XLVII. Über Arithmetisierung der Mathematik[1]).

[Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Geschäftliche Mitteilungen. 1895. Heft 2.]

Hochgeehrte Anwesende! Wenn sich die Einzelheiten der mathematischen Wissenschaft naturgemäß dem Verständnis und damit dem Interesse der Fernerstehenden entziehen, so darf der Mathematiker doch vielleicht unternehmen, allgemeine Gesichtspunkte zu bezeichnen, unter denen er die Entwicklung seiner Wissenschaft sieht, und dieses um so mehr, wenn diese Gesichtspunkte für sein Verhalten zu den Nachbargebieten maßgebend sind. So möchte ich bei der heutigen Gelegenheit versuchen, meine Stellung zu derjenigen wichtigen mathematischen Richtung zu bezeichnen, als deren Hauptrepräsentant Weierstraß dasteht, dessen 80jährigen Geburtstag wir eben gefeiert haben, — zur *Arithmetisierung der Mathematik*. Ich muß wohl einige Erklärungen über die Entstehung und die Tendenz dieser Richtung vorausschicken.

Gemeinhin verbindet man mit dem Begriffe der Mathematik schlechtweg die Idee eines streng logisch gegliederten auf sich selbst ruhenden Systems, wie uns ein solches etwa in der Geometrie des *Euklid* entgegentritt. Indes ist der Geist, aus dem die moderne Mathematik geboren wurde, ein ganz anderer. Von der Naturbeobachtung ausgehend, auf Naturerklärung gerichtet, hat er ein philosophisches Prinzip, das *Prinzip der Stetigkeit*, an die Spitze gestellt. So ist es bei den großen Bahnbrechern bei Newton und Leibniz, so ist es das ganze 18. Jahrhundert hindurch, welches für die Entwicklung der Mathematik recht eigentlich ein Jahrhundert der Entdeckungen gewesen ist. Allmählich erst erwacht wieder eine strengere Kritik, welche nach der logischen Berechtigung der kühnen Entwicklungen fragt, — gleichsam eine Wiederaufrichtung der geordneten Verwaltung nach einem langen Eroberungszuge. Das ist die Periode von Gauss und Abel, von Cauchy und Dirichlet. Aber

[1]) [Vortrag, gehalten in der öffentlichen Sitzung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 2. November 1895. — Dieser Vortrag ist vielfach übersetzt worden.]

hierbei ist es nicht geblieben. Bei Gauss wird die Raumanschauung, insbesondere die Anschauung von der Stetigkeit des Raumes noch unbedenklich als Beweisgrund benutzt. Da zeigte die nähere Untersuchung, daß hierbei nicht nur vieles Unbewiesene unterlief, sondern daß die Raumanschauung dazu geführt hatte, in übereilter Weise Sätze als allgemeingültig anzusehen, die es nicht sind. Daher die Forderung *ausschließlich arithmetischer Beweisführung*. Als Besitzstand der Wissenschaft soll nur angesehen werden, was durch Anwendung der gewöhnlichen Rechnungsoperationen als identisch richtig klar erwiesen werden kann. „Ein Blick auf die neueren Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung genügt, um den großen Umschwung der Methode wahrzunehmen. Wo sonst Figuren als Beweismittel dienten, da sind es jetzt immer wiederholte Betrachtungen über Größen, die kleiner werden oder angenommen werden können, als jede noch so kleine vorgegebene Größe. Da werden Erörterungen vorangestellt, was die Stetigkeit einer Variabeln bedeuten soll oder nicht bedeuten soll und ob von Differentiation oder Integration einer Funktion überhaupt die Rede sein kann. Das ist der Weierstraßsche Habitus der Mathematik, *die Weierstraßsche Strenge*, wie man kurz zu sagen pflegt.

Natürlich ist auch sie nichts Absolutes, sondern kann weitergebildet werden, indem man sich hinsichtlich der Verknüpfung der Größen noch weitergehende Beschränkungen auferlegt. Ich nenne in dieser Hinsicht Kroneckers Tendenz, die Irrationalzahlen zu verbannen und die mathematische Wissenschaft in Beziehungen allein zwischen *ganzen* Zahlen aufzulösen. Ich nenne ferner die Bestrebungen, für die verschiedenen Arten der logischen Verknüpfung kurze Zeichen einzuführen, um dadurch die Ideenassoziationen, sowie die Unbestimmtheiten auszuschließen, welche sich bei Anwendung der gewöhnlichen Sprachformen unbemerkt und darum unkontrolliert einschleichen. In dieser Hinsicht ist neuerdings insbesondere ein italienischer Gelehrter, dem wir schon nach anderer Seite verschiedene interessante Bemerkungen verdanken, Peano in Turin, hervorgetreten.

Alle diese Entwicklungen möchte ich im folgenden unter das eine Wort: *Arithmetisierung der Mathematik* mit begreifen. Und nun soll meine Aufgabe sein, von der Bedeutung zu reden, welche die so bezeichnete Gesamtrichtung über das Gebiet der Analysis hinaus für die übrigen Teile unserer Wissenschaft besitzen dürfte. Darin liegt, wie Sie verstehen, einerseits die völlige Anerkennung der außerordentlichen Wichtigkeit der hierher gehörigen Entwicklungen, andererseits aber eine Zurückweisung der Auffassung, als sei in der arithmetisierten Wissenschaft wie in einem Extrakt der eigentliche Inhalt der Mathematik bereits erschöpfend enthalten. Ich habe meine Auffassung dementsprechend nach zwei Seiten zu entwickeln, nach einer positiven, zustimmenden und einer negativen, abwehrenden. Indem ich als das Wesen der Sache nicht die arithmetische Form der Gedankenentwicklung ansehe, sondern die durch diese Form erreichte logische Verschärfung, ergibt sich die Forderung — und dieses ist die positive Seite meines Programms —, in Anlehnung an die arithmetische Begründung der Analysis die übrigen Disziplinen der Mathematik einer *Neubearbeitung* zu unterziehen. Andererseits aber habe ich auszuführen und stark zu betonen — das ist die negative Seite —, daß die Mathematik keineswegs durch die logische Deduktion erschöpft wird, daß vielmehr neben der letzteren die *Anschauung* auch heute ihre volle spezifische Bedeutung behält. — Die Vollständigkeit würde eigentlich verlangen, daß ich auch noch von der algorithmischen Seite der Mathematik, also von der Bedeutung der formalen Methoden spreche, doch möchte ich diesen Gegenstand, der mir persönlich ferner liegt, bei der heutigen Gelegenheit beiseite lassen.

Sie wollen übrigens meine Erörterungen nicht so verstehen, als hätte ich im einzelnen viel Neues zu sagen. Vielmehr handelt es sich im wesentlichen darum, Vorhandenes zusammenzutragen und zu gruppieren und, wo es nötig sein sollte, in seiner Berechtigung hervortreten zu lassen.

Bei der kurzen mir zugewiesenen Zeit werde ich mich auf Hervorhebung einiger Hauptpunkte beschränken müssen. Lassen Sie mich zunächst skizzieren, wie sich die positive Seite meiner Auffassung auf dem Gebiete der Geometrie gliedert. Die Arithmetisierung der Mathematik hat, wie ich andeutete, ihren ursprünglichen Ausgangspunkt darin genommen, daß sie die Raumanschauung zurückdrängte. Indem wir uns zur Geometrie wenden, wird das erste sein, daß wir die auf arithmetischem Wege gewonnenen Resultate mit der Raumanschauung wieder in Verbindung setzen. Ich verstehe das hier so, daß wir die gewöhnlichen Grundlagen der analytischen Geometrie akzeptieren und von derselben aus die geometrische Interpretation der neueren analytischen Entwicklungen suchen. Es ist dies nicht etwa schwierig, aber trotzdem besonders anregend, wie ich dies im verflossenen Jahre in einem diesem Gegenstande gewidmeten Seminare nach vielen Richtungen hin habe verfolgen können. Es resultiert eine Übung der Raumanschauung, welche auf eine Verfeinerung derselben hinauskommt; andererseits belohnt sich der Ansatz dadurch, daß die in Betracht kommenden analytischen Entwicklungen unmittelbar einleuchten und dadurch den Charakter des Paradoxen verlieren, der ihnen sonst vielfach anhaftet. Was ist der allgemeinste Begriff einer Kurve, einer Fläche? Was meint man damit, wenn man eine Kurve usw. als „analytisch“ oder „nicht analytisch“ bezeichnet? Diese und ähnliche Fragen müssen bis zur vollen Evidenz durchgebildet werden. — Das zweite ist, daß wir die

Grundlage der Geometrie in neue Untersuchung ziehen. Dies könnte an sich sehr wohl, wie in früherer Zeit, in rein geometrischer Weise geschehen, aber durch die obwaltenden Umstände ist auch hier die Bezugnahme auf das Begriffssystem der Analysis, also die Verwendung der analytisch-geometrischen Methode in erster Linie gegeben. Die äußere Untersuchung der Formeln, durch die wir die Raumgebilde darstellen sollen, also [etwa] die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie und was damit zusammenhängt, ist nur erst die eine Seite der Sache; die tiefer liegende Frage ist, warum wir den Inbegriff der Raumpunkte überhaupt als Zahlenmannigfaltigkeit ansehen dürfen, in der Art, daß wir zwischen den in drei Richtungen geordneten Rationalzahlen in bekannter Weise die Irrationalzahlen interpolieren. Wir kommen zu der Auffassung, daß die Raumanschauung zunächst etwas Ungenaues ist, welches wir zum Zwecke der mathematischen Behandlung in den sogenannten Axiomen (die uns wirkliche Forderungssätze vorstellen) idealisieren. Von philosophischer Seite hat die hier vorliegenden Probleme insbesondere der früh verstorbene Kerry bearbeitet; ich glaube seinen Entwicklungen in der Hauptsache zustimmen zu können, namentlich auch was seine Kritik von P. Du Bois angeht. — Umgekehrt wird uns jetzt die neue Festlegung der Raumauffassung zur Quelle neuer analytischer Begriffsbildungen. Wir glauben im Raume die unendliche Zahl der Punkte und der aus ihnen zusammengesetzten Gebilde unmittelbar vor uns zu sehen. Von hier aus sind die grundlegenden Untersuchungen über Mengen und transfinite Zahlen erwachsen, mit denen Georg Cantor der arithmetischen Wissenschaft ganz neue Ideenkreise erschlossen hat. — Endlich aber verlangen wir, daß der neue Standpunkt auch in der ferneren Darstellung der Geometrie, insbesondere der Infinitesimalgeometrie, zur Geltung komme. Am leichtesten wird das wieder geschehen, wenn wir auch hier an der Methode der analytischen Geometrie festhalten. Natürlich empfehle ich darum nicht ein blindes Rechnen mit x, y, z, sondern nur einen subsidiären Gebrauch dieser Größen überall da, wo es sich um die präzise Festlegung eines Grenzüberganges handelt.

Hiermit haben Sie in seinen Umrissen das neue geometrische Programm. Dasselbe ist, wie Sie erkennen, sehr verschieden von den Tendenzen, die in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts vorwalteten und damals zur Entwicklung der projektiven Geometrie führten (welche längst ein bleibender Bestandteil unserer Wissenschaft geworden ist). Die projektive Geometrie hat uns zahlreiche neue Gebiete der Wissenschaft mit großer Leichtigkeit erschlossen, man rühmte von ihr mit Recht, daß sie auf ihrem Gebiete einen „Königsweg“ darstelle. Unser neuer Weg ist statt dessen mühsam und dornenvoll und es bedarf fortgesetzter Sorgfalt, um sich durch die Hindernisse desselben durchzuwinden. Wir nähern uns dabei wieder mehr der Art der antiken Geometrie und lernen geradezu das Wesen der letzteren vermöge unserer modernen Auffassungen in neuer Weise verstehen, wie noch letzthin Zeuthen in glänzender Weise dargelegt hat. — Dieselbe Denkweise werden wir weiterhin in die Gebiete der Mechanik und mathematischen Physik hineintragen. Ich will hier, um nicht zu ausführlich zu werden, dies nur an zwei Beispielen erläutern. Alle angewandte Mathematik muß das tun, was ich soeben bereits bei der Raumanschauung als notwendig bezeichnete, sie muß zum Zwecke der mathematischen Betrachtung ihre Gegenstände idealisieren. Nun finden wir durchweg, daß auf einem und demselben Gebiete, je nach dem Ziele, welches man im Auge hat, verschiedene Arten der Idealisierung nebeneinander gebraucht werden. Dahin gehört, um nur dies eine zu nennen, daß man die Materie bald als kontinuierlich den Raum erfüllend behandelt, bald wieder als diskontinuierlich aus einzelnen Molekülen bestehend, die man sich selbst entweder als ruhend denkt oder aber in lebhafter Bewegung begriffen. Wieso und in welchem Grade sind diese verschiedenen Vorstellungsweisen für die aus ihnen zu ziehenden Folgerungen mathematisch gleichwertig? Die älteren Darstellungen von Poisson u. a., wie auch die Entwicklungen der kinetischen Gastheorie sind für den modernen Mathematiker in dieser Hinsicht nicht eingehend genug; wir müssen eine von Anfang beginnende Neubearbeitung des Problems verlangen. Ich vermute, daß eine in Aussicht stehende Publikation von Boltzmann hierüber interessante Aufschlüsse bringen wird. — Eine andere Fragestellung ist diese. Das physikalische Experiment versieht uns vielfach mit Erfahrungstatsachen, die wir unwillkürlich mathematisch verallgemeinern und als Theoreme auf die idealisierten Gebilde übertragen. Dahin gehört die Existenz der sogenannten Greenschen Funktion bei beliebiger geschlossener Oberfläche und beliebig anzunehmendem Pol, — entsprechend der Tatsache aus dem Gebiet der Elektrizität, daß sich auf jedem leitenden Körper unter dem Einflusse irgendwelches elektrisierten Punktes eine Gleichgewichtsbelegung bildet. Dahin gehört die Anwendung, welche ich gelegentlich von den elektrischen Strömen gemacht habe, die in einer beliebigen leitenden Fläche bei Aufsetzung der Poldrähte einer galvanischen Säule entstehen, indem ich nämlich zeigte, daß deren Betrachtung unmittelbar zu den Fundamentalsätzen aus Riemanns Theorie der Abelschen Funktionen hinleitet. Es gehört dahin das Theorem, daß jeder begrenzte elastische Körper einer unendlichen Reihe harmonischer Eigenschwingungen fähig sei, und anderes mehr. Sind dies wirklich, abstrakt genommen, richtige mathematische Sätze, bez. wie muß man sie einschränken und präzisieren, damit sie richtig werden? Die Mathematiker haben mit Erfolg versucht, hier einzugreifen, zuerst C. Neumann und Schwarz in der Theorie des Potentials, dann neuerdings

die französischen Gelehrten, an die deutschen Arbeiten anknüpfend, — mit dem Resultate, daß sich die der Physik entnommenen Theoreme in ausgedehntem Maße als stichhaltig erwiesen haben. — Sie sehen hier deutlich, wenn ich es noch ausdrücklich hervorheben soll, um was es sich bei den in Rede stehenden Untersuchungen handelt: nicht sowohl um neue physikalische Einsicht, sondern um abstrakte mathematische Beweisführung, die wir um ihrer selbst willen anstreben, um der Klarheit und Bestimmtheit willen, die dadurch in unsere Auffassung der Erscheinungen hineingetragen wird. Oder, wenn ich einen Ausdruck Jacobis in allerdings etwas modifiziertem Sinne gebrauchen darf, es handelt sich allein um die *Ehre des menschlichen Geistes.*

Hochgeehrte Anwesende! Indem ich mich solcherweise ausdrücke, ist es fast schwer, nunmehr im Gegensatze zu den bisherigen Betrachtungen der Anschauung den ihr gebührenden Anteil an unserer Wissenschaft zu sichern. Und doch ruht gerade in dieser Antithese der eigentliche Sinn meiner heutigen Darlegungen. Dabei denke ich nicht so sehr an die ausgebildete Form der Anschauung, von der soeben die Rede war, also an die Anschauung, die sich unter Einwirkung der logischen Deduktion entwickelt hat und die ich als eine Form des Gedächtnisses bezeichnen möchte, als vielmehr an die naive Anschauung, welche zum guten Teile ein angeborenes Talent ist und sich übrigens aus der eingehenden Beschäftigung mit diesem oder jenem Teile der Wissenschaft unbewußt herausbildet. Das Wort „Anschauung" ist vielleicht nicht zweckmäßig gewählt. Ich möchte hier die motorische Empfindung mit einschließen, mit welcher der Ingenieur die Kräfteverteilung in irgendwelcher von ihm durchgeführten Konstruktion beurteilt, und selbst das unbestimmte Gefühl betr. die Konvergenz ihm vorliegender unendlicher Prozesse, welches der geübte Zahlenrechner besitzt. Ich sage, *daß die so verstandene mathematische Anschauung auf ihrem Gebiete überall dem logischen Denken voraneilt und also in jedem Momente einen weiteren Bereich besitzt als dieses.*

Hier könnte ich nun erstlich einen historischen Exkurs darüber einschalten, wie bei der Entwicklung der meisten Zweige unserer Wissenschaft in der Tat die Anschauung den Anfang gemacht hat und die strenge logische Behandlung erst folgte. Und zwar gilt dies nicht nur im großen von der Entstehung der Infinitesimalrechnung, wie ich bereits in der Einleitung andeutete, es gilt ebensowohl von vielen Gebieten, die erst im Laufe des gegenwärtigen Jahrhunderts ihren Ursprung genommen haben. Ich erinnere in dieser Hinsicht, um nur eines zu nennen, an Riemanns Funktionentheorie komplexer Variabler, und füge gern zu, daß diejenige Disziplin, welche lange Zeit am meisten von der Anschauung abgewandt schien, die Zahlentheorie, eben nun durch Heranziehung anschaulicher

Methoden in den Händen von Minkowski und anderen einem neuen Aufschwunge entgegen zu gehen scheint. Weiterhin wäre von großem Interesse, die Entwicklung nicht der einzelnen mathematischen Disziplin, sondern der individuellen mathematischen Persönlichkeit unter dem vorliegenden Gesichtspunkte zu verfolgen. Ich begnüge mich in dieser Hinsicht hier mit der Angabe, daß die zwei wirksamsten mathematischen Forscher der Jetztzeit, Lie in Leipzig und Poincaré in Paris, beide ursprünglich in der Anschauung wurzeln. Aber alles dies würde, wenn ich weiter darauf eingehen wollte, zu sehr in spezifische Einzelheiten hineinführen und schließlich nur außerordentliche Fälle betreffen. Ich will lieber schildern, was die einigermaßen geübte Anschauung tagtäglich über die rechnerische oder konstruktive Behandlung hinaus für die quantitative Behandlung der physikalischen oder technischen Probleme leistet. Wenn ich beispielsweise auf die beiden Angaben der Elektrizitätslehre zurückkommen darf, auf die ich eben Bezug nahm, so wird jeder Physiker im vorgegebenen Falle ohne weiteres den Verlauf der Niveauflächen der Greenschen Funktion, bez. der Stromkurven bei dem zweiten der genannten Experimente ziemlich richtig zeichnen können. Oder nehmen Sie den Fall irgendwelcher Differentialgleichung, ich will sagen (um beim einfachsten Falle zu bleiben) einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln. Höchstwahrscheinlich versagt die analytische Behandlung. Demungeachtet kann man auf graphischem Wege den allgemeinen Verlauf der Integralkurven sofort angeben, wie dies noch neulich von Lord Kelvin — einem der großen Meister der mathematischen Anschauung — für eine berühmte Differentialgleichung des Dreikörperproblems gezeigt worden ist. Es handelt sich in allen solchen Fällen, wenn wir die Sache in der Sprache der Analysis bezeichnen sollen, um eine Art von Interpolation, bei der weniger auf Genauigkeit im Einzelnen als auf Berücksichtigung der allgemeinen Bedingungen Gewicht gelegt wird. Ich will noch ausdrücklich betonen, daß wir bei der Aufstellung aller unserer Naturgesetze, oder überhaupt, wenn wir versuchen, irgendwelchen äußeren Vorgang mathematisch zu formulieren, von einer ähnlichen Kunst des Interpolierens Gebrauch machen. Denn es gilt immer unter der Menge der zufälligen Störungen die einfachen Zusammenhänge der wesentlichen Größen hervorzuziehen. Das ist schließlich dasselbe, was ich oben als das Verfahren der Idealisierung bezeichnet habe. Die logische Überlegung tritt allemal erst in ihr Recht, wenn die Anschauung die Aufgabe der Idealisierung vollzogen hat.

Ich bitte, diese Angaben nicht als eine Erklärung, sondern als eine Schilderung tatsächlicher Verhältnisse aufzunehmen. Der Mathematiker kann nicht mehr, als durch Selbstbeobachtung die Eigenart des im einzelnen Falle statthabenden psychischen Vorganges konstatieren. Vielleicht

werden wir über die näheren Beziehungen der von der Anschauung ausgehenden Prozesse zum logischen Denkvermögen eines Tages von der Physiologie und der experimentellen Psychologie genaueren Aufschluß erhalten. Daß es sich dabei in der Tat um verschiedene, d. h. nicht notwendig verknüpfte Seelentätigkeiten handelt, wird durch die großen Differenzen bestätigt, welche die Beobachtung verschiedener Individuen ergibt. Die modernen Psychologen unterscheiden eine visuelle, eine motorische und eine auditive Veranlagung. Es scheint, daß die mathematische Anschauung, wie ich sie hier verstehe, den beiden ersten Arten der Begabung, die logische Auffassung mehr der letzteren eignet. Die Psychologie steht erst in den Anfängen derartiger Untersuchungen, die ich mit vielen Fachgenossen freudig begrüße. Denn wir hoffen, daß in unserer Wissenschaft und ihrem Betriebe viele Meinungsverschiedenheiten, die jetzt notwendig unausgetragen bleiben, verschwinden werden, wenn wir erst über die psychologischen Vorbedingungen des mathematischen Denkens und deren individuelle Verschiedenheit genauer unterrichtet sein werden.

Ich darf hier kurz auf die pädagogische Seite der Mathematik eingehen. Wir beobachten betreffs derselben in Deutschland zurzeit eine sehr merkwürdige Sachlage. Es sind zwei entgegengesetzte Strömungen, die nebeneinander herlaufen, ohne bisher nennenswert aufeinander einzuwirken. Bei den Lehrern unserer Gymnasien wird die Notwendigkeit eines an die Anschauung anschließenden mathematischen Unterrichts im Augenblicke vielfach so stark betont, daß man gezwungen ist zu widersprechen und umgekehrt die Notwendigkeit eingehender logischer Entwicklungen zu betonen; das ist der Sinn einer kleinen Schrift, die ich im vergangenen Sommer über elementargeometrische Probleme veröffentlicht habe[2]). Bei den Hochschullehrern unseres Fachs aber liegt die Sache genau umgekehrt: die Anschauung wird häufig nicht nur unterschätzt, sondern nach Möglichkeit überhaupt beiseite geschoben. Es ist dies ohne Zweifel eine Folge der großen inneren Wichtigkeit, welche den arithmetisierenden Tendenzen der modernen Mathematik innewohnt. Aber die Wirkung geht weit über das richtige Ziel hinaus. Es ist Zeit, einmal öffentlich auszusprechen, daß es sich dabei nicht nur um eine verkehrte Pädagogik, sondern um eine schiefe Gesamtauffassung der Wissenschaft handelt. Ich lasse der Eigenart des einzelnen akademischen Dozenten gern den freiesten Spielraum und habe es darum immer abgelehnt, allgemeine Regeln für den höheren mathematischen Unterricht in Vorschlag zu bringen. Das soll mich nicht hindern auszusprechen, daß jedenfalls zwei Kategorien mathematischer Vorlesungen notwendig von der Anschauung ihren Ausgangspunkt

[2]) [Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie (ausgearbeitet von F. Tägert) im Verlag von B. G. Teubner, 1895.]

nehmen sollten. Das sind erstlich die Elementarvorlesungen, welche den Anfänger überhaupt in die höhere Mathematik einleiten, — wird doch der Lernende naturgemäß im kleinen immer denselben Entwicklungsgang durchlaufen, den die Wissenschaft im großen gegangen ist. Das sind ferner diejenigen Vorlesungen, deren Zuhörer von vornherein darauf angewiesen sind, sehr wesentlich mit der Anschauung zu arbeiten, also die Vorlesungen für Naturforscher und Ingenieure. Wir haben durch einseitige Überspannung der logischen Form in diesen Kreisen viel von der allgemeinen Geltung verloren, welche der Mathematik naturgemäß zukommt, und es ist Zeit und eine ernste Pflicht, daß wir diese Geltung durch ein zweckmäßigeres Verhalten zurückgewinnen.

Doch ich kehre zur theoretischen Betrachtung zurück. Die Gesamtauffassung, welche ich bezüglich der heutigen Aufgaben der mathematischen Wissenschaft vertrete, braucht kaum noch besonders formuliert zu werden. Indem ich überall die vollste logische Durcharbeitung des Stoffes verlange, betone ich zugleich, daß daneben die anschauungsmäßige Erfassung und Verarbeitung desselben auf alle Weise gefördert werden soll. Mathematische Entwicklungen, welche der Anschauung entstammen, dürfen nicht eher als fester Besitz der Wissenschaft gelten, als sie nicht in strenge logische Form gebracht sind. Umgekehrt kann uns die abstrakte Darlegung logischer Beziehungen nicht genügen, solange nicht deren Tragweite für jede Art der Anschauung lebendig ausgestaltet ist, und wir die mannigfachen Verbindungen erkennen, in welche das logische Schema, je nach dem Gebiete, welches wir wählen, zu anderen Teilen unserer Erkenntnis tritt. — Ich vergleiche die mathematische Wissenschaft mit einem Baume, der seine Wurzeln nach unten immer tiefer in das Erdreich treibt, während er nach oben seine schattengebenden Äste frei entfaltet. Sollen wir die Wurzel oder die Zweige als den wesentlicheren Teil ansehen? Die Botaniker belehren uns, daß die Frage falsch gestellt ist, daß vielmehr das Leben des Organismus *auf der Wechselwirkung seiner verschiedenen Teile* beruht.

XLVIII. Auszug aus dem Gutachten der Göttinger philosophischen Fakultät betreffend die Beneke-Preisaufgabe für 1901.[1])

[Math. Annalen, Bd. 55 (1902).]

Die philosophische Fakultät hatte im März 1898 folgende Aufgabe gestellt[2]):

„Als allgemein geltende Grundlage für die mathematische Behandlung der Naturerscheinungen ist lange Zeit hindurch das *Prinzip der Stetigkeit* oder noch spezieller die *Darstellung durch unbeschränkt differentiierbare Funktionen* angesehen worden. Diese Grundlage wurde von den Erfindern der Differential- und Integralrechnung als etwas Selbstverständliches eingeführt; die Fortschritte der mathematischen Forschung haben aber je länger je mehr gezeigt, daß dabei eine sehr große Zahl stillschweigender Voraussetzungen zugrunde lag, zu denen man bei der immer vorhandenen Ungenauigkeit unserer sinnlichen Wahrnehmungen keineswegs gezwungen ist. Auch tritt mit dem genannten Ansatze die Annahme der molekularen Konstitution der Materie von vornherein in Widerspruch. Die Fakultät wünscht eine von aktuellem wissenschaftlichen Interesse getragene Schrift, welche die hier in Betracht kommenden Fragen in allgemein verständlicher Weise darlegt und die Zulässigkeit, bez. Zweckmäßigkeit der üblichen Darstellung einer eingehenden Prüfung unterwirft. Die Schrift kann mehr nach mathematischer oder philosophischer und psychologischer Seite ausholen; historische Studien sind erwünscht, werden aber nicht verlangt".

Auf diese Aufgabe hin sind bei dem Dekan der Fakultät *drei* Arbeiten rechtzeitig eingelaufen, [deren keiner aber ein Preis zuerkannt werden konnte]. Jedenfalls möge hier eine ausführlichere Erläuterung der Preisfrage

[1]) [Das betr. Gutachten ist in extenso in den Göttinger Nachrichten vom April 1901 (Geschäftliche Mitteilungen, Heft 1) publiziert; ich bringe hier wie schon in Bd. 55 der Math. Annalen denjenigen Teil zum Wiederabdruck, der allgemeines mathematisches Interesse besitzen dürfte. K.]

[2]) Vgl. Göttinger Nachrichten, 1898.

gegeben werden, einmal, weil die ursprüngliche Formulierung in ihrer Kürze verschiedentlich nicht richtig aufgefaßt worden ist, dann aber auch um einen Maßstab für die Beurteilung der eingelaufenen Arbeiten zu haben.

Die Fragestellung ist vielfach dahin gedeutet worden, oder es ist doch als ihr Kern angesehen worden: man solle entscheiden, ob man die Materie besser als molekular aufgebaut oder als kontinuierlich zu denken habe, ob insbesondere die modernen Fortschritte der Naturwissenschaft mehr in der Richtung der einen oder der anderen Auffassungsweise liegen.

Eine derartige Erörterung, von einem unabhängigen Standpunkte aus und mit wirklichem Überblick über die neuesten Fortschritte der in Betracht kommenden naturwissenschaftlichen Gebiete unternommen, wäre nicht ohne Verdienst. Dies jedenfalls sollte dabei hervorgekehrt werden, daß sich die zweierlei Auffassungsweisen gerade auch in der neuesten Zeit alterniernd immer wieder ablösen. Nachdem Maxwell in der Elektrizitätslehre die Theorie des Kontinuums zu Ehren gebracht hat, steuern wir bei derselben jetzt infolge des Studiums der Kathodenstrahlen und der elektrodynamischen Lichttheorie wieder auf atomistische Vorstellungsweisen hin. Die physikalische Chemie, welche in der Phasenlehre von Gibbs die Zustände in der Materie durch eine endliche Zahl von Parametern charakterisiert, also Kontinuitätsvorstellungen zugrunde zu legen scheint, entwickelt nach anderer Seite die wesentlich atomistische Jonentheorie. Zu derselben Zeit, wo man in der Physik versucht, durch eine bloß „phänomenologische" Schilderung der Erscheinungen das Beste zu leisten, wird in der Chemie die Lehre von der Lagerung der Atome im Raume ausgebaut, usw. — Andererseits wäre hervorzuheben, daß die atomistische Vorstellungsweise nicht notwendig zur Idee von Fernkräften führt; man kann sie mit der Idee einer im Raume kontinuierlichen Krafttransmission verbinden, indem man die elektrischen oder materiellen Atome (wie immer man sich dieselben denken mag) als *singuläre Stellen* in einem den Raum kontinuierlich erfüllenden Medium einführt.

Die so umschriebene Erörterung, so interessant sie sein könnte, träfe aber doch nicht das eigentliche von der Fakultät vorgeschlagene Thema, sondern gäbe für dasselbe nur beiläufiges Material. Man wird dem Thema wesentlich näher kommen, wenn man fragt: in wie weit sind bei den genannten Beispielen die beiden Vorstellungsweisen (der Kontinuumstheorie und der Molekulartheorie) für die Erklärung oder, besser gesagt, die Darstellung der beobachteten Tatsachen mathematisch gleichwertig? Man wird den Sinn des Themas vollständig haben, wenn man zunächst alles Hypothetische oder Spekulative, auf das intime Wesen der Materie Bezügliche, abstreift und ganz allgemein Folgendes beachtet: Jedermann führt, sobald er die Gesamtwirkung ausgedehnter Gebilde beurteilen will, die in kleinen

Dimensionen inhomogen sind, homogene Mittelwerte ein; für diese statuiert er Abhängigkeiten, die er durch möglichst einfach gewählte Funktionen ausdrückt. So ersetzt der numerische Rechner in zahlreichen Fällen Summationen durch Integrationen usw. Der ursprüngliche Anlaß zu dem solcherweise bezeichneten Ansatze liegt vermutlich in der Natur unserer sinnlichen Wahrnehmungen. Man denke z. B. daran, daß ein Schneehaufen, aus einiger Entfernung betrachtet, oder ein Wald, der den Horizont abschließt, eine kontinuierliche Kontur zu besitzen scheinen. Hiermit verbindet sich des weiteren das Streben nach möglichst einfacher Darstellung. Wie weit ist der in Rede stehende Ansatz mathematisch berechtigt? Insbesondere, welchen Sinn hat es, auf die Abhängigkeiten, die wir zwischen den homogenen Mittelwerten aufstellen, die Grundsätze der Differentialrechnung und der Reihenlehre anzuwenden? Und wenn wir durch eine solche Anwendung richtige Resultate finden, können wir dann auf die Homogenität oder Nicht-Homogenität des Substrats einen Rückschluß machen? — Erst wenn der Komplex der solcherweise bezeichneten Fragen erledigt oder doch verstanden ist, möge man zum Problem der Naturerklärung zurückgehen. Man wird sich dann fragen, welche innere Bedeutung den Stetigkeitsvoraussetzungen, die man hierauf bezüglich von alters her zu machen pflegt, beigelegt werden muß, ob dieselben mehr sind als ein bloßes Hilfsmittel zur leichteren Durchführung der mathematischen Betrachtung, und in welchem Sinne die Resultate, welche man von den genannten Voraussetzungen aus ableitet, auf objektive Gültigkeit Anspruch machen.

Es ist unmöglich, das Gesagte hier noch eingehender zu erläutern. Nur auf ein besonders einfaches Beispiel (welches Boussinesq gelegentlich behandelt) mag noch hingewiesen werden. Jedermann lernt, daß das Potential der Schwere im Inneren eines Körpers der Differentialgleichung $\Delta V = -4\pi\varrho$ genügt. Welche Bedeutung hat diese Differentialgleichung oder auch welche Bedeutung will man den Größen V und ϱ, die in der Differentialgleichung vorkommen, für einen Körper beilegen, der in kleinen Dimensionen inhomogen ist (wie der soeben genannte Schneehaufen)? Und wie stellen sich diese Fragen, wenn man einen Aufbau des Körpers aus streng punktförmigen Atomen voraussetzen will? Man wird in dem einen oder andern Fall V und ϱ selbstverständlich als Mittelwerte einführen wollen; wie sind diese Mittelwerte zu berechnen?

Über Fragen und Schwierigkeiten der hiermit bezeichneten Art sind die hervorragendsten Theoretiker früherer Jahrzehnte unbedenklich hinweggegangen. Man lese nach, wie Cauchy oder Poisson von Molekularvorstellungen aus zu den Differentialgleichungen der mathematischen Physik kommen. Und das hiermit gegebene Beispiel findet von seiten der Mehrzahl der heutigen Physiker ebenso unbedenkliche Nachfolge. Offenbar spielen dabei in die Überlegungen eine Menge empirischer Elemente hinein. Die Erfahrung gibt uns die Gewißheit, daß im allgemeinen kleine Abänderung der Prämissen die Resultate nur wenig abändert. Freilich trifft dies nicht immer zu (wenn „Instabilität" vorliegt, bei Explosionen usw.); die Naturforscher verlassen sich aber bezüglich der Frage, ob gegebenenfalls ein solcher Ausnahmefall vorliegt, oder nicht, auf ihr Gefühl oder auf die experimentelle Kontrolle; wie der Erfolg zeigt, mit Recht.

Der heutige Mathematiker aber, der über die Prinzipien seiner Wissenschaft nachdenkt, kann unmöglich die gleiche Selbstbeschränkung üben. Er wird nicht die Zweckmäßigkeit des geschilderten Verfahrens bestreiten, — sogar von da aus mit Vorliebe Anregung entnehmen —, darüber hinaus aber eine genaue mathematische Begründung und Umgrenzung des Verfahrens verlangen. Für seinen Erkenntnistrieb maßgebend ist die *moderne Entwicklung der Mathematik nach der kritischen Seite hin.* Diese Entwicklung ist bisher in allgemeineren Kreisen, sowohl von physikalischer als auch von philosophischer Seite, gern als etwas Beiläufiges angesehen worden, was für die Zwecke der Naturerklärung nicht eigentlich in Betracht kommt. Die Aufgabe sollte aber doch nie sein, eine unbequeme Kritik zurückzuschieben, sondern immer nur, sie innerlich zu überwinden. Andererseits haben sich die Mathematiker in ihrer Mehrzahl damit begnügt, die neuen Prinzipien im Bereich ihrer Spezialwissenschaft zur Geltung zu bringen; sie haben nur erst selten Gelegenheit gehabt oder gesucht, die Beziehungen zu den Nachbargebieten dementsprechend auszugestalten. Deshalb mögen einige Erläuterungen zur Sachlage hier am Platze sein.

1. Es handelt sich um diejenige Entwicklung der Mathematik, welche als *Arithmetisierung* derselben bezeichnet wird. Als einzige Grundlage derselben gilt die Evidenz des Zahlbildes, bez. der Gesetze, nach denen man mit Zahlen operiert; auf diese Grundlage sind alle anderen Beziehungen zurückzuführen. Die Idee der kontinuierlichen Veränderlichen wird durch die allgemeineren Formulierungen der Mengenlehre ersetzt; die Idee der Funktion erfährt eine dementsprechende Durchbildung. Differential- und Integralrechnung werden ausschließlich auf den strengen Grenzbegriff basiert; es erscheint als Regel, nicht als Ausnahme, daß eine stetige Funktion nicht differentiierbar ist, usw.

2. Das Wesentliche ist nun, daß an der solcherweise arithmetisierten Mathematik gemessen alle sinnliche Auffassung als etwas *Ungenaues*, nur *auf eine Anzahl Dezimalen Bestimmtes* erscheint. Trotzdem wird man die arithmetisierte Mathematik als Ausgangspunkt für die quantitative Beherrschung der Außenwelt festhalten wollen[3]). *In welcher Form hat dies*

[3]) Man kommt sonst in neue Schwierigkeiten. Vgl. die Antrittsrede von Prof. Burkhardt: „Mathematisches und naturwissenschaftliches Denken". Zürich 1897.

zu geschehen? Und welche Erleichterungen darf man sich gestatten, wenn man von den Resultaten wieder nur eine begrenzte Genauigkeit verlangt? Dies ist die zentrale Frage, unter welches sich alles früher Gesagte unterbegreift.

3. In dem Gesagten ist bereits enthalten, was zur Lösung der vorliegenden Schwierigkeiten geschehen sollte. Es handelt sich darum, daß sich der Mathematiker und der Empiriker auf einem Zwischengebiete die Hand reichen. Für den Mathematiker erwächst die Aufgabe, auf Grund der arithmetisierten Wissenschaft eine umfassende Lehre von den *Näherungsmethoden* zu entwickeln, als eine besondere Disziplin dasjenige zu pflegen, was Hr. Heun neuerdings treffend als *Approximationsmathematik* bezeichnet hat[4]). Für den Empiriker aber wird es sich darum handeln, auf allen Gebieten und jedenfalls sehr viel mehr als bisher, den *Genauigkeitsgrad* festzulegen, innerhalb dessen die (äußeren oder inneren) Beobachtungen, von denen er ausgeht, richtig sind, oder innerhalb deren er zuverlässige Resultate zu haben wünscht.

Das hiermit bezeichnete Programm verlangt an sich nichts Neues, nur daß die strenge Durchführung bisher vielfach fehlt. Zahlenrechner haben sich von je an dasselbe angeschlossen und in Astronomie und Geodäsie ist dasselbe seit den Arbeiten von Gauß universell rezipiert. Von neueren rein mathematischen Arbeiten dürften ganz besonders diejenigen von Tschebyscheff zu nennen sein. Nicht minder wird man hier den Satz von Weierstraß anführen wollen, daß man jede in einem Intervall gegebene stetige Funktion durch eine rationale ganze Funktion mit [beliebig vorgegebener] Genauigkeit gleichmäßig approximieren kann. Als neue Forderung tritt nur auf, *die bezeichnete Fragestellung als den eigentlichen Mittelpunkt aller angewandten Mathematik mehr in den Vordergrund zu rücken*, und übrigens einzusehen, *daß die approximative Auffassung der Größenbeziehungen sehr viel mehr, als man früher wußte, unser ganzes Denken durchzieht.* Unsere Aussagen über die Natur der Dinge aber werden bescheidener werden. Man hat früher oft gesagt, daß andere als analytische Funktionen in der Natur nicht vorkommen. Man wird diese Aussage jetzt dahin wenden, daß man vielleicht nur infolge der *Ungenauigkeit unserer Naturauffassung* seither mit analytischen Funktionen ausgereicht hat, und zwar durchweg mit sehr einfachen analytischen Funktionen. Man wird darum aber noch nicht zu dem andern Extrem übergehen, welches Boltzmann neuerdings vertritt, wenn er die Hypothese von der Unstetigkeit der Naturerscheinungen sozusagen als Denknotwendigkeit hinstellt.

[4]) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung IX, 2 (1900).

Die Bedeutung der von der Fakultät gestellten Preisfrage dürfte hiermit genügend hervorgekehrt sein. Es galt, den Komplex der in Betracht kommenden Fragestellungen und Auffassungen in übersichtlicher Form darzulegen und womöglich kritisch zu sichten. Ein Mathematiker konnte zugleich unternehmen, die Lehre von den Näherungsmethoden auf einem speziellen Gebiete durchzuführen, ein Philosoph oder Psycholog, die Ungenauigkeit unserer sinnlichen Wahrnehmung nach der einen oder anderen Richtung genauer zu studieren; man denke an den von Boltzmann mit Vorliebe herangezogenen Kinematographen. Was an mathematischen Kenntnissen unbedingt verlangt werden mußte, war nur, daß der Autor das Wesen der arithmetisierten Wissenschaft, wie es in den Schriften der heute maßgebenden Mathematiker zutage tritt, in sich aufgenommen hatte. Hierzu genügt nicht, die allgemeinen Auseinandersetzungen hervorragender Autoren gelesen zu haben, welche den Einzelheiten der modernen Präzisionsmathematik niemals näher getreten sind, mag es sich nun um Helmholtz oder Kirchhoff, Boltzmann oder Mach handeln. Mathematik läßt sich nur durch konzentriertes Studium erlernen; es gibt bei ihr keinen „Königsweg“.

XLIX. Grenzfragen der Mathematik und Philosophie[1]).

[Aus der wissenschaftlichen Beilage zum 19. Jahresbericht der Philosophischen Gesellschaft an der Universität zu Wien (1906).]

Sehr geehrte Anwesende! Ihr Ehrenpräsident Höfler hat an mich die Aufforderung gerichtet, gelegentlich meines Besuches in Wien eine Diskussion der philosophischen Gesellschaft „Über Grenzfragen der Mathematik und Philosophie“ durch einige Worte einzuleiten. Wiewohl ich diese Aufforderung erst vor drei Tagen empfing, komme ich ihr doch um so lieber nach, als ich zu den Mathematikern gehöre, die nähere Beziehungen zu philosophischen Kreisen wünschen; denn ich bin von der Überzeugung durchdrungen, daß eine Menge von Fragen die Philosophen und uns Mathematiker gemeinsam beschäftigen sollte. Neues habe ich den heute anwesenden Mathematikern freilich nicht zu sagen. Denn die Aufforderung lautete dahin, ich möge namentlich einiges von den Ideen, die ich über die Ungenauigkeit unserer Raumvorstellungen schon anderweitig auseinandergesetzt habe, hier neuerdings entwickeln. Zum erstenmal bin ich für jene Ideen vor zweiunddreißig Jahren eingetreten und die Thesis, zu der ich damals kam, schicke ich heute voraus.

Jedermann weiß, daß die unmittelbare räumliche Wahrnehmung ungenau ist, daß es eine Schwelle der Genauigkeit z. B. für die Wahrnehmung durch das Auge gibt, und zwar auch für das noch so sehr bewaffnete. Ich habe daran anknüpfend entgegen der damals herrschenden Meinung die Behauptung aufgestellt, daß gleiches nicht minder wie für die Wahrnehmung auch für die abstrakte Raumvorstellung gelte, daß jeder mit sich herumtragen mag, und zwar so, daß wir in einem engeren Raumstück, das uns umgibt, noch die verhältnismäßig bessere Genauigkeit haben, daß diese aber immer geringer wird, je weiter in Gedanken wir darüber hinausschweifen. Die stetigen Funktionen ohne Differentialquotient (speziell

[1]) [Dieser Vortrag wurde am 14. Oktober 1905 bei den Verhandlungen der Philosophischen Gesellschaft an der Universität Wien über Grenzfragen der Mathematik und Philosophie gehalten.]

die Weierstraßsche Funktion) waren damals etwas Neues; jedermann war davon überzeugt, daß es unmöglich sei, sich von den zugehörigen Kurven $y = f(x)$ ein anschauliches Bild zu machen, d. h. den Verlauf einer solchen Kurve in der Raumanschauung als etwas Fertiges aufzufassen. Demgegenüber behauptete ich, daß man überhaupt nicht die Fähigkeit habe, sich auch einfachere Beispiele der Funktionentheorie und Infinitesimalrechnung genau und zugleich anschaulich zu denken, daß die Raumanschauung sogar schon versagt, wenn es sich um die genauen Einzelheiten derjenigen Kurven handelt, welche durch ganze Funktionen dargestellt werden. (Zur Orientierung für diejenigen, die sich nicht mit der modernen Präzisionsmathematik beschäftigt haben, teile ich mit, daß die stetigen, nicht differentiierbaren Kurven nur ein Anfang gewesen sind, daß mit mehr Vorliebe noch von den jüngeren Mathematikern die Punktaggregate studiert werden, mit denen sich die sogenannte Mengenlehre beschäftigt. Diese liegen mit ihren merkwürdigen Eigenschaften erst recht über alle Anschauung hinaus.)

Es scheint da eine zweifache Stellungnahme möglich: entweder die radikale, zu der ich mich bekenne, daß unsere Raumvorstellung eine untere Schwelle der Genauigkeit habe, und daß das, was wir vor Augen haben, wenn wir von einer Kurve sprechen, ein *Streifen* von allenfalls sehr geringer, jedenfalls nicht verschwindender Querdimension sei. Oder aber es habe — so ist mir gesagt worden — der menschliche Geist die Fähigkeit, die sogenannten analytischen Kurven sich wirklich genau vorzustellen; nur die nichtanalytischen seien im eigentlichen Sinne transzendent. — Da wäre es eine sehr merkwürdige Tatsache, daß gerade den Kurven, die man früher von mathematischer Seite allein kannte, unsere Raumanschauung sollte koordiniert gewesen sein, und daß nur, was man seitdem konstruiert, über unsere Anschauungen hinausgehe. Wenn das der Fall wäre, so wäre damit für das Wesen unserer Raumanschauung eine äußerst merkwürdige Unterscheidung gewonnen. Ob aber nicht die ganze Sachlage vielmehr dahin zu verstehen ist: solange man sich nur mit analytischen Kurven beschäftigte, merkte man nicht, daß man gar nicht in der Lage sei, die Dinge so, wie die Infinitesimalrechnung sie darstellt, auch wirklich anschaulich vorzustellen; weil nämlich die mathematischen Eigenschaften der analytischen Kurven mit den anschaulichen Eigenschaften der Streifen einigermaßen parallel gehen?

Jedenfalls scheint mir ein Problem zentralster Stellung für die Anwendungen der Mathematik auf die Naturwissenschaften vorzuliegen, und ich glaube, daß die Versammlung, die einen so hervorragenden Vertreter der mathematischen Physik unter den Anwesenden begrüßt[2]), gerade hierüber wird Meinungen austauschen wollen.

[2]) [L. Boltzmann.]

Etwas näher will ich ausführen, daß die Ansicht von der Ungenauigkeit der Raumvorstellungen uns sowohl bei den *Axiomen* wie bei den ersten *Definitionen* der Geometrie zu neuen Auffassungsmöglichkeiten führt.

In erster Hinsicht ein paar Worte über die Nicht-Euklidische Geometrie. Denken wir uns eine gerade Linie gezeichnet und durch einen Punkt Strahlen gezogen, welche diese gerade Linie treffen. Indem wir uns die Parallele als Grenzlage einer Sekante denken, die dadurch entsteht, daß die Schnittpunkte eines Strahles nach rechts immer weiter hinaus wandern, andererseits nach links hin, so bekommen wir eine Parallele nach rechts und eine nach links. Unsere gewöhnliche Raumanschauung liefert uns dann den Satz, daß diese beiden Parallelen zusammenfallen und daß es also nur *eine* Parallele zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt gibt. Unter der Auffassung aber, daß all unsere räumlichen Vorstellungen nur approximativ seien, wird es unserer lebendigen Anschauung auch noch genügen, wenn wir die beiden Parallelen verschieden voneinander annehmen, nämlich so wenig, daß wir es nicht merken. Ich habe dies gelegentlich in folgender Weise fühlbar zu machen gesucht: Denken Sie den Punkt, durch den wir die Parallelen ziehen sollen, von der gegebenen Geraden um Siriusferne abstehend — dürfen Sie da mit ehrlichem Gewissen behaupten, ihre Raumanschauung sei so überzeugend, daß Sie behaupten können, die beiden Parallelen würden auch nicht einen Winkel von einer Millionstel-Sekunde bilden? Bemerken Sie, daß, wenn von einer Millionstel-Sekunde die Rede ist, etwas sehr Unbedeutendes gemeint sei, was weit unter der Genauigkeitsschwelle jeder physischen Beobachtung auch bei astronomischen Instrumenten ersten Ranges liegt. Wir können es uns zwar denken, aber niemand kann es sich meines Erachtens vorstellen, daß zwei Linien in einem um Siriusferne von dieser Tafel abstehenden Schnittpunkt einen so kleinen Winkel bilden. — Beachten Sie, daß wir den Sirius selbst dabei unwillkürlich als Punkt denken. Ist irgend jemand, der auf die Frage, ob für ihn auch in so großer Entfernung die Parallele nach rechts und die Parallele nach links genau zusammenfallen, mit lautem Ja antworten kann? Wenn das aber nicht der Fall ist, so ist die Möglichkeit gegeben, daß die Nicht-Euklidische Geometrie, die bekanntlich von *logischen* Widersprüchen frei ist, auch mit unserer *Raumanschauung* nicht im Widerspruche sei. Wir müssen nur den Parallelenwinkel so gering annehmen, daß er auch bei stark wachsendem Abstande [zunächst noch] unter jeder vorstellbarer Größe liegt.

Das war die eine Folgerung, die ich zu [der heute zur Diskussion stehenden] Frage bringen wollte. — Man wird darum doch die Euklidische Formulierung vom Vorhandensein nur einer Parallelen der Nicht-Euklidischen praktisch immer vorziehen nach dem Prinzip, welches Mach das ökonomische genannt hat. Es ist die *einfachere* Annahme, daß es nur eine Parallele, nicht zwei seien. Aber man wird diese Annahme bewußt machen, nicht weil sie eine notwendige, sondern weil sie die einfachste ihrer Art ist. Soviel also über die Bedeutung, welche unsere Thesis für die Formulierung der *Axiome* in der Geometrie hat.

Nun aber die *Definitionen*, mit denen Euklid die Geometrie beginnt; hier heißt es z. B.: Fläche ist, was nur Länge und Breite hat. Man fügt dann meist hinzu: Fläche ist die Grenze eines Körpers. Zur Erläuterung macht man den Schüler aufmerksam, wie z. B. die Mauer durch die Wandfläche abgegrenzt ist. Wenn Sie aber andere Gegenstände, die uns täglich umgeben, aus kleinerem Abstand betrachten als die Wände, z. B. des Morgens nach dem Aufstehen den Badeschwamm, mit dem man sich wäscht, oder beim Frühstück die Semmel, die man durchbrochen hat — wo ist da die Oberfläche, die nur Länge und Breite hat? Und wie kann man bei einer solchen Oberfläche von Tangentialebene und Krümmung reden, was man doch bei den Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie z. B. in der mathematischen Physik unbedenklich zu tun pflegt? Sowie man weiter nachdenkt und naturwissenschaftlich noch tiefer geht, bemerkt man, daß überhaupt Oberflächen, wie man sie in der Theorie voraussetzt, in der Natur nicht vorkommen (die Dinge, die wir in der Natur vorfinden, haben sozusagen alle eine zellige Struktur). Die theoretische Idee einer Oberfläche scheint durch eine Eigenschaft unseres Auges veranlaßt zu sein, an die wir von früher Jugend gewöhnt sind. Gegenstände, deren Diskontinuitäten hinreichend fein sind, erscheinen dem Auge als Kontinuum. Wenn wir die Blätter eines Waldes aus der Nähe betrachten, so werden wir kaum von einer Oberfläche des Waldes reden wollen. Gehen wir aber einige Kilometer weg und sehen uns um, so glauben wir scharfe Umrisse, scharfe Konturen zu sehen. Erst aus solchen ungenauen Wahrnehmungen entstehen die Ideen, die wir in verschärfter Form unseren mathematischen Spekulationen gewohnheitsmäßig zugrunde legen.

Sie sehen, wie tiefgreifend die Kritik ist, und ich zweifle nicht, daß mancher jüngere Mathematiker sich mit der Hoffnung trägt, daß es an der Zeit ist, die alten mathematischen Definitionen überhaupt zurückzuschieben, daß das Studium der diskontinuierlichen Funktionen und der Punktmengen „zu scheußlichen Klumpen geballt" es gestattet werden, tiefer in das Wesen der Dinge einzudringen als es beim Gebrauch der analytischen Funktionen möglich war.

Es ist ein gemeinsamer Charakter aller Wissenschaften in der neuesten Zeit, daß alles in Zweifel gezogen wird, was bis dahin als ganz feststehend gegolten. Alles ist in Gärung, so auch in der Mathematik. Ich möchte

meinen Wunsch dahin aussprechen, daß diese Entwicklung, in die wir durch allgemeine Notwendigkeit eingetreten sind — kein einziger hat sie verschuldet oder kann sie sich zurechnen, sondern es ist im Sinne der Zeit, daß überall die Fragen nach den Grundlagen im Vordergrunde stehen — ich möchte meinen Wunsch aussprechen, daß diese Periode nicht enden möge mit einem allgemeinen Skeptizismus, sondern mit einem neuen Aufbau.

[In der Diskussion machte Boltzmann u. a. darauf aufmerksam, daß die Vorstellungen der Gastheorie, aber auch die Aufzeichnungen hinreichend empfindlicher Registrierapparate Kurvenbilder geben, die eine große Ähnlichkeit mit Weierstraß' undifferentiierbaren Kurven besitzen. Er führte dabei folgendes aus:

„Daß vom Schreibstifte abgesehen, die Temperatur an einem Punkte wirklich durch eine Weierstraßsche Kurve dargestellt würde, ist sogar meine Überzeugung.

Damit stimmt auch überein, daß wir uns Körper von stetigen Flächen begrenzt nur *denken*; betrachten wir aber die Körper genau, so sehen wir, daß jede wirkliche Oberfläche algebraisch undarstellbar ist.

Daß die Punktmengen, nicht nur der mathematischen Mannigfaltigkeitslehre, sondern auch die, welche eine physikalische Bedeutung haben, über unsere räumliche Vorstellung hinausgehen, das ist meine vollständige Überzeugung.

Was die Anschauungen oder Vorstellungen selbst betrifft, so glaube ich, daß sie sich allmählich so weiterbilden werden, daß vielleicht künftige Generationen über bessere Anschauungen verfügen. Ungebildete können sich die Gegenfüßler nicht vorstellen. Ich habe Leute gesprochen, die sagten, daß sie sich eine Entfernung von zwanzig Millionen Meilen nicht vorstellen können.

Und im Grunde genommen, kann ich selbst mir das nicht vorstellen. Sobald man darüber hinausgeht, was durch den Blick erreicht wird, hört die Vorstellung auf. Eine Kugel in der Größe des Sirius kann man sich algebraisch darstellen, aber nicht sinnlich vorstellen. Und unsere Vorstellung ist beschränkt auf eine Reproduktion dessen, was wir wahrgenommen haben. Sobald uns unsere Wahrnehmung im Stiche läßt, läßt uns auch die Vorstellung oder Anschauung im Stiche. Nur allmählich und erst durch langes Nachdenken können wir die Vorstellung erweitern. Glauben Sie sich $10^{(10^{10})}$ vorstellen zu können?"

Wirtinger bemerkte im Gespräch hernach, daß es ungeheuer schwer sei, sich die einfachste Figur als hinter dem eigenen Hinterkopf gelegen vorzustellen, und ich füge gern von mir aus hinzu, daß ich mir Figuren im Innern meines Kopfes überhaupt nicht vorstellen kann. Die räumliche Vorstellung wird eben sofort sehr unbestimmt, wo kein optisches Erinnerungsbild vorhanden ist und versagt ganz, wo die Ergänzung durch die Tastempfindung ebenfalls ausgeschlossen ist. K.]

Substitutionsgruppen und
Gleichungstheorie.

Zur Entstehung der Arbeiten über endliche Gruppen linearer Substitutionen und die Auflösung algebraischer Gleichungen.

Das einfache und sozusagen selbstverständliche Prinzip, welches den im folgenden abgedruckten Untersuchungen zugrunde liegt, ist bereits in der Einleitung zu der Arbeit über W-Kurven, die ich mit Lie zusammen 1871 in Bd. 4 der Math. Annalen (= Abh. XXVI in Bd. 1 der vorliegenden Ausgabe, speziell S. 425 u. 426) veröffentlichte, ausgesprochen: daß nämlich algebraische Gebilde, welche durch endliche Gruppen linearer Substitutionen in sich übergehen, infolgedessen leicht übersehbare, ausgezeichnete Eigenschaften haben. Im Verkehr mit Clebsch bemerkte ich bald hernach (siehe die sogleich folgende Abh. L, ebenfalls aus Bd. 4 der Math. Annalen, 1871), daß hiermit der eigentliche Ausgangspunkt gegeben ist, von dem aus die Lehre von der allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen mit der Invariantentheorie linearer Substitutionen in organische Verbindung tritt. Im Erlanger Programm (Herbst 1872, Abh. XXVII in Bd. 1 der vorliegenden Ausgabe) ist dann auf die einfachen Verhältnisse hingewiesen, welche das genannte Prinzip bei Riemanns Deutung von $(x+iy)$ auf der Kugel für die binären Formen dritten und vierten Grades ergibt; es wird andererseits (S. 489 des Bd. 1 des Wiederabdruckes) des Zusammenhangs mit der Gleichungstheorie gedacht und beiläufig auch das besondere Interesse erwähnt, welche eine Betrachtung der regulären Körper unter den gegebenen Gesichtspunkten haben würde. Indem ich mir um sie eine $(x+iy)$-Kugel herumgelegt dachte, erhielt ich für die Körperecken Gleichungen, deren genauere Untersuchung ich um so lieber begann, als ich den Wunsch hatte, von den mir geläufigen invariantentheoretischen Auffassungen aus zu einer selbständigen Behandlung gleichungstheoretischer Aufgaben vorzudringen. Die Resultate, die ich erhielt, waren sehr merkwürdig und zeigten, daß ich eine erzführende Ader angeschlagen hatte. Zunächst gelang der Beweis, daß durch meinen Ansatz ohne weiteres die Gesamtheit aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen gegeben sei. Sodann konnte ich für die Gleichung zwölften Grades, welche durch die Ecken eines der $(x+iy)$-Kugel eingeschriebenen regulären Ikosaeders gegeben ist, sowohl das volle Formensystem durch einige einfache Schlüsse herstellen, als auch das Vorhandensein von Resolventen sechsten und fünften Grades nachweisen. Alles dieses ist in einer vorläufigen Mitteilung in den Erlanger Sitzungsberichten vom 13. Juli 1874 auseinandergesetzt und übrigens in ausgereifter Form in den §§ 1 bis 6 der nachstehend abgedruckten Abh. LI (Math. Annalen, Bd. 9, 1875) reproduziert. Ich begann übrigens 1874 auch gleich (wie hier beiläufig bemerkt sei), mich mit den unendlichen diskontinuierlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen zu beschäftigen. Da ich aber nur erst Funktionen mit endlich vielen singulären Punkten kannte, kam ich nur zu den gewöhnlichen periodischen Funktionen und denjenigen, die Rausenberger später [Math. Annalen, Bd. 18 (1881); siehe auch sein Lehrbuch, Leipzig 1884] multiplikatorisch periodisch genannt hat. Ich verdanke es nur einem Zufall, daß eine unzureichende Abhandlung, in der ich die bezüglichen Resultate dargestellt hatte, nicht gedruckt wurde. (Auf die weitere Entwicklung meiner Untersuchungen über diskontinuierliche Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen wird in Bd. 3 meiner Gesammelten Abhandlungen zurückzukommen sein.)

So ungefähr lagen die Dinge, als in meinem letzten Erlanger Semester (1874/75) Gordan nach Erlangen kam. Indem er mit größtem Interesse auf meine algebraischen Ansätze einging, ist er für die nächsten Jahre mein eifrigster Mitarbeiter geworden. Die Lage wurde um so interessanter, als sich zeigte, daß Schwarz schon 1871/72 die der Ikosaederfigur entsprechende Zerlegung der $(x+iy)$-Kugel in 120 abwechselnd kongruente und symmetrische Dreiecke bei seinen Untersuchungen über die algebraischen Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung angetroffen, auch die Existenz der transzendenten eindeutigen Dreiecksfunktionen mit unendlich vielen singulären Punkten, welche eine Kreislinie überall dicht überdecken, dargelegt hatte[1]). Von hier aus haben 1877 meine Arbeiten über elliptische Modulfunktionen ihren Ausgangspunkt genommen, die sich mit den algebraischen Arbeiten, welche allein hier in Bd. 2 zum Abdruck kommen sollen, mannigfach durchdringen. Immerhin gaben die algebraischen Fragen zunächst genug zu tun, nachdem ich gefunden hatte, daß die Resolventen sechsten und fünften Grades der Ikosaedergleichung bei zweckmäßigem Ansatz genau mit den besonderen Gleichungsformen übereinstimmen, welche Kronecker und Brioschi bei ihren Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades aufgestellt hatten; man vergleiche die Schlußparagraphen der schon oben genannten Abh. LI, (die übrigens bereits von München aus datiert ist[2])).

Jedenfalls wurde der enge wissenschaftliche Verkehr mit Gordan, in dessen

[1]) Vgl. eine bezügliche Mitteilung von mir in den Erlanger Berichten vom 14. Dezember 1874, sowie ausführlichere Angaben in den unten folgenden Abh. LI bis LIV. Im übrigen bedürfen alle diese Zitate einer wesentlichen Ergänzung, seit wir den Nachlaß von Gauß, wie den von Riemann genau kennen. Was Gauß angeht, so wolle man die Stücke vergleichen, die Fricke in Bd. VIII der Werke (erschienen 1900) auf S. 99—106 zusammengestellt hat. Gauß kennt die Modulfigur und hat sogar das Beispiel einer allgemeineren eindeutigen Dreieckszerlegung der $(x+iy)$-Ebene mit einer kreisförmigen Grenze. Riemann aber hat diese Dinge wie auch die einschlägigen Verhältnisse auf der $(x+iy)$-Kugel im Wintersemester 1858/59 in einer besonderen Vorlesung eingehend behandelt. Wir Fernerstehenden haben davon erst dadurch erfahren, daß der Physiker v. Bezold, der damals bei Riemann gehört hatte, seine stenographische Nachschrift besagter Vorlesung der Göttinger Universitätsbibliothek überwies (s. eine Notiz von mir in den Göttinger Nachrichten von 1897, math.-phys. Klasse, S. 190ff.). Eine zweite Nachschrift derselben Vorlesung hat sich später bei Prof. Nägelsbach, Erlangen, vorgefunden, worüber M. Noether in den Göttinger Nachrichten von 1909, S. 23 der Geschäftlichen Mitteilungen, berichtet. Auch diese Nachschrift wurde der Göttinger Universitätsbibliothek überwiesen. Im übrigen ist der Inhalt der Riemannschen Vorlesung bereits 1902 in den überaus interessanten Nachträgen, welche M. Noether und W. Wirtinger zu Riemanns gesammelten Werken haben erscheinen lassen (Leipzig, B. G. Teubner), seiner wesentlichen Gliederung nach auf Grund des Bezoldschen Heftes, reproduziert und danach allgemein zugänglich geworden. Daß eine Drehung der $(x+iy)$-Kugel um ihren Mittelpunkt eine lineare Transformation der komplexen Variabeln nach sich zieht, findet sich übrigens schon in der posthumen Abhandlung Riemanns über Minimalflächen vermerkt, welche Hattendorff 1867 in Bd. 13 der Göttinger Abhandlungen veröffentlicht hat und die in Riemanns Gesammelten Werken unter XVII abgedruckt ist, vgl. Nr. 8 daselbst.

[2]) So auch eine auf diese Resolventen bezügliche erste Mitteilung von mir in den Erlanger Sitzungsberichten vom 12. Juli 1875.

Mittelpunkt diese algebraischen Fragen standen, durch meine Übersiedelung an die Münchener Technische Hochschule, Ostern 1875, nicht unterbrochen. Einen besonderen Impuls bekam derselbe noch dadurch, daß Fuchs im Sommer 1875 Untersuchungen über algebraisch integrierbare lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung veröffentlichte, in denen er invariantentheoretische Überlegungen benutzte, die mit meinen Untersuchungen über reguläre Körper augenscheinlich nahe zusammenhingen und von da aus vereinfacht und vervollständigt werden konnten. Man wolle die unten folgenden Aufsätze LII und LIII, sowie die am Schluß vom LIII genannte Arbeit von Gordan in den Math. Annalen, Bd. 12 (1877) vergleichen. Aber bald kehrten wir zur Theorie der Gleichungen fünften Grades zurück. Wir erfaßten den Umkehrgedanken: *diese Theorie nicht bloß äußerlich mit der Lehre vom Ikosaeder in Verbindung zu bringen, sondern letztere geradezu zur Grundlage der Theorie zu machen.* Ich beschäftigte mich zunächst damit, die Auflösung der allgemeinen Jacobischen Gleichung sechsten Grades vermittels der Ikosaedertheorie zu bewerkstelligen. Aber am Schluß der Note, die ich hierüber am 13. November 1876 der Erlanger Sozietät vorlegte, konnte ich bereits aussprechen, daß man diejenigen Gleichungen fünften Grades, die ich später „Hauptgleichungen" nannte, d. h. die Gleichungen, bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate gleichzeitig verschwinden, in einfachste Beziehung zum Ikosaeder setzen kann. Bald darauf fand ich einen ersten Beweis des von Kronecker nur erst ausgesprochenen Satzes, daß bei den allgemeinen Gleichungen fünften Grades eine Resolvente mit nur einem Parameter nicht ohne Heranziehung einer akzessorischen (d. h. durch die Wurzeln der Gleichung selbst *nicht* rational darstellbaren) Irrationalität möglich sei, sowie eine Methode, um die fünf Wurzeln einer Hauptgleichung fünften Grades explizite durch die zugehörige Ikosaederirrationalität darzustellen. Ich veröffentlichte hierüber zwei weitere Noten in den Erlanger Sitzungsberichten (vom 15. Januar und 9. Juli 1877). Im August 1877 habe ich dann die drei zusammengehörigen Noten zu einer längeren Abhandlung (Math. Annalen, Bd. 12) vereinigt, die weiter unten unter Nr. LIV abgedruckt ist. Inzwischen war Gordan nicht müßig geblieben. Es war ihm gelungen, die in Betracht kommenden Entwicklungen noch systematischer in eine Fragestellung der binären Invariantentheorie einzuordnen. Man vergleiche eine Mitteilung von ihm an die Erlanger Sozietät, ebenfalls vom 9. Juli 1877, und die zusammenfassende Darstellung in Bd. 13 der Math. Annalen (datiert vom Januar 1878). Ich habe die Gordanschen Entwicklungen immer als eine wesentliche Weiterbildung meiner vom Ikosaeder ausgehenden Ideen angesehen und ihren Grundgedanken dementsprechend in einem besonderen Kommentar, den ich weiter unten an meine Abh. LIV anschließe (S. 380—384), so gut es bei der gebotenen Kürze gelingen wollte, genauer entwickelt.

Im übrigen darf ich nicht unterlassen, an dieser Stelle der Anregung zu gedenken, welche mir in jenen entscheidenden Jahren die Korrespondenz mit Brioschi gewährt hat. Es war ein schöner Erfolg dieser persönlichen Beziehungen, daß Brioschi in Bd. 13 der Math. Annalen eine zusammenfassende Darstellung seiner eigenen früheren Untersuchungen über Gleichungen fünften Grades veröffentlichte (ausgegeben im Dezember 1877). An Brioschi ist dann auch meine erste Mitteilung über elliptische Modulfunktionen gerichtet [vgl. Istituto Lombardo (2), X: Brief vom April 1877]; ich habe dort bemerkt, daß die besondere Form der Jacobischen Gleichung sechsten Grades, von welcher Kronecker 1858 die Auflösung der Gleichungen fünften Grades abhängig gemacht hatte, im wesentlichen von der *rationalen absoluten Invariante* des elliptischen Integrals abhängt, die ich später mit J bezeichnete. Von hier bin ich dann bald auch in erneute Verbindung mit meinem alten Berliner Studiengenossen Kiepert gekommen, der schon vorher von der Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen aus an die Theorie der Gleichungen fünften Grades herangegangen war, und nun Resultate, die den meinigen sehr nahe standen, auf ganz anderem Wege erreichte; man vergleiche seine erste Mitteilung in den Göttinger Nachrichten vom 17. Juli 1878 und die ausgeführte Arbeit in Bd. 87 von Crelles Journal (1878/79).

Auf die Weiterentwicklung meiner eigenen Arbeiten über elliptische Modulfunktionen, die sich an meine Untersuchungen über das Ikosaeder unmittelbar anschließen und diese zum Teil weiterführen, kann nach dem Plane, der dem gegenwärtigen Wiederabdruck zugrunde liegt, leider erst in Bd. 3 eingegangen werden. Ich habe vielmehr als Nr. LV eine aus späterer Zeit stammende Notiz (vom Herbst 1905; Math. Annalen, Bd. 61) eingeschaltet, welche die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen in besonders anschaulicher Form nachweist. Im übrigen aber lasse ich als Nr. LVI bis LXI meine Arbeiten über höhere Gleichungen folgen, die in einem allgemeinen Programm gipfeln: *die Auflösung der Gleichungen auf die mit endlichen Gruppen linearer Substitutionen möglichst geringer Variabelnzahl verknüpften „Formenprobleme" zurückzuführen.* In erster Linie handelt es sich dabei um Gleichungen mit einer Galoisschen Gruppe von 168 Vertauschungen. Untersuchungen über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen hatten mich dahin geführt, eine isomorphe Gruppe von 168 linearen Substitutionen im ternären Gebiet aufzufinden. Dies tritt in Nr. LVI (Erlanger Sitzungsberichte vom 4. März 1878) nur erst in unbestimmten Umrissen hervor. Der genaue Nachweis für die Existenz und die Eigenart dieser Substitutionsgruppe, wie sie sich durch eingehende Betrachtung des elliptischen Transformationsproblems ohne eigentliche Rechnung ergab (siehe Erlanger Sitzungsberichte vom 20. März 1878 und die Hauptarbeit in Bd. 14 der Math. Annalen, 1878/79), konnte im vorliegenden Band meiner Abhandlungen noch nicht aufgenommen werden. Vielmehr wird in Nr. LVII (vom Frühjahr 1879, Math. Annalen, Bd. 15) das Resultat einfach als bekannt hingenommen und daran die algebraische Problemstellung angeschlossen. Die Analogie führt auch gleich dazu, für beliebige Primzahlen n Gruppen linearer Substitutionen mit $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ Variabeln aufzustellen, welche die bei $n=5$ und $n=7$ vorher bekannten Resultate als besondere Fälle umfassen. In Bd. 17 der Math. Annalen (1880/81) sind diese Gruppen hinterher aus der Transformation n-ter Ordnung der elliptischen Thetafunktionen abgeleitet, wobei n nur als ungerade Zahl vorausgesetzt wird, was ich hier, dem Bd. 3 dieser Ausgabe vorgreifend, wieder vorweg erwähnen will. (Näheres unten im Texte.)

Mit der Abh. LVII ist meine systematische Arbeit auf dem Gebiet der endlichen Gruppen linearer Substitutionen und das Auflösungsproblem der Gleichungen abgeschlossen. Ich schildere aber gern, unter welchen besonderen Bedingungen sie in der Folge doch noch eine Fortsetzung von Fall zu Fall gefunden hat. Ich war Herbst 1880 als Professor der Geometrie an die Universität Leipzig übergesiedelt. Nun hatten sich schon in München Anzeichen einer Überarbeitung geltend gemacht, was nicht wundernehmen konnte, da ich neben meinen wissenschaftlichen Untersuchungen der Unterweisung der Ingenieure in weitgehender Weise gerecht zu werden hatte. In Leipzig haben sich dann die Anregungen und Verpflichtungen entsprechender Art noch vervielfacht, zumal meine wissenschaftliche Tätigkeit, die sich immer mehr der Riemannschen Funktionentheorie zuwandte, durch das Hervortreten der ersten Untersuchungen von H. Poincaré eine außerordentliche Belebung erfuhr. Letzteres wird in Bd. 3 dieser Abhandlungen noch erst genauer hervortreten. Die Folge war, daß im Herbst 1882, während ich an den „Neuen Beiträgen zur Riemannschen Funktionentheorie" (Math. Annalen, Bd. 21) arbeitete, meine Gesundheit vollends zusammenbrach. Ich mußte für lange Zeit Urlaub nehmen und sah mich veranlaßt, meine Tätigkeit fortan auf ein anderes Niveau einzustellen. Von der eigentlichen weiterdringenden Forscherarbeit mußte ich fürs erste absehen und lieber beginnen, das Erworbene in Vorlesungen und Seminaren zu ordnen. Solcherweise sind zunächst die „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades" zustande gekommen, die Ostern 1884 bei B. G. Teubner als selbständiges Werk erschienen sind[3]). Gleichzeitig erfaßte ich den Plan entsprechender Darstellungen

[3]) Dasselbe soll im folgenden kurz als „Ikosaederbuch" zitiert werden.

betreffend elliptische Modulfunktionen und allgemeine automorphe Funktionen, wie er späterhin durch das tatkräftige Eingreifen von R. Fricke zu glücklicher Durchführung gelangte (Modulfunktionen 1890 und 1892, automorphe Funktionen 1897 und 1912). Im übrigen begann ich 1885, mich mit einer Problemstellung eingehender zu beschäftigen, die ich schon lange vor mir gesehen hatte und die mich nun mehrere Jahre in Anspruch nehmen sollte, nämlich der Übertragung der neuen Formulierungen, die mir bei den elliptischen Funktionen geglückt waren, auf hyperelliptische und Abelsche.

An gegenwärtiger Stelle werden zunächst einige Bemerkungen über das Ikosaederbuch von 1884, bez. über dessen Verhältnis zu der unter Nr. LIV abgedruckten Ikosaederarbeit von 1877 am Platze sein. In dem Buche sind viele Einzelheiten genauer ausgeführt und es ist auch mancherlei vereinfacht, wobei mir die obengenannten Arbeiten von Gordan und Kiepert von besonderem Nutzen gewesen sind. Man vergleiche bezügliche Bemerkungen bei dem unten folgenden Abdruck von Nr. LIV. Andererseits ist doch manches, insbesondere Invariantentheoretisches, was in den Abh. LI und LIV zur Geltung kommt, weggeblieben. Mich veranlaßte dazu nicht nur der Wunsch nach Kürze der Darstellung, sondern insbesondere auch die Überlegung, daß ich von dem Leser nicht zu verschiedenartige Vorkenntnisse voraussetzen dürfe. Im übrigen ist die Darstellung des Buches, wenigstens was die Gleichungen fünften Grades angeht, historisch orientiert. Hierdurch scheint in weiteren Kreisen der Eindruck entstanden zu sein, als handele es sich bei den bezüglichen, vom Ikosaeder ausgehenden Überlegungen nur um eine *Veranschaulichung* der überkommenen Theorie. Diese Auffassung entspricht keineswegs derjenigen, die ich heute noch, zurückschauend, festhalte. Vielmehr glaube ich, daß erst durch die Voranstellung der Ikosaedertheorie (und der damit verbundenen, erst in Bd. 3 folgenden Arbeiten über elliptische Modulfunktionen) die eigentliche *Grundlage* der vorausgehenden Untersuchungen von Hermite, Kronecker und Brioschi gewonnen ist. Beweis dafür ist, daß es 1876 bis 1880 gelang, nicht nur sämtliche noch ungeklärte Punkte ihrer Theorie aufzuhellen, sondern auch in raschem Fortschritt höhere, bis dahin unzugängliche Fragestellungen anzugreifen. Ich habe jene Jahre, in welche die entscheidenden Fortschritte fallen, immer als die glücklichste Periode meiner mathematischen Produktion angesehen. Äußerlich waren sie dadurch charakterisiert, daß ich sehr oft mit Gordan zusammenkam. Als Ort hierfür haben wir zumeist, weil in der Mitte von Erlangen und München gelegen, Eichstädt gewählt, wo wir häufig den Sonntag zusammen zubrachten; Gordan sprach noch in späteren Jahren gern von der „Mathesis quercupolitana", wie er sich ausdrückte. — Leider hat dieses Zusammenarbeiten in meiner Leipziger Zeit nicht mit gleicher Ausführlichkeit aufrechterhalten werden können. So bin ich an der Weiterbearbeitung der Gleichungen siebenten Grades mit einer Galoisschen Gruppe von 168 Substitutionen, die Gordan von 1880 bis 1885 in den Bänden 17 bis 25 der Math. Annalen veröffentlichte, direkt nur wenig beteiligt gewesen. Die Grundgedanken jener Arbeiten sind dort durch die Fülle der rechnerischen Einzelheiten in hohem Grade verdeckt und haben darum bisher nur erst wenig Beachtung gefunden. Hieran hat auch der recht eingehende Bericht, den M. Noether in seinem Nachruf auf Gordan in Bd. 75 der Math. Annalen (1913/14) den einschlägigen Entwicklungen widmet, nicht viel geändert. Um so lieber habe ich jetzt an den Wiederabdruck meiner Arbeit aus Bd. 15 der Math. Annalen (Nr. LVII) einen Kommentar angeschlossen, in welchem ich diese Grundgedanken von meinem Standpunkte aus darstelle und teilweise vereinfache. Möge damit der Weiterentwicklung das Tor geöffnet sein!

Ostern 1886 bin ich endgültig nach Göttingen zurückgekehrt. Ich erfaßte wieder ein neues Arbeitsprogramm. Da Schwarz neben mir den Hauptteil des Unterrichts bestritt, konnte ich die alten Ideen meiner Bonner Studienzeit erneut aufnehmen und mich der Physik wieder annähern, indem ich allgemeine Vorlesungen über Mechanik, Potentialtheorie usw. hielt. Daneben suchte ich in Spezialvorlesungen alles das, was ich früher an rein mathematischen Untersuchungen begonnen hatte, zum Abschluß zu bringen. Die Einzelausführung aber überwies ich, soweit dies möglich schien, immer mehr geeigneten Zuhörern. In den unten folgenden Abh. LVIII und LIX sieht man, wieviel dabei für die Lehre von den endlichen Gruppen linearer Substitutionen, bez. die Auflösung höherer Gleichungen herausgekommen ist. Indem ich wegen der Einzelheiten auf die Abhandlungen selbst, bez. die ihnen beigefügten Notizen verweise, bemerke ich hier nur folgendes: Nr. LVIII knüpft ersichtlich an die alten liniengeometrischen Untersuchungen an, die bereits in Bd. 1 des gegenwärtigen Wiederabdrucks ihre Stelle gefunden haben; ich nehme damit die allgemeine Theorie der Gleichungen des sechsten und des siebenten Grades in Angriff. Nr. LIX dagegen, die sich auf die Gleichung 27. Grades bezieht, von der die geraden Linien einer Fläche dritter Ordnung abhängen, ist aus meinen schon genannten Vorträgen über hyperelliptische Funktionen erwachsen. Es handelt sich beide Male um neue quaternäre Gruppen linearer Substitutionen, die gewiß ein näheres Studium verdienten und auch bald von anderer Seite fanden. Im ganzen aber hatte ich den Eindruck, daß für mich die Frage der endlichen Substitutionsgruppen damit abgeschlossen sei. So habe ich es auch 1893 bei den Vorträgen dargestellt, die ich gelegentlich der Chicagoer Weltausstellung hielt (vgl. den Vortrag IX des schon verschiedentlich genannten Evanston Colloquiums). Ich habe damals insbesondere die Vermutung ausgesprochen, daß für Gleichungen achten und höheren Grades, sofern man die Galoissche Gruppe allgemein, die Gleichungen also ohne Affekt nehmen will, mein Ansatz von 1879 (Abh. LVII) nichts Neues liefern dürfe. Diese Vermutung ist bald hernach von Wiman in der Tat bestätigt worden[4]).

Es ist dann aber doch noch eine merkwürdige Weiterbildung (der unten in Nr. LX und LXI Rechnung getragen wird) eingetreten. Die Liste der quaternären Substitutionsgruppe ist nicht mehr wesentlich vermehrt worden, es ist aber eine sehr bemerkenswerte ternäre Gruppe von 360 Kollineationen hinzugekommen. Ihre Auffindung ist das Verdienst von Valentiner, der sie bereits 1889 durch systematischen Ansatz konstruiert hatte, dessen Arbeit aber, weil der Verfasser isoliert für sich gearbeitet und mit den Problemen der einschlägigen Literatur keine rechte Fühlung hatte, zunächst unbeachtet blieb. Für alle Beteiligten war es dann eine große Überraschung, als Wiman 1896 (in Bd. 47 der Math. Annalen) darlegte, daß besagte G_{360} mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von sechs Dingen isomorph sei und übrigens eine algebraische Behandlung zulasse, welche in vielem Betracht mit den Ansätzen, die sich bei der ternären G_{168} als erfolgreich gezeigt hatten, analog war. Damit war naturgemäß die Aufgabe gegeben, die Auflösung der allgemeinen Gleichung sechsten Grades nicht mehr auf die quaternäre Gruppe von Nr. LVIII, sondern eben auf diese ternäre G_{360} zurückzuführen. Daß sich dies wirklich bewerkstelligen lasse, habe ich gelegentlich einer italienischen Reise (1899) in den Rendiconti dei Lincei (in einem Brief an Castelnuovo, der unter Nr. LX abgedruckt ist) in vorläufiger Fassung publiziert. Als dann Gordan 1905 seine Aufmerksamkeit auch dieser Frage zuzuwenden begann, habe ich im Dirichlet-Bande des Crelleschen Journals (Bd. 129) eine genauere Darlegung meiner Überlegungen gegeben, die auch in Bd. 61 der Math. Annalen abgedruckt wurde (s. unten Abh. LXI). Gordan hat dann in Bd. 68 der Math.

[4]) In den Göttinger Nachrichten 1897, math.-phys. Klasse, S. 55—62 (vorgelegt am 20. Februar; man vgl. auch Bd. 52 der Math. Annalen, 1899, wo u. a. eine Besonderheit hervortritt, welche die Gleichungen neunten Grades für die in Betracht kommenden Fragestellungen darbieten). — Die bezügliche Stelle im Evanston Colloquium (S. 74) lautet: „I want to call your particular attention to the case of the general equation of the eighth degree. I have not been able in this case to find a material simplification, so that it would seem as if the equation of the eighth degree were its own normal problem. It would no doubt be interesting to obtain certainty on this point.“

Annalen (1909) meinen Ansatz noch beträchtlich vereinfachen können, hat aber doch nicht die einfachste Formulierung getroffen, die erst Herr Coble in Bd. 70 der Math. Annalen (1911) gegeben hat. Hinsichtlich der Einzelheiten muß ich auf die Bemerkungen verweisen, die ich dem Text den Nrn. LX und LXI zugefügt habe.

Die allgemeine Entwicklung hat übrigens die Richtung genommen, überhaupt nach der Existenz höherer Gruppen linearer Substitutionen (oder auch birationaler Transformationen) zu fragen. Hierüber möge man als neueste Zusammenstellung Loewys Artikel in Bd. 1 der zweiten Auflage der deutschen Ausgabe von Pascals Repertorium der Mathematik (besorgt von Epstein, 1910) vergleichen. (Der entsprechende sehr zuverlässige Bericht von Wiman in Bd. I, 1 der Math. Enzyklopädie reicht nur bis zum Jahre 1899.)

Über den allgemeinen Charakter der im folgenden behandelten algebraischen Fragen aber möge noch folgende Bemerkung gestattet sein. Die Bedeutung der Gruppentheorie für die Lehre von der Auflösung der algebraischen Gleichungen ist seit Galois' grundlegenden Arbeiten (1829, publiziert 1846) eine so unvergleichliche, daß man diese ganze Disziplin vielfach nur gruppentheoretisch bearbeitet, also die Entwicklungen, die durch den abstrakten Gruppenbegriff nicht ohne weiteres gegeben sind, entweder wegläßt oder doch nur als Beiwerk behandelt. Die Frage aber, welche in den nachstehend abgedruckten Arbeiten an einzelnen Beispielen zur Behandlung kommt, ist anders orientiert. *Es handelt sich darum, ob man Gleichungen gegebener Gruppe unter Festhaltung an dem zunächst zugrunde gelegten Rationalitätsbereiche auf bestimmte Normalformen reduzieren kann, oder ob man den Rationalitätsbereich zu dem Zwecke erweitern muß. Auf alle Fälle werden die algebraisch einfachsten Prozesse gesucht, die das Verlangte leisten.* Gordan pflegte dieses Gesamtgebiet (welches die Gruppentheorie selbstverständlich als bekannt voraussetzt) scherzhafterweise als „*Hypergalois*“ zu bezeichnen. Vermutlich hat er Galois damit unrecht getan, denn dieser hat zweifellos genau gewußt, daß mit dem gruppentheoretischen Schema allein noch keineswegs die algebraischen Fragestellungen erschöpft sind. K.

L. Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen.

[Math. Annalen, Bd. 4 (1871).]

Die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen wird in schönster Weise durch eine Anzahl besonderer geometrischer Beispiele illustriert; ich erinnere nur[1]) an das Problem der Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung, an die 28 Doppeltangenten der Kurven vierter Ordnung, an die 27 Linien auf den Flächen dritten Grades usw., dann aber namentlich auch an die Kreisteilung[2]).

Der hohe Nutzen dieser Beispiele liegt darin, daß sie die an und für sich so eigenartig abstrakten Vorstellungen der Substitutionstheorie in anschaulicher Weise dem Auge vorführen. Sie beziehen sich zumeist auf Gleichungen von sehr partikulärem Charakter, zwischen deren Wurzeln besondere Gruppierungen statthaben, und lassen also übersehen, wieso derartige besondere Gleichungen auftreten können. Ich will nun im folgenden auf eine Methode aufmerksam machen, vermöge deren man ein geometrisches Bild für die *allgemeinen* Gleichungen eines beliebigen Grades erhält, insbesondere für diejenigen Gruppierungen der Wurzeln einer solchen Gleichung, wie man sie zur Aufstellung der Resolventen gebraucht. Diese Methode benutzt als Bild für die n Wurzeln einer Gleichung n Elemente des Raumes von $(n-2)$ Dimensionen und ersetzt die Vertauschungen der Wurzeln unter sich durch diejenigen linearen Transformationen des genannten Raumes, durch welche die n gegebenen Elemente in sich übergeführt werden. Vermöge dieser Repräsentation wird die Theorie der Gleichungen n-ten Grades in einen merkwürdigen Zusammenhang gebracht mit der Theorie der Kovarianten von n Elementen eines Raumes von $n-2$ Dimensionen, so zwar, daß jede der beiden Theorien geradezu als ein Bild der anderen angesehen werden kann. — Das Wesentliche an dieser

[1]) Vgl. Camille Jordan. Traité des Substitutions. Paris 1870, S. 301 ff.

[2]) [Als Kreisteilungsgleichung wird hier, im Gegensatz zu der sonst üblichen Ausdrucksweise, irgendeine „reine" Gleichung $x^n = A$ bezeichnet, wobei A als Parameter und die Einheitswurzel $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ als adjungiert gilt. K.]

Vorstellungsweise ist, daß die Vertauschungen der n Wurzeln unter sich im geometrischen Bilde ersetzt werden durch lineare Transformationen eines kontinuierlichen Raumes. Auch Gleichungen von partikulärer Art kann man in ähnlicher Weise geometrisch versinnlichen, wobei dann nicht mehr alle, sondern nur die charakteristischen Vertauschungen ihrer Wurzeln im Bilde als lineare Raumtransformationen erscheinen. Ich beschränke mich im folgenden darauf, zu zeigen, daß eben dieser Charakter des geometrischen Bildes sich bei den Wendepunkten der Kurven dritter Ordnung und bei den Kreisteilungsgleichungen vorfindet. — Weiterhin will ich dann noch für die allgemeinen Gleichungen sechsten Grades eine auf denselben Prinzipien begründete Repräsentation geben, welche der Liniengeometrie entnommen ist, und durch welche man ein in sich geschlossenes System von 360 linearen und 360 reziproken Umformungen des Raumes von drei Dimensionen kennen lernt. Dabei tritt insbesondere auch die bekannte Resolvente sechsten Grades solcher Gleichungen in Evidenz, welche der besonderen[3]) Gruppe von 120 Substitutionen entspricht, die sich bei sechs Elementen aufstellen läßt und nicht mit den 120 Substitutionen von fünf Elementen identisch ist.

Die nächste Veranlassung zu den hiermit angedeuteten Dingen sind mir die geometrischen Betrachtungen gewesen, die Herr Clebsch in den Math. Annalen, Bd. 4 (1871), S. 284 ff. behufs Diskussion der Gleichungen fünften Grades angewandt hat, und welche mir derselbe in wiederholten persönlichen Unterhaltungen mitzuteilen die Güte hatte. Auf der anderen Seite stehen dieselben im engsten Zusammenhange mit den Betrachtungen über lineare Transformationen geometrischer Gebilde in sich selbst, wie dieselben von Herrn Lie und mir in dem Aufsatze: „Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen" in den Math. Annalen, Bd. 4 (1871) [vgl. Abh. XXVI in Bd. 1 dieser Ausgabe] auseinandergesetzt worden sind.

I.

Geometrische Repräsentation für die Gleichungen n-ten Grades.

Es seien n Elemente (oder n ebene Mannigfaltigkeiten von $(n-3)$ Dimensionen) des Raumes von $(n-2)$ Dimensionen gegeben. Dieselben gehen durch ein geschlossenes System[4]) *von $n!$ linearen Transformationen des betreffenden Raumes in sich über.*

[3]) Vgl. Serret. Traité d'Algèbre Supérieure. Deutsche Ausgabe, Leipzig 1868, Bd. II, S. 250.

[4]) Unter einem geschlossenen Systeme von Transformationen soll hier, wie dies bereits in der zitierten Arbeit von Herrn Lie und mir geschehen ist, ein System verstanden werden, dessen Transformationen miteinander kombiniert immer wieder Transformationen des Systems ergeben [also, nach moderner Terminologie, eine Gruppe].

Man kann nämlich allgemein durch eine lineare Transformation eines solchen Raumes n Elemente desselben in n beliebige überführen; es ist andererseits die Transformation vollkommen bestimmt, wenn n voneinander unabhängige entsprechende Elementenpaare gegeben sind. Insbesondere kann man nun n Elemente mit ihren n entsprechenden in beliebiger Reihenfolge zusammenfallen lassen. Es gibt hiernach so viele lineare Transformationen des Raumes, durch die beliebig gewählte n Elemente in sich übergeführt werden, als es Permutationen von n Dingen gibt, also $n!$. Diese Transformationen bilden ein geschlossenes System, da beliebig viele von ihnen miteinander kombiniert wieder eine lineare Transformation ergeben, durch welche die Gesamtheit der n Elemente ungeändert bleibt, die also selbst dem gegebenen Systeme angehört.

Ein Beispiel bilden: 3 Punkte einer Geraden, welche durch 6, 4 Punkte einer Ebene, welche durch 24, 5 Punkte des Raumes, welche durch 120 lineare Transformationen ihrer bezüglichen Träger in sich übergehen.

Auf ein beliebiges Element des Raumes von $(n-2)$ Dimensionen denke ich mir nun die $n!$ Transformationen angewandt, welche die n gegebenen Elemente untereinander vertauschen. Dasselbe nimmt dann im allgemeinen $n!$ verschiedene Lagen an. *Das System der somit erzeugten $n!$ Elemente ist das Bild der Galoisschen Resolvente der durch die n gegebenen Elemente vorgestellten Gleichungen n-ten Grades.*

Für besondere Annahmen des beliebigen Elementes können die $n!$ Elemente, welche aus ihm hervorgehen, zu mehreren jedesmal zusammenfallen. Die Galoissche Resolvente wird dann eine Potenz eines Ausdrucks, der als eine besondere Resolvente bezeichnet wird.

Als Bild jeder besonderen Resolvente erscheinen also diejenigen Elementengruppen, welche mehrfach zählend in den allgemeinen Gruppen von $n!$ Elementen enthalten sind.

Diese geometrischen Definitionen sind einer analytischen Einkleidung fähig, welche die vollkommene Identität derselben mit den gewöhnlichen Definitionen der Substitutionstheorie klar darlegt. Die n gegebenen Elemente mögen durch ihre Gleichungen vorgestellt sein:

$$p=0, \quad q=0, \quad r=0, \ldots$$

Zwischen den linearen Ausdrücken $p, q, r \ldots$ besteht eine lineare identische Gleichung. Wir wollen nun die Ausdrücke $p, q, r, \ldots$ von vornherein mit solchen Konstanten multipliziert denken, daß die Identität die Form hat:

$$0 = p + q + r + \ldots$$

Unter dieser Annahme sind die $n!$ Transformationen des Raumes dargestellt, indem man die neuen $p, q, r, \ldots$ den früheren in beliebiger Reihenfolge gleichsetzt. Die fraglichen linearen Transformationen sind also in

ganz gleicher Weise bezeichnet, wie die Vertauschungen von n Dingen $p, q, r, \ldots$

Sei ferner ein beliebiges Element gegeben [wobei es als unwesentlich angesehen werden muß, daß wir uns vorab auf Elemente beschränken, die durch eine lineare Gleichung zwischen den Koordinaten dargestellt werden; auf S. 269 ff. finden sich schon andere Ansätze]:

$$0 = ap + bq + cr + \ldots$$

Die $n!$ Elemente, die aus diesem durch die betr. Transformationen hervorgehen, sind dargestellt durch alle diejenigen Gleichungen, welche aus der vorstehenden durch die Vertauschungen der $p, q, r, \ldots$ oder, was auf dasselbe herauskommt, der $a, b, c \ldots$ abgeleitet werden können. Die Multiplikation aller dieser Gleichungen miteinander ergibt die Gleichung der ganzen Elementengruppe, die das Bild der Galoisschen Resolvente ist. Besonderen Werten von $a, b, c, \ldots$ entsprechend kann dann diese Resolvente die Potenz eines niederen Ausdruckes werden.

