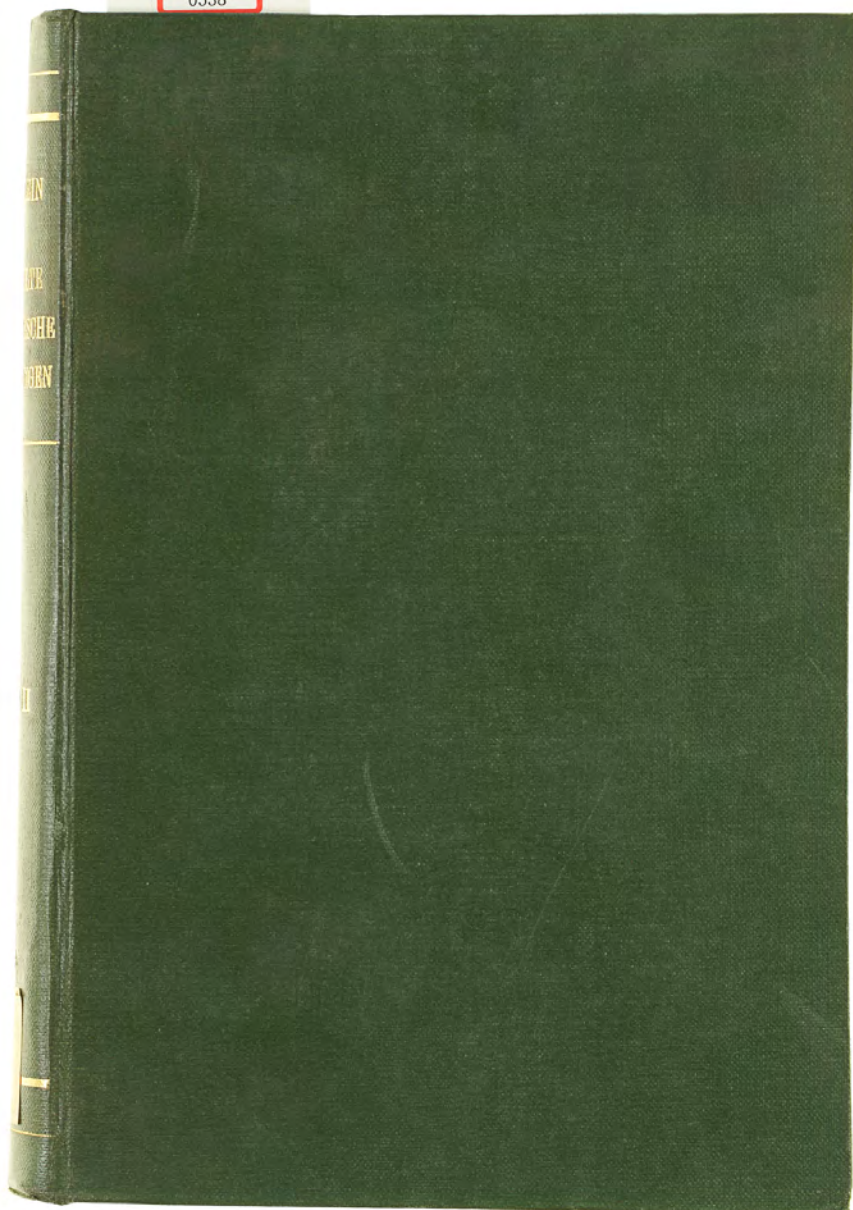




桑木文庫
洋書
0538



IN
TE
SHE
REN

桑木文庫

洋書

0538

物理

08

K

11.2

理学部 洋 遡及

022232002008074



九州大学蔵書



物理

08
K
11.

九州帝國大學工科大学

CA
805550
大正22年 5月 27日
數學物理學教室

KLEIN
GESAMMELTE MATHEMATISCHE
ABHANDLUNGEN

ZWEITER BAND
ANSCHAULICHE GEOMETRIE
SUBSTITUTIONSGRUPPEN UND GLEICHUNGSTHEORIE
ZUR MATHEMATISCHEN PHYSIK

HERAUSGEGEBEN
VON
R. FRICKE UND H. VERMEIL
(VON F. KLEIN MIT ERGÄNZENDEN ZUSÄTZEN VERSEHEN)

MIT 185 TEXTFIGUREN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922



物理

08
K

11.



Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen,
vorbehalten.

• Copyright 1922 by Julius Springer in Berlin. •

VORWORT.

Bei der Herausgabe des vorliegenden Bandes von Felix Kleins gesammelten mathematischen Abhandlungen sind dieselben Prinzipien befolgt worden, die in dem Vorwort des ersten Bandes als maßgebend aufgestellt wurden. Die Anordnung der einzelnen Abhandlungen ist wieder nach sachlichen Gesichtspunkten und in den einzelnen so entstehenden Abschnitten chronologisch erfolgt. So umfaßt der zweite Band drei ziemlich lose nebeneinanderstehende Hauptabschnitte. Der erste bringt die Abhandlungen Kleins zur Gestaltenlehre algebraischer Gebilde und Analysis Situs, sowie einige Aufsätze erkenntnistheoretischen Inhaltes, welche die Bedeutung der Anschauung für die mathematische Forschung beleuchten. Im zweiten Abschnitt sind die Arbeiten über endliche Gruppen linearer Substitutionen und ihre Anwendung auf die Lehre von der Auflösung algebraischer Gleichungen vereinigt, insbesondere die auf die Lehre von den regulären Körpern bezüglichen; dagegen sollen die Arbeiten über unendliche Gruppen linearer Substitutionen sowie diejenigen über endliche Gruppen, in denen diese mittels der Methoden der Funktionentheorie (speziell der Lehre von den elliptischen Funktionen und Modulfunktionen) aufgestellt werden, erst im dritten Bande folgen. Der dritte Abschnitt enthält Beiträge zur mathematischen Physik, nämlich einerseits Arbeiten über lineare Differentialgleichungen, speziell Lamésche Funktionen, hypergeometrische Funktionen und die sie betreffenden Oszillationsfragen und andererseits Aufsätze über verschiedene Gegenstände der allgemeinen Mechanik. Jedoch muß gesagt werden, daß bei den Arbeiten über lineare Differentialgleichungen die Abgrenzung gegen Band 3 sich nur künstlich bewerkstelligen ließ, indem hier wesentlich die Realitätsuntersuchungen gebracht wurden, während die allgemeinen Fragen der Funktionentheorie noch nach Möglichkeit zurückgeschoben wurden, wodurch dann Band 3 einheitlicher wird.

Zur Vorbereitung für den Wiederabdruck der im vorliegenden Bande vereinigten Abhandlungen hat Klein wieder vor einem kleinen Kreise von Zuhörern Vorträge über die in Betracht kommenden Gebiete seiner Produktion, sowie über die Beziehung seiner Arbeiten zu denen von Freunden und Schülern gehalten. Aus diesen Vorträgen sind dann wesentlich die Vorbemerkungen zu den genannten Abschnitten, sowie die Zusätze und Bemerkungen zu den einzelnen Arbeiten entstanden. In einigen dieser Zusätze ist es Klein gelungen, etwelche der in seinen Abhandlungen noch ungeklärt gebliebenen Fragen weiter zu fördern.



物理
08
K
11.

IV

Vorwort.

An die Stelle von Ostrowski, der als wissenschaftlicher Hilfsarbeiter an die Universität Hamburg ging, trat Vermeil als Herausgeber ein. In zahlreichen Besprechungen mit Klein hat Vermeil die Drucklegung der einzelnen Abhandlungen vorbereitet. Das gesamte Figurenmateriale wurde von ihm nachgeprüft, zahlreiche Zeichnungen neu gezeichnet und eine größere Anzahl von Figuren überhaupt erst dieser Gesamtausgabe eingefügt. Einige ergänzende Bemerkungen, besonders eine größere zur Gestaltenlehre der Flächen dritter Ordnung, stammen von ihm.

Wir haben wieder mehreren Fachgenossen für die freundliche Hilfe, die sie uns bei der Herausgabe zuteil werden ließen, zu danken. Frl. E. Noether hat uns bei der Durchsicht der Arbeiten über lineare Gruppen und algebraische Gleichungen, sowie bei denen über lineare Differentialgleichungen mit ihrem Rat wesentlich unterstützt. Herr E. Bessel-Hagen hat an der Vorbereitung zum Abdruck der Arbeit über die Gruppe mit 168 Substitutionen Anteil genommen. Vor allen Dingen aber hat Herr A. Bokowski sämtliche Korrekturen und Revisionen des Textes mit großer Sorgfalt gelesen. — Herr K. Hensel war so freundlich, uns den Einblick in einzelne noch unveröffentlichte Teile des wissenschaftlichen Nachlasses von L. Kronecker zu erlauben. Die Firma Charles Scribners Sons in New-York gestattete uns freundlichst den Wiederabdruck der bei ihr erschienenen von H. B. Fine ausgearbeiteten Vorträge: The mathematical Theory of the Top. Besonders haben wir wieder der Firma B. G. Teubner dafür zu danken, daß sie einige ältere Bände der Mathematischen Annalen der Druckerei als Vorlage zur Verfügung gestellt hat.

Die Verlagsfirma Julius Springer hat trotz der immer schwieriger werdenden wirtschaftlichen Lage nicht nur diesen zweiten Band hergestellt, sondern auch die Herausgabe des dritten (letzten) Bandes dieser Gesamtausgabe übernommen, welcher die eigentlich funktionentheoretischen Arbeiten bringen soll. Die Fertigstellung der Gesamtausgabe ist völlig sichergestellt, da infolge Entgegenkommens der Verlagsbuchhandlung bereits der größte Teil des dritten Bandes gesetzt ist. — Daß der vorliegende zweite Band nicht minder würdig ausgestattet ist als der erste, wird jeder Benutzer sofort sehen. Die Verlagsfirma hat in der Tat allen unsern Wünschen und Anregungen in entgegenkommendster Weise entsprochen. Die Firma Julius Springer hat so durch Herausgabe dieses zweiten Bandes aufs neue bewiesen, daß sie trotz aller sich häufenden Hemmungen bemüht ist, das Ansehen und die Geltung der deutschen Wissenschaft zu erhalten und zu fördern. Sie kann des Dankes aller Mathematiker gewiß sein.

Braunschweig und Göttingen, im Juni 1922.

Die Herausgeber.

INHALTSVERZEICHNIS DES ZWEITEN BANDES.

	Seite
Vorwort der Herausgeber	III
Anschauliche Geometrie.	
Vorbemerkungen zu den Arbeiten zur anschaulichen Geometrie	3
XXXIV. Vier Modelle zur Theorie der Linienkomplexe zweiten Grades (1871)	7
XXXV. Über Flächen dritter Ordnung (1873)	11
Zusatz I: Über Flächen dritter Ordnung mit konischen und biplanaren Punkten	44
Zusatz II: Über die durch die 27 reellen Geraden vermittelte Zerlegung der Clebschen Diagonalfäche	56
XXXVI. Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen (Zwei Aufsätze aus den Jahren 1874 und 1875/76)	63
XXXVII. Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve (1876)	78
XXXVIII. Über eine neue Art der Riemannschen Flächen. (Erste Mitteilung.) (1874)	89
XXXIX. Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades. (Erster Aufsatz.) (1876)	99
XI. Über eine neue Art der Riemannschen Flächen. (Zweite Mitteilung.) (1876)	136
XLI. Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades. (Zweiter Aufsatz.) (1876/77)	156
XLII. Über Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalkurve der φ (1892)	170
XLIII. Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen (1892)	198
XLIV. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung (1895)	209
Vorbemerkungen zu den Aufsätzen über Erkenntnistheorie	212
XLV. Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve (1873)	214
XLVI. On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences (1893)	225
XLVII. Über Arithmetisierung der Mathematik (1895)	232
XLVIII. Auszug aus dem Gutachten der Göttinger philosophischen Fakultät betreffend die Beneke-Preisaufgabe für 1901 (1901)	241
XLIX. Grenzfragen der Mathematik und Philosophie (1906)	247
Substitutionsgruppen und Gleichungstheorie.	
Zur Entstehung der Arbeiten über endliche Gruppen linearer Substitutionen und die Auflösung algebraischer Gleichungen	255
I. Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen (1871)	262
LI. Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst (1875/76)	275
LII. Über [algebraisch integrierbare] lineare Differentialgleichungen. (Erster Aufsatz.) (1876)	302



物理

08

K

11.

VI

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
LIII. Über [algebraisch integrierbare] lineare Differentialgleichungen. (Zweiter Aufsatz.) (1877)	307
LIV. Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder (1877)	321
Ergänzende Bemerkungen zu Gordan's Arbeit über Gleichungen fünften Grades in Bd. 13 der Math. Annalen	380
LV. Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzel- zeichen (1905/06)	385
LVI. Über Gleichungen siebenten Grades. (Vorläufige Mitteilung.) (1877/78)	388
LVII. Über die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade (1879)	390
Über Gordan's Arbeiten betreffend die Probleme mit einer Gruppe von 168 Substitutionen	426
LVIII. Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades (1886/87)	439
LIX. Sur la résolution, par les fonctions hyperelliptiques, de l'équation du vingt-septième degré de laquelle dépend la détermination des vingt-sept droites d'une surface cubique (1888)	473
LX. Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado (1899)	480
LXI. Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades (1905)	481

Zur mathematischen Physik.

Zur Entstehung der Beiträge zur mathematischen Physik 507

A. Lineare Differentialgleichungen.

LXII. Über Lamé'sche Funktionen (1881)	512
LXIII. Über [die Randwertaufgabe des Potentials für] Körper, welche von konfokalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind (1881)	521
LXIV. Zur Theorie der allgemeinen Lamé'schen Funktionen (1890)	540
LXV. Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe (1890)	550
LXVI. Zur Darstellung der hypergeometrischen Funktion durch bestimmte Integrale (1891)	568
LXVII. Über den Hermiteschen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung (1892)	573
LXVIII. Autographierte Vorlesungshefte (Die hypergeometrische Funktion) (1894)	578
LXIX. Autographierte Vorlesungshefte (Über lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung) (1895)	583
Zum Oszillationstheorem jenseits der Stieltjes'schen Grenze	597

B. Allgemeine Mechanik.

LXX. Über neuere englische Arbeiten zur Mechanik (1891/92)	601
LXXI. Über das Bruns'sche Eikonol (1901)	603
LXXII. Räumliche Kollineationen bei optischen Instrumenten (1901)	607
LXXIII. The present state of Mathematics (1893)	613
LXXIV. Über die Bewegung des Kreisels (1896)	616
LXXV. The mathematical Theory of the Top (1896/97)	618
LXXVI. On the Stability of a sleeping Top (1897)	655
LXXVII. (Zusammen mit K. Wieghardt.) Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwell'schen Arbeiten	660
LXXVIII. Über Selbstspannungen ebener Diagramme (1909)	692
LXXIX. Zu Painlevé's Kritik der Coulomb'schen Reibungsgesetze (1910)	704
LXXX. Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten (1910)	710



Anschauliche Geometrie.



物理

08

K

11.

Vorbemerkungen zu den Arbeiten zur anschaulichen Geometrie.

Untersuchungen über die gestaltlichen Verhältnisse der Kurven und Flächen, überhaupt die im Raume geduteten Gebilde der Analysis, haben mich von je besonders interessiert. Den ersten Anstoß zu einschlägigen Arbeiten hat mir noch während meiner Bonner Studienzeit meine Assistententätigkeit bei Plücker gegeben. Hieran knüpft das weiterhin an erster Stelle abgedruckte Stück XXXIV unmittelbar an. Plücker selbst hatte seine Modelle von Komplexflächen nach geeigneter Annahme der in der Gleichung vorkommenden Konstanten nur erst empirisch aus den Gleichungen der horizontalen Schnitte, bez. der durch die z-Achse hindurchgehenden „Meridianschnitte“ konstruieren lassen. Hierbei hatte ich ihm als Assistent zur Hand zu gehen und habe danach in dem zweiten, von mir 1869 herausgegebenen Teil von Plücker's „Neuer Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement“ eine Übersicht über die zunächst in Betracht kommenden Flächenarten gegeben. Im Gegensatz dazu sind die hier unter XXXIV besprochenen, 1871 von mir herausgegebenen Zinkmodelle geometrisch konstruiert worden, indem ich die Ebenen benutzte, welche die Flächen nach Erstreckung ganzer Kegelschnitte berühren. Hierbei ist mir, wie schon S. 60 des ersten Bandes der vorliegenden Gesamtausgabe erwähnt, in hervorragender Weise mein Freund Wenker behilflich gewesen. Wir haben dabei insbesondere auf das Modell der allgemeinen Komplexfläche eine ganz außerordentliche Mühe verwandt, indem wir uns einen Fall aussuchten, welcher keinerlei besondere, den Überblick und gleichzeitig die Konstruktion erleichternde Symmetrien besaß. Bei den anderen Modellen ist dieses Prinzip, welches sich weiterhin als nicht zweckmäßig erwies, bereits verlassen. Im übrigen ist auch ihre Anfertigung nur erst Pionierarbeit gewesen, d. h. ein erstes Eindringen in ein noch recht unbekanntes Gebiet. Die allgemeine Erfassung der für dieses maßgebenden gestaltlichen Verhältnisse hat sich, wie aus XXXIV hervorgeht, nur erst allmählich durchgesetzt, wobei mein alter Schüler Rohn das Beste getan hat.

Einen wesentlichen Impuls hatten meine hier in Betracht kommenden Bestrebungen auch dadurch erhalten, daß ich Pfingsten 1868, gelegentlich der damaligen Zusammenkunft von Mathematikern auf der Bergstraße, das später vielbesprochene (auch noch ganz unsymmetrische, durch empirische Konstruktion hergestellte) Modell Christian Wieners einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Graden hatte kennen lernen. Erst später habe ich dann — 1870 in Paris durch Besichtigung der Sammlungen des Conservatoire des Arts et Métiers und bald hernach durch Besuch der technischen Hochschulen in Darmstadt und Karlsruhe, — den ganzen Umfang der Vorarbeiten erfaßt, welche die darstellenden Geometer zwecks anschaulicher Erfassung höherer Raumgebilde schon damals geleistet hatten.

Jedenfalls stand bei mir, als ich mich 1871 in Göttingen habilitierte, bereits fest, daß ich auf diesem Gebiete weiter arbeiten müssen. Diese Absicht wurde in lebhafter Weise von Clebsch unterstützt, der im Sommer 1872 selbst in gleicher Richtung einsetzte, indem er durch den von Zürich herübergekommenen Ad. Weiler, der die Tradition von Fiedler mitbrachte, die zu einem reellen Pentaeder gehörige



Diagonalfäche dritter Ordnung konstruieren ließ, welche 27 reelle Gerade in übersichtlicher Gruppierung aufweist. Clebsch hat damals auch Rodenberg zu seinen von der Pentaedergleichung ausgehenden allgemeinen Untersuchungen über die Gestalten der F_3 angeregt; Rodenbergs Göttinger Dissertation ist freilich erst 1874 erschienen und seine abschließende Arbeit in Bd. 14 der Math. Annalen (1878), die 1882 zur Veröffentlichung einer vollen Serie von Modellen der F_3 im Verlage von L. Brill in Darmstadt¹⁾ führte, bereits durch meine eigenen Untersuchungen von 1872–73 (siehe unten Abb. XXXV) beeinflusst. Mein Ausgangspunkt war, daß ich zunächst die F_3 mit vier reellen Doppelpunkten konstruierte und aus ihr allgemeinere Flächen durch kontinuierliche Änderungen herstellte. Über die Tragweite dieses Verfahrens (s. u.) konnte ich mich noch in derselben Sitzung der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften äußern (August 1872), in der Clebsch das fertige Modell seiner Diagonalfäche vorlegte (Göttinger Nachrichten 1872, S. 403).

Über die weitere Entwicklung und innere Verknüpfung meiner hierher gehörigen Spezialuntersuchungen (vgl. Abb. XXXV u. f.) wird weiter unten noch einiges Nähere gesagt. Hier werde bsiläufig der damit parallellaufenden organisatorischen Bestrebungen gedacht, die damals von vielen Seiten mit Eifer aufgenommen wurden. Ich selbst habe mich gleich in meiner Erlanger Antrittsrede (Dez. 1872) für die Einrichtung einer mathematischen Modellsammlung und zugehöriger Zeichensäle (N.B. auch an der Universität) nachdrücklich eingesetzt. Bald darauf, Ostern 1873, konnte mit der damals in Göttingen abgehaltenen Mathematikerversammlung bereits eine erste Ausstellung mathematischer Modelle verbunden werden. Eine systematische Ausgestaltung nahmen die Dinge insonderheit, als ich von 1875–80 an der Münchener technischen Hochschule mit A. Brill, der aus Darmstadt kam, zusammenwirken durfte. Nun wurde ein eigenes mathematisches Laboratorium eingerichtet, dessen Leitung A. Brill übernahm und aus dem eine große Zahl der im Verlage seines Bruders L. Brill bald erscheinenden Modelle hervorgegangen ist. Als ich Herbst 1880 an die Universität Leipzig übersiedelt war, habe ich dort diese Bestrebungen fortgesetzt, wobei W. Dyck, der schon in München mein Assistent gewesen war, meine beste Hilfe wurde. Nachdem Dyck 1884 als Nachfolger von Brill an die Münchener Technische Hochschule berufen war, hat dort die Entwicklung gesteigerten Fortgang genommen. Einen Höhepunkt derselben bezeichnete die wesentlich durch ihn namens der Deutschen Mathematiker Vereinigung zusammengebrachte Münchener Ausstellung von 1893, über deren reichen Inhalt ein umfangreicher, von ihm zusammengestellter Katalog Auskunft gibt, dessen Vertrieb später E. G. Teubner übernahm. Parallel damit hat auf der Weltausstellung zu Chicago eine ebenfalls von Dyck vorbereitete Ausstellung deutscher mathematischer Modelle stattgefunden, die ich als Kommissar des preußischen Unterrichtsministeriums zu erläutern hatte. Gegenwärtig entbehrt wohl keine deutsche Hochschule mehr einer bez. Sammlung. Auch bot die von A. Gutzmer und M. Disteli gelegentlich des ersten in Deutschland abgehaltenen Internationalen Mathematischen Kongresses 1905 in Heidelberg veranstaltete Ausstellung vieles Neue. Immerhin muß man sagen, daß die ganze hiermit gemeinte Bewegung unter dem Einfluß der in den Vordergrund getretenen mehr abstrakten mathematischen Tendenzen in den letzten 20 Jahren etwas abgeflaut hat. Um so mehr sollte ihrer hier gedacht werden²⁾. Wenn man an den folgerichtigen Fortschritt der Wissenschaft glaubt, so ist sicher, daß sie als wesentlicher Bestandteil in neue Entwicklungsphasen eingehen

¹⁾ Später M. Schilling, Leipzig.

²⁾ Wie sich dieselbe in die allgemeine Entwicklung unseres neuzeitlichen Hochschulwesens einordnet, schildert in übersichtlicher Weise W. Lorey in seiner Abhandlung über das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten (Bd. III 1, II der von mir im Auftrage der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission herausgegebenen Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland; siehe insbesondere S. 323–327 daselbst).

wird, die sich jetzt schon vorzubereiten scheinen. Indem ich mich so ausdrücke, denke ich sowohl an den Aufschwung der angewandten Mathematik, den die Neuzeit gebracht hat, als auch an die hochtheoretischen Untersuchungen, die auf eine Verbindung der geometrischen Gestaltenlehre mit der Mengenlehre hinielen.

Die soweit skizzierte Entwicklung steht, jedenfalls was meine ersten hier abgedruckten Arbeiten angeht, im ganzen im Zeichen der projektiven Geometrie. Am meisten Anregung habe ich in dieser Hinsicht, wie noch durch Einzelheiten zu belegen sein wird, durch meinen dänischen Freund H. G. Zeuthen erhalten. Aber gemäß dem allgemeinen Arbeitsplane, den ich verfolgte, trat schon in meiner Erlanger Zeit ein neuer, weittragender Impuls hinzu, indem ich begann, mich mit dem Riemannschen Ideenkreis auseinanderzusetzen. Mich konnte der nur mehr äußerliche Zusammenhang der von beiden Seiten her erreichten Resultate, wie ihn Clebsch gegeben hatte, nicht befriedigen. Die Zahl p ist bei Riemann zunächst ein Charakteristikum für den „Zusammenhang“ einer geschlossenen Fläche. Es war für mich ein geradezu quälendes Problem, was diese Auffassung mit der Gestalt der zugehörigen algebraischen Kurve zu tun haben möchte, und ich war glücklich, als es mir gelang (vgl. Abb. XXXVIII und XL) hierauf durch Konstruktion der „neuen“ Riemannschen Flächen eine überaus einfache Antwort zu finden. Ich habe diesen Gegenstand soweit verfolgt, daß ich nicht nur den Verlauf des elliptischen Integrales erster Gattung bei den Kurven dritten Grades (siehe Abb. XXXVIII) sondern auch der zu $p=3$ gehörigen überall endlichen Integrale bei den Kurven vierten Grades anschaulich verstehen und die gesamten hinsichtlich der Realität der auftretenden Berührungskurven in Betracht kommenden Verhältnisse aus der Figur ablesen konnte (siehe Abb. XXXIX und XLI). Für Kurven n -ten Grades aber habe ich wenigstens die Grundlage für weitergehende Untersuchungen gewonnen.

Und doch war der so gewonnene Kontakt mit dem Riemannschen Ideenkreise nur erst ein vorläufiger. Als Definition der algebraischen Kurve galt noch immer ihre Gleichung, bez. die gesetzmäßige Erzeugung, nicht die Riemannsche Fläche als solche. Ich habe den Übergang zu dem, was ich den „echten“ Riemann zu nennen pflege, also die Benutzung des Riemannschen Existenztheorems unmittelbar von der Fläche aus, erst von 1877 an vollzogen, als sich meine Arbeiten der Theorie der elliptischen Modulfunktionen zuzuwenden begannen. Hiervon, und von der maßgebenden Rolle, welche dabei für mich nach wie vor konkrete geometrische Figuren spielen, wird erst im folgenden (letzten) Bande der Gesammelten Abhandlungen im Zusammenhang die Rede sein. Nur einiges wenige wird im gegenwärtigen Bande (in Abb. XLII), weil es den Resultaten nach mit den vorangehenden Abhandlungen unmittelbar zusammenhängt, vorweg genommen. Hierdurch entsteht eine gewisse Diskontinuität der Darstellung, die ich zu entschuldigen bitte. Im übrigen aber möchte ich folgendes ausführen:

Unabhängig von dem Wechsel der logischen Grundlagen ist hier, wie schließlich in allen meinen Untersuchungen, die Arbeit mit der räumlichen Vorstellung als solcher, d. h. die geometrische Phantasie das Hauptinstrument geblieben, dessen ich mich zur Erfassung der tatsächlichen Beziehungen, wie zur Aufsuchung neuer Resultate bediente. Die hierdurch gegebene Denkweise habe ich dann auch 1893 in den Vorträgen, die ich im Anschlusse an die Chicagoer Weltausstellung an der Northwestern University in Evanston über die damals besonders interessierenden Fragen der mathematischen Wissenschaft hielt³⁾, vorangestellt. (Vgl. auch Abb. XLVI.) Sie bildet zugleich das einigende Band für die kleineren Veröffentlichungen, die ich weiterhin unter den Nummern XLIII–XLIV reproduziere.

³⁾ Lectures on Mathematics, reported by Alexander Ziwet. (The Evanston Colloquium.) New York und London, 1894 [Macmillan]. Neuer Abdruck, besorgt von der American Mathematical Society, New York 1911. Französische Übersetzung von M. L. Laugel, Paris 1898.



Die hiermit ausgesprochene Wertschätzung der geometrischen Anschauung schließt nicht aus, daß ich die Mängel, die ihr als Beweismittel anhaften, immer lebhaft empfunden habe. Nach dem Widerstand zu schließen, den ich damals in meiner nächsten Umgebung fand, bin ich wahrscheinlich einer der Ersten gewesen, welcher die Ungenauigkeit der Anschauung sowohl für das sehr Kleine wie für das sehr Große zur Sprache brachte. Man vergleiche den unten folgenden Aufsatz XLV vom Jahre 1873. Die Existenz stetiger Kurven ohne Differentialquotienten, die Berechtigung der nicht-euklidischen Auffassungen andererseits, waren die Probleme, die uns damals besonders bewegten. Ich versuchte, nicht nur die logische Zulässigkeit der bezüglichen Theorien, sondern ganz besonders auch ihre Verträglichkeit mit der richtig verstandenen Anschauung klar zu stellen. In meiner zusammenfassenden Vorlesung von 1901, von der in den Bemerkungen auf S. 212 die Rede ist, habe ich in Fortsetzung der damaligen Überlegungen den heute vielgenannten Gegensatz von Präzisionsmathematik und Approximationsmathematik an die Spitze gestellt. Die Kritik, der die Genauigkeit unserer Raumanschauung unterliegt, hat ja die reinen Mathematiker in der Neuzeit vielfach dazu geführt, sie aus den mathematischen Betrachtungen überhaupt auszuschalten. Dem gegenüber habe ich immer daran festgehalten, daß die Anschauung gerade auch in der Mathematik als eine unserer wichtigsten Fähigkeiten angesehen und gepflegt werden muß, indem wir sie durch bewußte Erziehung vervollkommen. Erst hierdurch treten für mich die Bereiche der reinen und angewandten Mathematik in ein klares gegenseitiges Verhältnis. K.

XXXIV. Vier Modelle zur Theorie der Linienkomplexe zweiten Grades.

[Aus dem Katalog mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente. Herausgegeben im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von W. Dyck (1892).]

Bekanntlich hat Plücker in den letzten Jahren seines Lebens bei seinem Studium der Linienkomplexe zweiten Grades zahlreiche auf deren Theorie bezügliche Modelle anfertigen lassen. Das allgemeine Interesse an den wirklichen Gestalten auch komplizierterer Flächen war ihm aus seiner physikalischen Beschäftigung erwachsen¹⁾; die nähere Gliederung seiner Ansätze habe ich hernach, so gut das unter Benutzung des Nachlasses gelingen wollte, in der 1869 erschienenen zweiten Abteilung der „Neuen Geometrie des Raumes“ zur Darstellung gebracht. Die so auf Plücker selbst zurückgehenden Modelle bildeten indes keine vollständige Serie, waren auch im einzelnen ungleichwertig, und es lag gewiß nicht im Sinne ihres Urhebers, wenn dieselben später trotzdem verschiedentlich als zusammengehörige Kollektion verbreitet worden sind. Ich habe deshalb im Herbst 1871, um das Wesentliche der Sache herauszuheben, von mir aus vier neue Modelle der hauptsächlich in Betracht kommenden Flächentypen veröffentlicht²⁾, wobei ich die Verhältnisse so wählte, daß die jeweils auftretenden singulären Punkte und Ebenen sämtlich reell ausfielen. Von diesen Modellen repräsentierte:

- Nr. 1 die allgemeine Kummer'sche Fläche (die Singularitätenfläche der Komplexe zweiten Grades) mit 16 Doppelpunkten und 16 Doppelsebenen,
- Nr. 2 die allgemeine Komplexfläche, d. h. die Kummer'sche Fläche mit Doppelgerade und noch acht Doppelpunkten und acht Doppelsebenen,

¹⁾ Plücker selbst erzählte mir einmal, daß er namentlich durch den Verkehr mit Faraday dazu angeregt worden sei; dieser selbst habe die Modellkonstruktion als Mittel benutzt, um sich als Nichtfachmann die ihm jeweils notwendigen mathematischen Formeln verständlich zu machen.

²⁾ [Diese Modelle sind von der Firma Joh. Eigel Sohn, mechanische Werkstätten in Köln a. Rh., zusammen mit einer Beschreibung von mir, herausgegeben. K.]



物理
08
K
11.

- Nr. 3 die besondere Komplexfläche, deren Leitlinie eine Komplexgerade ist (mit Rückkehrgerade und noch vier Doppelpunkten bzw. Doppellebenen),
- Nr. 4 diejenige Komplexfläche, deren Leitlinie eine singuläre Linie des Komplexes ist (mit Selbstberührungsgerade und noch zwei Doppelpunkten bzw. Doppellebenen).

Diese Modelle können noch heute beim Studium der Liniengeometrie wie überhaupt als Beispiele von Flächen höherer Ordnung interessieren, wenn sie leider auch von dem Mechaniker nicht so sorgfältig ausgeführt worden sind, als dies wünschenswert gewesen wäre. Aber man muß zufügen, daß man inzwischen gelernt hat, die bei diesen Flächen vorkommenden Gestalten sehr viel vollkommener zu beherrschen, als dies durch einzelne nach irgend welchem Prinzip herausgegriffene Beispiele geschieht. Ich habe 1877 in einem Vortrage vor der Münchener Naturforscherversammlung³⁾ darauf hingewiesen, daß sich die sämtlichen hier in Betracht kommenden Flächenformen auseinander durch Kontinuität ableiten lassen⁴⁾.

[Man überlege zu dem Zwecke, daß die Komplexfläche nicht nur, wie es bei Plücker geschieht, als Umhüllungsgebilde derjenigen einem bestimmten Komplex zweiten Grades angehörigen Geraden angesehen werden kann, welche eine feste Gerade schneiden, sondern gleich der allgemeinen Kummer'schen Fläche als Singularitätenfläche je einer Schar von Komplexen zweiten Grades, die durch ein bestimmtes System von Elementarteilern definiert ist. [Siehe die Ausführungen bei Ad. Weiler in Bd. 6 der Math. Annalen (1873).] Alle diese Scharen bilden aber, gemäß der Andeutung, die in Bd. 1 dieser Ges. Abhandl., S. 4 gegeben ist, ein Kontinuum.

Ich mache hier gern noch einige Angaben über die einschlägigen topologischen Verhältnisse, die freilich mit voller Lebendigkeit nur an den Modellen selbst erfaßt werden können. Vor allem muß man sich daran gewöhnen, daß zwei Stücke einer Figur, die nach entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche laufen, gemäß projektiver Auffassung im Unendlichen zusammenhängen und insofern als ein Stück anzusehen sind. Ich gebe nun zunächst eine schematische Darstellung der Doppelgeraden von Modell 2, bez. ihrer nächsten Umgebung:

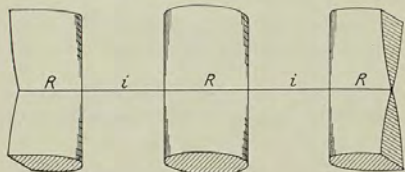


Fig. 1.

³⁾ [Amtlicher Bericht S. 95.]

⁴⁾ [Der im Original hier noch folgende Passus wurde als ungenau beim Wiederabdruck weggelassen. An seine Stelle tritt der folgende ausführliche Zusatz.]

Gemäß der gerade getroffenen Verabredung wird man die hiermit gemeinten Verhältnisse so schildern: Die Doppelgerade zerfällt in vier Segmente, von denen die beiden mit R bezeichneten Durchschnitte reeller Schalen der Fläche sind, während die mit i bezeichneten isolirt verlaufen. Diese ganze Anordnung entsteht nun als Grenzlage einer Aufeinanderfolge von sechs Stücken einer Kummer'schen Fläche vom Typus 1, wie sie durch folgende Figur gekennzeichnet sein soll:

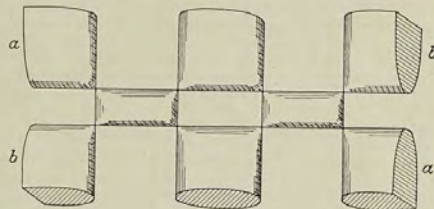


Fig. 2.

(Ich habe der Deutlichkeit halber noch die Buchstaben a und b zugesetzt, um die im Unendlichen zusammenhängenden Teile zu kennzeichnen.) Man sieht: jedes Stück R der Doppelgeraden von Modell 2 entsteht dadurch, daß sich zwei Stücke der allgemeinen Fläche längs der Doppelgeraden verschmelzen, jedes Stück i aber dadurch, daß ein Stück der allgemeinen Fläche zu einem geradlinigen Segmente zusammenschrumpft. — Hat man dies klar erfaßt, so möge man das Modell 3 aus 2, schließlich 4 aus 3 durch einen weiteren Grenzübergang ableiten. —

Dabei handelt es sich nur erst um die ersten Beispiele der Grenzprozesse, welche die Gesamtheit der bei den Komplexflächen, bez. Kummer'schen Flächen auftretenden Gestalten miteinander verknüpfen. Eine Ausführung ins einzelne würde schließlich in eine ermüdende Aufzählung auslaufen. Daher sei hier nur darauf aufmerksam gemacht, daß Rohn in den Math. Annalen, Bd. 18 (1881) eine sehr übersichtliche Methode gegeben hat, um zunächst einmal die sämtlichen Gestalten Kummer'scher Flächen, die keine mehrfachen Geraden enthalten, zu überblicken. Man gewinnt diese Flächen sämtlich (ihren allgemeinen topologischen Verhältnissen nach) aus doppeltzählenden Flächen zweiten Grades. Will man den Typus des Modelles 1 bekommen, so hat man die F_2 geradlinig zu wählen und durch vier reelle Erzeugende der ersten und vier ebensolche Erzeugende der zweiten Art in 16 Vierecke zu zerlegen, die man abwechselnd doppelt überdeckt denkt, bez. freiläßt, wie dies nebenstehende Figur⁵⁾ erläutert. (Jeder schraffierte Flächenanteil bedeutet ein flachgedrücktes Stück der allgemeinen Kummer'schen Fläche. Man hat im ganzen acht solcher „tetraederförmiger“ Stücke, die alles in allem in 16 Doppel-

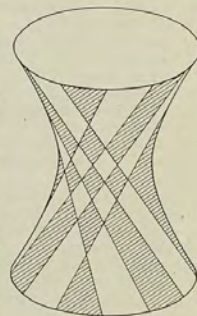


Fig. 3.

⁵⁾ Ich entnehme diese der S. 29 meines Evanston Colloquium (dessen 4. Vortrag sich allgemein mit der reellen Gestalt algebraischer Kurven und Flächen beschäftigte).



物理
08
K
11.

punkten zusammenstoßen.) Die sonstigen Typen der Kummer'schen Fläche ohne Doppellinien erhält man, wenn man die in der Figur benutzten Erzeugenden nach Belieben imaginär nimmt, ev. auch die Fläche zweiten Grades als nicht geradlinig voraussetzt.

Die Grundlage dieser schönen Veranschaulichung ist die Theorie der sechs bei einer Kummer'schen Fläche auftretenden linearen Fundamentalkomplexe, bez. der zehn durch sie bestimmten Fundamentalfächen zweiten Grades (Bd. 1 dieser Ges. Abhandl., S. 58—68). Von den Fundamentalkomplexen können 0, 2, 4, 6 paarweise konjugiert imaginär sein, immer werden sich unter den Fundamentalfächen reelle befinden. Nun ist, nach Vorgabe der sechs Fundamentalkomplexe, die Kummer'sche Fläche vollkommen bestimmt, wenn man irgend einen Raumpunkt als einen ihrer Doppelpunkte nimmt. Man hat diesen Punkt nur wandern zu lassen, bis er auf eine der reellen Fundamentalfächen zweiten Grades rückt, um die Kummer'sche Fläche kontinuierlich in die doppeltzählende F_2 überzuführen, wobei sich im einzelnen die durch die vorstehende Figur erläuterten Verhältnisse einstellen. Alles Nähere wolle man in der Abhandlung von Rohn vergleichen.

Im übrigen füge ich gern zu, daß man sich nun auch die Gesamtverteilung der geraden Linien der zu einem solchen Grenzfall der Kummer'schen Fläche gehörigen einfach unendlich vielen Komplexe zweiten Grades anschaulich klar machen kann. Man hat zu dem Zwecke nur auf die Entwicklungen von Segre in Bd. 23 der Math. Annalen (1883) (Note sur les complexes quadratiques dont la surface singulière est une surface du 2^e degré double) zurückzugehen. Um einen der Komplexe zu konstruieren, greifen wir — sagen wir bei der vorstehenden Figur — die vier Geraden der einen Erzeugung, die wir jetzt, mit Segre, r_1, r_2, r_3, r_4 nennen wollen, heraus. Wir zeichnen ferner in einer beliebigen Ebene, welche die r_1, r_2, r_3, r_4 in den Punkten o_1, o_2, o_3, o_4 treffen möge, als eine erste dem gesuchten Komplex angehörige Kurve irgendeinen durch o_1, o_2, o_3, o_4 hindurchgehenden Kegelschnitt. Die vier Tangenten, welche dieser Kegelschnitt in den Punkten o_1, o_2, o_3, o_4 besitzt, sind „singuläre Linien“ des zu konstruierenden Komplexes. Sie mögen die Ausgangsfläche zweiten Grades zum zweiten Male bez. in o'_1, o'_2, o'_3, o'_4 schneiden. Durch diese Punkte laufen auf der Ausgangsfläche vier Erzeugende, welche mit r_1, r_2, r_3, r_4 zu derselben Art gehören, sie mögen (wieder in Übereinstimmung mit Segre) mit r'_1, r'_2, r'_3, r'_4 bezeichnet sein. Nun ist die Sache die, daß für den zu konstruierenden Komplex, der in einer beliebigen Ebene gelegene Komplexkegelschnitt sofort angegeben werden kann. Es ist einfach derjenige Kegelschnitt der vorzugebenden Ebene, welcher die Erzeugenden r_1, r_2, r_3, r_4 trifft und übrigens in diesen vier Punkten Tangenten hat, die bez. r'_1, r'_2, r'_3, r'_4 schneiden.

Der Komplex wird gestaltlich erfaßt, indem man die Gesamtheit seiner in den verschiedenen Ebenen gelegenen Komplexkurven konstruiert denkt. Es scheint nicht unmöglich, die damit gewonnene Vorstellung für den Fall, daß sich aus der Fundamentalfäche zweiten Grades eine zunächst ganz nahe dazu gelegene eigentliche Kummer'sche Fläche entwickelt, wenigstens einigermaßen festzuhalten. Eine beliebige Ebene des Raumes wird diese Kummer'sche Fläche (entsprechend den schraffierten Teilen der Fundamentalfäche zweiten Grades, welche sie durchsetzt) in vier zunächst sehr flachgedrückten Ovalen schneiden. Nun ist als Komplexkegelschnitt in dieser Ebene ein Kegelschnitt zu suchen, der diese vier Ovale (jedes einmal) berührt und übrigens dem Kegelschnitt des soeben besprochenen besonderen Falles nahe liegt. K.]

XXXV. Über Flächen dritter Ordnung¹⁾.

[Math. Annalen, Bd. 6 (1873).]

Wenn eine Kurve mit Doppelpunkten gezeichnet vorliegt, so kann man aus ihr Kurven derselben Ordnung ohne Doppelpunkt oder mit weniger Doppelpunkten schematisch ableiten, indem man die in den Doppelpunkten oder einigen derselben zusammenstoßenden Kurvenäste durch ähnlich verlaufende, sich nicht treffende ersetzt. Nach diesem ebenso einfachen als fruchtbaren Prinzip²⁾ erhält man z. B. ohne weiteres die beiden Grundformen der ebenen Kurven dritter Ordnung, wenn man von der Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte ausgeht und letzteren in dem einen oder anderen Sinne auflöst; man erhält Beispiele von Kurven beliebiger Ordnung, wenn man als besondere Kurve eine solche zeichnet, die in lauter gerade Linien zerfallen ist, und auf deren Doppelpunkte den bewußten Prozeß anwendet.

Ein ähnliches Verfahren ist im Raume anwendbar, wenn es sich darum handelt, von den Flächen höherer Ordnung eine Anschauung zu gewinnen. Man konstruiert eine besondere Fläche derselben Ordnung, die mit einzelnen Knotenpunkten oder auch mit Doppelkurven behaftet sein mag, und leitet aus ihr eine allgemeinere dadurch ab, daß man die an die singulären Stellen hinantretenden Flächenteile durch ähnlich verlaufende ersetzt³⁾.

¹⁾ Vgl. eine vorläufige Mitteilung in den Berichten der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen. Sitzung vom 5. Mai 1873. [Siehe außerdem eine zweite Mitteilung, ebenda vom 23. Juni 1873.]

²⁾ Wer dieses Prinzip zuerst verwertet hat, läßt sich bei dessen großer Selbstverständlichkeit wohl kaum feststellen. Dem Verf. ist dasselbe, sowie namentlich das Beispiel der Erzeugung einer Kurve n -ter Ordnung aus n geraden Linien, von Plücker her bekannt; vgl. z. B. dessen Theorie der algebraischen Kurven (1839), in welcher fortwährend ähnliche Überlegungen angewandt werden.

³⁾ Fast noch interessanter sind die Anwendungen, die man von demselben Prinzip in dualistischem Sinne auf Kurven oder Flächen gegebener Klasse machen kann, da man von den bei diesen Kurven und Flächen auftretenden Gestalten seither nur erst eine sehr unvollkommene Kenntnis hat. Man hat sich an der Erkenntnis, daß bei diesen Gebilden alles in dualistischem Sinne gerade so ist, wie bei den Gebilden der betreffenden Ordnung, seither wohl zu sehr genügen lassen und ist nur zu wenig zu einem konkreten Erfassen der damit bezeichneten wirklichen Verhältnisse durchgedrungen.



物理
08
K
11.

Indem ich auf diese Art versuchte, mir eine größere Zahl von Flächen dritter Ordnung zu konstruieren, bemerkte ich, daß die Methode bei ihnen, wie bei den Kurven dritter Ordnung, *fast ohne weiteres überhaupt alle Gestalten ergibt*. Ich gehe dabei von der Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten als speziellem Falle aus. Eine solche Fläche ist leicht herzustellen, da sie vollständig bestimmt ist, wenn man das durch die Knotenpunkte gebildete Tetraeder und die Ebene der drei auf der Fläche verlaufenden einfachen Geraden beliebig annimmt (vgl. die Beschreibung eines Modells, das Herr Neesen [für mich] angefertigt hatte. Gött. Nachrichten, Aug. 1872, sowie § 1 des Folgenden). Ueberdies hat die Fläche für den hier vorliegenden Zweck den Vorzug, daß sie nur in einer Art existiert, indem jede solche Fläche in jede andere durch reelle Kollineation übergeführt werden kann, daß ferner ihre Knotenpunkte untereinander gleichwertig sind, weil die Fläche Kollineationen in sich selbst besitzt, vermöge deren sich die Knotenpunkte beliebig vertauschen lassen.

Einen Knotenpunkt mit reellem Tangentenkegel kann man in zwei wesentlich unterschiedenen Weisen auflösen. Entweder man *vertindet* die in demselben zusammenstoßenden Flächenteile, so daß in der neuen Fläche an Stelle des Knotenpunktes ein dünner Ast mit hyperbolischer Krümmung sich findet, oder man *trennt* dieselben voneinander, so daß in der neuen Fläche zwei verschiedene Flächenteile mit elliptischer Krümmung einander gegenüber stehen. Am deutlichsten sind die beiden Prozesse vorzustellen, wenn man den reellen Kegel zweiter Ordnung als Übergangsfalle zwischen einem einschaligen und einem zweischaligen Hyperboloide auffaßt.

Diese beiden Prozesse kann man nun an jedem der vier Knotenpunkte der zugrunde gelegten Fläche beliebig anwenden. Man erhält dadurch eine Reihe von Flächen mit weniger als vier Knotenpunkten, insbesondere von Flächen ohne Knotenpunkt. Und es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß durch die so erzeugten Flächen die Flächen mit reellen Knotenpunkten, insbesondere diejenigen ohne Knotenpunkt in gewissem Sinne vollständig repräsentiert sind¹⁾. Wenn wir bei diesen Erörterungen uns auf solche Flächen beschränken, welche getrennte konische Knotenpunkte oder gelegentlich einfache biplanare Punkte besitzen, und auch bei diesen nur solche Fälle berücksichtigen, in denen die singulären Punkte reell sind, so geschieht es der Übersichtlichkeit wegen: die Flächen mit höheren biplanaren Punkten oder uniplanaren Punkten, sowie die Flächen mit imaginären Singularitäten lassen sich aus den im folgenden allein betrachteten ebenfalls durch kontinuierliche Änderung der Gestalt in durchaus anschaulicher Weise gewinnen.

¹⁾ [So habe ich es schon an der zitierten Stelle in den Göttinger Nachrichten von 1872 ausgesprochen. K.]

Die Einteilung der Flächen dritter Ordnung nach ihrer Gestalt, wie sie sich aus diesen Betrachtungen ergibt, fällt für die Flächen ohne Knoten genau mit derjenigen zusammen, welche Schläfli nach der Realität der geraden Linien getroffen hat²⁾, während sie sich für die Flächen mit Knotenpunkten in dieselbe zum mindesten einordnet. Der Grund für diese Übereinstimmung liegt, ganz allgemein gesagt, darin, daß bei den Flächen dritter Ordnung das Zusammenfallen von Geraden und das Auftreten von Knotenpunkten gegenseitig aneinander geknüpft sind. Aus demselben Grunde stimmen die Flächen der von uns unterschiedenen Arten auch noch mit Bezug auf andere Eigenschaften überein. Es genügt dann immer, diese Eigenschaften an einer einzelnen möglichst bequem gewählten Fläche zu verfolgen.

In diesem Sinne sollen in den §§ 10–14 die Flächen mit 27 reellen Geraden einer näheren Untersuchung unterworfen werden. Unter der großen Reihe gemeinsamer Eigenschaften gerade dieser Flächen sei vor allem hervorgehoben, daß dieselben immer ein reelles *Pentaeder* besitzen, dessen Seitenflächen sich näherungsweise angeben lassen, wenn die 27 Geraden als bekannt vorausgesetzt werden. Es sind hierdurch die Gleichung fünften Grades, von der die Pentaederebenen abhängen, und die Gleichung 27. Grades, welche die Linien bestimmt, in eine sehr merkwürdige Beziehung gesetzt.

Die Bestimmung der Gestalten aller Flächen dritten Grades mag als Beitrag zu einer allgemeinen Theorie aufgefaßt werden, welche von den Gestalten algebraischer Flächen überhaupt handelt. Es sind mit Bezug auf letztere in § 15 einige sich leicht darbietende Sätze aufgestellt worden. Sodann erörtere ich in den letzten Paragraphen gewisse Beziehungen, welche diese Untersuchungen zu der sog. Analysis situs besitzen.

In einer neueren Arbeit³⁾ hat nämlich Herr Schläfli, ausgehend von der Fläche dritten Grades ohne Knoten, die in zwei getrennte Teile zerfallen ist (nach seiner, wie nach der im folgenden eingehaltene Aufzählung, die *fünfte Art*), die übrigen Flächen ohne Knoten nach ihrem *Zusammenhange* im Riemannschen Sinne untersucht.

Eine Anwendung der Riemannschen Vorstellungen auf Gebilde der projektivischen Geometrie scheint mir wegen der verschiedenartigen Auffassung des Unendlich-Weiten, die man in den gewöhnlichen Untersuchungen der Analysis situs einerseits, in der projektivischen Geometrie andererseits zugrunde legt, nicht ohne vorherige Erörterung einer Reihe fundamentaler Punkte gestattet, die ich bei dieser Gelegenheit wenigstens habe bezeichnen wollen, wenn ich auch [noch] nicht imstande war, dieselben zu erledigen.

²⁾ On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species etc. Philosophical Transactions, Bd. 153 (1863), S. 193 ff.

³⁾ Quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca una parte che non sia realmente segata da ogni piano reale? Annali di Mat., Ser. II, t. 5 (1872/73), p. 289.

§ 1.

Über ein Modell einer Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten.

Die Eigenschaften der Flächen dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten sind in neuerer Zeit wiederholt untersucht worden, so daß sie als wesentlich bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Es sei daher nur an die Lage der 27 Geraden der Fläche erinnert. Von denselben fallen 24 in die als Gerade der Fläche vierfach zählenden Kanten des Knotenpunktetraeders. Die drei übrigen liegen in einer beliebig anzunehmenden Ebene und bilden die Diagonalen des Vierseits, in welchem dieselbe von den Tetraederflächen geschnitten wird.

Es mögen jetzt die vier Knotenpunkte insbesondere reell vorausgesetzt sein. Dann besteht die Fläche, von der durch das Unendlich-Ferne erfolgenden Trennung abgesehen, aus zwei zusammenhängenden Teilen, welche nur in den vier Knotenpunkten zusammenstoßen. Von denselben ist der eine nirgends hyperbolisch, der andere nirgends elliptisch gekrümmt. Denn die parabolische Kurve der Fläche besteht *doppeltzählend* aus den sechs Tetraederkanten, und es wird also ein Übergang von elliptischer zu hyperbolischer Krümmung nur beim Durchsetzen eines Knotenpunktes, nicht beim Überschreiten der parabolischen Kurve stattfinden.

Um eine konkrete Anschauung von der Gestalt, welche eine solche Fläche besitzt, zu vermitteln, sei hier die Beschreibung eines Gipsmodells derselben gegeben, das Herr Weiler auf meinen Wunsch anfertigte, und auf welches sich die ebenfalls von Herrn Weiler entworfene Zeichnung in Fig. 1 bezieht. Die vier Knotenpunkte bilden in demselben ein gleichseitiges Tetraeder, dessen eine Seitenfläche horizontal gestellt und nach oben gekehrt ist. Der elliptische Teil der Fläche fällt nahe mit dem von den vier Knoten begrenzten endlichen Tetraeder zusammen und weicht nur dadurch von demselben ab, daß statt der ebenen Begrenzungen konvexe Partien auftreten. Der hyperbolische Teil setzt sich nach außen an die vier Knotenpunkte an und breitet sich von diesen ab wesentlich horizontal aus, so daß er die unendlich ferne Ebene in einem symmetrischen Kurvenzuge schneidet, der drei auf einer Horizontalen gelegene Wendungen besitzt. Durch diese Symmetrieverhältnisse ist ersichtlich der untere Knotenpunkt, wiewohl nicht in projektivischem Sinne, ausgezeichnet. Weiter unterhalb desselben, um die Höhe des Knotenpunktetraeders von ihm entfernt, befindet sich in horizontaler Lage die Ebene der einfach zählenden Geraden: die geraden Linien in ihr bilden ein gleichseitiges Dreieck.

Es wurde bereits hervorgehoben, daß die Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten für die projektivische Auffassung nur eine Art

darstellt, und in diesem Sinne repräsentiert das geschilderte Modell also alle derartigen Flächen. Die räumliche Anschauung löst sich aber nur schwer

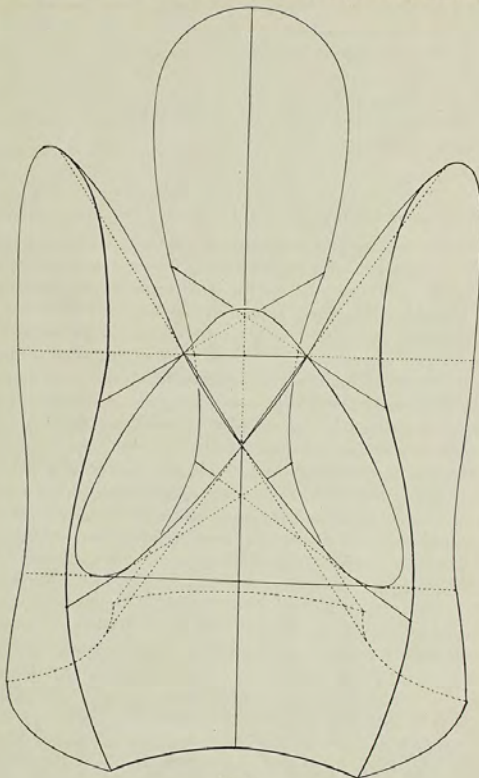


Fig. 1.

von der gewöhnlichen Weise ab, für welche das Unendlich-Weite seine besondere Geltung beansprucht. Insofern ist es nicht gleichgültig, daß in dem Modelle gerade ein Fall dargestellt ist, in welchem die unendlich ferne



物理
08
K
11.

Ebene nur den hyperbolischen Teil der Fläche, und zwar nach einer Kurve ohne Oval schneidet. Es werden dadurch gewisse charakteristische Übergänge, deren Betrachtung im folgenden notwendig wird, besonders anschaulich, indem sie ihren Einfluß nur auf ganz im Endlichen gelegene Partien der Fläche erstrecken. Das in der Einleitung erwähnte [von Herrn Neesen angefertigte] Modell hatte einen anderen Fall zur Anschauung gebracht (das Unendlich-Weite ist bei ihm eine auch ganz auf dem hyperbolischen Teile gelegene Kurve, aber mit Oval); bei ihm sind die bezüglichen Verhältnisse nicht so leicht zu verfolgen.

§ 2.

Ableitung neuer Flächen aus der Fläche mit vier reellen Knoten.

An jedem der vier Knotenpunkte des Modells mag man nun den Prozeß des *Verbindens* oder des *Trennens*, wie er in der Einleitung geschildert wurde, anbringen. Da die vier Knotenpunkte projektivisch untereinander gleichberechtigt sind, auch keine ihrer Gruppierungen zu zwei, drei ausgezeichnet ist, so wird es nur auf die Zahl der Knotenpunkte ankommen, die von dem einen oder anderen Prozesse betroffen werden, und wir können die bez. Knotenpunkte in jedem Falle den Symmetrieverhältnissen der Fläche möglichst entsprechend wählen.

Soll insbesondere (und dieser Fall allein wird im folgenden spezieller erörtert, um an ihm das Verhalten der Flächen beim Auftreten biplanarer Punkte allgemein zu charakterisieren) nur ein Knotenpunkt aufgelöst werden, so wählen wir den unteren. Die beiden so hervorgehenden Flächen mit drei Knoten mögen mit I und II bezeichnet sein, je nachdem der Prozeß des Verbindens oder des Trennens angewandt wurde. Oder, wenn die beiden Prozesse allgemein durch + und - bezeichnet werden, so wird man das Schema haben:

- I +
- II -

Von Flächen mit zwei Knoten erhalten wir drei Arten, die bezüglich der:

- I ++
- II +-
- III --

bezeichnet sein sollen.

Flächen mit einem Knoten gibt es vier:

- I +++
- II ++-
- III +- -
- IV - - -

endlich von Flächen ohne Knoten fünf:

- I + + + +
- II + + + -
- III + + - -
- IV + - - -
- V - - - -

Es ist ersichtlich, daß die letzterzeugten fünf Flächen mit Ausnahme der fünften aus einem überall zusammenhängenden Teile bestehen; die Fläche V enthält zwei getrennte Teile.

