unendlichkeitsstellen und irgendwelche Eigenschaften seiner Periodizität festlegen kann. — Ich erinnere in dieser Hinsicht insbesondere an den Riemannschen Satz, demzufolge das Integral bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, wenn man neben der Art seines Unendlichwerdens an verschiedenen Stellen die reellen Teile seiner Periodizitätsmoduln kennt.

Eben diese Fragen kann man nun in der Theorie der linearen Differentialgleichungen wiederholen, und ich erlaube mir, dementsprechend die einzelnen Teile des folgenden Referates zu ordnen, womit ich ziemlich genau dem in der Vorlesung selbst eingehaltenen Gedankengange folge. Ich bemerke vorweg, daß es keine prinzipielle Schwierigkeiten hat, die Betrachtungen ad 1) sowie die ad 2a) auf lineare Differentialgleichungen der n -ten Ordnung auszudehnen, oder jedenfalls die dahingehenden Ansätze zu machen; die Beschränkung auf lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, an die ich mich in der Vorlesung von vornherein gebunden habe, ist wesentlich durch die zu 2b) gehörigen Überlegungen bedingt gewesen.

I. Algebraische Normierung der Differentialgleichungen ²⁾.

Die allgemeine invariantentheoretische Gestalt, die man einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten erteilen kann, indem man die unabhängige Variable x durch den Quotienten $x_1 : x_2$ ersetzt, ist aus verschiedenen neueren Arbeiten bekannt; ich will hier [wegen der Allgemeinheit seiner Angaben] namentlich auf einen Aufsatz von Herrn Wälsch verweisen (Schriften der deutschen Prager mathematischen Gesellschaft, 1892), in welchem man eine Reihe einschlägiger Zitate beisammen findet³⁾. Das Resultat ist, daß man einfach die Summe der zweiten, ersten und nullten Überschiebung einer unbekannt Form Π von x_1, x_2 von irgendwelchem beliebig anzunehmenden Grade über drei gegebene rationale, ganze Formen φ, ψ, ζ der Grade $n, (n-2)$ und $(n-4)$ gleich Null zu setzen

²⁾ Ich habe über die hier zu gebenden Entwicklungen in der mathematischen Sektion der Wiener Naturforscherversammlung gesprochen, doch ist im Texte ein Punkt korrigiert, auf den mich Herr Pick aufmerksam gemacht hat (Nov. 1894).

³⁾ [Wegen der Literatur vergleiche auch die Fußnote ⁴⁾ auf S. 543 dieses Bandes.]

hat. In Formel (indem ich die nullte Überschiebung der Deutlichkeit halber als Produkt schreibe):

$$(1) \quad (\Pi, \varphi)_2 + (\Pi, \psi)_1 + \Pi \cdot \zeta = 0.$$

Nimmt man hier die Wurzeln von $\varphi = 0$ (welche die singulären Punkte der Differentialgleichung abgeben) sämtlich als einfach an, so hat man den „regulären“ Fall, in welchem jedem singulären Punkte in bekannter Weise zwei bestimmte Exponenten zugehören. Und zwar ist die Differentialgleichung in der Art normiert, daß für jeden singulären Punkt der eine dieser Exponenten gleich Null ist. Der andere Exponent hängt in einfacher Weise von den Formen φ und ψ ab. Nimmt man ψ identisch Null und setzt den Grad von Π gleich k , so erhält man für den zweiten Exponenten gleichförmig den Wert $1 + \frac{2(k-1)}{n}$. Diese zweiten Exponenten werden also sämtlich

gleich $\frac{1}{2}$, wenn man $k = \frac{4-n}{4}$ setzt, in Übereinstimmung mit meiner Angabe in den Göttinger Nachrichten v. J. 1890 [vgl. die oben abgedruckte Abhandlung LXIV, S. 542f.]. (Man sehe auch die in den Math. Annalen, Bd. 38 (1891) abgedruckte Note von Herrn Pick.)

Es ist nun leicht, wie ich ebenfalls bereits ebenda angab, von hier aus zu einer Darstellung der auf einem *hyperelliptischen* Gebilde existierenden linearen Differentialgleichungen weiter zu schreiten. Ich betrachte der Kürze halber hier nur diejenigen ∞^{3p-3} Differentialgleichungen dieser Art, welche (auf dem hyperelliptischen Gebilde) keinerlei singulären Punkt besitzen. Es sei $\varphi_{2p+2} = 0$ die Gleichung für die Verzweigungspunkte der zweiblättrigen hyperelliptischen Fläche. Es sei ferner Ω_{2p-2} die allgemeinste auf der Fläche existierende ganze algebraische Form vom $(2p-2)$ -ten Grade, also gleich $\chi_{2p-2} + \psi_{p-3} \sqrt{\varphi_{2p+2}}$, unter χ, ψ rationale ganze Formen in x_1, x_2 von dem als Index beigesetzten Grade verstanden. Endlich nehme man Π vom Grade $\frac{1-p}{2}$. Man hat dann einfach:

$$(2) \quad (\Pi, \varphi)_2 + \Omega \cdot \Pi = 0.$$

In der Tat: das so definierte Π hat als Funktion von $x = \frac{x_1}{x_2}$ keine anderen singulären Punkte als die Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes und in diesen die Exponenten 0 und $\frac{1}{2}$, usw. [Die Differentialgleichung enthält auch, wie es sein muß, $3p-3$ willkürliche Konstante.]

Um dieses Resultat auf höhere algebraische Gebilde auszudehnen, beachte man, daß die zweiblättrige hyperelliptische Fläche eine kanonische Fläche ist und daß $\sqrt{\varphi}$ die zugehörige Verzweigungsform vorstellt. Sei jetzt irgendeine m -blättrige kanonische Fläche gegeben; mit σ bezeichnen wir wieder die zugehörige Verzweigungsform vom Grade $(\delta+2)$. Man nehme Π vom Grade $\frac{-\delta}{2}$, normiere dasselbe in geeigneter Weise und be-



trachte den Quotienten $(\Pi, \sigma^2)_2 : \Pi$. Die Entwicklung zeigt, daß derselbe in den Verzweigungspunkten der Fläche, allgemein zu reden, zwar nicht endlich bleibt, aber in bestimmter Weise unendlich wird, und zwar in nicht höherem Grade als $\frac{1}{\sigma}$. Bezeichnet man also mit Σ eine geeignete algebraische ganze Form der Fläche vom Grade $3\delta + 2$ und mit Ω die allgemeinste Form vom Grade 2δ , so kommt als Differentialgleichung:

$$(3) \quad (\Pi, \sigma^2)_2 + \left(\frac{\Sigma}{\sigma} + \Omega\right) \cdot \Pi = 0.$$

Um ein Beispiel anzuführen: sei $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ eine ebene Kurve der vierten Ordnung. Wir projizieren diese Kurve auf das Gebiet $x_1 : x_2$, d. h. wir sehen x_3 als eine Funktion von x_1 und x_2 an und haben also Differentiationen nach x_1, x_2 in der Folge so auszuführen, daß wir setzen:

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_1}, \text{ usw.}$$

Bei der Projektion wird das Gebiet $x_1 : x_2$ vierfach überdeckt, d. h. wir erhalten eine vierblättrige Riemannsche Fläche. Dieselbe ist eine kanonische Fläche; die zugehörige Verzweigungsform ist die Polare $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, die wir der Kürze halber mit f_3 bezeichnen. Der Grad von Ω wird gleich 2. Wir werden daher unter Ω in bekannter Weise die allgemeinste rationale ganze Funktion zweiten Grades von x_1, x_2, x_3 (den allgemeinsten Kegelschnitt) verstehen müssen; dieselbe hat in der Tat $3p - 3 = 6$ Konstanten. Andererseits berechnet man für Σ den Wert $\frac{-1}{6} H_3$, unter H die Hesse'sche Form von f verstanden. Die Differentialgleichung wird also:

$$(4) \quad (\Pi; f_3^2)_2 + \left(\frac{-H_3}{6f_3} + \Omega\right) \cdot \Pi = 0,$$

wo Ω vom Grade $-\frac{1}{2}$ anzunehmen ist⁴⁾.

Der Beweis für (3) und (4) ergibt sich sofort, wenn man in den Verzweigungspunkten der kanonischen Fläche die Reihenentwicklungen in Ansatz bringt.

⁴⁾ Bei der so geschriebenen Gleichung erscheint das x_3 gegenüber den x_1, x_2 benachteiligt; kann man eine symmetrische Form finden, in der die drei Koordinaten gleichmäßig berücksichtigt werden? [In symmetrischer Gestalt ist diese Differentialgleichung für Kurven vierter Ordnung von Gordan in den Math. Annalen, Bd. 46 (1895) und für singularitätenfreie Kurven n -ter Ordnung von Herglotz in den Math. Annalen, Bd. 62 (1906) in an mich gerichteten Briefen berechnet. Sei $f=0$ die homogene Gleichung der Kurven n -ter Ordnung und Ω die allgemeinste Form $(2n-6)$ -ten Grades. Dann hat man die Gleichung

$$(\Pi f f)_2 + \Omega \Pi = 0,$$

wo Π vom Grade $-\frac{n-3}{2}$ anzunehmen ist. Dies Resultat ist besonders einfach und legt die Frage geeigneter Verallgemeinerung nahe. K.]

IIa. Lösung der Differentialgleichung durch niedere Funktionen.

Die besonderen Fälle, welche hier zu berücksichtigen sind, werden in systematischer Vollständigkeit durch den Picard-Vessiot'schen Ansatz geliefert, von welchem bereits in dem vorigen Referate [= Abh. LXVIII, S. 581] die Rede war. Die Sachlage ist in dem einfachen Falle der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung natürlich die, daß man auf keine anderen besonderen Gleichungen kommt, als auf solche, welche man nach ihrem individuellen Interesse auch früher bereits in Betracht gezogen hatte. Es handelt sich, wenn wir die sämtlichen Spezialfälle unter zwei Kategorien zusammenfassen dürfen:

1. um diejenigen linearen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, welche durchaus algebraische Integrale besitzen.
2. um solche Differentialgleichungen, bei denen eine einzelne Lösung algebraisch wird (sofern man von einem vielleicht vortretenden Faktor $(x-a)^\lambda$ mit irrationalem λ gegebenenfalls absieht).

Ich habe diese beiden Fälle in meiner Vorlesung ausführlich behandelt, indem ich mich dabei (was nicht notwendig wäre) auf Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten beschränkte. Die ad 2) auftretenden algebraischen Funktionen stellen dann rationale ganze Funktionen vor, welche ich ganz allgemein als *Lamé'sche Polynome* bezeichne.

Ad 1. habe ich vor allen Dingen die Annahme, daß ikosaedrische Integrierbarkeit vorliegen soll, ins einzelne verfolgt. Ich greife dabei auf meine alte Darstellung in Bd. 12 der Math. Annalen (1877) [vgl. Abh. LIII des vorliegenden Bandes] zurück, vereinfache jetzt aber die Betrachtung wesentlich durch Einführung der homogenen Normierung der Differentialgleichung und meine, damit bis zum einfachsten Ausdruck der Bedingungen vorgedrungen zu sein. Selbstverständlich handelt es sich in letzter Linie um die Verträglichkeit eines überzähligen Systems linearer Gleichungen.

Ad 2. darf ich an die traditionelle Aufgabestellung erinnern, welche ursprünglich aus der mathematischen Physik stammt und dann in allgemeiner Gestalt von Heine formuliert worden ist. Dieselbe verlangt nicht sowohl eine *vorgelegte* Differentialgleichung auf ihre Integrierbarkeit zu untersuchen, als vielmehr die noch freien Parameter in einer nur erst durch ihre singulären Punkte und Exponenten gegebenen Differentialgleichung so *festzulegen*, daß eine bestimmte Art der Integrierbarkeit eintritt. Nimmt man die Differentialgleichung (1) als Ausgangspunkt (wie dies u. a. bei Wälsch geschieht), so erhält man dafür die besonders einfache Formulierung: es sind φ, ψ gegeben, man soll χ so bestimmen, daß Π gleich einem Polynom von irgendwelchem vorgegebenen Grade (welches dann eben das „Lamé'sche Polynom“ ist) gesetzt werden kann. Der so getroffene



Ansatz dehnt sich ohne weiteres auf lineare Differentialgleichungen der n -ten Ordnung aus, worüber man wieder den Aufsatz von Herrn Wälsch vergleichen mag. Aber daneben konzentriert sich, was lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung angeht, das Interesse auf die merkwürdigen Realitätstheoreme, welche hier stattfinden. Ich will dieselben hier in aller Kürze bezeichnen:

Man denke sich die Differentialgleichung in der Gestalt (1) gegeben und übrigens der Bequemlichkeit halber einen singulären Punkt ins Unendliche geworfen. Die $(n-1)$ im Endlichen gelegenen singulären Punkte mögen sämtlich als reell vorausgesetzt werden. Sie begrenzen dann $(n-2)$ Intervalle der X -Achse, und auf diese kann man irgend k reelle Punkte rein kombinatorisch auf $\frac{(k+1) \dots (k+n-3)}{1 \cdot 2 \dots (n-3)}$ Weisen verteilen. Dies ist nun genau die Zahl der zugehörigen Laméschen Polynome k -ten Grades³⁾. An dieser Tatsache setzen die Realitätstheoreme in ihrer modernen Form ein. Ich habe in Bd. 18 der Math. Annalen [vgl. die oben abgedruckte Abh. LXII] (1881) mit Rücksicht hierauf nur erst den gewöhnlichen Fall der mathematischen Physik in Betracht gezogen, wo die zweiten Exponenten der im Endlichen gelegenen singulären Punkte, die Gleichungsform (1) vorausgesetzt, gleich $\pm \frac{1}{2}$ sind. Die Übereinstimmung der beiden Zahlen ruht hier darauf, daß die sämtlichen existierenden Laméschen Polynome k -ten Grades reell sind, ferner, gleich Null gesetzt, lauter reelle Wurzeln ergeben, die in den $(n-2)$ Intervallen liegen, und endlich durch die Verteilungsweise auf die $(n-2)$ Intervalle individuell unterschieden sind. Es hat dann Herr Stieltjes 1884 in Bd. 6 der Acta Mathematica gezeigt, daß der so formulierte Satz allgemein richtig ist, solange nur die zweiten Exponenten der im Endlichen gelegenen singulären Punkte kleiner als $+1$ bleiben.

Ich habe es in meiner Vorlesung als meine besondere Aufgabe betrachtet, dem hier gewonnenen Resultate auf alle Weisen nachzugehen. Insbesondere betrachte ich dabei die konforme Abbildung der Halbebene x , welche der Quotient η zweier Partikularlösungen y_1 und y_2 der Differentialgleichung (1) ergibt. Wählt man als den Nenner y_2 von η im Laméschen Falle das zugehörige Polynom, so geht η in bekannter Weise in das Integral einer multiplikativen Funktion über; die konforme Abbildung auf die η -Ebene ergibt daher geradlinige Polygone, deren Gestalt ich untersuche⁴⁾.

³⁾ [Die hier zugrunde liegende Abzählung sieht von allen Realitätsfragen ab. K.]

⁴⁾ Man vergleiche hierzu die allgemeinen gestaltlichen Untersuchungen über geradlinige Polygone, welche Herr Schönflies in Bd. 42 der Math. Annalen, S. 377 ff. (1892) gibt. [Übrigens ist Schönflies in den Göttinger Nachrichten v. J. 1892 bereits auf die funktionentheoretische Seite dieser Frage eingegangen. K.]

Es zeigt sich, daß die Grenze von Stieltjes eine genaue Grenze ist, indem einige der Laméschen Polynome imaginär werden können oder doch imaginäre Wurzeln erhalten oder auch in der Verteilungsweise ihrer reellen Wurzeln auf die $(n-2)$ Intervalle übereinstimmen können, sobald auch nur einer der zweiten Exponenten der im Endlichen gelegenen singulären Punkte über den Wert $+1$ hinauswächst. Ich habe diese Untersuchungen für die niedersten Fälle in meiner Vorlesung mit einer gewissen Ausführlichkeit durchgeführt, um dadurch für die sogleich zu besprechenden allgemeinen Probleme zuverlässige Beispiele zu erhalten⁵⁾. Übrigens muß ich anführen, daß sich Herr Van Vleck bereits vor drei Jahren in meinem Seminare mit der Diskussion der Realitätstheoreme für Fälle jenseits der Stieltjesschen Grenze erfolgreich beschäftigt hat⁶⁾.

IIb. Allgemeine Inbetrachtung der Periodizitätssubstitutionen der linearen Differentialgleichungen.

Hier werde ich zunächst einiges über die Riemannschen Fragmente vom Jahre 1857 sagen dürfen⁷⁾. Riemann geht dort geradezu von den Periodizitätssubstitutionen aus, welche die Lösungen einer linearen Differentialgleichung bei den Umläufen auf der Riemannschen Fläche erleiden, und faßt alle Differentialgleichungen, welche dieselben Substitutionen liefern, zu einer Klasse von Differentialgleichungen zusammen. Man wolle dabei beachten, daß Riemann seiner allgemeinen Denkweise entsprechend die eigentliche Definition der betreffenden Funktionen in den Periodizitätssubstitutionen selbst sucht, daß für ihn also die lineare Differentialgleichung etwas Beiläufiges ist, eine von den linearen Relationen, welche zwischen verwandten Funktionen, d. h. eben Funktionen derselben Klasse, bestehen. Hierin ist eine doppelte Fragestellung eingeschlossen. Einmal wird man verlangen, wenn eine lineare Differentialgleichung oder irgend eine Relation zwischen verwandten Funktionen vorgelegt ist, die Gesamtheit der verwandten Funktionen in einfachster Weise darzustellen. Dies ist eine algebraische Aufgabe, deren Durchführung, wie es scheint, keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten bietet, wenn selbige auch bislang noch nicht in systematischer Form vorliegen dürfte. Zweitens aber muß das Problem

⁷⁾ [Vgl. auch den Zusatz am Schluß dieser Arbeit S. 597–600.]

⁸⁾ [Ich erwähne hier noch gern, daß Herr van Vleck im American Journal of Mathematics vol. 21 (1898/99) den Fall untersucht hat, wo das Produkt $y_1 y_2$ zweier geeigneter Fundamentallösungen ein Polynom wird. Er hat auch die zugehörigen Kreisbogenpolygone genau studiert. K.]

⁹⁾ [Vgl. Riemanns Werke, 1. Aufl. Nr. XXI, 2. Aufl. Nr. XXI, sowie Nachträge Nr. III und IV.]



sein, ob man die Periodizitätssubstitutionen ganz willkürlich geben kann, d. h. ob allemal auf gegebener Riemannscher Fläche bei gegebenen Verzweigungspunkten zu gegebenen Substitutionen eine zugehörige Klasse verwandter Funktionen existiert. Die von Riemann selbst begonnene Konstantenzählung zeigt, daß man zu dem Zwecke auf der Riemannschen Fläche eine gewisse Zahl beweglicher Nebenpunkte einführen muß, d. h. solcher singulärer Punkte, deren Umkreisung die identische Substitution ergibt, die also bei Aufstellung der Periodizitätssubstitutionen nicht mitzählen. Damit aber ist der Existenzbeweis nur erst vorbereitet. Ich habe meinen Zuhörern seit langem vorgeschlagen, den Beweis bei den linearen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung in der Weise zu führen, daß man zunächst, den gegebenen Periodizitätssubstitutionen entsprechend, einen η -Bereich konstruiert (der den Nebenpunkten entsprechend bewegliche innere Verzweigungspunkte enthalten muß), und dann zeigt, daß dieser Bereich (eben vermöge der beweglichen Verzweigungspunkte) allgemein genug ist, um jede mit einer bestimmten Zahl beliebig anzunehmender Verzweigungspunkte versehene Riemannsche Fläche darzustellen. Doch scheint es fast, daß dieser Weg in übergroße Komplikationen hineinführt. Wenigstens haben die jetzt glücklich zu Ende geführten Untersuchungen von Herrn Schilling¹⁰⁾ ergeben, daß die wirkliche Gestalt des η -Bereichs schon im Falle $p=0$, $n^f=3$, sobald man ganz allgemeine Exponentendifferenzen zuläßt, verwickelt genug ist¹¹⁾.

Man vergleiche auch hier die Theorie der Abelschen Integrale. Der soeben an erster Stelle formulierten Aufgabe würde entsprechen, daß man verlangt, innerhalb noch näher vorzuschreibender Grenzen neben ein erstes gegebenes Integral alle anderen zu stellen, die sich von ihm nur um eine algebraische Funktion unterscheiden. Hier rubrizieren also beispielsweise die Untersuchungen über die Kettenbruchentwicklungen hyperelliptischer Integrale, welche Herr Van Vleck neuerdings eben unter den hier vorliegenden Gesichtspunkten zusammenfassend behandelt hat¹²⁾. Bei der zweiten Aufgabe würde man von einem Integrale auf gegebener Riemannscher Fläche bei gegebenen Verzweigungspunkten (d. h. logarithmischen Unstetigkeitspunkten) eine nach Willkür vorgegebene Periodizität verlangen müssen. Die Abzählung zeigt, daß man zu dem Zwecke dem Integral

¹⁰⁾ Geometrische Studien zur Theorie der Schwarzschens s -Funktion; Teil I. Math. Annalen, Bd. 44 (1894), Teil II, Bd. 46 (1895).

¹¹⁾ [Daß diese Riemannsche Fragestellung in bejahendem Sinne zu beantworten sei, hat zuerst Hilbert mit Hilfe der Integralgleichungen in den Göttinger Nachrichten v. J. 1905, S. 307 ff. bewiesen. Wegen weiterer Literatur vgl. den Artikel von Hilb über lineare Differentialgleichungen in Bd. II, 2 der mathematischen Enzyklopädie (abgeschlossen 1913). K.]

¹²⁾ Göttinger Dissertation, abgedruckt im American Journal, t. 16 (1893).

von vornherein p algebraische Unstetigkeitspunkte beilegen muß. Von da aus erfolgt dann die Konstantenbestimmung in einfachster Weise auf analytischem Wege, und es ist nicht nötig, auf die Hilfsmittel der geometrischen Funktionentheorie zu rekurrieren.

Wie dem auch sei, jedenfalls sieht der auf Abelsche Integrale bezügliche Riemannsche Satz, von welchem in der Einleitung gesprochen wurde, den Gegenstand unter einem anderen Gesichtspunkte. Bei ihm gelten neben der Riemannschen Fläche die sämtlichen Unstetigkeitspunkte des Integrals als gegeben, und es wird dann, um das Integral festzulegen, nur ein Teil der Periodizitätseigenschaften vorgeschrieben. Diesem letzteren Ansatz entspricht nun, was ich selbst bei den linearen Differentialgleichungen versucht und bis zu einem gewissen Grade in der vorliegenden Vorlesung durchgeführt habe: Gegeben ist die Riemannsche Fläche mit sämtlichen auf ihr befindlichen singulären Punkten; in der Differentialgleichung sind also nur noch die sogenannten akzessorischen Parameter willkürlich; *man soll diese akzessorischen Parameter dadurch eindeutig festlegen, daß man die Periodizitätssubstitutionen bestimmten Bedingungen unterwirft*. Es sind zweierlei Bedingungssysteme, mit denen ich in der hiermit gegebenen allgemeinen Richtung bisher Erfolg gehabt habe. Leider ergeben beide nur ganz partikuläre Arten von Differentialgleichungen. Es handelt sich erstens um das *Fundamentaltheorem der automorphen Funktionen*, zweitens um das sogenannte *Oszillationstheorem*.

1. Von dem Fundamentaltheoreme der automorphen Funktionen.

Wir werden statt der Partikularlösungen y_1, y_2 der linearen Differentialgleichung wieder deren Quotienten η in Betracht ziehen. Dann besagt das Fundamentaltheorem, kurz ausgedrückt: daß man die akzessorischen Parameter der Differentialgleichung jedesmal auf eine und nur eine Weise so festlegen kann, daß bei der Umkehr des Funktionsverhältnisses *eindeutige automorphe Funktionen* eines vorgegebenden „Typus“ entstehen (vgl. Math. Annalen, Bd. 21 [= Abh. CIII in Bd. 3 dieser Gesamtausgabe]). Ich bin auf dieses Theorem in der gegenwärtigen Vorlesung nur beiläufig eingegangen, da eine zusammenhängende Darstellung der automorphen Funktionen einer anderen Gelegenheit vorbehalten werden muß. Der Deutlichkeit halber will ich zufügen, daß der einzige Fall dieses Theorems, welcher von Poincaré und anderen behandelt worden ist, den „Haupttypus“ betrifft, in welchem ein einzelner Grenzkreis und keinerlei sonstige Grenzgebilde auftreten¹³⁾.

¹³⁾ [Näheres siehe in Bd. 3 dieser Ausgabe.]



2. Das Oszillationstheorem.

Das Oszillationstheorem betrachtet Differentialgleichungen mit *reellen* Koeffizienten und studiert den allgemeinen Verlauf ihrer *reellen* Lösungen y bei *reell* veränderlichem x . Man fragt, ob sich die y in einem Segmente der x -Achse oszillatorisch verhalten, bez. wie viele Oszillationen sie in demselben ausführen. In dieser Hinsicht hat zuerst Sturm bemerkt (in den Bänden 1 und 2 von Liouvilles Journal, 1836–37), daß man unter geeigneten Verhältnissen einen in der Differentialgleichung vorkommenden Parameter eindeutig durch die Forderung festlegen kann, es solle in einem gegebenen Segmente der X -Achse eine gewisse Stärke der Oszillation stattfinden. Dieses ist der einfachste Fall des Oszillationstheorems; derselbe ist in neuerer Zeit bekanntlich von Picard einer genaueren analytischen Untersuchung unterworfen worden. Ich selbst bin in Band 18 der Math. Annalen (1881) [vgl. Abh. LXIII des vorliegenden Bandes] zu einem weiteren Falle fortgeschritten, indem ich die gewöhnliche Lamé'sche Gleichung studierte:

$$(5) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = (Ax + B)y, \quad \text{wo} \quad t = \int \frac{dx}{2\sqrt{x - a \cdot x - b \cdot x - c}},$$

und bemerkte, daß man hier die *beiden* Parameter A, B gleichzeitig eindeutig dadurch festlegen kann, daß man in zwei verschiedenen Segmenten der X -Achse bestimmte Oszillationsstärken verlangt. Ich bin beim Beweise von einfachen geometrisch-mechanischen Betrachtungen ausgegangen. Andererseits hatte ich bei Aufstellung des Theorems, ebenso wie Sturm, ursprünglich mathematisch-physikalische Fragen im Auge, nämlich das Gesetz gewisser in der Potentialtheorie auftretender Reihenentwicklungen. Alle diese Betrachtungen sind seitdem von Herrn Böcher in seinem Werke weitgehend verfolgt¹⁴⁾. *Aber man kann das Theorem ebensowohl als ein funktionentheoretisches gelten lassen.* Es hat dann besonderes Interesse, die

¹⁴⁾ Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Teubner 1894. [Dies Buch lehnt sich an eine von mir im Winter 1889/90 gehaltene Vorlesung über Lamé'sche Funktionen an. Natürlich kann ich die Verantwortung nur für diejenigen Teile dieses Buches übernehmen, in denen Böcher die Entwicklungen meiner Vorlesung näher ausführt, nicht aber für diejenigen, welche er selbständig zugefügt hat, wie er jeweils genau angibt. Die Erläuterungen auf S. 168–180, welche die Fälle jenseits der Stieltjesschen Grenze betreffen, sind unklar; Böcher selbst ist auf sie in seinem bezüglichen, 1910 abgeschlossenen Referate in Bd. II, 1 der mathematischen Enzyklopädie, auf das ich übrigens verweise, nicht zurückgekommen. Es ist seitdem vielfach über das Sturmsche Oszillationstheorem weitergearbeitet worden. Man vgl. den Bericht von Böcher in den Proceedings of the fifth International Congress of Mathematics, vol. I, S. 163–195 (Cambridge 1912), sowie das Buch von Böcher, *Leçons sur les méthodes de Sturm*, Paris 1917. Doch haben diese Arbeiten eine mehr abstrakte, für den Text nicht in Betracht kommende Richtung. K.]

Oszillationbetrachtungen mit der geometrischen Gestalt desjenigen Kreisbogenpolygons in Verbindung zu bringen, auf welches der Quotient η zweier Partikularlösungen y_1, y_2 der Differentialgleichung die Halbebene x abbildet¹⁵⁾.

Von den ausführlichen Betrachtungen, die ich in meiner Vorlesung betreffend das Oszillationstheorem gegeben habe, sollen hier nur solche hervorgehoben werden, welche sich in der Böcher'schen Darstellung nicht finden.

a) Ich betrachte allgemeine Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten, die ich mir wieder der Formel (1) entsprechend normiert denken will. Die singulären Punkte der Differentialgleichung seien, wenigstens zum Teil, selber reell. Ich habe dann untersucht, unter welchen Bedingungen man die Segmente, für welche man die Oszillationsbedingungen vorschreiben will, bis an die singulären Stellen heranstrecken kann¹⁶⁾. Hier zeigt sich die prinzipielle Bedeutung der Stieltjesschen Grenze. Überschreitet man die Grenze, d. h. nimmt man den zweiten Exponenten eines zu (1) gehörigen singulären Punktes $> +1$, so versagen für ein bis an den singulären Punkt heranstrecktes Segment die geometrisch-mechanischen Betrachtungen, auf denen der Beweis des Oszillationstheorems ruht.

b) die Kreisbogenpolygone habe ich ganz besonders für diejenigen Fälle untersucht, in denen die zweiten Exponenten der in Betracht kommenden singulären Punkte gleich $\pm \frac{1}{2}$ sind, d. h. das Polygon in den betreffenden Ecken rechte Winkel aufweist¹⁷⁾. Nehmen wir beispielsweise die Differentialgleichung (5). Hier werden wir als Polygon der η -Ebene ein Kreisbogenviereck haben, welches bei $x = a, b, c$ drei rechtwinkelige Ecken besitzt. Dagegen hängt der Winkel bei $x = \infty$ von dem Parameter A ab; setzt man $A = n(n+1)$, so wird der betreffende Winkel $= \frac{2n+1}{2}\pi$. Man übertrage dieses Kreisbogenviereck durch stereographische Projektion auf eine Kugel und definiere nun die *Länge* oder *Amplitude* der einzelnen von zwei rechten Winkeln begrenzten Kreisbogenseite ganz ähnlich, wie man es beim sphärischen Dreiecke macht. Zu dem Zwecke wird man vor allen Dingen die η -Kugel selbst als Fundamentalfläche der zu benutzenden projektiven Maßbestimmung einführen. Handelt es sich dann um die Länge der Kreisbogenseite \overline{ab} , so bestimme man vorab den Winkel, den die beiden Ebenen, welche die an \overline{ab} angrenzenden Kreisbogenstücke da und bc enthalten, im Sinne der Maßbestimmung miteinander bilden. Dieser

¹⁵⁾ [Vgl. z. B. die oben abgedruckte Abh. LXV.]

¹⁶⁾ [Vgl. auch die Abh. LXIV.]

¹⁷⁾ [Vgl. wieder Abh. LXIV.]



Winkel hat ∞ viele Werte, welche sich aus einem, φ_0 , in der Gestalt $m\pi \pm \varphi_0$ ergeben, unter m eine beliebige ganze Zahl verstanden. Als Amplitude von ab werde ich denjenigen dieser unendlich vielen Winkel bezeichnen, welcher der Art und Weise entspricht, wie sich die Seite ab zwischen den begrenzenden Ebenen hinerstreckt. Zeichnet man eine Figur, so ist sofort klar, was hiermit gemeint ist. Wir müssen dabei ersichtlich drei Fälle unterscheiden, je nachdem die Schnittlinie der beiden begrenzenden Ebenen die η -Kugel trifft, berührt, oder nicht trifft. Im ersten Falle wird φ_0 eine nicht verschwindende reelle Größe vorstellen, im zweiten Falle gleich Null und im dritten rein imaginär anzunehmen sein. Ich bezeichne dementsprechend die Amplitude der Kreisbogenseite \overline{ab} beziehungsweise als elliptisch, parabolisch, hyperbolisch. — Die weitere Untersuchung zeigt schließlich, daß die Oszillationsbedingung, welche dem Intervall \overline{ab} der X -Achse im Sinne des Oszillationstheorems auferlegt werden soll, dahin umgesetzt werden kann, daß man für die Kreisbogenseite ab eine bestimmte elliptische Amplitude vorschreibt.

c) Ich will jetzt annehmen, daß die Differentialgleichung (5) dadurch festgelegt sei, daß man für die Intervalle \overline{ab} und \overline{bc} zwei bestimmte elliptische Amplituden vorgibt. Die Betrachtung des zugehörigen Kreisbogenpolygons lehrt dann noch ein weiteres; sie läßt nämlich erkennen, wie die anderen Kreisbogenseiten des Polygons verlaufen und gestattet von da aus einen Schluß auf das Verhalten der Differentialgleichung in den anderen Intervallen der X -Achse. Die solcherweise entstehenden Beziehungen entsprechen genau den Ergänzungsrelationen der sphärischen Trigonometrie, deren Bedeutung für die hypergeometrische Funktion im vorigen Referate [Abb. LXVIII] hervorgehoben wurde¹⁸⁾. —

Als ein besonderes Beispiel, bei welchem alle diese Ansätze a), b), c) zur Geltung gelangen, habe ich schließlich den *Hermiteschen Fall der Laméschen Gleichung* gewählt, d. h. eben die Gleichung (5), mit der besonderen Maßnahme, daß wir für A den Wert $n(n+1)$ eintragen, unter n eine irgendwie vorzugebende ganze Zahl verstanden. Wir haben dann nur den Parameter B zur freien Verfügung.

Die Resultate, welche betreffs dieser Gleichung in meiner Vorlesung ausführlich abgeleitet werden, finden sich zum Teil bereits in einem kleinen Aufsätze, den ich in Bd. 40 der Math. Annalen (1891) [vgl. die vorstehende Abb. LXVII] publizierte, nur daß ich dort nicht direkt die „Amplituden“ der einzelnen Kreisbogenseiten betrachte, sondern nur die „Charakteristiken“ derselben, d. h. die ganzzahligen Multipla von 2π , welche in den

¹⁸⁾ [Vgl. auch die vorstehende Abb. LXV, sowie für n -Ecke die Arbeit von Falckenberg in den Math. Annalen, Bd. 77 (1915/16).]

Amplituden enthalten sind. Führt man die Amplituden selbst ein, so vervollständigen sich die damaligen Figuren. Man nehme folgende Figur für $n = 3$:

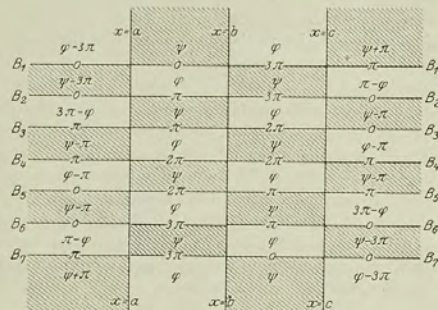


Fig. 1.

Die Ebene (x, B) ist hier — den damaligen Erläuterungen entsprechend — durch die sieben horizontalen Geraden $B = B_1, \dots, B_7$, und die drei vertikalen Linien $x = a, b, c$ in 32 Felder zerlegt, von denen die schraffierten hyperbolischen, die anderen elliptischen Charakter haben, d. h. solche Stücke der X -Achse enthalten, welche für die zugehörigen Werte von B hyperbolische, bez. elliptische Amplituden aufweisen. Die einzelnen Stücke der horizontalen Grenzlinien B_1, \dots, B_7 (welch letztere den hier auftretenden Fällen Laméscher Polygone entsprechen) haben natürlich parabolischen Charakter. Derselbe ist dadurch näher bezeichnet, daß in der Figur jedem einzelnen Stücke dieser Grenzlinien seine parabolische Amplitude, also ein bestimmtes Multiplum von π , beigeetzt ist. In die verschiedenen Felder der beiden vertikalen Mittelstreifen sind jetzt zur Bezeichnung der zugehörigen elliptischen und hyperbolischen Amplituden die Buchstaben φ und ψ eingetragen. Unter φ hat man sich dabei eine reelle Größe zu denken, welche ihrem Betrage nach zwischen den parabolischen Amplituden liegt, die das jeweilige Feld horizontal eingrenzen. In dem obersten Felde des rechtsseitigen und dem untersten Felde des linksseitigen Mittelstreifens (die sich beide ins Unendliche ziehen), ist dies so zu verstehen, daß φ in ihnen von dem parabolischen Grenzwerte 3π beginnend unbegrenzt ins Unendliche zunimmt. — Das ψ hinwieder ist eine complexe Größe, deren reeller Bestandteil in dem einzelnen hyperbolischen Felde einen konstanten Betrag hat, — denselben, den die parabolischen Amplituden der begrenzenden horizontalen Linien besitzen. — Aus diesem φ, ψ



der einzelnen Felder der beiden Mittelstreifen berechnen sich dann die elliptischen und hyperbolischen Amplituden der entsprechenden Felder der beiden Seitenstreifen so, wie es in der Figur eingetragen ist. *Man sieht, daß für jeden Wert von B zwei der Amplituden durch die beiden anderen bestimmt sind.* Dies ist, im vorliegenden Falle, das Analogon der Ergänzungformeln der sphärischen Trigonometrie¹⁹⁾.

Ich habe noch hervorzuheben, in welcher Beziehung das hier mitgeteilte Schema zum *Oszillationstheorem* steht. Die Hermitesche Gleichung enthält, wie wir schon sagten, bei festgehaltenem n nur den einen Parameter B ; es handelt sich bei ihr also um ein Beispiel, das sich neben die von Sturm untersuchten Fälle stellt. Wir werden für dieses Beispiel das Oszillationstheorem insbesondere dahin aussprechen können: *daß das B eindeutig gegeben ist, sobald man für eines der beiden mittleren Intervalle der X -Achse, ab oder $\bar{b}c$, eine bestimmte elliptische Amplitude vorschreibt.* Diese Aussage ist mit unserer Figur verträglich; sie vervollständigt dieselbe aber noch durch die Angabe, daß innerhalb der elliptischen Felder des Streifens ab das q bei wachsendem B stetig *abnimmt*, innerhalb der elliptischen Felder des Streifens $\bar{b}c$ aber stetig *zunimmt*. B wird eine eindeutige Funktion des auf den einzelnen Mittelstreifen treffenden q sein, die allemal, wenn ein hyperbolisches Feld übersprungen wird, eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet. Man beachte, daß die gleiche Behauptung für die elliptischen Amplituden der beiden äußeren Streifen unserer Figur keineswegs aufgestellt werden kann. Vielmehr hat z. B. im Streifen linker Hand das q Werte zwischen 0 und π , sowohl wenn B zwischen B_1 und B_2 als wenn es zwischen B_6 und B_7 liegt. *Das Oszillationstheorem gilt also nicht mehr für die elliptischen Amplituden der äußeren Intervalle.* Es stimmt dies damit, daß bei dem singulären Punkte $x = \infty$ die Stieltjessche Grenze überschritten ist. —

Zum Schlusse darf ich noch bemerken, daß die im vorliegenden Referate berührten Entwicklungen, welche im Vorlesungshefte mit aller erforderlichen Ausführlichkeit gegeben werden, zum Teil bereits in einer Vorlesung über Lamésche Funktionen enthalten waren, die ich im Winter 1889—90 gehalten habe²⁰⁾, dann aber zum ersten Male im Zusammenhange in den Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen entwickelt wurden, die ich von Herbst 1890—91 gegeben habe. Diese letzteren Vorlesungen

¹⁹⁾ Vgl. hierzu die allgemeinen Untersuchungen von Herrn Schönflies über Kreisbogenvierecke in Bd. 44 der Math. Annalen (1894) [sowie die Göttinger Dissertation von Ihlenburg „Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke“ (1909), außerdem die obigen Zitate auf Falckenberg].

²⁰⁾ Vgl. die Mitteilung in den Göttinger Nachrichten vom März 1890 [= Abh. LXIV]. [Eine teilweise Wiedergabe dieser Vorlesung bildet das wiederholt genannte Buch von Böcher, Reihenentwicklungen der Potentialtheorie.]

sind in einer kleineren Zahl von Exemplaren ebenfalls autographiert verbreitet. Der Vergleich wird zeigen, daß ich damals mit meinen Behauptungen sogar wesentlich weiter gegangen bin als dieses Mal. Ich habe dann freilich gleich gegen Schluß der Vorlesung bemerkt, daß die sämtlichen Angaben der erneuten Kontrolle bedürfen. Ich hatte den Gegenstand zu Anfang für einfacher gehalten, als er in Wirklichkeit ist. Insbesondere habe ich jetzt einige Aussagen berichtigen müssen, die mit der Grenze von Stieltjes zusammenhängen, deren fundamentale Bedeutung ich damals noch nicht erkannt hatte.

Göttingen, den 26. September 1894.

[Zum Oszillationstheorem jenseits der Stieltjesschen Grenze.]

Bei der Frage nach der Gültigkeit des Oszillationstheorems jenseits der Stieltjesschen Grenze scheint es instruktiv, zunächst den Fall nur dreier regulärer singulärer Punkte — also das einfache Beispiel der hypergeometrischen Funktion, für das man nach Abh. LXV alles explizite durchführen kann — heranzuziehen.

Wir belassen die singulären Punkte in üblicher Weise bei 0, ∞ , 1 und benennen ihre Exponentendifferenzen, die wir reell und übrigens positiv wählen wie in Nr. LXV mit λ , μ , ν ; ganzzahlige (insbesondere auch verschwindende) Werte dieser Größen seien der Einfachheit halber ausgeschlossen. λ und ν sollen als gegeben gelten; die Frage sei zunächst, wie man μ zu wählen hat, damit eine Lösung von einer der vier Formen existiert:

$$(I) \quad 1. x^\lambda (1-x)^\nu q_k(x); \quad 2. x^\lambda q_k(x); \quad 3. (1-x)^\nu q_k(x); \quad 4. q_k(x)$$

unter $q_k(x)$ ein Polynom irgend vorgegebenen Grades k verstanden ($k=0, 1, 2, \dots$), insbesondere aber die Frage, welche Bewandnis es mit den zwischen 0 und 1 gelegenen reellen Wurzeln von $q_k(x)$ hat.