Wir wollen das Gesagte durch das Beispiel $n = 4$, also das Viereck, oder, was bequemer ist, das Vierseit in der Ebene[5]) illustrieren.

Die vier Seiten desselben seien vorgestellt durch:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0,$$

wobei die Identität besteht:

$$p + q + r + s = 0.$$

Aus jeder beliebig angenommenen Geraden:

$$ap + bq + cr + ds = 0$$

entsteht im allgemeinen ein System von 24 zusammengehörigen. Dieselben kann man leicht in folgender Weise konstruieren. Die beliebig angenommene Gerade schneidet die vier Seiten des Vierseits in vier Punkten, welche mit den jedesmal auf einer solchen Seite liegenden drei Eckpunkten des Vierseits ein gewisses Doppelverhältnis bestimmen. Man konstruiere nun auf jeder Seite diejenigen 24 Punkte (von denen der jedesmalige Schnittpunkt einer ist), welche mit den drei auf der Seite liegenden Eckpunkten, die letzteren in beliebiger Reihenfolge genommen, eins der vier Doppelverhältnisse bilden. Diese viermal 24 Punkte liegen zu vier vierundzwanzigmal auf einer Geraden; diese 24 Geraden (von denen die gegebene eine ist), sind die gesuchten.

Geht die beliebig gewählte Gerade insbesondere durch einen Eckpunkt des Vierseits, so erhält man, wie leicht zu sehen, nur zwölf Gerade, die paarweise durch die Eckpunkte des Vierseits gehen. In der Tat, wenn

[5]) [Vgl. Clebsch a. a. O., § 4.]

die gegebene Gerade durch einen Eckpunkt geht, müssen zwei der Koeffizienten a, b, c, d einander gleich werden. Die Galoissche Resolvente wird dementsprechend das Quadrat einer Gleichung zwölften Grades.

Insbesondere kann die gegebene Gerade durch zwei gegenüberstehende Eckpunkte des gegebenen Vierseits gehen. Dann erhält man nur noch Systeme von drei Geraden, nämlich die drei Diagonalen des Vierseits. Dieselben sind das Bild einer Resolvente dritten Grades, und man wird auch auf eine solche geführt, wenn man die a, b, c, d paarweise gleichnimmt, also etwa, was wegen der zwischen den p, q, r, s bestehenden Identität gestattet ist, $a = b = 1$, $c = d = -1$ wählt.

II.

Die Kovarianten von n Elementen des Raumes von $n - 2$ Dimensionen.

Die Gruppen von $n!$ Elementen, welche nach dem Vorstehenden gegebenen n Elementen des Raumes von $(n - 2)$ Dimensionen zugeordnet werden, sind offenbar *Kovarianten* des Systems gegebener Elemente, in welchen die absoluten, durch lineare Transformationen unveränderlichen Zahlenwerte (Doppelverhältnisse), durch welche das hinzutretende Element mit Bezug auf die n gegebenen festgelegt wird, als Parameter fungieren.

Die Gleichungen dieser Kovarianten haben eine merkwürdige Eigenschaft. *Sie sind rational aus den symmetrischen Funktionen der p, q, r, ... zusammensetzbar.* Es geht das unmittelbar aus der Entstehung dieser Gleichungen hervor, die wir erhielten, indem wir in einer beliebigen linearen Gleichung die p, q, r, ... auf alle Weisen vertauschten und dann die resultierenden Gleichungen zusammen multiplizierten.

Es versteht sich dabei von selbst, daß die Gleichungen der besonderen Elementengruppen, welche, besonderen Resolventen entsprechend, mehrfach zählend in den allgemeinen Gruppen enthalten sind, in der die Multiplizität ausdrückenden Potenz genommen werden müssen, damit auch auf sie diese Darstellung Anwendung finde.

Andererseits ist ersichtlich, daß von den symmetrischen Funktionen der p, q, r, ... eine, nämlich ihre Summe, entsprechend der Identität:

$$0 = p + q + r + \dots,$$

in Wegfall kommt.

Nun läßt sich leicht einsehen, *daß die bisher betrachteten Gruppen von $n!$ Elementen die einzig denkbaren Kovarianten der gegebenen n Elemente sind, welche von getrennten einzelnen Elementen gebildet werden, oder allgemeiner, daß jede Kovariante der gegebenen n Elemente*

$$p = 0, \quad q = 0, \; r = 0, \dots$$

rational und ganz aus den $(n - 1)$ nicht verschwindenden symmetrischen Funktionen der $p, q, r, \dots$ zusammengesetzt ist.

In der Tat, jede Kovariante muß durch dieselben linearen Transformationen in sich übergehen, wie das ursprüngliche Gebilde. Ihre Gleichung muß also durch die $n!$ Vertauschungen der p, q, r, ... unter sich im vorliegenden Falle ungeändert bleiben, muß sich also nach bekannten Sätzen rational durch die symmetrischen Funktionen ausdrücken lassen.

Dieses Raisonnement bedarf noch einer Ergänzung in demselben Sinne, wie eine solche für die (mehrfach zählenden) Kovarianten von weniger als $n!$ Elementen notwendig war. Die Gleichung der Kovariante braucht nämlich nicht völlig bei den Vertauschungen der p, q, r, ... ungeändert zu bleiben, sondern es kann dabei ein Faktor vortreten. Dieser Faktor kann aber nur eine Einheitswurzel sein, insofern die Wiederholung einer bestimmten Vertauschung endlich einmal die Identität erzeugt, und also eine bestimmte Potenz des Faktors gleich der Einheit wird. Die entsprechende Potenz der Kovariantengleichung bleibt dann bei den Vertauschungen der $p, q, r, \dots$ völlig ungeändert; sie ist es, die wir als eigentliche Kovariante ansprechen müssen, und die sich rational aus den symmetrischen Funktionen der $p, q, r, \dots$ zusammensetzen läßt.

Es ist durch die letzten Betrachtungen die Theorie der Kovarianten von n Elementen im Raume von $(n - 2)$ Dimensionen in engste Verbindung gesetzt mit der Theorie der Gleichungen n-ten Grades.

Als Beispiel der Anwendbarkeit solcher Überlegungen für die Theorie der Kovarianten folge hier die aus ihnen entspringende Behandlung des einfachsten Falles $n = 3$, also die Behandlung *der kubischen binären Formen.*

Es sei eine kubische binäre Form f gegeben. Dieselbe sei vorgestellt durch drei Punkte einer geraden Linie. So kann man die gerade Linie durch sechs lineare Transformationen umformen (unter denen die Identität ist), durch welche die gegebenen drei Punkte untereinander vertauscht werden. Durch dieselben gruppieren sich die Punkte der Geraden zu sechs zusammen. *Diese Gruppen von je sechs Punkten sind Kovarianten der gegebenen kubischen Form; andere Kovarianten gibt es nicht*, in dem Sinne, daß jede Kovariante sich in eine Anzahl solcher Gruppen von sechs Punkten auflösen muß.

Es ist nun leicht, sich von dem geometrischen Charakter dieser Punktgruppen Rechenschaft zu geben, und dadurch erledigt sich zugleich die Frage: ob etwa unter denselben Potenzen von niederen Gruppen enthalten sind. Eine Gruppe von sechs Punkten enthält nämlich, wie dies unmittelbar aus der Erzeugung folgt, wie dies andererseits auch zu ihrer Definition hinreicht, solche sechs Punkte, welche mit den gegebenen drei, wenn man deren Reihenfolge beliebig vertauscht, das nämliche Doppelverhältnis bilden, oder, was dasselbe ist, sie enthält solche sechs Punkte, die mit den gegebenen drei, die letzteren in fester Reihenfolge gedacht, sechs zusammengehörige Doppelverhältnisse bilden. Zusammengehörig heißen dabei jedesmal diejenigen sechs Doppelverhältnisse, welche bei veränderter Reihenfolge von vier gegebenen Punkten auftreten.

Es geht hieraus hervor, daß sich unter den einfach unendlich vielen Gruppen von je sechs Punkten, außer derjenigen, welche doppelt zählend durch $f=0$ selbst vorgestellt wird, zwei ausgezeichnete finden werden, entsprechend einem harmonischen und einem äquianharmonischen Verhältnisse.

Die Gruppe der harmonisch liegenden Punkte besteht aus drei doppelt zählenden Punkten. Dieselben bilden die Kovariante dritten Grades, welche in der Theorie der binären kubischen Formen gewöhnlich mit Q bezeichnet wird.

Die Gruppe der äquianharmonisch liegenden Punkte umfaßt nur zwei dreifach zählende Punkte. Dieselben konstituieren die quadratische Kovariante Δ der gewöhnlichen Theorie.

Recht anschaulich hat man die gegenseitige Beziehung der Formen f, Q, Δ, wenn man sie nicht als Punkte einer Geraden, sondern als Strahlen eines Büschels interpretiert und dabei die beiden Strahlen $\Delta=0$ nach den imaginären Kreispunkten der unendlich fernen Geraden hingehen läßt. $f=0$ wird sodann von drei Strahlen gebildet, welche miteinander gleiche Winkel $=\frac{2}{3}R$ einschließen. $Q=0$ umfaßt die Halbierungslinien der von diesen drei Strahlen gebildeten Winkel. Endlich jede sechselementige Gruppe besteht aus solchen sechs Strahlen, welche mit den Elementen von $f=0$ Winkel $=\pm\varphi$ einschließen, wo φ irgendeine Neigung bezeichnet. Die linearen Transformationen, durch welche $f=0$ und also auch $Q=0$ und $\Delta=0$, sowie jede sechselementige Gruppe in sich übergehen, bestehen einmal in Rotationen des Strahlbüschels in seiner Ebene um jedesmal $\frac{2}{3}R$, sodann in einer Rotation des Strahlbüschels um ein Element von $f=0$ um $2R$, durch welche die Ebene des Büschels umgelegt wird.

Unter Zugrundelegung der Faktoren von Δ als Variabeln übersieht man nun leicht, daß sich jede sechselementige Gruppe aus zwei solchen linear und homogen zusammensetzt. Man hat daher zwischen je drei sechselementigen Gruppen eine homogene lineare Gleichung. Insbesondere wird eine solche Gleichung zwischen f^2, Q^2, Δ^3 existieren, etwa:

$$\Delta^3=\varrho f^2+\sigma Q^2.$$

Es ist bekannt, wie auf einer Identität dieser Form die Auflösung der kubischen Gleichungen beruht.

Wie vorstehend die Theorie der Kovarianten dreier Punkte der Geraden aus der Betrachtung der Vertauschung von drei Elementen unter sich abgeleitet wurde, so wird man in ganz ähnlicher Weise die Kovarianten des Vierseits in der Ebene, des Pentaeders im Raume u. s. w. f. behandeln können. Hierzu eine Bemerkung, die partikulär für das Pentaeder ausgesprochen werden soll, aber die ganz geradeso auf den allgemeinen Fall Anwendung findet. Als Resolvente der Gleichung fünften Grades, welche durch ein Pentaeder im Raume repräsentiert wird, kann nicht nur ein System von 120 zusammengehörigen Ebenen oder Punkten, sondern überhaupt von 120 zusammengehörigen (d. h. aus einem durch Anwendung der Transformationen hervorgehenden) geometrischen Gebilde, Kurven, Flächen usw. gelten. Wenn nun auf einer kovarianten Fläche des Pentaeders etwa eine endliche Anzahl besonderer Kurven aufliegt, so werden sich dieselben immer zu solchen Resolventen zusammengruppieren; was man auch so aussprechen kann: *alle Gleichungen, zu denen kovariante Flächen des Pentaeders Anlaß geben können, lassen sich in solche zerlegen, welche Resolventen der einen Gleichung fünften Grades sind.*

Ein Beispiel ist das folgende. Es seien die fünf Pentaederebenen:

$$p=0,\quad q=0,\quad r=0,\quad s=0,\quad t=0,$$

und sei, wie immer:

$$p+q+r+s+t=0.$$

So gibt es eine kovariante Fläche dritten Grades[6]):

$$p^3+q^3+r^3+s^3+t^3=0.$$

Die 27 Geraden dieser Fläche zerfallen, wie dies auch Herr Clebsch a.a.O. nachgewiesen hat, in zwei Gruppen, in eine von 15 (dieselben zählen als Glieder einer Galoisschen Resolvente achtmal), und in eine von 12 (welche zehnmal zählen).

III.

Die Gleichung für die Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung. Die Kreisteilung.

Es ist bereits im Eingange hervorgehoben worden, daß das Wesentliche an der im vorstehenden vorgetragenen Repräsentation für die Gleichungen n-ten Grades das ist, *daß die Vertauschungen der Wurzeln unter sich im Bilde durch lineare Transformationen des Raumes ersetzt werden können.* Ich will jetzt zeigen, daß die Darstellung, welche gewisse Gleichungen neunten Grades durch die Wendepunkte der Kurven dritter Ord-

[6]) Auf die Eigenschaft dieser Flächen, durch lineare Transformationen in sich überzugehen, bin ich zuerst durch Herrn Lie aufmerksam gemacht worden.

nung finden, einen ähnlichen Charakter besitzt. Dasselbe gilt für die Kreisteilungsgleichungen. Es tritt nur in beiden Fällen der Umstand modifizierend hinzu, daß die geometrisch repräsentierten Gleichungen nicht mehr die allgemeinen ihres Grades sind, sondern daß unter ihren Wurzeln Gruppierungen stattfinden. Entsprechend finden in dem geometrischen Bilde nicht mehr alle Vertauschungen der Wurzeln ihre Darstellung durch lineare Transformationen, sondern nur gewisse, mit den Gruppierungen der Wurzeln eng verknüpfte.

Was zunächst die Gleichung der Wendepunkte betrifft, so ist leicht zu sehen, *daß eine allgemeine ebene Kurve dritter Ordnung und insbesondere ihre Wendepunkte durch 18 lineare Transformationen in sich übergehen.* Man überzeugt sich davon am einfachsten, wenn man von der kanonischen Gleichungsform der auf ein Wendepunktsdreieck bezogenen Kurve ausgeht. Dieselbe ist:

$$0 = a(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + bx_1x_2x_3.$$

Die betreffenden linearen Transformationen setzen sich zusammen aus Vertauschungen der x unter sich und Multiplizieren derselben mit passenden dritten Wurzeln der Einheit.

Durch diese Transformationen geht nun nicht nur die gegebene Kurve f, sondern auch ihre Hessesche Determinante Δ, überhaupt jede Kurve des Büschels $f + \lambda\Delta$ in sich über.

Dadurch, daß diese Transformationen gleichzeitig einfach unendlich viele Kurven dritter Ordnung in sich überführen, ist der Widersinn gehoben, der bei einer ersten Abzählung darin liegt, daß eine allgemeine Kurve dritter Ordnung, welche doch von neun Konstanten abhängt, durch eine endliche Anzahl linearer Transformationen, die ja nur acht Parameter enthalten, in sich übergehen soll.

Als geometrisches Bild für die Gleichung neunten Grades betrachten wir nun nicht die Kurve dritter Ordnung, welche die Wendepunkte besitzt, sondern *die Wendepunkte selbst und den Transformationszyklus, durch welche diese untereinander vertauscht werden.*

Jede Gleichung, zu der eine Kurve dritter Ordnung, ohne daß dabei ein fremdes Element benutzt wird, Veranlassung geben kann, muß sich in Resolventen der Wendepunktsgleichung zerlegen lassen. Man suche z. B. nach solchen Dreiecken, deren Seiten die C_3 jedesmal in einer Ecke berühren. Die Darstellung der C_3 durch elliptische Funktionen zeigt sofort, daß es 24 solcher Dreiecke gibt. Die Auffindung derselben kommt nämlich auf Neunteilung der elliptischen Funktionen heraus; von den 81 durch dieselbe gelieferten Werten beziehen sich neun auf die Wendepunkte selbst und die 72 übrigen ergeben zu drei jedesmal dasselbe Dreieck. Nun aber

schreibt sich die C_3 mit Bezug auf ein solches Dreieck als Fundamentaldreieck folgendermaßen:

$$0 = a(x_2x_3^2 + x_3x_1^2 + x_1x_2^2) + bx_1x_2x_3.$$

Wenn man x_1, x_2, x_3 zyklisch vertauscht, bleibt diese Gleichung und das Dreieck ungeändert. Diesen Vertauschungen entsprechen lineare Transformationen, welche in den obengenannten 18 enthalten sind; denn nur diese besitzen die Eigenschaft, die C_3 in sich überzuführen. Das Dreieck bleibt also ungeändert durch drei der 18 Transformationen, durch welche die C_3 in sich übergeht. Jedesmal sechs Dreiecke bilden also eine unveränderliche Gruppe, eine Resolvente der Wendepunktsgleichung. Die Auflösung der Gleichung 24-ten Grades, welche die Dreiecke bestimmt, verlangt zunächst die Lösung einer Gleichung vom vierten Grade zur Bestimmung der Gruppen von je sechs zusammengehörigen Dreiecken, sodann nur noch die Lösung der Wendepunktsgleichung. — Man kommt natürlich auf dasselbe Resultat, wenn man die Neunteilung der elliptischen Funktionen behandelt. —

Hierzu noch die beiläufige Bemerkung, daß mit den 18 hier betrachteten linearen Transformationen eng verbunden sind 18 reziproke Transformationen. Dieselben erhält man aus den 18 linearen, unter x_i, u_i Punkt- und Linienkoordinaten mit Bezug auf ein Wendepunktsdreieck verstanden, wenn man die x_i mit den u_i vertauscht. An Stelle der Wendepunkte treten dann deren harmonische Polaren, an Stelle des Büschels $f + \lambda\Delta$ das Büschel der die Polaren berührenden Kurven dritter Klasse usw. Bei diesem Gesichtspunkte erscheint die Untersuchung der 18 linearen und 18 reziproken Transformationen als Hauptproblem; dabei erledigt sich denn nebenher die Theorie der Kurven dritter Ordnung oder dritter Klasse und deren wechselseitige Zusammengehörigkeit.

Was die *Kreisteilungsgleichungen* oder die projektivischen Verallgemeinerungen derselben, die *Gleichungen der zyklischen Projektivität*[7]), angeht, so übersieht man sofort, wieso bei ihnen die charakteristischen Vertauschungen der Wurzeln im geometrischen Bilde durch lineare Transformationen (Rotationen der Ebene um den Mittelpunkt des Kreises) ersetzt werden können.

IV.

Geometrische Repräsentation der allgemeinen Gleichung sechsten Grades.

Ich wende mich jetzt zur Erörterung der besonderen geometrischen Repräsentation, welche man für die Gleichungen sechsten Grades aufstellen kann. *Dieselbe stellt die Wurzeln der Gleichung durch sechs paarweise*

[7]) Clebsch im Crelleschen Journal, Bd. 63 (1863/64), S. 120.

in Involution liegende lineare Komplexe dar; den Vertauschungen derselben unter sich entsprechen lineare Umformungen des Punktraumes.

Die dabei in Betracht kommenden geometrischen Dinge sind großenteils dieselben, welche ich in dem Aufsatze: „Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades“ in den Math. Annalen, Bd. 2 (1870) [vgl. Abh. II in Band 1 dieser Ausgabe] auseinandergesetzt habe. Gemäß den dortigen Erörterungen besteht zwischen sechs linearen Komplexen:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_6 = 0,$$

welche paarweise miteinander in Involution liegen (vgl. den genannten Aufsatz), eine identische Gleichung von der Form:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2.$$

Nun benutze ich ferner einen Satz der Liniengeometrie, den ich unter einer etwas weniger allgemeinen Form in meiner Inauguraldissertation[8]) ausgesprochen habe. Derselbe lautet folgendermaßen:

Es mögen der Koordinatenbestimmung der geraden Linie sechs beliebige lineare Komplexe zugrunde gelegt sein; dieselben werden eine identische Gleichung zweiten Grades befriedigen:

$$R = 0.$$

Einer kollinearen oder reziproken Umformung des Raumes entspricht eine lineare Transformation der Linienkoordinaten, bei welcher R in ein Multiplum seiner selbst übergeht. Umgekehrt, setzt man statt der Linienkoordinaten solche lineare Ausdrücke, daß R dadurch in ein Multiplum seiner selbst übergeführt wird, so entspricht dem eine kollineare oder reziproke Umformung des Raumes.

In dem hier vorliegenden Falle wird nun durch eine Vertauschung der x untereinander die Identität, welche zwischen denselben besteht, in ihrer Form nicht geändert. Jeder Vertauschung der x entspricht also eine kollineare oder reziproke Umformung des Raumes, und zwar ist es eine kollineare oder eine reziproke, je nachdem die Vertauschung der x aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Transpositionen zusammengesetzt ist.

Die 720 Vertauschungen der sechs Komplexe x untereinander oder die mit denselben gleichbedeutenden 360 kollinearen und 360 reziproken Umformungen des Raumes gruppieren einerseits jedesmal 720 Linien, andererseits je 360 Punkte und 360 Ebenen zusammen; jede solche Gruppe ist ein Bild der Galoisschen Resolvente der durch die sechs Komplexe vorgestellten Gleichung sechsten Grades.

[8]) „Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form.“ Bonn 1868. C. Georgi. [Vgl. Abh. I in Bd. 1 dieser Ausgabe.]

Es ist hier nicht meine Absicht, diese Gruppen näher zu untersuchen, was übrigens im Anschlusse an die Linien-Koordinatenbestimmung sehr leicht ist; ich will hier nur darauf hinweisen, wie die Systeme von geraden Linien, welche bezüglich 2, 3, 4 der Komplexe gemeinsam sind [vgl. die zitierte Abh. II], Beispiele für besondere Resolventen bilden.

Je zwei der sechs gegebenen Komplexe haben eine Kongruenz gemein und diese besitzt zwei Direktrizen. Es gibt $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ derartiger Direktrizenpaare. Diese Direktrizenpaare sind zugleich diejenigen Linienpaare, welche den vier übrigen Komplexen jedesmal gemeinsam sind.

Die 15 Direktrizenpaare sind das Bild einer Resolvente fünfzehnten Grades.

Die 15 Direktrizenpaare bilden nun die Kanten von 15 Tetraedern (dementsprechend, daß man sechs Elemente auf 15 Weisen in drei Gruppen von zwei teilen kann).

Diese 15 Tetraeder stellen eine zweite Resolvente fünfzehnten Grades dar.

Aus den 15 Tetraedern nun kann man auf sechs Weisen solche fünf aussuchen, die zusammen alle 30 Direktrizen zu Kanten haben.

Diese Gruppen von fünf Tetraedern repräsentieren eine Resolvente des sechsten Grades.

Es ist dies die schon im Eingange erwähnte von der gegebenen Gleichung verschiedene Resolvente des sechsten Grades.

Je drei der gegebenen sechs Komplexe haben die Linien einer Erzeugung eines Hyperboloids gemein, während die Linien der anderen Erzeugung desselben Hyperboloids den übrigen drei Komplexen angehören. Es gibt zehn derartige Hyperboloide, entsprechend den zehn Möglichkeiten, sechs Dinge in zwei Gruppen von drei zu teilen.

Die Hyperboloide bilden eine Resolvente des zehnten Grades.

Ich will dabei ausdrücklich hervorheben, daß die Gleichung sechzehnten Grades, von der die Bestimmung der Singularitäten der Kummerschen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten abhängt[9]) und die, wie ich a. a. O. gezeigt habe, in unmittelbarer Beziehung zu einem System von sechs linearen Komplexen der hier betrachteten Art steht, *keine* Resolvente der durch die Komplexe repräsentierten Gleichung sechsten Grades ist. Vielmehr ist ihre Beziehung zu der Gleichung sechsten Grades derartig, daß man ihre 16 Wurzeln durch das Symbol

$$(a_1 x_1 \pm a_2 x_2 \pm \ldots \pm a_6 x_6)^2$$

[9]) Daß die Auflösung dieser Gleichung nur die Lösung einer allgemeinen Gleichung sechsten Grades und mehrerer quadratischer verlangt, hat zuerst Herr Camille Jordan in der Abhandlung „Sur une équation du 16ème degré“ (Crelles Journal, Bd. 70 (1869) nachgewiesen.

darstellen kann, wo die Vorzeichen der a nur so genommen werden sollen, daß die Zahl der gleichen Vorzeichen immer eine gerade ist[10]).

Zum Schlusse will ich noch darauf hinweisen, wie die hier vorgetragene geometrische Repräsentation der Gleichungen sechsten Grades den algebraischen Charakter einiger der Aufgaben übersehen läßt, die in dem allgemeinen Probleme enthalten sind: *diejenigen rationalen Umformungen anzugeben, durch welche eine allgemeine Gleichung sechsten Grades in eine andere übergeführt wird, welche eine bestimmte Invarianteneigenschaft besitzt.* Eine Methode zur Behandlung dieses Problems ist allerdings bereits von Herrn Clebsch in den Math. Annalen, Bd. 4, S. 289 bis 290 nicht nur für die Gleichungen des sechsten Grades, sondern für die eines beliebigen Grades angedeutet; es ist aber vielleicht immer interessant, zu sehen, wie sich diese Dinge bei der hier angewandten geometrischen Repräsentation stellen.

Den sechs Komplexen x entsprechen in einer beliebigen Ebene des Raumes sechs Punkte, welche auf einem Kegelschnitte liegen [vgl. die zitierte Abh. II]. Diese sechs Punkte sollen die gegebene Gleichung sechsten Grades vorstellen. Gibt man der Ebene nun irgendeine andere Lage, so geht die gegebene Gleichung sechsten Grades durch rationale Substitution in eine andere über. Insbesondere kann man der Ebene solche Lagen geben, daß die Gleichung ausgezeichnete Invarianteneigenschaften erhält.

Legt man z. B. die Ebene durch einen der vier Eckpunkte der eben erwähnten 15 Tetraeder hindurch, so verschwindet für die resultierende Gleichung die Invariante R; die sechs entsprechenden Punkte bilden eine Involution.

Fällt die Ebene in eine der 60 Seitenflächen der 15 Tetraeder, so rücken die sechs Punkte in ihr in drei doppelt zählende Punkte zusammen.

Berührt endlich etwa die Ebene eins der zehn eben genannten Hyperboloide, so zerfällt der Kegelschnitt, der die sechs Punkte enthält, in zwei Gerade, auf deren jeder drei Punkte liegen. Die Gleichung sechsten Grades ist also dann durch eine quadratische Gleichung und zwei kubische lösbar.

Göttingen, im Mai 1871.

[10]) Zu dieser Gleichung sechzehnten Grades steht eine zweite von demselben Grade in naher Beziehung: diejenige, welche die 16 Geraden einer f_4 mit Doppelkegelschnitt bestimmt (oder auch die 16 Geraden einer f_3, die einen festen Kegelschnitt derselben treffen). Die letztere Gleichung verlangt zu ihrer Lösung nur eine Gleichung fünften Grades und mehrere quadratische. Dieselbe ist aufzufassen als eine der im Texte betrachteten Gleichungen sechzehnten Grades, bei welcher man eine Wurzel der zu lösenden Gleichung sechsten Grades adjungiert hat.

LI. Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst.

[Math. Annalen, Bd. 9 (1875/76).]

Die nachstehenden Untersuchungen sind aus dem Streben hervorgegangen, die geometrische Interpretation von $x + iy$ auf der Kugelfläche für die Theorie der binären Formen zu verwerten. In dieser Absicht machte ich bereits bei einer früheren Gelegenheit[1]) auf die enge Beziehung aufmerksam, welche zwischen der gemeinten Interpretation und der projektivischen Maßgeometrie besteht, welche man auf die Kugel (wie auf jede Fläche zweiten Grades) gründen kann. Einer linearen Transformation von $x + iy$ entspricht geradezu, im Sinne dieser Maßgeometrie, eine reelle Bewegung des Raumes, wie auch umgekehrt, so daß jede Konstruktion auf der Kugelfläche, welche für die Invariantentheorie von $x + iy$ Bedeutung hat, sofort maßgeometrische Verwertung findet, und umgekehrt jedes maßgeometrische Theorem einen Beitrag für die Invariantentheorie liefert. Ich habe bereits damals angegeben, welche anschauliche Interpretation man auf Grund solcher Betrachtungen für das Formensystem einer binären kubischen und biquadratischen Form entwickeln kann; später[2]) veröffentlichte ich eine auf diesen Prinzipien beruhende Übertragung des Pascalschen Satzes auf den Raum. Es hat dann Herr Wedekind diese Untersuchungen nach verschiedenen Richtungen in seiner Inauguraldissertation[3]) weitergeführt [vgl. den Auszug in Math. Annalen, Bd. 9 (1875/76)]. Es sei auf diese Arbeit namentlich auch mit Rücksicht auf den erforderlichen Literaturnachweis, der hier zu weit führen würde (Untersuchungen von Möbius Beltrami u. a.), verwiesen.

Die spezielle Aufgabe, welche ich weiterhin in Angriff nahm, knüpfte an den Umstand an, daß bei gewöhnlicher Maßbestimmung ein lange er-

[1]) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872. Programmschrift [als Abh. XXVII in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe abgedruckt. Siehe besonders § 6 und Note VII].

[2]) Sitzungsberichte der Erlanger phys.-med. Gesellschaft. Nov. 1873 [als Abh. XXIV in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe abgedruckt].

[3]) Erlangen 1874.

ledigtes Problem ist: *alle endlichen Gruppen von Bewegungen zu konstruieren.* Es schien möglich, für allgemeine projektivische Maßbestimmung dasselbe Problem zu lösen und damit also, was für algebraische Untersuchungen von Wichtigkeit sein muß, *alle endlichen Gruppen linearer Transformationen eines komplexen Argumentes $x + iy$ zu gewinnen.* Es hängt diese Bestimmung auf das genaueste mit der Theorie der regulären Körper zusammen, wie noch weiter unten gezeigt werden soll. — Auf diese Weise gelang es, alle binären Formen zu konstruieren, welche lineare Transformationen in sich besitzen. Unter ihnen ist es eine vom zwölften Grade, vorgestellt durch die Ecken eines regulären *Ikosaeders*, die im folgenden besonders untersucht werden soll. Ich entwickle an ihr, als einem Beispiel, *wie man die ganze Theorie dieser Formen*, von der Kenntnis der linearen Transformationen ausgehend, welche dieselben ungeändert lassen, *ohne alle komplizierte Rechnung, nur mit den Begriffen der Invariantentheorie operierend, ableiten kann.* Die dabei verwandte Schlußweise hat große Ähnlichkeit mit derjenigen, welche Lie und ich in einer gemeinsamen Arbeit [„Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen“ in den Math. Annalen, Bd. 4 (1871) = Abh. XXVI in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe] entwickelt haben; daß dieselbe hier an einem neuen Gegenstande zur Verwertung kommt, scheint mir an den folgenden Untersuchungen das Wichtigste zu sein.

Bei der nahen Beziehung, welche diese Dinge zu funktionentheoretischen Fragen haben, konnte man von vornherein erwarten, daß dieselben schon in letzterer Richtung in Angriff genommen seien. Inzwischen habe ich erst ziemlich spät erfahren[4]), daß in der Tat dieselben Formen, freilich unter anderen Gesichtspunkten, von Schwarz betrachtet worden sind [Crelles Journal, Bd. 75 (1872/73) = Ges. Abhandl. Bd. 2, S. 211 ff.: Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaußsche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt]. Ich habe gesucht, im folgenden die mannigfachen Beziehungspunkte zu der Schwarzschen Arbeit möglichst hervortreten zu lassen. — Auch sei bereits hier einer merkwürdigen anderen Koinzidenz gedacht. Die Formeln, welche weiterhin für die Auflösung der Ikosaëdergleichung aufgestellt werden, stimmen, sofern man von der Bedeutung der auftretenden Größen absieht, genau überein mit solchen, die von Kronecker, Hermite und besonders Brioschi bei Untersuchungen über die allgemeine Gleichung fünften Grades gegeben worden sind.

[4]) Vgl., was die Entstehung meiner Untersuchungen im einzelnen angeht, zwei vorläufige Mitteilungen, welche unter dem Titel „Über eine Klasse binärer Formen“ in den Erlanger Sitzungsberichten vom 13. Juli und 14. Dezember 1874 erschienen sind.

§ 1.

Über die Interpretation von $x + iy$ auf der Kugel.

Wenn man auf eine Kugelfläche eine projektivische Maßbestimmung gründet, so hat man unter einer reellen „Bewegung“ des Raumes eine Kollineation zu verstehen, bei der zwei reelle Gerade fest bleiben, die in bezug auf die Kugel konjugierte Polaren sind, und von denen daher die eine, welche fortan als *Achse* der Bewegung bezeichnet sein soll, die Kugel in reellen Punkten schneidet, während die zweite ganz außerhalb verläuft (vgl. z. B. die Arbeit von Lindemann in den Math. Annalen, Bd. 7 (1873/74), S. 56 ff.). Die Bewegung besteht, wenn wir, wie weiterhin fast immer geschehen soll, unsere Aufmerksamkeit auf das Innere der Kugelfläche beschränken, aus einer *schraubenartigen Drehung* um diese Achse; jeder Punkt beschreibt eine gewundene Linie (Loxodrome), die auf einer Fläche zweiten Grades verläuft, welche die fundamentale Kugel in den beiden Durchschnittspunkten mit der Achse berührt (diese Punkte sind für die F_2 Umbilici). Diese Loxodromen können insbesondere in Kreise, die schraubenartige Drehung in eine bloße *Rotation* übergehen, die Ebenen der Kreise werden dann die zur Achse konjugierte Gerade enthalten.

Der einzige Spezialfall, der hinsichtlich der Lage der Achse eintreten kann, ist der, daß sie, statt die Kugel in getrennten Punkten zu schneiden, dieselbe berührt. Die konjugierte Polare berührt dann die Kugel in demselben Punkte und ist gegen die Achse (in gewöhnlichem Sinne) senkrecht; die Punkte des Raumes rücken während der Bewegung auf Kreisen fort, deren Ebenen durch diese konjugierte Polare hindurchgehen.

Faßt man jetzt die Kugel als Trägerin des Wertgebietes $x + iy$ auf, so entspricht der allgemeinen Bewegung die allgemeine lineare Transformation von $x + iy$, bei der zwei verschiedene Werte von $x + iy$ ungeändert bleiben; der speziellen Bewegung entspricht der besondere Fall linearer Transformation, bei welchem die beiden festbleibenden Elemente koinzidieren. Legt man die beiden im ersten Falle festbleibenden Elemente einer binären Koordinatenbestimmung $z = \frac{z_1}{z_2}$ zugrunde, so wird die zugehörige Transformation durch $z' = cz$ dargestellt sein, während im zweiten Falle die analytische Formel für die Transformation $z' = z + C$ ist, sofern man $z = \infty$ mit dem doppeltzählenden festbleibenden Elemente zusammenfallen läßt [vgl. Abh. XVI in Bd. 1 dieser Ausgabe, S. 263].

Handelt es sich jetzt darum, *alle Gruppen anzugeben, welche aus einer endlichen Anzahl von linearen Transformationen bestehen,* so werden die dabei in Betracht kommenden Transformationen jedenfalls solche sein müssen, die sich nach einer endlichen Anzahl von Malen reproduzieren.

Sie müssen daher, geometrisch zu reden, *Rotationen* sein; algebraisch ausgedrückt: sie müssen sich in der Gestalt $z' = \varepsilon z$ darstellen lassen, wo ε eine Einheitswurzel ist. Überdies darf die Größe der Rotation nur einem rationalen Teile von 2π gleich, ε also nur eine *rationale* Einheitswurzel sein.

Von jeder rationalen Rotation wird durch Wiederholung eine *endliche* Gruppe erzeugt. Aber es gibt auch anderweitige, aus verschiedenartigen Rotationen zusammengesetzte Gruppen. Ein Beispiel geben diejenigen, welche man aus den Rotationen um einen Punkt des Kugelinneren bilden kann. Diese Gruppen darf man als bekannt ansehen. Denn die Rotationen um einen solchen Punkt haben bei projektivischer Maßbestimmung denselben Charakter wie in der elementaren Geometrie[5]), und die Gruppen, welche man, unter Zugrundelegung der letzteren, aus Rotationen um einen Punkt zusammensetzen kann, sind bekannt. Es umfassen dieselben einmal selbstverständlich diejenigen, welche durch Wiederholung derselben Rotation entstehen. Man kann sie noch erweitern, indem man Rotationen hinzunimmt, welche die bei der Rotation festbleibenden beiden Punkte vertauschen. [Beide Rotationen führen nach meiner späteren Terminologie ein „Dieder" — d. h. die von der Ober- und Unterseite eines regulären Polygons gebildete Figur vom Rauminhalt Null — in sich über.] Dann aber gehören hierher die Gruppen derjenigen Rotationen, welche die *regulären Körper:* Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, oder, was auf dasselbe hinauskommt: Tetraeder, Würfel, Pentagondodekaeder, mit sich selbst zur Deckung bringen.

Ich werde nun zeigen, *daß mit diesen Beispielen alle Gruppen der geforderten Beschaffenheit bereits angegeben sind.*

§ 2.

Bestimmung aller Gruppen von endlich vielen linearen Transformationen.

Um den in Rede stehenden Beweis zu führen, überzeuge man sich zunächst, *daß zwei Rotationen nur dann wieder eine Rotation ergeben, wenn sich ihre Achsen schneiden.*

Eine Rotation kann man (gegenüber der allgemeinen Schraubenbewegung) dadurch charakterisieren, daß bei ihr Punkte im Kugelinnern festbleiben, die nicht selbst der Kugelfläche angehören, nämlich alle Punkte der Achse. Soll also die Kombination zweier Rotationen wieder eine Rotation ergeben, so müssen Punkte existieren, welche aus der neuen Lage, in welche sie die erste Transformation versetzte, vermöge der zweiten Transformation in ihre ursprüngliche Lage zurückgeführt werden. Da sich aber bei einer Rotation jeder Punkt auf einem Kreise bewegt, auf dessen Ebene die Achse im Mittelpunkte senkrecht steht, so sind die Achsen der beiden gegebenen Rotationen zwei Perpendikel, die in den Mittelpunkten zweier sich in zwei Punkten schneidender Kreise senkrecht zu deren Ebenen errichtet sind. Das heißt: *die Achsen werden sich schneiden*, wie man hier, wo von projektivischer Maßbestimmung die Rede ist, in ganz ähnlicher Weise durch Symmetriegründe beweisen kann, wie man das bei gewöhnlicher Maßbestimmung tun würde. — Daß umgekehrt die Kombination zweier Rotationen mit sich schneidenden Achsen jedesmal eine Rotation ergibt, ist an sich deutlich.

Aber weiter überzeugt man sich: *Sollen zwei Rotationen zu einer endlichen Gruppe Anlaß geben, so müssen sich ihre Achsen innerhalb der Kugel schneiden.* Schnitten sie sich nämlich außerhalb oder auch auf der Kugel, so würde ein reeller, an die Kugel gehender Kegel bei jeder der beiden Rotationen und also auch bei jeder durch ihre Kombination entstehenden Rotation fest bleiben. Aber aus den reellen linearen Transformationen, die einen reellen Kegel der zweiten Ordnung, oder, was auf dasselbe hinauskommt, einen reellen Kegelschnitt in sich überführen, lassen sich keine anderen endlichen Gruppen bilden als diejenigen, die durch Wiederholung *derselben* Rotation um einen festen Punkt des Innern entstehen. Die Begründung ist genau dieselbe, die man für das entsprechende Theorem der gewöhnlichen ebenen Geometrie angeben kann, welches aussagt, daß man durch Zusammensetzung zweier Drehungen um zwei verschiedene Punkte der Ebene keine endliche Gruppe von Bewegungen erzeugen kann. Der Kern des Beweises für dieses Theorem der elementaren Geometrie und für die entsprechende Behauptung bei projektivischer Maßbestimmung und reellem Fundamentalkegelschnitt liegt übereinstimmend darin, daß in beiden Fällen die Ausdehnung der Ebene eine unendlich große ist. Einen ähnlichen Schluß haben wir schon oben angewandt, als wir unter allen Arten von Bewegungen allein die Rotationen als solche bezeichneten, die sich möglicherweise nach endlichmaliger Wiederholung reproduzieren: nur bei ihnen ist die Länge der vom einzelnen Punkte zu durchlaufenden Trajektorie eine endliche.

Sollen jetzt *mehrere* Rotationen durch Kombination zu einer endlichen Gruppe Anlaß geben, so werden ihre Achsen, da sie sich gegenseitig im Innern der Kugel schneiden müssen, entweder ein und denselben im Innern gelegenen Punkt gemein haben, oder alle in einer Ebene liegen, so zwar, daß der in der Ebene enthaltene Schnittkreis mit der Kugel alle

[5]) In der Tat sind diejenigen Rotationen, bei denen der Kugelmittelpunkt fest bleibt, auch Rotationen in gewöhnlichem Sinne. Von diesem Umstande ist im folgenden durchgängig Gebrauch gemacht, um möglichst große Anschaulichkeit des Resultats zu erzielen.

ihre gegenseitigen Schnittpunkte einschließt. Allein man überzeugt sich, daß der letztere Fall ohne den ersteren nicht eintreten kann, jedoch der erstere für sich allein. Denn zuvörderst: Sollen die betr. Rotationen überhaupt eine endliche Gruppe erzeugen können, so müssen sie aus Drehungen um 180 Grad bestehen. Denn bei jedem anderen Drehungswinkel würden beim Eintritte der Rotation um eine der Achsen die übrigen $(n-1)$ in eine solche Lage übergeführt, in der jede $(n-2)$ der ursprünglichen Achsen nicht mehr träfe. Man hätte also weiterhin Rotationen zu kombinieren, deren Achsen sich nicht schneiden, was nichts Endliches geben kann. — Die Rotationen, welche hier möglicherweise in Betracht kommen, haben also auf die ihren Achsen gemeinsame Ebene jedenfalls den Einfluß, daß sie dieselbe immer wieder mit sich selbst zur Deckung bringen, und es ist nun die Frage, ob man aus solchen Umlegungen einer Ebene, in welcher ein reeller, fest bleibender Kegelschnitt vorhanden ist, ein endliches System erzeugen kann. Aber das ist wieder, wie die entsprechende Forderung, die man bei gewöhnlicher Maßbestimmung stellen mag, unmöglich wegen des unendlich großen Flächeninhalts einer solchen Ebene.

Soll also durch Zusammensetzung von Rotationen eine endliche Gruppe entstehen, so müssen sich ihre Achsen alle in einem Punkte des Kugelinnern schneiden, und also sind durch die oben angeführten Gruppen alle in Betracht kommenden Gruppen erschöpft[6]).

§ 3.

Zusätzliche Bemerkungen.

An diese Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Transformationen im binären Gebiete knüpfe ich hier beiläufig die Bemerkung: *daß zugleich alle endlichen Gruppen von Bewegungen im Nicht-Euklidischen Raume bestimmt sind.* Man hat nämlich für diese sechsfach unendlich

[6]) [Für den Satz des Textes, der zuerst in meiner Erlanger Note von 13. Juli 1874 mitgeteilt worden war, sind später einfache andere Beweise veröffentlicht worden. Ich erwähne hier nur den Beweis von E. Moore, den ich 1896 der Naturforscherversammlung in Frankfurt a. M. vorlegte (vgl. Jahresberichte der Deutschen Math. Vereinigung, Bd. 5, S. 57). Es sei

$$f = a z_1 \bar{z}_1 + \beta z_1 \bar{z}_2 + \bar{\beta} \bar{z}_1 z_2 + c z_2 \bar{z}_2$$

irgendeine definite Hermitesche quadratische Form (mit konjugiert-imaginären Veränderlichen und Koeffizienten). Aus ihr mögen durch eine vorgelegte endliche Gruppe homogener linearer Substitutionen $f_1, f_2, \ldots f_N$ hervorgehen. Dann ist $f_1 + f_2 + \ldots + f_N$ eine definite Hermitesche Form, die gewiß nicht identisch verschwindet und bei den Substitutionen der Gruppe invariant bleibt. Gleich Null gesetzt, stellt aber eine solche Form den imaginären Schnitt der $x + iy$-Kugel mit irgendeiner sie nicht treffenden reellen Ebene vor. Mit diesem Schnitt bleibt auch ein Punkt im Kugelinnern, nämlich der Pol der Ebene, fest. K.]

vielen Bewegungen das fundamentale Theorem, *daß sie sich aus zwei vertauschbaren Gruppen von nur dreifach unendlich vielen zusammensetzen, deren jede man als Gruppe aller linearen Transformationen eines binären Gebietes auffassen kann.* Diese Zerlegung, welche implizite in der bereits genannten Arbeit von Lindemann (Math. Annalen, Bd. 7) und in der Habilitationsschrift von Frahm (Tübingen 1873) enthalten ist[7]), entspricht dem Umstande, daß es spezielle lineare Transformationen einer Fläche zweiten Grades in sich gibt, bei denen das eine oder das andere System der Erzeugenden völlig ungeändert bleibt. Weil sich die Erzeugenden jedes Systems rational durch einen Parameter darstellen lassen, sind die Transformationen dieser Art, welche sich auf dasselbe System Erzeugender beziehen, geradezu durch die linearen Transformationen eines binären Gebietes vorgestellt; weil ferner bei jeder Transformation das andere Erzeugendensystem gar nicht affiziert wird, sind die beiderlei Transformationen miteinander vertauschbar. *Man wird alle endlichen Gruppen von Bewegungen des Raumes bekommen, indem man jede endliche Gruppe, die sich aus den Transformationen der einen Art zusammensetzt, kombiniert mit allen anderen aus den Transformationen der anderen Art zu sammenzusetzenden endlichen Gruppen*[8]).

Ist nun die fundamentale Fläche zweiten Grades insbesondere eine reelle, nicht geradlinige, so entspricht jeder reelle Punkt derselben einer Erzeugenden des einen und auch des anderen Systems. Jede lineare Transformation des einen Erzeugendensystems, welche von der konjugiert imaginären Transformation des anderen Erzeugendensystems begleitet ist, wird eine *reelle* lineare Transformation der Fläche in sich darstellen. Daher kann man die reellen Punkte der Fläche als ein Gebiet $x + iy$, die reellen Kollineationen der Fläche in sich als lineare Transformationen des $x + iy$ auffassen, *und man hat sonach eine rein projektivische Begründung der Repräsentation einer komplexen Veränderlichen auf der Kugel oder überhaupt auf einer nicht geradlinigen reellen Fläche zweiten Grades.* Die endlichen Gruppen *reeller* Bewegungen, welche im Falle einer solchen Fundamentalfläche vorhanden sind, decken sich geradezu mit den endlichen Gruppen linearer Transformationen, die man im binären Gebiete konstruieren kann.

[7]) Vgl. Clifford in den Proc. der Mathematical Society 1873. [= Werke, S. 181 ff., bes. S. 193 Fußnote.] — [Vgl. den Abschnitt I meiner Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 37 (1890) = Abh. XXI in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe. K.]

[8]) Nimmt man die Fundamentalfläche der Maßbestimmung imaginär, so werden die so zusammengesetzten Gruppen lauter reelle Bewegungen unter sich befassen können. Den auf einer Kugelfläche befindlichen n Ecken eines regulären Körpers entsprechend bekommt man hier „reguläre" Systeme von n^2 durch den Raum verteilten Punkten.

Es sei hier nun auch der Beziehung gedacht, welche zwischen dem in § 2 gelösten Probleme und einer Fragestellung besteht, zu welcher Schwarz in seiner oben genannten Abhandlung geführt wird, und die ihn eben zum Studium derjenigen Formen hinleitet, welche durch die Ecken der regulären Körper auf der Riemannschen Kugelfläche vorgestellt werden. Zu dem Zwecke sei es gestattet, vorübergehend einen neuen Ausdruck einzuführen. Wenn man die Kugel durch eine Ebene schneidet, so gibt es eine Kollineation des Raumes, welche die Kugel in sich überführt und den ganzen Schnittkreis mit der Ebene ungeändert läßt. Sie besteht in einer perspektivischen Umformung, welche als fest bleibende Ebene die gegebene und als Zentrum der Perspektivität ihren Pol in bezug auf die Kugel benutzt. Diese Transformation soll schlechthin als *Spiegelung* an der gegebenen Ebene bezeichnet werden. Eine Spiegelung ist keine Bewegung, sondern eine solche ergibt sich erst durch Zusammensetzung zweier Spiegelungen. Die entsprechende Änderung von $x+iy$ ist daher auch keine lineare Transformation, sondern ergibt sich, wenn man [mit einer geeigneten linearen Transformation] gleichzeitig eine Vertauschung von $+i$ mit $-i$ verbindet.

Man kann nun überhaupt das Problem aufstellen: *alle endlichen Gruppen von Umänderungen anzugeben, die durch Zusammensetzung verschiedener Spiegelungen entstehen können.* Jede solche Gruppe wird auch eine endliche Gruppe von Bewegungen umfassen, weil zwei Spiegelungen kombiniert eine Bewegung ergeben. Daß aber die endlichen Gruppen von Bewegungen, welche man so erhält, in der Tat alle solchen Gruppen erschöpfen, ist nicht von vornherein klar, sondern ergibt sich nur hinterher.

Man wird das angeregte Problem zunächst direkt in einer Weise zu erledigen haben, welche den in § 2 angestellten Überlegungen sehr ähnlich ist. Man zeigt, daß sich alle spiegelnden Ebenen, wenn etwas Endliches entstehen soll, in einem Punkte des Kugelinnern schneiden müssen, und dann weiter, nachdem man diesen Punkt in den Kugelmittelpunkt verlegt hat, *daß sie notwendig Symmetrieebenen eines regulären Polyeders [einschließlich des Dieders] sind* (sofern sie nicht alle auf einer festen Ebene senkrecht stehen)[9]. Die Gruppen von Bewegungen, welche in den so aufgestellten Gruppen von Spiegelungen enthalten sind, stimmen dann in der Tat mit den in § 2 aufgestellten überein.

Es ist nun ein spezieller Fall des hier eingeführten neuen Problems, welcher bei Schwarz vorliegt. Schwarz verlangt — ich bediene mich dabei der eben eingeführten Terminologie — die Bedingung anzugeben, unter der die Spiegelung an nur *drei* verschiedenen Ebenen etwas Endliches liefern kann, und sein Nachweis darf sich dementsprechend darauf beschränken, daß der Schnittpunkt der drei Ebenen im Kugelinnern zu liegen hat, und die Ebenen, sofern man den Schnittpunkt in den Kugelmittelpunkt verlegt, Symmetrieebenen eines regulären Polyeders sind (wieder abgesehen von den Fällen, in denen die drei Ebenen auf einer vierten Ebene senkrecht stehen). Die so erzielte Antwort umfaßt also schließlich bereits dieselben Fälle, die bei der allgemeineren Fragestellung und bei der in § 1, 2 vorliegenden auftreten.

[9]) Vgl. z. B. Elling B. Holst in der Tidskrift for Matematik, 1875, S. 87.

§ 4.

Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich.

Binäre Formen, welche mehr als zwei verschiedene Wurzelpunkte besitzen, können nur durch eine endliche Zahl linearer Transformationen in sich übergehen. Denn es gibt nur eine endliche Zahl von Weisen, die Wurzelpunkte einander zuzuordnen, und durch eine solche Zuordnung ist, unter der gemachten Voraussetzung, eine lineare Transformation, falls überhaupt eine existiert, vollständig bestimmt. Denn zur Kenntnis einer linearen Transformation reicht es aus, zu wissen, was bei ihr aus drei irgendwie angenommenen Punkten wird. Sehen wir daher von solchen binären Formen ab, die nur einen oder nur zwei verschiedene Wurzelpunkte besitzen, so werden wir alle binären Formen mit linearen Transformationen in sich erhalten, indem wir eine Anzahl Wurzelpunkte beliebig annehmen und auf sie die Transformationen irgendeiner der vorstehend bestimmten endlichen Gruppen anwenden. Besonderes Interesse werden diejenigen Formen besitzen, welche durch Anwendung der bez. Transformationen aus einem einzelnen Punkte entspringen.

Unter ihnen treten als die einfachsten zunächst die allgemeinen *kubischen* und *biquadratischen* Formen auf. Wie die linearen Transformationen derselben in sich beschaffen sind, wie man infolgedessen die Lage der zu ihnen gehörigen Kovarianten ermitteln kann, ist teils von mir bei früheren Gelegenheiten angegeben [vgl. z. B. die vorstehend abgedruckte Abh. L, S. 267 f., sowie das oben genannte Programm = Abh. XXVII in Bd. 1 dieser Ausgabe], teils von Herrn Wedekind neuerdings entwickelt worden. Es werde daher von diesen Erörterungen nur so viel wiederholt, als zum Verständnis des Folgenden notwendig ist. Es sei also vor allen Dingen das bereits in der Einleitung berührte Prinzip hervorgehoben, welches über die Lage der verschiedenen, hier aus der algebraischen Theorie bekannten, Kovarianten entscheidet: *daß nämlich Kovarianten durch dieselben linearen Transformationen in sich übergehen müssen, wie die Grundform.*

Betrachten wir eine binäre kubische Form. Da man drei Punkte der Kugel in drei beliebige andere durch lineare Transformation überführen kann, so denke man sich die drei Wurzelpunkte der Form f als äquidistante Punkte eines größten Kreises, der der Äquator heißen soll. Dann bestehen die sechs linearen Transformationen, welche f in sich überführen, aus Drehungen durch 120 Grad um die die beiden Pole verbindende Achse und aus Drehungen durch 180 Grad um diejenigen drei Durchmesser, welche bez. je einen Wurzelpunkt von f enthalten. Erteilt man den Wurzelpunkten von f die „geographische" Länge

$$0^\circ, \quad 120^\circ, \quad 240^\circ,$$

so sind die sechs Punkte, welche aus einem beliebig angenommenen entstehen, dessen Breite α, dessen Länge β ist, dargestellt durch:

$$\begin{array}{lll} \alpha,\ \beta, & \alpha,\ \beta+120^\circ, & \alpha,\ \beta+240^\circ, \\ -\alpha,\ -\beta, & -\alpha,\ -\beta+120^\circ, & -\alpha,\ -\beta+240^\circ. \end{array}$$

Zu diesen Gruppen von sechs Punkten gehört dreifach zählend das Paar der Pole, *dasselbe stellt also die einzige quadratische Kovariante, welche es gibt, die Kovariante* Δ *vor*[10]). Andererseits findet sich unter ihnen doppeltzählend das Tripel der Halbierungspunkte der von den Wurzelpunkten f auf dem Äquator bezeichneten Strecken; *sie repräsentieren aus analogen Gründen die Kovariante* Q.

Um sich von dem Formensysteme einer *biquadratischen* Form f Rechenschaft zu geben, erinnere man sich, daß die Kovariante sechsten Grades T aus drei paarweise zueinander harmonischen Punktepaaren besteht. Dieselbe kann daher repräsentiert werden durch diejenigen sechs Punkte, in denen die Kugel von drei zueinander rechtwinkligen Durchmessern geschnitten wird. Die Lage der vier Wurzelpunkte von f, wie überhaupt der vier Wurzelpunkte einer beliebigen Form aus der Schar $\varkappa f + \lambda H$, ist dann am einfachsten anzugeben, indem man auf dieses Achsenkreuz eine gewöhnliche Koordinatenbestimmung gründet. Bedeuten x, y, z die Koordinaten eines der Wurzelpunkte von $\varkappa f + \lambda H$, so sind

$$\begin{array}{rrr} x, & -y, & -z, \\ -x, & y, & -z, \\ -x, & -y, & z \end{array}$$

die übrigen; denn es sind je zwei solche Punkte zu einem Punktepaare von T harmonisch. Die drei linearen Transformationen, welche, abgesehen von der identischen Transformation, die biquadratische Form in sich über-

[10]) Wegen dieser und ähnlicher Bezeichnungen vgl. immer Clebsch, Theorie der binären Formen. Bei B. G. Teubner 1871.

führen, und die dadurch geometrisch definiert sind, daß sie die Wurzelpunkte je paarweise vertauschen, sind sonach dargestellt durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel zweier Koordinaten[11]).

Unter den Quadrupeln $\varkappa f + \lambda H$ finden sich, sofern man von denjenigen absieht, die doppeltzählend durch ein Punktepaar von T dargestellt sind, noch zweierlei, die eine größere Zahl linearer Transformationen in sich gestatten: diejenigen drei, welche ein harmonisches, und die zwei, welche ein äquianharmonisches Doppelverhältnis besitzen. Im ersten Falle verschwindet eine der drei Koordinaten x, y, z und die anderen beiden werden ihrem absoluten Werte nach gleich; im zweiten Falle sind alle Koordinaten bis aufs Vorzeichen gleich zu setzen: *die Wurzelpunkte der äquianharmonischen Form bilden ein reguläres Tetraeder.* Das zweite zu demselben Achsenkreuze gehörige reguläre Tetraeder repräsentiert das zugehörige H.

Es sind mit diesen Erörterungen zugleich diejenigen Formen besprochen, die durch das reguläre *Oktaeder* und den *Würfel* dargestellt werden. Das Oktaeder repräsentiert eine Form sechsten Grades von der Art der Kovariante T einer biquadratischen Form. Die Zahl der Bewegungen, welche ein Oktaeder mit sich zur Deckung bringen, beträgt 24; die Gruppen von 24 Punkten, welche durch diese Bewegungen aus einem einzelnen Punkte erzeugt werden, umfassen jedesmal sechs der zum Oktaeder gehörigen biquadratischen Formen $\varkappa f + \lambda H$: solche sechs, welche zusammengehöriges Doppelverhältnis haben. Unter ihnen findet sich doppeltzählend eine Gruppe von zwölf Punkten [welches die Kantenhalbierungspunkte des Oktaeders und auch des Würfels sind], bestehend aus den drei harmonischen Quadrupeln $\varkappa f + \lambda H$, und dreifach zählend eine Gruppe von acht Punkten, die aus den zwei äquianharmonischen Quadrupeln besteht und die Ecken des zugehörigen *Würfels* darstellt.

Von regulären Körpern bleiben noch die beiden zusammengehörigen: das *Ikosaeder* und das *Pentagondodekaeder* zu nennen. Die Zahl der linearen Transformationen dieser Formen in sich beträgt 60. Unter den Gruppen von je 60 durch diese Transformationen zusammengeordneten Punkten befinden sich die Eckpunkte des Ikosaeders fünfmal, die des Dodekaeders dreimal zählend. Es findet sich ferner noch eine doppeltzählende Gruppe von 30 Punkten, mit der dann aber die mehrfach zählen-

[11]) Vgl. die Arbeit des Herrn Wedekind, sowie eine neuere Mitteilung desselben (Erlanger Berichte, Juli 1875), in der er aus den Wurzelpunkten von f diejenigen von H konstruiert. [$f=0$ und $H=0$ haben dieselbe kubische Resolvente. Hat man diese gelöst, so verlangt die Lösung von $f=0$, wie von $H=0$, nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen vierten Grades (oder auch auf Grund unserer geometrischen Betrachtungen) noch zwei nebeneinanderstehende Quadratwurzeln. Aber diese Quadratwurzeln sind bei $f=0$ und bei $H=0$ keineswegs dieselben. K.]

den Gruppen erschöpft sind. [Diese Punkte sind die Kantenhalbierungspunkte des Ikosaeders und auch des Pentagondodekaeders. Man kann sie auch folgendermaßen erhalten.] Die 15 Ebenen, welche man durch den Kugelmittelpunkt und bez. vier sich paarweise gegenüberliegende Ecken des Ikosaeders hindurchlegen kann, lassen sich in fünf Tripel von zueinander rechtwinkligen zerlegen. Die 15 Durchschnittslinien der Ebenen dieser Tripel schneiden die gemeinten 30 Punkte aus.

Endlich sind noch solche Punktsysteme zu erwähnen, welche aus einem einzelnen Punkte durch Wiederholung einer fest gegebenen Rotation durch einen rationalen Teil von 2π hervorgehen. Sie entsprechen den *Kreisteilungsgleichungen*. Kombiniert man mit diesen Rotationen noch eine durch 180 Grad um eine gegen die ursprüngliche Rotationsachse senkrechte, sie schneidende Linie, so entstehen Gruppen von der doppelten Punktzahl [die des Dieders]. Führt man, wie oben bei Betrachtung der kubischen Form, eine Bestimmung der Punkte durch geographische Breite und Länge aus, so werden die Charaktere der Punkte:

$$\alpha, \beta + \frac{2k\pi}{n}, \quad -\alpha, -\beta + \frac{2k\pi}{n}.$$

Die Untersuchung der Kreisteilungsgleichungen, wie derjenigen, die sich auf den [Fall des *Dieders*] beziehen, kann genau nach den weiter entwickelten Methoden erfolgen; wir führen dieselbe aber weiterhin der Kürze wegen nicht aus.

§ 5.

Ein allgemeines Prinzip. Erste Anwendung auf Oktaeder und Ikosaeder.

Es seien $\Pi = 0$, $\Pi' = 0$ die Gleichungen zweier Punktaggregate, welche aus zwei irgendwie angenommenen Punkten durch Anwendung der linearen Transformationen irgendeiner der aufgezählten Gruppen hervorgehen: mit der Festsetzung, daß Π, bez. Π' die geeignete Potenz der betr. Gleichung vorstellt, wenn der anfängliche Punkt zufällig so gewählt ist, daß er eine mehrfach zählende Gruppe erzeugt. Dann behaupte ich, daß

$$\varkappa \Pi + \varkappa' \Pi' = 0,$$

unter $\frac{\varkappa}{\varkappa'}$ einen Parameter verstanden, *überhaupt alle Punktsysteme darstellt, welche durch die betr. linearen Transformationen aus einem einzelnen Punkte hervorgehen.* — Es werden sich nämlich Π und Π' bei Anwendung der linearen Transformationen allerdings um Faktoren ändern können, aber diese Faktoren müssen bei beiden dieselben sein. Es stellt also

$$\varkappa \Pi + \varkappa' \Pi' = 0$$

jedenfalls ein Punktsystem vor, welches durch die Transformation nicht

geändert wird. Aber es gibt nur einfach unendlich viele Punktsysteme der gemeinten Art, und über den Wert von $\frac{\varkappa}{\varkappa'}$ ist gar nichts festgesetzt; indem wir also diesem Parameter alle Werte erteilen, erhalten wir alle Punktsysteme, die es überhaupt gibt.

Eine Anzahl bekannter Eigenschaften der aufgestellten Formen sind ein Ausfluß dieser Bemerkung. Ich erinnere daran, daß bei den binären kubischen Formen zwischen f^2, Q^2 und Δ^3 eine lineare Relation besteht, daß bei den binären biquadratischen sich alle zu demselben T gehörigen Formen durch $\varkappa f + \lambda H$ darstellen lassen. Ist ferner etwa $f = 0$ die Gleichung eines Oktaeders, $H = 0$ der zugehörige Würfel, $T = 0$ die oben genannte Punktgruppe von zwölf Punkten, so hat man eine homogene lineare Relation zwischen f^4, H^3, T^2. Und in der Tat findet sich gelegentlich der Untersuchung einer solchen Form f eine derartige Relation bei Clebsch (Theorie der binären Formen, S. 450) angegeben. Andererseits leitet Schwarz dieselbe in seiner Arbeit ab unter der besonderen Voraussetzung, daß f in einer bestimmten kanonischen Form gegeben sei. Schwarz notiert endlich auch die homogene lineare Relation, welche zufolge des ausgesprochenen Prinzips zwischen f^5, H^3, T^2 bestehen muß, wenn $f = 0$ ein Ikosaeder vorstellt, $H = 0$ das zugehörige Pentagondodekaeder, $T = 0$ die oben eingeführte Gruppe von 30 Punkten[12]).

Ich werde nun zunächst, unter Beschränkung auf *Oktaeder* und *Ikosaeder*, zeigen, wie dieser Satz sofort gestattet, eine Übersicht über die bei ihnen vorhandenen rationalen Kovarianten zu erhalten. Die Beschränkung auf die genannten beiden Formen geschieht hier und im folgenden der Einfachheit wegen. Das Ikosaeder ist es eigentlich, welches das Hauptinteresse auf sich zieht; das Oktaeder wird aber immer vorab untersucht, weil die bei ihm stattfindenden Verhältnisse beim Ikosaeder als bekannt vorausgesetzt werden müssen.

[12]) Die Methode, welche Schwarz dabei benutzt, ist, abgesehen von der Form, von der im Texte genannten nicht so sehr verschieden. Man kann sie folgendermaßen aussprechen. Man setze

$$y = -\frac{\varkappa'}{\varkappa} = \frac{\Pi}{\Pi'}$$

und bilde vermöge dieser Substitution das Gebiet der gegebenen Kugel auf das Gebiet der komplexen Variabeln y ab. Einem Symmetriekreisbogen, der auf der Kugel verläuft, entspricht dabei, wie man zeigen kann, ein Kreisbogen der Ebene. Man hat dann ferner das allgemeine Gesetz anzuwenden, daß eine konforme Abbildung, die ein Stück einer Kreisperipherie in ein ebensolches überführt, immer die Eigenschaft besitzt, symmetrisch zur ersteren gelegene Punkte in solche zu verwandeln, die für die zweite symmetrisch sind. Eine zweimalige Anwendung dieses Satzes ergibt den im Texte aufgestellten Satz, insofern eine zweimalige Übertragung durch Symmetrie (Spiegelung) eine lineare Transformation vorstellt.

Zuvörderst ist ersichtlich, daß Oktaeder und Ikosaeder nur *eine Invariante* besitzen. Da man nämlich z. B. jedes Oktaeder mit jedem anderen durch lineare Transformation zur Deckung bringen kann, so haben alle absoluten Invarianten, die man aufstellen könnte, gegebene numerische Werte, und es drücken sich demnach alle denkbaren Invarianten mit Hilfe numerischer, von vornherein angebbarer, Größen durch Potenzen einer allein beizubehaltenden Invariante aus.

Betrachten wir jetzt eine beliebige rationale Kovariante. Dieselbe muß aus lauter Gruppen zusammengehöriger Punkte bestehen und also, ev. nach Erhebung in die richtige Potenz, als ein Aggregat von Faktoren $\varkappa\Pi + \varkappa'\Pi'$ darstellbar sein, d. h. als eine homogene ganze Funktion von Π und Π'. Die Koeffizienten dieser Funktion können, wenn Π und Π' dieselbe Dimension in den Koeffizienten der Grundform besitzen, wie vorausgesetzt sein soll, bei der ihnen begrifflich zukommenden invarianten Bedeutung, nur durch numerische Faktoren von einer Potenz der einen, allein vorhandenen Invariante verschieden sein. Zieht man diese Potenz als gemeinsamen Faktor vor, so besteht die Kovariante im übrigen aus einem homogenen numerischen Aggregate von Π und Π'. Auf diese Weise erschließt man:

Alle rationalen ganzen Kovarianten unserer Form drücken sich, abgesehen von einer etwa vortretenden Potenz der einen überhaupt vorhandenen Invariante, rational und ganz aus durch diejenigen Formen, welche die unter den zugehörigen Punktsystemen enthaltenen mehrfach zählenden darstellen. Die letzteren also bilden das volle System der Kovarianten.

Ich hebe ausdrücklich den Unterschied hervor, der zwischen dieser Überlegung und den allgemeinen Methoden besteht, durch welche Gordan gelehrt hat, für eine binäre Form beliebigen Grades ein volles Formensystem aufzustellen. Bei Gordan sind immer Formen mit allgemeinen Koeffizienten vorausgesetzt; hier handelt es sich wesentlich um spezielle Formen [und die ihnen angepaßten Begriffsbestimmungen]. (Vgl. Gordan: Über das Formensystem binärer Formen. Leipzig 1875. Schlußbemerkung.)

§ 6.

Das Formensystem des Oktaeders und des Ikosaeders.

Die allgemeine Methode, welche weiterhin immer angewandt werden soll, ist nun die: *Auf Grund des im vorstehenden Paragraphen angegebenen Prinzips werden wir gewisse Relationen der Art nach erschließen und dann die in ihnen vorkommenden Zahlenkoeffizienten durch Ausrechnung an einer kanonischen Form bestimmen.*

Die kanonischen Formen, welche wir dabei für Oktaeder und Ikosaeder zugrunde legen, sind dieselben, die sich bei Schwarz [inhomogen geschrieben] angegeben finden:

$$\text{Oktaeder:}\quad f = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4),$$

$$\text{Ikosaeder:}\quad f = x_1 x_2 (x_1^{10} + 11\, x_1^5 x_2^5 - x_2^{10}),$$

man verifiziert sie leicht durch Betrachtung der Lagenverhältnisse der Wurzelpunkte.

Betrachten wir jetzt das Oktaeder f. Setzen wir

$$f = a_x^6,$$

so lehrt die allgemeine Invariantentheorie Bildungen zweiten Grades in den Koeffizienten aufstellen:

$$(ab)^6 = A, \quad (ab)^4 a_x^2 b_x^2, \quad (ab)^2 a_x^4 b_x^4 = H.$$

Wir werden hier zunächst erschließen, daß die zweitangeführte Bildung identisch verschwindet. Denn unter den zu einem Oktaeder gehörigen Gruppen zusammengeordneter Punkte findet sich keine mit nur vier verschiedenen Punkten. Andererseits kann man dieses identische Verschwinden als Charakterisierung der Oktaedergleichung auffassen. Jede Form sechsten Grades, welche isolierte Wurzelpunkte besitzt (Gleichungen mit verschwindender Diskriminante mögen einen Augenblick ausgeschlossen sein), kann auf die Form transformiert werden: $x_1 x_2 \varphi_4$, wo φ_4 eine Funktion vierten Grades in x_1, x_2 ist, in welcher x_1^4 und $-x_2^4$ der Koeffizient 1 beigelegt werden kann. Wenn man dann die vierte Überschiebung $(ab)^4 a_x^2 b_x^2$ wirklich berechnet und ihr identisches Verschwinden verlangt, so zeigt sich, daß man eben die für das Oktaeder angegebene kanonische Form erhält:

Eine Gleichung sechsten Grades $f = 0$ mit nicht verschwindender Diskriminante soll eine Oktaedergleichung heißen, wenn die vierte Überschiebung von f mit sich selbst verschwindet.

Fragen wir weiter, was H bedeutet. H kann nicht identisch verschwinden (sonst würden, nach einem bekannten Satze, alle Wurzelpunkte von f koinzidieren). Da aber unter den Gruppen zusammengehöriger Punkte, wie sie beim Oktaeder auftreten, nur eine aus bloß acht Punkten besteht: diejenige, welche durch die Ecken des zugehörigen Würfels dargestellt wird, *so ist $H = 0$ die Gleichung dieses Würfels.*

Dieselbe Schlußweise zeigt, *daß die Funktionaldeterminante T von f und H, eine Form vom zwölften Grade, gleich Null gesetzt, das Produkt der drei zu $f = 0$ gehörigen harmonischen Quadrupel* [d. h. *die Kantenhalbierungspunkte des Oktaeders*] *vorstellt.*

Es fragt sich jetzt, ob die Invariante A verschwindet. Diese Frage beantwortet sich verneinend durch Ausrechnung an der kanonischen Form[13]). *Es gibt also eine Invariante zweiten Grades in den Koeffizienten* $A = (ab)^6$. Eine solche wird aber gerade verlangt, um die lineare Relation, welche nach den obigen Erörterungen zwischen f^4, H^3, T^2 stattzufinden hat, auch in den Koeffizienten homogen herzustellen. Die bereits erwähnte, bei Clebsch angegebene Relation ist in der Tat diese:

$$\frac{A f^4}{36} + \tfrac{1}{2} H^3 + T^2 = 0.$$

Auf Grund der Bemerkungen des vorigen Paragraphen kann man jetzt behaupten, *daß f, H, T, A das volle Formensystem von f ausmachen.* Es ist nur noch zu zeigen [da es sich um ein ganz spezielles f handelt], daß nicht A, ev. bis auf einen numerischen Faktor, das volle Quadrat eines rationalen Ausdrucks ersten Grades in den Koeffizienten ist. Man überzeugt sich von der Unmöglichkeit, A so darzustellen, an einem Beispiele, indem man etwa f in der Form

$$x_1 x_2 (\lambda x_1^4 + \mu x_2^4)$$

voraussetzt.

Da die Diskriminante der Oktaedergleichung nicht identisch verschwindet, andererseits vom Grade 10 in den Koeffizienten sein muß, so ist sie bis auf einen Zahlenfaktor $= A^5$. Verschwindet also A, so rücken jedenfalls zwei Wurzelpunkte des Oktaeders zusammen, und es ist dann, bei den zwischen den Wurzeln herrschenden Doppelverhältnisrelationen, leicht zu schließen, daß überhaupt fünf Wurzelpunkte zusammenrücken, während der sechste irgendwo abgetrennt liegt. Eine noch speziellere Form erhalten wir, wenn wir auch noch das identische Verschwinden von H verlangen: indem dann alle Wurzelpunkte von f zusammenrücken, wird f die sechste Potenz eines linearen Ausdrucks.

Betrachten wir ferner das Ikosaeder:

$$f = a_x^{12}.$$

Man überzeugt sich durch ganz ähnliche Schlüsse, wie soeben beim Oktaeder, daß von den Überschiebungen von f über sich selbst, jedenfalls diese:

$$(ab)^4 a_x^8 b_x^8, \quad (ab)^8 a_x^4 b_x^4, \quad (ab)^{10} a_x^2 b_x^2$$

[13]) Für $f = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) = a_x^6$ ergibt sich:

$$A = (ab)^6 = \tfrac{1}{3},$$
$$H = (ab)^2 a_x^4 b_x^4 = -\tfrac{1}{18}(x_1^8 + 14 x_1^4 x_2^4 + x_2^8),$$
$$T = [f, H] \qquad = -\tfrac{1}{108}(x_1^{12} - 33 x_1^8 x_2^4 - 33 x_1^4 x_2^8 + x_2^{12}).$$

Diese Ausdrücke befriedigen in der Tat die weiterhin im Texte angegebene Relation:

$$\frac{A f^4}{36} + \tfrac{1}{2} H^3 + T^2 = 0.$$

identisch verschwinden. Durch direkte Ausrechnung findet man in Anlehnung an die oben aufgeführte kanonische Form umgekehrt:

Eine Form zwölften Grades mit nicht verschwindender Diskriminante stellt, gleich Null gesetzt, ein Ikosaeder vor, wenn ihre vierte Überschiebung mit sich selbst verschwindet.

Dagegen darf die Hessesche Form

$$H = (ab)^2 a_x^{10} b_x^{10}$$

nicht identisch verschwinden, weil sonst f eine zwölfte Potenz wäre; *sie repräsentiert daher das bereits mit demselben Buchstaben bezeichnete Pentagondodekaeder.* Aus ähnlichen Gründen folgt: *daß die von uns mit T bezeichnete Kovariante vom dreißigsten Grade die Funktionaldeterminante von f und H repräsentiert.*

Aber untersuchen wir ferner die noch bleibenden Überschiebungen von f über sich selbst:

$$(ab)^{12}, \quad (ab)^6 a_x^6 b_x^6.$$

Die erstere ist eine Invariante, die wiederum als A bezeichnet werden soll. Daß sie nicht verschwindet, ergibt sich durch Ausrechnung an der kanonischen Form. Aber auch die zweite Bildung — sie mag Π heißen — verschwindet, zufolge Ausrechnung, nicht identisch. Sie kann daher, als vom zwölften Grade, von f selbst nur um einen Faktor verschieden sein:

$$\Pi = B f\ ^{14}).$$

Dieses B ist sonach definiert *als eine rationale Invariante ersten Grades in den Koeffizienten von f;* sie muß, bis auf einen numerischen Faktor, gleich $\sqrt{A}$ sein. Aber es fragt sich, ob man B als eine ganze, rationale Funktion der Koeffizienten von f darstellen kann. Dies zeigt sich an einem Beispiele als unmöglich. Man denke nämlich f zunächst in der oben gegebenen kanonischen Form und substituiere dann

$$x_1 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$
$$x_2 = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2.$$

Für die neue Form wird B bis auf einen Zahlenfaktor gleich der sechsten Potenz der Substitutionsdeterminante, also gleich $(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^6$ sein müssen; aber es zeigt sich unmöglich, diesen Ausdruck aus den Koeffizienten des neuen f linear zusammenzusetzen.

Das Vorhandensein einer in den Koeffizienten rationalen Invariante

[14]) [Gemäß dem identischen Verschwinden der vierten Überschiebung bestehen zwischen den Koeffizienten von f eine große Anzahl von Relationen zweiten Grades. Die Proportionalität der sechsten Überschiebung mit f liefert entsprechend Relationen dritten Grades, welche aus denen zweiten Grades folgen müssen. K.]

vom ersten Grad wird auch durch die lineare Relation verlangt, welche nach dem Früheren zwischen f^5, H^3, T^2 stattfinden soll. Denn während H^3 und T^2 vom sechsten Grade in den Koeffizienten von f sind, hat f^5 nur den fünften Grad, und man muß ihm also die Invariante B als Faktor zusetzen.

Man hat eine Relation

$$\varkappa \cdot B f^5 + \lambda H^3 + \mu T^2 = 0,$$

wo $\varkappa$, λ, μ numerische Konstanten sind[15]).

[Andererseits ergibt sich das volle System der rationalen, ganzen Kovarianten von f durch folgende Überlegung:

Wir haben zunächst f, H, T, A, dann neben f die Kovariante Π, wobei

$$84\,\Pi^2 = A f^2.$$

Ich will die Koeffizienten von f einen Augenblick mit f_i, die von Π mit Π_i bezeichnen. Dann hat man wegen ihrer Dimension in den f_i:

$$\sum \frac{\partial H}{\partial f_i} f_i = 2H, \quad \sum \frac{\partial T}{\partial f_i} f_i = 3T, \quad \sum \frac{\partial A}{\partial f_i} f_i = 2A.$$

---

[15]) Für die oben angegebene kanonische Form

$$f = x_1^{11} x_2 + 11\, x_1^6 x_2^6 - x_1 x_2^{11}$$

findet sich:

$$A = \frac{25}{84}, \qquad B = -\frac{5}{84},$$

ferner:

$$12^2 \cdot H = -(x_1^{20} + x_2^{20}) + 228\,(x_1^{15} x_2^5 - x_1^5 x_2^{15}) - 494\, x_1^{10} x_2^{10},$$

$$12 \cdot T = (x_1^{30} + x_2^{30}) + 522\,(x_1^{25} x_2^5 - x_1^5 x_2^{25}) - 10005\,(x_1^{20} x_2^{10} + x_1^{10} x_2^{20}),$$

und also

$$7 \cdot 12^2 \cdot B \cdot f^5 + 5 \cdot 12^4 \cdot H^3 + 5 \cdot T^2 = 0.$$

Vermöge der so geschriebenen Relation ist man in der Lage, die von Schwarz a. a. O. angedeutete algebraische Reduzierbarkeit des Integrals

$$\int \frac{(x, dx)}{\sqrt[6]{f}}$$

auf ein elliptisches Integral folgendermaßen durchzuführen. Man setze:

$$z_1 = H, \qquad z_2 = \sqrt[3]{B f^5}.$$

So ist

$$(z, dz) = \frac{1}{12} \cdot B^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{2}{3}} \cdot T \cdot (x, dx)$$

und also unser Integral

$$= \int \frac{12\,(z, dz)}{B^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{5}{6}} \cdot T}$$

$$= \int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{B}} \cdot \frac{(z, dz)}{\sqrt{-720\, z_1^3 z_2 + 7 z_2^4}}.$$

Trägt man nun hier statt der f_i die Π_i ein, so erhält man drei neue rationale ganze Bildungen

$$\sum \frac{\partial H_i}{\partial f_i} \Pi_i = 2[H], \quad \sum \frac{\partial T}{\partial f_i} \Pi_i = 3[T], \quad \sum \frac{\partial A}{\partial f_i} \Pi_i = 2[A].$$

Diese $[H]$, $[T]$, $[A]$ sind offenbar noch den vorher aufgezählten Formen f, H, T, A, Π hinzuzufügen, um im gewöhnlichen Sinne das volle System von f zu haben. Im übrigen ist, da $\Pi_i = B f_i$ auch

$$[H] = BH, \quad [T] = BT, \quad [A] = BA.]^{16}).$$

Die Untersuchung spezieller Formen des Ikosaeders hat folgende Resultate. Die Diskriminante ist proportional zu A^{11}. Verschwindet A, so fallen also Wurzelpunkte von f zusammen, und zwar fallen gleich elf Wurzelpunkte zusammen, während der zwölfte noch beliebig bleibt. Auch er vereinigt sich mit den elf übrigen, sobald H identisch verschwindet.

Es mag zum Schlusse noch darauf aufmerksam gemacht werden, daß die drei Formen f, H, T, welche nach dem Vorstehenden für Oktaeder und Ikosaeder eine so wichtige Rolle spielen, auch bei der allgemeinen Verteilung der Kovarianten einer beliebigen binären Form, wie sie Gordan in seiner neuesten Schrift gegeben hat (Über das Formensystem binärer Formen, Leipzig 1875), eine zusammengehörige Gruppe bilden; sie konstituieren, nach der dort angewandten Bezeichnung, das System A_1 von f.

§ 7.

Irrationale Kovarianten des Oktaeders. Die Auflösung der Oktaedergleichung.

Dieselben Prinzipien, welche im vorstehenden Paragraphen zur Untersuchung der rationalen Kovarianten von Oktaeder und Ikosaeder verwandt wurden, ergeben eine Menge von Relationen für irrationale Kovarianten derselben. Von diesen Beziehungen sollen hier einige wenige entwickelt werden, welche für die Auflösung der Oktaeder- und Ikosaedergleichung von Bedeutung sind. Wenn die Auflösung der Oktaedergleichung, die sich algebraisch gestaltet, auch schon bekannt ist[17]), so mag sie hier des Zusammenhangs und der späteren Benutzung wegen doch dargestellt werden.

Beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung des Oktaeders, weil sich bei ihm eine Reihe der auch beim Ikosaeder vorhandenen Be-

---

[16]) [Vorstehende Ausführungen treten beim Wiederabdruck an Stelle nicht ganz korrekter Ausführungen des Originals. K.]

[17]) Vgl. Clebsch und Gordan, Annali di Matematica, Serie 2, Bd. 1 (1868), und Clebsch, Binäre Formen, Leipzig 1872, S. 451.

ziehungen einfacher darstellen läßt. Ich behaupte: *Jede Ecke des Oktaeders drückt sich rational durch die gegenüberstehende aus.*

Sei nämlich, um diese Darstellung nur auf eine Weise zu entwickeln[18], $H_x^8 = 0$ der zum Oktaeder gehörige Würfel, x eine Oktaederecke, so ist

$$H_x^7 H_y = 0$$

die Gleichung der gegenüberstehenden Ecke. Der Beweis ist einfach dieser: Die hingeschriebene Polare ist simultane Kovariante des Oktaeders und des Punktes x. Das System der letzteren, und also auch jede Kovariante derselben, geht aber durch vier lineare Transformationen in sich über, entsprechend Drehungen durch 90 Grad um die Verbindungsgerade der Ecke x mit der gegenüberliegenden. Der durch Nullsetzen der hingeschriebenen Polare repräsentierte Punkt y kann daher nur entweder mit x selbst oder mit der gegenüberliegenden Ecke koinzidieren, und die erstere dieser beiden Möglichkeiten ist zu verwerfen, weil dann x der Gleichung $H = 0$ genügen würde.

Auf Grund dieser Darstellung wird man schließen, *daß die Spaltung des Oktaeders in die drei Paare gegenüberliegender Ecken von einer rationalen Gleichung dritten Grades abhängt.* Eine solche kann man in folgender Weise aufstellen:

Es sei φ eins der Punktepaare, $\frac{f}{\varphi}$ das Aggregat der übrigen vier Wurzelpunkte von f. Beide Formen gehen durch acht von den 24 linearen Transformationen, welche f mit sich zur Deckung bringen, in sich über. Dabei vertauschen sich[19]) die Ecken des Würfels H untereinander. *Man wird also,* da unter den Gruppen zusammengehöriger acht Punkte φ viermal, $\frac{f}{\varphi}$ zweimal zählt, *H in der Form darstellen können:*

$$H = \varkappa\varphi^4 + \varkappa'\cdot\left(\frac{f}{\varphi}\right)^2.$$

Betrachtet man hier φ^2 als Unbekannte, so ist dies eine Gleichung dritten Grades der gesuchten Art. Dieselbe enthält, wie alle weiterhin aufzu-

[18]) Genau gerade so beweist man, daß

$$H_x^6 H_y^2 = 0, \qquad H_x^5 H_y^3 = 0$$

dieselbe Ecke bez. zweimal und dreimal zählend vorstellen. Analoges leisten die Polaren

$$T_x^{11} T_y = 0, \qquad T_x^{10} T_y^2 = 0, \qquad T_x^9 T_y^3 = 0$$

der Kovariante $T = T_x^{12}$. Andererseits repräsentieren, für $f = a_x^6$, die Polaren:

$$a_x^4 a_y^2 = 0, \qquad a_x^3 a_y^3 = 0, \qquad a_x^2 a_y^4 = 0,$$

unter x eine Oktaederecke verstanden, das Produkt dieser Ecke in die einmal, zweimal, dreimal gezählte gegenüberliegende.

[19]) Man verifiziert solche Angaben immer sofort an einem Modell.

stellenden Resolventen, noch die Veränderlichen x_1, x_2 als willkürliche Parameter. Erteilt man ihnen feste Werte, so erfährt man durch Auflösung der Gleichung den numerischen Wert, welchen φ^2 dementsprechend erhält. Will man φ^2 als Funktion der x kennen, so hat man dieselbe Berechnung für zwei weitere Wertepaare durchzuführen, die man, um neue Irrationalitäten zu vermeiden, dem ursprünglichen benachbart wählen kann.

Zur wirklichen Herstellung der kubischen Gleichung gehen wir auf die kanonische Form zurück:

$$f = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4).$$

Eins der Punktepaare φ ist dann:

$$\varphi = 2 x_1 x_2,$$

wo der absolute Wert so genommen ist, daß die Determinante von φ gleich -1. Dann folgt aus dem oben angegebenen Werte von H:

$$H = -\frac{1}{18}\cdot\varphi^4 - \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{f}{\varphi}\right)^2,$$

und setzt man jetzt etwa

$$p = \frac{\varphi^2}{\sqrt[3]{f^2}},$$

so kommt die Gleichung:

$$p^3 + 18\frac{H}{\sqrt[3]{f^4}}\cdot p + 4 = 0.$$

Von ihr gehen wir sofort zu derjenigen über, die für ein beliebiges Koordinatensystem gilt, in dem wir durch Einführen der Invariante A des Oktaeders, die für die kanonische Form den Wert $\frac{1}{3}$ hat, und der Determinante Δ der quadratischen Form φ, für welche wir zunächst den Wert -1 annahmen, homogen machen. So erhält man:

Bedeutet φ die durch ein Paar gegenüberstehender Ecken des Oktaeders vorgestellte quadratische Form, Δ deren Determinante, und setzt man:

$$p = -\sqrt[3]{\frac{3A}{f^2}}\cdot\frac{\varphi^2}{\Delta},$$

so hat man:

$$p^3 + 18\frac{H}{\sqrt[3]{3Af^4}}\cdot p + 4 = 0.$$

Aus dieser Gleichung findet man, indem man noch zur Vereinfachung des Resultats von der zwischen f, H, T bestehenden Relation Gebrauch macht:

$$p = \sqrt[3]{2\cdot\frac{f^2\sqrt{-A}+6T}{f^2\sqrt{-A}}} + \sqrt[3]{2\cdot\frac{f^2\sqrt{-A}-6T}{f^2\sqrt{-A}}},$$

ein Resultat, welches mit dem bei Clebsch, S. 451 auf anderem Wege abgeleiteten übereinstimmt.

§ 8.

Analoge Untersuchungen beim Ikosaeder[20]).

Wie beim Oktaeder wird man auch beim Ikosaeder jede Ecke rational durch die gegenüberliegende darstellen können und also schließen, daß die Zerspaltung des Ikosaeders f in die sechs Paare gegenüberstehender Punkte von einer Gleichung sechsten Grades abhängt. Sei φ ein solches Paar. Unter den 60 Bewegungen, welche f mit sich zur Deckung bringen, finden sich 10, welche φ ungeändert lassen. Dieselben vertauschen die 10 Punkte $\frac{f}{\varphi}$ alle untereinander. Andererseits verteilen sich mit Bezug auf sie die 20 Punkte von H in zwei Gruppen von je 10. Man wird also H als Produkt zweier Faktoren darstellen können, die aus φ^5 und $\frac{f}{\varphi}$ linear zusammengesetzt sind, d. h. man wird setzen können:

$$H = \varkappa \varphi^{10} + \lambda \varphi^4 \cdot f + \mu \frac{f^2}{\varphi^2}.$$

Betrachtet man hier φ^2 als Unbekannte, so hat man eine Gleichung sechsten Grades der geforderten Beschaffenheit.

Zur fertigen Herstellung derselben gehen wir zu der kanonischen Form zurück:

$$f = x_1 x_2 (x_1^{10} + 11 x_1^5 x_2^5 - x_2^{10}).$$

Eins der Paare φ, mit der Determinante -1 genommen, ist dann etwa

$$\varphi = 2 x_1 x_2.$$

Sodann entnimmt man dem oben angegebenen Werte von H:

$$12^2 \cdot H = -\frac{5^5}{2^{16}} \cdot \varphi^{10} + \frac{5^3}{2^3} \cdot \varphi^4 \cdot f - \frac{4 f^2}{\varphi^2},$$

und setzt man jetzt:

$$\pi = -\frac{5 \varphi^2}{4 \sqrt[3]{f}},$$

so kommt:

$$\pi^6 + 10 \pi^3 - \frac{12^2 H}{\sqrt[3]{f^5}} \cdot \pi + 5 = 0.$$

Um zu einem beliebigen Koordinatensysteme überzugehen, hat man die Determinante Δ von φ, die gleich -1 genommen wurde, und die Invariante B von f, welche für die kanonische Form gleich $-\frac{5}{84}$ ist, einzuführen.

[20]) Vgl. die unter dem Titel „Über eine Gleichung zwölften Grades" in den Erlanger Sitzungsberichten vom 12. Juli 1875 erschienene vorläufige Mitteilung.

Man setze also:

$$\pi = \frac{5}{4} \sqrt[3]{-\frac{84}{5} \cdot \frac{B}{f} \cdot \frac{\varphi^2}{\Delta}},$$

so kommt:

$$\pi^6 + 10 \pi^3 - \frac{720 H}{\sqrt[3]{-2100 B f^5}} \cdot \pi + 5 = 0,$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Man kann aber ferner beim Ikosaeder *eine Resolvente fünften Grades* aufstellen, welche aus folgendem geometrischem Probleme erwächst: Die 30 Ecken der Kovariante T verteilen sich, wie wiederholt hervorgehoben, auf fünf reguläre Oktaeder; man soll diese Oktaeder trennen.

Sei t eins derselben. Dasselbe geht durch zwölf der 60 Bewegungen, welche das Ikosaeder f mit sich zur Deckung bringen, in sich über. Bei diesen zwölf Bewegungen vertauschen sich die Ecken von f untereinander. Andererseits spalten sich die 24 Punkte $\frac{T}{t}$ in zwei Gruppen von je zwölf zusammengehörigen. Man wird also setzen können:

$$\frac{T}{t} = \varkappa t^4 + \lambda t^2 f + \mu f^2,$$

und dies ist, wenn man t als Unbekannte betrachtet, eine Gleichung fünften Grades der verlangten Art.

Die Ausrechnung gestaltet sich mit Hilfe der kanonischen Form folgendermaßen. Man findet (vgl. den folgenden Paragraph), daß eins der t gleich gesetzt werden kann:

$$t = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^4 + 2 x_1^3 x_2 - 6 x_1^2 x_2^2 - 2 x_1 x_2^3 + x_2^4).$$

Die zugehörige Invariante A (die nun als a bezeichnet sein soll) hat den Wert $\frac{20}{3}$. Man findet weiter

$$\frac{12\, T}{t} = t^4 - 10 t^2 f + 45 f^2,$$

und setzt man jetzt

$$p = \frac{t}{\sqrt{f}},$$

so kommt:

$$p^5 - 10 p^3 + 45 p = \frac{12\, T}{\sqrt{f^5}}.$$

Indem man jetzt zu allgemeiner Koordinatenbestimmung übergeht, hat man folgendes Resultat:

Sei t eins der fünf Oktaeder, a die zugehörige Invariante, so setze man:

$$p = 4 \sqrt{\frac{7 B}{-a f}} \cdot t.$$

Dann besteht die Gleichung:

$$p^5 - 10\,p^3 + 45\,p = \frac{30\,T}{\sqrt{-105\,B f^5}}.$$

§ 9.

Die irrationalen Kovarianten des Ikosaeders in kanonischer Form.

Des weiteren Vergleichs wegen sollen hier die vorstehend benutzten verschiedenen irrationalen Kovarianten des Ikosaeders, für die kanonische Form berechnet, zusammengestellt werden.

Die *zwölf Wurzeln der Gleichung* $f = 0$, für

$$f = x_1^{11} x_2 + 11\,x_1^6 x_2^6 - x_1 x_2^{11},$$

erhalten die folgenden Koordinaten:

$$\frac{x_1}{x_2} = 0, \quad \infty, \quad a\,\varepsilon^\nu, \quad -\frac{1}{a}\,\varepsilon^\nu,$$

wo

$$\varepsilon = e^{\frac{2 i \pi}{5}}, \quad a = \varepsilon + \varepsilon^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Hieraus beiläufig das Resultat: Die Doppelverhältnisse, welche man aus den Ecken des Ikosaeders bilden kann, sind rationale Funktionen von ε. Man kann auch sagen: nach Adjunktion von ε drücken sich die zwölf Wurzeln einer Ikosaedergleichung durch drei beliebige derselben rational aus.