Aus diesen Flächen sollen nun noch weitere abgeleitet werden, indem man sich einen oder einige der vorhandenen Knotenpunkte durch die *biplanare* Form hindurch ändern läßt, sofern dies möglich ist. Hierzu wird aber die Betrachtung eines biplanaren Knotens an sich und des Übergangs einer Fläche mit gewöhnlichem Knoten in eine solche mit biplanarem Knoten überhaupt erforderlich.

§ 3.

Über Flächen mit biplanarem Knoten^{?)}.

Der Kegel zweiter Ordnung, der von den Tangenten in einem biplanaren Knoten einer Fläche gebildet wird, ist in ein Ebenenpaar ausgeartet. Dieses Ebenenpaar kann reell oder imaginär sein. Jedenfalls ist der Durchschnitt der beiden Ebenen, die *Achse* des biplanaren Punktes, wie er genannt sein mag, reell. Während eine durch den biplanaren Punkt beliebig durchgelegte Ebene die Fläche in einer Kurve mit Doppelpunkt trifft, ist die Durchschnittskurve der Fläche mit einer durch die Achse gehenden Ebene eine Kurve mit Spitze, deren Tangente eben die Achse ist.

Sind nun die beiden ausgezeichneten Ebenen imaginär, so ist diese Spitze für alle derartigen Ebenen gleich gerichtet. Die Fläche hat in der Nähe des biplanaren Punktes eine Gestalt, wie wenn sie durch Rotation einer Kurve mit Spitze um deren Tangente entstanden wäre.

Bei dem biplanaren Punkte hingegen, der reelle Ebenen besitzt, ist die Spitze der ausgeschnittenen Kurve verschieden gerichtet, je nachdem die gewählte Ebene dem einen oder anderen Winkelraume angehört, der durch die beiden ausgezeichneten Ebenen begrenzt wird. Der Übergang von der einen zur anderen Lage findet in den ausgezeichneten Ebenen statt, welche ihrerseits die Fläche nach einer Kurve mit dreifachem Punkte schneiden. Es sind hierbei wiederum zwei Fälle zu unterscheiden, die

^{?)} Vgl. hierzu die Erörterung, die Schläfli gibt: Philosophical Transactions. 1863. S. 207.



物理
08
K
11.

freilich den Zusammenhang der Fläche in der Nähe des singulären Punktes nicht wesentlich beeinflussen. Der dreifache Punkt der Schnittkurve hat nämlich entweder nur einen reellen Ast oder er hat drei reelle Äste. Die

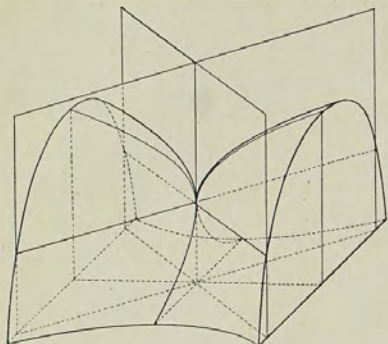


Fig. 2a.

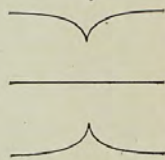


Fig. 2b.

beiden Fälle (eigentlich sind drei Fälle biplanarer Punkte mit reellen Ebenen zu unterscheiden, da die einzelne Ebene unabhängig von der anderen beide

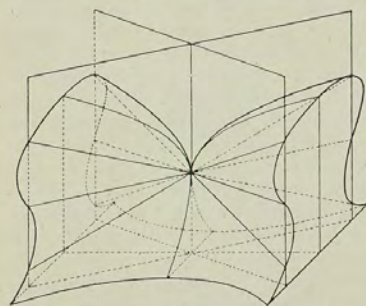


Fig. 3a.



Fig. 3b.

Arten des Übergangs zeigen kann) sind in Fig. 2 und 3 zur Anschauung gebracht. In dem ersten Falle (Fig. 2a und 2b) wird die Spitze der Durchschnittskurve, welche eine durch die Achse gelegte Ebene mit der Fläche gemein

hat, immer flacher, sowie man die Ebene der ausgezeichneten Lage nähert, d. h. die in der Spitze zusammenstoßenden Äste der Kurve biegen sich immer rascher voneinander weg. An der Grenze sind die beiden Äste der eine in die Verlängerung des anderen übergegangen, die Spitze selbst ist verschwunden. Bewegt man die schneidende Ebene über die Grenzlage hinaus, so erscheint die Spitze wieder, aber nun nach der anderen Seite gerichtet. In dem zweiten Falle (Fig. 3a und 3b) ist der Übergang ganz anders. Wenn sich die schneidende Ebene der Grenzlage nähert, so treten an die Spitze zwei weitere Äste der Durchschnittskurve hinzu. An der Grenze entsteht aus der Verschmelzung derselben mit der Spitze der dreifachen Punkt in der Weise, daß die Spitze die Hälften zweier Äste des dreifachen Punktes geliefert hat. Hernach löst sich der dreifache Punkt in entsprechender Weise, aber in umgekehrtem Sinne wieder auf^{*)}.

Unabhängig von diesem Unterschiede hat der biplanare Punkt mit reellen Ebenen ersichtlich die Eigenschaft, daß man auf der Fläche von jedem Punkt in der Nähe des biplanaren zu jedem anderen benachbarten gelangen kann, ohne den biplanaren Punkt zu durchsetzen; wir werden sogleich auf diesen Unterschied zurückkommen.

§ 4.

Ableitung des biplanaren Knoten aus dem konischen.

Betrachten wir jetzt, wie eine Fläche mit biplanarem Knoten aus einer mit gewöhnlichem Knoten hervorgehen kann.

Beim biplanaren Punkte mit imaginären Ebenen ist das leicht er-



Fig. 4a bis c.

sichtlich. Eine ebene Kurve mit Spitze ist der Übergang zwischen einem isolierten Knoten, an den sich ein Kurvenzug mit zwei Wendungen heranzieht, und einem nicht isolierten Knoten, der eine kleine geschlossene Schleife besitzt (Fig. 4a bis c). Die mit dem biplanaren Punkte versehene Fläche bildet den Übergang zwischen einer Fläche mit isoliertem und einer

^{*)} [Wegen des dritten hier nicht erläuterten Falles sowie wegen weiterer Einzelheiten vgl. den unten folgenden Zusatz I.]

物理
08
K
11.

Fläche mit nicht isoliertem Knoten, wie sie aus den bez. Kurven durch Rotation um die Symmetrieachse hervorgehen.

Beim biplanaren Punkte mit reellen Ebenen ist der Übergang der folgende. *Die Fläche mit Knoten muß hier die eben hervorgehobene Eigenschaft des Zusammenhangs um den singulären Punkt herum ebenfalls besitzen.* Sie ist daher folgendermaßen gestaltet (Fig. 5). Durch die Achse des späteren biplanaren Punktes lege man schneidende Ebenen. Dieselben schneiden zum Teil in einer Kurve mit isoliertem Punkte, zum anderen Teil in einer Kurve mit nicht isoliertem Knotenpunkte, aber *kleiner* Schleife. Stellt man die Fläche so, wie in der Zeichnung geschehen ist, daß sich die Kurven der ersten Art wesentlich nach unten erstrecken, so erstrecken sich

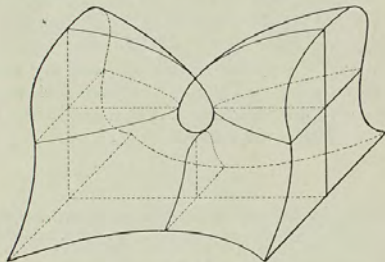


Fig. 5.

die Kurven der zweiten Art (abgesehen von der kleinen Schleife) wesentlich nach oben. Unterhalb des Knotens befindet sich daher, wie in der beigegebenen Figur zu sehen, eine Art kleiner Öffnung der Fläche. Zieht sich dieselbe vollends zusammen, so hat man den biplanaren Punkt. Ändert sich die Fläche weiter, so tritt diese Öffnung wieder auf, aber nun oberhalb des Punktes und um einen rechten Winkel gedreht. *Beim Durchgange durch den biplanaren Punkt reproduzieren sich also die an die singuläre Stelle angrenzenden Flächenteile nur in anderer Anordnung; sie scheinen [wie man auch sagen kann, 180° um die Schnittlinien der Tangentialebenen mit der gegen die Achse senkrechten Ebene gedreht].*

Auf die Knotenpunkte der beiden Flächen, welche sonach den Flächen, die einen biplanaren Punkt mit reellen Ebenen besitzen, benachbart erscheinen, wende man jetzt die zur Verfügung stehenden Änderungsprozesse des Verbindens oder Trennens an. Man erhält dann ersichtlich bei beiden Flächen die nämlichen Resultate, wie sie in Fig. 6 und 7 dargestellt sind.

Etwas ganz Ähnliches findet in dem Falle statt, daß man es mit

einem biplanaren Punkte mit imaginären Ebenen zu tun hat. Wendet man auf die Fläche mit nicht isoliertem Knoten, die der Fläche mit biplanarem Knoten benachbart ist, die Prozesse des Verbindens oder Trennens an, so erhält man dasselbe Resultat, als wenn man bei der Fläche mit isoliertem



Fig. 6.

Knoten diesen Knoten die Änderungen eingehen läßt, deren er fähig ist, d. h. wenn man ihn entweder ganz verschwinden oder in eine kleine Kugel übergehen läßt.

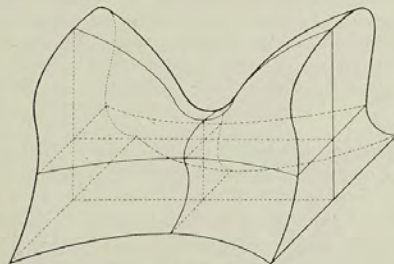


Fig. 7.

Als Resultat dieser Überlegungen mögen wir also folgendes hinstellen:

Eine Fläche mit biplanarem Knoten bildet den Übergang zwischen zwei Flächen mit gewöhnlichem Knoten [die möglicherweise verschiedenen Arten angehören]; wendet man aber auf diese Knoten die beiden in jedem Falle zulässigen Auflösungsprozesse an, so sind die Resultate bei beiden Flächen dieselben.



物理
08
K
11.

§ 5.

Ableitung weiterer Flächen dritter Ordnung.

Aus den in § 2 aufgestellten Flächen sollen jetzt weitere abgeleitet werden, indem man die einzelnen Knotenpunkte, sofern es möglich ist, sich durch die biplanare Form hindurch ändern läßt. Betrachten wir zu dem Zwecke die einzelnen Flächen genauer.

Ein Durchgang durch einen biplanaren Knoten mit imaginären Ebenen kann ersichtlich so lange nicht stattfinden, als noch ein anderer Knoten vorhanden ist. Denn die Verbindungslinie beider Knoten würde der Fläche ganz angehören, während doch durch einen biplanaren Punkt mit imaginären Ebenen niemals eine reelle Gerade hindurchgehen kann. Aber unter den Flächen mit einem Knoten hat nur *IV* eine solche Gestalt, wie sie behufs des gedachten Überganges notwendig ist. Diese Fläche *IV* kann wirklich einen biplanaren Knotenpunkt der gemeinten Art erhalten; ändert sie sich durch diesen hindurch, so gibt es eine Fläche *IV'* mit isoliertem Knoten, die als neue Fläche den vier mit einem reellen Knoten hinzugefügt werden mag.

Ein Durchgang durch einen biplanaren Knoten [mit reellen Ebenen] setzt ebenfalls, nach § 4, eine gewisse Art des Zusammenhangs bei der ursprünglichen Fläche voraus. Betrachten wir, statt aller anderen, die beiden Flächen *I* und *II* mit drei Knoten. Bei *II* ist ein solcher Übergang ersichtlich nicht möglich, weil die in einem Knoten zusammenstoßenden Flächenteile weiter keinen Zusammenhang zeigen. Anders bei *I*. Hier können sich sämtliche drei Knoten durch die biplanare Form hindurch ändern und das [kann], je nachdem es bei 1, 2, 3 Knoten geschieht, drei neue Arten mit drei Knoten [geben]:

$$I', I'', I'''.$$

Bei den Flächen mit zwei Knoten stellen sich die Verhältnisse so: Im Falle *III* ist keinerlei Übergang durch eine biplanare Form möglich. Bei *II* und *I* finden Übergänge statt [die zu neuen Arten Anlaß geben können]. Ebenso [können] die Fälle *I*, *II*, *III* der Flächen mit einem Knoten eine Reihe neuer Formen [ergeben]; der Fall *IV*, der eben schon die Fläche mit isoliertem Punkte ergeben hat, liefert hier keinen Beitrag⁹⁾.

Wenn man an den Knotenpunkten der so erhaltenen neuen Flächen nunmehr die beiden gestatteten Änderungsprozesse anbringt, so erhält man nach dem Schlußsatze des § 4 nichts Neues. Auf die Flächen ohne Knotenpunkt insbesondere ist also die Änderung der vorangehenden Flächen durch die Formen mit biplanaren Knoten hindurch ohne Einfluß.

⁹⁾ [Hinsichtlich aller hier aufgezählten Möglichkeiten sei auf den unten folgenden Zusatz I verwiesen.]

§ 6.

Die abgeleiteten Flächen erschöpfen alle Flächen dritten Grades mit reellen konischen Knotenpunkten.

Ich behaupte nun, daß die abgeleiteten Flächen alle Flächen mit drei, zwei, einem reellen konischen Knoten bez. ohne Knoten repräsentieren. Der Sinn dieser Behauptung muß durch nähere Umgrenzung des Artbegriffs zunächst präzisiert werden. Ich rechne zu derselben Art solche Flächen, welche durch allmähliche Änderung ihrer Konstanten so ineinander übergeleitet werden können, daß während des ganzen Änderungsprozesses kein neuer oder kein höherer singulärer Punkt auftritt. [Alle reellen Kollineationen mit positiver Determinante haben die Eigenschaft, durch Wiederholung unendlich kleiner reeller Kollineationen ableitbar zu sein. Es gehören demnach auch solche Flächen dritter Ordnung zu derselben Art, welche durch solche reelle Kollineationen, die den Sinn eines beliebigen Tetraeders nicht ändern, ineinander übergehen.]

Es könnte nun scheinen, daß zwei Flächen, welche spiegelbildlich voneinander verschieden sind, nicht zu derselben Art gehören. Dem ist aber im allgemeinen nicht so. Die Fläche mit vier reellen Knoten, mit der wir unsere Entwicklung begannen, geht nämlich durch eine Anzahl Spiegelungen in sich selbst über. Entsprechend gibt es unter den aus ihr von uns abgeleiteten Flächen der meisten Arten, die wir betrachteten, solche, die sich selbst spiegelbildlich gleich sind. Sie bilden den natürlichen Übergang jedesmal zwischen solchen Flächen, die spiegelbildlich unterschieden sind. Wir haben daher den Satz: *Gehört zu einer Art eine Fläche, die zu sich selbst spiegelbildlich ist, so gehört mit jeder Fläche dieser Art auch ihre spiegelbildlich verschiedene dazu.*

Im einzelnen verhält sich nun die Sache so: Bei Flächen ohne Singularitäten enthält jede Art eine zu sich spiegelbildliche Fläche; dasselbe gilt für alle Flächen mit einem oder zwei oder drei reellen konischen Knoten¹⁰⁾.¹¹⁾

Die folgende Anschauungsweise scheint geeignet, diesen *Artbegriff* noch deutlicher zu machen. Eine Fläche dritter Ordnung hängt von 19 Konstanten ab. Die Gesamtheit aller Flächen dritter Ordnung (wobei nur an Flächen mit reellen Koeffizienten gedacht sein soll) bilden also eine Mannig-

¹⁰⁾ [Dagegen sei schon hier erwähnt, daß, soweit konische und gewöhnliche biplanare Knotenpunkte in Frage kommen, nur folgende drei Typen in spiegelbildlich verschiedene Arten zerfallen: Die Flächen mit einem biplanaren Punkt, dessen Tangentialebenen nicht gleichberechtigt sind und die beiden Typen von Flächen mit einem biplanaren und einem konischen Punkt. Vgl. Zusatz I.]

¹¹⁾ [Die im Original an dieser Stelle stehenden Ausführungen sind, weil sie nicht bindend waren, beim Wiederabdruck durch vorstehenden Beweis ersetzt worden. K.]



物理
08
K
11.

faltigkeit von 19 Dimensionen. In dieser Mannigfaltigkeit füllen die Flächen mit Knotenpunkt einen Raum von nur 18 Dimensionen aus, welcher die ganze Mannigfaltigkeit in eine Reihe getrennter Gebiete zerlegt, so daß man aus einem Gebiete in ein anderes nur dadurch treten kann, daß man diesen Raum von 18 Dimensionen durchsetzt. *Jedes dieser Gebiete repräsentiert nun eine Art von Flächen ohne Knotenpunkt.*

Entsprechend, wie wir jetzt bei den Flächen ohne Knoten Arten unterschieden haben, ist bei den Flächen mit Knoten zu verfahren. Die Mannigfaltigkeit von 18 Dimensionen z. B., wie sie durch die Flächen mit einem Knoten vorgestellt wird, ist durch Mannigfaltigkeiten von 17 Ausdehnungen, die sich auf die Flächen mit zwei Knoten oder mit biplanarem Knoten beziehen, in Gebiete zerlegt usf. Der Sinn unserer Behauptung ist nun der, daß die von uns abgeleiteten Flächen die überhaupt vorhandenen Gebiete, sofern sich dieselben nicht auf Flächen mit höheren oder mit imaginären singulären Punkten beziehen, vollständig und jedes nur einmal repräsentieren¹²⁾.

§ 7.

Beweis des aufgestellten Satzes.

Der Beweis des aufgestellten Satzes ergibt sich nun fast unmittelbar. Man hat sich nur zu überzeugen, daß die niederen Mannigfaltigkeiten, welche in jedem einzelnen Falle die Trennung der gerade betrachteten Mannigfaltigkeit in Gebiete bewirken, keine anderen sein können, als die ohnehin schon in Betracht gezogenen. Der Beweis dafür ruht darin, daß alle anderen Mannigfaltigkeiten, an die man würde denken können, nicht die Zahl von Dimensionen haben, die ausreicht, um eine Trennung in Gebiete zu begründen. So wird z. B. die Mannigfaltigkeit von 19 Dimensionen, die durch die Flächen ohne Knoten repräsentiert ist, nur durch die Mannigfaltigkeit der Flächen mit einem Knoten in Gebiete zerlegt werden können, nicht aber z. B. durch die der Flächen mit zwei imaginären Knotenpunkten, da letztere nur von 17 Konstanten abhängen. Der eigentliche tiefere Grund, warum die Derivation aller Gestalten bei den Flächen dritter Ordnung so einfach gelingt, während sie z. B. bei den Flächen vierter Ordnung viel komplizierter sein dürfte, liegt eben darin, daß bei den Flächen höherer Ordnung auch Fälle mit Doppelkurven usw. vorhanden sind, die von hinlänglich vielen Konstanten abhängen, um Unterabteilungen zu begründen. Die Fläche dritter Ordnung mit dem Maximum der Doppelpunkte, 4, hängt

¹²⁾ Die ganze Vorstellungsweise von der durch die Flächen repräsentierten Mannigfaltigkeit, sowie der Satz über spiegelbildliche Flächen haben nicht nur bei Flächen dritten Grades, sondern überhaupt bei Flächen höheren Grades ihre Geltung.

noch von 15 Konstanten ab, während die Fläche mit Doppelgerade nur 12, die Fläche, welche in eine Ebene und eine Fläche zweiten Grades zerfallen ist, auch nur 12 Konstanten hat. Bei Flächen vierter Ordnung hat die Fläche mit dem Maximum der Knotenpunkte (die Kummersehe Fläche mit 16 Knoten) 18 Konstante; eine Fläche dagegen, die in eine F_3 und eine Ebene zerfallen ist, 22¹³⁾.

Noch in der folgenden, mehr anschaulichen Weise, mag man sich von der Vollständigkeit überzeugen, mit der die von uns abgeleiteten Flächen die Flächen dritten Grades repräsentieren.

Betrachten wir zunächst Flächen dritten Grades mit drei reellen Knotenpunkten. Es sei $f = 0$ eine irgendwie gegebene Fläche der Art, so konstruiere man eine Fläche f' mit vier Knoten, welche drei Knoten mit f gemein hat, und betrachte das Bündel $f + \lambda f' = 0$. In demselben werden (möglicherweise) eine größere Zahl von Flächen mit vier Knoten auftreten; diejenige unter ihnen, welche dem kleinsten positiven oder negativen Werte von λ entspricht, heiße q . Aus der Fläche q geht f dann hervor, indem der vierte Knotenpunkt einem der bewußten beiden Prozesse unterworfen wird, indem ferner eine beliebige Zahl der drei bleibenden Knotenpunkte durch die biplanare Form hindurch sich ändert. Aber andere Unstetigkeiten können nicht eintreten, weil dazu besondere Bedingungen zu erfüllen wären, die man immer als nicht erfüllt ansehen kann; die Flächen mit drei Knoten sind also durch die von uns aufgestellten Arten erschöpft. Jetzt zeigt man dasselbe für Flächen mit zwei Knoten, dann für die Flächen mit einem Knoten und endlich für die Flächen ohne Knoten, womit dann der allgemeine Beweis erbracht ist.

§ 8.

Über den Verlauf der geraden Linien auf den erzeugten Flächen. Zusammenhang der gewonnenen Einteilung mit der von Schläfli.

Den Ausgangspunkt für die Erzeugung aller anderen Flächen bildete die Fläche mit vier Knoten. Die Lage der geraden Linien auf ihr ist bekannt (vgl. § 1). Wie die geraden Linien auf den abgeleiteten Flächen verteilt sind, ergibt sich durch eine einfache Überlegung, die nun entwickelt werden soll.

Denken wir die abgeleiteten Flächen von der ursprünglichen Fläche mit vier Knoten zunächst wenig verschieden. Dann werden sich die drei einfach zählenden Geraden der ursprünglichen Fläche auf der abgeleiteten wiederfinden. Denn keine von ihnen kann sich mit einer anderen Geraden

¹³⁾ [Beim Wiederabdruck ist der hier im Original folgende Absatz fortgelassen, da Behauptung und Beweisführung ungenau waren und sein Inhalt durch die Ausführungen des § 5 und des Zusatzes I voll ersetzt wird.]



vereinigt haben und dann imaginär geworden sein, weil sie von vornherein zu keiner Geraden benachbart war. Es fragt sich also nur nach dem Verhalten der 24 bei der ursprünglichen Fläche in den sechs Tetraederkanten vereinigten Geraden.

Hier gilt nun offenbar: *Werden die in einem Knotenpunkte aneinander stoßenden Flächenteile voneinander getrennt, so werden die bez. Geraden imaginär*; und man wird vermuten: *Werden die Teile hingegen vereinigt, so trennen sich die bez. Geraden in die doppelte Zahl reeller*. Eine gerade Linie z. B., welche durch zwei Knotenpunkte hindurchging, die beide von dem Prozesse des Verbindens betroffen wurden, wird sich in vier reelle Gerade gespalten haben.

Um dies sicherer einzusehen, als es bei der geringen Übung, welche unsere räumliche Anschauung in solchen Dingen besitzt, gelingen will, bilde ich die Fläche dritten Grades von einem ihrer Punkte durch Projektion auf eine Doppalebene ab. Den Projektionspunkt wähle ich auf dem elliptischen Teile der ursprünglichen Fläche, etwa, in dem in Fig. 1 dargestellten Falle, in dem höchstgelegenen Punkte des elliptischen Teils. Dabei wird, nach bekannten Eigenschaften der Fläche dritter Ordnung mit vier Knoten, eine aus einem Kegelschnittpaare bestehende Übergangskurve auftreten, deren vier Doppelpunkte den Knoten der Fläche entsprechen. Nun aber befindet sich der elliptische Teil ganz innerhalb der in den Knoten berührenden Tangentenkegel. Bei der besonderen Wahl des Projektionspunktes, die wir getroffen haben, wird daher das Kegelschnittpaar imaginär sein, die Übergangskurve sich auf vier isolierte Punkte reduzieren. Die sechs Verbindungsgeraden dieser vier Punkte sind die Bilder der sechs auf der Fläche liegenden Tetraederkanten. Der Einfluß einer Deformation der Fläche auf die Geraden derselben läßt sich jetzt in der Abbildung studieren. Denn die Bilder der geraden Linien sind, wie Geiser entwickelt hat (Math. Annalen, Bd. 1 (1868/69)), die Doppeltangenten der bei der Abbildung auftretenden Übergangskurve vierter Ordnung, welche letztere in dem speziellen bis jetzt betrachteten Falle in ein Kegelschnittpaar ausgeartet war¹⁴⁾.

Die Änderung, welche die Übergangskurve bei der Deformation der Fläche erfährt, ist aber diese: Zerreißt man die an einen Knoten hinantretenden Flächenteile, so verschwindet der bez. isolierte Punkt der Übergangskurve vollends; im umgekehrten Falle wird er ein kleines Oval. Wendet man z. B. den Prozeß des Verbindens auf alle Knoten an, was die vor-

¹⁴⁾ [Die im Text angedeuteten Überlegungen sind weiterhin von H. G. Zeuthen eingehend verfolgt und mit seinen eigenen Untersuchungen über die Gestalt der ebenen Kurven vierter Ordnung in Verbindung gebracht worden (Études des propriétés de situation des surfaces cubiques. Math. Annalen, Bd. 8 (1874)). Ebenda findet sich eine Reihe Bestätigungen für die Angaben, die ich weiter unten in den §§ 10–13 mache, mit weiteren Entwicklungen, zu denen in Zusatz II Stellung genommen wird. K.]

uns mit I bezeichnete Art ohne Knoten ergibt, so geht die Übergangskurve in vier Ovale über. Dieselben haben untereinander 24 reelle Doppeltangenten (außerdem sind vier Doppeltangenten, wie schon im Falle des Kegelschnittpaares, isoliert). Mit den drei einfach zählenden Geraden, die die Fläche ohnehin besitzt, ergibt dies für die Fläche 27 Gerade; die mit I bezeichnete Fläche ohne Knoten hat also lauter reelle Gerade.

Die entsprechende Abzählung ergibt bei den vier anderen Flächen ohne Knotenpunkt bez.

$$15, 7, 3, 3$$

reelle Gerade. *Die drei ersten Arten entsprechen also einzeln den von Schläfli unterschiedenen Arten, insofern dieselben durch die Zahl der reellen Geraden völlig charakterisiert sind; die beiden letzten Arten entsprechen zusammen der vierten und fünften Art Schläflis, und es bleibt zu untersuchen, ob auch ein Entsprechen im Einzelnen stattfindet.*

Diese Untersuchung ist durch Schläfli bereits genannte Arbeit (Annali di Matematica, ser. II, t. 5) erledigt, wo er zeigt, daß die zweiteilige Fläche (unsere fünfte Art) mit seiner fünften Art zusammenfällt. Die vierte und fünfte Art bei Schläfli sind durch die Zahl der reellen Dreiecksebenen unterschieden, sie beträgt bez. sieben und dreizehn. In der Tat ist nun leicht zu sehen (Schläflis Betrachtungen in den Annali benutzt ganz ähnliche Momente), daß auch unsere fünfte Art sechs reelle Dreiecksebenen mehr besitzt als die vierte. Denn die drei Ebenen, welche man durch die drei einfach zählenden Geraden der Fläche und den Knotenpunkt legen kann, dessen Flächenteile im Falle IV verbunden, im Falle V getrennt werden, gehen eben deshalb im Falle V in sechs reelle, im Falle IV in imaginäre Tangentenebenen über, und diese Tangentenebenen sind Dreiecksebenen, da sie, durch eine Gerade der Fläche hindurchgelegt, in einem nicht der Geraden angehörigen Punkte berühren. *Also auch die Arten IV und V entsprechen der vierten und fünften Art Schläflis.*

Durch das nämliche Raisonnement beweist man einen Satz, den mir Herr Sturm mitgeteilt hat. Eine Tetraederkante liefert imaginäre Gerade, sowohl wenn beide auf ihr befindlichen Knotenpunkte zerrissen werden, als auch, wenn dies nur bei einem der Fall ist. Man findet nun nach Herrn Sturm, *daß die Gerade völlig imaginär wird, wenn das letztere eintrat, daß sie dagegen im ersteren Falle punktiert imaginär wird.* Doch gehe ich hier nicht näher auf die Betrachtung der einzelnen Fälle ein, als deren Summe eben die Sturmsche Regel resultiert¹⁵⁾.

¹⁵⁾ [Indem man die reellen Tangentialebenen betrachtet, welche man im einzelnen Falle durch die einfach zählenden Geraden an die Fläche legen kann, erfährt man zugleich, wo die reellen Punkte liegen, in denen sich gegebenenfalls zwei konjugiert imaginäre Gerade der Fläche schneiden. K.]

Aber auch die Flächen mit Knoten, wie wir sie abgeleitet haben, entsprechen den von Schläfli unterschiedenen Arten. Man findet durch bloßes Abzählen der geraden Linien, daß sich entsprechen:

Flächen mit drei reellen Knoten:

- I Schläfli VIII, 1
- II " VIII, 2.

Flächen mit zwei reellen Knoten:

- I Schläfli IV, 1
- II " IV, 2
- III " IV, 3.

Flächen mit einem reellen Knoten:

- I Schläfli II, 1
- II " II, 2
- III " II, 3
- IV " II, 4.

Hiermit sind Schläflis Arten bis auf die mit einem isolierten Knoten (II, 5) erschöpft; eine solche aber wurde schon oben (§ 4) abgeleitet und unter den mit einem Knoten versehenen Flächen durch IV' bezeichnet, so daß also *alle* in Betracht kommenden Arten unter den unseren nachgewiesen sind.

§ 9.

Weiterer Vergleich mit Schläflis Einteilung.

Die Beziehung zur Schläflischen Einteilung wurde erst dargelegt für diejenigen Flächen, die von der ursprünglichen Fläche mit vier Knoten wenig abweichen. Es bleibt nachzuweisen, daß *unsere Arten ihrem ganzen Umfange nach mit den Schläflischen koinzidieren*, es bleibt zu begründen, warum die von uns in § 4 aufgestellten neuen Arten für Schläflis Einteilungsprinzip, bis auf die eine Art IV' der Flächen mit einem Knotenpunkte, keine neuen Arten begründen.

Um nicht zu sehr durch Betrachtung der einzelnen Fälle gehindert zu werden, soll der erstere Nachweis hier nur für die Flächen ohne Knoten explizite gegeben werden. Ist er bei ihnen geführt, so ist die Richtigkeit der Behauptung bei den Flächen mit Knoten ebenfalls erwiesen, da man ja nun diese aus den Flächen ohne Knoten entstehen lassen kann.

Bei den Flächen ohne Knoten ist aber die Richtigkeit darin begründet, daß überhaupt Flächen ohne Knoten keine zusammenfallenden Geraden haben können. Denn daraus folgt, daß die Flächen jeder der von uns

umgrenzten Arten in der Zahl ihrer reellen Geraden und Dreiecksebenen übereinstimmen.

Dieser Hilfssatz ist folgendermaßen einzusehen. Wenn zwei Gerade auf einer Fläche konsekutiv werden, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder die Geraden schnitten sich vorher, oder es war dies nicht der Fall. In dem ersten Falle hat die Fläche längs der Geraden eine konstante Tangentialebene, in dem zweiten sind Tangentenebene und Berührungspunkt projektivisch aufeinander bezogen. Legt man also durch die Gerade eine beliebige Ebene, welche dann noch einen Kegelschnitt aus der Fläche ausschneidet, so müssen im ersten Falle *beide* Schnittpunkte des Kegelschnittes mit der Geraden, im letzteren Falle der *eine* Schnittpunkt fest sein. Im ersteren Falle liegen zwei, im letzteren ein Knotenpunkt der Fläche auf der Geraden; die Fläche hat einen Knotenpunkt w. z. b. w.

Der Grund nun, um dessen willen Schläfli die größere Zahl der Fälle, die wir in § 4 aufstellten, nicht zu unterscheiden hat, liegt darin, daß der Durchgang eines Knotens durch die biplanare Form die Zahl der reellen Geraden nicht ändert. Es ist das algebraisch evident. Die Geraden, welche durch den einfachen Knoten gehen, zählen zweimal; wird der Knoten ein biplanarer, so zählen sie dreimal; es hat sich also jede Gerade noch mit einer hinzugetretenen einfach zählenden vereinigt. Hernach, wenn der Knoten wieder ein konischer wird, löst sich diese Gerade ab, ohne aufzuhören, reell zu sein; es ist kein Grund, daß Gerade imaginär werden, weil sich ungleichwertige Elemente vereinigt hatten.

Geometrisch geht dieses Zusammenfallen folgendermaßen vor sich. Es sei etwa ein Knoten mit sechs reellen Linien gegeben, und er gehe in die biplanare Form über. Dann vereinigen sich mit seinen Geraden sechs solche, welche bis dahin durch die Öffnung verliefen, welche (nach § 3) die Fläche in der Nähe eines Knotens zeigt, der die biplanare Form annehmen will; hernach erstrecken sich diese Geraden durch die entsprechende Öffnung, welche auf der anderen Seite des Knotens entstanden ist.

§ 10.

Von der Diagonalfäche.

Unsere weiteren Betrachtungen sollen sich auf die Flächen mit 27 reellen Geraden allein beziehen; die Prinzipien, welche uns dabei leiten, sind in gleicher Weise bei den übrigen Fällen anwendbar, liefern aber nicht immer die gleichen einfachen Resultate.

Wir gehen von der Betrachtung einer einzelnen Fläche mit 27 reellen Geraden aus. Es ist dies die von Clebsch sogenannte *Diagonalfäche* (vgl. Math. Annalen, Bd. 4 (1872/73), S. 131) mit reell vorausgesetztem



物理
08
K
11.

Pentaeder. Diese Fläche ist durch die einfache Beziehung zu dem ihr zugeordneten Pentaeder ausgezeichnet. Sind nämlich die Ebenen des Pentaeders durch

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0$$

dargestellt, und wählt man die absolute Bedeutung dieser Buchstaben so, daß

$$p + q + r + s + t = 0,$$

so ist die Gleichung der Fläche

$$p^3 + q^3 + r^3 + s^3 + t^3 = 0.$$

Die Diagonalfäche ist eine Kovariante des zugrunde gelegten Pentaeders (vgl. Abh. L dieser Ausgabe, S. 269). Jede Diagonalfäche ist infolgedessen mit jeder anderen und insbesondere mit sich selbst auf 120 Weisen kollinear, wobei die Kollineationen reell sind, wenn zwei Flächen mit reellem Pentaeder ineinander übergeführt werden sollen. Infolgedessen gestattet ein Modell der Fläche mit reellem Pentaeder für alle solchen Flächen allgemeine Schlüsse zu ziehen; die Kenntnis der Kollineationen der Fläche in sich selbst kontrolliert die Abzählung gleichwertiger Vorkommnisse. Ein solches Modell wurde von Herrn Weiler nach Angaben von Clebsch ausgeführt (vgl. Göttinger Nachrichten, Aug. 1872) und ich habe wesentlich an diesem Modelle die im folgenden entwickelten Verhältnisse kennengelernt.

Die 27 Geraden der Diagonalfäche spalten sich in zwei Gruppen von bez. 15 und 12. Die 15 ersten Linien liegen in den Pentaederebenen und bilden in jeder die Diagonalen desjenigen Vierseits, in welchem die Ebene von den vier übrigen geschnitten wird. Diese Linien schneiden sich also zu drei in den zehn Pentaedereckpunkten. Die übrigen zwölf bilden eine Doppelsechs. Dieselben sollen in bekannter Weise durch:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 1', 2', 3', 4', 5', 6'$$

bezeichnet sein, die 15 Geraden sind dann durch die Zahlen $\overline{12}, \overline{13}$ usw. gegeben. Diese Indizes können dabei so gewählt werden, daß die Geraden, welche in den fünf Pentaederebenen liegen, die folgenden sind:

$$\left. \begin{array}{l} 12, \quad 34, \quad 56 \\ 13, \quad 25, \quad 46 \\ 14, \quad 26, \quad 35 \\ 15, \quad 24, \quad 36 \\ 16, \quad 23, \quad 45 \end{array} \right\} (A)$$

während die Geraden, wie sie sich bez. zu drei in einem Punkte schneiden durch das Schema gegeben sind:

$$\left. \begin{array}{l} 12, \quad 35, \quad 46 \\ 12, \quad 36, \quad 45 \\ 13, \quad 24, \quad 56 \\ 13, \quad 26, \quad 45 \\ 14, \quad 25, \quad 36 \\ 14, \quad 23, \quad 56 \\ 15, \quad 26, \quad 34 \\ 15, \quad 23, \quad 46 \\ 16, \quad 24, \quad 35 \\ 16, \quad 25, \quad 34 \end{array} \right\} (B)$$

Die 15 Geraden der ersten Art haben reelle *Asymptotenpunkte*¹⁶⁾; dieselben liegen eben in den zwei Pentaedereckpunkten, welche jede solche Gerade enthält. Die zwölf Geraden der zweiten Art hingegen haben imaginäre Asymptotenpunkte. Die zehn Pentaederecken, in welche die 30 Asymptotenpunkte der Geraden erster Art zusammenfallen, sind isolierte Punkte der parabolischen Kurve¹⁷⁾ der Fläche. Sie können isolierte Punkte vorstellen, da die Hessesche Fläche, welche die parabolische Kurve ausschneidet, in ihnen Knotenpunkte hat.

Andere reelle Punkte von parabolischer Krümmung gibt es nicht: die *Diagonalfäche ist, abgesehen von den zehn auf ihr liegenden Pentaedereckpunkten, überall hyperbolisch gekrümmt.*

Die Geraden der Fläche bilden auf derselben eine Reihe von Vier-

¹⁶⁾ [Legt man durch eine Gerade der Fläche dritter Ordnung beliebige Ebenen, so schneidet jede derselben die Fläche noch in einem Kegelschnitt. Läuft die Gerade durch *keinen* Knotenpunkt, so bestimmen die reellen Schnittpunkte dieser Kegelschnitte auf der Geraden eine Punktinvolution, die entweder zwei getrennte reelle oder zwei konjugiert imaginäre Doppelpunkte hat (hyperbolische bzw. elliptische Involution). Diese Doppelpunkte hat Steiner mit dem merkwürdigen Namen *Asymptotenpunkte* bezeichnet. Im Falle zweier reeller Asymptotenpunkte berühren in diesen zwei Kegelschnitte die Gerade. Diese Kegelschnitte trennen die Kegelschnitte mit reellen Schnittpunkten von denen mit imaginären Schnittpunkten. Man erkennt leicht, daß die reellen Asymptotenpunkte Punkte der parabolischen Kurve der Fläche sind, in denen die Gerade die Kurve berührt. — Läuft die Gerade durch *einen* Knotenpunkt, so geht auch jeder der genannten Kegelschnitte durch diesen Punkt; wir haben eine parabolische Involution mit zusammenfallenden Doppelpunkten. Läuft die Gerade durch *zwei* Knotenpunkte, so geht jeder Kegelschnitt durch diese beiden hindurch. Nur in der festen Tangentialebene der Fläche längs der Geraden gibt es keine bestimmten Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt, da dieser in ein Geradenpaar ausgeartet ist, dessen eine Gerade mit der Verbindungslinie der Knoten identisch ist. Die Involution ist singular geworden.]

¹⁷⁾ In einem solchen isolierten Punkte einer parabolischen Kurve berührt jede Tangente dreipunktig, jeder durch denselben durchgelegte ebene Schnitt der Fläche hat dort eine Wendung. Drei unter den Tangenten sind vierpunktig berührend; im Falle der Flächen dritten Grades müssen sich also in einem solchen Punkte, wie es bei der Diagonalfäche in der Tat geschieht, drei Gerade der Fläche *kreuzen*.



ecken. Jedes solche Viereck hat zu aufeinander folgenden Kanten zwei Gerade der ersten und weiterhin zwei Gerade der zweiten Art. In jedem der zehn Pentaedereckpunkte stoßen sechs solcher Vierecke zusammen; die 2 · 6 Kanten zweiter Art, welche sie besitzen, gehören nur sechs Linien der zweiten Art an, so daß der Eckpunkt von einem (windschiefen) Sechseck von Geraden zweiter Art umgeben ist. Außer den $6 \cdot 10 = 60$ an die Eckpunkte hinanreichenden Vierecken finde ich noch 60 andere, so daß die Zahl der überhaupt vorhandenen vierseitigen Felder, in welche die Fläche durch die 27 Geraden zerlegt wird, 120 beträgt¹⁸⁾.

§ 11.

Übertragung auf die allgemeine Fläche mit 27 reellen Geraden.

Die bei der Diagonalfäche erkannten Eigenschaften können nun unmittelbar für die Flächen dritten Grades mit 27 reellen Geraden überhaupt verwertet werden, indem man überlegt, wie sich dieselben ändern werden, wenn man die Diagonalfäche beliebigen Deformationen unterwirft, ohne daß ein Zusammenfallen von geraden Linien stattfindet oder (was dasselbe ist) ein Knotenpunkt entsteht.

Zuvörderst ist ersichtlich: *die Verteilung der reellen Asymptotenpunkte auf die Geraden der Fläche ist bei den Flächen mit 27 Geraden überhaupt so wie bei der Diagonalfäche.* Denn jede Fläche mit 27 Geraden läßt sich aus jeder anderen und also auch aus der Diagonalfäche ableiten, ohne daß eine Fläche mit Knotenpunkt dazwischen tritt. Sollten nun bei dieser Ableitung Asymptotenpunkte, die vorher reell waren, imaginär werden oder umgekehrt, so müßten sie vorher zusammenfallen. Wenn aber auf einer Geraden die Asymptotenpunkte zusammenfallen, so hat die Fläche dort notwendig einen Knotenpunkt. Denn die Asymptotenpunkte sind harmonisch zu jedem Punktepaar, in welchem die bez. Gerade von einem Kegelschnitte der Fläche getroffen wird, der in einer beliebig durch die Gerade hindurchgelegten Ebene liegt usw.

Auf jeder Fläche mit 27 Geraden gibt es also eine Doppelsechs von Geraden mit imaginären Asymptotenpunkten, die 15 übrigen Geraden haben reelle Asymptotenpunkte. Bezeichnet man die ersteren, wie bei der Diagonalfäche, mit 1, 2 · · bez. 1', 2' · ·, so geben die Schemata A, B des vorigen Paragraphen die von den Geraden der anderen Art gebildeten Dreiecksebenen.

Betrachten wir jetzt *die Verteilung der Geraden* und den Verlauf *der parabolischen Kurve* auf der allgemeinen Fläche. Zu diesem Zwecke sei

¹⁸⁾ [Vgl. die unten in Zusatz II gegebenen Ausführungen.]

angenommen, daß die Fläche zunächst wenig von einer Diagonalfäche abweiche. Dann ist der einzige Unterschied in der Verteilung der Geraden der, daß die drei Geraden, welche sich bis dahin in den Pentaederecken schnitten, nunmehr ein Dreieck, aber (zunächst) ein kleines Dreieck zwischen sich einschließen. Von den sechs Vierecken der Fläche, die in dem gemeinsamen Schnittpunkte zusammenstießen, sind drei zu Fünfecken geworden; die Fläche wird also durch die geraden Linien in zehn Dreiecke, 90 Vierecke, 30 Fünfecke zerlegt. Die drei Asymptotenpunkte der drei sich in einem Punkte schneidenden Geraden, die bis dahin vereinigt waren, sind in drei Punkte auf den Seiten des kleinen Dreiecks auseinandergerückt. Der isolierte Punkt der parabolischen Kurve hat sich zu einem kleinen in das Dreieck eingeschriebenen Ovale erweitert (denn imaginär kann er nicht geworden sein, da die Asymptotenpunkte, in denen ein Zweig der parabolischen Kurve berühren soll, reell geblieben sind). *Die parabolische Kurve besteht also aus zehn Ovalen, welche bezüglich in die durch das Schema B bezeichneten Dreiecke eingeschlossen sind; das Schema A bezeichnet fünf Dreiecksebenen, welche je sechs dieser Ovale berühren.* Auch die Lage, welche das Pentaeder der neuen Fläche angenommen hat, läßt sich näherungsweise angeben. Die Hessesche Fläche, welche in den Pentaedereckpunkten Knotenpunkte hat, schneidet die Fläche dritten Grades nach zehn getrennten Ovalen. Die Fläche dritten Grades ist durch leichte Deformation aus der Diagonalfäche entstanden, bei der an Stelle dieser Ovale isolierte Punkte auftraten, die eben selbst die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche vorstellten. Infolgedessen sind die zehn Ovale der neuen Fläche *die Durchschnitte derselben bez. mit den zehn von den Knotenpunkten der Hesseschen Fläche sich erhebenden kegelartigen Stücken derselben* (welche näherungsweise durch die Tangentenkegel in den bez. Knotenpunkten dargestellt werden). Aber auf diesen Stücken verlaufen jedesmal drei Kanten des durch die Knotenpunkte bestimmten Pentaeders, denn diese Kanten gehören der Hesseschen Fläche ganz an. *Das Pentaeder unserer Fläche liegt also in der Nähe der durch das Schema A bezeichneten fünf Dreiecksebenen, derart, daß seine Kanten zu drei jedes der zehn Ovale der parabolischen Kurve treffen.*

Die hiermit bezeichneten Verhältnisse übertragen sich nun ohne weiteres auf die allgemeine Fläche mit 27 Geraden. In der Tat können sie sich nicht ändern, wenn man eine beliebige Deformation der Fläche, bei der die 27 Geraden getrennt bleiben, eintreten läßt. *Die Verteilung der Geraden auf der Fläche* kann keine andere werden, es können höchstens drei Gerade erster Art, die sich bei der Diagonalfäche in einem Punkte schnitten, wieder in einen Punkt zusammenrücken (was unwesentlich sein würde). Denn es können nie drei Gerade verschiedener Art sich in einem Punkte



08
K
11

scheiden, weil sonst dieser Punkt ein gemeinsamer Asymptotenpunkt wäre und also gerade Linien, welche vorher imaginäre Asymptotenpunkte besaßen, nunmehr reelle hätten usw. *Die Zahl der Ovale der parabolischen Kurve ist immer zehn*; es kann sich höchstens ein oder das andere Oval in einen isolierten Punkt zusammenziehen, was nicht in Betracht kommt. Denn kein Oval kann verschwinden — es bleiben ja die Asymptotenpunkte, in denen es berührt, reell —, es können sich nie zwei Ovale vereinigen — denn jedes Oval ist von einem Sechseit von geraden Linien umgeben, welche keine reellen Asymptotenpunkte besitzen, und das also von dem Oval nie überschritten werden kann, — es darf endlich auch nie ein Oval neu entstehen, denn dasselbe müßte aus einem neuen isolierten Punkte hervorgehen und ein solcher würde (wie oben in einer Note bemerkt) einen neuen Kreuzungspunkt von drei Geraden der Fläche bedeuten, der doch nicht auftreten soll. *Die Beziehung des Pentaeders zur Fläche ist dieselbe geblieben*. Denn waren einmal die zehn Ovale den zehn Knotenpunkten einzeln zugeordnet, so kann dies Verhältnis, solange die zehn Ovale einzeln erhalten bleiben, keine Änderung erleiden.

Es begründen diese Beziehungen insbesondere noch den Satz, der die Wichtigkeit der Diagonalfäche gerade für Untersuchungen der vorliegenden Art kennzeichnet: *Eine Fläche dritten Grades mit 27 reellen Geraden kann nur auf eine kontinuierliche Weise in eine Diagonalfäche übergeführt werden [abgesehen von den 120 Kollineationen der Diagonalfäche in sich]*. Das Pentaeder derselben entsteht aus den fünf Dreiecksebenen A , welche bez. je sechs der zehn parabolischen Ovale berühren.

§ 12.

Die Entstehung der Fläche mit 27 Geraden aus der Fläche mit vier Knoten.

Wenn wir nach § 2 eine Fläche mit 27 Geraden aus einer mit vier Knoten ableiten, so werden die zehn elliptisch gekrümmten Teile der Fläche in folgender Weise erzeugt. Vier derselben werden durch die vier Seitenfelder des ursprünglich elliptischen Flächenteils (der tetraederähnlich gestaltet war) hervorgebracht. Die sechs anderen entstehen an denjenigen Stellen des ursprünglich hyperbolischen Teiles, in denen die drei einfach zählenden Geraden der Fläche von den sechs Tetraederkanten geschnitten werden.

Die Ebene der einfach zählenden Geraden gibt also eine der fünf Dreiecksebenen A ab, die den fünf Pentaederebenen benachbart sind, wie das mit dem Umstande stimmt, daß für die Fläche mit vier Knoten jene Ebene geradezu eine Pentaederebene ist.

Will man daher untersuchen, wie oft eine Fläche mit 27 reellen Geraden aus der Fläche mit vier Knoten abgeleitet werden kann, so hat man von vornherein fünf Klassen solcher Ableitungen zu unterscheiden, je nach der Dreiecksebene A , welche man aus der Ebene der einfach zählenden Geraden hervorgehen lassen will. Aber man überzeugt sich, daß jede solche Klasse nur eine Art enthält, daß eine Fläche mit 27 reellen Geraden überhaupt nur in fünf Weisen aus einer Fläche mit vier Knoten gewonnen werden kann. Als solche fünf Flächen mag man dann geradezu diejenigen nehmen, deren Pentaeder¹⁹⁾ mit den fünf Dreiecksebenen A zusammenfällt.

Um dies zu begründen, betrachte ich die Gruppe der 24 Geraden, die bei der Auflösung der Knoten einer Fläche mit vier Doppelpunkten aus den Tetraederkanten entstehen. *Eine solche Gruppierung läßt sich aus den 24 Geraden, die von den 27 bleiben, wenn man die drei in einer Ebene A gelegenen fortnimmt, nur einmal bilden, und darin liegt der Beweis*.

Diese Gruppierung ist nämlich folgende. Die drei Kanten, welche durch einen Knoten hindurchgingen, ergeben bei der Auflösung eine Doppelsechs. Je drei Linien aus jeder Sechs derselben haben reelle, die drei anderen imaginäre Asymptotenpunkte. Die vier Doppelsechsen, welche den vier Knotenpunkten entsprechen, haben je vier Gerade gemein, darunter zwei und nur zwei mit reellen Asymptotenpunkten. Die Linien einer Doppelsechs, welche reelle Asymptotenpunkte haben, berühren unter den sechs Ovalen der parabolischen Kurve, welche in der Nähe der Ebene der einfach zählenden Geraden entstehen, solche drei, welche nicht (auch nicht annähernd) [von einer geraden Linie getroffen werden].

Sondern wir aber aus den 27 Geraden drei in einer Ebene A gelegene, etwa

12, 34, 56,

aus, so lassen sich die übrigen 24 nur in einer Weise in vier Doppelsechsen gruppieren, welche diesen Forderungen genügen. Bei der Bezeichnung der Geraden, die ich an dem Weilersehen Modelle der Diagonalfäche angebracht habe, sind dies die folgenden:

1	3	5	46	62	24
35	51	13	2'	4'	6'
1	4	6	35	52	23
46	61	14	2'	3'	5'

¹⁹⁾ Eine Fläche mit vier Knoten ist, wie leicht zu sehen, vollständig bestimmt, wenn ihr Pentaeder bekannt und eine Entscheidung darüber getroffen ist, welche Pentaederebene die einfach zählenden Geraden enthalten soll. Zu einem Pentaeder gehören also fünf Flächen mit vier Knoten. [Vgl. Rodenberg, Math. Annalen, Bd. 14 (1878/79). Ihre Gleichung ist z. B. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \frac{x_5^2}{4} = 0$.]



2	3	6	45	51	14
36	62	23	1'	4'	5'
2	4	5	36	61	13
45	52	24	1'	3'	6'

Die Doppelsechsen, welche in dieser Weise bei den fünf Wiederherleitungen einer Fläche mit 27 Geraden auftreten, sind übrigens nicht in der Zahl 20, sondern nur in der Zahl 10 vorhanden, indem jede Doppelsechse zweimal benutzt wird. Bezeichnet man die eben genannten (in verständlicher Weise) durch:

135, 146, 245, 236,

so gibt es außerdem die folgenden sechs:

123, 124, 156
256, 345, 346

und dieselben verteilen sich auf die fünf Ebenen A in der folgenden Weise:

Ebene	Doppelsechs
12, 34, 56	135, 146, 245, 236
13, 25, 46	124, 156, 236, 345
14, 26, 35	123, 156, 245, 346
15, 24, 36	123, 146, 256, 345
16, 23, 45	124, 135, 256, 346

§ 13.

Von den ebenen Schnitten der Fläche mit 27 reellen Geraden.

Auf Grund der bisherigen Erörterungen wird es möglich, die Gesamtheit der ebenen Schnitte, welche eine Fläche mit 27 Geraden zeigt, zu klassifizieren. Ich muß mich freilich darauf beschränken, hier die Resultate einfach anzugeben, da eine genaue Herleitung derselben ohne die durch ein Modell ermöglichte konkrete Anschauung zum mindesten sehr weitläufig erscheint.

Der ebene Schnitt einer Fläche dritter Ordnung zeigt als Kurve dritter Ordnung entweder nur einen zusammenhängenden Kurvenzug (mit drei Wendungen) oder er besitzt außerdem ein Oval. Die Ebenen, welche die Fläche nur nach einem Zuge schneiden, bilden nun, wie sich zeigt, eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen. Von ihr werden ebenfalls dreifach unendliche Mannigfaltigkeiten solcher Ebenen, die in Kurven mit Oval schneiden, eingeschlossen.

Diese Ebenen selbst zerfallen zunächst in drei Gruppen, deren jede wieder in eine größere Zahl getrennter Mannigfaltigkeiten geteilt ist. Das



Oval wird nämlich entweder von keiner Geraden der Fläche oder von zwölf oder von sechzehn getroffen.

Daß hiermit in der Tat alle Möglichkeiten erschöpft sind, welche eintreten können, wenn man Durchschnittskurven mit Doppelpunkt usw. nicht beachtet, ergibt sich durch folgende Betrachtung aus der eindeutigen Abbildung der Fläche auf eine Ebene. Der ebene Schnitt bildet sich bekanntlich ab als Kurve dritter Ordnung, die durch sechs Fundamentalpunkte hindurchgeht. Er wird überdies, je nachdem er aus einem Zuge oder aus zwei Teilen besteht, eine ebenso beschaffene Bildkurve liefern. Beschränken wir uns also auf Bildkurven, die aus zwei Teilen, aus einem Ovale und einem Zuge mit drei Wendungen bestehen. Es liegen dann noch eine Reihe von Möglichkeiten bezüglich der Verteilung der Fundamentalpunkte auf die beiden Kurventeile vor: das Oval kann 0, 1, 2, ..., 6 Fundamentalpunkte enthalten. Man beweist nun zunächst: Das Oval des ebenen Bildes entspricht dem Ovale der räumlichen Kurve oder dem anderen Teile derselben, je nachdem es eine gerade oder ungerade Zahl von Fundamentalpunkten enthält. Enthält nämlich das Oval eine ungerade Zahl, so wird es, nach Grundsätzen der Analysis situs, von jeder Kurve, die durch die sechs Fundamentalpunkte geht, noch in einem Punkte oder in einer ungeraden Zahl von Punkten geschnitten; der entsprechende räumliche Kurvenzug wird also von jeder Ebene einmal oder eine ungerade Anzahl von Malen getroffen, d. h. er ist ein Kurvenzug mit drei Wendungen, kein Oval. Umgekehrt beweist man, daß das Oval des ebenen Bildes und das Oval des räumlichen Schnittes einander entsprechen, wenn ersteres eine gerade Zahl von Fundamentalpunkten enthält. — Indem man sich dieser Regel bedient, ersieht man sofort, daß die räumlichen Schnitte mit Oval eben in die drei Arten zerfallen, die dadurch charakterisiert sind, daß das Oval bez. von keiner Geraden, oder von zwölf (die eine Doppelsechse bilden), oder von sechzehn Geraden geschnitten wird.

Ebenen, welche nach Kurven mit Oval schneiden, so daß das Oval keiner Geraden begegnet, erhält man z. B., wenn man das Oval ganz auf eine der zehn elliptisch gekrümmten Partien der Fläche verlegt. Man überzeugt sich dann ferner, daß dies die einzigen Ebenen dieser Art sind, die bez. Ebenen konstituieren also zehn getrennte Mannigfaltigkeiten.

Ebenen, deren Oval einer Doppelsechse begegnet, erhält man beispielsweise, wenn man die Fläche zunächst in eine solche mit einem Knotenpunkt überleitet und dann einen ebenen Schnitt legt, für den dieser Knotenpunkt ein isolierter Punkt ist. Geht man sodann zur ursprünglichen Fläche zurück, so hat man einen Schnitt, dessen Oval von den Linien derjenigen Doppelsechse getroffen wird, welche aus den sechs durch den Knotenpunkt verlaufenden Geraden entstanden ist. Jede der zehn im vorigen Paragraphen



物理
08
K
11

aufgezählten Doppelsechsen gibt zu solchen ebenen Schnitten²⁰⁾ Veranlassung. Man kann wiederum beweisen, daß diese die einzigen ihrer Art sind, daß also auch die Ebenen dieser Art zehn getrennte Mannigfaltigkeiten konstituieren.

Es gibt ferner fünfzehn Mannigfaltigkeiten von Ebenen, deren Oval von sechzehn Geraden getroffen wird. Man überzeugt sich hiervon einmal, indem man zu den Flächen mit vier Knoten zurückgeht. Jede der fünf Flächen mit vier Knoten, aus denen die allgemeine Fläche entstehen kann, hat dreierlei Schnitte, die beim Übergange Durchschnittskurven der gewünschten Art geben: diejenigen Schnitte, welche den elliptischen Teil der Fläche mit vier Knoten so treffen, daß die Knoten in zwei Gruppen von zwei zerlegt werden. Andererseits erhält man Schnitte der gewünschten Art, wenn man, was ersichtlich möglich ist, durch jede der 15 Geraden mit reellen Asymptotenpunkten Ebenen hindurchlegt, welche Kegelschnitte enthalten, die der bez. Geraden nicht begegnen, — und wenn man weiterhin diese Ebene etwas verschiebt, so daß sie eine eigentliche Kurve dritter Ordnung enthält.

Diese Unterscheidung der ebenen Schnitte liefert die Einteilung der Flächen mit 27 Geraden nach dem Unendlichweiten. Sieht man von Flächen mit parabolischen Ästen ab (welche die unendlich ferne Ebene berühren), so hat man bei den Flächen mit 27 reellen Geraden vier Arten zu unterscheiden. Das Wienersche Modell gehört zu der Art, welche die unendlich ferne Ebene in einem zusammenhängenden Kurvenzuge trifft. Eben dahin gehört die Fläche, die man aus der Fläche mit vier Knoten ableiten wird, wie sie in Fig. 1 dargestellt ist. Das von Herrn Neesen angefertigte Modell einer Fläche mit vier Knoten, dessen oben Erwähnung geschah, würde eine Fläche mit 27 Geraden angeben, die das Unendlichferne in einer Kurve mit Oval trifft, so, daß das Oval von zwölf Linien geschnitten wird. —

§ 14.