Die Theorie der hypergeometrischen Reihe ergibt für die vier Fälle ohne weiteres die folgenden arithmetischen Relationen

$$(II) \quad 1. \pm \mu - \lambda - \nu = 2k + 1; \quad 2. \pm \mu - \lambda + \nu = 2k + 1; \quad 3. \pm \mu + \lambda - \nu = 2k + 1; \\ 4. \pm \mu + \lambda + \nu = 2k + 1.$$

Hier ist im Falle 1. der Wert $(-\mu)$ ohne weiteres auszuschließen (weil doch die Summe dreier negativer Zahlen niemals $2k+1$ sein kann). Aber auch in den Fällen 2., 3., 4. tritt immer nur eine beschränkte Anzahl von Werten $(-\mu)$ auf, weil es sich bei diesen nur um diejenigen Werte von k handeln kann, bei denen bzw.

$$(III) \quad 2'. 2k+1 < -\lambda + \nu; \quad 3'. 2k+1 < \lambda - \nu; \quad 4'. 2k+1 < \lambda + \nu$$

ist. (Ich nenne die mit $(-\mu)$ möglichen Fälle 2', 3', 4', während die Fälle mit $(+\mu)$ fernerhin mit 1'', 2'', 3'', 4'' bezeichnet sein mögen). Im übrigen gibt die Theorie der hypergeometrischen Reihe, nachdem λ und ν vorgegeben sind, für jeden der vier Fälle ohne weiteres einen wohlbekannteren expliziten Wert von $q_k(x)$; man hat bzw.

$$(IV) \quad \begin{cases} 1. q_k = F(k+1+\lambda+\nu, -k, 1+\lambda; x), \\ 2. q_k = F(k+1+\lambda-\nu, -k, 1+\lambda; x), \\ 3. q_k = F(k+1-\lambda+\nu, -k, 1-\lambda; x), \\ 4. q_k = F(k+1-\lambda-\nu, -k, 1-\lambda; x), \end{cases}$$



(wobei man natürlich noch in jedem einzelnen Falle einen beliebigen konstanten Faktor zuzügen und nach Potenzen (x-1) ordnen kann). Es handelt sich also um abbrechende hypergeometrische Reihen, wie sie Jacobi in einer wohlbekannten, von Heine bearbeiteten, posthumen Arbeit in Crelles Journal Bd. 56, (1859) [= Ges. Werke Bd. 9, S. 184-202] behandelt hat.

Unsere Frage aber wird sein, wie weit das einzelne so hingeschriebene F in den vier Fällen durch die Zahl Z seiner zwischen 0 und 1 gelegenen Nullstellen festgelegt ist.

Die Zahl dieser Nullstellen für ein gegebenes F ist aber bereits in Abb. LXV vollständig bestimmt worden. Man wird für die einzelnen Fälle zunächst die Charakteristik X des Intervalles 01 berechnen und von da aus nach der auf S. 565 mitgeteilten Regel entweder Z = X oder Z = X + 1 setzen.

Hier folgt zunächst eine Tabelle für die Werte der Charakteristik X (unter E das in Abb. Nr. LXV eingeführte Symbol d. h. die größte, nicht negative ganze Zahl verstanden, welche von dem beigesetzten Argument überschritten wird):

(V)	{ ad 1." X = E(k+1) = k,	
		ad 2.' X = E(-λ-k) = 0,	ad 2." X = E(k+1-v),
		ad 3.' X = E(-v-k) = 0,	ad 3." X = E(k+1-λ),
		ad 4.' X = E(-k) = 0,	ad 4." X = E(k+1-λ-v),

Was weiter Z angeht, so ist es in den Fällen 1.", 2.", 3." gemäß den in § 9 von Abb. LXV gegebenen Regeln mit X identisch, im Falle 4." ist die Beziehung zwischen Z und X komplizierter. Ich werde zunächst das in Abb. LXV, S. 565 angegebene Kriterium in eine der Voraussetzungen von 4." entsprechende möglichst elementare Form umsetzen. Es handelt sich um das Vorzeichen von

$$\Gamma(n) \cdot \Gamma(n-l) \cdot \Gamma(n-m),$$

wo

$$n = 1 - \lambda, \quad l = \frac{1 + \mu - \lambda - \nu}{2}, \quad m = \frac{1 - \mu - \lambda - \nu}{2}$$

ist, also im Falle 4." um das Vorzeichen von

$$\Gamma(1-\lambda) \cdot \Gamma(k+1-\lambda) \cdot \Gamma(-k+\nu).$$

Aber $\Gamma(k+1-\lambda)$ ist $(k-\lambda) \dots (2-\lambda)(1-\lambda) \cdot \Gamma(1-\lambda)$ und das Vorzeichen von $\Gamma(-k+\nu)$ stimmt mit dem des Produktes $(\nu-1)(\nu-2) \dots (\nu-k)$ überein. Bei den so geschriebenen Formeln ist der Fall $k=0$ nicht mit inbegriffen. Fügen wir, um diese Ausnahme zu beseitigen, noch die beiden positiven Faktoren λ und ν unserem Produkte hinzu, so haben wir als Vorzeichen:

$$(VI) \quad (-1)^k \cdot \text{sign } \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k) \cdot \text{sign } \nu(\nu-1) \dots (\nu-k).$$

Man hat Z im Falle 4." gleich dem geraden oder ungeraden Werte zu setzen, den X oder X-1 annehmen mag, je nachdem das Vorzeichen (VI) positiv oder negativ ist.

Es kommt jetzt nur noch darauf an, diese Angaben umzukehren. Wir finden dabei der Reihe nach:

a) Im Falle 1." ist durch Z=X das k unmittelbar gegeben. Alle Wurzeln von $\varphi_k=0$ sind reell und liegen zwischen 0 und 1; das φ_k ist durch die Angabe der Zahl dieser reellen Wurzeln ohne weiteres bekannt (vgl. Formel (IV)).

b) In den Fällen 2." und 3." muß k, damit Z=X überhaupt von Null verschieden wird, erst so weit anwachsen, daß k den Wert ν bzw. λ übertrifft. Verlangen wir also Z=0, so bekommen wir, je nach der Größe von ν oder λ eventuell eine größere Zahl unterschiedener zugehöriger $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$. Diese Unbestimmtheit tritt nur dann nicht ein, wenn ν , bzw. λ unterhalb 1 liegt, d. h. wenn wir uns unterhalb der Stieltjesschen Grenze befinden. — Sobald wir aber Z=1 oder noch größer

wählen, ist wieder k durch das Z eindeutig bestimmt. Das bedeutet, daß nun, nach anfänglichem Versagen, das Oszillationstheorem wieder gilt. Nur daß jetzt $\varphi_k=0$ außer den Z zwischen 0 und 1 gelegenen reellen Wurzeln noch eine bestimmte Zahl anderweitiger Wurzeln hat. Man könnte von einer Verzögerung sprechen, welche die Geltung des Oszillationstheorems erleidet.

c) Diese Erscheinung tritt im Falle 4." in erhöhtem Grade auf. k muß die Summe $\lambda+\nu$ übertreffen, damit die Charakteristik X von 0 verschieden wird. Sei k_0 der größte Wert, für den dieses noch nicht der Fall ist. Das zugehörige Z wird dann Null oder Eins, sagen wir allgemein = ε_0 , sein, wo der eine oder andere Fall eintreten wird, je nachdem

$$(-1)^{k_0} \text{sign } \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k_0) \cdot \text{sign } \nu(\nu-1) \dots (\nu-k_0)$$

positiv oder negativ ist. Von da ab wird Z ersichtlich, überhaupt gleich $X+\varepsilon_0$ sein. — Die regelrechte Geltung des Oszillationstheorems tritt also erst ein, wenn $X>1$ genommen wird. Zu diesem Behufe muß, wie schon gesagt, $k>\lambda+\nu$ sein; wir haben dann im Intervalle 01 nur $X+\varepsilon_0$ reelle Wurzeln.

Es ist interessant, diese arithmetischen Überlegungen durch geometrische Konstruktion der zugehörigen Kreisbogendreiecke zu bestätigen. Dies geschieht um so leichter, als die Gleichung

$$\pm \mu \pm \lambda \pm \nu = 2k+1$$

besagt, daß wir das Dreieck als geradliniges Dreieck konstruieren dürfen. Je nachdem bei dem einzelnen Terme der Gleichung das + oder - Zeichen auftritt, liegt dann die zugehörige Ecke des Dreiecks im Endlichen oder Unendlichen. Unsere Antworten a) b) c) erledigen gewissermaßen ein elementargeometrisches Problem. Für ein geradlinig begrenztes Membrandreieck sind zwei Winkel $\lambda\pi$ und $\nu\pi$ (deren jeder beliebig $>\pi$ sein kann) gegeben, man gibt ferner an, welche der drei Ecken eventuell im Unendlichen liegen sollen, man gibt endlich die Anzahl von Malen, daß sich die Seite $\lambda\nu$ durch das Unendliche zieht. Man soll sagen, wie weit durch diese Angaben die Gestalt des Dreiecks bestimmt ist. —

Bekanntlich hat bereits Jacobi (entsprechend unserem Ansatz für Lamésche Funktionen in Abb. LXIII) die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Reihen $C_0 \varphi_0 + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots$ betrachtet. Die formale Herstellung dieser Reihen gelingt ganz ähnlich wie bei den gewöhnlichen trigonometrischen Reihen, wenn man bemerkt, daß je zwei der $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ des einzelnen Falles 1. bis 4. in sofort näher anzugebender Weise „orthogonal“ sind.

Nehmen wir etwa den Fall 4. Wir berechnen dann zunächst (für irgend zwei unterschiedene φ_k und $\varphi_{k'}$):

$$\int \varphi_k \cdot \varphi_{k'} \cdot x^{-\lambda} (1-x)^{-\nu} dx = C \left(\varphi_k \frac{d\varphi_{k'}}{dx} - \varphi_{k'} \frac{d\varphi_k}{dx} \right) x^{1-\lambda} (1-x)^{1-\nu},$$

unter C eine nicht verschwindende Konstante verstanden²¹). Es ergibt sich zunächst, daß wir das Integral an die Grenzen 0 und 1 selbst heranziehen können und dabei, wegen des Wertes der rechten Seite, Null erhalten, sobald wir uns unterhalb der Stieltjesschen Grenze befinden. Wir erhalten dann also formaliter Reihenentwicklungen reeller Funktionen f(x) für das Intervall $0 < x < 1$, deren Konvergenz bereits Darboux in seinem Mémoire sur les fonctions de très grands nombres (Liouvilles Journal, sér. 3, t. 4, 1876) klargestellt hat. Aber Darboux bemerkt dort, daß besagte Reihen wegen der zwischen ihren Gliedern bestehenden Identitäten für analytische Funktionen von x auch in allen anderen Fällen gültig bleiben und jeweils innerhalb der größten Ellipse konvergieren, welche, um $x=0$ und $x=1$ als Brenn-

²¹) In den Fällen 1., 2., 3. wird man hier nur λ, ν bzw. durch $-\lambda, -\nu; -\lambda, +\nu; +\lambda, -\nu$ zu ersetzen haben.



punkte herumgelegt, noch keinen singulären Punkt von $f(x)$ einschließt. Dies Resultat ist wohl am einfachsten zu begründen, wenn man gemäß Abb. LXVI das Integral $\int q_k q_k' x^{-\lambda} (1-x)^{-\nu} dx$ über einen beliebigen, die Punkte 0 und 1 der x -Ebene umgebenden Doppelumlauf hin erstreckt, der jeweils Null liefert und hinsichtlich dessen die q_k und q_k' also alleweil „orthogonal“ sein werden.

Es käme nun darauf an, alle diese Entwicklungen auf lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit beliebig vielen, zunächst reellen, regulären singulären Punkten zu übertragen. Hierfür liegen in der Literatur gewiß mancherlei Ansätze vor, am meisten wohl in den Untersuchungen von Schönflies und Hilb-Falckenberg über die Gestalt der einfach zusammenhängenden Kreisbogen- n -Ecke²²⁾; im allgemeinen haben aber die zahlreichen neueren Untersuchungen über das Oszillationstheorem in Anknüpfung an Sturms ursprünglichen Ansatz eine abstraktere Wendung genommen und dürften für den Vergleich nicht unmittelbar in Betracht kommen. K.]

²²⁾ Schönflies in den Göttinger Nachrichten v. J. 1892 und in den Bänden 42 und 44 der Math. Annalen (1893, 1894); Falckenberg in den Math. Annalen Bd. 77 und 78 (1916, 1918).

LXX. Über neuere englische Arbeiten zur Mechanik¹⁾.

[Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. I (1891/92).]

Der unterscheidende Charakterzug der englischen Arbeiten über Mechanik den kontinentalen Arbeiten gegenüber ist nach meiner Meinung ihre auf unmittelbare Erfassung der Wirklichkeit gerichtete Tendenz und die durchgängige Anschaulichkeit ihrer Entwicklungen. Infolgedessen müssen diese Arbeiten dem an abstraktere Gedankenfolgen gewöhnten Mathematiker besonders anregend sein, und es verschlägt in dieser Hinsicht nichts, oder es ist vielmehr geradezu nützlich, daß besagte Untersuchungen zumeist nicht so methodisch oder so streng durchgeführt sind, wie wir dies zu verlangen gewohnt sind. Unter den Einzelheiten, welche ich näher ausführte, dürfte eine Bemerkung über die Entstehungsgeschichte von Hamiltons Integrationstheorie der Mechanik allgemeineres Interesse beanspruchen. Die Sache scheint völlig unbekannt zu sein, trotzdem sich Hamilton darüber an verschiedenen Stellen seiner Arbeiten, insbesondere in seiner ersten Abhandlung über Strahlensysteme (1828)²⁾, mit hinreichender Deutlichkeit äußert. Hamilton fand die Auffassung der Emissionstheorie vor, nach welcher die Bestimmung des Lichtstrahles, der irgendwelches inhomogene (aber isotrope) Medium durchsetzt, ein Spezialfall eines gewöhnlichen, auf die Bewegung eines Massenpunktes bezüglichen mechanischen Problems ist; wir können gleich zusetzen, daß die dabei

¹⁾ Bericht über einen am 22. Sept. 1891 vor der Naturforscher-Versammlung zu Halle gehaltenen Vortrag. (Vgl. Amtlicher Bericht, Teil II, S. 4.) [In einer Vorlesung über Mechanik vom Sommersemester 1891, deren Ausarbeitung seitdem von verschiedenen Mathematikern benutzt wurde, habe ich die in Rede stehenden Entwicklungen der Jacobischen Theorie alle aus quasi-optischen Betrachtungen in höheren Räumen abgeleitet. K.]

²⁾ [Die wichtigsten von Hamiltons hierher gehörenden Arbeiten sind folgende: Essay on the theory of systems of rays, Transactions of the R. Irish Academy, Bd. 15 (1828), S. 69–174. Dazu 3 supplements, ebenda, Bd. 16 (1830), S. 3–62, Bd. 16, S. 93–126, sowie Bd. 17 (1832/37), S. 1–144.

On a general method in dynamics, Philosophical Transactions of the R. Society, London 1834, S. 247–308. Second essay on a general method in dynamics, ebenda 1835, S. 95–144.]



vorliegende Spezialisierung keine wesentliche ist, daß man vielmehr, indem man zu höheren Räumen schreitet, jedes mechanische Problem auf die Bestimmung des in einem geeigneten Medium verlaufenden Lichtstrahles zurückführen kann. Und nun ruht Hamiltons *Entdeckung, nach welcher die Integration der dynamischen Differentialgleichungen mit der Integration einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in Verbindung steht*, einfach darauf, daß Hamilton, im Anschluß an die große physikalische Bewegung seiner Zeit, unternahm, die in emissiver Form bekannten Resultate der geometrischen Optik vom Standpunkte der Undulationstheorie abzuleiten. Hamiltons Integrationstheorie der dynamischen Differentialgleichungen ist zunächst nichts anderes als eine analytisch allgemeine Formulierung der in physikalischer Form wohl-bekanntenen Beziehung zwischen *Lichtstrahl* und *Lichtwelle*. — Vermöge des hiermit gegebenen Ausgangspunktes wird auch die unnötig partikuläre Form verständlich, in der Hamilton seine Theorie veröffentlichte und über die dann Jacobi hinausging. Hamilton hatte bei seinen Untersuchungen über Strahlensysteme zunächst durchaus praktische Fragen der Instrumentenkunde im Auge. Daher operiert er ausschließlich mit solchen Lichtwellen, welche von einzelnen *Punkten* ausgehen. Jacobis Verallgemeinerung läuft darauf hinaus, daß man zur *Definition des Strahles ebensoviel beliebige andere Lichtwellen gebrauchen darf*. Von den speziellen Wellen aus konstruiert man in der Optik die allgemeinen bekanntlich vermöge des sogenannten Huygensschen Prinzips; diese Konstruktion ist ein genaues Äquivalent für den analytischen Prozeß, vermöge dessen man in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von irgendwelcher „vollständigen“ Lösung zur „allgemeinen“ Lösung aufsteigt.

[Die Optik, wie sie vorstehend verstanden wird, ist die *geometrische Optik*, die mit dem Begriff des Lichtstrahles operiert (also Beugungserscheinungen prinzipiell ausschließt und beim Gebrauch gewöhnlicher rechtwinkliger Koordinaten von der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades:

$$(1) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 = 0$$

beherrscht wird. Sie ist von der *physikalischen Optik*, in deren Mittelpunkt die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ersten Grades:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

steht, zunächst durchaus verschieden; sie kann aber als Grenzfall der letzteren für den Fall unendlich kleiner Wellenlängen angesehen werden. In der Tat: man setze in (2) für Φ den Ausdruck $e^{2\pi i k f(x,y,z,t)}$ und lasse nun k unendlich werden, so wird man in der Grenze die Differentialgleichung (1) erhalten. Vgl. Debye in einem Aufsätze von A. Sommerfeld und I. Runge, *Annalen der Physik*, 4. Folge, Bd. 35 (1911), S. 290. K.]

LXXI. Über das Brunsche Eikonal.

[Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, Bd. 46 (1901).]

Im 21. Bande der math. phys. Abhandlungen der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (1895) hat Herr Bruns einen bemerkenswerten Beitrag zur Strahlenoptik veröffentlicht, in welchem er für ein beliebiges optisches Instrument den Verlauf eines das Instrument durchdringenden Lichtstrahles mit Hilfe einer Funktion von vier Veränderlichen darstellt, die er als *Eikonal* bezeichnet. Ich reproduziere hier seine Grundformeln in freier Weise. Man bezeichne den Punkt, in welchem der den Objektraum durchsetzende Teil des Lichtstrahles (wenn nötig geradlinig verlängert gedacht) die XY-Ebene des Objektraumes schneidet, mit ξ, η , die Richtungskosinus, die er (im Objektraum) mit den Koordinatenachsen bildet, mit p, q, r ; die entsprechende Bedeutung sollen ξ', η', r' bzw. p', q', r' für den Bildraum haben. Dann ist das Eikonal in seiner (hier allein in Betracht kommenden) ursprünglichen Form eine Funktion von ξ, η, ξ', η' :

$$E(\xi, \eta | \xi', \eta'),$$

vermöge deren sich der Verlauf des Lichtstrahls im Objektraum und Bildraum mittels folgender Formeln darstellt:

$$(1) \quad \begin{cases} p = -c \cdot \frac{\partial E}{\partial \xi}, & p' = +c' \cdot \frac{\partial E}{\partial \xi'}, \\ q = -c \cdot \frac{\partial E}{\partial \eta}, & q' = +c' \cdot \frac{\partial E}{\partial \eta'}, \end{cases}$$

unter c bzw. c' die Lichtgeschwindigkeit im Objektraum und Bildraum verstanden. Ich werde diese Formeln kurz so zusammenfassen:

$$(2) \quad dE = -\frac{1}{c}(pd\xi + qd\eta) + \frac{1}{c'}(p'd\xi' + q'd\eta').$$

Hiermit wolle man nun die Entwicklungen vergleichen, die Hamilton 1828 ff. seinen Untersuchungen über Strahlensysteme zugrunde gelegt hat¹⁾.

¹⁾ [Wegen der genaueren Nachweise vgl. etwa die Fußnote ²⁾ auf S. 601 des vorliegenden Bandes.]



Hamilton beginnt dort damit, den Weg des ein Instrument durchdringenden Lichtstrahles in der von Johann Bernoulli bzw. Fermat herrührenden, heutzutage allgemein bekannten Art durch die Forderung eines Minimums festzulegen. Es sei x, y, z der Ausgangspunkt des Lichtstrahles (im Objektraum), x', y', z' sein Endpunkt (im Bildraum), c, c_1, c_2, \dots, c' seien die Lichtgeschwindigkeiten in den sukzessiven Medien, welche der Lichtstrahl durchdringt, $Al, Al_1, Al_2, \dots, Al'$ die Weglängen, die er in diesen Medien beziehungsweise zurücklegt. Die Festlegung des Lichtstrahles erfolgt dann dadurch, daß man verlangt, es solle die Summe:

$$\sum_{x y z}^{x' y' z'} \frac{Al_i}{c_i}$$

bei festgehaltenem Anfangspunkt und Endpunkt eine verschwindende erste Variation haben. Soweit Johann Bernoulli. *Das Neue bei Hamilton ist, daß er die Betrachtung weiter fortsetzt, indem er vorstehende Summe nach Festlegung des Lichtstrahls als eine Funktion ihrer beiden Endpunkte betrachtet:*

$$(3) \quad \sum_{x y z}^{x' y' z'} \frac{Al_i}{c_i} = \Omega(x, y, z | x', y', z').$$

Dieses Ω ist die von Hamilton so genannte *charakteristische Funktion* des optischen Instrumentes; es bedeutet einfach die *Zeit*, welche der Lichtstrahl [nach den Vorstellungen der Undulationstheorie] gebraucht, um bei einem Durchgange durch das Instrument von x, y, z nach x', y', z' zu kommen. Dabei ergibt sich, daß man den Gang des Lichtstrahls durch dieses Ω in einfachster Weise darstellen kann; man hat in dieser Beziehung die Formeln:

$$(4) \quad \begin{cases} p = -c \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x}, & p' = +c' \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x'}, \\ q = -c \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y}, & q' = +c' \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial y'}, \\ r = -c \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z}, & r' = +c' \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial z'}, \end{cases}$$

die ich wieder in eine zusammenfassen will:

$$(5) \quad d\Omega = -\frac{1}{c}(pdx + qdy + rdz) + \frac{1}{c'}(p'dx' + q'dy' + r'dz').$$

Beiläufig folgt aus (4), daß Ω den beiden partiellen Differentialgleichungen genügt:

$$(6) \quad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2}, \quad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z'}\right)^2 = \frac{1}{c'^2}.$$

Die Ähnlichkeit der solcherweise mitgeteilten Formeln mit denjenigen von Bruns liegt auf der Hand, und es scheint um so wichtiger, den Übergang von dem einen Formelsystem zum andern anzugeben, als die Eikonalformeln bei Bruns selbst zunächst auf sehr umständlichem Wege — durch Heranziehung der Theorie der Berührungstransformationen mit Zugrundelegung des Malusschen Satzes — aufgestellt werden, während Hamiltons Entwicklungen aus der Definition von Ω sofort folgen und an Einfachheit nichts zu wünschen übrig lassen. Eben dieser Übergang ist denn auch der Zweck der vorliegenden kleinen Mitteilung.

Man nenne einfach den Abstand, den der Punkt x, y, z des Objektraums vom Punkte $\xi, \eta, 0$ daselbst besitzt, ϱ , ebenso den Abstand von x', y', z' und $\xi', \eta', 0$ ϱ' . Es ist dann

$$(7) \quad \begin{cases} x = \xi + \varrho p, & x' = \xi' + \varrho' p', \\ y = \eta + \varrho q, & y' = \eta' + \varrho' q', \\ z = \varrho r, & z' = \varrho' r'. \end{cases}$$

Setzt man die hier sich ergebenden Werte der Differentiale

$$dx = d\xi + p \cdot d\varrho + \varrho \cdot dp, \text{ usw.}$$

in (5) ein, so kommt nach kürzester Zwischenrechnung

$$(8) \quad d\Omega = -\frac{1}{c}(d\varrho + p d\xi + q d\eta) + \frac{1}{c'}(d\varrho' + p' d\xi' + q' d\eta').$$

Der Vergleich mit (2) gibt daraufhin (wenn ich die etwaige Integrationskonstante in das Eikonal einrechne):

$$(9) \quad \Omega = -\frac{\varrho}{c} + \frac{\varrho'}{c'} + E.$$

Daher: *Das Eikonal ist gleich der charakteristischen Funktion für $\varrho = 0, \varrho' = 0$; dasselbe bedeutet einfach die Zeit, welche die Lichtbewegung gebraucht, um sich entlang dem das Instrument durchdringenden Strahl vom Objektpunkte $\xi, \eta, 0$ zum Bildpunkte $\xi', \eta', 0$ fortzupflanzen.* — Zugleich ergibt sich, daß sich, bzw. inwieweit sich das Eikonal vor der allgemeinen charakteristischen Funktion durch prinzipielle Einfachheit auszeichnet. Die beiden partiellen Differentialgleichungen (6) verwandeln sich nämlich vermöge der Substitution (7) in folgende:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} = -\frac{1}{c}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho'} = \frac{1}{c'};$$

das Eikonal E ist also seinerseits nicht weiter an irgendwelche partielle Differentialgleichung gebunden.

Ich kann diese kleine Note nicht schließen, ohne nachdrücklich auf das ganz besondere Interesse von Hamiltons Untersuchungen zur Strahlen-



optik hinzuweisen. Die Methode der charakteristischen Funktion führt ihn einerseits zur weitgehenden Behandlung instrumenteller Fragen (wobei er zahlreiche Resultate späterer Autoren antizipiert), andererseits zur Entdeckung der konischen Refraktion in zweiachsigen Kristallen. Aber mehr als das, sie ist, wie ich bereits vor zehn Jahren in einem vor der Naturforscher-Versammlung in Halle (1891) gehaltenen Vortrage ausführte²⁾, der leider nicht die allgemeine Beachtung gefunden hat, die ich für ihn in Aussicht nahm, die eigentliche Wurzel von Hamiltons Entdeckungen auf dem Gebiete der allgemeinen Dynamik! Ich kann nur den Wunsch aussprechen, daß die schwer zugänglichen und sehr zerstreuten optischen Abhandlungen Hamiltons ebenfalls gesammelt dem großen Publikum zugänglich gemacht werden möchten; eine solche Publikation würde nicht nur historisches Interesse haben, sondern auch ohne Zweifel auf unsere heutigen Ideenbildungen nach vielen Richtungen klärend und fördernd einwirken³⁾.

[Ich füge gern noch hinzu, daß Herr Prange in einem demnächst in den Nova acta Leopoldina, Bd. 107 erscheinendem Essay: „W. R. Hamiltons Arbeiten zur Strahlenoptik und Mechanik“ darlegen wird, wie bei Hamilton eine Menge von Auffassungsweisen der modernen Variationsrechnung, insbesondere auch die Lehre von den Berührungstransformationen antizipiert ist. Auch hat Hamilton eine große Anzahl optischer Resultate abgeleitet, die später von anderen Autoren in mehr oder minder vollkommener Form wiedergefunden wurden. Siehe auch eine vorläufige Mitteilung von Herrn Prange in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 30, 1921. K.]

²⁾ Siehe Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 1 (1891/92). [Vgl. die vorstehende Nr. LXX.] Ich habe den Gegenstand seit Sommer 1891 in meinen Vorlesungen über Mechanik wiederholt eingehend entwickelt.

³⁾ Herr Bruns schreibt mir zu der Entwicklung des Textes noch folgende Bemerkungen: „Der Zusammenhang zwischen der charakteristischen Funktion und dem Eikonal bleibt bestehen, wenn man annimmt, daß das Lichtteilchen bei jeder Brechung eine gewisse von dem Orte des Brechungspunktes abhängende Verzögerung erfährt wobei es gleichgültig ist, ob die Brechungspunkte wie gewöhnlich eine Fläche oder aber einen körperlichen Raum erfüllen. — Im übrigen liefert der von mir betretene Weg als Entgelt für die umständlichere Herleitung den Nachweis, daß die meisten Sätze der geometrischen Optik gar nicht optischer Natur sind, sondern der reinen Liniengeometrie angehören.“

LXXII. Räumliche Kollineationen bei optischen Instrumenten.

[Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, Bd. 46 (1901).]

Das im folgenden abzuleitende Resultat ist an sich nicht neu, sondern findet sich z. B. bereits in der (in der vorstehenden Notiz [Nr. LXXI]) besprochenen Abhandlung von Bruns über das Eikonal. Während es aber dort nur beiläufig inmitten umfangreicher analytischer Entwicklungen auftritt, soll dasselbe hier direkt durch bloße geometrische Betrachtung abgeleitet werden. Das Problem ist, zu entscheiden, welche Beziehung zwischen Objekt und Bild bei einem *absoluten* optischen Instrument bestehen mag, d. h. bei einem Instrument, das alle Strahlen, die von einem beliebigen Punkte des Objektraums ausgehen, genau wieder in einen Punkt des Bildraums vereinigt.

Die nächstliegende Bemerkung, die man vom geometrischen Standpunkte aus machen wird, ist die, daß die Beziehung zwischen Objektraum und Bildraum jedenfalls *kollinear* sein muß (vgl. Czapski, Theorie der optischen Instrumente nach Abbe, Breslau 1893). In der Tat sind ja die beiden Räume von vornherein derart aufeinander bezogen, daß jeder geraden Linie des einen Raumes (jedem Lichtstrahl) immer eine gerade Linie des anderen Raumes (der zugehörige Lichtstrahl) entspricht, — da aber nach Voraussetzung die Beziehung zugleich eine *punktweise* sein soll, so kommt man auf Grund der Moebius'schen Netzkonstruktion in bekannter Weise zu einer Kollineation. Hierbei hat man, was den funktionentheoretischen Charakter der Abbildung des einen Raumes auf den zweiten angeht, nicht anderes vorauszusetzen, als die *Stetigkeit* der Beziehung; daß die Abbildung eine *analytische* ist, ergibt sich aus dem Beweisgange, demzufolge sie eine Kollineation ist, als ein beiläufiges Resultat.

Es kommt nun darauf an, einzusehen, daß die statthabende Kollineation von sehr spezieller Art ist. Zu dem Zwecke ziehe ich ein Hilfsmittel heran, welches den Geometern an sich sehr geläufig ist, aber in der Optik wohl kaum noch Verwendung fand, nämlich die Betrachtung *imaginärer* gerader Linien oder Lichtstrahlen. („Lichtstrahl“ und „gerade Linie“ sollen dabei als Synonyma gelten, d. h. von der Richtung, in welcher die



gerade Linie vom Lichte durchlaufen wird, soll nicht weiter die Rede sein). Und zwar betrachte ich den Verlauf der Brechung unter der Annahme, daß der einfallende Strahl eine *Minimallinie* ist, d. h. eine imaginäre gerade Linie, welche den Kugelkreis schneidet. Dabei werde ich für imaginäre Linien dieselben Formeln in Anwendung bringen wie für reelle. Um allen Zweifeln aber, die in dieser Hinsicht aufgeworfen werden möchten, von vorn herein zu entgehen, will ich ausdrücklich voraussetzen (was in praktischer Hinsicht keinerlei Beschränkung bedeutet), daß alle brechenden Flächen des Instruments [singularitätenfreie Stücke] algebraischer Flächen seien.

Überlegen wir auf Grund der so getroffenen Verabredung zunächst das elementare Brechungsgesetz: Für eine Minimallinie ist der Sinus des mit der Flächennormalen gebildeten Winkels bekanntlich unendlich groß und umgekehrt ist durch die Forderung eines unendlich großen Sinus eine Minimallinie charakterisiert. Es folgt also, daß, wenn der einfallende Strahl längs einer Minimallinie verläuft, das gleiche für den gebrochenen Strahl der Fall sein muß. — Mit diesem Schluß haben wir im Grunde bereits die ausreichende Grundlage für die folgende Überlegung. Nur der Genauigkeit wegen muß noch ein kleiner Exkurs eingeschaltet werden:

Es gibt zwei Minimallinien, welche durch den Treffpunkt des einfallenden Strahles innerhalb der Einfallsebene verlaufen: die eine fällt mit dem einfallenden Strahle selbst zusammen, die andere mit seinem Spiegelbilde. Welche von diesen beiden Linien den gebrochenen Strahl darstellt, bleibt unbestimmt. Das Brechungsgesetz enthält nämlich, wenn man es in Cartesischen Koordinaten ausdrückt, eine Quadratwurzel, über deren Vorzeichen wir hier, wo wir im Imaginären operieren, nichts Bestimmtes aussagen können. Es hat keinen Zweck, daß ich dies hier im einzelnen erläutere, vielmehr werde ich mich kurzweg dahin ausdrücken, daß ein Minimalstrahl bei jeder Brechung in zwei Minimalstrahlen verwandelt wird (von denen der eine mit dem einfallenden Strahl selbst, der andere mit seinem Spiegelbilde zusammenfällt). Haben wir n brechende Flächen, so haben wir als schließliches Resultat der Brechung 2^n Minimalstrahlen; — der eine derselben fällt immer noch mit dem ursprünglichen Minimalstrahl zusammen, er hat das Instrument durchdrungen „als wenn es ein Röntgenstrahl wäre“, die anderen erhält man, indem man an einer beliebigen Zahl der aufeinander folgenden n brechenden Flächen Spiegelung hinzutreten läßt.

Die hiermit besprochene Komplikation hindert nun nicht, hinsichtlich der kollinearen Abbildung, welche das vorausgesetzte absolute Instrument vermittelt, einen einfachen Schluß zu ziehen. In der Tat: eine kollineare Abbildung ist für alle Linien des Raumes eindeutig; an ihr wird also von den 2^n Minimalstrahlen, die aus einem einfallenden Minimalstrahl bei der Brechung im Instrument entstehen, nur einer partizipieren können; die

ganze Komplikation kommt, soweit wir uns auf die Betrachtung der in Rede stehenden kollinearen Abbildung beschränken, in Wegfall. Wir sagen kurzweg:

Die Kollineation zwischen Objektraum und Bildraum ist so beschaffen, daß jeder Minimalstrahl des ersteren einen Minimalstrahl des letzteren liefert.

Oder noch kürzer:

Der Kugelkreis des Objektraums geht in den Kugelkreis des Bildraums über.

Das aber will besagen, daß unsere Kollineation in der Tat eine sehr spezielle ist, daß sie eine *Ähnlichkeitstransformation* ist¹⁾. Diese Ähnlichkeitstransformation kann dabei noch eine direkte oder eine inverse sein (d. h. eine solche, bei der sich rechts und links vertauscht).

Hiermit haben wir bereits das Hauptstück des abzuleitenden Resultates; wir werden dasselbe vervollständigen, wenn wir nun noch den *Modul der Ähnlichkeitstransformation* festlegen. Ich will der Allgemeinheit wegen annehmen, daß die Lichtgeschwindigkeit c im Objektraum von der Lichtgeschwindigkeit c' im Bildraum verschieden sei. Der Satz ist dann einfach der, daß sich die Dimensionen des Objektraumes zu den Dimensionen des Bildraums verhalten wie c zu c' ²⁾. Ist also insbesondere $c = c'$, so haben Objektraum und Bildraum gleiche Abmessungen, sie sind direkt oder spiegelbildlich kongruent (was das eigentliche hier abzuleitende Resultat ist). —

Zum Beweise ziehen wir nur mehr reelle Raumelemente in Betracht und nehmen übrigens an die Vorstellungsweisen Anschluß, von denen in der vorstehenden Notiz („Über das Brunsche Eikonale“ [Nr. LXXI]) die Rede war. Dabei werden wir uns so ausdrücken, als sei die Ähnlichkeitstransformation, die unser Instrument vermittelt, eine direkte; sollte es eine inverse sein, so könnte man das Instrument durch Hinzufügen eines ebenen Spiegels vervollständigen und dadurch die zunächst inverse Ähnlichkeit in eine direkte verwandeln.

Wir wollen jetzt einfach die *Zeit* betrachten, welche das Licht gebraucht, um von einem beliebigen Objektpunkt (den ich x, y, z nennen will) zum entsprechenden Bildpunkte (der x', y', z' heißen soll) zu gelangen. Diese *Zeit* muß für alle von x, y, z auslaufenden Strahlen dieselbe sein. Anderenfalls würden sich nicht alle diese Strahlen, wie doch die Voraussetzung ist, in x', y', z' wieder vereinigen können, vielmehr würden, nach dem Prinzip von Johann Bernoulli, nur diejenigen Strahlen Objektpunkt

¹⁾ Vgl. Bruns, *Eikonale*, S. 370.

²⁾ Dieser Satz steht bei Bruns zwischen den Zeilen. Herr Bruns schreibt mir in dieser Hinsicht: „Der Modul μ wird in Zeile 5 von Seite 370 (der Abhandlung über das Eikonale) gleich E gefunden. Die Größe E ist aber, wie die Sätze des Textes zwischen Formel (91) und (92) lehren, identisch mit dem in (51b) angesetzten Quotienten $n : N$ der Raumindizes.“



und Bildpunkt verbinden, für welche diese Zeit ein Minimaximum ist. Ich werde die betreffende Zeit also als Funktion von x, y, z allein bezeichnen dürfen:

$$T = X(x, y, z).$$

Es seien jetzt x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 zwei neue Objektpunkte, welche vom Punkte x, y, z um das gleiche Stück r abstehen (aber übrigens beliebig angenommen werden sollen). Das uns noch unbekanntes Ähnlichkeitsverhältnis von Bildraum und Objektraum bezeichnen wir vorübergehend mit λ . Dann werden also die Bildpunkte x_1', y_1', z_1' und x_2', y_2', z_2' unserer neuen Objektpunkte von dem Bildpunkte x', y', z' des ursprünglichen Objektpunktes beide um λr abstehen. Ich werde mich jetzt so ausdrücken, daß ich annehme, der Lichtstrahl, welcher von x, y, z nach x_1, y_1, z_1 hinläuft, durchdringe weiterhin unser Instrument und erreiche nach einem endlichen Wege die zugehörigen Bildpunkte³⁾; er wird dann, wegen der direkten Ähnlichkeit, zuerst auf x', y', z' , und erst hinterher auf x_1', y_1', z_1' treffen. Die Zeit, welche das Licht gebraucht, um von x, y, z nach x_1, y_1, z_1 zu gelangen, ist $\frac{r}{c}$, die entsprechende Zeit, welche auf das Stück von x', y', z' bis x_1', y_1', z_1' entfällt, $\frac{\lambda r}{c'}$. Wir schließen, daß die Funktion X für den Punkt x_1, y_1, z_1 den Wert hat:

$$(1) \quad X(x_1, y_1, z_1) = X(x, y, z) - \frac{r}{c} + \frac{\lambda r}{c'}.$$

Genau so kommt natürlich (bei den entsprechenden Annahmen):

$$(2) \quad X(x_2, y_2, z_2) = X(x, y, z) - \frac{r}{c} + \frac{\lambda r}{c'}.$$

Also:

$$(3) \quad X(x_1, y_1, z_1) = X(x_2, y_2, z_2).$$

Nun sind aber die hier benutzten Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 im wesentlichen zwei ganz beliebige Objektpunkte. Denn die Bedingung, durch die sie ursprünglich eingeführt wurden: von einem anderen Objektpunkte x, y, z die gleiche Entfernung r zu haben, legt ihnen in Wirklichkeit gar keine Beschränkung auf, und die anderen Annahmen, die wir machten, hatten nur den Zweck leichterem Ausdrucksweise. *Es folgt, daß die Zeit $X(x, y, z)$ für alle Objektpunkte dieselbe ist*; sie ist eine für unser „absolutes“ Instrument charakteristische Konstante. Dann aber ist auch in (1), bzw. (2) $X(x_1, y_1, z_1)$, resp. $X(x_2, y_2, z_2)$ gleich $X(x, y, z)$, woraus $\lambda = \frac{c'}{c}$ folgt, was zu beweisen war. —

Hiermit dürfte die anfängliche Fragestellung vollkommen erledigt sein. Das Resultat hat etwas Enttäuschendes. Um bei der Annahme $c = c'$ zu

³⁾ In dieser Annahme liegt nichts Wesentliches, sondern nur eine Fixierung der weiterhin auftretenden Vorzeichen.

bleiben: das Instrument wirkt wie ein ebener Spiegel oder eine Zusammenstellung mehrerer ebener Spiegel; es ist als Teleskop wie als Mikroskop gleich unbrauchbar. Hieran ist nun nichts zu ändern; was ich noch hinzuzufügen habe, bezieht sich nur mehr auf die Beseitigung eines mathematischen Bedenkens, welches man gegen die Richtigkeit des Resultates haben könnte.

Das Resultat steht nämlich scheinbar in Widerspruch mit der wohlbekannteren Tatsache, daß sich die Objektpunkte und Bildpunkte, die auf der Achse eines optischen Instrumentes liegen, auf dieser in *allgemeinster Weise* linear entsprechen und daß man in Übereinstimmung hiermit bei kleiner Winkelöffnung des Gesichtsfeldes mit Annäherung von einer kollinearen Abbildung der Objektpunkte in der Nähe der Achse auf ihnen entsprechende Bildpunkte reden kann, die gewiß keine Ähnlichkeitstransformation oder gar kongruente Transformation ist. Ich werde noch kurz zeigen, daß dieser Widerspruch wegfällt, wenn man sich das Zustandekommen der angeführten Tatsache in geeigneter Weise klar macht⁴⁾.

Zu dem Zwecke begnügen wir uns, wie es gewöhnlich geschieht, damit, unsere Aufmerksamkeit auf diejenigen Strahlen des Objektraums zu richten, die in einer beliebigen, durch die Achse des Instruments gelegten Meridianebene liegen. Die entsprechenden Strahlen des Bildraums werden dieselbe Meridianebene erfüllen. *Man hat eine Beziehung der Strahlen zweier ebener Strahlenfelder.* Und nun genügt es, wie ich behaupte, diese Beziehung als *analytisch* vorauszusetzen und anzunehmen, daß man bei Betrachtungen in der Nähe des einzelnen Strahles in erster Annäherung nur die *linearen Glieder der Taylorschen Entwicklung* beizubehalten braucht, um alle die für die Achse des Instruments, beziehungsweise ihre Umgebung, aufgestellten Beziehungen, soweit sie sich auf die Strahlen der einzelnen Meridianebene beziehen, in allgemeinsten Form zu erhalten. (Die Achse hat dabei innerhalb der einzelnen Meridianebene gar nichts Ausgezeichnetes; sie bekommt ihre gesonderte Stellung nur dadurch, daß sie allen Meridianebenen zugleich angehört.)