Die *sechs Punktepaare* φ, welche entstehen, indem man die gegenüberliegenden Ecken des Ikosaeders zusammenfaßt, sollen als $\varphi_\infty, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_4$ bezeichnet sein; φ_∞ umfasse die Wurzeln $0, \infty$, φ_ν die beiden $a\,\varepsilon^\nu$, $-\frac{1}{a}\,\varepsilon^\nu$. Wir wählen die φ mit übrigens willkürlichem Vorzeichen so, daß die zugehörige Determinante gleich -1. Dann kommt:

$$\varphi_\infty = 2\,x_1 x_2,$$
$$\varphi_\nu = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\varepsilon^{-\nu} x_1^2 + x_1 x_2 - \varepsilon^\nu x_2^2\right).$$

Um ferner die *Oktaeder* t zu berechnen, seien ψ, χ irgend zwei der φ. Dann stellen, behaupte ich,

$$\psi + \chi = 0, \quad \psi - \chi = 0, \quad [\psi, \chi] = 0 \ \text{(Funktionaldeterminante)}$$

drei Punktepaare von T dar, die zusammen ein t bilden. Für jedes t erhält man so drei Darstellungen.

Die beiden Punktepaare $\psi \pm \chi = 0$ werden nämlich (auf der Kugel) offenbar von den beiden Halbierungslinien der Winkel ausgeschnitten, welche die Achsen der ψ und χ miteinander bilden. Denn sie gehören erstens

mit ψ und χ zu derselben Involution und gehen zweitens durch diejenigen linearen Transformationen in sich über, welche ψ und χ miteinander vertauschen. — Die Funktionaldeterminante $[\psi, \chi]$ dagegen stellt diejenige Form dar, welche gleichzeitig zu ψ und χ harmonisch ist und also ausgeschnitten wird von dem gemeinsamen Perpendikel der Achsen von ψ und χ.

Nennt man also die fünf Oktaeder in verständlicher Reihenfolge $t_0, t_1, \ldots, t_4$, so ist t_ν bis auf einen Faktor gleich

$$(\varphi_\infty + \varphi_\nu)(\varphi_\infty - \varphi_\nu)[\varphi_\infty, \varphi_\nu].$$

Den Faktor wählen wir, in Übereinstimmung mit dem vorangehenden Paragraphen, so, daß die zugehörige Invariante a_ν gleich $\frac{20}{3}$ wird. Man findet ihn (bei willkürlich gewähltem Vorzeichen) $= \frac{\sqrt{5}}{8}$, also

$$\begin{aligned} t_\nu &= \frac{\sqrt{5}}{8}(\varphi_\infty + \varphi_\nu)(\varphi_\infty - \varphi_\nu)[\varphi_\infty, \varphi_\nu] \\ &= \varepsilon^{2\nu}(x_1^6 - 2\,x_1 x_2^5) + \varepsilon^{-2\nu}(x_2^6 + 2\,x_1^5 x_2) \\ &\qquad - \varepsilon^\nu \cdot 5\,x_1^2 x_2^4 - \varepsilon^{-\nu} \cdot 5\,x_1^4 x_2^2, \end{aligned}$$

womit zugleich der oben für t_0 benutzte Wert verifiziert ist[21]).

Man kann auch schreiben:

$$\begin{aligned} t_\nu &= \frac{5\sqrt{5}}{8(\varepsilon^4 - \varepsilon)(\varepsilon^3 + \varepsilon^2)}(\varphi_\infty + \varphi_\nu)(\varphi_{\nu+1} - \varphi_{\nu-1})(\varphi_{\nu+2} + \varphi_{\nu-2}) \\ &= \frac{-5\sqrt{5}}{8(\varepsilon^3 - \varepsilon^2)(\varepsilon^4 + \varepsilon)}(\varphi_\infty - \varphi_\nu)(\varphi_{\nu+1} + \varphi_{\nu-1})(\varphi_{\nu+2} - \varphi_{\nu-2}) \\ &= \frac{5 i \sqrt[4]{5}}{8}(\varphi_\infty^2 - \varphi_\nu^2)^{\frac{1}{2}}(\varphi_{\nu+1}^2 - \varphi_{\nu-1}^2)^{\frac{1}{2}}(\varphi_{\nu+2}^2 - \varphi_{\nu-2}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Infolgedessen hat man zwischen der entsprechenden Wurzel p_ν der Gleichung fünften Grades $\left(a = \frac{20}{3}\right)$:

$$p_\nu = 2\sqrt{\frac{-21\,B}{5\,f}} \cdot t_\nu$$

und den sechs Wurzeln $\pi_\infty, \pi_0, \ldots, \pi_\nu$ der Gleichung sechsten Grades $(\Delta = -1)$:

[21]) Der Vollständigkeit wegen sei noch erwähnt, daß die Punktepaare des zugehörigen Pentagondodekaeders dargestellt sind durch:

$$\varepsilon^{-\nu} x_1^2 - \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\,x_1 x_2 - \varepsilon^{+\nu} x_2^2,$$

und daß dieselben proportional sind zu den fünften Überschiebungen zweier Oktaeder t. (Das letztere schließt man wieder aus dem Umstande, daß es drei Bewegungen gibt, welche gleichzeitig zwei Oktaeder t und ein Punktepaar des Pentagondodekaeders in sich überführen.)

$$\pi = -\frac{5}{4}\sqrt[3]{-\frac{84}{5}\cdot\frac{B}{f}}\cdot\varphi^2$$

folgende Beziehung:

$$p_\nu = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}(\pi_\infty - \pi_\nu)^{\frac{1}{2}}(\pi_{\nu+1} - \pi_{\nu-1})^{\frac{1}{2}}(\pi_{\nu+2} - \pi_{\nu-2})^{\frac{1}{2}}.$$

§ 10.

Beziehungen zu anderweitigen Untersuchungen.

Die Resolventen sechsten und fünften Grades, sowie insbesondere die Formeln des letzten Paragraphen stimmen, wie bereits in der Einleitung gesagt, genau überein mit Formeln, welche bei Untersuchungen über die Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades von Brioschi, Hermite und Kronecker gegeben worden sind. Es sei wegen derselben insbesondere auf den Aufsatz von Joubert: Sur l'équation du sixième degré (Comptes Rendus 1867, 1, Bd. 64, S. 1237—1240) verwiesen, insofern dort einige Unexaktheiten, welche in Brioschis bez. Formeln vorkommen, verbessert sind. Neu ist nur die Bedeutung, unter der hier diese Formeln auftreten, und die damit zusammenhängende geometrische Herleitung derselben. Andererseits entnimmt man den genannten Untersuchungen, daß die Gleichung sechsten Grades, welche die Punktepaare des Ikosaeders trennt, und also die Ikosaedergleichung selbst, durch elliptische Funktionen gelöst werden kann, was hier indes nicht weiter verfolgt werden soll. —

Zum Schlusse werde auch noch die Galoissche Gruppe der Ikosaedergleichung bestimmt. Den linearen Transformationen entsprechend, welche die Gleichung in sich überführen, sind jedesmal 60 der Doppelverhältnisse, welche man aus ihren Wurzeln bilden kann, einander gleich, die Differenzen dieser Doppelverhältnisse also Null und somit rational bekannt. Diese Doppelverhältnisgleichheiten bleiben, wie eine nähere Überlegung zeigt, bei folgenden und nur bei folgenden Vertauschungen der Wurzeln ungeändert:

1. Bei denjenigen 60 Vertauschungen, welche einer linearen Transformation des Ikosaeders in sich entsprechen, und
2. [bei denjenigen Vertauschungen, die sich ergeben, wenn man die Einheitswurzel ε durch ε^2 oder ε^3 oder ε^4 ersetzt. — Dabei kann die Ersetzung von ε durch ε^4 in einfachster Weise dadurch geometrisch gedeutet werden, daß man jeden Ikosaedereckpunkt mit seinem gegenüberliegenden vertauscht. —

Die Galoissche Gruppe umfaßt also 240 Substitutionen. Sie kann auf 60 Substitutionen eingeschränkt werden, wenn man den numerischen Wert des Doppelverhältnisses von vier Wurzeln, die nicht in einer Ebene

liegen, adjungiert][22]. Alle diese Doppelverhältnisse aber stellen sich nach einer im vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung als rationale Funktionen einer fünften Einheitswurzel ε dar, und *also ist die Adjunktion von ε nötig und hinreichend, um die Gruppe auf 60 Substitutionen zu reduzieren.*

Um die Struktur der so reduzierten Gruppe zu charakterisieren, genügt es, darauf hinzuweisen, daß sich bei den 60 Bewegungen, welche das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, die fünf Oktaeder t untereinander vertauschen. Es entsprechen die Substitutionen der Gruppe demnach den Vertauschungen von fünf Elementen, welche deren Differenzenprodukt ungeändert lassen.

München, im Juni 1875.

[22]) [Zwecks Richtigstellung beim Wiederabdruck im einzelnen geändert.]

LII. Über [algebraisch integrierbare] lineare Differentialgleichungen.

(Erster Aufsatz.)

[Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen vom 26. Juni 1876; abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 11.]

Der Sozietät erlaube ich mir im folgenden eine Methode vorzulegen, *die zu entscheiden gestattet, ob eine gegebene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten durchaus algebraische Integrale besitzt.* Meine Methode geht darauf aus, alle derartigen Differentialgleichungen wirklich aufzustellen, und man hat daher, wenn es sich um die Untersuchung einer gegebenen Differentialgleichung handelt, nur eine Koeffizientenvergleichung zu veranstalten, deren Ausführung freilich Gegenstand einer besonderen algebraischen Untersuchung sein muß, die ich noch nicht beendet habe.

Sei

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + p_1 \cdot \frac{d y}{d x} + p_0 \cdot y = 0$$

eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. So genügt bekanntlich[1]) der Quotient zweier unabhängiger Partikularlösungen y_1, y_2:

$$\eta = \frac{y_1}{y_2}$$

der folgenden Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$[\eta] = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2 p_0 - \frac{1}{2} p_1{}^2 - \frac{d p_1}{d x} = P.$$

Diese Differentialgleichung hat die Eigenschaft, daß ihr allgemeines

[1]) Vgl. die auch weiterhin benutzte Arbeit von Schwarz: Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaußsche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes ist. Crelles Journal, Bd. 75 (1872/73), S. 292—335 [= Ges. Abhandl., Bd. 2, S. 211—259].

Integral eine gebrochene lineare Funktion eines beliebigen Partikularintegrals ist:

$$\eta = \frac{\alpha \eta_0 + \beta}{\gamma \eta_0 + \delta};$$

sie wird ferner (selbstverständlicherweise) durchaus algebraische Integrale besitzen, wenn die Differentialgleichung zweiter Ordnung diese Eigenschaft hatte, und auch den umgekehrten Schluß kann man machen, sofern

$$e^{\int p_1 d x}$$

eine algebraische Funktion ist. Dementsprechend soll weiterhin nur von dieser Differentialgleichung dritter Ordnung

$$[\eta] = P$$

die Rede sein, wo P, entsprechend der gleichen Voraussetzung, die wir schon in der Einleitung hinsichtlich p_0 und p_1 machten, eine rationale Funktion von x bezeichnet.

Es sei η_0 ein partikuläres Integral dieser Gleichung. Läßt man dann x von einem beliebigen Werte beginnend einen geschlossenen Weg beschreiben, so wird η_0 entweder unverändert wieder erscheinen oder in eine lineare Funktion

$$\eta_1 = \frac{\alpha \eta_0 + \beta}{\gamma \eta_0 + \delta}$$

verwandelt sein, wo die Verhältnisse $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nur durch den Weg, nicht durch den Anfangswert von x oder durch das partikuläre Integral η_0 bedingt sind. Zugleich muß, wenn η_0 Zweig einer algebraischen Funktion war, η_1 ein Zweig derselben algebraischen Funktion sein, da η_1 in η_0 kontinuierlich übergegangen ist. Ich will nun mit

$$\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$$

die Gesamtheit der Werte bezeichnen, die auf diese Weise aus η_0 entstehen. So bilde man die algebraische Gleichung:

$$0 = (\eta - \eta_0)(\eta - \eta_1) \ldots (\eta - \eta_n).$$

Sie besitzt zwei wesentliche Eigenschaften, die sogleich gestatten werden, alle derartige Gleichungen der Art nach anzuschreiben. Erstens sind ihre Koeffizienten, als symmetrische Funktionen aller Werte, die η_0 annehmen kann, wenn sich x in der komplexen Ebene bewegt, rationale Funktionen von x. Zweitens hat die Gleichung die Eigenschaft, durch gewisse lineare Transformation von η ungeändert zu bleiben, und zwar sind diese Transformationen in einer solchen Zahl vorhanden, daß durch sie jede Wurzel η_i in jede andere η_k verwandelt werden kann.

Nun aber habe ich mich früher, wie ich der Sozietät bei verschiedenen Gelegenheiten mitteilte [in den Sitzungen vom 13. Juli und 14. Dez. 1874, sowie vom 12. Juli 1875] und im vorigen Jahre in einer größeren Abhandlung (in den Math. Annalen, Bd. 9 (1875/76), [vorstehend abgedruckt als Abh. LI]) ausführte, mit der Bestimmung aller Gleichungen beschäftigt, welche die letztangeführte Eigenschaft besitzen. Sie sind, von linearen Transformationen abgesehen, denen man das Argument η unterwerfen mag, alle in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Der Buchstabe R bedeutet einen willkürlichen Parameter; außerdem sind die zugesetzten Zahlenkoeffizienten so gewählt, daß bei dem später anzugebenden Schlußresultate möglichst einfache Glieder entstehen:

$$(1) \qquad \eta^n = R,$$

$$(2) \qquad \eta^n + \eta^{-n} = 4R - 2, \quad (n \text{ eine beliebige ganze Zahl}),$$

$$(3) \qquad Rjf^3 + 3H^3 = 0,$$

f eine äquianharmonische biquadratische Form, H die zugehörige Hessesche, j die Invariante dritten Grades;

$$(4) \qquad RAf^4 + 18H^3 = 0,$$

f die linke Seite einer Oktaedergleichung, A die Invariante zweiten Grades (vgl. meine eben genannte Annalenarbeit oder auch Clebsch, Binäre Formen, S. 447 ff.);

$$(5) \qquad 7RBf^5 + 720H^3 = 0;$$

f die linke Seite einer Ikosaedergleichung, B die Invariante ersten Grades.

Die Integrale unserer Differentialgleichung müssen daher, unter R eine geeignete rationale Funktion von x verstanden, durch eine der Gleichungen (1) *bis* (5) *dargestellt sein.*

Ich behaupte aber ferner, daß für R jede rationale Funktion von x eingesetzt werden darf; die sofort mitzuteilende Aufstellung der zugehörigen Differentialgleichung zeigt es.

Für (1) nämlich berechnet man ohne weiteres die Differentialgleichung:

$$(\mathrm{I}) \qquad [\eta] = [R] + \frac{n^2-1}{2n^2}\left(\frac{R'}{R}\right)^2.$$

Anderseits könnte man auch (was ich wirklich ausführte) für (2) bis (5) die zugehörigen Differentialgleichungen berechnen; es sind dazu nur einige wenige Sätze über das Formensystem der bez. Grundformen f erforderlich. Aber man kann diese Rechnung sparen, wenn man die Resultate verwertet, die Schwarz in der bereits zitierten Abhandlung gewonnen hat. Schwarz betrachtet insonderheit die Differentialgleichung

$$[\eta] = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-x)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2x(1-x)}$$

und sucht diejenigen Fälle, in denen sie algebraische Integrale besitzt. Dies findet vor allem dann statt, wenn λ, μ, ν bezüglich gleich genommen werden:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}, & \frac{1}{n}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{2} \end{array}$$

und zwar sind die dann auftretenden Integralgleichungen geradezu durch unsere Gleichungen (2) bis (5) gegeben, sofern man in ihnen $R = x$ setzt. Daher findet man umgekehrt die von uns geforderten Differentialgleichungen, wenn man in die bei Schwarz betrachtete Differentialgleichung $R(x)$ statt x einführt. Sie geht dadurch über in:

$$(\mathrm{II})-(\mathrm{V}) \quad [\eta] = [R] + R'^2 \left\{ \frac{1-\lambda^2}{2R^2} + \frac{1-\nu^2}{2(1-R)^2} - \frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2R(1-R)} \right\}.$$

Schreibt man hier für λ, μ, ν bez. die angegebenen Werte, so hat man die Differentialgleichungen (II) *bis* (V), *welche zu den Integralgleichungen* (2) *bis* (5) *gehören.*

Hiermit ist das Ziel erreicht, welches wir zu Eingang der Arbeit bezeichneten; es bleibt nur das ebenfalls schon berührte Transformationsproblem: Wann kann eine rationale Funktion $P(x)$ umgesetzt werden in eins der bei den Gleichungen (I) bis (V) auf der rechten Seite auftretenden Aggregate, in denen R eine rationale Funktion von x bedeutet? Und wenn das der Fall ist, wie bestimmt man R?

Ich muß zum Schluß dieser Mitteilung noch einige Bemerkungen zufügen über eine Arbeit von Fuchs[2]), die den hier vorliegenden Gegenstand ebenfalls behandelt, und deren Studium, zu dem ich neuerdings veranlaßt wurde[3]), mich eben zu der einfachen Methode hinleitete, welche ich auseinandersetzte. Fuchs gibt eine, wie mir scheint, viel weitläufigere Lösung. Ohne auf dieselbe hier näher eingehen zu wollen, bemerke ich nur, daß die von ihm so genannten *Primformen* identisch sind mit denjenigen binären Formen, welche lineare Transformationen in sich besitzen, und daß daher die Liste der Primformen niedersten Grades, welche er

[2]) Über diejenigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Crelles Journal, Bd. 81, (1876) S. 97—142; vgl. Gött. Nachrichten 1875, vom 7. August und 6. November, S. 568—581, 612—613.

[3]) [Die Redaktion der Fortschritte der Mathematik überwies mir nämlich die betreffenden Arbeiten zum Referat; mein dadurch entstehender Bericht ist abgedruckt in Bd. 7 der Fortschritte, S. 172—173 (1877). K.]

a. a. O., S. 126 aufstellt, noch überflüssige Formen enthält. Sie sollte nur umfassen:

die allgemeine biquadratische Form,
die äquianharmonische biquadratische Form,
die linke Seite der Oktaedergleichung ($n = 6$),
die linke Seite der Ikosaedergleichung ($n = 12$);

die erste der beiden aufgeführten Formen sechsten Grades, sowie die Form achten und die Form zehnten Grades existieren nicht[4]).

München, Juni 1876.

[4]) Auch ist es a. a. O. überflüssig, die allgemeine biquadratische Form mit aufzuzählen, da sie (irrationale) quadratische Kovarianten hat, welche durch die nämlichen linearen Transformationen in sich übergehen, wie die Grundform. Dagegen ist die Reduktion der Primformenzahl, wie sie Herr C. Jordan (Comptes Rendus, 13. März 1876, Bd. 82) und Herr Pepin angeben (ebenda 5. Juni), nicht statthaft, was hinsichtlich der Behauptungen von Pepin bereits Herr Fuchs gezeigt hat (ebenda 26. Juni, 3. Juli). Nach C. Jordan würde der Fall $n = 12$ nicht existieren. [Zusatz beim Abdruck des Textes in den Math. Annalen, Bd. 11. (Nov. 1876).] — [C. Jordan und Fuchs haben in Crelles Journal, Bd. 84 (1878) bzw. Bd. 85 (1878) die Richtigkeit meiner Angaben bestätigt. — Übrigens findet sich eine neue, sehr einfache, funktionentheoretische Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Variabeln im Ikosaederbuch (1884) auf S. 115–121. K.]

LIII. Über [algebraisch integrierbare] lineare Differentialgleichungen.

(Zweiter Aufsatz.)

[Math. Annalen, Bd. 12 (1877).]

Die folgenden Erörterungen sind bestimmt, die unter gleichem Titel in den Math. Annalen, Bd. 11 (1876/77) erschienene Note [vgl. die vorstehende Abh. LII] in einigen Punkten zu vervollständigen.

1. *Endliche Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen.* Die endlichen Gruppen, welche man aus linearen Substitutionen einer Veränderlichen η bilden kann, zerfallen bekanntlich in fünf Klassen, wegen deren Aufzählung und Charakterisierung ich am besten auf die inzwischen erschienene Gordansche Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 12 (1877), S. 23–46, verweise. Ich nenne diese Gruppen (siehe meine Arbeit: „Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst", in den Math. Annalen, Bd. 9 (1875) [vgl. die oben abgedruckte Abh. LI]) die *Kreisteilungsgruppe*, die *Diedergruppe*, die Gruppen des (regulären) *Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders.* Die beiden erstgenannten Gruppen enthalten noch unendlich viele Arten, entsprechend dem Werte, den man der in ihnen vorkommenden, positiven ganzen Zahl n erteilen will. Dem Werte $n = 1$ entspricht als Kreisteilungsgruppe diejenige, welche allein aus der identischen Substitution besteht. Bei den Diedergruppen hat man den Wert $n = 1$ auszulassen.

Mit jeder dieser Gruppen ist nun eine rationale Funktion $\Omega(\eta)$, welche ich die *zugehörige* nennen will, wesentlich verknüpft — wobei indes gleich hier hervorgehoben sei, daß Ω nicht völlig bestimmt ist, sondern statt Ω ein beliebiges $\frac{\alpha\Omega+\beta}{\gamma\Omega+\delta}$ genommen werden kann. — Dieses Ω hat, gleich anderen rationalen Funktionen von η, die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn auf η die Substitutionen der Gruppe angewandt werden, vor allen Dingen aber diese: *daß jede rationale Funktion von* η, *welche bei den Substitutionen ungeändert bleibt, eine rationale Funktion von* Ω *ist*[1]).

Stellt man die fraglichen Gruppen in den kanonischen Formen auf, welche Gordan a. a. O. angibt und mit I bis V numeriert, so kann man für Ω bez. folgende Ausdrücke wählen:

$$\eta^n, \tag{1}$$

$$\eta^n + \eta^{-n}, \tag{2}$$

$$\left(\frac{1-2\sqrt{-3}\,\eta^2-\eta^4}{1+2\sqrt{-3}\,\eta^2-\eta^4}\right)^3, \tag{3}$$

$$\frac{(1+14\,\eta^4+\eta^8)^3}{108\,\eta^4(1-\eta^4)^4}, \tag{4}$$

$$\frac{(-(\eta^{20}+1)+228\,(\eta^{15}-\eta^5)-494\,\eta^{10})^3}{1728\,\eta^5(\eta^{10}+11\,\eta^5-1)^5}, \tag{5}$$

die speziell ich fortan als *Kreisteilungsfunktion ... Ikosaederfunktion* benennen will. Es stimmen die Ausdrücke (3) ... (5) mit denjenigen überein, die Schwarz in der Arbeit über die hypergeometrische Reihe (Crelles Journal, Bd. 75 (1872/73), S. 292 ff. [= Ges. math. Abh., Bd. II, S. 211 ff.]) dem Studium des Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders zugrunde legt. In meiner vorigen Note habe ich statt ihrer allgemeine Ausdrücke geschrieben, welche sich auf die Formensysteme des Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders beziehen; ich kehre hier zu den kanonischen Ausdrücken zurück, um die mitzuteilenden Formeln möglichst unmittelbar verständlich zu machen. Nur beim Ikosaeder werde ich gelegentlich $\eta(\eta^{10}+11\eta^5-1)$ [homogen gemacht] durch f, die zugehörige Hessesche mit H, die Funktionaldeterminante (f, H) mit T bezeichnen. Man hat dann:

$$T^2 = 12 f^5 - 12^4 H^3$$

und der Ausdruck (5) nimmt die Gestalt an:

$$1728\,\frac{H^3}{f^5}.$$

2. *Beziehungen zwischen den fünferlei Gruppen. — Wenn zwei endliche Gruppen a, b in der Beziehung stehen, daß a in b als Untergruppe*

[1]) Wegen der Beweise vgl. meine Arbeit in Bd. 9 der Math. Annalen [= Abh. LI]. — Es ist interessant, die *doppeltperiodischen* Funktionen einer Variabeln η zu vergleichen, die doch auch bei einer, allerdings *unendlichen* Gruppe linearer Substitutionen ungeändert bleiben und insofern den im Texte betrachteten Funktionen analog sind. Da es keine doppeltperiodische Funktion gibt, die einen vorgeschriebenen Wert im Periodenparallelogramm nur *einmal* annimmt, so gelingt es nicht, wie im Texte, alle in Betracht kommenden Funktionen durch eine (ausgezeichnete) rational auszudrücken, sondern erst durch zwei.

enthalten ist, so ist Ω_b *durch* Ω_a *rational ausdrückbar.* — Dieses folgt sofort, da Ω_b eine rationale Funktion von η ist, welche bei den Substitutionen von b und also auch bei den Substitutionen von a ungeändert bleibt. Auch kann man den Satz umkehren.

Die Ikosaedergruppe z. B. enthält bekanntlich sechs verschiedene Untergruppen, welche dem Kreisteilungstypus für $n = 5$ angehören, und von diesen erscheint eine selbst in kanonischer Form, wenn man die Ikosaedergruppe kanonisch dargestellt hat. Daher ist die Ikosaederfunktion, so wie sie eben angegeben wurde, rational in η^5. — Oder besser: Die Ikosaedergruppe enthält als Untergruppen fünf vom Tetraedertypus. Bei einer solchen Tetraedergruppe bleibt immer das Ikosaeder f und, doppeltzählend, ein gewisses Oktaeder t ungeändert. Man kann daher $\frac{t^2}{f}$ als zugehörige Funktion wählen, wenn es auch, auf die kanonische Form des Tetraeders transformiert, nicht mit der eben unter (3) angegebenen Tetraederfunktion übereinstimmt, sondern eine lineare Funktion derselben ist. Dann muß die Ikosaederfunktion rational in $\frac{t^2}{f}$ sein, und in der Tat hat man:

$$144\,\frac{T^2}{f^5} = 1728\left(1 - 1728\,\frac{H^3}{f^5}\right) = \frac{t^2}{f}\left(\frac{t^4}{f^2} - 10\,\frac{t^2}{f} + 45\right)^2,$$

wie ich in etwas anderer Gedankenverbindung in meiner Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 9 [vgl. Abh. LI, S. 297] angab. Ich werde auf diese Formel noch später zurückkommen.

3. *Die fünferlei Integralgleichungen.* Die Integralgleichungen, wie ich sie in der vorigen Note [Abh. LII, S. 304] unter (1) ... (5) angab, erwachsen, wenn man die fünf jetzt mit (1) ... (5) bezeichneten Funktionen gleichsetzt rationalen Funktionen einer Veränderlichen x, die ich, im Anschlusse an die vorige Note, in den Fällen (1), (3), (4), (5) einfach mit $R(x)$ bezeichne, während ich sie im Falle (2) mit $4\,R(x) - 2$ benenne. Die Bemerkungen der vorangehenden Nummer zeigen, daß diese Integralgleichungen gewisse Zusammenhänge aufweisen. So oft z. B. η^5 oder die (modifizierte) Tetraederfunktion $\frac{t^2}{f}$ gleich gesetzt wird einer rationalen Funktion von x, ist auch die Ikosaederfunktion einer rationalen Funktion gleich. Dieselbe Gleichung zwischen η und x tritt also in verschiedenen Formen auf.

Es ist wünschenswert, einer hieraus hervorgehenden Unbestimmtheit des Ausdrucks dadurch entgegenzutreten, *daß für die Integralgleichungen ein für alle mal die Reihenfolge* (1), (2), (3), (4), (5) *festgesetzt wird, und nun jede in Betracht kommende Relation zwischen* η *und* x *der ersten Kategorie, bei welcher sie auftritt, zugerechnet wird.* Die analoge

Festsetzung wird man bei den Gleichungen (1), (2) noch einmal treffen mit Bezug auf den Wert der Zahl n. — Dies vorausgesetzt, sind die Gleichungen zwischen η und x *irreduzibel.*

4. *Einfluß der Integrationskonstanten.* Die allgemeinen Integralgleichungen erwachsen aus den eben angegebenen partikulären, indem statt η beliebig $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ gesetzt wird. Nimmt man nun zunächst den Fall (1) und $n=1$, also:

$$\eta = R(x),$$

so kann man statt:

$$\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta} = R(x),$$

unter a, b, c, d irgendwelche Größen verstanden, auch schreiben

$$\frac{\alpha'\eta+\beta'}{\gamma'\eta+\delta'} = \frac{aR+b}{cR+d}$$

Auf diese Weise ergibt sich: *Die rationale Funktion von x, welche in der Integralgleichung auftritt, ist durch die Differentialgleichung in den Fällen* (2), (3), (4), (5) *vollkommen bestimmt, nur im Falle* (1) *enthält sie, wenn $n=1$ ist, drei, und, für die übrigen Werte von n, eine willkürliche Konstante.* Dabei ist, wie im folgenden immer, vorausgesetzt, daß man an der Verabredung der vorigen Nummer festhält.

5. *Die zugrunde liegenden Differentialgleichungen.* Setzt man in die Integralgleichungen (1) ... (5) statt $R(x)$ einfach x, so entstehen die zugehörigen Differentialgleichungen alle aus der bei Schwarz (Crelles Journal, Bd. 75) diskutierten:

$$[\eta] = \frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{x^2} + \frac{\frac{1-\nu^2}{2}}{(1-x)^2} - \frac{\frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2}}{x(1-x)},$$

indem man für λ, μ, ν bezüglich einträgt:

	λ	μ	ν
I	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	1
II	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2}$
III	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
IV	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
V	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

Ich will eine solche Gleichung eine *Elementargleichung* nennen mit den singulären Punkten $0, \infty, 1$ und den zugehörigen Exponenten λ, μ, ν. Es ist mir weiterhin gelegentlich bequem, statt $0, \infty, 1$ drei beliebige Werte a, b, c (von denen keiner unendlich ist) als singuläre Werte zu besitzen. Führt man zu diesem Zwecke statt x durch lineare Substitution ein geeignetes neues x ein, so nimmt die Differentialgleichung die symmetrische Gestalt an:

$$[\eta] = \frac{1}{x-a\cdot x-b\cdot x-c}\left\{(a-b)(a-c)\frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{x-a} + (b-c)(b-a)\frac{\frac{1-\mu^2}{2}}{x-b} + (c-a)(c-b)\frac{\frac{1-\nu^2}{2}}{x-c}\right\}.$$

Dieses Resultat läßt sich, wenn man von der allgemeinen Theorie solcher Differentialgleichungen ausgeht[2]), von vornherein einsehen. Der Ausdruck rechter Hand muß (-4)-ter Dimension sein, weil der Wert $x=\infty$ nicht singulär ist. Er muß ferner so beschaffen sein, daß bei Partialbruchzerlegung höchstens quadratische und lineare Glieder auftreten. Die betr. Nenner müssen $(x-a)^2$, $(x-b)^2$, $(x-c)^2$ bez. $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, die Zähler der quadratischen Glieder müssen $\frac{1-\lambda^2}{2}$, $\frac{1-\mu^2}{2}$, $\frac{1-\nu^2}{2}$ sein. Dadurch aber ist der Ausdruck vollkommen bestimmt.

6. *Ableitung der Differentialgleichungen aus den Integralgleichungen.* Daß die Elementargleichungen so, wie sie angegeben werden, zu den Integralgleichungen gehören, hatte ich, bei der das vorige Mal eingehaltenen Darstellung, der zitierten Arbeit von Schwarz entnommen. Die betr. Rechnung, wie sie sich auf Grund der in Betracht kommenden algebraischen Formensysteme ergibt, ist seitdem von Herrn Brioschi in eleganter Weise entwickelt worden [Math. Annalen, Bd. 11 (1876/77), S. 111—114 = Ges. Werke V, S. 205—210]. Aber es hat wohl Interesse zu bemerken, daß man dieselbe ganz sparen kann, wenn man von der Definition der Ausdrücke $\Omega(\eta)$ ausgeht. Betrachten wir z. B. die Ikosaedergleichung in der Form:

$$1728\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \frac{Ax+B}{Cx+D},$$

wo ich die Konstanten A, B, C, D so wählen will, daß $\frac{Ax+B}{Cx+D}$ für $x=a$, b, c bez. $0, \infty, 1$ wird. *Aus einer Wurzel η_0 dieser Gleichung ergeben sich alle anderen durch 59 von vornherein bekannte lineare Substitutionen, deren Koeffizienten numerisch sind.* Der Ausdruck $[\eta]$ ist

[2]) Vgl. hier und im folgenden die einschlägigen Arbeiten von Fuchs, Schwarz u. a. in Crelles Journal.

aber so gebildet, daß er für η und ein beliebiges $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ identisch ausfällt. Daher nimmt im vorliegenden Falle $[\eta]$ für alle Wurzeln der Ikosaedergleichung denselben Wert an, ist also eine rationale Funktion von x. Mehrfache Wurzeln besitzt die Ikosaedergleichung nun für $x=a$, $x=b$, $x=c$, und zwar bez. lauter dreifache, fünffache, doppelte. Daher ist die betr. rationale Funktion vom (-4)-ten Grade, sie wird für $x=a, b, c$ im zweiten Grade unendlich und hat, auf diese Werte bezüglich, die Exponenten $\lambda=3$, $\mu=5$, $\nu=2$, womit alles bestimmt ist.

7. *Einsetzung von $R(x)$ statt (x).* Setzt man in die Elementargleichungen der fünften Nummer statt x ein $R(x)$, so entstehen die allgemeinsten hier in Betracht kommenden Differentialgleichungen:

$$[\eta]=[R]+R'^2\left\{\frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{R^2}+\frac{\frac{1-\nu^2}{2}}{(1-R)^2}-\frac{\frac{\lambda^2-\mu^2+\nu^2-1}{2}}{R(1-R)}\right\}.$$

Wir wollen den Ausdruck rechter Hand in Partialbrüche zerlegen und insonderheit auf die dabei auftretenden quadratischen Glieder achten. Sei $R=\frac{\varphi}{\psi}$, wo φ, ψ vom Grade n ohne gemeinsamen Teiler. Keine der Wurzeln von $\varphi=0$, $\psi=0$, $\varphi-\psi=0$ oder der Funktionaldeterminante $(\varphi, \psi)=0$ soll unendlich angenommen werden. Ich nenne dann die Wurzeln von φ a_i, ihre Multiplizität α_i, analog bei ψ und $\varphi-\psi$ die Wurzeln b_i, c_i, ihre Multiplizität β_i, γ_i. Die Funktionaldeterminante (φ, ψ) hat die a_i, b_i, c_i zu α_i-1, β_i-1, γ_i-1-fachen Wurzeln; sie besitze außerdem noch Wurzeln d_i je δ_i-1-fach. *Dann lauten die quadratischen Glieder der Partialbruchzerlegung:*

$$\sum\frac{\frac{1-\alpha_i^2\lambda^2}{2}}{(x-a_i)^2}+\sum\frac{\frac{1-\beta_i^2\mu^2}{2}}{(x-b_i)^2}+\sum\frac{\frac{1-\gamma_i^2\nu^2}{2}}{(x-c_i)^2}+\sum\frac{\frac{1-\delta_i^2}{2}}{(x-d_i)^2},$$

wie man leicht durch funktionentheoretische Überlegung oder auch durch direkte Rechnung findet.

8. *Ausfallen gewisser Glieder der Partialbruchentwicklung.* In den fünferlei hier in Betracht kommenden Fällen sind λ, μ, ν Brüche mit dem Zähler 1. Es können also verschiedene Terme $\alpha_i=\frac{1}{\lambda}$, $\beta_i=\frac{1}{\mu}$, $\gamma_i=\frac{1}{\nu}$ werden. *Dann fällt das betreffende quadratische Glied der Partialbruchzerlegung weg.* Da wir es nun mit Differentialgleichungen zu tun haben, die durchaus algebraische Integrale besitzen, so folgt aus der allgemeinen Theorie, daß dann auch kein bez. lineares Glied in der Partialbruchentwicklung auftritt — wie die direkte Rechnung bestätigt. *Der Punkt $x=a_i$ oder b_i oder c_i hört dann also auf, für die Differentialgleichung singulär zu sein.*

Erstes Beispiel. Ich will statt der Ikosaedergleichung:

$$1728\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}=x$$

die folgende betrachten:

$$1728\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1728\frac{H^3(x)}{f^5(x)}.$$

Dann ist $\varphi-\psi=-\frac{T^2(x)}{12}$. Man hat also statt x eine Funktion $R(x)$ gesetzt, welche für $R=0, \infty, 1$ *lauter* dreifache, fünffache, doppelte Wurzeln besitzt. Überdies sind die Faktoren der Funktionaldeterminante (φ, ψ) durch H^2, f^4, T völlig absorbiert. Daher geht die zum Ikosaeder gehörige Elementargleichung jetzt einfach über in:

$$[\eta]=0,$$

d. h. η ist eine lineare Funktion von x, wie von vornherein deutlich, da *alle* Wurzeln der Integralgleichung in dieser Form enthalten sind. — Man kann an diese Umformung, wie an die später anzuführenden, eine algebraische Folgerung knüpfen, die bemerkenswert scheint. Wenn ich drei ganze Funktionen habe, l, m, n, welche die Identität

$$l^3-m^5+n^2=0$$

befriedigen, wenn ferner die Funktionaldeterminante (l^3, m^5) oder, was auf dasselbe hinauskommt, (l^3, n^2) resp. (m^5, n^2) durch l^2m^4n ganz absorbiert ist[3]), so kann man hinsichtlich der Differentialgleichung denselben Schluß, wie soeben, machen, indem man statt x einsetzt $\frac{l^3}{m^5}$. Daher: *Es gibt keine anderen Funktionen l, m, n, die den genannten Bedingungen genügen, als $12H$, f, $\frac{T}{\sqrt{12}}$.*

Zweites Beispiel. In der zweiten Nummer ist die Ikosaederfunktion rational ausgedrückt worden durch die (modifizierte) Tetraederfunktion $\frac{t^2}{f}$. Ich will nun letztere $=x$ setzen, oder, der größeren Deutlichkeit wegen, $=\frac{x_1}{x_2}$. So hat man, bis auf einen Proportionalitätsfaktor:

$$\begin{aligned}144\,T^2(\eta)&=x_1(x_1^2-10\,x_1x_2+45\,x_2^2)^2,\\ f^5(\eta)&=x_2^5,\\ 12^6\cdot H^3(\eta)&=-(x_1^2-11\,x_1x_2+64\,x_2^2)(x_1-3\,x_2)^3.\end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante der rechts stehenden Ausdrücke ist

$$(x_1^2-10\,x_1x_2+45\,x_2^2)\cdot x_2^4\cdot(x_1-3\,x_2)^2.$$

[3]) Dieses heißt hier nichts anderes, als daß l^3, m^5, n^2 vom sechzigsten Grade sind.

Daher: *Die Differentialgleichung des Ikosaeders weist nach der Substitution nur drei singuläre Stellen auf, nämlich* $\frac{x_1}{x_2}=0$ *und die beiden Wurzeln der Gleichung* $x_1^2-11\,x_1x_2+64\,x_2^2=0$. *Die zugehörigen Exponenten sind bez.* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. Mit anderen Worten: wir haben, wie es von vornherein zu erwarten war, die Elementargleichung des Tetraeders erhalten. Transformiert man x in der Weise durch lineare Substitution, daß $0, \infty, 1$ die singulären Werte werden, so transformiert man gleichzeitig $\frac{t^2}{f}$ in die kanonische Form der Tetraederfunktion.

9. *Bestimmung des $R(x)$ aus den quadratischen Gliedern der Partialbruchentwicklung.* Fragen wir, wie weit $R(x)$ durch die quadratischen Glieder der Partialbruchzerlegung bestimmt ist. Ich will dabei, der Kürze wegen, allein den Fall des Ikosaeders in Betracht ziehen, wo also $\lambda=\frac{1}{3}$, $\mu=\frac{1}{5}$, $\nu=\frac{1}{2}$. Unter den Wurzeln von $\varphi=0$ zunächst unterscheide man drei Kategorien, die als a_i, a_i', a_i'' bezeichnet sein sollen. Die ersteren haben eine Multiplizität α_i, welche keine durch 3 teilbare ganze Zahl ist. Die Multiplizität der a_i' sei gleich 3, die der a_i'' gleich $3\alpha_i''$, wo α_i'' eine von Eins verschiedene ganze Zahl. Eine analoge Unterscheidung treffe man bei den Wurzeln von ψ mit Rücksicht auf die Zahl 5, und bei den Wurzeln von $\varphi-\psi$ mit Rücksicht auf die Zahl 2. Dann erfährt man aus den quadratischen Gliedern der Partialbruchzerlegung, da 3, 5, 2 relative Primzahlen sind, unmittelbar den Faktor $\Pi(x-a_i)^{\alpha_i}$ von φ, den Faktor $\Pi(x-b_i)^{\beta_i}$ von ψ, den Faktor $\Pi(x-c_i)^{\gamma_i}$ von $(\varphi-\psi)$, endlich das Faktorenaggregat:

$$\Pi(x-a_i'')^{\alpha_i''}\ \Pi(x-b_i'')^{\beta_i''}\ \Pi(x-c_i'')^{\gamma_i''}\ \Pi(x-d_i)^{\delta_i}.$$

Unbekannt ist es zunächst, welche dieser Faktoren, und zunächst auch, wie viele an φ, ψ, $\varphi-\psi$ abzugeben sind, resp. welche allein der Funktionaldeterminante angehören. Aber da φ, ψ, $\varphi-\psi$ denselben Grad n haben sollen und die Funktionaldeterminante den Grad $2n-2$, so erweist sich in jedem Falle nur eine endliche Anzahl von Verteilungsweisen als möglich und vor allen Dingen ist n nur unter einer endlichen Anzahl von Werten auszusuchen.

Eine weitere Reihe von Relationen zur Bestimmung der in φ, ψ noch unbekannten Koeffizienten erhält man dann aus der Identität:

$$(\varphi)-(\psi)=(\varphi-\psi),$$

wie in der folgenden Nummer an einem Beispiel ausgeführt ist.

10. *Beispiele für die Bestimmung von $R(x)$.* Wenn eine Differentialgleichung der hier in Betracht kommenden Art nur drei singuläre Punkte hat, d. h. eine Elementargleichung ist, so ist sie durch die quadratischen Glieder der Partialbruchzerlegung völlig bestimmt, und also muß sich auch $R(x)$ allein aus ihnen gewinnen lassen. In Abschnitt VI der zitierten Arbeit hat Herr Schwarz eine Tabelle der in dem dort definierten Sinne einfachsten fünfzehn Elementargleichungen gegeben, welche durchaus algebraische Integrale besitzen, und Herr Brioschi hat für die größere Zahl dieser Fälle den Wert der Funktion $R(x)$ abgeleitet [Math. Annalen, Bd. 11 (1877), S. 410 = Werke V, S. 222]. Ich will hier auf Grund der Auseinandersetzung der vorangehenden Nummer das Resultat angeben für die drei von Herrn Brioschi nicht behandelten [an sich komplizierteren] Fälle XII, XIV, XV der Schwarzschen Tabelle.

Betrachten wir vor allem, des Beispiels wegen, den Fall XIV. Es handelt sich um die Elementargleichung, die ich in allgemeiner Form schreibe:

$$[\eta]=\frac{1}{x-a\cdot x-b\cdot x-c}\left\{\frac{\frac{1-\lambda^2}{2}}{x-a}(a-b)(a-c)+\frac{\frac{1-\mu^2}{2}}{x-b}(b-c)(b-a)\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{1-\nu^2}{2}}{x-c}(c-a)(c-b)\right\},$$

für die

$$\lambda=\frac{1}{3},\quad \mu=\frac{2}{5},\quad \nu=\frac{1}{2}.$$

Von vornherein ist klar, daß diese Differentialgleichung (da man weiß, daß sie durchaus algebraische Integrale hat) zum Ikosaedertypus gehört, weil die Nenner 3 und 5 gleichzeitig auftreten. Setzen wir also das Integral in der Form an:

$$1728\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}=\frac{\varphi}{\psi}.$$

Es muß dann φ neben dem einfachen Faktor $(x-a)$ nur noch dreifache Faktoren haben, ψ neben dem doppelten Faktor $(x-b)$ nur noch fünffache Faktoren, $\varphi-\psi$ neben dem einfachen Faktor $(x-c)$ nur noch doppelte. Die Funktionaldeterminante (φ, ψ) darf keine anderen Faktoren besitzen, als die bereits in φ, ψ, $\varphi-\psi$ enthaltenen. Hieraus folgt vor allem, daß φ, ψ vom *siebenten* Grade sind, und man hat folgenden Ansatz: *Unter ϱ, σ, τ Polynome vom Grade 2, 1, 3 mit nicht verschwindender Diskriminante verstanden, soll man haben:*

$$(x-a)\varrho^3-(x-b)^2\sigma^5\equiv(x-c)\tau^2.$$

Da $R(x)$ im vorliegenden Falle durchaus bestimmt ist (n. 4.), so folgt: *Das so formulierte algebraische Problem hat eine und nur eine Lösung.*

Ich habe zur Vereinfachung der Rechnung genommen $b=-1$, $c=0$ und die lineare Funktion $\sigma=$ Konstans. Sei dann zunächst ϱ, bis auf eine Konstante, $=x^2+Ax+B$. Die Funktion τ ist einfacher Faktor der Funktionaldeterminante von $(x-a)\varrho^3$ und $(x-b)^2\sigma^5$; sie ist also gleich zu setzen:

$$\tau=(x-2a-1)(x^2+Ax+B)-3(x+1)(x-a)(2x+A)$$

und die zu erfüllende Identität lautet:

$$C(x-a)(x^2+Ax+B)^3+D(x+1)^2$$
$$=x\{(x-2a-1)(x^2+Ax+B)-3(x+1)(x-a)(2x+A)\}^2$$

Durch die Betrachtung der Werte $x=\infty$, 0 ergibt sich:

$$C=25, \quad D=-25aB^3,$$

und die nun noch unbestimmten Koeffizienten gewinne ich, indem ich verlange, daß die von (x^2+Ax+B) freien Glieder, zusammengezogen, wieder durch x^2+Ax+B teilbar sein sollen. Dies gibt eine überzählige Anzahl von Gleichungen, welche das eine Lösungssystem:

$$a=-\frac{27\cdot 7}{64}, \qquad A=\frac{19\cdot 7}{64}, \qquad B=\frac{49}{64}$$

besitzen. Also findet man, wenn man noch, um Brüche zu vermeiden, alle Glieder der Identität mit 64^4 multipliziert:

$$\varphi=25(64x+7\cdot 27)(64x^2+7\cdot 19x+49)^3,$$
$$\psi=25\cdot 7^7\cdot 27\cdot(x+1)^2,$$
$$\varphi-\psi=x\{2(32x+157)(64x^2+7\cdot 19x+49)$$
$$-3(x+1)(64x+7\cdot 27)(128x+7\cdot 19)\}^2.$$

Dabei sind als singuläre Werte genommen:

$$a=-\frac{7\cdot 27}{64}, \quad b=-1, \quad c=0.$$

Durch ähnlichen Ansatz ergibt sich bei XII:

$$\lambda=\frac{1}{3}, \quad \mu=\frac{2}{3}, \quad \nu=\frac{1}{5}.$$
$$\varphi=x^3(x+5)^2(x+8),$$
$$\psi=64(3x-1),$$
$$\varphi-\psi=(x^3+9x^2+12x-8)^2;$$

wo genommen ist:

$$a=-8, \quad b=-5, \quad c=\frac{1}{3};$$

[und bei XV,

$$\lambda=\frac{1}{3}, \quad \mu=\frac{3}{5}, \quad \nu=\frac{2}{5},$$
$$\varphi=(5x-27)(125x^3-25x^2-265x-243)^3,$$
$$\psi=-2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^5x^3(x+1)^2,$$

$$\varphi-\psi=\{(125x^3-25x^2-265x-243)(20x^2-125x-81)$$
$$-15x(5x-27)(x+1)(75x^2-10x-53)\}^2,$$

für

$$a=\frac{27}{5}, \quad b=0, \quad c=-1]^{4)}.$$

11. *Geometrische Deutung des Satzes der neunten Nummer.* Die 59 verschiedenartigen Drehungen, welche ein Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, zerfallen in drei Klassen: in solche von der Periode 3, von der Periode 5, von der Periode 2 (vgl. die zitierte Arbeit von Gordan). Die ersteren geschehen um Achsen, welche zwei Ecken des Pentagondodekaeders miteinander verbinden; analog verbinden die Drehachsen, welche bei der zweiten und dritten Kategorie auftreten, bez. zwei Ecken des Ikosaeders oder des Triakontagons. — Aus diesen 59 Drehungen, denen man als sechzigste die Identität zufügen mag, kann man unendlich viele machen, wenn man ganze Umdrehungen in beliebiger Multiplizität zuläßt und mitzählt. Diese ganzen Umdrehungen können dann nicht nur um eine beliebige unter den dreierlei eben genannten Achsen stattfinden, *sondern auch um irgendeine, zu der Figur des Ikosaeders in keiner notwendigen Beziehung stehende Achse.* — Interpretieren wir jetzt das η, welches mit x durch die Differentialgleichung verbunden ist, in geeigneter Weise auf der Kugelfläche, lassen dann x einen singulären Punkt umkreisen, so wird die lineare Substitution, welche η dabei erfährt, vorgestellt durch eine Drehung der Kugelfläche, welche das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringt. Sei

---

4) [Beim Wiederabdruck wurde ein Rechenfehler, auf den mich Cayley 1880 brieflich aufmerksam gemacht hatte (vgl. Math. Annalen, Bd. 17, S. 66, Fußnote), korrigiert. — Ich benutze diese Gelegenheit, um diejenigen Werte von φ, ψ und $\varphi-\psi$ mitzuteilen, welche O. Fischer auf S. 32 seiner Dissertation „Konforme Abbildung sphärischer Dreiecke aufeinander mittels algebraischer Funktionen" (Leipzig 1885) angibt, indem er gleich wie Brioschi (a. a. O.) in den anderen Fällen auch in den Fällen XII, XIV, XV die Punkte 0, ∞, 1 als singuläre Stellen einführt. Man erhält durch geeignete lineare Transformationen:

im Falle XII:

$$\varphi=3^3x(x-1)^2(3x-2^7)^3,$$
$$\psi=-2^2(3^2x+2^4)^5,$$
$$\varphi-\psi=(3^3x^3+3^3\cdot 97x^2-2^6\cdot 3^2\cdot 19x+2^{11})^2;$$

im Falle XIV:

$$\varphi=x(2^2\cdot 3^6x^2-3^3\cdot 7\cdot 13x-2^9\cdot 7)^3,$$
$$\psi=(3^3\cdot 7x-2^6)^5,$$
$$\varphi-\psi=(x-1)(2^3\cdot 3^9x^3-3^7\cdot 5\cdot 11x^2+2^8\cdot 3^4\cdot 23x+2^{15})^2;$$

im Falle XV:

$$\varphi=2^2x(3^6x^3-3^3\cdot 5^2x^2+5^3\cdot 23x-5^4)^3,$$
$$\psi=5^5(x-1)^3(3^3x+5)^5,$$
$$\varphi-\psi=(2\cdot 3^9x^5-3^7\cdot 5^2x^4-2^5\cdot 3^4\cdot 5^3x^3+2\cdot 5^4\cdot 11\cdot 17x^2-2\cdot 5^5\cdot 19x+5^5)^2.$$

K.]

der Exponent des singulären Punktes mit k bezeichnet, so beträgt die Winkelgröße der Drehung $2k\pi$. Daher, solange k einen der Nenner 3, 5, 2 besitzt, geschieht die Drehung notwendig um eine unter den dreierlei vorab unterschiedenen Achsen. Wenn aber k eine ganze Zahl ist (die man > 1 annehmen kann, da $k = 1$ ohne Bedeutung ist), so ist von vornherein über die Richtung der Drehachse gar nichts bekannt.

12. *Primformen bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Die Lösungen η der Differentialgleichung:

$$[\eta] = P(x)$$

sind bekanntlich gleich den Quotienten $\frac{y_1}{y_2}$ zweier (beliebiger) Partikularlösungen jeder linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \cdot \frac{dy}{dx} + q \cdot y = 0,$$

für welche:

$$2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx} = P(x).$$

Zur Kenntnis der für solche y_1, y_2 im Sinne des Herrn Fuchs (Crelles Journal, Bd. 81 (1876), S. 97 ff.) geltenden Primformen gelangt man in einfachster Weise, wenn man von der für η bestehenden Integralgleichung ausgeht, sie differentiiert und statt

$$\eta' = \frac{y_1' y_2 - y_2' y_1}{y_2^2}$$

nach einem bekannten Satze einträgt:

$$\eta' = \frac{C \cdot e^{-\int p\,dx}}{y_2^2}.$$

Hat man z. B. die Ikosaedergleichung:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = R(x),$$

so folgt:

$$1728 \frac{H^2(\eta)}{f^6(\eta)} \{3H'f - 5f'H\} \cdot \eta' = R'(x),$$

und da $3H'f - 5f'H$ bis auf einen Zahlenfaktor mit T identisch ist:

$$C \cdot \frac{H^2(\eta) \cdot T(\eta)}{f^6(\eta) \cdot R'(x)} \cdot e^{-\int p\,dx} = y_2^2.$$

Hier nun multipliziere man beiderseits mit $\sqrt[6]{f(\eta)}$. So entsteht rechter Hand $\sqrt[6]{f(y_1, y_2)}$ (homogen in y_1, y_2 geschrieben), links:

$$C \cdot \left(\frac{H^3}{f^5}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{T^2}{f^5}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{-\int p\,dx}}{R'} = C \frac{R^{\frac{2}{3}}(1-R)^{\frac{1}{2}}}{R'} \cdot e^{-\int p\,dx}.$$

Mithin ist:

$$f(y_1, y_2) = C^6 \cdot \frac{R^4 (1-R)^3}{R'^6} \cdot e^{-6\int p\,dx};$$

nimmt man also z. B. $p = 0$, so ist, wie auch Herr Brioschi angibt (Math. Annalen, Bd. 11, S. 406) *$f(y_1, y_2)$ rational.*

In ähnlicher Weise erhält man für die verschiedenen Fälle [indem man unter C jeweils eine willkürliche Konstante versteht]:

(I)
$$y_1 = C e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{n+1}{2n}}}{R'},$$

$$y_2 = C e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{n-1}{2n}}}{R'}.$$

(II)
$$y_1 y_2 = C e^{-\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{1}{2}}(R-1)^{\frac{1}{2}}}{R'},$$

$$y_1^n + y_2^n = 2 C^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{n+2}{4}} \cdot (R-1)^{\frac{n}{4}}}{R'^{\frac{n}{2}}},$$

$$y_1^n - y_2^n = 2 C^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{n}{4}}(R-1)^{\frac{n+2}{4}}}{R'^{\frac{n}{2}}}.$$

(III)
$$y_1^4 - 2\sqrt{-3}\, y_1^2 y_2^2 - y_2^4 = C^2 e^{-2\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{5}{3}} \cdot (R-1)}{R'^2},$$

$$y_1^4 + 2\sqrt{-3}\, y_1^2 y_2^2 - y_2^4 = C^2 e^{-2\int p\,dx} \cdot \frac{R^{\frac{4}{3}} \cdot (R-1)}{R'^2},$$

$$2\sqrt[4]{-27} \cdot y_1 y_2 (y_1^4 - y_2^4) = C^3 e^{-3\int p\,dx} \cdot \frac{R^2 (R-1)^2}{R'^2}.$$

(IV)
$$\sqrt[4]{108} \cdot y_1 y_2 (y_1^4 - y_2^4) = C^3 e^{-3\int p\,dx} \cdot \frac{R^2 (R-1)^{\frac{3}{2}}}{R'^3},$$

$$y_1^8 + 14 y_1^4 y_2^4 + y_2^8 = C^4 \cdot e^{-4\int p\,dx} \cdot \frac{R^3 (R-1)^2}{R'^4},$$

$$y_1^{12} - 33 y_1^8 y_2^4 - 33 y_1^4 y_2^8 + y_2^{12} = C^6 \cdot e^{-6\int p\,dx} \cdot \frac{R^4 (R-1)^{\frac{7}{2}}}{R'^6}.$$

(V)
$$\sqrt[5]{12^3}\, y_1 y_2 (y_1^{10} + 11 y_1^5 y_2^5 - y_2^{10}) = C^6 e^{-6\int p\,dx} \cdot \frac{R^4 (R-1)^3}{R'^6},$$

$$-(y_1^{20} + y_2^{20}) + 228 (y_1^{15} y_2^5 - y_1^5 y_2^{15}) - 494 y_1^{10} y_2^{10}$$
$$= C^{10} \cdot e^{-10\int p\,dx} \cdot \frac{R^7 (R-1)^5}{R'^{10}},$$

$$(y_1^{30}+y_2^{30})-522\,(y_1^{25}y_2^{5}-y_1^{5}y_2^{25})-10005\,(y_1^{20}y_2^{10}+y_1^{10}y_2^{20})$$
$$=C^{15}\,e^{-15\int p\,dx}\cdot\frac{R^{10}(R-1)^{8}}{R'^{15}}.$$

Mit diesen Formeln scheinen die Fragen, welche man hinsichtlich der Existenz und Art der Primformen bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung stellen kann, vollkommen beantwortet[5]). Ich will hier noch diese Bemerkung zufügen. Wählt man statt $R(x)$ einfach x, so kann man bekanntlich y_1, y_2 ansehen als Partikularlösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}\cdot y=0,$$

wo $(1-\gamma)^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $(\gamma-\alpha-\beta)^2$ in irgendeiner Reihenfolge gleich sein müssen den Exponentenquadraten λ^2, μ^2, ν^2. Nimmt man nun insbesondere, in Übereinstimmung hiermit, in den fünferlei Fällen, α, β, γ bez. gleich:

(I)	$\frac{1}{n}$,	0,	$\frac{n+1}{n}$,
(II)	$\frac{1}{2n}$,	$-\frac{1}{2n}$,	$\frac{1}{2}$,
(III)	$\frac{1}{12}$,	$-\frac{1}{4}$,	$\frac{2}{3}$,
(IV)	$\frac{1}{24}$,	$-\frac{5}{24}$,	$\frac{2}{3}$,
(V)	$\frac{11}{60}$,	$-\frac{1}{60}$,	$\frac{2}{3}$,

so werden die Primformen:

$$y_1,\quad y_1y_2,\quad y_1^4+2\sqrt{-3}\,y_1^2y_2^2-y_2^4,\quad y_1y_2(y_1^4-y_2^4),$$
$$y_1y_2(y_1^{10}+11\,y_1^5y_2^5-y_2^{10})$$

einfach *konstant* (vgl. auch Herrn Brioschis Note. Math. Annalen, Bd. 11, S. 407).

München, im April 1877.

[5]) Eine andere Seite der Frage ist in dem Aufsatze von Gordan in den Math. Annalen, Bd. 12 (1877), S. 147 bis 166 erledigt [nämlich durch volle Bestimmung der jeweils niedersten Primform aus der von Fuchs angegebenen Definition, daß für sie sämtliche Kovarianten niederer Ordnung identisch verschwinden sollen. — Genaueres zur Durchführung der Betrachtungen der in n. 9 verlangten Ansätze findet man in meiner autographierten Vorlesung über lineare Differentialgleichungen von 1894; vgl. auch den Hinweis in dem unten als Nr. LXIX abgedruckten Selbstreferat. K.].

LIV. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder.

[Math. Annalen, Bd. 12 (1877).]

In dem Aufsatze: „*Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst*", den ich in den Math. Annalen, Bd. 9 (1875) [vorstehend als Abh. LI abgedruckt] veröffentlicht habe, bin ich zu einem merkwürdigen Zusammenhange geführt worden, der zwischen dem Ikosaeder und der Theorie der Gleichungen fünften Grades besteht. Indem ich die letztere benutzte, gelang es mir, die Gleichung zwölften Grades, welche in dem dort erläuterten Sinne ein Ikosaeder vorstellt, in quadratische Faktoren zu spalten und also zu lösen. Bemerkenswert mußte schon damals die Leichtigkeit erscheinen, mit der es gelang, gewisse in der Theorie der Gleichungen fünften Grades auftretende Resolventen sechsten und fünften Grades abzuleiten und in ihrem Zusammenhange zu erkennen. Aber ich bin erst durch Gordan, mit dem ich diese Gegenstände ausführlich besprach, veranlaßt worden, die Frage umzukehren und zu versuchen, *geradezu die Theorie der Gleichungen fünften Grades aus der Betrachtung des Ikosaeders abzuleiten*. In der Tat gelang es mir — im steten Verkehre mit Gordan — nicht nur sämtliche algebraische Sätze und Resultate, welche Kronecker[1]) und Brioschi[2]) in dieser Hinsicht —

[1]) Die hier in Betracht kommenden Mitteilungen von Kronecker sind: Extrait d'une lettre à Mr. Hermite, Comptes Rendus 1858, 1, 16. Juni (Bd. 46) und: Über die Gleichungen fünften Grades, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1861, abgedruckt in Crelles Journal, Bd. 59 (1861).

[2]) Brioschis hierher gehörige Arbeiten sind folgende: Sulle equazioni del moltiplicatore per la transformazione delle funzioni ellitiche (Annali di Tortolini, t. 1, 1858, S. 175); Sulla risoluzione dell' equazioni di quinto grado (Ebenda S. 256, 326); Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado (Atti del Istituto Lombardo, 1, 1858, S. 275); Sur diverses équations analogues aux équations modulaires dans la théorie des fonctions elliptiques (Comptes Rendus, 1858, 2 (Bd. 47), S. 337); Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado (Annali di Tartolini, t. 5, 1863, S. 233); Sopra alcune nuove relazioni modulari (Atti della R. Accademia di Napoli, vol. 3, 1866); La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado (Annali di Matematica, ser. II, t. 1, 1867, S. 222,); Sur l'équation du cinquième degré (Comptes Rendus, 1875, 1 (Bd. 80)); Sopra una classe di forme binarie (Annali di Matematica, ser. II, t. 8, 1876, S. 24). Brioschi wird binnen kurzem in den Math. Annalen eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen geben. [Dies ist in den Math. Annalen, Bd. 13 (1878), S. 109—160 geschehen. Man vergleiche übrigens auch die gesammelten Werke Brioschis.]

zum Teil ohne Beweis — publiziert haben, aus einer Quelle naturgemäß abzuleiten, sondern ihnen auch neue, und, wie ich glaube, wesentliche Beiträge hinzuzufügen. Ich veröffentlichte hierüber nacheinander drei Noten in den Erlanger Berichten[3]) (Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder I, II, III, 13. November 1876, 15. Januar und 9. Juli 1877), die ich in der gegenwärtigen Abhandlung in umgearbeiteter Form reproduziere. Ich habe dabei vorab alles das noch ausgeschlossen, was auf die Definition der in Betracht kommenden fundamentalen Irrationalitäten durch elliptische Funktionen Bezug hat[4]) und darum Hermites Lösung der Gleichungen fünften Grades[5]) im folgenden nur beiläufig erwähnt. Mich zwang dazu die Fülle des Stoffes und der Wunsch, dem Zusammenhange mit den elliptischen Funktionen noch eine eingehendere Untersuchung zu widmen[6]). So besteht das Folgende aus drei Abschnitten. In dem ersten desselben erläutere ich verschiedene Eigenschaften der Ikosaedergleichung, die mir von Interesse erscheinen. In dem zweiten und dritten Abschnitte schließe ich daran zwei Anwendungen. Die erste bezieht sich auf ein Problem, welches im wesentlichen identisch ist mit der Lösung derjenigen Gleichungen sechsten Grades, die ich, einem Vorschlage Brioschis folgend, als Jacobische Gleichungen bezeichne. Die zweite beschäftigt sich mit den Gleichungen fünften Grades; es gelingt mir, diejenigen Gleichungen fünften Grades, bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwinden, explizite mit Hilfe einer Ikosaedergleichung zu lösen, und dadurch einen neuen Weg zur Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades zu finden.

Mit Rücksicht auf diesen letzten Abschnitt muß ich gleich hier ein Zitat zufügen auf eine Note, welche Gordan neuerdings in den Erlanger Berichten veröffentlichte (9. Juli 1877: Über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades) und die ausgeführt demnächst in den Math. Annalen erscheinen soll[7]). Einmal hat Gordan einen Teil der Resultate, welche ich in dem genannten Abschnitte zur Darstellung bringe, seinerseits gefunden

[3]) Siehe auch eine Mitteilung von Brioschi an die Accademia dei Lincei, December 1876. [= Werke Bd. III, S. 357.]

[4]) Vgl. indes eine Notiz von mir in den Rendiconti del' Istituto Lombardo Ser. II, t. 10 vom 6. April 1877.

[5]) Sur la résolution de l'équation du cinquième degré; Comptes Rendus 1858, 1 (Bd. 46). Man vergleiche zumal noch die zweite hierher gehörige Arbeit Hermites: Sur l'équation du cinquième degré; Comptes Rendus 1865, 2 (Bd. 61) und 1866, 1 (Bd. 62) [= Werke Bd. II, S. 5 u. 347].

[6]) [Die betreffenden Untersuchungen habe ich unter dem Titel „Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades" in den Math. Annalen, Bd. 14 (1878) veröffentlicht. Sie kommen in Bd. 3 dieser Gesamtausgabe zum Abdruck. K.]

[7]) [Das ist in den Math. Annalen, Bd. 13 (1878), S. 375—404 geschehen. Vgl. auch den am Ende gegenwärtiger Abhandlung auf S. 380 folgenden Zusatz.]

und in geschicktere Form gebracht, andererseits dieselben in eigenartiger Weise mit der Invariantentheorie gewisser doppeltbinärer Formen verknüpft. Ohne hier näher darauf einzugehen, will ich doch das allgemeine Prinzip bezeichnen, welches sich durch diese verschiedenartigen Arbeiten immer deutlicher herausstellt und das für die Theorie der algebraischen Gleichungen von weitreichender Bedeutung zu werden scheint, ein Prinzip, zu dem ich von anderer Seite kommend bereits 1871 in Bd. 4 der Math. Annalen geführt worden bin (Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen [vorstehend als Abh. L abgedruckt]). Beim Ikosaeder sind die 60 Vertauschungen der Wurzeln, welche die Galoissche Gruppe ausmachen, dargestellt durch 60 lineare Substitutionen, denen eine beliebige der Wurzeln unterworfen wird. Infolgedessen stehen beim Ikosaeder die Theorie der Resolventen und die Theorie der Invarianten in der allerinnigsten Beziehung, und man kann jede derselben fördern, indem man von der anderen Gebrauch macht. *Ähnliche Vorteile stellen sich, wie man zeigen kann, jedesmal ein, wenn die Vertauschungen der Galoisschen Gruppe ersetzt sind durch lineare Substitutionen einer gewissen Zahl Veränderlicher.*

Diese Art, die Invariantentheorie zu verwerten, ist verschieden von der sonst versuchten, statt der Koeffizienten einer Gleichung n-ten Grades von vornherein die Invarianten der entsprechenden binären Form n-ter Ordnung einzuführen. In der Tat scheint das letztere Verfahren im allgemeinen nicht zweckmäßig. Die Gleichungen fünften Grades z. B., wie sie im dritten Abschnitte der Untersuchung zugrunde gelegt werden, sind in diesem Sinne von den allgemeinen Gleichungen fünften Grades nicht verschieden. Und doch gestaltet sich ihre Auflösung wesentlich leichter als die der allgemeinen. [Der tiefere Grund für die Unzweckmäßigkeit der Heranziehung der gewöhnlichen binären Invariantentheorie an dieser Stelle ist, daß, bei gegebener Gleichung $f(y)=0$, die Anwendung einer beliebig gewählten linearen Substitution auf y bei der Willkür der Substitutionskoeffizienten den Rationalitätsbereich in unkontrollierbarer Weise ändert, man also einer anderweitig entstandenen Gewöhnung zu liebe, Ungleichartiges zusammenfaßt. Anders bei der Untersuchung betr. Abzählung und Trennung der Wurzeln von $f(y)=0$: bei ihr ist die lineare Substitution, insofern sie die Stetigkeitsverhältnisse aufrechterhält, durchaus am Platze. Unter dem doppelten hiermit festgelegten Gesichtspunkte sollten die sämtlichen Arbeiten, welche die Invariantentheoretiker, von Cayley beginnend, der Gleichungslehre gewidmet haben, einer genauen Revision unterzogen werden.][8])

[8]) [Zusatz beim Wiederabdruck, den ich der Deutlichkeit wegen noch zugefügt habe. Vgl. auch Ikosaederbuch, S. 139, 140. K.]

Abschnitt I.

Die Ikosaedergleichung.

§ 1.

Das Fundamentalproblem.

Unter einem *Ikosaeder* schlechthin verstehe ich, wie früher, eine gewisse binäre Form zwölfter Ordnung $f(\eta_1, \eta_2)$. Das volle System ihrer Kovarianten besteht aus der Hesseschen H und der Funktionaldeterminante $(f, H) = T$, deren Quadrat sich linear aus f^5 und H^3 zusammensetzt. Als *Fundamentalproblem* mag dann das folgende hingestellt sein: *Es sind die numerischen Werte gegeben, welche f, H, T für gewisse Werte von η_1, η_2 annehmen; man soll η_1, η_2 berechnen.* Dies ist die allgemeinste Formulierung, an deren Stelle ich fast durchgängig, wenn nicht das Gegenteil bemerkt wird, eine viel speziellere setze. Bei derselben ist $f(\eta_1, \eta_2)$ in einer *kanonischen Form* gegeben, also z. B. in derjenigen, welche Schwarz in der öfter zu zitierenden Arbeit[9]) benutzt und die ich ebenfalls in meinem früheren Aufsatze verwandte:

$$f = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^{10} + 11 \eta_1^5 \eta_2^5 - \eta_2^{10}).$$

Man hat dann für H, T:[10])

$$12^2 H = -(\eta_1^{20} + \eta_2^{20}) + 228(\eta_1^{15} \eta_2^5 - \eta_1^5 \eta_2^{15}) - 494 \eta_1^{10} \eta_2^{10}$$
$$12 \; T = (\eta_1^{30} + \eta_2^{30}) + 522(\eta_1^{25} \eta_2^5 - \eta_1^5 \eta_2^{25}) - 10005(\eta_1^{20} \eta_2^{10} + \eta_1^{10} \eta_2^{20})$$

mit der Relation:

$$(1) \qquad T^2 = 12 f^5 - 12^4 H^3.$$

Es handelt sich wieder darum, *wenn die Zahlenwerte von f, H, T gegeben sind (in Übereinstimmung selbstverständlich mit der Bedingung* (1)), *η_1 und η_2 zu bestimmen.* Ich werde weiterhin zeigen (§ 5), wie sich die allgemeinere Fragestellung auf diese speziellere zurückführen läßt.

Als *Ikosaedergleichung* (im weiteren oder spezielleren Sinne) bezeichne ich dann diejenige Gleichung sechzigsten Grades, von der das *Verhältnis* $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ abhängt. Geht man von der kanonischen Darstellung aus, so lautet sie einfach

$$\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = \text{Konst.},$$

[9]) Über diejenigen Fälle, in welchen die Gauß'sche hypergeometrische Reihe eine *algebraische* Funktion ihres vierten Elementes darstellt. Crelles Journal, Bd. 75 (1872) S. 292—335. [= Ges. math. Abhandl., Bd. II, S. 211—259].

[10]) [Die links bei H und T auftretenden Zahlenfaktoren 12^2 und 12 sind in meinem Ikosaederbuch weggelassen. Die Relation heißt dann:

$$T^2 = -H^3 + 1728 f^5. \qquad \text{K.]}$$

oder, wie ich gewöhnlich schreibe:

$$(2) \qquad 1728 \frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X.$$

Dabei nenne ich X den *Parameter* der Ikosaedergleichung. — In dem allgemeineren Falle hat man linker Hand nur einen invarianten Faktor zuzusetzen, um Homogeneität in den Koeffizienten herzustellen. Versteht man unter B die in meiner früheren Arbeit [Abh. LI, S. 291] definierte Invariante, so hat man:

$$(2\text{a}) \qquad \frac{-5 \cdot 144 \cdot H^3(\eta_1, \eta_2)}{7 \cdot B \cdot f^5(\eta_1, \eta_2)} = X.$$

Man sieht: der Unterschied zwischen dem Fundamentalproblem und der Ikosaedergleichung ist dieser: bei dem ersteren handelt es sich um eine Frage aus der binären Formentheorie, bei der letzteren um eine Gleichung mit einer Unbekannten. Es ist vorteilhaft, zwischen diesen Fragestellungen zu wechseln. Die Ikosaedergleichung gewährt im allgemeinen zur ersten Orientierung die bessere Übersicht; aber gewisse tiefer liegende Fragen lassen sich nur mit Hilfe der binären Auffassung erledigen. Ganz ähnlich ist es bei den Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Integralen, die ich neuerdings in den Math. Annalen, Bd. 11 und 12 (1876/77) veröffentlichte [vorstehend als Abh. LII und LIII abgedruckt].

§ 2.

Die zur Ikosaedergleichung gehörigen linearen Substitutionen.

Die Haupteigenschaft der Ikosaedergleichung (2) *resp.* (2a) *ist die, daß alle 60 Wurzeln $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ sich aus einer beliebigen Wurzel durch lineare Substitutionen ableiten lassen, welche von X unabhängig sind.* Um dieses System linearer Substitutionen im Falle der kanonischen Form aufzustellen, beachte man, daß die Wurzeln von $f = 0$:

$$0, \infty, (\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^\nu, (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^\nu \qquad \left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}\right) \text{ [11])}$$

durch die Substitutionen in der Weise untereinander vertauscht werden müssen, daß die zusammengehörigen Wurzeln

$$0 \text{ und } \infty$$
$$(\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^\nu \text{ und } (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^\nu$$

[11]) [Die fünfte Einheitswurzel ε soll immer als adjungiert gelten. K.]

zusammengehörig bleiben. Auf diese Weise findet man die 60 Substitutionen

$$(3)\quad\begin{cases}
(\mathrm{a}) & \eta' = \varepsilon^{\nu}\eta, \\
(\mathrm{b}) & \eta' = -\dfrac{\varepsilon^{\nu}}{\eta}, \\
(\mathrm{c}) & \eta' = \varepsilon^{\mu}\dfrac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^{\nu}}{\eta-\varepsilon^{\nu}(\varepsilon+\varepsilon^4)}, \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4) \\
(\mathrm{d}) & \eta' = -\varepsilon^{\mu}\dfrac{\eta-\varepsilon^{\nu}(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^{\nu}},
\end{cases}$$

die ich kurz als die 60 *Ikosaedersubstitutionen* bezeichne. Eine derselben ($\eta' = \eta$) hat die Periode 1; 15 haben die Periode 2, nämlich die (b), und diejenigen (c), und (d), bei denen $\mu = \nu$; 20 haben die Periode 3: diejenigen (c), für welche $\mu = \nu \pm 2$, und die (d), bei denen $\mu = \nu \pm 1$; die 24 übrigen endlich haben die Periode 5; es sind die (a), bei denen $\nu = 1, 2, 3, 4$, die (c), bei denen $\mu = \nu \pm 1$ und die (d), bei denen $\mu = \nu \pm 2$. Man kontrolliert diese Angabe zweckmäßig durch Berechnung der bei den einzelnen Substitutionen ungeändert bleibenden Werte von η[12]).

Legt man f, H, T in nicht kanonischer Form zugrunde, so treten an Stelle der Substitutionen (3) in leicht verständlicher Weise solche, die sich darstellen lassen, wenn man in (3) statt η' und η bez. schreibt

$$\frac{\alpha\eta'+\beta}{\gamma\eta'+\delta}, \quad \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta},$$

wo $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ geeignet zu wählen sind.

§ 3.

Die Gruppe der 120 binären Substitutionen.

Schreibt man in (3) $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ statt η, $\frac{\eta_1'}{\eta_2'}$ statt η' und sondert Zähler und Nenner in der Art, daß die entstehenden binären Substitutionen die Determinante $+1$ haben, so entstehen folgende Formeln, *in denen das Vorzeichen notwendig willkürlich ist, so daß sie eine Gruppe von 120 binären linearen Substitutionen vorstellen.* Es werden η_1', η_2' bez. gleich:

$$(4)\quad\begin{cases}
\pm\,\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_1, & \pm\,\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_2, \\
\mp\,\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2, & \pm\,\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1, \\
\pm\,\dfrac{\varepsilon^{\frac{\mu}{2}}\left((\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1+\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, & \pm\,\dfrac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}}\left(\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1-(\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, \\
\mp\,\dfrac{\varepsilon^{\frac{\mu}{2}}\left(\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1-(\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}, & \pm\,\dfrac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}}\left((\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1+\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\varepsilon^2-\varepsilon^3}\ {}^{13)}.
\end{cases}$$

Aus der Gruppe von 60 Substitutionen der einen Veränderlichen η wird also eine doppelt so zahlreiche Gruppe binärer Substitutionen. Durch dieselben gehen übrigens, wie man von vornherein einsehen kann, f, H, T auch dem Vorzeichen nach in sich über.

Verzichtet man darauf, daß die Substitutionsdeterminante $= +1$ sein soll, sondern setzt sie nur (damit die Gruppe überhaupt aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen bestehe) einer Einheitswurzel gleich: $\sqrt[n]{1}$, so wird die Gesamtzahl der Substitutionen $120\,n$, indem η_1' und η_2' mit einer beliebigen Potenz von $\sqrt[2n]{1}$ simultan behaftet werden können. Es ist dies eine sehr selbstverständliche Bemerkung, die ich hier nur anführe, um das Verhalten der weiterhin zu gebrauchenden hypergeometrischen Reihen zu erklären. Bei ihnen ist $n = 6$, η_1' und η_2' können immer simultan um zwölfte Einheitswurzeln geändert werden. Dabei bleibt f ungeändert, aber nicht H und T, sondern erst H^3 und T^2.

Die Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen findet natürlich auch hier Anwendung; man hat nur noch die Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ zuzufügen.

§ 4.

Charakterisierung der Ikosaedergleichung.

Nach den Untersuchungen, welche ich [nach vorläufiger Ankündigung in den Erlanger Sitzungsberichten vom 13. Juli 1874] in den Math.

[12]) Vgl. die Darstellung bei Gordan, Math. Annalen, Bd. 12 (1877), S. 45, 46. [Es mag interessieren, zuzufügen, daß eine Wurzel von $H = 0$ durch $1 - \alpha\varepsilon - \alpha^2\varepsilon^4$ gegeben ist, unter α die dritte Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ verstanden, ebenso eine Wurzel von $T = 0$ durch $-i(\varepsilon-\varepsilon^4)+(\varepsilon^2+\varepsilon^3)$; die andern Wurzeln ergeben sich natürlich durch die 60 Ikosaedersubstitutionen. K.]

[13]) [Nach der symmetrischen Schreibweise, die im Ikosaederbuch eingehalten ist, würden die letzten beiden Zeilen so lauten:

$$\mp\,\frac{\varepsilon^{\frac{\mu}{2}}\left((\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1+(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\sqrt{5}}, \quad \mp\,\frac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}}\left((\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\sqrt{5}},$$

$$\mp\,\frac{\varepsilon^{\frac{\mu}{2}}\left((\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\sqrt{5}}, \quad \mp\,\frac{\varepsilon^{-\frac{\mu}{2}}\left((\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\eta_1+(\varepsilon-\varepsilon^4)\varepsilon^{\frac{\nu}{2}}\eta_2\right)}{\sqrt{5}}.$$

In dieser Form sind sie dann ohne weiteres verallgemeinerungsfähig. Vgl. die unten abgedruckte Abh. LVI. K.]

Annalen, Bd. 9 [Abh. LI] ausführte und die Gordan neuerdings auf dem Wege der Rechnung bestätigte [Math. Annalen, Bd. 12 (1877), S. 23—46], gibt es nur *dreierlei* Gruppen linearer Substitutionen einer Veränderlichen, welche 60 Substitutionen umfassen[14]). Die eine derselben ist die *Ikosaedergruppe*, wie sie durch (3) in kanonischer Form dargestellt ist. Die zweite gehört dem *Kreisteilungstypus* an und kann in kanonischer Form geschrieben werden:

$$\eta,\ \alpha\eta,\ \alpha^2\eta,\ \ldots,\ \alpha^{59}\eta,$$

wo $\alpha = \cos\frac{\pi}{30} + i\sin\frac{\pi}{30}$, die dritte dem *Diedertypus;* sie kann $\beta = \cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}$ gesetzt, in kanonischer Form folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{array}{cccc} \eta, & \beta\eta, & \ldots, & \beta^{29}\eta, \\ -\frac{1}{\eta}, & -\frac{\beta}{\eta}, & \ldots, & -\frac{\beta^{29}}{\eta}. \end{array}$$

Unter diesen dreierlei Gruppen ist die Ikosaedergruppe durch mannigfache Kennzeichen zu charakterisieren. Das einfachste und von mir später verwandte ist dieses: *Die Ikosaedergruppe enthält im Gegensatze zu den beiden anderen keine Substitution, deren Periode größer als 5 ist.*

Infolgedessen kann man den allgemeinen Satz aussprechen: *Wenn eine Größe η durch eine Gleichung sechzigsten Grades von gegebenen Größen $a, b, c, \ldots$ in der Weise abhängt, daß sich jeder Wert von η aus einem beliebigen der 60 Werte durch lineare Substitution mit numerischen Koeffizienten ergibt, wenn ferner keine dieser Substitutionen eine Periode > 5 besitzt, so hängt η von einer Ikosaedergleichung ab:*

$$\frac{-5\cdot 144\, H^3(\eta)}{7\, B f^5(\eta)} = \Phi(a, b, c, \ldots)\,^{15)},$$

wo die Koeffizienten von f, H numerisch sind.

Führt man dann statt η durch geeignete lineare Substitution ein neues η ein, so erhält man in kanonischer Form:

$$1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = \Phi(a, b, c, \ldots).$$

Der hiermit ausgesprochene Satz wird weiterhin die allerwesentlichste Rolle spielen. In den Fällen, in denen er zur Anwendung kommt, ist die Wahl eines kanonischen η durch die Bedingungen der Aufgabe jedesmal von vornherein ermöglicht, so daß eine Reduktion der allgemeineren

[14]) Vgl. auch Camille Jordan in den Comptes Rendus. 1877. 1. (Bd. 84).

[15]) Wenn $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, so schreibe ich künftig $\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)}$ statt $\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)}$.

Ikosaedergleichung auf die kanonische, wie sie nun gelehrt werden soll, nicht noch notwendig ist. Aber die folgende Auseinandersetzung muß hier ihre Stelle finden, damit der Zusammenhang deutlich sei, welcher zwischen der Darstellung in meiner vorigen Arbeit [Math. Annalen, Bd. 9 (Abh. LI)] und der nun eingehaltenen besteht.

§ 5.

Die allgemeine Ikosaedergleichung ist mit zwei kanonischen äquivalent.

Um die allgemeinere Ikosaedergleichung (die ich durch Indizes bez. Akzente auszeichnen will):

$$\frac{-5\cdot 144\cdot H_1^3(\eta_1', \eta_2')}{7\cdot B_1\cdot f_1^5(\eta_1', \eta_2')} = X \tag{5}$$

auf die kanonische

$$1728\,\frac{H^3(\eta_1, \eta_2)}{f^5(\eta_1, \eta_2)} = X \tag{6}$$

zurückzuführen, muß man, wie bereits bemerkt, statt $\frac{\eta_1'}{\eta_2'}$ eine geeignete lineare Kombination $\frac{\alpha\eta_1' + \beta\eta_2'}{\gamma\eta_1' + \delta\eta_2'}$ als neue Unbekannte einführen. Die Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verlangt, wie ich jetzt zeigen werde, eben wieder die Auflösung einer kanonischen Ikosaedergleichung.

Um nämlich die Substitution zu finden, welche (5) in (6) überführt, hat man nur diejenigen drei Werte a, b, c von η zu suchen, welche drei beliebig angenommenen Werten a', b', c' von η' vermöge der Substitution entsprechen. Nun ist aber die linke Seite von (5) — wenn der Ausdruck gestattet ist — eine *absolute* Kovariante, die sich bei linearer Substitution nicht ändert. Daher hat man zur Bestimmung von a, b, c die Gleichungen:

$$1728\,\frac{H^3(a)}{f^5(a)} = -\frac{5\cdot 144\, H_1^3(a')}{7\, B_1 f_1^5(a')};\quad 1728\,\frac{H^3(b)}{f^5(b)} = -\frac{5\cdot 144\, H_1^3(b')}{7\, B_1 f_1^5(b')};$$

$$1728\,\frac{H^3(c)}{f^5(c)} = -\frac{5\cdot 144\, H_1^3(c')}{7\, B_1 f_1^5(c')}.$$

Diese drei Gleichungen [in denen wir a', b', c' als rational bekannt ansehen], sind „kanonische“ Ikosaedergleichungen. Es genügt, eine derselben zu lösen, da man die drei Werte a', b', c' konsekutiv nehmen kann und sich dann aus den Wurzeln der einen Gleichung die zugehörigen Wurzeln der beiden anderen Gleichungen rational ergeben.

Die allgemeinere Ikosaedergleichung wird also dadurch gelöst, daß man nacheinander zwei kanonische Ikosaedergleichungen erledigt [wobei die fünfte Einheitswurzel ε natürlich nur das einemal zu adjungieren ist].

Einen besonderen Fall der allgemeineren Gleichungen, der wieder mit den kanonischen Gleichungen auf derselben Stufe steht, hatte ich in den Math. Annalen, Bd. 9 [Abh. LI] betrachtet. Es ist der Fall $X=\infty$, wo also die Gleichung

$$f_1(\eta_1', \eta_2') = 0$$

zur Lösung vorgelegt ist. Da die spezielle Gleichung

$$f(\eta_1, \eta_2) = 0$$

gelöst ist, [weil eben ε als bekannt vorausgesetzt wurde] (siehe oben § 2), so verlangt das damals gestellte Problem im Sinne der hier gebrauchten Ausdrucksweise nur die Lösung *einer* kanonischen Ikosaedergleichung. Hierin ist die Übereinstimmung begründet, welche zwischen den weiterhin abzuleitenden Eigenschaften der (kanonischen) Ikosaedergleichung und den damals gewonnenen Resultaten besteht.

§ 6.

Gruppe der Ikosaedergleichung. Konforme Abbildung.

Man kann (nach Adjunktion des ε) jede Funktion der Wurzeln der Ikosaedergleichung vermöge der Formeln (3) als Funktion einer einzelnen Wurzel darstellen. Substituiert man nur für diese eine Wurzel eben wieder vermöge der Formeln (3) der Reihe nach jede andere und ändert sich dabei der Wert der Funktion nicht, so ist sie offenbar rational. Daher: *Die Galoissche Gruppe der Ikosaedergleichung besteht aus 60 Permutationen. Man erhält dieselbe, wenn man die 60 Wurzeln als Funktionen von einer unter ihnen auffaßt und auf diese eine die Substitutionen* (3) *anwendet.* Die Struktur dieser Gruppe läßt sich, wie ich auch in den Math. Annalen, Bd. 9 [Abh. LI, S. 301] angab, am besten folgendermaßen charakterisieren. Es gibt, wie weiterhin noch ausführlich zu erläutern ist, fünfwertige Funktionen von η, welche bei jeder der 60 Substitutionen (3) eine Permutation erfahren. Nun läßt sich aus den 120 Vertauschungen von fünf Dingen nur eine Gruppe von 60 zusammensetzen, das ist die Gesamtheit der geraden Vertauschungen. Ihr also entspricht die hier vorliegende Gruppe der Ikosaedergleichung.

Äußerst anschaulich werden die Beziehungen zwischen den Wurzeln durch die konforme Abbildung, welche Schwarz a. a. O. angibt. Durch die Symmetrieebenen des Ikosaeders wird die η-Kugel in 120 abwechselnd kongruente und symmetrische Dreiecke mit den Eckenwinkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ zerlegt. *Die 60 Dreiecke der einen Art sind dann das Bild der positiven, die 60 Dreiecke der anderen Art das Bild der negativen Halbebene X.*

Die Ecken $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ *entsprechen* $X = 0, \infty, 1$ [16]). Die 60 Wurzeln einer Ikosaedergleichung sind immer durch 60 homologe Punkte zusammengehöriger Dreiecke vorgestellt. Die Permutationen der Wurzeln, welche die Galoissche Gruppe bilden, werden durch die 60 Drehungen erzeugt, welche das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen.

§ 7.

Lösung der Ikosaedergleichung resp. unseres Fundamentalproblems durch hypergeometrische Reihen[17]).

Der zitierten Abhandlung von Schwarz kann man ferner unmittelbar entnehmen, daß sich die Ikosaedergleichung resp. unser Fundamentalproblem durch hypergeometrische Reihen lösen läßt[18]). Dies läßt sich auf verschiedenartige Weise bewerkstelligen (vgl. § 9), am einfachsten in der Weise, daß man $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ gleichsetzt dem Quotienten zweier geeigneter Partikularlösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{d^2 y}{d X^2} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1) X}{X \cdot 1 - X} \cdot \frac{dy}{dX} - \frac{\alpha \cdot \beta}{X \cdot 1 - X} \cdot y,$$

wo X den Parameter der Ikosaedergleichung selbst bedeutet und die Ausdrücke $(1-\gamma)^2, (\alpha-\beta)^2, (\gamma-\alpha-\beta)^2$ in irgendeiner Reihenfolge gleichzusetzen sind $\frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{4}$. Ich will diese Partikularlösungen selbst mit η_1, η_2 bezeichnen; sie sind zunächst, wie selbstverständlich, nur bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor bestimmt. Ferner wähle ich:

$$1-\gamma = \frac{1}{3}, \quad \alpha-\beta = \frac{1}{5}, \quad \gamma-\alpha-\beta = \frac{1}{2}$$

und also:

(7) $$\alpha = \frac{11}{60}, \quad \beta = -\frac{1}{60} \quad \gamma = \frac{2}{3}.$$

Dann folgt durch Differentiation der Gleichung:

$$1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = X$$

[16]) Beiläufig sei bemerkt: Aus dieser Abbildung gehen Sätze wie folgende hervor: *Für jedes X kann man die 60 Wurzeln η von vornherein separieren, für reelles X sind immer 4 und nur 4 Wurzeln η reell.*

[17]) Die Entwicklungen der §§ 7, 8, 9 stehen mit den übrigen Betrachtungen des Textes nur in losem Zusammenhange. In § 10 nehme ich die algebraische Untersuchung wieder auf.

[18]) Die gleiche Bemerkung macht Brioschi, Annali di Matematica, Serie II, Bd. 8, (1876) a. a. O.

für $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, und durch Anwendung des bekannten Satzes:

$$\eta_1' \eta_2 - \eta_2' \eta_1 = C \cdot X^{-\gamma}(1 - X)^{\gamma - \alpha - \beta - 1}$$

das einfache Resultat:

$$(8) \qquad \eta_1 = \varrho \cdot \frac{\eta}{\sqrt[12]{f(\eta)}}, \quad \eta_2 = \varrho \cdot \frac{1}{\sqrt[12]{f(\eta)}}$$

und also

$$f(\eta_1, \eta_2) = \varrho^{12},$$

wo ϱ einen konstanten Faktor bedeutet[19]).

Handelt es sich jetzt um Auflösung des in § 1 aufgestellten Fundamentalproblems, so verfahre man folgendermaßen. Man berechne zunächst die Größe

$$X = 1728 \frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)},$$

und dann aus ihr die sogleich noch näher zu bezeichnenden hypergeometrischen η_1, η_2, wobei man ϱ so wählen muß, daß es gleich ist der zwölften Wurzel aus dem vorgegebenen Werte von f. Hierdurch sind η_1, η_2 bis auf eine zwölfte Einheitswurzel bestimmt; diese letzteren gewinnt man, soweit sie überhaupt bestimmbar sind (nämlich bis aufs Vorzeichen) durch Vergleich der vorgegebenen Werte von H und T.

In den Formeln, die ich nun aufstellen werde, ist ϱ der Einfachheit wegen gleich 1 gesetzt; man hat also die mitzuteilenden Werte von η_1, η_2 im einzelnen Falle mit $\sqrt[12]{f(\eta_1, \eta_2)}$ zu multiplizieren. Aus den Formeln (8) geht hervor, daß η_1, η_2, wenn sich X in der komplexen Ebene bewegt, ein System von 720 binären linearen Substitutionen erfahren, wie in § 3 zum Schluß angegeben wurde.

§ 8.

Bestimmung der Partikularlösungen η_1, η_2.

Da sich alle in Betracht kommenden Werte von η_1, η_2 aus einem Wertepaare durch die 120 binären Ikosaedersubstitutionen (4) ergeben, so genügt es, *ein* Paar η_1, η_2 zu berechnen, und ich benutze die soeben genannte konforme Abbildung zur Berechnung dieses Paares. Um den Unendlichkeitspunkt der η-Kugel scharen sich fünf der oben bezeichneten 60 Dreiecke, welche die Bilder der positiven Halbebene X sind; sie sind in der Fig. 1, welche die Umgebung des Punktes $\eta = \infty$ schematisch darstellen soll, schraffiert[20]).

[19]) Vgl. meine Note über lineare Differentialgleichungen in den Math. Annalen, Bd. 12 (1877) [Abh. LIII, S. 318—320].

[20]) [Das η-Argument von H' ist das oben angegebene

$$1 - \alpha\varepsilon - \alpha^2\varepsilon^4 = 1 + 2\cos\frac{\pi}{15} = 2{,}9563\ldots,$$

das η-Argument von T' ist

$$\varepsilon^3[(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) - i(\varepsilon - \varepsilon^4)] = 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\right)\varepsilon^3 = -3{,}5201\,\varepsilon^3.$$

K.]