Von den Haupttangentialkurven der Fläche mit 27 reellen Geraden.

Die Aufgabe, auf einem Modelle einer Fläche mit 27 reellen Geraden die Haupttangentialkurven zu zeichnen, ist praktisch nicht zu schwer auszuführen, da die 27 Geraden selbst Haupttangentialkurven vorstellen. In der Tat ist der Verlauf der bez. Kurven innerhalb der Vierecke, welche von den Geraden der

²⁰⁾ Ein Modell einer Fläche mit 27 Geraden zeigt eine Reihe von „Durchgängen“ oder „Öffnungen“. Auf den Partien der Fläche, welche an diese Durchgänge angrenzen, verlaufen eben die Geraden einer der zehn Doppelsechsen. Jede solche Doppelsechse gibt zu einem „Durchgange“ Veranlassung; ob derselbe aber in dem Modelle ohne weiteres ersichtlich ist, hängt einmal von der Beziehung zum Unendlichweiten ab, die man bei der Konstruktion des Modells zugrunde gelegt hat, dann aber auch davon, welche Seite der im Endlichen gelegenen Partie der Fläche man als äußere, welche als innere betrachten will. [Vgl. die Abhandlung von Zeuthen in den Math. Annalen, Bd. 8 (1874) und den unten folgenden Zusatz II.]

Fläche eingeschlossen werden, durch diese Bemerkung durchaus bestimmt, d. h. schematisch bestimmt. Nur bez. der Dreiecke und Fünfecke, welche an die parabolische Kurve angrenzen, wird eine anderweitige Überlegung nötig. Das Resultat derselben, das durch Fig. 8 veranschaulicht ist, mag hier um so lieber mitgeteilt werden, als dasselbe einen Beitrag zur Theorie der Haupttangentialkurven überhaupt, noch allgemeiner, zur Theorie der singulären Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variablen abgibt.

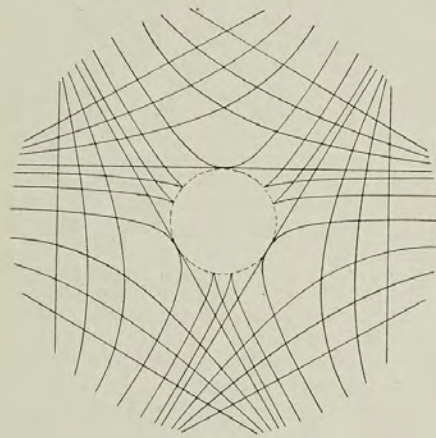


Fig. 8.

In Fig. 8 bezeichnet die punktierte Kurve eins der zehn Ovale der parabolischen Kurve; die drei geradlinigen Tangenten stellen drei Gerade der Fläche vor, die sechs umschließenden Geraden repräsentieren das windschiefe Sechseck, in welches das Oval eingeschlossen ist. Die ausgezogenen Kurven, zusammen mit diesen Geraden, sind Haupttangentialkurven. Dieselben haben auf der parabolischen Kurve (wie das schon sonst bekannt war, vgl. Abh. VI in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe, S. 92) Spitzen; in den Asymptotenpunkten der drei Geraden sind aber diese Spitzen in Selbstberührungspunkte übergegangen. Solcher Selbstberührungspunkte treten auf der parabolischen Kurve einer Fläche n -ter Ordnung im allgemeinen eine endliche Zahl auf. Es sind die Punkte, in denen sich die parabolische Kurve und die Kurve vierpunktiger Berührung begegnen.



物理
08
K
11.

§ 15.

Einige allgemeine Sätze über die Gestalten algebraischer Kurven und Flächen.

Die geschlossenen Kurven der Ebene hat man in projektivischem Sinne in zwei Klassen zu teilen, in *paare* und *unpaare* Kurven²¹⁾. Zu den unpaaren Kurven gehört z. B. die gerade Linie, sowie der Zug mit drei Wendungen, der bei den Kurven dritter Ordnung auftritt. Als ein Beispiel für eine *paare* Kurve mag man jede im Endlichen verlaufende geschlossene Kurve betrachten. Man hat für diese Kurven und ihre gegenseitigen Beziehungen eine Reihe allgemeiner Sätze (vgl. v. Staudts Geometrie), von denen hier nur der eine angeführt sein soll:

Zwei Kurven schneiden sich notwendig, wenn beide unpaar sind, und zwar in einer unpaaren Anzahl von Punkten. Ist eine von zwei Kurven eine paare, so brauchen sich die Kurven nicht zu treffen; tut sie es, so geschieht es in einer paaren Anzahl von Punkten.

Man kann hieran einen Schluß über die Gestalten der ebenen algebraischen Kurven ohne vielfachen Punkt oder, wenn man will, der allgemeinen durch eine Gleichung zwischen Punktkoordinaten gegebenen Kurven knüpfen. Da eben kein vielfacher Punkt vorhanden sein soll, da ferner die Kurve, je nachdem ihre Ordnung gerade oder ungerade ist, von einer geraden Linie in einer *paaren* oder *unpaaren* Zahl von Schnittpunkten getroffen werden muß, so kommt:

Kurven gerader Ordnung enthalten keinen, Kurven ungerader Ordnung einen und nur einen unpaaren Zug; die Zahl der etwa vorhandenen paaren Züge ist [noch erst durch weitere Betrachtungen zu beschränken]²²⁾.

Entsprechende Überlegungen kann man mit Bezug auf *geschlossene Flächen* anstellen. Bei ihnen, wie bei den Kurven im Raume, hat man, nach v. Staudt, ebenfalls *paare* und *unpaare* zu unterscheiden. Eine *unpaare* Fläche und eine *unpaare* Kurve schneiden sich notwendig. Eben dieser Umstand begründet aber noch eine weitere Teilung der *paaren* Flächen: in solche nämlich, welche *unpaare* Kurven enthalten, und solche, bei denen das nicht der Fall ist. Für die so gewonnenen drei Flächenarten: *die un-*

²¹⁾ Es ist wohl v. Staudts Verdienst, auf diesen Unterschied zuerst aufmerksam gemacht zu haben (Geometrie der Lage, §§ 1, 2, 12 (1847)). Andererseits geht Möbius von demselben aus bei seiner Untersuchung über die Grundformen der Linien dritter Ordnung (Abhandl. der Sächs. Akademie, 1852, [= Werke Bd. II, S. 89—176]).

²²⁾ [Bekanntlich hat A. Harnack später gefunden, daß die Gesamtzahl der Züge einer ebenen Kurve n -ter Ordnung bis zu $\frac{n-1 \cdot n-2}{2} + 1$ aufsteigen, aber nicht größer werden kann. Siehe seine Abhandlung: „Über die Vieltheiligkeit der ebenen Kurven“ in Bd. 10 der Math. Annalen (1876), S. 189 ff. Hierauf wird in meinen unter XXXVII bis XLII folgenden Arbeiten wiederholt Bezug genommen. K.]

paaren, die paaren mit unpaaren Kurven und die paaren ohne unpaare Kurven, sind etwa Beispiele: die Ebene, das einschalige Hyperboloid, das Ellipsoid (oder das zweischalige Hyperboloid). Man findet sofort:

Unpaare Flächen oder auch eine unpaare Fläche und eine paare der ersten Art schneiden sich notwendig.

Und hierauf gestützt leitet man den Satz ab:

Flächen n -ter Ordnung ohne vielfache Punkte und Kurven enthalten, wenn n gerade ist, keinen, wenn n ungerade ist, einen und nur einen unpaaren Teil. Paare Teile der ersten Art treten nur bei den Flächen einer geraden Ordnung auf; paare Teile der zweiten Art können, unabhängig davon, ob die Ordnung der Fläche gerade oder ungerade ist, vorhanden sein. [Die Zahl paarer Teile beider Arten bleibt dann noch durch weitere Untersuchungen zu beschränken.]

Die Flächen dritter Ordnung ohne Knotenpunkt, wie wir sie oben kennen gelernt haben, bestehen nur in einem Falle (V) aus zwei Teilen. Der eine Teil ist, wie er sein muß, ein *paarer* von der zweiten Art, der andere ein *unpaarer*. Die überall zusammenhängenden Flächen der vier ersten Arten geben Beispiele *unpaarer* Flächenteile. Sie haben — ähnlich wie die *unpaaren* Kurvenzüge der Ebene, die sich nicht selbst durchsetzen — die Eigenschaft, den Raum unzerlegt zu lassen, ihn nur zu begrenzen.

§ 16.

Beziehungen zur Analysis situs.

Die entwickelten Unterscheidungen bei geschlossenen Kurven und Flächen beziehen sich auf Eigenschaften derselben, welche ebensowohl bei beliebigen reellen Kollineationen als bei stetigen Deformationen ungeändert bleiben. Es entsteht durch diese Bemerkung überhaupt die Frage nach solchen Eigenschaften. Die Fragestellung ist ähnlich, aber nicht dieselbe, wie in der gewöhnlichen *Analysis situs*, und es mag hier ausdrücklich auf das Gemeinsame wie auf das Unterscheidende aufmerksam gemacht werden²³⁾.

Die *Analysis situs* beschäftigt sich zunächst nur mit Gebilden, die durchaus im Endlichen verlaufen, indem sie bei ihnen allen als gleichartig betrachtet, was durch stetige Deformation ineinander übergeführt werden kann. Besondere Festsetzungen sind zu treffen, wenn auch von Teilen die Rede sein soll, die sich ins Unendliche erstrecken, und diese mit im Endlichen verlaufenden Teilen verglichen werden sollen.

Man wird ganz allgemein eine solche Festsetzung in der Weise treffen können, daß man mit den im Endlichen stattfindenden Deformationen

²³⁾ [Vgl. Abh. XXVII in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe, S. 482.]



物理
08
K
11.

irgendwelche Transformationen verbunden denkt, welche das Unendliche ins Endliche überführen, und dann Gebilde als äquivalent betrachtet, welche durch Verknüpfung dieser Transformationen mit den Deformationen im Endlichen ineinander übergeführt werden können.

Man hat nun seither bei derartigen Untersuchungen, und zwar (so viel mir bekannt) ohne die darin liegende Willkürlichkeit hervorzuheben, das Unendliche so betrachtet, wie es bei einer Raumtransformation durch reziproke Radii vectores erscheint, d. h. als einen einzelnen Punkt. Es entspricht das der Art, nach welcher bei der geometrischen Interpretation von $x + iy$ in der Ebene das Unendliche beurteilt werden muß, damit sich die geometrische Auffassung an die Vorstellung einer komplexen Veränderlichen anschmiegt. Man hat es bei dieser Anschauung als eine Zufälligkeit zu erachten, die sich immer durch geeignete Transformation vermöge reziproker Radien vermeiden läßt, wenn sich eine Kurve oder Fläche einfach oder mehrfach ins Unendliche erstreckt. Die Unterscheidung der geschlossenen Kurven in zwei, der geschlossenen Flächen in drei Arten, wie sie für die projektivische Anschauung stattfand, kommt in Wegfall.

Die Ergebnisse dieser Art von Analysis situs sind daher nicht ohne weiteres für die projektivische Auffassung zu verwerten. Letzterer entspricht eine Analysis situs, die das Unendlichferne durch reelle Kollineationen mit dem Endlichen vergleichbar macht, wobei es als Ebene, allgemeiner ausgedrückt, als in eine Ebene ausbreitbare unpaare Fläche erscheint. Für sie sind die Theoreme der anderen ein erster Beitrag, der unbedingt für alle im Endlichen verlaufenden Gebilde gültig ist; es treten aber weitere Unterscheidungen ganz neuer Art ein, wie eben die Einteilung der Kurven und Flächen in paare und unpaare.

Ein Theorem, das auf diesem Standpunkte eben nur als ein Anfang zur Lösung eines allgemeinen Problems erscheint, ist das Riemannsche vom Zusammenhang der Flächen. Nach Riemann können zwei geschlossene Flächen (und nur von solchen mag die Rede sein) dann ineinander durch stetige Deformation übergeführt werden, wenn die Zahl der geschlossenen Kurven, die man auf den Flächen ziehen kann, ohne daß dieselben in Stücke zerfallen, beiderseits dieselbe ist; das Doppelte der Zahl dieser Kurven heißt der (außerordentliche) Zusammenhang. Für die von uns geforderte Analysis situs ist das Übereinstimmen in der Zahl ebenso eine notwendige aber nicht mehr eine ausreichende Bedingung. Flächen verschiedener Klassen können niemals ineinander übergeführt werden, auch wenn diese Zahl stimmt.

Die unbegrenzte Ebene z. B. wird nach dieser Definition des Zusammenhanges bei projektivischer Anschauung den Zusammenhang 2 bekommen. Denn man kann eine und nur eine geschlossene Kurve in der Ebene ziehen,

ohne daß dieselbe zerfällt, z. B. eine gerade Linie oder jede unpaare Kurve, welche sich nicht selbst durchsetzt; zwei Kurven aber trennen die Ebene notwendig. Und doch wird man die Ebene nicht überführen können in eine im Endlichen gelegene Ringfläche, die auch den Zusammenhang 2 besitzt.

Der Unterschied der beiden Flächen ist auch nicht darin allein begründet, daß das eine Mal eine unpaare, das andere Mal eine paare Kurve auf der Fläche gezogen wird.

Denn ein einschaliges Hyperboloid hat wie die Ringfläche die Eigenschaft, daß man auf der Fläche eine und nur eine geschlossene Kurve ziehen kann, ohne daß sie zerfällt, und daß man für diese Kurve eine paare Kurve wählen kann. Und doch sind die beiden Flächen verschieden: das Hyperboloid gehört zur ersten, die Ringfläche zur zweiten Klasse der paaren Flächen.

Das Resultat dieser Überlegungen ist also folgendes: Der Zusammenhang der Flächen ist auch für die projektivische Anschauung ein bleibendes Element; es gibt aber nicht mehr das ausreichende Kriterium für die Transformierbarkeit zweier Flächen ineinander ab.

§ 17.

Der Zusammenhang der Flächen dritten Grades.

Herr Schläfli hat in dem wiederholt genannten Aufsätze (Annali di Mat., ser. II, t. 5) den Zusammenhang der Flächen ohne Knoten I, II, III, IV, V bez. zu 6, 4, 2, 0, - 2 bestimmt. Diese Bestimmung gründet sich aber nicht auf die projektivische Auffassung vom Unendlichweiten, sondern auf die andere, die das Unendlichferne als Punkt betrachtet. Denn Herr Schläfli setzt den Zusammenhang der unbegrenzten Ebene gleich Null, während er projektivisch gleich 2 zu setzen ist, wie eben bemerkt wurde. Er gewinnt sodann seine Zahl dadurch, daß er die vierte Fläche aus der fünften, die dritte aus der vierten usw. ableitet, indem er zwei bis dahin getrennte Partien der Fläche in einem Knotenpunkte zusammenwachsen läßt. Diese Operationen erhöhen den Zusammenhang immer um zwei und so entsteht die Reihe der jedesmal um zwei unterschiedenen Zahlen - 2, 0, 2, 4, 6.

Für die im vorigen Paragraphen entwickelte projektivische Auffassung behält die Operation, welche in dem Entstehenlassen eines Knotenpunktes und der weiteren Verwertung desselben besteht, ihren Einfluß auf den Zusammenhang. Es sind nur die Zahlen - 2, 0, 2, 4, 6 alle um zwei zu erhöhen. Denn z. B. die Art IV, die sich in eine unbegrenzte Ebene aus-



物 理
08
K
u.

breiten läßt, erhält für uns den Zusammenhang 2, und daraus folgt (in derselben Weise, wie Schläfli seine Zahlen ableitet):

I	8
II	6
III	4
IV	2
V	0.

In der Tat kann man auf diesen Flächen 4, 3, 2, 1, 0 geschlossene Kurven ziehen, ohne daß sie in Stücke zerfallen, wenn man sich der Entstehung aus der Fläche mit vier Knoten erinnert. Bei I, II, III, IV haben sich bez. die Flächenteile, die in 4, 3, 2, 1 Knoten aneinander stießen, miteinander vereinigt. Um 3, 2, 1, 0 der so entstandenen dünnen Stelle der Fläche lege man geschlossene Ovale. Man ziehe ferner auf dem ursprünglichen hyperbolischen Teile der Fläche mit vier Knoten einen geschlossenen unpaaren Kurvenzug, als welchen man z. B. eine der einfach zählenden Geraden wählen kann. Dann hat man auf den Flächen I, II, III, IV, V bez. 4, 3, 2, 1, 0 geschlossene Kurven gezogen, ohne daß ein Zerfallen der Fläche eingetreten wäre. Jede weitere geschlossene Kurve führt aber ein Zerfallen herbei. Der Zusammenhang ist also bez. 8, 6, 4, 2, 0.

Erlangen, den 6. Juni 1873.

[Zusatz I. Über Flächen dritter Ordnung mit konischen und biplanaren Punkten.]

[Zu dem § 5 der vorstehenden Abhandlung mögen hier noch einige Ergänzungen gegeben werden, welche außer den beim Wiederabdruck im Texte durch eckige Klammern angezeigten Änderungen notwendig erscheinen. Es handelt sich um die Frage, bei welchen der in § 2 des Textes genannten Flächen (welche aus der Fläche mit vier reellen konischen Knoten durch die Prozesse + oder - abgeleitet sind) der Durchgang eines oder mehrerer der konischen Knoten durch die biplanare Form wirklich eine neue Flächenart liefert. Die Reduktion der im Texte als möglich bezeichneten Arten haben Rodenberg und Herting²⁴⁾ begonnen. Sie sind dabei aber nicht weit genug gegangen.

Die Sache ist die, daß es außer der Fläche IV' mit einem isolierten konischen Knoten, von welcher der erste Teil des § 5 handelt, nur noch eine, von den un mittelbar gewonnenen Arten wesentlich verschiedene, Art gibt. Bei den Flächen mit drei konischen Knoten der Art I erhält man eine neue Art I', wenn man drei oder einen der Knoten sich durch die biplanare Form ändern läßt; gehen jedoch zwei Knoten durch die biplanare Form hindurch, so erhält man wieder eine Fläche der Art I.

²⁴⁾ Rodenberg, Math. Annalen, Bd. 14, S. 55-58 und Herting in seiner Münchener Dissertation „Über die gestaltlichen Verhältnisse der Flächen dritter Ordnung und ihrer parabolischen Kurven“ (1884, gedruckt Augsburg 1887) S. 24, 28, 36-38.

(Die Arten I und I' einerseits und I' und I'' andererseits des Textes sind also identisch.) — Rodenberg und Herting haben bereits gezeigt, daß bei den Flächen mit zwei konischen Knoten nur die Art II eine neue Art liefern kann, wenn einer der Knoten sich durch die biplanare Form ändert, daß aber keine neue Art entsteht, wenn dies

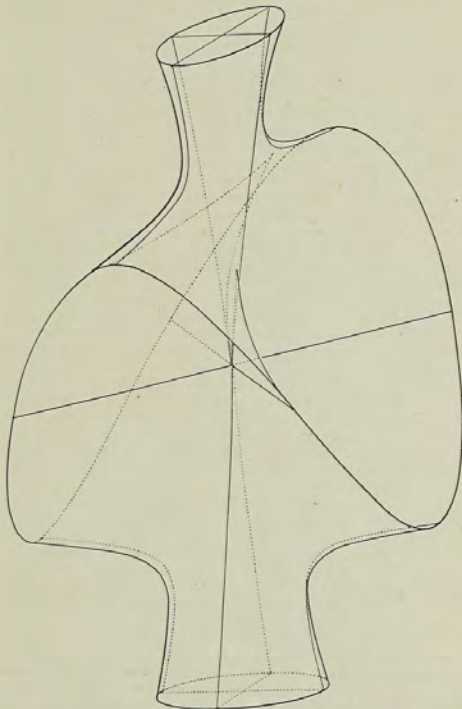


Fig. 9.

beide Knoten tun. Beide haben ferner gezeigt, daß bei den Flächen mit einem nicht isolierten konischen Knoten nur bei der Art III der Durchgang durch die biplanare Form Anlaß zu einer neuen Art geben kann. Ihre Angabe aber, daß diese beiden Möglichkeiten wirklich neue Flächenarten liefern, ist irrig. Ebenso dürfte ihr Beweis für den Fortfall der andern Möglichkeiten im Falle von zwei und einem Knoten nicht stichhaltig sein. Deshalb soll der Durchgang eines Knotens durch die bipla-

nare Form für Flächen mit einem oder zwei Knoten im folgenden auch genauer untersucht werden.

Es mögen zunächst einige spezielle Flächen mit nur einem biplanaren Knoten genauer betrachtet werden. Wir stellen zunächst folgende drei Flächen nebeneinander

- (1) $xy = 2z(x^2 + y^2)$,
 (2) $xy = 2z(x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)$,
 (3) $xy = 2z(x^2 + y^2 - \lambda^2 z^2)$.

Die Gleichung (1) stellt, ebenso wie die weiter unten zu betrachtende Gleichung (4) eine Linienfläche dritter Ordnung dar, deren Erzeugende parallel zur xy -Ebene verlaufen. Beide Flächen gehören zu den zuerst von Plücker²⁵⁾ betrachteten Linienflächen, welche von den Achsen der Komplexe einer linearen Kongruenz erzeugt werden, und sind später von Ball in seiner Schraubentheorie (1873) unter dem Namen *Zylindroid* betrachtet worden. Die Gleichung (1) stellt dasjenige Zylindroid dar, dessen Doppelgerade (die z -Achse) zwei reelle „pinch-points“ trägt und oberhalb $z = +1$ und unterhalb $z = -1$ isoliert verläuft. Dies Zylindroid teilt zusammen mit der Ebene $z = 0$ und der unendlich fernen Ebene den Raum in sechs Kammern, von denen vier als flache Kammern, die andern zwei als hohe Kammern bezeichnet werden mögen. — Die Fläche (2) entsteht aus (1), indem die Doppelgerade verschwindet. Sie verläuft in den vier flachen Kammern und nähert sich, je weiter man horizontal ins Unendliche geht, dem Zylindroid. Durch den biplanaren Punkt der Fläche laufen zwei reelle je dreifach zählende Gerade; außerdem liegt die unendlich ferne Gerade der xy -Ebene auf ihr. Die Fläche gehört zur Art III. Sie wird durch die Fig. 2 auf S. 18 genügend dargestellt. — Die Fläche (3) entsteht aus (1), indem die isolierten Teile der Doppelgeraden sich aufblähen, so daß sie gleich Rotationskegeln zweiter Ordnung ins Unendliche gehen. Sie verläuft in den zwei hohen Kammern und nähert sich wieder, je weiter man horizontal ins Unendliche geht, dem Zylindroid. Die kegelförmigen Teile gehen in der Umgebung von O in eigentümlicher Weise in den zylindroidförmigen Teil über. Durch den biplanaren Punkt O der Fläche laufen sechs reelle je dreifach zählende Gerade. Ein solcher Punkt ist in Fig. 3 dargestellt²⁶⁾, die allerdings nur die nächste Umgebung wiedergibt. Die Fläche enthält außer der unendlich fernen Geraden der xy -Ebene noch acht weitere Gerade und gehört zur Art I. Um ihren Gesamtverlauf, der auch durch das entsprechend (übrigens nicht voll symmetrische) Modell der Rodenbergschen Sammlung nicht ausreichend dargestellt ist, besser überblicken zu können, ist als Fig. 9 eine perspektive Zeichnung wiedergegeben. Man muß sich in die Einzelheiten der Figur, die sich nur schwer in Worten ausdrücken lassen, hineindenken²⁷⁾. Am besten ist es, daß sich der Leser selbst ein Modell, etwa aus Plastilin, herstellt, oder zum mindesten eine kotierte Projektion der Fläche auf die Ebene $z = 0$ zeichnet. Dies ist bei den Flächen (2) und (3) sehr leicht, denn ihre Horizontalschnitte $z = \text{Const.}$ sind Kegelschnitte, deren Hauptachsen in den winkelhalbierenden Ebenen zu dem Paar der Hauptebenen $x = 0$ und $y = 0$ des biplanaren Punktes liegen.

²⁵⁾ Neue Geometrie des Raumes, Teil I (1867), S. 62—112, besonders S. 97.
²⁶⁾ Diese Figur entspricht dem Falle einer sehr weitgehenden Abweichung vom Zylindroid, die Rotationskegel würden einen sehr großen Öffnungswinkel besitzen.
²⁷⁾ Zum Verständnis der Fig. 9 sei noch folgendes hinzugefügt. (Das meiste hier Gesagte gilt auch für die Fig. 10.) Die Fläche ist durch einen Rotationszylinder um die z -Achse einerseits und durch zwei Ebenen $z = \pm \text{Const.}$ andererseits abgeschnitten. Gezeichnet sind die Schnittgeraden mit der Ebene $z = 0$ und die Schnittkurven mit den winkelhalbierenden Ebenen $x \pm y = 0$. Von der Umrisskurve sind sowohl der sichtbare als auch der unsichtbare Teil bestimmt. In Fig. 9 sind die von den auf den kegelförmigen Teilen verlaufenden Geraden durch den biplanaren Punkt fortgelassen, um die Figur und besonders die Umgebung dieses Punktes nicht zu überlasten.

Wir betrachten ferner folgende zwei Flächen:

- (4) $xy = 2z(x^2 - y^2)$,
 (5) $xy = 2z(x^2 - y^2 + \lambda^2 z^2)$.

Die Gleichung (4) stellt ein „tordiertes“ Zylindroid dar, dessen Doppelgerade (die z -Achse) zwei imaginäre „pinch-points“ trägt und daher nirgends isoliert verläuft. Ihre Horizontalschnitte bestehen aus einem rechtwinkligen Geradenpaar, das sich in positivem Sinne um 90° dreht, wenn man die z -Achse von unten nach oben durch-

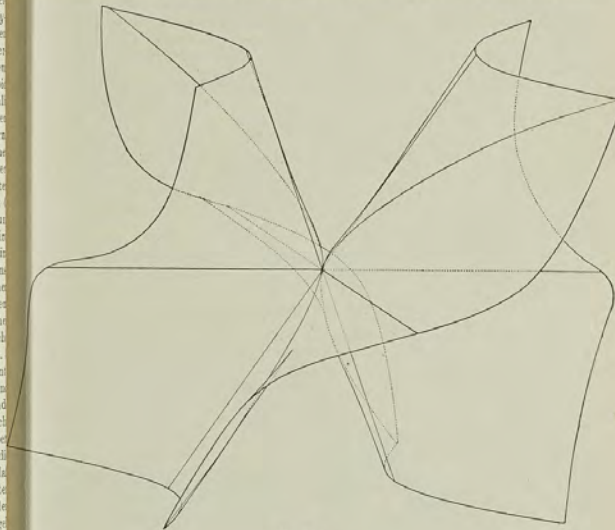


Fig. 10a.

läuft. Die Fläche (4) allein zerteilt den Raum nicht, zusammen aber mit der Ebene $z = 0$ und der unendlich fernen Ebene zerlegt sie ihn in acht Kammern. In vier derselben, welche nicht benachbart sind, verläuft die Fläche (5). Sie entsteht dadurch aus der Fläche (4), daß deren Doppelgerade imaginär wird und die Flächenmäntel sich oberhalb und unterhalb der Ebene $z = 0$ von der z -Achse ablösen. Sie hat in O einen biplanaren Knoten, durch den vier reelle je dreifach zählende Gerade laufen, von denen eine in der Hauptebene $y = 0$ und drei in der Hauptebene $x = 0$ liegen. (Um diesen Typus des biplanaren Punktes, der in § 3 des Textes nur nebenher erwähnt wurde, zu veranschaulichen, sind in Fig. 10b eine Reihe schematischer Zeichnungen von Schnittkurven beigelegt, welche von einer sich im positiven Sinne um die Achse des biplanaren Punktes drehenden Ebene ausgeschnitten werden.) Die Fläche enthält außer der unendlich fernen Geraden der xy -Ebene noch zwei einfach



物理
08
K
11.

zählende Geraden. Sie gehört zur Art II. Eine perspektive Zeichnung der Fläche ist in Fig. 10a zu sehen. Die Horizontalschnitte der Fläche sind gleichseitige Hyperbeln, deren Asymptoten durch die Horizontalschnitte der Fläche (4) gegeben sind.

Hat man sich nun so den Verlauf der Flächen (2), (3) und (5) klargemacht, so ist die Behauptung evident, daß es zu Flächen mit einem Knotenpunkt, dessen Kegel reell ist, keine neuen Flächen gibt (und zwar für alle drei Arten I, II, III gleichermaßen). Denn jede solche Fläche gehört mit einer derartigen Fläche, wie sie aus (2), (3) und (5) durch Auflösung des biplanaren Punktes in einen konischen Knoten nach § 4 des Textes entsteht, zur gleichen Art. Weil aber jede der Flächen (2), (3) und (5) mit sich selbst zur Deckung kommt, wenn man sie um die x -Achse oder y -Achse durch 180° dreht, so kann die Auflösung des biplanaren Punktes in einen konischen Knoten keine verschiedenen Flächenarten liefern, nach welcher der beiden verschiedenen Seiten hin sie auch erfolgen mag.

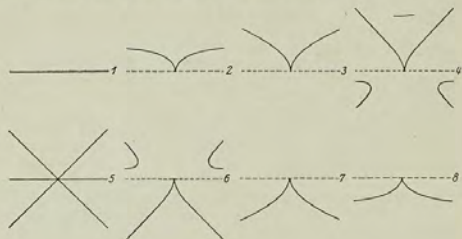


Fig. 10b.

Wir betrachten ferner als Beispiel die Flächenschar mit dem Parameter σ :

$$(6) \quad \begin{cases} xy = -\sigma \frac{14 + \sigma + 2\sigma^2 - \sigma^3}{8} z^2 x^2 - 2zy^2 + 2\lambda^2 z^3 - (\sigma - 1)(\sigma + 1)\lambda z^2 x \\ + \sigma(\sigma - 1)(\sigma + 1) \frac{\sigma^2 + 3\sigma + 10}{16\lambda} x^3. \end{cases}$$

Lassen wir σ von $+1$ nach -1 laufen, so erhalten wir von der Fläche (3) ausgehend²⁹⁾ für $\sigma > 0$ Flächen von derselben Art wie (3), während für $\sigma < 0$ Flächen von der Art der Fläche (5) entstehen, mit welcher unsere Reihe endet. Nur die für $\sigma = 0$ entstehende Fläche

$$(7) \quad xy = \sigma - 2zy^2 + 2\lambda^2 z^3 + \lambda z^2 x$$

enthält außer dem biplanaren Punkt in O noch einen konischen Knoten (im unendlich fernen Punkt der x -Achse). Den gestaltlichen Verlauf dieser Fläche wollen wir uns jetzt klarmachen. Ihre Horizontalschnitte $z = \text{const.}$ sind Hyperbeln, deren Mittelpunkt auf der kubischen Raumkurve $y = \lambda z^2$, $x = -4zy = -4\lambda z^3$ liegen und deren Asymptoten parallel sind zu den in der gleichen Ebene liegenden Erzeugenden der Linienfläche

$$(8) \quad xy = -2zy^2.$$

Diese zerfällt in die Ebene $y = 0$ und das geradlinige Paraboloid $x = -2zy$, dessen Scheitel in O liegt, und dessen Scheitelgeraden die y - und z -Achse sind. Das für un-

²⁹⁾ Genauer gesagt beginnen wir mit der durch eine Drehung von 90° um die z -Achse aus (3) entstehenden Fläche $xy = -2zx^2 - 2zy^2 + 2\lambda^2 z^3$.

in Betracht kommende Erzeugendensystem dreht sich um die z -Achse in positivem Sinne um 180° , wenn man z von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen läßt, so daß also das Paraboloid zusammen mit den Ebenen $y = 0$, $z = 0$ und der unendlich fernen Ebene den Raum in acht Kammern teilt, von denen vier nach oben bzw. nach unten immer enger werden, während die anderen vier immer weiter werden. Das Analoge gilt für die von den Asymptoten selbst gebildete Linienfläche. Und nun ist die Sache die, daß die Fläche (7) für Werte $|z| < 1$ in den vier weiter werdenden, für Werte $|z| > 1$ jedoch in den vier enger werdenden Kammern verläuft, während sie für $|z| = 1$ die letztgenannten Linienfläche in einem Geradenpaar durchsetzt. Es bleibt noch einiges über die reellen Geraden der Fläche (7) zu bemerken. Die x -Achse zählt als Verbindungslinie des biplanaren und konischen Knotens sechsfach. Durch ersteren läuft in der Ebene $y = 0$ noch eine dreifach zählende Gerade und laufen in der Ebene $y = 0$ noch drei je dreifach zählende Gerade. Durch den konischen Knoten gehen noch drei je zweifach zählende Gerade (unter ihnen die unendlich ferne Gerade der Ebene $z = 0$)³⁰⁾. Außerdem enthält die Fläche drei einfach zählende Gerade. Sie gehört also zur Art I.

Wir betrachten schließlich die Flächenschar

$$(9) \quad \begin{cases} xy = 2zx^2 - \sigma \frac{14 + \sigma + 2\sigma^2 - \sigma^3}{8} zy^2 + 2\lambda^2 z^3 - (\sigma - 1)(\sigma + 1)\lambda z^2 y \\ + \sigma(\sigma - 1)(\sigma + 1) \frac{\sigma^2 + 3\sigma + 10}{16\lambda} y^3. \end{cases}$$

Läuft σ von $+1$ nach -1 , so ergeben sich, von der Fläche (5) beginnend, für $\sigma > 0$ Flächen von derselben Art wie (5), für $\sigma < 0$ aber Flächen von der Art der Fläche (2), mit welcher die Reihe schließt. Wir betrachten wieder besonders die Übergangsfläche mit $\sigma = 0$:

$$(10) \quad xy = 2zx^2 - \sigma + 2\lambda^2 z^3 + \lambda z^2 y,$$

welche außer dem biplanaren Punkt O noch einen konischen Knoten (im unendlich fernen Punkt der y -Achse) besitzt. Die Horizontalschnitte von (10) sind Hyperbeln, deren Mittelpunkte auf der kubischen Kurve $x = \lambda z^2$, $y = 4zx = 4\lambda z^3$ liegen, und deren Asymptotenrichtungen durch die Linienfläche

$$(11) \quad xy = 2zx^2$$

bestimmt sind. Diese Linienfläche geht durch eine positive Drehung von 270° um die z -Achse aus (8) hervor. Analoges gilt von der neuen und alten kubischen Raumkurve. Also ist die Raumeinteilung durch die von den Asymptoten selbst gebildete Linienfläche, durch die Ebene $z = 0$ und die unendlich ferne Ebene ganz die entsprechende. Die Fläche (11) verläuft jedoch diesmal durchweg in den vier enger werdenden Kammern. Die Fläche enthält die y -Achse als sechsfach zählende Gerade. Durch den biplanaren Punkt geht noch eine weitere dreifach zählende Gerade in der Ebene $x = 0$

³⁰⁾ Über die durch den biplanaren Punkt O der Flächen der Schar (6) laufenden Geraden läßt sich folgendes aussagen. In der Ebene $x = 0$ sind unverändert die drei Geraden $z = 0$, $\lambda z \pm x = 0$ enthalten, während die in der Ebene $y = 0$ gelegenen Geraden gegeben sind durch:

$$\lambda z + \frac{\sigma + 1}{2} x = 0, \quad \lambda z = \left[\frac{\sigma(\sigma + 1)}{4} \pm \sqrt{\frac{5 - 3\sigma}{8}} \right] x.$$

Man sieht, daß dies für $\sigma > 0$ drei reelle Gerade sind, von denen zwei für $\sigma = 0$ zu sammenfallen, während für $\sigma < 0$ eine reelle und zwei imaginäre Gerade auftreten. — Ebenso vereinigen sich zwei dreifach zählende und sechs einfache Gerade der Flächen $\sigma > 0$ bei Entstehen des Doppelpunktes ($\sigma = 0$) zu den oben angegebenen Geraden durch diesen und werden beim Auflösen desselben ($\sigma < 0$) sämtlich imaginär.



物理
08
K
11.

und eine dreifach zählende Gerade in der Ebene $y=0$. Durch den konischen Knoten läuft noch als zweifach zählende Gerade die unendlich ferne Gerade der Ebene $z=0$ ²⁹⁾. Außerdem enthält die Fläche noch eine einfach zählende Gerade. Sie gehört also zur Art II.

Nun besteht der Beweis für die Einflußlosigkeit des Durchganges eines konischen Knotens durch die biplanare Form auf die Art einer Fläche, bei Flächen (7) bzw. (10) durch eine Drehung von 180° um die y -Achse bzw. die x -Achse in sich übergeht, und daß demnach die Auflösung des biplanaren Knotens in einen konischen Knoten gemäß des § 4 des Textes keine verschiedenen Flächenarten liefern kann, nach welcher der beiden Seiten hin die Auflösung auch erfolgen mag.

Es bleibt noch die Frage zu erledigen, bei welcher der hier genannten Flächen mit biplanarem Punkt zwei einander spiegelbildlich zugeordnete Flächen zu derselben Art gehören. Auf diese Frage sind Rodenberg und Herting nicht eingegangen. Die Antwort lautet: Die Flächen, welche mit den Flächen (2) und (3) zu derselben Art gehören, zerfallen nicht in spiegelbildlich verschiedene Arten, eben wegen der Existenz der zu sich selbst symmetrischen Flächen (2) und (3). Dagegen sind die Flächen (5), (7), (10) wesentlich rechts orientiert, und man kann sie nicht in die entsprechenden links orientierten Flächen überführen, ohne daß eine neue oder höhere Singularität dabei auftritt, weil die beiden Ebenen des biplanaren Punktes hinsichtlich der in ihnen liegenden Geraden gänzlich verschieden sind. Also bestimmen die Flächen (5), (7), (10) und die aus ihnen durch Spiegelung hervorgehenden sechs Arten.

Man kann nun noch die Frage aufwerfen, warum die durch Auflösung dieser biplanaren Punkte in konische Knoten entstehenden Flächen nicht mehr spiegelbildlich verschiedene Arten bilden, wie bereits auf S. 23 des Textes angegeben wurde. Die Antwort lautet: Die Bedingung, daß drei Gerade des biplanaren Punktes in einer Ebene liegen, bzw. daß eine Gerade in der festen Tangentialebene der Fläche längs der Verbindungsgeraden des biplanaren und des konischen Knotens liege, stellt eine Einschränkung für die Beweglichkeit dieser Geraden vor, die bei der Auflösung des biplanaren Knotens in einen konischen fortfällt. V.]

Die vorstehenden Ausführungen über die verschiedenen Arten von Flächen mit konischen und gewöhnlichen biplanaren Knoten erfahren eine hübsche Bestätigung, wenn man die Fläche durch elementare Projektion von einem ihrer Knotenpunkte aus auf die Ebene abbildet. Diese Abbildung ist im wesentlichen eindeutig. Nur das Projektionszentrum oder vielmehr die von diesem auslaufenden Linienelemente der Fläche bilden sich dabei als einteiliger oder nullteiliger Kegelschnitt oder als reelles Geradenpaar oder als konjugiert imaginäres Geradenpaar mit reellem Schnittpunkt ab, je nachdem man von einem nicht isolierten oder isolierten konischen Knoten oder von einem biplanaren Knoten mit reellen oder konjugiert imaginären Ebenen projiziert. — Andererseits bilden sich die sechs durch das Projektionszentrum gehenden Geraden der Fläche als Fundamentalpunkte ab, die auf diesem eigentlichen oder uneigentlichen Kegelschnitte liegen. Sind die Geraden reell, so sind die entsprechenden Fundament-

²⁹⁾ Die Geraden des biplanaren Punktes O der Flächen der Schar (9) sind in der Ebene $y=0$ unverändert die reelle Gerade $z=0$, während die in der Ebene $x=0$ verlaufenden Geraden gegeben sind durch

$$\lambda z + \frac{\sigma+1}{2} y = 0, \quad \lambda z = \left[\frac{\sigma(\sigma+1)}{4} + \sqrt{\frac{5-3\sigma}{8}} \right] y.$$

Dies sind für $\sigma > 0$ drei reelle Gerade, von denen für $\sigma = 0$ zwei zusammenfallen, um für $\sigma < 0$ imaginär zu werden. — Ebenso vereinigen sich zwei dreifach zählende und zwei einfache Gerade beim Auftreten eines Doppelpunktes zu den durch diesen laufenden Geraden und werden beim Verschwinden desselben sämtlich imaginär.



punkte in den folgenden Figuren durch kleine Kreise bezeichnet. Werden im Falle eines konischen Knotens zwei der durch ihn gehenden Geraden imaginär, so haben sie eine reelle Ebene gemeinsam, die die Fläche in einer dritten nicht durch den Knoten gehenden Geraden schneidet. Die Projektion dieser Geraden ist in den Figuren gezeichnet, auf ihr liegen zwei konjugiert imaginäre Fundamentalpunkte. (Sie darf also den Fundamentalkogelschnitt nicht in reellen Punkten schneiden.) Entsprechendes gilt für einen biplanaren Punkt mit konjugiert imaginären Ebenen. Wenn aber im Falle eines biplanaren Punktes mit reellen Ebenen zwei der durch ihn gehenden Geraden konjugiert imaginär werden, so fällt ihre reelle Verbindungsebene mit einer Ebene des biplanaren Punktes zusammen. Diese Ebene schneidet dann aus der Fläche noch eine dritte durch den biplanaren Punkt gehende reelle Gerade aus, deren Bild als reeller Fundamentalpunkt schon gezeichnet vorliegt.

Die (in den folgenden Fig. 11 bis 17 nicht gezeichneten) Bilder der übrigen reellen Geraden erhält man, wenn man im Falle eines einteiligen Fundamentalkogelschnittes die Verbindungsgeraden aller reellen Fundamentalpunkte und die Tangenten in etwa zusammengedrängten Fundamentalpunkten zeichnet, im Falle eines reellen Fundamentalkogelschnittes aber die Verbindungslinien derjenigen reellen Fundamentalpunkte zieht, welche auf verschiedenen Geraden des Geradenpaares liegen. (Diese letzteren sind keine Bilder von Geraden der Fläche.) — Die Geraden dieses Geradenpaares sind in den folgenden Figuren durch stärkeres Ausziehen kenntlich gemacht.

Die Abbildungen der Flächen lassen sich durch solche stetige Umänderungen, welche weder die oben beschriebene Art des Fundamentalkogelschnittes, noch die Vielfachheit von Fundamentalpunkten ändern, noch einen Fundamentalpunkt mit dem Bildpunkt der Achse des biplanaren Punktes zusammenfallen lassen, in die folgenden schematischen Fig. 11 bis 17 verwandeln.

Im einzelnen erhalten wir dabei für die Flächen mit einem konischen Knoten die folgenden Bilder³¹⁾:

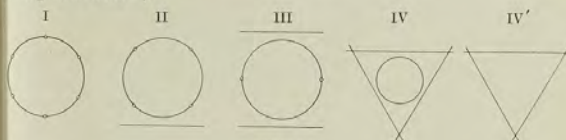


Fig. 11.

und für die mit einem biplanaren Knoten diese:

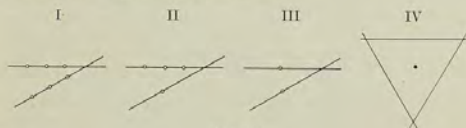


Fig. 12.

Man sieht, die Flächen mit derselben Anzahl reeller Geraden (wobei deren Vielfachheit zu berücksichtigen ist) bilden je nur eine Art. Eine Ausnahme machen nur die durch die Fig. 11, IV und 11, IV' charakterisierten Flächen mit drei reellen Geraden,

³¹⁾ Die römischen Nummern dieser Figuren stimmen mit den entsprechenden Bezeichnungen des Textes und des ersten Teiles dieses Zusatzes überein.

welche einen nichtisolierten bzw. isolierten Knoten besitzen. Wie die Fläche der Fig. 12, IV mit biplanarem Knoten mit imaginären Ebenen den Übergang zwischen beiden vermittelt, ist deutlich zu sehen.

Es folgen jetzt die Bilder der Flächen mit zwei, drei und vier konischen Knoten. Bei der Abbildung von jedem der auftretenden Knoten aus ergibt sich die gleiche schematische Figur:

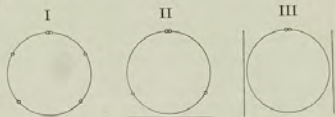


Fig. 13.

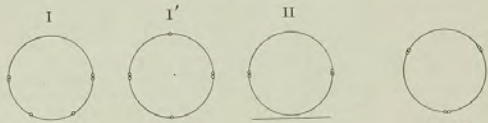


Fig. 14.

Fig. 15.

Bei den Flächen mit drei Knoten und der Höchstzahl der reellen Geraden gibt es offenbar zwei Arten, die durch die Figuren 14, I und 14, I' dargestellt sind. Sie sind durch die verschiedene Anordnung der von dem Knoten auslaufenden zweifach und vierfach zählenden Geraden unterschieden. — Sonst sind die verschiedenen Arten schon durch die Anzahl der reellen Geraden gekennzeichnet.

Schließlich lasse ich noch die Abbildung der Flächen mit einem konischen und biplanaren Punkte, bzw. mit zwei konischen und einem biplanaren Punkte folgen, und zwar jeweils sowohl die Projektion vom konischen als auch vom biplanaren Punkte aus.

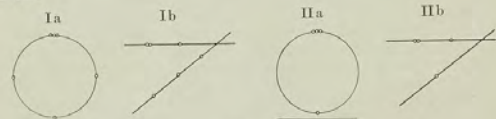


Fig. 16.

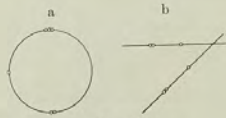


Fig. 17.

Man sieht deutlich, wie Fig. 16, Ia den Übergang zwischen den Fig. 14, I und 14, I' bildet.

Um aus der Abbildung wieder die Fläche dritter Ordnung zu erhalten, hat man folgende Regel: Man wähle außerhalb der Bildebene das Projektionszentrum beliebig. Dann nehme man dieses als den Eckpunkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ eines Tetraederkoordinatensystems und die Bildebene als die Ebene $x_4 = 0$ desselben. Die durch das Tetraederkoordinatensystem in der Bildebene bestimmten Dreieckskoordinaten mögen ξ_1, ξ_2, ξ_3 heißen. Man kann diese noch so wählen, daß die sechs Fundamentalpunkte zu je zwei auf den Geraden $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0$ liegen. Wählt man nun noch den Einheitspunkt des Tetraederkoordinatensystems und damit auch des Dreieckskoordinatensystems geeignet, so lauten die Gleichungen der Fläche in Parameterform

$$(12) \quad \begin{cases} \varrho x_1 = \xi_1 \cdot \Omega \\ \varrho x_2 = \xi_2 \cdot \Omega \\ \varrho x_3 = \xi_3 \cdot \Omega \\ \varrho x_4 = \sigma \{ \xi_1 \xi_2 \xi_3 + (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \Omega \}. \end{cases}$$

Dabei bedeutet $\Omega (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes. Die Konstante σ der letzten Gleichung wird durch die Forderung bestimmt, daß ein gegebener nicht in der Bildebene und auf keiner der Fundamentalgeraden liegender Punkt der Fläche angehören soll.

Unsere elementare Projektionsmethode ermöglicht aber auch die Entscheidung der Frage, ob eine Fläche und ihre gespiegelte zu derselben Art gehören oder nicht, obwohl die Projektion einer Fläche und ihrer an der Bildebene gespiegelten identisch sind. Die Untersuchung stützt sich dabei auf folgende Sätze:

1. Durchläuft ein Punkt eine Gerade der Fläche, die durch keinen Knotenpunkt geht, so dreht sich natürlich seine Tangentialebene. Enthält die Gerade imaginäre Asymptotenpunkte, so erfolgt die Drehung beständig im gleichen Sinne, entweder rechtsherum oder linksherum, im ganzen um den Winkel 2π ; eine solche Gerade werde mit $2r$ bzw. $2l$ bezeichnet. Enthält aber die Gerade zwei reelle Asymptotenpunkte, so erfolgt die Drehung in dem einen der durch die beiden Asymptotenpunkte gebildeten Abschnitte rechtsherum, im andern linksherum, je um denselben Winkel $\alpha < \pi$; die betreffenden Abschnitte mögen mit (r) oder (l) bezeichnet werden. — Geht die Gerade durch *einen* Knotenpunkt, so drehen sich ihre Tangentialebenen beständig im gleichen Sinn um den Winkel π ; eine solche Gerade heiße r oder l , je nachdem die Drehung rechtsherum oder linksherum erfolgt. Geht eine Gerade durch *zwei* Knotenpunkte, so sind die Tangentialebenen aller ihrer Punkte identisch; die Gerade werde mit 0 bezeichnet.

2. Schneiden sich zwei gewundene Geraden der Fläche in einem Punkt, der weder Knotenpunkt noch Asymptotenpunkt ist, so ist dort die eine rechts und die andere links gewunden. Dies folgt aus der Betrachtung des oskulierenden Hyperboloids. — Ist der Schnittpunkt zweier gewundener Geraden für die eine Asymptotenpunkt, so ist er es auch für die andere; und es geht noch eine dritte Gerade durch diesen Punkt, für welche dasselbe gilt. Umkreist man den Asymptotenpunkt in der Ebene dieser drei Geraden, so trifft man abwechselnd auf rechts oder links gewundene Abschnitte. — Schneidet eine Verbindungslinie zweier Knotenpunkte eine zweite durch keinen Knotenpunkt laufende Gerade, so ist dieser Schnittpunkt für die zweite ein Asymptotenpunkt, denn in ihm wird die Tangentialebene stationär.

3. Bei unserer stereographischen Projektion bildet sich eine Gerade mit zwei imaginären Asymptotenpunkten als solche Verbindungslinie zweier reeller einfacher Fundamentalpunkte ab, welche die übrigen reellen Fundamentalpunkte unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit im Falle eines einteiligen Fundamentalkegelschnittes schlechthin, im Falle eines reellen Fundamentalgeradenpaares aber noch zusammen mit dessen Schnittpunkt in zwei ungerade Gruppen teilt. Die übrigen Verbindungsgeraden einfacher Fundamentalpunkte, besonders die konjugiert imaginärer Fundamentalpunkte besitzen *reelle* Asymptotenpunkte. — Zum Beweis überlege man, daß ein Ebenenbüschel durch eine (keinen Knotenpunkt enthaltende) Gerade der Fläche aus dieser solche Kegelschnitte ausschneidet, welche sich bei unserer Projektion als



物理
08
K
11.

ein Kegelschnittbüschel abbilden, das diejenigen vier Fundamentalpunkte als Grundpunkte besitzt, welche nicht auf dem Bild der zu untersuchenden Geraden liegen. Die Frage ist nun, ob die von den Kegelschnitten des Büschels auf der Geraden ausgeschnittene Involution *elliptisch* oder *hyperbolisch* ist, d. h. ob die Schnittpunkte zweier beliebiger Kegelschnitte sich (harmonisch) trennen oder dies nicht tun. (Vgl. Fußnote 15) auf S. 31.) Da es sich um projektive Eigenschaften handelt, können wir für Verbindungslinien reeller Fundamentalpunkte unsere Untersuchung auf den Fall beschränken, daß das Fundamentalgebilde eine Ellipse ist oder ein Geradenpaar, dessen Schnittpunkt die auf jeder der beiden Geraden liegenden Fundamentalpunkte im Endlichen nicht trennt. Sind nun die vier Grundpunkte des Kegelschnittbüschels sämtlich reell, so genügt es zum Beweise die drei im Büschel enthaltenen zerfallenden Kegelschnitte, also die Paare gegenüberliegender Seiten des von den Grundpunkten gebildeten vollständigen Viereckes zu betrachten. Sind aber zwei oder vier Grundpunkte paarweise konjugiert imaginär, so projiziere man die Figur so, daß die reelle Verbindungsgerade zweier imaginärer Punkte in die unendlich ferne Gerade und diese selbst in die Kreispunkte übergehen. Dann wird aus dem Kegelschnittbüschel ein Kreisbüschel, welches die andern zwei Grundpunkte als reelle bzw. imaginäre Grundpunkte besitzt (d. h. dessen Kreise sämtlich durch die zwei reellen Grundpunkte hindurchgehen bzw. die Verbindungsline der zwei imaginären Grundpunkte als gemeinsame Chordale haben). Die Betrachtung dieser Kreisbüschel lehrt die Richtigkeit unserer Behauptung. — Ganz analog wird die Behauptung für die Verbindungslinien imaginärer Fundamentalpunkte bewiesen. — Rücken im Falle von vier reellen Grundpunkten etliche zusammen, so bleiben immer zwei gegenüberliegende Seiten des vollständigen Viereckes bestimmt; außerdem beachte man, daß das Fundamentalgebilde selbst ja stets zum Büschel gehört. Rücken im Falle von zwei reellen Grundpunkten diese zusammen, so erhält man ein Kreisbüschel, dessen Kreise sich sämtlich in demselben Punkt berühren. Im Übrigen verläuft der Beweis ebenso.

4. Die Lage der reellen Asymptotenpunkte ergibt sich aus der Bemerkung, daß sie bekanntlich die beiden Schnittpunkte eines beliebigen zu ihrer Geraden gehörigen Kegelschnittes harmonisch trennen. Dies wenden wir auf den Fall an, daß dieser Kegelschnitt in ein reelles Geradenpaar zerfällt, das sich in unserer Abbildung entweder als Geradenpaar oder als zwei Fundamentalpunkte darstellt. Die Asymptotenpunkte sind in den folgenden Figuren durch kurze Querstriche angegeben.

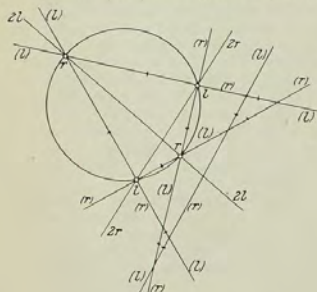


Fig. 18.

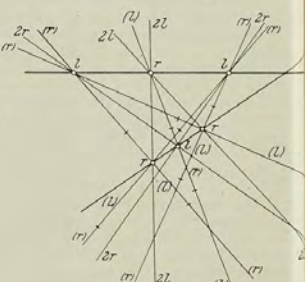


Fig. 19.

Diese Angaben genügen, um die vorstehend gezeichneten Figuren mit den Buch-

staben r und l beschriften zu können: Man fange bei einer Geraden oder ihrem Abschnitte nach Belieben mit r oder l an; dann ergibt sich die Beschriftung aller anderen Stellen zwangsläufig. — Ich habe zwei Beispiele in Fig. 18 und 19 ausgeführt.

Nun hat man für die Herstellung der Abbildung der durch Spiegelung an der Bildebene aus einer Fläche entstehenden symmetrischen einfach die Regel: *Man vertausche überall r mit l* . Weiter ergibt sich: *Eine Fläche und ihre gespiegelte gehören dann und nur dann zu derselben Art, wenn ihre beschrifteten Projektionen in der oben angegebenen Weise stetig ineinander überführbar sind*. Doch muß man bei Flächen mit drei nicht gleichartigen Knoten eine solche Projektion wählen, bei der die zwei gleichartigen Knoten unter ihnen gleichartige Bilder liefern, also z. B. bei der Fig. 17 die Projektion b .

Bei der oben besprochenen Herstellung der Fläche dritter Ordnung aus der unbeschrifteten Projektion war es gleichgültig gewesen, auf welcher der beiden durch Projektionszentrum und Bildebene gebildeten Abschnitte eines Projektionsstrahles man den willkürlich wählbaren Punkt der Fläche annahm. Geht man aber von der beschrifteten Projektion aus, so muß man den Abschnitt des Projektionsstrahles richtig wählen. Von dieser Wahl hängt ersichtlich das Vorzeichen von σ in Formel (12) ab. Denn eine Vorzeichenänderung von σ bedeutet eine „projektive Spiegelung“ der Fläche an der Bildebene $x_4 = 0$. Mit einer solchen aber ändert sich der Windungssinn aller Flächengeraden.

Ich finde unter den oben gezeichneten Figuren 11 bis 17 folgende drei, die sich nicht kontinuierlich in ihre Spiegelbilder überführen lassen. (Zwei der drei Fälle sind in zwei Projektionen gezeichnet.)

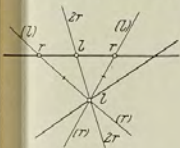


Fig. 20.

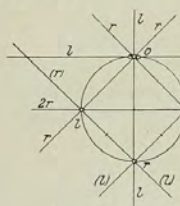


Fig. 21 a.

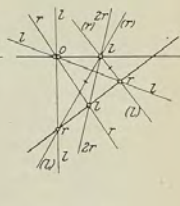


Fig. 21 b.

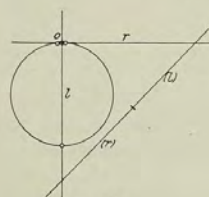


Fig. 22 a.

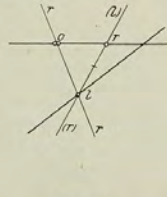


Fig. 22 b.

Daß bei Auflösung des biplanaren Knotens in einen konischen die Unterscheidung in spiegelbildlich getrennte Arten fortfällt, sieht man, indem man bei Projektionen vom konischen Punkt aus den dreifachen Fundamentalpunkt in einen zweifachen und ein-



fachen aufweist, bei Projektionen vom biplanaren Knoten aus das Geradenpaar in eine benachbarte Hyperbel übergehen läßt. Das letztere ist in den Fig. 23, 24 und 25 ausgeführt.

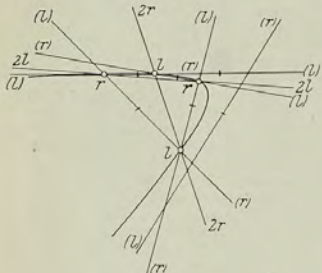


Fig. 23.

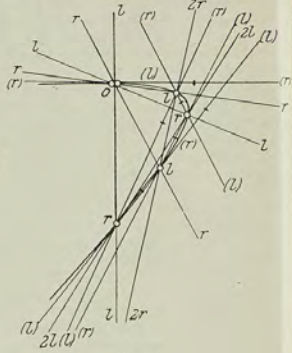


Fig. 24.

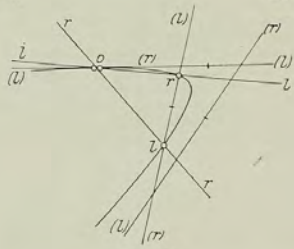


Fig. 25.