In der Tat, man substituieren einen Augenblick, um geläufigere Verhältnisse vor Augen zu haben, an Stelle der beiden ebenen Geradenfelder zwei ebene Punktfelder; ihre gegenseitige Beziehung sei durch die *analytischen* Gleichungen gegeben:

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y).$$

Handelt es sich dann nur um solche Punkte (x, y) , die in der Nähe einer festen Stelle (x_0, y_0) liegen, so wird man in erster Annäherung schreiben dürfen:

⁴⁾ Ich kann auch hier auf Bruns verweisen; *Eikonol.*, S. 410, Formel (176).



$$x' = x'_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 (y - y_0),$$
$$y' = y'_0 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 (y - y_0).$$

Man drückt dies gewöhnlich (z. B. in der Kartographie) so aus, daß man sagt: *die Umgebung des Punktes x_0, y_0 wird auf die Umgebung des Punktes x'_0, y'_0 in erster Annäherung affin abgebildet.* Speziell wird das Büschel der von x_0, y_0 auslaufenden Fortschreitungsrichtungen $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ auf das Büschel der von x'_0, y'_0 auslaufenden Fortschreitungsrichtungen $\frac{y'-y'_0}{x'-x'_0}$ in allgemeinsten Weise projektiv abgebildet (was eine nicht bloß approximative, sondern genaue Aussage ist).

In den so gegebenen Entwicklungen und Aussagen braucht man nur die Punkte x, y , bzw. x', y' , nach dem Prinzip der Dualität durch gerade Linien zu ersetzen, um die Theoreme zu erhalten, die für die ebenen Strahlfelder, bzw. die innerhalb der einzelnen Meridianebene in der Nähe der Instrumentenachse stattfindenden optischen Beziehungen gelten. (Für Lichtstrahlen, welche windschief zur Instrumentenachse verlaufen, muß hernach noch eine ergänzende Untersuchung hinzukommen.) —

Und nun erledigt sich der genannte scheinbare Widerspruch dadurch, daß die Betrachtungen, welche wir jetzt anstellten, mit den früheren, die auf der Moebius'schen Netzkonstruktion ruhten, gar nichts zu tun haben. Unsere neuen Betrachtungen gehen von der Möglichkeit der Taylorschen Entwicklung, bzw. von der Annahme aus, daß man diese mit den linearen Gliedern abbrechen dürfe, — sie sind nur insoweit genau richtig, als es sich um das generelle Entsprechen der Punkte auf der Achse handelt, und gehören übrigens in das Gebiet der Approximationsmathematik —, die Moebius'sche Netzkonstruktion dagegen trägt den Charakter der modernen Präzisionsmathematik; sie operiert prinzipiell nur mit endlich verschiedenen Linien und setzt von Hause aus nichts anderes als die Stetigkeit der in Betracht kommenden Abbildung voraus. Dies Beides ist so verschieden wie möglich. Der Eindruck, daß es sich um zusammengehörige Überlegungen handeln möchte, ist nur durch den äußeren Umstand hervorgerufen, daß beidemal zum Schluß eine lineare Beziehung herauskommt.

[Die Form der im vorstehenden eingehaltenen Beweisführung ist dadurch bedingt gewesen, daß ich die fraglichen Überlegungen s. Z. (im W.-S. 1909/01) in einer Vorlesung über projektive Geometrie vorgetragen habe, bei der die Vorstellungsweisen der Liniengeometrie im Vordergrund standen. Ich hätte mich sonst bei dem Nachweise, daß die mit einem vollkommenen Instrumente verbundene Kollineation eine Ähnlichkeitstransformation ist, kurz auf die Hamilton'schen Grundformeln berufen können. Siehe wieder die auf S. 696 genannten Ausführungen von Herrn Prange, wo auch viele einschlägige Literatur zu finden ist. K.]

LXXIII. The present state of Mathematics.

[Remarks made at the opening of the Congress on Mathematics and Astronomy on the 21st of August 1893¹⁾.]

The German Government has commissioned me to communicate to this Congress the assurances of its good will, and to participate in your transactions. In this official capacity, allow me to repeat here the invitation given already in the general session, to visit at some convenient time the German University exhibit in the Liberal Arts Building.

I have also the honour to lay before you a considerable number of mathematical papers, which give collectively a fairly complete account of contemporaneous mathematical activity in Germany. Reserving for the mathematical section a detailed summary of these papers, I mention here only certain points of more general interest.

When we contemplate the development of mathematics in this nineteenth century, we find something similar to what has taken place in other sciences. The famous investigators of the preceding period, Lagrange, Laplace, Gauss, were each great enough to embrace all branches of mathematics and its applications. In particular, astronomy and mathematics were in their time regarded as inseparable.

With the succeeding generation, however, the tendency to specialisation manifests itself. Not unworthy are the names of its early representatives: Abel, Jacobi, Galois and the great geometers from Poncelet on, and not inconsiderable are their individual achievements. But the developing

¹⁾ [Dieser erste allgemeine Kongreß der Mathematiker und Astronomen war mit der Weltausstellung in Chicago (1893) verbunden. Die vorliegende Rede wurde zuerst veröffentlicht in „The Monist“, t. 44, 1893 und dann abgedruckt in den Mathematical papers, read at the international mathematical congress, Chicago, 1893. New York, Macmillan and Co., 1896, Bd. 1. Von den etwa vierzig Arbeiten, die dem Kongreß vorgelegt wurden, stammt beinahe die Hälfte von deutschen Autoren, deren Manuskripte ich zum großen Teil in meinem Koffer mitgebracht hatte. (Vgl. Näheres in dem Vorwort zu den genannten Papers.) An den Kongreß, der vom 21.—26. August dauerte, schloß sich dann vierzehntägig das von mir abgehaltene im vorstehenden bereits wiederholt genannte Evanston Colloquium. Siehe etwa S. 225 ff. K.]



science departs at the same time more and more from its original scope and purpose and threatens to sacrifice its earlier unity and to split into diverse branches. In the same proportion the attention bestowed upon it by the general scientific public diminishes. It became almost the custom to regard modern mathematical speculation as something having no general interest or importance, and the proposal has often been made that, at least for purpose of instruction, all results be formulated from the same standpoints as in the earlier period. Such conditions were unquestionably to be regretted.

This is a picture of the past. I wish on the present occasion to state and to emphasize that in the last two decades a marked improvement from within has asserted itself in our science, with constantly increasing success.

The matter has been found simpler than was at first believed. It appears indeed that the different branches of mathematics have actually developed not in opposite, but in parallel directions, that it is possible to combine their results into certain general conceptions. Such a general conception is that of the *Function*, in particular that of the analytical function of the complex variable. Another conception of perhaps the same range is that of the *Group*, which just now stands in the foreground of mathematical progress. Proceeding from this idea of groups, we learn more and more to coordinate different mathematical sciences. So, for example, geometry and the theory of numbers, which long seemed to represent antagonistic tendencies, no longer form an antithesis, but have come in many ways to appear as different aspects of one and the same theory.

This unifying tendency, originally purely theoretical, comes inevitably to extend to the applications of mathematics in other sciences, and on the other hand is sustained and reinforced in the development and extension of these latter. I assume that detailed examples of this interchange of influence may be not without various interest for the members of this general session, and on this account have selected for brief preliminary mention two of the papers which I have later to present to the mathematical section.

The first of these papers (from Dr. Schönflies) presents a review of the progress of mathematical crystallography. Sohncke, about 1877, treated crystals as aggregates of congruent molecules of any shape whatever, regularly arranged in space. In 1884 Fedorow made further progress by admitting the hypothesis that the molecules might be in part inversely instead of directly congruent. In the light of our modern mathematical developments this problem is one of the theory of groups, and we have

thus a convenient starting-point for the solution of the entire question. It is simply necessary to enumerate all discontinuous groups which are contained in the so-called chief group of space-transformations. Dr. Schönflies has thus treated the subject in a text-book (1891) while in the present paper he discusses the details of the historical development.

In the second place, I will mention a paper which has more immediate interest for astronomers, namely, a *resumé* by Dr. Burkhardt of "The Relations between Astronomical Problems and the Theory of Linear Differential Equations". This deals with those new methods of computing perturbations, which were brought out first in your country by Newcomb and Hill; in Europe, by Gylden and others. Here the mathematician can be of use, since he is already familiar with linear differential equations and is trained in the deduction of strict proofs; but even the professional mathematician finds here much to be learned. Hill's researches involve indeed, — a fact not yet sufficiently recognised, — a distinct advance upon the current theory of linear differential equations. To be more precise, the interest centres in the representation of the integrals of a differential equation in the vicinity of an *essentially* singular point. Hill furnishes a practical solution of this problem by the aid of an instrument new to mathematical analysis, — the admissibility of which is, however, confirmed by subsequent writers, — the infinitely extended, but still convergent, determinant.

Speaking, as I do, under the influence of our Göttingen traditions, and dominated somewhat, perhaps, by the great name of *Gauss*, I may be pardoned if I characterise the tendency that has been outlined in these remarks as a *return to the general Gaussian programme*. A distinction between the present and the earlier period lies evidently in this: that what was formerly begun by a single master-mind, we now must seek to accomplish by united efforts and cooperation. A movement in this direction was started in France some time since by the powerful influence of Poincaré. For similar purposes we three years ago founded in Germany a mathematical society, and I greet the young society in New York and its Bulletin as being in harmony with our aspirations. But our mathematicians must go further still. They must form international unions, and I trust that this present World's Congress at Chicago will be a step in that direction.



LXXIV. Über die Bewegung des Kreisels¹⁾.

[Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen v. J. 1896.]

Die Funktionentheorie komplexer Variabler hat uns für die Darstellung der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt seit lange mit einem besonders einfachen Formelsystem versehen, welches für die Zwecke der Mechanik, soviel ich weiß, noch nicht ausgenutzt worden ist, so wahrscheinlich es von vornherein erscheinen muß, daß dies mit besonderem Vorteil geschehen kann. Man lege um den festen Punkt O eine Kugel, auf der man in Riemannscher Weise eine komplexe Variable ζ interpretiert. Die Drehungen um O sind dann einfach durch diejenigen unimodularen linearen Substitutionen gegeben:

$$(1) \quad \zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

bei denen einerseits α und δ , andererseits β und $-\gamma$ konjugiert imaginär sind (vgl. z. B. meine Vorlesungen über das Ikosaeder, 1884, S. 32). Bei der Behandlung irgendwelcher Rotationsaufgabe wird es also darauf ankommen, die hier auftretenden Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als geeignete Funktionen der Zeit t darzustellen.

Ich habe dies insbesondere für den gewöhnlichen Kreisel ausgeführt, d. h. einen der Schwerkraft unterworfenen Rotationskörper, der in einem Punkte seiner Achse festgehalten ist. $\zeta = \infty$ bezeichne den obersten Punkt der im festbleibenden Raume um O herumgelegten Kugel, $Z = \infty$ die Kreiselspitze (überhaupt Z die komplexe Variable auf der mit dem Kreisel verbundenen kongruenten Kugel). Das Resultat ist, daß $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ [nach Hermites Ausdrucksweise] solche elliptische Funktionen zweiter Art werden, welche im Zähler und Nenner nur eine einzelne Thetafunktion enthalten. Da der Nenner bei allen vier Ausdrücken derselbe ist, so findet die Kurve, welche wir aus (1) für die Bewegung der Kreiselspitze ableiten:

$$(2) \quad \zeta = \frac{\alpha}{\gamma}$$

¹⁾ Vorgelegt in der Sitzung am 11. Januar 1896.

gleichfalls eine Darstellung mit nur einem Thetafaktor im Zähler und Nenner. Andererseits erhält man beispielsweise für den Polhodiekegel, außer $r = \text{Konst.}$,

$$(3) \quad p + iq = 2i \left(\beta \frac{d\delta}{dt} - \delta \frac{d\beta}{dt} \right),$$

also einen Ausdruck mit zwei Thetafaktoren im Zähler und Nenner, usw. usw.

Es ist interessant, zu verfolgen, wie diese einfachen Formeln in den in der Literatur vorliegenden Entwicklungen überall indirekt zur Geltung kommen, ohne daß man sie klar als solche erkannt und an die Spitze der Betrachtung gestellt hätte. Beispielsweise hat man statt der auf der Kugel gelegenen Kurve (2) durchweg deren Horizontalprojektion betrachtet; für diese aber finden wir:

$$(4) \quad x + iy = 2\alpha\beta,$$

wo nun Zähler und Nenner je zwei Thetafaktoren aufweisen, was nach (2) eine unnötige Komplikation ist²⁾.

²⁾ [Wegen der Beziehungen zu einer Vorlesung von Weierstraß vom Jahre 1879 siehe Kreiselsbuch, Heft II, S. 511, 512. Vgl. ferner das Zitat auf Heß in Fußnote ¹⁾ auf S. 634 des vorliegenden Bandes.]



LXXV. The mathematical Theory of the Top.

Lectures delivered on the occasion of the sesquicentennial celebration of Princeton University (1896)¹⁾.

Lecture I.

In the following lectures it is proposed to consider certain interesting and important questions of dynamics from the standpoint of the theory of functions of the complex variable. I am to develop a new method, which, as I think, renders the discussion of these questions simpler and more attractive. My object in presenting it, however, is more general than that of throwing light on a particular class of problems in dynamics. I wish by an illustration which may fairly be regarded as representative to make evident the advantage which is to be gained by dynamics and astronomical and physical science in general from a more intimate association with the modern pure mathematics, the theory of functions especially.

I venture to hope, therefore, that my lectures may interest engineers, physicists, and astronomers as well as mathematicians. If one may accuse mathematicians as a class of ignoring the mathematical problems of the modern physics and astronomy, one may, with no less justice perhaps, accuse physicists and astronomers of ignoring departments of the pure mathematics which have reached a high degree of development and are fitted to render valuable service to physics and astronomy. It is the great need of the present in mathematical science that the pure science and those departments of physical science in which it finds its most important applications should again be brought into the intimate association which proved so fruitful in the work of Lagrange and Gauss.

¹⁾ These lectures on the analytical formulae relating to the motion of the top were delivered on Monday, Tuesday, Wednesday, and Thursday, October 12—15, 1896. They were reported and prepared in manuscript form by Professor H. B. Fine of Princeton University, and the manuscript was revised by Professor Klein. [Die Vorträge sind 1897 vom Verlage Charles Scribners Sons in New York herausgegeben und werden hier mit dessen freundlicher Erlaubnis abgedruckt.]

I shall confine my discussion mainly to the problem presented in the motion of a top — meaning for the present by “top” a rigid body rotating about an axis [of dynamical symmetry], when a single point in this axis, not the centre of gravity, is fixed in position.

In the present lecture I shall present some preliminary considerations of a purely geometrical character²⁾. But it is necessary first of all to obtain an analytical representation of the rotation of a rigid [symmetrical] body about a fixed point, and I shall begin with a statement of the methods ordinarily used.

We introduce two systems of rectangular axes both having their origin at the fixed point: the one system, x, y, z , fixed in space; the other, X, Y, Z , fixed in the rotating body. Then the ordinary equations of transformation from the one system to the other, which may be exhibited in the scheme:

$$(1) \quad \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{array} \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array}$$

give at once, when the nine direction cosines, a, b, c, a', \dots are known functions of the time t , the representation of the motion of the movable system X, Y, Z , with respect to the fixed system x, y, z .

As is well known, these cosines are not independent; they are rather functions of but three independent quantities or parameters. It is customary to employ one or other of the following sets of parameters, both of which were introduced by Euler.

The first set of parameters, which is non-symmetrical, consists of the angle ϑ which the Z -axis makes with the z -axis, and the angles φ and ψ , which the line of intersection of the xy - and XY -planes makes with the X -axis and the x -axis respectively. Because of the frequent use made of these parameters in astronomy, I shall call them the “astronomical parameters”. When the cosines a, b, c, \dots have been expressed in terms of them, the orthogonal substitution (1) becomes:

$$(2) \quad \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{ccc} \cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi, & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi, & \sin \vartheta \sin \psi, \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi, & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi, & -\sin \vartheta \cos \psi, \\ \sin \vartheta \sin \varphi, & \sin \vartheta \cos \varphi, & \cos \vartheta. \end{array} \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array}$$

²⁾ [Zur Lecture I vgl. die ausführliche Darstellung in meinem und Sommerfelds Kreiselbuch, Heft I, Kap. I, §§ 2, 3, 4. K.]



The second set of parameters may be defined as follows. Every displacement of our body is equivalent to a simple rotation about a fixed axis. Let ω be the angle of rotation, and a, b, c the angles which the axis makes with OX, OY, OZ ; and set

$$A = \cos a \sin \frac{\omega}{2}, \quad B = \cos b \sin \frac{\omega}{2}, \quad C = \cos c \sin \frac{\omega}{2}, \quad D = \cos \frac{\omega}{2}.$$

The quantities A, B, C, D (of which but three are independent, since, as will be seen at once, $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$) are the parameters under consideration. In terms of them our orthogonal substitution (1) is

$$(3) \begin{matrix} & X & Y & Z \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{matrix} D^2 + A^2 - B^2 - C^2, \\ 2(AB + CD), \\ 2(AC - BD), \end{matrix} & \begin{matrix} 2(AB - CD), \\ D^2 + B^2 - C^2 - A^2, \\ 2(BC + AD), \end{matrix} & \begin{matrix} 2(AC + BD), \\ 2(BC - AD), \\ D^2 + C^2 - A^2 - B^2, \end{matrix} \end{matrix}$$

or, if use be not made of the relation

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1,$$

a substitution with these coefficients each divided by $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$. I shall call these the "quaternion parameters", inasmuch as the quaternionists make frequent use of them. The quaternion corresponding to our rotation is

$$q = D + iA + jB + kC.$$

These parameters are very symmetrical, and for that reason very attractive. Nevertheless, they do not prove to be the most advantageous system for our present purpose. Our problem is not a symmetrical problem. In it one of the axes, Oz , in the direction of gravity, plays an exceptional rôle; the motion of the top is not isotropic.

Instead of either of these commonly used systems of parameters, I propose to introduce another, which so far as I know has not yet been employed in dynamics.

Let x, y, z be the coordinates of a point on a sphere fixed in space which has the radius r and the centre O , and X, Y, Z the coordinates of a point on a sphere congruent with the first but fixed in the rotating body. As the body rotates, the second sphere slides about on the first, but remains always in congruence with it.

It is characteristic of every point on the first sphere that the relation

$$\frac{x + iy}{r - z} = \frac{r + z}{x - iy}$$

holds good between its coordinates.

If we represent the values of the equal ratios by ζ , obviously ζ is a parameter for the points of the sphere, which completely determines one of these points for every value that it may take. Thus the upper extremity of the z -axis is characterized by the value ∞ of ζ , the lower extremity by the value 0; to real values of ζ correspond the points on the great circle of the sphere in the plane $y = 0$, and to pure imaginary values the points of the great circle in the plane $x = 0$.

For the points of the second sphere, in like manner, there is a parameter Z connected with the coordinates X, Y, Z by the equations,

$$\frac{X + iY}{r - Z} = \frac{r + Z}{X - iY} = Z,$$

which defines these points as ζ defined the points of the fixed sphere.

If now ζ and Z be parameters of corresponding points on the two spheres, what is the relation between these parameters when the second sphere is subjected to a rotation? *It is a simple linear relation of the form*

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

in which $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are themselves in general complex quantities, but so related that α is the conjugate imaginary to δ , and β to $-\gamma$; or, adopting the ordinary notation, $\alpha = \delta$ and $\beta = -\bar{\gamma}$.

It is obvious, *a priori*, that the relation must be linear, and a very simple reckoning such as I have given in my treatise on the Icosahedron (p. 32) establishes the special relations among the coefficients. There are but four real quantities involved in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, only the ratios of which need be considered independent, since these ratios alone appear in the expression for ζ ; unless, as is generally more convenient, we introduce the further relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

It is these quantities $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ connected by the relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, which together with ζ we propose to use as our parameters in the discussion of the problem now under consideration. They were introduced into mathematics by Riemann forty years ago, and have proved to be peculiarly useful in different geometrical problems intimately connected with the theory of functions, especially in the theory of minimal surfaces and the theory of the regular solids. *We hope to show that they may be employed to quite as great advantage in the study of all problems connected with the motion of a rigid body about a fixed point.*

Corresponding to the orthogonal substitution (1), we have in terms of our new parameters the substitution—



$$(4) \quad \begin{array}{l} x + iy \\ -z \\ -x + iy \end{array} \begin{array}{|l} X + iY \\ -Z \\ -X + iY \end{array} = \begin{array}{|l} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ \alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & \beta\delta \\ \gamma^2 & 2\gamma\delta & \delta^2 \end{array}.$$

as may be demonstrated without serious reckoning as follows. And I may remark incidentally that it seems to me better wherever possible to effect a mathematical demonstration by general considerations which bring to light its inner meaning rather than by a detailed reckoning, every step in which the mind may be forced to accept as incontrovertible, and yet have no understanding of its real significance.

Consider the sphere of radius 0,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

It is an imaginary cone whose generating lines join the origin to the so-called "imaginary circle at infinity", the circle in which all spheres intersect at infinity. For this sphere,

$$\zeta = \frac{x + iy}{-z} = \frac{z}{x - iy},$$

or

$$x + iy : -z : x - iy = \zeta^2 : \zeta : -1.$$

Here to each value of the parameter ζ there corresponds a single (imaginary) generating line of the cone, and *vice versa*. In other words, there is a relation of one-to-one correspondence between the (imaginary) generating lines of the cone and the values of ζ , or the cone is unicursal.

There is, of course, the same relation between the generating lines of the congruent cone

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

which is fixed in the moving body, and the parameter

$$Z = \frac{X + iY}{-Z} = \frac{Z}{X - iY}.$$

When the body rotates, this cone is simply carried over into itself, so that the generating lines in their new position are in one-to-one correspondence with the same generating lines in their original position. Between the parameters Z and ζ , which correspond to the generating lines in these two positions, there is, therefore, also a relation of one-to-one correspondence, or the two are connected linearly, *i.e.* by a relation of the form:

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

where, as above, we suppose

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

If now we avail ourselves of the advantages to be had from the use of homogeneous equations and substitutions by replacing

$$\zeta \text{ by } \frac{\zeta_1}{\zeta_2}, \text{ and } Z \text{ by } \frac{Z_1}{Z_2},$$

this single equation may be replaced by the two homogeneous equations:

$$\zeta_1 = \alpha Z_1 + \beta Z_2,$$

$$\zeta_2 = \gamma Z_1 + \delta Z_2,$$

and the equations connecting x, y, z , and ζ , and X, Y, Z , and Z become:

$$\begin{aligned} x + iy : -z : -x + iy &= \zeta_1^2 : \zeta_1 \zeta_2 : \zeta_2^2, \\ X + iY : -Z : -X + iY &= Z_1^2 : Z_1 Z_2 : Z_2^2. \end{aligned}$$

From these equations it follows that

$$\begin{aligned} x + iy &= \alpha^2 (X + iY) + 2\alpha\beta (-Z) + \beta^2 (-X + iY) \\ -z &= \alpha\gamma (X + iY) + (\alpha\delta + \beta\gamma) (-Z) + \beta\delta (-X + iY) \\ -x + iy &= \gamma^2 (X + iY) + 2\gamma\delta (-Z) + \delta^2 (-X + iY). \end{aligned}$$

For it is immediately obvious that $x + iy$ is proportional to ζ_1^2 , therefore to

$$\alpha^2 Z_1^2 + 2\alpha\beta Z_1 Z_2 + \beta^2 Z_2^2,$$

and therefore finally to

$$\alpha^2 (X + iY) + 2\alpha\beta (-Z) + \beta^2 (-X + iY);$$

and in like manner, that $-z$ and $-x + iy$ are proportional to

$$\alpha\gamma (X + iY) + (\alpha\delta + \beta\gamma) (-Z) + \beta\delta (-X + iY),$$

and

$$\gamma^2 (X + iY) + 2\gamma\delta (-Z) + \delta^2 (-X + iY)$$

respectively. And that $x + iy$, $-z$, $-x + iy$ are severally *equal* to these expressions and not merely proportional to them, follows from the fact that the determinant of the orthogonal substitution connecting x, y, z with X, Y, Z must equal 1.

The demonstration, to be sure, applies directly to the points of the imaginary cone only. But it is known in advance that the transformation which we are considering is a linear one for *all* points of space. Its coefficients are the same for all points, and we have merely availed ourselves of the fact that the imaginary cone remains unchanged by the transformation to determine them. The same result might have been reached, though less simply, by using the general formula $\zeta = \frac{x + iy}{r - z}$. The equations (4), therefore, are those which connect the coordinates of the initial and final positions of any point rigidly attached to the rotating body.



The relations between our new parameters, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, and the astronomical parameters, ϑ, φ, ψ , on the one hand, and the quaternion parameters A, B, C, D , on the other, are of immediate interest and of importance in the subsequent discussion. They are to be had very simply by a comparison of the coefficients in the three schemes (2), (3), (4), and, after reduction, prove to be:

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha = \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}, & \beta = i \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(-\varphi+\psi)}{2}}, \\ \gamma = i \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(\varphi-\psi)}{2}}, & \delta = \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{-i(\varphi+\psi)}{2}}, \end{cases}$$

$$\text{and} \quad \begin{cases} \alpha = D + iC, & \beta = -B + iA, \\ \gamma = B + iA, & \delta = D - iC. \end{cases}$$

Our new parameters are thus imaginary combinations of the real parameters in ordinary use. Mathematical physics affords many examples of the advantage to be gained by employing such imaginary combinations of real quantities. It is only necessary to cite the use made of them in optics by Cauchy.

I may remark that Darboux in his *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Livre I, treats the subject of rotation in a manner which is very similar to that which we have followed. But with him the ζ itself is considered directly as a function of the time and not the separate coefficients, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. His method thus lacks the simplicity which is possible when these are made the primary functions.

We now turn to a brief consideration of the meaning of the substitution

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

when $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are still regarded as functions of the time, but are general complex quantities, not connected by the special relations $\alpha = \delta$, $\beta = -\bar{\gamma}$.

We shall consider t also as capable of complex values, not for the sake of studying the behavior of a fictitious, imaginary time, but because it is only by taking this step that it becomes possible to bring about the intimate association of kinetics and the theory of functions of a complex variable at which we are aiming.

What is the meaning of the above formula? It is still a real transformation of the sphere on which we have defined ζ into itself, a linear transformation in which the coefficients are all real.

If the radius of the sphere be 1, as we shall assume throughout the discussion of this general transformation, or its equation when written homogeneously, be:

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,$$

the equations connecting x, y, z, t and X, Y, Z, T are those indicated in the following scheme:

$$(6) \quad \begin{array}{c|cccc} & X + iY & X - iY & T + Z & T - Z \\ \hline x + iy & \alpha \bar{\delta} & \beta \bar{\gamma} & \alpha \bar{\gamma} & \beta \bar{\delta} \\ x - iy & \gamma \bar{\beta} & \delta \bar{\alpha} & \gamma \bar{\alpha} & \delta \bar{\beta} \\ t + z & \alpha \bar{\beta} & \beta \bar{\alpha} & \alpha \bar{\alpha} & \beta \bar{\beta} \\ t - z & \gamma \bar{\delta} & \delta \bar{\gamma} & \gamma \bar{\gamma} & \delta \bar{\delta} \end{array}$$

and when these equations are solved for x, y, z, t , in terms of X, Y, Z, T , it will be found that the coefficients are real, as has been already stated.

This scheme may be derived in a manner analogous to that followed in deriving the scheme (4).

The equation of the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,$$

$$\text{or} \quad (x + iy)(x - iy) + (z + t)(z - t) = 0,$$

may, as is readily verified, be written in the form,

$$x + iy : x - iy : t + z : t - z = \zeta_1 \zeta'_2 : \zeta_2 \zeta'_1 : \zeta_1 \zeta'_1 : \zeta_2 \zeta'_2,$$

where $\frac{\zeta_1}{\zeta_2} = \zeta$, and ζ'_1, ζ'_2 are, fore real values of x, y, z, t , the conjugate imaginaries to ζ_1, ζ_2 respectively.

As above,

$$\zeta = \frac{x + iy}{t - z} = \frac{t + z}{x - iy}.$$

If then Z_1, Z_2, Z'_1, Z'_2 be quantities similarly defined with respect to the movable sphere

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 = 0,$$

we have corresponding to the transformation

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

the two pairs of equations:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \alpha Z_1 + \beta Z_2, & \zeta'_1 &= \bar{\alpha} Z'_1 + \bar{\beta} Z'_2, \\ \zeta_2 &= \gamma Z_1 + \delta Z_2, & \zeta'_2 &= \bar{\gamma} Z'_2 + \bar{\delta} Z'_1, \end{aligned}$$

if the transformation is to be real.

And from this series of equations it follows by the reasoning used on page 623 that $x + iy$ is equal to

$$\alpha \bar{\delta} (X + iY) + \beta \bar{\gamma} (X + iY) + \alpha \bar{\gamma} (T + Z) + \beta \bar{\delta} (T - Z),$$



and $x - iy, t + z, t - z$ to the corresponding expressions indicated in scheme (6).

The scheme (6) at once reduces to the scheme (4) when the special supposition is made that $\alpha = \delta$ and $\beta = -\gamma$. And since this is the sufficient and necessary condition that (6) reduce to (4), we have here an independent demonstration that these relations hold good among the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ when the motion is a rotation about a fixed point.

The general transformation (6) represents the totality of those [real] projective transformations or collineations of space for which each system of generating lines of the sphere, $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$, is transformed into itself, and among which all rotations of the sphere are obviously included as special cases. This is the geometrical meaning of the equation

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$$

for unrestricted values of $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

But the transformation admits also of a very interesting kinematical interpretation which I shall consider at length in my third lecture. With respect to it, our sphere of radius 1 plays the rôle of the fundamental surface or "absolute" in the Cayleyan or hyperbolic non-Euclidian geometry. For any free motion in such a space the absolute remains fixed in position as in ordinary space the imaginary circle at infinity

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0,$$

does, which is its absolute.

The transformation therefore represents a real free motion in non-Euclidean space, and the six independent real parameters involved in the ratios $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ correspond to the ∞^6 such possible motions. Interpreted in Euclidean space, the transformation represents a motion of the body combined with a strain.

I close the present lecture with two remarks.

First, *there is nothing essentially new in the considerations with which we have been occupied thus far.* I have merely attempted to throw a method already well known into the most convenient form for application to mechanics.

Second, *the non-Euclidean geometry has no metaphysical significance here or in the subsequent discussion.* It is used solely because it is a convenient method of grouping in geometric form relations which must otherwise remain hidden in formulas.

Lecture II.

I now proceed at once to the discussion of the Lagrange equations of motion for our top, only pausing to remark once more that this problem

of the top is for us typical of all dynamical questions which are related to a sphere. To this category belong also the problem of the spherical pendulum (which in fact is a special case of the problem of the top), the problem of the catenary on the sphere, and all problems of the motion of a rigid body about a fixed point. The simplest problem of the type is that of the motion of a rigid body about its centre of gravity, the Poincot motion, as we shall name it after Poincot who treated it very elegantly.

We shall first state the equations in terms of the astronomical parameters³⁾; and to give the expressions as simple a form as possible, I shall suppose the principal moments of inertia of the top about the fixed point of support each equal to 1. One may call such a top a spherical top, as its momental ellipsoid is a sphere. I wish it understood, however, that this restriction is not essential to the application of our method, but is rather made solely for the sake of rendering its presentation more easy.

On this assumption, we have for the kinetic energy, T , of the motion the expression

$$T = \frac{1}{2}(\varphi'^2 + \psi'^2 + 2\varphi'\psi'\cos\vartheta + \vartheta'^2),$$

where $\vartheta', \varphi', \psi'$ are the derivatives of ϑ, φ, ψ with respect to t ; and for the potential energy, V , the expression

$$V = P \cos \vartheta,$$

where P represents the static moment of the top with respect to O .

The Lagrange equations are:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \psi'} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = \frac{\partial(T-V)}{\partial \vartheta}.$$

The first two equations are especially simple in having their right members equal to zero, and we are therefore able to derive immediately the two algebraic first integrals

$$\begin{aligned} \varphi' + \psi' \cos \vartheta &= n, \\ \psi' + \varphi' \cos \vartheta &= l. \end{aligned}$$

The quantities n and l are constants of integration, to be determined from the initial conditions of the motion. In the following discussion we shall suppose them positive.

In addition to these integrals, we have the equation of energy

$$T + V = h,$$

³⁾ [Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen vgl. Kreisbuch, Heft II, Kap. IV, § 3.]



where h also is a constant determined, like l and n , by the special conditions of the problem.

Solving the first two equations for φ' and ψ' , and substituting the results in the third, and setting $\cos \theta = u$, and

$$U = 2Pu^3 - 2hu^2 + 2(ln - P)u + 2h - l^2 - n^2,$$

we obtain finally for t , φ , and ψ , expressed as functions of u , the formulas

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad \varphi = \int \frac{n-lu}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad \psi = \int \frac{l-nu}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

The problem of the motion of the top is thus reduced to three simple integrations or quadratures, as indeed was demonstrated by Lagrange himself. These integrals are elliptic integrals, U being a polynomial of the third degree in u , the first an elliptic integral of the "first kind" (which is characterized by being finite for all values of the independent variable), the remaining two elliptic integrals of a more complex character⁴).

It is often said that dynamics reached its ultimate form in the hands of Lagrange, and the cry "return to Lagrange" is frequently raised by those who set little store by the value for physical science of recent developments in the pure mathematics. But this is by no means just. Lagrange reduced our problem to quadratures, but Jacobi made a great stride beyond him, as we mathematicians think, by introducing the elliptic functions, which enabled him to assign to t the rôle of independent variable and to discuss the remaining variables u , φ , ψ directly as functions of the time. *An advantage was thus gained not only for the understanding of the essential relations of the variables to one another, but for simplicity of computation also.* The coefficients a , b , c , a' , \dots , are *uniform* (or one valued) functions of t , and one of the most useful properties a function can possess, if its values must be computed, is that it be uniform. This work of Jacobi is not as well known as it should be, having first appeared posthumously, in the second volume of his collected works, published by the Berlin Academy in 1882. I may add that his pupils, Lottner and Somoff, developed the same method in papers published in 1855 independently. It is shown in these papers that the nine cosines a , b , c , \dots , may be expressed in terms of theta functions⁵).

⁴) [Zur Anwendung der elliptischen Integrale und Funktionen vgl. Kreiselbuch, Heft II, Kap. IV, § 4 bzw. Kap. VI, §§ 1-4.]

⁵) As is well known, Jacobi gave analogous formulas for the nine cosines of the Poinso't motion in 1849. Closely related to this representation of the cosines is the interesting theorem to which we shall return later on, that the motion of our top may be reproduced by compounding two Poinso't motions. [Vgl. S. 638 unten.]

But while the a , b , c , \dots , considered as functions of t , are much simpler than the integrals of Lagrange, they are at the same time much more complicated than our parameters α , β , γ , δ . These parameters prove to be the simplest possible elliptic functions of t ; so that by introducing them we carry to its completion the work begun by Jacobi, of reducing our problem to its simplest elements.

For the proper understanding of this treatment of the motion of the top, some knowledge of the nature of elliptic functions is obviously necessary; and I know of no readier means of gaining this than *Riemann's method of conformal representation*, — of which, moreover, we shall have other important applications to make later on.

In accordance with this method, we construct the "Riemann surface" of the function \sqrt{U} on the plane of the complex variable u , in the following manner: The polynomial U vanishes for three values of u , all of which may readily be shown to be real, and becomes infinite when $u = \infty$. Two of these roots, e_1 , e_2 , lie between -1 and $+1$; and the third, e_3 , between $+1$ and ∞ . Therefore, \sqrt{U} is a two-valued function of u everywhere in the u -plane, except at the four points of the real axis, e_1 , e_2 , e_3 , e_∞ . To obtain a surface, therefore, between whose points and the values of \sqrt{U} there shall be a one-to-one correspondence, we lay over the u -plane two sheets, which are everywhere distinct except at the points e_1 , e_2 , e_3 , e_∞ , in which they coalesce, and associate with the points in the two sheets which lie immediately over any point u in the u -plane, the two corresponding values of \sqrt{U} , one with each.

It will be found that if the point u describe any simple circuit in the u -plane, which encloses one and but one of the points e_1 , e_2 , e_3 , e_∞ , returning finally to its initial position, \sqrt{U} will pass from the one to the other of the two values which correspond to the initial value of u ; the point corresponding to u in the Riemann surface of \sqrt{U} , must, therefore, move from a position in the one sheet to a position immediately under (or over) this in the other. But this is possible only if we suppose the two sheets to cross along some line running out from each of the points, e_1 , e_2 , e_3 , e_∞ , — not to intersect, but to cross, as non-intersecting lines in space may be said to cross. Inasmuch as this is the simplest hypothesis possible, we shall take as these lines of crossing, in the present case, the segments, e_1e_2 , e_2e_3 , of the real axis; and have, as a rough representation of the Riemann surface of \sqrt{U} , the following fig. 1, where we have shaded the positive half-sheets of the surface and have marked the segments, e_1e_2 , e_2e_3 , e_3e_∞

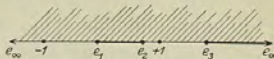


Fig. 1.



The points, e_1, e_2, e_3, e_x , are called the "branch points" and the segments, e_1e_2, e_2e_3, e_3e_x , the "branch lines" of the surface.

To construct in the t -plane the figure which is the conformal representation of this Riemann surface, we conceive of this surface as cut into four half-sheets, by an incision made all along the real axis, and seek first the conformal representation of the upper half-sheet. To obtain this, we cause the point u to move, in the positive sense, along the real axis, from e_1 through e_2, e_3, e_x back (from the left) to e_1 , and study the corresponding changes of value of t by means of the integral, $t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}$, by which it is defined.

We thus find that as the point u traces out the real axis in its plane, the corresponding t traces out a rectangle in its plane, which we may represent by the fig. 2, to the angular points of which we have attached the values of u to which they correspond, and which we have shaded, since the sense in which its perimeter was traced shows that it is its interior which corresponds to the shaded half-plane of the preceding figure⁶⁾.

As long as the integral which defines t is left an indefinite integral, this rectangle remains free to occupy any position in the t -plane, — only the directions of its sides, parallel respectively to the real and imaginary axes, and their lengths, — call them ω_1 and ω_2 , — are completely determined. But when the integral is made definite, by making e_x the lower limit of integration, the angular point, e_x , coincides with the origin in the t -plane, and the rectangle takes a definite position in the plane.

From the image which we have thus obtained of the one half-sheet, the images of the three remaining half-sheets are to be had at once by the process of "symmetrical reproduction": which yields for the Riemann surface, when cut in the manner indicated, the complete image:

The symmetry of the figure with respect to the sides, e_xe_1 , and e_xe_3 , of the original rectangle, will be at once noticed. Each of the four smaller rectangles is the

⁶⁾ The figure is a rectangle, since \sqrt{U} is real from $u = e_1$ to $u = e_2$, and from $u = e_3$ to $u = e_x$, and a pure imaginary from $u = e_x$ to $u = e_1$, and from $u = e_2$ to $u = e_3$. At e_1 , $t = \text{const.}$ vanishes as $(u - e_1)^{\frac{1}{2}}$.



Fig. 2.

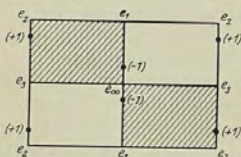


Fig. 3.

image of one half-sheet; the shaded, of the positive half-sheets; the non-shaded, of the negative.

But we have not yet obtained the complete geometrical representation of u , regarded as a function of t . The Riemann surface of two sheets, which we have thus far been considering, possesses a distinct point for every value of \sqrt{U} regarded as a function of u , but not for t when so regarded. The integral t is affected by an additive constant if u be made to trace in the Riemann surface a closed path which surrounds e_1e_2 , or one which surrounds e_2e_3 , so that the Riemann surface of t is one possessing the same branch points as the Riemann surface of \sqrt{U} , but having an infinite number of sheets, into any one of which it is possible to move the tracing point, u , if no such cut be made in the surface as that made above along the real axis.

It is a great advantage of the Riemann method that the complete image in [the t -plane of this uncut Riemann surface of an infinite number of sheets may be had from the image already obtained for the cut surface, by simply affixing a rectangle, congruent with this image, to each of its sides, repeating the process for the new rectangles, and so on indefinitely, until the entire t -plane is covered by congruent rectangles, any one of which may be brought into coincidence with any other by two translations, one in the direction of the real, the other in the direction of the imaginary, axis.

From the result of this construction, there at once follows a conclusion of the very first importance. The image of the complete Riemann surface of t entirely covers the t -plane, but without the overlapping of any of its parts. It follows immediately, therefore, that to each point in the t -plane there corresponds but a single point in the Riemann surface, or that u , and \sqrt{U} as well, is a uniform function of t .

The equation connecting t and u is:

$$t = \int_{\infty}^u \frac{du}{\sqrt{U}}$$

And the conclusion which we have reached is, that the functional relation of u with respect to t , defined by this equation, is vastly more simple than that of t with respect to u ; to each value of u [and \sqrt{U}] there corresponded an infinite number of values of t , while to each value of t there corresponds but one value of u . As thus defined, u is called an elliptic function of t .

Let ω_1 be the length of the side e_xe_3 of the small rectangle, which was the image of a half-sheet of the Riemann surface, and ω_2 the length of the side e_xe_1 ; then, obviously, if we set $u = \varphi(t)$, and t_0 be



any point of the complete rectangle (Fig. 3), since $t_0 + m_1 2\omega_1 + m_2 2i\omega_2$ is for any integral values of m_1, m_2 , the corresponding point of another of the rectangles, $\varphi(t_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2i\omega_2) = \varphi(t_0)$; or the elliptic function, u , is *doubly periodic*, with the periods $2\omega_1, 2i\omega_2$.

Let us next consider the nature of φ and ψ when regarded as functions of t . The integrals by which they are expressed in terms of u are elliptic integrals of greater complexity than is the integral for t . There are on the Riemann surface of \sqrt{U} four points, at which each of these integrals becomes logarithmically infinite; namely, the points $-1, +1$, in the upper sheet, and the same points in the lower sheet. Elliptic integrals possessing such points of logarithmic discontinuity are called "elliptic integrals of the third kind", and it is possible to express any such integral in terms of integrals of the first kind and "normal" integrals of the third kind, such, namely, as possess but two points of logarithmic discontinuity with the residues $+1$ and -1 respectively.