Die Richtung des geradlinigen Pfeiles soll die Richtung des durch den Punkt $\eta = \infty$ in dem Sinne $-\infty, 0, +\infty$ hindurchgehenden Meridians der reellen Zahlen bedeuten. So wähle ich als Bild der positiven Halbebene X dasjenige schraffierte Dreieck, welches mit dem Buchstaben η_0 bezeichnet ist (und später als Bild der negativen Halbebene X das mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete, anliegende, nicht schraffierte Dreieck). Läßt man jetzt X in positivem Sinne den Unendlichkeitspunkt (der X-Ebene) umkreisen, so bewegt sich η_0 im Sinne des in der Figur beigesetzten (gekrümmten) Pfeiles und verwandelt sich in η_1[21]). Dies aber kommt einer positiven Drehung der η-Kugel durch $\frac{2\pi}{5}$ um den Durchmesser 0∞ gleich, d. h.

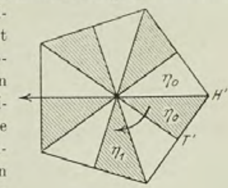

Fig. 1.

Der Funktionszweig η_0 hat die Eigenschaft, wenn X den Unendlichkeitspunkt in positivem Sinne umkreist, den Faktor ε zu erhalten.

Nun gibt es aber von konstanten Faktoren abgesehen nur zwei Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung, welche bei Umkreisung des Punktes $X = \infty$ in Multipla ihrer selbst übergehen; es sind im vorliegenden Falle (unter $\varkappa, \lambda$ die konstanten Faktoren verstanden):

$$A = \varkappa(1 - X)^{\frac{1}{60}} \cdot F\left(-\frac{1}{60}, \frac{29}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1-X}\right),$$

$$B = \lambda(1 - X)^{-\frac{11}{60}} \cdot F\left(\frac{11}{60}, \frac{41}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{1-X}\right),$$

oder, in anderer Darstellung:

$$A_1 = \varkappa_1 X^{\frac{1}{60}} \cdot F\left(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{X}\right),$$

$$B_1 = \lambda_1 X^{-\frac{11}{60}} \cdot F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{X}\right).$$

Setzen wir wieder $\eta_0 = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, so muß bei richtiger Wahl der $\varkappa, \lambda$ bez. $\varkappa_1, \lambda_1$ das η_1 mit A und A_1, das η_2 mit B und B_1 übereinstimmen, weil $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ für $X = \infty$ selbst ∞ wird. Die Konstanten $\varkappa, \lambda$ berechnen sich [aus dem Umstande, daß für große Werte von η in erster Annäherung $1 - X = \frac{\eta^5}{1728}$

[21]) [Um Verwechslungen vorzubeugen, sei ausdrücklich bemerkt, daß η_1 hier *nicht* homogene Koordinate ist.]

ist, und der Forderung, die ich gemäß § 7 einführe, *daß $f(\eta_1, \eta_2)$ gleich Eins sein soll.* So findet man[22]) bis auf zwölfte Einheitswurzeln:

$$(9)\quad \begin{cases} \eta_1 = \sqrt[20]{12}\cdot(1-X)^{\frac{1}{60}}\cdot F\left(-\frac{1}{60}, \frac{29}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1-X}\right) \\ \eta_2 = \frac{1}{\sqrt[20]{12^{11}}}\cdot(1-X)^{-\frac{11}{60}}\cdot F\left(\frac{11}{60}, \frac{41}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{1-X}\right), \end{cases}$$

wobei $\sqrt[20]{12} = 1{,}13229$ und $1 : \sqrt[20]{12^{11}} = 0{,}25495$; oder man hat, was auf dasselbe hinauskommt:

$$(10)\quad \begin{cases} \eta_1 = e^{-\frac{i\pi}{60}}\cdot\sqrt[20]{12}\cdot X^{\frac{1}{60}}\cdot F\left(-\frac{1}{60}, \frac{19}{60}, \frac{4}{5}, \frac{1}{X}\right) \\ \eta_2 = \frac{e^{\frac{11 i\pi}{60}}}{\sqrt[20]{12^{11}}}\cdot X^{-\frac{11}{60}}\cdot F\left(\frac{11}{60}, \frac{31}{60}, \frac{6}{5}, \frac{1}{X}\right), \end{cases}$$

wobei

$$e^{-\frac{i\pi}{60}}\sqrt[20]{12} = 1{,}13074 - 0{,}05926\, i$$

und

$$e^{\frac{11 i\pi}{60}} : \sqrt[20]{12^{11}} = 0{,}21382 + 0{,}13885\, i\ ^{23}).$$

Von diesen Darstellungen konvergiert die erste für alle Werte von X, für welche der absolute Betrag $|1-X| \geqq 1$, die zweite für diejenigen, deren absoluter Betrag $|X| \geqq 1$. Die sechzigsten Wurzeln sind so zu nehmen, daß die Amplitude zwischen 0 und 3 Grad liegt.

Um für die hierdurch noch ausgeschlossenen X ebenfalls eine [zu Fig. 1 gehörige] Formel zu haben, benutze ich in bekannter Weise andere Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung. Ist:

$$F_1 = F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{2}{3}, X\right)$$

$$F_2 = F\left(\frac{11}{60}, -\frac{1}{60}, \frac{1}{2}, 1-X\right),$$

so kommt

$$(11)\quad \begin{cases} \eta_1 = (0{,}09072 + 1{,}73116 i) F_1 + (1{,}02130 - 1{,}76895 i) F_2 \\ \eta_2 = (3{,}32355 - 5{,}11783 i) F_1 + (-3{,}01928 + 5{,}22954 i) F_2\ ^{24}), \end{cases}$$

und diese Darstellung konvergiert für alle bislang ausgeschlossene X, diejenigen nämlich, bei denen gleichzeitig $|X| \leqq 1$ und $|1-X| \leqq 1$.

[22]) Die konforme Abbildung zeigt immer unzweideutig, welche Werte nach Annahme der $\sqrt[20]{12}$ den vieldeutigen Wurzelzeichen beizulegen sind. Hierauf ist in den Darstellungen, welche ich kenne, nicht genügend Rücksicht genommen.

[23]) [Beim Wiederabdruck wurden die numerischen Konstanten genauer charakterisiert.]

[24]) Bei diesen Rechnungen, sowie bei vielen der im folgenden ausgeführten, hat mich Herr stud. Gierster in dankenswerter Weise unterstützt.

Die Formeln (9), (10), (11) *definieren die gewünschten η_1, η_2 für jedes X der positiven Halbebene.*

Um auch Formeln für die negative Halbebene zu haben, welche dem oben bezeichneten nicht schraffierten Dreiecke entsprechen, hat man (9) unverändert beizuhalten und in (10) und (11) das i der konstanten Faktoren in $-i$ zu verwandeln.

§ 9.

Anderweitige Lösungen der Ikosaedergleichung.

Neben die hier entwickelte Lösung der Ikosaedergleichung stellen sich unbegrenzt viele andere von ähnlichem Charakter. Schreibt man nämlich in

$$1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = X$$

statt X eine rationale Funktion einer neuen Veränderlichen x:

$$1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = R(x),$$

so kann η wieder (und noch auf unbegrenzt viele Weisen) dargestellt werden als Quotient zweier Partikularlösungen einer linearen Differentialgleichung, bei der x die unabhängige Variable ist und die Koeffizienten rational in x sind. Man kann $R(x)$ insbesondere so wählen, daß die Differentialgleichung selbst wieder eine hypergeometrische wird; derartige Werte von $R(x)$ sind von Brioschi (Math. Annalen, Bd. 11 (1877), S. 410 [= Werke Bd. V, S. 222]) und von mir (Math. Annalen, Bd. 12 (1877) [Abh. LIII, S. 315 ff.]) angegeben. Ich will hier nur den einen Wert von $R(x)$ herausgreifen, der dem Falle XIII der von Schwarz[25]) gegebenen Tabelle entspricht, insofern ich bei einer späteren Gelegenheit von diesen Formeln Gebrauch machen möchte:

$$R(x) = \frac{1}{108}\cdot\frac{(x^2+14x+1)^3}{x(1-x)^4}.$$

Für die entsprechende hypergeometrische Differentialgleichung hat man $(1-\gamma)^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $(\gamma-\alpha-\beta)^2$ in irgendeiner Anordnung gleichzusetzen $\frac{1}{25}, \frac{1}{25}, \frac{16}{25}$, also etwa $\gamma = \frac{4}{5}$, $\alpha = \frac{1}{10}$, $\beta = -\frac{1}{10}$.

Setzt man wieder $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ und nimmt η_1, η_2 als Partikularlösungen dieser Differentialgleichung, so kommt:

$$\eta_1 = \varrho\cdot\frac{x^{\frac{1}{60}}(1-x)^{\frac{1}{15}}\eta}{\sqrt[12]{f(\eta)}},\quad \eta_2 = \varrho\cdot\frac{x^{\frac{1}{60}}(1-x)^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[12]{f(\eta)}}$$

[25]) S. 323 der zitierten Arbeit.

und man hat also, für $\varrho = 1$, die Lösungen der folgenden Aufgabe vor sich, die ein besonderer Fall des Fundamentalproblems des § 1 ist:

$$(12)\qquad \begin{cases} f(\eta_1, \eta_2) = x(1-x)^4, \\ H(\eta_1, \eta_2) = x^2 + 14x + 1, \\ T(\eta_1, \eta_2) = x^3 - 33x^2 - 33x + 1. \end{cases}$$

Ich unterlasse es hier, die Partikularlösungen η_1, η_2 explizite anzugeben[26]).

§ 10.

Resolventen niederen Grades der Ikosaedergleichung.

Wenn man auf eine ganze homogene Funktion gerader Ordnung von η_1, η_2 (und solche will ich allein betrachten) die 120 binären Ikosaedersubstitutionen (4) anwendet, so nimmt sie im allgemeinen 60 Werte an; sie kann selbstverständlicherweise im besonderen Falle weniger Werte erhalten, deren Zahl ein Teiler von 60 ist.

Dann stellt sie, gleich Null gesetzt, eine solche Punktgruppe auf der η-Kugel dar, welche durch einige der 60 Drehungen, die das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, ungeändert bleibt. Umgekehrt, indem man die einfachsten solchen Punktgruppen aufsucht, gewinnt man die niedrigsten Funktionen der gemeinten Art, welche als Wurzeln von Resolventen der Ikosaedergleichung verwandt werden können.

Aus den 60 Drehungen, welche das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, lassen sich Untergruppen von 2, 3, 5, 4, 6, 10, 12 Substitutionen bilden, von denen die drei ersten dem Kreisteilungstypus, die folgenden drei dem Diedertypus, die letzte dem Tetraedertypus angehört. Entsprechend erhält man Resolventen vom Grade 30, 20, 12, 15, 10, 6, 5. Da es meine vorzügliche Absicht ist, vom Ikosaeder aus zu den Untersuchungen über die Gleichungen fünften Grades und über die Jacobischen Gleichungen sechsten Grades zu gelangen, so werde ich mich auf die Herleitung einer Resolvente vom sechsten Grade und verschiedener Resolventen fünften Grades beschränken.

[26]) [Ich habe diesen Fall ursprünglich herausgegriffen, weil ich den Legendreschen Modul eines elliptischen Integrals so einführen wollte, wie es Abel tut. Heute würde ich lieber, um an dieser Stelle den Anschluß an Jacobi zu haben, $R(x) = \frac{4}{27}\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(1-x)^2}$ wählen. Vgl. meine oben zitierte in Bd. 3 abzudruckende Abhandlung über elliptische Funktionen und Gleichungen fünften Grades, besonders Abschnitt III, § 7 und die Figuren daselbst. K.]

§ 11.

Eine Resolvente vom sechsten Grade.

Eine Resolvente vom sechsten Grade gewinnt man am einfachsten, wenn man beachtet, daß die Wurzelpunkte von $f = 0$ in sechs Paare gegenüberstehender zerfallen. Sei $\varphi(\eta_1, \eta_2) = 0$ ein solches Punktepaar. Durch eine lineare Substitution von der Determinante $+1$, welche $\varphi = 0$ ungeändert läßt, geht bekanntlich $+\varphi$ in $+\varphi$ oder $-\varphi$ über, je nachdem bei der Substitution die Wurzeln von $\varphi = 0$ einzeln ungeändert bleiben oder untereinander vertauscht werden. Nun gibt es unter den Drehungen, die das Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen, allerdings solche, welche gegenüberstehende Eckpunkte des Ikosaeders vertauschen. *Daher ist $\varphi(\eta_1, \eta_2)$ (mit bestimmter Determinante genommen) eine zwölfwertige, und erst φ^2 eine sechswertige Funktion.*

Ich will $\varphi(\eta_1, \eta_2)$ mit der Determinante $+5$ annehmen. Dann hat man, bei willkürlich angenommenem Vorzeichen und auch sonst gebräuchlicher Indexbezeichnung (vgl. Math. Annalen, Bd. 9 [Abh. LI, S. 298]):

$$(13)\qquad \begin{cases} \varphi_\infty = \sqrt{5}\cdot\eta_1\cdot\eta_2, \\ \varphi_\nu = \varepsilon^{-\nu}\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 - \varepsilon^{+\nu}\eta_2^2, \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{cases}$$

und

$$\varphi_\infty\,\varphi_0\,\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\,\varphi_4 = \sqrt{5}\cdot f.$$

Setzt man jetzt $z = \varphi^2$, also $z_\infty = \varphi_\infty^2$, $z_\nu = \varphi_\nu^2$, so erhält man die Gleichung, der z genügt, unmittelbar aus der Bemerkung: *daß die symmetrischen Funktionen der sechs φ^2 jedenfalls ganze Funktionen von f, H, T sind.* Daher kommt:

$$\sum z = 0, \quad \sum z^2 = 0, \quad \sum z^3 = \varkappa f, \quad \sum z^4 = 0, \quad \sum z^5 = \lambda H,$$

wo $\varkappa, \lambda$ Zahlenfaktoren bedeuten, die man durch ein einzelnes Glied bestimmt. *Auf diese Weise findet man:*

$$(14)\qquad z^6 - 10fz^3 + 144Hz + 5f^2 = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung:

$$\prod(\varphi_i^2 - \varphi_k^2)^2$$

hat eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft. Es ist

$$\varphi_i^2 - \varphi_k^2 = (\varphi_i + \varphi_k)(\varphi_i - \varphi_k)$$

und es stellt, wie ich früher bemerkte (Math. Annalen, Bd. 9 [Abh. LI, S. 298]) sowohl $\varphi_i + \varphi_k = 0$ als $\varphi_i - \varphi_k = 0$ eins der 15 Punktepaare von T vor. *Daher ist die Diskriminante bis auf einen Zahlenfaktor gleich T^4.* Ist also die vorstehende Gleichung sechsten Grades, d. h. ist einfach f und H gegeben, so ist die Quadratwurzel aus der Diskriminante rational bekannt; ist aber, wie beim Fundamentalprobleme in § 1 vorausgesetzt wird, von vornherein auch T gegeben, so kennt man sogar die vierte Wurzel.

§ 12.

Die Jacobischen Gleichungen sechsten Grades.

Bekanntlich hat Jacobi[27]) als Eigenschaft der Multiplikatorgleichungen vom $(n+1)$-ten Grade, die bei Transformation n-ter Ordnung der elliptischen Funktionen auftreten (n Primzahl), angegeben, daß sich die aus den $(n+1)$ Wurzeln gezogenen Quadratwurzeln aus $\frac{n+1}{2}$ Größen $A_0, \ldots, A_{\frac{n-1}{2}}$ in folgender Weise zusammensetzen lassen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{z_\infty} &= \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n}\cdot A_0\\
\sqrt{z_0} &= A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{\frac{n-1}{2}}\\
\sqrt{z_1} &= A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^4 A_2 + \ldots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\cdot A_{\frac{n-1}{2}}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sqrt{z_{n-1}} &= A_0 + \varepsilon^{n-1} A_1 + \varepsilon^{4(n-1)} A_2 + \ldots + \varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 (n-1)}\cdot A_{\frac{n-1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

und es sind diese Gleichungen von Kronecker und Brioschi für $n=5$ *allgemein* untersucht worden[28]).

Die prinzipielle Bedeutung dieser Gleichungen — ganz unabhängig von ihrem Zusammenhange mit den elliptischen Funktionen — läßt sich unter den allgemeinen Gesichtspunkt der Einleitung subsummieren. *Die Vertauschungen der Größen $\sqrt{z}$, welche [nach Adjunktion des ε] die Galoissche Gruppe der Jacobischen Gleichung ausmachen, sind durch lineare Substitutionen der Größen $A_0 \ldots A_{\frac{n-1}{2}}$ vorgestellt.* Denn bestimmt man für eine vorgelegte Jacobische Gleichung alle Systeme von Größen $A_0, A_1, \ldots$, welche den zulässigen Anordnungen der Wurzeln entsprechen, so geht das einzelne System dieser Größen aus einem beliebigen zugrunde gelegten durch homogene lineare Substitution mit [rational bekannten] numerischen Koeffizienten hervor. Ich werde dies weiter unten (Abschn. II, § 8) für die Jacobischen Gleichungen vom sechsten Grade noch näher ausführen und dadurch zeigen, weshalb zwischen ihnen und den Ikosaeder-

[27]) Crelles Journal, Bd. 3 (1828), S. 308. [= Werke Bd. I, S. 255 f.]

[28]) Vgl. die Zitate der Einleitung, sowie die Auseinandersetzungen des zweiten hier folgenden Abschnittes.

problemen der engste Zusammenhang bestehen *muß*. Hier begnüge ich mich, diesen Zusammenhang in dem zunächst vorliegenden Falle einfach aufzuweisen.

Für die Jacobischen Gleichungen sechsten Grades hat man die Definitionsgleichungen:

$$(15)\qquad \sqrt{z_\infty} = \sqrt{5}\cdot A_0,\quad \sqrt{z_\nu} = A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{-\nu} A_2$$
$$\left(\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5},\quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\right)$$

und findet durch Ausrechnung:

$$(16)\qquad (z-A)^6 - 4A(z-A)^5 + 10B(z-A)^3 - C(z-A) + 5B^2 - AC = 0,$$

wo A, B, C die folgenden Ausdrücke bedeuten:

$$(17)\qquad \begin{cases} A = A_0^2 + A_1A_2\\ B = 8A_0^4A_1A_2 - 2A_0^2A_1^2A_2^2 + A_1^3A_2^3 - A_0(A_1^5 + A_2^5)\\ C = 320A_0^6A_1^2A_2^2 - 160A_0^4A_1^3A_2^3 + 20A_0^2A_1^4A_2^4 + 6A_1^5A_2^5\\ \quad - 4A_0(A_1^5 + A_2^5)(32A_0^4 - 20A_0^2A_1A_2 + 5A_1^2A_2^2) + A_1^{10} + A_2^{10}. \end{cases}$$

Setzt man nun insbesondere $A=0$, wodurch man *spezielle* Gleichungen erhält, die Kronecker seiner Lösung der Gleichungen fünften Grades zugrunde legte, so kommt einfach:

$$(18)\qquad z^6 + 10Bz^3 - Cz + 5B^2 = 0.$$

Diese Gleichung aber wird mit der Gleichung (14) *des vorigen Paragraphen identisch, sobald man setzt:*

$$B = -f,\quad C = -144H.$$

In der Tat stimmen auch die Definitionsgleichungen des vorigen Paragraphen für $\sqrt{z}$ mit den hier angewandten überein; man hat nur zu setzen: $\qquad A_0 = \eta_1\eta_2,\quad A_1 = +\eta_2^2,\quad A_2 = -\eta_1^2$

und befriedigt dadurch zugleich in allgemeinster Weise die Bedingung $A=0$.

Wird die Gleichung (18) gegeben und zugleich die vierte Wurzel aus ihrer Diskriminante adjungiert, so hat man die Zahlenwerte von f, H, T. Alle Entwicklungen also, die hier an das Fundamentalproblem des § 1 angeknüpft werden, können auch so dargestellt werden, daß die spezielle Jacobische Gleichung sechsten Grades den Ausgangspunkt bildet. Doch scheint das weniger naturgemäß.

§ 13.

Die Resolventen fünften Grades der Ikosaedergleichung. Einleitung.

Daß die Jacobischen Gleichungen sechsten Grades[29]) nach Adjunktion der vierten Wurzel ihrer Diskriminante sehr einfache Resolventen fünften Grades besitzen, *bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der*

[29]) Richtiger wohl: die Gleichungen zwölften Grades, von der die $\sqrt{z}$ abhängen.

Wurzelkuben gleich Null ist, hat Brioschi zuerst gefunden. Seine hauptsächlichen Formeln, die ich später benutze, sind diese[30]). Setzt man:

$$y_\nu = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\left((z_\infty - z_\nu)(z_{\nu+1} - z_{\nu-1})(z_{\nu+2} - z_{\nu-2})\right)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

(eine Formel, die auf mannigfache Weise umgeschrieben werden kann), so drücken sich die y_ν folgendermaßen durch die A_0, A_1, A_2 aus:

$$y_\nu = \varepsilon^\nu P_1 + \varepsilon^{2\nu} P_2 + \varepsilon^{3\nu} P_3 + \varepsilon^{4\nu} P_4, \tag{20}$$

wo

$$\begin{cases} P_1 = -A_1(4A_0^2 - A_1A_2), \\ P_2 = (+2A_0A_1^2 - A_2^3), \\ P_3 = (-2A_0A_2^2 + A_1^3), \\ P_4 = +A_2(4A_0^2 - A_1A_2), \end{cases} \tag{21}$$

und genügen der Gleichung fünften Grades:

$$y^5 + 10By^3 + 5(9B^2 - AC)y - \sqrt[4]{\Pi} = 0, \tag{22}$$

wo Π die Diskriminante der Jacobischen Gleichung und

$$\sqrt{\Pi} = -1728B^5 + 720ACB^3 - 80A^2C^2B + 64A^3(5B^2 - AC)^2 + C^3 \tag{23}$$

ist.

Wenn $A = 0$, so wird die Gleichung (22):

$$y^5 + 10By^3 + 45B^2y - \sqrt[4]{\Pi} = 0 \tag{24}$$

und, für $B = -f$, $C = -144H$:

$$\sqrt{\Pi} = 1728f^5 - 144^3H^3 = 144T^2.$$

Um jetzt vom Ikosaeder aus zu dieser Resolvente fünften Grades und anderen desselben Grades zu gelangen, die später wichtig werden, stelle ich folgende Betrachtungen an.

§ 14.

Die Resolventen fünften Grades der Ikosaedergleichung. Geometrische Orientierung.

Die Existenz der Resolventen fünften Grades beruht auf dem Umstande, daß sich aus den 60 Drehungen des Ikosaeders Untergruppen von 12 bilden lassen, und diese Untergruppen gehören, wie oben bemerkt, dem *Tetraedertypus* an. Es bleiben also bei solchen 12 Drehungen, geometrisch zu reden, ungeändert: zwei reguläre Tetraeder, τ_1 und τ_2, welche zusammen die Ecken eines Würfels W bilden, dann ein Oktaeder t, und übrigens Aggregate von je 12 zusammengehörigen Punkten. In unserem Falle ist der Würfel W unter den Ecken von H, das Oktaeder t unter den Ecken

[30]) Die Zahlenkoeffizienten sind im Texte so mitgeteilt, wie sie Joubert später berechnet hat (Comptes Rendus 1867, 1, Bd. 64, S. 1237).

von T zu suchen. Die Ecken von f bilden eine Gruppe von zusammengehörigen 12 Punkten, ebenso die $\frac{H}{W}$, während die $\frac{T}{t}$ in zwei solche Gruppen zerfallen.

Betrachten wir jetzt die entsprechenden ganzen Funktionen von η_1, η_2 und ersetzen die 12 Drehungen durch die entsprechenden 24 binären Ikosaedersubstitutionen von der Determinante $+1$. Man findet dann, daß nicht $\tau_1(\eta_1, \eta_2)$ und $\tau_2(\eta_1, \eta_2)$ in sich übergeführt werden, sondern erst ihre dritten Potenzen. Unmittelbar ungeändert bleibt dagegen $t(\eta_1, \eta_2)$ (die Funktionaldeterminante von τ_1 und τ_2) sowie das Produkt $\tau_1 \cdot \tau_2 = W(\eta_1, \eta_2)$ (welches sich zugleich als Hessesche von t auffassen läßt). Ungeändert bleiben ferner alle Funktionen zwölften Grades, welche gleich Null gesetzt, zusammengehörige Punkte vorstellen, insbesondere also f[31]). Alle derartigen Funktionen kann man in der Form $\varkappa t^2 + \lambda f$ anschreiben.

Die einfachsten Funktionen also, welche man als Wurzeln der Resolventen fünften Grades wählen kann, sind $t(\eta_1, \eta_2)$ und $W(\eta_1, \eta_2)$, und mit ihnen mögen wir uns zunächst beschäftigen. Wünschen wir später Funktionen nullter Ordnung von η_1, η_2, d. h. Funktionen von η, so ist die nächstliegende $\frac{t^2}{f}$ und durch sie drücken sich alle anderen rational aus. (Vgl. meine Note in den Math. Annalen, Bd. 12 [Abh. LIII, S. 309 und 313].)

Ich will hier noch die 12 linearen Substitutionen zusammenstellen, welche im Sinne der sogleich einzuführenden Bezeichnung das Oktaeder t_0 resp. den Würfel W_0 ungeändert lassen. Es sind diese

$$\left\{\begin{array}{l} \text{1. Die Identität } \eta' = \eta \\ \text{2. Drei Substitutionen von der Periode 2:} \\ \eta' = -\frac{1}{\eta}, \ \frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+1}{\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}, \ \frac{-\eta+(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+1}, \\ \text{3. Acht Substitutionen von der Periode 3:} \\ \eta' = \varepsilon^2\frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon}{\varepsilon^4\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}, \quad = \varepsilon^2\frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^2}{\varepsilon^3\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}, \\ \quad = \varepsilon^3\frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^3}{\varepsilon^2\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}, \quad = \varepsilon^3\frac{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^4}{\varepsilon\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}, \\ \quad = -\varepsilon^3\frac{\varepsilon^4\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon}, \quad = -\varepsilon^3\frac{\varepsilon^3\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^2}, \\ \quad = -\varepsilon^2\frac{\varepsilon^2\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^3}, \quad = -\varepsilon^2\frac{\varepsilon\eta-(\varepsilon+\varepsilon^4)}{(\varepsilon+\varepsilon^4)\eta+\varepsilon^4}. \end{array}\right. \tag{25}$$

Diese Formel möge dazu dienen, um einige Angaben, die ich später ohne Beweis mache, zu kontrollieren.

[31]) Diese Angaben stimmen überein mit den Formeln, die in den Math. Annalen, Bd. 12 [Abh. LIII, S. 319] unter (III) mitgeteilt sind.

§ 15.

Die Resolvente der t_ν.

Man berechnet für die fünf Oktaeder $t(\eta_1, \eta_2)$, die ich jetzt als t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 bezeichnen will, die folgenden Werte (vgl. Math. Annalen, Bd. 9 [Abh. LI, S. 299]):

(26) $$t_\nu = -\varepsilon^\nu \cdot 5\eta_1^2\eta_2^4 + \varepsilon^{2\nu}(\eta_1^6 - 2\eta_1\eta_2^5) + \varepsilon^{3\nu}(\eta_2^6 + 2\eta_1^5\eta_2) + \varepsilon^{4\nu}\cdot 5\eta_1^4\eta_2^2.$$

Die symmetrischen Funktionen der t_ν sind ganze Funktionen von f, H, T. Zuvörderst kommt

$$t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 = 12T,$$

und dann hat man, unter $\varkappa, \lambda$ Zahlenfaktoren verstanden, den Ansatz:

$$\Sigma t = 0, \quad \Sigma t^2 = \varkappa f, \quad \Sigma t^3 = 0, \quad \Sigma t^4 = \lambda f^2$$

und findet so die Gleichung:

(27) $$t^5 - 10t^3 f + 45tf^2 - 12T = 0.$$

Dies ist eine Gleichung fünften Grades, welche durch die Relationen charakterisiert ist:

$$\Sigma t = 0, \quad \Sigma t^3 = 0, \quad 20\,\Sigma t^4 = (\Sigma t^2)^2.$$

Sie ist der spezielle Fall, der sich aus der Brioschischen Resolvente (22) ergibt, wenn man $A = 0$ setzt. Zugleich gehen dann die Formeln (20), (21) in (26) über, nachdem für A_0, A_1, A_2 bez. gesetzt ist $\eta_1\eta_2, +\eta_2^2, -\eta_1^2$. Vielleicht hat die Bemerkung Interesse, daß die Diskriminante von (27) eine sechste Potenz ist. Denn man findet sie durch Ausrechnung bis auf einen Zahlenfaktor gleich:

$$(T^2 - 12f^5)^2 = 12^8 H^6.$$

Also stellt $t_i - t_k = 0$ ein Aggregat von drei zu H gehörigen Punktepaaren dar, was man durch unmittelbare Überlegung bestätigt.

§ 16.

Die Resolvente der W_ν.

Berechnet man W_ν als Hessesche Form von t_ν, so findet man bis auf einen Zahlenfaktor, den ich durchgängig unterdrücke:

(28) $$W_\nu = (\varepsilon^\nu\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)(-\eta_1^7 + 7\eta_1^2\eta_2^5) + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)(-7\eta_1^5\eta_2^2 - \eta_2^7).$$

Man hat:

$$\Sigma W = 0, \quad \Sigma W^2 = 0, \quad \Sigma W^3 = -120f^2, \quad \Sigma W^4 = 2880fH,$$
$$\Sigma W^5 = 5W_0W_1W_2W_3W_4 = -5\cdot 12^4 H^2.$$

Also kommt:

(29) $$W^5 + 40f^2\cdot W^2 - 720fH\cdot W + 12^4H^2 = 0,$$

eine Gleichung, die durch die Relationen

$$\Sigma W = 0, \quad \Sigma W^2 = 0, \quad \Sigma W^3 \cdot \Sigma W^5 = 6(\Sigma W^4)^2$$

charakterisiert ist.

Ich notiere noch die Beziehung

(30) $$\frac{12^2 H}{W_\nu} = t_\nu^2 - 3f.$$

§ 17.

Eine allgemeinere Resolvente fünften Grades.

Die Überlegungen, welche ich im dritten Abschnitte des Folgenden auseinandersetze, ließen es mir wünschenswert erscheinen, eine allgemeinere Resolvente fünften Grades zu besitzen, welche nur den Bedingungen $\Sigma y = 0$, $\Sigma y^2 = 0$ genügt (unter y die Wurzeln verstanden). Ich bin dazu auf folgendem Wege gelangt. Eine Kombination von f und t_ν, welche den genannten Bedingungen genügt, ist diese, wie man leicht kontrolliert:

(31) $$\sigma_\nu = 24f^2 - 7ft_\nu^2 + t_\nu^4.$$

Nun ergibt sich dieselbe durch Ausrechnung gleich:

$$(\varepsilon^\nu\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)(-46\eta_1^{20}\eta_2^3 + 1173\eta_1^{15}\eta_2^8 + 391\eta_1^{10}\eta_2^{13} + 207\eta_1^5\eta_2^{18} - \eta_2^{23})$$
$$+ (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)(\eta_1^{23} + 207\eta_1^{18}\eta_2^5 - 391\eta_1^{13}\eta_2^{10} + 1173\eta_1^8\eta_2^{15} + 46\eta_1^3\eta_2^{20}).$$

Sie hat also dieselbe Form

$$(\varepsilon^\nu\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2)R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2)S,$$

welche auch W_ν besitzt. Da umgekehrt aus dieser Form folgt, daß die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet, *so erhält man eine allgemeinere Funktion der gesuchten Eigenschaft, indem man W_ν und σ_ν mit einem Parameter zusammenfügt.* Ich setze also homogen machend:

(32) $$y_\nu = \frac{\lambda f W_\nu}{H} + \frac{\mu\sigma_\nu}{f^2}$$ [32],

[32]) Ich bemerkte im Gespräche mit Gordan, der seinerseits auf ganz anderem Wege zu eben diesen Ausdrücken geführt worden war (vgl. seine in der Einleitung zitierte, in den Erlanger Berichten (Juli 1877) erschienene Note [sowie die Erläuterungen in dem dieser Abhandlung folgenden Zusatz auf S. 380 f.], daß sich unter ihnen insbesondere noch folgende einfache befinden:

$$\frac{t_\nu W_\nu \cdot T}{f^2 H} \quad \text{und} \quad \frac{t_\nu(t_\nu^2 - 7f)T}{f^4}.$$

In der Tat ist

$$\frac{t_\nu W_\nu \cdot T}{f^2 H} = \frac{6fW_\nu}{H} + \frac{12\sigma_\nu}{f^2},$$
$$\frac{t_\nu(t_\nu^2 - 7f)\cdot T}{f^4} = -X\cdot\frac{fW_\nu}{H} - \frac{2\sigma_\nu}{f^2},$$

wo

$$X = 1728\frac{H^3}{f^5}.$$

wo λ, μ beliebige Konstante sind. Dann ergibt sich eine Gleichung fünften Grades, die folgendermaßen lautet:

$$y^5 + 5\mathsf{A}y^2 + 5\mathsf{B}\,y + \Gamma = 0, \tag{33}$$

wo $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ die Ausdrücke bezeichnen[33]):

$$\left\{\begin{aligned}
\mathsf{A} &= 12^3\left(\frac{8\lambda^3}{X} - 12\lambda^2\mu + 6\lambda\mu^2 - (2-X)\mu^3\right)\\
\mathsf{B} &= 9\cdot 12^3\left(\frac{-16\lambda^4+32\lambda^3\mu}{X} - 24\lambda^2\mu^2 + 8(2X-1)\lambda\mu^3 - (5X-4)\mu^4\right),\\
\Gamma &= 12^3\left(\frac{12^4\lambda^5 - 30\cdot 12^3\lambda^4\mu}{X} + 10\cdot 12^3\left(1+\frac{2}{X}\right)\lambda^3\mu^2 - 10\cdot 12^2\cdot\lambda^2\mu^3\right.\\
&\qquad\left. + 45\cdot 12^2 X\lambda\mu^4 - 72(12 - 27X + 24X^2)\mu^5\right).
\end{aligned}\right. \tag{34}$$

Ich habe in denselben statt $1728\,\frac{H^3}{f^5}$ wieder X geschrieben. *Macht man durch Wahl von* $\frac{\lambda}{\mu}$ $\mathsf{A} = 0$, *so hat man die Jerrardsche Form*[34]).

§ 18.

Rationale Transformationen einer Ikosaedergleichung in eine zweite.

Ein Problem, welches um so interessanter ist, weil es eine sehr einfache Lösung gestattet, ist die Frage nach der rationalen Umformung einer Ikosaedergleichung in eine zweite. Ich suche solche rationale Funktionen ζ von η, welche selbst wieder einer Ikosaedergleichung genügen. Wendet man auf η die 60 Substitutionen (3) an, so muß also auch ζ diese Substitutionen erfahren. Aber es ist nicht nötig, daß ζ im einzelnen dieselbe Substitution wie η erleidet; nur die Periode der Substitution muß beiderseits die gleiche sein. Die Reihe der hier vorliegenden Möglichkeiten reduziert sich inzwischen bedeutend. Lassen wir nämlich etwa η

[33]) Bestimmt man $\frac{\lambda}{\mu}$ aus den Gleichungen $\frac{\partial^2\mathsf{A}}{\partial\lambda^2} = 0$ einerseits und $\frac{\partial^3\mathsf{B}}{\partial\lambda^3} = 0$ oder $\frac{\partial^4\Gamma}{\partial\lambda^4} = 0$ andererseits, und trägt die Werte in (32) ein, so erhält man bis auf Faktoren eben die beiden in der voranstehenden Fußnote genannten Funktionen $t_\nu(t_\nu^2 - 7f)$ bez. $t_\nu W_\nu$.

[34]) [Entsprechend der Angabe der Fußnote [32]) auf S. 343 wird die Resolvente des Textes im Ikosaederbuch (S. 105—106) in etwas einfacher Form mitgeteilt. Sie wird dann als *Hauptresolvente* bezeichnet, weil sie mit der allgemeinen Gleichung fünften Grades, speziell der sogenannten *Hauptgleichung* verglichen werden soll. — Ich habe ebenda S. 143 angeführt, daß die Transformation der allgemeinen Gleichung fünften Grades in die sogenannte Jerrardsche Form bereits 1786 von dem schwedischen Mathematiker Bring gefunden wurde. H. Weber spricht bei dieser Sachlage in seinem Lehrbuch der Algebra von der Bring-Jerrardschen Form, was in der Folge ebenfalls geschehen soll. K.]

in $\varepsilon\eta$ übergehen, so wird unter den 60 Ausdrücken, welche aus ζ durch die Ikosaedersubstitutionen (3) entstehen, jedenfalls einer sein, der auch in ein Multiplum seiner selbst übergeht, und zwar muß der zutretende Faktor, da die Periode der Substitution 5 ist, eine fünfte Einheitswurzel sein. Diesen einen Ausdruck nennen wir dann ζ und operieren mit ihm. Die zutretende fünfte Einheitswurzel kann noch ε oder ε^2, ε^3, ε^4 sein. Aber den dritten und vierten Fall führt man sofort auf den zweiten und ersten zurück, indem man ζ durch $-\frac{1}{\zeta}$ ersetzt (welches auch einer der 60 Ausdrücke ist). *Es bleiben also nur noch zwei Fälle:*

1. ζ *ändert sich durch dieselben Substitutionen wie* η;
2. *man erhält die Substitutionen, welche* ζ *erleidet, wenn man in derjenigen, die* η *erfährt,* ε *in* ε^2 *verwandelt.*

Im *ersten* Falle setze ich

$$\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} = -\frac{\varphi_2(\eta_1, \eta_2)}{\varphi_1(\eta_1, \eta_2)},$$

wo die φ ganze homogene Funktionen vom Grade n sein mögen. Ich schreibe dann:

$$\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2 = 0$$

und entwickele die linke Seite in bekannter Weise (Clebsch, Theorie der binären Formen (Leipzig 1872) S. 15, Gordan, Math. Annalen, Bd. 3 (1871) S. 360) nach Polaren:

$$\left(\zeta_1\frac{\partial P}{\partial\eta_1} + \zeta_2\frac{\partial P}{\partial\eta_2}\right) + (\zeta_1\eta_2 - \zeta_2\eta_1)\,Q = 0,$$

wo P, Q zwei Funktionen von η_1, η_2 vom Grade $n+1$, $n-1$ sind. Indem man jetzt $\zeta = \eta$ setzt, erschließt man, daß P, Q solche Funktionen von η_1, η_2 sind, welche sich bei den Ikosaedersubstitutionen reproduzieren, d. h. es sind ganze Funktionen von f, H, T. Umgekehrt, wenn man für P, Q ganze Funktionen von f, H, T setzt, welche um zwei Einheiten im Grade differieren, so hat $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ die gewünschte Eigenschaft. *Dies also ist die allgemeine Lösung des Problems im ersten Falle*[35]).

[35]) Die einfachsten in Betracht kommenden Funktionen sind diese:

$$\zeta = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\eta_2}}{\dfrac{\partial f}{\partial\eta_1}}, \quad = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial\eta_2}}{\dfrac{\partial H}{\partial\eta_1}}, \quad = -\frac{\dfrac{\partial T}{\partial\eta_2}}{\dfrac{\partial T}{\partial\eta_1}}.$$

Man zeigt leicht: Wenn sich $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ auf der η Kugel über eins der 120 Dreiecke (§ 6) mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ bewegt, so bewegen sich die drei hingeschriebenen Werte von ζ über die drei anliegenden von denselben Kreisbögen begrenzten Dreiecke, welche die Winkel $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$, bez. $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$, bez. $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$ besitzen.

Man kann ihr noch eine viel einfachere Form geben, wenn man bemerkt, daß es genügt, nur einen Parameter in die Transformationsformel aufzunehmen, da doch die Ikosaedergleichung selbst nur einen Parameter besitzt. Man setze also etwa:

$$P = fH, \quad Q = \lambda T.$$

So wird

$$\zeta = \frac{\left(-f\frac{\partial H}{\partial \eta_2} - H\frac{\partial f}{\partial \eta_2}\right) + \lambda \eta_1 T}{\left(f\frac{\partial H}{\partial \eta_1} + H\frac{\partial f}{\partial \eta_1}\right) + \lambda \eta_2 T} \tag{35}$$

und diese Formel begreift für geeignete Werte von λ in der Tat alle anderen unter sich.

Was den *zweiten* Fall unseres Problems betrifft, so wird er durch Betrachtung der fünfwertigen Funktionen der vorigen Paragraphen erledigt. Sei

$$(\varepsilon^{\nu}\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2) R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2) S$$

die allgemeinste dort definierte Funktion, so ist einfach

$$\zeta = \frac{R}{S}$$

die allgemeinste hier aufzustellende Transformationsformel. Der Beweis ergibt sich am einfachsten aus den Entwicklungen des dritten Abschnittes, auf die ich hier verweisen muß (§ 4 Schluß)[36].

Abschnitt II.

Das Ikosaeder und eine quadratische Form.

Dieser zweite Abschnitt bringt eine Theorie der allgemeinen Jacobischen Gleichungen vom sechsten Grade (vgl. § 12 des vorhergehenden). Aber ich gehe dabei zunächst wieder aus von einem Probleme, welches man beim Ikosaeder stellen kann und zeige erst hinterher die Beziehung zu den Jacobischen Gleichungen. Man kann das Fundamentalproblem des

[36]) [Gemäß der Angaben auf S. 343 hat man vier bezügliche Hauptformeln, welche den hervorgehobenen fünfwertigen Formen:

$$W_\nu, \; W_\nu t_\nu, \; t_\nu(t_\nu^2 - 7f), \; t_\nu^4 - 7ft_\nu^2 + 24f^2$$

entsprechen. (Vgl. auch die am Schluß dieser Abhandlung folgenden Bemerkungen über die Arbeit von Gordan in den Math. Annalen, Bd. 13). Läuft η über das Elementardreieck des Ikosaeders, so bewegt sich, wie O. Fischer in seiner Dissertation (Konforme Abbildung sphärischer Dreiecke aufeinander mittelst algebraischer Funktionen, Leipzig 1885) S. 67 bemerkt, das zugehörige ζ über ein von denselben Symmetriekreisen der Ikosaederteilung umgrenztes Dreieck bzw. mit den Winkeln:

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}, \frac{\pi}{2}; \quad \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}; \quad \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{5}, \frac{\pi}{2}.$$

Vgl. die Figuren bei Fischer. K.]

vorigen Abschnittes (§ 1) so hinstellen: Es ist ein Ikosaeder $f(x_1, x_2)$ in kanonischer Form gegeben und es sind die Zahlwerte gegeben, welche die *simultanen Invarianten* des Ikosaeders und einer unbekannten linearen Form

$$\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2$$

besitzen, man soll die Koeffizienten η_1, η_2 der letzteren bestimmen.

Eine Verallgemeinerung dieser Aufgabe ergibt sich sofort, wenn man an Stelle der linearen Form eine von höherem Grade treten läßt. Ich beschränke mich hier auf die Betrachtung des Falles einer *quadratischen* Form, deren Untersuchung, wie man sofort sieht, dadurch besonders erleichtert wird, daß die Kovarianten f, H, T des Ikosaeders alle eine *gerade* Ordnung besitzen.

§ 1.

Das simultane System eines Ikosaeders und einer quadratischen Form.

Es sollen f, H, T in der immer festgehaltenen kanonischen Form vorausgesetzt sein, aber, um Verwechslungen zu vermeiden, mit den Variabeln x_1, x_2 geschrieben werden. Der quadratischen Form erteile ich, damit später in der Bezeichnung Übereinstimmung herrscht mit der bei den Jacobischen Gleichungen üblichen, die Gestalt:

$$q = A_1 x_1^2 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2.$$

Man hat dann als Invarianten zunächst die Determinante:

$$A = A_0^2 + A_1 A_2, \tag{1}$$

dann weiter die Überschiebungen

$$(f, q^6)_{12}, \quad (H, q^{10})_{20}, \quad (T, q^{15})_{30},$$

die ich mit B', C', D bezeichnen will und die ausgerechnet folgende Werte darbieten:

$$\left\{\begin{aligned}
21B' &= 16A_0^6 - 120A_0^4 A_1 A_2 + 90A_0^2 A_1^2 A_2^2 \\
&\qquad + 21A_0(A_1^5 + A_2^5) - 5A_1^3 A_2^3, \\
11 \cdot 17 \cdot 144 C' &= -512A_0^{10} + 11520A_0^8 A_1 A_2 - 40320A_0^6 A_1^2 A_2^2 \\
&\quad + 33600A_0^4 A_1^3 A_2^3 - 6300A_0^2 A_1^4 A_2^4 + 126A_1^5 A_2^5 \\
&\quad + A_0(A_1^5 + A_2^5)(22176A_0^4 - 18480A_0^2 A_1 A_2 + 1980A_1^2 A_2^2) \\
&\quad - 187(A_1^{10} + A_2^{10}), \\
12D &= (A_1^5 - A_2^5)(-1024A_0^{10} + 3840A_0^8 A_1 A_2 \\
&\qquad - 3840A_0^6 A_1^2 A_2^2 + 1200A_0^4 A_1^3 A_2^3 \\
&\qquad - 100A_0^2 A_1^4 A_2^4 + A_1^5 A_2^5) \\
&\quad + A_0(A_1^{10} - A_2^{10})(352A_0^4 - 160A_0^2 A_1 A_2 + 10A_1^2 A_2^2) \\
&\quad + (A_1^{15} - A_2^{15}).
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

Mit diesen Formen ist das System der Invarianten bereits abgeschlossen, wie man nach Analogie ähnlicher Beweise folgendermaßen zeigt. Wenn $A = 0$, also die quadratische Form das Quadrat einer linearen ist:

$$q = (\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2)^2,$$

so gehen B', C', D einfach über in $f(\eta_1, \eta_2)$, $H(\eta_1, \eta_2)$, $T(\eta_1, \eta_2)$ und andere simultane Invarianten gibt es dann nicht (Math. Annalen, Bd. 9, [Abh. LI, S. 290ff.]). Im allgemeinen Falle bestehen daher die gesuchten Invarianten aus B', C', D resp. aus Gliedern, welche aus ihnen zusammengesetzt sind, plus Gliedern, welche den Faktor A enthalten. Diese Glieder müssen, nach Abtrennung des Faktors A, für sich Invariantencharakter besitzen, für sie gilt also dasselbe Gesetz usw.

Zwischen diesen vier Formen A, B', C', D besteht dann noch eine Relation entsprechend der früheren Bedingung:

$$T^2 = 12 f^5 - 12^4 H^3;$$

ich werde erst weiter unten diese Relation angeben (§ 4, Gl. (10)).

Das neue Problem aber, welches ich aufstelle, ist dieses: *Es sind, in Übereinstimmung mit dieser Relation, die Zahlenwerte gegeben, welche A, B', C', D für eine unbekannte quadratische Form $A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2$ annehmen; man soll die Koeffizienten A_1, A_0, A_2 bestimmen.*

Dies Problem hat 60 Lösungen resp. Lösungssysteme. Denn zunächst ergeben zwar die Gleichungen: $A, B', C' =$ gegebenen Konstanten $2 \cdot 6 \cdot 10 = 120$ Lösungen, aber von diesen unterscheiden sich, da A, B', C' gerade Funktionen von A_0, A_1, A_2 sind, je zwei immer nur durch die Vorzeichen der A_0, A_1, A_2, und D, welches eine ungerade Funktion ist, entscheidet dann, welche Vorzeichenkombination zu nehmen ist.

§ 2.

Ableitung aller Lösungen aus einer derselben.

Wenn wir *eine* quadratische Form kennen:

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2,$$

welche dem gestellten Probleme genügt, so ergeben sich die 59 anderen, indem man auf x_1, x_2 die 120 binären Ikosaedersubstitutionen (4) des vorigen Abschnittes anwendet. Denn da es sich um simultane Invarianten von q und f handelt, $f(x_1, x_2)$ aber durch diese Substitutionen in sich übergeht und die Substitutionsdeterminante $+1$ ist, so werden die simultanen Invarianten der transformierten quadratischen Form und des ursprünglichen Ikosaeders die vorgeschriebenen Werte behalten haben. In

der Tat entstehen durch die 120 Substitutionen aus der einen quadratischen Form auch nur 60, da sich immer zwei Substitutionen nur durch gleichzeitige Vorzeichenänderung beider Variablen x_1, x_2 unterscheiden. Ich will diese 60 Formen mit

$$A_1' x_1^2 + 2 A_0' x_1 x_2 - A_2' x_2^2$$

bezeichnen. So findet man für die A_1', A_0', A_2' folgende Tabelle:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{c}
\overbrace{\hspace{12em}}^{A_1'} \\
\varepsilon^{-\nu} A_1, \\
-\varepsilon^{-\nu} A_2, \\
\frac{-\varepsilon^{-\mu}}{\sqrt{5}} ((\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^{+\nu} A_1 + 2 A_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^{-\nu} A_2), \\
\frac{+\varepsilon^{-\mu}}{\sqrt{5}} ((\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^{-\nu} A_1 + 2 A_0 + (\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^{+\nu} A_2). \\
\hline\hline
\overbrace{\hspace{12em}}^{A_0'} \\
A_0, \\
-A_0, \\
-\frac{1}{\sqrt{5}} (\varepsilon^{\nu} A_1 + A_0 + \varepsilon^{-\nu} A_2), \\
+\frac{1}{\sqrt{5}} (\varepsilon^{-\nu} A_1 + A_0 + \varepsilon^{+\nu} A_2). \\
\hline\hline
\overbrace{\hspace{12em}}^{A_2'} \\
\varepsilon^{+\nu} A_2, \\
-\varepsilon^{+\nu} A_1, \\
\frac{-\varepsilon^{\mu}}{\sqrt{5}} ((\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^{+\nu} A_1 + 2 A_0 + (\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^{-\nu} A_2), \\
\frac{+\varepsilon^{\mu}}{\sqrt{5}} ((\varepsilon + \varepsilon^4)\varepsilon^{-\nu} A_1 + 2 A_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\varepsilon^{+\nu} A_2). \\
\hline
(\sqrt{5} = \varepsilon + \varepsilon^4 - \varepsilon^2 - \varepsilon^3).
\end{array} \right.$$

Man hat also hier an Stelle der seither betrachteten Gruppe von 120 binären Substitutionen eine Gruppe von 60 ternären. Die Determinante der einzelnen Substitution ist wiederum $= +1$.

Es ist leicht zu sehen, daß diese Gruppe von Substitutionen zugleich die Galoissche Gruppe des neuen Problems ist. In der Tat, die rational bekannten Größen A, B', C', D werden durch diese 60 Substitutionen in sich verwandelt, und umgekehrt läßt sich zeigen, daß jede ganze Funktion von A_0, A_1, A_2, welche durch diese Substitutionen in sich verwandelt wird, eine ganze Funktion von A, B', C', D ist (sie hat also, wenn ungerade, notwendig D zum Faktor). — Der Beweis ist derselbe, der soeben beim Nachweise der Vollständigkeit des Systems der simultanen Invarianten gebraucht wurde. Wenn $A = 0$, so ist die Behauptung richtig, wie ich in den Math. Annalen, Bd. 9 [= Abh. LI, S. 290ff.] nachwies. Also bestehen die gesuchten Ausdrücke aus ganzen Funktionen von B', C', D, plus Gliedern, welche A zum Faktor haben. Diese Glieder behandelt man nach Abtrennung des Faktors ebenso usw. *Also auch hier decken sich die rational bekannten Funktionen mit den Invarianten.*

§ 3.

Verschiedene Arten der geometrischen Veranschaulichung.

Eine geometrische Veranschaulichung des neuen Problems erhält man sofort, wenn man die Wurzelwerte der quadratischen Form als Punkte auf der $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$-Kugel deutet, und diese Interpretation leistet nach Seite der vollen Anschaulichkeit alles, was man wünschen kann. Inzwischen werde ich fortan des kürzeren Ausdrucks wegen zumeist Gebrauch machen von der geläufigeren Deutung, *welche die Verhältnisse $A_0 : A_1 : A_2$ als trimetrische Koordinaten eines Punktes in der Ebene betrachtet.* Dieser Punkt wird durch die 60 ternären Substitutionen der vorigen Paragraphen, welche jetzt die Bedeutung von 60 Kollineationen gewinnen, auf 60 Weisen versetzt, und unser Problem verlangt vor allen Dingen, die so entstehenden 60 Punkte zu bestimmen, hernach, die absoluten Werte ihrer Koordinaten anzugeben. Die Kurven $A = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$, $D = 0$ gehen bei den Kollineationen in sich über, ebenso z. B. die Kurven $B' - \lambda A^3 = 0$, $C' - \mu A^5 = 0$, als deren vollständiger Schnitt jedes System von 60 zusammengehörigen Punkten dargestellt werden kann.

Neben diese Interpretation in der Ebene stellt sich noch eine andere im Raume, die ich wenigstens anführen will, wenn ich sie auch nicht weiter benutze[37]). Unter x, y, z rechtwinklige Raumkoordinaten verstanden, setze ich:

$$A_0 = z, \quad A_1 = x + iy, \quad A_2 = x - iy.$$

So wird $A = A_0^2 + A_1 A_2 = x^2 + y^2 + z^2$, und die 60 gesuchten quadratischen Formen werden vorgestellt durch 60 auf der Kugel vom Radius

[37]) [Wegen der hier folgenden Erörterungen vgl. den Zusatz II zu der Arbeit „Über Flächen dritter Ordnung" (Abh. XXXV dieses Bandes, S. 59).]

$\sqrt{A}$ befindliche Raumpunkte. Die ternären Substitutionen (3) erhalten jetzt, in x, y, z geschrieben, reelle Koeffizienten, und da sie $x^2 + y^2 + z^2$ in sich überführen, übrigens die Determinante 1 besitzen, so gewinnen sie die Bedeutung von 60 reellen Drehungen um den Anfangspunkt. *Es sind keine anderen als die 60 Drehungen, welche ein der Kugel eingeschriebenes Ikosaeder mit sich zur Deckung bringen. Dies ist also ein ganz elementarer Weg, um den Zusammenhang zwischen den Jacobischen Gleichungen und dem Ikosaeder zu erkennen.*

Verbindet man den Punkt A_0, A_1, A_2 mit dem Anfangspunkte durch eine gerade Linie und betrachtet sie als Vertreterin der Verhältnisgrößen $A_0 : A_1 : A_2$, so hat man eine letzte Interpretation, die sich von der Interpretation in der Ebene nur dadurch unterscheidet, daß als Träger des ternären Gebietes der Kugelmittelpunkt mit den durch ihn hindurchgehenden Strahlen gedacht ist[38]). Ich werde weiterhin zeigen, daß die von uns in der Ebene zu studierenden Figuren auf das genaueste zusammenhängen mit der ebenen Abbildung der von Clebsch so genannten *Diagonalfläche* dritter Ordnung (Math. Annalen, Bd. 4 (1871), S. 331). Clebsch spricht bei diesen Untersuchungen insbesondere von einem merkwürdigen durch die sechs Fundamentalpunkte der Abbildung gebildete Sechsecke, welches die Eigenschaft besitzt, zehnfach Brianchonsch zu sein. Betrachten wir statt der Ebene den vom Mittelpunkte des Ikosaeders ausgehenden Strahlenbündel, so erkennen wir, daß dieses Sechseck eine sehr bekannte Konfiguration ist. *Die sechs durch die Ecken des Ikosaeders hindurchlaufenden Durchmesser sind sein Gegenbild.* Denn in der Tat schneiden sich die fünfzehn durch zwei derselben hindurchgelegten Ebenen[39]) zehnmal zu drei in einer geraden Linie, nämlich längs der zehn Durchmesser, welche die Ecken des zugehörigen Pentagondodekaeders enthalten.

§ 4.

Orientierung in der Bildebene $A_0 : A_1 : A_2$.

Wenn die quadratische Form

$$q = A_1 x_1^2 + 2 A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2,$$

wie zunächst angenommen sei, das Quadrat einer linearen wird:

$$q = (\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2)^2,$$

so rückt der Punkt $A_0 : A_1 : A_2$ der Ebene auf den Kegelschnitt $A = 0$,

[38]) Leider sind bei dieser Interpretation die Kegel $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ durchaus imaginär.

[39]) Diese Ebenen zusammen bilden den Kegel $D = 0$. [Es sind die 15 Symmetrieebenen des Ikosaeders. K.]

und dessen Punkte also repräsentieren die Größensysteme $\eta_1 : \eta_2$. Insbesondere also befinden sich auf $A = 0$ Gruppen von bez. 12, 20, 30 ausgezeichneten Punkten, entsprechend $f(\eta_1, \eta_2) = 0$, $H(\eta_1, \eta_2) = 0$, $T(\eta_1, \eta_2) = 0$. Wichtig zumal ist die Beziehung eines Punktes $A_0 : A_1 : A_2$ der Ebene zu den beiden Berührungspunkten der von ihm an den Kegelschnitt A gelegten Tangenten. *Diese Berührungspunkte erhalten, wie man sofort zeigt, als Werte von* $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ *die Wurzeln der quadratischen Gleichung*

$$q(\eta) = A_1 \eta_1^2 + 2 A_0 \eta_1 \eta_2 - A_2 \eta_2^2 = 0.$$

Fragen wir nach der Lage derjenigen Punkte der Ebene, welche der Zerlegung von f, H, T in quadratische Faktoren entsprechen. So haben wir zunächst sechs Punkte mit den Koordinaten

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \\ \hline \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu}, \end{array} \right.$$

entsprechend der Zerlegung von f. Sie bilden das soeben erwähnte zehnfach Brianchonsche Sechseck und sollen als die *Fundamentalpunkte* der Ebene bezeichnet werden. — Wir haben ferner, entsprechend der Zerlegung von H, zehn zusammengehörige Punkte:

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \\ \hline -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{4} & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu} \end{array}$$

und fünfzehn zusammengehörige Punkte, welche den Faktoren von T entsprechen:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} A_0 & A_1 & A_2 \\ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu} \\ 0 & \varepsilon^{-\nu} & \varepsilon^{+\nu}. \end{array} \right.$$

Die 15 Verbindungslinien der sechs Fundamentalpunkte (4) *schneiden sich zu je drei in den Punkten* (5), *zu je zwei in den Punkten* (6); *sie sind überdies die Polaren der Punkte* (6) *in bezug auf den Kegelschnitt* $A = 0$. *Ihre Schnittpunkte mit* A *bilden die 30 Punkte* $T(\eta_1, \eta_2) = 0$.

Man entnimmt diese Angaben in bekannter Weise der Figur des Ikosaeders; übrigens mag man sie durch die Gleichungen der 15 geraden Linien:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{r} (1 \pm \sqrt{5}) A_0 + \varepsilon^{\nu} A_1 + \varepsilon^{-\nu} A_2 = 0, \\ \varepsilon^{\nu} A_1 - \varepsilon^{-\nu} A_2 = 0 \end{array} \right.$$

kontrollieren. Diese 15 Geraden zusammengenommen stellen eine Kurve fünfzehnter Ordnung vor, welche bei den 60 ternären linearen Substitutionen (3) ungeändert bleibt. Daher folgt aus § 2:

Das Aggregat der 15 Geraden ist dargestellt durch $D = 0$.

Für die Kurven $B' = 0$, $C' = 0$ ergeben sich nicht gleich einfache Interpretationen. Ich will dieselben mit Hilfe von $A = 0$ in der Weise modifizieren, daß sie in den sechs Fundamentalpunkten möglichst hohe vielfache Punkte erhalten. Zu dem Zwecke hat man nur dafür zu sorgen, daß einer dieser Punkte, z. B.

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0$$

vielfacher Punkt wird, dann werden es die anderen Fundamentalpunkte von selbst, wegen der Eigenschaft der in Betracht kommenden Ausdrücke, bei den 60 ternären Substitutionen ungeändert zu bleiben. Das heißt also: wir müssen vermöge $A = A_0^2 + A_1 A_2$ die Ausdrücke B', C' so modifizieren, daß möglichst die höchsten Potenzen von A_0 herausfallen. Auf diese Weise gewinnt man zwei Ausdrücke, die B und C heißen sollen:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} B &= -B' + \frac{16}{21} A^3 \\ &= 8 A_0^4 A_1 A_2 - 2 A_0^2 A_1^2 A_2^2 + A_1^3 A_2^3 - A_0 (A_1^5 + A_2^5), \\ C &= -144 C' - \frac{160}{17} A^2 B' + \frac{1024}{11 \cdot 21} A^5 \\ &= 320 A_0^6 A_1^2 A_2^2 - 160 A_0^4 A_1^3 A_2^3 + 20 A_0^2 A_1^4 A_2^4 + 6 A_1^5 A_2^5 \\ &\quad - 4 A_0 (A_1^5 + A_2^5)(32 A_0^4 - 20 A_0^2 A_1 A_2 + 5 A_1^2 A_2^2) + A_1^{10} + A_2^{10}. \end{aligned} \right.$$

Die Kurve $B = 0$ hat in den Fundamentalpunkten Doppelpunkte, ist übrigens vom Geschlechte 4. Die Kurve $C = 0$ zehnter Ordnung hat in den Fundamentalpunkten Spitzenpaare, d. h. vierfache Punkte; ihr Geschlecht ist Null. *Übrigens sind jetzt* B *und* C *eben die Ausdrücke sechster bzw. zehnter Ordnung geworden, welche wir oben* (I, § 12) *bei den allgemeinen Jacobischen Gleichungen so bezeichneten.* Dadurch also sind B, C in neuer Weise definiert: als gewisse simultane Invarianten des in kanonischer Form gegebenen Ikosaeders und einer zutretenden quadratischen Form[40]). Aber auch die Diskriminante der Jacobischen Gleichung findet ihre volle Deutung: *die vierte Wurzel aus der Diskriminante ist bis auf einen Zahlenfaktor gleich* D:

$$(9) \qquad \sqrt[4]{\Pi} = 12 D.$$

[40]) Eine andere Art, diese Ausdrücke zu definieren, erhält man, wenn man sie als *ternäre* Formen auffaßt. Ich will hier nur ohne Beweis angeben: Betrachtet man C als Grundform, so lassen sich A, B, D als Kovarianten derselben darstellen, und zwar bilden sie das *volle* System der Kovarianten.

In der Tat findet man in Übereinstimmung mit Gleichung (23) (Abschn. I):

$$(10)\qquad 144\,D^2 = -1728\,B^5 + 720\,ACB^3 - 80\,A^2C^2B + 64\,A^3(5\,B^2 - AC)^2 + C^3,$$

was zugleich die Relation zwischen den Invarianten A, B, C, D, resp. A, B', C', D ist, welche noch aufzustellen war (Abschn. II, § 1).

§ 5.

Die allgemeinen Jacobischen Gleichungen vom sechsten Grade.

Aus den letzten Bemerkungen geht hervor, daß sich unser neues Problem mit den allgemeinen Jacobischen Gleichungen sechsten Grades deckt, sobald man bei der letzteren die vierte Wurzel aus der Diskriminante adjungiert[41]). In der Tat berechnet sich die Jacobische Gleichung als Resolvente unseres Problems nunmehr folgendermaßen einfach. Die sechs Wurzeln der Jacobischen Gleichung:

$$z_\infty = 5\,A_0^2,$$
$$z_\nu = (A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{-\nu} A_2)^2$$

stellen, gleich Null gesetzt, doppeltzählend die sechs Polaren dar, welche die sechs Fundamentalpunkte in bezug auf den Kegelschnitt A besitzen. Es ist einfacher, statt ihrer die Aggregate

$$z_\infty - A, \quad z_\nu - A$$

zu betrachten. Sie repräsentieren, gleich Null gesetzt, diejenigen sechs Kegelschnitte, welche durch fünf der sechs Fundamentalpunkte hindurchgehen. Infolgedessen hat man nämlich folgenden Ansatz. Die in Betracht kommenden symmetrischen Funktionen der $(z - A)$ sind (als gerade Funktionen der A_0, A_1, A_2) ganze Funktionen von A, B, C, die, gleich Null gesetzt, Kurven vorstellen, *welche in den Fundamentalpunkten vielfache Punkte von bekannter Multiplizität besitzen.* Es ist daher unter $\varkappa, \lambda, \ldots$ numerische Faktoren verstanden:

$$\sum(z_i - A) = \varkappa A,$$
$$\sum(z_i - A)(z_k - A) = 0,$$
$$\sum(z_i - A)(z_k - A)(z_l - A) = \lambda B, \text{ usw.}$$

Denn z. B. $\sum(z_i - A)(z_k - A)$ repräsentiert, gleich Null gesetzt, eine Kurve vierter Ordnung, welche durch jeden Fundamentalpunkt einfach

[41]) Wenn man eine Jacobische Gleichung sechsten Grades nach Kronecker-Brioschi als Resolvente einer Gleichung fünften Grades aufstellt, so ist diese Adjunktion von vornherein geleistet. Ich finde dies in dem zitierten Kroneckerschen Aufsatze (Crelles Journal, Bd. 59 (1861)) nicht explizite angegeben und doch beruhen, wie mir scheint, verschiedene Aussagen nur auf diesem Umstande und gelten nicht für Jacobische Gleichungen sechsten Grades schlechthin.

hindurchgeht. Eine solche Kurve läßt sich aber aus A, B, C nicht zusammensetzen, also ist der Ausdruck identisch Null. — So kommt schließlich die Jacobische Gleichung in bekannter Form:

$$(12)\qquad (z-A)^6 - 4A(z-A)^5 + 10B(z-A)^3 - C(z-A) + (5B^2 - AC) = 0,$$

wo nur die Zahlenkoeffizienten durch Vergleich einzelner Glieder haben bestimmt werden müssen.

§ 6.

Berechnung gewisser Ausdrücke.

Weiterhin bedarf ich gewisser Ausdrücke, die ich gleich hier, unter Benutzung des geometrischen Bildes, berechnen will.

Die erste Aufgabe sei: *das Aggregat der 12, 20, 30 geradlinigen Tangenten, welche $A = 0$ in den Punkten $f(\eta_1, \eta_2) = 0$, $H(\eta_1, \eta_2) = 0$, $T(\eta_1, \eta_2) = 0$ berühren, als ganze Funktionen von A, B, C darzustellen.*

1. *Die 12 Tangenten in den Punkten f.* Ein Paar zusammengehöriger Tangenten heißt $A_1 A_2 = 0$, oder, wenn wir die Wurzeln z der Jacobischen Gleichung benutzen, $z_\infty - 5A = 0$. Daher erhält man den gesuchten Ausdruck (bis auf einen unbestimmt bleibenden Zahlenfaktor), wenn man in die linke Seite der Jacobischen Gleichung $z = 5A$ einträgt. Auf diese Weise kommt:

$$(13)\qquad L = B^2 - AC + 128\,A^3B.$$

2. *Die 20 Tangenten in den Punkten H.* Einen Punkt, der sich auf einer dieser Tangenten bewegt, kann man folgendermaßen darstellen[42]):

$$A_0 = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(\lambda + (5 + 3\sqrt{5})),$$
$$A_1 = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(\lambda a - 4\sqrt{5}),$$
$$A_2 = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)(\lambda b - 4\sqrt{5}),$$
$$\left((a+b) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad ab = -1\right).$$

Setzt man $\lambda^3 = 2^5 \cdot 5 \cdot \mu$, so wird hiermit:

$$A = -300,$$
$$B = 2^{10}5^6(\mu^2 + 10\mu - 2),$$
$$C = 2^{19} \cdot 3 \cdot 5^{10}(5\mu^3 - 2 \cdot 3 \cdot 5\mu^2 - 2).$$

Nun eliminiere man μ zwischen $\frac{B}{A^3}$ und $\frac{C}{A^5}$. So gewinnt man, abgesehen von Zahlenfaktoren, den Ausdruck:

$$(14)\qquad M = C^2 + 2^6 \cdot 75AB^3 + 2^6 \cdot 35\,A^2BC + 2^{11} \cdot 125\,A^4B^2 - 2^{12} \cdot 13\,A^5C - 2^{17} \cdot 5\,A^7B + 2^{20}A^{10}.$$

[42]) [Hierbei sind die Werte von H' und T' benutzt, die in der Fußnote [12]) auf S. 326 angegeben sind. K.]

3. *Die 30 Tangenten in den Punkten T.* Man setze

$$A_0 = i\sqrt{1+2i}\cdot\lambda,$$
$$A_1 = \sqrt{1+2i}\cdot\lambda + \sqrt{-5},$$
$$A_2 = \sqrt{1+2i}\cdot\lambda - \sqrt{-5}.$$

Dann wird:

$$\frac{B}{A^3} = -\lambda^6 - 5\lambda^4 + 5\lambda^2 + 1,$$
$$\frac{C}{4A^5} = -3\lambda^{10} + 45\lambda^8 + 10\lambda^6 + 50\lambda^4 + 25\lambda^2 + 1,$$

und hieraus durch Elimination von λ^2:

(15) $$N = C^3 - 2^6\cdot 3^3 B^5 - 2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\,A B^3 C - 2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 11\,A^2 B C^2 - 2^9\cdot 3^2\cdot 5\cdot 349\,A^3 B^4 + 2^{12}\cdot 3\cdot 5\cdot 11\,A^4 B^2 C - 2^9\cdot 3\cdot 11\cdot 17\,A^5 C^2 + 2^{15}\cdot 5\cdot 691\,A^6 B^3 - 2^{15}\cdot 3\cdot 5^2\cdot 17\,A^7 B C - 2^{20}\cdot 3\cdot 5\cdot 37\,A^9 B^2 + 2^{21}\cdot 3\cdot 23\,A^{10} C - 2^{26}\cdot 3\cdot 5\,A^{12} B + 2^{30}\cdot A^{15}$$ [43]. —

Die zweite Aufgabe erwächst aus folgendem. Jedesmal 60 Punkte des Kegelschnittes A werden durch die ternären Substitutionen (3) zusammengeordnet. Man konstruiere in ihnen die Tangenten und bringe sie zum gegenseitigen Durchschnitte. Es handelt sich darum, *den geometrischen Ort dieser Durchschnittspunkte, bzw. die verschiedenen Teile, aus denen er besteht, durch A, B, C, D darzustellen.*

Wenn ein Kegelschnitt durch lineare Transformation in sich verwandelt wird und man bringt die Tangenten zum Durchschnitt, welche in Punkten berühren, die durch die Kollineation einander zugeordnet sind, so ist der geometrische Ort dieser Durchschnittspunkte bekanntlich ein Kegelschnitt, welcher den gegebenen in denjenigen beiden Punkten berührt, die bei der Kollineation fest bleiben. Derselbe Kegelschnitt wird erhalten, wenn man die betr. lineare Substitution durch ihre inverse ersetzt.

Nun sind uns 60 lineare Substitutionen gegeben, von denen eine, die Identität, als mit der Problemstellung nicht verknüpft, von vornherein auszuschließen ist. Unter den 59 anderen finden sich zunächst 15 von der Periode 2, welche je ein Punktepaar von T ungeändert lassen. Bei ihnen ist die anfängliche Substitution mit der inversen identisch. Infolgedessen artet der Ortskegelschnitt für jede derselben aus in die gerade Linie, welche das festbleibende Paar von Punkten verbindet. *Daher haben wir als ersten Bestandteil der gesuchten Ortskurve die aus 15 geraden Linien bestehende Kurve*

$$D = 0.$$

[43]) [Die Formeln (13), (14), (15) wurden mit entsprechenden Formeln von Herrn Coble in den Transactions of American Mathematical Society Bd. 9 (1908) verglichen, nachgeprüft und, wo es nötig war, verbessert.]

Betrachten wir ferner die 20 Substitutionen von der Periode 3. Sie lassen paarweise dasselbe Punktepaar von H ungeändert, und von zwei in dieser Weise zusammengehörigen Substitutionen ist die eine die inverse der anderen. *Daher erhalten wir zehn Ortskegelschnitte, welche $A = 0$ in den Punktepaaren von H berühren.* Ich finde für einen derselben:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2}\cdot A - \left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot A_0 + A_1 + A_2\right)^2 = 0.$$

Ein beliebiger Punkt desselben wird gewonnen, wenn man setzt:

$$A_0 = \frac{1}{\varepsilon-\varepsilon^4}\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\lambda\mu + \sqrt{2}(\lambda^2+\mu^2)\right],$$
$$A_1 + A_2 = \frac{1}{\varepsilon-\varepsilon^4}\left[-4\lambda\mu + \sqrt{2}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}(\lambda^2+\mu^2)\right],$$
$$A_1 A_2 = \frac{1}{(\varepsilon-\varepsilon^4)^2}\Big[3(5+\sqrt{5})\lambda^2\mu^2 - (3+\sqrt{5})\sqrt{2}(\lambda^3\mu+\lambda\mu^3) - 2(\lambda^4+\mu^4)\Big].$$

Trägt man diese Werte in A, B, C ein, so erhält man Formeln von folgender Gestalt:

$$\frac{B}{A^3} = \alpha + \beta\varrho + \gamma\varrho^2,$$
$$\frac{C}{A^5} = \alpha' + \beta'\varrho + \gamma'\varrho^2 + \delta'\varrho^3,$$

wo α, β, ... reelle ganze Zahlen sind (die ich noch nicht berechnete) und $\varrho = \frac{\lambda^6+\mu^6}{\lambda^3\mu^3}$ gesetzt ist. Die Elimination von ϱ gibt den gesuchten Ausdruck:

(16) $$\mathsf{H} = C^2 + AR,$$

der, gleich Null gesetzt, das Aggregat der zehn Kegelschnitte darstellt. (R bedeutet dabei eine von mir noch nicht berechnete ganze Funktion von A, B, C.)

Die 24 Substitutionen von der Periode 5, welche noch übrig sind, liefern noch zwei Bestandteile. Die vier Substitutionen nämlich, welche ein Punktepaar von f ungeändert lassen, gehören paarweise wieder zusammen als direkte und inverse Operation, und durch sie werden also zwei Kegelschnitte bestimmt. Ich finde für eins dieser Paare:

$$A + (5 \pm 2\sqrt{5})A_0^2 = 0$$

oder, unter Benutzung der Jacobischen z:

$$z_\infty = (5 \mp 2\sqrt{5})A.$$

Substituiert man diese Werte in die Jacobische Gleichung, so kommen die beiden noch fehlenden Ausdrücke:

$$(17)\quad \begin{cases} F_1 = 2^{11}(445 + 199\sqrt{5})A^6 - 5\cdot 2^7(9 + 4\sqrt{5})A^3 B \\ \qquad\qquad + (5 + 2\sqrt{5})AC + 5B^2, \\ F_2 = 2^{11}(445 - 199\sqrt{5})A^6 - 5\cdot 2^7(9 - 4\sqrt{5})A^3 B \\ \qquad\qquad + (5 - 2\sqrt{5})AC + 5B^2, \end{cases}$$

und die Ortskurve, welche wir suchten, hat also schließlich diese Gleichung:

$$D\cdot \mathsf{H}\cdot F_1\cdot F_2 = 0.$$

§ 7.

Zurückführung des neuen Problems auf das Fundamentalproblem des ersten Abschnitts.

Mit Hilfe dieser Rechnungen kann man nun die Bestimmung der A_0, A_1, A_2 aus A, B, C, D folgendermaßen explizite auf das Fundamentalproblem des vorigen Abschnittes zurückführen[44]). Es seien $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ und $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$q = A_1 x_1^2 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = 0,$$

so werden $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ und $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, jedes für sich, durch die 60 Ikosaedersubstitutionen des vorigen Abschnittes transformiert, wenn A_0, A_1, A_2 durch die 60 ternären Substitutionen (3) umgewandelt werden. *Daher hängen* $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ *und* $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ *jedes von einer Ikosaedergleichung ab:*

$$(18)\qquad 1728\,\frac{H^3(\eta_1,\eta_2)}{f^5(\eta_1,\eta_2)} = X_1, \qquad 1728\,\frac{H^3(\zeta_1,\zeta_2)}{f^5(\zeta_1,\zeta_2)} = X_2,$$

wo die Parameter X_1, X_2 *rationale Funktionen von* $\sqrt{A}$, B, C, D *vorstellen.*

Diese X_1, X_2 berechne ich nach einer Methode, die ich auch im folgenden Abschnitte bei ähnlichen Aufgaben noch anwende (obgleich ich ihr keinerlei prinzipielle Bedeutung beilege). Ich setze vorab:

$$q = A_1 x_1^2 + 2A_0 x_1 x_2 - A_2 x_2^2 = (\eta_2 x_1 - \eta_1 x_2)(\zeta_2 x_1 - \zeta_1 x_2)$$

und betrachte nun die drei Resultanten:

[44]) Vgl. dazu Brioschi, Annali di Matematica, Ser. II, t. I (1867/68), S. 230.

$$(19)\quad \begin{cases} 12^{\frac{2}{3}} f(\eta_1,\eta_2)\cdot f(\zeta_1,\zeta_2) = l, \\ 12^{\frac{8}{3}} H(\eta_1,\eta_2)\cdot H(\zeta_1,\zeta_2) = m, \\ \quad T(\eta_1,\eta_2)\cdot T(\zeta_1,\zeta_2) = n, \end{cases}$$

Diese drei Resultanten, gleich Null gesetzt, stellen im Sinne des vorigen Paragraphen die dort berechneten Aggregate der an A in den Punkten f, H, T konstruierbaren Tangenten vor. Denn wenn z. B. die Resultante von f und q verschwindet, so bedeutet das, für jene Interpretation, daß eine der beiden Tangenten, welche man von A_0, A_1, A_2 an A legen kann, in einem Punkte f berührt. — *Die Resultanten* l, m, n, *sind daher, bis auf Zahlenfaktoren, gleich den drei soeben berechneten Ausdrücken* L, M, N. Die Zahlenfaktoren aber ergeben sich einfach, wenn man $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ setzt, wo denn $A = 0$, $B = -f$, $C = -144H$ wird. Auf diese Weise kommt:

$$(20)\quad \begin{cases} l = 12^{\frac{2}{3}} L, \\ m = 12^{-\frac{4}{3}} M, \\ n = \frac{N}{18}. \end{cases}$$

Aber es sind X_1, X_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$f^5(\eta)\cdot f^5(\zeta)\cdot X^2 - 1728\,[f^5(\eta)\cdot H^3(\zeta) + f^5(\zeta)\cdot H^3(\eta)]\cdot X \\ + 1728^2 H^3(\eta) H^3(\zeta) = 0.$$

Hier ist der erste Koeffizient $= \frac{l^5}{144}$, der dritte $= \frac{m^3}{144}$, und der mittlere berechnet sich wegen

$$T^2 = 12 f^5 - 12^4 H^3$$

gleich:

$$\frac{l^5 + m^3 - n^2}{144}.$$

Daher erhält man als Werte der Parameter:

$$(21)\qquad \left\{\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \frac{l^5 + m^3 - n^2 \pm \sqrt{(l^5 + m^3 - n^2)^2 - 4l^5 m^3}}{2l^5},$$

wo die l, m, n durch Formel (20) definiert sind.

Untersuchen wir noch den Wert der Diskriminante. Es werden X_1 und X_2 zunächst einander gleich, wenn $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ mit $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ identisch ist. *Dies gibt für die Diskriminante den Faktor* A. X_1 und X_2 werden aber auch einander gleich, wenn $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ aus $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, oder, was dasselbe ist, $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ aus $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ durch eine der 59 nicht identischen Ikosaedersubstitutionen hervorgeht. *Die Dis-*

kriminante enthält daher noch die im vorigen Paragraphen berechneten Ausdrücke D, H, F_1, F_2, *jeden quadratisch.* Hiermit ist sie, da sie vom hundertzwanzigsten Grade ist:

$$120 = 2 + 2(15 + 20 + 12 + 12),$$

erschöpft, man hat also, unter c einen Zahlenfaktor verstanden:

$$(22) \qquad \pm\sqrt{(l^5 + m^3 - n^2)^2 - 4\, l^5 m^3} = \pm\, c D \cdot \mathsf{H} \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \sqrt{A}.$$

durch Vergleichung eines Gliedes beiderseits findet man:

$$(23) \qquad c = \tfrac{2}{5}.$$

§ 8.

Bestimmung der A_0, A_1, A_2.

Um jetzt A_0, A_1, A_2 zu bestimmen, berechne man zunächst η_1 und η_2, sowie ζ_1 und ζ_2 [ihren Verhältnissen nach] gemäß Anleitung des vorigen Abschnittes aus den hier aufgestellten Ikosaedergleichungen und bemesse ihre absoluten Werte derart, daß die Resultanten $f(\eta_1, \eta_2) \cdot f(\zeta_1, \zeta_2)$ usw. mit L, M, N übereinstimmen. Die Frage, welche Werte η und ζ zusammengehören, beantwortet sich im allgemeinen aus der Formel:

$$(24) \qquad \eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1 = \sqrt{A}.$$

Die zusammengehörigen Vorzeichen, welche man η_1, η_2 und ζ_1, ζ_2 zu erteilen hat, folgen aus dem Werte von D. Schließlich ist:

$$(25) \qquad A_1 = \eta_2 \zeta_2, \quad A_2 = -\eta_1 \zeta_1, \quad A_0 = -\frac{\eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1}{2}.$$

Man kann verlangen, das ζ_1, ζ_2, welches zu einem η_1, η_2 gehört, rational durch dieses und bekannte Größen auszudrücken. Nach einer Mitteilung, die ich Gordan verdanke, erreicht man dies z. B. folgendermaßen. Man stelle

$$f(\eta_1, \eta_2) \cdot f(\zeta_1, \zeta_2) = L, \quad H(\eta_1, \eta_2) \cdot H(\zeta_1, \zeta_2) = 12^{-4} M,$$
$$T(\eta_1, \eta_2) \cdot T(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{N}{18},$$

wie soeben geschehen, als Funktionen von A, B, C dar und polarisiere $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ nach $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$. So wird A_ζ $\left(\text{d. h. } \frac{\partial A}{\partial \eta_1} \cdot \zeta_1 + \frac{\partial A}{\partial \eta_2} \cdot \zeta_2\right)$ gleich Null und also:

$$f(\eta)_\zeta \cdot f(\zeta) = \frac{\partial L}{\partial B} \cdot B_\zeta + \frac{\partial L}{\partial C} \cdot C_\zeta,$$
$$12^4 \cdot H(\eta)_\zeta \cdot H(\zeta) = \frac{\partial M}{\partial B} \cdot B_\zeta + \frac{\partial M}{\partial C} \cdot C_\zeta,$$
$$18 \cdot T(\eta)_\zeta \cdot T(\zeta) = \frac{\partial N}{\partial B} \cdot B_\zeta + \frac{\partial N}{\partial C} \cdot C_\zeta.$$

Daher:

$$(26) \qquad 0 = \begin{vmatrix} L \dfrac{f(\eta)_\zeta}{f(\eta)} & 12^4 \cdot M \dfrac{H(\eta)_\zeta}{H(\eta)} & 18 \cdot N \dfrac{T(\eta)_\zeta}{T(\eta)} \\ \dfrac{\partial L}{\partial B} & \dfrac{\partial M}{\partial B} & \dfrac{\partial N}{\partial B} \\ \dfrac{\partial L}{\partial C} & \dfrac{\partial M}{\partial C} & \dfrac{\partial N}{\partial C} \end{vmatrix}.$$

Diese Formel ist in ζ_1, ζ_2 linear, liefert also $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ als rationale Funktion von $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ [45]).

§ 9.

Über die Notwendigkeit der bei der Auflösung benutzten Quadratwurzel [46]).

Die Quadratwurzel, welche die beiden Parameter X_1, X_2 scheidet, spielt eine bemerkenswerte Rolle. Sie dient nicht dazu, die Galoissche Gruppe des Problems zu reduzieren. Denn die Galoissche Gruppe umfaßt vorher wie nachher (bei der Ikosaedergleichung) 60 Substitutionen. Trotzdem ist sie (oder eine äquivalente Irrationalität) bei der Zurückführung des Problems auf eine Ikosaedergleichung im allgemeinen notwendig. [Sie ist das, was ich später eine akzessorische Irrationalität nannte.] Es sei nämlich

$$\frac{\varphi(A_0, A_1, A_2)}{\psi(A_0, A_1, A_2)},$$

wo φ, ψ ganze rationale Funktionen ohne gemeinsamen Teiler, von einer Ikosaedergleichung abhängig. Dann soll sich $\frac{\varphi}{\psi}$, sobald auf A_0, A_1, A_2 die 60 ternären Substitutionen (3) angewandt werden, durch die 60 Ikosaedersubstitutionen transformieren. Das ist bei durchaus willkürlichen A_0, A_1, A_2 nur möglich, wenn sich φ und ψ durch die *binären* Substitutionen (4) des vorigen Abschnittes umformen. Aber die Zahl dieser Substitutionen ist (mindestens) 120, und das ist mit der Zahl 60 der ternären Substitutionen unverträglich.

Dagegen gibt es selbstverständlich spezielle Wertsysteme von A_0, A_1, A_2, bei denen die Quadratwurzel vermieden werden kann. Ein Beispiel ist dieses. Es gibt *rationale* Kurven, welche durch die 60 ternären Substitutionen in sich übergeführt werden. So ist der Kegelschnitt $A = 0$ (bei dem unsere Behauptung selbstverständlich ist), so ist die Kurve zehnter Ordnung $C = 0$. Stellt man jetzt die Koordinaten A_0, A_1, A_2 eines

[45]) [Im Ikosaederbuch, S. 235—236 wird die im Text behandelte Aufgabe noch einfacher gelöst. K.]

[46]) Vgl. den letzten Paragraphen des dritten Abschnittes.

Punktes einer solchen Kurve in gewöhnlicher Weise rational durch einen Parameter λ dar, so wird λ, sobald man eine der 60 ternären Substitutionen macht, seinerseits eine (gebrochene) lineare Substitution erfahren, weil das ganze Gebiet der Kurve eindeutig in sich transformiert wird. Daher hängt nach § 4 des ersten Abschnittes eine geeignete lineare Funktion von λ, d. h. eine rationale Funktion von A_0, A_1, A_2 von einer Ikosaedergleichung ab. — Eine ähnliche Überlegung war es, wie ich beiläufig bemerke, welche mich zuerst zu der Methode des § 7 geführt hat[47]). Um das allgemeine Problem auf eine Ikosaedergleichung zurückzuführen, suchte ich dem Punkte A_0, A_1, A_2 in einer durch lineare Substitution unzerstörbaren Weise einen Punkt des Kegelschnittes A zuzuordnen, dessen Bestimmung dann von einer Ikosaedergleichung abhängen mußte. Die Zuordnung, wie sie in § 7 verwandt wird, besteht, geometrisch zu reden, einfach darin, daß man von A_0, A_1, A_2 eine Tangente an A legt und nun den Berührungspunkt als zugeordnet ansieht.

Ein anderes Beispiel von mehr partikulärem Charakter gibt der Fall $B = 0$. Die sogleich aufzustellende (Brioschische) Resolvente fünften Grades nimmt dann die Bring-Jerrardsche Form an, und diese subsumiert sich unter diejenigen Gleichungen fünften Grades, welche ich im dritten Abschnitte durch eine Ikosaedergleichung löse. Dem geht folgende Konstruktion in der Ebene A_0, A_1, A_2 parallel, wie ich hier ohne Beweis angebe. Man kann um $A = 0$ unendlich viele Dreiecke beschreiben, deren Ecken auf B liegen, Jeder Punkt auf B ist Ecke eines solchen Dreiecks, während jede Tangente von A dreimal als Dreiecksseite benutzt wird. Ordnet man nun dem Punkte auf B den Berührungspunkt der gegenüberstehenden Seite mit A zu, so ist B auf A eindeutig (allerdings nicht umkehrbar eindeutig) bezogen. Der Punkt auf A ist durch eine Ikosaedergleichung bestimmt, und von ihm geht man rational zu dem Punkte auf B zurück, indem man die Koeffizienten der vorgelegten Jacobischen Gleichung benutzt.

§ 10.

Brioschis Resolvente vom fünften Grade und die Diagonalfläche dritter Ordnung.

Ich betrachte zum Schlusse noch die Resolvente fünften Grades, welche Brioschi, wie in § 13 des ersten Abschnittes berichtet, bei den allgemeinen Jacobischen Gleichungen aufgestellt hat. Dieselbe erwächst geometrisch aus dem Umstande, daß man die 15 Verbindungsgeraden der sechs Fundamentalpunkte der Ebene A_0, A_1, A_2 derart auf fünf Dreiecke

[47]) [Vgl. die Erlanger Sitzungsberichte vom 13. Nov. 1876.]

verteilen kann, daß die Seiten jedes Dreiecks alle Fundamentalpunkte enthalten[48]). In der Tat stellt der Ausdruck (Gleichung (20) des Abschn. I):

$$y_\nu = \varepsilon^\nu P_1 + \varepsilon^{2\nu} P_2 + \varepsilon^{3\nu} P_3 + \varepsilon^{4\nu} P_4, \tag{27}$$

gleich Null gesetzt, für die verschiedenen Werte von ν die fünf Dreiecke dar, wie leicht zu kontrollieren. P_1, P_2, P_3, P_4 repräsentieren, gleich Null gesetzt, Kurven dritter Ordnung, welche ebenfalls durch sämtliche Fundamentalpunkte hindurchgehen. Die Gleichung fünften Grades selbst (Gleichung (22) des Abschn. I):

$$y^5 + 10\,By^3 + 5(9B^2 - AC)y - 12D = 0$$

berechnet man wieder mit Leichtigkeit aus dem Verhalten der Kurven y_ν in den Fundamentalpunkten (vgl. § 5, Abschn. II). Zumal sieht man a priori ein, daß

$$\sum y = 0, \quad \sum y^3 = 0 \tag{28}$$

sein muß, weil es keine ganze Funktion von A, B, C, D gibt, welche den dritten oder neunten Grad besitzt.

Nun kann man diesen Formeln eine geometrische Deutung geben, durch welche der Zusammenhang dieser Betrachtungen hergestellt wird mit denjenigen, die Clebsch in den Math. Annalen, Bd. 4 (1871), S. 336 ff. entwickelt hat. Die in A_0, A_1, A_2 rationalen Ausdrücke y_ν befriedigen in allgemeinster Weise die Bedingungen $\sum y = 0$, $\sum y^3 = 0$. *Betrachtet man also (wie im folgenden Abschnitte durchgängig geschieht) die y als Pentaederkoordinaten im Raume, so vermitteln sie die eindeutige Abbildung der durch dieses Gleichungspaar dargestellten Diagonalfläche auf die Ebene A_0, A_1, A_2.* Es ist nützlich, sich zu orientieren, was die hauptsächlichen in der Ebene verlaufenden Kurven für die Fläche bedeuten. Die sechs Fundamentalpunkte der Ebene sind in der Tat die Fundamentalpunkte der Abbildung; sie stellen sechs auf der Fläche verlaufende gerade Linien dar. Die sechs weiteren geraden Linien, welche mit ihnen die ausgezeichnete Doppelsechs bilden (Clebsch, Math. Annalen, Bd. 4, S. 336), sind durch die Kegelschnitte $z - A = 0$ des § 5 gegeben. Die Kurve $D = 0$ repräsentiert die 15 übrigen geraden Linien der Diagonalfläche. $B = 0$ gibt den Schnitt der Diagonalfläche mit der Fläche zweiter Ordnung $\sum y^2 = 0$, und endlich $A = 0$ und $C = 0$ bilden gemeinsam den in zwei rationale Bestandteile zerfallenden Schnitt der Diagonalfläche mit der Fläche vierter Ordnung $20 \sum y^4 = (\sum y^2)^2$ (vgl. Abschn. I, § 15).

Wenn man jetzt die y beliebig untereinander vertauscht, so erfährt die Diagonalfläche (räumliche) Kollineationen, welche sie in sich überführen. Denselben entsprechen eindeutige Transformationen der Bildebene in sich.

[48]) Diese fünf Dreiecke sind zugleich Polardreiecke für den Kegelschnitt $A = 0$.

Den *geraden* Vertauschungen der y insbesondere entsprechen die 60 ternären Substitutionen des § 3 dieses Abschnittes. Die ungeraden Vertauschungen aber ergeben Umformungen, welche über den Kreis der bisher betrachteten Gegenstände hinausführen. *Es sind 60 Cremonatransformationen, welche die geraden Linien der Ebene in Kurven fünfter Ordnung überführen, die in den Fundamentalpunkten Doppelpunkte haben*[49]). *Sie bilden mit den 60 Kollineationen zusammen eine Gruppe von 120 Transformationen.* Bei ihnen bleiben die Kurven $B=0$, $D=0$ ungeändert, die Kurven $A=0$ und $C=0$ vertauschen sich, desgleichen die Fundamentalpunkte mit den Kegelschnitten, welche durch fünf Fundamentalpunkte hindurchgehen. Wendet man auf die ursprünglichen A_0, A_1, A_2 die ternären linearen Substitutionen an, so erfahren auch die transformierten A_0, A_1, A_2 derartige Substitutionen. *Aber ε ist dabei durch ε^2 ersetzt.* Wir finden also eine Umformung der allgemeinen Jacobischen Gleichung in eine zweite, analog der zweiten Klasse von Umformungen, die wir beim Ikosaeder in § 18 des vorigen Abschnittes studierten. Eben diese Umformungen (und die anderen hier nicht berührten, welche ε ungeändert lassen) hat Brioschi in den Annali di Matematica, ser. II, t. 1 untersucht; ich gehe deshalb nicht näher auf sie ein; aber ich wollte wenigstens aussprechen, wie naturgemäß man zu ihnen gelangt, wenn man von den Kollineationen ausgeht, welche die Diagonalfläche in sich überführen.

Abschnitt III.

Eine neue Lösung der Gleichungen fünften Grades.