Daß die vorher getrennten Arten jetzt in eine übergehen, wird hierdurch besonders verständlich. K.]

[Zusatz II: Über die durch die 27 reellen Geraden vermittelte Zerlegung der Clebschen Diagonalfäche³²⁾.]

[Bekanntlich lassen sich nach Clebsch und Cremona die singularitätenfreien F_3 in der Weise im allgemeinen einseitig auf die Ebene abbilden, daß in letzterer

³²⁾ [Ich gebe hier noch einige Ausführungen, weil mir die klare Durcharbeitung der Einzelheiten des besonderen Falles für die Erfassung der allgemeinen Überlegungen sowohl der vorliegenden als namentlich auch der folgenden Abhandlung XXXVI nützlich scheint. K.]

sechs Fundamentalpunkte auftreten, denen auf der F_3 die Geraden einer beliebig herauszugreifenden halben Doppelsechse entsprechen. Die andern sechs Geraden dieser Doppelsechse werden dann bez. durch die sechs Kegelschnitte vorgestellt, welche durch je fünf der sechs Fundamentalpunkte hindurchgehen, die 15 dann noch fehlenden Geraden durch die Verbindungsgeraden von je zwei Fundamentalpunkten. Wir mögen uns hier auf den Fall beschränken, wo alle 27 Geraden reell sind und infolgedessen die Abbildung, wie die sechs Fundamentalpunkte einzeln reell ausfallen.

Zwecks konkreter Erfassung der hierbei auftretenden gestaltlichen Verhältnisse ist es noch zweckmäßig, zwei Maßregeln zu treffen, die allgemein in Abhandlung XXXVI dieser Ausgabe zur Geltung kommen sollen, nämlich 1. sich die F_3 , wie die Abbildungsebene doppelt überdeckt zu denken, wodurch gemäß der in Abhandlung XXXVI zu entwickelnden projektiven Auffassung zwei geschlossene Doppelflächen entstehen, 2. die Doppelfläche der F_3 längs der sechs bei der Abbildung benutzten Geraden aufzuschneiden und die Doppelsebene in den sechs Fundamentalpunkten mit unendlich kleinen Öffnungen zu versehen, deren Randpunkte den Fortschreitungsrichtungen vom Fundamentalpunkte aus eindeutig zugeordnet sind. Längs jeder Schnittgeraden hängt dann die eine Hälfte der vorderen Überdeckung der F_3 immer noch durch das Unendliche hindurch mit der anderen Hälfte der hinteren Überdeckung zusammen, sodaß jede der sechs Geraden zweimal als Rand der zerschnittenen Doppelfläche erscheint und diese im ganzen 12 Randkurven hat. Nicht minder trägt die doppeltüberdeckte Bildebene 12 Öffnungen, nämlich jedem Fundamentalpunkte entsprechend eine auf der oberen Seite, eine auf der unteren. Die beiden so mit 12 Rändern versehenen Flächen sind nun in der Weise ausnahmslos einseitig aufeinander bezogen, daß dies auch für die einzelnen Randkurven gilt.

Man kann also die Zerlegung in Einzelgebiete, welche die F_3 durch ihre 27 Geraden erfährt, in der ebenen Abbildung ablesen. Dabei ist nur zu beachten, daß, wenn man auf der F_3 über eine der sechs ausgezeichneten Geraden stetig hinübergeht, dies in der Ebene bedeutet, daß man unter Durchschreitung des zugehörigen Fundamentalpunktes von der einen Überdeckung der Ebene in die andere gelangt. So hat man für die noch fehlenden 21 Geraden Abbilder, die wir in der Ebene folgendermaßen unterscheiden: 1. Jede der 15 Verbindungsgeraden zweier Fundamentalpunkte wird durch diese in zwei Segmente zerlegt, und es steht uns frei, ob man das eine Segment zunächst dem oberen, das folgende Segment dem unteren Blatte überweisen will, oder umgekehrt. Da aber auch der Durchgang durchs Unendliche vom oberen in das untere Blatt führt, schließt sich die Gerade auf der Doppelfläche erst nach doppelter Durchlaufung. 2. Entsprechend hat man mit den Segmenten zu verfahren, in welche der einzelne der sechs je durch fünf Fundamentalpunkte hindurchgehenden Kegelschnitt durch diese zerlegt wird. Auch der Kegelschnitt schließt sich erst nach doppelter Durchlaufung, mag er nun in der Zeichnung als Ellipse oder als Hyperbel erscheinen. Sodann beachte man noch, daß jede Gerade der F_3 von zehn andern Geraden geschnitten und dementsprechend in zehn Segmente zerlegt wird. Dies gilt natürlich insbesondere von den sechs bei der Abbildung bevorzugten Geraden. Dementsprechend laufen durch jeden unserer Fundamentalpunkte im oberen, wie im unteren Blatte zehn Fortschreitungsrichtungen hindurch, oder, wenn man lieber will, es laufen von ihm 20 Fortschreitungsrichtungen aus, durch welche das umgebende Oval (im oberen wie im unteren Blatte) in 20 Segmente zerlegt wird, (die den 20 Uferstücken einzeln entsprechen, welche die zehn Segmente der dem Oval auf der F_3 entsprechenden Geraden für jedes der beiden von ihr begrenzten Ufer darbieten).

Die ganze so entwickelte Vorstellungsweise (welche man gerne durch eine ausgeführte Zeichnung illustrieren kann) möge nun insbesondere für die Diagonalfäche durchgeführt werden. Wir wählen als ausgezeichnete Gerade auf ihr die in § 10 mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichneten (oder auch diejenigen, die dort 1', 2', 3', 4', 5', 6' heißen). Man erhält dann in der Bildebene, wie schon Clebsch in seiner grundlegenden Arbeit, Math. Annalen, Bd. 4 (1872), hervorhob, ein merkwürdiges Sechseck



von Fundamentalpunkten, nämlich ein solches, welches zehnfach Brianchonsch ist. In meinen späteren Untersuchungen über das „Icosaeder“³²⁾ habe ich hervorgehoben, daß ein solches Sechseck in einfachster Weise mit einer in der Elementargeometrie wohlbekannten Konfiguration zusammenhängt, nämlich mit dem Schnitt, den irgendeine Ebene mit den sechs Durchmessern hat, welche die gegenüberliegenden Ecken eines regulären Icosaeders verbinden. Die zehn Brianchonschen Punkte entsprechen dabei den zehn Durchmessern, welche je durch zwei gegenüberstehende Mittelpunkte der 20 Seitenflächen des Icosaeders hindurchlaufen³³⁾.

Nun ist die Sache die, daß man zwecks anschauungsmäßiger Erfassung der Verhältnisse die doppeltüberdeckte Bildebene geradezu durch die eine Seite der Oberfläche (also etwa die nach außen gerichtete Seite) des regulären Icosaeders ersetzen kann. Auf ihr verlaufen den doppelt durchlaufenen Verbindungslinien zweier Fundamentalpunkte entsprechend die 15 Schnittlinien mit den Symmetrieebenen des Icosaeders (d. h. den Ebenen, welche je zwei der sechs Durchmesser enthalten). Ferner als Bilder der sechs Kegelschnitte, die je durch fünf Fundamentalpunkte hindurchgehen, die Schnitte mit sechs Rotationskegeln, von denen jeder durch fünf der sechs Durchmesser hindurchgelegt ist. Jeder dieser Schnitte besteht zunächst aus zwei getrennten Kurvenzügen, aber diese zwei fügen sich doch vermöge der Verabredung, die wir nun über die Ecken des Icosaeders treffen müssen, zu einem einheitlichem Kontinuum zusammen.

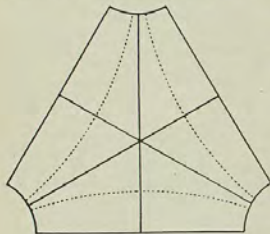


Fig. 26.

Diese Verabredung geht davon aus, daß wir soeben um die sechs Fundamentalpunkte der Ebene herum sechs ovale Öffnungen anbrachten. Wir werden dementsprechend das Icosaeder jetzt, wie die Kristallographen sagen, entdecken, etwa, um bestimmte Vorstellungen zu haben, die zwölf Ecken und ihre nächste Umgebung durch sechs unendlich dünne Zylinder von ovalem Querschnitt, die wir um die Durchmesser des Icosaeders herumlegen, wegschneiden, so daß in der Oberfläche des Icosaeders zwölf Öffnungen entstehen. Das Nähere mag Fig. 26 erläutern, welche eine der 20 Seitenflächen der „präparierten“ Icosaederfläche darstellen soll.

Man sieht, wie quer über die Seitenfläche drei Stücke der 15 Symmetrielinien hinlaufen, die sich im Mittelpunkte schneiden, während drei andere die Begrenzung der Seitenfläche abgeben; ferner erkennt man drei (in der Figur punktierte) Stücke der Schnitte mit den sechs soeben genannten Rotationskegeln. Die Randlinien der Öffnungen aber, die wir an Stelle der Icosaederecken angebracht haben, werden soweit sie in der Figur hervortreten, durch die genannten Kurven in vier Segmenten geteilt. Da von jeder Ecke des Icosaeders fünf Seitenflächen auslaufen, ist die einzelne von 20 Segmenten umgeben, wie es sein sollte.

Die volle Verabredung, auf die es ankommt, entsteht erst, indem wir angeben, wie wir die Konturen, welche die gegenüberliegenden Eckpunkte des Icosaeders umgeben, aneinander geheftet denken müssen, damit wir das Abbild der geschlossenen doppeltüberdeckten Diagonalfäche erhalten. Ich sage, daß dies folgendermaßen zu geschehen hat: man denke sich zwei gegenüberstehende Eckpunkte durch den sie enthaltenden Durchmesser verbunden. Von den beiden zugehörigen Konturen gehöre

³²⁾ Für das Folgende vergleiche man die unten abgedruckte Abh. LIV „Weiteren Untersuchungen über das Icosaeder“, besonders den § 10 des Abschnittes II.

³³⁾ Der Leser ist gebeten, sich ein Modell eines regulären Icosaeders zu verschaffen und auf ihm die einschlägigen Verhältnisse in concreto zu studieren.

dann immer solche zwei Punkte zusammen, die eine zu dem Durchmesser parallele Verbindungslinie haben. Kommt man an die eine Kontur heran, so hat man von dem entsprechenden Punkte der anderen Kontur aus weiter zu gehen, wobei für den Beobachter, da man doch auf der durchlöchernten Icosaederfläche bleiben muß, eine Umkehr der Bewegungsrichtung eintritt. Der Beweis für diese Behauptungen folgt im wesentlichen daraus, daß die doppeltüberdeckte Ebene mit ihren sechs Öffnungen durch das vom Mittelpunkt des Icosaeders auslaufende Strahlenbündel eindeutig auf das „präparierte“ Icosaeder bezogen ist, und daß alle Bewegungen im Strahlenbündel kontinuierlich zu erfolgen haben. Es scheint jedoch unmöglich, die so gemachten Angaben bei der an gegenwärtiger Stelle gebotenen Kürze noch genauer zu begründen. Ich will aber doch die analytischen Formeln hersetzen, welche die Abbildung der Diagonalfäche auf unsere Icosaederfigur vermitteln. Dabei kann ich mich auf meine 1884 bei B. G. Teubner, Leipzig, erschienenen „Vorlesungen über das Icosaeder usw.“ S. 222, 225 (oder auch die auf S. 58 Fußnote³⁴⁾ zitierte Abh. LIV, Abschnitt I, § 13) beziehen. Man findet dort in zunächst ganz anderer Ideenverbindung die Formeln:

$$\begin{aligned} \delta_r &= \epsilon^r (4 A_0^2 A_2 - A_1 A_2^2) + \epsilon^{2r} (-2 A_0 A_2^2 + A_1^3) + \epsilon^{3r} (2 A_0 A_1^2 - A_2^3) \\ &\quad + \epsilon^{4r} (-4 A_0^2 A_1 + A_1^3 A_2) \\ &= (\epsilon^{4r} A_1 - \epsilon^r A_2) ((1 + \sqrt{5}) A_0 + \epsilon^{4r} A_1 + \epsilon^r A_2) ((1 - \sqrt{5}) A_0 + \epsilon^{4r} A_1 + \epsilon^r A_2) \\ &\quad (r = 0, 1, 2, 3, 4), \end{aligned}$$

wo $\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ und übrigens: $\sum \delta_r = 0$, $\sum \delta_r^3 = 0$ ist. Wir werden hier A_0, A_1, A_2 als Koordinaten eines Punktes der Icosaederfläche gelten lassen, indem wir, unter Einführung eines gewöhnlichen rechtwinkligen Koordinatensystems

$$A_0 = z, \quad A_1 = x + iy, \quad A_2 = x - iy$$

setzen. Dann bezeichnen die δ_r (wegen der beiden zwischen ihnen bestehenden Relationen) die homogenen Koordinaten des zugehörigen Punktes der Diagonalfäche (vgl. Icosaederbuch S. 226, 227 oder Abh. LIV, Abschnitt II, § 10). Jeder dieser Punkte tritt dabei zweimal auf (man erhält also die Diagonalfäche als Doppelfläche), insofern die δ_r , wenn man die Vorzeichen A_0, A_1, A_2 gleichzeitig ändert, nur einen gemeinsamen Vorzeichenwechsel erleiden. Umgekehrt lassen sich aus den δ_r auch nur die Verhältnisse der A_0, A_1, A_2 berechnen, ihr absoluter Betrag, bez. ihr Vorzeichen wird von der Stelle der Icosaederfigur abhängen, die man gerade betrachtet. Man setze abkürzend:

$$5 p_x = \sum_r \epsilon^{x r} \delta_r, \quad (x = 1, 2, 3, 4)$$

also:

$$\begin{aligned} p_1 &= -4 A_0^3 A_1 + A_1^3 A_2, & p_2 &= 2 A_0 A_1^2 - A_2^3, \\ p_3 &= -2 A_0 A_2^2 + A_1^3, & p_4 &= 4 A_0^2 A_2 - A_1 A_2^2. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der $A_0 : A_1 : A_2$ kann man dann eine beliebige der drei stetigen Proportionen benutzen

$$\begin{aligned} A_0 : A_1 : A_2 &= (p_1 p_2 + p_1^2) : 2 p_1 p_3 : -2 p_4 p_3 \\ &= (p_1 p_3 + p_1^2) : -2 p_1 p_2 : 2 p_1 p_3 \\ &= (p_2 p_3 - p_1 p_4) : 2 (p_2 p_4 + p_2^2) : 2 (p_1 p_4 + p_2^2). \end{aligned}$$

Im übrigen möge noch kurz auf die geometrisch anschauliche Seite der gewonnenen Beziehung eingegangen werden. Ich sage, daß man in der durch die vorstehende Skizze erläuterten Icosaederfigur die Zerlegung, welche die als Doppelfläche gelachte Diagonalfäche durch die 27 Geraden erfährt, in concreto vor sich hat. In



物
0
1
11

dieser Hinsicht mögen nur folgende Einzelheiten hervorgehoben werden: Man hat in jeder der 20 Seitenflächen des Ikosaeders zunächst sechs Vierecke, welche im Mittelpunkt zusammenstoßen, und damit auf der Diagonalfäche 120 von geradlinigen Stücken begrenzte Vierecke, die wir Vierecke der ersten Art nennen mögen. Man hat dann entlang jeder der 30 Kanten des Ikosaeders vier Vierecke und damit auf der Diagonalfäche eine Reihe von 120 weiteren geradlinig begrenzten Vierecken, die man Vierecke der zweiten Art nennen wird. — Diese Zahlen sind doppelt so groß, wie die in § 10 der vorstehenden Abhandlung angegebenen, weil jetzt die Diagonalfäche als eine Doppelfläche angesehen wird; im übrigen stimmen alle Einzelheiten.

Hat man die Zerlegung der Diagonalfäche durch ihre geraden Linien völlig erfaßt, so wird man leicht zu den Verhältnissen aufsteigen, die auf einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung mit 27 Geraden herrschen. Die ganze Abänderung (im Sinne der Analysis situs) ist nur, daß die drei Querlinien, die sich bei der vorstehenden Skizze im Mittelpunkt der Figur schneiden, dies nicht mehr tun. Von den jedesmal sechs zusammengehörigen Vierecken erster Art der Diagonalfäche gehen bei dieser Änderung drei in Fünfecke über, und die sechs Polygone zusammen schließen zwischen sich ein Dreieck ein. Dies gibt im ganzen 20 Dreiecke, — oder, wenn wir die Vorstellung der Doppelfläche jetzt wieder fallen lassen wollen, auf der einfach gedachten F_3 zehn Dreiecke. Innerhalb dieser zehn Dreiecke liegen die im Texte der Abhandlung näher bezeichneten zehn Ovale der parabolischen Kurve, welche die elliptisch gekrümmten Teile der Fläche umschließen.

Zeuthen hat in seiner schon oben genannten Abhandlung (Math. Annalen Bd. 8 (1874)) insbesondere die Wandungen der in § 12 des Textes genannten zehn „Öffnungen“ der Fläche studiert. Über eine solche Wandung läuft, wie dort bemerkt wurde, eine Doppelsechs von geraden Linien der Fläche, wie etwa in dem ersten der dortigen Beispiele die Doppelsechs:

1 3 5 46 62 24
35 51 13 2' 4' 6'.

Zeuthen schließt nun die Wandung durch die beiden Dreiecksebenen A ab, welche dieser Doppelsechs zugehören, also im Beispiel nach der in § 12 gegebenen Tabelle durch die Ebenen

12, 34, 56 und 16, 23, 45.

Er erhält so eine von zwei dreieckigen Figuren begrenzte ringförmige Zone der Fläche die man, in roher Weise, einem ringförmigen Ausschnitt eines einschaligen Hyperboloids vergleichen kann, über welches die zweimal sechs Geraden der Doppelsechs als Linien der zweierlei Erzeugungen hinlaufen. Er bemerkt ferner, daß die Fläche dritter Ordnung von den zehn so definierten Zonen im ganzen genau dreifach überdeckt wird.

Nun wird es interessant sein, diese Zonen im Falle der Diagonalfäche (auf die ich mich der Einfachheit halber beschränke) in der ikosaedrischen Abbildung nachzuweisen. Es ist dabei bequem, die Ikosaederfigur durch Zentralprojektion auf eine umgeschriebene Kugel zu beziehen, bei der dann eine „ikosaedrische Einteilung“ zu studieren ist. Die Ebenen A sind im Falle der Diagonalfäche nichts anderes als die Pentaederebenen, und drei in der einzelnen dieser Ebenen enthaltene Geraden z. B. 12, 34, 56 bilden sich auf der Ikosaederkugel als drei Symmetriekreise ab, die aufeinander senkrecht stehen. Nun wollen zwei weitere Umstände in Betracht gezogen sein.

1. Die Geraden 1, 3, 5 (um beim Beispiel zu bleiben) zerlegen die Zone in drei Stücke, deren einzelnes sich an zwei dieser Geraden (etwa 3 und 5) von entgegengesetzten Seiten heranzieht. Aber die Geraden 1, 3, 5 liefern bei der ikosaedrischen Abbildung je zwei diametrale Fundamentalpunkte, die in verständlicher Weise mit 1, 1; 3, 3; 5, 5 bezeichnet sein sollen. Wir schließen, daß das Abbild der Zone aus

der Ikosaederkugel aus drei Flächenstücken bestehen muß, die sich etwa von 1 nach 3, von 3 nach 5, von 5 nach 1 erstrecken werden; nach den Regeln für den kontinuierlichen Durchgang durch die Fundamentalpunkte, die wir oben gaben, bilden diese drei Stücke ein zusammenhängendes ringförmiges Ganzes.

2. Aber dieses Abbild gibt nur erst die eine Flächenseite der Zone wieder, die andere Flächenseite wird sich auf drei entsprechende, je diametral zu den genannten

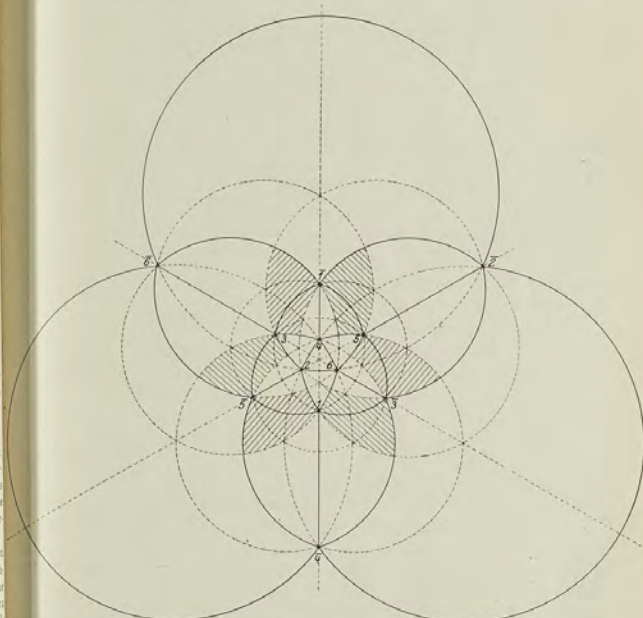


Fig. 27.

Stücken gelegene Flächenstücke abbilden, die sich als solche von 1 nach 3, von 3 nach 5, von 5 nach 1 ziehen werden.

Das Nähere ist aus der beigegebenen Fig. 27 zu ersehen, welche eine stereographische Projektion der Ikosaederkugel vorstellt, die derart gewählt ist, daß die Symmetrie, welche die sechs schraffierten Abbilder der beiden Flächenseiten der Zone darbieten, unmittelbar hervortritt. Ich gebe hier außerdem in Fig. 28 noch eine besondere Zeichnung eines dieser sechs Abbilder, in welche außer Teilen der um die

物
0
11

Eckpunkte des Icosaeders beschriebenen Ovale auch noch solche der Schnittkurven mit den Rotationskegeln durch je fünf Durchmesser des Icosaeders eingezeichnet sind, um die Einteilung unseres Abbildes in sechs Vierecke erster Art und sechs Vierecke zweiter Art zu erläutern.



Fig. 28.

Nun ist es sehr schön, zu sehen, wie alle Sätze, die Zeuthen über die von ihm unterschiedenen Zonen in seiner Arbeit ableitet, an diesen Figuren, oder besser noch an einem Modell der Icosaederkugel selbst, sinnfällig hervortreten. Zunächst ja nur für die Diagonalfäche. Aber man hat nur die kleine vorher bezeichnete Änderung anzubringen, um auch die Verhältnisse bei der allgemeinen Fläche mit 27 reellen Geraden der Art nach ohne weiteres zu überblicken. K.

XXXVI. Bemerkungen über den Zusammenhang der Flächen¹⁾.

[Math. Annalen, Bd. 7 (1874) und Bd. 9 (1875/76).]

Die auf den Zusammenhang der Flächen bezüglichen Definitionen werden bei Riemann zunächst ohne besondere Festsetzungen hinsichtlich des Unendlichen hingestellt. Aber entsprechend der von ihm beabsichtigten Verwertung dieses geometrischen Begriffes für funktionentheoretische Untersuchungen wird bei ihm eine solche Festsetzung implizite eingeführt, indem nämlich die unbegrenzte Ebene einer Kugelfläche äquivalent gesetzt wird, auf die sie durch stereographische Projektion bezogen ist. In ähnlicher Weise kann man jede sich ins Unendliche erstreckende Fläche auf eine durchaus im Endlichen gelegene reduzieren: man braucht sie nur einer Transformation durch reziproke Radien zu unterwerfen, deren Inversionszentrum nicht selbst der Fläche angehört. Man kann dann alle Betrachtungen über den Zusammenhang der Flächen, wie sie gewöhnlich unter der stillschweigenden Voraussetzung durchaus im Endlichen gelegener Flächen angestellt werden, auf beliebig sich ins Unendliche erstreckende übertragen.

Aber die so eingeführte Festsetzung, vermöge deren das Unendliche als ein einzelner Punkt erscheint²⁾, ist an und für sich willkürlich; sie widerspricht überdies dem Wesen der Sache, wenn man, wie in der projektivischen Geometrie, das Unendliche als eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Punkten, als eine Ebene, betrachten muß. Auch bei

¹⁾ Vorbemerkung: Nachstehender Aufsatz ist aus zwei Mitteilungen, die sich in den Math. Annalen, Bd. 7 und Bd. 9 finden, zusammengeschoben, indem eine unrichtige Ausführung von Bd. 7 und ihre in Bd. 9 gegebene Berichtigung weggelassen wurden. Die verschiedenen Stücke sind durch Horizontalstriche getrennt.

²⁾ Dieselbe ist auch in anderen auf die Analysis situs bezüglichen Fragen gelegentlich gebraucht worden; vgl. z. B. Listing: Der Census der räumlichen Complexe. Göttinger Abhandlungen 1861. — Daß man und wie man dieselbe verwerten kann, um auf sie ein ganzes System der Geometrie zu begründen, welches als eine Art von Seitenstück zur projektivischen Geometrie betrachtet werden darf, vgl. meine Schrift: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872 [s. Abh. XXVII in Bd. 1 dieser Ausgabe].



dieser projektivischen Anschauungsweise kann man für Flächen, die sich beliebig ins Unendliche erstrecken, dieselben Probleme aufstellen, auf welche sich, bei durchaus im Endlichen gelegenen Flächen, die Riemannschen Betrachtungen beziehen. Es fragt sich, ob dann spezifisch neue Überlegungen notwendig werden, oder ob es gelingt, die betr. Probleme durch bloße Benutzung der Riemannschen Betrachtungen zu erledigen. So ungefähr stellte sich diese Frage in einem neuerdings in den Math. Annalen erschienenen Aufsätze (Über Flächen dritter Ordnung, Bd. 6 [Abh. XXXV dieser Ausgabe]), ohne aber eine Beantwortung derselben in definitiver Form zu versuchen³⁾. Vielmehr machte ich nur auf eine Reihe von Schwierigkeiten aufmerksam, die sich einer unmittelbaren Verwertung der Riemannschen Betrachtungen entgegenstellen. Ich betonte besonders, daß der „ungewöhnliche“ Zusammenhang der unbegrenzten Ebene in Anlehnung an die projektivische Anschauung nicht, wie in der Riemannschen Theorie, gleich Null, sondern gleich Zwei zu setzen ist, falls man ohne nähere Festsetzung die übliche Definition dieses Zusammenhangs⁴⁾ beibehalten will. Denn die Ebene wird entsprechend der projektivischen Anschauung durch eine in ihr verlaufende Gerade, die doch auch eine geschlossene Kurve ist, noch in zwei Stücke geteilt. Dementsprechend glaubte ich die Zahlen, welche Hr. Schläfli in einem kurz zuvor veröffentlichten Aufsätze (Annali di Matematica, ser. II, t. 5 (1872) Quand'è che dalla superficie generale di terzo ordine si stacca una parte etc.) für die fünf verschiedenen Arten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung aufgestellt hatte, alle um zwei Einheiten erhöhen zu sollen.

Ich bin nun von Hrn. Schläfli brieflich darauf aufmerksam gemacht worden, daß man, unbeschadet der Richtigkeit dieser meiner Betrachtungen und Einwände, doch auch bei projektivischer Anschauung für die unbegrenzte Ebene den Zusammenhang Null ansetzen kann, wenn man dieselbe nämlich als Doppelfläche betrachten will, also etwa als Grenze eines zweischaligen Hyperboloids. In der Tat, man denke sich, um eine be-

³⁾ Daß sich die Problemstellung der Analysis situs je nach der Beurteilung des Unendlichen modifiziert, hatte ich bereits in der oben zitierten Schrift: „Vergleichende Betrachtungen usw.“ angegeben (S. 30 derselben) [S. 482 in Bd. I dieser Ausgabe].

⁴⁾ Wenn man auf einer geschlossenen Fläche im Maximum q geschlossene Kurven ziehen kann, ohne die Fläche zu zerstücken, so setzt Riemann den Zusammenhang derselben $= 2q + 1$. Aber es ist bereits in den Neumannschen „Vorlesungen über Riemanns Theorie usw.“ (1865) angedeutet und neuerdings von Hrn. Schläfli hervorgehoben worden (vgl. z. B. Crelles Journal, Bd. 76 (1873), S. 152, Note), daß es konsequenter ist, in einem solchen Falle nur von einem $2q$ -fachen Zusammenhang zu sprechen. Indem ich mich im Texte dieser Bezeichnung anschließe, füge ich, nach dem Vorgange Schläflis, wo eine Undeutlichkeit entstehen könnte, dem Worte „Zusammenhang“ das Attribut „ungewöhnlich“ hinzu.

stimmte Vorstellung zu haben, eine Ebene horizontal und ziehe in ihr eine Linie Süd-Nord. Dann wird die als Doppelfläche betrachtete Ebene in zwei Teile zerfallen, deren einer die östliche Hälfte des oberen Blattes und die westliche des unteren, deren anderer die beiden übrigen Hälften enthält. Dabei wird die gerade Linie selbst doppelt gedacht, nämlich sowohl im oberen als im unteren Blatte verlaufend.

Eine solche Einführung von Doppelflächen erscheint um so mehr zulässig, als sie schon in den Untersuchungen der Analysis situs, welche sich nur auf im Endlichen gelegene Flächen beziehen, notwendig wird⁵⁾. Ein bekanntes Beispiel dafür bietet die (mit einer Randkurve versehene) Fläche, welche man aus einem Papierstreifen bilden kann, indem man die beiden Enden des Streifens so aneinander heftet, daß die eine Seite desselben in die andere übergeht. Ein anderes Beispiel für eine solche Fläche, und zwar eine geschlossene Fläche, gibt, wie weiter unten gezeigt werden soll, die Steinersche Fläche, die man ja bekanntlich als völlig im Endlichen gelegen voraussetzen darf⁶⁾. (Von den isolierten Stücken, welche ihre Doppelgeraden besitzen, wird dabei abgesehen.)

Ich habe nun gefunden, daß man die Theorie des Flächenzusammenhangs, wie sie gewöhnlich entwickelt wird, in der Tat auf die projektivischen Vorstellungen unverändert übertragen kann, wenn man sich überhaupt entschließt, die unpaaren Flächen der projektivischen Geometrie als Doppelflächen zu betrachten, und eine unpaare Kurve [auf ihnen] erst dann als geschlossen anzusehen, wenn man sie zweimal durchlaufen hat⁷⁾.

Ob man sich dieser Anschauung anschließen will, oder nicht, wird zunächst dem freien Entschlusse des einzelnen überlassen sein. Es mag sogar hervorgehoben werden, daß es von vornherein sehr unnatürlich scheint, in der projektivischen Geometrie die Ebene als Grenzfall der nichtgeradlinigen Flächen zweiter Ordnung betrachten zu sollen. Aber die Anschauung empfiehlt sich durch ihren Erfolg. Denn man kann im Anschlusse an sie auch für die projektivische Auffassung des Unendlichen den Satz aussprechen, der den Zusammenhangsbegriff für die funktionentheoretischen Untersuchungen so wertvoll macht: daß nämlich zwei geschlossene

⁵⁾ Freilich verlangt dann die Konsequenz, daß man, wenn von einer Fläche, deren entgegengesetzte Seiten [beim Durchlaufen] nicht ineinander übergehen, schlechthin die Rede ist, unter dem Zusammenhange der Fläche die Grundzahl versteht, die man dem von den beiden Seiten gebildeten Systeme beizulegen hat (vgl. Neumanns Vorlesungen, 1865). Der Zusammenhang der Kugel wäre dann $= -2$; der Zusammenhang der einzelnen Kugelseite gleich Null.

⁶⁾ [Vgl. auch den am Schluß dieser Abhandlung hinzugefügten Zusatz über die Steinersche Fläche.]

⁷⁾ [Dies ist eine an sich willkürliche Auffassung, die aber für das Folgende verpflichtend wird. Die zunächst nur verabredete Benennung „Doppelfläche“ wird weiterhin als feststehend beibehalten. K.]



Flächen dann und nur dann aufeinander Punkt für Punkt bezogen werden können, so daß konsekutiven Punkten der einen konsekutiven Punkte der anderen entsprechen, wenn der Zusammenhang der beiden Flächen der gleiche ist. (Für ungeschlossene Flächen kommt nur die weitere Bedingung hinzu, daß auch die Anzahl der Randkurven bei beiden übereinstimmen muß⁸⁾).

Dem widerspricht nicht, wie vorab bemerkt sei, wenn ich in meiner schon genannten Arbeit hervorhob, das einschalige Hyperboloid und die Ringfläche seien nicht ineinander überführbar, obgleich ihr Zusammenhang nach Schläflis wie nach meiner Zählung übereinstimmend gleich Zwei zu setzen ist. Denn unter Überführbarkeit wurde damals etwas anderes verstanden, als hier für die Transformierbarkeit zweier Flächen ineinander verlangt wird. Eine Fläche wurde damals (vgl. § 16 meiner Arbeit) in eine andere überführbar genannt, wenn es gelang, durch Verbindung von Kollineationen, die das Unendliche ins Endliche bringen, mit stetigen, unendlichen kleinen Transformationen, die nur das Endliche betreffen, die eine Fläche aus der anderen abzuleiten. Durch solche Mittel ist das einschalige Hyperboloid allerdings nicht in eine Ringfläche zu verwandeln.

Dagegen kann eine eindeutige, stetige Beziehung zwischen beiden durch den folgenden unstetigen Prozeß ohne weiteres hergestellt werden: Man zerschneide das Hyperboloid längs der unendlich fernen Ebene, bringe die so entstandene zweifach berandete Fläche durch Verzerrung ganz ins Endliche und hefte die beiden Ränder dann wieder in der Weise aneinander, daß jeder Punkt des einen Randes mit demjenigen des anderen vereinigt wird, von dem er vorher durch den Schnitt getrennt worden war. (Damit dies geschieht, muß man den einen Rand des Hyperboloids gegen den anderen Rand um 180 Grad drehen, ehe man die Ränder durch Zusammenbiegen vereinigt.) — Ähnliche unstetige Prozesse zur Herstellung der eindeutigen Beziehung werden übrigens schon notwendig, wenn man nur von Flächen handelt, die ganz im Endlichen liegen. Man kann z. B. eine einfach berandete, mit einem Verzweigungspunkte versehene Riemannsche Fläche nur dadurch mit einem einfach zusammenhängenden Stücke einer Ebene zur Deckung bringen, daß man sie durch einen vom Verzweigungspunkte zum Rande gehenden Schnitt zerschneidet und hinterher die durch den Schnitt getrennten Partien wieder aneinander heftet. Ich finde, daß die Darstellungen dieser Theorie, welche mir gerade zur Hand sind, hierüber keine volle Klarheit geben; es wird von der Möglichkeit eines solchen Zerschneidens und Wiederverbindens gesprochen, aber dasselbe wird nur

⁸⁾ Daß diese Bedingungen für die Transformierbarkeit zweier Flächen in der Tat hinreichend sind, findet sich kurz und übersichtlich bei C. Jordan bewiesen in Liouvilles Journal, Bd. 11 (1866).

als nützlich, nicht als für viele Fälle notwendig dargestellt. — Es ist wohl kaum nötig, hervorzuheben, daß der Unterschied, den ich zwischen Hyperboloid und Ringfläche und überhaupt zwischen paaren und unpaaren Flächen in meiner früheren Arbeit hervorhob, durch diese Bemerkungen nicht bedeutungslos wird; er kommt nur bei der Frage nach der Möglichkeit der eindeutigen Beziehung zweier Flächen aufeinander, wie sie hier gestellt wird, nicht in Betracht. —

[Ich setze nun fest, daß die eben bei der Bestimmung des Zusammenhanges des einschaligen Hyperboloids eingeschlagene Methode auch in allen komplizierteren Fällen angewandt werden soll. Daraus folgt dann leicht der Beweis für den oben angeführten Satz betr. die Transformierbarkeit zweier Flächen ineinander.]

Diese Festsetzung, die denn auch für die Beurteilung des Zusammenhangs meiner neuen Riemannschen Flächen⁹⁾ maßgebend sein wird, ordnet sich in eine allgemeine Auffassung vom Wesen des Zusammenhangsbegriffes ein, die so, wie in der Folge geschehen soll, wohl noch nicht ausgesprochen wurde, so daß ihre Formulierung als Mitzweck der vorliegenden Mitteilung gelten darf.

Die Eigenschaften, die einem geometrischen Gebilde oder überhaupt einer Mannigfaltigkeit bei beliebigen Verzerrungen erhalten bleiben, kann man in *absolute* und *relative* sondern.

Absolut nenne ich diejenigen Eigenschaften, welche der betr. Mannigfaltigkeit unabhängig von dem umfassenden Raume zukommen, in welchem gelegen man sie voraussetzen mag.

Relative Eigenschaften hängen von dem umgebenden Raume ab; sie sind invariant bei Verzerrungen der Mannigfaltigkeit, die innerhalb des betr. Raumes stattfinden, nicht aber bei beliebigen Verzerrungen.

Eine absolute Eigenschaft einer Kurve ist z. B. durch ihre Verästelung gegeben. Dagegen wird eine relative Eigenschaft einer geschlossenen Kurve, — wenn sie in der Ebene liegend vorausgesetzt wird, — durch die *Gesamtkrümmung* der Kurve vorgestellt, — wenn sie dem dreifach ausgedehnten Raume angehören soll, durch die *Zahl der Windungen der Kurve um sich selbst (Knotenzahl)*¹⁰⁾. Für eine geschlossene Fläche, die dem dreifach ausgedehnten Punktraume angehört, besteht ein *relatives*

⁹⁾ [Vgl. Abb. XXXVIII und XI dieser Ausgabe.]

¹⁰⁾ [Hierin soll liegen, daß es für geschlossene Kurven im Raum von mehr als drei Dimensionen keine Knoten mehr gibt. Zitate über daran sich anschließende Literatur siehe in dem Artikel von Dehn und Heegaard über „Analysis Situs“ in Bd. III, 1 der math. Enzyklopädie, auf den auch sonst verwiesen sein mag. Vgl. Fußnote auf S. 168 daselbst. K.]



Charakteristik ebenfalls in der *Gesamtkrümmung*; derartige Attribute sind es, von denen [oben auf S. 66] beiläufig gesprochen wird.

Die gemeinte Auffassung des Zusammenhangbegriffes zielt nun darauf ab, den Zusammenhang der Flächen so zu definieren, daß er als ein „*absolutes*“ Charakteristikum zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten gelten kann¹¹⁾. Der größte Teil der bei der gewöhnlichen Definition des Zusammenhangs benutzten, der Geometrie entlehnten Ausdrücke: Randkurve, Querschnitt usw. hat von vornherein absolute Bedeutung. Es ist das nur bei einer Hilfsvorstellung nicht der Fall, die ausdrücklich den die M_2 umgebenden Punktraum voraussetzt. Man hat, wie ich es [oben auf S. 64, 65] zur Sprache brachte, bei der Definition des Zusammenhangs einen Unterschied zu machen zwischen einfachen Flächen und Doppelflächen¹²⁾. Der Unterschied ergibt sich durch Betrachtung der *Flächennormale*. Errichtet man gegen ein Element der Fläche in bestimmtem Sinne eine Normale und läßt die Normale mit ihrem Fußpunkte über die Fläche hinwegwandern, so heißt die Fläche eine Doppelfläche, sobald es möglich ist [durch Fortschreiten über die Fläche hin], zum Ausgangspunkte mit umgekehrtem Sinne der Normalenrichtung zurückzukehren.

Diese Festsetzung läßt sich nun aber durch leichte Umstellung so verwandeln, daß eine absolute Bedeutung resultiert. Statt gegen das Flächenelement eine Normale in dem einen oder anderen Sinne zu errichten, *zeichnet man in dem Flächenelemente eine in sich zurücklaufende Kurve (Indikatritz) und belege sie mit dem einen oder andern Sinne*¹³⁾. — *Eine Fläche heiße dann und nur dann eine Doppelfläche (eine M_2 eine Doppelmannigfaltigkeit), wenn es möglich ist, diese Indikatritz so über die Fläche hin bis zu ihrer ursprünglichen Stelle zurück zu verschieben, daß der Sinn der Indikatritz umgekehrt scheint.*

Nach dieser Regel ist die unbegrenzte projektive Ebene und überhaupt jede unpaare Fläche eine Doppelfläche, das einschalige Hyperboloid aber eine einfache. Querschnitte, die man auf diesen Flächen ziehen mag, sind entsprechend zu beurteilen. Es ist nur ein Mittel der Bequemlichkeit, wenn man, wie auf [S. 66], nicht das Hyperboloid selbst der direkten Untersuchung unterwirft, sondern dasselbe vorab durch einen umkehrbar eindeutigen und deshalb immer gestatteten Prozeß in eine Ringfläche verwandelt

¹¹⁾ Es ist dann zusammen mit der Zahl der Randkurven zugleich das ausreichende Charakteristikum.

¹²⁾ [Die neueren Autoren nennen die einfachen Flächen „zweiseitig“ und die Doppelflächen „einseitig“. K.]

¹³⁾ [Ersetzt man die gekrümmte Fläche durch ein ebenflächiges Polyeder, kommt die Einführung der zu jedem Punkte gehörigen, in bestimmtem Sinne durchlaufenden Indikatritz dem Wesen nach auf Möbius' sogenanntes Kantengesetz herab. Vgl. Dehn und Heegaard. a. a. O. S. 158. K.]

Die eben vorgetragene Indikatritzmethode drängt sich bei den neuen Riemannschen Flächen [vgl. die unten abgedruckte Abhandlung XXXVIII] von selbst auf, sofern man die Entstehung dieser Flächen mit v. Staudts Repräsentation der Imaginären zusammenbringt. Die Punkte, welche unsere Riemannsche Fläche bilden, repräsentieren je eine imaginäre Linie, und sind also bei v. Staudt die *Träger einer, mit bestimmtem Sinne zu nehmenden Strahleninvolution*. Indem wir um den Punkt einen kleinen Kegelschnitt als Indikatritz herumlegen und diesem einen Sinn erteilen, geben wir der v. Staudtschen Vorstellung in leicht verständlicher Weise Ausdruck¹⁴⁾. Wir können uns dementsprechend die bez. Riemannschen Flächen mit Indikatritzen überdeckt denken, deren *Sinn* nicht nur, sondern deren *Gestalt* auch den v. Staudtschen Forderungen entspricht. Eine besondere Berücksichtigung etwaiger Doppelflächen erweist sich dabei freilich als überflüssig, sofern wir diejenigen Partien unserer Fläche, die mit übrigens kongruenten, nur in verschiedenem Sinne zu nehmenden Indikatritzen überdeckt sind, schon von vornherein durch die Definition unserer Flächen als verschiedene Blätter unterschieden haben¹⁵⁾.

Es mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden, die sich auf gewisse Beziehungen erstrecken, welche zwischen dem Zusammenhange algebraischer Flächen und ihrem Verhalten bei algebraisch eindeutigen Transformationen stattfinden.

Wenn zwei Flächen algebraisch eindeutig ineinander übergeführt werden können, wenn dabei jedem reellen Punkte der einen ein reeller Punkt der anderen entspricht¹⁶⁾, wenn endlich auf keiner von beiden dabei reelle Fundamentalpunkte auftreten, so haben die Flächen ersichtlich denselben Zusammenhang. Man kann von dieser Bemerkung Gebrauch machen, um den Zusammenhang gewisser algebraischer Flächen ohne weiteres zu bestimmen. Die vierte der von Schläfli aufgezählten Arten von Flächen dritter Ordnung z. B. (welche nur drei reelle Gerade und sieben reelle Dreiecksebenen besitzt) läßt sich auf die Ebene ohne Zwischentreten reeller Fundamentalpunkte reell abbilden, denn die sechs bei ihrer reellen Abbildung im algebraischen

¹⁴⁾ Der Kegelschnitt soll so gewählt sein, daß für ihn die in der Involution zusammengehörigen Strahlen konjugierte Linien sind, insbesondere also, wenn man will, bei Zentren, die im Endlichen liegen, konjugierte Durchmesser.

¹⁵⁾ [Bei den gewöhnlichen Riemannschen Flächen hat man es im Gegensatz zu den Erörterungen des Textes durchaus mit einfachen Flächen zu tun. K.]

¹⁶⁾ Dies ist nicht immer der Fall. Z. B. kann die Fläche dritter Ordnung ohne Knoten, mit drei reellen Geraden und 13 reellen Dreiecksebenen (die fünfte Art der allgemeinen Fläche nach Schläflis Einteilung) nur durch Funktionen mit komplexen Koeffizienten eindeutig auf die Ebene abgebildet werden, [weil sie im Reellen aus zwei Stücken besteht].



Sinne vorhandenen Fundamentalpunkte sind paarweise konjugiert imaginär. Der Zusammenhang der Fläche ist daher Null; überdies ist sie eine Doppelfläche, weil jedem Punkte der Ebene, unabhängig davon, ob man ihn der einen oder anderen Seite der Ebene zurechnet, ein und derselbe Punkt der Fläche entspricht. Aus demselben Grunde ist, wie bereits oben angegeben wurde, die Steiner'sche Fläche eine Doppelfläche vom Zusammenhang Null; denn es ist bekannt, daß sie ohne Auftreten von Fundamentalpunkten durch reelle Funktionen zweiten Grades auf die Ebene abgebildet werden kann¹⁷⁾.

Es drängt sich nun von selbst die Frage auf, welche Beziehungen für den Zusammenhang zweier Flächen gelten, die zwar auf reelle Weise algebraisch eindeutig aufeinander bezogen werden können, bei deren Abbildung aber reelle Fundamentalpunkte auftreten. Dabei müssen natürlich solche Flächen von der Bedeutung ausgeschlossen sein, die nicht-isolierte vielfache Punkte besitzen, [von denen getrennte Mäntel auslaufen]. Denn es wird bei den Definitionen des Zusammenhangs, wie sie gewöhnlich gegeben werden, überhaupt von solchen Flächen abgesehen. Läßt man sie beiseite, so kann man folgenden Satz aussprechen: *Finden sich auf der einen Fläche μ , auf der andern ν (reelle) Fundamentalpunkte, so ist der Zusammenhang der ersten, vermehrt um μ , gleich dem Zusammenhang der zweiten, vermehrt um ν .*

Einige Beispiele mögen das zunächst erläutern.

1. Zwei Ebenen sollen algebraisch eindeutig (durch eine Cremona-Transformation) aufeinander bezogen sein. Dann ist bekannt, daß die Zahl der beiderseits auftretenden (reellen und imaginären) Fundamentalpunkte die gleiche ist; gemäß unserer Behauptung muß auch die Zahl der reellen Fundamentalpunkte allein beiderseits übereinstimmen.

2. Eine Kugel werde stereographisch auf die Ebene (die Doppelseite bezogen). Dann entspricht die Ebene eindeutig dem Aggregate der beiden Kugelflächen, welche durch die innere und äußere Seite der Kugel vorgestellt werden, und die zusammen nach einer bereits oben gemachten Bemerkung den Zusammenhang -2 repräsentieren. In der Tat treten an der Kugel bei der Abbildung zwei Fundamentalpunkte auf, nämlich sowohl auf der äußeren als der inneren Seite je einer.

3. Ein einschaliges Hyperboloid werde durch stereographische Projektion auf eine Ebene bezogen. Dann ist wiederum die eine Seite der

¹⁷⁾ Es sei hier daran erinnert, daß Clebsch gelegentlich seiner Untersuchung der Linienflächen vom Geschlechte Null (Math. Annalen, Bd. 5, 1872/73) alle Flächen, die ohne Auftreten von (reellen und imaginären) Fundamentalpunkten algebraisch eindeutig aufeinander bezogen werden können, als Flächen eines Typus zusammenfaßt (a. a. O. § 8 u. 9).

Fläche der einen Seite der Ebene, die andere der zweiten Seite der Ebene entsprechend gesetzt, und man hat nicht sowohl ein einzelnes Hyperboloid, als ein System von zwei Hyperboloiden mit der [doppelt gedachten] Ebene zu vergleichen. Jedes der beiden Hyperboloide trägt einen Fundamentalpunkt: den Projektionspunkt. Aber die Ebene trägt vier Fundamentalpunkte; denn man muß die beiden Fundamentalpunkte, von denen man bei der Abbildung eines Hyperboloids gewöhnlich spricht, hier doppelt zählen, weil sie sowohl der einen als der anderen Seite der Ebene angehören. Der Zusammenhang des Hyperboloidensystems wird daher gleich $+2$, wie es in Übereinstimmung mit der üblichen Zählung sein muß; denn jedes der beiden Hyperboloide ist zweifach zusammenhängend, und ihre Trennung zählt für -2 .

4. Wenn man die drei ersten Schläfli'schen Arten der allgemeinen Fläche dritter Ordnung (die bez. 27, 15, 7 reelle Gerade enthalten) auf die Ebene abbildet, so erscheinen in der Ebene bez. sechs, vier, zwei reelle Fundamentalpunkte, die man wiederum doppelt zu zählen hat. Auf der Fläche selbst treten keine Fundamentalpunkte auf. *Dementsprechend wird der Zusammenhang bez. gleich zwölf, acht, vier.* Schläfli gab die Zahlen 6, 4, 2. Aber er betrachtete [damals] bei seiner Abzählung die Flächen als einfache, nicht als Doppelflächen. Tut man das letztere, so hat man die Prozesse, vermöge deren Schläfli diese Flächen aus der mit dem Zusammenhange Null vorausgesetzten, unbegrenzten Ebene herstellt, in der Tat doppelt zu zählen, da sie sich auf beide Seiten der Fläche beziehen. Schläfli's Zählung war von dem hier entwickelten Standpunkte aus inkonsequent, weil die Annahme, daß die Ebene nullfach zusammenhängend sei, bereits darüber entscheidet, daß man die Ebene als Doppelseite betrachten muß. Will man die Ebene und dementsprechend diese Flächen als einfache betrachten, so ergeben sich für die Flächen [rein schematisch] die Zusammenhangszahlen 8, 6, 4, wie ich in meiner früheren Arbeit ausführte. —

Um den Beweis der nunmehr an einzelnen Beispielen erläuterten Regel zu führen, ist es nötig, für reelle Elemente insbesondere einige Überlegungen zu entwickeln, welche sonst nur für beliebige komplexe Elemente in der Theorie des algebraisch eindeutigen Entsprechens bewiesen werden¹⁸⁾.

Es seien zwei geschlossene Flächen aufeinander reell eindeutig bezogen. Jedem Fundamentalpunkte der einen Fläche entspricht auf der anderen eine Fundamentalkurve. Es ist leicht zu sehen, daß diese Kurve nur aus einem Zuge bestehen kann. Denn man muß sich die Vorstellung bilden, daß dem Büschel von Fortschreitungsrichtungen, welche durch den Funda-

¹⁸⁾ [Zum Verständnis der hier folgenden Überlegungen ist es nützlich, auf die in Zusatz II zu Abh. XXXV bereits vorweggenommenen Erläuterungen über die Abbildung der Diagonalfäche auf die Ebene bez. das Ikosaeder zurückzugreifen. K.]



mentalpunkt hindurchgehen, eindeutig die Punkte dieser Kurve entsprechen; sowie jenes Büschel ohne Unterbrechung ist, so müssen die Punkte der Kurve eine einzige, zusammenhängende Reihenfolge bilden. Die den verschiedenen Fundamentalpunkten der einen Fläche entsprechenden Fundamentalkurven werden sich, wie leicht zu sehen, nur in den Fundamentalpunkten der zweiten Fläche schneiden können. Sie werden durch sie in eine Anzahl, S , von Segmenten zerlegt, die gleich ist der Anzahl von Malen, daß sie überhaupt durch die Fundamentalpunkte durchgehen¹⁹⁾.

Man überzeugt sich nun von folgendem Satze: *Die Anzahl S der Segmente, in welche die Fundamentalkurven zerlegt werden, ist auf beiden Flächen dieselbe.* Geht nämlich die Fundamentalkurve, welche dem i -ten Fundamentalpunkte der ersten Fläche entspricht, a_{ik} mal durch den k -Fundamentalpunkt der zweiten, so wird auch die Kurve, welche letzterem auf der ersten Fläche entspricht, a_{ik} mal durch den i -ten Fundamentalpunkt der ersten Fläche gehen müssen. Denn durch beide Behauptungen wird nur gleichmäßig ausgesprochen, daß a_{ik} Fortschreitungslinien in dem einen und dem anderen Fundamentalpunkte existieren, welche einander entsprechen. Die Zahl S ist aber die Summe aller a_{ik} ; sie fällt also beiderseits gleich aus. — Durch die a_{ik} Fortschreitungslinien, welche den verschiedenen Fundamentalpunkten k der zweiten Fläche entsprechen, wird das Büschel der durch den i -ten Fundamentalpunkt der ersten Fläche hindurchgehenden Richtungen $\sum_k a_{ik}$ Teile, oder, wenn man will, in $2 \sum_k a_{ik}$

Halbbüschel zerlegt. In ebenso viele Segmente wird die dem i -ten Fundamentalpunkte auf der zweiten Fläche entsprechende Kurve durch die Fundamentalpunkte der zweiten Fläche geteilt; der Unterscheidung der Halbbüschel entspricht die Unterscheidung der beiden Seiten der verschiedenen Segmente.

Nunmehr wandle man jede der beiden Flächen in folgender Weise um. Man hebe die μ Fundamentalpunkte der ersten Fläche und die ν Fundamentalpunkte der zweiten heraus (d. h. man schneide aus den Flächen kleine [ovale] Stücke aus, welche diese Punkte umgeben). Dadurch wächst der Zusammenhang der ersten Fläche um μ , der der zweiten um ν . Sodann zerschneide man die Flächen längs der auf ihnen liegenden Fundamentalkurven: eine Operation, welche nun, nachdem durch das Herausheben der Fundamentalpunkte Begrenzungen entstanden sind, in dem Ziehen von

¹⁹⁾ [Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß eine Fundamentalkurve, welche durch keinen Fundamentalpunkt hindurchläuft, zur Zahl S der Segmente den Beitrag 0 liefert. Bei der Zerschneidung längs der Fundamentalkurven, von der weiter unten die Rede ist, gibt eine solche Fundamentalkurve zu einem Rückkehrschnitt Anlaß, das Auftreten eines solchen ändert die Zusammenhangszahl nicht. K.]

S Querschnitten [bzw. in dem Ziehen von Rückkehrerschnitten] besteht. So ist die eine Fläche um $\mu - S$, die andere um $\nu - S$ im Zusammenhange vermehrt; *die so veränderten Flächen sind aber nunmehr ohne Zwischentreten von Fundamentalpunkten eindeutig aufeinander bezogen.* Der Rand jeder der beiden so erhaltenen Flächen besteht, wie der größeren Bestimmtheit wegen hervorgehoben sei, abwechselnd aus Segmenten von Fundamentalkurven und Stücken der um Fundamentalpunkte herumgelegten kleinen Ovale, wie sie auf diesen Ovalen durch die von den Fundamentalpunkten ausgehenden Halbbüschel bestimmt werden. Die beiden Ränder der beiden Flächen sind dann so eindeutig aufeinander bezogen, daß jedem Stücke des einen, welches aus einem Segmente einer Fundamentalkurve besteht, ein Stück des anderen zugeordnet ist, welches einem der kleinen Ovale angehört, und umgekehrt. Zu jedem von einem Halbbüschel ausgeschnittenen Stück eines Ovals gehört ein zweites, welches durch das komplementäre Halbbüschel bestimmt wird. Dem entspricht, daß auch jedes Segment einer Fundamentalkurve zweimal in der Begrenzung auftritt. — Aber der Zusammenhang der beiden so erhaltenen Flächen ist um $\mu - S$ und bez. $\nu - S$ größer, als der Zusammenhang der beiden ursprünglichen Flächen; *addiert man also zum Zusammenhange der einen ursprünglichen Fläche μ , zu dem der anderen ν , so erhält man gleiche Zahlen, wie behauptet wurde.*

Um die Bedeutung der Indikatrixtheorie und der absoluten Auffassung des Zusammenhangbegriffes vollends hervortreten zu lassen, mag hier noch der Zusammenhang zweier zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten, die keine Flächen sind, bestimmt werden, nämlich *der Linienkongruenzen erster Ordnung und Klasse mit zwei reellen oder zwei imaginären Leitlinien.* (Fallen die Leitlinien zusammen, so hat die Kongruenz einen singulären Strahl, und es kann von Abzählung des Zusammenhanges ohne vorherige neue Festsetzungen keine Rede sein.)

Es bietet sich zu dieser Bestimmung zunächst eine analytische Methode. Führt man statt der Linienkoordinaten p_{ik} sechs reelle lineare Funktionen x_i ein, so kann man bekanntlich erreichen, daß die zwischen den p_{ik} bestehende Identität in folgende übergeht²⁰⁾:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_4^3 - x_5^3 - x_6^3 = 0.$$

Eine lineare Kongruenz mit imaginären Leitlinien ist dann, beispielsweise, durch

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

²⁰⁾ Math. Annalen, Bd. 2, S. 204 [s. Abh. II in Bd. 1 dieser Ausgabe, S. 58].



eine solche mit reellen Leitlinien durch

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0$$

dargestellt. Anders ausgedrückt: Die Kongruenz mit imaginären Leitlinien ist eindeutig (und ohne Auftreten von Fundamentelementen) abgebildet auf diejenige M_3 , welche aus dem projektiven R_3 :

$$x_3 : x_4 : x_5 : x_6$$

durch die Gleichung

$$x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0$$

ausgeschieden wird; die Kongruenz mit reellen Leitlinien entsprechend auf diejenige M_2 des R_3 :

$$x_1 : x_2 : x_5 : x_6,$$

die durch

$$x_1^2 + x_2^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0$$

repräsentiert wird. Aber dieselben Gleichungen bedeuten, bei anderer Interpretation der Verhältnißgrößen x , reelle Flächen zweiten Grades, die bez. nichtgeradlinig und geradlinig sind, d. h. also z. B. eine Kugel und ein einschaliges Hyperboloid.

Somit kommt:

Beide Linienkongruenzen sind „einfache“ Mannigfaltigkeiten. Die Kongruenz mit imaginären Leitlinien hat den Zusammenhang Null, die Kongruenz mit reellen Leitlinien hat den Zusammenhang Zwei.

Versuchen wir jetzt, uns unmittelbar geometrisch zunächst von dem ersten Teile der vorstehenden Behauptung Rechenschaft zu geben.

Für eine Linie der Kongruenz die Indikatrix konstruieren heißt, unter den unmittelbar benachbarten Linien einfach unendlich viele zu einer in sich zurücklaufenden (geschlossenen) Linienfläche zusammenfassen. Die Erzeugenden dieser Fläche sind dann, damit die Indikatrix ihren Sinn erhalte, in bestimmter Reihenfolge zu nehmen.