But if instead of making this reduction of the integrals directly, we introduce those combinations of φ and ψ which constitute our parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, a remarkable simplification at once ensues such as renders any further reduction unnecessary. Surely a preestablished harmony exists between the problem before us, and our parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Since

$$u = \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}},$$

and

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{u+1}{2}},$$

we have immediately

$$\log \alpha = \frac{1}{2} \log \frac{1+u}{2} + \frac{i(\varphi+\psi)}{2} = \int \frac{\sqrt{U} + i(l+n)}{2(u+1)} \frac{du}{\sqrt{U}} - \frac{1}{2} \log 2,$$

when for φ and ψ their values are substituted.

And in like manner,

$$\log \beta = \int \frac{\sqrt{U} - i(l-n)}{2(u-1)} \frac{du}{\sqrt{U}} - \frac{1}{2} \log 2,$$

$$\log \gamma = \int \frac{\sqrt{U} + i(l-n)}{2(u-1)} \frac{du}{\sqrt{U}} - \frac{1}{2} \log 2,$$

$$\log \delta = \int \frac{\sqrt{U} - i(l+n)}{2(u+1)} \frac{du}{\sqrt{U}} - \frac{1}{2} \log 2,$$

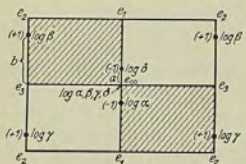


Fig. 4.

and these are all normal integrals of the third kind, each with but two points of logarithmic discontinuity which are distributed in the rectangle of the periods as indicated in the accompanying fig. 4, if we suppose as we shall find it convenient to do later on that l is less than n .

For $U = -(l+n)^2$ when $u = -1$, and $U = -(l-n)^2$ when $u = +1$. If, therefore, of the two values of \sqrt{U} , which correspond to $u = -1$, we take $i(l+n)$, the factor $\sqrt{U} + i(l+n)$ in the numerator of the expression for $\log \alpha$ will be canceled by the factor $2\sqrt{U}$ in the denominator, while if we take $-i(l+n)$, the numerator vanishes; so that the point -1 in one of the sheets of the Riemann surface of \sqrt{U} is the only finite point of discontinuity of the integral $\log \alpha$. It is, moreover, a logarithmic discontinuity with the residue 1, since $\log \alpha$ there becomes ∞ as $\log(u+1)$. On the other hand, for $u = \infty$, i.e. at e_x , $\log \alpha$ becomes infinite as $\frac{1}{2} \log u$. This again is a logarithmic discontinuity, with the residue -1 , since e_x is at infinity and a branch point. And like considerations apply to the remaining integrals.

By the introduction of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, therefore, the four logarithmic discontinuities of the integrals φ, ψ , are assigned one to each of the four normal integrals $\log \alpha, \log \beta, \log \gamma, \log \delta$ — normal integrals whose remaining points of discontinuity, corresponding to e_x , coincide at the origin.

While $\log \alpha, \log \beta, \log \gamma, \log \delta$, as now defined are much simpler functions of u , and therefore of t , than are φ and ψ , their exponentials $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are simpler still. These are uniform functions of t having each one null-point and one ∞ -point in every parallelogram of periods. Such functions may always be expressed, apart from an exponential factor, by the quotient of two ϑ - or two σ -functions of the simplest kind — functions which possess one null-point in each parallelogram of periods, but no ∞ -point.

Of the ϑ -functions we shall only pause to remark that Jacobi introduced them into analysis as being the simplest elements out of which the elliptic functions could be constructed. He obtained for them expressions in the form of infinite products and infinite series. They are affected by an exponential factor when the argument is increased by a period, but remain otherwise unchanged. The ϑ -functions of the simplest class, with which alone we are concerned, vanish when the argument takes the value zero or a congruent value.

The σ -function of Weierstrass is a more elegant function of the same character.

Inasmuch, therefore, as $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, are functions of t , which vanish for $t = -ia, \omega_1 + ib, \omega_1 - ib, +ia$ respectively (the values of t corresponding to the points $u = \pm 1$ in the above figure) and which all become infinite for $t = 0$, we have for them the following expressions:

$$\begin{aligned} \alpha &= k_1 e^{i_1 t} \frac{\sigma(t+ia)}{\sigma(t)}, & \beta &= k_2 e^{i_2 t} \frac{\sigma(t-\omega_1-ib)}{\sigma(t)}, \\ \gamma &= k_3 e^{i_3 t} \frac{\sigma(t-\omega_1+ib)}{\sigma(t)}, & \delta &= k_4 e^{i_4 t} \frac{\sigma(t-ia)}{\sigma(t)}, \end{aligned}$$



where k_i, λ_i are constants to be determined from the initial conditions of the motion. Their values depend on those of the "transcendental" constants ω_1, ω_2, a, b , as the values of these in turn depend on those of the "algebraic" constants, P, h, l, n .

We shall call functions such as $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, which miss being doubly periodic by an exponential factor only, "multiplicative elliptic functions". All elliptic functions are expressible as quotients of ϑ - or σ -functions, and evidently of such quotients the simplest possible are those which have a single ϑ or σ of the simplest kind in both numerator and denominator. We may therefore state the result of our discussion in these terms: *We have shown that our parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are multiplicative elliptic functions of the simplest kind, so that by introducing them we have resolved the problem of the top into its simplest elements.*

From these expressions for $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ one may obtain expressions for the nine direction cosines a, b, c, \dots in the form of quotients of σ - or ϑ -functions — such as Jacobi got for them — with the least possible reckoning⁷⁾.

Lecture III.

In the lecture of yesterday we reached the conclusion that our parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ may be expressed as quotients of simple σ -functions of the time t , and we now turn to the geometrical interpretation of these formulas.

As I have already asked you to notice, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are not ordinary elliptic functions of t , but functions which are affected by an exponential factor when t is increased by a period; in consequence of which I called them "multiplicative elliptic functions". When t is increased by the period $2\omega_1$, they are affected by an imaginary factor of the form $e^{i\nu}$, and when t is increased by the period $2i\omega_2$, by a real factor of the form κ .

Let us first of all consider *the curve described by the apex of the top on the fixed sphere*⁸⁾. This is the point $Z = \infty$ of the movable sphere, so that, reverting to the formula:

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta},$$

⁷⁾ Hess has remarked, in his paper on the gyroscope (Math. Annalen Bd. 29, 1887) that the *quaternion* expressions for the nine direction cosines are very simple, and our parameters are but linear combinations of the quaternion parameters. Hess, however, makes no direct use of our parameters and probably was not aware of the formula, $\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$, which lies at the basis of our discussion.

⁸⁾ [Vgl. Kreisbuch, Heft II, Kap. VI, § 5.]

it is obvious that the equation of the curve is

$$\zeta = \frac{\alpha}{\gamma} = k e^{\lambda t} \frac{\sigma(t+ia)}{\sigma(t-\omega_1+ib)}.$$

Like $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, this ζ is defined in terms of t by a multiplicative elliptic function of the first degree, involving besides the exponential factor only the quotient of two simple σ -funktionen.

This is an essential simplification of the representations of this motion given hitherto. Thus, were one to apply the methods used by Hermite in his *Applications des fonctions elliptiques*, published twenty years ago, and start not from the equation of ζ in terms of Z , but from those of $x+iy, -z, -x+iy$ in terms of $X+iY, -Z, -X+iY$ (see page 623), one would obtain for the motion of the apex of the top (whose coordinates are 0, 0, 1), the equation

$$x+iy = -2\alpha\beta,$$

which represents the motion by means of a multiplicative elliptic function of the second order. The curve thus defined is not the curve traced by the apex on the fixed sphere, but the orthogonal projection of this curve on the xy -plane.

I shall, for convenience, call curves like those which we have just been considering "multiplicative elliptic curves", distinguishing when necessary between those on the sphere and those on the plane, and assigning to them a degree corresponding to the number of simple σ -quotients in the expressions which define them. Thus the curve traced by the apex of the top on the fixed sphere is a multiplicative elliptic curve of the first degree, its orthogonal projection one of the second degree. The earliest example of such a curve of the first degree is the herpolhode of a Poinsot motion, the motion of a body about its centre of gravity. That this herpolhode is such a curve was first shown by Jacobi⁹⁾.

It is easy to get a notion of the geometrical character of the curve traced by the apex of the top. For the particular case when $l - ne_3 = 0$, the stereographic projection of the curve has the shape indicated in the following fig. 5.

As we wish to restrict t to real values, we here make e_1 the lower limit of integration of the integral $t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}$, or what comes to the

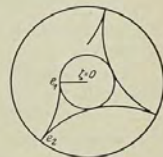


Fig. 5.

⁹⁾ Concerning the multiplicative elliptic curves, see Miss Winston's dissertation: *Über den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung*, Göttingen, 1897. [Vgl. auch das Zitat auf S. 574, Fußnote ⁴⁾ des vorliegenden Bandes, sowie Kreisbuch, Heft II, Kap. VI, § 9.]



same thing, suppose the t of the preceding formulas replaced by $t' = t + i\omega_2$.

The radius of the circle marked $u = e_1$ is the modulus of those points ζ for which t is $0, 2\omega_1, \dots$; for all these points $u = e_1$. On the other hand, the radius of the circle marked $u = e_2$ is the modulus of those points ζ for which $t = \omega_1, 3\omega_1, \dots$.

The curve of the figure is that traced by the stereographic projection of ζ as t varies through real values, and consists of an infinite number of congruent arcs which touch the inner circle and form cusps at the outer one. If the top be given an initial thrust sideways (when $l - ne_2$ is no longer 0), these cusps will be replaced by loops or wavecrests.

Evidently any one of these arcs may be brought into coincidence with the consecutive one by one and the same rotation about the origin. The transformation which effects this rotation is $\zeta' = e^{i\nu_0} \zeta$, so that the meaning of the imaginary factor $e^{i\nu_0}$, by which ζ is affected when t is increased by the real period $2\omega_1$, is perfectly obvious. We shall find that since ζ is affected by the real factor κ when t is increased by the imaginary period $2i\omega_2$, the effect on the curve of this increase in t is to transform it into a curve similar to itself, and symmetrically placed with respect to the origin.

But before attempting a more minute examination of the curve traced by the apex of the top, let us consider the *polhode and herpolhode of the motion*¹⁰⁾.

On each instantaneous axis of rotation let a segment be measured from the fixed point, equal in sense and magnitude to the amount of rotation about this axis. The aggregate of these segments constitute a portion of one cone if they be caused to remain fixed in the moving body, of another if they be caused to remain fixed in space. The first cone, or the curve in which its elements terminate, is called the "polhode", the second the "herpolhode", and it is evident that the motion of the body may be had by rolling the first cone or curve on the second cone or curve.

To obtain the equation of the polhode, consider the infinitesimal rotation in time dt about the axis for which the components of rotation with respect to X, Y, Z , are p, q, r , respectively. The axis is for the instant fixed in space, and we have for the effect of the rotation on any point of the moving sphere the equations:

$$\begin{aligned} X &= + X' - rdtY' + qdtZ', \\ Y &= + rdtX' + Y' - pdtZ', \\ Z &= - qdtX' + pdtY' + Z', \end{aligned}$$

¹⁰⁾ [Vgl. Kreiselbuch, Heft I, Kap. I, § 5.]

For this motion therefore the quaternion parameters (see page 620) are:

$$A' = \frac{p}{2} dt, \quad B' = \frac{q}{2} dt, \quad C' = \frac{r}{2} dt, \quad D' = 1,$$

and therefore the corresponding parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are:

$$\begin{aligned} \alpha' &= 1 + \frac{ir}{2} dt, & \beta' &= \frac{-q+ip}{2} dt, \\ \gamma' &= \frac{q+ip}{2} dt, & \delta' &= 1 - \frac{ir}{2} dt. \end{aligned}$$

If therefore $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (unprimed) be the parameters of the transformation from the axes X, Y, Z fixed in the body to the axes x, y, z fixed in space, we may obtain the parameters $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma, \delta + d\delta$ of the transformation which defines the position of the body after the infinitesimal rotation, by combining the two substitutions:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \alpha\zeta'_1 + \beta\zeta'_2, & \zeta'_1 &= \alpha'Z_1 + \beta'Z_2, \\ \zeta_2 &= \gamma\zeta'_1 + \delta\zeta'_2, & \zeta'_2 &= \gamma'Z_1 + \delta'Z_2, \end{aligned}$$

the result of which is:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (\alpha\alpha' + \beta\gamma')Z_1 + (\alpha\beta' + \beta\delta')Z_2, \\ \zeta_2 &= (\gamma\alpha' + \delta\gamma')Z_1 + (\gamma\beta' + \delta\delta')Z_2. \end{aligned}$$

It follows, therefore, that

$$\begin{aligned} \alpha + d\alpha &= \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \beta + d\beta &= \alpha\beta' + \beta\delta', \\ \gamma + d\gamma &= \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \delta + d\delta &= \gamma\beta' + \delta\delta', \end{aligned}$$

whence

$$\begin{aligned} d\alpha &= \left(\frac{ir}{2}\alpha + \frac{q+ip}{2}\beta\right) dt, \\ d\beta &= \left(\frac{-q+ip}{2}\alpha - \frac{ir}{2}\beta\right) dt, \\ d\gamma &= \left(\frac{ir}{2}\gamma + \frac{q+ip}{2}\delta\right) dt, \\ d\delta &= \left(\frac{-q+ip}{2}\gamma - \frac{ir}{2}\delta\right) dt. \end{aligned}$$

Whence finally:

$$\begin{aligned} p + iq &= 2i\left(\beta\frac{d\delta}{dt} - \delta\frac{d\beta}{dt}\right), \\ -p + iq &= 2i\left(\alpha\frac{d\delta}{dt} - \delta\frac{d\alpha}{dt}\right), \\ r &= 2i\left(\alpha\frac{d\delta}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}\right). \end{aligned}$$

We will not stop to derive the corresponding equations for the components α, κ, ϱ of the herpolhode. They differ from those just obtained for p, q, r only in having α and δ interchanged and the signs of β and γ changed.

But I wish to make two remarks which are suggested by the above reckoning, with regard to the usefulness of our parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



The one is that two linear substitutions in terms of them combine binarily instead of quaternarily as do the corresponding quaternion substitutions; the other, that the four linear differential equations which define them in terms of t, p, q, r break up into two pairs, in one of which only a and β are involved, in the other only γ and δ . To appreciate how important this advantage is, one need only compare with our discussion the discussion of the same question in Darboux's *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (l.c.).

Returning to our spherical top, and substituting in the general equations which we have just obtained the values of $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ which characterize its motion, we have for its polhode and herpolhode not equations of the second degree, as was to have been expected from the expressions for $p + iq$, etc. in terms of $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, but much simpler expressions. I cannot give the reckoning which leads to them since I have not given the values of the constants k_1, λ_1, \dots which appear in the formulas on page 633. But the expressions themselves are of the form

$$p + iq = k' e^{i\sigma} \frac{\sigma(t + \omega_1 - ia - ib)}{\sigma(t)}, \quad r = n;$$

$$\pi + i\kappa = k'' e^{i\sigma} \frac{\sigma(t + \omega_1 - ia + ib)}{\sigma(t)}, \quad \varrho = l.$$

Both the polhode and the herpolhode of the spherical top are elliptic plane curves of the first degree¹¹⁾. Darboux has given this result in his edition of Despeyrou's *Mechanics*, obtaining it by the use of elliptic integrals instead of elliptic functions. He does not call the curves elliptic curves of the first degree, but curves of the same character as the herpolhode of a Poinso't motion. It should be added that the curves are of the first degree in the case of the *spherical* top only.

Our theorem is closely connected with the celebrated theorem of Jacobi already mentioned: that the motion of the top may be represented by the relative motion of two Poinso't motions (or rotations about the centre of gravity); for both the polhode and herpolhode of the top's motion are themselves herpolhodes of Poinso't motions, being elliptic curves of the first degree. One may demonstrate Jacobi's theorem most simply by expressing the $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ of each of the Poinso't motions in terms of t , and then combining the two motions¹²⁾.

I may finish this part of my discussion with the remark that the attention of students of the geometry of Salmon and Clebsch is apt to be confined too exclusively to algebraic curves. We have before us an illustration of the value of transcendental curves. It is only in the very

¹¹⁾ [Vgl. Kreisbuch, Heft II, Kap. VI, § 5.]

¹²⁾ [Zur Theorie der Poinso't-Bewegung vgl. Kreisbuch, Heft II, Kap. VI, § 8.]

exceptional case when the multiplicative factor $\kappa = 1$, and ψ_0 is commensurable with π , that the curves we have been studying become algebraic.

To sum up the conclusions which we have thus far established; we have proved that *the motion of the spherical top on a fixed point of support may be completely defined geometrically in terms of elliptic curves of the first degree*. We have also shown that the variation of the parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ with the time t may be pictured by curves of the same character.

Let us now resume the study of the curve traced by the apex of the top.

The parameters $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, and ζ are all elliptic functions of the argument t , and the full meaning of elliptic functions comes to light only when the argument is supposed capable of taking complex values. Thus only, in particular, will the double periodicity of the functions come into evidence. There exists, then, an analytical necessity, so to speak, that we complete our geometrical study of the top's motion by extending it to complex values of t . When that has been accomplished, I shall show that to the entire aggregate of possible motions of the top in complex time there corresponds the free motion of a certain rigid body in non-Euclidean space, and thus bring to a definite outcome the considerations which I presented at the close of my first lecture.

Our problem being to determine the path traced by the point ζ when the point t is made to describe *any* path in the t -plane, it is clearly of prime importance that we determine first of all the image on the ζ -sphere of a parallelogram of periods in the t -plane. To that, indeed, we shall confine our attention. Instead, however, of finding this image directly we shall find it easier to obtain the images of the four half-sheets of the Riemann surface of \sqrt{U} , of which, it will be remembered, the four smaller rectangles into which the entire parallelogram of periods subdivided were severally the images.

Let us first reproduce (in Fig. 6) the figure of the parallelogram of periods (see page 630) and that of the Riemann surface of \sqrt{U} .

I have given different markings to all four rectangles in order to be able to distinguish readily between their several images in the figure which we are to construct. It will be remembered (see page 632) that

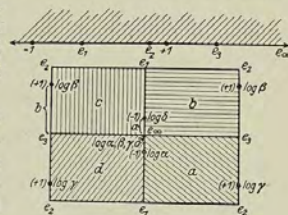


Fig. 6.



$\log \alpha$ and $\log \gamma$ became infinite at the points $u = -1$ and $u = +1$, respectively, of one sheet of the \sqrt{U} -surface, and that $\log \beta$ and $\log \delta$ became infinite at the corresponding points of the other sheet — the other functions in each case remaining finite. In the figure, a and d are the images of the positive and negative halves of the first of these sheets, and c and b the images of the positive and negative halves of the second.

Our ζ is expressed in terms of u by the elliptic integral of the third kind:

$$\log \zeta = \log \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right) = \int \frac{-\sqrt{U} + i(uu-1)}{u^2-1} \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

We may now draw the following conclusions immediately: $\frac{d}{du} \log \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)$ is complex along the segments $e_1 e_2, e_3 e_\infty$ of the real axis of the u -plane, but real along the segments $e_2 e_3, e_\infty e_1$. Therefore $\frac{\alpha}{\gamma}$ or ζ moves along a meridian of the ζ -sphere when u moves along the real axis from e_3 to e_2 , from e_∞ to e_1 ; but, on the other hand, describes one of the arcs which appeared in the figure of the real motion of the top's apex, when u moves on the real axis from e_1 to e_2 , and an arc different from this, when u moves from e_3 to e_∞ .

Again, $\frac{d}{du} \log \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)$ vanishes when $u = e_\infty$, in the first approximation as $\frac{1}{u^2}$, and takes the finite value $\frac{1}{1-e_2^2}$ when $u = e_2$ (this because of the hypothesis which we retain here, that $l - ne_2 = 0$); when $u = e_1$ or e_3 , on the other hand, it becomes infinite, as $(u - e_1)^{-\frac{1}{2}}$ or $(u - e_3)^{-\frac{1}{2}}$. Therefore the curve traced by the point ζ as the point u moves along the real axis from e_∞ through e_1, e_2, e_3 , to e_∞ will present angles whose measure is π at the points corresponding to e_∞ and e_2 , and angles whose measure is $\frac{\pi}{2}$ at the points corresponding to e_1 and e_3 .

I will not give the image of the \sqrt{U} -surface on the sphere, but the stereographic projection of this image on the xy -plane from the point $\zeta = \infty$. If to the explanations already given it be added that ζ , whose value in terms of t is $ke^{it} \frac{\sigma(t+ia)}{\sigma(t-\omega_1+ib)}$, becomes 0 and ∞ respectively at the points -1 and $+1$ of the contour of the half-sheet or rectangle a , and remains finite and different from 0 for all points on the contour of b , it will readily be seen that the images of the half-sheets or rectangles a, b , are roughly of the form indicated in the following fig. 7: the two contours which we have marked $e_\infty e_1 e_2 e_3 e_\infty$ being the stereographic projections of images of the real u -axis first when this axis is regarded as the

contour of the positive half-sheet a , second when it is regarded as the contour of the negative half-sheet b .

The two arcs $e_1 e_2$ are similar and symmetrically placed with respect to the point $\zeta = 0$. The one which lies to the left appeared in the figure of the real motion of the top's apex (Fig. 5).

If now we complete this figure by a second half symmetrical with this first half with respect to the horizontal axis $e_1 e_\infty$, we obtain the image of the entire \sqrt{U} -surface or of the entire parallelogram of periods in the t -plane (Fig. 8). We suppose an incision made in the \sqrt{U} -surface along the segment $e_1 e_2 e_3$ of the real axis.

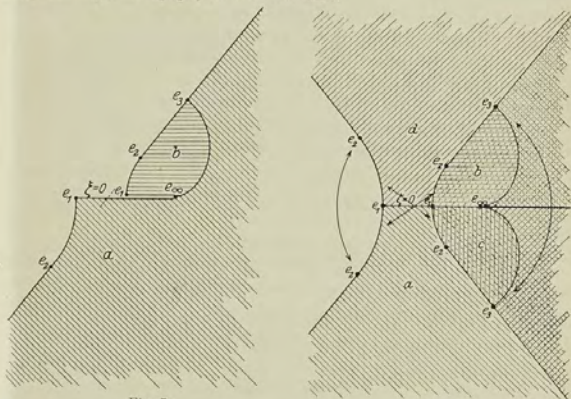


Fig. 7.

Fig. 8.

It will be noticed that the image covers doubly the portion of the plane which lies within the two arcs $e_1, e_2, e_3, \zeta = \infty$, which lie to the right, the two sheets being joined along a branch line which runs from e_∞ to $\zeta = \infty$. From the figure we infer that e_∞ is a branch point of t , but not so the point $\zeta = \infty$; for a circuit cannot be made of the point $\zeta = \infty$ without passing into the portion of the plane bounded by the half-arcs $e_1, e_2, \zeta = \infty$, lying to the left, which does not belong to the image. And these conclusions may readily be verified by reckoning.

We may describe our figure as a quadrilateral, one of whose pairs of opposite sides are the rectilinear segments running from the points e_2 , through $\zeta = \infty$, and which, were they produced, would intersect at $\zeta = 0$, and the other pair, the two curvilinear arcs $e_3 e_1 e_2$.



The sides of each pair go over into each other by the substitution of ζ which corresponds to a change of t by one of the periods $2\omega_1$, $2i\omega_2$; the straight sides by the rotation about $\zeta=0$ defined by the "elliptic substitution" $\zeta' = e^{i\nu}\zeta$, which we have already considered and which we have indicated in the figure by the double-headed curved arrows; the curved sides by the transformation defined by the "hyperbolic substitution" $\zeta' = \kappa\zeta$, in consequence of which they are similar and symmetrically placed with respect to the centre of similitude $\zeta=0$. In the figure we have indicated the latter transformation by the double-headed straight arrows which intersect at $\zeta=0$. The significance of both the periods $2\omega_1$, $2i\omega_2$ for the curve traced by the apex of the top is thus made evident by our figure. And indeed we have now clearly before us for the first time the reason that the curve described in real time should be represented by elliptic functions. It is but a portion of the complete curve, or rather domain, which comes to light when we avail ourselves of the entire field of complex numbers in which the representation of both periods is alone possible.

The Riemann surface determined by $\zeta = \frac{\beta(t)}{\delta(t)}$, the curve traced by the opposite extremity of the top's axis, $Z=0$, may be constructed similarly.

For real values of t we have $\frac{\beta(t)}{\delta(t)} = -\frac{\bar{\gamma}(t)}{\bar{\alpha}(t)}$, which means simply that $\frac{\alpha(t)}{\gamma(t)}$ and $\frac{\beta(t)}{\delta(t)}$ are opposite extremities of one and the same diameter of the sphere. For complex values of t this formula is to be replaced by the more general one

$$\frac{\beta(t)}{\gamma(t)} = -\frac{\bar{\gamma}(\bar{t})}{\bar{\alpha}(\bar{t})}.$$

If now we suppose these two Riemann surfaces to be projected back again to the surface of the fixed sphere, and the points of the two which correspond to the same value of t to be joined, the resulting system of rays will represent the ∞^2 positions which the axis of the top may take in the general (non-Euclidean) motion which corresponds to any motion of t in the parallelogram of periods.

Of these ∞^2 "axes", only those pass through the centre of the sphere which correspond to real values of t . These are the axes which meet the curved arc $e_2 e_1 e_2$ of the preceding figure which lies to the left. Those axes which meet the other curved arc $e_2 e_1 e_2$ intersect in another point of the central line (i.e. of the vertical through the centre of the sphere); namely, the point into which the centre of the sphere is transformed by the hyperbolic substitution already explained. A visible

representation of the possible motions of the top's axis in complex time is to be had by constructing the figures for $\frac{\alpha}{\gamma}$ and $\frac{\beta}{\delta}$ on an actual sphere and joining a number of corresponding points by straight lines.

The doubly infinite systems of the rays which are elements of the polhodes and herpolhodes of all motions possible in complex time, may be constructed in like manner, and a complete geometrical representation be thus obtained of the top's motion. The constructions are more complicated, but there is no essential difficulty in carrying them out.

In fact, the only serious difficulty in this entire method of discussion is, that all our ordinary conceptions of mechanics involve the notion that time is capable of but one sort of variation. We are so accustomed to regard the mechanical conditions which correspond to small values of t , as, so to speak, the *cause* of those which correspond to greater values, and to picture the changes of configuration as following one another in definite order with the varying time, that we find ourselves at a loss for a mechanical representation when t , by being supposed complex, becomes capable of two degrees of variation.

To avoid this difficulty as far as possible, let us suppose t no longer capable of varying in every direction in the parallelogram of periods, but only along a line parallel to the real axis. In other words, in $t = t_1 + it_2$, let us regard t_2 as constant in each particular case, and t_1 as alone varying. In this manner, by subsequently giving t_2 all possible values, we may take into account all possible complex values of t , but we conceive them as ranged along the ∞^1 parallels to the real axis. Regarded thus, the Riemann surfaces $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\delta}$ become carriers of certain curve systems, and the system of ∞^2 axes is distributed among ∞^1 ruled surfaces.

In this manner we separate the totality of the positions of the top in complex time into an infinite number of simply infinite sets of positions. These sets of positions are characterized not only by the initial values of t , but by the values of the constants of integration, which must have been introduced had the reckoning which we have merely sketched been actually carried out. It should perhaps have been stated earlier that in the interest of complete generality these constants must now be supposed complex, for we are now operating in the domain of complex numbers. Moreover, only by supposing them complex shall we have constants enough at our disposal to meet all the conditions of our generalized problem of motion.

So far our figures have been constructed with a view to obtaining a clear geometrical representation of the entire content of our analytical formulas. But their chief interest lies in this: that one can give them



a *real* dynamical meaning, that one can find a real mechanical system by whose motions they may be generated. I assert that *one can determine a certain free mechanical system, namely, a rigid body freely moving in non-Euclidean space under the action of certain definite forces, which in real time carries out exactly that infinity of forms of motion which we have just been describing, the one or other of them according to the choice made of the initial conditions of motion.* The mechanical system is a generalized one, but it belongs to the domain of real dynamics.

Let us consider the general problem of the motion of a rigid body under the action of any forces, in the non-Euclidean space whose absolute is the surface:

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0.$$

The earliest investigation of the motion of a rigid body in non-Euclidean space was made by Clifford in 1874 — though the investigation was not published until after his death, in his collected works. The same problem has been considered also by Heath in the *Philosophical Transactions*, 1884. Both these mathematicians, however, have treated the case of the elliptic non-Euclidean geometry, not the hyperbolic, and have contented themselves with establishing the differential equations of the problem.

I shall proceed analytically, as this method is more readily understood by one who is not well versed in non-Euclidean geometry, and immediately obtain differential equations for the motion of a certain rigid body in non-Euclidean space perfectly analogous to the equations for the motion of the top in real time, but involving two sets of variables.

To have the general case before us at once, I suppose the parameters q , ψ , ϑ , and the time t , all complex and set

$$q = q_1 + i q_2, \quad \psi = \psi_1 + i \psi_2, \quad \vartheta = \vartheta_1 + i \vartheta_2, \quad t = t_1 + i t_2.$$

These parameters are connected with T and V , the kinetic and potential energy, by the well-known Lagrange equations:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}'} \right) = \frac{\partial (T-V)}{\partial q}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}'} \right) = \frac{\partial (T-V)}{\partial \psi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}'} \right) = \frac{\partial (T-V)}{\partial \vartheta}.$$

In these equations set

$$T = T_1 + i T_2, \quad V = V_1 + i V_2.$$

Since, then,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}'} &= \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_1'} + i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_2'}, \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_1'} - i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_2'}, \end{aligned}$$

and similarly,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1'} = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_1'} - i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_2'}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1'} = \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\psi}_1'} - i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{\psi}_2'};$$

and since, furthermore, by our hypothesis, $dt = dt_1$, the first of our equations breaks up into the two equations involving real variables only.

$$\frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\vartheta}_1'} \right) = \frac{\partial (T_1 - V_1)}{\partial \vartheta_1}, \quad \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\vartheta}_2'} \right) = \frac{\partial (T_1 - V_1)}{\partial \vartheta_2};$$

and the remaining two equations behave similarly.

Thus, every real mechanical problem again reduces to a real problem when the variables are made complex, provided the real part only of the complex t be supposed to vary, but the problem of a motion involving twice the number of variables.

Applying this general conclusion to the particular question before us, it is evident without any further discussion that the problem of the motion in complex time of a top whose point of support is fixed is changed into a problem of real dynamics; the problem of the non-Euclidean motion of a rigid body. This motion has six degrees of freedom instead of three, corresponding to the six parameters, ϑ_1 , ϑ_2 , φ_1 , φ_2 , ψ_1 , ψ_2 , and its kinetic and potential energy are T_1 and V_1 , the real parts of the complex T and V .

But what is the rigid body, and what the force producing the motion? We shall content ourselves with simply answering these questions without entering upon the considerations appertaining to non-Euclidean geometry by which our conclusions are reached.

The equation of the absolute being

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,$$

the integral

$$\int \frac{(u x + v y + w z - \omega t)^2}{(u^2 + v^2 + w^2 - \omega^2)(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)} dm,$$

evaluated throughout any body in the corresponding non-Euclidean space, is called the "second moment" of the body with respect to the plane whose coordinates are u , v , w , ω . In the particular case before us this integral, when evaluated, will be equal to 1, independently of the values of u , v , w , ω .

Remembering that u , v , w , ω are constants with respect to the integration, the result may be written

$$\frac{A u^2 + 2 B u v + \dots}{u^2 + v^2 + w^2 - \omega^2}, \quad \text{which therefore} = 1.$$

Now the surface whose equation in tangential coordinates is

$$A u^2 + 2 B u v + \dots = 0$$

is called the "null-surface". In the case before us, therefore, the null-surface coincides with the absolute. This is the rigid body of our non-Euclidean motion.



The force producing the motion may be defined as follows: In the figure (Fig. 9) let g represent the fixed axis of gravitation (through the point of support of the top), r the axis of the top, and p the non-Euclidean perpendicular common to g and r . The angle between g and r is then defined as $\vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2$, where ϑ_1 represents the angle between the planes gp and rp , and $i\vartheta_2$ in non-Euclidean angular measure is the distance p .

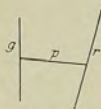


Fig. 9.

The force is then the wrench represented in intensity by $P \cdot \sin \vartheta$, of which the real part represents the rotating force acting about p and the imaginary part represents the thrust along p .

In conclusion, allow me to remark once again that this non-Euclidean geometry involves no metaphysical consideration, however interesting such considerations may be. *It is simply a geometrical theory which groups together certain geometrical relations in real space in a manner peculiarly adapted to their study.*

Lecture IV.

In the latter part of yesterday's lecture we ventured a little way into what Professor Newcomb has called the "fairlyland of mathematics". Ignoring the limitation of the top's motion to real time, we gave full play to our purely mathematical curiosity. And there can be no doubt that it is proper and indeed necessary within due limits to proceed after this manner in all such investigations as that now before us. It is possible only thus to develop a strong and consistent mathematical theory. But we should not yield ourselves wholly to the charm of such speculations, but rather control them by being ever ready to return to the actual problems which nature herself proposes.

We turn again to-day, therefore, to the real top, and proceed to investigate its motion when the point of support is no longer fixed, but movable in the horizontal plane. This is the case of the *ordinary toy top*¹³⁾.

It has been well known since the time of Poisson that the differential equations of this motion can be integrated in terms of the hyper-elliptic integrals. And it is the main purpose of my present lecture to show that *these integrals may be treated in a manner quite analogous to that in which the elliptic integrals were treated, by aid of the general "automorphic functions", of which the elliptic functions are a special class.*

The "toy top" has five degrees of freedom of motion, two of them relating to the horizontal displacement of the centre of gravity, and the

¹³⁾ [Wegen Aufstellung der Bewegungsgleichungen vgl. Kreisbuch, Heft III, Anhang zu Kapitel VI.]

other three to the motion around this centre. The horizontal motion of the centre of gravity is very simple, being, as is well known, a rectilinear motion of constant velocity. Consequently, no essential restriction of the problem is involved in assuming the horizontal projection of the centre of gravity to be a fixed point. By this assumption the problem is again reduced to one of three degrees of freedom only, and we have besides t no other variables to consider than the parameters φ , ψ , ϑ or α , β , γ , δ of the previous discussion — the parameters here defining the position of the top with respect to axes through its centre of gravity.

To obtain first the ordinary formulas which define the motion in terms of the astronomical parameters: let G represent the weight of the top, s the distance of its centre of gravity from the point of support, and again represent the product Gs , *i.e.* the static moment, by P . Also, for the sake of simplicity, let us again suppose that the three principal moments of inertia of the top, in this case with respect to the axes through its centre of gravity, are all equal to 1.

Then the kinetic energy, T , and the potential energy, V , are given by the following equations: *viz.*

$$T = \frac{1}{2}(\varphi'^2 + \psi'^2 + 2\varphi'\psi' \cdot \cos \vartheta + \vartheta'^2 + Ps \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \vartheta'^2), \quad V = P \cos \vartheta,$$

which differ from the corresponding expressions in the special case where the point of support is fixed only in the appearance of the additional term $Ps \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \vartheta'^2$ in T . As this term will disappear if $s = 0$, though we take Gs , *i.e.* P , different from zero, the elementary case may be described from the present point of view as that of a top of infinite weight whose centre of gravity coincides with its point of support.

On substituting these values for T and V in the first two Lagrange equations,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \varphi'} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \psi'} = 0,$$

we obtain immediately, as before, the two algebraic first integrals

$$\begin{aligned} \varphi' + \psi' \cos \vartheta &= n, \\ \psi' + \varphi' \cos \vartheta &= l. \end{aligned}$$

If from these last equations we reckon out φ' and ψ' , and substitute the resulting values in the integral of energy

$$T + V = h,$$

we obtain t , φ and ψ in the form of integrals in terms of the variable ϑ .

As before, we set $u = \cos \vartheta$, and

$$U = 2Pu^3 - 2hu^2 + 2(ln - Pu)u + (2h - l^2 - n^2),$$



when these integrals become

$$t = \int \frac{du \sqrt{(1+Ps) - Psu^2}}{\sqrt{U}},$$

$$q = \int \frac{n - tu}{1 - u^2} \frac{du \sqrt{(1+Ps) - Psu^2}}{\sqrt{U}},$$

$$\psi = \int \frac{l - nu}{1 - u^2} \frac{du \sqrt{(1+Ps) - Psu^2}}{\sqrt{U}}.$$

These formulas differ from the corresponding formulas for the elementary case in that the new irrational factor $\sqrt{(1+Ps) - Psu^2}$ here appears in the numerator of each integrand. In consequence, we have now to do with hyperelliptic integrals, $p=2$. In addition to the former branch-points of the Riemann surface in the u -plane, viz. e_1, e_2, e_3, e_4 , two new real branch-points appear, viz.:

$$u = \pm \sqrt{\frac{1+Ps}{Ps}}.$$

I shall call them e_4, e_6 , and assume them to be numerically greater than e_3 . The Riemann surface is therefore a surface of two sheets with six branch-points $e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_6$, ranged along the real axis of the u -plane, as indicated in the following figure:

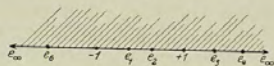


Fig. 10.

In addition to the branch-points, I have indicated the positions of the points $+1, -1$, since these particular values of u , corresponding to $\vartheta=0, \vartheta=\pi$, play, as in the elementary case, a special rôle in our discussion.

The time t is no longer an integral of the first kind; that is to say, an integral which remains finite for all values of u , but an integral of the second kind, which becomes infinite for $u = \infty$, as $\sqrt{-2su}$. An integral of the second kind, it may be added, is one having a point of algebraic discontinuity only. The integrals q and ψ , on the other hand, have each of them, as before, four logarithmic points of discontinuity; namely, the four points $u = \pm 1$ of the Riemann surface.

The first step to be taken is to replace the integrals q and ψ by normal hyperelliptic integrals of the third kind; that is, by integrals possessing each but two logarithmic points of discontinuity with the residues $+1$ and -1 . This is accomplished precisely as in the ele-

mentary case, by introducing $\log a, \log \beta, \log \gamma, \log \delta$. As before, these prove to be normal integrals of the third kind, each having a logarithmic discontinuity (with the residue $+1$) at one of the points $u = \pm 1$, and all having a second logarithmic discontinuity in common (with the residue -1) at the point $u = \infty$. This follows at once from the result of the reckoning if it be noticed that the expression $(1+Ps) - Psu^2$ reduces to 1 for $u = \pm 1$.

It is evident, therefore, that the parameters a, β, γ, δ play the same fundamental rôle here as in the case of the top whose point of support is fixed. And in the following discussion we shall no longer use q and ψ , but a, β, γ, δ . These variables possess on the Riemann surface a 0-point each at one of the four points $u = \pm 1$, and a common ∞ -point at $u = \infty$. I have not thought it necessary to enter into the details of this reduction, as it is so completely analogous to the reduction in the more elementary case.

But when we attempt to repeat the next step of the previous discussion, and endeavor, by inverting the hyperelliptic integral t , so assign to t the rôle of independent variable, we find at once that there is a profound difference between our present problem and the previous more special problem. This difference is masked when we confine our attention to the top's motion in real time. For as t varies, remaining always real, the value of u vibrates as before between the values e_1 and e_2 , while q and ψ are each increased by real periods. The difference comes to light, however, as soon as, allowing t to take complex values, we proceed to construct in the t -plane the image of the Riemann surface. As the image of a half-sheet of this surface, we have now, instead of the simple rectangle of the elementary case, an open hexagon with one of its angular points at infinity, as in the following figure, and when by the methods of symmetrical and congruent reproduction, we go on to construct from this figure the image of the entire Riemann surface, we at once encounter the difficulty that this image will cover the t -plane not simply, as in the elementary case, but rather with an infinite number of overlapping hexagonal pieces. To a single point in the t -plane, therefore, will correspond not one, but an infinite number of values of u , that is to say, u is no longer a uniform function of t .

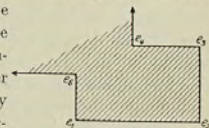


Fig. 11.

I may remark that it is often said that the inversion of the hyperelliptic integrals is impossible. This is not true; it is not impossible to invert them, but to get uniform functions by the process.



There is a well known method of generalizing the result of inverting the elliptic integrals and obtaining functions, "hyperelliptic functions", as they are called, which are in a proper sense the generalization of the elliptic functions. The method is due to Jacobi, and goes by his name.

There are two hyperelliptic integrals of the first kind in the case before us:

$$v_1 = \int \frac{du}{\sqrt{U \cdot \sqrt{1 + Ps - P_s u^2}}},$$

$$v_2 = \int \frac{u \cdot du}{\sqrt{U \cdot \sqrt{1 + Ps - P_s u^2}}}.$$

Jacobi forms double ϑ -functions of v_1, v_2 , viz. $\Theta(v_1, v_2)$, in terms of which he seeks to express the other variables as uniform functions. This is, perhaps, the greatest achievement of Jacobi, and for general investigations of the highest importance, but it promises us little aid in the problem which we are considering. To avail ourselves of it, we should need first to develop a method for determining what values of v_1, v_2 correspond to the same value of t . We are therefore reduced to the direct computation of hyperelliptic integrals if we wish to avoid the complicated equation for v_1 and v_2 which results if we eliminate t .

Is it possible, then, by any means whatsoever, to obtain for the general motion of the top formulas analogous to those which we succeeded in establishing for the top whose point of support was fixed? Yes, by availing ourselves of the *theory of the uniform automorphic functions*¹⁴).

A uniform automorphic function of a single variable η is a function $f(\eta)$, which satisfies the functional equation

$$f\left(\frac{a_r \eta + b_r}{c_r \eta + d_r}\right) = f(\eta),$$

where a_r, b_r, c_r, d_r have given constant values for each of the values of $r: 1, 2, 3, \dots, \infty$ — for all of which the functional equation is satisfied.

The automorphic functions, therefore, are functions which are transformed into themselves by an infinite but discontinuous group of linear substitutions. They are the generalization of the elliptic functions which consists in generalizing the periodicity of these functions, but leaving the number of the variables unchanged, while Jacobi's hyperelliptic functions are a generalization which consists in increasing the number of variables, but leaving the periodicity unchanged.

¹⁴) [Über die Theorie der allgemeinen automorphen Funktionen vgl. meine Abhandlung in Bd. 21 der Math. Annalen (1883) „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie“ = Abh. CIII in Bd. 3 dieser Ausgabe. K.]