In diesem dritten Abschnitte zeige ich, daß man die Gleichungen fünften Grades, bei denen die Summe der Wurzeln und die Summe der Wurzelquadrate verschwindet, explizite mit Hilfe einer Ikosaedergleichung lösen kann. Es ist das gewissermaßen die Umkehrung der Betrachtungen in § 16, 17 des ersten Abschnittes. Die Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades ist dadurch darauf zurückgeführt, die Gleichung vorab durch

[49]) Z. B. unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden:

$$\varrho A_0' = -8A_0^3 A_1 A_2 + 6A_0 A_1^2 A_2^2 - (A_1^5 + A_2^5),$$
$$\varrho A_1' = 2(8A_0^3 A_2^2 - 4A_0^2 A_1^3 - 2A_0 A_1 A_2^3 + A_1^4 A_2),$$
$$\varrho A_2' = 2(8A_0^3 A_1^2 - 4A_0^2 A_2^3 - 2A_0 A_1^3 A_2 + A_1 A_2^4).$$

[Vgl. zu dem ganzen § 10 wieder den Zusatz II zu der Arbeit „Über Flächen dritter Ordnung" (Abh. XXXV, S. 56 ff.). Ich empfehle besonders, die gestaltlichen Umänderungen zu verfolgen, welche die dem Ikosaeder umgeschriebene Kugelfläche bei den im Text besprochenen *Cremona*transformationen fünfter Ordnung erleidet. Hinsichtlich dieser *Cremona*transformationen vgl. Näheres bei Wiman in den Math. Annalen, Bd. 48 (1896/97). K.]

eine Tschirnhausen-Transformation auf die genannte einfache Form zu bringen. Ich würde gern eine ausgeführte Vergleichung dieser Lösungsmethode mit der Hermiteschen und der Kroneckerschen hinzugefügt haben, die alle untereinander enge verwandt sind. Aber es verlangt das durchaus ein Eingehen auf die Eigentümlichkeit der elliptischen Funktionen und deshalb verschiebe ich noch diese Auseinandersetzung[50]).

§ 1.

Geometrischer Ansatz.

Es mögen die fünf Wurzeln y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 einer Gleichung fünften Grades an die Bedingung geknüpft sein: $\sum y = 0$ und übrigens nur die Verhältnisse der Wurzeln beachtet werden. Dann fasse ich die y auf als *Pentaederkoordinaten* eines Raumpunktes, der 120 im allgemeinen verschiedene Lagen annimmt, wenn man die y auf beliebige Weise permutiert. *Diesen Permutationen gebe ich dann, und das ist für meine Anschauung das Wesentliche, die Bedeutung von Kollineationen des Raumes.* (Vgl. meine Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 4 [= Abh. L, S. 262 ff.].)

Ist nun insbesondere noch $\sum y^2 = 0$ [in welchem Falle ich die Gleichung fünften Grades später als Hauptgleichung bezeichnete], so liegen die 120 Punkte alle auf der durch diese Gleichung dargestellten Fläche zweiten Grades, die ich als Fläche Ψ [= Hauptfläche] bezeichne. Aber eine Fläche zweiten Grades trägt zwei Scharen geradlinig Erzeugender, und auch diese werden bei den 120 Kollineationen transformiert. Man zeigt leicht: *Bei den 60 Kollineationen, welche durch gerade Vertauschungen der y vorgestellt sind, wird jede Schar der Erzeugenden in sich transformiert; bei den übrigen Kollineationen werden die Scharen untereinander vertauscht.* Nun mache man denselben Schluß, der schon in § 9 des vorigen Abschnittes angewandt wurde. Die Erzeugenden einer Art der Fläche zweiten Grades bilden eine *rationale* Mannigfaltigkeit erster Dimension; sie lassen sich rational durch einen Parameter λ darstellen, so daß zu jeder Erzeugenden nur ein Wert von λ gehört. Eine räumliche Kollineation daher,

[50]) Vgl. indes die bereits genannte Note in den Rendiconti del' Istituto Lombardo vom April 1877. [Ausführlicher ist dies in der wiederholt genannten Arbeit „Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung des Gleichungen fünften Grades" (1878) geschehen. — Ich will auch gleich bemerken, daß die ganzen umständlichen Rechnungen mit symmetrischen Funktionen, die in § 3, 5, 9, 10 des Textes folgen, von Gordan invariantentheoretisch abgekürzt sind und schließlich durch den einfachen Gedanken überflüssig gemacht sind, den L. Kiepert in den Göttinger Nachrichten vom 17. Juli 1878 oder auch in Crelles Journal, Bd. 87 (1879) ausgesprochen hat: die ausgerechnete Hauptresolvente der Ikosaedergleichung direkt mit der zur Auflösung vorgelegten Hauptgleichung fünften Grades zu vergleichen. So ist es auch im Ikosaederbuch ausgeführt. K.]

welche die Erzeugendenschar in sich transformiert, ist mit einer *linearen* Transformation von λ äquivalent. ***Also sind, nach § 4 des ersten Abschnittes, die 60 Werte von λ, welche 60 zusammengehörigen Erzeugenden entsprechen, von einer Ikosaedergleichung abhängig*** (vgl. Math. Annalen, Bd. 9 [= Abh. LI, S. 300 f.]).

Um jetzt die Gleichung fünften Grades zu lösen, bei der $\sum y = 0$, $\sum y^2 = 0$, bestimme man vor allem die 60 Erzeugenden der einen (ersten) Art, welche durch die 60 Punkte hindurchlaufen, die aus dem Punkte $y_0 y_1 y_2 y_3 y_4$ durch die geraden Vertauschungen der y entstehen. Die Parameter dieser Erzeugenden sind gebrochene lineare homogene Funktionen der y; es wird in *erster* Linie darauf ankommen, die Parameter so zu wählen, daß die aufzustellende Ikosaedergleichung in kanonischer Form erscheint. Dann handelt es sich ***zweitens*** darum, die Ikosaedergleichung wirklich zu bilden. Und ***drittens*** sind die Wurzeln y als rationale Funktionen der Wurzeln dieser Ikosaedergleichung, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als rationale Funktionen *einer* Wurzel der Ikosaedergleichung darzustellen. Mit diesen drei Problemen werde ich mich der Reihe nach beschäftigen.

§ 2.

Nähere Betrachtung der Fläche Ψ.

Durch die 60 geraden Vertauschungen der y — welche fortan allein in Betracht kommen sollen —, werden die Erzeugenden erster Art auf Ψ und ebenso die Erzeugenden zweiter Art in Gruppen von je 60 zusammengefaßt. Unter diesen Gruppen muß es jedesmal eine geben — sie soll f_1 bez. f_2 heißen —, die nur aus 12 verschiedenen Linien besteht, eine zweite — H_1 oder H_2 —, die nur 20, und eine dritte — T_1 oder T_2 —, die nur 30 verschiedene Linien umfaßt. Ich werde hier zuvörderst diese ausgezeichneten Gruppen analytisch bestimmen.

Zu diesem Zwecke bemerke man, daß man auf Ψ von vornherein gewisse Gruppen zusammengehöriger Punkte kennt, die weniger als 60 verschiedene Punkte umfassen. Es sind dies:

I. *Zwei Gruppen von je 12 Punkten.* Die Koordinaten dieser Punkte sind die fünften Einheitswurzeln. Man erhält die ersten zwölf, wenn man

$$1,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon$$

auf gerade Weise vertauscht, und die zweiten zwölf entsprechend aus

$$1,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^2.$$

II. *Eine Gruppe von 20 Punkten.* Unter α eine dritte Einheitswurzel verstanden, sind die Koordinaten dieser Punkte in wechselnder Anordnung:

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ 0,\ 0.$$

III. *Eine Gruppe von 30 Punkten.* Die Koordinaten dieser Punkte sind, abgesehen von der Reihenfolge:

$$1,\ \beta,\ \beta^2,\ \beta^3,\ 0,$$

wo β eine primitive vierte Einheitswurzel [also $\pm i$] bedeutet.

In demselben Sinne, wie die Punkte, gruppieren sich die zugehörigen Tangentialebenen und die Erzeugenden erster Art oder zweiter Art, welche dieselben ausschneiden. Die Tangentialebene eines Punktes y' lautet:

$$\sum y_i' y_i = 0.$$

Es entsprechen also den Punkten I, II, III folgende Tangentialebenen (in den hingeschriebenen Gleichungen hat man die y immer vermöge der 60 geraden Vertauschungen umzusetzen):

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{I.} & \begin{cases} y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4 = 0, \\ y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4 = 0, \end{cases} \\ \text{II.} & y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 = 0, \\ \text{III.} & y_0 + \beta y_1 + \beta^2 y_2 + \beta^3 y_3 = 0. \end{cases}$$

Dabei bemerke man, *daß die Erzeugenden, welche die 2·12 Ebenen I ausschneiden, paarweise identisch sind.* Denn man kann die 2·12 Ebenen in der Weise auf sechs Tetraeder verteilen, daß immer vier Kanten des Tetraeders der Fläche Ψ angehören. Ein solches Tetraeder bilden z. B. die vier Ebenen:

$$(2)\qquad \begin{cases} p_1 = y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4, \\ p_2 = y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4, \\ p_3 = y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \varepsilon^4 y_2 + \varepsilon y_3 + \varepsilon^3 y_4, \\ p_4 = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \varepsilon^4 y_4, \end{cases}$$

die in der Weise zusammengehören, daß alle aus einer hervorgehen, indem man statt ε schreibt ε^2, ε^3, ε^4 [51]). Man hat nämlich vermöge $\sum y = 0$:

$$\Psi = \sum y^2 = p_1 p_4 + p_2 p_3,$$

und die beiden Erzeugenden von $\Psi = 0$ also, die etwa durch $p_1 = 0$ ausgeschnitten werden, sind auch bez. enthalten in $p_2 = 0$, $p_3 = 0$.

Man erhält daher nur 24 Erzeugende I, dagegen 40 Erzeugende II, 60 Erzeugende III, die sich auf 12, 20, 30 Erzeugende der einen Art

[51]) Diese vier Ausdrücke, durch die sich die y_ν in der Form darstellen:

$$5 y_\nu = \varepsilon^\nu p_1 + \varepsilon^{2\nu} p_2 + \varepsilon^{3\nu} p_3 + \varepsilon^{4\nu} p_4,$$

spielen von je her in der Theorie der Gleichungen fünften Grades eine wichtige Rolle. Ich möchte hier nur daran erinnern, daß es eben diese Ausdrücke sind, welche oben (Abschn. I, § 13, Abschn. II, § 10) bei der Brioschischen Resolvente fünften Grades mit P_1, P_2, P_3, P_4 bezeichnet sind.

und ebenso viele der anderen Art verteilen. Nun gibt es unter den Linien erster oder zweiter Art keine anderen Gruppen von 12, 20, 30 zusammengehörigen, als f_1, H_1, T_1 bez. f_2, H_2, T_2. *Daher werden also auf $\Psi = 0$ die 24 Geraden $f_1 f_2$, die 40 Geraden $H_1 H_2$, die 60 Geraden $T_1 T_2$ ausgeschnitten durch folgende Aggregate von Tangentenebenen:*

1. *die Geraden $f_1 f_2$ durch die 12 Ebenen:*

$$\prod_{12} (y_0 + \varepsilon^4 y_1 + \varepsilon^3 y_2 + \varepsilon^2 y_3 + \varepsilon y_4) = 0, \tag{3}$$

oder auch durch die 12 Ebenen:

$$\prod_{12} (y_0 + \varepsilon^3 y_1 + \varepsilon y_2 + \varepsilon^4 y_3 + \varepsilon^2 y_4) = 0; \tag{3a}$$

2. *die Geraden $H_1 H_2$ durch die 20 Ebenen:*

$$\prod_{20} (y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2) = 0; \tag{4}$$

3. *die Geraden $T_1 T_2$ durch die 30 Ebenen:*

$$\prod_{20} (y_0 + \beta y_1 + \beta^2 y_2 + \beta^3 y_3) = 0. \tag{5}$$

§ 3.

Berechnung gewisser symmetrischer Funktionen.

Sei jetzt die Gleichung fünften Grades mit $\sum y = 0$, $\sum y^2 = 0$, wie ich immer schreiben will, in der Gestalt gegeben:

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0. \tag{6}$$

Ich stelle zunächst die Aufgabe, die unter (3), (3a), (4), (5) linker Hand vorkommenden symmetrischen Funktionen der Wurzeln als Funktionen von α, β, γ zu berechnen.

1. Ein Punkt, der auf einer Erzeugenden von f_1 oder f_2 gelegen ist, ist dargestellt durch:

$$y_i = \varrho(\varepsilon^i + \lambda \varepsilon^{2i}),$$

wo ϱ, λ zwei Parameter. Die Gleichung (6), von der diese y_i abhängen, erhält als Koeffizienten:

$$\alpha = -\varrho^3 \lambda^2, \quad \beta = -\varrho^4 \lambda, \quad \gamma = -\varrho^5 (1 + \lambda^5),$$

und also ist für sie:

$$\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3 = 0.$$

Daher ist die symmetrische Funktion (3), *oder, was auf dasselbe hinauskommt,* (3a), *bis auf einen nicht weiter in Betracht kommenden Zahlenfaktor gleich dem Ausdrucke*

$$L = \alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3. \tag{7}$$

2. Analogerweise findet man, daß die zweite symmetrische Funktion verschwindet, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} y_0 &= \varrho(2 + \lambda) \\ y_1 &= \varrho(2 + \lambda\alpha) \\ y_2 &= \varrho(2 + \lambda\alpha^2) \\ y_3 &= \varrho(-3 + \sqrt{-15}) \\ y_4 &= \varrho(-3 - \sqrt{-15}). \end{aligned} \qquad \left(\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)^{52)}.$$

Die betreffende Gleichung fünften Grades lautet:

$$y^5 - \varrho^3 (80 + \lambda^3) y^2 + 6\varrho^4 (40 - \lambda^3) y - 24\varrho^5 (8 + \lambda^3) = 0$$

und *man erhält durch Elimination von ϱ, λ den gesuchten Ausdruck:*

$$M = -192\alpha^5\gamma + 640\alpha^4\beta^2 + 40\alpha^2\beta\gamma^2 - 120\alpha\beta^3\gamma - 144\beta^5 + \gamma^4. \tag{8}$$

3. Endlich, um die dritte symmetrische Funktion zu berechnen, multipliziert man am einfachsten zunächst die sechs Faktoren, welche y_0 in ausgezeichneter Weise enthalten. So kommt, mit Unterdrückung des Index:

$$-5\alpha y^3 + 15\beta y^2 - 25\gamma y - 8\alpha^2.$$

Sodann eliminiere man zwischen diesem Ausdrucke und der linken Seite der Gleichung fünften Grades:

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma$$

das y. *So ergibt sich:*

$$\begin{aligned} N = 1728\alpha^{10} &- 7200\alpha^7\beta\gamma + 2080\alpha^6\beta^3 - 576\alpha^5\gamma^3 + 2760\alpha^4\beta^2\gamma^2 \\ &- 9360\alpha^3\beta^4\gamma + 16200\alpha^2\beta^6 - 60\alpha^2\beta\gamma^4 + 180\alpha\beta^3\gamma^3 \\ &- 648\beta^5\gamma^2 - \gamma^6. \end{aligned} \tag{9}$$

§ 4.

Die kanonischen Parameter der Erzeugenden.

Ich will den Parameter, durch den die Erzeugenden erster Art dargestellt werden, mit $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$, den Parameter für die Erzeugenden zweiter Art mit $\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ bezeichnen. Dieselben sind, damit die Ikosaedergleichung in kanonischer Form erscheint, in der Weise auszusuchen, daß den zwölf Linien der Gruppe f_1 und ebenso den zwölf Linien der Gruppe f_2 die-

[52]) [Um Verwechselungen vorzubeugen, sei ausdrücklich hervorgehoben, daß das α dieser fünf Formeln verschieden ist von dem α in den übrigen Formeln dieses Paragraphen. Jenes ist dritte Einheitswurzel, dieses Koeffizient der Gleichung (6).]

jenigen zwölf Parameterwerte zukommen, welche Wurzeln der kanonischen Gleichung $f=0$ sind, d. h.:

$$0,\ \infty,\ (\varepsilon+\varepsilon^4)\varepsilon^\nu,\quad (\varepsilon^2+\varepsilon^3)\varepsilon^\nu.$$

Man erreicht dies, indem man setzt:

$$(10)\qquad \begin{cases} \eta = -\dfrac{p_1}{p_2} = +\dfrac{p_3}{p_4}, \\[2mm] \zeta = +\dfrac{p_1}{p_3} = -\dfrac{p_2}{p_4}, \end{cases}$$

wo p_1, p_2, p_3, p_4 die schon wiederholt genannten Ausdrücke bezeichnen.

In der Tat:

$$p_1 = -\lambda p_2, \quad p_1 = \mu p_3$$

stellen die Gleichungen zweier Ebenenbüschel dar, deren Achsen der Fläche Ψ angehören, es ist also $-\frac{p_1}{p_2}$ ein Parameter für die Linien der einen Art, welche die erste heißen soll, $+\frac{p_1}{p_3}$ ein Parameter für die Linen der anderen Art. Trägt man sodann in $-\frac{p_1}{p_2}$ oder $+\frac{p_1}{p_3}$ die Koordinaten der Punkte I (§ 2) ein, so entstehen genau die eben angegebenen Wurzelwerte von f. Durch diese Punkte verlaufen aber die zwölf Linien f_1 und die zwölf Linien f_2, deren Parameter diese Werte annehmen sollten.

Es ist auch nicht schwer, durch Rechnung zu verifizieren, daß sich die Größen η, ζ durch die 60 Ikosaedersubstitutionen (Abschn. I, Gleichung (3)) transformieren, sobald man die y in gerader Weise vertauscht. Man braucht bei der Rechnung nur immer die Relationen $\sum y = 0$, $\sum y^2 = 0$ anzuwenden. Dabei zeigt sich das sehr bemerkenswerte, ob auch selbstverständliche Verhalten, daß die linearen Substitutionen, denen η und ζ unterworfen werden, zwar in ihrer Gesamtheit identisch sind, im einzelnen aber in der Weise unterschieden, daß immer, wo bei η die Wurzel ε steht, bei ζ zu setzen ist ε^2. Denn schreibt man in $\eta = -\frac{p_1}{p_2}$ überall ε^2 statt ε, so kommt $-\frac{p_2}{p_4} = +\frac{p_1}{p_3} = \zeta$.

Ich füge hier zweckmäßig *eine Ergänzung zu den Betrachtungen des ersten Abschnittes* ein. Bildet man für die Gleichungen fünften Grades, welche in § 17, 18 daselbst betrachtet wurden:

$$y_\nu = (\varepsilon^\nu \eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2) R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2) S$$

die Größen p_i, so kommt:

$$p_1 = 5\eta_1 R, \quad p_2 = -5\eta_2 R,$$
$$p_3 = 5\eta_1 S, \quad p_4 = +5\eta_2 S.$$

Daher wird für diese Gleichungen der eine Parameter $-\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4}$ gleich dem ursprünglichen $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, von dem die Betrachtungen des ersten Abschnittes ausgehen; der zweite Parameter $\frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4}$ wird gleich $\frac{R}{S}$. Deshalb ist, wie in § 18 daselbst ohne Beweis angegeben wurde, $\frac{R}{S}$ eine Funktion von $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, die sich selbst ikosaedrisch transformiert, wenn $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ den Ikosaedersubstitutionen unterworfen wird, doch so, daß ε durch ε^2 ersetzt ist.

§ 5.

Aufstellung der Ikosaedergleichungen.

Um jetzt die Parameter X_1, X_2 der Gleichungen:

$$(11)\qquad 1728\,\frac{H^3(\eta)}{f^5(\eta)} = X_1, \quad 1728\,\frac{H^3(\zeta)}{f^5(\zeta)} = X_2$$

zu berechnen, schlage ich denselben Weg ein, der in Abschnitt II, § 7 zum Ziele führte, indem ich vor allen Dingen die Produkte $f(\eta)f(\zeta)$, $H(\eta)H(\zeta)$, $T(\eta)T(\zeta)$ betrachte.

Die Gleichung

$$f(\eta)\cdot f(\zeta) = 0$$

stellt, wenn man sie unter Wegschaffung der Nenner so schreibt:

$$p_2^{12} p_3^{12} f\left(-\frac{p_1}{p_2}\right)\cdot f\left(+\frac{p_1}{p_3}\right) = f(-p_1, p_2)\cdot f(p_1, p_3) = 0,$$

ein Aggregat von 24 Ebenen dar, von denen zwölf durch die Achse $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ hindurchgehen und übrigens durch die zwölf Erzeugenden (erster Art) der Gruppe f_1, während die zwölf anderen durch die Achse $p_1 = 0$, $p_3 = 0$ hindurchgelegt sind und die zwölf Erzeugenden zweiter Art der Gruppe f_2 ausschneiden. Aber dieselben Erzeugenden werden in gleicher Multiplizität auf $\Psi = 0$ ausgeschnitten durch die Fläche

$$p_1^{12} L = 0,$$

wo L den in § 3 berechneten Ausdruck (7) bedeutet. Daher kann man setzen, unter λ einen numerischen Faktor verstanden:

$$(12)\qquad f(\eta)f(\zeta) = \frac{\lambda p_1^{12}}{p_2^{12} p_3^{12}}\cdot L.$$

Dieselbe Überlegung liefert die ferneren Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} H(\eta)H(\zeta) = \dfrac{\mu p_1^{20}}{p_2^{20} p_3^{20}} M, \\[2mm] T(\eta)T(\zeta) = \dfrac{\nu p_1^{30}}{p_2^{30} p_3^{30}} N, \end{cases}$$

wo M, N die Ausdrücke (8), (9) sind.

Um die Zahlenfaktoren λ, μ, ν zu bestimmen, betrachte ich besondere Werte der $y_0 \dots y_4$. Zunächst setze ich die y gleich $0, 1, i, -i, -1$. Die Gleichung fünften Grades lautet dann:

$$(y^4 - 1)\, y = 0,$$

und für sie ist also

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{1}{5}, \quad \gamma = 0,$$

und mithin

$$L = \frac{1}{5^3}, \quad M = \frac{144}{5^5}, \quad N = 0.$$

Andererseits wird:

$$\eta = \zeta = -i, \quad p_2^2 = p_3^2 = (1 + 2i)\sqrt{5},$$

$$f(-i) = (1 - 2i)^3, \quad H(-i) = \frac{1}{12}(1 - 2i)^5, \quad T(-i) = 0.$$

Somit kommt:

$$\lambda = 5^{12}, \quad \mu = \frac{5^{30}}{144^2}. \tag{14}$$

Um ν zu finden, schreibe ich die betr. Gleichung (13) in der Form:

$$T(-p_1, p_2)\, T(p_1, p_3) = \nu\, p_1^{30} N$$

und setze jetzt die Wurzeln y gleich $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$. So ist die Gleichung fünften Grades $y^5 - 1 = 0$, also $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, $N = -1$. Andererseits $p_1 = 5$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $T(\pm 5, 0) = \frac{5^{30}}{12}$. Also ist:

$$\nu = -\frac{5^{30}}{144}. \tag{15}$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung, unter Weglassung sich weghebender Zahlenfaktoren:

$$l = 12^{\frac{2}{5}} \cdot L, \qquad \text{(Gleichung (7))}$$

$$m = 12^{-\frac{4}{3}} \cdot M, \quad \text{(Gleichung (8))}$$

$$n = -\frac{1}{144} \cdot N, \quad \text{(Gleichung (9))}$$

so kommt, durch eine Rechnung, die der in Abschn. II, § 7 angewandten ganz ähnlich ist:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \frac{l^5 + m^3 - n^2 \pm \sqrt{(l^5 + m^3 - n^2)^2 - 4 l^5 m^3}}{2 l^5}. \tag{16}$$

§ 6.

Untersuchung der Diskriminante.

Die hier auftretende Quadratwurzel läßt sich wieder zerlegen, nämlich in das Produkt aus der Quadratwurzel aus der Diskriminante der Gleichung fünften Grades und zweier rationaler Faktoren. Indem man etwa $\zeta = +\frac{p_1}{p_3}$

der Reihe nach gleichsetzt den 60 Werten von $\eta = -\frac{p_1}{p_2}$, findet man folgende Zerlegung:

$$\pm \sqrt{(l^5 + m^3 - n^2)^2 - 4 l^5 m^3} = \pm k P Q \sqrt{\Delta}, \tag{17}$$

wo k ein Zahlenfaktor, P und Q die symmetrischen Funktionen bedeuten

$$P = \prod_{20} \left(y_0 \cos\frac{2\pi}{5} - y_1 \cos\frac{4\pi}{5} \right), \tag{18}$$

$$Q = \prod_{30} \left(y_0 + (y_1 + y_2)\cos\frac{2\pi}{5} + (y_3 + y_4)\cos\frac{4\pi}{5} \right), \tag{19}$$

und Δ die Diskriminante der Gleichung fünften Grades bedeutet, die ich immer von dem vortretenden Zahlenfaktor 3125 befreit denke, so daß ich schreibe:

$$\Delta = 108\,\alpha^5\gamma - 135\,\alpha^4\beta^2 + 90\,\alpha^2\beta\gamma^2 - 320\,\alpha\beta^3\gamma + 266\,\beta^5 + \gamma^4. \tag{20}$$

Die Funktionen P, Q findet man (bis auf Zahlenfaktoren) gleich:

$$P = 8\,\alpha^5\gamma + 40\,\alpha^4\beta^2 - 10\,\alpha^2\beta\gamma^2 - 45\,\alpha\beta^3\gamma + 81\,\beta^5 + \gamma^4, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} Q = {} & 64\,\alpha^{10} + 40\,\alpha^7\beta\gamma - 160\,\alpha^6\beta^3 + \alpha^5\gamma^3 - 5\,\alpha^4\beta^2\gamma^2 + 5\,\alpha^3\beta^4\gamma \\ & - 25\,\alpha^2\beta^6 - \beta^5\gamma^2, \end{aligned} \tag{22}$$

und den dann eintretenden Wert von k durch Vergleich eines einzelnen Gliedes:

$$k = \frac{1}{12}. \tag{23}$$

§ 7.

Rechnung für die Bring-Jerrardsche Form.

Es hat Interesse, die hier entwickelten Formeln in der übersichtlichen Gestalt zu besitzen, welche sie für die Bring-Jerrardsche Form annehmen. Ich will letztere in der Gestalt schreiben:

$$y^5 - y + \gamma = 0, \tag{24}$$

wo also $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{5}$. Dann kommt:

$$l = \frac{12^{\frac{2}{5}}}{5^3}, \quad m = \frac{12^{-\frac{4}{3}}}{5^5}(5^5\gamma^4 + 144), \quad n = \frac{-\gamma^2}{144} \cdot \frac{648 - 5^5\gamma^4}{5^5}.$$

Ich schreibe zur Abkürzung

$$5^5 \gamma^4 = \Gamma. \tag{25}$$

So ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} l^5 + m^3 - n^2 &= \frac{1}{5^{15} \cdot 144^2} \left\{ 144^3 + (\Gamma + 144)^3 - \Gamma(\Gamma - 648)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{5^{15} \cdot 12} \left\{ \Gamma^2 - 9 \cdot 23\, \Gamma + 3456 \right\}. \end{aligned}$$

Also:

$$(l^5 + m^3 - n^2)^2 - 4\,l^5 m^3 = \frac{\Gamma(\Gamma - 81)^2(\Gamma - 256)}{5^{30} \cdot 144}.$$

In Übereinstimmung hiermit findet man:

$$\Delta = \frac{\Gamma - 256}{5^5}, \quad P = \frac{\Gamma - 81}{5^5}, \quad Q = -\frac{\gamma^2}{5^5} = -\frac{\sqrt{\Gamma}}{5^5\sqrt{5^5}},$$

und schließlich kommt

$$\left\{\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\Gamma^2 - 9 \cdot 23\,\Gamma + 3456 \pm \sqrt{\Gamma}(\Gamma - 81)\sqrt{\Gamma - 256}}{3456}\text{ [53]}. \tag{26}$$

§ 8.

Berechnung der Wurzeln y[54].

Um nunmehr die Wurzeln y rational durch das η (oder das ζ) auszudrücken, gehe ich von der Formel aus:

$$5\,y_\nu = \varepsilon^\nu p_1 + \varepsilon^{2\nu} p_2 + \varepsilon^{3\nu} p_3 + \varepsilon^{4\nu} p_4.$$

Es war $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2} = -\frac{p_1}{p_2} = +\frac{p_3}{p_4}$. Man kann daher setzen, unter R, S geeignete Größen verstanden:

$$y_\nu = (\varepsilon^\nu \eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\eta_2) R + (\varepsilon^{3\nu}\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\eta_2) S.$$

Aber in § 17 des ersten Abschnittes haben wir die allgemeinsten fünfwertigen Funktionen von η_1, η_2 konstruiert, welche diese Gestalt besitzen, und gesehen, daß sie in der Form

$$\lambda \cdot \frac{f W_\nu}{H} + \mu \cdot \frac{\sigma_\nu}{f^2}$$

enthalten sind[55].

Daher kann man die Wurzeln y_ν unmittelbar in der Gestalt hinschreiben:

$$y_\nu = \lambda \cdot \frac{f W_\nu}{H} + \mu \cdot \frac{\sigma_\nu}{f^2}. \tag{27}$$

Es sind nur noch die von η freien Konstanten λ, μ als rationale Funktionen von α, β, γ, $\sqrt{\Delta}$ auszurechnen.

Ich erreiche dies durch Koeffizientenvergleichung, indem ich umgekehrt $\frac{f W_\nu}{H}$ und $\frac{\sigma_\nu}{f^2}$ als rationale Funktionen von y_ν darstelle. Setzt

[53]) [Hier ist $\sqrt{\Gamma} = 25\,\gamma^2\sqrt{5}$ infolge der Adjunktion von ε als rational bekannt anzusehen. K.]

[54]) Vgl. hierzu die Darstellung bei Gordan in der wiederholt zitierten Note (Erlanger Berichte, Juli 1877). Es sind dort die Rechnungen, welche ich im Texte ausführe, durch systematischen Formenbildungsprozeß ersetzt. [Siehe auch die Bemerkungen am Schluß dieses Wiederabdrucks.]

[55]) Geometrisch: Alle Punkte, deren Koordinaten diese Form besitzen, gehören der Erzeugenden erster Art an, welche durch den gesuchten Punkt y hindurchläuft.

man (siehe § 16, 17 des ersten Abschnittes):

$$\frac{t_\nu^2}{f} = \xi_\nu, \tag{28}$$

so ist

$$\frac{f W_\nu}{12^2 H} = \frac{1}{\xi_\nu - 3}, \quad \frac{\sigma_\nu}{f^2} = \xi_\nu^2 - 7\,\xi_\nu + 24. \tag{29}$$

Ich werde daher zunächst ξ_ν rational durch y_ν ausdrücken.

§ 9.

Die Funktion $\xi_\nu = \frac{t_\nu^2}{f}$[56].

Zu dem Zwecke stelle ich noch einmal ähnliche Überlegungen an, wie in § 7 des vorigen und in § 5 des gegenwärtigen Abschnittes. Ich betrachte vor allen Dingen die Produkte:

$$f(\eta) f(\zeta), \quad t_\nu(\eta)\, t_\nu(\zeta), \quad \frac{H(\eta) \cdot H(\zeta)}{W_\nu(\eta) \cdot W_\nu(\zeta)}.$$

Für das erstere fanden wir bereits

$$f(\eta) f(\zeta) = \frac{5^{12} p_1^{12}}{p_2^{12} p_3^{12}}(\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3).$$

Für die anderen beiden berechnet sich in ähnlicher Weise, indem wir unter den Faktoren der Produkte (5) und (4) die geeigneten zusammenfassen:

$$t_\nu(\eta)\, t_\nu(\zeta) = \frac{5^6 p_1^6}{p_2^6 p_3^6}(-\alpha y_\nu^3 + 3\beta y_\nu^2 - \gamma y_\nu + 8\alpha^2). \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \frac{12^4 H(\eta) H(\zeta)}{W_\nu(\eta) W_\nu(\zeta)} = \frac{5^{12} p_1^{12}}{p_2^{12} p_3^{12}}\big(&-(\alpha\gamma - 3\beta^2) y_\nu^4 + (8\alpha^3 - 3\beta\gamma) y_\nu^3 \\ &- (8\alpha^2\beta - \gamma^2) y_\nu^2 + (3\alpha^2\gamma - 9\alpha\beta^2) y_\nu \\ &+ (40\alpha^4 - 12\alpha\beta\gamma - 9\beta^3)\big). \end{aligned} \tag{31}$$

Nun ist das gesuchte ξ_ν Wurzel der folgenden quadratischen Gleichung, in der ich die Indizes ν unterdrückt und die Buchstaben η, ζ durch 1, 2 ersetzt habe:

$$f_1 f_2 \cdot \xi^2 - (t_1^2 f_2 + t_2^2 f_1)\xi + t_1^2 t_2^2 = 0. \tag{32}$$

Benutzt man hier, daß

$$12^4 \frac{H_1 H_2}{W_1 W_2} = (t_1^2 - 3 f_1)(t_2^2 - 3 f_2),$$

[56]) [Diese Funktion $\frac{t_\nu^2}{f}$ wird im Ikosaederbuch mit r_ν bezeichnet und für sie durch direkte funktionentheoretische Betrachtung die einfache Resolvente aufgestellt (s. S. 102):

$$(r-3)^3(r^2 - 11\,r + 64) : r(r^2 - 10\,r + 45)^2 : -1728 = X : X - 1 : 1$$

(die man natürlich auch aus der oben S. 342 mitgeteilten Resolvente der t_ν durch bloße Umrechnung ableiten kann). K.]

so folgt:

$$(33)\quad \xi = \frac{\left(t_1^2 t_2^2 + 9 f_1 f_2 - 12^4 \frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}\right) \pm \sqrt{\left(t_1^2 t_2^2 + 9 f_1 f_2 - 12^4 \frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}\right)^2 - 36 t_1^2 t_2^2 f_1 f_2}}{6 f_1 f_2}.$$

Die Quadratwurzel zerlegt sich wieder. Die beiden Werte $\frac{t_1^2}{f_1} = \frac{t_\nu^2(\eta)}{f(\eta)}$ und $\frac{t_2^2}{f_2} = \frac{t_\nu^2(\zeta)}{f(\zeta)}$ werden einander gleich, wenn η aus ζ hervorgeht durch eine derjenigen zwölf Ikosaedersubstitutionen, welche das Oktaeder t_ν ungeändert lassen. Ich habe diese Substitutionen in § 14 des ersten Abschnittes für das Oktaeder t_0 angegeben. Man findet, daß zunächst als Faktor auftritt das Produkt der Quadrate der Differenzen der vier von y_ν verschiedenen y. Dasselbe lautet, nachdem man es durch 125 dividiert hat:

$$(34)\quad \Delta_\nu = \{(-6\alpha\gamma + 48\beta^2) y_\nu^4 + (-27\alpha^3 - 8\beta\gamma) y_\nu^3 + (27\alpha^2\beta + \gamma^2) y_\nu^2$$
$$+ (-27\alpha^2\gamma + 216\alpha\beta^2) y_\nu + (-135\alpha^4 - 72\alpha\beta\gamma + 256\beta^3)\}.$$

Außerdem tritt quadratisch das Produkt der sechs Ebenen auf:

$$y_\nu + (y_i + y_k)\cos\frac{2\pi}{5} + (y_h + y_l)\cos\frac{4\pi}{5}$$

(wo für i, k, h, l die von ν verschiedenen Indizes zu setzen sind). Dieses Produkt ist bis auf einen Zahlenfaktor gleich:

$$(35)\quad \alpha y_\nu^3 + \beta y_\nu^2 + \alpha^2.$$

So wird der Wert der Quadratwurzel einfach:

$$(\alpha y_\nu^3 + \beta y_\nu^2 + \alpha^2)\sqrt{\Delta_\nu}.$$

Es ist zweckmäßig, statt Δ_ν die (durch 3125 dividierte) Diskriminante der Gleichung fünften Grades, Δ (Gleichung (20)), einzuführen, die mit Δ_ν durch die Formel verknüpft ist:

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm(y_\nu^4 + 2\alpha y_\nu + \beta)\sqrt{\Delta_\nu}.$$

So ergibt sich, wenn wir in die Formel (33) jetzt die Werte von $t_1 t_2$, $f_1 f_2$, $\frac{H_1 H_2}{W_1 W_2}$ eintragen:

$$(36)\quad \xi_\nu = \frac{(\alpha\gamma + 2\beta^2) y_\nu^4 + (\alpha^3 - \beta\gamma) y_\nu^3 - 5\alpha^2\beta y_\nu^2 + (4\alpha^2\gamma + 13\alpha\beta^2) y_\nu + (11\alpha^4 + 9\alpha\beta\gamma) \pm D_\nu}{2(\alpha^4 + \alpha\beta\gamma - \beta^3)}$$

wo D_ν den Ausdruck bedeutet:

$$(37)\quad D_\nu = \frac{(y_\nu^4 + 2\alpha y_\nu + \beta)(\alpha y_\nu^3 + \beta y_\nu^2 + \alpha^2)\Delta_\nu}{\sqrt{\Delta}}.$$

Setzt man hier $\gamma = 0$, $y_\nu = 0$, also

$$\xi_\nu = \frac{11\alpha^4 \pm \alpha^2\sqrt{-135\alpha^4 + 256\beta^3}}{2(\alpha^4 - \beta^3)},$$

so erhält man nach der Formel (vgl. Math. Annalen, Bd. 12 [= Abh. LIII, S. 309]):

$$1728(1 - X) = \xi(\xi^2 - 10\xi + 45)^2$$

für X einen Ausdruck, dessen irrationaler Bestandteil dieser ist:

$$\frac{\pm\sqrt{-135\alpha^4 + 256\beta^3}}{2\cdot 1728(\alpha^4 - \beta^3)^5}(2560\alpha^{14}\beta^2 - 1216\alpha^{10}\beta^5 - 13960\alpha^6\beta^8 - 2025\alpha^2\beta^{11}).$$

Derselbe Ausdruck ergibt sich mit demselben Vorzeichen, wenn man in die allgemeine Formel (16) resp. (17) $\gamma = 0$ setzt. *Es folgt daraus, daß das obere und untere Vorzeichen der Quadratwurzel aus der Diskriminante, sowie dasselbe hier in* (36) *auftritt, dem oberen und unteren Vorzeichen derselben Quadratwurzel in* (17) *entspricht.*

§ 10.

Fertige Formeln für die y_ν.

Trägt man diesen Wert von ξ_ν in die Formeln (29) des § 8 ein, so erhält man nach ziemlich langer Rechnung, unter L, M die früher so bezeichneten Größen verstanden:

$$(38)\quad \frac{f W_\nu}{H} = \frac{\pm 72}{M\sqrt{\Delta}}\{[y_\nu^4(144\alpha^7\gamma - 720\alpha^6\beta^2 + 125\alpha^4\beta\gamma^2 - 595\alpha^3\beta^3\gamma$$
$$+ 808\alpha^2\beta^5 + 3\alpha^2\gamma^4 - 15\alpha\beta^2\gamma^3 + 40\beta^4\gamma^2)$$
$$+ y_\nu^3(24\alpha^6\beta\gamma + 240\alpha^5\beta^3 + 10\alpha^4\gamma^3 + 25\alpha^3\beta^2\gamma^2 - 370\alpha^2\beta^4\gamma$$
$$+ 288\alpha\beta^6 + 3\alpha\beta\gamma^4 - 10\beta^3\gamma^3)$$
$$+ y_\nu^2(-48\alpha^6\gamma^2 + 208\alpha^5\beta^2\gamma - 320\alpha^4\beta^4 - 55\alpha^3\beta\gamma^3$$
$$+ 165\alpha^2\beta^3\gamma^2 + 224\alpha\beta^5\gamma - \alpha\gamma^5 - 384\beta^7 + \beta^2\gamma^4)$$
$$+ y_\nu(1296\alpha^8\gamma - 4320\alpha^7\beta^2 + 1017\alpha^5\beta\gamma^2 - 5075\alpha^4\beta^3\gamma$$
$$+ 6102\alpha^3\beta^5 + 17\alpha^3\gamma^4 - 130\alpha^2\beta^2\gamma^3 + 350\alpha\beta^4\gamma^2$$
$$- 96\beta^6\gamma - \beta\gamma^5)$$
$$+ (648\alpha^7\beta\gamma - 2160\alpha^6\beta^3 + 30\alpha^5\gamma^3 + 575\alpha^4\beta^2\gamma^2$$
$$- 3490\alpha^3\beta^4\gamma + 21\alpha^2\beta\gamma^4 + 4096\alpha^2\beta^6 - 90\alpha\beta^3\gamma^3$$
$$+ 160\beta^5\gamma^2)].$$
$$\mp\sqrt{\Delta}[y_\nu^4(-16\alpha^4\beta - 3\alpha^2\gamma^2 + 7\alpha\beta^3\gamma + 24\beta^4)$$
$$+ y_\nu^3(-8\alpha^4\gamma + 48\alpha^3\beta^2 - \alpha\beta\gamma^2 - 6\beta^3\gamma)$$
$$+ y_\nu^2(16\alpha^3\beta\gamma - 64\alpha^2\beta^3 + \alpha\gamma^3 - \beta^2\gamma^2)$$
$$+ y_\nu(-19\alpha^3\gamma^2 + 11\alpha^2\beta^2\gamma + 162\alpha\beta^4 - \beta\gamma^3)$$
$$+ (-24\alpha^5\gamma + 80\alpha^4\beta^2 - 15\alpha^2\beta\gamma^2 + 10\alpha\beta^3\gamma + 96\beta^5)]\},$$
$$= \sum\left(\pm\frac{A_i}{\sqrt{\Delta}} + B_i\right) y_\nu^i.$$

$$
\begin{aligned}
(39)\quad \frac{\sigma_\nu}{f^2} = \frac{\pm 1}{2L^2\sqrt{\Delta}}\{[& y_\nu^4(-216\,\alpha^{10} - 87\,\alpha^7\beta\gamma + 265\,\alpha^6\beta^3 - 9\,\alpha^5\gamma^3 \\
& \quad + 35\,\alpha^4\beta^2\gamma^2 - 465\,\alpha^3\beta^4\gamma + 556\,\alpha^2\beta^6 - 4\,\alpha^2\beta\gamma^4 \\
& \quad + 5\,\alpha\beta^3\gamma^3 + 4\,\beta^5\gamma^2) \\
& + y_\nu^3(108\,\alpha^9\beta + 66\,\alpha^7\gamma^2 + 122\,\alpha^6\beta^2\gamma - 327\,\alpha^5\beta^4 + 49\,\alpha^4\beta\gamma^3 \\
& \quad - 75\,\alpha^3\beta^3\gamma^2 - 119\,\alpha^2\beta^5\gamma + \alpha^2\gamma^5 - 144\,\alpha\beta^7 \\
& \quad - 2\,\alpha\beta^2\gamma^4 - \beta^4\gamma^3) \\
& + y_\nu^2(72\,\alpha^9\gamma - 144\,\alpha^8\beta^2 - 59\,\alpha^6\beta\gamma^2 - 251\,\alpha^5\beta^3\gamma + 436\,\alpha^4\beta^5 \\
& \quad + 3\,\alpha^4\gamma^4 - 77\,\alpha^3\beta^2\gamma^3 + 255\,\alpha^2\beta^4\gamma^2 - 344\,\alpha\beta^6\gamma \\
& \quad + 192\,\beta^8 + \beta^3\gamma^4) \\
& + y_\nu(-1080\,\alpha^{11} - 1071\,\alpha^8\beta\gamma + 2147\,\alpha^7\beta^3 - 31\,\alpha^6\gamma^3 \\
& \quad - 432\,\alpha^5\beta^2\gamma^2 - 55\,\alpha^4\beta^4\gamma + 869\,\alpha^3\beta^6 - 15\,\alpha^3\beta\gamma^4 \\
& \quad - 104\,\alpha^2\beta^3\gamma^3 + 349\,\alpha\beta^5\gamma^2 - 240\,\beta^7\gamma - \beta^2\gamma^5) \\
& + (-540\,\alpha^{10}\beta + 198\,\alpha^8\gamma^2 + 18\,\alpha^7\beta^2\gamma + 79\,\alpha^6\beta^4 + 111\,\alpha^5\beta\gamma^3 \\
& \quad - 85\,\alpha^4\beta^3\gamma^2 - 1503\,\alpha^3\beta^5\gamma + 3\,\alpha^3\gamma^5 + 1792\,\alpha^2\beta^7 \\
& \quad - 22\,\alpha^2\beta^2\gamma^4 + 17\,\alpha\beta^4\gamma^3 + 16\,\beta^6\gamma^2)] \\
\pm \sqrt{\Delta}\,[& y_\nu^4(9\,\alpha^5\gamma - 43\,\alpha^4\beta^2 + 4\,\alpha^2\beta\gamma^2 - 11\,\alpha\beta^3\gamma + 12\,\beta^5) \\
& + y_\nu^3(-12\,\alpha^7 - 4\,\alpha^4\beta\gamma - 21\,\alpha^3\beta^3 - \alpha^2\gamma^3 + 2\,\alpha\beta^2\gamma^2 - 3\,\beta^4\gamma) \\
& + y_\nu^2(16\,\alpha^6\beta - 3\,\alpha^4\gamma^2 - 9\,\alpha^3\beta^2\gamma + 28\,\alpha^2\beta^4 + \beta^3\gamma^2) \\
& + y_\nu(29\,\alpha^6\gamma + 185\,\alpha^5\beta^2 + 11\,\alpha^3\beta\gamma^2 + \alpha^2\beta^3\gamma - 9\,\alpha\beta^5 - \beta^2\gamma^3) \\
& + (-36\,\alpha^8 + 24\,\alpha^5\beta\gamma + 109\,\alpha^4\beta^3 - 3\,\alpha^3\gamma^3 + 22\,\alpha^2\beta^2\gamma^2 \\
& \quad - 53\,\alpha\beta^4\gamma - 48\,\beta^5)]\}, \\
= \sum & \left(\pm \frac{A_i'}{\sqrt{\Delta}} + B_i'\right) y_\nu^i.
\end{aligned}
$$

[Die Koeffizienten, mit denen y_ν^4, y_ν^3, y_ν^2, y_ν^0 in (38) eingehen, sind nun in der Tat von den entsprechenden in (39) auftretenden Koeffizienten je um denselben Faktor unterschieden (worin eine große Zahl von Kontrollen für die Richtigkeit der Zwischenrechnung liegt).] Man erhält daher übereinstimmend für $i = 4, 3, 2, 0$:

$$
(40)\quad y_\nu = \pm\sqrt{\Delta}\,\frac{(A_i' \pm B_i'\sqrt{\Delta})\cdot\dfrac{fW_\nu}{H} - (A_i \pm B_i\sqrt{\Delta})\cdot\dfrac{\sigma_\nu}{f^2}}{[(A_1A_i' - A_1'A_i) + (B_1B_i' - B_1'B_i)] \pm \sqrt{\Delta}\,[(A_1B_i' - A_1'B_i) + (A_i'B_1 - A_1B_i')]}.
$$

§ 11.

Die allgemeinen Gleichungen fünften Grades.

Um eine beliebige Gleichung fünften Grades zu lösen, bietet sich jetzt naturgemäß der Weg, dieselbe durch Tschirnhausen-Transformation in eine solche, bei der $\sum y = 0$, $\sum y^2 = 0$ ist, zu verwandeln. Dies kann auf sehr mannigfache Weise geschehen, aber jedesmal benötigt man eine Quadratwurzel, welche keinen Einfluß hat auf die Zahl der Substitutionen der Galoisschen Gruppe der Gleichung [also eine *akzessorische* Irrationalität]. Das gleiche galt von der Quadratwurzel, die nötig war, um eine allgemeine Jacobische Gleichung sechsten Grades auf eine Ikosaedergleichung zu reduzieren (Abschn. II, § 9), und in der Tat zeigt man hier genau wie damals: *Es gibt bei der allgemeinen Gleichung keine rationale Funktion der Wurzeln, welche einer Ikosaedergleichung genügt.*

Aus dieser negativen Proposition ergibt sich nun auch der Beweis eines Satzes, den Kronecker 1861 ohne Beweis mitteilte und den man etwa so formulieren kann: *Es ist unmöglich, bei durchaus willkürlichen $y_0, \ldots, y_4$ eine rationale Funktion $\varphi(y)$ zu finden, die von einer Gleichung abhängt, in der (wie in der Ikosaedergleichung) nur ein Parameter auftritt.* Wenn nämlich eine solche Resolvente existierte, so könnte man sie auf rationalem Wege in eine Ikosaedergleichung verwandeln, wie folgende Betrachtung zeigt.

Die verschiedenen Werte, die φ bei Permutation der y annimmt, seien in bestimmter Anordnung:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n.$$

Vertauscht man die y durch die 60 (hier immer allein gemeinten) geraden Permutationen, so erscheinen die $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ in anderer Anordnung wieder, und man betrachte die 60 *Anordnungen* der φ, welche auf diese Weise entstehen. Da die φ nur von einem Parameter abhängen, so durchlaufen die Anordnungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, wenn sich die y beliebig ändern, ein irreduzibeles Wertgebiet von nur *einer* Dimension. Dieses Wertgebiet ist rational durch einen Parameter darstellbar. Denn man kann die y jedenfalls solchen rationalen Funktionen einer Größe λ gleichsetzen, daß die φ nicht konstant bleiben; dann durchlaufen die $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ als rationale Funktionen von λ das ganze ihnen gestattete Wertgebiet. Nun kann man statt λ allemal (wenn es nötig sein sollte) einen anderen Parameter μ in der Weise einführen, daß die φ nicht nur rationale Funktionen des μ sind, sondern auch μ eine rationale Funktion der φ und also der y (vgl. einen Aufsatz von Lüroth im 9. Bd. der Math. Annalen (1875), S. 163). *Eine geeignete lineare Funktion dieses μ, $\frac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}$ muß dann* *von einer Ikosaedergleichung abhängen.* Denn bei Permutation der y verwandelt sich das μ in μ', welches eindeutig dem μ zugeordnet ist, und umgekehrt entspricht dem μ' nur das eine μ, wie man sieht, wenn man die Permutation der y rückgängig macht. Es hängen also μ und μ' voneinander *linear* ab, und also sind, da keine der 60 Permutationen der y eine Periode > 5 besitzt, die Vorbedingungen des § 4 des ersten Abschnittes gegeben. Es ist das derselbe Schluß, der in mehr partikulären Fällen in § 9 des zweiten Abschnittes und in § 1 dieses Abschnittes bereits angewandt wurde.

Zugleich sieht man, daß ein Satz ähnlich dem nun für Gleichungen fünften Grades bewiesenen bei Gleichungen höheren Grades aus einem viel einfacheren Grunde gilt. Denn es gibt keine endlichen Gruppen linearer Substitutionen *einer* Veränderlichen, welche den geraden Vertauschungen von sechs oder mehr Dingen entsprächen, und darum kann bei den allgemeinen Gleichungen sechsten und höheren Grades von einer Resolvente, die nur von einem Parameter abhängt, von vornherein nicht die Rede sein.

München, den 20. August 1877.

[Ergänzende Bemerkungen über Gordans Arbeit über Gleichungen fünften Grades in Bd. 13 der Math. Annalen.

Die folgenden Bemerkungen verfolgen das Ziel, die Grundgedanken der Abhandlung herauszustellen, welche Gordan 1878 in Bd. 13 der Math. Annalen über das Auflösungsproblem der Gleichungen fünften Grades veröffentlicht hat. (Vgl. oben S. 257). Handelt es sich doch dort um eine weitere Systematisierung der von mir gegebenen, vorstehend abgedruckten Überlegungen. Ich behalte, der Deutlichkeit halber, meine Bezeichnungen bei. Zugleich verweise ich darauf, daß auch im Ikosaederbuch S. 194—204, entsprechende, allerdings nach Seiten der formalen Invariantentheorie weniger weitgehende Erörterungen ihre Stelle fanden.

Einem Wurzelsystem $y_0, \ldots, y_4$ der „Hauptgleichung" $y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + \gamma = 0$ werden auf S. 370 der vorstehenden Abhandlung als Parameterwerte der beiden durch den Punkt y_ν hindurchgehenden Erzeugenden der Hauptfläche $\Sigma y_\nu = 0$, $\Sigma y_\nu^2 = 0$ die Größen

$$\eta = -\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4}$$

zugeordnet, unter p_ν die bekannten Lagrangeschen Ausdrücke verstanden. Unterwirft man die y den 60 geraden Permutationen, so erleidet η, wie ζ die 60 Ikosaedersubstitutionen, und zwar in der Weise, daß die Substitution des ζ aus derjenigen des η hervorgeht, indem man ε^2 für ε schreibt.

Gordan denkt sich nun η, ζ durch $\frac{\eta_1}{\eta_2}$, $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ ersetzt, wo die η_1, η_2 und die ζ_1, ζ_2 die homogenen Ikosaedersubstitutionen der Determinante 1 erfahren sollen (wobei sich die Unbestimmtheiten der Vorzeichen dadurch kompensieren, daß man

$$(1') \qquad y_\nu = \varepsilon^{4\nu}\eta_1\zeta_1 + \varepsilon^{2\nu}\eta_1\zeta_2 - \varepsilon^{3\nu}\eta_2\zeta_1 + \varepsilon^{\nu}\eta_2\zeta_2$$

setzen kann). Die Koeffizienten α, β, γ der Hauptgleichung, sowie das Differenzenprodukt $\nabla = \sqrt{\Delta}$ der y_ν werden dann solche doppeltbinäre Formen der η, ζ, welche bei den simultanen homogenen Substitutionen der η, ζ überhaupt ungeändert bleiben. Ich teile beispielsweise mit

$$(2') \qquad \alpha = -\eta_1^3\zeta_1^2\zeta_2 - \eta_1^2\eta_2\zeta_2^3 - \eta_1\eta_2^2\zeta_1^3 + \eta_2^3\zeta_1\zeta_2^2.$$

Gordans Entdeckung ist nun die, daß man die gesamten für die Auflösung der Hauptgleichung erforderlichen, an das Ikosaeder anknüpfenden algebraischen Beziehungen erhält, wenn man *die doppeltbinäre Form α ohne Berücksichtigung ihrer individuellen, speziell gruppentheoretischen Eigenschaften in der Weise invariantentheoretisch behandelt, daß man die η_1, η_2 und ζ_1, ζ_2 als zwei Reihen Veränderlicher ansieht, die unabhängig voneinander linearen Transformationen unterworfen werden.*

Bemerken wir zunächst, daß eine solche Behandlungsweise der Form α genau den Grundsätzen des Erlanger Programms (vgl. Abh. XXVII in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe) entspricht, sofern man, wie dies doch selbstverständlich erscheint, beim Studium der auf der Hauptfläche

$$\sum y_\nu = 0, \qquad \sum y_\nu^2 = 0$$

gelegenen geometrischen Gebilde die größte kontinuierliche Gruppe von Kollineationen zugrunde legen will, welche die Hauptfläche in sich selbst überführen. Denn diese Gruppe ist durch die Nebeneinanderstellung voneinander unabhängiger, linearer Transformationen des $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ und des $\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ gegeben (siehe etwa Abh. XXI in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe, S. 356 ff.). Für die algebraische Behandlung der zugehörigen Formen greift man natürlich zu den entsprechenden homogenen linearen Substitutionen der η_1, η_2 und der ζ_1, ζ_2. Dabei kommt noch folgende Bemerkung in Betracht. Besagte lineare Substitutionen haben an sich 8 Koeffizienten, aber für die y_ν, wie für die Form α, resultiert daraus nur eine Gruppe mit 7 Parametern, weil eine gleichzeitige Multiplikation der η_1, η_2 mit irgendeiner Konstanten für sie auf dasselbe hinauskommt, wie die gleichzeitige Multiplikation von ζ_1, ζ_2 mit derselben Konstanten.

Wir greifen nun aus den Gordanschen Entwicklungen diejenigen Punkte heraus, die für uns die wesentlichsten sind:

1. *Übergang von α zu den Ikosaederformen f, H, T.*

Wir betrachten α als eine kubische Form in den ζ_1, ζ_2 allein und bilden davon die Diskriminante. Zu dem Zwecke bilden wir zunächst die Hessesche Form von α (hinsichtlich ζ_1, ζ_2) und erhalten, von einem Zahlenfaktor abgesehen (was ich hier und im folgenden durch das Zeichen $\sim$ andeute):

$$(3') \qquad \tau \sim \zeta_1^2(-\eta_1^6 - 3\eta_1\eta_2^5) + 10\zeta_1\zeta_2\eta_1^3\eta_2^3 + \zeta_2^2(3\eta_1^5\eta_2 - \eta_2^6).$$

Indem wir sodann die Determinante dieser in $\zeta_1\zeta_2$ quadratischen Form bilden, erhalten wir in der Tat bis auf einen Zahlenfaktor

$$f = \eta_1^{11}\eta_2 + 11\eta_1^6\eta_2^6 - \eta_1\eta_2^{11},$$

also die Grundform f gleich in der uns geläufigen kanonischen Form, von der wir durch die bekannten invariantentheoretischen Prozesse, die sich auf η_1, η_2 beziehen, zu H und T fortschreiten. f ist die Diskriminante von α bezüglich ζ_1, ζ_2.

In entsprechender Weise wird man aus α natürlich $f(\zeta_1, \zeta_2) = f'$ usw. ableiten können. (Einen Akzent werden wir auch in der Folge gleich zusetzen, wenn η und ζ vertauscht werden.)

2. *Definition gemischter Überschiebungen.*

Als fernere invariantentheoretische Prozesse brauchen wir solche, bei denen Überschiebungen gleichzeitig nach den η und den ζ vorgenommen werden. Sei symbolisch:

$$F = a_\eta^k\, b_\zeta^l, \qquad \Phi = c_\eta^m\, d_\zeta^n.$$

Wir werden dann einfach definieren:

$$(F, \Phi)_{\varrho, \sigma} = (a c)^\varrho\, a_\eta^{k-\varrho}\, c_\eta^{m-\varrho}\, (b d)^\sigma\, b_\zeta^{l-\sigma}\, d_\zeta^{n-\sigma},$$

und haben damit eine Kovariante vom Grade $k + m - 2\varrho$ in den η und vom Grade $l + n - 2\sigma$ in den ζ.

Beispielsweise bekommt man die Koeffizienten β, γ der Hauptgleichung aus den Überschiebungen $(\alpha, \alpha)_{1,1}$ und $(\alpha, \beta)_{1,1}$.

3. *Lineare Kovarianten.*

Die Auflösung der Hauptgleichung fünften Grades durch die Ikosaedergleichung reduziert sich nun für den gewählten Gedankengang, wie sogleich noch näher darzulegen sein wird, darauf, daß man Kovarianten von α bildet, die in einer der Variabelnreihen, etwa $\zeta_1\, \zeta_2$, linear sind. Als niederste solcher Formen (wir setzen den Grad in η_1, η_2 als einen Index dazu) findet Gordan:

$$(4') \quad \begin{aligned} \Theta_7 &\sim (\alpha, \beta)_{0,3} \sim (7\eta_1^5\eta_2^2 + \eta_2^7)\zeta_1 + (-\eta_1^7 + 7\eta_1^2\eta_2^5)\zeta_2 \\ \mathsf{H}_{13} &\sim (\tau, \Theta)_{0,1} \sim (\eta_1^{13} - 39\eta_1^8\eta_2^5 - 26\eta_1^3\eta_2^{10})\zeta_1 + (-26\eta_1^{10}\eta_2^3 + 39\eta_1^5\eta_2^8 + \eta_2^{13})\zeta_2. \end{aligned}$$

Außerdem noch folgende zwei Formen:

$$\begin{aligned} \mathsf{Z}_{17} &\sim (f, \Theta)_{1,0} \sim (17\eta_1^{15}\eta_2^2 - 187\eta_1^{10}\eta_2^7 + 119\eta_1^5\eta_2^{12} - \eta_2^{17})\zeta_1 \\ &\qquad + (\eta_1^{17} + 119\eta_1^5\eta_2^{12} + 187\eta_1^7\eta_2^{10} + 17\eta_1^2\eta_2^{15})\zeta_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{23} &\sim (f, \mathsf{H})_{1,0} \sim (\eta_1^{23} + 207\eta_1^{18}\eta_2^5 - 391\eta_1^{13}\eta_2^{10} + 1173\eta_1^8\eta_2^{15} + 46\eta_1^3\eta_2^{20})\zeta_1 \\ &\qquad + (46\eta_1^{20}\eta_2^3 - 1173\eta_1^{15}\eta_2^8 - 391\eta_1^{10}\eta_2^{13} - 207\eta_1^5\eta_2^{18} + \eta_2^{23})\zeta_2. \end{aligned}$$

4. *Auflösung der Hauptgleichung.*

Die Auflösung der Hauptgleichung ergibt sich nun, indem wir die y_ν (die doch auch in den ζ_1, ζ_2 linear sind) aus irgend zwei dieser linearen Kovarianten linear zusammensetzen. Die einfachste Darstellung folgt natürlich bei Benutzung von Θ und H. Wir mögen schreiben $a y_\nu = b_\nu \mathsf{H} + c_\nu \Theta$, wo sich a, b, c aus der Identität berechnen:

$$(5') \qquad \begin{vmatrix} y_\nu & \mathsf{H} & \Theta \\ \dfrac{\partial y_\nu}{\partial \zeta_1} & \dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial \zeta_1} & \dfrac{\partial \Theta}{\partial \zeta_1} \\ \dfrac{\partial y_\nu}{\partial \zeta_2} & \dfrac{\partial \mathsf{H}}{\partial \zeta_2} & \dfrac{\partial \Theta}{\partial \zeta_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Hier wird a eine Ikosaederform 20-ten Grades, also im wesentlichen $H(\eta_1, \eta_2)$, b_ν und c_ν aber, die noch vom Index ν abhängen, Tetraederformen 8-ten bzw. 14-ten Grades. Dies müssen gemäß der Tetraedertheorie Multipla von $W_\nu(\eta_1, \eta_2)$ und $t_\nu(\eta_1, \eta_2) \cdot W_\nu(\eta_1, \eta_2)$ sein, womit man den Ansatz hat, der zur Auflösung der Hauptgleichung im Ikosaederbuch, S. 190 u. S. 196 ff., weiter verfolgt und dort insbesondere auch geometrisch interpretiert wird.

Statt dessen liegt der hier wieder abgedruckten Abhandlung LIV, S. 374, der minder zweckmäßige Ansatz $a' y_\nu = b'_\nu \mathsf{E} + c'_\nu \Theta$ zugrunde, wo nun a' ein Multiplum von

$T(\eta_1, \eta_2)$, b'_ν von $W_\nu(\eta_1, \eta_2)$, c'_ν aber eine lineare Kombination von $t_\nu^4(\eta_1, \eta_2)$, $t_\nu^2(\eta_1, \eta_2) f$, $f^2(\eta_1, \eta_2)$ wird. (Vgl. S. 343, insbesondere die Fußnote [32]) daselbst.) —

Man sieht, wie bei dieser Darstellung — und das ist das Schöne daran — alles aus den Anwendungen der gewöhnlichen invariantentheoretischen Prozesse auf die überaus einfache Grundform α folgt. Gordan hat darüber hinaus a. a. O. geradezu das volle Formensystem von α aufgestellt; er meinte, als ich ihn danach fragte, dieses werde bei späteren Untersuchungen schon einmal wichtig werden. Dasselbe enthält im ganzen 35 Formen. Das Differenzenprodukt ∇ der fünf Wurzeln der Hauptgleichung ist in diesem System nicht mit enthalten. Man findet, daß es zu

$$(\alpha, \tau)_{0,1}\, \Theta' - (\alpha, \tau')_{1,0}\, \Theta$$

proportional ist.

Merkwürdig ist, daß Gordan das α nur in kanonischer Form aufstellt, also nicht unter der Gesamtheit der kubokubischen Binärformen $\Phi(\eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2)$ invariantentheoretisch charakterisiert (wie dies hinsichtlich der Ikosaederform f in den Math. Annalen, Bd. 9 [Abh. LI] durch die Forderung $(f, f)_4 = 0$ geschehen ist).

Die Gleichung $\alpha = 0$ begründet natürlich auch eine einfache konforme Abbildung der η-Kugel auf die ζ-Kugel, die näher zu untersuchen interessieren mag. Sowohl die η- als auch die ζ-Kugel sind mit drei Blättern überdeckt zu denken. Da einerseits aus $\eta_1 = 0$ sich $\zeta_1 \zeta_2^2 = 0$ und andererseits aus $\zeta_1 = 0$ sich $\eta_1^2 \eta_2 = 0$ ergibt, so wird ein Winkel der η-Kugel in $\eta_1 = 0$ bei Abbildung auf die ζ-Kugel in $\zeta_2 = 0$ halbiert, in $\zeta_1 = 0$ aber verdoppelt. Es sind also von den drei Blättern der η-Kugel in $\eta_1 = 0$ zwei miteinander verzweigt, während das dritte schlicht verläuft; die Umgebung von $\eta_1 = 0$ in den beiden verzweigten Blättern bildet sich auf die schlichte Umgebung von $\zeta_2 = 0$ ab, während die im schlichten Blatt sich auf die Umgebung eines einfachen Windungspunktes in $\zeta_1 = 0$ abbildet. — Was für $\eta_1 = 0$ gilt, ist auch für jeden anderen Ikosaedereckpunkt auf der η-Kugel richtig, und andere Windungspunkte als diese 12 Eckpunkte besitzt die dreifach überdeckte η-Kugel nicht, da die Diskriminante von α gleich f ist. Daher hat die Fläche das Geschlecht 4. Genau analog sind die Verhältnisse auf der ζ-Kugel.

Durchläuft nun η bzw. ζ ein halbes sphärisches Ikosaederdreieck (welches seinerseits aus drei Elementardreiecken mit den Winkeln $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ besteht) mit der Winkelfolge $\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$, so ζ bzw. η ein Dreieck mit der Winkelfolge $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}$.

Fig. 2.

Spiegelt man an homologen Seiten, so erhält man eine Abbildung eines Dreieckes mit den Winkeln $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$ auf ein Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$. (Vgl. Fig. 2.) Reiht man je fünf dieser gleichschenkligen Dreiecke mit ihren

Schenkeln aneinander, so liefert das erste ein schlichtes Fünfeck, das zweite aber ein Sternfünfeck mit einem einfachen Windungspunkt im Mittelpunkt. (Vgl. Fig. 3.) Setzt man endlich je zwölf dieser Fünfecke zusammen, so erhält man jedesmal eine

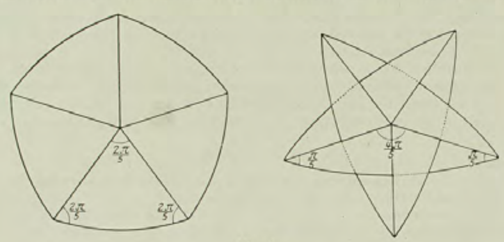

Fig. 3.

dreifache Überdeckung der Kugel, die man bzw. als zentrale Projektion zweier bekannter, höherer regulärer Polyeder nämlich (nach der Terminologie von Chr. Wiener) des regulären 12-flächigen Stern-12-Ecks bzw. des regulären 12-eckigen Stern-12-Flachs auffassen kann. In der Nebeneinanderstellung dieser beiden regulären Polyeder hat man die geometrische Bedeutung der Gleichung $\alpha = 0$ sozusagen vor Augen. Und wir können noch hinzufügen: nimmt man statt der Hauptgleichung fünften Grades speziell die Bring-Jerradsche Form, so verlegt man die Behandlung von der einfach gedachten $(x+iy)$-Kugel auf die in Rede stehende Riemannsche Fläche vom Geschlecht 4. K.]

LV. Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen[1]).

[Math. Annalen, Bd. 61 (1905/06).]

Vielleicht interessiert ein besonders anschaulicher Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung — und also der allgemeinen Gleichungen fünften Grades — durch Wurzelzeichen. Dieser Beweis benutzt den einfachen Umstand, daß die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_{60}$ der Ikosaedergleichung als Funktionen des Ikosaederparameters X in charakteristischer Weise verzweigt sind, nämlich so, daß von den Blättern der zugehörigen Riemannschen Fläche bei $X = 0$ je drei, bei $X = 1$ je zwei, bei $X = \infty$ je fünf miteinander im Zyklus zusammenhängen, andere Verzweigungen aber nicht auftreten.

Wir müssen uns zuerst den Abelschen Satz in Erinnerung rufen, daß im Falle eine Gleichung durch Wurzelzeichen lösbar ist, man allen bei der Auflösung auftretenden Wurzelgrößen eine solche Form geben kann, daß sie rationale Funktionen der Wurzeln $z_1, \ldots, z_n$ der vorgelegten Gleichung vorstellen.

Nehmen wir nun an, daß die Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen lösbar sei, und richten unsere Aufmerksamkeit insonderheit auf die *innerste* dabei auftretende Wurzelgröße! Dieselbe ist, eben weil sie die innerste Wurzelgröße ist, aus einer rationalen Funktion von X, welche $R(X)$ heißen mag, gezogen. Wir wollen den Grad der Wurzel, was der Allgemeinheit unseres Ansatzes keinen Eintrag tut und hinterher eine einfachere Ausdrucksweise gestattet, als Primzahl p nehmen. Bemerken wir noch, daß

[1]) [Dieser Aufsatz, der einer viel späteren Zeit angehört, wird hier angeschlossen, weil er eine wesentliche Ergänzung der vorangehenden Abhandlung LIV, wie auch des Ikosaederbuches, vorstellt. Ich bin gelegentlich gefragt worden, warum er erst so lange hernach (Sommer 1905, bei einer Vorlesung über Elementarmathematik vom höheren Standpunkte) entstanden ist. In der Hauptsache wohl deshalb, weil ich geglaubt hatte, Betrachtungen dieser Art (über Gleichungen, die sich nicht durch Wurzelzeichen auflösen lassen, übrigens aber einen Parameter enthalten) seien längst bekannt. Das einzige, was ich mir für die Durchführung des Beweises genau zu überlegen hatte, war die Heranziehung des Abelschen Satzes. K.]

$R(X)$ gewiß keine p-te Potenz ist; sonst würde man $\sqrt[p]{R(X)}$ nicht als innerste vorkommende Wurzel mitrechnen. Nun soll $\sqrt[p]{R(X)}$ nach dem Abelschen Satze gleich einer rationalen Funktion der Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_{60}$ der Ikosaedergleichung sein:

$$\sqrt[p]{R(X)} = r(z_1, z_2, \ldots, z_{60}).$$

Ich sage, daß hierin bereits ein Widerspruch liegt, und zwar wegen der Verzweigung der $z_1, z_2, \ldots, z_{60}$ *in bezug auf* X.

Aus dieser Verzweigung folgt nämlich sofort, daß r als Funktion von X wieder nur bei $X = 0, 1, \infty$ verzweigt sein kann, und zwar nur so, daß Blätter, die bei $X = 0$ nicht isoliert verlaufen, zu je drei im Zyklus zusammenhängen, Blätter, die bei $X = 1$ verzweigt sind, zu je zwei, und Blätter, die es bei $X = \infty$ sind, zu je fünf. *Eine solche Verzweigung kann aber bei einer Funktion* $\sqrt[p]{R(X)}$ *nie auftreten.*

Um dies möglichst präzis zu fassen, schreiben wir für X homogen machend X_1/X_2, spalten dann $R(X_1, X_2)$ in Zähler und Nenner:

$$R = \frac{\varphi(X_1, X_2)}{\psi(X_1, X_2)},$$

wo φ, ψ teilerfremde Polynome desselben Grades sein werden, und zerlegen φ, ψ in ihre Linearfaktoren. Wir erhalten so etwa

$$\varphi = l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2} \ldots l_\mu^{\alpha_\mu}, \qquad \psi = m_1^{\beta_1} m_2^{\beta_2} \ldots m_\nu^{\beta_\nu},$$

wo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu$$

sein wird. Die Blätter der zu $\sqrt[p]{R(X)}$ gehörigen Riemannschen Fläche werden überall da, wo ein Linearfaktor l oder m verschwindet, dessen Multiplizität α bez. β *nicht* durch p teilbar ist, alle p im Zyklus zusammenhängen, andere Verzweigungen aber nicht aufweisen.

Nun ist die Sache die, daß von Verzweigungsstellen der in Rede stehenden Art notwendig mindestens zwei auftreten. In der Tat: aus der für die α, β geltenden Gleichung schließen wir auf das Bestehen der Kongruenz

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu \equiv \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu \pmod{p},$$

und eine solche Kongruenz kann — wenn nicht alle α, β einzeln durch p teilbar sind, was auszuschließen ist, weil dann $R(X)$ eine p-te Potenz sein würde — nur so statthaben, daß mindestens zwei der Zahlen α, β nicht durch p teilbar sind.

Die Funktion $\sqrt[p]{R(X)}$ *hat also in der Tat eine Verzweigung, welche mit derjenigen einer Funktion* $r(z_1, z_2, \ldots, z_{60})$ *niemals übereinstimmen kann.*

Offenbar gewinnen wir durch die so formulierte Überlegung gleich einen allgemeineren Satz. Es sei $f(z, X) = 0$ eine algebraische Gleichung für z, die den Parameter X rational enthält. Als Funktion von X seien die Wurzeln z bei $X = A, B, C, \ldots$ verzweigt. Bei $X = A$ möge eine Anzahl von Blättern zu je $\varkappa_1$ zusammenhängen, andere zu je $\varkappa_2$ usw. Ich bilde mir das kleinste gemeinsame Multiplum der Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots$ und nenne es $\varkappa$. Eine entsprechende Bedeutung mögen für die Verzweigungsstelle $X = B$ die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ bez. λ, für die Verzweigungsstelle $X = C$ die Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ bez. μ haben. *Die vorgelegte Gleichung ist gewiß nicht durch Wurzelzeichen lösbar, wenn die Zahlen* $\varkappa, \lambda, \mu, \ldots$ *alle relativ prim sind.*

Juist, den 26. August 1905.

[Man hat mir den Wunsch ausgesprochen, ich möge den vorstehenden Beweis, damit er jedermann elementar verständlich sei, vom Ikosaeder ablösen und an das Beispiel einer geeigneten Gleichung fünften Grades anknüpfen. Hierzu genügt, daß ich die einfache Resolvente fünften Grades hinschreibe, welcher nach S. 100–102 meines Ikosaederbuches die dort mit

$$r_\nu = \frac{t_\nu^2}{f}$$

bezeichnete Funktion genügt. Die Resolvente lautet (vgl. die Fußnote [56]) auf S. 375 dieses Wiederabdrucks):

$$(r-3)^3(r^2-11r+64) : r(r^2-10r+45)^2 : -1728 = X : X-1 : 1^2),$$

wo nun in der Tat ohne weiteres ersichtlich ist, daß von den fünf Blättern der Riemannschen Fläche $r(X)$ drei bei $X = 0$, zweimal zwei bei $X = 1$ und alle fünf bei $X = \infty$ im Zyklus verzweigt sind, während andere Verzweigungen nicht auftreten. Da haben wir also eine Gleichung fünften Grades mit einem Parameter X, welche bestimmt nicht durch Wurzelzeichen lösbar ist, womit die allgemeine Nichtauflösbarkeit bei Gleichungen fünften Grades, welche beliebig veränderliche Koeffizienten enthalten, bewiesen ist. K.]

---

[2]) [Vgl. auch meine Abhandlung „Über die Erniedrigung der Modulargleichung" aus den Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79), die in Bd. 3 dieser Gesamtausgabe abgedruckt wird. Daselbst insbesondere § 2 und § 6.]

LVI. Über Gleichungen siebenten Grades[1].

[Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen 1877/1878.]

Bekanntlich hat die Modulargleichung, die der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen entspricht, eine Galoissche Gruppe von 168 Substitutionen, und es ist ein altes Problem, Gleichungen siebenten und achten Grades, welche eben diese Gruppe besitzen, durch algebraische Prozesse auf die betr. Modulargleichung zurückzuführen und also durch elliptische Funktionen zu lösen (vgl. Kronecker in den Berliner Monatsberichten von 1858). Es ist mir nun gelungen, der Modulargleichung eine solche Form zu erteilen, daß diese Zurückführung sich in der Tat ermöglicht; man bedarf dabei einer Hilfsgleichung vom *vierten* Grad, von der man zeigen kann, daß sie nicht zu vermeiden ist.

Es sei $J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ die absolute Invariante des gegebenen elliptischen Integrals, ω das Verhältnis der zugehörigen Perioden, q, wie gewöhnlich, gleich $e^{i\pi\omega}$. Es sei entsprechend J' die absolute Invariante des transformierten Integrals. Dann wird die Transformation siebenter Ordnung durch folgende Formel geliefert. *Setzt man:*

$$J = \frac{(x^2 - 13x + 49)(x^2 - 5x + 1)^3}{1728\,x},$$

so ist

$$\left\{\begin{aligned} x &= 49\,q^2 \frac{\Pi(1-q^{14\nu})^4}{\Pi(1-q^{2\nu})^4}, \\ J' &= \frac{(x'^2 - 13x' + 49)(x'^2 - 5x' + 1)^3}{1728\,x'}, \text{ wo } x \cdot x' = 49\text{[2]}. \end{aligned}\right.$$

[1]) Diese vorläufige Mitteilung wurde am 4. März 1878 vorgelegt, [und ist hier dem sonst eingehaltenen Brauch entgegen abgedruckt, weil sie das Problem noch erst viel abstrakter faßt als die unmittelbar folgende Abh. LVII.]

[2]) [Vgl. meine in Bd. 3 dieser Ausgabe abzudruckende Abhandlung: „Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades" in den Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79), besonders Abschnitt II, § 15, Formel (20). K.]

Ich werde nun die Gleichung

$$J = \frac{(x^2 - 13x + 49)(x^2 - 5x + 1)^3}{1728\,x}$$

in der Weise geometrisch interpretieren, wie ich dies bei früheren Gelegenheiten schon öfters tat, indem ich die acht Wurzeln

$$x_1, x_2, \ldots, x_8$$

als Koordinaten eines Punktes im Raume von acht Dimensionen betrachte, der 168 im allgemeinen verschiedene Lagen annimmt, wenn man die x durch die Galoissche Gruppe vertauscht. Läßt man jetzt J sich beliebig ändern, so durchlaufen die 168 Punkte ein und dieselbe irreduzible Kurve (Mannigfaltigkeit erster Dimension), und nun kommt alles darauf an (was ich aber hier nicht ausführe), zu zeigen, *daß das Geschlecht dieser Kurve gleich 3 ist.* Infolgedessen kann man nämlich einem beliebigen Raumpunkte

$$x_1, x_2, \ldots, x_8$$

durch rationalen Prozeß ein Quadrupel ($4 = 2p - 2$) von Punkten auf dieser Raumkurve zuordnen. In der Tat: auf einer Kurve vom Geschlechte 3 gibt es zweifach unendlich viele Punktquadrupel, welche im Sinne der bei den Abelschen Funktionen geltenden Terminologie durch die Funktionen φ bestimmt werden. Diese zweifach unendlich vielen Quadrupel werden auf unserer Raumkurve durch Flächen (Mannigfaltigkeiten der $(n-1)$-ten Dimension) irgendwelcher Ordnung, welche eine gewisse Anzahl Parameter linear enthalten, ausgeschnitten. Nun kennt man aber außer dem Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_8$ eine beliebige Anzahl Raumpunkte rational, z. B. die Punkte $x_1^\nu, x_2^\nu, \ldots, x_8^\nu$, wo ν irgendeine ganze Zahl ist. Unter ihnen wähle man so viele aus, daß durch sie gerade eine der genannten Mannigfaltigkeiten hindurchgeht. Dann ist also in der Tat dem beliebigen Raumpunkte ein Quadrupel von Punkten auf der Raumkurve zugeordnet, und dies gibt, algebraisch formuliert, den in der Einleitung ausgesprochenen Satz.

LVII. Über die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade.

[Math. Annalen, Bd. 15 (1879).]

Die Modulargleichung, welche der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen entspricht, hat eine Galoissche Gruppe von 168 Substitutionen. Wird es möglich sein, solche Gleichungen siebenten oder achten oder auch 168-ten Grades, welche dieselbe Gruppe besitzen, durch ausführbare Prozesse auf die Modulargleichung zurückzuführen? Und welches sind die einfachsten Mittel, deren man sich zu diesem Zwecke zu bedienen hat? Dies sind diejenigen Fragen, welche sich naturgemäß aufdrängen mußten, als es gelungen war, die allgemeinen Gleichungen *fünften* Grades mit der Modulargleichung für Transformation fünfter Ordnung in Verbindung zu setzen[1]). Ich glaube, daß diese Fragen unerledigt geblieben waren, als ich, vor nun einem Jahre, mich denselben zum ersten Male zuwandte. In einer ersten Note, welche am 4. März 1878 der Erlanger Sozietät vorgelegt wurde[2]), bemerkte ich, *daß sich die fragliche Zurückführung in der Tat ermöglicht, daß man dabei aber einer Hilfsgleichung vierten Grades bedarf, welche man nicht vermeiden kann.* In einer zweiten, gleichbenannten Note vom 20. Mai desselben Jahres entwickelte ich sodann in allgemeinen Umrissen, *wie man rechnerisch diese Zurückführung zu realisieren hat.* — Ein Hauptteil dieser Untersuchungen bezog sich auf die Formulierung des Transformationsproblems siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen; ich habe denselben seitdem für sich in ausgeführter Form in den Math. Annalen veröffentlicht[3]). Indem ich im folgenden an diese Formulierung anknüpfe, gelingt es mir, die allgemeine Beantwortung des Hauptproblems auf einige wenige Sätze zurückzuführen;

[1]) [Gemeint ist meine Abhandlung: „Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades" in den Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79), welche erst in Bd. 3 dieser Gesamtausgabe abgedruckt werden wird.] Vgl. Kronecker: Über Gleichungen siebenten Grades, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1858; vgl. ferner wegen der Gruppierungsverhältnisse den neuen Aufsatz von Nöther in Bd. 15 der Math. Annalen (1879), S. 89 ff.

[2]) Über Gleichungen siebenten Grades. [Vorstehend als Nr. LVI abgedruckt.]

[3]) Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen: Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79). [Wird in Bd. 3 dieser Ausgabe abgedruckt.]

ein Eingehen in das rechnerische Detail, welches jedenfalls auch von großem Interesse sein würde, habe ich um so eher unterlassen können, als sich Herr Gordan bereits seit einiger Zeit mit demselben beschäftigt und seine Resultate demnächst in den Math. Annalen veröffentlichen wird[4]). Dagegen habe ich in meiner Darstellung den Prinzipien eine solche Form gegeben, daß sie nicht nur das zunächst in Betracht kommende Problem der Gleichungen mit 168 Substitutionen erledigen, sondern überhaupt erkennen lassen, *wie man ähnliche Probleme bei beliebigen höheren Gleichungen zu behandeln, und, was wichtiger ist, wie man sie aufzustellen hat.* Die so entstehende *allgemeine Methode zur Behandlung höherer Gleichungen* (welche natürlich noch mannigfacher Entwicklung fähig sein wird) schließt ebensowohl die Auflösung zyklischer Gleichungen durch Wurzelzeichen, als die Kroneckersche Behandlung der Gleichungen fünften Grades in sich. Man kann meine Methode geradezu als eine Verallgemeinerung der letzteren betrachten, wie mir auch andere zerstreute Bemerkungen Kroneckers von Nutzen gewesen sind[5]). Doch glaube ich, daß der Gesichtspunkt, unter dem ich Kroneckers und Brioschis hierher gehörige Untersuchungen auffasse, und vermöge dessen ich zu meiner Verallgemeinerung schreite, neu ist und erst aus meinen Untersuchungen über das Ikosaeder[6]), resp. aus meinen früheren Bemühungen, eine geometrische Deutung für die Resolventen algebraischer Gleichungen zu finden[7]), erwachsen ist. Bei Kronecker oder Brioschi wird nirgends ein allgemeiner Grund angegeben, *weshalb* die Jacobischen Gleichungen sechsten Grades als die einfachsten rationalen Resolventen der Gleichungen fünften Grades anzusehen sind; indem ich diese Jacobischen Gleichungen als Vertreterinnen eines *Systems von 60 ternären linearen Substitutionen auffasse, welches mit der Gruppe der 60 geraden Vertauschungen von fünf Dingen isomorph ist,* habe ich von Anfang an das Prinzip, nach welchem man in allen Fällen die Normalgleichungen, in die sich die gegebenen durch rationale Resolventenbildung transformieren lassen, a priori charakterisieren kann. Dies sind dann z. B. im Falle der Gleichungen siebenten Grades mit 168 Substitutionen *nicht* die Jacobischen Gleichungen achten Grades.

[4]) [Vgl. die am Ende dieser Abhandlung (auf S. 426) folgenden genaueren Angaben über die hierher gehörigen, von Gordan später veröffentlichten Untersuchungen. K.]

[5]) Vgl. zumal eine Notiz in den Berliner Monatsberichten vom Jahre 1861, S. 615, über die Zurückführung gewisser Gleichungen $(2n+2)$-ten Grades auf die Jacobischen Gleichungen vom $(n+1)$-ten Grade.

[6]) Math. Annalen, Bd. 12 (1877) [vorstehend als Abh. LIV abgedruckt]. Vgl. besonders daselbst Abschnitt II, §§ 1—5 und 10.

[7]) Math. Annalen, Bd. 4 (1871) [vorstehend als Abh. L abgedruckt].

Mit diesem Probleme *der rationalen Transformation gegebener Gleichungen auf gewisse Normalformen* beschäftigt sich der erste Abschnitt des Folgenden. Ich habe mich dabei, was die speziellen Probleme des fünften, siebenten oder achten Grades betrifft, mit Vorliebe wieder geometrischer Überlegungen bedient, obwohl das algebraische Schlußresultat ebenso durch den allgemeinen analytischen Ansatz erzielt werden kann. Denn die Geometrie veranschaulicht und erleichtert nicht nur, sie hat auch in diesen Untersuchungen das Vorrecht der *Erfindung*. Die geometrische Theorie der Jacobischen Gleichungen achten Grades, wie ich sie in § 8 des folgenden auseinandersetze, ist es gewesen, von der ich bei allen diesen Untersuchungen ausging, und zwar war es hier wieder der a. a. O. angegebene Paul Serretsche Satz, der mich von vornherein die Existenz eines ausgezeichneten Netzes von Flächen zweiter Ordnung erkennen ließ. — Übrigens schließt dieser erste Abschnitt mit der Angabe gewisser Gruppen linearer Substitutionen, welche für die allgemeine Theorie der Modulargleichungen von Wichtigkeit sein müssen.

Im zweiten Abschnitte handelt es sich, allgemein zu reden, um *algebraische* Transformation gegebener Gleichungen auf Normalformen mit nur einem Parameter. Inzwischen lasse ich, um der Klarheit der Darstellung nicht durch Unbestimmtheit derselben Eintrag zu tun, nunmehr den Ausblick auf beliebig gegebene Gleichungen beiseite und beschäftige mich nur mit den Problemen mit 168 Substitutionen. Ich möchte namentlich hervorheben, daß ich nicht nur die Zurückführung auf die Modulargleichung, wie sie gewünscht wird, explizite bewerkstellige, sondern daß ich auch zeige, weshalb man die Modulargleichung in der von mir gegebenen Form zweckmäßigerweise als Definition einer Fundamentalirrationalität erachtet[8]).

Abschnitt I.

Normalformen, welche sich durch rationale Transformation herstellen lassen.

§ 1.

Fundamentalsatz.

Was unter einem endlichen Systeme (einer endlichen Gruppe) von N homogenen linearen Substitutionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu verstehen sei, ist durch die Benennung selbst wohl hinreichend erklärt. Man beachte im folgenden vor allem, daß ein analoges System homogener linearer Substitutionen allemal auch für die kontragredienten Variabeln $u_1, u_2, \ldots, u_n$ gegeben ist; sofern man verlangt, daß die bilineare Form

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n$$

bei den simultanen Substitutionen der x und u ungeändert bleibt. Dieses kontragrediente System umfaßt eventuell in seiner Gesamtheit dieselben Substitutionen, wie das ursprüngliche; aber darum sind die Substitutionen der x und u, welche simultan auftreten, noch nicht notwendig identisch.

Ich will nun annehmen, daß ein anderes System von $\frac{N}{\nu}$ homogenen linearen Substitutionen bei μ Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ gegeben sei, und zwar sei dieses System mit demjenigen, dem die x unterworfen werden, *isomorph*[9]). Der Isomorphismus kann entweder ein *holoedrischer* sein, also so beschaffen, daß jeder Substitution der x nur *eine* Substitution der y entspricht, sowie umgekehrt jeder Substitution der y nur *eine* Substitution der x (dann ist $\nu = 1$), oder er mag in der Weise meroedrisch sein, daß freilich einer Substitution der y mehrere (ν) Substitutionen der x entsprechen, doch einer Substitution der x immer nur *eine* Substitution der y. — Die zu den y gehörigen kontragredienten Variablen nenne ich weiterhin $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$.

Dann sage ich, *daß es immer solche ganze homogene Funktionen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibt:*

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_\mu,$$

welche sich bei den linearen Substitutionen, denen die x unterworfen werden, ihrerseits wie die $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ homogen linear substituieren.

Der Beweis ergibt sich, indem man einen allgemeinen Prozeß betrachtet, der solche Funktionen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\mu$ liefert. Man wähle irgendeine ganze homogene Funktion der x:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

welche nur *der* Bedingung genügen muß, daß zwischen den Werten, welche sie bei den N Substitutionen der x annimmt und die ich der Reihe nach

$$\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}$$

nennen will, gewisse sogleich zu definierende lineare homogene Relationen mit numerischen Koeffizienten *nicht* bestehen. Durch die entsprechenden Substitutionen wird eine der kontragredienten Variablen v, etwa v_1, ebenso in N Ausdrücke übergeführt, welche aber alle lineare Funktionen mit

[8]) [Das Wort „Modulargleichung" ist im Texte überall in allgemeinerem Sinne gebraucht, als es sonst und vielfach auch in meinen in Bd. 3 abzudruckenden Untersuchungen über elliptische Funktionen geschieht. Es steht kurzweg für die geeignete algebraische Formulierung, die ich an Stelle der gewöhnlichen Modulargleichung gesetzt habe. K.]

[9]) Siehe C. Jordan, Traité des substitutions usw. (1870), S. 56.

numerischen Koeffizienten von $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ sind. Man nenne diese Werte einen Augenblick $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(N)}$ und ordne sie den entsprechenden φ zu, indem man die bilineare Funktion bildet:

$$\varphi^{(1)} v^{(1)} + \varphi^{(2)} v^{(2)} + \ldots + \varphi^{(N)} v^{(N)}.$$

Offenbar bleibt diese bilineare Form völlig ungeändert, wenn man die x und die y, und also die v, *simultan* den zusammengehörigen Substitutionen unterwirft. Ersetzt man also jetzt die $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(N)}$ durch ihre Ausdrücke in $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$, ordnet nach letzteren und schreibt

$$\varphi^{(1)} v^{(1)} + \varphi^{(2)} v^{(2)} + \ldots + \varphi^{(N)} v^{(N)} = Y_1 v_1 + Y_2 v_2 + \ldots + Y_\mu v_\mu,$$

so sind die $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\mu$ ohne weiteres Funktionen der geforderten Beschaffenheit. Sie müssen sich bei den Substitutionen der x wie die y substituieren, damit die bilineare Form $Y_1 v_1 + \ldots + Y_\mu v_\mu$ bei den simultanen Substitutionen der x, v völlig ungeändert bleiben kann. — Wie man sieht, sind die Y lineare Aggregate der $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}$, und die einzige Bedingung, der die Funktion φ genügen muß, ist daher die, *daß diese linearen Aggregate nicht identisch verschwinden*[10]).

Der so geschilderte allgemeine Prozeß kann auf mannigfache Weise modifiziert werden, wenn man eingehendere Kenntnis der Substitutionssysteme der x und der y besitzt. Ein Beispiel, dem sich in der Folge noch andere anreihen (§§ 5, 9, 10), sei dieses. Es mögen Funktionen der y und v bekannt sein:

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots,$$

welche sich bei den in Betracht kommenden Substitutionen gar nicht ändern. Es sollen andererseits gewisse Funktionen

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$$

der y, v und

$$\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots$$

der x bekannt sein, welche bei den simultanen Substitutionen gleichzeitig folgende s Werte annehmen:

$$f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \ldots, f_s^{(i)},$$

resp.

$$\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \ldots, \varphi_s^{(i)}.$$

Gelingt es dann, von den Formen:

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, \sum_{k=1,2..s} f_k^{(i)} \varphi_k^{(i)},$$

[10]) [Daß man dieser Bedingung in der Tat immer genügen kann, hat Burkhardt 1892 in Bd. 41 der Math. Annalen (S. 309—312) ausdrücklich gezeigt. — Übrigens ist auch noch notwendig zu verlangen, wie ich in einer Vorlesung im Jahre 1886/87 ausführte, daß zwischen den Y keine linearen Identitäten bestehen. Diese Möglichkeit ist in den im Folgenden zu behandelnden Beispielen ausgeschlossen, weil es im Gebiet der Variabeln $y_1, y_2 \ldots$ keinen linearen Teilraum gibt, der bei allen Substitutionen der in Betracht kommenden Gruppen invariant wäre. K.]

in denen die y, v als Veränderliche betrachtet werden sollen, irgendeine lineare Kontravariante zu bilden:

$$Y_1 v_1 + Y_2 v_2 + \ldots + Y_\mu v_\mu,$$

wo die Y neben numerischen Koeffizienten nur noch die x enthalten werden, so sind die Y wieder Funktionen der geforderten Beschaffenheit.

In der Tat, da die Grundformen $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, \sum f_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}$ bei den zusammengehörigen Substitutionen der x, y, v völlig ungeändert bleiben, so wird es auch jede Kovariante tun, insbesondere unsere lineare Kontravariante. —

§ 2.

Anwendung auf die Theorie der Gleichungen.

Mit jedem endlichen Systeme von N Substitutionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hängt ein algebraisches Problem zusammen, das mit einer Gleichung, deren Galoissche Gruppe N Permutationen enthält, äquivalent ist. Es seien

$$\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots$$

die Gesamtheit derjenigen ganzen Funktionen der x, welche bei den linearen Substitutionen, denen die x unterworfen werden, ungeändert bleiben. Die Zahlenwerte, welche diese $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots$ bei unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annehmen, seien [natürlich unter Aufrechterhaltung der etwa zwischen ihnen bestehenden algebraischen Identitäten, im übrigen aber als frei veränderliche Größen] gegeben. Dann besteht das gemeinte Problem in der Aufgabe: *aus den Φ die x zu bestimmen.* Ich werde dementsprechend von einem „Probleme der x" sprechen.