Diese Forderung läßt sich nun für die beiden zu betrachtenden Fälle in geläufigere Vorstellungen umsetzen, die dann in beiden Fällen leicht übersehen lassen, daß man es in der Tat mit *einfachen* Mannigfaltigkeiten zu tun hat²¹⁾.

Nehmen wir zunächst die Kongruenz mit imaginären Leitlinien. Um die Ideen zu fixieren, denken wir uns in einer Ebene senkrecht gegen den zu betrachtenden Strahl um diesen Strahl einen kleinen Kreis gezogen und wählen als Indikatrix die Linienfläche, die von den Kongruenzstrahlen erzeugt wird, welche von den Punkten des Kreises ausgehen. Dieselben bilden

²¹⁾ Ein liniengeometrisches Beispiel für eine Doppelmännigfaltigkeit vom Zusammenhange Null gibt etwa das Sekantensystem einer Raumkurve dritter Ordnung wie man am raschesten auch wieder analytisch erschließt.

ein enges, um den Strahl herumgelegtes einschaliges Hyperboloid, oder wenigstens eine ähnlich gestaltete Fläche. Statt nun diese Kongruenzlinien in bestimmter Reihenfolge zu durchlaufen, erteilen wir dem Hyperboloide in dem einen oder anderen Sinne eine Drehung um seine Achse. Denkt man sich dann die Erzeugenden als Tangenten von Schraubenlinien, die sich um die Achse herumwinden, so ist mit der Drehung eine Verschiebung der Achse in sich verbunden. Statt also unserer Indikatrix einen Sinn zu erteilen, können wir *einfach auch dem als Punktreihe betrachteten Kongruenzstrahle einen Sinn beilegen.*

Genau dasselbe Mittel [der Unterscheidung des Sinnes] benutzt v. Staudt, um die beiden von allen Linien der Kongruenz geschnittenen imaginären Leitlinien zu unterscheiden. v. Staudts Entwicklungen zugegeben, ist also deutlich, daß ein Kongruenzstrahl, mit einem bestimmten Verschiebungssinne behaftet, dann beliebig durch die Kongruenz hin bewegt, zu seiner Anfangslage nur wieder mit seinem ursprünglichen Sinne zurückkehren kann: *die Kongruenz erster Ordnung und Klasse mit imaginären Leitlinien ist also eine einfache Mannigfaltigkeit.*

Entsprechende Überlegungen, bei der Kongruenz mit reellen Leitlinien angestellt, ergeben dieses Resultat:

Jeder Strahl wird durch die beiden Direktrizen D_1 und D_2 in zwei Segmente zerlegt, und der wechselnde Sinn, welcher der Linienindikatrix beigelegt werden kann, kommt darauf hinaus, auf jedem dieser Segmente übereinstimmend einen Sinn von D_1 zu D_2 oder von D_2 zu D_1 anzunehmen. Daß dieser Sinn, einmal festgestellt, sich bei stetiger Verschiebung der Geraden innerhalb der Kongruenz nicht ändern kann, ist deutlich, und *also haben wir wiederum eine einfache Mannigfaltigkeit vor uns.*

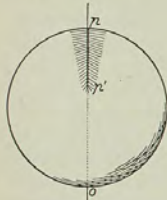
Die wirkliche Bestimmung des Zusammenhangs der beiderlei Kongruenzen ergibt sich nach dieser Voruntersuchung am anschaulichsten durch den Vergleich mit der unbegrenzten Ebene. Sind die Leitlinien der Kongruenz imaginär, so entspricht jedem Punkte der Ebene ausnahmslos ein (hindurchgehender) Strahl und auch umgekehrt jedem Strahle ein Punkt, bis auf den einen Strahl, der ganz in der Ebene enthalten ist. Sind die Leitlinien reell, so modifizieren sich diese Verhältnisse insofern, als dann auch noch zwei Punkte der Ebene auftreten (die Schnittpunkte der Ebene mit den beiden Leitlinien), denen unendlich viele Linien der Kongruenz entsprechen. Aus diesem Verhalten bestimmt sich die Zusammenhangszahl der beiderlei Kongruenzen bez. zu *Null* und *Zwei*, genau so, wie [oben auf S. 70, 71] aus dem entsprechenden Verhalten der Kugel und des einschaligen Hyperboloids bei ihrer Abbildung auf die Ebene der Zusammenhang dieser beiden Flächen bestimmt wurde. Zugleich gibt die Abbildung auf die Ebene ein geometrisches Mittel, um die umkehrbar eindeutige Beziehung

zwischen der Kongruenz mit imaginären Leitlinien und der Kugel, resp. zwischen der Kongruenz mit imaginären Leitlinien und dem einschaligen Hyperboloide herzustellen, eine Beziehung, die oben auf analytischem Wege gewonnen wurde.

[Zusatz, betr. die Zusammenhangsverhältnisse der Steinerschen Fläche.]

[Ich möchte der Deutlichkeit halber noch die auf S. 65 gestreiften Zusammenhangsverhältnisse der Steinerschen Fläche etwas näher erläutern.]

Die Steinersche Fläche wird entweder drei reelle Doppelgerade haben oder auch nur eine. Ersterer Fall ist in dem bekannten schönen Modell realisiert, welches Kummer s. Z. angefertigt und später im Verlage Brill-Schilling hat erscheinen lassen. Im Gegensatz dazu will ich hier an den Fall nur einer reellen Doppelgeraden anknüpfen, der sich gestaltlich leichter erfassen und auch dementsprechend durch eine einfache Figur wiedergeben läßt, die hier nebenstehend skizziert ist. In der Tat lassen sich an diese Figur bereits alle Erläuterungen anknüpfen, die ich hier zu geben habe.



Die Doppelgerade ist in der Figur vertikal gestellt. Man erkennt, daß sie nur in dem Intervall von p bis p' Durchdringungskurve zweier reellen Mäntel der Fläche ist; oberhalb p und unterhalb p' verläuft sie isoliert; speziell ist der Punkt o , wo sie die Fläche quer durchsetzt, ihr Durchschnitt mit den beiden imaginären Doppelgeraden der Fläche und insofern ein dreifacher Punkt der letzteren. Die Punkte p und p' sind, was Cayley pinch-points zu nennen pflegte (wofür man den deutschen Namen „Zwickpunkte“ vorgeschlagen hat)²³⁾. Übrigens stimmt die ganze Figur mit derjenigen speziell überein, welche Dyck in Bd. 32 der Math. Annalen (1888) als einfachstes Beispiel einer geschlossenen einseitigen Fläche gegeben hat.

Die Sache ist nun die, daß entsprechend den Überlegungen des Textes die Zusammenhangsverhältnisse unserer Fläche so beurteilt werden wollen, wie sie in der Abbildung auf die reelle Ebene erscheinen. Hierbei fallen vor allen Dingen die isolierten Stücke der Doppelgeraden ganz weg, denn jeder ihrer Punkte bekommt in der Ebene zwei (konjugiert) imaginäre Bildpunkte. Andererseits bildet sich das nicht isolierte Stück (p, p') zweimal ab, nämlich auf die beiden Segmente, in welche die Verbindungsgerade zweier Punkte π, π' der Ebene gemäß der projektivischen Anschauung durch diese Punkte zerlegt ist. π und π' sind die Bilder beziehungsweise von p und p' ; jeder auf der Doppelgeraden zwischen p und p' gelegene Punkt hat den beiden Mänteln der Steinerschen Fläche entsprechend, die sich in ihm durchsetzen, zwei Bildpunkte, die auf der Geraden π, π' harmonisch zu π und π' liegen.

Insbesondere sind auch die Aussagen des Textes, die sich auf die einen Flächenpunkt umgebende Indikatrix beziehen, so zu verstehen, wie sie sich in der Bildebene aus der dort jeweils zu konstruierenden Indikatrix ergeben. Ich will hier die Aufmerksamkeit insbesondere auf die Indikatrices der beiden pinch-points p, p' lenken. Überträgt man die Indikatrices der Punkte π, π' der Bildebene, welche kleine Ovale sind, auf die Steinersche Fläche, so entstehen dort als Indikatrices der beiden pinch-points p, p' Kurven, wie sie durch kleine, um diese Punkte gelegte, ovale Flächen aus der Steinerschen Fläche ausgeschnitten werden. Von oben gesehen

²³⁾ Es sei darauf hingewiesen, daß die Doppelgerade in Fig. 1 des Zusatzes zu Abh. XXXIV vier solcher Zwickpunkte trägt. Desgleichen traten Zwickpunkte auch bei den Erläuterungen über die Gestalten des Zylinderoids in Zusatz I zu Abh. XXXV auf.

werden sich beide Indikatrices wie Schleifen (wie eine 8) darstellen. Von vorne projiziert flacht sich die Indikatrix von p zu einem doppelt überdeckten Kurvenbogen ab, während die von p' ein doppelt durchlaufenes Oval wird, das p' im Innern enthält. Die Verhältnisse in p' stellen sich dabei genau so dar, wie die Umlaufung eines einfachen Verzweigungspunktes einer gewöhnlichen mehrblättrigen Riemannschen Fläche²³⁾. Projiziert man endlich von der Seite, so bildet sich die Indikatrix von p' als doppelt überdeckter Kurvenbogen ab, während die von p ein doppelt durchlaufenes Oval gibt, das allerdings p nicht im Innern enthält.

In diesem Auftreten der pinch-points liegt für die Betrachtung des Zusammenhangs eine gewisse Unvollkommenheit der von Dyck vorgeschlagenen Normalform bez. unserer Steinerschen Fläche. Ich erwähne darum gern, daß Hilbert später durch Herrn Boy ganz im Endlichen gelegene einseitige Flächen hat konstruieren lassen, deren Doppelkurven nach ihrer ganzen Erstreckung auf reellen Mänteln der Fläche liegen. (Math. Annalen, Bd. 57 (1903). K.)

²³⁾ In der Tat erscheinen die Verzweigungspunkte, wenn man die Riemannschen Flächen algebraisch definiert, als richtige pinch-points; die in sie einmündenden Verzweigungsschnitte sind dabei als Doppelkurven anzusehen, welche jenseits des Verzweigungspunktes isoliert weiterlaufen. Man definiere etwa, um ein einfachstes Beispiel zu geben, als Riemannsche Fläche der Funktion $\sqrt{x+iy}$ die folgende:

$$z = \varepsilon \Re(\sqrt{x+iy}) = \varepsilon \frac{\sqrt{x+iy} + \sqrt{x-iy}}{2}$$

(unter ε eine beliebig kleine Konstante verstanden). Die hierbei hervortretenden Einzelheiten sind so einfach, daß sie hier nicht durchgeführt zu werden brauchen.



XXXVII. Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve¹⁾.

[Math. Annalen, Bd. 10 (1876).]

In seiner Untersuchung der Kurven vierter Ordnung (Math. Annalen, Bd. 7 (1874), S. 410, Comptes Rendus, Juli 1873) hat Zeuthen eine Reihe schöner Sätze bewiesen, die sich auf die Realitätsverhältnisse der 28 Doppeltangenten dieser Kurven, wie ihrer 24 Wendetangenten beziehen. Wir greifen unter ihnen folgende heraus:

1. Zeuthen unterscheidet bei den reellen Doppeltangenten solche von der ersten und solche von der zweiten Art. Die letzteren berühren je zwei verschiedene Züge der Kurve, während die ersteren entweder denselben Zug zweimal berühren oder überhaupt keinen Zug, d. h. isolierte Doppeltangenten sind. *Die Zahl der Doppeltangenten erster Art ist nun immer gleich Vier, solange die Kurve keinen vielfachen Punkt besitzt.*

2. Andererseits bemerkt Zeuthen, daß, bei den Kurven vierter Ordnung ohne Doppelpunkt, jede Doppeltangente erster Art, welche *reelle* Berührungspunkte hat, eine „Einbuchtung“ des von ihr berührten Kurvenzuges abschließt, d. h. einen Teil der Kurve, welcher zwei Wendungen enthält. Und auch umgekehrt, so oft bei einer Kurve vierter Ordnung (die keinen vielfachen Punkt besitzt) eine reelle Wendung auftritt, wird sie mit einer zweiten Wendung zusammen einer Einbuchtung angehören und so zu einer Doppeltangente erster Art mit reellen Berührungspunkten Anlaß geben. *Es ist also die doppelte Zahl derjenigen Doppeltangenten erster Art, welche reelle Berührungspunkte haben, gleich der Zahl der reellen Wendungen.* (Insbesondere folgt hieraus als Maximalzahl der reellen Wendungen bei Kurven vierter Ordnung *Acht*, wie Salmon vermutet hatte. [Higher Plane Curves, 2. Aufl. (1881), S. 248]).

Indem man diese beiden Sätze kombiniert, kann man sagen:

Bei einer Kurve vierter Ordnung ohne vielfachen Punkt ist die Zahl

¹⁾ [Vgl. die unter dem Titel „Über eine Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve“ in den Erlanger Sitzungsberichten vom 13. Dezember 1873 erschienene Note.]

der reellen Wendungen, vermehrt um die doppelte Zahl der isolierten Doppeltangenten, gleich Acht.

Es ist nun sehr merkwürdig, daß der so ausgesprochene Satz einer unmittelbaren Verallgemeinerung auf Kurven n -ter Ordnung fähig ist, zu deren Ableitung eben die einfachen Methoden ausreichen, deren sich Zeuthen in seinem Aufsätze bedient²⁾. Sei bei einer Kurve n -ter Ordnung ohne vielfachen Punkt w' die Zahl der reellen Wendungen, t'' die Zahl der reellen, *isolierten* Doppeltangenten.

Dann hat man das Theorem:

$$w' + 2t'' = n(n - 2).$$

Auch ist die Modifikation, welche dieser Satz beim Auftreten singularer Punkte erheischt, übersichtlich anzugeben. Es soll die Kurve, wie im folgenden der Einfachheit wegen durchgehends angenommen wird, nur mit einfachen Plücker'schen Singularitäten behaftet sein, und es bezeichne k ihre Klasse, r' die Zahl ihrer *reellen* Spitzen, d'' die Zahl ihrer reellen, *isolierten* Doppelpunkte.

Dann besteht die Relation:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''.$$

Diese Formel kommt auf die vorige zurück, sobald man der Kurve keine anderen vielfachen Punkte, als isolierte reelle Doppelpunkte beilegt. Denn dann ist $r' = 0$, $k = n(n - 1) - 2d''$. Andererseits umfaßt unsere Formel z. B. die bekannten Realitätsverhältnisse der Wendepunkte bei den Kurven dritter Ordnung, sofern für $n = 3$ Doppeltangenten noch nicht auftreten können und also $t'' = 0$ zu setzen ist.

Wir beweisen zunächst die Formel:

$$w' + 2t'' = n(n - 2)$$

in ihrer Gültigkeit für Kurven ohne vielfachen Punkt. Wir zeigen vor allem, daß, bei diesen Kurven, $w' + 2t''$ einen konstanten Zahlenwert besitzen muß; hinterher bestimmen wir den letzteren an einem Beispiele. Die Kurvengleichungen sind dabei immer mit *reellen* Koeffizienten gedacht, wie im Gegensatz zu einer späteren Betrachtung, bei der ausdrücklich das Gegenteil vorausgesetzt wird, bemerkt sei.

Es mögen also $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zwei Kurven n -ter Ordnung ohne singuläre Punkte vorstellen: es sollen die Werte, welche bez. bei ihnen die Zahl

²⁾ [Zeuthen selbst war, wie er mir damals schrieb, an dieser Verallgemeinerung vorbeigeführt worden, weil er sich zu starr auf den von ihm eingeführten Allgemeinbegriff der „Doppeltangenten erster Art“ festgelegt hatte. Die Resultate, die ich später, mit freilich ganz anderen Methoden, für die Berührungs- φ der algebraischen Kurven beliebigen Geschlechtes abgeleitet habe (siehe unten Abh. XLII) entsprechen insofern gewissermaßen mehr der ursprünglichen Zeuthenschen Zielsetzung. K.]



$w' + 2t''$ annimmt, verglichen werden. Zu dem Zwecke denke man sich durch allmähliche *reelle* Änderung der Konstanten φ in ψ übergeführt. Dies kann noch in sehr mannigfacher Weise geschehen, und man kann es daher immer vermeiden, daß dabei Kurven überschritten werden, deren Koeffizienten *gleichzeitig* zwei vorgegebenen algebraischen Bedingungen genügen. Kurven dagegen, deren Koeffizienten eine einzelne, beliebig gegebene algebraische Bedingung erfüllen, werden, allgemein zu reden, beim Übergange eine endliche Anzahl von Malen auftreten; — im besonderen Falle kann diese Anzahl Null sein. Kurven z. B., die nur einen Doppelpunkt besitzen (der dann selbstverständlich reell ist), müssen in Betracht gezogen werden; überflüssig ist es, in der Kurvenreihe Kurven mit Spitze, oder mit zwei Doppelpunkten oder mit einer vierfachen Tangente³⁾ usw. voranzusetzen.

Eine Änderung der Zahl ($w' + 2t''$) kann bei einem solchen Übergange nach algebraischen Prinzipien nur in folgenden Fällen möglicherweise eintreten:

1. wenn zwei Wendungen,
2. wenn zwei Doppeltangenten koinzidieren,
3. wenn eine isolierte Doppeltangente t'' aufhört, als solche zu zählen (resp. umgekehrt, wenn eine nicht isolierte Doppeltangente isoliert wird).

Diese Möglichkeiten können aber leicht noch weiter eingeschränkt werden; andererseits erweisen sie sich zum Teil voneinander abhängig.

Wir werden den Fall, daß die Übergangskurve einen vielfachen Punkt hat (der dann nach dem Obigen nur als reeller Doppelpunkt vorausgesetzt zu werden braucht), erst sogleich diskutieren; indem wir ihn ausschließen, bleiben nur folgende Fälle eventuell zu berücksichtigen:

ad 1. *der Fall, daß zwei reelle Wendungen eines Kurvenzuges konstitutiv werden.* Dann ist die betr. Tangente eine vierpunktige. Sie ist als solche eine Doppeltangente, welche den Übergang bildet zwischen einer Doppeltangente mit reellen Berührungspunkten und einer isolierten Doppeltangente. Es tritt dann also gleichzeitig die unter 3 vorgesehene Möglichkeit ein; *in dieser Gleichzeitigkeit liegt weiterhin der Kern des ganzen Beweises.*

ad 2. Von den Fällen, in welchen zwei oder mehr Doppeltangenten koinzidieren, sind offenbar nur diejenigen zu berücksichtigen, in denen eine isolierte Doppeltangente beteiligt ist. Aber unter ihnen werden schließlich nur solche möglicherweise von Einfluß sein können, bei denen *zwei* isolierte

³⁾ Vierfach heißt im folgenden eine Tangente, welche an vier Stellen berührt eine Tangente, die vier konsekutive Punkte enthält, ist „vierpunktig“ genannt.

Doppeltangenten koinzidieren. Freilich kann sich eine isolierte Doppeltangente mit zwei konjugiert imaginären zu einer reellen dreifachen Tangente vereinigen (die letztere besitzt dann nur einen reellen Berührungspunkt). Überschreitet man aber eine solche Kurve, so wird aus der dreifachen Tangente nur wieder *eine* isolierte Doppeltangente hervorgehen, indem sich von neuem zwei imaginäre Doppeltangenten ablösen. Denn die isolierte Doppeltangente hat sich *mit ihr nicht gleichwertigen* Doppeltangenten vereinigt, und das kann auf die Zahl t'' keinen Einfluß haben.

Sonach bleibt nur *das Zusammenfallen zweier isolierter Doppeltangenten ad 2 zu untersuchen*; wir werden weiterhin zeigen, daß ein solches Zusammenfallen *zwei* Bedingungen äquivalent ist, und also überhaupt nicht in Betracht kommt.

ad 3. Der einzige Übergang, der zwischen isolierten und nicht isolierten Doppeltangenten besteht, wird durch die vierpunktige Tangente gebildet. Sonach leitet 3 zu der unter 1 aufgeführten Möglichkeit zurück.

Erörtern wir jetzt vorab den Einfluß, den *das Auftreten eines reellen Doppelpunktes* auf w' und t'' besitzt. Dieser Doppelpunkt kann isoliert oder nicht isoliert sein. In jedem Falle absorbiert er nach den Plücker'schen Formeln sechs Wendungen. Auch macht Plücker schon darauf aufmerksam⁴⁾, daß beim isolierten Doppelpunkte diese sechs Wendungen sämtlich imaginär sind, während beim nicht isolierten Doppelpunkte zwei und nur zwei reell sind. Die Zahl w' wird daher im letzteren Falle und nur in diesem um zwei Einheiten vermindert. Aber diese zwei Wendungen w' erscheinen von neuem wieder, wenn man die Kurve mit Doppelpunkt überschreitet. Denn der Doppelpunkt absorbiert eben immer zwei reelle Wendungen, von welcher Seite man ihn auch entstehen lassen mag. *Deshalb erleidet also die Zahl w' keine Änderung, wenn man eine Kurve mit Doppelpunkt überschreitet.*

Dasselbe ergibt sich für t'' . Hat eine Kurve einen Doppelpunkt, so fallen eine Anzahl Doppeltangenten je paarweise in die Tangenten zusammen, die man vom Doppelpunkte an die Kurve legen kann. Von den Berührungspunkten der Doppeltangente rückt dabei der eine in den Doppelpunkt hinein, während der andere abgetrennt liegt, da immer angenommen werden kann, daß keiner der im Doppelpunkte sich kreuzenden Kurvenäste im Doppelpunkte eine Wendung besitzt. Deshalb kann keine reelle Doppeltangente mit imaginären Berührungspunkten beteiligt sein. *Also auch die*

⁴⁾ Vgl. „Theorie der algebraischen Kurven“ (1839) Nr. 64. Auf das von Plücker gebrauchte Beweisprinzip kommen wir noch im Texte zu sprechen. Einen Beweis nur aus Betrachtung der Lagenverhältnisse gibt für die C_3 Möbius: „Über die Grundformen der Linien dritter Ordnung“. Abhandl. der Sächs. Akademie 1852 (vorgelegt bereits 1848) [= Werke, Bd. 2, S. 86—176].



Zahl t' bleibt ungeändert, wenn eine Kurve mit Doppelpunkt überschritten wird.

Hiernach ist das Auftreten vielfacher Punkte für den hier gestellten Zweck nicht weiter zu untersuchen. Erörtern wir jetzt den Fall ad 1. Zwei reelle Wendungen werden konsekutiv, man hat eine vierpunktige Tangente. Bei Überschreitung einer solchen Kurve wird gleichzeitig w' um zwei Einheiten, t'' um eine Einheit geändert. Die geometrische Anschauung zeigt, daß eine isolierte Doppeltangente aus der vierpunktigen entsteht, wenn die beiden Wendungen w' imaginär werden; t'' wächst daher um eine Einheit, wenn w' um zwei Einheiten abnimmt, resp. umgekehrt, und daher bleibt $w' + 2t''$ beim Überschreiten der betr. Kurve konstant.

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß das Zusammenfallen zweier isolierter Doppeltangenten zwei Bedingungen äquivalent ist.

Untersuchen wir zu dem Zwecke, wie überhaupt bei einer Kurve, die keine vielfachen Punkte besitzt, ein Zusammenfallen von Doppeltangenten eintreten kann, und welche von den bez. Möglichkeiten durch nur eine Bedingung zwischen den Koeffizienten dargestellt werden. Man findet, daß eine Doppeltangente nur dann mehrfach zählt, wenn sie entweder mehr als zwei Berührungspunkte hat und also vielfache Tangente ist, oder wenn sie zum mindesten in einem ihrer Berührungspunkte einen höheren Kontakt besitzt. Durch eine Bedingung sind charakterisiert der Fall der dreifachen Tangente und der Fall, daß die Doppeltangente in einem ihrer Berührungspunkte oskuliert und also zugleich Wendetangente ist. Der Beweis dieser Behauptung, die sich auf allgemein algebraische Verhältnisse und nicht insbesondere auf Bedingungen der Realität bezieht, soll hier nicht ausgeführt werden; er wird mit bekannten Mitteln geleistet.

Aber keiner der beiden durch nur eine Bedingung dargestellten Fälle kann durch das Zusammenfallen zweier isolierter Doppeltangenten herbeigeführt werden. Denn jede derselben hat ein Paar konjugiert imaginärer Berührungspunkte, und indem dieselben auf eine gerade Linie rücken, können nicht drei gleichwertige oder zwei ungleichwertige Berührungspunkte entstehen. Man würde entweder eine vierfache (nach wie vor isolierte) Tangente erhalten, oder eine solche, die an zwei konjugiert imaginären Stellen oskuliert.

Die Zahl $w' + 2t''$ ist also für alle Kurven ohne vielfache Punkte dieselbe, wie behauptet wurde.

Um sie jetzt an einem Beispiele abzuzählen, nehme man vorab eine Kurve der n -ten Ordnung, die in lauter niedere Kurven zerfallen ist und bei der man daher die Lage der Singularitäten und die Realität derselben deutlich übersieht. Sodann löse man die dabei vorhandenen vielfachen

Punkte in bekannter Weise auf, und man erhält eine Kurve ohne solche Punkte, bei der sich ein Abzählen von w' und t'' ohne weiteres ermöglicht. Der Einfluß, den ein reeller Doppelpunkt auf die Zahl w' ausübt, wurde oben für den allgemeinen Fall angegeben; er wird ein anderer⁵⁾, wenn einer der Äste des Doppelpunktes im Doppelpunkte eine Wendung besitzt. Um derartige Untersuchungen nicht noch zu benötigen, wählen wir die zerfallene C_n so, daß unter ihren Bestandteilen sich keine gerade Linie befindet.

Sei zunächst n eine gerade Zahl, $n = 2\mu$. Dann zeichne man etwa μ kongruente konzentrische Ellipsen, deren Hauptachsen unter bez. gleichen Winkeln $\left(\frac{\pi}{\mu}\right)$ gegeneinander geneigt sind. Jede Ellipse schneidet die andere in vier reellen Punkten, so daß im ganzen $4 \frac{\mu(\mu-1)}{2} = \frac{n(n-2)}{2}$ reelle, nicht isolierte Doppelpunkte bei der C_n vorhanden sind, und sonst offenbar überhaupt keine Doppelpunkte. Auch die Lage der $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ eigentlichen oder uneigentlichen Doppeltangenten dieser C_n ist ersichtlich. Sie sind repräsentiert:

1. Durch die $\frac{1}{2}n(n-2)$ reellen Tangenten, welche irgend zwei der μ Ellipsen gemeinsam berühren.

2. Durch die $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)$ Tangenten, welche man von den Durchschnittspunkten zweier Ellipsen an eine dritte ziehen kann. Diese Tangenten sind teils reell, teils paarweise konjugiert imaginär. Keine von ihnen hat zusammenfallende Berührungspunkte. Sie zählen als Doppeltangenten doppelt.

3. Durch die als Doppeltangenten vierfach zählenden

$$\frac{1}{8}n(n-2)(n^2-2n-2)$$

Verbindungslinien der genannten Durchschnittspunkte untereinander. Sie sind alle reell; als ihre Berührungspunkte sind bez. die beiden Durchschnittspunkte aufzufassen, welche sie verbinden.

Geht man von der so beschriebenen C_n zu einer benachbarten Kurve ohne vielfachen Punkt über, so liefert, nach dem wiederholt benutzten Satze, jeder der $\frac{1}{2}n(n-2)$ Doppelpunkte zwei reelle Wendungen; man bekommt also:

$$w' = n(n-2),$$

da vor Auflösung der Doppelpunkte überhaupt keine reellen Wendungen vorhanden waren.

Ferner ergibt sich:

$$t'' = 0.$$

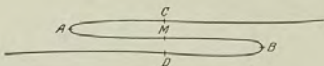
⁵⁾ Vgl. Zeuthen: Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver. Abhandlungen der Dänischen Akademie 1873.

Denn man kann einzeln verfolgen, was aus den Doppeltangenten der zerfallenen Kurve wird. Die Doppeltangenten 1 bleiben reell mit reellen Berührungspunkten. Von den Doppeltangenten 2 spaltet sich jede, je nach der Auflösungsart des Knotenpunktes, in zwei reelle und dann nicht isolierte Doppeltangenten oder in zwei konjugiert imaginäre. Ebenso über- sieht man, daß jede der Doppeltangenten 3 vier reelle und nicht isolierte oder vier paarweise imaginäre Doppeltangenten ergibt. Es entsteht also bei der Auflösung der Doppelpunkte keine isolierte reelle Doppeltangente; vor der Auflösung war keine vorhanden, und also hat man im Beispiele ($n \equiv 0 \pmod{2}$):

$$w' + 2t'' = n(n - 2).$$

Zugleich ist gezeigt, daß für ein gerades n Kurven mit der Maximalzahl reeller Wendungen, $n(n - 2)$, wirklich existieren.

Für ungerades n ergibt sich ein geeignetes Beispiel folgendermaßen. Sei $n = 2\mu + 3$. So zeichne man μ Ellipsen, wie im vorigen Falle, und ergänze dieselben zu einer C_n durch eine Kurve dritter Ordnung, welche jede der Ellipsen in sechs reellen Punkten schneidet. Dies ist möglich, wenn man z. B. der Kurve dritter Ordnung folgende Gestalt gibt:



wo AB einen Abstand bedeutet, der größer ist als die große Achse der benutzten Ellipsen, CD einen Abstand, der kleiner ist als die kleine Achse der Ellipsen. Diese Kurve lege man in der Art, daß M in den gemeinsamen Mittelpunkt der Ellipsen fällt; so wird sie jede der Ellipsen in sechs reellen Punkten treffen.

Man mache nun ganz ähnliche Abzählungen, wie soeben. Es ist bei ihnen nur darauf zu achten, daß die C_3 bereits an sich drei Wendungen enthält. Auch sei als Moment beim Beweise hervorgehoben, daß keine der zwölf Tangenten, welche die C_3 mit der einzelnen Ellipse gemein hat (und die teils reell, teils imaginär sein werden), eine isolierte Doppeltangente der C_n liefern kann; denn isolierte reelle Tangenten gibt es bei der reellen C_3 , oder gar der reellen Ellipse nicht. Auf diese Weise findet man:

Auch bei ungeradem n ist

$$w' + 2t'' = n(n - 2),$$

und Kurven mit der Maximalzahl reeller Wendungen, $n(n - 2)$, existieren.

Andererseits ist evident, daß, bei ungeradem n , eine Minimalzahl für die reellen Wendungen existiert. Denn jede solche C_n (ohne vielfachen

Punkt) hat bekanntermaßen einen unpaaren Zug, der als solcher mindestens drei Wendungen besitzt. —

Die allgemeinere Formel:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''$$

ergibt sich aus der jetzt bewiesenen folgendermaßen:

Man denke sich die Kurve mit vielfachen Punkten aus einer benachbarten ohne vielfachen Punkt entstanden. Dann hat man für letztere:

$$w' + 2t'' = n(n - 2)$$

und es sind nun die Modifikationen zu untersuchen, welche die vielfachen Punkte an den Zahlen w' , t'' anbringen. In dieser Hinsicht stelle ich folgende Sätze voran, von denen die beiden ersten zum Teil schon benutzt wurden:

1. Jeder reelle, nicht isolierte Doppelpunkt, sowie jeder reelle Rückkehrpunkt, absorbiert zwei reelle Wendungen w' .
2. Der isolierte reelle Doppelpunkt hat auf die Zahl w' keinen Einfluß.
3. Die reelle Verbindungsgerade zweier konjugiert imaginärer Doppelpunkte absorbiert zwei, und die reelle Verbindungsgerade zweier konjugiert imaginärer Rückkehrpunkte absorbiert drei reelle isolierte Doppeltangenten t'' .

4. Andere Reduktionen in den Zahlen w' und t'' finden nicht statt.

Die Sätze 1, 2 werden von Plücker gegeben. Er beweist sie für Kurven dritter Ordnung und erschließt daraus ohne weiteres ihre allgemeine Gültigkeit. Es heißt das, algebraisch zu reden, daß man die bei der beliebigen Kurve in der singulären Stelle stattfindende Reihenentwicklung bei einem bestimmten Gliede abbricht. In demselben Sinne wird man ähnliche Sätze beweisen, indem man sich an dem Beispiele einer Kurve von hinlänglich hoher Ordnung von ihrer Richtigkeit überzeugt.

Für den Satz 3 geben geeignet gewählte Kurven vierter Ordnung brauchbare Beispiele; z. B. die vieluntersuchten C_4 , welche die Kreispunkte zu Doppelpunkten haben, und die Kartesischen Ovale, bei denen die Kreispunkte Spitzen sind. Bei ihnen findet man nur noch zwei, bez. eine Doppeltangente erster Art (im Sinne Zeuthens), und daher sind zwei, bez. drei dieser Doppeltangenten, die jedenfalls isolierte Doppeltangenten waren, durch die vielfachen Punkte, resp. deren Verbindungslinie, absorbiert.

Die allgemeine Formel ergibt sich jetzt sehr einfach. Es sei für eine gegebene Kurve der n -ten Ordnung und der k -ten Klasse:

- d' die Zahl der reellen, nicht isolierten,
- d'' die Zahl der reellen, isolierten,
- d''' die Zahl der imaginären Doppelpunkte.



Sei ferner:

r' die Zahl der reellen,
 r'' die Zahl der imaginären Spitzen.

Dann hat man nach den vorausgeschickten Sätzen:

$$w' + 2t'' = n(n-2) - 2d' - 2r' - 2d''' - 3r''.$$

Aber andererseits ist nach den Plücker'schen Formeln:

$$k = n(n-1) - 2(d' + d'' + d''') - 3(r' + r'').$$

Also folgt:

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d'',$$

was zu beweisen war.

In dem Umstande, daß die Formel sich selbst dualistisch ist, wird man eine Kontrolle der in ihr auftretenden Zahlenkoeffizienten erblicken.

Es mag hier zuvörderst eine Anwendung dieser Formel angeschlossen werden. Es sei eine *komplexe* Kurve von der Ordnung n und der Klasse k gegeben, d. h. eine Kurve, deren Gleichung komplexe Koeffizienten besitzt. Dieselbe wird eine Anzahl reeller isolierter Punkte (δ) und reeller isolierter Tangenten (τ) enthalten, welche aber, allgemein zu reden, nicht weiter mit besonderen Singularitäten behaftet sind, sondern einfache Elemente der Kurve vorstellen. Zwischen diesen beiden Zahlen finden wir eine *Relation*. Man vereinige nämlich die Kurve mit der ihr komplex konjugierten. So hat man eine Kurve von der Ordnung $2n$, von der Klasse $2k$, welche außer δ isolierten Doppelpunkten und τ isolierten Doppeltangenten überhaupt keine reellen Elemente enthält. Sie enthält keinerlei höhere Singularitäten; daher ist unsere Formel anwendbar. Man findet also:

$$n + \tau = k + \delta.$$

Bei einem komplexen Kegelschnitte z. B. können 0, 2, 4 Punkte reell sein; dann sind auch 0, 2, 4 Tangenten reell⁶⁾. Eine komplexe Kurve dritter Ordnung sei in Linienkoordinaten durch

$$\varphi + i\psi = 0$$

dargestellt; dann haben die Kurven sechster Klasse

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

sicher vier und höchstens zwölf reelle, gemeinsame Tangenten usw.

Sodann sei noch einer *Verallgemeinerung* gedacht, welche man unserer

⁶⁾ Es ergibt sich: Sind zwei und nur zwei Punkte reell, so liegen dieselben innerhalb desselben von den beiden dann vorhandenen reellen Tangenten gebildeten Winkelraumes. Nimmt man zwei reelle Punkte in anderer Lage gegen zwei reelle Tangenten an, so werden gleich vier Punkte und vier Tangenten reell; die vier Punkte liegen bez. innerhalb der vier von den vier Tangenten gebildeten Dreiecke.

Formel zuteil werden lassen kann und die sich darauf bezieht, daß man statt der geraden Linien der Ebene ein *reelles* Netz von Kurven beliebiger Ordnung:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0$$

betrachtet. Man kann dieses Netz in bekannter Weise dazu benutzen, um eine beliebig gegebene Kurve

$$f = 0$$

eindeutig zu transformieren; den Schnittpunktsystemen von f mit den Kurven des Netzes entsprechen dann die Schnittpunktsysteme der transformierten Kurve mit den Geraden der Ebene. Den bekannten Erörterungen über diesen Gegenstand hat man nur einige wenige Betrachtungen über die Realitätsverhältnisse bei einer derartigen Transformation hinzuzufügen, um für die transformierte Kurve unser Theorem anwenden zu können und damit für die Kurve f die gemeinte Verallgemeinerung zu finden. Es sei in dieser Richtung folgendes hervorgehoben. Auf der Kurve f gibt es Paare von Punkten, durch welche noch Büschel von Kurven φ hindurchgehen. Dieselben vereinigen sich bei der eindeutigen Transformation zu Doppelpunkten der transformierten Kurve. Diese Doppelpunkte sind, sobald die betr. zwei Punkte auf f reell sind, reell und nicht isoliert; sind aber die Punkte auf f konjugiert imaginär, so enthält die transformierte Kurve einen reellen, isolierten Doppelpunkt. Auf solche Weise findet man folgenden Satz:

Es sei

- N die Zahl der beweglichen Schnittpunkte der φ mit f ,
- K die Zahl derjenigen φ , welche, durch einen beliebig gewählten Punkt hindurchgehend, f berühren,
- W' die Zahl derjenigen reellen φ , welche f oskulieren,
- T'' die Zahl solcher reeller φ , die f in zwei imaginären Punkten berühren,
- R' die Zahl der reellen Spitzen von f , mit Ausnahme derjenigen, die etwa Grundpunkte des Netzes sind,
- D'' eine Zahl, die aus zwei Bestandteilen zusammengesetzt ist. Sie umfaßt zunächst die Zahl derjenigen isolierten Doppelpunkte von f , welche nicht Grundpunkte des Netzes sind. Sie umfaßt sodann die Zahl der eben genannten Vorkommnisse: daß auf f Paare konjugiert imaginärer Punkte gefunden werden können, durch welche noch ein Büschel von Kurven φ hindurchgeht.

Dann hat man immer:

$$N + W' + 2T'' = K + R' + 2D''.$$

Man nehme z. B. als Netz die Kreise, welche durch einen festen Punkt



gehen (wo dann die betr. eindeutige Transformation einfach eine Umformung durch reziproke Radien wird), als Kurve f eine Ellipse oder eine Hyperbel.

Dann hat man beide Mal:

$$N = 4, \quad K = 6, \quad R' = 0.$$

Aber D'' ist das eine Mal gleich 1, das andere Mal gleich Null. Die unendlich ferne Gerade nämlich bildet mit allen durch den angenommenen Punkt hindurchgehenden geraden Linien ein Büschel von Kreisen, welche f in zwei festen Punkten schneiden, und diese beiden Punkte (die unendlich fernen Punkte) sind bei der Ellipse konjugiert imaginär, bei der Hyperbel reell. Man hat also:

$$\text{bei der Ellipse: } W' + 2T'' = 4,$$

$$\text{bei der Hyperbel: } W' + 2T'' = 2.$$

In Worten: Bei einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel konstruiert man alle Krümmungskreise, sowie alle Kreise, welche in zwei konjugiert imaginären Punkten berühren. Wenn man dann die letzteren doppelt zählt, so erweist sich die ganze Ebene bei der Ellipse vierfach, bei der Hyperbel doppelt mit Kreisen überdeckt.

München, im Januar 1876.

[Wie höhere Singularitäten in die von mir aufgestellte Relation einzufügen sind, hat bald hernach A. Brill entwickelt (Math. Annalen, Bd. 16, 1879); jede solche Singularität bekommt einen Realitätsindex $r' - w' + 2(d'' - t'')$, wo die r', w', d'', t'' bzw. die Anzahlen der reellen Rückkehr- und Wendepunkte, isolierten Doppelpunkte und isolierten Doppeltangenten bedeuten, welche bei beliebiger „Auflösung“ der Singularität entstehen. Die einfachste Formulierung, welche alle Fälle, auch die der komplexen Kurven, umfaßt, hat dann später Fr. Schuh gegeben (Amsterdamer Verlag, Deel XII, 1904). Er schreibt

$$n + \sum v = k + \sum u,$$

wo $\sum u$ die Summe der Ordnungen aller Singularitäten mit reellem Punkt, $\sum v$ die Summe der Klassen aller Singularitäten mit reeller Tangente bedeutet. K.]

XXXVIII. Über eine neue Art der Riemannschen Flächen¹⁾.

(Erste Mitteilung.)

[Math. Annalen, Bd. 7 (1874).]

Bei der Untersuchung der algebraischen Funktionen y einer Veränderlichen x pflegt man sich zweier verschiedener anschauungsmäßiger Hilfsmittel zu bedienen. Man repräsentiert nämlich entweder y und x gleichmäßig als Koordinaten eines Punktes der Ebene, wo dann die reellen Werte derselben allein in Evidenz treten und das Bild der algebraischen Funktion die algebraische Kurve wird — oder man breitet die komplexen Werte der einen Variablen x über eine Ebene aus und bezeichnet das Funktionsverhältnis zwischen y und x durch die über der Ebene konstruierte Riemannsche Fläche. Es muß in vielen Beziehungen wünschenswert sein, zwischen den beiden Anschauungsbildern einen Übergang zu besitzen. Ich darf mit Bezug hierauf nur das Eine hervorheben, daß nämlich ein solcher Übergang vom rein geometrischen Standpunkte aus geradezu gefordert werden muß, wenn die Sätze, welche sich auf die Zahl und Periodizität der längs einer algebraischen Kurve erstreckten Integrale beziehen, zu einem unmittelbaren Verständnisse gebracht werden sollen.

Ein solcher Übergang ist nun in einfachster Weise herzustellen. Er schließt sich an die Auffassung einer Kurve als des Umhüllungsgebildes ihrer Tangenten²⁾ an; er setzt ferner in einem gewissen Maße diejenigen Erörterungen über den Zusammenhang der Flächen voraus, welche in [der oben abgedruckten Abhandlung XXXVI] entwickelt wurden.

Man gehe von der Bemerkung aus, daß man jeder Tangente einer algebraischen Kurve, mag die Tangente reell oder imaginär sein, im allgemeinen *einen* reellen Punkt zuordnen kann. Ist nämlich die Tangente

¹⁾ [Vgl. eine unter dem gleichen Titel erschienene vorläufige Mitteilung in den Erlanger Sitzungsberichten vom 2. Februar 1874.]

²⁾ Wollte man die dualistisch entgegenstehenden Überlegungen anstellen, so würde die Anschaulichkeit des Resultats, auf die ich eben Gewicht legen möchte, verloren gehen.

reell, so wähle man als entsprechenden Punkt ihren Berührungspunkt; ist die Tangente imaginär, so wähle man den einen reellen Punkt, den sie überhaupt besitzt. Diese beiden Festsetzungen, deren eigentlicher Sinn übrigens aus den weiter unten angeführten Beispielen völlig deutlich werden soll, stimmen insofern miteinander, als die auf reelle Tangenten bezügliche aus der anderen durch Grenzübergang hervorgeht. Denn der reelle Punkt einer imaginären Tangente ist ihr Durchschnittspunkt mit der konjugierten Tangente, und, wenn diese beiden Linien in eine reelle zusammenfallen, so wird aus ihrem Durchschnittspunkte eben der Berührungspunkt.

Diese Festsetzungen werden bei etwaigen mehrfach berührenden reellen Tangenten ungenügend. Wir wollen nur den Fall reeller Doppel- oder Wendetangenten ins Auge fassen. Hat die Doppeltangente reelle Berührungspunkte, so werden wir ihr eben diese beiden Punkte zuordnen; ist sie aber isoliert, so mag ihr die Gesamtheit der ihr angehörigen reellen Punkte entsprechend gesetzt sein. Ebenso sollen einer Wendetangente alle auf ihr gelegenen reellen Punkte zugeordnet werden. Es wird noch aus den weiteren Ausführungen hervorgehen, daß diese Festsetzungen mit den vorausgeschickten nicht nur verträglich sind, sondern sich aus ihnen in naturgemäßer Weise ergeben.

Die zweifach unendlich vielen reellen Punkte, welche man, diesen Festsetzungen zufolge, der Gesamtheit der reellen und imaginären Tangenten der Kurve zuordnet, werden eine geschlossene Fläche bilden, welche die verschiedenen Teile der Ebene mit einer Anzahl von Blättern überdeckt, die jedesmal gleich ist der Anzahl der imaginären Tangenten, welche man von einem Punkte des betreffenden Teiles der Ebene an die Kurve legen kann (und die also immer gerade ist). Die Fläche ist dann ein vollständiges Bild der durch die Kurve definierten algebraischen Funktion. Sie ist auf die gewöhnliche Riemannsche Fläche, wie man sie für diese Funktion konstruieren könnte, im allgemeinen ein-eindeutig bezogen. Eine Ausnahme tritt nur für diejenigen Wertsysteme ein, welche den reellen, isolierten Doppeltangenten und den reellen Wendetangenten der Kurve entsprechen. Denn während dieselben auf der gewöhnlichen Riemannschen Fläche durch je zwei Punkte vorgestellt werden (welche im Falle der Wendetangenten konsekutiv sind), entsprechen ihnen bei unserer Fläche ganze gerade Linien, die der Fläche, wie man findet, [nach ihrer ganzen Erstreckung] angehören; die beiden Flächen sind also in der Art aufeinander bezogen, daß auf der einen eine Reihe von Fundamentalpunkten auftritt. Um also von dem Zusammenhange unserer Fläche auf den Zusammenhang der entsprechenden gewöhnlichen Riemannschen Fläche schließen zu können, wird man den Satz benötigen, der [in der Abhandlung XXXVI auf S. 70—73] aufgestellt und bewiesen wurde.

Doch betrachten wir eine Reihe von Beispielen. Sei zunächst ein Kegelschnitt gegeben, der als Ellipse vorausgesetzt sein mag. Die reellen Punkte, welche den imaginären Tangenten der Ellipse entsprechen, erfüllen das Innere der Ellipse doppelt, unsere Fläche hat also in diesem Falle die Gestalt eines elliptischen Doppelblattes, oder, wenn man will, eines flachen Ellipsoids. Ein Ellipsoid ist aber eine nullfach zusammenhängende Fläche³⁾; deshalb gibt es beim Kegelschnitte kein längs der Kurve erstrecktes überall endliches Integral.

Nehmen wir ferner eine Kurve dritter Klasse. Auch sie kann, was für die Anschauung bequem ist, [im Beispiel] als völlig im Endlichen gelegen vorausgesetzt werden, und besteht dann entweder aus zwei geschlossenen Zweigen oder nur aus einem, wie dies in den beistehenden, übrigens nur schematischen Zeichnungen dargestellt ist.



Fig. 1.

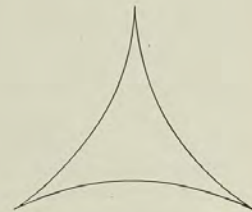


Fig. 2.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Sowohl von jedem Punkte außerhalb des Ovals als von jedem Punkte innerhalb des mit drei Spitzen versehenen Kurvenzugs kann man drei reelle Tangenten an die Kurve legen; die reellen Punkte, welche imaginären Tangenten der Kurve entsprechen, erfüllen daher den Raum zwischen den beiden Kurvenzügen doppelt, unsere Fläche ist eine Art Ringfläche. Sie ist also in der Tat zweifach zusammenhängend, wie es für eine Kurve mit dem Geschlechte 1 sein muß, oder umgekehrt, es liegt darin der Beweis, daß die Kurve dem Geschlechte 1 angehört. Es ist leicht, die Werte, welche das eine auf die Kurve bezügliche überall endliche Integral für die einzelnen Punkte der Fläche annimmt, ihrer allgemeinen Verteilung nach anzugeben. Zu dem Zwecke sei es gestattet, von Meridianen der Ringfläche und von Breitenkurven derselben zu sprechen; die beiden Züge, aus denen die Kurve dritter

³⁾ Wegen dieser Art der Zählung vgl. [Abh. XXXVI, S. 64].



Klasse besteht, werden selbst zu den Breitenkurven gehören. Die beiden Perioden, welche das auf die Kurve bezügliche überall endliche Integral besitzt, entstehen dadurch, daß man dem zwischen bestimmten Grenzen geführten Integrationswege beliebig Meridiankurven und Breitenkurven zufügen kann. (Diese und die folgenden Behauptungen, welche sich aus den bekannten Sätzen über die Integrale auf Riemannschen Flächen ohne weiteres ergeben, sollen hier ohne Beweis angeführt sein.) Die erstere dieser Perioden sei imaginär genommen, gleich $i\omega'$, die zweite reell, gleich ω . Als untere Grenze werde dasjenige Wertsystem gewählt, welches durch die in der Zeichnung vertikal gestellte reelle Rückkehrtangente bezeichnet ist, und dem auf unserer Fläche der obere von den drei reellen Rückkehrpunkten entspricht. Das bis zu irgendeinem anderen Punkte hingeleitete Integral werde, unter Trennung des reellen und imaginären Teiles, $u + iv$ genannt, wo also u nur bis auf Multipla von ω , v bis auf Multipla von ω' bestimmt ist. Dann hat man als Bedingung dafür, daß drei Tangenten der Kurve dritter Klasse, welche den Integralwerten

$$u_1 + iv_1, \quad u_2 + iv_2, \quad u_3 + iv_3$$

entsprechen, sich in einem Punkte schneiden, die Relationen⁴⁾:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 0 \pmod{\omega} \\ v_1 + v_2 + v_3 &= 0 \pmod{\omega'} \end{aligned}$$

Infolgedessen ergibt sich eine Verteilung der Werte von $u + iv$ über unsere Fläche, wie sie auf der beigetzten Zeichnung veranschaulicht ist.

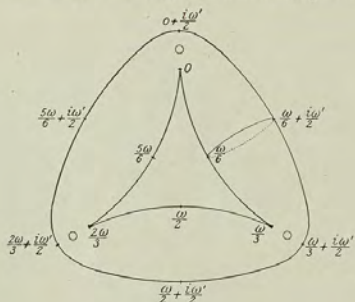


Fig. 3.

⁴⁾ Vgl. Clebsch in Crelles Journal, Bd. 63 (1864), S. 105. Es sind dort nur nicht, wie im Texte, der reelle und imaginäre Teil getrennt, überdies ist die untere Grenze des Integrals beliebig gelassen.

Längs des Zuges mit drei Spitzen sind die reellen Zahlen von 0 bis ω in der Weise verteilt, daß die drei Spitzen die Argumente $0, \frac{1}{3}\omega, \frac{2}{3}\omega$ bekommen. Die Punkte einer Meridiankurve, welche durch eine Tangente dieses Kurvenzuges auf der Fläche bezeichnet ist, besitzen alle dasselbe u , längs der Kurve ändert sich nur das v von 0 anfangend bis ω' . Für die Punkte des umschließenden Ovals hat v gleichmäßig den Wert $\frac{\omega'}{2}$. An den drei Stellen etwa, die durch kleine Kreise bezeichnet sind, befinden sich diejenigen Punkte, welche die sechs paarweise konjugiert imaginären Rückkehrtangenten der Kurve repräsentieren; ihre Argumente sind bezüglich $0 \pm \frac{i\omega'}{3}, \frac{\omega}{3} \pm \frac{i\omega'}{3}, \frac{2\omega}{3} \pm \frac{i\omega'}{3}$.

Für die Kurven dritter Klasse ohne Oval gestalten sich diese Verhältnisse im allgemeinen ähnlich. Der ganze Raum außerhalb des mit drei Spitzen versehenen Kurvenzuges wird bei ihnen doppelt von den Punkten überdeckt, die imaginären Tangenten entsprechen. Die zugehörige Fläche erstreckt sich also ähnlich ins Unendliche, wie ein einschaliges Hyperboloid⁵⁾. Der Zusammenhang der Fläche ist nach wie vor gleich 2 [vgl. Abhandlung XXXVI] die Kurve hat das Geschlecht 1.

Es ist nun besonders interessant, zu sehen, wie sich die zugehörige Fläche modifiziert, wie im Zusammenhange damit das Geschlecht der algebraischen Funktion auf Null herabsinkt, wenn man der Kurve eine Doppeltangente oder Wendetangente erteilt. Die Doppeltangente kann isoliert oder mit reellen Berührungspunkten vorausgesetzt werden. Beidemal bildet die zugehörige Kurve einen Übergang zwischen den beiden vorstehend unterschiedenen Arten ohne Doppeltangente. Die Kurve mit Wendetangente endlich stellt sich wieder als Übergangsform zwischen die beiden Kurven mit Doppeltangente.

Um nämlich zunächst eine Kurve mit isolierter Doppeltangente zu erhalten, kann man das Oval der ersten Figur nach allen Richtungen gleichmäßig unbegrenzt wachsen lassen. Dann geht es schließlich, indem es zur isolierten Doppeltangente wird, in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade über; setzt man den Änderungsprozeß noch weiter fort, so wird es imaginär und man hat die allgemeine Kurve ohne Oval. Doch besser lassen sich diese Verhältnisse übersehen, wenn man die betreffenden Figuren so durch eine Kollineation umgestaltet, daß die fragliche Doppeltangente ins Endliche fällt. Die Kurven haben dann die in den Fig. 4 bis 6 dargestellte Gestalt; die von der zugehörigen Fläche überdeckten Partien der Ebene sind schraffiert.

⁵⁾ [Wie in Abh. XXXVI, S. 65 bereits gesagt ist, gelangt man beim Durchgang durchs Unendliche von dem oberen Blatt in das entsprechende untere Blatt der Fläche. K.]



Im Falle der Fig. 5 [enthält die Fläche die in Betracht kommende Doppeltangente nach ihrer ganzen Erstreckung], sie ist nach wie vor zweifach zusammenhängend. Aber die zugehörige gewöhnliche Riemannsche Fläche ist nur noch nullfach zusammenhängend. Denn sie trägt zwei Fundamentalepunkte, denen diese Doppelgerade entspricht, und also ist ihr Zu-

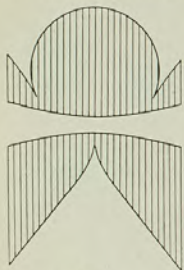


Fig. 4.

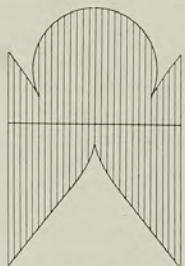


Fig. 5.

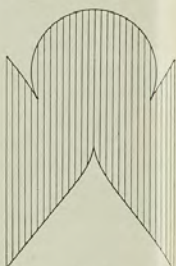


Fig. 6.

sammenhang, nach den Auseinandersetzungen [der Abhandlung XXXVI], um Zwei kleiner als der Zusammenhang der von uns konstruierten Fläche.

Doch nehmen wir die Doppeltangente nicht isoliert. Dann kann sich der Übergang in der folgenden Weise gestalten, die aus den Fig. 7 bis 9 wohl verständlich ist:

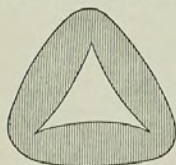


Fig. 7.

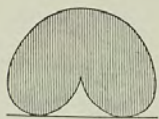


Fig. 8.

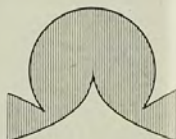


Fig. 9.

Dabei ist es nun völlig deutlich, daß die in Fig. 7 und 9 zweifach zusammenhängende Fläche im Falle der Fig. 8 nullfach zusammenhängend geworden ist.

Den Fall der Kurve dritter Klasse mit Wendetangente endlich mag man in der Art als Zwischenfall zwischen den zweierlei Kurven mit Doppeltangente betrachten, wie die Fig. 10 bis 12 veranschaulichen. [Offenbar bildet die Wendetangente, gleich dem reellen Zug der Kurve, eine Randkurve unserer Fläche (längs deren das obere und untere Blatt der Fläche

zusammenhängen)]. Denn sie entsteht in Fig. 11 aus den beiden sich mit der isolierten Doppeltangente vereinigenden Stücken der Kurve von Fig. 10. Es würde in gewissem Sinne konsequenter sein, die Doppeltangente in Fig. 12 als isolierte Kurve unserer Fläche beizubehalten, statt sie durch ihre beiden Berührungspunkte zu ersetzen; man müßte dann

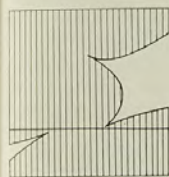


Fig. 10.

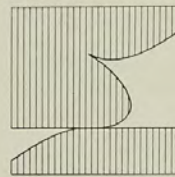


Fig. 11.

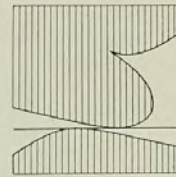


Fig. 12.

nur die Festsetzung hinzufügen, daß eine solche isolierte Kurve für den Zusammenhang der Riemannschen Fläche nicht in Betracht kommt, wodurch das Resultat dasselbe bleibt.

Von Kurven vierter Klasse will ich nur einige Beispiele in Fig. 13 bis 16 angeben, welche sich der Anschauung besonders leicht darbieten. Eine solche Kurve werde zunächst als in zwei Kegelschnitte zerfallen vorausgesetzt; man nehme für diese Kegelschnitte zwei Ellipsen mit vier gemeinsamen Punkten. Die auf sie bezügliche Fläche besteht dann aus zwei Ellipsoiden, welche sich zum Teil überlagern, aber keinen Punkt miteinander gemein haben, womit eben dem Umstande, daß man es mit einer reduzibeln Kurve vierter Klasse zu tun hat, Ausdruck gegeben wird und geradezu diese Reduzibilität bewiesen ist. Man konstruiere nun die vier gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen und wende auf dieselben (auf eine oder mehrere) den soeben bei den Kurven dritter Klasse bereits gebrauchten Auflösungsprozeß an. Ich will hier nur diejenigen Zeichnungen hinsetzen, welche man er-

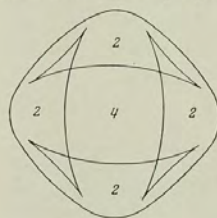


Fig. 13.

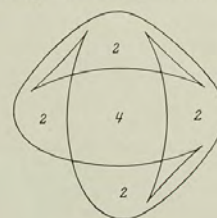


Fig. 14.

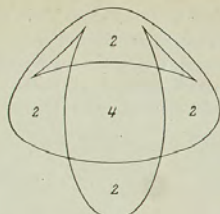


Fig. 15.