I shall present what I have to say regarding them geometrically. And, indeed, the general notion of these automorphic functions, as well as the knowledge of their most important properties, originated from geometrical considerations, and geometrical considerations only. Even now the analytical details of the theory have been only partially developed.

Our problem, as we are now to conceive of it, is this: to define a variable η , of which $t, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ shall be uniform automorphic functions, as were $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ of t itself in the elementary case.

To revert to the elementary case — the fact that t was itself a "uniformizing" variable, i.e. a variable of which u was a uniform function, was brought to light by finding that when the image in the t -plane of a single half-sheet of the Riemann surface on the u -plane was reproduced by symmetry and congruence, this image covered the t -plane simply. May we not, then, construct in the plane of a variable η a rectangular hexagon which shall be the image in the η -plane of a half-plane u , and which on being reproduced shall cover the η -plane or a portion of it simply, and then subsequently, from a study of the conditions which determine this hexagon, derive in definite analytical form the functional relation between η and u ?

It is in fact possible, as the theory of automorphic functions shows, to construct such a rectangular hexagon, and that in essentially but one way. Its sides are not line segments, but arcs of circles which themselves cut the real axis of the η -plane at right angles. It has the following form:

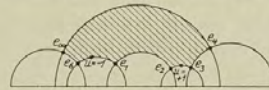


Fig. 12.

The mere geometrical requirement that the figure be made up of arcs of circles which cut the real axis orthogonally, and cut each other orthogonally also at the six points $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$, is of course not enough to determine it completely. There are a certain number of parameters which remain undetermined, and which are to be so determined that the hexagon is an actual conformal representation of the half u -plane with the given branch-points e_1, e_2, \dots, e_6 . The fundamental theorem of the theory of automorphic functions declares that this can be accomplished in one, and essentially but one, way.

Having determined the image of the one half-sheet of the Riemann surface on the u -plane, the infinitely many remaining images are to be had by constructing the figure into which the original image is trans-



formed by inversion with respect to each circle of which one of its sides is an arc, by repeating the same construction for the resulting hexagons, and so on indefinitely.

By this process the entire upper half of the η -plane is simply covered without overlapping by rectangular hexagons, whose sides are circular arcs. Each of these hexagons is an image of a half-sheet of the Riemann surface. And if they be alternately shaded and left blank, the shaded ones are images of positive half-sheets, the blank ones of negative half-sheets of the surface.

Evidently, then, to a single point in the η -plane there corresponds but a single point in the Riemann surface, or u and \sqrt{U} are uniform functions of η . On the other hand, the points in two of the hexagons which correspond to the same value of u , \sqrt{U} , and may be called "equivalent points", are connected by a formula of the form $\eta' = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}$, as in the special elliptic case the corresponding points of two of the parallelograms of periods were connected by the formula

$$t' = t + 2m_1\omega_1 + 2m_2i\omega_2.$$

Thus u and \sqrt{U} are uniform automorphic functions, of η , satisfying the equation:

$$f(\eta) = f\left(\frac{a\eta + b}{c\eta + d}\right).$$

I may remark that Lord Kelvin made use of this sort of symmetrical reproduction more than fifty years ago in his researches on electrostatic potential. But his figures were solids bounded by portions of spherical surfaces, and his principal aim was so to determine these that only a finite number of other distinct solids should result from them by the process of reproduction.

Not only u and \sqrt{U} , but also $\sqrt{1 + Ps - P^2su^2}$, and again t , α , β , γ , δ , are uniform functions of our new variable η , functions, it may be added, which exist only in the upper half of the η -plane. Hence η is the uniformizing variable which we have been seeking, the variable which plays the rôle taken by t in our discussion of the special problem.

We turn therefore to the consideration of t , α , β , γ , δ , regarded as functions of η .

The variable t is affected *additively* by the linear substitutions of η which correspond to the successive reproductions of the figure; i.e. with every substitution it is increased by a constant. Moreover, it becomes infinite, and that simply infinite algebraically, at all those points of the η -plane which correspond to the point e_∞ of the u -plane, the points, namely, which are equivalent to the single angular point marked e_∞ in the hexagon of our figure.

On the other hand, α , β , γ , δ , are affected multiplicatively by the linear substitutions of η . Each becomes zero in one series of equivalent points, and that simply, and each becomes infinite, and that also simply, in another series of equivalent points.

The ∞ -points are the same as those for which t becomes infinite; the 0-points are the points on the perimeters of our hexagons which correspond to the four points $u = \pm 1$ of our original Riemann surface of two sheets on the u -plane. The two points corresponding to $u = +1$ we may name a' , a'' , and the two points corresponding to $u = -1$, b' , b'' , in such a manner that the series of equivalent 0-points of α , β , γ , δ , correspond respectively to a' , b' , b'' , a'' .

On this characterization of our functions t , α , β , γ , δ , we have now to base their analytical representation in terms of η . This is to be accomplished by means of the functions which in this more general case of the automorphic theory play the same fundamental rôle as the elliptic σ -functions in the more elementary case — the so-called *prime-forms*¹⁵⁾. The *prime-form* is not a function of η , but a homogeneous function of the first degree of η_1 , η_2 (where $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \eta$); like the elliptic σ -function, it vanishes at all of a certain series of equivalent points, and is nowhere infinite.

I use the name prime-form because all the algebraic integral forms belonging to the Riemann surface admit of being similarly expressed as products of suitably chosen prime-forms, just as in ordinary arithmetic integers as products of prime numbers. It may be added that these prime-forms are not completely determined quantities. They may be altered by certain factors, the exact expression of which here would cause too serious a digression.

If now we represent the prime-form whose zero-points are the series of equivalent points corresponding to the point m of the Riemann surface by the symbol $\Sigma(\eta_1, \eta_2; m)$ ¹⁶⁾, we have the following analytical representation of our functions t , α , β , γ , δ , viz.:

$$t = \frac{\Sigma'(\eta_1, \eta_2; e_\infty)}{\Sigma(\eta_1, \eta_2; e_\infty)},$$

$$\alpha = \frac{\Sigma(\eta_1, \eta_2; a')}{\Sigma(\eta_1, \eta_2; e_\infty)}, \quad \beta = \frac{\Sigma(\eta_1, \eta_2; b')}{\Sigma(\eta_1, \eta_2; e_\infty)},$$

$$\gamma = \frac{\Sigma(\eta_1, \eta_2; b'')}{\Sigma(\eta_1, \eta_2; e_\infty)}, \quad \delta = \frac{\Sigma(\eta_1, \eta_2; a'')}{\Sigma(\eta_1, \eta_2; e_\infty)}.$$

¹⁵⁾ (Über Primformen vgl. meine Arbeit in Bd. 36 der Math. Annalen (1890): „Zur Theorie der Abelschen Funktionen“ = Abb. XCVII in Bd. 3 dieser Ausgabe. K.)

¹⁶⁾ [Vgl. auch meinen ersten Aufsatz über hyperelliptische Sigmafunktionen in Bd. 27 der Math. Annalen (1886) = Abb. XCV in Bd. 3 dieser Ausgabe. K.]



And so we find here, as before, that the functions $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ prove to be the simplest elements for the representation of the top's motion. They are the simplest quotients of the elementary functions of the "hyper-elliptic body" which has replaced the "elliptic body" of our earlier discussion.

It may be remarked that these formulas at once reduce to $t = \eta$ and the previously obtained elliptic formulas on making the hypotheses $P \geq 0, s = 0$, which are equivalent to supposing the point of support fixed.

Moreover, it must be said that these expressions for $t, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ are only to be understood as having a formal significance. There is altogether lacking the actual determination of the constants left at our disposal by the definitions of the Σ 's, and which, it may be added, differs for the different Σ 's which appear in the formulas for $t, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

And with this we come upon the point at which this theory is still incomplete. The exact determination of the formulas, and in general the means of reckoning them out by practicable methods, are for the most part wanting. The theory of the automorphic functions which for a time was a matter of principal interest in the theory of functions has in recent years not attracted the attention nor found the support which it seems to deserve. *I have therefore the more gladly laid stress here on the fact that these are not only functions possessing a theoretical interest, but functions which necessarily present themselves if one will completely solve even the simplest problems of mechanics.*

Had we the time, we should find it interesting to consider the geometry of this more general case of the top's motion also.

I will, however, give the equation of the curve traced on the horizontal plane by the point of support. It is $x + iy = 2a\beta s$, as results from the formulas on page 623, by giving X, Y, Z the values of $0, 0, -s$, respectively. For the values of x and y depend on $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alone, these quantities, in the present case, conditioning the motion of the centre of gravity up and down its vertical, and no terms appearing in the expressions for x and y due to this motion.

And I may also make the general remark that in this geometrical study the non-Euclidean interpretation plays an important rôle. For while the curves traced by the apex, etc., have in real time a form quite similar to that in the case of the fixed point of support, the Riemann surface as described by the apex on the fixed sphere brings fully into evidence the difference between the elliptic and hyperelliptic characters of the two motions. Instead of the quadrilateral which was represented in Fig. 8 we should here have a hexagon.

LXXVI. On the Stability of a sleeping Top.

Abstract of a Lecture before the American Mathematical Society at the Princeton Meeting, October 17, 1896.

[Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 3 (1897).]

In the four lectures¹⁾ of the earlier part of the week I have attempted to simplify the formulæ for the motion of a top by turning to account the methods of the modern theory of functions. In treating this problem I have been largely influenced by the consideration that it is desirable on both sides to reinforce the relationships between pure mathematics and mechanics.

To-day I consider from the same standpoint a much more elementary question, which, however, for this very reason serves as a type for many related problems, viz., the stability of a top rotating about an axis directed vertically upward. The point of support we will assume to be fixed. If it were movable in a horizontal plane, the formulæ would be somewhat more complicated, but the final result would be quite similar to that in the special case²⁾.

When the rotation is very rapid the behavior of the top is as if its axis were held fixed by a special force. This idea was employed, for instance, by Foucault (1851); to regard it, however, as an independent mechanical principle, as is done in many presentations of the subject, is, of course, absurd.

The usual mode of attacking the problem is by means of the *method of small oscillations*. If x, y are the horizontal coordinates of the point of support of the top, n its rotational velocity, and P the moment of its weight, then, rejecting higher powers of x and y , we obtain the linear homogeneous differential equations with constant coefficients

$$\begin{aligned}x'' + ny' - Px &= 0, \\y'' - nx' - Py &= 0.\end{aligned}$$

¹⁾ Four lectures "On the theory of the top". [Vorstehend als Nr. LXXV abgedruckt.]

²⁾ [Zu dieser Abhandlung vgl. mein und Sommerfeldts Kreisbuch, Heft II, Kap. V, §§ 4, 5, 8, sowie die allgemeinen Erörterungen in §§ 6, 7 ebendasselbst. K.]



The terms in x' and y' in these equations are known as the gyroscopic terms. The solutions of the equations involve the characteristic exponent

$$\lambda = \frac{+in + \sqrt{4P - n^2}}{2}.$$

With respect to the form of this exponent two cases are customarily distinguished: the *stable* case, $n^2 > 4P$, and the *unstable* case $n^2 \leq 4P$, the conclusion then being drawn that in the former case actual oscillations take place about the position of equilibrium, while in the latter case the axis moves away indefinitely from the position of equilibrium.

For the stable case we obtain

$$x = a \cos \frac{nt}{2} \cdot \sin \sqrt{\frac{n^2 - 4P}{4}} t,$$

$$y = a \sin \frac{nt}{2} \cdot \sin \sqrt{\frac{n^2 - 4P}{4}} t,$$

where a is a constant of integration.

I will retain the designations „stable“ and „unstable“ for the cases $n^2 > 4P$ and $n^2 \leq 4P$, and will then examine whether the motion actually corresponds to the common use of these terms.

From the start this method of small oscillations lies open to severe criticism. In the so-called unstable case it is directly self-contradictory, since the quantities, which in the construction of the differential equation are assumed to be *small*, become after its integration *large*. There is no reason whatever, therefore, for regarding the results as an approximation to the actual conditions. Even in the stable case the method lacks an accurate basis.

Poincaré, in the corresponding questions of astronomy, carries out the development in series to higher terms. But, supposing that these series converge at all, will their region of convergence extend far enough so that the actual character of the motion can be deduced from them? In the case of the top we are relieved of the laborious investigation of this question, inasmuch as the complete integration can be carried out in explicit form.

I propose the following mode of treating the problem. For the sake of simplicity, the moments of inertia of the top about its principal axes are all assumed equal to 1. The axis, being originally vertical, let the polar angles at any time to be ϑ, ψ and let $\cos \vartheta = u$. The formulæ of integration are then

where

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}}, \quad \psi = n \int \frac{du}{(u+1)\sqrt{U}},$$

$$U = 2(u-1)(n^2 + (Pu - h)(u+1)).$$

The upper end of the axis (apex) of the top describes in all cases on the surface of the circumscribed sphere a rosette consisting of a number of congruent loops. This is still the case when $n = 0$, a loop being then identical with a great circle of the sphere. Our interest centres in the question, how *long* these loops are, *i. e.*, to what value $u = e$ does u diminish, beginning with $u = 1$. Here $u = e$ is that root of $U = 0$ which lies between $u = +1$ and $u = -1$. In order to obtain the width of the loops it would be necessary to discuss the integral ψ .

Introducing v to denote the value when $u = 1$ of the angular velocity $d\vartheta/dt$ of the axis of the top, this being equal to the measure of the lateral impulse by which the axis is carried out of the vertical position, we have from $U = 0$, on writing e for u ,

$$v^2 = \frac{(1-e)(n^2 - 2P(e+1))}{e+1}.$$

When e and v are rectangular coordinates, this equation properly interpreted, represents a plane cubic, symmetric to the axis of e , with a vertical tangent at $e = 1, v = 0$, and having $e + 1 = 0$ as an asymptote. This curve has a certain difference of position according as

$$n^2 - 4P > 0 \quad \text{or} \quad n^2 - 4P < 0,$$

(the case $n^2 - 4P = 0$ may be disregarded for the sake of brevity). In the former (stable) case, the odd branch of the curve passes through $e = +1, v = 0$, while in the latter (unstable) case, it is the even branch which passes through this point.

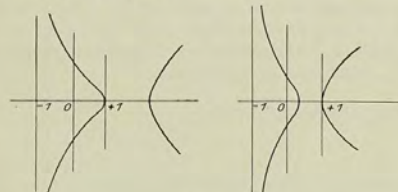


Fig. 1.

In both cases it is the odd branch which is of account for the real motion of the top since $u = \cos \vartheta$ lies, for real ϑ , between -1 and $+1$. In both cases, too, the difference $1 - e$, *i. e.*, the length of the loops of the rosette, diminishes with v .

The characteristic distinction between the two cases is this: that for $n^2 - 4P > 0$, the difference $1 - e$ diminishes with v to 0, while if



$n^2 - 4P < 0$ this difference never passes a certain lower limit different from 0. Accordingly, in the unstable case, the loops of the rosette take at once a certain finite length even for the smallest lateral impulse given the top.

Theoretically, this furnishes a sharp distinction between the two cases; practically, however, this may become unnoticeable, if $n^2 - 4P$ while < 0 , becomes very small in absolute value. The rosette in the unstable case can become as small as we please; and given a stable rosette, a proper choice of the constants n and v will give for the unstable case a rosette *smaller* than the stable one.

Our result is therefore discordant with the common acceptation of the terms „stable“ and „unstable“. Besides that it does not substantiate the pretensions of the method of small oscillations. If the apex of the top in an unstable case describes a „small“ rosette, why does not this fact appear from the method of small oscillations?

The answer to this last question will be apparent, if we introduce the quantity e in the integral t :

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2(u-e)(1-u)}{1+e}(n^2 - 4P - P(u-1)(e-1) + 2(u-1) + 2(e-1))}}$$

The method of small oscillations neglects in the parenthesis

$$n^2 - 4P - P(u-1)(e-1) + 2(u-1) + 2(e-1)$$

the terms containing $u-1$ and $e-1$ in comparison with $n^2 - 4P$. This is admissible when and only when $u-1$ and $e-1$ being small, $n^2 - 4P$ is *not small*, — and therefore those cases, stable or unstable, where $n^2 - 4P$ is itself a small quantity are incapable of approximate treatment by the method of small oscillations.

Princeton, October 18, 1896.

[In den drei Arbeiten Nr. LXXIV—LXXVI zur Kreiseltheorie, die hier vorangehen, werden nur einige rein mathematische Resultate, welche ich bezüglich derselben fand, mitgeteilt. Es ist bereits auf S. 509 gesagt, daß der eigentliche Anlaß zur Beschäftigung mit der Kreiseltheorie für mich ein anderweitiger war, wie denn auch die Entwicklungen in dem von Sommerfeld und mir bearbeiteten Kreiselbuch eine ganz andere Tendenz verfolgen, als die hier wieder abgedruckten Aufsätze. In dem Bemühen, mit den Technikern und ihrem Unterricht nähere Fühlung zu nehmen, war ich im Herbst 1895 bei der Jahresversammlung des Vereins Deutscher Ingenieure in Aachen gewesen und hatte danach den Direktor Holzmüller in Hagen, der damals in der Ausgestaltung des Fachschulwesens eine hervorragende Rolle spielte, besucht. Hier kam mir der Gedanke, durch eine eingehende Vorlesung über ein spezielles mechanisches Problem, eben die Kreiseltheorie, die mir gelaufenen theoretischen Betrachtungen mit den Bedürfnissen physikalischen und technischen Verständnisses in Verbindung zu setzen. Von da aus habe ich im Winter 1895/96 eine übrigens nur zwei-stündige Vorlesung über den Kreisel gehalten, an die sich im Sommer 1896 eine vier-stündige Vorlesung über allgemeine Fragen der technischen Mechanik anschloß. Aus dieser Entstehungsweise ist die eigentümliche Disposition des (später namentlich von Sommerfeld ausgeführten) Kreiselbuches zu erklären. Ich fange mit der Behandlung der kinematischen Fragen mit Hilfe der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ an, um mich allmählich davon abzulösen und immer mehr konkreten Fragen zuzuwenden. Das letzte (vierte) Heft, das erst 1910 erschien und seine endgültige Gestalt durch Fritz Noether empfing, ist ausschließlich den technischen Anwendungen gewidmet, die sich wesentlich in der Zwischenzeit entwickelt hatten, und macht von dem zu Anfang herangebrachten theoretischen Rüstzeug kaum noch Gebrauch. So enthält das Buch, dessen Erscheinen sich auf einen Zeitraum von 13 Jahren verteilt, sehr verschiedenartige Kapitel. Ich verweise gern auf die geophysikalischen und astronomischen Ausführungen, die wesentlich Sommerfeld in Heft III eingearbeitet hat, insbesondere aber auf die Besprechung und Kritik der in der physikalischen Literatur vorkommenden äußerst ungenügenden Darstellungen (der sogenannten populären Erklärungen) der Kreiselerscheinungen in Heft II. In meiner Vorlesung wurden alle diese Betrachtungen mit Experimenten begleitet; auch die Einführung der elliptischen Funktionen bis hin zur wirklichen Berechnung der Kreiselbewegung, die dann Sommerfeld weiter ausführte (Heft II), schien bei den Zuhörern Beifall zu finden. Übrigens findet man eine reiche Auswahl weiterer elementarer Angaben zur Kreiseltheorie in dem Artikel von Stäckel in Bd. IV 1 der math. Enzyklopädie (Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper, 1907/08). K.]

tungen mit den Bedürfnissen physikalischen und technischen Verständnisses in Verbindung zu setzen. Von da aus habe ich im Winter 1895/96 eine übrigens nur zwei-stündige Vorlesung über den Kreisel gehalten, an die sich im Sommer 1896 eine vier-stündige Vorlesung über allgemeine Fragen der technischen Mechanik anschloß. Aus dieser Entstehungsweise ist die eigentümliche Disposition des (später namentlich von Sommerfeld ausgeführten) Kreiselbuches zu erklären. Ich fange mit der Behandlung der kinematischen Fragen mit Hilfe der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ an, um mich allmählich davon abzulösen und immer mehr konkreten Fragen zuzuwenden. Das letzte (vierte) Heft, das erst 1910 erschien und seine endgültige Gestalt durch Fritz Noether empfing, ist ausschließlich den technischen Anwendungen gewidmet, die sich wesentlich in der Zwischenzeit entwickelt hatten, und macht von dem zu Anfang herangebrachten theoretischen Rüstzeug kaum noch Gebrauch. So enthält das Buch, dessen Erscheinen sich auf einen Zeitraum von 13 Jahren verteilt, sehr verschiedenartige Kapitel. Ich verweise gern auf die geophysikalischen und astronomischen Ausführungen, die wesentlich Sommerfeld in Heft III eingearbeitet hat, insbesondere aber auf die Besprechung und Kritik der in der physikalischen Literatur vorkommenden äußerst ungenügenden Darstellungen (der sogenannten populären Erklärungen) der Kreiselerscheinungen in Heft II. In meiner Vorlesung wurden alle diese Betrachtungen mit Experimenten begleitet; auch die Einführung der elliptischen Funktionen bis hin zur wirklichen Berechnung der Kreiselbewegung, die dann Sommerfeld weiter ausführte (Heft II), schien bei den Zuhörern Beifall zu finden. Übrigens findet man eine reiche Auswahl weiterer elementarer Angaben zur Kreiseltheorie in dem Artikel von Stäckel in Bd. IV 1 der math. Enzyklopädie (Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper, 1907/08). K.]



LXXVII. Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme. mit besonderer Berücksichtigung der Maxwell'schen Arbeiten.

[Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe, Bd. 8 (1904.)]

Von F. Klein und K. Wieghardt¹⁾.

Disposition.

§ 1. Über Airy'sche Spannungsflächen ebener Kontinuen.	Seite
1. Allgemeines über Spannungsfunktionen und Spannungsflächen	661
2. Spezielle Spannungsflächen ($\Delta \Delta F = 0$, $\Delta F = 0$, abwickelbare Flächen)	663
3. Besondere Betrachtung von $\Delta \Delta F = 0$ plus abwickelbaren Flächen (Elastizitätsaufgabe)	664
4. Balkenprobleme als Beispiele hierzu	668
§ 2. Über Spannungsflächen ebener Diskontinuen (Fachwerke).	
1. Allgemeines (Äquivalenz der Gleichgewichtsbedingungen und der Existenz einer Spannungsfläche, analog wie beim Kontinuum)	669
2. Anwendung auf Dreieckfachwerke	674
3. Ein- und mehrwertige Spannungsflächen (sich überdeckende Fachwerke, „mehrfach-zusammenhängende“ Fachwerke, Raumpolyeder als Spannungsflächen und affin-periodische Spannungsflächen)	675
§ 3. Über reziproke Figuren und Diagramme.	
1. Strecken, polare Vektoren, transversale Vektoren, Flächenstücke und Plangrößen als Mittel, Spannungen darzustellen	679
2. Die Maxwell'schen Formeln für reziproke Figuren und ebene reziproke Diagramme. (Darstellung der Spannungen in einer Ebene durch transversale Vektoren)	681
3. Besondere Betrachtung der Fachwerkdigramme (Raumpolyeder als reziproke Figuren in ihrer Bedeutung für die Fachwerkstatik, Kräftepläne, Kräftepläne mehrfach-zusammenhängender Fachwerke, Maxwell'scher und Cremona'scher Kräfteplan)	683
4. Geometrische Einführung räumlicher reziproker Diagramme (reziproke Zellsysteme, Beispiel solcher Zellsysteme)	686
§ 4. Einiges über räumliche Spannungssysteme und zugehörige Spannungsfunktionen.	
1. Zwei Maxwell'sche Verallgemeinerungen des Airy'schen Ansatzes	688
2. Inhalt der Formeln und ihre Analogie zu den Formeln bei 2 Dimensionen	689
3. Mechanische Deutung der reziproken Zellsysteme und Schlusswort	691

¹⁾ Nach einem von F. Klein in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft am 7. Juli 1903 gehaltenen Vortrage weiter ausgearbeitet von K. Wieghardt.

Das Folgende ist ein freies Referat über J. C. Maxwell's Abhandlungen über Fachwerke, reziproke Figuren und Diagramme²⁾ und zwar wesentlich über die unten an letzter Stelle genannte. Von der Darstellung bei Maxwell selbst wird sehr abgewichen, auch werden Resultate mitgeteilt, welche sich bei ihm noch nicht vorfinden und welche, soweit nichts Besonderes vermerkt ist, von F. Klein herrühren.

Die Veranlassung zu der vorliegenden Abhandlung bildet das Enzyklopädiereferat von Herrn Henneberg: *Über die graphische Statik der starren Körper*³⁾. In diesem konnten die Maxwell'schen Arbeiten naturgemäß nur kurze Erwähnung finden, während es doch wünschenswert schien, aus ihnen — die schwer lesbar sind — den wesentlichen Inhalt in etwas ausführlicherer Fassung herauszuziehen und zugleich einige Ideen zu erörtern, die sich an die Maxwell'schen organisch anschließen.

§ 1.

Über Airy'sche Spannungsflächen ebener Kontinuen.

1. Wenn ein ebenes Kontinuum *Spannungen* mit den Komponenten P, Q, U (Fig. 1) überträgt, so verlangt bekanntlich das statische Gleichgewicht an der einzelnen Stelle das Bestehen der beiden Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

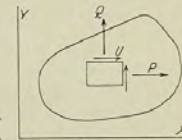


Fig. 1.

sofern äußere Kräfte nur am Rande des Kontinuums, nicht aber im Innern angreifen. Schon Airy⁴⁾ hat bemerkt, daß diese Gleichungen nichts weiter aussagen, als daß P, Q, U sich in der durch die Gleichungen

²⁾ *The scientific papers of J. C. Maxwell*:

- a) Bd. I, S. 514—525: On reciprocal figures and diagrams of forces. London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. Bd. 27 (4); S. 250 (1864).
- b) Bd. I, S. 598—604: On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Phil. Mag. Bd. 27 (4); S. 294 (1864).
- c) Bd. II, S. 102—104: On reciprocal diagrams in space and their relation to Airy's function of stress. Proc. London Math. Soc. Bd. 2.
- d) Bd. II, S. 492—497: On Bow's method of drawing diagrams in graphical statics etc. Camb. Phil. Soc. Proc. Bd. 2, S. 407 (1876).
- e) Bd. II, S. 647—659: Diagrams. Encyclopaedia Britannica.
- f) Bd. II, S. 161—207: On reciprocal figures, frames and diagrams of forces. Trans. Royal Soc. Edinburgh Bd. 26, S. 1 (1872).

³⁾ Enzyklopädie d. mathematischen Wissenschaften IV. 1 (abgeschlossen 1903).

⁴⁾ Airy: On the strains in the interior of beams. Phil. Trans. 1863 (erschienen 1864), Bd. 153.



$$(2) \quad P = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad Q = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad U = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

gegebenen Weise durch die zweiten partiellen Differentialquotienten einer Funktion $F(x, y)$ ausdrücken lassen; wir werden daher eine Funktion $F(x, y)$ mit dieser Bedeutung eine „Airysche Funktion“ oder „Spannungsfunktion“ nennen. Es läßt sich von vornherein vermuten und wird sich auch zeigen, daß die Spannungsfunktion bei ebenen Spannungsproblemen eine zentrale Rolle spielt.

Um hierüber gleich ein wenig zu orientieren, wollen wir sofort mit Maxwell auch die längs eines Bogenstückes (ab) unseres Kontinuums resultierenden Spannungen mit der Spannungsfunktion in Verbindung bringen. Auf das Bogenelement ds (Fig. 2) kommt die Spannung mit den Komponenten:

$$(3) \quad \begin{cases} X ds = P dy - U dx = d \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right], \\ Y ds = -Q dx + U dy = -d \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right], \\ (yX - xY) ds = d \left[x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right], \end{cases}$$

also auf das Bogenstück (ab) die resultierende Spannung:

$$(4) \quad \begin{cases} X_r = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_b - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_a, & Y_r = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_b + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_a, \\ M_r = \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right)_b - \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} - F \right)_a. \end{cases}$$

Dabei sind die Vorzeichen so gewählt, daß in dem von uns gewählten Koordinatensystem der Fig. 2 X_r, Y_r, M_r die resultierende Spannung in ihrer Wirkung auf denjenigen Teil des Kontinuums darstellt, welcher an der linken Seite eines von a nach b auf dem Bogenstücke (ab) Fortschreitenden liegt.

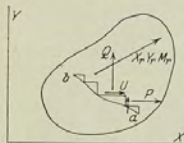


Fig. 2.

Ein weiteres Merkmal für die Wichtigkeit der Spannungsfunktion ist es, daß ihre Existenz unabhängig von den speziellen physikalischen Eigenschaften des Kontinuums ist, daß diese sich nun aber doch in der Art von F widerspiegeln, und zwar so, daß die physikalischen Eigenschaften des Kontinuums Eigenschaften der Spannungsfunktion bedingen und umgekehrt.

Es ist daher fast selbstverständlich, daß wir uns eine so wichtige Funktion durch Betrachtung der Fläche:

$$(5) \quad z = F(x, y)$$

geometrisch veranschaulichen; die Z -Achse stehe senkrecht auf der Ebene

des Kontinuums. Wir nennen diese Fläche naturgemäß „Airysche Fläche“ oder „Spannungsfäche“; daß sie vom Koordinatensystem unabhängig ist, ist leicht einzusehen, mag aber ausdrücklich erwähnt werden.

2. Betrachten wir nun einmal einige physikalisch verschiedenartige Kontinuen, bez. Spannungsfächen, welche verschiedenartige Eigenschaften haben!

Es handle sich erstens um eine *homogene, elastisch-isotrope Platte*, dann bestehen zwischen den Spannungskomponenten und den elastischen Deformationen („stress“ und „strain“) die bekannten Beziehungen:

$$(6) \quad \begin{cases} P = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \\ Q = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ U = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{cases}$$

wo λ, μ zwei dem Material des Kontinuums individuelle Konstante sind. Wenn man aus diesen Gleichungen durch Differentiation die Deformationsgrößen eliminiert und die Gleichungen (2) berücksichtigt, so bleibt für die Spannungsfunktion folgende Bedingung übrig:

$$(7) \quad \Delta \Delta F = 0,$$

wo in üblicher Weise

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ist. Soll also eine Fläche: $z = F(x, y)$ Airysche Fläche einer homogenen elastisch-isotropen Platte sein, so muß sie jedenfalls die Differentialgleichung: $\Delta \Delta z = 0$ befriedigen⁹⁾.

Zweitens betrachten wir einen speziellen *elektrostatischen Spannungszustand* im Äther, indem wir in den Formeln auf Seite 147 in Maxwells „Electricity“ die dort stehende Funktion Ψ dahin spezialisieren, daß sie nur von x und y , nicht von z abhängt. Wir haben dann in einer Ätherebene den Spannungszustand:

$$(8) \quad \begin{cases} P = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right], \\ Q = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right], \\ U = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \end{cases}$$

⁹⁾ Dieses Resultat scheint zuerst Herr Michell gefunden zu haben, J. H. Michell, *On the direct determination of stress in an elastic solid*, etc. Proc. London Math. Soc. Bd. 31 (1900).

¹⁰⁾ J. C. Maxwell, *A treatise of electricity and magnetism*. 1. Bd. 2. Aufl. Oxford 1881.



wobei Ψ eine der Bedingung $\Delta\Psi = 0$ genügende Funktion ist. Da $P + Q = 0$, so folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen (2) sofort: *Soll eine Fläche $z = F(x, y)$ als Spannungsfäche zu dem elektrostatischen Spannungszustand der Gleichungen (8) gehören, so muß sie jedenfalls die Differentialgleichung: $\Delta z = 0$ befriedigen*; (im übrigen hängen F und Ψ durch die Formel: $F = - \iint \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\Psi}{\partial y} dx dy$ zusammen).

Endlich wollen wir untersuchen, welcher Art die Spannungsverteilung eines ebenen Kontinuums ist, wenn die zugehörige Spannungsfäche ein Stück einer *abwickelbaren Fläche* ist, von dem wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß es einwertig und singularitätenfrei ist. Ist $z = F(x, y)$ seine Gleichung und legen wir die XZ -Ebene durch eine seiner Erzeugenden, so sind natürlich längs dieser Erzeugenden $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ konstant, also: längs der X -Achse als der Projektion der Erzeugenden auf die XY -Ebene ist:

$$P = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \text{Funktion von } x, \quad Q = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad U = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Sind also $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'$ die Werte der ersten Differentialquotienten für eine unendlich benachbarte Erzeugende, so kommt nach den Gleichungen (4) auf den durch beide Erzeugende definierten unendlich schmalen *erzeugenden Streifen* die konstante resultierende Längsspannung:

$$(9) \quad P dy = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)' - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'$$

Einer abwickelbaren Fläche als Spannungsfäche entspricht also eine Spannungsverteilung in einer Art „Streifenfolge“, nämlich in dem aus allen projizierten Streifen der Fläche bestehenden Kontinuum der XY -Ebene. Längs jeden Streifens herrscht eine bestimmte, im allgemeinen von Streifen zu Streifen veränderliche Längsspannung, während keinerlei Spannung von einem zum andern Streifen übertragen wird. Wir können uns das Spannungssystem dieser Streifenfolge mechanisch am besten durch nebeneinanderliegende Fäden — eine „Fadenfolge“ — realisiert denken,

indem wir jeden Streifen durch einen mittleren Faden ersetzen, den wir so anspannen, daß seine Spannung gleich der Spannung des Streifens wird, den er ersetzt. (Fig. 3.)

3. Von besonderem Interesse ist nun die Betrachtung eines Kontinuums, welches aus einer Streifenfolge oder also einer entsprechenden

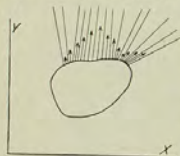


Fig. 3.

Fadenfolge und einer homogenen elastisch-isotropen Platte in gewisser Weise zusammengesetzt ist, weil damit aufs engste die in den Anwendungen der Elastizitätslehre hervortretende Aufgabe zusammenhängt, die Spannungen zu finden, welche in einer solchen Platte unter dem Einflusse eines Gleichgewichtssystems von äußeren Kräften entstehen, die am Rande der Platte angreifen.

Den Rand der Platte, die wir, um Komplikationen zu vermeiden, vorab als *einfach-zusammenhängend* annehmen, denken wir uns dadurch gegeben, daß die Koordinaten seiner Punkte durch zwei Funktionen eines von 0 bis T laufenden Parameters t gegeben sind, und ganz analog geben wir die auf ein Element dt kommende äußere Kraft:

$$X dt, \quad Y dt, \quad M dt = (yX - xY) dt$$

durch drei Gleichungen:

$$X = \varphi(t), \quad Y = \psi(t), \quad M = \chi(t),$$

wobei die Funktionen φ, ψ, χ der Einfachheit halber so beschaffen sein mögen, daß die Streifenfolge (11) den Teil der Ebene außerhalb der Platte nur einfach überdeckt. Da das Kräftesystem ein Gleichgewichtssystem sein soll, so gelten die Gleichungen:

$$(10) \quad \int_0^T \varphi dt = 0, \quad \int_0^T \psi dt = 0, \quad \int_0^T \chi dt = 0.$$

Wenn wir nun unsere elastische Platte zu einem über die ganze Ebene erstreckten Kontinuum erweitern, indem wir nach außen hin die Streifenfolge (bez. Fadenfolge):

$$(11) \quad -\psi(t) \cdot x + \varphi(t) \cdot y - \chi(t) = 0$$

daranheften, so wird die Lösung der oben näher bezeichneten Elastizitätsaufgabe wesentlich darauf hinauslaufen, solche Spannungsfächen dieses zusammengesetzten Kontinuums zu finden, bei denen die längs irgendeines Stückes t_0, t_1 des Plattenrandes sich ergebende Resultante von Streifenspannungen die Komponenten:

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} \psi dt, \quad \int_{t_0}^{t_1} \chi dt$$

hat.

Zunächst konstruieren wir denjenigen Teil der gesuchten Spannungsfäche, welcher über der Streifenfolge steht. Er gehört einer abwickelbaren Fläche an, gestattet also die Parameterdarstellung:

$$(12) \quad z = \Phi(x, y, t) = A(t)x + B(t)y + C(t), \quad \Phi' = A'(t)x + B'(t)y + C'(t) = 0,$$



wo durch den oberen Strich Differentiation nach dem Parameter angedeutet ist und A, B, C drei noch unbekannt Funktionen desselben sind. Diese lassen sich sofort bestimmen. Es ist bei beliebigem Fortschreiten auf der Fläche:

$$dz = Adx + Bdy + \Phi' dt = Adx + Bdy,$$

also ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Wegen der Randbedingungen muß, wenn wir uns der Gleichungen (4) erinnern:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{t_0}^{t_1} = - \int_{t_0}^{t_1} \psi dt \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \varphi dt$$

sein. Also folgt:

$$A = - \int_0^t \psi dt + a, \quad B = \int_0^t \varphi dt + b,$$

wo a und b Integrationskonstante sind; da noch nach Gleichung (11)

$$A' : B' : C' = - \psi : \varphi : - \chi$$

sein muß, so ist analog:

$$C = - \int_0^t \chi dt + c,$$

wo c eine neue Integrationskonstante. Die gesuchte abwickelbare Fläche ist also durch die Gleichungen:

$$(13) \quad \begin{cases} z = - \int_0^t \psi dt \cdot x + \int_0^t \varphi dt \cdot y - \int_0^t \chi dt + ax + by + c, \\ - \psi \cdot x + \varphi \cdot y - \chi = 0 \end{cases}$$

gegeben. Der abwickelbare Teil der gesuchten Spannungsfäche ist also bis auf eine willkürlich hinzuzufügende Ebene — welche die Spannungen der Streifenfolge natürlich nicht beeinflußt — eindeutig festgelegt. Außerdem ist er in sich geschlossen. (Nach (10) verschwinden die drei von 0 bis T erstreckten Integrale in (13).)

Mit dem abwickelbaren Teil erfahren wir nun aber gleichzeitig schon etwas über den andern, noch fehlenden Teil der gesuchten Spannungsfäche, nämlich dessen Koordinaten und Tangentialebenen längs derjenigen Raumkurve, welche die abwickelbare Fläche mit dem über dem Plattenrande stehenden Vertikalzylinder gemein hat. Denn diese müssen gleich den entsprechenden Größen bei der abwickelbaren Fläche sein, falls wir hier die Singularität ausschließen wollen, daß im Rande der Platte selbst, also

einem Elemente ohne Breitenausdehnung, endliche Spannungen auftreten. Besäße die gesamte Spannungsfäche an der erwähnten Raumkurve irgendwo einen Knick, so würde man für ein noch so kleines Bogenstückchen (ab), welches an der entsprechenden Stelle den Plattenrand durchsetzt, nach den Gleichungen (4) eine endliche resultierende Spannung finden. Dies ist an sich nichts Absurdes, nur müßte dann die Platte von einem besonderen gespannten Faden umschlossen sein, was wir hier nicht annehmen wollen. Es bleibt uns also jetzt noch die Aufgabe zu lösen: Eine Funktion $F(x, y)$ zu finden, welche im Innern unserer Platte der Differentialgleichung: $\Delta \Delta F = 0$ genügt und auf ihrem Rande vorgeschriebene Werte F und

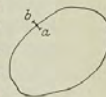


Fig. 4.

Differentialquotienten nach der Normalen $\frac{\partial F}{\partial n}$ annimmt. Die Lösung dieser Aufgabe kann nun nicht mehrdeutig sein, wie von Mathieu⁷⁾ bewiesen worden ist. Damit sind wir nun zu dem Endresultate gelangt (F. Klein):

Um die Spannungsverteilung zu finden, welche in einer einfach-zusammenhängenden, homogenen, elastisch-isotropen Platte durch ein am Rande angreifendes Gleichgewichtssystem von Kräften erzeugt wird, konstruiere man zunächst diejenige — bis auf eine beliebig hinzuzufügende Ebene völlig bestimmte — abwickelbare Fläche, welche Spannungsfäche der durch das Kraftsystem definierten Streifenfolge ist, und sodann diejenige Fläche, welche sich über dem Plattenrande überall ohne Knick an diese abwickelbare Fläche anschließt und über dem Innern der Platte überall die Differentialgleichung: $\Delta \Delta z = 0$ befriedigt. Ist $z = F(xy)$ diese Fläche, so sind die gesuchten Spannungen selbst durch die Gleichungen:

$$P = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad Q = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad U = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

gegeben.

Ist die Platte mehrfach-zusammenhängend und sind an jedem ihrer Ränder die äußeren Kräfte im Gleichgewichte, so läßt sich die bezeichnete Elastizitätsaufgabe ganz analog durch eine Fläche: $\Delta \Delta z = 0$ lösen, welche an so viele in sich geschlossene abwickelbare Flächen ohne Knick anzuschließen ist, als die Platte Ränder besitzt. Da nun aber jede dieser abwickelbaren Flächen durch die äußeren Kräfte nur bis auf eine willkürliche Ebene bestimmt ist, so erhält man hier bei verschiedener Wahl dieser willkürlichen Ebenen im allgemeinen wesentlich verschiedene Flächen: $\Delta \Delta z = 0$. Herr Michell, der übrigens, wie es scheint, als erster den Zusammenhang der Differentialgleichung $\Delta \Delta F = 0$ mit der bezeichneten

⁷⁾ E. Mathieu: Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta \Delta u = 0$ etc. in Liouville's Journal 2 Ser., 14. Bd., S. 378 (1869).



Elastizitätsaufgabe klar erkannt hat⁸⁾, findet in der auf Seite 663 zitierten Abhandlung die noch nötigen zusätzlichen Bedingungen für die Spannungsfäche, indem er den Umstand berücksichtigt, daß die durch die Spannungen verursachten Verrückungen der Punkte der Platte eindeutig sein müssen.

Sind die äußeren Kräfte nicht an jedem einzelnen Rande, sondern nur für alle Ränder zusammengenommen im Gleichgewichte, so zeigt die Spannungsfäche noch eine andere, hinsichtlich der Spannungen selbst unwesentliche Mehrdeutigkeit (affine Periodizität), auf deren Analogon bei diskontinuierlichen Spannungssystemen wir im § 2 ausführlicher eingehen.

4. Schöne und einfache Beispiele von Spannungsfunktionen $\Delta\Delta F = 0$ bieten die gewöhnlichen statischen *Balkenprobleme*.