Ebenso gibt es ein „Problem der y"; und die Bedeutung des im vorigen Paragraphen aufgestellten Satzes ist offenbar die: *daß es ganze rationale Funktionen der x gibt, welche von einem „Probleme der y" abhängen*, oder auch: *daß es möglich ist, das „Problem der x" auf rationalem Wege auf das „Problem der y" zurückzuführen.*

Unter diesen allgemeinen Begriff des „Problems der x" ordnet sich nun, wenn man will, als besonderer Fall die Auflösung jeder Gleichung n-ten Grades $f(x) = 0$ ein. Die linearen Substitutionen, denen die x unterworfen werden, sind dann bloße *Vertauschungen* der x untereinander, nämlich diejenigen, welche in ihrer Gesamtheit die Galoissche Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$ ausmachen. Besteht diese Gruppe aus der Gesamtheit aller Vertauschungen, so decken sich die ungeändert bleibenden Funktionen der x mit den symmetrischen Funktionen; die Funktionen $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots$, welche gegeben sein sollen, sind also nichts anderes als die *Koeffizienten* der Gleichung. Ist aber die Galoissche Gruppe kleiner, so sind die $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots$ die Gesamtheit derjenigen *ganzen* Funktionen der x, welche man nach Galois als *adjungiert* bezeichnet[11]).

Mit diesem besonderen Systeme linearer Substitutionen der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mag jetzt, im Sinne des vorigen Paragraphen, ein System linearer Substitutionen der $y_1, y_2, \ldots, y_n$ holoedrisch oder auch meroedrisch isomorph sein. Dann ist es also nach dem Gesagten möglich, *die Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ auf rationalem Wege auf das „Problem der y" zurückzuführen.*

Die allgemeine Methode nun, welche ich behufs rationaler Umformung der algebraischen Gleichungen vorschlage, besteht einfach darin, *daß ich zunächst die kleinste Zahl μ suche, bei welcher ein Isomorphismus der gewollten Art zwischen den Vertauschungen der x und linearen Substitutionen der $y_1, \ldots, y_\mu$ möglich ist, und daß ich dann die Gleichung $f(x) = 0$ durch das „Problem der y" ersetze.*

Ich will annehmen, daß man aus $f(x) = 0$ durch rationale Substitutionen das Glied mit x^{n-1} fortgeschafft habe, daß also $\sum x = 0$ ist. So sind die Vertauschungen der x im Grunde ein System linearer Substitutionen bei nur $(n-1)$ Veränderlichen, und die Minimalzahl μ daher jedenfalls nicht größer als $(n-1)$[12]). Ist sie aber kleiner als $(n-1)$, so ist durch meine Umformung ein Fortschritt erzielt, der sich einmal darin ausspricht, daß ein Problem, welches von Hause aus $(n-1)$ Parameter enthält, deren nur mehr μ umfaßt, der aber andererseits auch die Reihenentwicklungen vereinfacht, deren man sich bei Berechnung der Wurzeln x zu bedienen hat. Ist $\sum x = 0$, so lassen sich die x, wie selbstverständlich, immer als Integrale von linearen Differentialgleichungen $(n-1)$-ter Ordnung betrachten[13]); meine Reduktion zeigt, daß man bis zu linearen Differentialgleichungen der μ-ten Ordnung hinabsteigen kann.

An der so formulierten Methode möchte ich übrigens nur dann unbedingt festhalten, wenn die Galoissche Gruppe von $f(x) = 0$ *einfach* ist. Ist sie zusammengesetzt, so kann man sie durch eine Reihenfolge einfacher Gleichungen ersetzen und jede für sich nach der angegebenen

[11]) Dieser Auffassung entsprechend stelle ich für alle Gleichungen, welche einen Affekt besitzen, das Problem auf, das volle System dieser rationalen, ganzen Funktionen zu bilden (selbstverständlich mit den zwischen seinen Formen bestehenden identischen Relationen). Eine solche Gleichung sollte dann nicht in der Weise angeschrieben werden, daß man nur die Werte ihrer Koeffizienten mitteilt, sondern es sollten die Werte aller dieser ganzen Funktionen explizite angegeben werden.

[12]) [Vgl. die an das Evanston Colloquium anknüpfende Notiz der Vorbemerkungen, S. 260. K.]

[13]) Dies die sog. Methode der *Differentialresolventen*, mit der sich englische Algebristen: Boole, Cockle, Harley u. a. beschäftigt haben.

Methode behandeln. Aber es kann sein, daß sich die so entstehenden „Probleme der y" in zweckmäßiger Weise zu einem einzigen Probleme von etwas komplizierterem Charakter zusammenziehen lassen. In diesem Sinne fasse ich die Methode auf, mit der Gordan diejenigen Gleichungen fünften Grades behandelt hat, in welcher die vierte und dritte Potenz der Unbekannten fehlt (Math. Annalen, Bd. 13 [1878])[14]). Den 120 Vertauschungen der fünf Wurzeln x wird hier ein isomorphes System linearer Substitutionen entsprechend gesetzt, welches *zwei* Reihen von je zwei Variabeln in der Art betrifft, daß einer *geraden* Permutation der x eine binäre lineare Substitution jeder Variablenreihe entspricht, einer *ungeraden* Permutation überdies eine Vertauschung der beiden Reihen.

§ 3.

Einfachste Beispiele.

1. Es sei $f(x) = 0$ *zyklisch*. Die Aufeinanderfolge der x in dem einen in Betracht kommenden Zyklus werde durch die Reihenfolge der Indizes angegeben, und da diese Indizes modulo n betrachtet werden, so schreibe ich $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Dann ist die Minimalzahl $\mu = 1$, die entsprechende Gruppe linearer Substitutionen ersetzt die *eine* Variable y_1 der Reihe nach durch:

$$y_1, \varrho^{-1} y_1, \varrho^{-2} y_1, \ldots, \varrho^1 y_1,$$

wo ϱ eine primitive n-te Einheitswurzel bedeutet. Das kontragrediente v_1 geht gleichzeitig über in:

$$v_1, \varrho v_1, \varrho^2 v_1, \ldots, \varrho^{n-1} v_1.$$

Als Funktionen φ der x wähle man x_0 selbst. So entsteht die bilineare Form:

$$x_0 \cdot v_1 + x_1 \cdot \varrho v_1 + x_2 \cdot \varrho^2 v_1 + \cdots + x_{n-1} \cdot \varrho^{n-1} v_1,$$

oder, wenn man den Koeffizienten von v_1 mit Y_1 bezeichnet:

$$Y_1 = x_0 + \varrho x_1 + \varrho^2 x_2 + \cdots + \varrho^{n-1} x_{n-1}.$$

Unser Ansatz liefert also den Ausdruck des Lagrange. Zugleich ist die einzige ungeändert bleibende ganze Funktion von y_1 die n-te Potenz: y_1^n; das „Problem der y" besteht also im vorliegenden Falle einfach darin, aus einer bekannten Größe die n-te Wurzel zu ziehen.

2. Es sei n eine Primzahl und die Gleichung $f(x) = 0$ *metazyklisch*. Die Vertauschungen der $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, welche die Galoissche Gruppe ausmachen, sind durch folgende Formel gegeben:

$$x'_\nu = x_{\alpha\nu+\beta},$$

[14]) [Siehe die zugehörigen Ausführungen, die ich vorstehend im Anschluß an die Abh. LIV auf S. 380 ff. gegeben habe. K.]

wo α die Werte $1, 2, \ldots, (n-1)$, β alle Werte $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ durchlaufen soll. Alle diese Vertauschungen erwachsen, wenn man folgende zwei Substitutionen beliebig wiederholt und kombiniert:

$$(1) \qquad \begin{cases} 1. & x'_\nu = x_{\nu+1}, \\ 2. & x'_{g\nu} = x_\nu, \end{cases}$$

g bedeutet dabei eine Primitivwurzel modulo n. Man bilde nunmehr folgende $(n-1)$ Ausdrücke:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_0 + \varrho x_1 + \varrho^2 x_2 + \cdots + \varrho^{n-1} x_{n-1}, \\ y_2 &= x_0 + \varrho^2 x_1 + \varrho^4 x_2 + \cdots + \varrho^{2(n-1)} x_{n-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} &= x_0 + \varrho^{n-1} x_1 + \varrho^{2(n-1)} x_2 + \cdots + \varrho x_{n-1}. \end{aligned}$$

Offenbar erhält man, den Vertauschungen 1., 2. entsprechend, folgende Substitutionen der y:

$$\begin{aligned} &\text{ad 1.} \quad y'_k = \varrho^{-k} y_k, \\ &\text{ad 2.} \quad y'_k = y_{gk}. \end{aligned}$$

Ich werde nunmehr unter der Gesamtheit der metazyklischen Vertauschungen $x'_\nu = x_{\alpha\nu+\beta}$ die Hälfte herausgreifen, indem ich dem α auferlege, quadratischer Rest zu sein. An Stelle der beiden Substitutionen (1) muß ich dann als erzeugende Substitutionen die folgenden nehmen:

$$(2) \qquad \begin{cases} 1. & x'_\nu = x_{\nu+1}, \\ 2. & x'_{g^2\nu} = x_\nu. \end{cases}$$

Dann sondern sich die y in zwei Aggregate von nur $\frac{n-1}{2}$ Variablen, die sich unter sich substituieren: die einen haben nur quadratische Reste als Indizes, die anderen quadratische Nichtreste. Indem ich die ersteren herausgreife, *habe ich für die halbe metazyklische Gruppe ein isomorphes System linearer Substitutionen bei nur* $\frac{n-1}{2}$ *Variablen, das aus Kombination, resp. Wiederholung folgender Operationen erwächst:*

$$\begin{aligned} &\text{ad 1.} \quad y'_{k^2} = \varrho^{-k^2} \cdot y_{k^2}, \\ &\text{ad 2.} \quad y'_{k^2} = y_{g^2k^2}. \end{aligned}$$

Hier schreibe man als Index statt k^2 wieder k, indem man unter k denjenigen Wert von $\sqrt{k^2}$ versteht, der mod. n zwischen 0 und $\frac{n}{2}$ liegt. Desgleichen verstehe man unter $\pm gk$ den kleinsten positiven Rest (mod. n) von $+gk$ oder von $-gk$, der unterhalb $\frac{n}{2}$ liegt. Dann hat man bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen

$$y_1, y_2, \ldots, y_{\frac{n-1}{2}}$$

folgende zwei Substitutionen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{ad 1.} & y'_k = \varrho^{-k^2} y_k, \\ \text{ad 2.} & y'_k = y_{\pm gk}. \end{cases}$$

Ich werde später auf diese Formeln zurückkommen. — Offenbar ist das so erzielte Substitutionssystem, was die *Zahl* der Variablen angeht, das beste, das man zur Darstellung der [halben] metazyklischen Gruppe aufstellen kann sobald $\frac{n-1}{2}$, wie bei $n = 5, 7, 11$, selbst eine Primzahl ist.

§ 4.

Die Formeln von Kronecker und Brioschi für den fünften Grad.

Ich zeige nunmehr, wie sich die von Kronecker und Brioschi für den fünften Grad gegebenen Formeln in den hier entwickelten Gedankengang einordnen.

Es sei eine Gleichung fünften Grades $f(x) = 0$ gegeben, bei der die Quadratwurzel aus der Diskriminante adjungiert ist, und deren Galoissche Gruppe demnach nur die 60 geraden Vertauschungen der fünf Wurzeln $x_0, x_1, \ldots, x_4$ umfaßt. Dann handelt es sich zunächst darum, ein isomorphes System linearer Substitutionen bei möglichst wenig Variablen zu finden. Die Zahl μ dieser Variablen kann nicht 2 sein: denn es gibt keine endliche Gruppe von 60 binären linearen Substitutionen der hier gewollten Beschaffenheit (die Zahl der binären Ikosaedersubstitutionen ist 120). Dagegen kann $\mu = 3$ genommen werden. Denn wir kennen für $\mu = 3$ ein isomorphes Substitutionssystem: *das ist das System, welches bei den Jacobischen Gleichungen sechsten Grades auftritt.* Nennt man die Variablen A_0, A_1, A_2, so entsteht das fragliche System durch Kombination folgender drei Operationen (siehe meine Arbeit „Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder“, Abschnitt II, § 2 [Abh. LIV, S. 349]):

$$(4) \qquad \begin{cases} 1. & A'_0 = A_0, \quad A'_1 = \varepsilon^4 A_1, \quad A'_2 = \varepsilon A_2, \\ 2. & A'_0 = -A_0, \quad A'_1 = -A_2, \quad A'_2 = -A_1 \text{ [15]}, \\ 3. & \begin{cases} \sqrt{5}\,A'_0 = A_0 + A_1 + A_2, \\ \sqrt{5}\,A'_1 = 2A_0 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_1 + (\varepsilon+\varepsilon^4)A_2, \\ \sqrt{5}\,A'_2 = 2A_0 + (\varepsilon+\varepsilon^4)A_1 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3)A_2. \end{cases} \end{cases}$$

(Unter ε ist hier eine fünfte Einheitswurzel verstanden.) — Ungeändert

[15] [Ich gebe hier, wie weiterhin an den entsprechenden Stellen, *drei* erzeugende Operationen der Gruppe an, während man leicht nachweist, daß es genügt, nur die *zwei* Operationen 1. und 3. zu kombinieren. Vgl. auch Fußnote [28]) auf S. 417. Der Zweck ist, durch Nebeneinanderstellung von 1. und 2. gleich die einfachste in der Gesamtgruppe enthaltene metazyklische Untergruppe hervortreten zu lassen. K.]

bleiben bei diesen Substitutionen vier Funktionen von A_0, A_1, A_2, die ich früher als A, B, C, D bezeichnete; das „Problem der A" besteht also darin, aus den gegebenen Werten von A, B, C, D die A_0, A_1, A_2 zu berechnen.

Mit diesem Probleme ist nun *ungefähr* gleichbedeutend, daß man die Jacobische Gleichung sechsten Grades löst, deren Wurzeln sind:

$$z_\infty = 5 A_0^2, \quad z_\nu = (A_0 + \varepsilon^\nu A_1 + \varepsilon^{4\nu} A_2)^2;$$

denn die Koeffizienten dieser Gleichung setzen sich aus A, B, C, und umgekehrt diese aus jenen zusammen. Dagegen ist D *nicht* durch die Koeffizienten der Jacobischen Gleichung gegeben; D stellt sich vielmehr als vierte Wurzel aus der Diskriminante der Gleichung dar und diese Wurzel muß ausdrücklich adjungiert werden, wenn sich die Lösung der Jacobischen Gleichung mit dem „Probleme der A" decken soll [vgl. Abh. LIV, Abschnitt II, § 5, Fußnote [41])]. Es ist also richtiger, in dieser Theorie nicht von der Jacobischen Gleichung sechsten Grades, sondern von dem „Probleme der A" zu sprechen, und *implizite* ist das in den hierher gehörigen Untersuchungen von Kronecker und Brioschi auch der Fall. Jedenfalls müssen wir hier, getreu unserem allgemeinen Ansatze, die Aufgabe nunmehr so stellen: ***aus fünf beliebigen Größen $x_0, x_1, \ldots, x_4$ soll man solche drei Funktionen bilden, welche sich bei den 60 geraden Vertauschungen der x wie die A_0, A_1, A_2 ternär linear substituieren.***

Zu dem Zwecke seien zunächst die Substitutionen angegeben, welche drei den A_0, A_1, A_2 kontragrediente Variable, die ich B_0, B_1, B_2 nennen will, bei den Operationen (4) erleiden. Man findet:

$$(5)\quad \begin{cases} \text{ad 1.} & B_0' = B_0, \quad B_1' = \varepsilon B_1, \quad B_2' = \varepsilon^4 B_2. \\ \text{ad 2.} & B_0' = -B_0, \quad B_1' = -B_2, \quad B_2' = -B_1, \\ \text{ad 3.} & \begin{cases} \sqrt{5}\cdot B_0' = B_0 + 2B_1 + 2B_2, \\ \sqrt{5}\cdot B_1' = B_0 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3) B_1 + (\varepsilon+\varepsilon^4) B_2, \\ \sqrt{5}\cdot B_2' = B_0 + (\varepsilon+\varepsilon^4) B_1 + (\varepsilon^2+\varepsilon^3) B_2. \end{cases} \end{cases}$$

Es handelt sich ferner darum, zu wissen, welche Vertauschungen der x man den Substitutionen (4) entsprechend zu setzen hat. Zu dem Zwecke identifiziere man die x_ν einen Augenblick mit folgenden fünfwertigen Funktionen der A [vgl. Abh. LIV, Abschnitt I, § 13]:

$$\varepsilon^\nu(-A_1(4A_0^2 - A_1A_2)) + \varepsilon^{4\nu}(+A_2(4A_0^2 - A_1A_2)) \\ + \varepsilon^{2\nu}(+2A_0A_1^2 - A_2^3) + \varepsilon^{3\nu}(-2A_0A_2^2 + A_1^3).$$

Dann findet man folgende Permutationen der x:

ad 1. $x_0' = x_4, \quad x_1' = x_0, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = x_2, \quad x_4' = x_3;$
ad 2. $x_0' = x_0, \quad x_1' = x_4, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = x_2, \quad x_4' = x_1;$
ad 3. $x_0' = x_0, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = x_3.$

Nehmen wir jetzt, um dem Resultat nicht vorzugreifen, zuvörderst eine völlig unsymmetrische Funktion der x:

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_4),$$

multiplizieren sie mit B_0 und sehen, was entsteht, wenn wir alle Werte zusammenaddieren, welche dieses Produkt annimmt, wenn wir auf dasselbe gleichzeitig die 60 Permutationen der x und die entsprechenden Substitutionen der B anwenden! Machen wir zunächst die fünf Operationen, welche aus der unter 1. angegebenen durch Wiederholung entstehen. So bleibt B_0 ungeändert, während aus $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_4)$ der Reihe nach wird $\varphi(x_4, x_0, \ldots, x_3)$, $\varphi(x_3, x_4, \ldots, x_2)$ usw.: fünf Ausdrücke, deren Summe eine *zyklische* Funktion der x ist, welche ich kurz mit $v(x_0, x_1, \ldots, x_4)$ bezeichnen will. Wir haben also als ersten Bestandteil unserer bilinearen Funktion $B_0 \cdot v$. Nun machen wir die Operationen 2. So wechselt B_0 sein Zeichen, v verwandelt sich in $v(x_0, x_4, x_3, x_2, x_1) = v'$. Setzen wir $v - v' = u_\infty$, so haben wir jetzt als Bestandteil unserer bilinearen Form $B_0 \cdot u_\infty$. Wir kombinieren ferner die Operation 3. mit den fünf Operationen, welche aus 1. durch Wiederholung entstehen. So erhält B_0 die Werte

$$\frac{B_0 + 2\varepsilon^\nu B_1 + 2\varepsilon^{4\nu} B_2}{\sqrt{5}}$$

für $\nu = 0, 1, \ldots, 4$; u_∞ aber geht in folgende Funktionen über:

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x_0, x_2, x_1, x_4, x_3), \\ u_1 &= u(x_0, x_3, x_2, x_4, x_1), \\ u_2 &= u(x_0, x_4, x_2, x_1, x_3), \\ u_3 &= u(x_0, x_2, x_4, x_3, x_1), \\ u_4 &= u(x_0, x_4, x_1, x_3, x_2). \end{aligned}$$

Unsere Summe wird also im ganzen:

$$B_0 \cdot u_\infty + \sum_\nu \frac{B_0 + 2\varepsilon^\nu B_1 + 2\varepsilon^{4\nu} B_2}{\sqrt{5}} \cdot u_\nu.$$

Ordnen wir hier nach B_0, B_1, B_2, multiplizieren alle Glieder mit $\sqrt{5}$ und nennen endlich die entstehenden Koeffizienten $\mathsf{A}_0, \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2$, *so kommt als Resultat:*

$$(7)\quad \begin{cases} \mathsf{A}_0 = \sqrt{5}\cdot u_\infty + \sum u_\nu, \\ \mathsf{A}_1 = 2\sum \varepsilon^\nu u_\nu, \\ \mathsf{A}_2 = 2\sum \varepsilon^{4\nu} u_\nu. \end{cases}$$

Wie man sieht, sind dies genau die allgemeinen Brioschischen Formeln[16]).

[16]) Atti del Istituto Lombardo, vol. 2 (1858), sowie die zusammenfassende Darstellung von Brioschi selbst in den Math. Annalen, Bd. 13 (1877/78), S. 109—160, besonders S. 156. (= Ges. Werke, Bd. IV, S. 260 [eine Übersetzung ins Italienische].) [Die Betrachtungen des § 4 und 5 sind an verschiedenen Stellen meines Ikosaederbuches (Leipzig 1884) des näheren ausgeführt. K.]

§ 5.

Andere Formeln für den fünften Grad.

Ich werde nun andere Formeln mitteilen, welche dasselbe leisten, welche aber eine andere, neue und, wie mir scheint, wesentliche Seite der Frage hervortreten lassen. Es sind dieselben Formeln, auf welche in meiner obengenannten Arbeit über elliptische Funktionen und Gleichungen fünften Grades, Abschnitt IV, § 9, Bezug genommen wird. Ich habe dieselben zunächst durch geometrische Überlegungen gefunden und werde sogleich auf eine solche zurückkommen. Fürs erste gebe ich eine rein algebraische Ableitung, welche geeignet ist, die Schlußbemerkungen des § 1 zu illustrieren.

Nach den Entwicklungen meiner Arbeit über das Ikosaeder [Abh. LIV, Abschnitt II, S. 346 ff.] kann man die Jacobischen A_0, A_1, A_2 als Koeffizienten einer quadratischen Form

$$A_1\,\eta_1^2 + 2\,A_0\,\eta_1\,\eta_2 - A_2\,\eta_2^2$$

auffassen, die den 120 ***binären*** Ikosaedersubstitutionen unterworfen wird. Bei diesen Ikosaedersubstitutionen sind u. a. folgende Ausdrücke fünfwertig:

$$\begin{aligned} t_\nu &= -\varepsilon^{\nu}\cdot 5\,\eta_1^2\,\eta_2^4 + \varepsilon^{2\nu}(\eta_1^6 - 2\,\eta_1\,\eta_2^5) + \varepsilon^{3\nu}(\eta_2^6 + 2\,\eta_1^5\,\eta_2) - \varepsilon^{4\nu}\cdot 5\,\eta_1^4\,\eta_2^2,\\ W_\nu &= (\varepsilon^{\nu}\,\eta_1 - \varepsilon^{2\nu}\,\eta_2)(-\eta_1^7 + 7\,\eta_1^2\,\eta_2^5) + (\varepsilon^{3\nu}\,\eta_1 + \varepsilon^{4\nu}\,\eta_2)(-7\,\eta_1^5\,\eta_2^2 - \eta_2^7). \end{aligned}$$

Jetzt seien $x_0, \ldots, x_4$ wieder die Wurzeln einer gegebenen Gleichung fünften Grades, X_ν und X_ν' seien fünfwertige Funktionen dieser Wurzeln. Bildet man dann

$$\sum X_\nu\,t_\nu\,, \quad \sum X_\nu'\,W_\nu\,,$$

so hat man zwei Formen vom sechsten resp. achten Grade in den η_1, η_2, welche völlig ungeändert bleiben, wenn man η_1, η_2 den Ikosaedersubstitutionen unterwirft und gleichzeitig die x in zweckmäßiger Weise auf 60 Arten permutiert. Dasselbe gilt dann auch von jeder Kovariante dieser beiden Formen, insbesondere von der quadratischen Kovariante, welche durch sechsmaliges Überschieben entsteht:

$$\left(\sum X_\nu\,t_\nu\,, \quad \sum X_\nu'\,W_\nu\right)_6.$$

Rechnet man also diese Kovariante aus und setzt sie gleich:

$$\mathsf{A}_1\,\eta_1^2 + 2\,\mathsf{A}_0\,\eta_1\,\eta_2 - \mathsf{A}_2\,\eta_2^2\,,$$

so sind die A_0, A_1, A_2 *Funktionen der* x *von der geforderten Beschaffenheit.* Denn die A_1, A_0, $-\mathsf{A}_2$ erfahren bei den 60 Permutationen der x notwendig solche ternäre lineare Substitutionen, welche kontragredient sind zu denjenigen, die η_1^2, $2\eta_1\,\eta_2$, $-\eta_2^2$ bei den Ikosaedersubstitutionen

erfahren, — und das ist die Definition des zu den Jacobischen Gleichungen sechsten Grades gehörigen Substitutionssystems.

Die Ausrechnung ergibt nun folgendes Resultat. Sei

$$\begin{aligned} P_i &= X_0 + \varepsilon^{i}\,X_1 + \varepsilon^{2i}\,X_2 + \varepsilon^{3i}\,X_3 + \varepsilon^{4i}\,X_4\,,\\ P_i' &= X_0' + \varepsilon^{i}\,X_1' + \varepsilon^{2i}\,X_2' + \varepsilon^{3i}\,X_3' + \varepsilon^{4i}\,X_4'. \end{aligned}$$

So kommt nach Unterdrückung eines Zahlenfaktors

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathsf{A}_0 = (P_2\,P_3' - P_2'\,P_3) + (P_1\,P_4' - P_1'\,P_4)\,,\\ \mathsf{A}_1 = 2\,(P_3\,P_1' - P_3'\,P_1)\,, \quad \mathsf{A}_2 = 2\,(P_4\,P_2' - P_4'\,P_2)\,. \end{cases}$$

Hätte man, was ebenso berechtigt ist, statt $\sum X_\nu\,t_\nu$, $\sum X_\nu'\,W_\nu$ die beiden Formen $\sum X_{2\nu}\,t_\nu$, $\sum X_{2\nu}'\,W_\nu$ benutzt, so hätte man erhalten:

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathsf{A}_0' = (P_2\,P_3' - P_2'\,P_3) - (P_1\,P_4' - P_1'\,P_4)\,,\\ \mathsf{A}_1' = 2\,(P_1\,P_2' - P_1'\,P_2)\,, \quad \mathsf{A}_2' = 2\,(P_3\,P_4' - P_3'\,P_4)\,. \end{cases}$$

Dabei ist identisch:

$$\mathsf{A}_0^2 + \mathsf{A}_1\,\mathsf{A}_2 = \mathsf{A}_0'^2 + \mathsf{A}_1'\,\mathsf{A}_2'\,,$$

und übrigens stehen die A, A' in der bekannten Beziehung zueinander, daß sich die jedesmalige lineare Transformation der A' aus der Transformation der A ergibt, indem man ε in ε^2 verwandelt[17]).

Was mir an diesen Formeln interessant und wichtig scheint, ist, daß sie sich aus den *zweigliedrigen Unterdeterminanten* der P, P' aufbauen. Deutet man die P, P', wie ich früher tat, als Punktkoordinaten im Raume [Abh. LIV, Abschnitt III, § 2], so sind die A resp. A' die Werte, welche entstehen, wenn man die Koordinaten der Verbindungslinie der Punkte P, P', oder, was dasselbe ist, der Punkte X, X' in die linke Seite der Gleichungen *gewisser linearer Komplexe* einträgt. Diese Komplexe haben die einfachste geometrische Deutung und vermitteln dadurch den Zusammenhang der hier gegebenen Betrachtungen mit meiner geometrischen Theorie der Gleichungen fünften Grades ohne x^4 und x^3 [Abh. LIV, Abschnitt III, § 1, 2]. Die Fläche zweiten Grades $\sum x^2 = 0$, von deren Studium ich damals ausging, hat auf das Koordinatensystem der P_i bezogen die Punktkoordinatengleichung:

$$P_1\,P_4 + P_2\,P_3 = 0\,.$$

Von ihr ausgehend konstatiert man sofort, daß die Komplexe

$$\lambda\cdot\mathsf{A}_0 + \mu\cdot\mathsf{A}_1 + \nu\cdot\mathsf{A}_2 = 0$$

---

[17]) So wie Gordan im 13. Bande der Math. Annalen in diesem Sinne zusammengehörige *binäre* Ikosaedersubstitutionen betrachtet und dadurch die Theorie derjenigen Gleichungen fünften Grades, in denen x^4 und x^3 fehlt, wesentlich gefördert hat, so verlangt offenbar eine abschließende Behandlung der *allgemeinen* Gleichungen fünften Grades ein Studium des simultanen Systems der A, A'.

eben diejenigen sind, welche alle Linien *zweiter* Erzeugung der fraglichen Fläche enthalten, und ebenso die Komplexe

$$\lambda \cdot A_0' + \mu \cdot A_1' + \nu \cdot A_2' = 0$$

diejenigen, welche alle Linien *erster* Erzeugung enthalten. Die Komplexe der ersten Art enthalten also von den Linien der ersten Erzeugung noch je ein Paar, ebenso die Komplexe der zweiten Art von den Linien zweiter Erzeugung. Und nun ist die Sache so, daß die Komplexe, welche durch Nullsetzen der Wurzeln der Jacobischen Gleichung erster Art entstehen:

$$\sqrt{5}\, A_0 = 0, \quad A_0 + \varepsilon^{\nu} A_1 + \varepsilon^{4\nu} A_2 = 0$$

eben diejenigen sechs Paare von Erzeugenden erster Art enthalten, welche die früher [Abh. LIV, Abschnitt III, § 2] sogenannten 12 Linien f_1 ausmachen. Die entsprechenden Komplexe:

$$\sqrt{5}\, A_0' = 0, \quad A_0' + \varepsilon^{4\nu} A_1' + \varepsilon^{\nu} A_2' = 0$$

haben natürlich dieselbe Beziehung zu den zwölf Linien f_2 der zweiten Erzeugung[18]) [19]).

---

[18]) Ohne hier näher auf die Theorie der allgemeinen Gleichungen fünften Grades einzugehen, möchte ich bei dieser Gelegenheit anführen, wie ich die Kroneckersche Angabe (Berliner Monatsberichte 1861, Crelles Journal, Bd. 59, 1861) verstehe, daß es unter den aus einer Gleichung fünften Grades hervorgehenden A_0, A_1, A_2 insbesondere solche *gebrochene* Funktionen gibt, für welche die entstehende Jacobische Gleichung nur von *zwei* Parametern abhängt. Die Sache ist äußerst einfach. Man kennt, bei beliebig angenommenen A_0, A_1, A_2, die Werte der Ausdrücke A, B, C, D [siehe Abh. LIV, Abschnitt II, § 4, Formel (8) und (10). A, B, C, D sind bzw. von den Dimensionen 2, 6, 10, 15 in A_0, A_1, A_2]. Setzt man also jetzt etwa:

$$a_0 = \frac{A_0 D}{BC}, \quad a_1 = \frac{A_1 D}{BC}, \quad a_2 = \frac{A_2 D}{BC},$$

so hängen diese neuen Größen von einer Jacobischen Gleichung resp. einem „Probleme der a“ ab, für deren Konstanten man findet:

$$a = \frac{A D^2}{B^2 C^2}, \quad b = \frac{B D^6}{B^6 C^6}, \quad c = \frac{C D^{10}}{B^{10} C^{10}}, \quad d = \frac{D^{16}}{B^{15} C^{15}}.$$

Ersetzt man hier D^2 durch seinen Ausdruck in A, B, C, schreibt dann etwa

$$\frac{B}{A^3} = m, \quad \frac{C}{A^5} = n,$$

so sind die a, b, c, d offenbar Funktionen nur von den *zwei* Parametern m, n.

[19]) [Im übrigen möge noch folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden. Die Lehre von der Auflösung der Gleichungen fünften Grades, wie ich sie verstehe und demnach behandelt habe, hat mit der Invariantentheorie der binären Formen fünften Grades keinerlei notwendige Beziehung, wie ich schon in Abh. LIV auf S. 323 hervorhob. Niemand aber wird darum behindert sein, eine solche Beziehung herzustellen. Dies ist in der Tat von Herrn Coble in der bereits genannten Abhandlung in Bd. 9 der American Transactions (1908) in Anlehnung an die von mir oben im Text gegebenen Entwicklungen in so einfacher Weise geschehen, daß ich seinen Grundgedanken hier angeben will. Wir deuten die Wurzeln $x_0, \ldots, x_4$ einer Gleichung fünften Gra-

§ 6.

Die Probleme mit 168 Substitutionen.

Als „Probleme mit 168 Substitutionen“ will ich kurz alle die Gleichungen siebenten, achten, …, 168-ten Grades bezeichnen, deren Galoissche Gruppe mit der Gruppe der Modulargleichung isomorph ist. Es handelt sich für uns zunächst darum, für diese Probleme die Minimalzahl μ und das zugehörige „Problem der y“ aufzustellen. Dies aber ist implizite bereits in meiner Arbeit „Über Transformation 7. Ordn. d. elliptischen Funktionen“, Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79) [bzw. in Nr. LVI] geleistet, und ich habe nunmehr nur die dort gewonnenen Resultate in neuer Form auszusprechen.

Zuvörderst ist klar, daß μ mindestens gleich 3 ist. Denn bei zwei Variablen gibt es keine Gruppe von 168 linearen Substitutionen der hier geforderten Beschaffenheit. Für $\mu = 3$ habe ich aber in der genannten Arbeit in der Tat die Existenz eines brauchbaren Systems von 168 Substitutionen nachgewiesen. Dasselbe entsteht durch Wiederholung und Kombination folgender drei Operationen:

$$(8)\quad \begin{cases} 1. \quad y_1' = \gamma y_1, \quad y_2' = \gamma^4 y_2, \quad y_3' = \gamma^2 y_3, \qquad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right) \\ 2. \quad y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = y_1, \\ 3. \begin{cases} \sqrt{-7} \cdot y_1' = (\gamma^5 - \gamma^2) y_1 + (\gamma^3 - \gamma^4) y_2 + (\gamma^6 - \gamma) y_3, \\ \sqrt{-7} \cdot y_2' = (\gamma^3 - \gamma^4) y_1 + (\gamma^6 - \gamma) y_2 + (\gamma^5 - \gamma^2) y_3, \\ \sqrt{-7} \cdot y_3' = (\gamma^6 - \gamma) y_1 + (\gamma^5 - \gamma^2) y_2 + (\gamma^3 - \gamma^4) y_3. \end{cases} \end{cases}$$

Ungeändert bleiben bei diesen Substitutionen folgende vier Funktionen:

$$(9)\quad \begin{cases} f = y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1, \\ \nabla = 5\, y_1^2 y_2^2 y_3^2 - (y_1^5 y_3 + y_2^5 y_1 + y_3^5 y_2), \\ C = \dfrac{1}{9} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_3} & \dfrac{\partial \nabla}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_3} & \dfrac{\partial \nabla}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_3 \partial y_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} & \dfrac{\partial \nabla}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial \nabla}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \nabla}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \nabla}{\partial y_3} & 0 \end{vmatrix}, \\ K = \dfrac{1}{14} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \nabla}{\partial y_1} & \dfrac{\partial C}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \nabla}{\partial y_2} & \dfrac{\partial C}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_3} & \dfrac{\partial \nabla}{\partial y_3} & \dfrac{\partial C}{\partial y_3} \end{vmatrix}, \end{cases}$$

---

des mit $\Sigma x_\nu = 0$ wie in Abh. L, S. 263 ff. oder Abh. LIV, S. 365 als homogene überzählige Koordinaten eines Raumpunktes. Setzen wir dann

$$y_\nu = \frac{\alpha x_\nu + \beta}{\gamma x_\nu + \delta},$$

wobei die einzige Relation besteht, daß sich K^2 als ganze Funktion von f, ∇, C darstellt. —

Das „Problem der y" besteht also jetzt im folgenden: *Es sind in Übereinstimmung mit dieser Relation für f, ∇, C, K Zahlenwerte gegeben; man soll die unbekannten y_1, y_2, y_3 berechnen.*

Man sieht, daß ein besonderer Fall dieses Problems dasjenige ist, auf welches ich in meiner ebengenannten Arbeit die Modulargleichung selbst zurückführte: *es ist der Fall, in welchem f insbesondere den Wert Null hat.* Hieran anknüpfend habe ich im zweiten Abschnitte des folgenden nur zu zeigen, wie man das allgemeine hier aufgestellte „Problem der y" auf das besondere mit $f = 0$ reduziert. —

Ich setze noch, ebenfalls aus meiner vorigen Arbeit, die einfachsten ganzen Funktionen der y her, welche bei den 168 Substitutionen 7 oder 8 Werte annehmen. Es sind unter den siebenwertigen Funktionen diese:

$$c_\nu = (\gamma^{2\nu} y_1^2 + \gamma^\nu y_2^2 + \gamma^{4\nu} y_3^2) + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} (\gamma^{6\nu} y_2 y_3 + \gamma^{3\nu} y_3 y_1 + \gamma^{5\nu} y_1 y_2),$$
$$(10) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, 6)$$

(wo das Vorzeichen von $\pm\sqrt{-7}$ beliebig, aber fest anzunehmen ist), und unter den achtwertigen Funktionen:

$$(11) \quad \begin{cases} \delta_\infty = -7 y_1 y_2 y_3, \\ \delta_\nu = y_1 y_2 y_3 + 2\gamma^\nu y_3^2 y_2 + 2\gamma^{4\nu} y_1^2 y_3 + 2\gamma^{2\nu} y_2^2 y_1 \\ \qquad + \gamma^{6\nu}(y_1^2 y_2 - y_3^3) + \gamma^{3\nu}(y_2^2 y_3 - y_1^3) + \gamma^{5\nu}(y_3^2 y_1 - y_2^3) \end{cases}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots, 6).$$

Diese zweierlei Funktionen genügen, wie man leicht berechnet, resp. folgenden Gleichungen siebenten und achten Grades[20]):

$$(12) \quad c^7 + 7 \cdot \frac{1 \mp \sqrt{-7}}{2} f \cdot c^5 + 7 \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \nabla \cdot c^4 - 7(4 \pm \sqrt{-7}) f^2 \cdot c^3$$
$$+ 14(2 \pm \sqrt{-7}) f \nabla \cdot c^2 + \left(-7 \cdot \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2} \cdot \nabla^2 - \frac{7}{2} \cdot (7 \mp 3\sqrt{-7}) \cdot f^3\right) c$$
$$+ \left(-C + \frac{131 \mp 7\sqrt{-7}}{2} f^2 \nabla\right) = 0,$$

wo die α, β, γ, δ nur an die Bedingung geknüpft sein sollen, daß wieder $\Sigma y_\nu = 0$ ist, so werden, wie Herr Coble bemerkt, die so definierten Punkte y gerade diejenige Raumkurve dritter Ordnung durchlaufen, die den Punkt x mit den fünf Grundpunkten des benutzten Pentaederkoordinatensystems

$$(-4, 1, 1, 1, 1) \quad \text{usw.}$$

verbindet. Herr Coble benutzt sodann, um allen diesen Punkten denselben linearen Komplex, und damit dieselben „Probleme der A und A'" zuzuordnen, denjenigen linearen Komplex, dem die Tangenten der besagten Raumkurve dritter Ordnung angehören. K.]

[20]) In meiner ebengenannten Arbeit (Math. Annalen, Bd. 14) teilte ich diese nur für $f = 0$ mit.

$$(13) \quad \delta^8 - 14\nabla \cdot \delta^6 + (63\nabla^2 - 42 f^3)\delta^4 - (70\nabla^3 - 7fC + 98 f^3 \nabla)\delta^2$$
$$- K\delta - 7(fC\nabla + \nabla^4 + 18 f^3 \nabla^2 + f^6) = 0.$$

Ich werde diese Gleichungen siebenten und achten Grades im folgenden nicht benutzen; doch schien es mir interessant, dieselben herzusetzen, weil man sie als einfachste *Normalformen* betrachten kann, auf die sich alle anderen Gleichungen siebenten und achten Grades mit 168 Substitutionen auf rationalem Wege reduzieren lassen. In der Tat: gelingt es, die letzteren, wie ich nun zeigen werde, auf das „Problem der y" zurückzuführen, so ist damit und durch die Formeln (10), (11) die Transformation in diese Normalformen eo ipso geleistet.

§ 7.

Die Gleichungen siebenten Grades mit 168 Substitutionen.

Es seien jetzt x_0, x_1, ..., x_6 die sieben Wurzeln einer Gleichung siebenten Grades mit 168 Substitutionen. Die Indizes der x sollen dabei so gewählt sein, daß die Vertauschungen der x_ν, die in der Galoisschen Gruppe vorkommen, eben dieselben sind, welche die Ausdrücke c_ν (10) bei den 168 Substitutionen der y erfahren. Es seien ferner

$$X_0, \ldots, X_6, \; X_0', \ldots, X_6', \; X_0'', \ldots, X_6''$$

die Werte, welche irgendwelche rationale Funktionen X, X', X'' von x für $x = x_0, x_1, \ldots, x_6$ annehmen. So bilde man etwa:

$$\Sigma X_\nu c_\nu, \quad \Sigma X_\nu' c_\nu, \quad \Sigma X_\nu'' c_\nu.$$

Man beachte ferner, daß für Variable v_1, v_2, v_3, die den y kontragredient sind, eben dasselbe System ungeändert bleibender Funktionen existiert, wie für die y. Ich will diese Funktionen zum Unterschiede durch einen Akzent bezeichnen und also schreiben:

$$f' = v_1^3 v_2 + v_2^3 v_3 + v_3^3 v_2 \quad \text{usw.}$$

Man betrachte nun in $\Sigma X_\nu c_\nu$, $\Sigma X_\nu' c_\nu$, $\Sigma X_\nu'' c_\nu$, in f, ∇, C, K und in f', ∇', C', K' die x als fest, die y, v als veränderlich. *Gelingt es dann, eine lineare Kontravariante zu bilden:*

$$Y_1 v_1 + Y_2 v_2 + Y_3 v_3,$$

wo die Y die x nur noch mit numerischen Koeffizienten enthalten, so sind die Y offenbar solche Funktionen der x, welche sich bei Permutation der x ternär linear wie die y substituieren. Und also ist die Lösung der Gleichung siebenten Grades auf das „Problem der y" zurückgeführt.

Ich will diesen allgemeinen Gedanken hier nur in einer Weise ausführen, die mir deshalb besonders einfach scheint, weil sich die entstehenden

Y aus den *dreigliedrigen Determinanten* der X, X', X'' zusammensetzen. Mein Prozeß ist dieser. Ich bilde die Funktionaldeterminante in bezug auf die y:

$$\left|\sum X_\nu c_\nu,\quad \sum X'_\nu c_\nu,\quad \sum X''_\nu c_\nu\right| = \sum a_{ikh} y_i y_k y_h$$

und schiebe sie dreimal über $f' = v_1^3 v_2 + v_2^3 v_3 + v_3^3 v_1$. So kommt, bis auf einen Zahlenfaktor:

$$Y_1 = 3a_{112} + a_{333},\quad Y_2 = 3a_{223} + a_{111},\quad Y_3 = 3a_{331} + a_{222}.$$

Ausgerechnet gibt dies folgendes Resultat. Man bezeichne der Kürze wegen $\sum \gamma^\nu X_\nu$ mit p_1, $\sum \gamma^{4\nu} X_\nu$ mit p_4, $\sum \gamma^{2\nu} X_\nu$ mit p_2, ferner

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} \cdot \sum \gamma^{6\nu} X_\nu \text{ mit } p_6,\quad \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} \cdot \sum \gamma^{3\nu} X_\nu \text{ mit } p_3,$$
$$\frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} \cdot \sum \gamma^{5\nu} X_\nu \text{ mit } p_5.$$

Unter p', p'' mögen die analogen Ausdrücke in X', X'' verstanden sein. *Dann findet man nach leichten Reduktionen;*

$$(14)\qquad \begin{cases} 8Y_1 = (2, 5, 6) + (4, 3, 6) + (2, 1, 3), \\ 8Y_2 = (1, 6, 3) + (2, 5, 3) + (1, 4, 5), \\ 8Y_3 = (4, 3, 5) + (1, 6, 5) + (4, 2, 6). \end{cases}$$

Unter (i, k, l) ist dabei die Determinante verstanden:

$$\begin{vmatrix} p_i & p_k & p_l \\ p_i' & p_k' & p_l' \\ p_i'' & p_k'' & p_l'' \end{vmatrix}.$$

§ 8.

Die Jacobischen Gleichungen achten Grades[21]).

Die Jacobischen Gleichungen achten Grades sind bekanntlich dadurch definiert, daß sich die Quadratwurzeln aus ihren Wurzeln folgendermaßen aus vier Größen A_0, A_1, A_2, A_3 zusammensetzen lassen:

$$\begin{cases} \sqrt{z_\infty} = \sqrt{-7} \cdot A_0, \\ \sqrt{z_\nu} = \qquad A_0 + \gamma^\nu A_1 + \gamma^{4\nu} A_2 + \gamma^{2\nu} A_3. \quad (\nu = 0, 1, \ldots, 6). \end{cases}$$

Ich erlaube mir, mit Rücksicht auf die Einführung kontragredienter Variabler, zunächst die kleine Abweichung (die ebenso bereits bei den Jacobischen Gleichungen sechsten Grades am Platze gewesen wäre), daß ich A_0, A_1, A_2, A_3 durch x_0, $\sqrt{2} \cdot x_1$, $\sqrt{2} \cdot x_2$, $\sqrt{2} \cdot x_3$ ersetze. Ich ge-

[21]) Vgl. den Aufsatz von Brioschi: *Über die Jacobischen Modulargleichungen vom achten Grade*, in den Math. Annalen, Bd. 15 (1879) [= Werke, Bd. V, S. 225].

stalte ferner die Fragestellung in der Weise um, daß ich nicht sowohl die Lösung der Jacobischen Gleichung als die Behandlung des mit ihr zusammenhängenden „Problemes der x“ als Hauptaufgabe betrachte. Dementsprechend lasse ich die Bezeichnung z beiseite, und indem ich $\sqrt{z} = P$ setze, schreibe ich:

$$(15)\quad \begin{cases} P_\infty = \sqrt{-7} \cdot x_0, \\ P_\nu = \qquad x_0 + \sqrt{2}(\gamma^\nu x_1 + \gamma^{4\nu} x_2 + \gamma^{2\nu} x_3). \quad (\nu = 0, 1, \ldots, 6). \end{cases}$$

Die Substitutionen, welche dem fraglichen „Probleme der x“ zugrunde liegen, erwachsen durch Wiederholung und Kombination aus folgenden drei:

$$(16)\quad \begin{cases} 1.\quad x_0' = x_0,\quad x_1' = \gamma x_1,\quad x_2' = \gamma^4 x_2,\quad x_3' = \gamma^2 x_3, \\ 2.\quad x_0' = x_0,\quad x_1' = x_2,\quad x_2' = x_3,\quad x_3' = x_1, \\ 3.\quad \begin{cases} \sqrt{-7} \cdot x_0' = x_0 + \sqrt{2} \cdot x_1 + \sqrt{2} \cdot x_2 + \sqrt{2} \cdot x_3, \\ \sqrt{-7} \cdot x_1' = \sqrt{2} \cdot x_0 + (\gamma^5 + \gamma^2) x_1 + (\gamma^3 + \gamma^4) x_2 + (\gamma^6 + \gamma) x_3, \\ \sqrt{-7} \cdot x_2' = \sqrt{2} \cdot x_0 + (\gamma^3 + \gamma^4) x_1 + (\gamma^6 + \gamma) x_2 + (\gamma^5 + \gamma^2) x_3, \\ \sqrt{-7} \cdot x_3' = \sqrt{2} \cdot x_0 + (\gamma^6 + \gamma) x_1 + (\gamma^5 + \gamma^2) x_2 + (\gamma^3 + \gamma^4) x_3. \end{cases} \end{cases}$$

Die kontragredienten Variablen werde ich u_0, u_1, u_2, u_3 nennen; man sieht sofort, daß sie jedesmal diejenige Substitution erfahren, welche sich aus der Substitution der x durch Verwandlung von γ in γ^6 und also von $+\sqrt{-7}$ in $-\sqrt{-7}$ ergibt.

Bei diesen Substitutionen (16) werden nun, wie man findet, die Ausdrücke $\pm P$ in folgender Weise untereinander vertauscht:

$$\text{ad 1.}\quad P_\nu' = P_{\nu+1},$$
$$\text{ad 2.}\quad P_{4\nu}' = P_\nu,$$
$$\text{ad 3.}\quad \begin{cases} P_\infty' = P_0, \\ P_0' = -P_\infty, \\ P_\nu' = \left(\frac{\nu}{7}\right) P_{-\frac{1}{\nu}} \qquad (\text{für } \nu = 1, 2, \ldots, 6). \end{cases}$$

Die Permutation der Indizes der P ist also dieselbe, wie man sie von den Modulargleichungen her kennt. Aber die Gruppe der Permutationen der P selbst ist doppelt so groß wie die Gruppe der Modulargleichung. Iteriert man nämlich die Substitution 3., so rückt jeder Index an seine alte Stelle, aber $+P_\nu$ geht in $-P_\nu$ über. *Daher bilden die Permutationen der $\pm P$ und also die Substitutionen der x, welche aus* 1., 2., 3. *durch Wiederholung und Kombination entstehen, eine Gruppe von* 2·168 *Operationen, die der Gruppe der Modulargleichung hemiedrisch isomorph ist.*

Dies impliziert einen wesentlichen Unterschied von der analogen Theorie der Jacobischen Gleichungen *sechsten* Grades, bei denen dieser Isomorphismus ein *holoedrischer* war. Wir können sofort sagen:

Es ist unmöglich, die Probleme mit 168 Substitutionen rational auf das hier vorliegende „Problem der x" zu reduzieren; wir können weiter folgern:

Es ist unmöglich, die betreffenden Probleme rational in Jacobische Gleichungen achten Grades überzuführen.

Die Jacobische Gleichung nämlich bestimmt an sich die x_0, x_1, x_2, x_3 zwar nur bis auf das Vorzeichen. Sollen aber die *Verhältnisse* $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$, unter x Funktionen vollkommen willkürlicher Größen verstanden, bei Permutation dieser Größen diejenigen Substitutionen erfahren, welche den Formeln (16) entsprechen, so müssen die x_0, x_1, x_2, x_3 es selbst tun, und das ist unmöglich, so lange die Zahl der fraglichen Permutationen nur $1 \cdot 168$ beträgt. (Denselben Schluß machte ich in einem analogen Falle in Abh. LIV, Abschnitt II, § 9, und Abschnitt III, § 11. [Siehe auch die bzw. Erörterungen in Abh. LXI, S. 485.])

Dagegen zeigt der allgemeine Ansatz des § 1, daß sich das umgekehrte Problem sehr wohl erledigen läßt: *man soll das hier definierte „Problem der x" rational auf das „Problem der y" des § 6 zurückführen.* Wie dies am einfachsten geschehen kann, werde ich nun entwickeln. Ich bediene mich dabei aus den in der Einleitung angegebenen Gründen der geometrischen Redeweise.

§ 9.

Geometrische Theorie der Jacobischen Gleichungen achten Grades.

Die x_0, x_1, x_2, x_3 des vorigen Paragraphen mögen als homogene Koordinaten eines Raumpunktes gedeutet werden. Dann stellen die Ausdrücke P, gleich Null gesetzt, acht Ebenen dar, welche die *Hauptebenen* heißen sollen. Desgleichen spreche ich von acht *Hauptpunkten*. Man erhält ihre Gleichungen, indem man diejenigen Ausdrücke gleich Null setzt, welche den P dualistisch entsprechen:

$$(17) \qquad \begin{cases} \Pi_x = -\sqrt{-7} \cdot u_0, \\ \Pi_\nu = \qquad u_0 + \sqrt{2}\,(\gamma^{6\nu} u_1 + \gamma^{3\nu} u_2 + \gamma^{5\nu} u_3). \end{cases}$$

Offenbar sind die acht Hauptpunkte den acht Hauptebenen in einer durch die linearen Substitutionen (16) unzerstörbaren Weise einzeln zugeordnet.

Diese linearen Substitutionen (16) gewinnen jetzt die Bedeutung von *Kollineationen* des Raumes. Da aber ein Zeichenwechsel aller x geometrisch ohne Bedeutung ist, so haben wir den homogenen $2 \cdot 168$ Substitutionen entsprechend doch nur $1 \cdot 168$ Kollineationen, deren Gruppe somit mit der Gruppe der Modulargleichung holoedrisch isomorph ist.

Meine ganze Betrachtung geht nun davon aus, daß vermöge der Definition der P, Π die Quadratsummen $\sum P^2$, $\sum \Pi^2$ identisch Null sind. Dies gibt auf Grund einer Schlußweise, die wohl zuerst von Paul Serret methodisch ausgebildet wurde[22]), sofort folgende beide Sätze:

Die acht Hauptpunkte sind die Grundpunkte eines Netzes von Flächen zweiter Ordnung.

Die acht Hauptebenen sind die gemeinsamen Tangentenebenen eines Gewebes von Flächen zweiter Klasse.

Die Gleichungen dieses Netzes resp. Gewebes werden äußerst einfach. In der Tat sieht man sofort, daß die Flächen zweiter Ordnung, welche durch Nullsetzen folgender Ausdrücke definiert sind:

$$(18) \quad Y_1 = \sqrt{2} \cdot x_0 x_1 - x_2^2, \quad Y_2 = \sqrt{2} \cdot x_0 x_2 - x_3^2, \quad Y_3 = \sqrt{2} \cdot x_0 x_3 - x_1^2$$

durch die acht Hauptpunkte hindurchgehen, ebenso, daß die Flächen zweiter Klasse, welche durch Nullsetzen folgender Ausdrücke dargestellt werden:

$$(19) \quad V_1 = \sqrt{2} \cdot u_0 u_1 - u_2^2, \quad V_2 = \sqrt{2} \cdot u_0 u_2 - u_3^2, \quad V_3 = \sqrt{2} \cdot u_0 u_3 - u_1^2$$

die acht Hauptebenen berühren. *Daher hat man für das Netz die Gleichung:*

$$(20) \qquad v_1 Y_1 + v_2 Y_2 + v_3 Y_3 = 0,$$

und für das Gewebe:

$$(21) \qquad y_1 V_1 + y_2 V_2 + y_3 V_3 = 0.$$

Die v_1, v_2, v_3 resp. y_1, y_2, y_3 sollen dabei Parameter bezeichnen.

Ich habe die Benennungen bereits so gewählt, daß die Zusammengehörigkeit dieser Betrachtungen mit dem Probleme des § 6 hervortritt. In der Tat ist a priori deutlich, daß sich die Ausdrücke (18) bei den $2 \cdot 168$ linearen Substitutionen der x selbst auf $1 \cdot 168$ Weisen ternär linear substituieren müssen. Denn die acht Grundpunkte des Netzes (20) werden bei den betr. 168 Kollineationen unter sich permutiert; das Netz als solches bleibt also bei den Kollineationen ungeändert; überdies ändern sich die Ausdrücke (18) bei einem simultanen Zeichenwechsel aller x nicht. Das Analoge gilt von den V_1, V_2, V_3 (19). — Die Rechnung vervollständigt diese Überlegung folgendermaßen. Man unterwerfe die x den drei Substitutionen (16); *dann findet man für die Y_1, Y_2, Y_3 genau die drei Substitutionen* (8) *des* § 6. Eine analoge Beziehung besteht natürlich zwischen den u und den V_1, V_2, V_3. *Handelt es sich also darum,*

[22]) Géométrie de direction, Paris 1869.

wie wir am Schlusse des vorigen Paragraphen verlangten, das „Problem der x“ auf das „Problem der y“, oder auch, das „Problem der u“ auf das „Problem der v“ zurückzuführen, so wird dem in einfachster Weise durch die Ausdrücke Y_1, Y_2, Y_3 (18) *oder auch die Ausdrücke* V_1, V_2, V_3 (19) *entsprochen.*

Ich will dem hier nur noch zwei Bemerkungen zufügen.

Einmal möchte ich aussprechen, daß mir mit der Aufstellung des Flächennetzes der Y und des Gewebes der V der eigentliche Ausgangspunkt zu einer prinzipiellen Behandlung der Jacobischen Gleichungen achten Grades gegeben scheint. Die Funktionen der x resp. u, welche bei den $2 \cdot 168$ linearen Substitutionen ungeändert bleiben, werden sich vermutlich decken mit den *Kombinanten* der drei quadratischen Formen Y resp. V.

Es sei ferner angegeben, welche Bedeutung unter den allgemeinen Jacobischen Gleichungen achten Grades die spezielle hat, auf welche ich in meiner Arbeit über Transformation siebenter Ordnung, § 9, die Modulargleichung reduzierte. Ersetzt man die dort gebrauchten λ, μ, ν durch y_1, y_2, y_3 und wendet auf letztere die erste der Substitutionen (8) an, so verwandeln sich die dort (a. a. O. § 9, Formel (38)) definierten A_0, A_1, A_2, A_3 in $A_0, \gamma^6 A_1, \gamma^3 A_2, \gamma^5 A_3$. Die fragliche Jacobische Gleichung gehört also zu den *kontragredienten*, und ich habe, um Übereinstimmung mit der hier gebrauchten Bezeichnungsweise herbeizuführen,

$$A_0 = u_0, \quad A_1 = \sqrt{2} \cdot u_1, \quad A_2 = \sqrt{2} \cdot u_2, \quad A_3 = \sqrt{2} \cdot u_3$$

zu setzen. Zwischen diesen u hat man dann (nach der damaligen Angabe, a. a. O. § 9, Fußnote) alle die Relationen, welche durch Nullsetzen aller dreireihigen Determinanten folgender Matrix entstehen:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_0 & -\sqrt{2} \cdot u_2 & 0 \\ u_2 & 0 & u_0 & -\sqrt{2} \cdot u_3 \\ u_3 & -\sqrt{2} \cdot u_1 & 0 & u_0 \end{vmatrix}.$$

Diese Relationen gewinnen jetzt eine einfache Bedeutung. Unter den Flächen des Gewebes:

$$y_1 V_1 + y_2 V_2 + y_3 V_3 = 0$$

gibt es ∞^1, welche in ebene Kurven ausgeartet sind; *die Ebenen dieser Kurven sind es, welche durch die vorstehenden Relationen definiert sind.* Diese Ebenen umhüllen bekanntlich eine Developpable der sechsten Klasse (welche der schon von Hesse[23]) untersuchten Kegelspitzenkurve sechster

[23]) [Crelles Journal, Bd. 49 (1853) = Werke, S. 345—404.]

Ordnung dualistisch gegenübersteht). Und die Beziehung dieser Developpablen auf die ebene Kurve vierter Ordnung $f = 0$, wie sie sich aus meiner vorigen Arbeit ergibt, ist nichts anderes als die bekannte Hessesche Abbildung. In der Tat, setzt man die nach u_0, u_1, u_2, u_3 gebildete Diskriminante von $y_1 V_1 + y_2 V_2 + y_3 V_3$ gleich Null, so kommt:

$$y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1 = f = 0\,^{24}).$$

§ 10.

Fortsetzung: Siebenwertige Funktionen der x.

Man kann fragen, welches die einfachsten Gebilde im Raume der x_0, x_1, x_2, x_3 sind, welche bei den 168 Kollineationen nur *sieben* Lagen annehmen. Durch geometrische Betrachtungen, deren Auseinandersetzung hier zu weit führen würde, habe ich gefunden, *daß es zweimal sieben lineare Komplexe der geforderten Eigenschaft gibt.* Ich will dies hier nur analytisch nachweisen. Es seien x, x' zwei Raumpunkte. So betrachte man als Koordinaten ihrer Verbindungslinie die folgenden:

$$(22) \qquad \begin{cases} a_1 = x_0 x_1' - x_0' x_1, & \sqrt{2} \cdot a_6 = x_3 x_2' - x_3' x_2, \\ a_4 = x_0 x_2' - x_0' x_2, & \sqrt{2} \cdot a_3 = x_1 x_3' - x_1' x_3, \\ a_2 = x_0 x_3' - x_0' x_3, & \sqrt{2} \cdot a_5 = x_2 x_1' - x_2' x_1. \end{cases}$$

Nun wende man auf die x, x' die Substitutionen (16) an. Da ein simultaner Zeichenwechsel aller x, x' die Größen a nicht beeinflußt, so erhält man drei lineare Substitutionen der a, welche wiederholt und zusammengesetzt nur $1 \cdot 168$ Operationen erzeugen. Aber genau zu denselben Substitutionen wird man geführt, wenn man die y_1, y_2, y_3 des § 6 den Substitutionen (8) unterwirft und zusieht, wie sich dabei die sechs Ausdrücke zweiten Grades $y_2^2, y_3^2, y_1^2, y_2 y_3, y_3 y_1, y_1 y_2$ substituieren[25]). Nun setzen sich aus letzteren die siebenwertigen c_ν linear zusammen (Formel (10)):

$$c_\nu = (\gamma^{2\nu} y_1^2 + \gamma^\nu y_2^2 + \gamma^{4\nu} y_3^2) + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} (\gamma^{6\nu} y_2 y_3 + \gamma^{3\nu} y_3 y_1 + \gamma^{5\nu} y_1 y_2).$$

[24]) [Mit den Ergebnissen von § 9 vergleiche man die Entwicklungen, welche Brioschi, bezugnehmend auf Mitteilungen meinerseits, in seiner Arbeit: „Über die Jacobische Modulargleichung vom achten Grad“ in den Math. Annalen, Bd. 15 (1879), S. 241—250 abgeleitet hat. K.]

[25]) [Der Form $y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1$ entspricht dabei genau der für die Liniengeometrie fundamentale Ausdruck $a_1 a_6 + a_4 a_3 + a_2 a_5$. K.]

Daher sind folgende zweimal sieben lineare Funktionen der a ebenfalls siebenwertig:

$$(23)\qquad C_\nu = (\gamma^\nu a_1 + \gamma^{4\nu} a_4 + \gamma^{2\nu} a_2) + \frac{-1+\sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6\nu} a_6 + \gamma^{3\nu} a_3 + \gamma^{5\nu} a_5).$$

Sie stellen, gleich Null gesetzt, die fraglichen linearen Komplexe dar.

Es scheint mir nun sehr nützlich, den Betrachtungen, die sich in der Ebene auf die c_ν beziehen, im Raume solche entgegenstellen, welche mit den C_ν operieren. Ich will dies hier nur bezüglich des § 7 ausführen. Es seien $x_0, x_1, \ldots, x_6$, wie dort, die sieben Wurzeln einer Gleichung siebenten Grades. Man bilde ferner, wie damals, drei Reihen von sieben Größen X_ν, X'_ν, X''_ν, welche den x_ν einzeln entsprechen. Sodann schreibe man die Gleichungen folgender linearer Komplexe hin:

$$\sum X_\nu C_\nu = 0, \qquad \sum X'_\nu C_\nu = 0, \qquad \sum X''_\nu C_\nu = 0$$

und suche in *Ebenenkoordinaten* u_0, u_1, u_2, u_3 die Gleichung des ihnen gemeinsamen Hyperboloids:

$$\sum \alpha_{ik} u_i u_k = 0 \text{ [26]}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung schiebe man sodann zweimal über die linke Seite der Gleichung des Flächennetzes (20):

$$v_1(\sqrt{2}\cdot x_0 x_1 - x_2^2) + v_2(\sqrt{2}\cdot x_0 x_2 - x_3^2) + v_3(\sqrt{2}\cdot x_0 x_3 - x_1^2).$$

So entsteht eine lineare Form

$$Y_1 v_1 + Y_2 v_2 + Y_3 v_3,$$

wo

$$Y_1 = \sqrt{2}\cdot\alpha_{01} - \alpha_{22}, \qquad Y_2 = \sqrt{2}\cdot\alpha_{02} - \alpha_{33}, \qquad Y_3 = \sqrt{2}\cdot\alpha_{03} - \alpha_{11},$$

und diese Y_1, Y_2, Y_3 müssen nun solche Funktionen der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung siebenten Grades sein, welche sich bei den 168 Permutationen dieser Wurzeln wie die y_1, y_2, y_3 des § 6 substituieren. — Führt man die Rechnung durch, so kommt man in der Tat zu den Schlußformeln des § 7.

§ 11.

Die allgemeinen Gleichungen achten Grades mit 168 Substitutionen.

Die einfachsten achtwertigen Ausdrücke der x sind die Quadrate der Größen P (15), zugleich die Wurzeln der Jacobischen Gleichung achten

[26] [Diese Gleichung hat Cayley in den Cambridge Transactions (1869) (= Werke, Bd. VII, S. 86—88) aufgestellt.]

Grades. Hiervon ausgehend will ich das Problem behandeln, eine *beliebige* Gleichung achten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen auf das „Problem der y" des § 6 rational zurückzuführen. Die Wurzeln der Gleichung mögen $z_\infty, z_0, z_1, \ldots, z_6$ genannt werden und den $P_\infty^2, P_0^2, P_1^2, \ldots, P_6^2$ entsprechend gesetzt sein. So bilde man zunächst die quadratische Form:

$$z_\infty P_\infty^2 + z_0 P_0^2 + z_1 P_1^2 + \ldots + z_6 P_6^2,$$

ordne nach Eintragung der Werte der P nach x_0, x_1, x_2, x_3, und stelle endlich die zugeordnete quadratische Form der u_0, u_1, u_2, u_3 auf. Ich will der Einfachheit wegen annehmen, daß $\sum z = 0$ sei, ich will ferner abkürzend schreiben:

$$p_\nu = \sum_{0,1,\ldots,6} \gamma^{\nu i} z_i.$$

Dann lautet die zugeordnete Form:

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} -8z_\infty & \sqrt{2}\cdot p_1 & \sqrt{2}\cdot p_4 & \sqrt{2}\cdot p_2 & u_0 \\ \sqrt{2}\cdot p_1 & 2p_2 & 2p_5 & 2p_3 & u_1 \\ \sqrt{2}\cdot p_4 & 2p_5 & 2p_1 & 2p_6 & u_2 \\ \sqrt{2}\cdot p_2 & 2p_3 & 2p_6 & 2p_4 & u_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = \sum \alpha_{ik} u_i u_k.$$

Diese Form schiebe man nun der Reihe nach zweimal über:

$$\sqrt{2}\cdot x_0 x_1 - x_2^2, \qquad \sqrt{2}\cdot x_0 x_2 - x_3^2, \qquad \sqrt{2}\cdot x_0 x_3 - x_1^2.$$

So kommt (wie im vorigen Paragraphen):

$$Y_1 = \sqrt{2}\cdot\alpha_{01} - \alpha_{22}, \qquad Y_2 = \sqrt{2}\cdot\alpha_{02} - \alpha_{33}, \qquad Y_3 = \sqrt{2}\cdot\alpha_{03} - \alpha_{11},$$

und diese Y_1, Y_2, Y_3 sind Funktionen der $z_\infty, z_0, \ldots, z_6$, wie wir sie suchen. Ausgerechnet ergibt sich (nach Wegwerfung eines Zahlenfaktors):

$$(25)\qquad \begin{cases} Y_1 = 2\begin{vmatrix} p_1 & p_5 & p_3 \\ p_4 & p_1 & p_6 \\ p_2 & p_6 & p_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8z_\infty & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{vmatrix}, \\ Y_2 = 2\begin{vmatrix} p_4 & p_6 & p_5 \\ p_2 & p_4 & p_3 \\ p_1 & p_3 & p_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8z_\infty & p_4 & p_1 \\ p_4 & p_1 & p_5 \\ p_1 & p_5 & p_2 \end{vmatrix}, \\ Y_3 = 2\begin{vmatrix} p_2 & p_3 & p_6 \\ p_1 & p_2 & p_5 \\ p_4 & p_5 & p_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8z_\infty & p_2 & p_4 \\ p_2 & p_4 & p_6 \\ p_4 & p_6 & p_1 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

§ 12.

Die Gleichungen 168-ten Grades mit 168 Substitutionen.

Hinsichtlich der hierher gehörigen Gleichungen 168-ten Grades will ich nur eine Bemerkung machen. Man mag bei ihnen, um Funktionen Y_1, Y_2, Y_3 zu finden, den allgemeinen Prozeß des § 1 anwenden. Als Funktion φ der Wurzeln kann man dann eine beliebige Wurzel selbst wählen: denn zwischen den 168 Wurzeln der allgemeinen hier in Betracht kommenden Gleichung bestehen keine a priori angebbaren linearen Relationen. Dann liefert uns der allgemeine Prozeß des § 1 solche Funktionen Y_1, Y_2, Y_3, *welche lineare Funktionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind.* Etwas Ähnliches tritt offenbar immer ein, wenn eine Gleichung gegeben ist, die ihre eigene Galoissche Resolvente ist, und man verlangt, diese auf ein niederes „Problem“ [d. h. mit geringerer Variabelnzahl] zurückzuführen. Das einfachste Beispiel geben die zyklischen Gleichungen; man vgl. § 3.

§ 13.

Substitutionssysteme bei $\frac{n+1}{2}$ und bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen.

Ich schließe diesen Abschnitt, indem ich zeige, daß ähnliche Substitutionssysteme, wie wir sie im Vorstehenden für $n=5$ und $n=7$ benutzten, bei beliebigem primzahligem n bestehen. Wir hatten einmal das Substitutionssystem der Jacobischen Gleichungen sechsten bzw. achten Grades; dasselbe zeigte bei $n=5$ einen holoedrischen, bei $n=7$ einen hemiedrischen Isomorphismus zur Gruppe der Modulargleichung. Wir hatten andererseits bei $n=5$ die binären Ikosaedersubstitutionen, bei $n=7$ die ternären Substitutionen des § 6, und diese Substitutionen erwiesen sich bei $n=5$ hemiedrisch, bei $n=7$ holoedrisch mit der Gruppe der Modulargleichung isomorph. Ich sage nun, *daß, unter n eine Primzahl verstanden, allemal Substitutionssysteme bei $\frac{n+1}{2}$ und bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen bestehen, welche mit der Gruppe der Modulargleichung $(n+1)$-ten Grades isomorph sind. Und zwar ist der Isomorphismus des einen Systems immer hemiedrisch, wenn der des anderen holoedrisch ist. Ob das eine oder andere eintritt, hängt davon ab, ob $n \equiv 1 \pmod{4}$ oder $\equiv 3 \pmod{4}$ ist*[27].

[27]) Daß diese Substitutionssysteme existieren, habe ich zuerst in einem an Herrn Brioschi gerichteten Briefe ausgesprochen, der in den Rendiconti del' Istituto Lombardo vom 2. Januar 1879 abgedruckt ist. [Später bin ich durch Benutzung der elliptischen Θ-Funktionen für beliebige ungerade n zu entsprechenden Substitutionen

1. Das System bei $\frac{n+1}{2}$ Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_{\frac{n-1}{2}}$ erwächst durch Wiederholung und Kombination folgender drei Operationen:

$$(26)\quad \begin{cases} 1.\quad x_k' = \varrho^{k^2} \cdot x_k, \\ 2.\quad x_k' = (-1)^{\frac{n+1}{2}} x_{\pm gk}{}^{28)}, \\ 3.\quad \begin{cases} \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} \cdot x_0' = x_0 + \sqrt{2} \cdot \sum\limits_{l=1,\ldots,\frac{n-1}{2}} x_l, \\ \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} \cdot x_k' = \sqrt{2} \cdot x_0 + \sum\limits_{l=1,\ldots,\frac{n-1}{2}} (\varrho^{2lk} + \varrho^{-2lk}) x_l \quad \left(k = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\right). \end{cases} \end{cases}$$

Hier bedeutet ϱ eine primitive n-te Einheitswurzel, g ist eine Primitivwurzel modulo n, und das doppelte Vorzeichen $\pm gk$ ist so zu verstehen, wie am Schlusse des § 3 auseinandergesetzt ist.

Zum Beweise der hinsichtlich dieses Systems aufgestellten Behauptungen genügt es, die Änderungen zu beachten, welche die Jacobischen Ausdrücke

$$(27)\quad \begin{cases} P_\infty = \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} n} \cdot x_0 \\ P_\nu = x_0 + \sqrt{2} \cdot \sum\limits_{k=1,\ldots,\frac{n-1}{2}} \varrho^{\nu k^2} \cdot x_k \end{cases}$$

bei den Operationen 1., 2., 3. erfahren.

gekommen; vgl. meine Abhandlungen „Über gewisse Teilwerte der Θ-Funktionen“ in den Math. Annalen, Bd. 17 (1880), § 3, und „Über die elliptischen Normalkurven der N-ten Ordnung und zugehörige Modulfunktionen der N-ten Stufe“ in den Abhandlungen der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 13, Nr. 4 (1885), § 18, sowie vorher in den sächsischen Berichten vom November 1884, Abschnitt II, § 4 u. 5. Diese Abhandlungen werden erst in Bd. 3 dieser Gesamtausgabe abgedruckt. Außerdem siehe meine von Fricke bearbeiteten Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Bd. II (Leipzig 1892), S. 291—296. — Für gerade n hat Hurwitz entsprechende Substitutionsgruppen in den Math. Annalen, Bd. 27 (1885/86), S. 183—233 aufgestellt; vgl. auch die genannten Vorlesungen, Bd. II, S. 297—300. K.].

[28]) [Im Grunde braucht man nur zwei Operationen (vgl. Fußnote [15]) auf S. 399). Bezeichnet man die Operation 1 mit $x' = S(x)$, die Operation 3 mit $x' = T(x)$ und die Operation 2 (eventuell nach einem gemeinsamen Zeichenwechsel der ursprünglichen Variabeln x) mit $x' = U(x)$, so gilt hier und in den folgenden Fällen:

$$U(x) = S^{g^{n-2}}\, T\, S^{g}\, T\, S^{g^{n-2}}\, T(x).]$$

Man findet nämlich:

$$\text{ad 1.}\quad P'_\nu = P_{\nu+1},$$

$$\text{ad 2.}\quad P'_{g^2\nu} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} P_\nu,$$

$$\text{ad 3.}\quad \begin{cases} P'_\infty = P_0 \\ P'_0 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} P_\infty \\ P'_\nu = \left(\frac{\nu}{n}\right)\cdot P_{-\frac{1}{\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, (n-1)). \end{cases}$$

2. Das System bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_{\frac{n-1}{2}}$ ergibt sich folgendermaßen. Ist $n \equiv 3 \pmod 4$, so kombiniere man folgende Operationen:

$$(28)\quad \begin{cases} 1. \quad y'_k = \varrho^{k^2} y_k, \\ 2. \quad y'_k = y_{\pm gk}, \\ 3. \quad \sqrt{-n}\cdot y'_k = -\sum\limits_{l=1,\ldots,\frac{n-1}{2}} \left(\frac{kl}{n}\right)(\varrho^{2kl} - \varrho^{-2kl})\, y_l. \end{cases}$$

Hier bedeutet $\left(\frac{kl}{n}\right)$ das Legendresche Zeichen. — Ist dagegen $n \equiv 1$ (mod. 4), so schreibe man einfach:

$$(29)\quad \begin{cases} 1. \quad y'_k = \varrho^{k^2} y_k, \\ 2. \quad y'_k = \pm\, y_{\pm gk}, \\ 3. \quad \sqrt{n}\cdot y'_k = \sum\limits_{l=1,\ldots,\frac{n-1}{2}} (\varrho^{2kl} - \varrho^{-2kl})\, y_l. \end{cases}$$

[Dabei ist das Vorzeichen der rechten Seite von 2. so zu nehmen, daß es mit dem für den Index gemäß der Verabredung von § 3 zu wählenden Vorzeichen übereinstimmt.]

Beidemal ergibt sich der Beweis unserer Behauptungen wieder durch Beachtung der Umänderungen, welche gewisse $(n+1)$ Funktionen bei Eintritt der Substitutionen erfahren. Dies sind im Falle (28):

$$(30)\quad \begin{cases} \delta_\infty = (-n)^{\frac{n-1}{4}}\cdot y_1 y_2 \cdots y_{\frac{n-1}{2}}, \\ \delta_\nu = -\prod\limits_{k=1,\ldots\frac{n-1}{2}} \Big(\sum\limits_{l=1,\ldots\frac{n-1}{2}} \left(\frac{kl}{n}\right)(\varrho^{2kl} - \varrho^{-2kl})\, \varrho^{l^2\nu}\cdot y_l \Big), \end{cases}$$

und ähnlich im Falle (29):

$$(31)\quad \begin{cases} \delta_\infty = n^{\frac{n-1}{4}}\cdot y_1 y_2 \cdots y_{\frac{n-1}{2}} \\ \delta_\nu = \prod\limits_{k=1,\ldots\frac{n-1}{2}} \Big(\sum\limits_{l=1,\ldots\frac{n-1}{2}} (\varrho^{2kl} - \varrho^{-2kl})\, \varrho^{l^2\nu}\cdot y_l \Big). \end{cases}$$

Man findet nämlich bei (30), den Operationen 1., 2., 3. (Formel (28)) entsprechend, folgende Permutationen:

$$\text{ad 1.}\quad \delta'_\nu = \delta_{\nu+1},$$

$$\text{ad 2.}\quad \delta'_{g^2\nu} = \delta_\nu,$$

$$\text{ad 3.}\quad \begin{cases} \delta'_\infty = \delta_0, \\ \delta'_0 = \delta_\infty, \\ \delta'_\nu = \left(\frac{\nu}{n}\right)\delta_{-\frac{1}{\nu}}, \quad (\nu = 1, 2 \ldots (n-1)) \end{cases}$$

und bei (31) sind die Formeln ganz ähnlich, nur daß an einigen Stellen rechter Hand ein Minuszeichen zutritt[29]).

Fügen wir noch hinzu, daß die so bei $\frac{n-1}{2}$ Variablen definierte Substitutionsgruppe jedenfalls dann die *kleinste* Zahl Variabler benutzt, bei denen ein Isomorphismus mit der Gruppe der Modulargleichung möglich ist, *wenn* $\frac{n-1}{2}$ *eine Primzahl ist.* Denn aus Verbindung der beiden unter 1. und 2. angegebenen Operationen erwächst bereits die „halbe" metazyklische Gruppe, mit der wir uns in § 3 beschäftigten und von der wir sahen, daß sie sich im angegebenen Falle nicht durch weniger als $\frac{n-1}{2}$ Variable darstellen läßt.

---

[29]) [Der im Text gegebene Beweis ist insofern unzureichend, als aus ihm nur folgt, daß durch Zusammensetzung der Substitutionen 1. und 3. in den Formeln (28) bzw. (29) jeweils eine Substitutionsgruppe erzeugt wird, die zur Gruppe der Vertauschungen der δ_ν isomorph ist, ohne daß aber die Stufe des Isomorphismus berücksichtigt wird. Nun sind alle diejenigen linearen Substitutionen der y, welche alle δ_ν ungeändert lassen, die folgenden:

$$(*)\qquad y'_i = \varepsilon^\lambda y_i \qquad \left(\lambda = 0, 1, \ldots; \frac{n-3}{2}\right),$$

wo ε eine primitive $\frac{n-1}{2}$-te Einheitswurzel bedeutet. Da aber bekanntlich für primzahliges n sich die Potenzen der primitiven $\frac{n-1}{2}$-ten Einheitswurzel ε außer $\varepsilon^0 = 1$ und im Falle $n \equiv 1 \pmod 4$ $\varepsilon^{\frac{n-1}{4}} = -1$ nicht als rationale, rationalzahlige Funktionen der n-ten Einheitswurzel ϱ darstellen lassen, können sich außer

$$(**)\qquad y'_i = y_i \quad \text{und im Falle } n \equiv 1 \pmod 4 \quad y'_i = -y_i$$

keine Substitutionen (*) durch Zusammensetzung der Substitutionen 1. und 3. des Textes ergeben. Von den Substitutionen (**) sind in der Tat in der aus dem System (28) entstehenden Gruppe die erste und in der aus dem System (29) entstehenden Gruppe beide enthalten.]

Abschnitt II.

Zurückführung der Gleichungen mit 168 Substitutionen auf die Modulargleichung.

§ 1.

Bedeutung der Modulargleichung für diese Probleme.

Man muß es als eine offene Frage betrachten, ob für jede Galoissche Gruppe Gleichungen mit einem *rational* vorkommenden Parameter existieren, bei denen die Permutationen der Wurzeln durch ihre Verzweigung in bezug auf diesen Parameter zustande kommen. Wenn das aber der Fall ist, so gilt es, unter allen möglichen Gleichungen dieser Art die einfachste herauszugreifen. In meiner Arbeit über elliptische Funktionen und Gleichungen fünften Grades, Abschnitt IV, § 9 stellte ich in dieser Hinsicht das Prinzip auf, daß immer diejenige Gleichung als die einfachste erachtet werden soll, *deren Galoissche Resolvente das kleinstmögliche Geschlecht hat*[30]). Von diesem Prinzip ausgehend gelangt man bei den Problemen mit 168 Substitutionen, wie ich nun zeigen werde, genau zu derjenigen Form der *Modulargleichung*, welche ich in meiner Arbeit über Transformation siebenter Ordnung entwickelt habe. Der Beweis ruht in der Betrachtung der *linearen Transformationen*, welche gewisse, auf einer Kurve vom Geschlechte p existierende *Funktionen* bei eindeutiger Transformation der Kurve in sich erfahren müssen. Hiermit ist zugleich der Zusammenhang mit den Betrachtungen des vorigen Abschnitts und der Gegensatz gegen dieselben bezeichnet. Denn allerdings haben wir es auch jetzt mit linearen Substitutionen zu tun, aber nicht mehr mit homogenen.

Ich sage zunächst, daß bei einer Gleichung mit 168 Substitutionen der hier betrachteten Art keine Galoissche Resolvente vom Geschlechte *Null* existieren kann. Denn auf den Kurven vom Geschlechte Null gibt es eine Funktion λ, welche jeden Wert nur in einem Punkte annimmt, und die sich also bei eindeutiger Transformation der Kurve in sich linear substituiert. Dagegen gibt es bekanntlich keine Gruppe von 168 (gebrochenen) linearen Substitutionen einer Variablen von der hier geforderten Beschaffenheit.

Ebensowenig kann das Geschlecht gleich *Zwei* sein. Denn bei $p=2$ setzt sich aus den zwei überhaupt vorhandenen Riemannschen φ eine Funktion $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ zusammen, welche in ihrer Art einzig ist, welche also bei jeder eindeutigen Transformation der Kurve in sich wieder linear transformiert werden muß.

[30]) In höheren Fällen wird man neben der Geschlechtszahl p die Existenz besonderer „Spezialpunktgruppen“ berücksichtigen müssen.

Die Unmöglichkeit einer Resolvente vom Geschlecht *Eins* ergibt sich folgendermaßen. Auf einer Kurve $p=1$ gibt es *ein* überall endliches Integral; dasselbe soll u genannt werden, seine beiden Perioden mögen ω_1, ω_2 heißen. Die einzigen im allgemeinen Falle möglichen eindeutigen Transformationen der Kurve in sich sind, wie bekannt, durch folgende Transformation des Integrals gegeben:

$$u' = \pm u + C;$$

nur wenn $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ bei richtiger Wahl der Perioden gleich der dritten Einheitswurzel α, oder gleich der vierten Einheitswurzel i ist, können noch Transformationen folgender Form:

$$u' = \alpha u, \quad u' = i u$$

hinzutreten. — Will man nun aus den eindeutigen Transformationen der Kurve in sich eine endliche Gruppe zusammensetzen, so hat man einfach solche Transformationen des Integrals unter den vorgenannten herauszusuchen, welche *modulo* ω_1, ω_2 etwas Endliches erzeugen. Man kann hiernach ohne weiteres alle möglichen endlichen Gruppen aufstellen und diskutieren, man sieht sofort, daß unter ihnen keine enthalten ist, die mit der hier vorliegenden Gruppe von 168 Substitutionen isomorph wäre.

Es bleibt also, als kleinstmöglicher Wert, $p=3$. Daß eine Resolvente vom Geschlechte *Drei* existiert, zeigt meine Arbeit über Transformationen siebenter Ordnung; sie zeigt zugleich, daß nur *eine* solche Resolvente existiert, das ist die Modulargleichung, wie ich sie damals formulierte. *Diese Modulargleichung erweist sich also als wahre Normalgleichung für die Probleme mit 168 Substitutionen.*

Handelt es sich jetzt darum, die allgemeinen Gleichungen mit 168 Substitutionen auf die Modulargleichung zurückzuführen, so ist dem durch die Entwicklungen der §§ 6 bis 12 des vorigen Abschnittes vorgearbeitet. Ich zeigte, daß man alle in Betracht kommenden Gleichungen auf das in § 6 definierte „Problem der y“ rational reduzieren kann. Die Modulargleichung ist nur ein spezieller Fall dieses Problems, derjenige, in welchem $f=0$ ist. Daher haben wir jetzt nur noch folgende Aufgabe vor uns: *Man soll das allgemeine Problem des § 6 auf das spezielle mit $f=0$ zurückführen.* Hiermit werde ich mich jetzt beschäftigen.

§ 2.

Zurückführung des allgemeinen Problems der y auf das spezielle.

Ich beschränke mich darauf, die sehr einfachen Prinzipien anzugeben, nach denen die gewünschte Zurückführung zweckmäßigerweise zu erfolgen hat. Dabei finde zunächst folgende Bemerkung ihre Stelle. Für die Modulargleichung gab ich in meiner zuletzt genannten Arbeit (§ 6 am Schluß) im Grunde *zwei* Formulierungen an, indem ich das eine Mal:

$$f = 0, \quad \nabla = -\sqrt[7]{\Delta}, \quad C = 12\, g_2, \quad K = 216\, g_3$$

setzte, das andere Mal nur die Verhältnisse der y ins Auge faßte und schrieb:

$$f = 0, \quad \frac{-C^3}{1728\, \nabla^7} = J. \tag{32}$$

Nur von dieser zweiten Formulierung ist im vorigen Paragraphen die Rede, und an sie werde ich mich auch im folgenden anschließen.

Dann hat man noch eine doppelte Möglichkeit. Entweder sind die y der Modulargleichung den y des ursprünglichen Problems *kogredient* — dann sollen sie y' heißen —, oder sie sind ihnen *kontragredient* — dann werde ich sie in der Folge v nennen. Dementsprechend haben wir geometrisch folgendes doppelte Problem vor uns:

Man soll einem beliebigen Punkte y_1, y_2, y_3 der Ebene in einer durch die 168 linearen Substitutionen unzerstörbaren Weise entweder einen Punkt y' der Kurve vierter Ordnung $f = 0$ oder eine Tangente v der Kurve vierter Klasse $f' = 0$ zuordnen.

Beides erledigt sich offenbar, und das ist der Kern der hier auseinanderzusetzenden Methode — folgendermaßen mit Hilfe einer [akzessorischen] Gleichung vierten Grades. Entweder man schneidet die Kurve vierter Ordnung mit der linearen Polare des Punktes y und berechnet also $y_1' : y_2' : y_3'$ aus folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} (3 y_1^2 y_2 + y_3^3)\, y_1' + (3 y_2^2 y_3 + y_1^3)\, y_2' + (3 y_3^2 y_1 + y_2^3)\, y_3' = 0, \\ y_1'^3 y_2' + y_2'^3 y_3' + y_3'^3 y_1' = 0, \end{cases} \tag{33}$$

oder man zwingt die Tangente v der Kurve vierter Klasse, durch den Punkt y *selbst* hindurchzulaufen, und hat dementsprechend die Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{cases} y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = 0, \\ v_1^3 v_2 + v_2^3 v_3 + v_3^3 v_1 = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Offenbar ist die kontragrediente Zuordnung einfacher, und es kann also keine Frage sein, daß wir die Gleichungen (34) benutzen werden.

Die Lösung des vorgelegten „Problems der y" wird jetzt folgendermaßen erfolgen können. Man eliminiere zuvörderst zwischen den Gleichungen (34) und der Gleichung:

$$\frac{-C'^3(v_1, v_2, v_3)}{1728\, \nabla'^7(v_1, v_2, v_3)} = J$$

die v_1, v_2, v_3. So erhält man eine Gleichung vierten Grades für das J, deren Koeffizienten solche ganze Funktionen der y sind, welche sich bei

den 168 linearen Substitutionen nicht ändern, also ganze Funktionen der *gegebenen* f, ∇, C, K sind. Von dieser Gleichung bestimme man eine Wurzel; sie heiße J_1. Sodann betrachte man das Gleichungssystem

$$f'(v_1, v_2, v_3) = 0,$$
$$\frac{-C'^3(v_1, v_2, v_3)}{1728\, \nabla'^7(v_1, v_2, v_3)} = J_1$$

als Modulargleichung und bestimme die Verhältnisse der $v_1 : v_2 : v_3$ etwa durch die elliptischen Formeln (44) der zuletzt genannten Arbeit[31]). Dann hat man zur Berechnung der y_1, y_2, y_3 außer den gegebenen Werten von f, ∇, C, K die Gleichung

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = 0$$

und kann somit ebensowohl ihre Verhältnisse als ihre absoluten Werte rational berechnen[32]).

---

[31]) [Hierbei sind die Perioden ω_1, ω_2 durch eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung als Funktionen von J definiert zu denken. K.]

[32]) [Für das spezielle Problem mit $f = 0$ haben Halphen in einem an mich gerichteten Brief vom 11. Juni 1884 (abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 24, S. 461 bis 464) und später Hurwitz in den Math. Annalen, Bd. 25 (1885/86), S. 117—126 die zugehörige lineare Differentialgleichung dritter Ordnung wirklich aufgestellt. Versteht man unter J dieselbe Größe wie im Text und setzt $\eta_i = y_i \frac{\nabla^8}{C^2 K}$ $(i = 1, 2, 3)$, so sind nach Hurwitz die η_i geeignete Partikularlösungen der Differentialgleichung

$$J^2 (J-1)^2 \frac{d^3 \eta}{dJ^3} + (7J - 4)\, J\, (J-1) \frac{d^2 \eta}{dJ^2} + \left[\frac{72}{7}(J^2 - J) - \frac{20}{9}(J-1) + \frac{3}{4} J\right] \frac{d\eta}{dJ}$$
$$+ \left[\frac{72 \cdot 11}{7^3}(J-1) + \frac{5}{8} + \frac{2}{63}\right] \eta = 0.$$

Im Gegensatz dazu hat für das allgemeine Problem des § 6 des Abschnittes I Herr A. Boulanger in zwei Abhandlungen im Journal de l'École Polytechnique, sér. II, cah. 4 (1898) und cah. 6 (1901) *ein System von drei partiellen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung* aufgestellt. Führt man als unabhängige Variable

$$x = \frac{\nabla^2}{f^3} \quad \text{und} \quad y = \frac{C}{f^2 \nabla}$$

ein, und setzt weiter

$$z_i = \frac{y_i \sqrt[3]{K}}{f^2} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

so genügen die z_i zunächst folgendem von Herrn R. Liouville angegebenem Systeme

$$r = Mp - Iq + \left[2(M^2 + IN) - \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial y}\right] z,$$
$$s = -Np - Mq + \left[IL - MN + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}\right] z,$$
$$t = -Lp + Nq + \left[2(N^2 + LM) - \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial x}\right] z,$$

§ 3.

Über die Notwendigkeit der benutzten Gleichung vierten Grades.

Es fragt sich nun, ob der so geschilderte Gang [falls anders man auf eine Gleichung mit nur einem Parameter zurückkommen will] noch in einem wesentlichen Punkte verbessert werden kann. Ich möchte dabei betonen, daß ich die Auflösung durch elliptische Funktionen für nebensächlich und sogar für einen Umweg halte; an ihre Stelle wird man direktere Annäherungsprozesse setzen können[33]). Dies tut der Wichtigkeit derjenigen Gleichung, welche ich immer als Modulargleichung bezeichne, keinerlei Abbruch: sie gibt die Definition der hier in Betracht kommenden *algebraischen* Fundamentalirrationalität, und wie man nun letztere numerisch berechnen will, ist eine Frage für sich.

Dagegen scheint mir, daß sich der algebraische Prozeß, welchen ich schildere, nicht noch vereinfachen läßt, und ich bringe in dieser Hinsicht

---

wo die I, L, M, N gewisse von Goursat und Painlevé herrührende Differentialinvarianten für ternäre homogene lineare Substitutionen sind. Boulanger hat nun deren Ausdrücke in x und y für die ternäre G_{168} berechnet und findet für sie mit der Abkürzung

$$H(x, y) = \frac{K^2}{f^9 \nabla} = xy^3 - 88\,xy^2 + 16\cdot 63\,x^2 y + 17\cdot 64\,xy - 256\,y + 27\cdot 64\,x^3 \\ - 128\cdot 469\,x^2 + 43\cdot 512\,x - 2048$$

folgende Werte

$$49\,H(x, y)\cdot L = 2x[-3\,xy + 81\,x^3 - 520\,x - 80]$$

$$3\cdot 49\,H(x, y)\cdot N = -2[15\,y^2 x + 2\,y(81\,x^2 - 421\,x + 60) - 4(999\,x^2 - 3788\,x + 544)]$$

$$3\cdot 49\,H(x, y)\cdot M = -\frac{2}{x}[24\,xy^3 + 6\,y^2(18\,x^2 - 543\,x - 10) + y(111\,x^2 - 12759\,x - 8261) \\ - (532943\,x^2 + 384882\,x + 51047)]$$

$$49\,H(x, y)\cdot I = \frac{2}{x^2}[3\,xy^4 + y^3(24\,x^2 - 357\,x + 10) + y^2(86691\,x^2 + 9299\,x - 544) \\ + y(80235\,x^3 + 1810251\,x^2 + 298689\,x - 10841) \\ + (741086\,x^3 + 5096436\,x^2 + 2212558\,x + 72664)].$$

Während aber für die Lösungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen Reihenentwicklungen für die Partikularlösungen und deren Konvergenzbereiche längst so genau bekannt sind, daß man, wie beim Ikosaeder, ein bestimmtes der 168 Lösungssysteme für die η_i angeben kann, fehlen, wie es scheint, entsprechende Untersuchungen für partielle lineare Differentialgleichungen, die durchweg algebraische Integrale besitzen, bisher gänzlich. Es wäre zu wünschen, diese Lücke auszufüllen. Jedenfalls besteht keine prinzipielle Schwierigkeit, dies durchzuführen. Man kann also dementsprechend das allgemeine Problem des § 6 des Abschnittes I als durch unendliche Prozesse direkt lösbar ansehen, womit sich die Entwicklungen des Abschnittes II bis zu einem gewissen Grade erübrigen. K.]