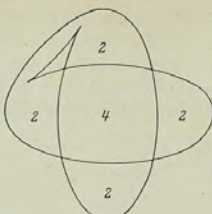


Fig. 16.

hält, wenn man die im Endlichen gelegenen Teile der bez. gemeinsamen Tangenten in reelle Kurvenzweige spaltet. Die beigezeichneten Zahlen beziehen sich auf die Zahl der Blätter, mit der die Fläche die verschiedenen Teile der Ebene überdeckt; die nicht bezeichneten Teile der Ebene sind nullfach überdeckt, insbesondere also die kleinen, mit zwei Spitzen versehenen Dreiecke im Innern der bez. Zeichnungen.

Die so hergestellten Flächen sind in der Tat bez. 0-, 2-, 4-, 6-fach zusammenhängend, wie sie es sein müssen, da sie sich auf Kurven vierter Klasse mit 3, 2, 1, 0 Doppeltangenten beziehen, die also $p = 0, 1, 2, 3$ ergeben.

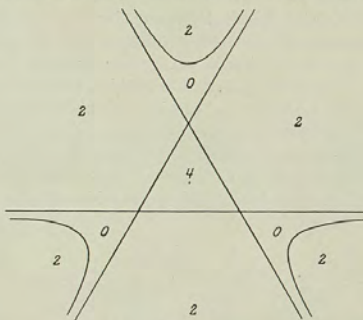


Fig. 17.

Die bisher betrachteten Flächen zeichnen sich durch ihre große Übersichtlichkeit, durch das Fehlen jeder Verzweigung aus. Eine solche wird aber im allgemeinen vorhanden sein, und ich darf mit Bezug hierauf als ein Beispiel die Fig. 17 anführen. Es sei eine Kurve dritter Ordnung

mit isoliertem Doppelpunkte gegeben; als Klassenkurve aufgefaßt ist sie vom vierten Grade und dadurch singular, daß sie drei reelle Wendetangenten besitzt. Eine solche Kurve werde in der Art gezeichnet, daß ihre Wendetangenten zugleich ihre Asymptoten sind, wo dann der isolierte Punkt in dem Innern des von den drei Asymptoten gebildeten Dreiecks liegen wird.

Es sind der Figur bereits die Zahlen zugesetzt, welche angeben, wie viele imaginäre Tangenten von den Punkten der verschiedenen Teile der Ebene an die Kurve gehen. Das Innere des Asymptotendreiecks wird, wie man sieht, viermal von der Fläche überdeckt, während es die angrenzenden Partien der Ebene nur zweimal oder nullmal sind. Dies wird möglich, indem man der Fläche eine von dem isolierten Doppelpunkte ausgehende Verzweigung erteilt, wie sie etwa, in symmetrischer Weise, durch die beigezeichnete Zeichnung veranschaulicht ist.

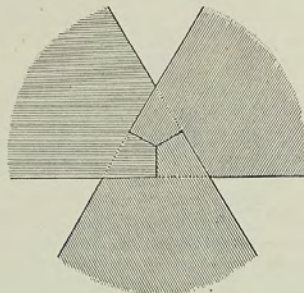


Fig. 18.

Erlangen, im Februar 1874.

[Ich möchte noch darauf aufmerksam machen, daß die in Fig. 9 dargestellte Kurve von jeder reellen Geraden in reellen Punkten geschnitten wird, daß man insbesondere die Gerade so wählen kann, daß sechs reelle Schnittpunkte entstehen. Projiziert man eine Schnittgerade der letzteren Art ins Unendliche, so bekommt man eine Figur der folgenden Art (bei welcher der Deutlichkeit halber die sechs Asymptoten mit eingezeichnet sind). Ich erinnere mich deutlich, daß mir einst Klein, Gesammelte math. Abhandlungen, II.

Plücker diesen hübschen Kurventyp zeigte, den er mir damals als gänzlich unbekannt bezeichnete; eben darum habe ich ihn in Fig. 19 wiedergegeben. Hinsichtlich der zugehörigen neuen Riemannschen Fläche ist nichts Besonderes zu vermerken; ihr Verlauf ist unmittelbar ersichtlich.

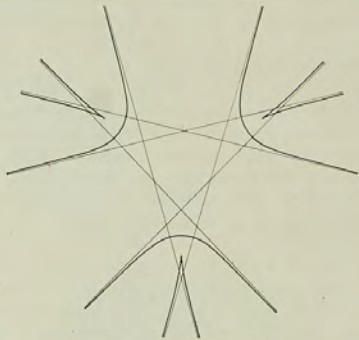


Fig. 19.

Im übrigen verweise ich gern darauf, daß Axel Harnack in seiner Erlanger Dissertation (Math. Annalen, Bd. 9 (1875)) den Verlauf der Breitenkurven auf den zu beliebigen Kurven dritter Klasse gehörigen Flächen analytisch studiert hat. Sie erweisen sich als reelle Züge bestimmter zur Kurve dritter Klasse kovarianter algebraischer Kurven. Leider sind Harnacks bez. Rechnungen komplizierter, als nötig ist, weil er sich nicht der (damals noch wenig verbreiteten) Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen bediente, die von vornherein an das Studium der ebenen Kurven dritten Grades angepaßt ist, sondern der traditionellen Jacobischen Theorie. — Man vergleiche ferner, wie Harnack in Schlömilchs Zeitschrift, Bd. 22 (1877), die Lage auch der imaginären Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung im Reellen im Anschluß an meine in Bd. 1 dieser Ausgabe abgedruckte Abh. XXIII „Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie“ erläutert. K.]

XXXIX. Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades.

(Erster Aufsatz.)

[Math. Annalen, Bd. 10 (1876).]

Die nachfolgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit der Aufgabe, bei den allgemeinen Kurven vierten Grades den Verlauf der Abelschen Integrale an den Kurven selbst zur unmittelbaren Anschauung zu bringen. Inzwischen dürfen sie nur als ein erster Versuch in dieser Richtung betrachtet werden; denn sie sind weder methodisch durchgebildet noch umfassend genug, um als abschließende Behandlung des Gegenstandes zu erscheinen. Immerhin hoffe ich, einen brauchbaren Anfang zu machen, ähnlich, wie ich dies früher [Math. Annalen, Bd. 7 (1874) — vgl. die vorstehende Abh. XXXVIII] hinsichtlich des elliptischen Integrals bei den Kurven dritten Grades versuchte — ein Versuch, auf welchem dann Axel Harnack weiter gearbeitet hat [Math. Annalen, Bd. 9 (1875), S. 1 ff. und S. 218 ff.]. Hier wie dort bildet das hauptsächlichliche Hilfsmittel die *neue Art Riemannscher Flächen*, welche ich damals einführte (obgleich man dieselben Dinge minder bequem auch bei der gewöhnlichen Riemannschen Fläche würde überlegen können). Ich verwende sodann, bei dieser ersten Darstellung, in ausgiebiger Weise das Prinzip, *komplizierte Verhältnisse aus einfachen durch Grenzübergang entstehen zu lassen und so der Diskussion zugänglich zu machen*. Indem ich von einem Ellipsenpaare als spezieller Kurve vierten Grades ausgehe, erhält der Stoff eine Gruppierung und Begrenzung, die man vielfach als zufällig erkennen wird; auch wird man finden, daß die Darstellung an manchen Orten nur skizzenhaft ist. Was mir wertvoll scheint, ist die *Tendenz* der Betrachtungen und die *Art* der Resultate; ich gebe der Hoffnung Raum, später dieselben Dinge systematischer und vollständiger, vielleicht unter Ausdehnung auf Kurven *n*-ten Grades, noch einmal vortragen zu können.

§ 1.

Graphische Repräsentation algebraischer Integrale.

Den Verlauf einer Funktion von $x + iy$

$$f(x + iy) = P + iQ$$



kann man in der Art passend zur Anschauung bringen, daß man in der $x + iy$ -Ebene die Kurvensysteme

$$P = C, \quad Q = C'$$

zeichnet. Ist f insbesondere das Integral einer algebraischen Funktion, und substituiert man für die $x + iy$ -Ebene die zugehörige (gewöhnliche) Riemannsche Fläche, so wird dieselbe, allgemein zu reden, von jedem der beiden Kurvensysteme einfach überdeckt sein, und in jedem Punkte wird sich die hindurchgehende Kurve P mit der hindurchgehenden Kurve Q rechtwinklig kreuzen. Eine Ausnahme machen nur die Verschwindungspunkte des Differentials und die Unendlichkeitspunkte. Durch einen Verschwindungspunkt (den wir in der Folge immer als einfach voraussetzen wollen) gehen zwei zueinander rechtwinklige Kurven P und ebenso zwei zueinander rechtwinklige Kurven Q ; wechselseitig schließen diese Kurven Winkel von 45° ein. — Von Unendlichkeitspunkten mögen auch nur die einfachsten in Betracht gezogen werden, in denen das Integral unendlich wird wie $c \cdot \log z$ für $z = 0$. Noch fügen wir die Beschränkung hinzu, daß c eine reelle Konstante sein soll. Dann wird der betr. Punkt von den Kurven P in immer enger werdenden Kreisen umgeben, während in allen Richtungen Kurven Q durch ihn hindurchgehen.

Neben diesen Sätzen, die als bekannt gelten können, und einigen anderen, die sich weiterhin an den einzelnen Figuren von selbst ergeben, werde ich noch den folgenden gebrauchen:

Ist eine Kurve P oder Q geschlossen, so sind es die nächstfolgenden auch.

Um ihn zu beweisen, scheint es am einfachsten, das Bild einer strömenden Flüssigkeit zu verwenden, und deshalb stelle ich ihn hier voran, da diese andersartige Vorstellung später den allgemeinen Gedankengang zu sehr unterbrechen würde. Es sei die Riemannsche Fläche mit einer überall gleich hohen Schicht einer homogenen Flüssigkeit überdeckt und diese bewege sich in der Art, daß P das Geschwindigkeitspotential ist. Dann sind bekanntlich die Kurven $Q = C'$ die Strömungskurven und die Strömung ist, geometrisch zu reden, stationär. In jedem Punkte wird ebensoviel Flüssigkeit abgegeben als aufgenommen, nur die Unendlichkeitspunkte repräsentieren Quellen von einer gewissen, positiven oder negativen, Ergiebigkeit. (Vertauscht man die Buchstaben P und Q , so repräsentieren die Unendlichkeitspunkte, für die dann gedachte Flüssigkeitsbewegung, nicht mehr Quellen, sondern Wirbelpunkte.) Auf Grund dieser Vorstellung ergibt sich unser Satz sofort. Man betrachte die Flüssigkeit, welche in dem Kanale strömt, der von zwei Kurven $Q = C'$ und $Q = C' + dC'$ eingeschlossen wird. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit und also die Breite

des Kanals ist eine eindeutige Funktion der Stelle in der Riemannschen Fläche; läuft also das eine Ufer des Kanals in sich zurück, so das andere auch, w. z. b. w. Bei diesem Beweise ist vorausgesetzt, daß der Kanal keinen Unendlichkeitspunkt und keinen Verschwindungspunkt des Differentials einschließt; in den Fällen wäre auch der Satz nicht ohne weiteres richtig.

Statt der gewöhnlichen Riemannschen Fläche wollen wir jetzt eine von der „neuen Art“ voraussetzen. Für sie werden die über die Kurvensysteme P, Q aufgestellten Sätze im wesentlichen auch gelten, d. h. soweit sie bloße Lagenverhältnisse betreffen. Unsere Flächen sind an sich Aggregate ebener Blätter und müssen also an den Randkurven, in welchen zwei verschiedene Blätter zusammenhängen, mit unendlich großer Krümmung gedacht werden. Inzwischen ist es vorteilhaft, sich die betr. Flächen als stetig gekrümmte, im Raume gelegene Flächen vorzustellen, von welchen die betr. ebene Figur nur eine orthogonale Projektion gibt, bei der sich an den Randkurven Verkürzungen einstellen. Diese räumlichen Flächen werden von den Kurven P, Q in der Art je einfach überdeckt, daß sich die beiden Kurvenscharen überall, freilich nicht rechtwinklig, aber unter endlichem Winkel durchschneiden (vgl. die Bemerkungen von mir bei Harnack, a. a. O., S. 31 Fußnote). In den Verschwindungspunkten des Differentials werden sich zwei Kurven P und zwei Kurven Q kreuzen; die Kurven P werden die Kurven Q voneinander trennen. In den Unendlichkeitspunkten werden die Kurven Q nach wie vor von allen Seiten zusammenlaufen; und die Kurven P werden diese Punkte mit immer enger werdenden Ovalen umgeben. Daß auf geschlossene Kurven P, Q zunächst weitere geschlossene folgen, bleibt richtig, usf.¹⁾

¹⁾ [Entsprechend kann man natürlich alle Entwicklungen der Funktionentheorie auf unsere neuen Flächen übertragen. Ich will zur Klarstellung des Sachverhaltes hier doch hinzufügen, was aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen wird. Sei $f_n(u_1, u_2, u_3) = 0$ die Gleichung der vorgegebenen Kurve n -ter Klasse in Linienkoordinaten. Um die Differentialgleichungen der von einem Punkte x an die Kurve laufenden Tangenten zu haben, wird man hier die u durch die entsprechenden

Unterdeterminanten der Matrix $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix}$ ersetzen. Man möge ferner, um überzählige Koordinaten zu vermeiden und übrigens den äußeren Anschluß an die in der Funktionentheorie übliche Bezeichnung zu haben, $x_3 = 1, dx_3 = 0$ nehmen und für x_1, x_2 bez. p, q schreiben. Wir erhalten so eine Gleichung $f(p, q, dp, dq) = 0$, die in den dp, dq homogen vom n -ten Grade ist. Die linke Seite dieser Gleichung wird sich dann, nach dem Fundamentalsatz der Algebra, für jedes Wertsystem p, q in homogene, reelle Faktoren ersten und zweiten Grades in dp und dq zerlegen lassen. Zu jedem Paare zusammengeordneter Blätter unserer Riemannschen Fläche wird ein solcher quadratischer Faktor gehören, der $E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2$ geschrieben werden mag (wobei die E, F, G nur bis auf einen beliebig anzunehmenden gemeinsamen Faktor bestimmt sein werden); entlang der beiden Blätter ist er im Reellen unzerlegbar, verliert aber seinen definiten Charakter, wenn wir an die Randkurve, welche die beiden Blätter verbindet mag, hinangehen oder gar sie überschreiten.



§ 2.

Das Logarithmus-Integral beim Kegelschnitt.

Es seien u_1, u_2, u_3 die homogenen Koordinaten der geraden Linie, $f(u) = 0$ sei die Gleichung eines als Klassenkurve aufgefaßten Kegelschnitts. Dann sind die einfachsten Integrale, welche längs desselben erstreckt werden können, in der Form enthalten:

$$\int \frac{\begin{vmatrix} c_1 u_1 d u_1 \\ c_2 u_2 d u_2 \\ c_3 u_3 d u_3 \end{vmatrix}}{(a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3) \left(c_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + c_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} \right)} = \int \frac{|c u d u|}{u_a \cdot \sum c_i f_i}.$$

Wird der Punkt $u_a = 0$ als nicht dem Kegelschnitt angehörig vorausgesetzt, so besitzt das Integral zwei einfache Unendlichkeitsstellen, entsprechend den beiden Tangenten, die man von dem Punkte an den Kegelschnitt legen kann; dagegen gibt es keine Verschwindungspunkte des Differentials.

Es soll nun $f = 0$ als Ellipse gezeichnet sein, $u_a = 0$ sei ein reeller Punkt außerhalb derselben. Dann mag eine solche Koordinatenbestimmung U_1, U_2, U_3 eingeführt werden, daß

$$\begin{aligned} U_1 = 0 & \} \text{ die Berührungspunkte der beiden von } u_a = 0 \text{ ausgehenden} \\ U_2 = 0 & \} \text{ Tangenten,} \\ U_3 = 0 & \text{ den Punkt } u_a = 0 \text{ selbst vorstellt.} \end{aligned}$$

So wird bei geeigneter Bestimmung der Faktoren der Kegelschnitt die Gleichung erhalten:

$$F = U_1 U_2 - U_3^2 = 0,$$

während das Integral die Form:

$$\int \frac{|C U d U|}{U_3 \cdot \sum C_i F_i}$$

angenommen hat. Setzt man $C_1 = 0, C_2 = 0$, so bekommt man:

$$\int \frac{U_1 d U_2 - U_2 d U_1}{-2 U_3^2} = \int \frac{U_1 d U_2 - U_2 d U_1}{-2 U_1 U_2} = \frac{1}{2} \log \frac{U_1}{U_2} + K,$$

wo die Integrationskonstante K weiterhin gleich Null gesetzt werden soll.

Wie immer sich dies im einzelnen gestalten mag, als Funktion $u + iv$ auf unserer Fläche wird zu betrachten sein, was innerhalb der einzelnen Blätter den zugehörigen Differentialgleichungen genügt:

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{E \frac{\partial v}{\partial q} - F \frac{\partial v}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{F \frac{\partial v}{\partial q} - G \frac{\partial v}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Wegen der genaueren Ausführungen verweise ich hier kurzweg auf den Bd. 3 dieser Gesamtausgabe. K.]

Die Werte, welche das auf diese Weise gewonnene Integral

$$\frac{1}{2} \log \frac{U_1}{U_2} = P + iQ$$

bei seiner Ausbreitung über die zur Ellipse gehörige, das Innere derselben doppelt überdeckende Riemannsche Fläche annimmt, insbesondere die Kurvensysteme $P = C, Q = C'$, sollen jetzt untersucht werden.

Zu dem Zwecke setze ich die Koordinaten U_2, U_3 einer komplexen Tangente des Kegelschnittes gleich:

$$\begin{aligned} U_2 &= 1, \\ U_3 &= \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi); \end{aligned}$$

dann wird, vermöge der Kegelschnittgleichung:

$$U_1 = \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Der reelle Punkt, welcher dieser komplexen Tangente angehört und der sie, als Punkt der Riemannschen Fläche gedacht, repräsentiert, wird den beiden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos 2\varphi \cdot x_1 + x_2 + \rho \cdot \cos \varphi \cdot x_3 &= 0, \\ \rho^2 \sin 2\varphi \cdot x_1 + \cdot + \rho \cdot \sin \varphi \cdot x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \rho^2 : -2\rho \cos \varphi$$

und

$$\rho = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}, \quad \cos \varphi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x_3}{\sqrt{x_1} \sqrt{x_2}}.$$

Andererseits aber ist unser Integral:

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{U_1}{U_2} \right) = P + iQ = \log \rho + i\varphi,$$

so daß also:

$$P = \log \rho, \quad Q = \varphi.$$

Die Kurven $P = C, Q = C'$ genügen daher auch Gleichungen der Form $\rho = C, \varphi = C'$ oder $\frac{x_2}{x_1} = C, \frac{x_3^2}{x_1 x_2} = C'$.

Die Kurven $P = C$ werden also vorgestellt durch Stücke von geraden Linien, die, verlängert gedacht, durch den Punkt U_3 hindurchgehen. Die Kurven $Q = C'$ bilden Bestandteile von Kegelschnitten, welche die gegebene Ellipse in den Punkten U_1, U_2 berühren.

Diese Verhältnisse sind auf der umstehenden Fig. 1 erläutert.

Man hat die geraden Linien $P = C$ aufzufassen als Kurven, die sowohl auf der Vorderseite als auf der Rückseite des elliptischen Doppelblattes verlaufen. Denkt man sich das letztere räumlich, als Ellipsoid,

so umgeben diese Kurven die beiden Unendlichkeitsstellen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ mit immer enger werdenden Ovalen. Ich nenne diese Kurven, sowie auch später ähnlich gelegene Kurven bei komplizierteren Flächen, *Meridiankurven*. — Die Kurven $Q = C'$ liegen entweder ganz auf der Vorderseite oder ganz auf der Rückseite der Fläche und ziehen sich von einer Unendlichkeitsstelle zur anderen hin. Zu ihnen gehören namentlich auch die beiden Segmente, in welche die gegebene Ellipse durch die beiden Unendlichkeitspunkte zerlegt wird, sowie die geradlinige Strecke, welche diese Punkte verbindet. Längs des einen Segmentes finden sich die reellen

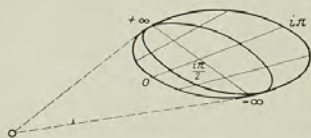


Fig. 1.

Werte des Integrals, oder allgemein diejenigen, deren imaginärer Bestandteil ein ganzzahliges Multiplum von $\pm 2i\pi$ beträgt. Die Punkte des anderen Segmentes erhalten Argumente mit dem imaginären Bestandteile $i\pi$, resp. unter k eine ganze Zahl verstanden $i\pi(\pm 2k + 1)$. Endlich, längs der geradlinigen Strecke sind solche Werte verteilt, welche modulo $2i\pi$, den imaginären Bestandteil $\frac{i\pi}{2}$ oder $\frac{3i\pi}{2}$ aufweisen. Die ersteren mögen der betr. Strecke beigelegt werden, sofern sie auf der Vorderseite der Riemannschen Fläche gedacht wird, dann finden die anderen ihre Repräsentation an den entsprechenden Stellen der Rückseite. Durchläuft man eine Meridiankurve, am Segmente der reellen Argumente beginnend, über die Vorderseite der Fläche hin und dann über die Rückseite zum Ausgangspunkte zurück, so wächst nach dieser Festsetzung das Integral um $+2i\pi$. Die Periode tritt also positiv zu, wenn man den negativen Unendlichkeitspunkt in einem Sinne umkreist, der für einen außenstehenden Beobachter mit dem Sinne des Zeigers einer Uhr übereinstimmt. Diese, übrigens willkürlich aufgestellte, Regel soll weiterhin immer festgehalten werden. — Noch mag hervorgehoben werden, daß die Kurven $Q = C'$, abgesehen von der eben besprochenen geradlinigen Strecke, die gegebene Ellipse in den Unendlichkeitsstellen alle berühren. Dies hat in der Tat zur Folge, wie es nach § 1 sein soll, daß, bei der räumlich gedachten Fläche, die Kurven $Q = C'$ durch die Unendlichkeitspunkte von allen Seiten hindurchlaufen.

Die hiermit vorgetragenen, auf den einzelnen Kegelschnitt bezüglichen Entwicklungen, die wir als Einleitung zum folgenden hier vorangestellt haben, sind, von allgemeinerem Gesichtspunkte aus, bereits von Herrn Harnack [Math. Annalen, Bd. 9 (1875), S. 407] gegeben worden. Sie er-

scheinen bei ihm als ein besonderer Fall umfassenderer Sätze, die sich auf das überall endliche elliptische Integral bei Kurven dritten Grades beziehen. Die Art und Weise, vermöge deren er von der allgemeinen Kurve dritter Klasse hinabsteigt zu der besonderen Kurve, die aus einem Kegelschnitte und einem Punkte besteht, ist [die Umkehr] der weiterhin von uns eingehaltenen Methode, von einem Kegelschnittpaare zur allgemeinen Kurve vierter Klasse aufzusteigen. Es würde zu weit führen, diese Analogie weiterhin fortwährend hervortreten zu lassen; ich beschränke mich also auf das hier gegebene Zitat.

§ 3.

Integrale beim Kegelschnittpaare.

Es mögen jetzt zwei Ellipsen gegeben sein, die kongruent, konzentrisch und unter 90 Grad gegeneinander gekreuzt sind. Ihre Gleichungen seien, in rechtwinkligen Linienkoordinaten:

$$\begin{aligned} \psi &= 0, & \chi &= 0, \\ \psi &= a^2 u^2 + b^2 v^2 - w^2, \\ \chi &= b^2 u^2 + a^2 v^2 - w^2. \end{aligned}$$

So soll die Vereinigung beider:

$$\varphi = 0 \quad (\varphi = \psi \cdot \chi)$$

als Kurve vierter Klasse betrachtet werden, und bei ihr mögen wir einige derjenigen Integrale studieren, die bei der allgemeinen Kurve vierter Klasse (die keine Doppeltangente hat) als Integrale erster Gattung bezeichnet werden. Dieselben haben die Gestalt:

$$\int \frac{c u d u \cdot u_a}{\sum \alpha_i \varphi_i}$$

(statt u_1, u_2, u_3 ist natürlich bez. u, v, w zu schreiben). Sie enthalten drei wesentliche Konstante, die Koeffizienten α des Zählers; der Punkt $u_a = 0$ soll der „Nullpunkt des Integrals“ genannt werden.

Diese Integrale haben, ausgedehnt über die Riemannsche Fläche der Kurve $\varphi = \psi \chi = 0$ (die Fläche besteht aus den beiden elliptischen Doppelblättern ψ und χ), im allgemeinen acht (einfache) Unendlichkeitsstellen, die acht Berührungspunkte der vier, ψ und χ gemeinsamen Tangenten; ihr Differential ferner hat, im allgemeinen, vier einfache Verschwindungspunkte, diejenigen, welche die vier Tangenten repräsentieren, die man von dem „Nullpunkte“ a an das Ellipsenpaar legen kann. Man kann diese Verschwindungspunkte dazu benutzen, um vier der Unendlichkeitsstellen zu zerstören; man hat zu dem Zwecke den „Nullpunkt“ a nur in einen der sechs Kreuzungspunkte der vier gemeinsamen Tangenten von ψ und χ zu

legen. Das Integral hat dann nur noch vier und also auf dem einzelnen elliptischen Doppelblatte nur noch zwei Unendlichkeitspunkte, reduziert sich also, nach bekannten Sätzen, für jede der beiden Ellipsen auf einen Logarithmus, der bereits betrachteten Art.

Von den genannten sechs Kreuzungspunkten der vier gemeinsamen Tangenten wollen wir die vier im Endlichen gelegenen als „Nullpunkte von Integralen“ benutzen. Die Gleichungen dieser Punkte sind:

$$\pm \sqrt{a^2 + b^2} \cdot u + w = 0, \quad \pm \sqrt{a^2 + b^2} \cdot v + w = 0.$$

Dementsprechend sei gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \\ J_2 \end{aligned} \right\} = \int \frac{c u du}{\sum c_i \varphi_i} \cdot (\pm \sqrt{a^2 + b^2} \cdot u + w),$$

$$\left. \begin{aligned} J_3 \\ J_4 \end{aligned} \right\} = \int \frac{c u du}{\sum c_i \varphi_i} \cdot (\pm \sqrt{a^2 + b^2} \cdot v + w).$$

Zugleich werde folgende Bezeichnung eingeführt. Die beiden Ellipsen werden durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten je in vier Seg-

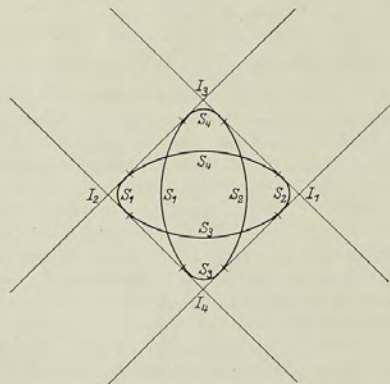


Fig. 2.

mente zerlegt. Wir bezeichnen dieselben als S_1, S_2, S_3, S_4 in der Art, daß das Segment S_k dem „Nullpunkte des Integrals J_k “ abgewandt liegt (Fig. 2).

Die gemeinsamen Tangenten selbst sollen $t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}$ genannt werden: t_{ik} , wenn sie in einem Punkte berühren, der das Segment S_i von dem Segmente S_k trennt.

Die schon genannte Reduktion der (an der einzelnen Ellipse hin-erstreckten) Integrale J auf Logarithmen mag jetzt an dem Beispiele des Integrals J_1 und der Ellipse ψ durchgeführt werden.

Vermöge $\psi = 0$ ist $\varphi_i = \chi \cdot \psi_i$; andererseits:

$$\chi = b^2 u^2 + a^2 v^2 - w^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} \cdot \{(a^2 + b^2) u^2 - w^2\}.$$

Daher nimmt das Integral J_1 , indem sich die lineare Funktion des Zählers gegen den Nenner forthebt, folgende Gestalt an:

$$J_1 = \frac{-b^2}{a^2 - b^2} \int \frac{\begin{vmatrix} c u du \\ c' v dv \\ c'' w dw \end{vmatrix}}{(\sqrt{a^2 + b^2} \cdot u - w) \left(c \frac{\partial \psi}{\partial u} + c' \frac{\partial \psi}{\partial v} + c'' \frac{\partial \psi}{\partial w} \right)}.$$

Um dasselbe weiter zu vereinfachen, führe man ein neues Koordinatensystem ein, dessen Ecken sind: die beiden Berührungspunkte der beiden nicht durch den „Nullpunkt von J_1 “ gehenden gemeinsamen Tangenten mit ψ und der Kreuzungspunkt dieser Tangenten, der „Nullpunkt von J_2 “. Dementsprechend setze man:

$$\begin{aligned} U &= a^2 u & + b^2 v &- \sqrt{a^2 + b^2} \cdot w, \\ V &= a^2 u & - b^2 v &- \sqrt{a^2 + b^2} \cdot w, \\ W &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot u & - & & & w \end{aligned}$$

(Substitutionsdeterminante = $-2b^4$). Durch dieselbe Substitution, vermöge deren hier U, V, W aus u, v, w entstehen, mögen aus den Konstanten c, c', c'' neue Konstanten C, C', C'' hervorgehen. So ist:

$$\begin{vmatrix} C & U & dU \\ C' & V & dV \\ C'' & W & dW \end{vmatrix} = -2b^4 \begin{vmatrix} c u du \\ c' v dv \\ c'' w dw \end{vmatrix}.$$

Andererseits findet man:

$$UV - a^2 W^2 = \psi = -b^2(a^2 u^2 + b^2 v^2 - w^2) = -b^2 \cdot \psi$$

und also:

$$C \frac{\partial \psi}{\partial U} + C' \frac{\partial \psi}{\partial V} + C'' \frac{\partial \psi}{\partial W} = -b^2 \left(c \frac{\partial \psi}{\partial u} + c' \frac{\partial \psi}{\partial v} + c'' \frac{\partial \psi}{\partial w} \right).$$

Daher wird:

$$J_1 = \frac{-1}{2(a^2 - b^2)} \int \frac{|CUdU|}{W \cdot \sum C_i \psi_i},$$

oder, indem wir $C = 0, C' = 0$ setzen:



$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{1}{4(a^2 - b^2)} \int \frac{U dV - V dU}{a^2 W^2} \\
 &= \frac{1}{4(a^2 - b^2)} \int \frac{U dV - V dU}{UV} \\
 &= \frac{-1}{4(a^2 - b^2)} \cdot \log \left(\frac{U}{V} \right) + K,
 \end{aligned}$$

welches die gewünschte Reduktion ist. Die Integrationskonstante K werden wir weiterhin, wie früher, gleich Null setzen.

Es wird für das Folgende vorteilhaft sein, Integrale zu haben, die mit dem im vorigen Paragraphen betrachteten auch im Zahlenfaktor übereinstimmen. Wir werden also als *Normalintegral* definieren:

$$I_1 = -2(a^2 - b^2) J_1 = -2(a^2 - b^2) \int \frac{|c u d u| (\sqrt{a^2 + b^2 \cdot u + w})}{\sum c_i \varphi_i}$$

Längs der Ellipse ψ erstreckt, ist dasselbe, wie wir der größeren Anschaulichkeit wegen noch einmal hersetzen:

$$= + \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{a^2 u + b^2 v - \sqrt{a^2 + b^2 \cdot w}}{a^2 u - b^2 v - \sqrt{a^2 + b^2 \cdot w}} \right\}$$

Längs der Ellipse $\chi = 0$ erstreckt, hat es den Wert, der sich durch Vertauschung der Buchstaben a, b und Zeichenwechsel ergibt:

$$= - \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{b^2 u + a^2 v - \sqrt{a^2 + b^2 \cdot w}}{b^2 u - a^2 v - \sqrt{a^2 + b^2 \cdot w}} \right\}$$

Entsprechend definieren wir drei weitere *Normalintegrale*:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= -2(a^2 - b^2) \int \frac{|c u d u| (-\sqrt{a^2 + b^2 \cdot u + w})}{\sum c_i \varphi_i}, \\
 \left. \begin{aligned} I_3 \\ I_4 \end{aligned} \right\} &= -2(b^2 - a^2) \int \frac{|c u d u| (\pm \sqrt{a^2 + b^2 \cdot v + w})}{\sum c_i \varphi_i}
 \end{aligned}$$

Dabei hat man:

$$dI_1 + dI_2 + dI_3 + dI_4 = 0,$$

und also, unter x eine beliebige obere Grenze verstanden:

$$I_1^x + I_2^x + I_3^x + I_4^x = \text{Const.}$$

[wo *Const.* von der Verabredung über die untere Grenze abhängt].

§ 4.

Verteilung der Parameterwerte.

Die Werte, welche das einzelne Integral I_k bei Hinerstreckung über die Riemannschen Flächen der Ellipsen ψ, χ annimmt, ergeben sich nunmehr einfach nach Anleitung des § 2. Die untere Grenze des Integrals ist dabei,

dem Umstande entsprechend, daß die Integrationskonstante K unterdrückt wurde, sowohl auf ψ als auf χ in den Mittelpunkt desjenigen Segmentes S_k zu verlegen, welcher mit I_k den Index gemein hat. So ergibt sich z. B. beistehende Figur für I_1 , in der nur angegeben ist, wie groß der imaginäre Bestandteil von I_1 (modulo $2i\pi$) für die verschiedenen Segmente S ist, und in welchen Punkten I_1 positiv, in welchen es negativ unendlich wird (Fig. 3).

In der folgenden Tabelle ist das Verhalten der vier Integrale in dieser Beziehung zusammengestellt. Die mit S_k überschriebenen Kolonnen geben den imaginären Bestandteil der betr. Integralwerte, modulo $2i\pi$. In den Kolonnen t_{ik} finden sich diejenigen Vorzeichen angegeben, welche die Integrale, für welche die Berührungspunkte von t_{ik} Unendlichkeitspunkte sind, in diesen Unendlichkeitspunkten annehmen. Das obere Vorzeichen bezieht sich auf den Berührungspunkt mit ψ , das untere, notwendig entgegengesetzte, auf den Berührungspunkt mit χ .

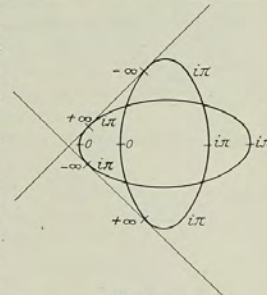


Fig. 3.

	S_1	S_2	S_3	S_4	t_{13}	t_{14}	t_{23}	t_{24}
I_1	0	$i\pi$	$i\pi$	$i\pi$	\pm	\mp	.	.
I_2	$i\pi$	0	$i\pi$	$i\pi$.	.	\mp	\pm
I_3	$i\pi$	$i\pi$	0	$i\pi$	\mp	.	\pm	.
I_4	$i\pi$	$i\pi$	$i\pi$	0	.	\pm	.	\mp

(Man findet für die oben unbestimmt gelassene Konstante:

$$I_1^x + I_2^x + I_3^x + I_4^x = i\pi \pmod{2i\pi}.)$$

Betrachten wir jetzt die verschiedenen *Meridiankurven*, welche man auf dem elliptischen Doppelblatte ψ oder auch auf χ ziehen kann. Dieselben ordnen sich, sofern man die vier Berührungspunkte der Tangenten t_{ik} als unüberschreitbar betrachtet, in sechs Klassen ein, je nach den beiden Segmenten der umgrenzenden Ellipse, welchen sie begegnen. Heißen die letzteren S_i und S_k , so soll die Meridiankurve b_{ik} genannt werden. Diesen b_{ik} legen wir, vermöge einer willkürlichen Festsetzung, je einen positiven Sinn bei, wie dies in der folgenden Fig. 4, (in der die Pfeile sich auf die Vorderseite beziehen sollen) für die Ellipse ψ geschehen ist.



Die betr. Festsetzung für das Doppelblatt χ werde ähnlich, aber [hinsichtlich der Richtung] gerade umgekehrt getroffen.



Fig. 4.

Führt man dann an den verschiedenen b_{1k} die Integrale I in positiver Richtung entlang, so ergeben sich Periodizitätsmoduln 0 oder $\pm 2i\pi$, wie sie in der folgenden Tabelle vereinigt sind. Diese Tabelle gilt gleichmäßig für ψ und χ , insofern zusammengehörige Unendlichkeitspunkte bei ψ und χ entgegengesetzte Vorzeichen der bez. unendlich werdenden Integrale aufweisen:

	b_{23}	b_{13}	b_{12}	b_{14}	b_{24}	b_{34}
I_1	0	$-2i\pi$	$-2i\pi$	$+2i\pi$	0	0
I_2	$-2i\pi$	0	$+2i\pi$	0	$+2i\pi$	0
I_3	$+2i\pi$	$+2i\pi$	0	0	0	$+2i\pi$
I_4	0	0	0	$-2i\pi$	$-2i\pi$	$-2i\pi$

Diese Tabelle bestätigt die folgenden, auch unmittelbar aus der Figur ersichtlichen Relationen zwischen den b_{ik} :

$$b_{12} = b_{13} - b_{23} = -b_{14} + b_{24},$$

$$b_{34} = b_{13} + b_{14} = b_{23} + b_{24}.$$

§ 5.

Ableitung von Kurven vierter Ordnung aus dem Ellipsenpaare.
Einteilung der Kurven vierter Ordnung.

Bei den nun folgenden Erörterungen mag zunächst von *Ordnungskurven* die Rede sein; man faßt die bei ihnen auftretenden Vorkommnisse leichter auf und kann sie prägnanter bezeichnen. Dem Studium der Integrale legen wir indeß immer die Klassenkurven zugrunde; wir haben daher später die jetzt abzuleitenden Resultate von den Ordnungskurven auf sie zu übertragen.

Es sei also jetzt ein Ellipsenpaar in Punktkoordinaten gegeben:

wo

$$\psi' = 0, \quad \chi' = 0,$$

$$\psi' = a^2 x^2 + b^2 y^2 - 1,$$

$$\chi' = b^2 x^2 + a^2 y^2 - 1.$$

So wird man aus ihm durch den bekannten Prozeß der Auflösung der Doppelpunkte im ganzen *sechs* verschiedene Kurven vierter Ordnung der Art nach erzeugen. Fünf derselben, deren Betrachtung weiterhin ausreicht,

sind in den folgenden Fig. 5 bis 9 schematisch dargestellt. Ich bezeichne Fig. 5, 7, 9, 8 bez. als *vier-, drei-, zwei-, einteilige* Kurve, Fig. 6 als *Gürtelkurve* (vgl. Zeuthen: Sur les formes différentes des courbes du quatrième ordre, Math. Annalen, Bd. 7 (1874)). Daß diese Kurventypen existieren und in der Tat aus dem Ellipsenpaare abgeleitet werden können, geht aus den sonst bekannten Untersuchungen hervor. Indes will ich hier ausdrücklich bezügliche Gleichungen zusammenstellen, damit zu einer am Beispiele zu leistenden, rechnerischen Durchführung der weiterhin anzustellenden Betrachtungen alle Elemente gegeben seien.

Es sei ε eine sehr kleine Konstante. Dann wird die Gleichung

$$\varphi' = \psi' \chi' - \varepsilon = 0,$$

da die betr. Kurve mit dem Ellipsenpaare keinen reellen Punkt gemein haben kann, je nachdem ε negativ oder positiv ist, eine vierteilige Kurve oder eine Gürtelkurve darstellen (Fig. 5 und 6).



Fig. 5.

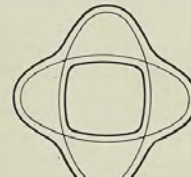


Fig. 6.

Um ferner eine dreiteilige Kurve oder eine einteilige zu gewinnen, schlage man um den auszuzeichnenden Durchschnittspunkt von ψ' , χ'



Fig. 7.

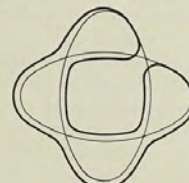


Fig. 8.

einen kleinen Kreis, der, unter ϱ eine kleine Größe verstanden, die Gleichung haben wird:

$$\lambda' = \left(x - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 - \varrho^2 = 0$$



und betrachte die Kurven:

$$\varphi' = \psi' z' - \varepsilon \lambda' = 0.$$

Für negatives ε kommt die dreiteilige, für positives die einteilige Kurve (Fig. 7 und 8).

Eine zweiseitige Kurve endlich ist, unabhängig von dem Vorzeichen, welches man ε erteilen mag, durch

$$\varphi' = \psi' z' - \varepsilon y = 0$$

vorgestellt (Fig. 9).

Die so erzeugten Kurven vierter Ordnung repräsentieren fünf von den sechs Arten, in welche man die Kurven vierter Ordnung ohne Doppelpunkt nach der Zahl und Lage der bei ihnen vorhandenen Züge einteilen kann. Die sechste Art, die wir hier nicht erhielten und die deshalb auch weiterhin ausgeschlossen bleiben mag, ist die *imaginäre Kurve*, d. h. diejenige, die keine reellen Züge enthält. (Auch ihre Gleichung denke ich mir weiterhin, wenn gelegentlich von derselben die Rede ist [wie der Deutlichkeit wegen ausdrücklich bemerkt sei], mit reellen Koeffizienten.)



Fig. 9.

Eine wesentliche Eigenschaft dieser Einteilung der Kurven vierter Ordnung in sechs Arten

ist in dem folgenden Satze ausgesprochen, der weiterhin eine fundamentale Bedeutung für die Tragweite unserer Untersuchungen gewinnt:

Von jeder allgemeinen²⁾ Kurve vierter Ordnung kann man zu jeder anderen, die derselben Art angehört, durch allmähliche reelle Änderung der Konstanten übergehen, ohne daß bei dem Übergangsprozesse Kurven mit Doppelpunkt oder gar allgemeine Kurven, die einer anderen Art angehören, überschritten zu werden brauchen.

Ein direkter Beweis dieses Satzes hat keine Schwierigkeit, aber er ist weitläufig. Es soll hier von einem solchen Beweise um so mehr Abstand genommen werden, als die bei ihm nötig werdenden Betrachtungen mit denjenigen, die im gegenwärtigen Aufsätze zu entwickeln sind, wenig Beziehungspunkte haben. Dagegen sei angedeutet, daß man ihn vermöge kurzer Zwischenbetrachtungen führen kann, wenn man auf frühere Untersuchungen von Zeuthen und mir zurückgreift. Ich habe [in Abb. XXXV, S. 24, 25] gezeigt, daß ein ähnlicher Satz gilt für die fünf Arten, welche man nach Schläfli bei den allgemeinen Flächen dritter Ordnung zu unter-

²⁾ Als „allgemein“ sind hier die Ordnungskurven ohne Doppelpunkt, später die Klassenkurven ohne Doppeltangente der Kürze wegen bezeichnet.

scheiden hat. Es hat dann Zeuthen bewiesen (Math. Annalen, Bd. 7 (1874), S. 428), daß die Arten der Kurven vierter Ordnung den fünf Flächenarten in sehr einfacher Weise entsprechen. Projiziert man die F_3 von einem ihrer Punkte aus stereographisch auf eine Ebene, so tritt als scheinbare Umhüllung bei den Arten I, II, III, IV von Schläfli eine vierteilige, drei-, zwei-, einteilige Kurve vierter Ordnung auf. Die Art V ergibt, bei analoger Konstruktion, je nachdem man den Projektionspunkt auf ihrem unpaaren oder paaren Teile annimmt, die Gürtelkurve und die imaginäre Kurve. Umgekehrt kann auch jede Kurve vierter Ordnung aus der entsprechenden Flächenart in der angegebenen Weise gewonnen werden. Hierin liegt der von uns gewünschte Beweis. Um ihn völlig zu führen, hat man nur noch die Modifikationen zu untersuchen, welche die scheinbare Umhüllungskurve erfährt, wenn der Projektionspunkt auf der fest gedachten Fläche beliebig verschoben wird. Aber auch dieses hat Zeuthen ausgeführt [Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques; Math. Annalen, Bd. 8 (1874/75)].

Als irrelevant wird bei der hier festgehaltenen Einteilung der C_4 eine Änderung der Kurve betrachtet, die Zeuthen in seiner Diskussion der gestaltlichen Verhältnisse der Kurven vierter Ordnung (a.a.O.) ausführlich untersuchte und deren Analogon bei Kurven n -ter Ordnung ich zum Gegenstande einer neuerlichen Mitteilung machte [vgl. Abb. XXXVII, S. 78 ff.]. Es kann eintreten, daß zwei Wendungen der Kurve, die reell waren, zusammenrücken und imaginär werden, oder umgekehrt, daß zwei neue reelle Wendungen entstehen, indem zwei imaginäre sich vorab in einen reellen Punkt vereinigen. Gleichzeitig wechselt dann eine der vier reellen Doppeltangenten erster Art, welche die Kurve besitzt, ihre Bedeutung für die Kurve. Hatte die Doppeltangente reelle Berührungspunkte, so wird sie isoliert; war sie isoliert, so erhält sie reelle Berührungspunkte.

Indem wir jetzt die nunmehr für Ordnungskurven gewonnenen Resultate auf Klassenkurven übertragen, beginnen wir mit einer Erläuterung des letzterwähnten Vorkommnisses und seiner Bedeutung für die betr. Riemannsche Fläche.

§ 6.

Übertragung auf Klassenkurven.

Der Änderungsprozeß der Klassenkurve, welcher hier zunächst in Betracht kommt, ist bekanntlich der folgende: Eine Kurve, welche zwei reelle Spitzen und in deren Nähe einen Selbstüberkreuzungspunkt besitzt, verliert die Spitzen dadurch, daß sie zusammenrücken und imaginär wer-

den; der Selbstüberkreuzungspunkt geht dabei in einen isolierten Doppelpunkt über:

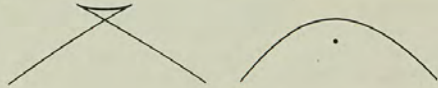


Fig. 10.

Man denke sich jetzt die zugehörige Riemannsche Fläche konstruiert, unter der Voraussetzung, daß man es mit einer Kurve vierter Klasse zu tun hat. So werden, im ersten Falle, die verschiedenen angrenzenden Teile der Ebene mit einer Anzahl von Blättern überdeckt sein, die in der Fig. 11 angegeben ist. Denn die Zahl der Blätter wächst jedesmal um

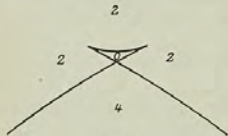


Fig. 11.

zwei Einheiten, sobald man von der konvexen Seite eines Kurvenzuges auf die konkave hinübertritt; sie kann ferner nie negativ und in unserem Falle nie größer als 4 werden. Diese Zahlen können sich nun bei dem in Rede stehenden Übergange für Stellen, die nicht in unmittelbarer Nähe der modifizierten Singularität liegen, nicht ändern. Es muß auch jeder Weg auf der Riemannschen Fläche, der nicht an die singuläre Stelle herantritt, nach der Umänderung seinen Charakter behalten haben. Dies wird dadurch möglich, daß der betr. Doppelpunkt in dem Augenblicke, in welchem er isoliert wird, zu einem Doppelverzweigungspunkte der Riemannschen Fläche sich umgestaltet.

Unter einem Doppelverzweigungspunkte verstehe ich dabei einen solchen Punkt der Ebene, in welchem sich gleichzeitig zwei Paare von Blättern der Riemannschen Fläche verzweigen. Andere Verzweigungspunkte können bei einer Kurve, deren Gleichung nur reelle Koeffizienten besitzt, nicht auftreten. Denn die Blätter der betr. Riemannschen Fläche gehören paarweise zusammen (immer diejenigen beiden, welche konjugiert imaginäre Tangenten repräsentieren), und ein Vorkommnis, welches sich in dem einen Blatte einstellt, muß auch in dem zugehörigen Blatte entsprechend stattfinden [wegen aller dieser Verhältnisse vgl. die nachfolgende Abhandlung XI: *Über eine neue Art der Riemannschen Flächen*, II.]. Zu einer solchen Verzweigung in einem isolierten Doppelpunkte ist aber deshalb die Möglichkeit gegeben, weil die vier imaginären Tangenten, die man von unmittelbar benachbarten Punkten der Ebene an die Kurve legen kann, für ihn paarweise zusammenfallen und also in ihm zweimal

zwei Blätter der Riemannschen Fläche einen Punkt gemein haben. Daß aber in ihm eine Verzweigung entstehen muß, erweisen die folgenden Zeichnungen (Fig. 12 und 13).

In der ersten der beiden Figuren ist die Fläche angedeutet, welche zu der Kurve mit reellen Spitzen gehört; ihren Blättern ist, aus Symmetriegründen, eine solche Anordnung gegeben, daß sie sich in einer vom Selbstüberkreuzungspunkte ausgehenden Kurve durchdringen, [die wir in den Fig. 12 und 13 als vertikal nach unten verlaufende Gerade gewählt haben]. Außerdem ist auf der Fläche eine Kurve gezogen, welche die singulären Punkte mit weiter Schleife umgibt. Würde nun der isolierte Doppelpunkt zu keiner Verzweigung Anlaß geben und also bei der modifizierten Fläche keine Durchdringung der Blätter stattfinden, so würde eben dieser Weg seinen Charakter ändern, was nach dem obigen unmöglich ist. Man hat sich also

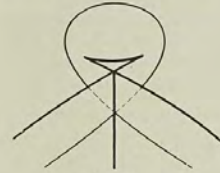


Fig. 12.

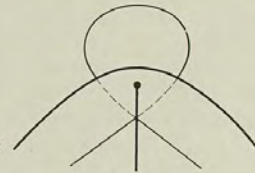


Fig. 13.

die Vorstellung zu bilden, welche durch die zweite der vorstehenden Figuren zur Anschauung gebracht werden soll. Von dem isolierten Doppelpunkte gehen zwei gleichlaufende Verzweigungsschnitte aus, von denen der eine die beiden oberen, der andere (in der Figur nicht sichtbare) die beiden unteren Blätter verbindet. Zugleich ist deutlich, wie die zweite Figur aus der ersten durch kontinuierliche Änderung entsteht.

Die hiermit erläuterte Umgestaltung der Riemannschen Fläche (die natürlich in dem hier geschilderten Sinne sowohl als im umgekehrten vor sich gehen kann) ist nun, wie leicht zu zeigen, die einzige, die überhaupt auftritt, wenn man die Konstanten der allgemeinen Kurve vierter Klasse übrigens beliebig, doch nur soweit, ändert, daß keine Kurve mit Doppeltangente erreicht wird.

Anders ausgedrückt: *Betrachtet man die betr. Umgestaltung der Riemannschen Fläche als irrelevant, so haben alle allgemeinen Kurven vierter Klasse, die zu derselben Art gehören, identische Riemannsche Flächen.*

Dieser Satz gestattet, dieselben Schnitte, welche wir weiterhin an den Riemannschen Flächen besonders ausgewählter Klassenkurven ausführen werden, an den Riemannschen Flächen aller Klassenkurven derselben

Art anzubringen und dadurch die Schlüsse, welche wir für die speziellen Kurven ableiten, auf alle Kurven derselben Art zu übertragen. So sind denn auch die Sätze der §§ 14, 15, obgleich zunächst nur für die besonderen Kurven bewiesen, sofort für *alle* vierteiligen, dreiteiligen usw. Kurven ausgesprochen. Aber es mag genügen, diese Tragweite der genannten Sätze hier behauptet und das Prinzip des Beweises genannt zu haben; die unmittelbare Anschaulichkeit der weiteren Betrachtungen, die ich gern festhalten möchte, schien mir eine Beschränkung auf konkrete Kurvenformen durchaus zu verlangen.

§ 7.

Klassenkurven, die sich an das Ellipsenpaar anschließen.

Diese besonderen Kurven, auf welche sich weiterhin die Untersuchung beschränken soll, sind diejenigen, welche sich unmittelbar aus dem Ellipsenpaare ψ, χ ableiten lassen, und den Kurven vierter Ordnung, welche wir in § 5 gewonnen haben, dualistisch entgegenstehen. [Sie sind durch die Fig. 14 bis 18 dargestellt³⁾.] Die zugehörigen Gleichungen erhält man unmittelbar aus der in § 5 angegebenen, indem man x und y durch $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$, ψ' und χ' durch die früheren ψ und χ ersetzt.

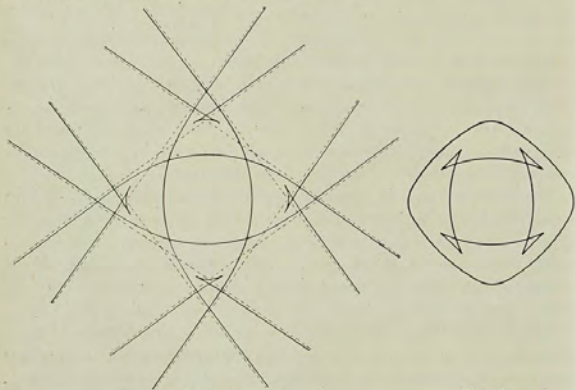


Fig. 14.

Fig. 15.

³⁾ [Bei den Fig. 14, 16, 17, 18 sind außerdem die Asymptoten gezeichnet, um den Zusammenhang im Unendlichen klarzustellen.]

Was die Gestalt dieser Kurven angeht, so kann man sie etwa in folgender Weise festhalten. Bei jeder Kurve finden sich Stücke, die aus den Segmenten S_1, S_2, S_3, S_4 der Ellipse ψ , und solche, die aus den

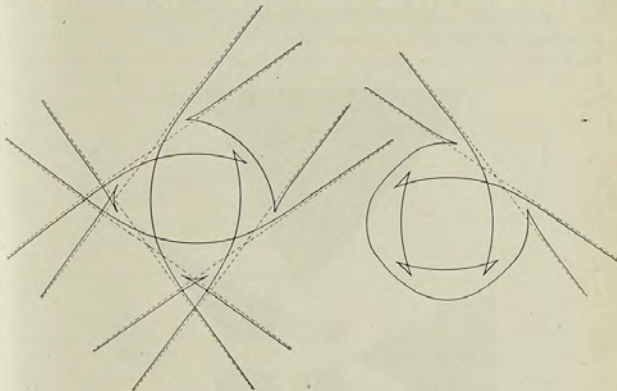


Fig. 16.

Fig. 17.

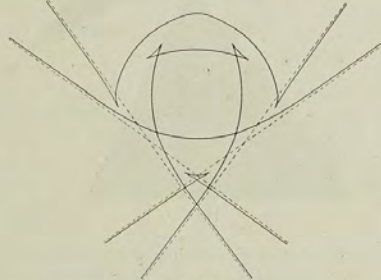


Fig. 18.

Segmenten der Ellipse χ entstanden sind. Diese sind untereinander verbunden durch Kurvenzüge, welche bez. aus den gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen $t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}$ hervorgehen, indem man, bei der einzelnen Tangente, entweder das durch das Unendliche hindurch sich erstreckende Segment in zwei Züge spaltet oder das im Endlichen befindliche

(während man das andere Segment verschwinden läßt). Die Benennungen S_k, t_{ik} sollen dementsprechend weiterhin zur Bezeichnung der verschiedenen Stücke, die man bei der einzelnen Klassenkurve unterscheiden kann, gebraucht werden.

Um von den zugehörigen Riemannschen Flächen eine möglichst anschauliche Vorstellung zu geben, habe ich in Fig. 19 eine ausgeführte Zeichnung beigegeben (deren Anfertigung ich Herrn Schleiermacher

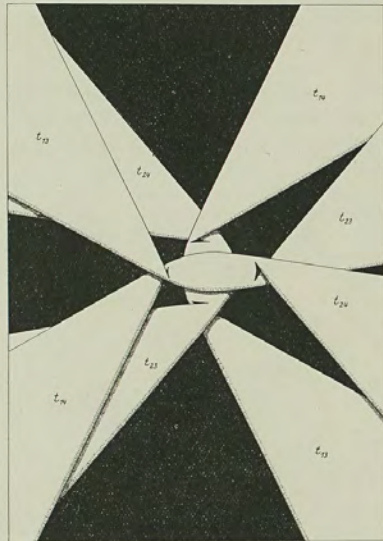


Fig. 19.

verdanke). Dieselbe stellt eine vierteilige Kurve vor, welche so gewählt ist, daß ihre 28 Doppelpunkte alle ins Endliche fallen. Die Figur ist folgendermaßen entworfen worden. Wir haben zuerst, unter Benutzung gew. rechtwinkliger Koordinaten, eine Zeichnung der Kurve

$$(9u^2 + 4v^2 - w^2)(4u^2 + 9v^2 - w^2) + \frac{1}{16}w^4 = 0$$

ausgeführt, indem die Koordinaten der hauptsächlich Punkte berechnet wurden. Sodann ergab sich die Zeichnung der Fig. 19 durch geeignete Zentralprojektion.

Auf jeder einzelnen der Riemannschen Flächen, welche zu den Kurven der Fig. 14 bis 18 gehören, wird man jetzt Meridiankurven konstruieren können, die den b_{ik} entsprechen, welche sich auf dem Doppelblatte ψ befanden, oder auch den b_{ik} , die sich auf χ bezogen. Die b_{ik} von ψ übertragen sich z. B. folgendermaßen auf die Riemannsche Fläche der Gürtelkurve (Fig. 20).

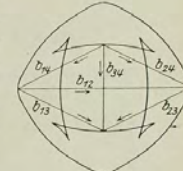


Fig. 20.

Die linearen Relationen zwischen den b_{ik} , wie sie oben angegeben wurden, bleiben dabei erhalten.

Nun behaupte ich:

Die Meridiankurven b_{ik} , welche von der Ellipse ψ herkommen, sind mit den bez. gleichbenannten Meridiankurven b_{ik} , die von der Ellipse χ herübergenommen werden können, auf der neuen Riemannschen Fläche äquivalent.

In der Tat, die Meridiankurven

$$b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24},$$

welche von ψ , und die gleichbenannten, welche von χ herkommen, gehen, auch dem Sinne nach, ineinander über, wenn man sie einfach längs derjenigen „Bänder“ der Riemannschen Fläche verschiebt, die durch Spaltung der Tangenten

$$t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}$$

entstanden sind. Die Äquivalenz der zweierlei

$$b_{12}, b_{24}$$

ergibt sich dann daraus, daß sich dieselben durch die anderen b_{ik} vermöge derselben Gleichungen linear ausdrücken.

Es wird daher gestattet sein, im folgenden schlechthin von Meridiankurven b_{ik} zu reden, die auf unseren Riemannschen Flächen verlaufen; auch der Sinn, der bei ihnen als positiv gelten soll, ist durch die frühere Verabredung gegeben.

§ 8.

Konstruktion der Normalintegrale.

Die Art und Weise, vermöge deren Clebsch und Gordan die Riemannschen Normalintegrale erster Gattung gewinnen, mag für unseren Fall folgendermaßen ausgesprochen werden:

Man ziehe auf der Fläche drei (p) Rückkehrschnitte, deren gleichzeitiges Bestehen noch kein Zerfallen der Fläche herbeiführt. Dann be-



stimme man drei Integrale so, daß sie, an diesen Rückkehrschnitten in bestimmtem Sinne entlang geleitet, die Perioden ergeben:

$$\begin{array}{ccc} 2i\pi & 0 & 0 \\ 0 & 2i\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2i\pi. \end{array}$$

Sie können als Normalintegrale genommen werden.