Wir betrachten zuerst (Fig. 5) einen einseitig eingemauerten, horizontalen, senkrecht zu unsrer Ebene unendlich schmalen Balken von endlicher Höhe h und der Länge l , welcher am freien Ende so belastet ist, daß die Resultante aller Kräfte eine vertikal nach unten gerichtete Kraft π ist. Bei geeigneter Annahme über die Verteilung der Einzelkräfte über den Querschnitt hin ist:

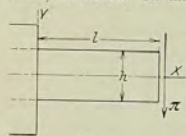


Fig. 5.

$$F(x, y) = \frac{\pi}{2h^3}(l-x)(4y^3 - 3h^2y)$$

die zugehörige Spannungsfunktion. Sie führt die in allen Lehrbüchern für dieses Problem angegebenen Spannungen. *Unter der Annahme also, daß der Balken als eine homogene, isotrope elastische Platte angesehen werden kann, ist die Angabe der Lehrbücher über die in seinem Innern eintretende Spannungsverteilung genau richtig.* (Nicht dasselbe gilt von der Berechnung der Deformation, welche der Balken unter dem Einflusse dieses Spannungssystemes erleidet; hier läßt die übliche Theorie Vernachlässigungen eintreten, die man übrigens im Anschluß an die Gleichungen (6) mit leichter Mühe auch vermeiden kann. Wir können darauf hier natürlich nicht eingehen, wollen aber doch dafür plädieren, daß man allgemein die Bestimmung der Spannungen und diejenige der Deformationen nach Möglichkeit trennen soll.) Von besonderem Interesse ist es, sich die zu unserm Beispiel gehörige Spannungsfäche zu konstruieren! Deren abwickelbarer Teil ist aber zu kompliziert, um ohne Modell gut geschildert werden zu können; um noch ein Beispiel zu haben, bei dem dies leicht möglich ist, betrachte man bei dem eingemauerten Balken der Fig. 5 den Fall der sog. „reinen Biegung“, welchem, zunächst über dem Innern des Balkens, die der Differentialgleichung $\Delta\Delta z = 0$ genügende Spannungsfäche:

$$z = \frac{2M}{h^3} \cdot y^3$$

⁸⁾ Michell, a. a. O.

entspricht, wo M das am freien Ende angreifende Biegemoment ist. Diese Fläche — ersichtlich ein Zylinder, dessen Erzeugende zur X -Achse parallel sind — bildet nun gleichzeitig auch den abwickelbaren Teil der Spannungsfäche des Balkens.

Ein weiteres Beispiel gibt Maxwell in der auf Seite 661 zuletzt zitierten Abhandlung. Der Balken erstrecke sich, mit der Höhe h , von $x = -l$ bis $x = +l$, er sei entlang seiner oberen Begrenzung mit der Last K pro Längeneinheit belastet, ferner habe er pro Längeneinheit selbst ein Gewicht k . Auf die Endflächen bei $x = \pm l$ wirkt im Mittel ein Druck Null; eine dementsprechende, möglichst einfache Verteilung positiver und negativer Drucke auf die einzelnen Elemente der Endflächen bleibt vorbehalten. Maxwell findet:

$$F(x, y) = \frac{k+K}{2h^3} \left[(l^2 - x^2)(3hy^2 - 2y^3) + hy^4 - \frac{2y^5}{5} - h^3y^3 \right]^{10)}$$

als Spannungsfunktion. Er gibt auch eine interessante Anordnung, um die hierdurch gegebene Spannungsverteilung in geschickter Weise experimentell zu realisieren.

Eben dieses Beispiel und eine ganze Anzahl weiterer Beispiele hat schon vorher Airy selbst in derjenigen Abhandlung behandelt und durch interessante Zeichnungen, nämlich der Spannungstrajektorien, erläutert, in welcher er, eben für diesen Zweck, die hier nach ihm benannte Spannungsfunktion einführt¹⁰⁾. Er setzt F immer als ein Polynom in x, y an und nimmt dabei so viele möglichst niedrige Glieder, daß er die Randbedingungen befriedigen kann. Hierbei hat er also merkwürdigerweise von dem Umstande ganz abgesehen, daß F im Balkeninnern eine von den elastischen Eigenschaften des Balkens abhängige partielle Differentialgleichung erfüllen muß (eben die Gleichung $\Delta\Delta F = 0$, wenn der Balken elastisch-isotrop ist). Dies moniert schon Maxwell in seiner Abhandlung, zeigt aber zugleich in dem eben besprochenen, von ihm näher untersuchten Falle, daß der solcherweise bei Airy vorliegende Fehler für die numerischen Werte der Spannungskomponenten nicht wesentlich in Betracht kommt.

§ 2.

Über Spannungsfächen ebener Diskontinuen (Fachwerke).

1. Die Gleichungen (1), aus denen Airy die Existenz der Spannungsfäche für ein Spannungen übertragendes ebenes Kontinuum erschloß,

¹⁰⁾ Die Spannungskomponenten selbst sind hier, da die Schwere auf die Elemente des Balkeninnern als wirkend vorausgesetzt sind, von der Form anzunehmen:

$$P = \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}, \quad Q = \frac{\partial^3 F}{\partial x^2} - gy, \quad U = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

¹⁰⁾ Zitat auf Seite 661.



haben unmittelbar gar keinen Sinn mehr, wenn es sich um die Spannungsverteilung in einem ebenen Diskontinuum, etwa einem ebenen Fachwerke handelt. Aber die Spannungsfunktion oder die Spannungsfäche ist etwas viel Allgemeineres als die Gleichungen, aus denen sie zuerst gewonnen wurde, sie existiert ebensogut für ebene Diskontinua wie für Kontinua; man hat dann nur (mit Maxwell) die durch Integration gewonnenen Formeln (4) zugrunde zu legen, wie im folgenden noch zu erörtern sein wird. Es wird im folgenden unsere Aufgabe sein, die besonderen Umstände zu erörtern, welche hieraus für die Fachwerkstatik entspringen.

Um unnötige Komplikationen in der Darstellung zu vermeiden, werden wir ausführlicher nur von solchen ebenen Fachwerken handeln, welche

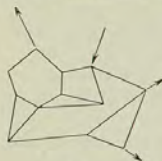


Fig. 6.

das Bild eines Polygonnetzes darbieten, dessen Elemente sich nirgends kreuzen und überdecken, sondern alle **glatt** nebeneinanderliegen. (Fig. 6.) Zudem werden wir bis auf weiteres annehmen, daß äußere Kräfte nur an den Knotenpunkten des Umrißpolygons wirksam sind. Am Schluß des Paragraphen werden wir dann auch kurz einige Fachwerke behandeln, welche in dieses Schema nicht hineinpassen.

Natürlich denken wir uns aber in den Knotenpunkten **reibungslose Gelenke**, so daß nur Spannungen in der Längsrichtung der Stäbe, sog. „Grundspannungen“ oder „Hauptspannungen“ auftreten können.

K. Wieghardt setzt sich im folgenden das Ziel, aus den Maxwell'schen Ansätzen die völlige Analogie zu dem Zusammenhange herauszuarbeiten, welcher beim Kontinuum zwischen den Gleichgewichtsbedingungen des gespannten Kontinuums und der Airyschen Spannungsfäche besteht: *es soll gezeigt werden, daß das Bestehen der Gleichgewichtsbedingungen für ein Fachwerk völlig äquivalent mit der Existenz einer noch näher zu definierenden Spannungsfäche ist.*

Dieses Ziel erreicht man in zwei Schritten. Erstens zeigt man, daß man stets eine Spannungsfäche angeben kann, durch welche ein Spannungssystem definiert wird, welches bei einem gleichzeitig dadurch mitdefinierten Kraftangriff an unserm Fachwerke im Gleichgewichte ist, und zweitens das Umgekehrte, daß zu jeder Spannungsverteilung, die bei gegebenem Kraftangriff am Fachwerke im Gleichgewichte ist, eine solche Spannungsfäche konstruiert werden kann:

Wir konstruieren über unserm Fachwerke eine Fläche, welche aus lauter nebeneinanderliegenden, ebenflächigen Polygonen so zusammengesetzt ist, daß ihre Kanten, auf die Ebene des Fachwerks projiziert, gerade die Stäbe des Fachwerks ergeben. Die Konstruktion einer solchen Fläche, die wir „**Facettenfläche**“ nennen wollen, ist stets möglich; im schlimmsten

Falle ist sie durch ein einziges ebenflächiges Polygon dargestellt. An diese Facettenfläche heften wir nun eine „**Polyederzone**“, wie folgt: Durch jede Kante des Umrißpolygons der Facettenfläche legen wir eine Ebene, aber nicht ganz willkürlich, sondern einmal so, daß sie mit der Ebene des Fachwerks einen von 90° verschiedenen Winkel einschließt und ferner so, daß die Kanten, in denen zwei aufeinanderfolgende dieser Ebenen sich schneiden, folgende Eigenschaften besitzen. a) Von den beiden Halbstrahlen, in welche jede solche Kante durch den auf ihr liegenden Eckpunkt des Facettenflächenumrisses zerlegt wird, soll immer der eine — auf die Fachwerkebene projiziert — das Fachwerkgebiet durchsetzen, der andere nicht. b) Alle Halbstrahlen, welche — auf die Fachwerkebene projiziert — das Fachwerkgebiet nicht durchsetzen, sollen sich gegenseitig nirgends schneiden. Je zwei aufeinanderfolgende dieser zuletzt erwähnten Halbstrahlen schneiden dann mit der dazwischenliegenden Seite des Facettenflächenumrisses aus der ihnen allen dreien gemeinsamen Ebene einen Streifen aus und die aus diesen Streifen zusammengesetzte Fläche ist die gewünschte Polyederzone; sie ist das Analogon zu der abwickelbaren Fläche von § 1. Je dichter die Kanten der Polyederzone aneinandergrenzen, um so mehr werden sie den Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche vergleichbar, während gleichzeitig unsere Streifen sich immer mehr den erzeugenden Streifen einer abwickelbaren Fläche nähern.

Die gesamte so konstruierte, aus Facettenfläche und Polyederzone zusammengesetzte, stetige und die Ebene einfach überwölbende Fläche ist es nun, die wir näher zu betrachten haben; wir wollen sehen, zu welcher Spannungsverteilung in der Fachwerkebene sie Anlaß gibt, wenn wir sie als Spannungsfäche auffassen. Jedenfalls ist das Eine von vornherein klar, daß sie uns keinen Aufschluß über *spezifische* Spannungen, d. h. Spannungen pro Strecken- oder Flächeneinheit, zu liefern vermag, denn diese sind nach den Gleichungen (2) durch die *zweiten* Differentialquotienten der Spannungsfäche gegeben, die *zweiten* Differentialquotienten sind aber bei unserer Fläche entweder Null, nämlich im Innern der einzelnen Facetten und Streifen, oder unendlich groß, nämlich in den Kanten. Die *ersten* Differentialquotienten dagegen sind, wenn auch in den Kanten unstetig, doch überall endlich. Demgemäß definiert uns unsere Fläche vermöge der Maxwell'schen Gleichungen (4) *resultierende* Spannungen über irgendein Bogenstück *ab* in der Ebene des Fachwerks. Wenn wir nun das eine Mal die Formeln (4) für ein Bogenstück *ab* ansetzen, welches ganz im Innern einer Facette oder eines Streifens verläuft, das andere Mal für ein beliebig kleines Bogenstück *ab*, welches eine (projizierte) Kante der Spannungsfäche durchsetzt, so finden wir, daß unsere Fläche, als Spannungsfäche aufgefaßt, ein im Gleichgewicht befindliches

Spannungssystem vermittelt, welches in den projizierten Kanten wirksam ist. Ersetzen wir noch die Spannungen in den projizierten Kanten der Polyederzone durch Kräfte, die an den Eckpunkten des Fachwerkumrisses angreifen, so haben wir ein erstes Resultat gewonnen: *Irgendeine in der beschriebenen Weise hergestellte, aus Facettenfläche und Polyederzone zusammengesetzte Fläche definiert uns ein an dem entsprechenden Fachwerke angreifendes Gleichgewichtssystem von äußeren Kräften und eine an ihm unter dem Einflusse dieser Kräfte im Gleichgewicht befindliche Spannungsverteilung.*

Hiermit ist der erste Schritt zur Erreichung unseres Zieles gemacht, wir vollziehen nun den zweiten. Dabei unterwerfen wir die äußeren Kräfte folgenden zwei Einschränkungen. Jede Aktionslinie des Kraftsystems wird durch den auf ihr liegenden Eckpunkt des Fachwerkumrisses in zwei Halbstrahlen zerlegt; von diesen Halbstrahlen verlangen wir, daß sie genau die Bedingungen a) und b) erfüllen wie vorhin die entsprechenden Halbstrahlen im Raume. Wir greifen nun irgendeinen Knotenpunkt des Fachwerks heraus und machen ihn der Einfachheit halber zum Anfangspunkt eines XYZ -Koordinatensystems, wie Fig. 7 (auf S. 673) zeigt. An diesem Knotenpunkte mögen die Kanten 1, 2, ..., n und die Winkelräume I, II, ..., N zusammenstoßen. Über einem der Winkelräume, etwa I, nehmen wir nun irgendeine Facette (bez. irgendeinen Streifen) an:

$$z = ax + \beta y + \gamma.$$

Daran reihen wir nun, indem wir zyklisch um unsern Knotenpunkt herumgehen, nacheinander die Facetten (bzw. Streifen) II, III, ..., N , wobei wir dafür Sorge tragen, daß bei Anwendung der Gleichungen (4) auf zwei aufeinanderfolgende der Ebenen I, II, ..., N immer die gegebene Spannung in der gemeinsamen Kante herauskommt. Sind X_i, Y_i die Komponenten der Spannung in der Kante $J-1, J$ gemäß Fig. 7, so lauten die Gleichungen dieser Ebenen:

$$(14) \begin{cases} (1) & z = ax + \beta y + \gamma, \\ (2) & z = -Y_2 \cdot x + X_2 \cdot y + ax + \beta y + \gamma, \\ (3) & z = -(Y_2 + Y_3)x + (X_2 + X_3)y + ax + \beta y + \gamma, \\ & \vdots \\ (i) & z = -\left(\sum_2^i Y_i\right) \cdot x + \left(\sum_2^i X_i\right) \cdot y + ax + \beta y + \gamma, \\ & \vdots \\ (n) & z = -\left(\sum_2^n Y_i\right) \cdot x + \left(\sum_2^n X_i\right) \cdot y + ax + \beta y + \gamma^{11).} \end{cases}$$

¹¹⁾ Die Formeln (14) und (15), mit denen hier und auf Seite 675 operiert wird, wurden von F. Klein in einer Vorlesung vom Sommer 1896 aufgestellt; man vgl. das

Da nun die n Spannungen am Knotenpunkte im Gleichgewichte sind, so ist die letzte Gleichung mit:

$$z = Y_1 x - X_1 y + ax + \beta y + \gamma$$

identisch, und wenn wir hier den Punkt x, y auf der projizierten Kante I annehmen, wird $z = ax + \beta y + \gamma$, d. h. die ganze zyklische Folge der n Facetten (bzw. Facetten und Streifen) ist in sich geschlossen. *Die Tatsache also, daß an einem Knotenpunkte unseres Fachwerks Gleichgewicht zwischen den Spannungen herrscht, bedeutet für den Knotenpunkt die Existenz eines Stückes Spannungsfläche um ihn herum, welches bis auf eine willkürliche Ebene völlig bestimmt ist.*

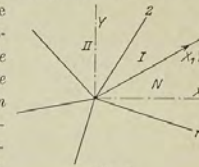


Fig. 7.

Wir werden versuchen, alle diese zu den verschiedenen Knotenpunkten des Fachwerks gehörigen Stücke durch geeignete Wahl der jeweils willkürlichen Ebene zu einer stetigen, nirgends verzweigten Fläche zusammenzuschließen. Mit irgendeinem Knotenpunkte beginnend, schraffieren wir das um ihn herum (mit irgendeiner willkürlichen Ebene) konstruierte Stück Spannungsfläche (Fig. 8, links). Die Eckpunkte des schraffierten Polygons (welches sich eventuell ins Unendliche erstreckt), numerieren wir zyklisch mit 1, 2, ..., m . Wir können nun die Ebene, welche an dem Stück Spannungsfläche um I herum willkürlich ist, mit einer der schraffierten Flächen, die an I zusammenstoßen, identifizieren (etwa mit I);

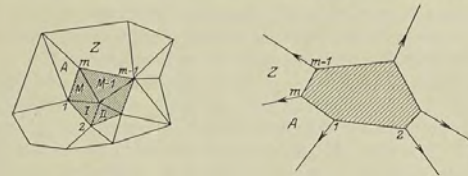


Fig. 8.

dann gehört auch M diesem Stück Spannungsfläche an, da in einem solchen Flächenstücke die gegenseitige Lage zweier aufeinanderfolgender Ebenen völlig durch die Spannung in der ihnen gemeinsamen (projizierten) Kante bestimmt ist. Also das Stück Spannungsfläche um I herum schließt

Henneberg'sche Enzyklopädieerferat. Sie entsprechen den Formeln, die unter (13), § 1 für die dort betrachtete abwickelbare Fläche (die ein Grenzfall der nun betrachteten Polyederzone ist), aufgestellt wurden.



sich glatt an das schraffierte Polygon an. So können wir, nach und nach die schraffierten Flächen II, III, ..., $M-1$ mit der jeweils willkürlichen Ebene identifizierend, die Stücke Spannungsfäche um 2, 3, ..., $m-1$ herum glatt an unser schraffiertes Polygon anschließen. Es fragt sich nur noch, ob das zuletzt konstruierte Flächenstück (Facette oder Streifen) Z sich glatt an das zuerst konstruierte Flächenstück A anschließt. Das muß aber der Fall sein, denn wählen wir (Fig. 8, rechts) als die am Knotenpunkte m willkürliche Ebene die Ebene A und konstruieren das Stück Spannungsfäche um m herum, so können wir auf keine anderen Facetten (Streifen) kommen als $M, M-1, \dots, Z$, da die gegenseitige Lage zweier benachbarter Ebenen dieser Folge völlig durch die Spannung in der gemeinsamen (projizierten) Kante bestimmt ist. Die Folge A bis Z ist also — als das Stück Spannungsfäche um m herum — ebenfalls in sich geschlossen. Schraffiert man nun alle bisher konstruierten Stücke Spannungsfäche und wiederholt an den Ecken des nun schraffierten größeren Polygons die soeben beschriebene Konstruktion usw., so gelangt man schließlich tatsächlich zu einer stetigen, in sich geschlossenen, die ganze Ebene einfach überwölbenden „einwertigen“ Spannungsfäche. Damit ist unser Ziel erreicht; zusammenfassend können wir sagen:

Für ein ebenes Fachwerk, welches aus lauter glatt nebeneinanderliegenden Polygonen zusammengesetzt ist, dessen Knotenpunkte reibungslos gelenkig sind und an welchem äußere Kräfte der beschriebenen Art und nur in Knotenpunkten des Umrißpolygons wirken, ist das Bestehen der Gleichgewichtsbedingungen völlig äquivalent mit der Existenz einer stetigen und überall einwertigen Spannungsfäche der beschriebenen Art. Diese Spannungsfäche besteht aus einer Polyederzone, deren Kanten, projiziert, die Aktionslinien des Kräftesystems ergeben, und aus einer Facettenfläche, deren Kanten, projiziert, die Stäbe des Fachwerks liefern.

Wenn die äußeren Kräfte nicht den beiden von uns gemachten Einschränkungen unterliegen, so treten Komplikationen ein, welche zwar kaum das Verständnis, wohl aber die zweidimensionale Darstellung erschweren, insofern die Polyederzone sehr kompliziert werden kann (ähnlich wie die abwickelbare Fläche bei dem ersten Balkenbeispiel von § 1, S. 668); wir gehen daher nicht näher darauf ein.

2. Eine hübsche Anwendung des abgeleiteten Satzes ist folgende. Das Fachwerk sei aus lauter Dreiecken zusammengesetzt (Fig. 9); es stehe unter dem Einflusse irgendeines Gleichgewichtssystems von Kräften, die an den Knotenpunkten des Umrißpolygons wirken. Die Frage ist: Wieviel Spannungsfächen gibt es zu diesem gegebenen Kräftesystem, mit andern

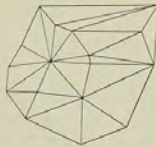


Fig. 9.

Worten: Wievielfach statisch unbestimmt ist das Fachwerk? Wir konstruieren, in direkter Nachbildung der Gleichung der abwickelbaren Fläche beim Kontinuum (Gleichung (13)), die Polyederzone, die durch unser Kräftesystem X_i, Y_i, M_i definiert wird, indem wir folgende Streifen aneinanderreihen:

$$(15) \left\{ \begin{aligned} z &= \alpha x + \beta y + \gamma, \\ z &= -Y_2 x + X_2 y - M_2 + \alpha x + \beta y + \gamma, \\ z &= -(Y_2 + Y_3)x + (X_2 + X_3)y - (M_2 + M_3) + \alpha x + \beta y + \gamma, \\ &\vdots \\ z &= -\left(\sum_2^i Y_i\right) \cdot x + \left(\sum_2^i X_i\right) \cdot y - \left(\sum_2^i M_i\right) + \alpha x + \beta y + \gamma, \\ &\vdots \\ z &= -\left(\sum_2^m Y_i\right) \cdot x + \left(\sum_2^m X_i\right) \cdot y - \left(\sum_2^m M_i\right) + \alpha x + \beta y + \gamma, \\ &\vdots \\ z &= -\left(\sum_1^m Y_i\right) \cdot x + \left(\sum_1^m X_i\right) \cdot y - \left(\sum_1^m M_i\right) + \alpha x + \beta y + \gamma = \alpha x + \beta y + \gamma^{12)}. \end{aligned} \right.$$

Durch diese, bis auf die willkürliche Ebene $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ völlig bestimmte und in sich geschlossene Polyederzone ist zugleich der Umriß der über unserm Fachwerk stehenden Facettenfläche festgelegt. Aber die Koordinaten der Facettenfläche können über jedem Knotenpunkte im Innern des Umrißpolygons ganz willkürlich angenommen werden, da sich ja eine Ebene durch drei ganz willkürliche Punkte legen läßt. Also ist der Grad der statischen Unbestimmtheit unseres Dreieckfachwerkes einfach gleich der Anzahl seiner „inneren“ Knotenpunkte.

Soll also das Problem, die Spannungsfäche eines ebenen Dreieckfachwerkes zu bestimmen, allgemein eine eindeutige Lösung besitzen, so wird man über die physikalische Natur der Fachwerkstäbe — analog den Verhältnissen beim Kontinuum — spezielle Voraussetzungen machen müssen. Wir gehen darauf hier nicht ein; den Fall, daß die Stäbe im Sinne des Hookeschen Gesetzes elastisch sind, wird K. Wieghardt in einer besonderen Abhandlung untersuchen¹³⁾. —

3. Die Spannungsfächen, die wir bisher erhielten, waren durchaus einwertige Flächen; einem Punkte x, y entsprach immer nur ein einziger Wert z . Man kann mit leichter Mühe Beispiele von mehrwertigen Spannungsfächen bilden, welche ebenfalls auf Spannungssysteme

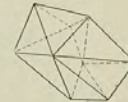


Fig. 10.

¹²⁾ Vgl. die Fußnote auf S. 672.

¹³⁾ [Erschienen in den Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbeleißes in Preußen, 85 (1906).]



ebener Fachwerke führen. So gibt ein räumliches, aus ebenen Polygonen zusammengesetztes, in sich geschlossenes Polyeder, als Spannungsfäche aufgefaßt, ein *Selbstspannungssystem* in demjenigen Fachwerke, welches als seine orthogonale Projektion erscheint. Dies einzusehen, macht gar keine Schwierigkeit; die Formeln (4) gelten auch hier, nur muß man acht darauf haben, daß die Fachwerkfläche jetzt die Fläche seines Umrißpolygons *zweimal* überdeckt und daß daher in einem Punkte x, y die Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ verschiedene Werte haben, je nachdem man sich im oberen oder unteren „Blatte“ befindet — und ferner ist zu beachten, daß im unteren Blatte in den Formeln (4) die Vorzeichen umzukehren sind. Die näheren Verhältnisse dieser Figuren sind sehr ausführlich von Maxwell selbst¹⁴⁾ behandelt worden.

Übrigens kann ein solches, sich selbst überdeckendes Fachwerk auch Anlaß zur Entstehung einer *einwertigen* Spannungsfäche geben — wenn man nämlich das Spannungssystem kennt, so kann man rückwärts eine einwertige Spannungsfäche dazu konstruieren: man fasse einfach alle nur geometrischen Schnittpunkte der Stäbe als wirkliche Knotenpunkte auf und konstruiere nun die Spannungsfäche, die in dem so entstandenen, das Umrißpolygon einfach bedeckenden Fachwerke dem gegebenen Spannungssystem entspricht. Da aber nicht umgekehrt jede Spannungsfäche dieses Fachwerkes für unser sich selbst überdeckendes Fachwerk Bedeutung hat, ist dies nur von sekundärem Interesse. Eine interessante Frage ist: Wie steht es allgemein mit den ein- oder mehrwertigen Spannungsfächen solcher sich selbst überdeckender Fachwerke, welche, räumlich aufgefaßt, auf sog. „einseitige“ Fläche führen? (Fig. 11.)¹⁵⁾

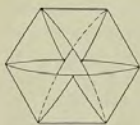


Fig. 11.

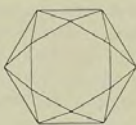


Fig. 12.

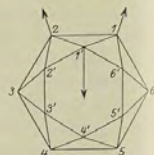


Fig. 13.

Umgekehrt gibt es nun aber auch bei unsern Fachwerken, die sich *nicht* überdecken, *mehrwertige* Spannungsfächen. Greifen z. B. keine äußeren Kräfte an, so liegen alle Streifen der Polyederzone in einer Ebene, und wir können als Polyederzone gerade denjenigen Teil dieser

¹⁴⁾ Siehe das Zitat a) von S. 661.

¹⁵⁾ [Diese jedenfalls theoretisch wichtige Frage habe ich 1909 beantwortet. Siehe die hier folgende Abhandlung LXXVIII. K.]

Ebene ansehen, der die Facettenfläche zu einem geschlossenen Raumpolyeder ergänzt. Betrachten wir beispielsweise das Fachwerk von Fig. 12. Wir fragen: Wieviel Selbstspannungen sind in ihm möglich? Das zugehörige Raumpolyeder ist ersichtlich aus zwei Sechsecken und zwölf Dreiecken zusammengesetzt. Haben wir die beiden Sechseckebenen willkürlich festgelegt, so ist es völlig bestimmt. Da nun die gegenseitige Lage zweier Ebenen drei wesentlich willkürliche Parameter enthält, so folgt aus unserer Konstruktion beiläufig, daß es in unserem Fachwerke ∞^3 Selbstspannungen (von der Form: $S = aS_1 + bS_2 + cS_3$) gibt.

Ein weiteres, interessantes Beispiel mehrwertiger Spannungsfächen liefern die „*mehrfach-zusammenhängenden*“ Fachwerke. Wir nennen ein Fachwerk, welches sich selbst nicht überdecken möge, mehrfach-zusammenhängend, wenn nicht alle inneren Knotenpunkte kräftefrei sind. So ist das Fachwerk von vorhin bei der Belastung von Fig. 13 mehrfach-zusammenhängend. Wir versuchen, hierfür eine Spannungsfäche zu konstruieren! Wir fassen das ganze Fachwerk als ein solches mit zwei Umrißpolygonen auf, einem äußeren und einem inneren Sechsecke, und beginnen nun, an den beiden Vertikalzylindern über diesen beiden Umrißpolygonen je eine Polyederzone für die entsprechenden äußeren Kräfte festzuheften. Die Kräfte am äußeren Sechseck seien X_i, Y_i, M_i , am inneren X'_i, Y'_i, M'_i . Damit alle im Gleichgewicht sind, ist nur nötig, daß

$$(16) \quad \sum_1^6 (X_i + X'_i) = 0, \quad \sum_1^6 (Y_i + Y'_i) = 0, \quad \sum_1^6 (M_i + M'_i) = 0$$

ist, während die einzelnen Summen $\sum_1^6 X_i, \sum_1^6 X'_i$ usw. sehr wohl von Null verschieden sein können. Wenn wir nun zunächst die äußere Polyederzone konstruieren, indem wir, ganz nach der Vorschrift der Gleichungen (15), die Streifen:

$$(17) \quad z = - \left(\sum_0^v Y_i \right) \cdot x + \left(\sum_0^v X_i \right) \cdot y - \left(\sum_0^v M_i \right), \quad (v = 0, 1, 2, \dots)$$

aneinanderreihen — wo durch die drei Größen X_0, Y_0, M_0 die eine willkürliche Ebene berücksichtigt ist — so schließt sich diese Reihe nach einem ganzen Umlaufe nicht, vielmehr wächst das z der Polyederzone bei jedem Umlauf um die Periode:

$$(18) \quad z_0 = - \left(\sum_1^6 Y_i \right) \cdot x + \left(\sum_1^6 X_i \right) \cdot y - \left(\sum_1^6 M_i \right),$$

wir haben nicht eine *geschlossene*, sondern eine *im Sinne dieser Formel „affin-periodische“ Polyederzone*. Entsprechende Formeln bekommen wir



für die innere Polyederzone, nur müssen wir bei Anwendung der Formeln (15) jetzt alle Vorzeichen umkehren, damit bei Anwendung der Gleichungen (4) auf zwei benachbarte Streifen die richtige Spannung in der gemeinsamen Kante herauskommt. Wir haben also die Reihenfolge der Ebenen:

$$(19) \quad z' = \left(\sum_0^v Y_i' \right) \cdot x - \left(\sum_0^v X_i' \right) \cdot y + \left(\sum_0^v M_i' \right), \quad (v = 0, 1', 2', \dots)$$

wobei die drei Größen X_0', Y_0', M_0' die Willkürlichkeit einer Ebene repräsentieren. (Durch die drei Größen: $X_0 - X_0', Y_0 - Y_0', M_0 - M_0'$ kommen die ∞^3 Selbstspannungen des Fachwerkes zum Ausdruck!) Wir erhalten so die Periode:

$$(20) \quad z'_0 = \left(\sum_1^6 Y_i' \right) \cdot x - \left(\sum_1^6 X_i' \right) \cdot y + \left(\sum_1^6 M_i' \right)$$

und diese ist, wegen der Formeln (16), der obigen Periode z_0 gleich. Da nun mit den beiden Polyederzonen, wie unmittelbar ersichtlich, auch die Facettenfläche gegeben ist, so haben wir das Resultat: *Die ganze Spannungsfäche hat entsprechend einer zyklischen Durchlaufung unseres Fachwerkes die durch die Formel (18) oder (19) bestimmte Periode; sie setzt sich aus zwei ungeschlossenen Polyederzonen und einer ungeschlossenen Facettenfläche zusammen, die sich bei Durchlaufung des Fachwerkes wendeltreppenartig in die Höhe windet.*

In der Projektion der Spannungsfäche auf die Ebene des Fachwerkes ist von den unendlich vielen Windungen dieser Wendeltreppe natürlich nichts zu spüren; sie überdecken sich einfach in der Projektion und werden dadurch unkenntlich.

Die so besprochenen Verhältnisse haben für denjenigen, der, vielleicht von der Funktionentheorie her, mit der Integration exakter Differentiale erster Ordnung vertraut ist, nichts Überraschendes. Ist:

$$df = pdx + qdy$$

ein solches Differential, und integriert man f in einem ringförmig-zusammenhängenden Bereich, so erhält f bei Durchlaufung des Ringes eine additive Periode. Genau so ist es bei der Spannungsfunktion, die durch ihr zweites Differential definiert ist:

$$d^2 F = Q \cdot dx^2 - 2U \cdot dx dy + P \cdot dy^2,$$

nur daß die additive Periode keine Konstante ist wie im obigen Falle, sondern eine lineare ganze rationale Funktion von x und y . — Es wird interessant sein, die hier nur in abstrakter analytischer Fassung besprochenen Verhältnisse bei zahlreichen Beispielen in concreto durchzukonstruieren. —

§ 3.

Über reziproke Figuren und Diagramme.

I. a) Irgendeine geradlinige *Strecke* (einer Ebene) mit den Endpunkten $a(x_a, y_a)$ und $b(x_b, y_b)$ besitzt von Haus aus eine gewisse *Länge* und eine gewisse *Richtung*, aber keinen bestimmten *Sinn*. Eine Strecke definiert uns also in einfachster Weise sowohl zwei Vektoren, welche zu ihr parallel sind, nämlich die beiden Vektoren mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} \Xi &= x_b - x_a, & H &= y_b - y_a \text{ einerseits} \\ \text{und } \Xi &= -(x_b - x_a), & H &= -(y_b - y_a) \text{ andererseits,} \end{aligned}$$

als auch zwei Vektoren, welche auf ihr senkrecht stehen:

$$\begin{aligned} \Xi &= -(y_b - y_a), & H &= x_b - x_a \text{ einerseits} \\ \text{und } \Xi &= y_b - y_a, & H &= -(x_b - x_a) \text{ andererseits.} \end{aligned}$$

Die ersten beiden wollen wir die zu unserer Strecke gehörigen *polaren Vektoren* und die letzten beiden die zu ihr gehörigen *transversalen Vektoren* nennen. Indem wir jetzt unserer Strecke einen bestimmten *Durchlaufungssinn* zuordnen, nennen wir sie „die Strecke (ab) “ oder „die Strecke (ba) “, je nachdem wir sie uns von a nach b oder von b nach a durchlaufen denken. Zeichnerisch wird man den Durchlaufungssinn dadurch andeuten, daß man die Strecke mit einer entsprechenden Pfeilspitze versieht. Jeder der beiden „Strecken mit Pfeilspitze“ können wir nun einen der beiden polaren Vektoren und ebenso einen der beiden transversalen Vektoren zuordnen, so daß, wenn über die dabei herrschende Willkürlichkeit ein für allemal fest verfügt ist, jeder der beiden Strecken mit Pfeilspitze sowohl ein ganz bestimmter polarer als auch ein ganz bestimmter transversaler Vektor zugeordnet ist. Wir verfügen nun über die Willkürlichkeit folgendermaßen:

Unter „dem zur Strecke (ab) “ gehörenden polaren Vektor“ oder kurz unter dem „*polaren Vektor* (ab) “ verstehen wir den Vektor mit den Komponenten:

$$\Xi = x_b - x_a, \quad H = y_b - y_a;$$

und unter „dem zur Strecke (ab) “ gehörenden transversalen Vektor“ oder kurz unter dem „*transversalen Vektor* (ab) “ verstehen wir den Vektor mit den Komponenten:

$$\Xi = y_b - y_a, \quad H = -(x_b - x_a).$$

Nach dieser Verabredung bekommt man in dem von uns immer benutzten Koordinatensystem den transversalen Vektor (ab) , wenn man den polaren Vektor (ab) im Sinne des Uhrzeigers um 90° dreht.



b) Irgendein einfach-zusammenhängendes *Ebenenstück* mit einer sich selbst nicht durchsetzenden geschlossenen Randkurve besitzt von Haus aus einen gewissen *Flächeninhalt* und eine gewisse *Normalenrichtung*. Ein Ebenenstück dieser Art definiert uns also in einfachster Weise zwei Vektoren, deren Länge gleich dem Flächeninhalt und deren Richtung gleich der Normalenrichtung ist. Indem wir nun unserem Ebenenstück den einen oder anderen *Umlaufungssinn* zuordnen und jedem dieser Umlaufungssinne wieder einen der beiden durch das Ebenenstück nach dem Vorigen definierten Vektoren, ist, nachdem wir über die dabei herrschende Willkürlichkeit ein für allemal fest verfügt haben, jedem „Ebenenstück mit Umlaufungssinn“ oder kürzer jeder „*Plangröße*“ ein ganz bestimmter Vektor zugeordnet.

Auch ein *gekrümmtes Flächenstück* mit Umlaufungssinn definiert einen ganz bestimmten Vektor; es läßt sich, wie wir sagen können, „als *Plangröße* auffassen“, nämlich so: Man zerlege es in unendlich viele, unendlich kleine Ebenenstückchen; jedem Ebenenstückchen ordne man einen Umlaufungssinn so zu, daß der Rand des Flächenstückes seinen ursprünglichen Umlaufungssinn beibehält und jeder Kante zwischen irgend zwei benachbarten Ebenenstückchen beide möglichen Durchlaufungssinne zugeordnet sind. Ordnet man dann jedem Ebenenstückchen den ihm als einer *Plangröße* nach dem Obigen zukommenden Vektor zu und summiert alle diese unendlich vielen, unendlich kleinen Vektoren, so bekommt man einen ganz bestimmten resultierenden Vektor, eben den, der durch das Flächenstück mit Umlaufungssinn definiert ist.

c) Alle diese von Graßmanns „Ausdehnungslehre“ her mehr oder weniger bekannten Ideen bekommen große praktische Bedeutung, wenn es sich um die zeichnerische Darstellung der Spannungen in einem kontinuierlichen oder diskontinuierlichen Medium (Fachwerk) handelt. Beispielsweise in einer Platte herrsche ein Gleichgewichtssystem von Spannungen. Schneiden wir die Platte längs irgendeines Bogenstückes auf, so zerstören wir damit das Gleichgewicht, insofern wir die längs des Bogenstückes herrschenden Spannungen vernichten. Wollen wir wieder Gleichgewicht herstellen, so müssen wir längs jedes Ufers unseres Querschnittes entsprechende Kräfte angreifen lassen. Je zwei dieser Kräfte, welche an verschiedenen Ufern, aber an derselben Trennungsstelle angreifen, sind dann entgegengesetzt gleich und messen vollständig die auf das Bogenelement der Trennungsstelle kommende Spannung. (Wir können auch längs jedes Ufers alle Einzelkräfte summieren und bekommen so zwei Resultanten, welche entgegengesetzt gleich sind und die auf das ganze Bogenstück kommende Spannung messen.)

Nach dem Vorigen ist nun klar, daß eine Strecke $a\beta$ — und zwar

eine einfache Strecke ohne bestimmten Durchlaufungssinn — vorzüglich geeignet ist, die zu einem bestimmten Querschnitt ab gehörige Spannung graphisch darzustellen. Denn durch ihre Länge und Richtung liefert sie zunächst ohne weiteres Länge und Richtung der Spannung (die Spannungsrichtung ist entweder der Streckenrichtung parallel oder steht auf ihr senkrecht). Aber sie liefert bei geeigneter Verabredung auch den Sinn — das Vorzeichen — der Spannung. Denn zu ihr gehören zwei Durchlaufungssinne; zu jedem dieser beiden Durchlaufungssinne gehört ein bestimmter (polarer oder transversaler) Vektor, andererseits können wir in einer ein für allemal fest zu verabredenden Weise jedem der beiden Durchlaufungssinne eines der beiden Ufer der Querschnittsstelle zuordnen, an welcher die Spannung wirkt. Also ist durch das Mittelglied unserer Strecke jedes Ufer der betreffenden Querschnittsstelle auf einen bestimmten Vektor bezogen und diese Zuordnung läßt sich natürlich so einrichten, daß dieser Vektor direkt die Kraft darstellt, welche an diesem Ufer angreift, womit dann der Sinn der Spannung festgelegt ist. Man kann z. B. so verfahren: Nachdem die Benennungen $a\beta$ der Strecke und ab des Querschnittes eingeführt sind, denke man a dem a , β dem b entsprechend, also den Vektor ($a\beta$) dem Vektor (ab) entsprechend. Andererseits ordne man dem Vektor (ab) etwa dasjenige Querschnittsufer zu, welches links von einem in der Richtung von a nach b auf dem Querschnitte Fortschreitenden liegt. Dann repräsentiert gegebenenfalls der Vektor ($a\beta$) die an diesem linken, der Vektor (βa) die am rechten Ufer angreifende Kraft.

Ganz analog ist natürlich auch ein *Ebenenstück* (bez. *Flächenstück*) ohne bestimmten Umlaufungssinn ein sehr geeignetes Mittel zur geometrischen Repräsentation der auf ein zugehöriges Flächenelement wirkenden Spannung.

Beispiele zu diesen allgemeinen Entwicklungen werden wir gleich und im § 4 kennen lernen.

2. Könnte man im Raum mit derselben Leichtigkeit Ebenen „zeichnen“ wie gerade Linien in der Ebene, so würde man bei der Ermittlung der Spannungen eines ebenen Fachwerks, wahrscheinlich das Hauptaugenmerk auf die Spannungsf läche richten, da sie ja die ganzen Spannungsverhältnisse einfach und übersichtlich darstellt. Diese Fähigkeit besitzen wir ja nun nicht; man hat sich daher frühzeitig bemüht, ebene Figuren zu finden, welche möglichst dasselbe leisten wie die Spannungsf läche. Diese Figuren nennt man „*Kräftepläne*“; wir werden sehen, daß sie zur Spannungsf läche in engem Zusammenhange stehen.

Die Kräftepläne der Fachwerke wollen wir, wie Maxwell selbst tut, als einen speziellen Fall von Maxwells „reziproken ebenen Diagrammen“ auffassen, wir werden sie also am einfachsten von diesen aus erreichen.



Maxwells Definition ist folgende: In einer xy -Ebene befinde sich irgend ein Kontinuum oder Diskontinuum mit der Spannungsfäche: $z = F(x, y)$. Wir lassen ihm in einer $\xi\eta$ -Ebene das durch die Gleichungen:

$$(21) \quad \xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}$$

definierte Kontinuum oder Diskontinuum mit der Spannungsfäche:

$$(22) \quad \zeta = \Phi(\xi, \eta)$$

entsprechen, wobei Φ durch die Gleichung:

$$(23) \quad F + \Phi = x\xi + y\eta$$

definiert ist. Die so in einem xyz -Raum und einem $\xi\eta\zeta$ -Raum definierten Spannungsfächen stehen in einem reziproken Verhältnisse zueinander, welches man im Sinne der projektiven Geometrie dadurch ausdrücken kann, daß man sagt: Jede der beiden Spannungsfächen ist immer das *polare Abbild* der anderen in bezug auf das Paraboloid:

$$(24) \quad 2z = x^2 + y^2.$$

Insofern man von der Bedeutung der Flächen F und Φ als Spannungsfächen dabei auch absehen kann, da ihre Reziprozität ja offenbar nicht daran hängt, wollen wir von ihnen allgemeiner als von „reziproken (räumlichen) Figuren“ reden. Auch die beiden ebenen Figuren, welche man durch Projektion der reziproken Figuren auf die xy - und die $\xi\eta$ -Ebene erhält und die wir der Kürze halber „Diagramme“ nennen wollen, sind reziprok, denn neben den Gleichungen (21) gelten auch die reziproken:

$$(25) \quad x = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

wie man durch Differentiation der Gleichung (23) sofort bestätigt. Wir reden daher von den Diagrammen als von „reziproken (ebenen) Diagrammen“.