[33]) Ganz ebenso war es bei der Ikosaedergleichung (vgl. meine Arbeit über elliptische Funktionen und Gleichungen fünften Grades, Abschnitt III, § 14). [Vgl. auch den ersten Teil der Fußnote [32]) auf S. 423.]

hier noch den Beweis, *daß man die Hilfsgleichung vierten Grades zur Bestimmung von J nicht vermeiden kann.*

Die Frage kann so gestellt werden: *Ist es möglich, einem beliebigen Punkte y der Ebene in einer durch die 168 Kollineationen unzerstörbaren Weise auf unserer Kurve $f = 0$ eine Gruppe von weniger als vier beweglichen Punkten y' auf rationalem Wege zuzuordnen?* Denn ob wir hier von den Punkten y' der Kurve $f = 0$, oder ob wir von den Tangenten v der Kurve $f' = 0$ sprechen, ist offenbar für den vorliegenden Zweck gleichgültig.

Die so gestellte Frage ist nun auf Grund folgender Überlegungen zu verneinen:

1. *Dem Punkte y kann auf $f = 0$ nicht ein beweglicher Punkt y' rational zugeordnet werden.* Man denke sich $y_1 : y_2 : y_3$ irgendwie von einer Größe λ rational abhängig. Dann würde der auf $f = 0$ bewegliche Punkt y' von λ ebenfalls rational abhängen, also $f = 0$ eine rationale Kurve sein, was absurd ist.

2. *Dem Punkte y kann auf $f = 0$ nicht ein bewegliches Paar von Punkten y' rational zugeordnet werden.* Wieder denke man sich $y_1 : y_2 : y_3$ von einer Größe rational abhängig. Dann bekommt man auf $f = 0$ eine rationale, einfach unendliche Schar von Punktepaaren. Es müßte also auf $f = 0$ eine rationale Funktion geben, welche jeden Wert nur in zwei Punkten annimmt, was unmöglich ist.

3. *Dem Punkte y kann auf $f = 0$ nicht ein bewegliches Tripel von Punkten zugeordnet sein.* Um dies einzusehen, lasse man $y_1 : y_2 : y_3$ über eine gerade Linie v laufen. Dann bekommen wir auf $f = 0$ eine einfach unendliche, rationale Schar von Punktetripeln. Dementsprechend muß es eine rationale Funktion auf $f = 0$ geben, welche jeden Wert nur in den drei Punkten *eines* Tripels der Schar annimmt. Daher werden, nach einem Riemannschen Satze, die fraglichen Tripel auf $f = 0$ von geraden Linien ausgeschnitten, und zwar von solchen geraden Linien, die durch einen *festen* Punkt auf $f = 0$ hindurchlaufen. Dieser Punkt müßte fest bleiben, auch wenn sich die gerade Linie v ändert. Denn die gerade Linie hat mit ihrer ursprünglichen Lage immer einen Punkt gemein, und diesem Punkte entspricht auf $f = 0$ ein Tripel, durch welches der fragliche feste Punkt bereits definiert ist. Es müßte also auf $f = 0$ einen Punkt geben, der bei den 168 Kollineationen fest bliebe, und das ist nicht der Fall.

Die Gleichung vierten Grades ist also [für den angestrebten Zweck] in der Tat nicht zu vermeiden.

Düsseldorf, Ende März 1879.

Über Gordans Arbeiten betreffend die Probleme mit einer Gruppe von 168 Substitutionen[34]).

Gordan hat, an meine vorstehend abgedruckte Arbeit anknüpfend, den Problemen mit 168 Substitutionen eine Reihe unter sich zusammenhängender Arbeiten gewidmet[35]), die meine Überlegungen wesentlich weiter führen, deren Ergebnisse aber infolge der Menge der zwischengestreuten Einzelrechnungen bis jetzt nicht die Beachtung gefunden zu haben scheinen, welche sie verdienen. Ich schalte hier deshalb einen Bericht über seine Resultate ein, soweit sie mit meinen eigenen Entwicklungen in unmittelbarer Beziehung stehen, wobei ich indes ganz frei verfahre, indem ich nicht nur an meinen Bezeichnungen festhalte, sondern dem Stoff eine Gruppierung und den Zwischenüberlegungen eine Präzisierung zu teil werden lasse, wie sie an gegenwärtiger Stelle zweckmäßig scheinen, schließlich, indem ich in einer Hinsicht die Gordanschen Ergebnisse vereinfache.

1. Invariantentheoretische Charakterisierung der kanonischen Form $y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1$.

Die binäre Ikosaederform f_{12}, welche in kanonischer Form die Gestalt

$$x_1^{11} x_2 + 11\, x_1^6 x_2^6 - x_1 x_2^{11}$$

annimmt, wurde in Bd. 9 der Math. Annalen [Abh. LI des vorliegenden Bandes] allgemein dahin charakterisiert, daß ihre vierte Überschiebung über sich selbst identisch verschwindet: $(f,f)_4 \equiv 0$. Entsprechendes hat Gordan für die vorstehend genannte ternäre biquadratische Form

$$f(y) = a_y^4 = y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1$$

in der Weise geleistet, daß er zunächst die zugehörige Form vierter Klasse

$$\varphi = 2\,(abv)^4 = v_\varphi^4$$

und die Invariante

$$A = \frac{4}{3} f_\varphi^4 = \frac{8}{3} (abc)^4$$

bildet (ich wähle den Buchstaben A, um die Analogie mit dem Ikosaeder festzuhalten) und nun zur invariantentheoretischen Charakterisierung seiner Form die *Bedingung* aufstellt:

$$(1) \qquad f_\varphi^2 - \frac{A}{8} v_y^2 \equiv 0,$$

[34]) [Bei der Abfassung dieser Erläuterungen, insbesondere bei der Durchführung der nötigen Rechnungen, wie auch schon bei der Durcharbeitung der vorangehenden Abh. LVII für den Wiederabdruck hat mich Herr Bessel-Hagen wesentlich unterstützt. K.]

[35]) Es sind dies:

I. Math. Annalen, Bd. 17 (1880), S. 217—233: (Über das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$).

II. Math. Annalen, Bd. 17 (1880), S. 359—378: (Über die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$).

III. Math. Annalen, Bd. 19 (1881/82), S. 529—552: (Über Büschel von Kegelschnitten).

IV. Math. Annalen, Bd. 20 (1882), S. 487—514: (Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$).

V. Math. Annalen, Bd. 20 (1882), S. 515—530: (Über Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen).

VI. Math. Annalen, Bd. 25 (1885), S. 459—521: (Über Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. II.).

die für das kanonische f erfüllt ist. (Die Zahlenfaktoren bei der Definition von φ und A sind so bemessen, daß im Falle des kanonischen f

$$\varphi = v_1^3 v_2 + v_2^3 v_3 + v_3^3 v_1 \quad \text{und} \quad A = 1$$

wird.) Bemerkenswert ist das völlig symmetrische Auftreten von f und φ in der Definition von A und in der Formel (1), was zur Folge hat, daß das gesamte Formensystem von f zu sich selbst dualistisch ist. Äußerlich tritt im folgenden nur insofern eine Unsymmetrie auf, als wir den Grad der Koeffizienten unserer Formen nach den Koeffizienten in f zählen, also z. B. A vom Grade 3 in den Koeffizienten von f statt bilinear in denen von f und φ nennen.

Interessant ist dabei, wie Gordan den Beweis seiner Behauptung führt. Er beginnt damit, für irgendein f_4, welches der Relation (1) genügt, im Sinne der von ihm immer angewandten symbolischen Methoden das volle Formensystem aufzustellen (in Punkt- und Linienkoordinaten, Bd. 17, Nr. I). Er findet ein System von 54 Formen. Als Invariante tritt nur die bereits hingeschriebene[36])

$$(2) \qquad A_0^3 = \frac{4}{3} f_\varphi^4 = \frac{8}{3} (abc)^4$$

auf; die reinen Kovarianten aber reduzieren sich, wenn wir von $f_4^1(y)$ selbst absehen, auf drei, die genau wie im Falle des kanonischen f definiert sind und daher, wie in meiner vorhergehenden Abhandlung, ∇, C, K genannt werden sollen:

$$(3) \qquad \nabla_6^3 = 32 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}, \quad C_{14}^8 = 576 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \nabla_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \nabla_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \nabla_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad K_{21}^{12} = 24 \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Ich habe hier rechter Hand die partiellen Differentialquotienten irgendeiner Form F in der Weise bezeichnet, daß ich die auch sonst üblichen Abkürzungen anwandte: $F_i = \frac{1}{n}\frac{\partial F}{\partial y_i}$, $F_{ik} = \frac{1}{n(n-1)}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}$. Dabei ist zufolge der Bedingung (1) K^2 eine ganze Funktion von f, ∇, C und A. Die explizite Formel, die ich für das kanonische f nicht ausrechnete, findet sich in Bd. 17 der Math. Annalen, Nr. II, S. 371. Vgl. auch die Formel für $H(x,y)$ in Fußnote [32]), S. 424. Setzt man insbesondere, wie sofort geschehen soll, f und ∇ gleichzeitig gleich Null, so wird $K^2 = C^3$.

Neben diesen Formen nennen wir nun mit Gordan die niedersten in den v_1, v_2, v_3 linearen „Zwischenformen“:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} v_y &= \sum v_i y_i \\ p_8^4 = v_p &= \sum v_i p_i = 24 \begin{vmatrix} \nabla_1 & \nabla_2 & \nabla_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \\ q_9^5 = v_q &= \sum v_i q_i = 96 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \nabla_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \nabla_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & \nabla_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}, \\ r_{11}^7 = v_r &= \sum v_i r_i = -144 \begin{vmatrix} \nabla_{11} & \nabla_{12} & \nabla_{13} & f_1 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} & f_2 \\ \nabla_{31} & \nabla_{32} & \nabla_{33} & f_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right.$$

[36]) Wo die Buchstaben f, A, Δ, C, K, p, q, r hier und weiterhin *gleichzeitig* unten und oben beziffert sind, bedeutet der untere Index den Grad in den Variabeln y der obere Index den in den Koeffizienten von $f(y)$.

(Für $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ reduzieren sich im Falle des kanonischen f

$$p \text{ auf } v_3 y_3^8, \quad q \text{ auf } -v_2 y_3^9, \quad r \text{ auf } -v_1 y_3^{11}).$$

Die Methode ist jetzt die, daß wir von einem *Wendepunkt* ξ_1, ξ_2, ξ_3 der Kurve $f = 0$ ausgehen, so daß $f(\xi) = 0$ und $\nabla(\xi) = 0$ ist, und ein neues Koordinatensystem so einführen, daß der Wendepunkt die Ecke $v_3 = 0$ des Koordinatendreieckes abgibt, die zugehörigen $q = 0$, $r = 0$ aber die beiden anderen Ecken[37]). *Die Einführung der neuen Koordinaten geschieht gemäß den Grundregeln des symbolischen Rechnens vermöge der Identität* (in welcher die y laufende Koordinaten bedeuten sollen):

$$(5) \qquad f(y) \cdot (q r \xi)^4 = a_y^4 (q r \xi)^4 = \{a_\xi (q r y) + a_r (\xi q y) + a_q (r \xi y)\}^4.$$

Hier ist die Determinante $(q r \xi)$ als Kovariante, entsprechend ihrem Grade 21 in den ξ und 12 in den Koeffizienten von f und dem in ihr auftretenden Gliede $-\xi_3^{21}$ gleich K, $(q r \xi)^4$ also K^4, wofür wir gemäß der besonderen Annahme von ξ auch C^6 schreiben können. Als neue Koordinaten aber mögen wir vorläufig

$$(q r y) = z_1, \quad (\xi q y) = z_2, \quad (r \xi y) = z_3$$

einführen. Die Entwicklung der vierten Potenz auf der rechten Seite möge dann Glieder

$$\Omega_{\lambda \mu \nu} z_1^\lambda z_2^\mu z_3^\nu \qquad (\lambda + \mu + \nu = 4)$$

ergeben, wo die $\Omega_{\lambda \mu \nu}$ in den ξ geschriebene Kovarianten vom Grade $\lambda + 11 \mu + 9 \nu$ in den ξ und vom Grade $\frac{1}{4}(\lambda + 29 \mu + 21 \nu) = 1 + 7 \mu + 5 \nu$ in den Koeffizienten von f bedeuten. Jetzt ist das Entscheidende, daß wegen der Angabe über das volle System der Kovarianten und der besonderen Annahme $f(\xi) = 0$, $\nabla(\xi) = 0$ die $\Omega_{\lambda \mu \nu}$ ganze Verbindungen von C_{14}^8 und K_{21}^{12} sein müssen, *daß also nur solche* Ω *von Null verschieden sein können, deren Grad in den* ξ *ein Multiplum von* 7 *ist.* Die Folge ist, daß nur

$$\Omega_{310} = 4 a_\xi^3 a_r, \quad \Omega_{031} = 4 a_r^3 a_q, \quad \Omega_{103} = 4 a_q^3 a_\xi$$

von Null verschieden sind. Zugleich ergibt sich deren Grad in den ξ bzw. als 14, 42, 28, während ihr Grad in den Koeffizienten von f bzw. 8, 27, 16 beträgt. Sie sind also sämtlich von geradem Grade in den ξ und können von

$$C, \quad C^3, \quad C^2$$

nur je um einen konstanten Faktor verschieden sein, der sich bei C und C^2, wegen des Grades in den Koeffizienten von f, als rein numerisch erweist, während er bei C^3 ein Multiplum der Invariante A sein muß.

Wir haben damit $f(y)$ *in folgende Form gesetzt:*

$$(6) \qquad f(y) = \frac{c_1}{C^5} z_1^3 z_2 + \frac{c_2 A}{C^3} z_2^3 z_3 + \frac{c_3}{C^4} z_3^3 z_1,$$

womit der Übergang zu der angestrebten kanonischen Form für $f(y)$ auf der Hand liegt. Zunächst gibt die Heranziehung der kanonischen Form für $f(y)$ (für die doch alle bisherigen Entwicklungen stimmen müssen) die Zahlenfaktoren

$$c_1 = -1, \quad c_2 = +1, \quad c_3 = -1.$$

Wir wollen ferner das endgültige kanonische System der y_1^*, y_2^*, y_3^* so wählen, daß es mit den laufenden Koordinaten y_1, y_2, y_3 durch eine Substitution von der Determinante 1 zusammenhängt. Wir werden dann freilich $f(y)$, weil der Wert der Invariante A erhalten bleiben muß, nur in die Gestalt

$$(7) \qquad f(y) = f^*(y^*) \equiv \sqrt[3]{A}\,(y_1^{*3} y_2^* + y_2^{*3} y_3^* + y_3^{*3} y_1^*)$$

setzen können, wodurch eine dritte Wurzel eingeführt wird, die willkürlich gewählt werden kann. Der Vergleich ergibt, daß wir endgültig

$$(8) \qquad y_1^* = \left(\frac{A^{\frac{1}{3}}}{C}\right)^{\frac{10}{7}} \cdot \frac{z_1}{A^{\frac{2}{3}}}, \qquad y_2^* = -\left(\frac{A^{\frac{1}{3}}}{C}\right)^{\frac{5}{7}} \cdot z_2, \qquad y_3^* = -\left(\frac{A^{\frac{1}{3}}}{C}\right)^{\frac{6}{7}} \cdot \frac{z_3}{A^{\frac{1}{3}}}$$

zu setzen haben. Die dritte Wurzel in diesen Formeln ist ebenso zu wählen wie in (7). Durch die gleiche Transformation erhält $\varphi(v)$ offenbar die Gestalt

$$\varphi^*(v^*) \equiv \sqrt[3]{A^2}\,(v_1^{*3} v_2^* + v_2^{*3} v_3^* + v_3^{*3} v_1^*).$$

Damit sind wir am Ziele. Den Einwand, daß möglicherweise einige der benutzten Determinanten identisch verschwinden möchten, erledigt man dadurch, daß dies für das kanonische f, welches doch auch unter die Bedingung (1) fällt, nicht der Fall ist. Die Betrachtung besonderer Fälle aber, wo dies doch geschieht, wo also mit Ausartungen unseres f zu rechnen ist, bleibt bei Gordan unerledigt. Wichtiger für uns ist, zu bemerken, daß bei dem ganzen Beweisgange von der Gruppe der 168 Substitutionen, welche f in sich überführen, nicht die Rede war. Man wird das Vorhandensein dieser Gruppe vielmehr jetzt hinterher aus (7) ablesen. Zugleich wird es offenbar, daß unsere Aufgabe 168 Lösungen zuläßt, nachdem man sich für eine Bestimmung von $\sqrt[3]{A}$ entschieden hat. Denn zunächst stehen 24 Wendepunkte für ξ_1, ξ_2, ξ_3 zur Auswahl, und für jeden einzelnen liefern die Formeln (8) dann noch sieben verschiedene Lösungen.

Charakteristisch für die gesamte hiermit dargelegte Betrachtungsweise ist neben der formalen Aufstellung des vollen Formensystems der vorgelegten Grundform die Benutzung der in den kontragredienten Veränderlichen linearen Zwischenformen. Von dem vollen Formensystem wird schließlich nur benutzt, daß es nur *eine* Invariante A gibt, daß sich alle reinen Kovarianten bis zum 44. Grade einschließlich aus f, ∇, C, K zusammensetzen lassen, und daß es vier in den v lineare Zwischenformen gibt. — Es ist interessant, in entsprechender Form die Theorie des Ikosaeders als einer binären Form zwölfter Ordnung mit identisch verschwindender vierter Überschiebung zu entwickeln und somit die Resultate, welche in Abh. LI abgeleitet sind, in einem einheitlich geordneten, streng invariantentheoretischen, neuen Gedankengange wieder zu gewinnen. Doch würde eine genaue Ausführung dieser Aufgabenstellung an gegenwärtiger Stelle zu weit führen.

2. *Die Reduktion einer der Bedingung* (1) *genügenden ternären Form* f_4 *auf die kanonische Form vermöge des Fundamentalproblems der ternären* G_{168}.

Wir verfolgen den Gordanschen Gedankengang jetzt nach einer anderen Seite (wobei wieder die Entwicklungen der Ikosaedertheorie als Analogon herangezogen werden können, vgl. insbesondere Abschnitt I, § 5 der Abh. LIV).

Ein geeignetes f_4 wurde im vorangehenden Abschnitt dieser Bemerkungen wesentlich dadurch in die kanonische Form gesetzt, daß wir einen Wendepunkt der Kurve $f = 0$ adjungierten. Statt dessen werden wir jetzt zeigen, wie man dieselbe Aufgabe durch das *Fundamentalproblem* der ternären kanonischen Substitutionsgruppe G_{168} erledigen kann, wie es in § 6 des Abschnittes I von Abhandlung LVII formuliert wurde. Ich will dabei der Deutlichkeit halber die kanonischen Gestalten der Formen f, ∇, C, K usw. durch einen Stern f^*, ∇^*, C^*, K^* usw. unterscheiden, auch die kanonischen y_i als y_i^* bezeichnen, wie ich es schon soeben tat. Die Invariante A hat im kanonischen Falle den Wert 1, braucht also nicht besonders aufgeführt zu werden. Das Fundamentalproblem der G_{168} lautet dann so:

[37]) $p = 0$ ist nicht zu brauchen, weil es auf $v_3 = 0$ zurückführen würde; wir haben die Zwischenform p unter (4) indes mit angegeben, weil sie weiter unten benutzt wird.

Gegeben sind die Werte von $f^*(y^*), \nabla^*(y^*), C^*(y^*), K^*(y^*)$ in Übereinstimmung mit der zwischen diesen Formen bestehenden Relation, man soll die zugehörigen 168 Wertsysteme y_1^*, y_2^*, y_3^* berechnen.

Dieselben werden alle bekannt sein, wenn man, was hier als selbstverständlich gilt, die siebente Einheitswurzel $\gamma = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ als gegeben ansieht, und es übrigens gelungen ist, ein einzelnes solches Wertsystem zu berechnen. Dies aber wird, wie in Abh. LVII, bez. in der Fußnote [32]) auf S. 423 angegeben wurde, in verschiedener Weise mit transzendenten Mitteln erreicht. Gordan hat in seinen Arbeiten stets den Weg über $f = 0$ gewählt, der eine unvermeidliche akzessorische Irrationalität vom vierten Grade erfordert. Dies ist an gegenwärtiger Stelle eine unnötige Komplikation und nur historisch aus dem Bestreben zu erklären, die Auflösung mit Hilfe der elliptischen Funktionen zu bewerkstelligen. Vgl. Math. Annalen, Bd. 17, Nr. II, § 16, S. 374, 375. Wir stellen uns, um größere Einfachheit zu erzielen und das eigentliche Wesen der Sache deutlicher herauszubringen, auf den Standpunkt, daß wir das kanonische Fundamentalproblem in der allgemeinen Gestalt (mit $f^*(y^*) \neq 0$) zu lösen imstande sind, gleichgültig auf welchem Wege.

Unser neues Problem wird nun so anzufassen sein. Wir berechnen aus dem vorgegebenen f die zugehörigen ∇, C, K, wie das A, und substituieren hier für y_1, y_2, y_3 irgendwelche feste Werte η_1, η_2, η_3 des uns gegebenen Rationalitätsbereiches [38]). Wir suchen dann ein Lösungssystem η_1^*, η_2^*, η_3^* des Fundamentalproblems:

$$(9)\qquad \begin{cases} f^*(\eta^*) = f(\eta) : \sqrt[3]{A} \\ \nabla^*(\eta^*) = \nabla(\eta) : A \\ C^*(\eta^*) = C(\eta) : \sqrt[3]{A^8} \\ K^*(\eta^*) = K(\eta) : A^4 . \end{cases}$$

In der Tat befinden sich die für f^*, ∇^*, C^*, K^* vorgeschriebenen Werte in Übereinstimmung mit der für sie geforderten Relation, weil vorausgesetzt wurde, daß f der Bedingung (1) genüge.

Ist das Fundamentalproblem gelöst, so *werden wir*, wie nun zu zeigen ist, *auf rationalem Wege eine lineare Substitution der y, oder der kontragredienten v bestimmen, welche das gegebene $f(y)$ in $f^*(y^*)$ bei beliebigen laufenden Werten der y überführt.*

Für eine solche Bestimmung haben wir zunächst nur die Angabe, daß dem fest angenommenen Wertsystem η der y das bestimmte Wertsystem der η^* entsprechen muß. Wollten wir uns an die Erörterungen in § 5 des Abschnittes I von Abh. LIV halten, so würden wir ferner für eine hinreichende Zahl benachbarter Wertsysteme der y die entsprechenden benachbarten Wertsysteme der y^* berechnen. *Statt dessen wählt Gordan den eleganteren und systematischeren Weg, die linearen Zwischenformen* (4) *heranzuziehen.* Und zwar natürlich, um die Rechnung auf einfachste Weise zu erledigen, die niedersten Zwischenformen, also $\sum v_i \eta_i$, $\sum v_i p_i$, $\sum v_i q_i$ (wo wir uns in die p_i, q_i unsere rational angenommenen η_i eingesetzt denken; es ist unnötig, auf $\sum v_i r_i$ zu greifen, wie wir in Teil 1 dieser Erläuterungen nur taten, weil damals die $\eta_i = \xi_i$ einen Wendepunkt von $f = 0$ bezeichnen sollten und für diesen die p_i den ξ_i proportional werden). Die ganze Sache ist die, daß wir unter Heranholung der zu den η_i gehörigen η_i^* die Gleichungen anzuschreiben haben:

[38]) Der Rationalitätsbereich umfaßt neben der numerischen Größe γ die an die Gleichungen dritten Grades (1) geknüpften Koeffizienten von f. (Man nehme etwa $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 0$.)

$$(10)\qquad \begin{cases} \sum v_i^* \eta_i^* = \sum v_i \eta_i \\ \sum v_i^* p_i^* = \sum v_i p_i : \sqrt[3]{A^4} \\ \sum v_i^* q_i^* = \sum v_i q_i : \sqrt[3]{A^5} . \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben wir nun einfach nach v_1^*, v_2^*, v_3^* aufzulösen bzw. die Lösungen nach v_1, v_2, v_3 zu ordnen: *Wir haben dann die gesuchte Substitution (in Linienkoordinaten) ohne weiteres vor uns, und zwar so, daß ihre Determinante gleich Eins ist.*

Die Methode wird allemal zum Ziel führen, wenn wir nicht das ausgezeichnete Wertsystem der η_i zufälligerweise so angenommen haben, daß $(\eta p q)$ verschwindet, was immer vermieden werden kann. Denn $(\eta p q)$ ist als Kovariante von f nach seinem Grade in den Variabeln eine lineare Kombination von ∇^3, Cf und ∇f^3, die, wie man zeigt, nicht identisch verschwindet. (Der Vergleich der höchsten Glieder ergibt $(\eta p q) = 4Cf + 72\nabla^3$). Im übrigen hat Gordan, damit man die Gleichungen (9) und (10) klar vor sich sieht, in den Math. Annalen, Bd. 17, Nr. II, S. 371—372 die f^*, ∇^*, C^*, K^*, p^*, q^* in völlig ausgerechneter Form wirklich hingeschrieben. (Einige Druckfehler in den Indizes und Exponenten wird der Leser leicht selbst berichtigen.)

Daß die ganze Art des Vorgehens, die sich an das ternäre Fundamentalproblem der G_{168} anschließt, ein volles Äquivalent für den in Abschnitt 1 dieser Bemerkungen eingeschlagenen Weg ist, erkennen wir daraus, daß vermöge der linearen Substitution (10) sich die Wendepunkte von $f = 0$, insofern doch die Wendepunkte von $f^* = 0$ rational (nach Adjunktion von γ selbstverständlich!) bekannt sind, rational berechnen lassen. Die ganze Aufgabe aber: *ein geeignetes f in die kanonische Form zu setzen,* erscheint hiernach mit dem Fundamentalproblem der ternären G_{168} so einfach gekoppelt, daß wir sie als *implizite Form des Fundamentalproblems bezeichnen können.*

3. Die Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen und ihr ternäres Äquivalent.

Einen ersten ausgezeichneten Fall solcher Gleichungen bilden die beiden auf S. 406 dieses Bandes mitgeteilten Resolventen

$$(11)\qquad c^7 + 7\,\frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}\, f \cdot c^5 + 7\,\frac{-1 \mp \sqrt{-7}}{2}\, \nabla \cdot c^4 - 7\,(4 \mp \sqrt{-7})\, f^2 \cdot c^3 + 14\,(2 \pm \sqrt{-7})\, f \nabla \cdot c^2$$
$$- 7\left(\frac{5 \mp \sqrt{-7}}{2}\, \nabla^2 + \frac{7 \pm \sqrt{-7}}{2}\, f^3\right) \cdot c + \left(-C + \frac{131 \pm \sqrt{-7}}{2}\, f^2 \nabla\right) = 0,$$

deren Wurzeln die zweimal sieben quadratischen Formen

$$c_\nu = (\gamma^{2\nu} y_1^2 + \gamma^{\nu} y_2^2 + \gamma^{4\nu} y_3^2) + \frac{-1 - \sqrt{-7}}{2}\,(\gamma^{6\nu} y_2 y_3 + \gamma^{3\nu} y_3 y_1 + \gamma^{5\nu} y_1 y_2)\ ^{39})$$

und

$$\bar{c}_\nu = (\gamma^{2\nu} y_1^2 + \gamma^{\nu} y_2^2 + \gamma^{4\nu} y_3^2) + \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2}\,(\gamma^{6\nu} y_2 y_3 + \gamma^{3\nu} y_3 y_1 + \gamma^{5\nu} y_1 y_2)$$

sind. Um größere Symmetrie in den Rechnungen und Formeln zu erhalten, ändert Gordan die Definition dieser quadratischen Formen ein wenig ab, wobei er die Irrationalität $\sqrt{2}$ hinzuzieht und statt der Gaußschen Summen die Quadratwurzel aus ihnen einführt, was für das Wesentliche an seiner Lösungsmethode überflüssig, für die praktische Durchführung aber vorteilhaft ist.

[39]) Der Exponent der γ-Potenz, die in dem Gliede mit $y_i y_k$ vorkommt, ist das ν-fache des kleinsten positiven Restes von $(i^2 + k^2)$ nach dem Modul 7.

Indem er

$$\alpha = \frac{\sqrt{-1+\sqrt{-7}}}{\sqrt[4]{8}}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{-1-\sqrt{-7}}}{\sqrt[4]{8}} \text{ [40]}$$

setzt und zugleich die Reihenfolge in der zweiten Serie der quadratischen Formen ändert, schreibt er

$$(12) \qquad c_\nu = \alpha\,(\gamma^{2\nu} y_1^2 + \gamma^{\nu}\, y_2^2 + \gamma^{4\nu} y_3^2) + \beta\sqrt{2}\,(\gamma^{6\nu} y_2 y_3 + \gamma^{3\nu} y_3 y_1 + \gamma^{5\nu} y_1 y_2)$$

$$(\overline{12}) \qquad \bar{c}_\nu = \beta\,(\gamma^{5\nu} y_1^2 + \gamma^{6\nu} y_2^2 + \gamma^{3\nu} y_3^2) + \alpha\sqrt{2}\,(\gamma^{\nu}\, y_2 y_3 + \gamma^{4\nu} y_3 y_1 + \gamma^{2\nu} y_1 y_2) \text{ [41]}.$$

Die so definierten Formen genügen dann den Gleichungen

$$\begin{aligned}(13) \quad & c^7 - 7\sqrt{2}\,f\cdot c^5 + 7\alpha\sqrt{2}\,\nabla\cdot c^4 + \frac{7}{4}(19+\sqrt{-7})\,f^2\cdot c^3 + \frac{7\alpha}{2}(-13+\sqrt{-7})\,f\nabla\cdot c^2 \\ & - \frac{7}{4\sqrt{2}}\left((9-5\sqrt{-7})\,\nabla^2 + 4\,(7+\sqrt{-7})\,f^3\right)\cdot c \\ & + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}}\left(-(5+\sqrt{-7})\,C + 16\,(22-3\sqrt{-7})\,f^2\,\nabla\right) = 0\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}(\overline{13}) \quad & \bar{c}^7 - 7\sqrt{2}\,f\cdot\bar{c}^5 + 7\beta\sqrt{2}\,\nabla\cdot\bar{c}^4 + \frac{7}{4}(19-\sqrt{-7})\,f^2\cdot\bar{c}^3 + \frac{7\beta}{2}(-13-\sqrt{-7})\,f\nabla\cdot\bar{c}^2 \\ & - \frac{7}{4\sqrt{2}}\left((9+5\sqrt{-7})\,\nabla^2 + 4\,(7-\sqrt{-7})\,f^3\right)\cdot\bar{c} \\ & + \frac{\beta}{4\sqrt{2}}\left(-(5-\sqrt{-7})\,C + 16\,(22+3\sqrt{-7})\,f^2\,\nabla\right) = 0.\end{aligned}$$

Gordan bemerkt, daß zwischen den c_ν und den $\bar{c}_\nu$ die völlig symmetrischen linearen Beziehungen gelten

$$(14) \qquad \begin{cases} \sqrt{2}\,\bar{c}_\nu = c_{-\nu-1} + c_{-\nu-4} + c_{-\nu-2} \\ \sqrt{2}\,c_\nu = \bar{c}_{-\nu-1} + \bar{c}_{-\nu-4} + \bar{c}_{-\nu-2} \end{cases}$$

(wobei 1, 4, 2 die quadratischen Reste (mod. 7) sind), und daß in diesen der besondere Affekt der Gleichungen (13), $(\overline{13})$ in klarster Weise zum Ausdruck kommt: Es sind *Tripelgleichungen* in dem zuerst von M. Noether (Über die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Kurven vierter Ordnung — Math. Annalen, Bd. 15 (1878/79), S. 89—110) ausgesprochenen Sinne, indem eben die symmetrischen Funktionen der c_ν wie der $\bar{c}_\nu$ nebeneinander bekannt sind[42]. Und in der Tat legt Gordan

[40]) Man merke sich die Formeln

$$\alpha\beta = 1, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \alpha^2 = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2\sqrt{2}}, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \beta^2 = \frac{-1-\sqrt{-7}}{2\sqrt{2}}.$$

[41]) Daß ich die Buchstaben c_ν, $\bar{c}_\nu$ in der veränderten Bedeutung beibehalten habe, wird zu keinen Mißverständnissen führen, da sie von nun an nur in der durch (12), $(\overline{12})$ erklärten Bedeutung benutzt werden.

[42]) Die Galoissche Gruppe von 168 Vertauschungen läßt sich geradezu dadurch charakterisieren, daß sie von den 35 Tripeln, die man aus den sieben Größen c_ν bilden kann, sieben in geeigneter Weise ausgewählte untereinander permutiert. Als einfachste Funktion, die geeignet ist, den Affekt der c_ν festzulegen, ergibt sich nach Gordan

$$c_0 c_2 c_3 + c_1 c_3 c_4 + c_2 c_4 c_5 + \ldots + c_6 c_1 c_2.$$

Inzwischen ist es besser, die Gleichungen (14) als solche festzuhalten, weil aus ihnen die wechselseitige Zusammengehörigkeit der beiden Gleichungen siebenten Grades am deutlichsten hervortritt.

seiner Definition der Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen immer gleich ein Paar entsprechend verknüpfter Gleichungen zugrunde, die er so schreibt

$$(15) \qquad \begin{cases} x^7 + (2)\,x^5 + (3)\,x^4 + \ldots + (7) = 0, \\ \bar{x}^7 + (\bar{2})\,\bar{x}^5 + (\bar{3})\,\bar{x}^4 + \ldots + (\bar{7}) = 0, \end{cases}$$

wo also die Koeffizienten durch bloße eingeklammerte Ziffern gegeben sind und übrigens die Wurzeln x_ν, $\bar{x}_\nu$ durch die (14) entsprechenden Gleichungen

$$(16) \qquad \begin{cases} \sqrt{2}\,\bar{x}_\nu = x_{-\nu-1} + x_{-\nu-4} + x_{-\nu-2} \\ \sqrt{2}\,x_\nu = \bar{x}_{-\nu-1} + \bar{x}_{-\nu-4} + \bar{x}_{-\nu-2} \end{cases}$$

verbunden sein sollen. Ferner ist von vornherein angenommen $\sum x_\nu = 0$, woraus gemäß (16) sofort folgt $\sum \bar{x}_\nu = 0$. Übrigens sollen entweder die x_ν oder die $\bar{x}_\nu$ frei veränderliche Größen sein. Die Indizes der x_ν denken wir uns so gewählt, daß ihre Vertauschungen die gleichen sind, wie die durch die jeweilige ternäre Substitution der y hervorgerufenen Vertauschungen der c_ν.

Es gelingt Gordan dann der wichtige Nachweis, *daß die Koeffizienten* (2), $(\bar{2})$, (3), $(\bar{3})$, ..., (7), $(\bar{7})$ *das volle System der Affektfunktionen vorstellen*, d. h. das volle System derjenigen ganzen Funktionen der x_ν, aus welchen alle andern bei den 168 Vertauschungen der x_ν ungeändert bleibenden rationalen ganzen Funktionen sich rational und ganz zusammensetzen[43]. *Im übrigen ist dabei*

$$(2) = (\bar{2})$$

und es drücken sich (6), $(\bar{6})$, (7), $(\bar{7})$ *durch die vorangehenden Koeffizienten rational aus, wobei zwischen diesen noch eine algebraische Identität besteht, die in* (5) *und* $(\bar{5})$ *nur bis zum sechsten Grade ansteigt*[44]. Dabei bemerke man, daß die Angabe über die Affektfunktionen bei unsern ausgezeichneten Gleichungen (13), $(\overline{13})$ ohne weiteres zutrifft. Denn da die c_ν, $\bar{c}_\nu$ gerade Funktionen der y sind, wird das volle System der rationalen ganzen Funktionen der c_ν, $\bar{c}_\nu$, die bei den 168 unserer Gruppe entsprechenden Vertauschungen ungeändert bleiben, durch $f_4(y)$, $\nabla_6(y)$, $C_{14}(y)$ gebildet, und diese treten in den Koeffizienten von (13), $(\overline{13})$ ja unmittelbar hervor. Dagegen versagt im ausgezeichneten Falle die rationale Darstellung der (7), $(\bar{7})$ durch die vorhergehenden Koeffizienten. Es liegt hier kein Widerspruch zu den allgemeinen Angaben von Gordan vor, insofern die betreffenden von ihm berechneten rationalen Ausdrücke im besonderen Falle in der Gestalt $\frac{0}{0}$ erscheinen.

In dem rechnerischen Nachweis der beiden hinsichtlich unserer Gleichungen (16) angegebenen Sätze liegt eine erste Leistung der Gordanschen Arbeiten. (Vgl. Math. Annalen, Bd. 20, Nr. V, § 6, S. 528—529 und Bd. 25, Nr. VI, S. 460.) Wir werden auf die Einzelheiten dieser außerordentlich umfangreichen Rechnungen nicht eingehen, bemerken aber, daß sie von Gordan in zweierlei Form geführt werden, nämlich *ternär*, und wenn dieser Ausdruck gestattet ist, *septenär*.

[43]) Hinsichtlich des Beweises, daß für jede endliche Substitutionsgruppe ein solches System aus endlich viel Funktionen existiert, vgl. A. Hurwitz in Webers Lehrbuch der Algebra, Bd. 2, 2. Aufl., § 57, S. 225 f. und E. Noether, Math. Annalen, Bd. 77 (1915/16), S. 89—92, „Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen".

[44]) Die Frage, ob es möglich ist oder nicht, noch weiter herunterzugehen, d. h. sieben rationale, bei den 168 Permutationen ungeändert bleibende Funktionen der Wurzeln zu bilden, zwischen denen eine algebraische Relation von niederem Grade besteht, oder gar sechs unabhängige rationale ungeändert bleibende Funktionen, durch welche sich alle ungeändert bleibenden Funktionen rational ausdrücken lassen, bleibt bei Gordan unerledigt.

Bei der ternären Behandlung wird davon ausgegangen, daß man jedem Wertsystem von sieben Größen x_ν, wie es auf S. 406 meiner vorausgehenden Arbeit geschieht, eine bei den 168 Vertauschungen der x_ν und c_ν ungeändert bleibende quadratische Form der y_1, y_2, y_3 (kürzer, aber weniger genau gesagt, einen „Kegelschnitt" der y-Ebene) zuordnen kann:

$$k = \sum x_\nu c_\nu, \tag{17}$$

oder auch, was nach (14) und (16) dasselbe ist

$$k = \sum \bar{x}_\nu \bar{c}_\nu,$$

und es wird der Nachweis erbracht, daß sich das volle System der aus den x_ν zu bildenden Affektfunktionen deckt mit dem vollen System der simultanen Invarianten, die man erhält, wenn man neben den „Kegelschnitt" k die „Kurve vierter Ordnung" $f_4 = y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1$ stellt[45]). Dieser ternäre Ansatz, den Gordan in Math. Annalen, Bd. 20, Nr. IV und V verfolgt hat, bietet den Vorteil, daß man über die bekannten ternären Hilfsmittel, das Nebeneinander von Punkt- und Linienkoordinaten, die allgemeine Theorie der Kegelschnitte, überhaupt die ternäre Symbolik verfügt, also im Bereich der üblichen invariantentheoretischen Rechnungen bleibt. Bemerken wir insbesondere, daß die ternäre G_{168} durch Vertauschung der Punkt- und Linienkoordinaten

$$v_1' = y_1, \quad v_2' = y_2, \quad v_3' = y_3$$

zu einer $G_{2 \cdot 168}$ erweitert werden kann. Überträgt man nun die Gleichungen der Kegelschnitte $c_\nu = 0$, $\bar{c}_\nu = 0$ in Linienkoordinaten, so kommt man auf die Formen

$$\left\{\begin{aligned} C_\nu &= \beta(\gamma^{5\nu} v_1^2 + \gamma^{6\nu} v_2^2 + \gamma^{3\nu} v_3^2) + \alpha\sqrt{2}(\gamma^{\nu}\, v_2 v_3 + \gamma^{4\nu} v_3 v_1 + \gamma^{2\nu} v_1 v_2) \\ \overline{C}_\nu &= \alpha(\gamma^{2\nu} v_1^2 + \gamma^{\nu}\, v_2^2 + \gamma^{4\nu} v_3^2) + \beta\sqrt{2}(\gamma^{6\nu} v_2 v_3 + \gamma^{3\nu} v_3 v_1 + \gamma^{5\nu} v_1 v_2), \end{aligned}\right. \tag{18}$$

wodurch ersichtlich wird, daß bei der genannten Korrelation $v' = y$ sich einfach die beiden Reihen von Kegelschnitten (12), $(\overline{12})$ vertauschen. Ebenso vertauschen sich die „Kurve vierter Ordnung" f_4 und die „Kurve vierter Klasse" φ_4 untereinander usw., so daß die ganze Entwicklung einen hohen Grad von Symmetrie erhält. — Hierdurch ist die ternäre Behandlung unserer Gleichungen siebenten Grades angebahnt.

4. *Die Auflösung unserer Gleichungen siebenten Grades mit Hilfe des Fundamentalproblems der G_{168}.*

Ich werde nunmehr skizzieren, wie man in Anlehnung an die Gordanschen Ideen die Zurückführung unserer Gleichungen siebenten Grades auf das ternäre Fundamentalproblem der G_{168} und umgekehrt die Darstellung der Gleichungswurzeln durch die Lösungen desselben in verhältnismäßig einfacher Form wirklich durchführen kann. In § 7 meiner vorangehenden Abhandlung ist eine Methode angegeben, *wie man einem Wertsystem der x_ν einen „Punkt" Y_1, Y_2, Y_3 in der Weise zuordnen kann, daß die Y die 168 ternären linearen Substitutionen erleiden, wenn man die x_ν ihren 168 Permutationen unterwirft.* An Stelle dieses Prozesses werden wir in Anlehnung an Gordan einen anderen setzen, der hier kurz „Gordanprozeß" genannt werden möge, nur daß wir Punkt- und Linienkoordinaten gegenüber Gordan vertauschen. A_y^2, b_y^2, c_y^2 sollen die Symbole dreier „Kegelschnitte" sein, deren Koeffizienten in der Weise von den Wurzeln der Gleichungen siebenten Grades abhängen, daß die Formen bei gleichzeitiger Ausübung der ternären linearen Substitutionen auf die y und der entsprechenden Permutationen auf die x ungeändert bleiben (kurz ausgedrückt: „kovariante Kegelschnitte"), während v_φ^4, wie oben, die „Kurve vierter

[45]) Vgl. wieder das Analogon, welches bei der Ikosaedertheorie im Problem der A liegt. Dort wird zu der binären quadratischen Form $A_1 z_1^2 + 2A_0 z_1 z_2 - A_2 z_2^2$ die binäre Ikosaederform zwölften Grades hinzugenommen.

Klasse" $v_1^3 v_2 + v_2^3 v_3 + v_3^3 v_1$ bedeutet. Dann bilden wir, in Anlehnung an Gordan, die lineare Kontravariante

$$v_1 Y_1 + v_2 Y_2 + v_3 Y_3 = v_Y = A_\varphi^2\, b_\varphi\, c_\varphi\, (b\,c\,v). \tag{19}$$

(Vgl. Math. Annalen, Bd. 19, Nr. III, S. 551, Formeln (1a) bis (1c) und Bd. 20, Nr. IV, S. 503, letzte Formel.) Schreibt man die Ausdrücke A_y^2, b_y^2, c_y^2, wie es sich hernach als zweckmäßig erweisen wird, in der Form an

$$\left\{\begin{aligned} A_y^2 &= (q_2 y_1^2 + q_1 y_2^2 + q_4 y_3^2) + \sqrt{2}(q_6 y_2 y_3 + q_3 y_3 y_1 + q_5 y_1 y_2) \\ b_y^2 &= (q_2' y_1^2 + q_1' y_2^2 + q_4' y_3^2) + \sqrt{2}(q_6' y_2 y_3 + q_3' y_3 y_1 + q_5' y_1 y_2) \\ c_y^2 &= (q_2'' y_1^2 + q_1'' y_2^2 + q_4'' y_3^2) + \sqrt{2}(q_6'' y_2 y_3 + q_3'' y_3 y_1 + q_5'' y_1 y_2) \end{aligned}\right. \tag{20}$$

und setzt der Kürze halber vorübergehend $(i, k) = q_i' q_k'' - q_k' q_i''$, so ergibt sich nach (19)

$$\begin{aligned} 4\,Y_1 = {} & q_2\left[\frac{1}{2}\cdot(5,6) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(1,3)\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\,q_5\cdot(5,3) \\ & + q_1\cdot(1,4) \qquad\qquad\qquad\qquad + \quad q_6\cdot(1,6) \\ & + q_4\left[\frac{1}{2}\cdot(6,3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(5,4)\right] + \quad q_3\cdot(6,4), \end{aligned} \tag{21}$$

und Y_2 bzw. Y_3 gehen hieraus hervor, indem man rechterhand die Indizes von q, q', q'' vervierfacht bzw. verdoppelt. Aus (21) geht hervor, daß A_y^2 mit b_y^2 oder c_y^2 identisch genommen werden darf, ohne daß darum Y_1, Y_2, Y_3 identisch verschwinden, während das Gleichsetzen von b_y^2 und c_y^2 identisch Null liefert.

Um diesen Prozeß in möglichst zweckmäßiger Weise anzuwenden, werden wir nach den niedrigsten „kovarianten Kegelschnitten" suchen. Als erster solcher bietet sich uns unmittelbar dar

$$k = \sum x_\nu c_\nu = \sum \bar{x}_\nu \bar{c}_\nu.$$

Führen wir die mit geeigneten Faktoren versehenen Lagrangeschen Ausdrücke ein:

$$\left\{\begin{array}{lll} p_1 = \alpha\sum \gamma^{\nu}\, x_\nu & p_4 = \alpha\sum \gamma^{4\nu} x_\nu & p_2 = \alpha\sum \gamma^{2\nu} x_\nu \\ p_6 = \beta\sum \gamma^{6\nu} x_\nu & p_3 = \beta\sum \gamma^{3\nu} x_\nu & p_5 = \beta\sum \gamma^{5\nu} x_\nu \text{ [46])}, \end{array}\right. \tag{22}$$

so erhält k die (den Formeln (20) entsprechende) Gestalt

$$k = (p_2 y_1^2 + p_1 y_2^2 + p_4 y_3^2) + \sqrt{2}(p_6 y_2 y_3 + p_3 y_3 y_1 + p_5 y_1 y_2).$$

In entsprechender Weise haben wir in $\sum x_\nu C_\nu = \sum \bar{x}_\nu \overline{C}_\nu$ einen „kovarianten Klassenkegelschnitt" vor uns, den wir in Punktkoordinaten umsetzen mögen, er heiße dann k'. Schließlich bilden wir die beiden Formen $\sum x_\nu^2 c_\nu$ und $\sum \bar{x}_\nu^2 \bar{c}_\nu$, von denen sich zeigt, daß sie lineare Kombinationen von k' und einem weiteren kovarianten Kegelschnitt k'' sind, nämlich bis auf einen Zahlenfaktor

$$\sum x_\nu^2 c_\nu = \beta k' + \alpha k''$$

$$\sum \bar{x}_\nu^2 \bar{c}_\nu = \alpha k' + \beta k''.$$

Wenn wir k' und k'' wieder in der Form

$$\begin{aligned} k' &= (p_2' y_1^2 + p_1' y_2^2 + p_4' y_3^2) + \sqrt{2}(p_6' y_2 y_3 + p_3' y_3 y_1 + p_5' y_1 y_2) \\ k'' &= (p_2'' y_1^2 + p_1'' y_2^2 + p_4'' y_3^2) + \sqrt{2}(p_6'' y_2 y_3 + p_3'' y_3 y_1 + p_5'' y_1 y_2) \end{aligned}$$

[46]) Die volle Symmetrie der Gleichungen (15) gibt sich auch darin kund, daß sich aus den *beiden* Wurzelsystemen x_ν, $\bar{x}_\nu$ nur *ein* System von modifizierten Lagrangeschen Ausdrücken ergibt. Setzt man nämlich analog

$$\bar{p}_1 = \alpha\sum \gamma^\nu \bar{x}_\nu, \;\ldots,\; \bar{p}_5 = \beta\sum \gamma^{5\nu} \bar{x}_\nu,$$

so zeigt sich, daß für jeden Index i (mod. 7) $p_i = \bar{p}_{-i}$ gilt.

schreiben, so haben die Koeffizienten p', p'' die Werte

$$\begin{array}{ll}
p_1' = p_3 p_5 - \frac{1}{2} p_4^2 & p_1'' = \frac{1}{\sqrt{2}} p_3 p_5 - p_6 p_2 \\
p_4' = p_5 p_6 - \frac{1}{2} p_2^2 & p_4'' = \frac{1}{\sqrt{2}} p_5 p_6 - p_3 p_1 \\
p_2' = p_6 p_3 - \frac{1}{2} p_1^2 & p_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}} p_6 p_3 - p_5 p_4 \\
p_6' = \frac{1}{\sqrt{2}} p_4 p_2 - p_1 p_5 & p_6'' = p_4 p_2 - \frac{1}{2} p_3^2 \\
p_3' = \frac{1}{\sqrt{2}} p_2 p_1 - p_4 p_6 & p_3'' = p_2 p_1 - \frac{1}{2} p_5^2 \\
p_5' = \frac{1}{\sqrt{2}} p_1 p_4 - p_2 p_3 & p_5'' = p_1 p_4 - \frac{1}{2} p_6^2 .
\end{array}$$

Es entsteht also p_i'' aus p'_{-i}, indem rechterhand alle p_ν durch $p_{-\nu}$ ersetzt werden.

Nun sind in (19) für A_y^2, b_y^2, c_y^2 die Formen k, k', k'' in irgendeiner Reihenfolge und eventuell Vielfachheit einzutragen, d. h. in (21) die Größenreihen q_i, q_i', q_i'' durch die Größenreihen p_i, p_i', p_i'' in der betreffenden Reihenfolge und Vielfachheit zu ersetzen. Die wirkliche rechnerische Durchführung liefert folgendes Ergebnis: Die Formel (21) ergibt

1. mit $A_y^2 = b_y^2 = k,\quad c_y^2 = k''$ (also $q_i = q_i' = p_i,\ q_i'' = p_i''$)
   einen „Punkt" Y_1', Y_2', Y_3', der in den p vom vierten Grade ist und sich aus 18 Gliedern zusammensetzt,
2. mit $A_y^2 = b_y^2 = k',\quad c_y^2 = k$ (also $q_i = q_i' = p_i',\ q_i'' = p_i$)
   einen „Punkt" Y_1'', Y_2'', Y_3'', der in den p vom fünften Grade ist und sich aus 30 Gliedern zusammensetzt,
3. mit $A_y^2 = k',\quad b_y^2 = k,\quad c_y^2 = k''$ (also $q_i = p_i',\ q_i' = p_i,\ q_i'' = p_i''$)
   einen „Punkt" Y_1''', Y_2''', Y_3''', der in den p vom fünften Grade ist und sich gleichfalls aus 30 Gliedern zusammensetzt[47]),

(zugleich wird ersichtlich, daß die drei „Punkte" Y', Y'', Y''' linear unabhängig sind) während die beiden zu 1. und 2. parallelen Ansätze

4. $A_y^2 = b_y^2 = k,\quad c_y^2 = k'$ (also $q_i = q_i' = p_i,\ q_i'' = p_i'$)

und

5. $A_y^2 = b_y^2 = k'',\ c_y^2 = k$ (also $q_i = q_i' = p_i'',\ q_i'' = p_i$)

identisch Null für alle drei Koordinaten Y liefern.

Die drei so gewonnenen kovarianten „Punkte", die also in den Wurzeln der Gleichungen (15) *bzw. den Grad* 4, 5, 5 *haben, lege man als Eckpunkte eines neuen Koordinatensystems zugrunde, in der Weise, daß man der Determinante der Übergangssubstitution von vornherein den Wert* 1 *erteilt,* was ohne weiteres möglich ist, da die Determinante (Y', Y'', Y''') als Affektfunktion rational bekannt ist. *In diesem neuen Koordinatensysteme drücke man nun einerseits das kanonische* $f_4^* = y_1^{*3} y_2^* + y_2^{*3} y_3^* + y_3^{*3} y_1^*$,

[47]) Diesen „Punkt" erhält man auch, wenn man den Prozeß aus § 7 meiner vorangehenden Abhandlung auf k, k', k'' anwendet.

andererseits die quadratische Form $k = \sum x_\nu c_\nu(y^*) = \sum \bar{x}_\nu \bar{c}_\nu(y^*)$ *aus. Das Resultat dieser Rechnung heiße* $\mathfrak{f}(z)$ *und* $\mathfrak{k}(z)$. *Die Koeffizienten von* $\mathfrak{f}(z)$ *und* $\mathfrak{k}(z)$ *in dieser neuen Darstellung* werden dann offenbar solche rationalen Funktionen der Gleichungswurzeln x_ν sein, die bei den 168 Permutationen ungeändert bleiben, und *lassen sich* folglich nach Gordans Hauptsatz *als rationale Funktionen unserer Gleichungskoeffizienten* (i), $(\bar{i})$ *berechnen*, was im einzelnen durchzuführen bleibt.

Gordan selbst hat der „typischen Darstellung" von f_4 und k ein weniger günstiges Dreieck zugrunde gelegt, dessen Ecken Koordinaten haben, die in den x_ν bis zum Grade 6, 7, 7 ansteigen. Das ist dadurch zu erklären, daß er nicht von vornherein die Gleichungen siebenten Grades zur Bildung kovarianter Kegelschnitte heranzog, sondern, wie es seiner Natur mehr lag, zuerst das System der gemeinsamen invarianten Bildungen der ternären Form f_4 mit einem Kegelschnitt für sich studierte und so nur solche quadratischen Formen zur Verfügung hatte, die sich in dem genannten System vorfanden. Im übrigen hat er für sein Koordinatensystem die gewaltige rechnerische Arbeit der typischen Darstellung von f_4 und k restlos durchgeführt. (Math. Annalen, Bd. 20, Nr. IV, S. 509.)

Ist die Darstellung der Koeffizienten von $\mathfrak{f}(z)$ und $\mathfrak{k}(z)$ durch die (i), $(\bar{i})$ geschehen, so haben wir unmittelbar Anschluß an die Entwicklungen des zweiten Teiles dieser Bemerkungen, d. h. an das *implizite Fundamentalproblem. Wir werden* nach der dort entwickelten Methode *eine lineare Substitution suchen, welche* $\mathfrak{f}(z)$ *in das kanonische* $f^*(y^*)$ *zurückverwandelt.* Die in Abschnitt 2 gegebenen Formeln vereinfachen sich sogar noch etwas, weil wir $\mathfrak{f}$ von vornherein so eingerichtet haben, daß seine Invariante A gleich 1 ist. *Gleichzeitig aber verwandelt sich* $\mathfrak{k}(z)$ *in einen Kegelschnitt der y-Ebene, von dem wir wissen, daß er mit*

$$k = \sum x_\nu c_\nu = \sum \bar{x}_\nu \bar{c}_\nu = (p_2 y_1^{*2} + p_1 y_2^{*2} + p_4 y_3^{*2}) + \sqrt{2}\,(p_6 y_2^* y_3^* + p_3 y_3^* y_1^* + p_5 y_1^* y_2^*)$$

übereinstimmen muß, so daß die Werte der p_i *unmittelbar abzulesen sind.* Die Wurzeln x_ν, $\bar{x}_\nu$ unserer Gleichungen ergeben sich dann durch die Umkehrung der Gleichungen (22), nämlich

$$(22)\qquad \begin{cases} 7\,x_\nu = \beta\,(\gamma^{6\nu} p_1 + \gamma^{3\nu} p_4 + \gamma^{5\nu} p_2) + \alpha\,(\gamma^{\nu}\ p_6 + \gamma^{4\nu} p_3 + \gamma^{2\nu} p_5) \\ 7\,\bar{x}_\nu = \alpha\,(\gamma^{\nu}\ p_1 + \gamma^{4\nu} p_4 + \gamma^{2\nu} p_2) + \beta\,(\gamma^{6\nu} p_6 + \gamma^{3\nu} p_3 + \gamma^{5\nu} p_5). \end{cases}$$

Unsere Gleichungen siebenten Grades sind demnach mit Hilfe des impliziten Fundamentalproblems aufgelöst, womit das Ziel, das wir uns steckten, erreicht ist. Nicht nur ist die Auflösung der Gleichungen siebenten Grades auf das ternäre Fundamentalproblem zurückgeführt, sondern es ist auch die Umkehr geleistet und die Wurzeln sind mit Hilfe der Lösungen des Fundamentalproblems wirklich angebbar. Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, daß Gordan die Methode nicht nur im Prinzip herleitet, sondern alle Rechnungen bis zu expliziten Endformeln wirklich durchführt; und dies gilt auch hinsichtlich des von uns nicht befolgten Teiles seines Weges, der weiteren Reduktion auf das Fundamentalproblem mit $f = 0$ vermöge einer akzessorischen biquadratischen Irrationalität.

Es bleibt noch übrig, einige Bemerkungen über die in der letzten der unseren Gegenstand betreffenden Gordanschen Arbeiten (Math. Annalen, Bd. 25, Nr. VI) gegebene septenäre Darstellung anzuschließen. Hier stellt sich Gordan das Ziel, für solche Leser, denen die invariantentheoretischen symbolischen Methoden nicht geläufig sind, eine Darstellung seiner Theorie zu geben, „bei welcher nur die elementaren Prozesse der gewöhnlichen Gleichungstheorie zur Verwendung kommen sollen" und „bei welcher jede Spur von dem Wege, auf welchem ich die Resultate gefunden habe, verwischt ist". Den Beweis seines Satzes über die Affektfunktionen erreicht er in der Tat durch eine ganz elementare konstruktive Methode, die derjenigen nahesteht, welche zum Beweise des bekannten Satzes über die elementarsymmetrischen Funktionen angewandt wird. Freilich werden die Formeln viel komplizierter, und so gibt

Gordan die Resultate zahlreicher Zwischenrechnungen nur in Formeltabellen an, die sich über mehrere Seiten erstrecken. An Stelle der Reduktion auf das ternäre Fundamentalproblem tritt die Reduktion auf „ausgezeichnete“ bzw. „kanonische“ Gleichungen siebenten Grades, das sind Gleichungen, deren Wurzeln sich in die Form (12) oder $(\overline{12})$ setzen lassen, wozu bei den „kanonischen“ Gleichungen noch die Bedingung $y_1^3 y_2 + y_2^3 y_3 + y_3^3 y_1 = 0$ hinzutritt; diese speziellen Gleichungen werden hier nicht ternär, sondern durch Relationen zwischen den Wurzeln und Koeffizienten charakterisiert. Zuletzt wird die Reduktion in die übliche Form der Tschirnhausen-Transformation gesetzt. Dieser Teil der Arbeit ist zwar Schritt für Schritt leicht verständlich, aber vergeblich fragt der Leser, warum dieser Weg eingeschlagen wird, wenn er nicht auf die ternären Gedankenbildungen zurückgreift, von denen am Ende doch nicht jede Spur verwischt ist. Und vor allem, was die Krönung der fünf vorangehenden Abhandlungen bildete, die Umkehrung der Reduktion und endgültige Berechnung der Gleichungswurzeln, fehlt hier vollständig, ohne daß darüber ein Wort verloren wird. So können wir leider, sowohl hinsichtlich der Verständlichkeit, wie auch hinsichtlich der erreichten Resultate, diese letzte Arbeit nicht als wesentlichen Fortschritt gegenüber den früheren auffassen. Sie ist charakteristisch für Gordans Arbeitsmethode in jener Epoche, und wir mögen eine in diesem Sinne lautende Äußerung M. Noethers aus seinem Nachruf auf Gordan (Math. Annalen, Bd. 75 (1913/14), S. 27) hierhersetzen: „Gordan pflegte einen Gedankenhöhenweg in kleine Abschnitte zu teilen, jeden einzeln rechnerisch nach allen Seiten weit zu verfolgen und möglichst ebene Durchstiche zu schlagen, um so vielleicht zuletzt zu einem geradesten Weg zu gelangen. Die Darstellung, die als synthetische noch den Weg rückwärts zu durchlaufen hatte, konnte dann überraschend einfach erscheinen.“ K.]

LVIII. Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades.

[Math. Annalen, Bd. 28 (1886/87).]

Die Theorie der Gleichungen fünften Grades, die ich in meinen „*Vorlesungen über das Ikosaeder usw.*“ (Teubner 1884) zu zusammenhängender Darstellung gebracht habe, gestattet nicht nur, wie ich ebenda an verschiedenen Stellen andeutete, eine Übertragung auf Gleichungen vierten Grades[1]), sondern ebensowohl eine Ausdehnung auf [allgemeine] Gleichungen sechsten und siebenten Grades. Es ist der Zweck der nachstehenden Zeilen, diese Ausdehnung in ihren Grundzügen festzulegen. Dieselbe subsumiert sich ihrem Zielpunkte nach unter die allgemeinen Ideen, welche ich in den Math. Annalen, Bd. 15 (1879) [vgl. die vorstehend abgedruckte Abh. LVII] für die Auflösung beliebiger algebraischer Gleichungen aufgestellt habe[2]). Sie unterscheidet sich aber von ihnen durch die konkrete

[1]) Vgl. die Noten zu S. 188, 256—257, sowie S. 260. — Die Theorie der Gleichungen dritten Grades, welche ich in meinem „Ikosaederbuch“ ebenfalls mehrfach berühre, kommt bei den nun im Texte zu entwickelnden Verhältnissen als zu einfach nicht in Vergleich.

[2]) Siehe insbesondere [S. 392—397] daselbst, sowie die Bemerkung über Gleichungen sechsten Grades auf S. 126 meines „Ikosaederbuches“. — Ich habe in meinen Seminaren auch verschiedentlich versucht, die Auflösung der Gleichungen sechsten Grades mit der Zweiteilung der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlechte Zwei und insbesondere der Theorie der aus ihr erwachsenden sog. Borchardtschen Moduln in Verbindung zu bringen. Man vgl. wegen der letzteren Entwicklungen, die jetzt im Texte unberührt bleiben, Reichardt in den sächsischen Berichten von 1885 (*Ein Beitrag zur Theorie der Gleichungen sechsten Grades*) sowie in den Math. Annalen, Bd. 28 (1886/87) (*Über die Normierung der Borchardtschen Moduln der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlechte $p = 2$*), ferner Cole im 8. Bande des American Journal (1886) (*A Contribution to the Theory of the General Equation of the Sixth Degree*). [Ich definiere die „Borchardtschen Moduln“ von der Liniengeometrie aus, nämlich als die auf ein Fundamentaltetraeder bezogenen Punktkoordinaten eines Knotenpunktes der Kummerschen Fläche, welche gemeinsame Singularitätenfläche der durch die Gleichungen:

$$\sum_1^6 x_i^2 = 0, \qquad \sum_1^6 \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0$$

Form des zu benutzenden geometrisch-algebraischen Prozesses, der individuelle, nur bei $n = 6$ und $n = 7$ vorliegende Momente benutzt.

Die in Aussicht genommene Entwicklung spaltet sich dem Wesen der Sache entsprechend in drei Teile: die Problemstellung, die Konstruktion gewisser endlicher Gruppen quaternärer linearer Substitutionen, die Reduktion der Gleichungen sechsten und siebenten Grades auf die diesen Gruppen zugehörigen Gleichungssysteme. Ich nehme dabei überall auf die für die Gleichungen vierten und fünften Grades geltenden Überlegungen Bezug; auch halte ich, wie in meinem „Ikosaederbuch", [vgl. auch meine Ikosaederarbeit in den Math. Annalen;, Bd. 12 (1877) = Abh. LIV] daran fest, die in Betracht kommenden algebraischen Prozesse durch geometrische Konstruktionen einzuleiten. In der Tat ist zunächst meine Absicht, meinen eigenen Gedankengang genau so darzulegen, wie er mich zu den in Betracht kommenden Resultaten geführt hat; es mag späteren Darstellungen vorbehalten bleiben, diese Resultate, die ihrer Natur nach rein algebraisch sind, auf rein algebraischem Wege zu entwickeln.

Hierzu noch eine kleine Bemerkung. Das Attribut „allgemein", welches ich in der Überschrift den zu untersuchenden Gleichungen sechsten und siebenten Grades beilege, soll sich darauf beziehen, daß die genannten Gleichungen keinen besonderen Affekt zu besitzen brauchen, ihre Gruppe also so umfassend vorausgesetzt wird, wie möglich. Es wird, wie ich hoffe, kein Mißverständnis erzeugen, wenn ich des weiteren im Texte das Wort „allgemein" gelegentlich in anderer Bedeutung gebrauche, indem ich nämlich Gleichungen allgemein nenne, deren Wurzeln freiveränderliche Größen sind.

---

gegebenen „konfokalen" Schar von Linienkomplexen zweiten Grades ist. Vgl. dazu die Abh. II in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe; vgl. ferner die zusammenfassende Darstellung der ganzen Theorie, welche Reichardt in Anknüpfung an meine Seminarvorträge von 1885/86 in seiner Leipziger Dissertation gegeben hat (*Über die Darstellung der Kummerschen Fläche durch hyperelliptische Funktionen*, Nova Acta Leopoldina, I, Halle 1887). Vertauscht man die Linienkoordinaten x_i auf alle Weisen und kombiniert damit beliebige Vorzeichenwechsel der x_i (wie dies beiläufig schon in Abh. L geschehen ist), so erhält man eine Gruppe von 11520 Kollineationen und ebenso vielen dualistischen Transformationen des dreidimensionalen Raumes. Die so entstehende quaternäre Kollineationsgruppe nenne ich die Gruppe der Borchardtschen Moduln; ihr volles Formensystem hat in der Folge Maschke aufgestellt (Bd. 30 der Math. Annalen, 1887/88). Cole hat sich a. a. O. damit beschäftigt, eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung aufzustellen, der die Borchardtschen Moduln in bezug auf einen Koeffizienten der Gleichung sechsten Grades genügen, deren Wurzeln die k_i sind. Wegen weiterer hierher gehöriger Literatur siehe die Nr. 22 des bereits oben (S. 261) genannten Enzyklopädieartikels von Wiman. Meine endgültige Auffassung, daß man das hier vorliegende transzendente Problem ohne den Umweg über die Borchardtschen Moduln direkt mit den hyperelliptischen Funktionen lösen kann, hat Burkhardt in den Math. Annalen, Bd. 35 (1889/90), S. 277/278, dargestellt. K.]

I. Die Problemstellung.

§ 1.

Rückblick auf die Gleichungen vierten und fünften Grades.

Der Ausgangspunkt für die in meinem „Ikosaederbuch" gegebene Untersuchung der Gleichungen vierten und fünften Grades ruht in einer geometrischen Diskussion desjenigen Gebildes, welches durch die beiden Gleichungen:

$$(1) \qquad \sum_{0}^{n-1} x_\varkappa = 0, \qquad \sum_{0}^{n-1} x_\varkappa^2 = 0$$

dargestellt wird, wo n, je nachdem, gleich 4 oder gleich 5 zu nehmen sein wird. Um eine möglichst bequeme Ausdrucksweise zu haben, deuten wir, der ersten dieser beiden Gleichungen entsprechend, die Größen x als Vierseits-Koordinaten in der Ebene, bez. als Fünfflach-Koordinaten im Raume. Wir haben dann, vermöge der zweiten Gleichung, das eine Mal einen ausgezeichneten Kegelschnitt, das andere Mal eine Fläche zweiten Grades (die „Hauptfläche") vor uns, die es jetzt näher zu betrachten gilt.

Ich werde dies hier zunächst für die Gleichungen fünften Grades ausführen. Bei ihnen richtet sich die Aufmerksamkeit darauf, daß die Fläche (1) zwei Scharen geradliniger Erzeugender trägt. Wir bemerken, daß die einzelne dieser Scharen eine rationale Mannigfaltigkeit ist, und daß wir also die ihr angehörigen Erzeugenden durch die Werte eines Parameters z eindeutig bezeichnen können; dieses z ersetzen wir mit Rücksicht auf die späteren Verallgemeinerungen durch den Quotienten zweier Verhältnisgrößen:

$$(2) \qquad z = z_1 : z_2.$$

Wir betrachten jetzt diejenigen Raumkollineationen, die den Vertauschungen der $x_0, \ldots, x_{n-1}$ entsprechen, und erkennen, daß die Hauptfläche selbst bei allen diesen 120 Kollineationen in sich übergeht, die einzelne Erzeugendenschar aber nur bei den 60 Kollineationen, die geraden Vertauschungen der x korrespondieren. Die Größe $z_1 : z_2$ erfährt also bei den 60 geraden Vertauschungen der x 60, notwendig eindeutige Transformationen. Jetzt sind eindeutige Transformationen einer einzelnen Größe aus funktionentheoretischen Gründen linear. Wir finden also — und bei diesem Resultate mögen wir einen Augenblick innehalten —, *daß die als Parameter der Erzeugenden einer Schar eingeführte Größe $z_1 : z_2$ bei den 60 geraden Vertauschungen der $x_\varkappa$ eine Gruppe von 60 linearen Transformationen erleidet.* Dies ist der eigentliche Kernpunkt der Theorie. Daß die in Rede stehende Gruppe mit der von anderer Seite bekannten Gruppe der *Ikosaedersubstitutionen* identisch ist, erscheint als zufällig und unwesentlich. In der Tat: wäre die Gruppe linearer Transformationen, welche z erfährt, nicht schon anderweit bekannt, so würde man alle ihre Eigenschaften der aus (1), (2) fließenden Definition der Gruppe entnehmen können.

Wir führen vorab für die Gleichungen vierten Grades die Überlegung bis zu demselben Punkte. Bei ihnen gestalten sich die Verhältnisse noch wesentlich einfacher. Statt der zwei Scharen geradliniger Erzeugender, die bei den Gleichungen fünften Grades in Betracht kamen, haben wir bei ihnen die eine Schar der dem Kegelschnitte (1) angehörigen Punkte ins Auge zu fassen. Auch sie ist rational, so daß wieder das einzelne der Schar angehörige Individuum durch einen Parameter

$$z = z_1 : z_2 \tag{2*}$$

eindeutig bezeichnet werden kann. Wieder betrachten wir die Kollineationen, die den Vertauschungen der $x_0, \ldots, x_{n-1}$ entsprechen. Unsere Punkteschar geht, wie ersichtlich, bei jeder dieser 24 Kollineationen in sich über, so daß eine Unterscheidung gerader und ungerader Kollineationen (bez. Vertauschungen) unnötig wird. Wir schließen, *daß die durch* (2*) *bezeichnete Größe $z_1 : z_2$ bei den 24 Vertauschungen der $x_\varkappa$ eine Gruppe von 24 linearen Transformationen erleidet.* Diese Gruppe erweist sich dann hinterher als identisch mit der von anderer Seite bekannten Gruppe der *Oktaedersubstitutionen.*

An die hiermit bezeichneten Resultate knüpft sich jetzt, für $n = 5$ und $n = 4$ übereinstimmend, die eigentliche Problemstellung. Wir denken uns $x_0, \ldots, x_{n-1}$ als unabhängige Veränderliche gegeben und *verlangen, zwei Größen z_1, z_2 so als Funktionen der x zu bestimmen, daß der Quotient $z_1 : z_2$ bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x* (nämlich den geraden Vertauschungen für $n = 5$ bez. den sämtlichen Vertauschungen für $n = 4$) *die Ikosaedersubstitutionen bez. die Oktaedersubstitutionen erleidet.* Haben wir dies Problem erledigt, so kann die Gleichung n-ten Grades, von der die x abhängen, durch die Ikosaedergleichung oder Oktaedergleichung, der $z_1 : z_2$ genügt, ersetzt werden, womit das Ziel, um welches es sich bei diesen Untersuchungen zunächst handelt, erreicht ist. Die Oktaedergleichung enthält dabei neben rationalen Funktionen der Koeffizienten der vorgelegten Gleichung vierten Grades nur diejenigen Irrationalitäten, die wir bei der Konstruktion des betreffenden $z_1 : z_2$ als „akzessorische" Irrationalitäten benutzt haben mögen, die Ikosaedergleichung außerdem die Quadratwurzel aus der Diskriminante der vorgelegten Gleichung fünften Grades.

Dies mit wenigen Worten der Gedankengang, den wir nun auf Gleichungen sechsten und siebenten Grades zu übertragen suchen müssen.

§ 2.

Allgemeiner Ansatz für die Gleichungen sechsten und siebenten Grades.

Dem Gesagten genau entsprechend beginnen wir auch bei $n = 6$ und $n = 7$ mit einer geometrischen Untersuchung des Gleichungssystems:

$$\sum_0^{n-1} x_\varkappa = 0, \qquad \sum_0^{n-1} x_\varkappa^2 = 0. \tag{3}$$

Zweckmäßigerweise werden wir wieder die erste dieser Gleichungen als eine zwischen den n Variabelen x bestehende Identität auffassen und dementsprechend die $x_0, \ldots, x_{n-1}$ nicht nur als homogene, sondern auch als überzählige Punktkoordinaten (eines Raumes von $(n-2)$ Dimensionen) deuten. Der Inbegriff der Gleichungen (3) stellt dann eine in diesem Raume gelegene quadratische Mannigfaltigkeit von $n - 3$ Dimensionen

$$M_{n-3}^{(2)}$$

dar, deren geometrische Eigenschaften zu untersuchen sind.

Es handelt sich insbesondere um die in der $M_{n-3}^{(2)}$ enthaltenen *linearen Räume von möglichst großer Dimensionenzahl.* Ich will einen solchen Raum, sofern er ν Dimensionen hat, mit R_ν bezeichnen. Für $n = 4, 5$ hatten wir auf der $M_{n-3}^{(2)}$: ∞^1 R_0 (d. h. Punkte), bzw. zwei Scharen von ∞^1 R_1 (d. h. gerade Linien). Für $n = 6, 7$ ergibt die allgemeine Theorie der quadratischen Mannigfaltigkeiten, auf welche ich hier nicht näher eingehe, auf die ich übrigens zum Schlusse der gegenwärtigen Arbeit noch einmal zurückkomme[3]), den folgenden Satz, der die Grundlage unserer weiteren Entwicklungen zu bilden hat:

Die $M_3^{(2)}$ enthält $\infty^3 R_1$, die $M_4^{(2)}$ zwei Scharen von $\infty^3 R_2$.

Bei $n = 4$ und $n = 5$ konnten wir uns nun des weiteren, was die Einfühung des Parameters $z_1 : z_2$ und sein Verhalten bei den Vertauschungen der x angeht, auf funktionentheoretische Gründe stützen. In Anbetracht der vielen Möglichkeiten, welche die Funktionen mehrerer Variabler darbieten, in Anbetracht ferner der Unkenntnis, in welcher wir uns betreffs dieser Möglichkeiten befinden, erscheint eine gleiche Schlußweise bei $n > 5$ unstatthaft. Trotzdem gelten für $n = 6$ und $n = 7$ Beziehungen, welche genau den für $n = 4$ und $n = 5$ aufgestellten Sätzen entsprechen. Wir

[3]) Vgl. Cayley im 12. Bande des Quarterly Journal (1873): *On the superlines of a quadric surface in five-dimensional space* [= Werke Bd. IX, S. 79], Veronese im 19. Bande der Math. Annalen (1881): *Behandlung der projektiven Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen usw.*, Segre im 36. Bande der Memorie der Turiner Akademie, ser. II (1884): *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni.* [Siehe auch Bd. 1 dieser Ausgabe, S. 415.]

entnehmen dies den Entwicklungen einer scheinbar fremdartigen, von anderer Seite bekannten Disziplin, nämlich der *Liniengeometrie*. Ich will die Einzelheiten, die hier in Betracht kommen, erst im folgenden Paragraphen besprechen und mich hier mit der Angabe des Resultates begnügen. Die Sache ist die, daß man bei $n = 6$ die dreifach unendlich vielen R_1 und bei $n = 7$ die dreifach unendlich vielen R_2 der einen (beliebig auszuwählenden Schar) genau so durch vier Verhältnisgrößen

$$(4) \qquad z_1 : z_2 : z_3 : z_4$$

festlegen kann, wie dies bei $n = 4, 5$ hinsichtlich der bei ihnen in Betracht kommenden einfach unendlich vielen Räume durch die zwei Verhältnisgrößen $z_1 : z_2$ geschah. *Einmal ist die Beziehung zwischen den linearen Räumen und den Wertsystemen der* $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ *durchaus eindeutig, andererseits erfahren die* z *bei den Vertauschungen der* x*, oder doch, für* $n = 7$*, bei den geraden Vertauschungen der* x*, lineare Transformationen.* Offenbar sind die Gruppen linearer Transformationen der z, welche auf diese Weise entstehen und die $6!$ bez. $7! : 2$ Operationen enthalten, das genaue Analogon zu den bei $n = 4$ und $n = 5$ auftretenden Oktaeder- und Ikosaedergruppen.

An diese Sätze knüpft nun sofort die weitere Problemstellung. Es wird sich darum handeln, *aus* n *beliebig vorgegebenen Größen* $x_0, \ldots, x_{n-1}$ (mag $n = 6$ oder $n = 7$ sein) *vier Funktionen* z_1, z_2, z_3, z_4 *so zusammenzusetzen, daß die Verhältnisse* $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ *bei den in Betracht kommenden, soeben näher bezeichneten Vertauschungen der* x *die zugehörigen linearen Transformationen erfahren.* Wir erreichen dann, daß wir die Gleichungen sechsten und siebenten Grades durch ein *„Gleichungssystem der* z*"* ersetzen können, was im Sinne der anderweitig entwickelten Gesichtspunkte als der erste, bei den genannten Gleichungen anzustrebende Fortschritt erscheint[4]). Diese Gleichungssysteme (deren nähere Eigenschaften zu untersuchen bleiben) sind das, was jetzt an Stelle der Oktaeder- und Ikosaedergleichung tritt.

Der Analogie folgend werden wir nicht anders erwarten, als daß in den Ausdrücken der z durch die x akzessorische Irrationalitäten auftreten müssen. In den Koeffizienten des zugehörigen Gleichungssystems kommen neben rationalen Funktionen der Koeffizienten der jeweils vorgelegten

[4]) Vgl., auch wegen der Ausdrucksweise, die bereits genannte Abh. LVII, sowie mein Ikosaederbuch, S. 125, 126. [Die weitere algebraische Behandlung, wie sie für die Gleichungen fünften Grades bzw. die Gleichungen siebenten Grades, welche eine Gruppe von 168 Substitutionen besitzen, in den vorstehend abgedruckten Abhandlungen LIV und LVII gegeben wurde, ist in dem vorliegenden Falle, sowie in den folgenden Abh. LIX—LXI bislang nur erst teilweise durchgeführt. K.]

Gleichung diese akzessorischen Irrationalitäten dann selbstverständlich ebenfalls vor. Außerdem wird im Falle $n = 7$ auch noch die Quadratwurzel aus der Diskriminante der vorgelegten Gleichung auftreten, insofern ja für $n = 7$ bei der Definition des Gleichungssystems der z nur die geraden Vertauschungen der x in Betracht gezogen werden.

II. Definition der Parameter z und der zugehörigen quaternären Substitutionsgruppen.

§ 3.

Allgemeines über den Zusammenhang der x und der z.

Um den Zusammenhang zwischen den x und den z, den ich bezeichnete, am einfachsten zu erfassen, müssen wir, wie bereits gesagt, an die Elemente der Liniengeometrie anknüpfen. Wir beginnen dabei mit den z, die wir als homogene Punktkoordinaten des gewöhnlichen Raumes deuten, und suchen von ihnen aus durch Vermittlung der sechs homogenen Koordinaten der Raumgeraden zu Größen x zu gelangen, die den Relationen (3) genügen. Erscheint dieser Weg manchem Algebristen fremdartig, so sei daran erinnert, daß alles, was wir über die linearen Räume auf dreifach und vierfach ausgedehnten quadratischen Mannigfaltigkeiten wissen, ursprünglich auf eben diesem Wege erschlossen wurde[5]).

Wir werden die Raumgerade hier als Verbindungslinie zweier Punkte z, z' definieren. Als Koordinaten der Raumgeraden erscheinen dann zunächst die sechs Unterdeterminanten:

$$(5) \qquad \begin{cases} p_{12} = z_1 z_2' - z_1' z_2, & p_{13} = z_1 z_3' - z_1' z_3, & p_{14} = z_1 z_4' - z_1' z_4, \\ p_{34} = z_3 z_4' - z_3' z_4, & p_{42} = z_4 z_2' - z_4' z_2, & p_{23} = z_2 z_3' - z_2' z_3, \end{cases}$$

zwischen denen die quadratische Relation besteht:

$$(6) \qquad p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0,$$

weiter aber irgend sechs linearunabhängige lineare Funktionen der p_{ik}:

$$(7) \qquad \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6,$$

zwischen denen, der Formel (6) entsprechend, eine quadratische Gleichung statthaben wird, die wir folgendermaßen bezeichnen:

$$(8) \qquad \Omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6) = 0.$$

Vermöge geeigneter Wahl der ξ kann dieses Ω jede beliebige quadratische

[5]) Vgl. Cayley, a. a. O. [Weitere Entwicklungen brachte die bereits in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe abgedruckte Abh. XIII: *Zur geometrischen Deutung des Abelschen Theorems der hyperelliptischen Integrale*, die in Bd. 28 (1886/87) der Math. Annalen an die hier abgedruckte Abh. LVIII unmittelbar anschließt. K.]

Form der beigesetzten Argumente werden, die, gleich der linken Seite von (6), eine nicht verschwindende Determinante besitzt: aus den Koeffizienten von Ω schließen wir auf die geometrischen Beziehungen der durch Nullsetzen der einzelnen ξ dargestellten linearen Komplexe[6]).

Hiermit sind nun die Wertsysteme sechs homogener Variabler ξ, die einer quadratischen Gleichung (8) *von angegebener Beschaffenheit genügen, zu den Wertsystemen, welche vier homogene Variable z durchlaufen, in eine bestimmte Beziehung gesetzt, und eben diese Beziehung ist es, die in geeigneter Weise spezifiziert den Zusammenhang zwischen den Größen x und z des vorigen Paragraphen aufdeckt.* In der Tat entsprechen die Punkte des Raumes, wie hier nicht näher auszuführen ist, wenn wir dieselben als Strahlenbündel auffassen, genau den dreifach unendlich vielen R_2 der einen Art, welche die durch (8) vorgestellte $M_3^{(2)}$ enthält (während die Ebenen des Raumes, insofern wir sie als Geradenfelder auffassen, den dreifach unendlich vielen R_2 der anderen Art korrespondieren). Oder auch, wenn wir zu (8) irgendeine lineare Gleichung hinzunehmen:

$$\sum a_\varkappa \xi_\varkappa = 0 \tag{9}$$

und uns so auf die geraden Linien eines bestimmten linearen Komplexes beschränken, so entsprechen die Punkte des Raumes den dreifach unendlich vielen R_1, welche die durch (8) und (9) vorgestellte $M_3^{(2)}$ enthält; läuft doch von jedem Raumpunkte aus ein bestimmtes dem Komplexe (9) angehöriges Strahlenbüschel!

Um dies jetzt in bezug auf die x näher auszuführen, nehmen wir erstlich $n = 6$. Wir werden dann die $x_0, \ldots, x_5$ mit den $\xi_1, \ldots, \xi_6$ und die zwischen den x bestehende quadratische Gleichung des vorigen Paragraphen, die ich hier mit neuer Nummer noch einmal hersetze:

$$\sum_0^5 x_\varkappa^2 = 0 \tag{10}$$

mit der Gleichung (8) identifizieren können. Die $x_\varkappa$ bedeuten dann, gleich Null gesetzt, in bekannter Weise solche sechs lineare Komplexe, welche wechselseitig in Involution liegen. Jetzt sollte zwischen den $x_\varkappa$ auch noch die lineare Gleichung statthaben:

$$\sum_0^5 x_\varkappa = 0, \tag{11}$$

die wir mit Gleichung (9) parallelisieren. Ich werde den durch diese

[6]) Vgl. meinen Aufsatz in Bd. 2 der Math. Annalen (1869/70) [in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe als Abh. III abgedruckt]: *Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten.* Wir benutzen diesen später noch wiederholt.

Gleichung dargestellten Komplex den *Einheitskomplex* nennen. *Hiernach sind die Wertsysteme $x_\varkappa$, welche im Falle $n = 6$ den Gleichungen* (3) *des vorigen Paragraphen, oder, was dasselbe ist, den Gleichungen* (10) *und* (11) *genügen, durch die Geraden des Einheitskomplexes vorgestellt; die z aber, die wir einzuführen haben, werden nichts anderes sein, als irgendwelche Tetraederkoordinaten der Raumpunkte.* Wir begnügen uns hier vorab mit dieser allgemeinen Aussage; ein bestimmtes Koordinatensystem zur Festlegung der zwischen den x und den z bestehenden analytischen Beziehungen werden wir erst im zweitfolgenden Paragraphen definieren.

Sei ferner $n = 7$. Statt der sechs Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_6$ und der einen für sie geltenden Gleichung (8) haben wir dann sieben Größen $x_0, \ldots, x_6$ und zwei zwischen ihnen bestehende Relationen:

$$\sum_0^6 x_\varkappa = 0, \qquad \sum_0^6 x_\varkappa^2 = 0. \tag{12}$$

Offenbar brauchen wir hier nur das eine x, etwa x_0, vermöge der ersten dieser beiden Relationen aus der zweiten zu eliminieren, um die übrigen x, also $x_1, \ldots, x_6$, als Spezialfall der $\xi_1, \ldots, \xi_6$ betrachten zu können; mit anderen Worten: wir haben $x_0, \ldots, x_6$ als *überzählige Linienkoordinaten* aufzufassen. *Hiernach repräsentiert jedes den Gleichungen* (12) *genügende Wertsystem der x eine Raumgerade; die Größen z aber, die wir in Aussicht nehmen, werden wieder nichts anderes sein, als irgendwelche Tetraederkoordinaten der Raumpunkte.* Bestimmte Formeln für den Zusammenhang der x und der z sollen wieder erst im zweitfolgenden Paragraphen aufgestellt werden[7]).

§ 4.

Über das Verhalten der z bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x.

Die zwischen den Größen x und z bestehende Abhängigkeit ist durch die Sätze des vorigen Paragraphen hinreichend definiert, so daß wir jetzt schon den Beweis erbringen können, auf den es vor allen Dingen ankommt, *daß sich die z bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x linear transformieren.* Wir haben zu dem Zwecke den liniengeometrischen Satz zugrunde zu legen, den ich zuerst [in der früher abgedruckten Abh. L,

[7]) [Welche besonderen Konfigurationen in den beiden Fällen bei den Vertauschungen der x_i entstehen, hat für $n = 6$ u. a. Veronese untersucht (*Sui gruppi P_{360}, Π_{360} della figura di sei complessi lineari di rette due a due in involuzione*, Annali di Matematica, ser. II, t. 11, 1883) und für $n = 7$ Maschke (*Über eine merkwürdige Konfiguration gerader Linien im Raume*, Math. Annalen, Bd. 36, 1889/90).]

(1871), S. 272] mitteilte, daß nämlich jede lineare Substitution der Linienkoordinaten $\xi_1, \dots, \xi_6$, bei welcher die in (8) benutzte quadratische Form Ω in sich übergeht, eine Kollineation oder eine dualistische Umformung des Raumes bedeutet, und zwar das erstere oder das zweite, je nachdem die zugehörige Substitutionsdeterminante, deren Quadrat notwendig $= 1$ ist, gleich $+1$ oder gleich -1 gefunden wird. Des näheren müssen wir wieder zwischen den Fällen $n = 6$ und $n = 7$ unterscheiden.

Im Falle $n = 7$, der sich hier unmittelbar erledigt, ersetzen wir im Ausspruche unseres Satzes ξ_1 etwa durch x_1, ξ_2 durch $x_2, \dots, \xi_6$ durch x_6, und bemerken, daß jede gerade Vertauschung der sieben Größen $x_0, x_1, \dots, x_6$ vermöge der Relation $\sum_0^6 x_\varkappa = 0$ auf eine lineare Substitution der $x_1, \dots, x_6$ von der Determinante $+1$ zurückkommt. *Daher entsprechen*, wie es behauptet wurde, *den $\frac{7!}{2}$ geraden Vertauschungen der x ebenso viele Kollineationen des Raumes, d. h. lineare Transformationen der $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$.* Genau so entsprechen den $\frac{7!}{2}$ ungeraden Vertauschungen der x eine gleiche Zahl dualistischer Umformungen des Raumes, — eine Bemerkung, die zwar im Augenblicke nicht in Betracht kommt, auf die wir aber später zurückgreifen werden.

Im Falle $n = 6$ beginnen wir mit einer ganz ähnlichen Überlegung, indem wir die sechs in diesem Falle vorhandenen x der Reihe nach den $\xi_1, \dots, \xi_6$ unseres liniengeometrischen Satzes entsprechend setzen. Wir finden dann, genau wie im Falle $n = 7$, *daß die geraden Vertauschungen der x Kollineationen bedeuten, die ungeraden aber dualistische Umformungen des Raumes.* Nun haben wir uns aber nicht mit sämtlichen Raumgeraden zu beschäftigen, sondern nur mit denjenigen des Einheitskomplexes. Ich sage, *daß wir mit Rücksicht hierauf die 360 dualistischen Umformungen, die wir gerade fanden, durch ebenso viele neue Kollineationen ersetzen können.*

Ehe ich dies ausführe, muß ich zwei Vorbemerkungen machen hinsichtlich derjenigen dualistischen Umformung, die durch den Einheitskomplex als solchen gegeben ist, die nämlich jeden Punkt durch die Ebene ersetzt, die ihm im Einheitskomplexe entspricht.

Es handelt sich zunächst um die Darstellung dieser Umformung in Linienkoordinaten x. Um sie zu finden, haben wir offenbar die Koordinaten x' derjenigen Linie zu berechnen, welche irgendeiner Linie x in bezug auf den Einheitskomplex als konjugierte Polare zugeordnet ist. Dies gibt uns auf Grund bekannter Regeln die Formel:

$$x'_\varkappa = x_\varkappa - \frac{1}{3} \sum x, \tag{13}$$

wo ich die absoluten Werte der x' so bemessen habe, daß irgendwelche x, die der Gleichung des Einheitskomplexes genügen ($\sum x = 0$), überhaupt keine Umänderung erleiden. Wir konstatieren leicht, daß die Operation (13) die Periode Zwei besitzt.

Zweitens will ich die Formel (13) mit irgendwelcher Vertauschung der x:

$$x'_i = x_\varkappa$$

kombinieren. Wir finden

$$x'_i = x_\varkappa - \frac{1}{3} \sum x \tag{14}$$

und zwar unabhängig von der Reihenfolge, in welcher die Zusammensetzung der Operationen geschieht, so daß also die Operation (13) mit irgendwelchen Vertauschungen der x permutabel ist.

Die nähere Durchführung der Umsetzung unserer 360 dualistischen Transformationen knüpft jetzt unmittelbar an (14) an. Ist $x'_i = x_\varkappa$ ungerade, also eine dualistische Transformation, so bedeutet (14) eine Kollineation. *Unsere Verabredung sei jetzt einfach, daß wir diese durch (14) gegebene Kollineation in der Folge der Vertauschung $x'_i = x_\varkappa$ entsprechend setzen wollen.*

Um diese Verbindung als berechtigt erscheinen zu lassen, bemerken wir erstlich, daß die Transformationen (14) auf die Geraden des Einheitskomplexes (dessen Gleichung $\sum x = 0$ ist) ebenso wirken, wie die Vertauschungen der x selbst. Wir zeigen ferner, daß die neuen Operationen mit den geraden Vertauschungen der x zusammen eine Gruppe von 720 Operationen bilden, und daß diese Gruppe mit der Gruppe der 720 Vertauschungen der x holoedrisch isomorph ist. Ich will zu dem Zwecke irgendwelche Kollineationen, welche geraden Vertauschungen der x entsprechen, mit $C, C', \dots$ bezeichnen, dualistische Umformungen, die den ungeraden Vertauschungen der x korrespondieren, mit $D, D', \dots$, endlich die Operation (13) mit E. Dann ist nach dem, was wir sagten:

$$E^2 = 1, \quad CE = EC, \quad DE = ED.$$

Infolgedessen kann jede Aufeinanderfolge von Kollineationen $C, C', \dots, DE, D'E', \dots$ so umgestaltet werden, daß wir den Buchstaben E zwischendurch einfach weglassen und dafür eventuell am Ende zufügen, wenn nämlich die Anzahl der an der Zusammenstellung beteiligten $D, D', \dots$ eine ungerade ist. Nun ist jede Verbindung der $C, C', \dots, D, D', \dots$ selbst eine C oder D, letzteres, wenn die Anzahl der benutzten $D, D', \dots$ ungerade war. Daher ist jede Verbindung der $C, C', \dots, DE, D'E, \dots$, selbst eine C oder DE, und unsere 720 Operationen $C, C', \dots, DE, D'E, \dots$ bilden in der Tat eine Gruppe. Die Übereinstimmung dieser Gruppe mit der Vertauschungsgruppe der x ist in diesem Beweisgange von selbst mit enthalten. Denn nicht nur erscheint vermöge desselben jede Verbindung der $C, C', \ldots, DE, D'E, \ldots$ eindeutig auf eine Verbindung der $C, C', \ldots, D, D', \ldots$ bezogen, sondern die Beziehung ist auch eine solche, daß einer Zusammenstellung zweier Verbindungen der einen Art die Zusammenstellung der entsprechenden Verbindungen der anderen Art entspricht. Hiermit nun sind unsere Behauptungen vollständig erwiesen. Es wird kein Mißverständnis erzeugen, wenn ich in der Folge schlechthin von den 720 Kollineationen rede, die „den Vertauschungen der x entsprechen".

§ 5.

Formeln für den Zusammenhang der x und der z.