Nun aber zeigt sich, daß man auf vier verschiedene Weisen unter den sechs Meridiankurven b_{ik} drei solche herausuchen kann, die als unabhängige Rückkehrschnitte benutzt werden können. Es sind das jedesmal diejenigen b_{ik} , welche einen Index gemein haben. In der Tat, man zerschneide die zu einer beliebigen unserer Kurven gehörige Fläche längs solcher b_{14} , b_{24} , b_{34} , die von der Ellipse ψ herkommen. So zerfällt die Fläche noch nicht. Das elliptische Doppelblatt ψ , an sich genommen, wäre freilich in vier Stücke zerfallen, aber jedes dieser Stücke ist jetzt, vermöge der „Bänder“ t_{ik} , an das unzerschnittene Doppelblatt χ befestigt.

Wir werden, dementsprechend, jetzt drei Normalintegrale aufsuchen: \mathfrak{I}_1 , \mathfrak{I}_2 , \mathfrak{I}_3 , welche, an b_{14} , b_{24} , b_{34} in positivem Sinne entlanggeleitet, die Perioden ergeben:

	b_{14}	b_{24}	b_{34}
\mathfrak{I}_1	$+2i\pi$	0	0
\mathfrak{I}_2	0	$+2i\pi$	0
\mathfrak{I}_3	0	0	$+2i\pi$

Dabei drängt sich von selbst der Satz auf: Wenn man aus der Klassenkurve rückwärts wieder das Ellipsenpaar ψ , χ entstehen läßt, so gehen die jetzt gesuchten Normalintegrale eben in die früher von uns betrachteten (auch schon als Normalintegrale bezeichneten) I_1 , I_2 , I_3 über. Denn letztere verhielten sich an b_{14} , b_{24} , b_{34} , genau so wie wir es jetzt von \mathfrak{I}_1 , \mathfrak{I}_2 , \mathfrak{I}_3 fordern.

Wenn wir also setzen:

$$\mathfrak{I}_k = \int \frac{cu du}{\sum c_i \varphi_i} (a_k u + b_k v + c_k w),$$

(wo φ die linke Seite der Gleichung der Kurve vierter Klasse bedeutet), so folgt: Solange φ nicht sehr von $\psi \cdot \chi$ verschieden ist, können die unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke

$$a_k u + b_k v + c_k w \quad (k = 1, 2, 3)$$

in erster Annäherung gleich gesetzt werden den bei I_1 , I_2 , I_3 , vorkommenden linearen Funktionen, d. h. bez.

$$\begin{array}{l} -2(a^2 - b^2)(+\sqrt{a^2 + b^2} \cdot u + w), \\ -2(a^2 - b^2)(-\sqrt{a^2 + b^2} \cdot u + w), \\ -2(b^2 - a^2)(+\sqrt{a^2 + b^2} \cdot v + w). \end{array}$$

Bezeichnen wir wieder den Punkt, dessen Gleichung ist

$$a_k u + b_k v + c_k w = 0$$

als „Nullpunkt des betr. Integrals“, so können wir auch sagen: Die „Nullpunkte der gesuchten Normalintegrale“ liegen bez. in der Nähe der „Nullpunkte der früher betrachteten Normalintegrale“.

Ehe wir diese Beziehung weiter verfolgen, werden wir, der Symmetrie wegen, neben \mathfrak{I}_1 , \mathfrak{I}_2 , \mathfrak{I}_3 noch ein dem I_4 entsprechendes \mathfrak{I}_4 einführen. Die im Zähler des zugehörigen Differentials auftretende lineare Funktion wird nahezu gleich gesetzt werden können:

$$-2(b^2 - a^2)(-\sqrt{a^2 + b^2} \cdot v + w),$$

man wird die Relation haben:

$$d\mathfrak{I}_1 + d\mathfrak{I}_2 + d\mathfrak{I}_3 + d\mathfrak{I}_4 = 0$$

und das Verhalten der \mathfrak{I}_k an den verschiedenen Meridiankurven b_{ik} wird durch die früher für die I_k entworfene Tabelle gegeben sein:

	b_{23}	b_{13}	b_{12}	b_{14}	b_{24}	b_{34}
\mathfrak{I}_1	0	$-2i\pi$	$-2i\pi$	$+2i\pi$	0	0
\mathfrak{I}_2	$-2i\pi$	0	$+2i\pi$	0	$+2i\pi$	0
\mathfrak{I}_3	$+2i\pi$	$+2i\pi$	0	0	0	$+2i\pi$
\mathfrak{I}_4	0	0	0	$-2i\pi$	$-2i\pi$	$-2i\pi$

§ 9.

Die Normalintegrale sind reell. Umkehrprobleme mit reellen Lösungen.

Wir zeigen jetzt zunächst: die Normalintegrale \mathfrak{I} sind reell, d. h. ihre Differentiale enthalten nur reelle Koeffizienten und weichen also von den Differentialen der I nur um reelle Korrektionsglieder ab. In der Tat, man kann sich die \mathfrak{I} folgendermaßen bestimmt denken. Es seien j_1 , j_2 , j_3 irgend drei unabhängige, reelle Integrale erster Gattung. Leitet man ein solches Integral längs einer Meridiankurve b_{ik} entlang, so erhält man immer eine rein imaginäre Periode. Die Meridiankurve überdeckt nämlich zweimal denselben Weg, einmal auf der Vorderseite, das andere Mal mit umgekehrtem Sinne auf der Rückseite der Fläche verlaufend. Wird nun das eine Mal beim Hinintegrieren der Betrag $\alpha + \beta i$ gewonnen, so



liefert der Rückgang, weil er die konjugiert imaginären Werte aber im umgekehrten Sinne überschreitet, $-\alpha + \beta i$, und der Wert der ganzen Periode ist $2\beta i$, w. z. b. w. Dementsprechend mögen die Perioden, welche die j_k bei Hinleitung längs b_{14}, b_{24}, b_{34} erhalten, $i\beta_{k1}, i\beta_{k2}, i\beta_{k3}$ genannt sein. Sei jetzt z. B. das gesuchte \mathfrak{Z}_1

$$= \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \alpha_3 j_3.$$

So wird man, aus den Periodenwerten, die \mathfrak{Z}_1 an b_{14}, b_{24}, b_{34} aufweisen soll, folgende Gleichungen zur Bestimmung der α erhalten:

$$\alpha_1 \beta_{11} + \alpha_2 \beta_{21} + \alpha_3 \beta_{31} = 2\pi,$$

$$\alpha_1 \beta_{12} + \alpha_2 \beta_{22} + \alpha_3 \beta_{32} = 0,$$

$$\alpha_1 \beta_{13} + \alpha_2 \beta_{23} + \alpha_3 \beta_{33} = 0.$$

Dies aber sind reelle Gleichungen; sie geben reelle Werte der α und also ein reelles Normalintegral \mathfrak{Z}_1 .

Ein reelles Integral, an einem reellen Kurvenzuge vorbeigeleitet, ergibt offenbar einen reellen Betrag. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Betrachtet man als untere Grenze der Normalintegrale \mathfrak{Z}_k reelle Punkte der Kurve vierter Klasse, so erhalten alle reellen Punkte derselben Integralwerte, die, modulo $2i\pi$, den imaginären Bestandteil 0 oder $i\pi$ besitzen.

Jeder reelle Punkt ist nämlich von dem dann vorhandenen Anfangspunkte der Integration zu erreichen, indem man Stücke von reellen Kurvenzügen und ev. Stücke von Meridiankurven b_{ik} durchläuft. Die letzteren sind aber insoweit ihrer Erstreckung nach bestimmt, als sie immer von einem reellen Kurvenzuge bis zu einem zweiten reellen Zuge hinleiten; sie sind sozusagen halbe Meridiankurven. Da aber das Durchlaufen der ganzen Meridiankurve für das Normalintegral die Periode 0 oder $\pm 2i\pi$ liefert, so ergibt, wie aus dem analogen eben ausgeführten Beweise erhellt, die halbe Meridiankurve einen Betrag, dessen imaginärer Teil 0 oder $\pm i\pi$ beträgt. Hierin liegt der Beweis des neuen Satzes.

An ihn können wir sofort eine sehr einfache Untersuchung knüpfen über die Realitätsverhältnisse des Jakobischen Umkehrproblems, eine Untersuchung, die für die weiterhin abzuleitenden Resultate (§ 14) von wesentlicher Bedeutung ist. Die unteren Grenzen der Integrale seien wieder in reelle Punkte der Kurve gelegt. Dann sollen drei Punkte x, y, z der Riemannschen Fläche gesucht werden, so daß

$$\mathfrak{Z}_1^x + \mathfrak{Z}_1^y + \mathfrak{Z}_1^z = v_1,$$

$$\mathfrak{Z}_2^x + \mathfrak{Z}_2^y + \mathfrak{Z}_2^z = v_2,$$

$$\mathfrak{Z}_3^x + \mathfrak{Z}_3^y + \mathfrak{Z}_3^z = v_3,$$

wo die v gegebene Größen sind. Es werde außerdem angenommen, was für das Folgende ausreicht, daß dies Problem nicht zu den unbestimmten gehört. So behaupte ich: *das Punktetripel x, y, z wird dann und nur dann reell sein, wenn die imaginären Bestandteile der v , modulo $2i\pi$, Null oder $i\pi$ betragen.* Als reell ist dabei ein Tripel bezeichnet, wenn entweder alle Elemente desselben reell sind, oder nur eines, aber die beiden anderen konjugiert imaginär.

Der Beweis ist einfach dieser. Es sei $v_k = \alpha_k + i\beta_k$. So betrachten wir ein zweites Umkehrproblem, für welches die gegebenen Größen $v_k' = \alpha_k - i\beta_k$ sind. Die Lösung desselben wird durch ein Tripel vorgestellt sein, welcher zu dem ursprünglichen gesuchten Tripel konjugiert imaginär ist. Sind nun die β_k Null oder π (modulo 2π), so stimmen die v_k und v_k' (modulo $2i\pi$) überein. Die beiden konjugierten Tripel müssen daher wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit des Umkehrproblems, identisch sein, d. h. das gesuchte Tripel ist reell.

Allgemeiner, es werde eine Gruppe von n Punkten gesucht, so daß

$$\mathfrak{Z}_k^{x_1} + \mathfrak{Z}_k^{x_2} + \dots + \mathfrak{Z}_k^{x_n} = v_k,$$

man soll diese Punkte unter ev. Zuhilfenahme fester Punkte durch ein Kurvensystem aus der Kurve vierten Grades ausschneiden. *Dieses Kurvensystem wird dann und nur dann reell sein, d. h. eine Gleichung besitzen, in der, abgesehen von den unbestimmt bleibenden Parametern, nur reelle Koeffizienten vorkommen, wenn die imaginären Bestandteile der v_k (modulo $2i\pi$) Null oder $i\pi$ sind.*

§ 10.

Der Verlauf der Normalintegrale.

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, im Sinne der in § 1 ausinandergesetzten Methode den Verlauf der Normalintegrale \mathfrak{Z}_k auf den zugehörigen Riemannschen Flächen durch schematische Zeichnung zur vollen Anschauung zu bringen und rückwärts aus der Zeichnung die charakteristischen Periodizitätseigenschaften dieser Integrale wieder abzuleiten. Inzwischen soll das nur für die vierteilige Kurve und für die Gürtelkurve hier durchgeführt werden. Bei der symmetrischen Gestalt, welche diese beiden Kurven besitzen, haben $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \mathfrak{Z}_4$ alle dieselbe Beziehung zur Kurve; es genügt, eines derselben zu repräsentieren, und wir wollen \mathfrak{Z}_2 zu diesem Zwecke auswählen.

Betrachten wir vorab das Ellipsenpaar ψ, χ und das zugehörige Integral I_2 . Indem wir dasselbe gleich $P + iQ$ setzen und nun, auf jedem der beiden elliptischen Doppelblätter, die Kurven $P = C, -Q = C'$ nach

Anleitung des § 2 zeichnen, erhalten wir folgende Figuren 21, bei denen wir, der größeren Übersichtlichkeit wegen, die Ellipsen ψ und χ nebeneinander gezeichnet haben.

Diese Zeichnungen geben einen ersten Anhalt zur Konstruktion der entsprechenden Kurvensysteme bei den allgemeinen Kurven. Diejenigen Partien der gezeichneten Kurvensysteme, welche nicht unmittelbar an die Berührungspunkte der Doppeltangenten t_{ik} hinanreichen, werden sich wesentlich unverändert auf den allgemeinen Flächen wieder finden.

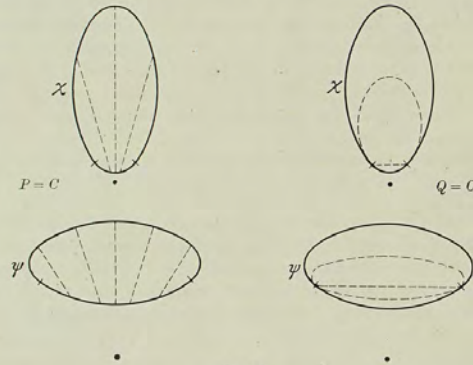


Fig. 21.

Man hat ferner folgende Anhaltspunkte. Bei den allgemeinen Kurven ist das Integral \mathfrak{F}_3 ein überall endliches geworden, Unendlichkeitspunkte treten also in den bez. Kurvensystemen $P=C$, $Q=C'$ nicht auf. Dagegen weist jetzt das Differential $d\mathfrak{F}_3$ vier Verschwindungspunkte auf, entsprechend den vier Tangenten, die man vom „Nullpunkte des Integrals“ an die Kurve legen kann. (Dieser „Nullpunkt“ ist, wie oben angegeben, nahezu durch

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot v + w = 0$$

vorgestellt). — Ferner ist deutlich, daß die reellen Züge der Kurve selbst zu den Kurven $Q=C'$ gehören. Andererseits müssen die Kurven $P=C$, wenn sie überhaupt zweimal einen reellen Kurvenzug treffen, Meridiankurven sein. Denn denselben Verlauf, den sie, etwa auf der oberen Seite der Fläche, zwischen den genannten Schnittpunkten nehmen, werden sie rückwärts, auf der anderen Seite der Fläche, ebenfalls einschlagen müssen.

Es folgt hieraus schon, daß diese Kurven $P=C$ geschlossene Kurven sein müssen; daß überhaupt die Kurven $P=C$ und $Q=C'$ in den von uns zu betrachtenden Fällen geschlossen sind, ergibt daraufhin der in § 1 entwickelte bez. Satz und eine nähere Betrachtung der bei den einzelnen Figuren hervortretenden Lagenbeziehungen.

§ 11.

Besondere Betrachtung der vierteiligen Kurve und der Gürtelkurve.

Bei der vierteiligen Kurve liegt der „Nullpunkt“

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot v + w = 0$$

an einer Stelle, an der sich zwei „Bänder“, t_{14} und t_{24} , überkreuzen. Die vier Tangenten, welche von ihm ausgehen, sind imaginär und also vorgestellt durch die vier an dieser Stelle über einander befindlichen Punkte der Riemannschen Fläche. Sie sind die Verschwindungspunkte des Differentials und also Verästelungspunkte der Kurvensysteme P und Q .

Der Verlauf dieser Kurvensysteme ist durch die voraufgeschickten Bemerkungen schematisch durchaus bestimmt; man erhält die folgenden Zeichnungen, in der die eigentlich einander überkreuzenden beiden Hauptteile der betr. Fläche wieder nebeneinander gezeichnet sind.

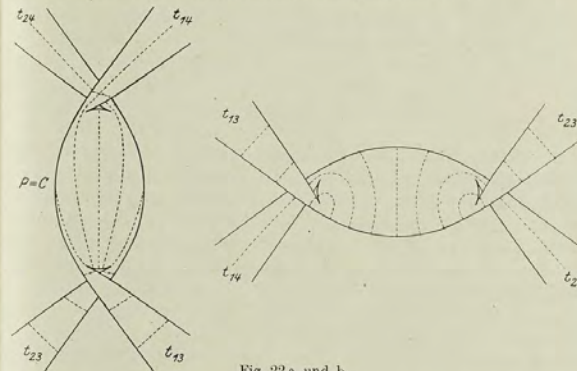


Fig. 22 a und b.

Daß die Kurven $Q=C'$ geschlossen sind, ergibt sich aus dem bez. Satze des § 1, weil jede von ihnen mit einem der vier reellen Züge der eigentlichen Kurve einen Kanal einschließt, in welchem sich kein Ver-

schwindungspunkt des Differentials befindet. Die Kurven $P = C$ sind alle Meridiankurven und als solche geschlossen.

Aus diesen Zeichnungen bestätigt man das Verhalten des Integrals \mathfrak{S}_3 an den b_{ik} . Man kann $b_{13}, b_{14}, b_{23}, b_{24}$ eine solche Lage geben, daß sie geradezu mit Kurven $P = C$ zusammenfallen. Zu dem Zwecke muß man b_{14} und b_{24} bez. durch die beiden [auf den Bändern t_{14} und t_{24} liegenden Verschwindungspunkte] hindurchgehen lassen. Hierdurch ist deutlich, weshalb sie eine Periode Null ergeben, während b_{13} und b_{23} eine nicht verschwindende Periode liefern: die Beiträge, welche die beiden Hälften, in die b_{14} oder b_{24}

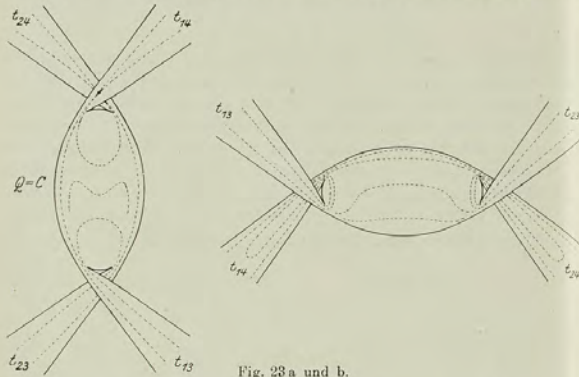


Fig. 23 a und b.

durch die betr. beiden Verschwindungspunkte zerlegt werden, für den Integralwert ergeben, kompensieren sich gegenseitig. Dagegen ergeben b_{13} und b_{23} , insofern sie Kurven $P = C$ sind, eine rein imaginäre, und, da sie gegen die Figur symmetrisch liegen, eine gleich große Periode. Daß dieselbe gleich $2i\pi$ ist, kann die Figur nicht zeigen; denn die Kurven P, Q blieben ungeändert, wenn man $c \cdot \mathfrak{S}_3$ statt \mathfrak{S}_3 setzte (wo c eine beliebige, reelle Konstante). Aus den zwischen den b_{ik} bestehenden Relationen:

$$\begin{aligned}
 b_{12} &= b_{13} - b_{23} \\
 b_{34} &= b_{13} + b_{14} = b_{23} + b_{24}
 \end{aligned}$$

folgt endlich, daß ein Hinführen des Integrals längs b_{12} Null und längs b_{34} denselben Periodenwert, wie bei b_{13}, b_{23} ergeben muß.

Die entsprechenden Verhältnisse gestalten sich bei der Gürtelkurve etwas anders, insofern bei ihr die vier Tangenten, die man vom „Null-

punkte des Integrals“ aus an die Kurve legen kann, reell ausfallen und die sie repräsentierenden Punkte daher den reellen Kurvenzügen angehören. Infolgedessen erscheinen die Verästelungen, welche die Kurven P, Q in diesen Punkten, wie immer in den Verschwindungspunkten des Differentials, aufweisen, in der Zeichnung perspektivisch verkürzt. Man erhält die folgenden Figuren, die inzwischen hier nicht eingehender erläutert werden sollen:

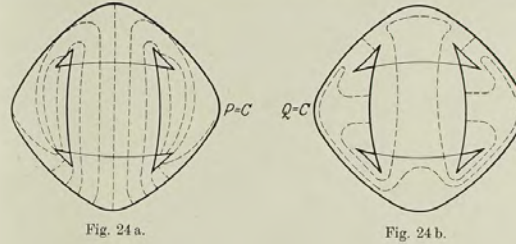


Fig. 24 a.

Fig. 24 b.

§ 12.

Vervollständigung des Querschnittsystems.

Die drei bei Einführung der Normalintegrale $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ benutzten Meridianschnitte b_{14}, b_{24}, b_{34} sollen jetzt durch drei weitere Schnitte A_1, A_2, A_3 zu einem „kanonischen“ Querschnittsysteme vervollständigt werden. A_1 wird so gezogen, daß es von einem Punkte von b_{14} auslaufend zu demselben Punkte von der anderen Seite kommend zurückkehrt, ohne dabei die anderen b_{ik} oder etwa schon konstruierte andere A zu überschreiten. Indem wir dann an den A_i die Integrale \mathfrak{S}_k hinleiten, erhalten wir Perioden a_{ik} (es wird bekanntlich $a_{ik} = a_{ki}$), die mit den auf die b_{14} bezüglichen Perioden zusammen ein kanonisches Periodensystem bilden. *Unsere Aufmerksamkeit soll besonders auf den imaginären Teil der a_{ik} gerichtet werden*; wir werden finden, das derselbe, modulo $2i\pi$, gleich 0 oder $i\pi$ ausfällt, je nach der Art der zugrunde gelegten Kurve.

In den weiterhin mitzuteilenden Tabellen nehmen wir neben $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ aus Symmetriegründen auch \mathfrak{S}_4 auf; analog führen wir neben A_1, A_2, A_3 noch eine Kurve A_4 ein, deren Definition sich naturgemäß ergibt. Man hat, für die so erweiterte Tabelle, auch noch $a_{ik} = a_{ki}$ und überdies wegen der zwischen den \mathfrak{S} bestehenden Relation: $\sum_k a_{ik} = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Für die Konstruktion der Kurven A_1, A_2, A_3, A_4 stelle ich nun folgende Regeln auf. Die Ellipsen ψ, χ waren je in vier Segmente S_1, S_2, S_3, S_4



zerfällt worden; wir wollen, um etwa A_3 zu erhalten, die beiden Segmente S_3 zusammen mit den beiden Tangenten t_{13}, t_{23} , welche sie begrenzen, ins Auge fassen:

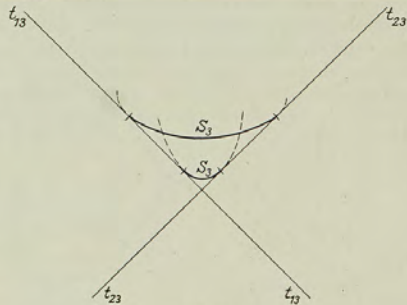


Fig. 25.

Man hat dann, hinsichtlich der Art, in welcher t_{13}, t_{23} beim Übergange zur allgemeinen Klassenkurve benutzt sind, drei Fälle zu unterscheiden:

1. Bei beiden Tangenten sollen die durch das Unendliche hindurchgehenden Segmente in reelle Kurvenzüge gespalten sein. Dann hat man also die Figur:

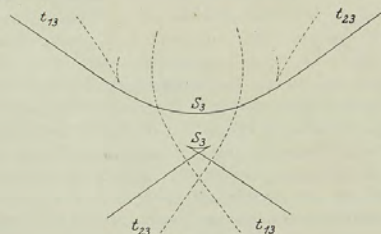


Fig. 26.

In diesem Falle bilden die beiden Segmente S_3 zusammen mit den unmittelbar angrenzenden Kurvenstücken, die aus t_{13}, t_{23} entstanden sind, einen geschlossenen Zug (der dann ein reeller Zug der Kurve ist). Dieser Zug soll als A_3 genommen werden. Leitet man ein reelles Integral an ihm entlang, so erhält man eine reelle Periode.

2. Von den beiden begrenzenden Tangenten wird die eine, wie im Falle 1, die andere im umgekehrten Sinne benutzt, so daß also bei ihr das im Endlichen gelegene Segment in reelle Kurvenzüge gespalten wird:

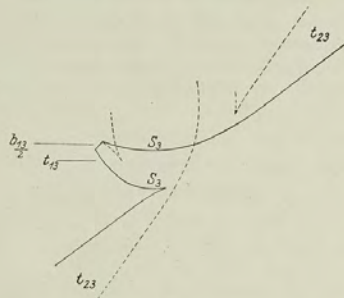


Fig. 27.

Dann bekommt man einen zusammenhängenden Zug, wenn man die beiden Segmente S_3 mit den angrenzenden Kurvenstücken zusammenfügt, welche von den Tangenten t_{13}, t_{23} herrühren, und dann die auf der Vorder- oder Rückseite verlaufende Hälfte einer Meridiankurve b_{13} hinzunimmt. Dies sei jetzt der Querschnitt A_3 . Er besteht aus Stücken der reellen Kurvenzüge und aus einer halben Meridiankurve. Leitet man an ihm ein reelles Integral entlang, so gibt es, allgemein zu reden, eine komplexe Periode, deren imaginärer Teil gleich $i \cdot \frac{\beta_{13}}{2}$ ist, wenn $i\beta_{13}$ die Periode ist, welche das Integral bei Durchlaufung der ganzen Meridiankurve b_{13} gewinnt.

3. Bei beiden begrenzenden Tangenten wird das im Endlichen befindliche Segment benutzt. (Fig. 28.)

Dann muß man zwei halbe Meridiankurven, $\frac{b_{13}}{2}$ und $\frac{b_{23}}{2}$, zu Hilfe nehmen, um mit den beiden S_3 und den aus t_{13}, t_{23} entstandenen Kurvenstücken zusammen einen geschlossenen Zug zu bilden, der dann als A_3 gelten soll. Die Periode, welche ein reelles Integral erhält, wenn man dasselbe an ihm entlang leitet, hat den imaginären Bestandteil $i \left(\frac{\beta_{13} + \beta_{23}}{2} \right)$.

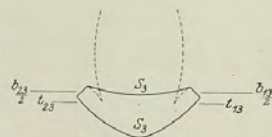


Fig. 28.



§ 13.

Die Perioden a_{ik} .

Wenn wir in dieser Weise an den in Fig. 14 bis 18 gezeichneten Kurven resp. den zugehörigen Flächen die Querschnitte A_1, A_2, A_3, A_4 ausführen und an ihnen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3, \mathfrak{Z}_4$ entlang leiten, erhalten wir Werte der a_{ik} , deren imaginäre Bestandteile in den folgenden Tabellen zusammengestellt sind auf Grund der Tabelle des § 8, die das Verhalten der \mathfrak{Z} an den b_{ik} angab.

I. Vierteilige Kurve. Alle a_{ik} sind reell.

II. Dreiteilige Kurve. Die imaginären Bestandteile der a_{ik} sind:

	A_1	A_2 mit $-\frac{b_{21}}{2}$	A_3	A_4 mit $+\frac{b_{21}}{2}$
\mathfrak{Z}_1	0	0	0	0
\mathfrak{Z}_2	0	$-i\pi$	0	$+i\pi$
\mathfrak{Z}_3	0	0	0	0
\mathfrak{Z}_4	0	$+i\pi$	0	$-i\pi$

III. Zweiteilige Kurve.

	A_1 mit $-\frac{b_{14}}{2}$	A_2 mit $-\frac{b_{24}}{2}$	A_3	A_4 mit $+\frac{b_{14}+b_{24}}{2}$
\mathfrak{Z}_1	$-i\pi$	0	0	$+i\pi$
\mathfrak{Z}_2	0	$-i\pi$	0	$+i\pi$
\mathfrak{Z}_3	0	0	0	0
\mathfrak{Z}_4	$+i\pi$	$+i\pi$	0	$-2i\pi$

IV. Einteilige Kurve.

	A_1 mit $-\frac{b_{13}+b_{24}}{2}$	A_2 mit $-\frac{b_{23}}{2}$	A_3 mit $+\frac{b_{13}+b_{23}}{2}$	A_4 mit $+\frac{b_{14}}{2}$
\mathfrak{Z}_1	0	0	$-i\pi$	$+i\pi$
\mathfrak{Z}_2	0	$+i\pi$	$-i\pi$	0
\mathfrak{Z}_3	$-i\pi$	$-i\pi$	$+2i\pi$	0
\mathfrak{Z}_4	$+i\pi$	0	0	$-i\pi$

V. Gürtelkurve.

	A_1 mit $-\frac{b_{13}+b_{14}}{2}$	A_2 mit $-\frac{b_{23}+b_{24}}{2}$	A_3 mit $+\frac{b_{13}+b_{23}}{2}$	A_4 mit $+\frac{b_{14}+b_{24}}{2}$
\mathfrak{Z}_1	0	0	$-i\pi$	$+i\pi$
\mathfrak{Z}_2	0	0	$-i\pi$	$+i\pi$
\mathfrak{Z}_3	$-i\pi$	$-i\pi$	$+2i\pi$	0
\mathfrak{Z}_4	$+i\pi$	$+i\pi$	0	$-2i\pi$

§ 14.

Berührungskurven.

Die aufgestellten Tabellen gestatten, in sehr einfacher Weise zu diskutieren, wie viele unter gewissen *Berührungskurven* der Kurve vierten Grades reell sind, und mit der Darlegung dieser Verhältnisse mag die gegenwärtige Arbeit abschließen. Ich betrachte die einfacheren derjenigen Probleme, welche bei Clebsch (Crelles Journal, Bd. 63 (1864): Über die Anwendung der Abelschen Funktionen in der Geometrie) behandelt sind, nämlich nur diejenigen, bei denen nicht, wie beim Probleme der Doppeltangenten, eine Unterscheidung gerader und ungerader Charakteristiken notwendig ist. Clebsch findet, resp. bestätigt die (sonst bekannten) Resultate, daß es bei Kurven vierten Grades gibt:

- a) 63 Systeme viermal berührender Kegelschnitte,
- b) 64 Systeme sechsmal berührender Kurven dritter Ordnung,
- c) 728 Systeme viermal oskulierender C_3 ,
- d) 4096 dreimal hyperoskulierende C_3 .

Ich werde angeben, wie viele dieser Systeme resp. einzelner Kurven je nach der Kurvenart reell sind.

Dabei sei es gestattet, des kürzeren Ausdrucks halber wieder von Ordnungskurven statt von Klassenkurven zu reden. Von den vier Integralen \mathfrak{Z}_k benutzen wir nur die drei $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$. Ihre unteren Grenzen verlegen wir in drei übrigens beliebige, reelle Punkte der Kurve vierter Ordnung. Sind dann die Schnittpunkte der Kurve vierter Ordnung mit einer Kurve m -ter Ordnung x_1, x_2, \dots, x_m , so hat man nach dem Abelschen Theoreme:

$$\mathfrak{Z}_k^{x_1} + \mathfrak{Z}_k^{x_2} + \dots + \mathfrak{Z}_k^{x_m} = m \cdot C_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

wobei die Konstanten C_k von der Wahl der unteren Grenzen abhängen, und das Kongruenzzeichen andeuten soll, daß die Gleichung nur modulo der Perioden stattzufinden hat.



So behaupte ich zunächst: Die Konstanten C_k können bei der von uns getroffenen Verabredung reell genommen werden. Wenn nämlich die schneidende Kurve m -ter Ordnung reell ist, so werden von den $4m$ Schnittpunkten die imaginären paarweise konjugiert auftreten und von den reellen auf jedem Zuge der Kurve vierter Ordnung eine gerade Anzahl sich vorfinden. Denn diese Züge haben sog. paaren Charakter. Die Integralsummen aber, die von reeller unterer Grenze beginnend, zu konjugiert imaginären oberen Grenzen hingeleitet werden, sind modulo der Perioden reell. Ebenso die Integralsummen, die von reeller unterer Grenze beginnend, zu einer paaren Anzahl reeller Punkte desselben Kurvenzuges hingeleitet werden. Denn das einzelne solche Integral ist entweder an sich reell oder hat den imaginären Bestandteil $i\pi$; eine paare Anzahl derselben gibt also eine Summe, die modulo $2i\pi$ kongruent mit einer reellen Zahl ist. Hierin liegt der Beweis.

Die Berührungsprobleme, die oben genannt wurden, verlangen nun alle, solche Berührungspunkte zu bestimmen, welche, abgesehen von reellen Multiplis der C_k , als Integralsummen r -te Teile von Perioden ergeben: r ist dabei in den beiden ersten Fällen gleich 2, im dritten gleich 3, im vierten gleich 4 zu setzen. Nach dem allgemeinen Satze, der in § 8 hinsichtlich der Realität der Lösung des Jacobischen Umkehrproblems aufgestellt wurde, ergibt sich daher:

Diejenigen Lösungen der Berührungsprobleme sind reell und nur diejenigen, deren zugehöriger r -ter Periodenteil, modulo $2i\pi$, den imaginären Bestandteil 0 oder $i\pi$ aufweist.

§ 15.

Anzahl der reellen Berührungskurven.

Die Perioden, welche die \mathfrak{S}_k bei Integration längs der Querschnitte b_{14}, b_{24}, b_{34} erhalten, sollen einen Augenblick $\beta_{1k}, \beta_{2k}, \beta_{3k}$ genannt werden. Dann ist das allgemeinste Periodensystem, unter $m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3$ ganze Zahlen verstanden, vorgestellt durch:

$$m_1\beta_{1k} + m_2\beta_{2k} + m_3\beta_{3k} + q_1a_{1k} + q_2a_{2k} + q_3a_{3k}.$$

Die verschiedenartigen r -ten Periodenteile erhält man alle, wenn man die m, q auf die Zahlenwerte $0, 1, \dots, (r-1)$ einschränkt und dann durch r dividiert.

Der imaginäre Bestandteil, den die allgemeine Periode enthält, nimmt nun auf Grund der früheren Tabellen bei den einzelnen Kurvenarten folgenden Wert an:

I. Vierteilige Kurve.

\mathfrak{S}_1	$2m_1 i\pi$
\mathfrak{S}_2	$2m_2 i\pi$
\mathfrak{S}_3	$2m_3 i\pi$

II. Dreiteilige Kurve.

\mathfrak{S}_1	$2m_1 i\pi$
\mathfrak{S}_2	$(2m_2 - q_2) i\pi$
\mathfrak{S}_3	$2m_3 i\pi$

III. Zweiteilige Kurve.

\mathfrak{S}_1	$(2m_1 - q_1) i\pi$
\mathfrak{S}_2	$(2m_2 - q_2) i\pi$
\mathfrak{S}_3	$2m_3 i\pi$

IV. Einteilige Kurve.

\mathfrak{S}_1	$(2m_1 - q_3) i\pi$
\mathfrak{S}_2	$(2m_2 + q_2 - q_3) i\pi$
\mathfrak{S}_3	$(2m_3 - q_1 - q_2 + 2q_3) i\pi$

V. Gürtelkurve.

\mathfrak{S}_1	$(2m_1 - q_3) i\pi$
\mathfrak{S}_2	$(2m_2 - q_3) i\pi$
\mathfrak{S}_3	$(2m_3 - q_1 - q_2 + 2q_3) i\pi$

Jetzt lasse man die m, q alle Werte von 0 bis $(r-1)$ annehmen, und sehe nach, für wieviel Wertsysteme von den r^6 überhaupt vorhandenen die imaginären Bestandteile ganzzahlige Multipla von $r i\pi$ werden. So findet man folgende Tabelle:

	I	II	III	IV	V	r^6
$r=2$	64	32	16	8	16	64
$r=3$	27	27	27	27	27	729
$r=4$	512	256	128	64	128	4096

Die Zahlen der Tabelle geben dann zugleich an, wie viele der verschiedenartigen r -ten Periodenteile zu Umkehrproblemen mit reellen Lösungen Anlaß geben. Aber unter ihnen ist im Falle a und im Falle c noch



eine uneigentliche Lösung auszuschneiden. Denn setzt man alle m und q gleich Null, so erhält man in den genannten Fällen statt eines Systems viermal berührender Kegelschnitte bez. viermal oskulierender Kurven dritter Ordnung die doppelt bez. dreimal gezählten geraden Linien der Ebene. Dementsprechend gewinnt man folgende Sätze:

Von den 63 Systemen viermal berührender Kegelschnitte sind in den Fällen I, II, III, IV, V bez. reell:

63, 31, 15, 7, 15.

Für die 64 Systeme sechsmal berührender Kurven dritter Ordnung werden diese Zahlen:

64, 32, 16, 8, 16.

Unter den 728 Systemen viermal oskulierender Kurven dritter Ordnung sind immer und nur

26

reell.

Endlich finden sich unter den 4096 dreimal hyperoskulierenden Kurven dritter Ordnung in den verschiedenen Fällen:

512, 256, 128, 64, 128

reelle.

Von diesen Resultaten kann man das erste, nach einer Bemerkung, die Herr Zeuthen gemacht hat⁴⁾, indirekt bestätigen. Es wurde bereits oben des Zusammenhangs gedacht, der zwischen der Theorie der Kurven vierter Ordnung und der Theorie der Flächen dritter Ordnung besteht. Von den Doppeltangenten der C_4 wird dabei eine ausgezeichnet; sie entspricht dem auf der F_3 angenommenen Projektionspunkte. Die anderen Doppeltangenten sind die Bilder der 27 auf der F_3 verlaufenden geraden Linien. Nun hat Herr Zeuthen bemerkt (Tidsskrift for Mathematik, Bd. 3 (1873), S. 191), daß die aus den 27 Linien zu bildenden 36 Doppelsechsen sich projizieren als die Aggregate der Linienpaare, welche in denjenigen 36 Systemen viermal berührender Kegelschnitte vorkommen, die die ausgezeichnete Doppeltangente nicht als Teilkurve enthalten. Andererseits findet sich in Cremonas „Preliminari di una teoria delle superficie“ (Deutsche Ausgabe, Berlin 1870, S. 221) angegeben, wie viele der 36 Doppelsechsen bei den von Schläfli unterschiedenen Arten der F_3 reell sind; es sind bez.:

36, 16, 8, 4, 12.

Aus ihnen ergibt sich nun z. B. die von uns für die Gürtelkurve V angegebene Zahl 15 folgendermaßen. Die 12 reellen Doppelsechse der ent-

⁴⁾ Vgl. auch eine Arbeit von Herrn Crone in der Tidsskrift for Mathematik, Nov. 1875 [und außerdem die Zusammenfassung seiner Resultate in den Math. Annalen, Bd. 12 (1877)].

sprechenden Fläche enthalten, wie Cremona angibt, keine reelle gerade Linie; ihnen entsprechen also 12 reelle Kegelschnittssysteme bei der C_4 , welche keine der reellen Doppeltangenten als Teilkurve enthalten. Aber es gibt bei dieser C_4 vier reelle Doppeltangenten; ihre Berührungspunkte liegen auf einem Kegelschnitte (vgl. Zeuthen, Math. Annalen, Bd. 7 (1874), S. 412). Indem man eine beliebige derselben mit einer zweiten zusammen als Berührungskegelschnitt auffaßt, erhält man in bekannter Weise ein neues, reelles System von Berührungskegelschnitten, welches dann aber die beiden zunächst nicht benutzten reellen Doppeltangenten ebenfalls als ein Linienpaar enthalten wird. Die Zahl der zu den 12 Systemen zutretenden ist also noch 3, in Übereinstimmung mit dem oben angegebenen Resultate.

Noch möchte ich bei dieser Gelegenheit eine Bemerkung zufügen über eine Arbeit von J. Grassmann (Zur Theorie der Wendepunkte, besonders der Kurven vierter Ordnung, Berlin 1875, Inauguraldissertation). Der Verf. untersucht, zumal für die Kurven vierter Ordnung, die Frage, ob sich zwischen den Wendepunkten analoge Beziehungen entdecken lassen, wie sie z. B. für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der C_4 oder für die Wendepunkte der C_3 gelten. Aber sein Hauptresultat, welches für die C_4 ausgesprochen, behauptet, daß jeder Kegelschnitt, der durch fünf Wendepunkte geht, deren noch drei weitere enthält, ist im allgemeinen nicht richtig. Ich überzeugte mich davon zunächst, indem ich die Zeichnungen von Kurven vierter Ordnung durchsah, die Beer in seinen *Tabulae curvarum quarti ordinis usv.* (Bonn 1852) zusammengestellt hat. Bei diesen Kurven liegen immer vier Wendepunkte im Unendlichen, und es kommen Beispiele vor (z. B. Tafel VII, 1), bei denen vier im Endlichen liegende reelle Wendepunkte auftreten, die (auch wenn man der Ungenauigkeit der Zeichnung Rechnung tragen will) unmöglich auf einer zweiten Geraden liegen können, wie es J. Grassmanns Satz in diesem Falle verlangen würde. Es ist die immer so mißliche Anwendung komplizierter Schnittpunktsysteme gewesen, die den Verf. zu dem Fehlschlusse verführte; wie er mir mitteilt, ist das System der 45 Punkte (S. 11 der Arbeit), aus welchem der Schluß auf die Lage der weiteren Wendepunkte gemacht wird, von der besonderen Art, die überhaupt keinen bestimmten Schluß auf weitere Punkte zuläßt. [Die drei Restpunkte, welche die 45 Punkte zu einem vollen Schnittpunktsystem auf der C_4 ergänzen, liegen auf gerader Linie; diese Gerade kann dann in einem Büschel, dessen Mittelpunkt selbst der C_4 angehört, beliebig angenommen werden.]

München, im April 1876.



XL. Über eine neue Art von Riemannschen Flächen¹⁾.

(Zweite Mitteilung.)

[Math. Annalen, Bd. 10 (1876).]

Der nachstehende Aufsatz gibt eine Fortsetzung der unter gleichem Titel in Bd. 7 der Math. Annalen (1874) erschienenen Arbeit. [Vgl. die auf S. 89 ff. abgedruckte Abh. XXXVIII.] Nachdem ich damals die betr. Flächen überhaupt definiert und an einfachen Beispielen erläutert habe, diskutiere ich jetzt allgemein, für Kurven beliebigen Grades mit einfachen Singularitäten, die *Verzweigung* und den *Zusammenhang* dieser Flächen. Der Fortschritt, den meine jetzige Darstellung aufweist, beruht wesentlich auf dem Satze, den ich neuerdings in der Note: „Über eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Kurve“ mitteilte [vgl. die auf S. 78 ff. abgedruckte Abh. XXXVII]. Aber nicht nur auf diesen Satz, sondern auch die dort im einzelnen befolgte Entwicklung werde ich mich wiederholt beziehen; ich werde daher diese Note weiterhin einfach mit den Worten „Über Singularitäten“ zitieren oder auch nur eine bez. Seitenzahl²⁾ angeben. Andererseits werde ich verschiedentlich Bezug nehmen auf zwei andere, dem gleichen Ideenkreise angehörige Arbeiten, in die ich bereits einige hier nötig werdende Beweise eingeflochten habe, um bei der jetzigen Darstellung mich kürzer fassen zu können. Es ist dies zunächst der unmittelbar vorstehende Aufsatz: *Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades* [Abh. XXXIX]; er mag namentlich auch die Richtung bezeichnen, in welcher ich die hier vorzutragenden Untersuchungen weiter zu führen denke. Es ist andererseits [die oben als Abh. XXXVI abgedruckte] Notiz: *Über den Zusammenhang der Flächen*. Die Auffassung — der zufolge man bei Zusammenhangsbetrachtungen nicht von der Fläche schlechthin, sondern von der *Flächenseite* zu sprechen hat — wird in der genannten Notiz konsequent durchgebildet [siehe besonders

¹⁾ [Vgl. hierzu eine Note „Weitere Mitteilung über eine neue Art von Riemannschen Flächen“ in den Erlanger Sitzungsberichten vom 11. Mai 1874.]

²⁾ [Die in eckigen Klammern stehenden Seitenzahlen beziehen sich auf den vorliegenden Wiederabdruck.]

S. 65]. Dies veranlaßt mich, weiterhin einige derjenigen Festsetzungen, die ich in meinem ersten Aufsätze über die neue Art der Riemannschen Flächen traf, schärfer zu fassen³⁾.

§ 1.

Anordnung der Blätter. Bedeutung der reellen Wendetangenten und der isolierten Doppeltangenten.

In der zuletzt genannten Notiz „Über den Zusammenhang der Flächen“ habe ich auf [S. 69] auf die enge Beziehung aufmerksam gemacht, welche zwischen der neuen Riemannschen Fläche und der v. Staudtschen Imaginärtheorie besteht, und habe entwickelt, daß man dementsprechend die Blätter der Fläche mit *Indikatrizen* überdecken könne, die einen bestimmten *Sinn* besitzen. Durch ihn sollte dort in derselben Weise eine Unterscheidung zwischen den beiden Seiten einer Fläche ermöglicht werden, wie dies gewöhnlich durch Angabe des Sinnes der Flächennormale geschieht. Hier, wo die prinzipiellen Fragen, die ich damals behandelte, zurücktreten, will ich mich der gewöhnlich gebrauchten bequemeren Anschauung bedienen. Man errichte etwa die Normale immer nach derjenigen Seite, von der aus die betr. Indikatrix in der Richtung des Zeigers einer Uhr durchlaufen erscheint, und bezeichne dann diejenigen Blätter der Fläche, deren Normale auf den Beschauer zugerichtet ist, als *obere*, die anderen als *untere*.

Es wird im folgenden, wenn nicht ausdrücklich (§ 6) das Gegenteil bemerkt wird, die Gleichung der zu untersuchenden Kurve mit *reellen* Koeffizienten gedacht. Dann ordnen sich die Blätter der Riemannschen Fläche in der Weise zu zwei zusammen, daß die Punkte des einen Blattes die konjugiert imaginären Werte derjenigen repräsentieren, welche im anderen Blatte ihre Darstellung finden. Da der *Sinn* der oben genannten Indikatrizen zwischen den konjugiert imaginären Vorkommnissen scheidet, so ist also von zwei zusammengehörigen Blättern das eine ein *oberes*, das andere ein *unteres*. An jeder Stelle ist die Ebene von einer paaren Anzahl (die auch Null sein kann) von Blättern überdeckt; die halbe Zahl dieser Blätter gehört zu den oberen, die andere Hälfte zu den unteren, und jedes obere Blatt entspricht einem bestimmten unteren.

Um von einem oberen Blatte in ein unteres zu gelangen, gibt es zwei

³⁾ [Beim Wiederabdruck der ersten Mitteilung über neue Riemannsche Flächen (Abh. XXXVIII) sind einige dieser, die reellen Wendetangenten und isolierten Doppeltangenten betreffenden Festsetzungen bereits dementsprechend formuliert, so daß sich ihre nochmalige Korrektur in § 1 der vorliegenden Mitteilung erübrigt. Deshalb konnte letzterer an einigen Stellen gekürzt werden.]



Möglichkeiten. Entweder man geht (sofern es Blätter gibt, die sich durch das Unendliche erstrecken) durch das Unendliche hindurch, wobei sich der Sinn der Flächennormale von selbst umkehrt — oder man überschreitet einen reellen Zug der Kurve, resp. eine reelle Wendetangente oder [in gleich noch näher zu erläuternder Weise] eine isolierte Doppeltangente derselben, wobei man vom oberen Blatte ausgehend in das unmittelbar unter ihm befindliche, zugehörige untere Blatt gelangt.

Auf [S. 94, 95] des ersten Aufsatzes wurde eine Kurve dritter Klasse mit isolierter Doppeltangente betrachtet (Fig. 5 ebenda). Dieselbe erscheint als eine Übergangsform zwischen der allgemeinen, einteiligen und der allgemeinen, zweiseitigen Kurve (Fig. 6, 4); die Doppeltangente geht doppeltzählend aus einem Zuge der letztgenannten Kurve hervor, der die Gestalt einer sehr steilen Hyperbel hat; beim Übergang zu Fig. 6 kommt die Doppeltangente einfach in Wegfall. Die Modifikation, welche die bez. Riemannsche Fläche bei diesem Übergange erleidet, kann man folgendermaßen beschreiben: Von der Fläche der Fig. 5 ausgehend erhält man die Fläche der Fig. 6 der einteiligen Kurve, indem man die beiden an die Doppeltangente hinanreichenden oberen Halbblätter miteinander vereinigt, und ebenso die beiden (zugehörigen) unteren Halbblätter; dagegen erhält man die Fläche der Fig. 4 der zweiseitigen Kurve, indem man jedes der beiden an die Doppeltangente sich hinanziehenden oberen Halbblätter an das zugehörige untere Halbblatt anheftet. — Dieser doppelten Möglichkeit gibt man [am besten Ausdruck, wenn man sagt]: *man stellt sich die Fläche längs der Doppeltangente zerschnitten vor*, wo man dann die beiden Ränder je nach Bedürfnis vereinigen kann. Unter einem Rande der betr. Fläche wird dabei verstanden die Berandung eines oberen Halbblattes zusammen mit der Berandung des gegenüberliegenden unteren; denn sie hängen im Unendlichen zusammen. Wenn später (§ 4) davon die Rede ist, daß, bei der gewöhnlichen Riemannschen Fläche, der hier in Rede stehenden Doppeltangente ein Paar von Fundamentalpunkten entspricht, so hat man sich das so vorzustellen: daß der Umgebung des einen Fundamentalpunktes der eine der hier definierten Ränder, der Umgebung des anderen Fundamentalpunktes der andere Rand zugeordnet ist [vgl. Abh. XXXVI, S. 71—73]. — Diese Erläuterung, die sich zunächst auf den Fall der Kurven dritter Klasse bezog, soll selbstverständlich allgemeine Bedeutung haben, ebenso wie die Bemerkung, [die ich in dem ersten Aufsatz betr. die reellen Wendetangenten machte, daß sie in ihrer Beziehung zur Fläche einfach in derselben Weise vorgestellt werden sollen, wie die reellen Züge der Kurve].

Da bei einer Kurve mit reellen Koeffizienten die imaginären Vorkommnisse immer paarweise als konjugiert imaginäre auftreten, so werden sich bei unseren Flächen alle Besonderheiten, die sich in einem oberen

Blatte einstellen, an derselben Stelle des zugehörigen unteren Blattes wiederholen. Insbesondere, wenn zwei obere Blätter sich in einem Punkte verzweigen, wo dann, irgendwie gestaltet, von diesem Punkte ein Verzweigungsschnitt ausläuft, so verzweigen sich die zugehörigen unteren Blätter an derselben Stelle und man kann dem betr. Verzweigungsschnitte eben die Gestalt des anderen geben. Eine solche Stelle werde ich weiterhin einen *Doppelverzweigungspunkt* nennen [vgl. Abh. XXXIX, S. 114, 115]. Andere Verzweigungspunkte als diese gibt es nicht. Denn sollte ein oberes und ein unteres Blatt durch einen Verzweigungspunkt verbunden sein, so würde von ihm aus eine doppeltzählende, sich selbst konjugierte, d. h. *reelle* Tangente an die Kurve gehen. Das geschieht aber nur bei denjenigen Punkten, welche den reellen Kurvenzügen oder den reellen Wendetangenten oder den isolierten Doppeltangenten angehören; und deren Bedeutung für die Riemannsche Fläche ist bereits untersucht. — Es wird also auch nie ein oberes und ein unteres Blatt durch einen Verzweigungsschnitt verbunden sein, und, zerschneidet man die Fläche längs der reellen Kurvenzüge, der reellen Wendetangenten und (wenn es noch nicht geschehen) längs der isolierten Doppeltangenten, so hängen die oberen Blätter der Fläche entweder überhaupt nicht mehr mit den unteren Blättern zusammen oder nur noch möglicherweise im Unendlichen.

§ 2.

Verzweigungspunkte.

Nach der eben gegebenen Erläuterung kann unsere Fläche nur an solchen Stellen Verzweigungspunkte aufweisen, an welchen zwei obere Blätter und zugleich zwei untere Blätter je einen Punkt gemein haben. Das letztere geschieht, wenn sich von dem betr. (reellen) Punkte der Ebene zwei konjugiert imaginäre doppeltzählende Tangenten an die gegebene Kurve legen lassen. Wir werden hier diese Vorkommnisse aufzählen unter der auch später immer festgehaltenen (und dann nicht ausdrücklich hervorgehobenen) Voraussetzung, daß die geg. Kurve nur einfache Singularitäten besitze. Zur Bezeichnung der letzteren verwende ich hier und überhaupt im folgenden dieselben Buchstaben, die ich in der Note „Über Singularitäten“ [S. 78 ff.] gebrauchte. Die hier zunächst in Betracht kommenden Punkte sind die folgenden:

1. die d'' isolierten Doppelpunkte der Kurve,
2. die $\frac{1}{2}w''$ reellen Punkte, von denen zwei konjugiert imaginäre Wendetangenten ausgehen,
3. die $\frac{1}{2}t'''$ reellen Punkte, in denen sich zwei konjugiert imaginäre Doppeltangenten kreuzen.



Ich behaupte nun: Die Punkte 1, 2 liefern in der Tat Doppelverzweigungspunkte, nicht aber die Punkte 3. Mit diesem Satze und der auf die reellen Wendetangenten und isolierten Doppeltangenten bez. Diskussion des vorigen Paragraphen ist der Einfluß, den die Singularitäten der Kurve auf die Gestalt der zugehörigen Riemannschen Fläche haben, erschöpfend angegeben, denn die Bedeutung der reellen nicht isolierten Doppelpunkte, der reellen Spitzen und der nicht isolierten reellen Doppeltangenten ist zu einfach, als daß sie noch besonders erläutert werden müssen [vgl. etwa die Fig. 7 bis 9 und 13 bis 16 der Abh. XXXVIII oder die Fig. 14 bis 18 der vorstehenden Abh. XXXIX]; und die imaginären Doppelpunkte, resp. die imaginären Spitzen, welche die Kurve besitzen mag, treten bei unserer Riemannschen Fläche überhaupt nicht in unmittelbare Evidenz.

Um den ausgesprochenen Satz zu beweisen, benutze ich, wie in der Note „Über Singularitäten“, die Methode, seine Richtigkeit an geeigneten Beispielen zu demonstrieren; ein Beweis, den man vielleicht explizite wünschen mag, daß die jedesmaligen Beispiele hinlänglich allgemein sind, unterdrücke ich der Kürze wegen.

Daß ein isolierter reeller Doppelpunkt Doppelverzweigungspunkt ist, wurde für Kurven vierter Klasse [in Abh. XXXIX, S. 114] gezeigt und ist damit allgemein bewiesen.

Die Notwendigkeit, den reellen Punkt konjugiert imaginärer Wendetangenten als Doppelverzweigungspunkt zu denken, wird sich im folgenden Paragraphen bei Untersuchung der Kurven dritter Ordnung ergeben, deren Fläche, ohne eine solche Annahme, aus getrennten Stücken bestehen würde, was der Irreduzibilität der Kurve widerstreitet.

Endlich um zu sehen, daß der reelle Punkt konjugiert imaginärer Doppeltangenten keine Verzweigung herbeiführt, betrachte man die Kurve vierter Klasse, welche aus zwei sich schneidenden Kreisen gebildet wird. Diese reduzible Kurve hat eine Riemannsche Fläche, die aus den beiden bezüglichen kreisförmigen Doppelblättern gebildet wird. Aber die Kurve hat vier Doppeltangenten und unter ihnen zwei imaginäre. Der reelle Punkt derselben ist der sog. innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Von einer in ihm stattfindenden Verzweigung kann selbstverständlich keine Rede sein.

Wir werden jetzt diese Verhältnisse an dem Beispiele der Kurven dritter Ordnung ausführlich diskutieren. Dieselben sind, wenn sie keinen vielfachen Punkt haben, von der sechsten Klasse und haben dann sechs imaginäre Wendungen; wir werden daher bei ihnen drei Doppelverzweigungspunkte und evtl. sechs übereinander liegende Blätter haben, so daß eine schon ziemlich beträchtliche Anzahl von Elementen zu kombinieren ist. Indem wir die Modifikationen verfolgen, welche die zugehörige Fläche

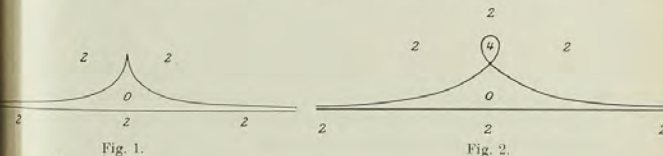
erfährt, wenn die Kurve einen singulären Punkt erhält oder verliert, erhalten wir nebenbei eine bemerkenswerte Veranschaulichung der Plücker'schen Formeln, sofern dieselben aussagen, daß ein Doppelpunkt sechs, eine Spitze acht Wendungen absorbiert.

Noch in einer anderen Richtung scheinen die folgenden Figuren bemerkenswert. Man hat sich seither bei der Wendepunktgleichung der Kurven dritter Ordnung und ähnlichen Problemen wesentlich mit der Aufstellung der Resolventen beschäftigt. Aber man kann die Frage in einem anderen Sinne stellen, indem man verlangt, die einfachsten Näherungsmethoden anzugeben, welche bei numerischer Auflösung solcher Gleichungen am raschesten zum Ziel führen. Die nachfolgenden Figuren geben für die Wendepunktgleichung der Kurven dritter Ordnung in diesem Sinne insofern eine Anleitung, als sie diejenigen Bezirke der Ebene kennen lehren, in welchen man die reellen Punkte der Wendetangenten zu suchen hat, was mit einer Separation der Wurzeln etwa auf gleicher Stufe steht. Das Wendepunktproblem, wie es hier vorliegt, ist freilich noch zu einfach, um den Vorzug einer solchen Behandlung bei praktischen Fällen gegenüber der direkten Auflösungsmethode wesentlich hervortreten zu lassen. Anders wird es aber z. B. schon bei Kurven vierter Ordnung, wenn es sich um numerische Bestimmung der Doppeltangenten oder Wendetangenten handelt.

§ 3.

Die Riemannschen Flächen der Kurven dritter Ordnung.

Bereits in [Abh. XXXVIII, S. 95 (Fig. 11)] wurde die zu einer Kurve dritter Ordnung mit Spitze gehörige Fläche gezeichnet. Da wir weiterhin (§ 4) noch auf diejenige Partie der Fläche, welche in der Nähe des reellen Wendepunktes sich erstreckt, zu reden kommen, so wird es



hier gestattet sein, den Wendepunkt unendlich weit zu projizieren und dadurch die Fig. 1 zu einer symmetrischen zu gestalten.

Nun soll aus der Kurve mit Spitze eine Kurve mit nicht isoliertem Doppelpunkt entstehen. Zu dem Zwecke haben wir die Spitze durch eine



(zunächst kleine) Schleife zu ersetzen. Die Klasse der Kurve wächst bei diesem Übergange um eine Einheit, und die Anzahl der Blätter der Riemannschen Fläche ist [für die verschiedenen Teile der Ebene] dementsprechend die in Fig. 2 angegebene.