Was leistet nun das $\xi\eta$ -Diagramm, wenn wir uns über die in dem xy -Diagramm durch die Spannungsfunktion F hervorgerufenen Spannungen unterrichten wollen? In der xy -Ebene bezeichnen wir ein Bogenelement mit ds , in der $\xi\eta$ -Ebene mit $d\sigma$ (mit den Komponenten $d\xi, d\eta$). Dann ist nach den Gleichungen (3):

$$(26) \quad X ds = d\eta, \quad Y ds = -d\xi.$$

also für ein endliches Bogenstück ab , dem das Bogenstück $\alpha\beta$ entsprechen möge:

$$(27) \quad X_r = \eta_\beta - \eta_\alpha, \quad Y_r = -(\xi_\beta - \xi_\alpha).$$

Die Verbindungsstrecke der beiden Endpunkte α und β eines endlichen oder unendlich kleinen Bogenstückes der $\xi\eta$ -Ebene liefert, als trans-

versaler Vektor aufgefaßt, die auf das entsprechende Bogenstück ab der xy -Ebene kommende resultierende Spannung nach Größe, Richtung und Sinn; und zwar liefert der transversale Vektor ($\alpha\beta$) die Wirkung der Spannung auf dasjenige Querschnittufer, welches an der linken Seite eines von a nach b Hinschreitenden liegt, der transversale Vektor ($\beta\alpha$) die Wirkung auf das rechte Ufer. Diese Regel gilt indessen nur so lange, als die xyz -Figur einwertig ist, im anderen Falle, wo also das xy -Diagramm die Ebene doppelt bedeckt, hat man in obiger Regel für das untere Blatt links und rechts zu vertauschen.

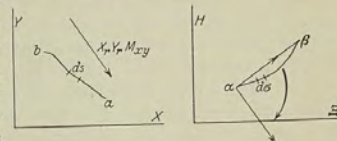


Fig. 14.

Den Fall *kontinuierlicher* Diagramme findet man bei Maxwell an Beispielen erörtert und illustriert¹⁰⁾; es handelt sich dabei um eines der weiter oben erwähnten Beispiele zur Balkentheorie (S. 669). Wir wollen hier, um auf die Verhältnisse bei den *Fachwerken* zu kommen, den Fall betrachten, wo die xyz -Figur ein aus ebenflächigen Polygonen zusammengesetztes, geschlossenes Raumpolyeder ist. Es ist dann wegen der Polarverwandtschaft zum Paraboloid auch die $\xi\eta\zeta$ -Figur ein solches, und zwar entspricht wechselseitig jedem Polygon des einen Polyeders eine Ecke des andern, jeder Ecke ein Polygon, jeder Kante eine Kante. Entsprechendes gilt dann für die beiden reziproken Diagramme, außerdem gilt für sie, daß entsprechende Kanten aufeinander senkrecht stehen und daß die Kanten des einen Diagramms — in der schon geschilderten Weise als transversale Vektoren gedeutet — in den entsprechenden Kanten des andern Diagramms Spannungen ergeben, welche an diesem andern Diagramme im Gleichgewicht sind. Da die Raumpolyeder geschlossene Flächen sind, überdeckt jedes Diagramm die Fläche seines Umrißpolygons mindestens doppelt.

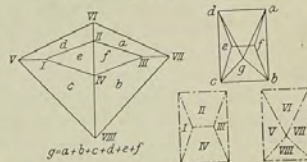


Fig. 15.

(Fig. 15.)

3. Dieser Ansatz hat für die Fachwerkstatik verschiedenartige Bedeutung. Wir können z. B. (vgl. § 2) irgendeines der beiden Diagramme unmittelbar als Fachwerk auffassen, dann liefert uns das andere Diagramm

¹⁰⁾ In der Abhandlung von Zitat f, S. 661. (Tafel XIV.)



ein in diesem Fachwerke mögliches Selbstspannungssystem; wir können aber auch wie folgt verfahren. Wir zeichnen an dem einen der beiden Raumpolyeder irgend ein Polygon aus und sagen: Das Polyeder ist eine zu einem Fachwerke mit äußerem Kraftangriff gehörige Spannungsfläche, deren Polyederzone mit einer Ebene geschnitten ist — eben der Ebene des ausgezeichneten Polygons. In der Projektion — im Diagramm — haben wir dann die von den Ecken des ausgezeichneten Polygons auslaufenden Kanten als die Aktionslinien eines Gleichgewichtssystems von Kräften aufzufassen, die Projektion des ausgezeichneten Polygons als ein sog. Seilpolygon dieses Kraftsystems und die übrigen Kanten als die Stäbe eines Fachwerkes, welches unter dem Einflusse dieses Kraftsystems steht. Wir bekommen dann einen *Kräfteplan* des so definierten Fachwerkes bei

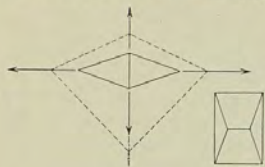


Fig. 16.

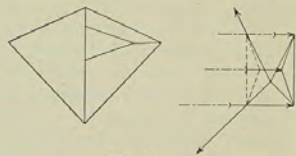


Fig. 17.

diesem Kraftangriff, wenn wir in dem reziproken Diagramme die überflüssigen Linien — das sind die dem Seilpolygon entsprechenden Kanten — fortlassen. So bekommen wir z. B., wenn wir in Fig. 15 links das Polygon g auszeichnen, die Anordnung Fig. 16, und die Anordnung Fig. 17, wenn wir in Fig. 15 rechts das Polygon I auszeichnen.

Der Kräfteplan eines Fachwerkes enthält natürlich genau ebensoviele wesentliche Unbestimmtheiten wie die Spannungsfläche des Fachwerkes. Diese Tatsache, daß es ebensoviel Kräftepläne zu einem Fachwerke gibt wie Lösungen der Spannungsaufgabe, wird in den Lehrbüchern der graphischen Statik meist nicht klar hervorgehoben, was daran liegen mag, daß man sich dort wesentlich mit statisch bestimmten Fachwerken beschäftigt, wo natürlich der Kräfteplan keine wesentlichen Willkürlichkeiten zuläßt.

Von besonderem Interesse sind die zu unserm mehrfach-zusammenhängenden Fachwerke von § 2 gehörigen Kräftepläne. Entsprechend dem Umstande, daß die Spannungsfläche dieses Fachwerkes affin-periodisch ist, ist auch der Kräfteplan keine geschlossene Figur mehr, sondern besteht aus den parallel gestellten, kongruenten Wiederholungen einer und derselben Grundfigur (Fig. 18 auf S. 685). —

Eine merkwürdige Tatsache wäre hier noch zu erwähnen, nämlich die, daß man bekanntlich in der Praxis meist nicht mit dem *Maxwellschen Kräfteplan* operiert, sondern mit dem sog. „*Cremonaschen Kräfteplan*“. Dieser ist nichts anderes als der um einen rechten Winkel gedrehte Maxwellsche Kräfteplan, und auch da, wo Cremona die selbständige Begründung seiner Theorie gibt, bezieht er sich ausdrücklich auf Maxwell¹⁷⁾. Er benutzt, wie bekannt, an Stelle der Maxwellschen Formeln (21) und (23) die folgenden zur Definition reziproker Figuren:

$$\xi = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad z - \zeta = \eta x - \xi y.$$

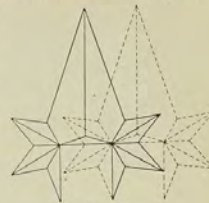


Fig. 18.

Das heißt soviel wie: An die Stelle der Polarverwandtschaft zu dem Paraboloiden der Gl. (24) tritt die durch die Cremonaschen Gleichungen vermittelte Polarverwandtschaft eines *Möbiusschen Nullsystems*. Wenn Maxwell der Ebene:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma$$

den Punkt:

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad (\zeta = -\gamma)$$

zuordnet, so Cremona den Punkt:

$$\xi = -\beta, \quad \eta = \alpha, \quad (\zeta = \gamma);$$

bei Cremona laufen also die Kanten des Kräfteplans den entsprechenden Stäben des Fachwerkes parallel, statt daß sie, wie bei Maxwell, auf ihnen senkrecht stehen; die Spannungen werden also nicht mehr durch *transversale*, sondern durch *polare* Vektoren dargestellt. Wenn man nun geneigt ist, die Cremonasche Anordnung für praktischer zu halten, so liegt das zum Teil gewiß daran, daß einem die Auffassung einer Strecke als *polarer* Vektor von der allgemeinen Mechanik her geläufig ist, während die Auffassung der Strecke als *transversaler* Vektor etwas Fremdes hat — zum Teil auch wohl daran, daß man es bequemer finden mag, zu gegebenen Geraden Parallele zu ziehen als Senkrechte auf ihnen zu errichten. *Theoretisch verdient jedenfalls die Maxwellsche Anordnung den Vorzug, weil sie allein eine Verallgemeinerung auf den Raum zuläßt* (die wir so gleich vornehmen werden).

Übrigens dürfte das ganze Kapitel „Reziproke Diagramme“ bei Maxwell interessanter als bei Cremona zu lesen sein. Abgesehen davon, daß

¹⁷⁾ Siehe besonders: L. Cremona: Les figures réciproques en statique graphique (Übers. v. Bossut), Paris 1885, S. 7 und 8. Zuerst: L. Cremona, Le figure reciproche nella statica grafica, Mailand 1872; 3. Aufl. mit Einführung von G. Jung, Mailand 1879.



Cremona die Betrachtung auf Diskontinua (Fachwerke) beschränkt, erscheint bei ihm die Theorie dadurch verflacht, daß die Idee der Spannungsfläche nicht betont ist, welche doch die Quintessenz der ganzen Theorie ist.

4. Wir wollen nunmehr noch mit Maxwell die Formeln (21) bis (25) räumlich verallgemeinern und, zunächst rein geometrisch, *reziproke räumliche Diagramme* einführen. In einem xyz -Raum sei irgendeine Figur — ein „räumliches Diagramm“ — gegeben, ferner eine Funktion $F(x, y, z)$, die wir aber erst später als eine zu diesem Diagramm gehörige „Spannungsfunktion“ deuten werden. Mit Hilfe der Gleichungen:

$$(28) \quad \xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial F}{\partial z}$$

ordnen wir diesem Diagramm ein zweites Diagramm in einem $\xi\eta\zeta$ -Raum zu. Die Beziehung beider Diagramme ist dann eine reziproke; wenn wir eine Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ durch die Gleichung:

$$(29) \quad F + \Phi = x\xi + y\eta + z\zeta$$

definieren, so ist:

$$(30) \quad x = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad y = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad z = \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta},$$

was man durch Differentiation der Gl. (29) leicht bestätigt.

Insbesondere stellen wir uns nun, ebenfalls nach dem Vorgange Maxwells, „*reziproke Zellensysteme*“ her und zwar als ein räumliches Analogon zu den Fachwerkdiagrammen der Figuren 10, 12, 15, welche die Fläche eines gewissen Umrißpolygons doppelt bedecken. Wir denken uns im

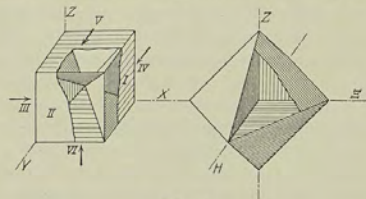


Fig. 19.

xyz -Raum eine Anordnung aneinander gereihter Polyeder (Zellen), welche den Inhalt eines gewissen geschlossenen Umrißpolyeders zweimal ausfüllen. So erhalten wir ein erstes räumliches Zellensystem, von dessen Zellen, Wänden, Kanten und Ecken wir reden. (Fig. 19 links.) Wir bilden uns dann eine stetige Funktion $F(x, y, z)$ von der Art, daß sie innerhalb der einzelnen Zelle J immer mit einer linearen Funktion $a_i x + b_i y + c_i z + d_i$

übereinstimmt und daß, wenn J und K in der Wand JK zusammenstoßen, die Gleichung dieser Wand durch:

$$(a_i - a_k)x + (b_i - b_k)y + (c_i - c_k)z + d_i - d_k = 0$$

repräsentiert wird. Diesem Zellensystem entspricht dann vermöge der Formeln (28) im $\xi\eta\zeta$ -Raum ein zweites Zellensystem. Beide Zellensysteme stehen in folgender reziproker Beziehung: *Jeder Zelle des einen Diagramms entspricht eine Ecke des andern, jeder Ecke eine Zelle, jeder Wand eine Kante, jeder Kante eine Wand. Jede Kante des einen Systems steht auf der ihr entsprechenden Wand des andern Systems senkrecht.*

Bei dem zur Belebung der Vorstellung von K. Wieghardt gebildeten Beispiel der Fig. 19 liegen die Verhältnisse so. Wir haben:

	links:		rechts:
7 Zellen	(den Würfel selbst und die 6 Pyramiden, in die er zerfällt, wenn man ihn längs der zwölf vom Würfelmittelpunkt nach den Kanten laufenden Dreiecke zerschneidet).	7 Ecken	(die 6 Oktaederecken und seinen Mittelpunkt).
18 Wände	(die 6 Würfelflächen und die 12 gleichschenkligen Dreiecke mit den 12 Würfelmittelpunkten als Grundlinien und dem Mittelpunkt als Scheitel).	18 Kanten	(die 12 Oktaederkanten und die 6 von seinem Mittelpunkt aus nach den Oktaederecken gezogenen Strecken).
20 Kanten	(die 12 Würfelmittelpunkte und die 8 von seinem Mittelpunkt aus nach den Würfelmittelpunkten gezogenen Strecken).	20 Wände	(die 8 Oktaederflächen und die 12 gleichschenkligen-rechtwinkligen Dreiecke mit den 12 Oktaederkanten als Hypotenusen und dem Mittelpunkt als Scheitel).
9 Ecken	(die 8 Würfecken und den Würfelmittelpunkt).	9 Zellen	(das Oktaeder selbst und die 8 Tetraeder, in die es zerfällt, wenn man es längs der drei Ebenen zerschneidet, welche durch je vier Oktaederecken gehen).



Die Funktion $F(x, y, z)$ hat in den einzelnen Zellen folgende Werte:

in der Würfelzelle:	Null
in der Pyramidenzelle I:	$x - 1$
" " " II:	$y - 1$
" " " III:	$-x$
" " " IV:	$-y$
" " " V:	$z - 1$
" " " VI:	$-z$

Eine Benutzung dieser reziproken Zellsysteme für Zwecke der Mechanik geben wir im nächsten Paragraphen.

§ 4.

Einiges über räumliche Spannungssysteme und zugehörige Spannungsfunktionen.

I. Der Gedanke liegt gewiß nahe, die Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen eines räumlichen Kontinuums (Fig. 20):

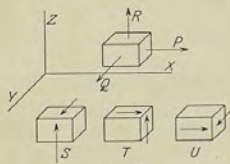


Fig. 20.

$$(31) \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

(falls nur Oberflächenkräfte wirken)

mit einer Funktion $F(x, y, z)$ in einen Zusammenhang zu bringen, welcher dem Airyschen Ansatz bei zwei Dimensionen analog wäre. Indessen findet Maxwell, daß man, wie man es auch machen möge, auf diese Weise nicht zu allen möglichen Spannungssystemen des Kontinuums gelangt, daß hierzu vielmehr die obigen Gleichungen zu drei verschiedenen Funktionen in Beziehung gesetzt werden müssen. Er führt dies auch näher aus.

Es sind also spezielle, aber interessante räumliche Spannungsverteilungen, welche wir erhalten, wenn wir nun mit Maxwell zwei verschiedenartige räumliche Erweiterungen der Airyschen Formeln (2) vornehmen:

Der erste Ansatz ist:

$$(32) \begin{cases} P = \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & Q = \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & R = \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \\ S = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, & T = -\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}, & U = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

[wo jetzt $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ bedeutet].

Der zweite Ansatz geht davon aus, daß die P, Q, U des Airyschen Ansatzes durch folgende Formel definiert werden können — unter α, β beliebige Größen verstanden:

$$P \cdot \alpha^2 + 2U \cdot \alpha \beta + Q \cdot \beta^2 = - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \alpha \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{vmatrix},$$

woraus sich dann folgende räumliche Verallgemeinerung ergibt:

$$(33) \begin{cases} P \cdot \alpha^2 + Q \cdot \beta^2 + R \cdot \gamma^2 \\ + 2S \cdot \beta \gamma + 2T \cdot \alpha \gamma + 2U \cdot \alpha \beta = - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \alpha \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \beta \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}, \end{cases}$$

wo α, β, γ beliebige Größen bedeuten.

Daß die Spannungskomponenten von (32) und (33) bei beliebigem F die Gleichungen (31) befriedigen, bestätigt man leicht.

2. Der Inhalt der Formeln (32) und (33) läßt sich besser schildern, wenn wir gleich an die Idee der reziproken Diagramme anknüpfen. Die Fragestellung ist dann so: Durch eine gegebene Funktion $F(x, y, z)$ ist einerseits eine reziproke Beziehung zwischen einem xyz -Diagramm und einem $\xi\eta\zeta$ -Diagramm gemäß den Formeln (28) gegeben, andererseits eine Spannungsverteilung im xyz -Diagramm gemäß den Formeln (32) oder (33). Was nützt uns die Kenntnis des $\xi\eta\zeta$ -Diagrammes, wenn wir uns über diese Spannungsverteilung unterrichten wollen?

Es sei do ein Flächenelement im xyz -Raum mit der Normalen n , $d\omega$ das entsprechende Flächenelement im $\xi\eta\zeta$ -Raume. Wir finden dann, bei Verwendung des ersten Maxwellschen Ansatzes (Gleichungen (32)), auf do einmal eine Normalspannung vom Betrage ΔF pro Flächeneinheit, zweitens eine Spannung [im Flächenelement selbst] mit den Komponenten $\frac{\partial \xi}{\partial n}, \frac{\partial \eta}{\partial n}, \frac{\partial \zeta}{\partial n}$ pro Flächeneinheit. Bei Verwendung des zweiten Ansatzes (33) hingegen liefert uns einfach das Flächenelement $d\omega$, als Plangröße aufgefaßt, die auf do kommende Spannung nach Größe, Richtung und Sinn. Was ferner die über ein endliches Flächenstück σ resultierende Spannung angeht, so finden wir bei Verwendung des ersten Ansatzes deren Komponenten durch die Gleichungen:

$$(34) \begin{cases} X_r = \iint (\Delta F \cdot \cos nx - \frac{\partial \xi}{\partial n}) d\omega, & Y_r = \dots, & Z_r = \dots; \\ M_{yz} = \dots, & M_{zx} = \dots, & M_{xy} = \iint \left\{ x \left(\Delta F \cdot \cos ny - \frac{\partial \eta}{\partial n} \right) - y \left(\Delta F \cdot \cos nx - \frac{\partial \xi}{\partial n} \right) \right\} d\omega, \end{cases}$$



bestimmt, oder, indem wir die Flächenintegrale in Integrale über die Randkurve der Fläche verwandeln, durch die Gleichungen:

$$(35) \begin{cases} X_r = \int \eta dz - \zeta dy, & Y_r = \dots, & Z_r = \dots; \\ M_{yz} = \dots, & M_{zx} = \dots, & M_{xy} = \int \zeta (xdx + ydy + zdz) - (x\zeta + y\eta + z\zeta - F) dz \end{cases}$$

Bei Verwendung des zweiten Ansatzes hingegen liefert uns das dem Flächenstück o entsprechende Flächenstück \bar{o} , als Plangröße aufgefaßt, die über o resultierende Spannung nach Größe, Richtung und Sinn (um die drei Drehmomente kümmern wir uns nicht).

Die so gefundenen gegenseitigen Beziehungen zwischen einer Spannungsfunktion $F(x, y, z)$, die dem zugehörigen Spannungssysteme und seinem reziproken Diagramme sind den entsprechenden Beziehungen bei zwei Dimensionen ganz analog. Besonders deutlich ist dies bei Verwendung des zweiten Maxwell'schen Ansatzes; das als Plangröße aufzufassende Flächenelement $d\bar{o}$ ist die direkte räumliche Verallgemeinerung des als transversaler Vektor aufgefaßten Bogenelementes do der Ebene. Aber auch beim ersten Ansatz ist die Analogie leicht zu finden. Wir haben z. B. bei zwei Dimensionen für X_r zunächst die Formel (vgl. Gl. (3)):

$$(36) \quad X_r = \int P dy - U dx = \int (P \cos nx + U \cos ny) ds,$$

und das ist nichts anderes als

$$\int (\Delta F \cdot \cos nx - \frac{\partial \xi}{\partial n}) ds,$$

[wo $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ist], was der ersten räumlichen Gleichung (34) analog ist; ebenso hat die erste Gleichung (35) ihr ebenes Analogon, nämlich die den Gleichungen (27) von S. 682 entnommene Gleichung:

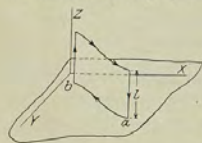


Fig. 21.

$X_r = \eta_\beta - \eta_\alpha$,
denn bei zwei Dimensionen ist $\zeta = \frac{\partial F}{\partial z}$ Null, also bekommen wir für den auf dem Bogenstücke ab (Fig. 21) errichteten Vertikalzylinder von der Höhe Eins die Spannungskomponente:

$$(37) \quad \int \eta dz - \zeta dy = \eta_\beta - \eta_\alpha.$$

Noch konsequenter könnte man die Analogie durchführen, wenn man als Hilfsmittel einen „vierdimensionalen Raum“ einführt und in ihm, der Formel:

$$t = F(x, y, z)$$

entsprechend, eine „Airy'sche Mannigfaltigkeit“ konstruierte. Mit den Formeln:

$$\xi = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad t + \vartheta = x\xi + y\eta + z\zeta$$

würde man diese Airy'sche Mannigfaltigkeit in bezug auf das „Paraboloid“:

$$2t = x^2 + y^2 + z^2$$

„polarisieren“, und die „senkrechte“ Projektion dieses Polargebildes auf den $\xi\eta\zeta$ -Raum ergäbe in diesem das zu unserm Spannungssysteme reziproke Diagramm. Solche Überlegungen würden uns in vierdimensionale Beziehungen führen, die an sich sehr schön und überzeugend sind, der Mehrzahl der Leser aber doch unnötige Schwierigkeiten bereiten würden.

3. Nach den gegebenen Entwicklungen bedarf es jetzt nur noch geringer Mühe, um zu der im folgenden beschriebenen mechanischen Deutung unserer früher betrachteten reziproken Zellsysteme zu gelangen.

Mit beiden Maxwell'schen Ansätzen erhalten wir zwei Spannungssysteme, die an dem einen oder andern der beiden reziproken Zellsysteme im Gleichgewicht sind.

Und zwar erhalten wir das eine Mal Spannungen in den Wänden des Diagramms, die der Größe nach durch die Länge der entsprechenden Kanten des andern Diagramms gegeben sind (homogene Spannungen, wie sie etwa in den Zellwänden eines Seifenschaums herrschen). Das andere Mal erhalten wir Spannungen in den Kanten des Diagramms, die der Größe nach durch die Flächeninhalte der entsprechenden Wände des andern Diagramms gegeben sind.

Also nur der zweite räumliche Ansatz führt dazu, Spannungssysteme in räumlichen Fachwerken kennen zu lernen. Deshalb ist in dem Henneberg'schen Referat auch nur von diesem zweiten Ansatz die Rede (Nr. 41) und auch das nur mehr beiläufig, da die allgemeine Lehre von der Airy'schen Spannungsfunktion dort nicht vorausgesetzt werden konnte.

Die Statik der Spannungszustände irgendwelcher Träger gewinnt offenbar, indem man den Gesamtgedankengang Maxwell's herannimmt, bedeutend an Interesse; überhaupt aber treten ihre verschiedenen Teile so in einen wunderbaren Zusammenhang, der bisher nur wenig bekannt gewesen sein möchte. Deshalb wurde in der vorstehenden Darstellung die Herausarbeitung dieses Zusammenhanges als eigentliches Ziel betrachtet, womit zugleich für neue Entwicklungen der Theorie die Grundlage gewonnen ist.

Göttingen, den 10. Februar 1904.



LXXVIII. Über Selbstspannungen ebener Diagramme¹⁾.

[Math. Annalen, Bd. 67 (1909).]

In einer Arbeit über „Spannungsflächen und reziproke Diagramme“, die ich vor einigen Jahren zusammen mit K. Wieghardt im Archiv der Mathematik und Physik veröffentlichte²⁾, habe ich gezeigt, daß die Wiederheranziehung der Originalideen Maxwells dem bezeichneten Gegenstande eine Reihe neuer und interessanter Seiten abgewinnen läßt. Dabei blieb ein bestimmter feinerer Punkt unerledigt, der im folgenden klargestellt werden soll. Ich gebe dabei meiner Darlegung eine elementare, analytisch-geometrische Form, die auch ohne Rückgang auf die frühere Publikation verständlich sein dürfte. Auf rein geometrische Begründung, insbesondere die Einzelheiten der graphischen Darstellung gehe ich dabei nicht ein; diese werden, soweit sie erwünscht scheinen, in einer Arbeit meines Assistenten, Herrn Fr. Pfeiffer, enthalten sein, welche demnächst in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erscheinen wird³⁾.

1. Es sei ein gewöhnliches *Eulersches Polyeder* gegeben, d. h. eine aus ebenen Facetten zusammengesetzte Oberfläche, welche zwei getrennte Seiten besitzt und übrigens dem Riemannschen Geschlecht $p = 0$ angehört (den „Zusammenhang“ 1 besitzt)⁴⁾. Weil zwei getrennte Flächenseiten vorhanden sind, können wir für jeden Eckpunkt des Polyeders einen bestimmten Umlaufungssinn festlegen, indem wir verabreden, daß dieser Sinn von der einen Flächenseite aus gesehen mit dem Uhrzeigersinn übereinstimmen soll. Nun seien die Polyederebenen, die in irgendeinem Eckpunkte (i) des Polyeders zusammenstoßen, gemäß der durch diesen Sinn festgelegten Reihenfolge durch nachstehende Gleichungen gegeben:

$$(1) \quad \begin{cases} z = a_k^i x + b_k^i y + c_k^i, \\ z = a_l^i x + b_l^i y + c_l^i, \\ z = a_m^i x + b_m^i y + c_m^i, \\ \dots \end{cases}$$

¹⁾ Dieser Aufsatz ist aus einer Vorlesung vom Sommer 1909 entstanden.
²⁾ III. Reihe, Bd. 8 (1904). [Vgl. die unmittelbar vorangehende Abh. LXXVII.]
³⁾ [Gemeint ist die Abhandlung „Zur Statik ebener Fachwerke“ in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 58 (1909/10).]
⁴⁾ Die Polyederoberfläche kann sich übrigens beliebig durchsetzen.

Man hat dann für die von (i) auslaufenden Polyederkanten, genauer für ihre Projektionen auf die XY -Ebene, die Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = (a_k^i - a_l^i)x + (b_k^i - b_l^i)y + (c_k^i - c_l^i), \\ 0 = (a_l^i - a_m^i)x + (b_l^i - b_m^i)y + (c_l^i - c_m^i), \\ \dots \end{cases}$$

Die so gewonnenen Projektionen bilden ein *ebenes Diagramm*, für welches wir aus den vorstehenden Gleichungen unmittelbar einen *Selbstspannungszustand* aufstellen können. Man lasse nämlich am i -ten Knotenpunkte des Diagramms (der dem i -ten Eckpunkte des Polyeders als Projektion entspricht) Kräfte mit folgenden X -, Y -Komponenten angreifen:

$$(3) \quad \begin{cases} X_{kl}^i = b_k^i - b_l^i, & Y_{kl}^i = a_l^i - a_k^i; \\ X_{lm}^i = b_l^i - b_m^i, & Y_{lm}^i = a_m^i - a_l^i; \\ \dots \end{cases}$$

Diese Kräfte wirken, wie man sofort erkennt, der Reihe nach längs der einzelnen durch (2) gegebenen Kanten („Stäbe“) des Diagramms und stehen übrigens am i -ten Knotenpunkte im Gleichgewicht, weil die Summe ihrer X -Komponenten, wie ihrer Y -Komponenten verschwindet. Andererseits gehört zu dem zweiten Knotenpunkte, den etwa die Kante kl trägt, — er möge j heißen —, gemäß der für die Eckpunkte des Ausgangspolyeders verabredeten Umlaufungsregel (anders ausgedrückt: gemäß dem für unser Polyeder geltenden Moebiiusschen Kantengesetz) eine Kraft:

$$(4) \quad X_{jk}^i = b_l^i - b_k^i, \quad Y_{jk}^i = a_k^i - a_l^i,$$

welche der Kraft X_{kl}^i, Y_{kl}^i entgegengesetzt gleich ist. Die an den sämtlichen Knotenpunkten des Diagramms angreifenden Kräfte ergeben also ein längs der Stäbe des Diagramms wirkendes, mit sich selbst im Gleichgewicht stehendes *Selbstspannungssystem*; sie ergeben, wie wir kurz sagen wollen, eine *Selbstspannung* des Diagramms.

Ich erinnere noch daran, wie man (nach Maxwell-Cremona) von dem so gewählten Ausgangspunkte aus das zugehörige, unserem Diagramm *reziproke* Diagramm und damit den Kräfteplan unserer Selbstspannung konstruiert: man hat einfach jeder Polyederebene

$$\begin{aligned} \text{den Punkt} & \quad z = ax + by + c \\ (5) & \quad x = b, \quad y = -a \end{aligned}$$

entsprechend zu setzen. In der Tat sind dann die Kräfte (3), die entlang den Stäben unseres Diagramms wirken [unter Einhaltung einer zu verabredenden Zeichenregel], der Größe und Richtung nach durch die die Punkte des reziproken Diagramms verbindenden Vektoren gegeben.



2. Es ist nun nicht schwer zu sehen, daß man den geschilderten, von Maxwell herrührenden Ansatz ohne weiteres umkehren kann. Um die hierfür nötige Überlegung kurz und präzise zu fassen, ist es zweckmäßig, zwischen die Kanten unseres Diagramms entsprechend den Seitenflächen des Ausgangspolyeders *Blätter* eingespannt zu denken (deren einzelnes also eine von einer Anzahl Stäbe des Diagramms begrenzte Polygonfläche vorstellen wird). Diese Blätter bilden, zusammengenommen, eine dem Ausgangspolyeder Punkt für Punkt entsprechende Fläche, die also, gleich dem Polyeder, dem Geschlecht $p=0$ angehört, und auf die sich unsere auf das Ausgangspolyeder bezügliche Verabredung betreffs des Umlaufsinnes der einzelnen Eckpunkte (Knotenpunkte) überträgt. Wer irgend an die Vorstellung einer über die Ebene mehrblättrig ausgebreiteten Riemannschen Fläche gewöhnt ist, wird in der Erfassung dieser einen Teil der XY -Ebene ebenfalls mehrfach überdeckenden *Hilfsfläche* keinerlei Schwierigkeiten finden.

Man stelle nun irgendeine zu unserem Diagramm gehörige Selbstspannung auf. Wir erfahren dann aus den Gleichungen (3) für jede Kante des Diagramms zugehörige Werte der $a_k^i - a_l^i$, $b_k^i - b_l^i$, aus den Gleichungen (2) einen zugehörigen Wert von $c_k^i - c_l^i$. Die Frage ist, ob wir von der Kenntnis dieser *Differenzen* aus, gestützt auf die Aufeinanderfolge der Blätter unserer in das Diagramm eingespannten Hilfsfläche, zu zugehörigen Werten der a_k^i , b_k^i , c_k^i selbst und damit zu einem Maxwell-Polyeder widerspruchsfrei übergehen können.

Dies ist nun in der Tat der Fall und zwar in der Weise, daß wir für eines der Blätter unserer Hilfsfläche die zugehörigen a, b, c , — sagen wir als a_0, b_0, c_0 — beliebig annehmen können, dann aber alles bestimmt ist: Zum Beweise wollen wir uns folgende Vorstellungsweise bilden. Wir wollen die gesuchten a, b, c als Funktionswerte auffassen, die zu den einzelnen Punkten der Hilfsfläche gehören, die also, solange sich der Punkt innerhalb eines Blattes der Hilfsfläche bewegt, konstant bleiben, jedesmal aber, wenn der Punkt über eine Kante hinweg in ein neues Blatt tritt, gemäß den Gleichungen

$$(6) \quad \Delta a = a_k^i - a_l^i, \quad \Delta b = b_k^i - b_l^i, \quad 0 = \Delta a \cdot x + \Delta b \cdot y + \Delta c$$

springen. Die Frage ist einfach, ob man diese Differenzgleichungen, von den irgendeinem Punkte der Hilfsfläche beigelegten Anfangswerten a_0, b_0, c_0 beginnend, über unsere Hilfsfläche hin *eindeutig integrieren* kann, und diese Frage ist, gemäß bekannten Theorien, zu bejahen, weil unsere Hilfsfläche dem Geschlechte $p=0$ angehört und die Umkreisung eines beliebigen Knotenpunktes (singulären Punktes der Differenzgleichungen) allemal $\sum \Delta a = 0$, $\sum \Delta b = 0$, $\sum \Delta c = 0$ ergibt.

Also: Zu jedem Selbstspannungssystem unseres Diagramms gehört, nachdem man die Konstanten a_0, b_0, c_0 willkürlich angenommen hat, ein bestimmtes Maxwell'sches Polyeder. Eine Abänderung der a_0, b_0, c_0 bedeutet, daß man die rechten Seiten der Formeln (1) — der Gleichungen der Seitenebenen des Polyeders — alle um dieselbe lineare Funktion $ax + by + c$ vermehrt. Ist die Zahl der möglichen Selbstspannungen ∞^n , so ist dementsprechend die Zahl der zum Diagramm gehörigen Maxwell'schen Polyeder ∞^{n+3} . Die Zahl der reziproken Diagramme aber ist, weil in den Formeln (5) die c fortfallen, nur ∞^{n+2} , und von diesen unterscheiden sich jedesmal ∞^2 nur durch eine Parallelverschiebung über die Ebene des Zeichenbrettes hin.

Es ist von vornherein klar, was es heißt, zwei an demselben Diagramm angreifende Selbstspannungen zu addieren. Genau so wird man zwei zu demselben Diagramm gehörige Maxwell'sche Polyeder *addieren* können. Man vereinigt zu dem Zwecke einfach die beiden demselben Blatte der Hilfsfläche entsprechenden Ebenen der beiden Polyeder:

$$z = a'x + b'y + c' \quad \text{und} \quad z = a''x + b''y + c''$$

zu der neuen Ebene

$$(7) \quad z = (a'x + b'y + c') + (a''x + b''y + c'').$$

Die Selbstspannungen und die Polyeder bilden in diesem Sinne je eine lineare Schar. Gibt es n „linear-unabhängige“ Selbstspannungen S_1, S_2, \dots, S_n , so stellt sich die allgemeinste Selbstspannung des Diagramms in der Gestalt

$$(8) \quad \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_n S_n$$

dar, wo die λ beliebig zu wählende Konstante sind. Es gibt dann $(n+3)$ linear-unabhängige Maxwell'sche Polyeder; der Überschuß der drei Einheiten kommt auf die drei vorhin eingeführten Integrationskonstanten. Ebenso gibt es $(n+2)$ linear-unabhängige reziproke Diagramme.

3. In dem oben zitierten Aufsätze von Wieghardt und mir [Abh. LXXVII] ist bereits angedeutet, wie sich die soweit entwickelten Sätze modifizieren, wenn die Hilfsfläche, die in die Stäbe des Diagramms eingespannt ist, höheres Geschlecht ($p > 0$) besitzt; ich gehe hierauf gegenwärtig nicht näher ein. Dagegen wurde damals nur erst gefragt, *welche Bewandnis es mit solchen Diagrammen haben mag, die, durch Einfügung geeigneter Blätter vervollständigt, als Projektion einseitiger Polyeder erscheinen* („Moebiuscher“ Polyeder, bei denen man keine zwei Flächen-seiten unterscheiden kann, weil die eine Flächenseite des einzelnen Begrenzungspolygons beim Hinschreiten über das Polyeder kontinuierlich in die andere Flächenseite des Begrenzungspolygons übergeht).



Diese weitere Frage zu beantworten ist der eigentliche Zweck meiner diesmaligen Mitteilung. Ich werde mich dabei, um der Auffassung keine zu großen Schwierigkeiten zu bieten, auf die Besprechung eines einzelnen möglichst einfach gewählten Falles beschränken (bei der dann die allgemeine Sachlage von selbst hervorleuchtet).

Dabei sei folgende Bemerkung vorausgeschickt. Ich habe die genannte Frage wiederholt in Fachkreisen gestellt und habe, weil die Betrachtung des einseitigen Polyeders zunächst zu gewissen Unstimmigkeiten führt, dann wohl die Antwort erhalten: besagtes Polyeder möge für die Bestimmung der zum Diagramm gehörigen Selbstspannungen bedeutungslos sein. Wer an den organischen Zusammenhang der geometrischen Wahrheiten glaubt, wird eine solche Ansicht von vornherein nicht teilen können. Die folgenden Betrachtungen zeigen, daß die Sache in der Tat ganz anders liegt.

4. Das ebene Diagramm, welches wir als Beispiel wählen, besteht einfach aus den 15 Stäben, welche sechs Knotenpunkte (die I, II, \dots, VI

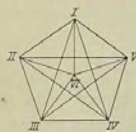


Fig. 1.

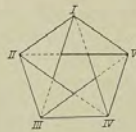


Fig. 2.

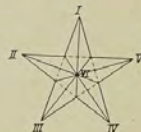


Fig. 3.

genannt werden sollen) verbinden. Der Übersichtlichkeit wegen mögen wir uns die Punkte so gewählt denken, daß I, \dots, V die Ecken eines regulären Fünfecks bilden, in dessen Mittelpunkt VI liegt. Wir haben dann Fig. 1.

Dieses Diagramm läßt sich nun folgendermaßen zu einer geschlossenen, aus zehn Dreiecksflächen bestehenden und dabei „einseitigen“ Hilfsfläche ausgestalten.

Wir verbinden zunächst die Ecken $I \dots V$ durch die fünf Dreiecke:

$$I \ III \ III, \ II \ III \ IV, \ III \ IV \ V, \ IV \ V \ I, \ V \ I \ I,$$

wie es in der obenstehenden Fig. 2 angedeutet ist; diese fünf Dreiecke bilden in ihrer Aufeinanderfolge ein übrigens wohlbekanntes Beispiel eines in sich zurücklaufendes Moebius'schen Blattes (bei dem man durch Umlaufung von der oberen Seite eines der fünf Dreiecke auf die untere Seite desselben Dreiecks kontinuierlich hinüberkommt).

Sodann verbinden wir den Punkt VI mit den „freien“ Kanten dieses Blattes, d. h. mit den Kanten

$$I \ III, \ III \ V, \ V \ II, \ II \ IV, \ IV \ I$$

durch die fünf Dreiecke:

$$I \ III \ VI, \ III \ V \ VI, \ V \ II \ VI, \ II \ IV \ VI, \ IV \ I \ VI,$$

womit die Konstruktion unserer Hilfsfläche vollendet ist.

Da unsere Hilfsfläche aus lauter Dreiecken besteht, so hat es keine Schwierigkeit, das allgemeinste Raumpolyeder zu konstruieren, dessen Orthogonalprojektion sie ist. Wir errichten einfach in den Punkten I, II, \dots, VI gegen die Zeichenebene beliebige Perpendikel, deren Endpunkte $1, 2, \dots, 6$ heißen sollen, und verbinden die Raumpunkte $1, 2, \dots, 6$ genau so durch Dreiecke, wie es eben zwecks Konstruktion der Hilfsfläche mit den Punkten I, II, \dots, VI geschehen war (Fig. 3 auf S. 696). Das so entstehende Polyeder hängt, der Willkür der sechs Perpendikel entsprechend, von sechs Konstanten ab. Daß es einseitig ist, folgt aus der Einseitigkeit der Dreieckszone Fig. 2. Übrigens stellt es gerade dasjenige einfachste Beispiel einer einseitigen Fläche vor, welches Moebius seinerzeit selbst gegeben hat⁵⁾.

Betrachten wir nun die statischen Eigenschaften unseres Diagramms.

a) Aus der allgemeinen Abzählung folgt, daß es $(15 - 2 \cdot 6 + 3) = 6$ linear-unabhängige Selbstspannungen zulassen muß, und in der Tat ist es sehr leicht, solche sechs Selbstspannungen zu konstruieren. Ich gebe als Beispiel die folgenden:

Nr. 1...5: nur drei der von VI auslaufenden Stäbe, zwei Diagonalen und eine Fünfecksseite sind gespannt; vgl. die nebenstehende Fig. 4.

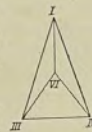


Fig. 4.

Nr. 6: längs der 5 von VI auslaufenden Stäbe herrschen gleiche Spannungen, ebenso längs der fünf Diagonalen des Fünfecks. Vgl. die Fig. 5.



Fig. 5.

Diese Beispiele von Selbstspannungen können auch ohne weiteres aus Maxwell'schen Polyedern abgeleitet werden: jede der Figuren 4 ist als Projektion eines Tetraeders anzusehen, Fig. 5 als Projektion einer auf einem überschlagenen Fünfeck errichteten Pyramide.

b) Andererseits überzeugt man sich, daß die allgemeinste zu unserem Diagramm gehörige Selbstspannung keineswegs aus unserem einseitigen Polyeder in Maxwell'scher Weise abgeleitet werden kann. Schon die

⁵⁾ [Vgl. Ges. Werke, Bd. II, S. 520.]