Wir knüpfen jetzt den Zusammenhang zwischen den x und den z an bestimmte Formeln, indem wir geeignete einfache Koordinatensysteme zugrunde legen. Wir wollen dabei für $n = 6$ und $n = 7$ übereinstimmend die Ausdrücke des Lagrange als Durchgangspunkt benutzen:

$$\pi_\nu = x_0 + \gamma^\nu x_1 + \gamma^{2\nu} x_2 + \ldots + \gamma^{(n-1)\nu} x_{n-1}, \tag{16}$$

wo γ eine zu n gehörige primitive Einheitswurzel bezeichnen soll und ν die Werte $0, 1, \ldots, (n-1)$ zu durchlaufen hat; wir erreichen dadurch, soweit dies möglich ist, einen gewissen formalen Anschluß an die für $n = 4$ und $n = 5$ in meinem „Ikosaederbuch" gegebenen Entwicklungen.

Im Falle $n = 6$, den wir jetzt näher betrachten, will ich der größeren Übersichtlichkeit halber γ gleich $-\alpha$ setzen, unter α eine imaginäre dritte Wurzel aus Eins verstanden. Wir haben dann sechs Ausdrücke π_ν, die ich hier einzeln herschreibe:

$$\left\{\begin{aligned}
\pi_0 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5,\\
\pi_1 &= x_0 - \alpha\, x_1 + \alpha^2 x_2 - x_3 + \alpha\, x_4 - \alpha^2 x_5,\\
\pi_2 &= x_0 + \alpha^2 x_1 + \alpha\, x_2 + x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha\, x_5,\\
\pi_3 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5,\\
\pi_4 &= x_0 + \alpha\, x_1 + \alpha^2 x_2 + x_3 + \alpha\, x_4 + \alpha^2 x_5,\\
\pi_5 &= x_0 - \alpha^2 x_1 + \alpha\, x_2 - x_3 + \alpha^2 x_4 - \alpha\, x_5.
\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Aus ihnen folgt durch Auflösung:

$$\left\{\begin{aligned}
6x_0 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5,\\
6x_1 &= \pi_0 - \alpha^2 \pi_1 + \alpha\, \pi_2 - \pi_3 + \alpha^2 \pi_4 - \alpha\, \pi_5,\\
6x_2 &= \pi_0 + \alpha\, \pi_1 + \alpha^2 \pi_2 + \pi_3 + \alpha\, \pi_4 + \alpha^2 \pi_5,\\
6x_3 &= \pi_0 - \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 + \pi_4 - \pi_5,\\
6x_4 &= \pi_0 + \alpha^2 \pi_1 + \alpha\, \pi_2 + \pi_3 + \alpha^2 \pi_4 + \alpha\, \pi_5,\\
6x_5 &= \pi_0 - \alpha\, \pi_1 + \alpha^2 \pi_2 - \pi_3 + \alpha\, \pi_1 - \alpha^2 \pi_5,
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

und hieraus:

$$3\sum_0^5 x_\varkappa^2 = \frac{\pi_0^2 + \pi_3^2}{2} + \pi_1 \pi_5 + \pi_2 \pi_4. \tag{19}$$

Wir schließen aus (19), *daß wir setzen können:*

$$\left\{\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{p_{12} + p_{34}}{\sqrt{2}}, \quad \pi_1 = p_{13}, \quad \pi_2 = p_{14},\\
\pi_3 &= \frac{p_{12} - p_{34}}{i\sqrt{2}}, \quad \pi_4 = p_{23}, \quad \pi_5 = p_{42},
\end{aligned}\right. \tag{20}$$

unter $p_{12}, p_{12}, \ldots$ *gewöhnliche Linienkoordinaten, also Unterdeterminanten von* z, z' (*Formel* (5)) *verstanden.* In der Tat verwandelt sich ja vermöge dieser Substitution die für die Linienkoordinaten x geltende Bedingungsgleichung $\sum_0^5 x_\varkappa^2 = 0$ in die für die p_{ik} charakteristische Form[8]):

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Wir tragen jetzt die in (20) gegebenen Werte der π in (18) ein und haben damit *folgende Darstellung der x durch zwei Reihen von Punktkoordinaten z, z', die weiterhin zugrunde zu legen sein wird*[9]):

$$\left\{\begin{aligned}
6x_0 &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} + p_{13} + p_{14} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} + p_{42} + p_{23},\\
6x_1 &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} - \alpha^2 p_{13} + \alpha\, p_{14} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} - \alpha\, p_{42} + \alpha^2 p_{23},\\
6x_2 &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} + \alpha\, p_{13} + \alpha^2 p_{14} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} + \alpha^2 p_{42} + \alpha\, p_{23},\\
6x_3 &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} - p_{13} + p_{14} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} - p_{42} + p_{23},\\
6x_4 &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} + \alpha^2 p_{13} + \alpha\, p_{14} + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} + \alpha\, p_{42} + \alpha^2 p_{23},\\
6x_5 &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot p_{12} - \alpha\, p_{13} + \alpha^2 p_{14} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\cdot p_{34} - \alpha^2 p_{42} + \alpha\, p_{23},
\end{aligned}\right. \tag{21}$$

---

[8]) Vgl. wiederum meinen Aufsatz in Bd. 2 der Math. Annalen [in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe als Abh. III abgedruckt]: *Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten* (1871).

[9]) Eine andere Darstellung der $x_\varkappa$, die sonst vielfach gebraucht wird (vgl. z. B. Rohn in Bd. 18 der Math. Annalen (1881), S. 143 ff.), ist folgende:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (p_{12} + p_{34}), & x_2 &= (p_{13} + p_{42}), & x_4 &= (p_{14} + p_{23}),\\
x_1 &= -i(p_{12} - p_{34}), & x_3 &= -i(p_{13} - p_{42}), & x_5 &= -i(p_{14} - p_{23}).
\end{aligned}$$

Ich bin von derselben im Texte abgegangen, weil bei ihr die Formeln für die Operation S (siehe unten) unnötig kompliziert werden und der Vergleich mit den für $n = 7$ zu gebrauchenden Formeln erschwert wird.

wo in alter Weise:

$$p_{ik} = z_i z'_k - z'_i z_k. \tag{21*}$$

Wir berechnen hieraus

$$\sqrt{2} \cdot \sum_0^5 x_\varkappa = p_{12} + p_{34},$$

so daß also die *Gleichung des Einheitskomplexes* folgende wird:

$$p_{12} + p_{34} = 0. \tag{22}$$

Wir nehmen jetzt $n = 7$. Indem wir die für die x geltende lineare Gleichung

$$\sum_0^6 x_\varkappa = 0$$

als identisch erfüllt betrachten, werden von den sieben Ausdrücken π_ν (16), die in diesem Falle existieren, nur sechs übrigbleiben, nämlich diejenigen, welche $\nu = 1, 2, \ldots, 6$ entsprechen. Vermöge derselben drücken sich die $x_\varkappa$ folgendermaßen aus:

$$7\,x_\varkappa = \gamma^{-\varkappa}\pi_1 + \gamma^{-2\varkappa}\pi_2 + \gamma^{-3\varkappa}\pi_3 + \gamma^{-4\varkappa}\pi_4 + \gamma^{-5\varkappa}\pi_5 + \gamma^{-6\varkappa}\pi_6 \tag{23}$$
$$\left(\varkappa = 0, 1, \ldots, 6;\ \gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right).$$

Hiernach wird:

$$\frac{7}{2}\sum_0^6 x_\varkappa^2 = \pi_1\pi_6 + \pi_2\pi_5 + \pi_3\pi_4. \tag{24}$$

Wir können also den Übergang zu den p_{ik} etwa folgendermaßen bewerkstelligen[10]).

$$\begin{cases} \pi_6 = p_{12}, & \pi_3 = p_{13}, & \pi_5 = p_{14}, \\ \pi_1 = p_{34}, & \pi_4 = p_{42}, & \pi_2 = p_{23}. \end{cases} \tag{25}$$

Die Ausdrücke für die $x_\varkappa$, die wir weiterhin zugrunde zu legen haben, werden hiernach einfach[11]):

$$7\,x_\varkappa = \gamma^{\varkappa}p_{12} + \gamma^{4\varkappa}p_{13} + \gamma^{2\varkappa}p_{14} + \gamma^{6\varkappa}p_{34} + \gamma^{3\varkappa}p_{42} + \gamma^{5\varkappa}p_{23}. \tag{26}$$

[10]) Ich wähle diese Reihenfolge, um die Formeln für die $x_\varkappa$, die ich sofort gebe, mit den sogleich [aus der vorstehend abgedruckten Abh. LVII] zu zitierenden Formeln möglichst in Übereinstimmung zu bringen.

[11]) Ich möchte hier daran erinnern, daß ich schon [in Abh. LVII, S. 413—414] sieben Komplexe dieser Art betrachtet habe, und zwar zwei Reihen solcher Komplexe nebeneinander, die ich damals durch die Gleichungen darstellte:

$$(\gamma^{\varkappa}p_{12} + \gamma^{4\varkappa}p_{13} + \gamma^{2\varkappa}p_{14}) + \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}(\gamma^{6\varkappa}p_{34} + \gamma^{3\varkappa}p_{42} + \gamma^{5\varkappa}p_{23}) = 0.$$

Diese zwei Reihen von Komplexen gehen, wie ich damals zeigte, durch 168 Kollineationen des Raumes simultan je in sich über. Offenbar ist diese Gruppe von 168 Kollineationen eine Untergruppe in jeder der beiden Gruppen von $\frac{7!}{2}$ Kollineationen, die im Sinne der jetzt im Texte gegebenen Entwicklungen zur einzelnen Komplexreihe gehören.

Wir wollen diesen Formeln zum Schlusse noch eine kleine ergänzende Verabredung hinzufügen. Der Weg, den wir weiterhin einschlagen, zwingt uns, neben Punktkoordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 auch Ebenenkoordinaten w_1, w_2, w_3, w_4 in Betracht zu ziehen. Setzen wir dementsprechend Linienkoordinaten q_{ik} aus zwei Reihen von Größen w zusammen:

$$q_{ik} = w_i w'_k - w'_i w_k, \tag{27}$$

so sind diese den Koordinaten $p_{i\varkappa}$, welche dieselbe Gerade nach Formel (5) erhält, in bekannter Weise unter Abänderung der Reihenfolge proportional. Wir wollen nun festsetzen, daß die q_{ik} den entsprechenden p_{ik} einfach *gleich* sein sollen. Dann werden wir also folgende Beziehungen haben:

$$p_{12} = q_{34},\quad p_{13} = q_{42},\quad p_{14} = q_{23},\quad p_{34} = q_{12},\quad p_{42} = q_{13},\quad p_{23} = q_{14}. \tag{28}$$

§ 6.

Formeln für die durch die Vertauschungen der x definierten linearen Transformationen der z.

Es handelt sich jetzt darum, die linearen und evtl. auch die dualistischen Transformationen hinzuschreiben, welche die Punktkoordinaten z auf Grund der im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln (21), (26) den in Betracht kommenden Vertauschungen der x entsprechend erleiden. Wir behandeln diese Aufgabe in der Weise, daß wir sie über das zunächst Erforderliche hinaus noch präzisieren: wir werden nämlich zusehen, wie man die in die p_{ik} eingehenden *homogenen* Größen z_1, z_2, z_3, z_4 und z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 (die hier immer als kogrediente Größen betrachtet werden) linear substituieren oder dualistisch transformieren muß, damit sich die durch (21), (26) definierten *x ohne irgendwelchen zutretenden Faktor* in geeigneter Weise umsetzen. Wir erhalten solcher homogener Substitutionen der z einer jeden Umänderung der x entsprechend selbstverständlich zwei, deren jede durch einen simultanen Vorzeichenwechsel sämtlicher z aus der anderen hervorgeht. Denn die p_{ik} und also die x sind bilineare Funktionen der z, z' und bleiben also bei einem Vorzeichenwechsel der genannten Art völlig ungeändert.

Um jetzt die Durchführung der so präzisierten Aufgabe zu beginnen, verabreden wir, daß wir wegen der übergroßen Zahl der in Betracht kommenden Operationen *explizite nur einige wenige Vertauschungen der x untersuchen wollen, aus denen sich alle anderen durch Wiederholung und Kombination zusammensetzen.* Als solche fundamentale Vertauschungen wählen wir auf Grund bekannter Entwicklungen die folgenden beiden:

1. *die Operation S*, welche in einer zyklischen Vertauschung sämtlicher x entsprechend der natürlichen Reihenfolge der Indizes besteht:

$$S = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{29}$$

2. *die Operation T*, welche x_0 mit x_1 vertauscht und die anderen x festläßt:

$$T = (x_0, x_1)(x_2) \ldots (x_{n-1}). \tag{30}$$

Im Falle $n = 6$ sind S und T beide ungerade Vertauschungen und liefern als solche zunächst dualistische Umformungen, die wir hinterher mit Hilfe des Einheitskomplexes in Kollineationen umsetzen werden. Im Falle $n = 7$ ist S eine gerade, T aber wieder eine ungerade Vertauschung. Wir erhalten also für S eine Kollineation, für T eine dualistische Umformung, die wir als solche in Punktkoordinaten z und Ebenenkoordinaten w hinschreiben. Um dann die Kollineationen zu haben, welche den geraden Vertauschungen der x entsprechen, verabreden wir einfach, daß wir nur solche Kombinationen von S und T in Betracht ziehen wollen, *an denen T eine gerade Zahl von Malen beteiligt ist.*

Die so umgrenzte Aufgabe erledigt sich nun dank unserer Koordinatenwahl und auf Grund einfacher geometrischer Betrachtungen ohne besonders komplizierte Rechnung. Ich behandle hier die Fälle $n = 6$ und $n = 7$ nacheinander.

I. $n = 6$.

1. *Die Operation S.*

Wir wollen hier von der Umsetzung der x direkt zu derjenigen der p_{ik} übergehen. Wir haben zunächst die zyklische Vertauschung:

$$x_0' = x_1, \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = x_5, \quad x_5' = x_0,$$

und finden ihr entsprechend aus (21):

$$p_{12}' = p_{34}, \quad p_{13}' = -\alpha p_{13}, \quad p_{14}' = \alpha^2 p_{14}, \quad p_{34}' = p_{12}, \quad p_{42}' = -\alpha^2 p_{42}, \quad p_{23}' = \alpha p_{23}.$$

Wir haben ferner für die durch den Einheitskomplex bewirkte Umsetzung nach Formel (13)

$$x_\varkappa' = x_\varkappa - \frac{1}{3} \sum x,$$

was vermöge (21) für die p_{ik} besagt, daß man p_{12} durch $-p_{34}$, p_{34} durch $-p_{12}$ ersetzen, die übrigen p_{ik} aber ungeändert lassen soll. Durch Kombination entsteht hiernach als die der Operation S entsprechende Kollineation:

$$p_{12}' = -p_{12}, \quad p_{13}' = -\alpha p_{13}, \quad p_{14} = \alpha^2 p_{14}, \quad p_{34}' = -p_{34}, \quad p_{42}' = -\alpha^2 p_{42}, \quad p_{23}' = \alpha p_{23}.$$

Dies aber liefert sofort die folgende lineare Umsetzung der z, die wir selbst mit S bezeichnen:

$$S\colon \pm z_1' = z_1, \quad \pm z_2' = -z_2, \quad \pm z_3' = -\alpha z_3, \quad \pm z_4' = \alpha^2 z_4. \tag{31}$$

Die $\pm$-Zeichen linker Hand entsprechen der bereits bemerkten notwendigen Unbestimmtheit; dieselben sind, hier wie in der Folge, so zu verstehen, daß bei sämtlichen z' übereinstimmend entweder das $+$- oder das $-$-Zeichen in Anwendung zu bringen ist.

2. *Die Operation T.*

Wir haben als ursprüngliche Vertauschung der x:

$$x_0' = x_1, \quad x_1' = x_0, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4. \quad x_5' = x_5.$$

Wir wollen die Rechnung nun so einrichten, daß wir zunächst die dualistische Beziehung zwischen den w und den z aufsuchen, die dieser Vertauschung der x entspricht. Es wird dies durch den Umstand erleichtert, daß die geometrische Bedeutung der Vertauschung auf der Hand liegt. In der Tat bleiben bei derselben alle Raumgeraden ungeändert, für welche $x_0 - x_1 = 0$ ist. Wir schließen daraus, daß wir es mit der dualistischen Umformung zu tun haben, die durch den Komplex

$$x_0 - x_1 = 0 \tag{32}$$

indiziert ist, d. h. die jeden Punkt durch diejenige Ebene ersetzt, welche ihm in diesem Komplexe entspricht. Jetzt schreibt sich (32) vermöge (21) folgendermaßen:

$$-\sqrt{2} \cdot i p_{12} - \alpha p_{13} + (1 - \alpha) p_{14} + \sqrt{2} \cdot i p_{34} - \alpha^2 p_{42} + (1 - \alpha^2) p_{23} = 0. \tag{32*}$$

Wir setzen für die p_{ik} ihre Werte in den z, z' und ordnen nach den z'. So entsteht:

$$\begin{aligned}
& z_1'(\quad \cdot \quad + i\sqrt{2} \cdot z_2 + \alpha z_3 + (\alpha - 1) z_4) \\
& + z_2'(- i\sqrt{2} \cdot z_1 + \quad \cdot \quad + (\alpha^2 - 1) z_3 - \alpha^2 z_4 \quad) \\
& + z_3'(- \alpha z_1 - (\alpha^2 - 1) z_2 + \quad \cdot \quad - i\sqrt{2} \cdot z_4 \quad) \\
& + z_4'(-(\alpha - 1) z_1 + \alpha^2 z_2 + i\sqrt{2} \cdot z_3 + \quad \cdot \quad) = 0.
\end{aligned}$$

Hier sind die Koeffizienten von z_1', z_2', z_3', z_4' bis auf einen Proportionalitätsfaktor ϱ, der zunächst dem Wesen der Sache nach unbestimmt ist, die Koordinaten w der dem Punkte z entsprechenden Ebene. *Wir haben also als Darstellung der dem Komplexe* (32) *zugehörigen dualistischen Umformung:*

$$\left\{\begin{aligned}
\varrho w_1 &= \quad \cdot \quad + i\sqrt{2} \cdot z_2 + \alpha z_3 + (\alpha - 1) z_4, \\
\varrho w_2 &= - i\sqrt{2} \cdot z_1 + \quad \cdot \quad + (\alpha^2 - 1) z_3 - \alpha^2 z_4 \quad, \\
\varrho w_3 &= - \alpha z_1 - (\alpha^2 - 1) z_2 + \quad \cdot \quad - i\sqrt{2} \cdot z_4 \quad, \\
\varrho w_4 &= -(\alpha - 1) z_1 + \alpha^2 z_2 + i\sqrt{2} \cdot z_3 + \quad \cdot \quad .
\end{aligned}\right. \tag{33}$$

Wir bestimmen andererseits die dualistische Umformung, die zum Einheitskomplexe gehört, indem wir dieselbe Methode unter Benutzung der Koordinaten q_{ik} in Anwendung bringen. Nach (22), (28) ist die Gleichung des Einheitskomplexes in den q_{ik}:

$$q_{12} + q_{34} = 0 \tag{34}$$

oder, wenn wir für die q_{ik} ihre Werte setzen und nach den w' ordnen:

$$w_1'(-w_2) + w_2'(w_1) + w_3'(-w_4) + w_4'(w_3) = 0.$$

Ich werde jetzt den Punkt, welcher der Ebene w im Einheitskomplexe entspricht, z' nennen, ferner unter σ einen unbestimmten Proportionalitätsfaktor verstehen. *Die zum Einheitskomplexe gehörige dualistische Umformung findet sich dann folgendermaßen dargestellt:*

$$\sigma z_1' = -w_2, \quad \sigma z_2' = w_1, \quad \sigma z_3' = -w_4, \quad \sigma z_4' = w_3. \tag{34*}$$

Jetzt eliminieren wir die w zwischen (33) und (34*). *Wir erhalten dann zur Darstellung der zur Vertauschung T gehörigen linearen Substitution der z:*

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho\sigma\cdot z_1' = \quad i\sqrt{2}\cdot z_1 + \quad \cdot \quad - (\alpha^2-1) z_3 + \alpha^2 z_4 \quad , \\ \varrho\sigma\cdot z_2' = \quad \cdot \quad + i\sqrt{2}\cdot z_2 + \alpha z_3 + (\alpha - 1) z_4, \\ \varrho\sigma\cdot z_3' = (\alpha-1) z_1 - \alpha^2 z_2 - i\sqrt{2}\cdot z_3 + \quad \cdot \quad , \\ \varrho\sigma\cdot z_4' = - \alpha z_1 - (\alpha^2-1) z_2 + \quad \cdot \quad - i\sqrt{2}\cdot z_4 \, . \end{array}\right. \tag{35}$$

Hier ist jetzt noch der Faktor $\varrho\sigma$ zu bestimmen. Es hat dies so zu geschehen, daß infolge von (35) die durch (21) definierten x genau diejenige Umsetzung erfahren, die wir vermöge (14) der Vertauschung T zugeordnet haben, daß also:

$$x_0' = x_1 - \tfrac{1}{3}\sum x, \quad x_1' = x_0 - \tfrac{1}{3}\sum x, \quad x_2' = x_2 - \tfrac{1}{3}\sum x \quad \text{usw.} \tag{36}$$

wird. Wir betrachten zu dem Zwecke zwei spezielle Wertreihen der z:

$$z_1 = \varrho\sigma, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0$$

und

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \varrho\sigma, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0,$$

denen vermöge (35) nachstehende Werte der z' entsprechen:

$$z_1' = i\sqrt{2}, \quad z_2' = 0, \quad z_3' = \alpha - 1, \quad z_4' = -\alpha,$$

bzw.

$$z_1' = 0, \quad z_2' = i\sqrt{2}, \quad z_3' = -\alpha^2, \quad z_4' = -\alpha^2 + 1.$$

Die Unterdeterminanten p_{ik} aus den zweierlei z und die Unterdeterminanten p_{ik}' aus den zweierlei z' erhalten hier die Werte:

$$p_{12} = (\varrho\sigma)^2, \quad p_{13} = 0, \quad p_{14} = 0, \quad p_{34} = 0, \quad p_{42} = 0, \quad p_{23} = 0,$$
$$p_{12}' = -2, \quad p_{13}' = -\alpha^2 i\sqrt{2}, \quad p_{14}' = (1-\alpha^2) i\sqrt{2}, \quad p_{34}' = -4,$$
$$p_{42}' = -\alpha i\sqrt{2}, \quad p_{23}' = (1-\alpha) i\sqrt{2}.$$

Sonach wird vermöge (21):

$$x_0 = x_2 = x_4 = \frac{1-i}{6\sqrt{2}}(\varrho\sigma)^2, \qquad x_1 = x_3 = x_5 = \frac{1+i}{6\sqrt{2}}(\varrho\sigma)^2,$$
$$x_0' = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}, \qquad x_1' = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad x_2' = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \ldots,$$

woraus durch Vergleich mit einer beliebigen der Formeln (36) die gewünschte Wertbestimmung folgt[12]):

$$\varrho\sigma = \pm\sqrt{6}.$$

Die lineare Substitution der z, welche der Vertauschung T der x entspricht und die wir selbst mit T bezeichnen, lautet hiernach definitiv:

$$\left\{\begin{array}{l} \pm\sqrt{6}\cdot z_1' = \quad i\sqrt{2}\cdot z_1 - \quad \cdot \quad - (\alpha^2-1) z_3 + \alpha^2 z_4 \quad , \\ \pm\sqrt{6}\cdot z_2' = \quad \cdot \quad + i\sqrt{2}\cdot z_2 + \alpha z_3 + (\alpha - 1) z_4, \\ \pm\sqrt{6}\cdot z_3' = (\alpha-1) z_1 - \alpha^2 z_2 - i\sqrt{2}\cdot z_3 + \quad \cdot \quad , \\ \pm\sqrt{6}\cdot z_4' = - \alpha z_1 - (\alpha^2-1) z_2 + \quad \cdot \quad - i\sqrt{2}\cdot z_4 \, . \end{array}\right. \tag{37}$$

II. $n = 7$.

1. *Die Operation S.*

Mit Rücksicht auf (26) entspricht der Vertauschung S der $x_\varkappa$:

$$x_\varkappa' = x_{\varkappa+1}$$

die folgende Umsetzung der p_{ik}:

$$p_{12}' = \gamma p_{12}, \quad p_{34}' = \gamma^6 p_{34},$$
$$p_{13}' = \gamma^4 p_{13}, \quad p_{42}' = \gamma^3 p_{42},$$
$$p_{14}' = \gamma^2 p_{14}, \quad p_{23}' = \gamma^5 p_{23},$$

woraus unmittelbar als *zugehörige Substitution der z* folgt:

$$S\colon \pm z_1' = z_1, \quad \pm z_2' = \gamma z_2, \quad \pm z_3' = \gamma^4 z_3, \quad \pm z_4' = \gamma^2 z_4. \tag{38}$$

2. *Die Operation T.*

Ich will mir betreffs der Operation T in dem hier vorliegenden Falle $n = 7$ im Interesse größerer Symmetrie der aufzustellenden Formeln eine

[12]) Die hier benutzte, sozusagen empirische Bestimmung des Faktors $\varrho\sigma$ wurde deshalb von mir gewählt, weil sie auf durchaus elementarem Wege, ohne Erläuterungen über Invarianten von linearen Komplexen usw., zustande kommt. Will man die angedeuteten höheren Hilfsmittel heranziehen, so kann man den Wert von $\varrho\sigma$ daraus deduzieren, daß die Invarianten der linken Seiten von (32*) und (34) gleich 6, bez. gleich 1 sind.

kleine Abweichung gestatten. Statt nämlich T direkt in Betracht zu ziehen, welches folgende Umstellung der Indizes $0, \ldots, 6$ bewirkt:

$$T\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}\right.$$

will ich die Vertauschung T' behandeln, die durch das Schema definiert ist:

$$(39) \qquad T'\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6. \end{matrix}\right.$$

Offenbar ist

$$T' = S^{-3}TS^3, \quad T = S^3T'S^{-3},$$

so daß T' ebenso geeignet ist, durch Kombination mit S die sämtlichen Vertauschungen der sieben Größen x zu liefern, wie T selbst.

Um jetzt die Formeln für w und z zu finden, welche T' entsprechen, schlage ich denselben Weg ein, wie soeben bei $n = 6$. Geometrisch bedeutet T' diejenige dualistische Transformation, die zum linearen Komplexe

$$x_3 - x_4 = 0$$

gehört. Nun wird diese Gleichung in den p_{ik} vermöge (26):

$$(\gamma^3 - \gamma^4)(p_{12} - p_{34}) + (\gamma^5 - \gamma^2)(p_{13} - p_{42}) + (\gamma^6 - \gamma)(p_{14} - p_{23}) = 0,$$

also, wenn wir die p_{ik} durch ihre Werte in den z, z' ersetzen und nach den z' ordnen:

$$\begin{aligned} 0 = z_1'(&\quad\cdot\quad - (\gamma^3 - \gamma^4)z_2 - (\gamma^5 - \gamma^2)z_3 - (\gamma^6 - \gamma)z_4), \\ + z_2'(&(\gamma^3 - \gamma^4)z_1 + \quad\cdot\quad + (\gamma^6 - \gamma)z_3 - (\gamma^5 - \gamma^2)z_4), \\ + z_3'(&(\gamma^5 - \gamma^2)z_1 - (\gamma^6 - \gamma)z_2 + \quad\cdot\quad + (\gamma^3 - \gamma^4)z_4), \\ + z_4'(&(\gamma^6 - \gamma)z_1 + (\gamma^5 - \gamma^2)z_2 - (\gamma^3 - \gamma^4)z_3 + \quad\cdot\quad). \end{aligned}$$

Daher lautet die zugehörige dualistische Transformation in den w und z, indem wir zunächst wieder einen unbestimmten Proportionalitätsfaktor ϱ einführen:

$$\begin{aligned} \varrho w_1 &= \quad\cdot\quad - (\gamma^3 - \gamma^4)z_2 - (\gamma^5 - \gamma^2)z_3 - (\gamma^6 - \gamma)z_4, \\ \varrho w_2 &= (\gamma^3 - \gamma^4)z_1 + \quad\cdot\quad + (\gamma^6 - \gamma)z_3 - (\gamma^5 - \gamma^2)z_4, \\ \varrho w_3 &= (\gamma^5 - \gamma^2)z_1 - (\gamma^6 - \gamma)z_2 + \quad\cdot\quad + (\gamma^3 - \gamma^4)z_4, \\ \varrho w_4 &= (\gamma^6 - \gamma)z_1 + (\gamma^5 - \gamma^2)z_2 - (\gamma^3 - \gamma^4)z_3 + \quad\cdot\quad. \end{aligned}$$

Wir bestimmen jetzt das ϱ, indem wir aus diesen Formeln unter Beschränkung auf partikuläre Wertereihen der z die Vertauschung T' der x vermöge der Formeln (26) abzuleiten suchen. Als besondere Wertsysteme der z will ich folgende wählen:

$$z_1 = \varrho, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0$$

und

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \varrho, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0,$$

denen als Ebenenkoordinaten w nach unseren Formeln entsprechen:

$$w_1 = 0, \quad w_2 = (\gamma^3 - \gamma^4), \quad w_3 = (\gamma^5 - \gamma^2), \quad w_4 = (\gamma^6 - \gamma),$$

bzw.

$$w_1 = -(\gamma^3 - \gamma^4), \quad w_2 = 0, \quad w_3 = -(\gamma^6 - \gamma), \quad w_4 = (\gamma^5 - \gamma^2).$$

Hieraus folgt für die Verbindungslinie der beiden Punkte:

$$p_{12} = \varrho^2, \quad p_{13} = 0, \quad p_{14} = 0, \quad p_{34} = 0, \quad p_{42} = 0, \quad p_{23} = 0$$

und für die Durchschnittslinie der beiden Ebenen mit Rücksicht auf (28):

$$\begin{aligned} p_{12} = q_{34} &= -5 - (\gamma + \gamma^6), & p_{34} = q_{12} &= -2 + (\gamma + \gamma^6), \\ p_{13} = q_{42} &= -(\gamma + \gamma^6) + (\gamma^2 + \gamma^5), & p_{42} = q_{13} &= (\gamma + \gamma^6) - (\gamma^2 + \gamma^5), \\ p_{14} = q_{23} &= -(\gamma^2 + \gamma^5) + (\gamma^4 + \gamma^3), & p_{23} = q_{14} &= (\gamma^2 + \gamma^5) - (\gamma^4 + \gamma^3). \end{aligned}$$

Dies jetzt in (26) eingesetzt gibt:

$$\begin{aligned} 7x_0 &= \varrho^2, & 7x_1 &= \gamma\varrho^2, & 7x_2 &= \gamma^2\varrho^2 & &\text{usw.} \\ 7x_0' &= -7, & 7x_1' &= -7\gamma, & 7x_2' &= -7\gamma^2 & &\text{usw.} \end{aligned}$$

also $\varrho^2 = -7$. *Die dualistische Transformation, welche der Vertauschung T' entspricht und die wir selbst T' nennen, lautet also definitiv:*

$$(39^*) \quad T': \begin{cases} \pm\sqrt{-7}\cdot w_1 = \quad\cdot\quad - (\gamma^3 - \gamma^4)z_2 - (\gamma^5 - \gamma^2)z_3 - (\gamma^6 - \gamma)z_4, \\ \pm\sqrt{-7}\cdot w_2 = (\gamma^3 - \gamma^4)z_1 + \quad\cdot\quad + (\gamma^6 - \gamma)z_3 - (\gamma^5 - \gamma^2)z_4, \\ \pm\sqrt{-7}\cdot w_3 = (\gamma^5 - \gamma^2)z_1 - (\gamma^6 - \gamma)z_2 + \quad\cdot\quad + (\gamma^3 - \gamma^4)z_4, \\ \pm\sqrt{-7}\cdot w_4 = (\gamma^6 - \gamma)z_1 + (\gamma^5 - \gamma^2)z_2 - (\gamma^3 - \gamma^4)z_3 + \quad\cdot\quad. \end{cases}$$

Fassen wir zusammen, so haben wir folgendes Resultat gewonnen:

1. bei $n = 6$: Den beiden Vertauschungen der x, die wir S und T nannten, entsprechen bez. die folgenden linearen Substitutionen der z:

$$(40) \quad S: \ \pm z_1' = z_1, \quad \pm z_2' = -z_2, \quad \pm z_3' = -\alpha z_3, \quad \pm z_4' = +\alpha^2 z_4;$$

$$(41) \quad T: \begin{cases} \pm\sqrt{6}\cdot z_1' = i\sqrt{2}\cdot z_1 + \quad\cdot\quad - (\alpha^2 - 1)z_3 + \alpha^2 z_4, \\ \pm\sqrt{6}\cdot z_2' = \quad\cdot\quad + i\sqrt{2}\cdot z_2 + \alpha z_3 + (\alpha - 1)z_4, \\ \pm\sqrt{6}\cdot z_3' = (\alpha - 1)z_1 - \alpha^2 z_2 - i\sqrt{2}\cdot z_3 + \quad\cdot\quad, \\ \pm\sqrt{6}\cdot z_4' = -\alpha z_1 - (\alpha^2 - 1)z_2 + \quad\cdot\quad - i\sqrt{2}\cdot z_4. \end{cases}$$

2. bei $n = 7$: den Vertauschungen S und T' der x entsprechen die lineare Substitution der z:

$$(42) \qquad S: \ \pm z_1' = z_1, \quad \pm z_2' = \gamma z_2, \quad \pm z_3' = \gamma^4 z_3, \quad \pm z_4' = \gamma^2 z_4$$

bez. die dualistische Transformation:

$$(43)\quad T': \begin{cases} \pm\sqrt{-7}\cdot w_1 = \quad\cdot\quad -(\gamma^3-\gamma^4)z_2 - (\gamma^5-\gamma^2)z_3 - (\gamma^6-\gamma\ )z_4, \\ \pm\sqrt{-7}\cdot w_2 = (\gamma^3-\gamma^4)z_1 + \quad\cdot\quad + (\gamma^6-\gamma\ )z_3 - (\gamma^5-\gamma^2)z_4, \\ \pm\sqrt{-7}\cdot w_3 = (\gamma^5-\gamma^2)z_1 - (\gamma^6-\gamma\ )z_2 + \quad\cdot\quad + (\gamma^3-\gamma^4)z_4, \\ \pm\sqrt{-7}\cdot w_4 = (\gamma^6-\gamma\ )z_1 + (\gamma^5-\gamma^2)z_2 - (\gamma^3-\gamma^4)z_3 + \quad\cdot\quad . \end{cases}$$

§ 7.

Über die Notwendigkeit der doppelten Vorzeichen, die in den Substitutionsformeln der z auftreten.

Die Formeln (40), (41), bez. (42), (43), die wir nunmehr für $n = 6$ und $n = 7$ gewonnen haben, definieren auf Grund der vorausgeschickten Erläuterungen die zugehörigen Substitutionsgruppen genau so durch zwei erzeugende Operationen, wie dies in meinem „Ikosaederbuch" betreffs der Oktaeder- und Ikosaedergruppe geschehen ist, deren Analoga sie sind. Dabei erstreckt sich die Übereinstimmung auch auf einen Punkt, der zunächst unwesentlich erscheinen könnte, nämlich auf die $\pm$-Zeichen, welche bei jeder einzelnen Operation vorkommen. Ich habe in meinem „Ikosaederbuch" (S. 44 bis 47) untersucht, ob man die linearen Substitutionen der dort in Betracht kommenden homogenen Variabelen z_1, z_2 nicht so durch Einfügen irgendwelcher (bei z_1, z_2 gleichzeitig zuzusetzender) Multiplikatoren modifizieren kann, daß zwischen ihrer Gruppe und der Gruppe gebrochener linearer Transformationen, welche $z_1 : z_2$ erfährt, holoedrischer Isomorphismus statthat, wobei sich zeigte, daß dies unmöglich ist. Diese Unmöglichkeit hatte dann zur Folge, wie ich ebenda S. 255, 256 darlegte, daß es keine *rationalen* Funktionen z_1, z_2 beliebig veränderlicher $x_0, \ldots, x_5$ oder $x_0, \ldots, x_4$ gab, deren Quotient sich bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x oktaedrisch oder ikosaedrisch transformierte. Vielmehr werden Größen z_1, z_2 der genannten Art immer Irrationalitäten enthalten müssen, die dann als „akzessorische" Irrationalitäten in die schließliche Oktaeder- oder Ikosaedergleichung eingehen. Ich werde jetzt zeigen, daß es mit den quaternären Gruppen der z, die wir im vorigen Paragraphen definierten, ganz dieselbe Bewandtnis hat[13]), woraus folgt, *daß eine Reduktion der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades auf die zugehörigen Gleichungssysteme der z ohne Zuhilfenahme akzessorischer Irrationalitäten gleichfalls unmöglich ist*[14]).

[13]) Dieser Beweis ist für die Untergruppe jener 360 Kollineationen, die den geraden Vertauschungen der x für $n = 6$ entsprechen, auf einem etwas anderen Wege bereits von Reichardt geführt worden; vgl. dessen soeben in der Einleitung zitierte zwei Mitteilungen. [Vgl. auch die ebenda genannte Arbeit von Cole.]

Am einfachsten scheint es, den hier erforderlichen Beweis ohne alle Rechnung auf den früheren zurückzuführen. Dies gelingt für $n = 6$ und $n = 7$ gleichförmig folgendermaßen. Wir wählen irgend vier der gegebenen x:

$$x_a,\quad x_b,\quad x_c,\quad x_d$$

und betrachten nun diejenigen geraden Vertauschungen, welche die nicht hingeschriebenen x unverändert lassen, die hingeschriebenen aber beziehungsweise in folgender Weise umsetzen:

$$\begin{matrix} x_a, & x_b, & x_c, & x_d, \\ x_b, & x_a, & x_d, & x_c, \\ x_c, & x_d, & x_a, & x_b, \\ x_d, & x_c, & x_b, & x_a, \end{matrix}$$

deren Inbegriff also in der Terminologie meines „Ikosaederbuches" eine „Vierergruppe" bildet. Bei den entsprechenden Kollineationen des Raumes geht, wie leicht zu sehen, jede der beiden geraden Linien, welche die vier Komplexe

$$x_a = 0,\quad x_b = 0,\quad x_c = 0,\quad x_d = 0$$

miteinander gemein haben, in sich selbst über. Ich will jetzt ein Koordinatentetraeder zugrunde gelegt denken, bei welchem $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ die eine, $z_3 = 0$, $z_4 = 0$ die andere dieser geraden Linien ist[15]). Unsere vier Kollineationen müssen sich dann so als lineare Substitutionen der z darstellen, daß z_1 und z_2, und ebenso z_3 und z_4, für sich, also binär, substituiert werden. Wäre es nun möglich, den vier in Betracht kommenden Kollineationen entsprechend eine Gruppe von nur *vier* quaternären linearen Substitutionen der z_1, z_2, z_3, z_4 (also eine holoedrisch isomorphe Gruppe) zu bilden, so hätten wir damit zugleich, und zwar sowohl für z_1 und z_2, wie für z_3 und z_4, eine mit der Vierergruppe holoedrisch isomorphe Gruppe binärer linearer Substitutionen, was nach S. 44 bis 47 des „Ikosaederbuches" unmöglich ist. *Die Gesamtheit der Substitutionen unserer z kann also mit der Gruppe der Vertauschungen der x nur meroedrisch isomorph sein*, was zu beweisen war. Jetzt sind die Substitutionen der z, wie wir

[14]) „Allgemein" heißen hier selbstverständlich solche Gleichungen, deren Wurzeln als beliebig veränderliche Größen gedacht sind (womit über die Gruppe der Gleichungen noch gar nichts ausgesagt ist).

[15]) Dies setzt natürlich voraus, daß die beiden geraden Linien verschieden sind und einander nicht schneiden, was beides durch Berechnung ihrer Koordinaten x bestätigt wird.

sie im vorigen Paragraphen definierten, doppelt so zahlreich, wie die Vertauschungen der x, den $\pm$-Zeichen entsprechend, die in ihnen vorkommen. Ihre Gesamtheit ist also mit der Vertauschungsgruppe der x *hemiedrisch* isomorph und wir haben daher mit den Formeln des vorigen Paragraphen von selbst den geringsten Grad von Meroedrie erreicht, der zwischen den Substitutionen der z und den Vertauschungen der x überhaupt statthaft ist.

III. Zurückführung der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades auf die zugehörigen Gleichungssysteme der z.

§ 8.

Allgemeine Prinzipien der beabsichtigten Zurückführung.

Wir stehen nunmehr vor der Aufgabe, für $n = 6$ und $n = 7$ aus irgend vorgelegten Größen $x_0, \ldots, x_{n-1}$ Funktionen z_1, z_2, z_3, z_4 zusammenzusetzen, deren Verhältnisse bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x die in § 6 näher angegebenen linearen Transformationen erfahren. Zu dem Zwecke bediene ich mich, wie in Kapitel 2 und 5 des zweiten Abschnitts meines Ikosaederbuches, eines geometrischen Ansatzes. Derselbe benötigt gewisse liniengeometrische Auffassungen, von denen im gegenwärtigen Aufsatze noch nicht die Rede war, so daß ich betreffs ihrer einige Bemerkungen vorausschicken muß.

Wir hatten seitlang nur solche Größensysteme $X_0, \ldots, X_{n-1}$ (ich gebrauche hier große Buchstaben, um nicht unnötigerweise an die vorgelegten Wurzeln $x_0, \ldots, x_{n-1}$ zu erinnern) der geometrischen Deutung unterworfen, welche den beiden Gleichungen genügten:

$$\sum_0^{n-1} X_\varkappa = 0, \quad \sum_0^{n-1} X_\varkappa^2 = 0; \tag{45}$$

dieselben bezeichneten im Falle $n = 7$ allgemein eine beliebige Raumgerade, im Falle $n = 6$ speziell eine Gerade des Einheitskomplexes. Es ist jetzt die Frage, wie wir Größensysteme $X_0, \ldots, X_{n-1}$ deuten wollen, welche nur der ersten der beiden Gleichungen, also der Relation

$$\sum_0^{n-1} X_\varkappa = 0 \tag{46}$$

Genüge leisten. Die liniengeometrische Antwort ist, daß wir solche X als ***Koordinaten eines linearen Komplexes*** betrachten sollen, der im Falle $n = 7$ jeder beliebige sein kann, während er im Falle $n = 6$ zum Einheitskomplexe „involutorisch" liegt, — *desjenigen Komplexes nämlich, dessen*

Gleichung in laufenden Linienkoordinaten $X'_0, \ldots, X'_{n-1}$ die folgende ist:

$$\sum_0^{n-1} X_\varkappa X'_\varkappa = 0. \tag{47}$$

Diese Einführung von Komplexkoordinaten ist berechtigt, weil sie im speziellen Falle mit der anfänglichen Definition der Linienkoordinaten übereinstimmt. In der Tat, wenn die $X_\varkappa$ nicht nur der Gleichung (46), sondern den Gleichungen (45) genügen, so definiert (47) alle geraden Linien X', welche der Geraden X „angehören", d. h. dieselbe schneiden. Dabei wird die Gerade X im Falle $n = 6$ zum Einheitskomplexe involutorisch liegen, denn dies ist nur eine andere Ausdrucksweise dafür, daß sie selbst eine Linie des Einheitskomplexes ist.

Dies vorausgeschickt wenden wir uns zur Betrachtung einer vorgelegten Gleichung mit den Wurzeln $x_0, \ldots, x_{n-1}$, wobei wir der Einfachheit halber von vornherein voraussetzen wollen (was ja in jedem Falle durch eine leichte Hilfstransformation zu erreichen ist), daß der Gleichung (46) entsprechend die Summe der x verschwindet. Wir betrachten jetzt $x_0, \ldots, x_{n-1}$ für $n = 6$ und $n = 7$ übereinstimmend als ***Koordinaten eines linearen Komplexes*** (dessen besondere Lage für $n = 6$ nicht noch einmal bezeichnet zu werden braucht), die Größen $z_1, \ldots, z_4$ aber, die wir konstruieren sollen, *als* ***Koordinaten eines Raumpunktes***. Den in Betracht kommenden Vertauschungen der x entsprechend unterliegt unser Komplex gewissen kollinearen Umformungen des Raumes. Unsere Aufgabe kann dann so bezeichnet werden: ***es gilt, einen Punkt z von dem Komplexe x in der Art abhängig zu machen, daß er mit dem Komplexe zusammen immer gleichzeitig dieselben*** (*durch die Vertauschungen der x definierten*) ***Kollineationen des Raumes erleidet***. Ich habe in meinem „Ikosaederbuch" (II, 2, § 5: Geometrische Auffassung der Tschirnhausen-Transformation) eine solche auf eine Gruppe von Operationen bezügliche Zusammengehörigkeit zweier Gebilde schlechtweg als ***Kovarianz*** bezeichnet. Indem wir diese Ausdrucksweise hier aufnehmen, können wir unsere Aufgabe kurz dahin zusammenfassen, ***daß wir verlangen, einen zum Komplexe x kovarianten Punkt zu konstruieren.***

Wir haben damit im Grunde dieselbe Formulierung, welche in II, 5, § 1 meines „Ikosaederbuches" für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades vorliegt[16]). Ein Unterschied besteht natürlich in der Art der in Betracht gezogenen geometrischen Gebilde: wir deuteten damals die $x_\varkappa$ als Koordinaten eines Raumpunktes, die z als Koordinaten (Parameter) einer Erzeugenden der einen auf der Hauptfläche zweiten Grades befindlichen

[16]) Auch bei den Gleichungen vierten Grades sind selbstverständlich ganz analoge Vorstellungsweisen am Platze, die nur nicht in dem „Ikosaederbuch" besonders entwickelt worden sind.

Regelschar. Das Problem aber war, genau wie hier, *das Gebilde z von dem Gebilde x in kovarianter Weise abhängig zu machen.* In der Tat schlagen wir jetzt bei $n = 6$ und $n = 7$ einen Weg ein, der dem bei $n = 5$ angewandten Verfahren genau entspricht.

Ich rekapituliere hier kurz das letztere Verfahren. Wir begannen damit, den allgemeinsten zum Punkte x kovarianten Punkt zu suchen, und fanden, daß dessen Koordinaten durch folgende Formel gegeben sind:

$$(48) \qquad X_\varkappa = \lambda_1 x_\varkappa + \lambda_2 \left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{5}\right) + \lambda_3 \left(x_\varkappa^3 - \frac{s_3}{5}\right) + \lambda_4 \left(x_\varkappa^4 - \frac{s_4}{5}\right),$$

wo die s_2, s_3, s_4 die zweiten, dritten, vierten Potenzsummen der Wurzeln sind[17]) und die λ [bei den Vertauschungen der x] invariante Koeffizienten bezeichnen. Wir suchten dann die λ irgendwie so zu bestimmen, daß die Gleichung statthat:

$$(48^*) \qquad \sum_0^4 X_\varkappa^2 = 0,$$

daß also der Punkt X der Hauptfläche angehört. Ist dies geschehen, so haben wir damit eo ipso eine zum Punkte x kovariante Erzeugende z gefunden: wir brauchen nämlich nur diejenige Erzeugende z der in Betracht kommenden Art zu wählen, welche durch den Punkt X *hindurchläuft.*

Wir werden jetzt für $n = 6$ und $n = 7$ genau so beginnen, nämlich zuvörderst die Koordinaten $X_\varkappa$ des allgemeinsten zum Komplexe x kovarianten Komplexes (der überdies, im Falle $n = 6$, gleich dem Komplexe x, zum Einheitskomplexe involutorisch liegen soll) hinschreiben. Wir finden in dieser Hinsicht:

$$(49) \qquad X_\varkappa = \lambda_1 x_\varkappa + \lambda_2 \left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right) + \ldots + \lambda_{n-1} \left(x_\varkappa^{n-1} - \frac{s_{n-1}}{n}\right),$$

wo die s und λ ganz die frühere Bedeutung haben. Hierauf haben wir das Analogon zur Gleichung (48*) zu konstruieren. Dieses wollen wir nun nicht etwa darin erblicken, daß wir ein einzelnes System von $X_\varkappa$ suchen, für welches die Summe der Quadrate verschwindet, *daß wir vielmehr zwei unterschiedene Systeme von $X_\varkappa$ suchen — sie mögen $X_\varkappa'$ und $X_\varkappa''$ heißen —, welche die simultanen Gleichungen befriedigen:*

$$(50) \qquad \sum_0^{n-1} X_\varkappa'^2 = 0, \quad \sum_0^{n-1} X_\varkappa' X_\varkappa'' = 0, \quad \sum_0^{n-1} X_\varkappa''^2 = 0.$$

Sind solche X', X'' gefunden, so können wir, wie ich behaupte, sehr leicht zu einem kovarianten Punkte z gelangen.

[17]) Wir hatten vorausgesetzt, daß die Summe der ersten Potenzen der x verschwinde; andernfalls würde in (48) statt $x_\varkappa$ zu setzen sein $x_\varkappa - \frac{s_1}{5}$. Analoges gilt von der Formel (49).

Um letzteres einzusehen, überlegen wir uns einfach, was die Gleichungen (50) geometrisch bedeuten. Die erste und dritte derselben sagen aus, daß wir es mit zwei speziellen Komplexen X', X'', d. h. mit zwei Raumgeraden X', X'', zu tun haben, die zweite Gleichung, daß diese Raumgeraden sich schneiden. *Hiernach erhalten wir einen kovarianten Punkt z, indem wir einfach den Schnittpunkt von X' und X'' in Betracht ziehen.*

Ich werde in den folgenden beiden Paragraphen zeigen, erstlich, wie wir die Gleichungen (50) in passender Weise befriedigen, zweitens, wie wir aus den einmal gefundenen X', X'' die Koordinaten z des Schnittpunktes berechnen. Bemerken wir hier nur noch, daß die in Aussicht genommene Methode in der Lage ist, den allgemeinsten zum Komplexe x kovarianten Punkt z zu liefern. Nehmen wir nämlich an, es sei auf irgendeine Weise gelungen, dem Komplexe x einen Punkt z kovariant zuzuordnen, so kann man sofort beliebig viele kovariante Raumgerade X', X'', ... finden, die vom Punkte z auslaufen: man hat einfach die Ebenen, die dem Punkte z in irgendwelchen kovarianten Komplexen (49) entsprechen, paarweise zum Durchschnitt zu bringen. Dies aber heißt, daß wir den Punkt z auch als Schnitt zweier geeigneter zum Komplexe x kovarianter gerader Linien auffassen können, was genau der von uns geplanten Konstruktion entspricht. — Auch diese Betrachtung ist die Übertragung einer analogen Überlegung, die in der Theorie der Gleichungen fünften Grades Platz griff (Ikosaederbuch, II, 5, § 8). [Vgl. auch Abh. LVII, Abschnitt I, § 5.]

§ 9.

Formeln zur Auffindung der Geraden X', X''.

Um jetzt die Gleichungen (50) durch bestimmte Werte der X', X'' zu befriedigen, will ich im Anschluß an (49) ausführlich schreiben:

$$(51) \qquad \begin{cases} X_\varkappa' = \lambda_1' x_\varkappa + \lambda_2' \left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right) + \ldots + \lambda_{n-1}' \left(x_\varkappa^{n-1} - \frac{s_{n-1}}{n}\right), \\ X_\varkappa'' = \lambda_1'' x_\varkappa + \lambda_2'' \left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right) + \ldots + \lambda_{n-1}'' \left(x_\varkappa^{n-1} - \frac{s_{n-1}}{n}\right). \end{cases}$$

Wir erhalten dann aus (50) eine homogene quadratische Gleichung für die λ', eine ebensolche für die λ'', endlich eine homogene bilineare Gleichung für die λ' und λ'' zusammen; die Koeffizienten dieser Gleichungen sind symmetrische Funktionen der x, also rational bekannte Größen. Um die hieraus folgende Bestimmung der λ', λ'' und insbesondere die akzessorischen Irrationalitäten, die bei ihr auftreten, einigermaßen zu übersehen, will ich einen speziellen Fall ausführlicher betrachten.

Wir gehen zunächst darauf aus, ein möglichst einfaches System von Größen $X'_\varkappa$ zu gewinnen. Zu dem Zwecke nehmen wir (indem es sich zunächst nur um die eine Gleichung $\sum X'^2 = 0$ handelt)

$$\lambda'_2 = 1, \quad \lambda'_3 = \ldots = \lambda'_{n-1} = 0,$$

setzen also, indem wir bei λ'_1 noch Akzent und Index unterdrücken:

$$X'_\varkappa = \left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right) + \lambda x_\varkappa. \tag{52}$$

Wir erhalten dann aus (50):

$$s_2 \lambda^2 + 2 s_3 \lambda + \left(s_4 - \frac{s_2^2}{n}\right) = 0,$$

also

$$\lambda = \frac{-s_3 + W'}{s_2},$$

wo W' die Quadratwurzel bezeichnet:

$$W' = \pm \sqrt{-s_2 s_4 + s_3^2 + \frac{s_2^3}{n}}. \tag{53}$$

Die Eintragung in (52) ergibt:

$$X'_\varkappa = \left(x_\varkappa^2 - \frac{s_3}{s_2} x_\varkappa - \frac{s_2}{n}\right) + \frac{x_\varkappa \cdot W'}{s_2}. \tag{54}$$

Dieser Ausdruck enthält, wie ersichtlich, *eine erste akzessorische Irrationalität, die Quadratwurzel* W'.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung geeigneter $X''_\varkappa$, den beiden noch übrigen Gleichungen (50) entsprechend: $\sum X'_\varkappa X''_\varkappa = 0$, $\sum X''^2_\varkappa = 0$. Zu dem Zwecke bemerken wir vor allem, daß mit jedem Systeme zulässiger $X''_\varkappa$ unendlich viele Größensysteme von der Form $X''_\varkappa - \sigma X'_\varkappa$ gefunden sind (wo σ einen willkürlichen Multiplikator bedeuten soll), welche ebenso, wie die $X''_\varkappa$ selbst, die Gleichungen (50) befriedigen. Um der hieraus entspringenden Unbestimmtheit zu entgehen, wollen wir festsetzen, daß in den aufzusuchenden $X''_\varkappa$ (siehe Formel (51)) der bei den $X'_\varkappa$ benutzte Term $\left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right)$ fehlen soll. Übrigens aber setzen wir

$$X''_\varkappa = Z''_\varkappa + \varrho Y''_\varkappa, \tag{55}$$

und nehmen

$$Y''_\varkappa = \left(x_\varkappa^3 - \frac{s_3}{n}\right) + \mu x_\varkappa, \quad Z''_\varkappa = \left(x_\varkappa^4 - \frac{s_4}{n}\right) + \nu x_\varkappa,$$

wo wir nun μ, ν so bestimmen werden, daß gleichzeitig:

$$\sum X'_\varkappa Y''_\varkappa = 0, \qquad \sum X'_\varkappa Z''_\varkappa = 0 \tag{56}$$

wird, was, wegen (55),

$$\sum X'_\varkappa X''_\varkappa = 0$$

nach sich zieht. Hierbei bleibt das in (55) enthaltene ϱ noch willkürlich. Wir bestimmen dasselbe jetzt aus der Forderung, daß auch noch

$$\sum X''^2_\varkappa = 0$$

sein soll, was die folgende quadratische Gleichung ergibt:

$$\varrho^2 \cdot \sum Y''^2_\varkappa + 2\varrho \cdot \sum Y''_\varkappa Z''_\varkappa + \sum Z''^2_\varkappa = 0. \tag{57}$$

Ist dieselbe gelöst, so haben wir in (55) die gewünschten X''.

Die Durchführung der hiermit angedeuteten Rechnung ergibt zunächst:

$$\mu = -\frac{s_4}{s_2} + \frac{\frac{s_2 s_3}{n} - s_5 + \frac{s_3 s_4}{s_2}}{W'},$$

$$\nu = -\frac{s_5}{s_2} + \frac{\frac{s_2 s_4}{n} - s_6 + \frac{s_3 s_5}{s_2}}{W'},$$

unter W' die Quadratwurzel (53) verstanden, sodann

$$Y''_\varkappa = \left(x_\varkappa^3 - \frac{s_4}{s_2} x_\varkappa - \frac{s_3}{n}\right) + \left(\frac{s_2 s_3}{n} - s_5 + \frac{s_3 s_4}{s_2}\right) \cdot \frac{x_\varkappa}{W'},$$

$$Z''_\varkappa = \left(x_\varkappa^4 - \frac{s_5}{s_2} x_\varkappa - \frac{s_4}{n}\right) + \left(\frac{s_2 s_4}{n} - s_6 + \frac{s_3 s_5}{s_2}\right) \cdot \frac{x_\varkappa}{W'},$$

endlich aus (57) als quadratische Gleichung für das ϱ:

$$\begin{aligned}
&\varrho^2 \left(\left(s_6 - \frac{s_4^2}{s_2} - \frac{s_3^2}{n}\right)\left(-s_2 s_4 + s_3^2 + \frac{s_2^3}{n}\right) + s_2 \left(\frac{s_2 s_3}{n} - s_5 + \frac{s_3 s_4}{s_2}\right)^2 \right) \\
&+ 2\varrho \left(\left(s_7 - \frac{s_4 s_5}{s_2} - \frac{s_3 s_4}{n}\right)\left(-s_2 s_4 + s_3^2 + \frac{s_2^3}{n}\right) + s_2 \left(\frac{s_2 s_3}{n} - s_5 + \frac{s_3 s_4}{s_2}\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \times \left(\frac{s_2 s_4}{n} - s_6 + \frac{s_3 s_5}{s_2}\right) \right) \\
&+ \left(\left(s_8 - \frac{s_5^2}{s_2} - \frac{s_4^2}{n}\right)\left(-s_2 s_4 + s_3^2 + \frac{s_2^3}{n}\right) + s_2 \left(\frac{s_2 s_4}{n} - s_6 + \frac{s_3 s_5}{s_2}\right)^2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Es dürfte keinen Zweck haben, diese Gleichung, *aus der merkwürdigerweise das W' völlig verschwunden ist*, noch weiter zu reduzieren oder ihre Auflösung explizite herzusetzen. Was uns vorwiegend interessiert, ist die bei ihrer Auflösung auftretende Quadratwurzel, die wir W'' nennen wollen. Dieselbe ist, wie W', aus einer rationalen Funktion der Potenzsummen s zu ziehen, die sich von derjenigen, welche bei W' auftritt, als wesentlich verschieden erweist. *W'' ist also neben W' eine mit W' ko-*

ordinierte neue akzessorische Quadratwurzel. In dem Ausdrucke der $X''_\varkappa$ kommen W' und W'' nebeneinander vor.

So weit der spezielle Fall unserer Rechnung. Es ist klar, daß wir auch bei anderweitiger Bestimmung der λ', λ'', sofern wir an der Benutzung gewöhnlicher Methoden festhalten, das Auftreten zweier akzessorischer Quadratwurzeln nicht vermeiden können. Ob es überhaupt unmöglich ist, die Gleichungen (50) ohne geringeren Aufwand an akzessorischen Irrationalitäten zu befriedigen, bleibe dahingestellt. Daß die akzessorischen Irrationalitäten jedenfalls nicht ganz zu vermeiden sind, wurde bereits in § 7 hervorgehoben.

Ich komme noch einmal auf $n = 5$ zurück, um eine Bemerkung über die neuesten diesen Fall betreffenden Arbeiten von Gordan[18]) hinzuzufügen. Wir hatten bei $n = 5$ nur eine Größenreihe $X_\varkappa$ benutzt, die wir der einen Gleichung (48*) unterwarfen. Nun hat Herr Gordan bemerkt, daß es auch bei den Gleichungen fünften Grades aus Gründen der Rechnung bequem sein kann, zwei Größenreihen $X'_\varkappa$, $X''_\varkappa$ zu gebrauchen, welche genau unseren Gleichungen (50) unterworfen werden. Die Bestimmung solcher $X'_\varkappa$, $X''_\varkappa$ erfolgt dann eben so, wie in unserem Falle, nur daß die Quadratwurzel W'' ihren akzessorischen Charakter verliert und in die Quadratwurzel aus der Diskriminante der vorgelegten Gleichung fünften Grades übergeht. In letzterem Umstande allein wird man schon ein Zeichen dafür erblicken, daß es sich bei aller Ähnlichkeit der Formeln doch um wesentlich verschiedene Ansätze handelt. Wir können den Gordanschen Ansatz sofort auf Gleichungen siebenten Grades übertragen, indem wir bei ihnen *drei* Größenreihen $X'_\varkappa$, $X''_\varkappa$, $X'''_\varkappa$ in Betracht ziehen, die dann den Gleichungen genügen müssen:

$$(58)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum X'^2_\varkappa = 0, \quad && \sum X'_\varkappa X''_\varkappa = 0, \quad && \sum X'_\varkappa X'''_\varkappa = 0,\\ & && \sum X''^2_\varkappa \;= 0, && \sum X''_\varkappa X'''_\varkappa = 0,\\ & && && \sum X'''^2_\varkappa \;= 0,\end{aligned}\right.$$

(während bei den Gleichungen sechsten Grades eine solche Übertragung wegen der zu geringen Zahl der bei ihnen zur Verfügung stehenden Parameter λ', λ'', λ''' überhaupt ausgeschlossen ist). Geometrisch besagen die Gleichungen (58), daß wir drei Gerade suchen sollen, die sich wechselseitig schneiden. Das letztere kann in einem Punkte oder in einer Ebene geschehen, und hieraus schließen wir, daß die dritte Quadratwurzel, welche

[18]) Liouvilles Journal, sér. 4, Bd. 1 (1885) sowie in den Math. Annalen, Bd. 28 (1886/87), S. 152ff.

bei Auflösung der Gleichungen (58) benötigt wird, keine akzessorische mehr sein kann, sondern mit der Quadratwurzel aus der Diskriminante der Gleichung siebenten Grades zusammenfallen wird. Ich kann dies an gegenwärtiger Stelle nicht weiter verfolgen.

§ 10.

Berechnung des Schnittpunktes von X' und X''.

Um jetzt den Schnittpunkt der beiden Geraden X', X'' zu berechnen, schreiben wir vor allem die Bedingung hin, daß irgendeine Gerade x (die übrigens mit den Wurzeln x der vorgelegten Gleichung gar nichts zu tun haben soll) die Gerade X' oder X'' schneidet:

$$\sum_0^{n-1} X'_\varkappa x_\varkappa = 0, \quad \text{bez.} \quad \sum_0^{n-1} X''_\varkappa x_\varkappa = 0.$$

Hier substituieren wir nun für die x nach (21), (26) ihre Werte in den p_{ik}. Ich will für $n = 6$ der Formel (17) entsprechend schreiben:

$$(59)\qquad \Pi_\nu = \sum_0^5 (-\alpha)^{\nu\varkappa} \cdot X_\varkappa, \qquad \left(\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right),$$

und für $n = 7$ in Übereinstimmung mit (16):

$$(60)\qquad \Pi_\nu = \sum_0^6 \gamma^{\nu\varkappa} \cdot X_\varkappa, \qquad \left(\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}}\right),$$

wo nun Π in Π' oder Π'' übergehen soll, wenn für die $X_\varkappa$ die $X'_\varkappa$ oder die $X''_\varkappa$ gesetzt werden. Dann werden die Gleichungen in den p_{ik} für $n = 6$:

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \Pi'_0 \frac{p_{12} + p_{34}}{\sqrt{2}} + \Pi'_1 p_{42} + \Pi'_2 p_{23} + \Pi'_3 \frac{-p_{12} + p_{34}}{\sqrt{2}}\\ &\qquad + \Pi'_4 p_{14} + \Pi'_5 p_{13},\\ 0 &= \Pi''_0 \frac{p_{12} + p_{34}}{\sqrt{2}} + \Pi''_1 p_{42} + \Pi''_2 p_{23} + \Pi''_3 \frac{-p_{12} + p_{34}}{\sqrt{2}}\\ &\qquad + \Pi''_4 p_{14} + \Pi''_5 p_{13},\end{aligned}\right.$$

und für $n = 7$:

$$(62)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \Pi'_1 p_{12} + \Pi'_4 p_{13} + \Pi'_2 p_{14} + \Pi'_6 p_{34} + \Pi'_3 p_{42} + \Pi'_5 p_{23},\\ 0 &= \Pi''_1 p_{12} + \Pi''_4 p_{13} + \Pi''_2 p_{14} + \Pi''_6 p_{34} + \Pi''_3 p_{42} + \Pi''_5 p_{23}.\end{aligned}\right.$$

Wir ersetzen jetzt die p_{ik} durch ihre Werte in den z, z' und ordnen nach den z_1, z_2, z_3, z_4. Ich will statt der beiden Gleichungen, welche so aus (61 bez. (62) entstehen, nur je eine hinschreiben, indem ich das Symbol Π^* einführe, welches sowohl Π' als Π'' bedeuten kann. Wir haben dann folgende Gleichungen:

1. bei $n = 6$:

$$(63)\quad \begin{cases} 0 = z_1\left(\quad\cdot\quad + \dfrac{\Pi_0^* - \Pi_3^*}{\sqrt{2}}\cdot z_2' + \Pi_5^* z_3' + \Pi_4^* z_4' \right) \\ + z_2\left(\dfrac{-\Pi_0^* + \Pi_3^*}{\sqrt{2}}\cdot z_1' + \quad\cdot\quad + \Pi_2^* z_3' - \Pi_1^* z_4' \right) \\ + z_3\left(-\Pi_5^* z_1' - \Pi_2^* z_2' + \quad\cdot\quad + \dfrac{\Pi_0^* + \Pi_3^*}{\sqrt{2}}\cdot z_4' \right) \\ + z_4\left(-\Pi_4^* z_1' + \Pi_1^* z_2' - \dfrac{\Pi_0^* + \Pi_3^*}{\sqrt{2}}\cdot z_3' + \quad\cdot\quad \right), \end{cases}$$

und

2. bei $n = 7$:

$$(64)\quad \begin{cases} 0 = z_1(\quad\cdot\quad + \Pi_1^* z_2' + \Pi_4^* z_3' + \Pi_4^* z_4') \\ + z_2(-\Pi_1^* z_1' + \quad\cdot\quad + \Pi_5^* z_3' - \Pi_3^* z_4') \\ + z_3(-\Pi_4^* z_1' - \Pi_5^* z_2' + \quad\cdot\quad + \Pi_6^* z_4') \\ + z_4(-\Pi_2^* z_1' + \Pi_3^* z_2' - \Pi_6^* z_3' + \quad\cdot\quad). \end{cases}$$

Mit diesen Gleichungen (63), (64) *ist jetzt unsere Aufgabe im Prinzip gelöst.* Die Gleichungen (63) oder (64) besagen nämlich, wie zwei Punkte z, z' gegeneinander liegen müssen, damit ihre Verbindungslinie die Gerade X^* treffe. Beide Gleichungen (63) oder (64) werden also für beliebige Werte der $z_1', \ldots, z_4'$ erfüllt sein, wenn man für $z_1, \ldots, z_4$ die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden X', X'' einträgt. Mit anderen Worten: *Die Koordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 des gesuchten Schnittpunktes sind das gemeinsame Lösungssystem, welches den zweierlei Gleichungen* (63) *oder* (64) *zukommt, welche Werte man auch den unbestimmten Größen $z_1', \ldots, z_4'$ beilegen mag.* Ich unterlasse es, die Verhältnisse der z noch explizite zu berechnen, was nur mit Aufgeben der Symmetrie möglich scheint. Wir wollen zusammenfassend sagen, *daß diese Verhältnisse zu dreigliedrigen Determinanten der Lagrangeschen Ausdrücke Π', Π'' proportional sind.* Man vergleiche hierzu das entsprechende Resultat für die Gleichungen vierten und fünften Grades [Ikosaederbuch, S. 188 (oder auch für die Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen, Abh. LVII, S. 408 u. 415)]. Bei den Gleichungen vierten und fünften Grades werden die z_1, z_2 den Lagrangeschen Ausdrücken, die sich aus den $X_\varkappa$ (48*) bilden lassen, direkt proportional.

§ 11.

Einige Bemerkungen über Gleichungen beliebigen Grades.

Indem ich die Betrachtung der Gleichungen sechsten und siebenten Grades an dem hiermit erreichten Punkte abbreche, kann ich nicht umhin, einige Bemerkungen über Gleichungen höheren Grades hinzuzufügen.

Von vornherein ist ersichtlich, wie wir die Entwicklung des § 9 auf Gleichungen höheren (n-ten) Grades zu übertragen haben. Wir schreiben zu dem Zwecke

$$(65)\quad X_\varkappa = \lambda_1\left(x_\varkappa - \frac{s_1}{n}\right) + \lambda_2\left(x_\varkappa^2 - \frac{s_2}{n}\right) + \ldots + \lambda_{n-1}\left(x_\varkappa^{n-1} - \frac{s_{n-1}}{n}\right),$$

unter $x_\varkappa$ die Wurzeln der vorgelegten Gleichung verstanden, bezeichnen mit ν die größte in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl und suchen nun $(\nu - 1)$ Reihen von Größen $X_\varkappa$:

$$X_\varkappa', X_\varkappa'', \ldots, X_\varkappa^{(\nu-1)},$$

welche die folgenden Bedingungen befriedigen:

$$(66)\quad \begin{cases} \sum\limits_0^{n-1} X_\varkappa'^2 = 0, & \sum\limits_0^{n-1} X_\varkappa' X_\varkappa'' = 0, \ldots, & \sum\limits_0^{n-1} X_\varkappa' X_\varkappa^{(\nu-1)} = 0, \\ & \sum\limits_0^{n-1} X_\varkappa''^2 = 0, \ldots, & \sum\limits_0^{n-1} X_\varkappa'' X_\varkappa^{(\nu-1)} = 0, \\ & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ & & \sum\limits_0^{n-1} X_\varkappa^{(\nu-1)^2} = 0, \end{cases}$$

was uns mit Hilfe von $(\nu - 1)$ nebeneinanderstehenden akzessorischen Quadratwurzeln gelingen wird. Wir beachten jetzt, daß durch diese $X', X'', \ldots$ ein bestimmter $(\nu - 2)$-fach ausgedehnter linearer Raum (ein $R_{\nu-2}$) festgelegt wird, welcher ganz in derjenigen quadratischen Mannigfaltigkeit von $(n - 3)$ Dimensionen (in der M_{n-3}^2) enthalten ist, die durch

$$(67)\quad \sum_0^{n-1} X_\varkappa = 0, \quad \sum_0^{n-1} X_\varkappa^2 = 0$$

vorgestellt wird, — derjenige $R_{\nu-2}$ nämlich, dessen Elemente X sich aus den Elementen $X', X'', \ldots$ mit Hilfe von Parametern, die ich $\mu', \mu'', \ldots$ nennen will, nach der Formel zusammensetzen:

$$(68)\quad X_\varkappa = \mu' X_\varkappa' + \mu'' X_\varkappa'' + \ldots + \mu^{(\nu-1)} X_\varkappa^{(\nu-1)}.$$

Dieser $R_{\nu-2}$ wird auf Grund der Formeln (66) *dem Wertsysteme der anfänglichen $x_\varkappa$ kovariant zugeordnet sein.* Nun sind im Falle $n = 2\nu$ die $R_{\nu-2}$ die meist ausgedehnten auf der quadratischen Mannigfaltigkeit (67) enthaltenen linearen Räume. *Daher haben wir für $n = 2\nu$ das* *von uns zunächst anzustrebende Ziel bereits erreicht.* Für $n = 2\nu + 1$ gibt es auf der Mannigfaltigkeit (67) über die $R_{\nu-2}$ hinaus noch zwei Arten von $R_{\nu-1}$, wobei die Beziehung die ist, daß durch jeden der Mannigfaltigkeit angehörigen $R_{\nu-2}$ ein $R_{\nu-1}$ der einen Art und ein $R_{\nu-1}$ der anderen Art hindurchgeht. Wir wollen jetzt unter den beiden $R_{\nu-1}$, welche durch den $R_{\nu-2}$ (68) hindurchlaufen, durch Verabredung den einen festlegen. *Dieser $R_{\nu-1}$ ist dann seinerseits dem Wertsysteme der anfänglichen $x_\varkappa$ kovariant zugeordnet,* nur daß wir nicht mehr sämtliche Vertauschungen der $x_\varkappa$, sondern nur die geraden Vertauschungen derselben in Betracht ziehen dürfen. *Hiermit haben wir auch für $n = 2\nu + 1$ den zunächst in Aussicht zu nehmenden Zielpunkt erreicht.* Wir bemerken hierzu noch, daß die Anzahl der auf der Mannigfaltigkeit (67) enthaltenen meistausgedehnten linearen Räume für $n = 2\nu$ und $n = 2\nu + 1$ übereinstimmend $\infty^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}$ beträgt.

Alle diese Sätze sind, wie man sieht, die genaue Verallgemeinerung der Theoreme, die wir für $\nu = 2$, also $n = 4, 5$, und für $\nu = 3$, also $n = 6, 7$, von früher her kennen. Aber nun tritt der ferneren Entwicklung eine Schwierigkeit entgegen, die wir bei $\nu = 2, 3$ unter Benutzung sozusagen zufälliger Umstände überwunden haben und die wir in prinzipieller Form noch gar nicht anrührten. Im Falle $\nu = 2$ hatten wir nämlich aus *funktionentheoretischen* Gründen schließen können, daß es möglich sei, die bei ihm in Betracht kommenden ∞^1 linearen Räume so durch zwei Verhältnisgrößen $z_1 : z_2$ zu bezeichnen, daß $z_1 : z_2$ bei den Vertauschungen der x lineare Transformationen erleide. Für $\nu = 3$ begründeten wir den analogen Schluß durch Heranziehung *liniengeometrischer Entwicklungen:* es zeigte sich, daß wir die dreifach unendlich vielen alsdann vorhandenen linearen Räume in ganz entsprechender Weise durch vier Verhältnisgrößen $z_1 : z_2 : z_3 : z_4$ bezeichnen können. Für $\nu > 3$ aber versagen solche besondere Hilfsmittel und wir werden die Frage nach der zweckmäßigsten Festlegung der dann vorhandenen linearen Räume durch Parameter, sowie nach dem Verhalten dieser Parameter bei den in Betracht kommenden Vertauschungen der x, auf direktem, algebraischem Wege beantworten müssen. Ich möchte mir vorbehalten, hierauf bei Gelegenheit zurückzukommen, und beschränke mich einstweilen darauf, auf Herrn Lipschitz' Untersuchungen über orthogonale Substitutionen zu verweisen, die ich dabei zu benutzen haben werde[19]).

Göttingen, im Oktober 1886.

[19]) Vgl. Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 11. und 18. Oktober 1880, Bd. 91: *Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions*, sowie die besonders erschienene Schrift: *Untersuchungen über die Summe von Quadraten* (Bonn, Cohn, 1886). [Ich bin später auf die im Text berührte Fragestellung nie zurückgekommen. K.]

LIX. Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré, de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique[1]).

[Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e série, tome 4 (1888).]

.... Lors de mon dernier séjour à Paris, je vous ai raconté que je venais de résoudre affirmativement une question que vous m'aviez posée autrefois à plusieurs reprises. L'équation des 27 droites d'une surface cubique et la trisection des fonctions hyperelliptiques du premier ordre ayant le même groupe[2]), il s'agissait de réduire, s'il était possible, le premier problème au second. J'ai donné là-dessus déjà quelques développements dans une séance de la Société mathématique de France[3]). Permettez-moi d'y revenir aujourd'hui, et d'exposer mes raisonnements d'une manière plus complète. Sans doute, les explications que je vais donner paraîtront encore un peu vagues, comme je n'écris pas des formules détaillées, mais j'espère pourtant qu'elles pourront avoir quelque intérêt.

Qu'il me soit permis d'abord de rappeler, en peu de mots, la forme que j'ai donnée autrefois à la résolution des équations du cinquième degré par les fonctions elliptiques. Dans ce but, je dois vous parler de deux choses: d'abord de la forme normale que j'ai donnée à l'équation modulaire pour la transformation du cinquième ordre des fonctions elliptiques, ensuite de la réduction de l'équation générale du cinquième degré à cette forme normale.

Quant au premier point, considérons les expressions suivantes, dans lesquelles ϱ signifie un facteur indéterminé

$$(1) \qquad \varrho z_1 = e^{\frac{i\pi\tau}{5}} \vartheta_1(\tau, 5\tau), \qquad \varrho z_2 = e^{\frac{4i\pi\tau}{5}} \vartheta_1(2\tau, 5\tau),$$

τ étant le quotient des périodes, suivant la notation de M. Weierstrass.

[1]) Extrait d'une Lettre adressée à M. C. Jordan.

[2]) [Wegen dieser Gruppe vgl. C. Jordans Traité des substitutions, Paris 1870, S. 369.]

[3]) 13 avril 1887.

Il est facile de démontrer que, pour une transformation linéaire quelconque de τ, le quotient $z_1 : z_2$ subit des substitutions linéaires (fractionnaires) à coefficients constants[4]). Ces substitutions étant les mêmes pour deux transformations linéaires qui sont congruentes suivant le module 5, leur nombre devient égal à 60, et la détermination de $z_1 : z_2$ comme fonction des invariants rationnels g_2, g_3 de l'intégrale elliptique équivaut à la résolution complète de l'équation modulaire correspondant à la transformation du cinquième ordre. Maintenant, les substitutions de $z_1 : z_2$ ne sont autre chose que les substitutions bien connues aujourd'hui de l'*icosaèdre*. Soit, comme dans mon Livre[5]),

$$(2)\qquad \begin{cases} f(z_1, z_2) = z_1^{11} z_2 + 11\, z_1^6 z_2^6 - z_1 z_2^{11}, \\ H(z_1, z_2) = -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228\,(z_1^{10} - z_2^{10})\, z_1^5 z_2^5 - 494\, z_1^{10} z_2^{10}. \end{cases}$$

$z_1 : z_2$ dépend de l'équation icosaédrique

$$(3)\qquad \frac{H(z_1, z_2)^3}{1728\, f(z_1, z_2)^5} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27\, g_3^2},$$

et c'est cette équation icosaédrique que je considère ici comme *la forme normale* de l'équation modulaire pour la transformation du cinquième ordre. Faisons encore la remarque suivante. Au lieu des substitutions du quotient $z_1 : z_2$, on peut considérer les substitutions correspondantes unimodulaires des deux variables homogènes z_1, z_2. Comme le déterminant d'une substitution binaire est du deuxième degré dans les coefficients, le nombre de ces substitutions homogènes devient égal à 120. Mais on peut se demander s'il n'est pas possible de trouver parmi elles 60, qui forment elles seules un groupe isomorphe holoédriquement aux substitutions fractionnaires de $z_1 : z_2$. Or, j'ai démontré que c'est impossible. Je reviendrai immédiatement à ce théorème.

Passons maintenant à la résolution des équations du cinquième degré, ou plutôt à leur réduction à la forme icosaédrique que je viens de donner. Sans doute la possibilité de cette réduction dépend en première ligne de ce fait, que le groupe alterné d'une équation du cinquième degré est holoédriquement isomorphe au groupe de l'icosaèdre, mais la réduction elle-même ne repose pas, suivant mes points de vue, sur la considération des groupes: elle appartient plutôt à la Géométrie analytique, ou, si l'on veut, à la théorie des fonctions algébriques. Je ne veux pas répéter ici les détails de cette réduction, que j'ai donnés dans mon Livre, avec tous

[4]) Voir, par exemple, mon Mémoire *Sur les courbes elliptiques normales du $n^{\text{ième}}$ ordre*, etc. (*Mémoires mathématiques de la Société scientifique de Leipzig*, t. 12). [Diese Abh. kommt in Bd. 3 der gegenwärtigen Gesamtausgabe zum Abdruck.]

[5]) *Leçons sur l'icosaèdre et la résolution des équations du cinquième degré.* Leipzig, 1884 (B. G. Teubner). [Vgl. auch meine Arbeit in den Math. Annalen, Bd. 12 (1877) = Abh. LIV.]

les développements nécessaires. C'est un seul point fondamental sur lequel je dois insister ici. Je viens de dire que le nombre des substitutions de l'icosaèdre est nécessairement doublé quand on passe du quotient $z_1 : z_2$ aux quantités homogènes z_1, z_2. C'est pour cela, comme je l'ai démontré, qu'il devient impossible d'opérer la réduction à la forme icosaédrique d'une manière purement rationnelle. La réduction doit donc contenir quelque irrationnalité. Cette irrationnalité n'abaissant pas le groupe de l'équation, je l'appelle une ***irrationnalité accessoire.*** Du reste, cette irrationnalité peut être choisie de différentes manières, par exemple comme la racine carrée d'une fonction rationnelle bien simple des coefficients de l'équation du cinquième degré.

Ceci étant bien conçu, pour venir au but que je me suis proposé ici, j'aurais à faire des considérations tout à fait analogues sur les fonctions hyperelliptiques (du premier ordre) et les équations du vingt-septième degré.

En première ligne donc j'aurai à construire une forme normale pour l'équation modulaire de la transformation du troisième ordre des fonctions hyperelliptiques. Qu'il me soit permis de m'appuyer ici sur les recherches de deux de mes élèves, M. Witting et M. Maschke. M. Witting[6]) s'est occupé de généraliser, pour les fonctions hyperelliptiques, ce que j'avais fait pour les fonctions elliptiques dans ma *Théorie des courbes normales supérieures.* Voici le détail que je dois emprunter à ses recherches. Soit

$$(5)\qquad \vartheta(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

une fonction thêta hyperelliptique impaire quelconque; ϱ un facteur indéterminé. Considérons les quatre fonctions

$$(6)\qquad \varrho z_{\alpha\beta} = e^{\frac{i\pi}{3}(\tau_{11}\alpha^2 + 2\tau_{12}\alpha\beta + \tau_{22}\beta^2)}\, \vartheta(\alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12}, \alpha\tau_{21} + \beta\tau_{22}; 3\tau_{11}, 3\tau_{12}, 3\tau_{22}),$$
$$\alpha, \beta = 0,1;\quad 1,0;\quad 1,1;\quad 1,2,$$
$$[\text{ou} \qquad = 0,2;\quad 2,0;\quad 2,2;\quad 2,1].$$

Ces quatre fonctions doivent être considérées comme étant strictement analogues aux fonctions z_1, z_2 de l'équation (2). Nous constatons d'abord que les quotients de ces quatre fonctions auront la propriété *de subir des substitutions linéaires à coefficients constants* pour chaque transformation linéaire des τ_{ik}, qui laisse inaltérée la caractéristique de la fonction ϑ. Nous voyons ensuite que les substitutions correspondant de cette façon à deux transformations linéaires congruentes suivant le module 3 seront les mêmes. C'est pourquoi le nombre total des substitutions des quotients des z devient égal à un nombre que vous avez déterminé dans votre *Traité des substitutions*[7]), c'est-à-dire à $(3^4 - 1)\, 3^3\, (3^2 - 1)\, 3 = 25920$.

[6]) Math. Annalen, t. 29 (1886/87).

[7]) [Paris, 1870, S. 174.]

Nous considérons ensuite les substitutions homogènes unimodulaires de quatre variables z correspondant aux substitutions fractionnaires des quotients. Le déterminant d'une substitution quaternaire étant du quatrième ordre dans les coefficients, le nombre total de ces substitutions homogènes se trouve égal à $4 \cdot 25920$; mais on démontre qu'il suffit de considérer la moitié seulement, c'est-à-dire $2 \cdot 25920$ substitutions formant à elles seules un groupe isomorphe au groupe des substitutions fractionnaires. L'analogie avec les z_1, z_2 se trouve ici encore une fois conservée, car on a le théorème prouvé par M. Maschke, qu'il est impossible de trouver parmi ces $2 \cdot 25920$ substitutions quelque sous-groupe qui soit également isomorphe au groupe donné.

Il s'agira maintenant de chercher les équations par lesquelles les rapports des z sont liés aux modules algébriques des intégrales hyperelliptiques, équations que nous considérerons dans la suite comme cette *forme normale* de l'équation modulaire de la transformation du troisième ordre qu'il fallait construire. Mais, auparavant, il faut faire une remarque essentielle qui n'était pas nécessaire dans le cas des fonctions elliptiques. Pour obtenir les substitutions linéaires des quotients des z, nous avons dû considérer seulement ces transformations linéaires des τ_{ik}, qui laissaient inaltérée la caractéristique de la fonction (5). C'est pourquoi nous ne devons pas considérer ici comme modules algébriques des intégrales hyperelliptiques les invariants *rationnels* de cette forme binaire du sixième degré qui se trouve sous le signe radical, mais certains invariants *irrationnels* correspondant à la caractéristique de la fonction ϑ. Notre fonction ϑ étant impaire, elle est associée à une décomposition déterminée de la forme sextique en un facteur linéaire et un facteur du cinquième degré. Or, suivant les idées de M. Weierstrass, une forme ainsi décomposée peut être changée rationnellement dans celle-ci:

$$(7) \qquad f = x_2(4x_1^5 - g_2 x_1^3 x_2^2 - g_3 x_1^2 x_2^3 + g_4 x_1 x_2^4 - g_5 x_2^5).$$

Ce sont ces coefficients g_2, g_3, g_4, g_5 qui sont les invariants irrationnels que nous devons employer dans notre étude des quantités z. Quant aux équations explicites, par lesquelles ils sont liés aux z, c'est la recherche dans laquelle M. Maschke se trouve engagé. Les calculs n'étant pas encore achevés, il suffira d'indiquer ici que les résultats seront publiés prochainement dans les *Mathematische Annalen* [8]).

Considérons maintenant l'équation du vingt-septième degré des droites d'une surface cubique. Comme vous l'avez prouvé dans votre Traité, le

[8]) [Das ist in den Math. Annalen, Bd. 33 (1888/89) geschehen. Jedoch hat Maschke dort nur erst das volle Formensystem der z aufgestellt. Den Zusammenhang desselben mit dem g hat dann Burkhardt in den Math. Annalen, Bd. 41 (1891), S. 331 gegeben. K.]

groupe de cette équation, après l'adjonction d'une racine carrée [9]), se trouve isomorphe sans mériédrie au groupe des 25920 substitutions fractionnaires des quotients des z. Or je ne considérerai pas quelques autres qualités spéciales de cette équation, mais je m'occuperai, dans ce qui suit, de toutes les équations du vingt-septième degré ayant le même groupe. Est-il possible de réduire ces équations *rationnellement* au problème des z, que nous avons défini? D'après les indications données pour les équations du cinquième degré, cela dépend des substitutions homogènes unimodulaires, correspondant aux substitutions fractionnaires des quotients des z. Si le groupe de ces substitutions homogènes se trouvait holoédriquement isomorphe au groupe des substitutions fractionnaires, la réduction rationnelle s'opérerait facilement par un procédé que j'ai donné dans le tome 15 des *Mathematische Annalen* [10]) et sur lequel je reviendrai tout à l'heure. Mais, comme le groupe des substitutions homogènes des z est nécessairement deux fois plus grand que le groupe des substitutions fractionnaires, la réduction rationnelle devient impossible; il faut donc introduire quelque irrationnalité accessoire.

Voici maintenant une méthode facile de réduction. Je la donne sous la même forme géométrique sous laquelle elle s'est présentée à mon esprit, en relation intime, comme vous le verrez, avec mes anciennes recherches sur l'espace réglé.

Le groupe des substitutions homogènes des z n'étant pas holoédriquement isomorphe au groupe de l'équation proposée, la première chose à faire consiste à en déduire un autre groupe de substitutions homogènes qui le soit. Dans ce but il suffit évidemment de considérer les substitutions des déterminants $p_{ik} = z_i z'_k - z'_i z_k$, formées de deux séries de variables cogrédientes z, z', ou bien les coefficients a_{ik} d'une forme linéaire des p_{ik}

$$\sum a_{ik} p_{ik},$$

c'est-à-dire *les coordonnées d'un complexe linéaire.*

Maintenant, par le procédé donné au tome 15 des *Mathematische Annalen*, nous sommes en état de construire six fonctions rationnelles des vingt-sept racines x de l'équation proposée, qui soient des a_{ik}, c'est-à-dire qui se substituent comme les a_{ik}, quand on effectue d'une part sur les x les substitutions du groupe de l'équation et d'autre part sur les z les substitutions linéaires correspondantes. Nous disons, suivant l'expression

[9]) Quant à cette racine carrée, j'ai démontré qu'elle se rapporte au discriminant de la surface cubique, c'est-à-dire à cette expression, qui, égalée à zéro, donne la condition pour l'existence d'un point double.

[10]) *Mémoire sur la résolution de certaines équations du septième et du huitième degré* (1879). [Vgl. die oben abgedruckte Abh. LVII.]

employée dans mon Livre, que nous avons coordonné d'une manière *covariante* aux racines x un certain complexe linéaire de l'espace des z.

Tout ce qui reste à faire maintenant est de coordonner à ce complexe linéaire d'une manière covariante un point z. Or c'est le même problème duquel je me suis occupé récemment dans mes recherches sur la résolution des équations générales du sixième et du septième degré[11]). On commence à coordonner au complexe a_{ik} d'une manière covariante et rationnelle trois autres complexes $a'_{ik}, a''_{ik}, a'''_{ik}$ et l'on cherche ensuite, suivant les règles connues, deux combinaisons linéaires de ces complexes, qui représentent des lignes droites, se coupant en un point. C'est cette dernière opération qui introduit une irrationnalité accessoire, composée de deux racines carrées. Mais nous voilà parvenus au but que nous nous sommes posé; car le point d'intersection des deux droites, c'est bien le point z qu'il fallait construire.

En effet, les coordonnées z du point, que nous venons de déterminer, dépendront des racines x de l'équation proposée, de telle sorte qu'elles peuvent être définies par un *problème normal*, dans lequel g_2, g_3, g_4, g_5 ont été remplacés par des fonctions des coefficients de l'équation du vingt-septième degré rationnellement connues. En calculant ensuite les z par les formules hyperelliptiques (6), nous avons résolu l'équation du vingt-septième degré.

Göttingue, le 22 septembre 1887.

[Ich habe schon in den Bemerkungen zu Abh. LVII, S. 416 angegeben, daß es mir 1880 gelang, die dort genannten endlichen Gruppen linearer Substitutionen von $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ Variabeln (wo n eine ungerade Primzahl bedeutet) aus der Theorie der elliptischen Thetafunktionen abzuleiten. Als ich mich dann in meiner Leipziger Zeit (insbesondere im Sommer 1885) zum ersten Male mit den hyperelliptischen Theta des Geschlechtes Zwei eingehender beschäftigte, war es natürlich, daß ich nach endlichen Gruppen linearer Substitutionen, die von dort aus entstehen, Ausschau hielt. Ich stieß zunächst auf die Bemerkung, daß die Gruppen von 11520 Kollineationen des dreidimensionalen Raumes, die man erhält, wenn man die kanonischen Linienkoordinaten $x_1, \ldots, x_6$ von Abh. II (Bd. I dieser Ausgabe) auf alle Weisen vertauscht und damit beliebige Vorzeichenwechsel der x verbindet, die mit der jeweiligen Vertauschung zusammen eine Substitutionsdeterminante $+1$ liefern, bei der Zweiteilung der hyperelliptischen Perioden auftritt; ich bezeichnete sie dementsprechend als die Gruppe der Borchardtschen Moduln. Man vergleiche die Fußnote [2]) auf S. 439 (Abh. LVIII), insbesondere die dort genannten Arbeiten von Herrn Reichardt. Ich sah ferner die Möglichkeit, für ungerade Primzahlen n zu Substitutionsgruppen von $\frac{n^2-1}{2}$ und $\frac{n^2+1}{2}$ Variabeln zu gelangen, was u. a. für $n=3$ eine endliche Gruppe

[11]) Math. Annalen, t. 28 (1889). [Vgl. die vorstehend abgedruckte Abh. LVIII.]

von 25920 Kollineationen des dreidimensionalen Raumes ergeben mußte. Den hiermit umschriebenen Aufgabenkreis übergab ich Herrn Witting, der Ostern 1886 mit mir nach Göttingen ging. Von hier aus ist dessen schon oben genannte Abhandlung in Bd. 29 der Math. Annalen entstanden (Über Jacobische Funktionen k-ter Ordnung von zwei Variabeln, 1887), sowie insbesondere auch seine Göttinger Dissertation (Über eine der Hesseschen Konfiguration der ebenen Kurve dritter Ordnung analoge Konfiguration im Raume, Dresden 1887). Es folgten Vorlesungen, die ich im Sommer 1887 und im Winter 1887/88 über hyperelliptische Funktionen in Göttingen gehalten habe. Maschke hat im Anschluß daran sehr bald das volle Formensystem der Gruppe der Borchardtschen Moduln bestimmt (Math. Annalen, Bd. 30, 1887) und einige Zeit darauf das volle System der quaternären Gruppe von 51840 Substitutionen, welche im dreidimensionalen Raume die Gruppe der 25920 Kollineationen ergibt (Math. Annalen, Bd. 36, 1889/90). In der Folge hat dann insbesondere Burkhardt meine hier in Betracht kommenden Problemstellungen weiter behandelt. Es kommen hierfür namentlich drei Abhandlungen in Betracht, die er unter dem gemeinsamen Titel „Untersuchungen aus dem Gebiet der hyperelliptischen Modulfunktionen" in den Bänden 36, 38 und 41 der Math. Annalen veröffentlicht hat (1889, 1890, 1891). Hier werden nicht nur die Resultate von Witting und Maschke weiter ausgeführt, sondern es werden namentlich auch (in Bd. 41) die Aufgaben, welche ich in dem hier abgedruckten Briefe an C. Jordan stelle, in einfachster Weise beantwortet. Ich nannte bereits (Fußnote [*]) auf S. 476) den von ihm gegebenen Zusammenhang der Weierstraßschen Invarianten g_2, g_3, g_4, g_5 mit den Formen des Maschkeschen Formensystems. Insbesondere aber fand Burkhardt, daß man bei einer Gleichung 27. Grades der in Betracht kommenden Gruppe übersichtliche *lineare* Verbindungen der Wurzeln angeben kann, welche sich ohne weiteres wie die Koordinaten a_{ik} eines linearen Komplexes substituieren. — Indem ich übrigens auf Burkhardts Originaldarstellung verweise, bemerke ich noch, daß neuerdings Herr Coble in Bd. 18 der American Transactions (1916) auf die einschlägigen Fragen zurückgekommen ist. K.]