Anzahlen stimmen nicht. Denn die ∞^6 Polyeder würden nur ∞^3 Selbstspannungen liefern. Aber man bemerkt bald, daß unser Polyeder überhaupt nicht in Maxwellscher Weise benutzt werden kann. Es war doch der Ausgangspunkt unserer Betrachtung in Nr. 1, daß jeder Eckpunkt unseres Polyeders in bestimmtem Sinne umlaufen werden sollte. Zu dem Zwecke mußten wir die beiden „Seiten“ der Polyederfläche unterscheiden und für die eine Seite den Uhrzeigersinn der Umlaufung verabreden. Dies ist hier, weil wir ein einseitiges Polyeder haben, nicht möglich. Setzen wir willkürlich fest, daß die Ecke (i) des Polyeders in bestimmtem Sinne umlaufen werden soll, und verschieben diesen Umlaufungssinn über die Fläche des Polyeders hin, so erhalten wir bei geschickter Wahl des Weges für die Ecke (i) den entgegengesetzten Umlaufungssinn. Die Vorzeichen der Kraftkomponenten in den Formeln (3) lassen sich also nicht fixieren, oder, wenn man lieber will: nachdem man sie unter Festsetzung eines bestimmten Umlaufungssinnes für den Punkt (i) angenommen hat, ergibt sich hinterher, daß ebensowohl die entgegengesetzten Vorzeichen zu gelten haben.

c) Es muß interessant sein, diese Verhältnisse am reziproken Diagramm zu verfolgen. In der Tat: da wir ein Polyeder haben, so haben wir auch (gemäß den Formeln (5)) ein reziprokes Diagramm. Dieses muß dann so beschaffen sein, daß, wenn wir eine Seite desselben als einen längs der entsprechenden Seite des ursprünglichen Diagramms herrschenden Zug deuten, nach Durchlaufung des ganzen Diagramms herauskommt, daß sie ebensowohl als Maß eines längs der korrespondierenden Seite des ursprünglichen Diagramms wirkenden Drucks zu gelten hat!

5. In die solcherweise zunächst entstehende Verwirrung bringen wir Ordnung, indem wir unser einseitiges Polyeder (wie ich es bei einseitigen Flächen in früheren Arbeiten wiederholt getan habe⁹⁾, und wie es übrigens heute allgemein geläufig ist) doppelt überdeckt denken und somit durch eine zweiseitige Fläche der doppelten Ecken-, Kanten- und Flächenzahl ersetzen, deren Ecken, Kanten und Flächen paarweise mit den Ecken, Kanten und Flächen des einseitigen Polyeders zusammenfallen. Unser ebenes Diagramm, bez. die mit ihm verbundene „Hilfsfläche“, ist eine Doppelprojektion dieses zweiseitigen Polyeders, und wir erhalten, wenn wir von diesem Polyeder im Sinne von Nr. 1 Gebrauch machen, für jeden Stab unseres Diagramms einen Zug und einen Druck, die sich gegenseitig aufheben; wir erhalten für unser Diagramm eine Nullspannung. Wir haben keinen Widerspruch mehr, sondern etwas in sich Klares, das aber zunächst enttäuscht: die ∞^6 einseitigen Polyeder, als deren Projektion

⁹⁾ [Siehe z. B. meine Abhandlung „Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen“ Nr. XXXVI des vorliegenden Bandes, speziell S. 64, 65. K.]

unser Diagramm angesehen werden kann, ergeben für dieses, gemäß der neuen Auffassung, lauter Nullspannungen.

Und doch ist der Ansatz gewonnen, durch dessen Verfolg wir nun zur positiven Erledigung des Selbstspannungsproblems für unser Diagramm kommen. Mögen wir vorab verabreden, die Seitenflächen unseres einseitigen Polyeders, die vom Eckpunkte (i) auslaufen, folgendermaßen durch Gleichungen zu bezeichnen:

$$(9) \quad z = a_k^i x + b_k^i y + \gamma_k^i.$$

Übrigens aber wollen wir jetzt das allgemeinste zweiseitige Polyeder (mit der doppelten Ecken-, Kanten- und Flächenzahl) konstruieren, dessen Doppelprojektion unser Diagramm, bez. die zu ihm gehörige Hilfsfläche ist, dessen Ecken, Kanten und Seitenflächen nun aber nicht mehr paarweise zusammenzufallen brauchen!

Besagte Konstruktion machen wir in einfachster Weise, indem wir den sechs Knotenpunkten I, II, ..., VI unseres Diagramms je zwei, beliebig über ihnen gelegene Raumpunkte zuordnen und die so hervorkommenden zwölf Punkte in zweckmäßiger Weise durch Dreiecksflächen verbinden.

Folgendermaßen etwa. Mögen unsere Raumpunkte in nicht mißzuverstehender Weise mit

$$\begin{array}{cccccc} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ 1'' & 2'' & 3'' & 4'' & 5'' & 6'' \end{array}$$

bezeichnet werden. Wir konstruieren dann vor allen Dingen eine Aufeinanderfolge von zehn Dreiecken

$$\cdot (1' 2'' 3'), (2'' 3' 4''), (3' 4'' 5'), (4'' 5' 1''), (5' 1'' 2'), \\ (1'' 2' 3''), (2' 3'' 4'), (3'' 4' 5''), (4' 5'' 1'), (5'' 1' 2'')$$

die eine Ringfläche mit zwei Rändern vorstellt, welche beziehungsweise aus folgenden fünf Kanten bestehen:

$$\begin{array}{l} \text{erster Rand: } (1' 3'), (3' 5'), (5' 2'), (2' 4'), (4' 1'), \\ \text{zweiter Rand: } (1'' 3''), (3'' 5''), (5'' 2''), (2'' 4''), (4'' 1''). \end{array}$$

Und nun gehen wir zu einem geschlossenen Polyeder über, indem wir von 6' aus auf den ersten Rand und von 6'' aus auf den zweiten Rand eine geschlossene Pyramide aufsetzen.

Jedes so hervorkommende (zweiseitige) Polyeder wollen wir weiterhin ein Doppelpolyeder nennen. Es gibt immer zwei Ebenen des Doppelpolyeders, welche der Ebene (9) des einseitigen Polyeders entsprechen; diese mögen durch folgende Gleichungen bezeichnet sein:

$$(10) \quad \begin{cases} z = a_k^i x + b_k^i y + c_k^i, \\ z = a_k^{ii} x + b_k^{ii} y + c_k^{ii}, \end{cases}$$



Wir stellen nunmehr, gemäß der Verabredung von Nr. 1, die sämtlichen Ecken des Doppelpolyeders mit einem bestimmten Umlaufungsinne aus. Möge dabei, was den Eckpunkt (i') angeht, auf die Seitenfläche

$$z = a_k^i x + b_k^i y + c_k^i,$$

die andere

$$z = a_i^i x + b_i^i y + c_i^i$$

folgen, so wird umgekehrt, was den Eckpunkt (i'') betrifft, die Ebene

$$z = a_i^{''i} x + b_i^{''i} y + c_i^{''i}$$

der Ebene

$$z = a_k^{''i} x + b_k^{''i} y + c_k^{''i}$$

vorangehen.

Nach diesen Vorbereitungen werden wir nun, ganz im Sinne von Nr. 1, aus unserem Doppelpolyeder für das vorgegebene Diagramm eine Selbstspannung ableiten. Es genügt wieder, die Komponenten der Kraft anzugeben, welche im Punkte (i) des Diagramms entlang der Kante (kl) wirken. Insofern (i) Projektion von (i') ist, erhalten wir nach den Formeln (3) die Kraftkomponenten:

$$(11') \quad b_k^i - b_i^i, \quad a_i^i - a_k^i,$$

insofern aber (i) Projektion von (i'') ist, müssen wir nach der gerade gemachten Bemerkung die Vorzeichen umkehren und haben als Kraftkomponenten:

$$(11'') \quad b_i^{''i} - b_k^{''i}, \quad a_k^{''i} - a_i^{''i}.$$

Wir haben also insgesamt längs unserer Kanten (kl) im Punkte (i) angreifend die Kraft:

$$(12) \quad X_{kl}^{(i)} = b_k^i - b_i^i + b_i^{''i} - b_k^{''i}, \quad Y_{kl}^{(i)} = a_i^i - a_k^i + a_k^{''i} - a_i^{''i}.$$

Damit haben wir für unser Diagramm wirklich eine Selbstspannung konstruiert, — jedem unserer Doppelpolyeder entsprechend eine. Und die Nullspannung, die wir aus dem einseitigen Polyeder ableiteten, ordnet sich hier ein. Denn es ist klar, daß die gerade hingeschriebenen Werte der $X_{kl}^{(i)}$, $Y_{kl}^{(i)}$ sämtlich Null werden, wenn die Ebenen a' , b' , c' mit den Ebenen a'' , b'' , c'' durchweg in die Ebenen (9) zusammenfallen, d. h. wenn unser Doppelpolyeder in die Doppelüberdeckung eines einseitigen Polyeders übergeht.

6. Die Behauptung wird nun sein, daß mit den Formeln (12) das Spannungsproblem unseres Diagramms tatsächlich erledigt ist. Zu dem Zwecke wird zweierlei zu zeigen sein:

1) das jede Selbstspannung des Diagramms durch Formeln (11) gewonnen werden kann,

2) wie die Differenz zwischen der Zahl der Doppelpolyeder (∞^{13}) und der Zahl der Selbstspannungen (∞^6) zu erklären ist.

Beides erledigt sich auf Grund der voraufgeschickten Betrachtungen in ganz knapper Form.

Ad 1). Es wird hier zweckmäßig sein, neben das vorgegebene Diagramm und seine Hilfsfläche, welche Doppelprojektionen des Doppelpolyeders sind, nunmehr ein Doppeldiagramm, bez. eine Doppelhilfsfläche zu stellen, die als einfache Projektionen unseres Polyeders definiert sein sollen. Jeder Kante des ursprünglichen Diagramms entsprechen zwei übereinanderliegende Kanten des Doppeldiagramms, und wenn man für die Kante (kl) des ursprünglichen Diagramms die Formel (12) hat, so hat man für die beiden entsprechenden Kanten des Doppeldiagramms bez. die Formeln (11') und (11''). Auf unser Doppeldiagramm, bez. die mit ihm verbundene Hilfsfläche, finden nun unmittelbar die Entwicklungen unserer Nr. 2 Anwendung. Ist doch diese Hilfsfläche eine zweiseitige Fläche vom Geschlecht $p=0$. Jede zu dem Doppeldiagramm gehörige Selbstspannung wird also in Maxwellscher Weise durch eines unserer Doppelpolyeder (und damit durch ∞^3 unserer Doppelpolyeder) geliefert. Es bleibt zu überlegen, daß man jede auf das ursprüngliche Diagramm bezügliche Selbstspannung in eine Selbstspannung des Doppeldiagramms verwandeln kann. Dies geht aber gewiß in der Weise, daß man die zur einzelnen Kante des ursprünglichen Diagramms gehörige Spannung zu gleichen Hälften auf die beiden über ihr liegenden Kanten des Doppeldiagramms verteilt. Dies hat zur Folge, daß die Kräfte (11') und (11'') einander gleich sind, und von hier aus kann man durch geschickte Wahl der drei zur Verfügung stehenden Konstanten erreichen, daß allgemein

$$(13) \quad a_k^i = -a_k^{''i}, \quad b_k^i = -b_k^{''i}, \quad c_k^i = -c_k^{''i}.$$

Man kann also zu jeder Selbstspannung des ursprünglichen Diagramms nicht nur überhaupt ein Doppelpolyeder konstruieren, sondern insbesondere ein solches, das hinsichtlich der XY -Ebene sein eigenes Spiegelbild ist.

Ad 2) ergibt sich volle Aufklärung, indem wir auf den Begriff der Addition zweier zu demselben Diagramm (i. e. derselben Hilfsfläche) gehörigen Polyeder zurückgehen (Nr. 2). Es ist ganz klar, daß die Formeln (12) ungeändert bleiben, wenn man zu dem gewählten Doppelpolyeder ein beliebiges einseitiges Polyeder unserer Polyederschar addiert, also die Ebenen (10) durch folgende ersetzt:

$$(14) \quad \begin{cases} z = a_k^i x + b_k^i y + c_k^i + \alpha_k^i x + \beta_k^i y + \gamma_k^i, \\ z = a_k^{''i} x + b_k^{''i} y + c_k^{''i} + \alpha_k^i x + \beta_k^i y + \gamma_k^i. \end{cases}$$

Hier enthalten die α_k^i , β_k^i , γ_k^i im ganzen sechs willkürliche Parameter und



so bestimmen also jedesmal ∞^6 Doppelpolyeder in unserem Diagramm dieselbe Selbstspannung. Dies also ist die Bedeutung der einseitigen Flächen für die Selbstspannungen unseres Diagramms, daß sie gestatten, alle Doppelpolyeder, welche dieselbe Selbstspannung liefern, auseinander abzuleiten.

Unter den Doppelpolyedern, welche dieselbe Selbstspannung liefern, findet sich dann in der Tat immer eines, welches hinsichtlich der XY -Ebene sich selbst symmetrisch ist. Man braucht nur in den Formeln (14)

$$(15) \alpha_k^i = -\frac{1}{2}(a_k^i + a_k^{''i}), \beta_k^i = -\frac{1}{2}(b_k^i + b_k^{''i}), \gamma_k^i = -\frac{1}{2}(c_k^i + c_k^{''i})$$

zu setzen.

7. Von der Menge der Einzelbemerkungen, die sich hier aufdrängen, sei nur folgende hervorgehoben. Ich will die Z -Ordinaten, die zu den Polyedereckpunkten (i') und (i'') des Doppelpolyeders gehören, einen Augenblick z_i' und z_i'' nennen, während die Z -Koordinate des entsprechenden Eckpunktes der einseitigen Fläche ζ_i heißen mag. Die sechs Größen ζ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) können beliebig angenommen werden. Andererseits verwandelt sich z_i' gemäß (14) in $z_i' + \zeta_i$, z_i'' in $z_i'' + \zeta_i$. Die Differenz $z_i' - z_i''$ ist also das bei der Umwandlung Unveränderliche. Wir werden sagen, daß alle und nur diejenigen Doppelpolyeder für unser Diagramm je dieselbe Selbstspannung ergeben, deren beide Schalen an den Stellen 1, 2, ..., 6 gleich stark auseinander klaffen.

Übrigens verweise ich wieder darauf, daß alle diese Angaben über die Doppelpolyeder in den zugehörigen reziproken Diagrammen eine charakteristische Deutung finden müssen.

Ich stelle mir schließlich die Aufgabe, die besonderen Fälle der Selbstspannung, auf welche sich Fig. 4 und 5 beziehen, in unsere allgemeine Betrachtung einzuordnen.

Wir hatten als Maxwellsches Polyeder im Falle 4 ein Tetraeder, im Falle 5 eine sich überschlagende fünfseitige Pyramide. Wir wollen, was frei steht, dieses Tetraeder mit seiner Kante $\overline{34}$, bez. die Pyramide mit ihrer Grundebene 12345 auf die XY -Ebene aufsetzen. Wir spiegeln jetzt beide Polyeder an der XY -Ebene und ersetzen so das Tetraeder durch ein Doppeltetraeder, die Pyramide durch eine Doppelpyramide. Die so entstehenden Doppelpolyeder ergeben dann für unser Diagramm im Sinne der Formeln (12) gleichfalls Spannungen vom Typus der Figuren 4 und 5.

Es ist die Frage, wie wir diese Spannungen, bez. Doppelpolyeder aus der allgemeinen Konstruktionsvorschrift der Nr. 5 herausbringen. Bei der Doppelpyramide ist die Antwort unmittelbar. Wir werden die z_i', z_i''

für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ gleich Null nehmen und übrigen $z_6' = -z_6''$ setzen. In dem anderen Falle verfare ich so. Ich lege durch die Kante III, IV des Diagramms irgend zwei Ebenen, welche zur XY -Ebene spiegelbildlich liegen. Nun nehme ich $1'', 2', 3', 4', 5', 6'$ in der einen dieser Ebenen, $1', 2'', 3'', 4'', 5'', 6''$ in der anderen (vertikal über bez. unter I, II, \dots, VI) an (wobei natürlich $3'$ und $3''$, $4'$ und $4''$ zusammenfallen). Führt man für diesen Fall die Konstruktion des Doppelpolyeders gemäß den Angaben von Nr. 5 durch, so erhält man in der Tat zwei Tetraeder, die so liegen, wie vorhin (nur daß die Spitze $6'$ des ersten Tetraeders noch in der Grundfläche $1'', 3'', 4''$ des zweiten liegt, und umgekehrt, was eine für die Bestimmung der Selbstspannung unseres Diagramms unwesentliche Spezialisierung ist).

Göttingen, den 31. März 1909.

LXXIX. Zu Painlevés Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze¹⁾.

[Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 58 (1910).]

„Wir hatten uns die Gesetze der gewöhnlichen trockenen Reibung durch untenstehende Fig. 1 veranschaulicht, in welcher die relative Geschwindigkeit der reibenden Körper gegeneinander als Abszisse, der Betrag der Reibung als Ordinate aufgetragen ist. Dabei bedeutet P den Normaldruck, der die Körper aneinanderpreßt, μ ist der Reibungskoeffizient der Bewegung, μ_0 der Reibungskoeffizient der Ruhe. Man erkennt, daß die

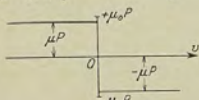


Fig. 1.

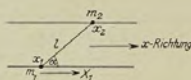


Fig. 2.

Reibungskraft für alle positiven Werte von v denselben negativen Wert ($-\mu P$), für alle negativen Werte von v denselben positiven Wert ($+\mu P$) hat, für $v = 0$ aber aller Werte fähig ist, die zwischen ($-\mu_0 P$) und ($+\mu_0 P$) liegen.

„Diese Gesetze, die man gewöhnlich nach Coulomb benennt (der um 1780 besondere sorgfältige Versuche zu ihrer Prüfung anstellte), sind neuerdings von Painlevé einer eingehenden Kritik unterzogen worden, die in der Behauptung gipfelt, daß selbige bereits in ganz einfachen Fällen zu logischen Widersprüchen mit den Prinzipien der Mechanik führen²⁾. Ich bin hierüber mit Prof. Prandtl in Verbindung getreten, und dieser entwickelt an der Hand des einfachsten der von Painlevé aufgestellten Beispiele eine ganz andere Auffassung, die er experimentell bestätigt, und über die hier berichtet werden soll.

¹⁾ [Aus einer im Wintersemester 1908/09 gehaltenen Vorlesung.]

²⁾ Betreffend die Literatur des Gegenstandes wolle der Leser die Angaben von Stäckel in Nr. 6 des Artikels über elementare Dynamik (abgeschlossen 1908) in Bd. IV, der mathematischen Enzyklopädie vergleichen.

„Es handelt sich um folgende mechanische Aufgabe. Zwei Massenpunkte von den Massen m_1 und m_2 , die durch eine gewichtslose Stange von der unveränderlichen Länge l verbunden sind, sollen sich auf zwei parallelen Geraden bewegen (Fig. 2 auf S. 704); die Führung von m_1 soll den Reibungskoeffizienten μ , bez. μ_0 haben, die von m_2 aber soll vollkommen glatt sein. Die Abszissen von m_1 und m_2 mögen x_1 und x_2 heißen, der Winkel, den die Stange l mit der positiven Abszissenrichtung bildet, α . Auf m_2 wirke nur die Reaktion der Führung und der Verbindungsstange l , auf m_1 außerdem eine in Richtung der positiven x wirkende konstante Kraft X_1 und die von der Führung längs der Geraden herrührende Reibungskraft.

„Wir haben dann zunächst die geometrische Bedingung

$$(1) \quad x_2 - x_1 = l \cos \alpha$$

und übrigens, wenn der längs der Stange wirkende Druck mit λ bezeichnet wird, die Bewegungsgleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} m_2 x_2'' = \lambda \cos \alpha, \\ m_1 x_1'' = X_1 - \lambda \cos \alpha - (\mu) \lambda \sin \alpha. \end{cases}$$

Hier ist (μ) der im einzelnen Momente in Betracht kommende Reibungskoeffizient, also, sobald Ruhe vorliegt:

$$(3) \quad -\mu_0 \leq (\mu) \leq +\mu_0,$$

sobald aber Bewegung eintritt, $(\mu) = \pm \mu$ und

$$(4) \quad (\mu) \cdot \lambda \cdot x_1' > 0.$$

Die Paradoxien, welche Painlevé bei der weiteren Behandlung des Problems findet, stecken in dieser Ungleichung (4).

„Um diese Paradoxien hervorzukehren, genügt es, wie nun gesehen mag, den Fall $m_1 = m_2 = 1$ zu betrachten. Da infolge von (1) $x_1'' = x_2''$ ist, folgt aus den Gleichungen (2) ohne weiteres

$$(5) \quad \lambda = \frac{X_1}{2 \cos \alpha + (\mu) \sin \alpha}.$$

Es gilt diese Formel zu diskutieren.

„Wir knüpfen dabei mit Painlevé an den Fall der *Bewegung* an (wo $(\mu) = \pm \mu$ ist) und werden übrigens zweckmäßigerweise von vornherein *zwei Hauptfälle* unterscheiden, je nachdem

$$|\mu \sin \alpha| \leq 2 \cos \alpha;$$

sollte $|\mu \sin \alpha| = 2 \cos \alpha$ sein, so sprechen wir vom *Übergangsfalle*. Da $\sin \alpha$ in der Figur 2 notwendig positiv ist, wirft sich diese Unterscheidung auf den absoluten Wert von $\tan \alpha$. Im *ersten Hauptfalle*, wo

$$|\tan \alpha| < \frac{2}{\mu},$$



sprechen wir von einer *flach* gestellten Stange (Fig. 3), im *zweiten Hauptfalle*, wo

$$|\tan \alpha| > \frac{2}{\mu},$$

von einer *steil* gestellten (Fig. 4). Im ersten Hauptfalle stimmt das Vorzeichen von λ (da wir X_1 von vornherein als positiv nahmen) mit dem-

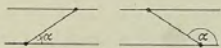


Fig. 3.

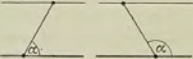


Fig. 4.

jenigen von $\cos \alpha$ überein, im zweiten Hauptfalle mit dem Vorzeichen von $(\mu) = \pm \mu$.

„Es sei nun für $t = 0$ eine von Null verschiedene Anfangsgeschwindigkeit $x'_1 (= x'_2)$ gegeben. Was wird eintreten? Wir unterscheiden innerhalb eines jeden unserer beiden Hauptfälle je nach dem Vorzeichen von x'_1 und dem Vorzeichen von $\cos \alpha$ vier Unterfälle und vereinigen die Ergebnisse der Überlegung je in einer Tabelle. Wir erhalten dann aus der Ungleichung (4) für den

Hauptfall I (flach gestellte Stange)

$\cos \alpha > 0 : \lambda > 0$ (Druck)	$\cos \alpha < 0 : \lambda < 0$ (Zug)
$x'_1 > 0$ $(\mu) = +\mu$	$x'_1 > 0$ $(\mu) = -\mu$
$x'_1 < 0$ $(\mu) = -\mu$	$x'_1 < 0$ $(\mu) = +\mu$

Dagegen für den

Hauptfall II (steil gestellte Stange)

$\cos \alpha > 0 : \lambda \geq 0$, je nachdem $(\mu) = \pm \mu$	$\cos \alpha < 0 : \lambda \geq 0$, je nachdem $(\mu) = \pm \mu$
$x'_1 > 0$ (μ) nach Belieben $= \pm \mu$	$x'_1 > 0$ (μ) nach Belieben $= \pm \mu$
$x'_1 < 0$ Widerspruch mit (4)	$x'_1 < 0$ Widerspruch mit (4)

Die Fälle eines positiven und eines negativen $\cos \alpha$ sind hier also nicht unterschieden und es wird das Resultat auch für $\cos \alpha = 0$ Geltung haben. — Endlich erhalten wir für den

Übergangsfall

$\cos \alpha > 0 : \lambda > 0$ oder ∞ , je nachdem $(\mu) = \pm \mu$	$\cos \alpha < 0 : \lambda < 0$ oder ∞ , je nachdem $(\mu) = \mp \mu$
--	--

und von hier aus, wenn wir nur die endlichen Werte von λ berücksichtigen wollen:

$x'_1 > 0 : (\mu) = +\mu$	$x'_1 > 0 : (\mu) = -\mu$
$x'_1 < 0$ Widerspruch mit (4)	$x'_1 < 0$ Widerspruch mit (4)

„Die Tabelle für den Hauptfall I stimmt mit dem, was wir erwarten werden. Sie gibt in jedem Unterfalle einen bestimmten Wert von (μ) und damit von λ ; die Beschleunigung $\lambda \cos \alpha$ des Punktes x_1 ist in jedem Falle positiv. — Dagegen erscheint das Resultat im Hauptfalle II durchaus paradox, indem sich entweder *zwei* Werte von (μ) und damit von $\lambda \cos \alpha$, oder *keiner* als zulässig erweisen. Und auch im Übergangsfalle kommen wir aus den Paradoxien nicht heraus, indem wir beim Ausschluß unendlicher λ immer noch im Falle $x'_1 < 0$ auf einen Widerspruch stoßen.

„Diese Paradoxien sind es, welche Painlevé herausgebracht hat und in denen er einen *Widerspruch mit dem Grundsatz der Mechanik* findet, daß ein mechanisches System, dessen Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit gegeben sind, sich auf eine und nur auf eine Weise weiterbewegt.

„Dieser Argumentation stellt nun aber Prof. Prandtl folgendes entgegen:

1. Es ist gar nicht wunderbar, daß gegebenenfalls, je nachdem $\lambda \geq 0$ genommen wird, zweierlei Bewegungen resultieren. Denn die Führung eines Punktes längs einer Geraden läßt sich konstruktiv nur so ausführen, daß je nach dem Vorzeichen von λ tatsächlich verschiedene kinematische Verhältnisse vorliegen. Schließt man z. B. den Punkt zwischen zwei dicht

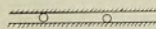


Fig. 5.

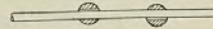


Fig. 6.

nebeneinander herlaufende Schienen ein (Fig. 5), so wird er je nach dem Vorzeichen von λ bald an die eine, bald an die andere Schiene angepreßt. Ebenso gibt es zwei Möglichkeiten, wenn man den Punkt durch eine durchbohrte Kugel ersetzt, die auf einem Draht läuft (Fig. 6).

2. Experimentell wird man allerdings immer nur die eine Bewegung realisieren können, weil die andere *labil* ist, und, eben eingeleitet, durch die kleinste Störung gleich in die erste überspringt. Es tritt im Hauptfalle II bei positivem x'_1 tatsächlich jedesmal nur die nach *rechts* beschleunigte Bewegung ($\lambda \cos \alpha > 0$) ein.

3. Was den Übergangsfall angeht, so hat man bei positivem x'_1 in dem oben bezeichneten Sinne $\lambda \cos \alpha$ endlich und damit positiv zu nehmen. Für negatives x'_1 aber wird das tatsächliche Verhalten des Apparates völlig richtig durch $\lambda = \infty$ geschildert. Es tritt nämlich *instantane Selbstsperrung* der Bewegung ein (was natürlich *cum grano salis* zu verstehen ist; man würde instantane Selbstsperrung haben, wenn man es, beim Experiment, wirklich mit *starr*en Führungen zu tun hätte; nun aber die Führungen tatsächlich ein wenig nachgiebig sein werden, wird man statt dessen *sehr rasche* Bremsung der Bewegung beobachten).



4. Bleiben die Unterfälle des Hauptfalles II mit negativem α'_1 , welche dem voraufgestellten Schema zufolge notwendig zu Widersprüchen führen. Die nähere Überlegung und das Experiment zeigen, daß man es hier jedesmal auch mit instantaner Selbstsperrung zu tun hat.

„Soweit die Mitteilungen von Prof. Prandtl. Ich füge meinerseits hinzu, daß das Auftreten von *Selbstsperrungen* in den letztangeführten Fällen in der Tat nicht mit den Coulombschen Gesetzen in Widerspruch steht. Wir haben in unseren Schematen die Beschleunigung

$$\lambda \cos \alpha = \frac{X_1 \cos \alpha}{2 \cos \alpha + (\mu) \sin \alpha}$$

nach dem Vorgange von Painlevé so berechnet, als wenn Bewegung stattfände. Indem wir dementsprechend $(\mu) = \pm \mu$ setzten, entstanden die Widersprüche. Aber es bleibt die Möglichkeit, daß instantan Ruhe eintritt. Dann verlangt Coulomb nur, daß (μ) zwischen $+\mu_0$ und $-\mu_0$ liegt, und wir können dem μ gern einen in diesem Intervalle liegenden Wert geben, der λ zu ∞ macht und damit das Eintreten einer Selbstsperrung anzeigt. Damit sind die formalen Widersprüche beseitigt.

„Fassen wir zusammen und verallgemeinern gleich, was wir am einfachsten Beispiel lernten, so werden wir sagen: *Die Coulombschen Gesetze sind weder mit den Prinzipien der Mechanik noch mit den tatsächlich eintretenden Erscheinungen im Widerspruch; sie müssen nur richtig interpretiert werden.* Painlevé behält das außerordentliche Verdienst, nachdrücklich darauf aufmerksam gemacht zu haben, daß gegebenenfalls singuläre Verhältnisse eintreten. Aber er hat zu früh an logische Widersprüche geglaubt, statt alle Möglichkeiten, welche die Gesetze bieten, durchzudenken.

„Unsere Rettung der Coulombschen Gesetze soll natürlich nur eine Rettung ihres Prinzips, nicht der in ihnen enthaltenen quantitativen Einzelangaben sein. Daß die Coulombschen Gesetze nach unseren heutigen Kenntnissen physikalisch nur als eine *Annäherung* an die in Wirklichkeit hervortretenden Verhältnisse anzusehen sind, ist unter anderem von Sommerfeld und mir in unserer „Theorie des Kreisels“ auf S. 537 ff. ausführlich dargelegt.

„Schließlich wolle man noch beachten, daß das einfache von uns behandelte Beispiel großes technisches Interesse bietet. Denn es gibt in idealisierter Form Beziehungen wieder, die in praxi, z. B. bei Hebezeugen, vielfach auftreten dürften. Der Gedanke liegt nahe, daß die Painlevéschen Entwicklungen, in unserem Sinne interpretiert, der Ausgangspunkt für die Entwicklung eines neuen Zweiges der technischen Mechanik werden könnten.“

Das Vorstehende ist eine Wiedergabe der Darstellung, welche ich im vergangenen Winter in einer Vorlesung über Mechanik von der Sachlage gegeben habe. Diese Darstellung erhebt keinen Anspruch darauf, ihren Gegenstand allseitig zu behandeln oder gar zu erledigen; ich hätte sonst viel ausführlicher auf Painlevés eigene Publikationen und namentlich die Einwände, welche die Herren Lecornu und de Sparre gleich anfangs gegen Painlevés Entwicklungen erhoben haben, überhaupt die ganze anschließende, meist ausländische Literatur eingehen müssen. Mein bescheidener Zweck ist, zu erneuter Diskussion dieser Dinge, auch in Deutschland, den Anstoß zu geben. Mögen dabei die Theoretiker mit den Experimentatoren und konstruierenden Ingenieuren Hand in Hand gehen! Denn das erscheint am förderlichsten.

Göttingen, den 17. April 1909.



LXXX. Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten.

[Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 58 (1910).]

Am Schlusse seiner berühmten Abhandlung über die Wirbelbewegungen¹⁾ beschreibt Helmholtz eine einfache Methode zur Erzeugung von Wirbeln, die jedermann bei seiner Tasse Kaffee alltäglich bequem ausprobieren kann. Man führe die (in die Flüssigkeit eingetauchte) Spitze eines Löffels eine kurze Strecke längs der Oberfläche der Flüssigkeit hin und ziehe sie dann plötzlich heraus. Es bleibt ein Wirbelfaden in der Flüssigkeit zurück, dessen Gestalt dem Umriß der eingetauchten Löffelspitze entspricht und der in Richtung der dem Löffel ursprünglich erteilten Geschwindigkeit in

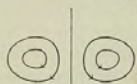


Fig. 1.

der Flüssigkeit fortschreitet. In die Beobachtung fallen natürlich nur die beiden Punkte, in denen dieser Wirbelfaden die freie Oberfläche der Flüssigkeit schneidet. Sie erscheinen als flache, oder — bei schnellerer Vorwärtsbewegung des Löffels — als trichterförmige Vertiefungen der freien Oberfläche, um welche die Flüssigkeit zirkuliert. Es braucht kaum gesagt zu werden, daß diese Vertiefungen als solche aus dem Zusammenwirken der Schwerkraft und der auf die einzelnen Flüssigkeitsteilchen bei der Zirkulation wirkenden Zentrifugalkraft zu erklären sind.

Im größeren Maßstabe realisiert, beobachtet man dieselbe Erscheinung beim Rudern; nach jedem Ruderschlag wandeln zwei den äußeren Kanten des jeweils eingetauchten Ruderteils entsprechende Vertiefungen über die Wasseroberfläche hin; die Mittelpunkte dieser Vertiefungen sind als Schnittpunkte der Wasseroberfläche mit einem Wirbelfaden aufzufassen, den man sich entlang dem Gesamtumriß des eingetauchten Ruderteils verlaufend denken muß.

Wie ist diese Erscheinung zu erklären? Man wird zunächst jedenfalls an eine Reibungswirkung denken. Eine solche tritt aber, soviel ich sehen

¹⁾ [Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Crelles Journal, Bd. 55 (1858) = Ges. Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 1.]

kann, höchstens sekundär hinzu; man darf annehmen, daß die Erscheinung in völlig reibungsfreien Flüssigkeiten im wesentlichen ebenso, wie geschildert, verlaufen würde. Der eigentliche Grund der den üblichen Aussagen der reibungsfreien Hydrodynamik offenbar widersprechenden Erscheinung scheint vielmehr ein ganz anderer zu sein.

Ich will mir der bequemen Auseinandersetzung wegen den ganzen Vorgang zweidimensional denken. In eine reibungsfreie, unendliche, durch eine horizontale Ebene begrenzte (nur der Schwere unterworfenen) Wassermasse werde ein unendlich breites, ebenes, von einer horizontalen Geraden begrenztes Ruderblatt eingetaucht, senkrecht zu seiner Ebene vorwärts bewegt und inmitten dieser Bewegung instantan herausgezogen. Fig. 2 gebe ein schematisches Bild der Versuchsanordnung.

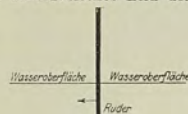


Fig. 2.

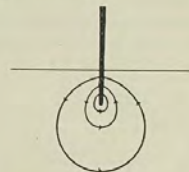


Fig. 3.

Die aufeinander folgenden Bewegungsvorgänge dürften dann folgendermaßen zu schildern sein:

1. Solange das Ruder in voller Tiefe eingetaucht ist und vorwärts geschoben wird, herrscht die bekannte Potentialbewegung, deren Geschwindigkeitskurven in Fig. 3 abgebildet sind. — Diese Geschwindigkeitskurven sitzen nicht genau senkrecht auf dem Ruderblatt auf, sondern bilden mit ihm einen nach unten hin spitzen Winkel, der um so kleiner ist, je mehr man an die untere Begrenzungslinie des Ruderblattes herangeht.

2. Jetzt ziehe man das Ruder plötzlich vertikal aus dem Wasser heraus. Irgendwelchen Einfluß auf die Bewegung der Wasserteilchen hat dies,

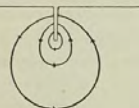


Fig. 4.

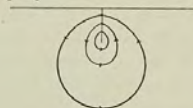


Fig. 5.

da ausdrücklich von Reibung abgesehen werden soll, unmittelbar nicht. Die einzige instantane Änderung ist die, daß sich jetzt da, wo vorher das Ruder stand, in der Wassermasse ein vertikaler Schlitz befindet. (Fig. 4.)



3. Nun aber kommt die Schwere, bez. der aus ihr resultierende Flüssigkeitsdruck zur Geltung, unter dessen Einfluß die *Wasserpartien links und rechts von diesem Schlitz* (den man sich als sehr schmal vorstellen möge) *sofort zusammenfließen werden*. Man hat jetzt in der nur noch von der Horizontalebene begrenzten Wassermasse da, wo vorher das Ruder stand, eine *Diskontinuitätsfläche* für die den einzelnen Wasserteilen beizulegenden Geschwindigkeiten, d. h. eine *Wirbelschicht*. Die Intensität des Wirbels nimmt dabei vom oberen Ende der Schicht gegen das untere hin zu.

4. Und nun scheint die Entwicklung dieser Wirbelschicht die zu sein, daß sie sich sehr rasch um das untere Ende spiralförmig aufrollt, so daß nach einiger Zeit die Bewegung merklich so stattfindet, als befände sich in der Nähe des unteren Endes der ursprünglichen Schicht ein nahezu punktförmiges Wirbelgebiet *O*. (Die von *O* entfernter liegenden Stücke der Wirbelschicht verteilen sich in stetiger Deformation auf den immer länger werdenden bis an die Wasseroberfläche reichenden Ast der Spirale und verlieren



Fig. 6.



Fig. 7.

damit für die Flüssigkeitsbewegung immer mehr an Bedeutung). — Das Wirbelgebiet *O* unserer Fig. 7 ist natürlich der Schnitt unserer Zeichnungsebene mit einem senkrecht gegen dieselbe (also parallel mit der unteren Begrenzungskante des Ruders) verlaufenden *Wirbelfaden*; und mit dem Gesagten ist also das Zustandekommen eines solchen Wirbelfadens erklärt. —

Es erübrigt, daß wir diese ganze Überlegung vom Zweidimensionalen ins Dreidimensionale übertragen (indem wir statt des unendlich ausgedehnten Ruderblattes ein solches von endlicher Breitenausdehnung setzen). Dann tritt an Stelle des gefundenen geradlinigen Wirbelfadens augenscheinlich ein solcher, der (mehr oder minder genau) der Kontur des eingetauchten Ruderteils folgt, so wie es der Versuch, von dem wir ausgingen, vor Augen stellt. —

Man wird natürlich verlangen können, daß die hier nur qualitativ gefaßten Bewegungsvorgänge quantitativ formuliert, bzw. aus den Differentialgleichungen der Hydrodynamik abgeleitet werden. Indem ich dies anderen Mathematikern überlasse, beantworte ich nur noch die zunächst hervortretende Frage, wie denn die vorgetragene Theorie mit dem allverbreiteten, von Helmholtz selbst in seiner oben genannten Abhandlung gegebenen Satz verträglich ist, daß durch Bewegung starrer Körper in einer reibungslosen nur der Schwere unterworfenen Flüssigkeit niemals

Wirbel entstehen können. Offenbar liegt dies darin, daß wir das Zusammenfließen zweier ursprünglich voneinander getrennter Flüssigkeitspartien ins Auge zu fassen hatten, während bei der Begründung des genannten Satzes angenommen wird, daß Flüssigkeitsteilchen, welche einmal an der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, immer auch an der Oberfläche bleiben.

Langeoog, 20. August 1909.

[Die vier Arbeiten LXXVII bis LXXX beziehen sich im engeren Sinne auf dasjenige Gebiet, welches man an den deutschen Technischen Hochschulen als „technische Mechanik“ zu bezeichnen pflegt. Nr. LXXVII und LXXVIII bedürfen wohl keiner näheren Erläuterung. Sie suchen für die einfachsten Aufgaben der graphischen Statik die ursprünglichen Grundgedanken Maxwells noch mehr hervorzukehren und zu entwickeln, als in dem bez. Referate von Henneberg in Bd. IV, der mathematischen Enzyklopädie (1903) geschehen ist. Ich nenne als weitere Fortsetzungen dieser Untersuchungen gern die Göttinger Dissertation von Timpe (1904), „Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion“, und namentlich das Schriftchen von Funk „Die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen“, Berlin, 1920.

Nr. LXXIX und LXXX sind nur aus der nahen Verbindung zu verstehen, in welche meine Lehrtätigkeit damals (1910) zu derjenigen von Prandtl getreten war. Was zunächst Nr. LXXIX angeht, so hatte ich Prandtl von den interessanten neuen Arbeiten der Franzosen zur Reibungstheorie starrer Körper erzählt, und er hatte daraufhin einen schönen Apparat konstruiert, welcher die bei geeigneter Anordnung eintretende Erscheinung der Selbstsperrung in ausgezeichneter Weise zeigte. (Dieser Apparat ist abgebildet in der ausführlichen Abhandlung von F. Pfeiffer in der Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 58, auf S. 309, 310, wo eine vollständige und befriedigende Analyse der bei ihm eintretenden Vorgänge geliefert wird.) Um die Diskussion in Gang zu bringen, publizierte ich ein Stück meiner damaligen Vorlesung (= Nr. LXXIX), woran sich im Original unmittelbar bemerkenswerte Erörterungen der Herren von Mises, Hamel und Prandtl angeschlossen, auf die ich hier verweisen darf (vgl. Zeitschrift f. Math. u. Physik, Bd. 58). — Bei Nr. LXXX handelt es sich, wenigstens indirekt, um die Theorie der Flüssigkeitsreibung. Prandtl hat bekanntlich auf dem Heidelberger Internationalen Mathematiker-Kongreß (1904) die moderne Theorie des Flüssigkeitswiderstandes dadurch inaugurirt, daß er zeigte, wie sich bei Flüssigkeitsbewegung entlang eines eingetauchten Körpers trotz noch so geringer innerer Flüssigkeitsreibung dicht an der Wand des Körpers eine Grenzschicht verzögerter Flüssigkeit ausbildet, welche weiterhin Wirbel endlicher Dimension aussendet. Demgegenüber ist in Nr. LXXX darauf aufmerksam gemacht, daß bei der dort besprochenen Versuchsanordnung Wirbel auch ohne jede Reibung entstehen müssen. Ich will damit aber in keiner Weise den allgemeinen Prandtl'schen Überlegungen entgegen treten, deren Bedeutung in der gerade damals sich mächtig entwickelnden Aerodynamik sehr bald zu allseitiger Anerkennung gelangten. Ich brauche dies um so weniger zu versichern, als ich eben in jenen Jahren und weiterhin mein Bestes getan habe, um das Zustandekommen der Prandtl'schen Versuchseinrichtungen, bis hin zu dem großen Göttinger Kaiser-Wilhelm-Institut für Aerodynamik (1916), zu fördern. Mein kleiner Beitrag Nr. LXXX will nur ein Mißverständnis beseitigen, das sich in die klassische (reibungslöse) Hydrodynamik seit unvordenklicher Zeit eingeschlichen hat. — Nr. LXXX will ebenso wie Nr. LXXIX nur besagen, daß man bei der Diskussion irgendwelcher mechanischer oder physikalischer Vorkommnisse, wenn man einmal eine bestimmte Auffassung an die Spitze gestellt hat, aus dieser alle Konsequenzen ziehen soll, die logischerweise aus ihr folgen oder mit ihr verträglich sind, selbst wenn die Auffassung als physikalisch nicht ganz zutreffend anzusehen ist. K.]



Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.



九州帝國大學理學部
物理學教室
40683