Enthielte nun das Innere der Schleife keinen Verzweigungspunkt, so könnten diese Blätter kein zusammenhängendes Ganzes bilden. Ein isolierter Doppelpunkt ist aber nicht vorhanden, es müssen sich also imaginäre Wendungen gebildet haben — was die genannte Bestätigung der Plücker'schen Formeln ist — und sie müssen eine Verzweigung veranlassen — was den von uns für die betr. Behauptung in Aussicht gestellten Beweis ausmacht. Die Plücker'schen Formeln zeigen, daß die nun auftretenden imaginären Wendungen nur in der Zahl 2 vorhanden sind, wir erhalten also nur *einen* Doppelverzweigungspunkt. Wir wollen die beiden von ihm ausgehenden Verzweigungsschnitte in den Doppelpunkt auslaufen lassen (oder vielmehr die beiden Schnitte, die bez. die Durchdringung der beiden oberen und der beiden unteren Blätter vorstellen (und also in der Zeichnung koinzidieren) im Doppelpunkte sich vereinigen lassen). So entsteht folgende Figur:

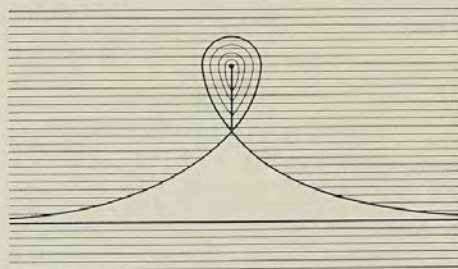


Fig. 3.

Wir denken uns bei ihr die beiden von der Schleife umschlossenen Blätter *zwischen* den beiden sich ins Unendliche erstreckenden Blättern gelegen; dementsprechend wurde die Schleife schwächer ausgezogen, als die übrigen Konturen und der Verzweigungsschnitt.

Von der Kurve mit Doppelpunkt gehen wir, indem wir den Doppelpunkt in dem einen oder anderen Sinne auflösen, zu einteiligen oder zweiteiligen Kurven dritter Ordnung über, die dann von der sechsten Klasse sind. — Die entstehende einteilige Kurve gehört, wie beiläufig bemerkt sei, zu den sogenannten *Viereckskurven*, d. h. sie verläuft in den Vier-

ecken der Figur, die durch die drei reellen Wendetangenten und die gerade Linie, welche die drei Wendepunkte enthält, gebildet wird (Möbius, Über die Grundformen der Linien dritter Ordnung. Abh. der Sächs. Akad. 1848/52, S. 80). Weiterhin leiten wir aus der zweiteiligen Kurve, indem wir das Oval verschwinden lassen, einteilige *Dreieckskurven* ab. Ihre Riemannsche Fläche scheint auf den ersten Blick von der Fläche der Viereckskurven sehr verschieden; dieselben gehen aber, wie noch gezeigt wird, kontinuierlich ineinander über, sobald man den Übergangsfall ins Auge faßt, in welchem sich die drei reellen Wendetangenten in einem Punkte kreuzen. Deshalb werden bei der allgemeinen Betrachtung (§ 5) derartige Vorkommnisse (daß Kurven überschritten werden, welche statt dreier Doppelpunkte, die durch Überkreuzung von Kurvenzweigen oder auch von reellen Wendetangenten entstehen, einen dreifachen Punkt besitzen) nicht weiter diskutiert.

Sobald wir bei der zuletzt gezeichneten Kurve dritter Ordnung den Doppelpunkt auflösen, bilden sich nach Plücker's Angabe [Über Singularitäten, S. 81] zwei reelle Wendungen und vier imaginäre, also bei unseren Flächen zwei neue Doppelverzweigungspunkte. Daß dieselben in

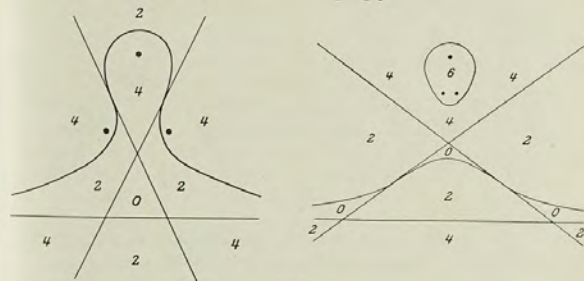


Fig. 4.

den Fig. 4 richtig angegeben sind (wir haben in diesen Figuren zugleich die betr. Blätteranzahlen notiert), ergibt sich, da die Lage des schon vorhandenen Doppelverzweigungspunktes schon bekannt ist, aus Symmetriegründen. Man sieht das deutlicher bei den Figuren, die sich ergeben, wenn man die drei reellen Wendepunkte unendlich weit projiziert (Fig. 5) und, indem wir sie zugrunde legen, erhalten wir die umstehend abgebildeten Riemannschen Flächen (Fig. 6).

Die hyperbelartigen Züge der ersten Figur, das Oval der zweiten und Stücke der bei ihr auftretenden Verzweigungsschnitte, sowie beide Mal



bestimmte Segmente der Wendetangenten sind schwächer ausgezogen, da die von ihnen begrenzten Blätter durch vorgelagerte Blätter verdeckt sind.

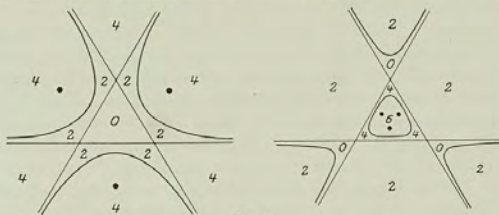


Fig. 5.

Die Verzweigungsschnitte erstrecken sich in der ersten Figur durch das Unendliche hindurch; bei der zweiten Figur schneiden sie sich in einem

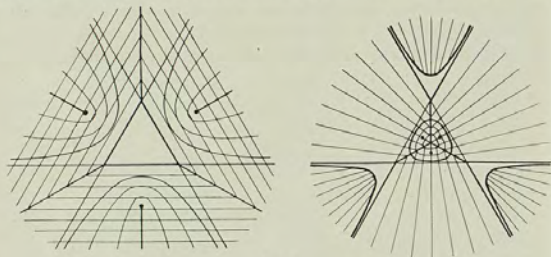


Fig. 6.

Punkte. Es ist wohl kaum nötig, zu bemerken, daß die Lage der Verzweigungsschnitte noch mannigfach abgeändert werden kann. —

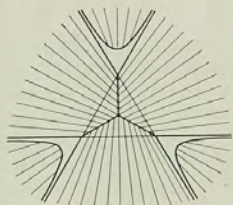


Fig. 7.

Aus der zweiteiligen Kurve mag jetzt eine Kurve mit isoliertem Punkte entstehen, indem wir das Oval in einen Punkt zusammenziehen. Dann hat man die nebenstehende Fig. 7.

Man sieht, daß der Doppelpunkt, wie es die Plücker'schen Formeln verlangen, sechs Wendungen absorbiert hat. Der Doppelpunkt ist ein einfacher Doppelverzweigungspunkt; die drei in der Figur von ihm ausgehenden Verzweigungsschnitte lassen sich

durch einen ersetzen (vgl. auch die etwas anders angeordnete [Fig. 18 der Abh. XXXVIII, S. 97]).

Indem wir endlich das zum Doppelpunkte gewordene Oval vollends verschwinden lassen, entsteht die *einteilige Dreieckskurve*. Um die betr. Fläche aus der zuletzt betrachteten zu erhalten, mache man folgende Überlegung. Indem der Doppelpunkt verschwindet, steigt die Klasse der Kurve um zwei Einheiten. Es lassen sich also von jedem Punkte der Ebene zwei Tangenten *mehr* an die Kurve legen als vorher. Aber für keinen Punkt sind dieselben reell. Es ist also die ganze Ebene mit einem neuen *Doppelblatte* zu überdecken, dessen obere resp. untere Hälfte man sich vor der Vorderfläche resp. hinter der Rückfläche der bisherigen Figur ausgebreitet denken mag. Dasselbe hängt dadurch mit den übrigen Blättern zusammen, daß sich der isolierte Doppelpunkt wieder in *drei* Doppelverzweigungspunkte aufgelöst hat, wie die obestehende Fig. 8 aufweist.

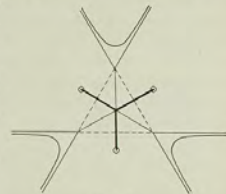


Fig. 8.

In ihr sind diejenigen Konturen, welche für den Beobachter durch zwei Blätter verdeckt erscheinen, nur punktiert; vor die schwach ausgezogenen Konturen ist nur je ein Blatt vorgelagert.

Von der so erhaltenen Zeichnung geht man nun zu der *einteiligen Viereckskurve* zurück, indem man eine Kurve betrachtet, bei der sich die drei reellen Wendetangenten in einem Punkte schneiden (Fig. 9).

Dreht man diese Figur um 60 Grad, so übersieht man, daß dieselbe von der oben für die Viereckskurve gegebenen (Fig. 5 links) wenig verschieden ist. Man hat nur die drei Asymptoten der letzteren

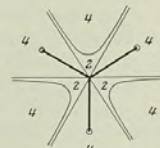


Fig. 9.

zu verschieben, daß sie durch einen Punkt gehen, und die Verzweigungspunkte durch das Unendliche hindurch auf den Mittelpunkt der Figur zurück zu lassen.

Hiermit sind alle Arten der Kurven dritter Ordnung besprochen.

§ 4.

Der Zusammenhang unserer Flächen.

Wenn der Zusammenhang, den unsere Flächen besitzen, bestimmt werden soll, bedarf es vor allen Dingen einer Erörterung über die Gestalt der Fläche in der Nähe eines reellen Wendepunktes. Denn Flächen mit



singulären Punkten sind von den gewöhnlichen Zusammenhangsuntersuchungen ausgeschlossen, und man muß, wenn bei ihnen dennoch von einer Zusammenhangszahl gesprochen werden soll, eine besondere Festsetzung treffen. Eine Kurve mit Wendetangente ist, als Klassenkurve aufgefaßt, Übergangsfall zwischen einer Kurve, welche eine isolierte, und einer Kurve, welche eine nicht isolierte reelle Doppeltangente besitzt (Fig. 10).



Fig. 10.

Der Zusammenhang der Fläche sinkt, wenn wir von der ersten Figur zur letzten fortschreiten, um zwei Einheiten; es scheint daher naturgemäß, der in der Mitte befindlichen Figur die mittlere Zahl beizulegen.

Allgemein: Es sei eine Klassenkurve mit w' reellen Wendetangenten gegeben. So lasse man die letzteren durch kleine Änderung der Konstanten in Doppeltangenten übergehen. Von denselben mögen w'_1 nicht isoliert, w'_2 isoliert sein ($w'_1 + w'_2 = w'$)⁴⁾. Sodann bestimme man den Zusammenhang der Riemannschen Fläche, die zu der modifizierten Kurve gehört, und addiere $w'_1 - w'_2$. Die dann erhaltene Zahl soll der Zusammenhang der ursprünglichen Fläche genannt werden.

Bestimmen wir jetzt den Zusammenhang der „modifizierten“ Fläche, die im ganzen $t'' + w'_2$ isolierte Doppeltangenten enthält. Zu dem Zwecke vergleichen wir sie mit der gewöhnlichen Riemannschen Fläche, die sich ergibt, wenn man, vermöge der Gleichung der Klassenkurve, eine der beiden Linienkoordinaten als Funktion der anderen betrachtet und die komplexen Werte der letzteren über die $x + iy$ -Ebene ausbreitet. Auf diese gewöhnliche Riemannsche Fläche ist unsere im allgemeinen eindeutig abgebildet. Eine Ausnahme verursachen nur die isolierten reellen Doppeltangenten, die ihrer ganzen Erstreckung nach auf unserer Fläche liegen, während ihnen auf der gew. Fläche je ein Punktepaar entspricht. Da nun die gewöhnliche Riemannsche Fläche den Zusammenhang $2p$ aufweist, so erhält unsere „modifizierte“ Fläche nach einem schon im § 1

⁴⁾ Vielleicht gibt es Fälle, in denen eine solche Modifikation nicht möglich ist, ohne daß gleichzeitig andere Doppeltangenten verschwinden usw. In solchen Fällen reicht der Wortlaut des Textes nicht mehr aus; es wird aber leicht sein, die Darstellung des Textes dennoch zu verwenden.

besprochenen [in Abh. XXXVI, S. 70] aufgestellten Satze⁵⁾ den Zusammenhang:

$$2p + 2w'_2 + 2t'',$$

und also unsere ursprüngliche Fläche den Zusammenhang:

$$Z = 2p + w'_1 + w'_2 + 2t'' = 2p + w' + 2t''.$$

Zu eben dieser Formel würde man geführt, wenn man, ohne sich auf eine nähere Untersuchung der reellen Wendepunkte und ihres Einflusses auf den Zusammenhang einzulassen, einfach von dem Umstande ausginge, daß den nach ihrer ganzen Erstreckung auf unseren Flächen liegenden reellen Wendetangenten auf der gewöhnlichen Riemannschen Fläche nur je ein Punkt entspricht, und dann den eben zitierten Satz anwendete. Ein solches Verfahren wäre natürlich an sich nicht gerechtfertigt, da der betr. Satz an der angeführten Stelle nur unter Voraussetzungen bewiesen ist, die hier nicht zutreffen (die Existenz singulärer Punkte blieb ausgeschlossen). Vielmehr hat man in der Übereinstimmung nur eine Bestätigung dafür zu erblicken, daß die oben getroffene, die Wendepunkte betr. Festsetzung naturgemäß ist.

Wir werden nun in den folgenden beiden Paragraphen versuchen, die jetzt für Z gewonnene Formel direkt, ohne auf die gewöhnliche Riemannsche Fläche zurückzugehen, aus der Gestalt der Kurven n -ter Klasse zu beweisen. Mir scheint diese Aufgabe besonders deshalb interessant, weil sie zeigt, daß wir die jedenfalls sehr mannigfachen Gestalten dieser Kurven doch schon mit Hilfe der jetzt bekannten Sätze bis zu einem gewissen Grade beherrschen.

Inzwischen werde hier ein instruktives Beispiel vorausgeschickt, in welchem sich die direkte Abzählung unmittelbar gestaltet.

Es sei die Klasse k der Kurve und die Ordnung n derselben eine gerade Zahl:

$$k = 2\alpha, \quad n = 2\alpha.$$

Dann kann die Kurve — und das soll hier vorausgesetzt werden — möglicherweise ohne jeden reellen Zug sein. Auf den von uns festgehaltenen Standpunkt der Allgemeinheit sind von den Singularitätenanzahlen w', t', r', d' in diesem Falle gleich Null zu setzen, während t'', d'', t''', d''' beliebige Werte haben, die untereinander und mit α und α nur durch die Plücker'schen Formeln und durch die Relation:

$$\alpha + t'' = \alpha + d''$$

⁵⁾ Derselbe lautet: Sind zwei Flächen im allgemeinen eindeutig aufeinander bezogen, doch so, daß die eine μ , die andere ν Fundamentalpunkte trägt, so ist der Zusammenhang der ersten, vermehrt um μ , gleich dem Zusammenhang der zweiten, vermehrt um ν .



verbunden sind (in welche in diesem Falle die allgemeine

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d''$$

übergeht).

Betrachten wir jetzt die zugehörige Riemannsche Fläche. Dieselbe überdeckt die ganze Ebene mit \varkappa unbegrenzten Doppelblättern, die durch $d'' + \frac{1}{2}w''$ Doppelverzweigungspunkte miteinander verbunden sind. Wären diese Verzweigungspunkte nicht vorhanden, so käme als Zusammenhangszahl $-2(\varkappa - 1)$. Denn jedes die ganze Ebene überdeckende Doppelblatt hat (wie die als Doppelfläche betrachtete Ebene selbst) den Zusammenhang Null, und für die Trennung der \varkappa Bestandteile voneinander hat man $(\varkappa - 1)$ mal (-2) in Anrechnung zu bringen. Diese Zahl $-2(\varkappa - 1)$ wird dann durch jeden Verzweigungspunkt um eine Einheit, durch jeden Doppelverzweigungspunkt also um zwei Einheiten erhöht. Somit kommt

$$Z = -2(\varkappa - 1) + 2d'' + w''.$$

Dies aber ist in der Tat gleich $2p + w' + 2t''$, wie sich folgendermaßen ergibt. Zunächst ist

$$p = \frac{k-1 \cdot k-2}{2} - t - w = (2\varkappa - 1)(\varkappa - 1) - t'' - t''' - w''$$

und insbesondere $w' = 0$,

$$\text{also } 2p + w' + 2t'' = 2(\varkappa - 1)(2\varkappa - 1) - 2t''' - 2w''.$$

Dann aber gibt die Plücker'sche Formel

$$2v = 2\varkappa(2\varkappa - 1) - 2t'' - 2t''' - 3w''.$$

Aus ihr folgt:

$$2p + w' + 2t'' = 2v - 2(2\varkappa - 1) + 2t''' + w''$$

und dieses setzt die angegebene Relation:

$$r + t'' = \varkappa + d''$$

unmittelbar in die gewünschte Gestalt um:

$$2p + w' + 2t'' = -2(\varkappa - 1) + 2d'' + w''.$$

§ 5.

Direkte Bestimmung der Zusammenhangszahl.

Die direkte Begründung der Formel

$$Z = 2p + w' + 2t''$$

aus der Gestalt der Kurve soll jetzt in folgender Weise geführt werden. Wir zeigen zunächst, daß man für jede Klasse k Beispiele angeben kann, in denen die Formel richtig ist. Wir zeigen sodann, daß sie richtig bleibt,

wenn man von der im Beispiele benutzten Kurve zu einer beliebigen anderen Kurve derselben Klasse übergeht.

Die Wahl des anfänglichen Beispiels kann natürlich auf sehr mannigfaltige Weise geschehen; man könnte z. B. für ein gerades k die zuletzt betrachteten Kurven wählen, welche keinen reellen Zug enthalten⁶⁾. Da ich aber weiterhin verschiedene Sätze brauche, die ich in dem Aufsätze „Über Singularitäten“ zusammengestellt habe, so ziehe ich es vor, mich überhaupt genau an diesen Aufsatz anzuschließen. Es sind nur die Betrachtungen, die dort für Ordnungskurven angestellt wurden, hier durchgängig dualistisch auf Klassenkurven zu übertragen.

Beginnen wir damit, die dort zugrunde gelegten Beispiele [S. 83 ff.] nach dualistischer Übertragung für die hier vorliegende Fragestellung zu verwerten.

Ist k gerade $= 2\varkappa$, so nehme man [S. 83] \varkappa Ellipsen, deren jede mit jeder anderen vier reelle Tangenten gemein hat, und konstruiere aus ihnen eine allgemeine Kurve der Klasse $2\varkappa$, indem man bei jeder dieser Tangenten eines der beiden Segmente, in die sie durch ihre Berührungspunkte zerlegt wird, in zwei reelle Kurvenzüge spaltet, während man das andere Segment verschwinden läßt. (Dies ist also dasselbe Verfahren, welches insbesondere für Kurven vierter Klasse im vorstehenden Aufsätze angewandt wurde und dort ausführlich erläutert ist.) Jede dieser Operationen, deren Anzahl $2\varkappa(\varkappa - 1)$ ist, erhöht den Zusammenhang der ursprünglichen Riemannschen Fläche um zwei Einheiten; derselbe wird also

$$Z = -2(\varkappa - 1) + 4\varkappa(\varkappa - 1) = (k - 1)(k - 2),$$

da das Aggregat der nicht verbundenen \varkappa elliptischen Doppelblätter den Zusammenhang $-2(\varkappa - 1)$ aufweist und bei dem Änderungsprozesse keine Verzweigungen entstanden sind. — Der gefundene Wert von Z stimmt überein mit der allgemeinen Formel

$$Z = 2p + w' + 2t'',$$

insofern im Beispiele überhaupt keine Wendungen oder Doppeltangenten vorhanden sind, und also:

$$p = \frac{k-1 \cdot k-2}{2}, \quad w' = 0, \quad t'' = 0.$$

Ist k dagegen ungerade, so setze man dasselbe $= 2\varkappa + 3$ und zeichne,

⁶⁾ In meiner oben angeführten Note (Erlanger Berichte 1874) hatte ich eine Kurve benutzt, die in lauter einzelne Punkte zerfallen war [was zwar zu dem gewünschten Resultat führte, aber Bedenken verursachen kann und jedenfalls besondere Vorsicht erfordert, da jede Gerade durch einen dieser Punkte geradeso als Spitzentangente anzusehen ist, wie jeder Punkt auf einer Geraden als Wendepunkt. K.].



analog wie auf [S. 84], κ Ellipsen und eine Kurve dritter Klasse. Das Aggregat der bez. zugehörigen Flächen hat als Zusammenhangszahl

$$2 - 2\kappa = -2(\kappa - 1),$$

und geht man nun zu einer allgemeinen Kurve k -ter Klasse über, indem die $2\kappa(\kappa - 1)$ reellen Tangenten, die den Ellipsen zu zwei gemeinsam sind, und die 6κ reellen Tangenten, welche gleichzeitig eine Ellipse und die Kurve dritter Klasse berühren, in reelle Kurvenzüge spaltet, so kommt

$$Z = -2(\kappa - 1) + 4\kappa(\kappa - 1) + 12\kappa = (k - 1)(k - 2),$$

was wiederum stimmt.

Von diesen Beispielen ausgehend zeigen wir zunächst: *Die Formel*

$$Z = 2p + w' + 2t''$$

gilt für alle allgemeinen Klassenkurven, d. h. für solche, die keine Doppel- und Wendetangenten besitzen.

Zu dem Zwecke lassen wir die einzelne in Betracht kommende Kurve, je nachdem k gerade oder ungerade, aus dem ersten oder zweiten der gegebenen Beispiele nach Anleitung von [S. 83f.] entstehen. Dann werden, allgemein zu reden, eine Anzahl einzelner Kurven überschritten werden müssen, bei denen die Riemannsche Fläche eine wesentliche Gestaltsänderung erfährt, und es ist zu zeigen, daß trotz der Änderung die Zusammenhangszahl dieselbe geblieben ist. Die hier in Betracht zu ziehenden Vorkommnisse beziehen sich entweder darauf, daß eine Kurve überschritten wird, bei der eine besondere Singularität auftritt, oder daß bei der betr. Kurve die immer vorhandene Singularität ihre Bedeutung für die Riemannsche Fläche wechselt. Mit Rücksicht auf die oben (§ 2) gegebene Erörterung über den gestaltlichen Einfluß, den die Singularitäten der Kurve auf deren Riemannsche Fläche haben, und im Anschlusse an die Entwicklung der [S. 81] zeigt sich, daß für jede der beiden Arten nur *eine* Möglichkeit in Betracht zu ziehen ist, nämlich bez.:

das Auftreten einer reellen, nicht isolierten oder isolierten Doppeltangente

und der Übergangsprozeß, der dem Verschwinden einer Einbuchtung (Über Singularitäten, [S. 80]) dualistisch entspricht und bei dem daher *ein nicht isolierter Doppelpunkt zum isolierten wird.*

Der Einfluß, den diese Vorkommnisse auf die Gestalt der Riemannschen Fläche und damit auf ihre Zusammenhangszahl haben, wurde aber schon in den früheren Aufsätzen, sowie in § 1, 2 des vorliegenden hinlänglich erörtert. Wenn eine nicht isolierte Doppeltangente entsteht, so zieht sich ein „Band“ der betr. Riemannschen Fläche in ein doppelt-

zählendes Segment einer geraden Linie zusammen und kommt so in Wegfall; hernach aber gestaltet sich das ergänzende Segment der betr. geraden Linie zu einem Bande um, und der Zusammenhang hat auf der einen Seite zwei verloren, um auf der anderen zwei zu gewinnen. — Das Entstehen der isolierten Doppeltangente beeinflusst den Zusammenhang nach § 1 überhaupt nicht. Denn es ist damit gleichbedeutend, daß man in der betr. Riemannschen Fläche einen Rückkehrschnitt ausführt. Die Ränder dieses Rückkehrschnittes werden dann später nur in umgekehrter Weise zusammengefügt. — Endlich das zweite der angegebenen Vorkommnisse wurde auf [S. 114f.] des Aufsatzes „Über Integrale“ ausführlich betrachtet; die bes. Voraussetzung, die dort gemacht ist, daß bloß Kurven der vierten Klasse zu untersuchen sind, beeinflusst offenbar nicht die Allgemeingültigkeit der dort gegebenen Entwicklung.

Damit ist der gewünschte Beweis bereits erbracht. Der Zusammenhang bleibt bei der allgemeinen Klassenkurve immer $2p + w' + 2t''$ oder besser, da $w' = 0, t'' = 0$, er bleibt $= 2p$.

Um den Beweis jetzt auf solche Kurven, die Doppel- und Wendetangenten haben, auszudehnen, verfahren wir wie auf [S. 85]. Jede solche Kurve kann aus einer unmittelbar benachbarten allgemeinen Klassenkurve abgeleitet werden. Das Geschlecht der letzteren sei $[p]$. So wird die zu untersuchende Kurve ein Geschlecht haben:

$$p = [p] - t' - t'' - t''' - w' - w'',$$

wo t', t'' usw. die immer festgehaltene Bedeutung haben [S. 78 ff.]. Der Zusammenhang der Fläche, die zu der allgemeinen Kurve gehört, ist

$$[Z] = 2[p],$$

der Zusammenhang der zu untersuchenden Fläche soll werden

$$Z = 2p + w' + 2t'' = 2[p] - 2t' - 2t''' - w' - 2w'',$$

und es ist also zu zeigen, daß:

$$Z = [Z] - 2t' - 2t''' - w' - 2w''.$$

Mit anderen Worten, es ist zu zeigen:

Das Entstehen

- einer nicht isolierten reellen Doppeltangente,*
- einer imaginären Doppeltangente,*
- einer reellen Wendung,*
- einer imaginären Wendung*

erniedrigt den Zusammenhang bez. um 2, 2, 1, 2 Einheiten.

Dagegen führt das Entstehen einer isolierten reellen Doppeltangente keine Erniedrigung herbei.



Von diesen Sätzen können diejenigen als bewiesen gelten, welche sich auf die reellen Doppeltangenten beziehen. Auch der Einfluß der reellen Wendungen ist damit gegeben, denn sie sollen nach der im vorigen Paragraphen getroffenen Festsetzung die Mitte halten zwischen den isolierten und den nicht isolierten reellen Doppeltangenten.

Was die imaginären Doppeltangenten und Wendetangenten betrifft, so zeigt der Satz 3 der [S. 85]:

Der reelle Punkt zweier konjugiert imaginärer Doppeltangenten absorbiert zwei, und der reelle Punkt zweier konjugiert imaginärer Wendetangenten absorbiert drei reelle isolierte Doppelpunkte.

Es rücken daher in diese reellen Punkte zwei, bzw. drei Doppelverzweigungspunkte der Fläche zusammen, um (nach § 2) sich im ersten Falle zu kompensieren und sich im zweiten Falle auf nur einen Doppelverzweigungspunkt zu reduzieren. Beidemale verliert also die Fläche zwei Doppelverzweigungspunkte und also sinkt der Zusammenhang um vier Einheiten. Das macht für die einzelne imaginäre Doppeltangente oder Wendetangente zwei Einheiten, w. z. b. w.

Und hiermit ist die geforderte allgemeine Abzählung geleistet.

§ 6.

Komplexe Kurven.

Es wird hier am Platze sein, noch einige Worte über die Riemannsche Fläche solcher Kurven zu sagen, deren Gleichung komplexe Koeffizienten besitzt [S. 86]. Eine solche Kurve von der Ordnung n und der Klasse k hat auf dem hier festgehaltenen Standpunkte der Allgemeinheit eine Anzahl (δ) reeller isolierter Punkte und eine Anzahl (τ) reeller isolierter Tangenten. Sie besitzt sodann w'' imaginäre Wendetangenten, t''' imaginäre Doppeltangenten (und analog imaginäre Spitzen resp. Doppelpunkte).

Man vereinige nun die komplexe Kurve mit der ihr konjugierten. So entsteht eine neue Kurve, deren Gleichung *reelle* Koeffizienten hat, von der Ordnung $2n$, der Klasse $2k$, mit $2w''$ imaginären Wendetangenten usw. und δ isolierten reellen Doppelpunkten, τ isolierten reellen Doppeltangenten. Bei ihrer Riemannschen Fläche kennen wir den Zusammenhang und die Verzweigung der Blätter. Fügen wir hinzu, daß zusammengehörige Blätter dieser Fläche notwendig auf die beiden verschiedenen komplexen Kurven Bezug haben, so erhalten wir bezüglich der einzelnen komplexen Kurve folgenden Aufschluß:

Die zugehörige Riemannsche Fläche überdeckt die Ebene mit k einfachen Blättern, und hat die τ reellen isolierten Tangenten zu einfachen Randkurven.

Die Blätter sind durch $\delta + w''$ einfache Verzweigungspunkte verbunden, entsprechend den δ isolierten reellen Punkten und den w'' reellen Punkten der w'' imaginären Wendetangenten.

Der Zusammenhang der Fläche ist

$$z = 2p + \tau,$$

unter p das Geschlecht verstanden.

Was die Ableitung der letzteren Gleichung angeht, so verfähre man etwa folgendermaßen. Die reelle Kurve, welche durch Vereinigung der beiden komplexen entsteht, hat $2w''$ Wendetangenten und $2t''' + k^2$ Doppeltangenten (in die die k^2 gemeinsamen Tangenten der beiden komplexen Kurven eingerechnet sind). Ihr Geschlecht ist also:

$$P = \frac{2k-1 \cdot 2k-2}{2} - 2w'' - 2t''' - k^2.$$

Andererseits ist

$$p = \frac{k-1 \cdot k-2}{2} - w'' - t''',$$

also

$$P = 2p - 1.$$

Der Zusammenhang der Fläche, welche zur reellen Kurve gehört, muß aber nach den früheren Abzählungen sein:

$$Z = 2P + 2\tau.$$

Andererseits ist, da sich diese Fläche aus zwei Bestandteilen vom Zusammenhange z zusammensetzt,

$$Z = 2z - 2.$$

Hieraus folgt durch Elimination das gewünschte Resultat:

$$z = 2p + \tau.$$

Als Beispiele betrachte man die Riemannschen Flächen, die zum einzelnen komplexen Punkte oder zum komplexen Kegelschnitte gehören.

Im ersteren Falle ist $k=1$, $\tau=1$, $\delta=0$. Die Fläche besteht aus einem einfachen Blatte, welches, die ganze Ebene überdeckend, von beiden Seiten an die reelle gerade Linie heranreicht, welche den komplexen Punkt mit seinem konjugierten verbindet, und diese Linie zur Randkurve hat. Wir haben eine einfach zusammenhängende, einfach berandete Fläche.

Bei komplexen Kegelschnitten haben wir nach [S. 86] drei Arten zu unterscheiden. Ist kein reeller Punkt und also auch keine reelle Tangente vorhanden, so besteht die betr. Fläche aus einem nullfach zusammenhängenden, die ganze Ebene überdeckenden Doppelblatte. Aber es können zwei oder vier reelle Punkte vorhanden sein, dann finden sich



auch zwei oder vier reelle Tangenten. Man erhält eine Fläche mit zwei oder vier Randkurven, die zwei oder vier Verzweigungspunkte besitzt und demnach doppelt oder vierfach zusammenhängend ist.

§ 7.

**Bedeutung der reellen Kurvenzüge für die
Riemannsche Fläche.**

Zum Schluß will ich noch einige lose Bemerkungen hinzufügen, die sich wieder auf reelle Kurven beziehen und die Bedeutung erläutern, welche die reellen Züge dieser Kurven für die zugehörige Riemannsche Fläche haben. Es müssen diese Sätze von fundamentaler Wichtigkeit sein, wenn man es unternimmt, bei beliebigen reellen Kurven den Verlauf der Abel'schen Integrale in der Weise zu untersuchen, wie ich es im vorstehenden Aufsätze für die Kurven vierter Klasse begonnen habe. Dabei will ich der Einfachheit wegen hier die Annahme festhalten, daß keine reellen Wendetangenten oder reelle isolierte Doppeltangenten vorhanden sind; eine Ergänzung, welche auf Kurven Bezug nimmt, bei denen diese Singularitäten auftreten, läßt sich leicht zufügen.

Zunächst sage ich: *Wenn eine Kurve C reelle Züge besitzt und man zerschneidet die zugehörige Riemannsche Fläche längs $(C - 1)$ derselben, so zerfällt die Fläche noch nicht.* Denn wenn sie zerfiel, so könnte das nur so geschehen, daß sich zwei zusammengehörige (komplex konjugierte) Bestandteile bildeten. Dieselben werden dann aber notwendig in dem noch unzerschnittenen, letzten Zuge zusammenhängen.

Es folgt hieraus zunächst (natürlich unter der Beschränkung, die wir uns hier im Interesse der Einfachheit der Darstellung auferlegt haben) der Harnacksche Satz (Math. Annalen, Bd. 10 (1876), S. 190): *daß eine Kurve vom Geschlechte p nicht mehr als $(p + 1)$ Züge haben kann.* Hätte sie nämlich $(p + 2)$ Züge, so würde ein Zerschneiden längs $(p + 1)$ derselben noch kein Zerfallen der Fläche herbeiführen, während man doch auf einer $2p$ -fach zusammenhängenden Fläche nicht mehr als p nicht zerstückende Rückkehrschnitte ziehen kann.

Andererseits ergibt sich für die Kurven, deren Zügezahl

$$C > 0, \quad C < p + 1$$

eine bemerkenswerte Einteilung in zwei Arten.

Die Kurven der ersten Art haben die Eigenschaft, daß ihre Riemannsche Fläche, längs der C Züge zerschnitten, zerfällt: bei den Kurven der zweiten Art findet ein solches Zerfallen nicht statt. Die von Herrn Harnack betrachteten Kurven mit $(p + 1)$ Zügen mag man der ersten

Art, die Kurven, welche überhaupt keine reellen Züge besitzen (§ 4), der zweiten Art zurechnen⁵⁾.

Ich erinnere in dieser Beziehung an die früher betrachteten Kurven dritter und vierter Klasse.

Die zweiteilige Kurve dritter Klasse gehört zur ersten, die einteilige zur zweiten Art.

Bei den Kurven vierter Klasse ohne Doppeltangente gehören zur ersten Art die vierteilige und die Gürtelkurve, zur zweiten Art die übrigen, die drei-, zwei-, einteilige und die imaginäre.

Die Kurven derselben Art zeigen eine große Reihe gemeinsamer Eigenschaften. Z. B. kann bei den Kurven der ersten Art durch allmähliches Ändern der Konstanten niemals eine isolierte reelle Doppeltangente neu entstehen, um dann einen $(C + 1)$ -ten Kurvenzug zu liefern; während die Kurven der zweiten Art in dieser Richtung nicht beschränkt sind. Die Kurven der zweiten Art sind sozusagen noch entwicklungsfähig, während es die Kurven der ersten Art nicht sind. Doch soll hier auf diese Verhältnisse noch nicht näher eingegangen werden.

München, im April 1876.

[Es hat mir immer vorgeschwebt, daß man durch Fortsetzung der Betrachtungen des Textes Genaueres über die Gestalten der reellen ebenen Kurven beliebigen Grades erfahren könne, nicht nur, was die Zahl ihrer Züge, sondern auch, was deren gegenseitige Lage angeht. Ich gebe diese Hoffnung auch noch nicht auf, aber ich muß leider sagen, daß die weiter unten mitzuteilenden Realitätstheoreme über Kurven beliebigen Geschlechtes [vgl. Abh. XLII] (welche ich aus der allgemeinen Theorie der Riemannschen Flächen, speziell der „symmetrischen“ Riemannschen Flächen ableite) hierfür nicht ausreichen, sondern nur erst einen Rahmen für die zu untersuchenden Möglichkeiten abgeben. In der Tat sind ja die doppelpunktslosen ebenen Kurven n -ten Grades für $n > 4$ keineswegs die allgemeinen Repräsentanten ihres Geschlechtes, sondern, wie man leicht nachrechnet, durch $(n - 2)(n - 4)$ Bedingungen partikularisiert. Da man über die Natur dieser Bedingungen zunächst wenig weiß, kann man noch nicht von vornherein sagen, daß alle die Arten reeller Kurven, die man gemäß meinen späteren Untersuchungen für $p = \frac{n-1 \cdot n-2}{2}$ findet, bereits im Gebiete besagter ebener Kurven n -ter Ordnung vertreten sein müßten, auch nicht, daß ihnen immer nur eine Art ebener Kurven entspräche. K.]

⁵⁾ [Bei Kurven erster Art hat man $\lfloor \frac{p+2}{2} \rfloor$ Unterarten, bei denen der zweiten Art $p + 1$ Unterarten zu unterscheiden. Siehe Abh. XLII. K.]



XLI. Über den Verlauf der Abelschen Integrale bei den Kurven vierten Grades.

(Zweiter Aufsatz.)

[Math. Annalen, Bd. 11 (1876/77).]

In der ersten unter dem vorstehenden Titel erschienenen Mitteilung [vgl. die oben abgedruckte Abb. XXXIX] habe ich für die verschiedenartigen Kurven vierten Grades, welche reelle Züge besitzen, im Anschlusse an eine bestimmte Zerschneidung der zugehörigen Riemannschen Fläche reelle Normalintegrale hergestellt, ihren Verlauf im allgemeinen beschrieben und Schlüsse auf die Realität gewisser Berührungskurven gemacht. Dabei bin ich aber noch nicht auf eine Diskussion derjenigen Fragen eingegangen, welche mit der Aufstellung der sogenannten Θ -Charakteristiken zusammenhängen. Eben diese werde ich im nachstehenden angreifen und im speziellen Falle erledigen, insofern ich wenigstens für die *vierteilige* Kurve und diejenige Zerschneidung der zugehörigen Riemannschen Fläche, die ich in der früheren Arbeit angab, den in Betracht kommenden ausgezeichneten Berührungskegelschnitt bestimme und die Charakteristiken, welche den einzelnen Doppeltangenten beizulegen sind, wirklich anschreibe.

Die Methode, deren ich mich dabei bediene, ist im wesentlichen dieselbe, welche ich in dem früheren Aufsätze gebrauchte: die Methode der *Kontinuität*. So wie ich dort die allgemeine Kurve vierter Ordnung aus dem Kegelschnittpaare entstehen ließ, so jetzt aus einer symmetrisch gestalteten Kurve, oder aus einem hyperelliptischen Grenzfalle. Eigentliche hyperelliptische Kurven vierter Ordnung vom Geschlechte $p=3$ gibt es bekanntlich nicht; aber man kann eine Kurve vierter Ordnung, die in einen doppeltzählenden Kegelschnitt mit acht Scheiteln (sommets, Verzweigungspunkten) ausgeartet ist, als solche auffassen. Die Betrachtung solcher mehrfacher Kurven, die in der Theorie der Kurvensysteme längst üblich ist, scheint für Fragen der hier vorliegenden Art in der That von weitreichendem Vorteile.

Ein analoger Übergang zu einem doppeltzählenden Kegelschnitte kann auch bei den Kurven vierter Ordnung, welche weniger als vier Züge be-

sitzen, bewerkstelligt werden und man kann an diesen Übergang ganz ähnliche Schlüsse knüpfen. Nur werden von den acht Scheiteln, die der Kegelschnitt trägt, einige imaginär sein. Da ich in der weiteren Darstellung hierauf nicht mehr zurückkomme, so bemerke ich nur, daß der Zeuthensche Satz, demzufolge eine Kurve vierter Ordnung immer vier reelle Doppeltangenten besitzt, sich dann als unmittelbare Konsequenz der Tatsache ergibt, daß acht reelle oder imaginäre (doch paarweise konjugiert imaginäre) Punkte immer mindestens vier reelle Verbindungsgeraden haben; auch ergibt sich ohne weiteres, daß immer vier Doppeltangenten „von der ersten Art“ sind.

§ 1.

Die Kurve vierter Ordnung. Imaginäre Bestandteile der Integralwerte.

Statt der vierteiligen Kurve vierter Klasse, welche ich in dem früheren Aufsätze betrachtete, werde ich im folgenden, unter Benutzung resp. Übertragung der damals abgeleiteten Resultate, die vierteilige Kurve vierter Ordnung in der von Plücker gegebenen Gestalt benutzen; sie ist für die hier zu verfolgenden Zwecke übersichtlicher, insofern nicht mehr, wie damals, eine explizite Betrachtung imaginärer Elemente eintreten soll.

Dementsprechend sollen die vier Züge der Kurve (siehe Fig. 1) mit *I, II, III, IV* bezeichnet sein; die beigesetzten Pfeile geben diejenigen Richtungen an, welche als positiv zu gelten haben. Unter \mathfrak{S}_k ($k=1, 2, 3$) werden die überall endlichen Integrale verstanden, wie sie in dem ersten Aufsätze als Normalintegrale eingeführt wurden, und $a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, a_{4k}$ sollen die (in unserem Falle reellen) Periodizitätsmoduln bedeuten, welche \mathfrak{S}_k ergibt, wenn es im positiven Sinne an den Ovalen *I, II, III, IV* entlangeleitet wird. Zwischen ihnen hat man die Relation¹⁾:

$$a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} = 0.$$

¹⁾ Von dieser Relation kann man sich folgendermaßen Rechenschaft geben, ohne die zur Kurve gehörige Riemannsche Fläche zu betrachten. Man nehme auf jedem der Ovale *I, II, III, IV* einen festen Punkt an und wähle diese vier Punkte als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels. Jeder Kegelschnitt desselben schneidet das einzelne Oval in noch einem beweglichen Punkte, und läßt man einen dieser Punkte sein Oval in positivem Sinne durchlaufen, so geschieht das Entsprechende von seiten der übrigen. Werden nun die vier beweglichen Punkte in einer Lage mit a_1, a_2, a_3, a_4 , in einer anderen mit b_1, b_2, b_3, b_4 bezeichnet, so ist nach dem Abelschen Theoreme:

$$0 = \int_{a_1}^{b_1} d\mathfrak{S}_k + \int_{a_2}^{b_2} d\mathfrak{S}_k + \int_{a_3}^{b_3} d\mathfrak{S}_k + \int_{a_4}^{b_4} d\mathfrak{S}_k$$

und hieraus folgt die Relation des Textes, wenn man die b durch die betr. Ovale hindurchwandern läßt, bis sie wieder mit den a zusammenfallen.

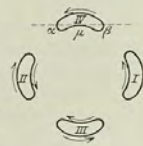


Fig. 1.



Als untere Grenze der Integrale wähle ich einen beliebigen Punkt des Ovals *IV*, etwa μ , wie es in Fig. 1 angegeben ist (weiterhin werde ich dem μ eine noch speziellere Lage erteilen). Die Tangente in μ schneidet die Kurve noch in zwei weiteren Punkten α , β . So setze ich

$$\int_{\mu}^{\alpha} d\mathfrak{S}_k + \int_{\mu}^{\beta} d\mathfrak{S}_k = C_k,$$

wo die vorkommenden Integrale in der Weise gebildet sein sollen, wie es bei Fig. 1 am einfachsten scheint: Beidmal werde das Integral von μ beginnend längs des Ovals *IV* hingeleitet, und zwar das eine Mal in positiver Richtung bis β , das andere Mal in negativer Richtung bis α . Die C_k sind dann völlig bestimmte, reelle Größen. Sie treten als Konstanten beim Abelschen Theoreme auf. Sind nämlich x_1, \dots, x_{4m} diejenigen Punkte, in denen die Kurve vierter Ordnung durch eine Kurve m -ter Ordnung geschnitten wird, so hat man [modulo der Perioden]:

$$\int_{\mu}^{x_1} d\mathfrak{S}_k + \int_{\mu}^{x_2} d\mathfrak{S}_k + \dots + \int_{\mu}^{x_{4m}} d\mathfrak{S}_k = m \cdot C_k.$$

Die Entwicklungen des ersten Aufsatzes gestatten namentlich auch, die imaginären Bestandteile anzugeben, welche die Integrale \mathfrak{S}_k , modulo $2i\pi$, erhalten, wenn man sie von μ zu einem anderen reellen Kurvenpunkte hinstreckt. Es sind, je nachdem der betr. Punkt den Ovalen *I*, ..., *IV* angehört, die folgenden:

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
\mathfrak{S}_1	$i\pi$	0	0	0
\mathfrak{S}_2	0	$i\pi$	0	0
\mathfrak{S}_3	0	0	$i\pi$	0

Hieran schließen sich nun zwei, für das Nachstehende fundamentale Folgerungen.

A. Ich betrachte zuvörderst diejenigen Argumente, welche, bei der hier gewählten unteren Grenze, den 28 verschiedenen Doppeltangenten beizulegen sind (als Summen der zu ihren Berührungspunkten hingeleiteten Integrale). Wenn x , y die Berührungspunkte einer Doppeltangente bezeichnen, so ist, nach dem Abelschen Theoreme

$$2 \left(\int_{\mu}^x d\mathfrak{S}_k + \int_{\mu}^y d\mathfrak{S}_k \right) = C_k,$$

also

$$\int_{\mu}^x d\mathfrak{S}_k + \int_{\mu}^y d\mathfrak{S}_k = \frac{C_k}{2} + \frac{P}{2},$$

wo $\frac{P}{2}$ eine halbe Periode bedeutet. Wir werden uns dieselbe, wie in dem ersten Aufsatz, in der Form geschrieben denken:

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{2} (m_1 \beta_{1k} + m_2 \beta_{2k} + m_3 \beta_{3k} + q_1 a_{1k} + q_2 a_{2k} + q_3 a_{3k}),$$

wo die Zahlen: $m_1, m_2, m_3, q_1, q_2, q_3$, allgemein zu reden, die Werte 0, 1 annehmen können, und die Bedeutung der β_{ik} durch folgende Tabelle gegeben ist:

	β_{1k}	β_{2k}	β_{3k}
$k = 1$	$2i\pi$	0	0
$k = 2$	0	$2i\pi$	0
$k = 3$	0	0	$2i\pi$

während die a_{ik} reelle Größen vorstellen. Von den $64 \frac{P}{2}$, die es überhaupt gibt, werden nur 28 für die Doppeltangenten benutzt; welche, ist zunächst unbekannt. Aber wir können wenigstens die Werte der zugehörigen m_1, m_2, m_3 unmittelbar angeben, insofern nur von ihnen die imaginären Bestandteile abhängen, welche die Doppeltangenten aufweisen, und wir diese imaginären Bestandteile in der Figur ablesen können.

Offenbar nämlich erhalten die vier Doppeltangenten erster Art, diejenigen, welche bez. ein Oval zweimal berühren, reelle Integralsummen; für sie also ist:

$$m_1, m_2, m_3 = 0, 0, 0.$$

Für diejenigen Doppeltangenten dagegen, welche das Oval *IV* und andererseits bez. *I* oder *II* oder *III* berühren, findet man

$$m_1, m_2, m_3 \text{ bez. gleich } 1, 0, 0, \\ 0, 1, 0, \\ 0, 0, 1.$$

Endlich für diejenigen Doppeltangenten, welche zwei der drei Züge *I*, *II*, *III* berühren, ergibt sich bez.:

$$m_1, m_2, m_3 = 0, 1, 1, \quad (\text{II, III}) \\ = 1, 0, 1, \quad (\text{III, I}) \\ = 1, 1, 0, \quad (\text{I, II})$$

B. Die zweite Folgerung, welche wir an die Tabelle der imaginären Bestandteile knüpfen, bezieht sich auf das Jacobische Umkehrproblem. Das Punktetripel x, y, z , welches durch die Gleichungen:

$$\int_{\mu}^x d\mathfrak{S}_k + \int_{\mu}^y d\mathfrak{S}_k + \int_{\mu}^z d\mathfrak{S}_k = v_k$$



definiert wird, ist nach meiner früheren Angabe, dann und nur dann reell, wenn die v_k , modulo $2i\pi$, die imaginären Bestandteile 0 oder $i\pi$ aufweisen. Für die hier vorliegende, vierteilige Kurve können wir sofort die folgenden, näheren Bestimmungen zufügen, deren Richtigkeit sich unmittelbar ergibt:

1. Wenn die imaginären Bestandteile der v unter eins der folgenden vier Schemata fallen:

$$\begin{array}{l} 0, i\pi, i\pi, \\ i\pi, 0, i\pi, \\ i\pi, i\pi, 0, \\ i\pi, i\pi, i\pi, \end{array}$$

so sind die drei Punkte x, y, z einzeln reell und liegen auf drei verschiedenen Ovalen, nämlich bez. auf *II, III, IV* oder *III, I, IV* oder *I, II, IV* oder *I, II, III*.

2. Wenn aber die imaginären Bestandteile der v resp. gleich sind

$$\begin{array}{l} i\pi, 0, 0, \\ 0, i\pi, 0, \\ 0, 0, i\pi, \\ 0, 0, 0, \end{array}$$

so ist nur einer der drei Punkte x, y, z notwendig reell und bez. auf dem Ovale *I, II, III, IV* befindlich; die beiden anderen Punkte können konjugiert imaginär sein; sind sie aber reell, so liegen sie gemeinsam auf einem, übrigens [vorläufig nicht näher anzugebenden] Ovale.

§ 2.

Berührungskegelschnitte.

Bei der Lösung des Umkehrproblems durch Θ -Funktionen erscheinen die Integralsummen

$$\int_{\mu}^{\alpha} d\mathfrak{Z}_k + \int_{\mu}^{\beta} d\mathfrak{Z}_k + \int_{\mu}^{\gamma} d\mathfrak{Z}_k$$

um bestimmte (nur von μ abhängige) Konstante K_k vermehrt, deren Bestimmung nach Clebsch-Gordan folgendermaßen formuliert werden kann²⁾.

Durch die Punkte α, β , in denen die Tangente des Punktes μ die Kurve vierter Ordnung abermals trifft, kann man Kegelschnitte legen, welche die Kurve in drei weiteren Punkten berühren. Ihre Zahl ergibt sich zunächst gleich 64; aber 28 derselben sind uneigentliche, insofern sie

²⁾ Vgl. hier und im folgenden: Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, herausgegeben von F. Lindemann, Bd. I, 2 (Leipzig 1876); oder auch: H. Weber, Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlechte 3. (Berlin 1876.)

in die Tangente des Punktes μ und je eine der 28 Doppeltangenten zerfallen. Es bleiben 36 *eigentliche* Berührungskegelschnitte, und unter ihnen ist einer, welcher der *ausgezeichnete* heißen soll. Er ist dadurch bestimmt, daß seine drei Berührungspunkte c der transzendenten Gleichung genügen:

$$\Theta\left(\int_{\mu}^c d\mathfrak{Z}_k\right) = 0,$$

und nennt man diese Berührungspunkte einzeln c_1^0, c_2^0, c_3^0 , so ist die in Rede stehende Konstante:

$$K_k = \int_{c_1^0}^{\mu} d\mathfrak{Z}_k + \int_{c_2^0}^{\mu} d\mathfrak{Z}_k + \int_{c_3^0}^{\mu} d\mathfrak{Z}_k.$$

Es ist eine der uns vorliegenden Aufgaben, diesen ausgezeichneten Kegelschnitt (deren Lage übrigens mit der Zerschneidung der Riemannschen Fläche wechselt), in der Figur nachzuweisen. Reell wird er jedenfalls sein; denn nach den im ersten Aufsätze entwickelten Anschauungen sind die 64 *eigentlichen* und *uneigentlichen* Berührungskegelschnitte, von denen eben gesprochen wurde, alle reell.

Orientieren wir uns zunächst überhaupt hinsichtlich der Lage der 36 *eigentlichen* Berührungskegelschnitte. Sind c_1, c_2, c_3 die Berührungspunkte eines solchen, so hat man

$$2\left(\int_{\mu}^{c_1} d\mathfrak{Z}_k + \int_{\mu}^{c_2} d\mathfrak{Z}_k + \int_{\mu}^{c_3} d\mathfrak{Z}_k\right) + \int_{\mu}^{\alpha} d\mathfrak{Z}_k + \int_{\mu}^{\beta} d\mathfrak{Z}_k = 2C_k,$$

oder, da

$$\int_{\mu}^{\alpha} d\mathfrak{Z}_k + \int_{\mu}^{\beta} d\mathfrak{Z}_k = C_k;$$

$$\int_{\mu}^{c_1} d\mathfrak{Z}_k + \int_{\mu}^{c_2} d\mathfrak{Z}_k + \int_{\mu}^{c_3} d\mathfrak{Z}_k \equiv \frac{C_k}{2} + \frac{P}{2}.$$

Setzen wir hier für $\frac{P}{2}$ die 64 Werte ein, deren es fähig ist:

$$\frac{P}{2} = \frac{1}{2}(m_1\beta_{1k} + m_2\beta_{2k} + m_3\beta_{3k} + q_1a_{1k} + q_2a_{2k} + q_3a_{3k}),$$

so erhalten wir neben den 36 *eigentlichen* Berührungskegelschnitten noch einmal die 28 *Doppeltangenten*. Es fällt dann einer der drei Berührungspunkte, etwa c_3 , in μ zurück; das auf ihn bezügliche Integral kommt in Wegfall; und die beiden anderen c_1, c_2 sind die Berührungspunkte der betr. Doppeltangente. *Diejenigen Werte von $\frac{P}{2}$ also, welche bei den Doppeltangenten schon auftreten, kommen bei den eigentlichen Berührungskegelschnitten nicht mehr vor*; wir wollen sie dementsprechend fortan mit $\frac{P'}{2}$ bezeichnen. Die Werte der Zahlen m_1, m'_2, m'_3 , welche sich bei



den $\frac{P'}{2}$ einstellen (ich akzentuiere fortan die m, q , wo sie sich auf eine Periode P' beziehen) haben wir bereits soeben (§ 1) bestimmt; es waren bez. je viermal die folgenden Zahlen:

$$\begin{array}{cc} 1, 0, 0, & 0, 1, 1, \\ 0, 0, 0, & 0, 1, 0, & 1, 0, 1, \\ 0, 0, 1, & 1, 1, 0. \end{array}$$

Zu jedem Wertsysteme der m gehören aber im ganzen acht halbe Perioden, weil die Werte von q_1, q_2, q_3 noch beliebig sind. Demnach hat man den Satz:

Die 36 eigentlichen Berührungskegelschnitte verteilen sich auf sieben Gruppen von je vier und eine Gruppe von acht. Die zugehörigen $\frac{P}{2}$ besitzen nämlich je viermal eins der sieben angeführten Wertsysteme der m , und achtmal tritt das Wertsystem

$$m_1, m_2, m_3 = 1, 1, 1$$

auf.

Es sind insbesondere die acht Kegelschnitte der letzteren Gruppe, auf die wir weiterhin unsere Aufmerksamkeit zu richten haben. Die Summen der zu ihren Berührungspunkten hingeleiteten Integrale haben alle den imaginären Bestandteil $i\pi$; die Berührungspunkte sind also einzeln reell und sind auf die Ovale *I, II, III* verteilt, nach den Ausführungen des § 1. Hiernach ist die Lage der acht Kegelschnitte in der Figur leicht anzugeben. Man denke sich einen Augenblick die Ovale *I, II, III* in isolierte Punkte zusammengezogen. Dann gibt es einen Kegelschnitt, der durch sie und durch α und β hindurchgeht. Er spaltet sich in acht, sobald man statt der isolierten Punkte (zunächst) kleine Ovale setzt, insofern man willkürlich bestimmen kann, ob das Oval mit dem Kegelschnitte einen inneren oder äußeren Kontakt besitzen soll.

§ 3.

Bestimmung der Konstanten K_k .

Ich will die halbe Periode, welche dem ausgezeichneten Kegelschnitte zugehört, mit $\frac{P_k}{2}$ bezeichnen. Dann erhalten die Konstanten K_k die Werte:

$$K_k = -\frac{C_k}{2} - \frac{P_k}{2},$$

oder auch, da es auf ganzzahlige Multipla der Perioden nicht ankommt:

$$K_k = -\frac{C_k}{2} + \frac{P_k}{2}.$$

Addieren wir sie zu den Argumenten, die wir oben (§ 1) den Doppeltangenten beilegen:

$$\frac{C_k}{2} + \frac{P'}{2},$$

so entstehen die sogenannten *Charakteristiken* der Doppeltangenten:

$$\frac{P' + P_k}{2} = \frac{P''}{2},$$

deren schließliche Bestimmung unsere Hauptaufgabe ist.

Zuvörderst werde das K_k , bzw. das $\frac{P_k}{2}$ gesucht. Ich benutze dazu zweierlei Methoden. Es sei

$$\frac{P_k}{2} = \frac{1}{2} (m_1^0 \beta_{1k} + m_2^0 \beta_{2k} + m_3^0 \beta_{3k} + q_1^0 a_{1k} + q_2^0 a_{2k} + q_3^0 a_{3k}).$$

So bestimme ich zunächst m_1^0, m_2^0, m_3^0 , indem ich davon ausgehe, daß die Charakteristiken der Doppeltangenten, $\frac{P''}{2}$, bekanntlich *ungerade* sind, d. h. daß für die in ihnen auftretenden Zahlen m'', q''

$$m_1'' q_1'' + m_2'' q_2'' + m_3'' q_3'' \equiv 1 \pmod{2}.$$

Sodann bestimme ich q_1^0, q_2^0, q_3^0 , indem ich die seither betrachtete Kurve vierter Ordnung in eine andere übergehen lasse, bei der die Ovale *I, II, III* eine gegen das Oval *IV* symmetrische Lage haben. Die Betrachtung dieser neuen Kurve würde auch sofort m_1^0, m_2^0, m_3^0 liefern; aber ich zog es vor, so lange es ausreichte, an der ursprünglichen Kurvenform festzuhalten. Dieser Wunsch bestimmte mich auch, die weiterhin so bequeme hyperelliptische Kurve erst im folgenden Paragraphen einzuführen.

1. Da $\frac{P''}{2}$ eine ungerade Charakteristik sein soll, so dürfen die zugehörigen m_1'', m_2'', m_3'' nicht alle gleich Null sein. Die Zahlen m_1^0, m_2^0, m_3^0 , welche in $\frac{P_k}{2}$ auftreten, dürfen daher nicht gleich sein einem der Zahlensysteme m_1', m_2', m_3' , welche bei den $\frac{P'}{2}$ vorkommen. Daher ist notwendig:

$$m_1^0, m_2^0, m_3^0 = 1, 1, 1,$$

und der ausgezeichnete Berührungskegelschnitt gehört also, wie gleich hier vorgehoben sei und schon angedeutet wurde, zu der Gruppe der acht Berührungskegelschnitte, deren jeder jedes der drei Ovale *I, II, III* berührt.

2. Die symmetrisch gestaltete Kurve, in welche ich nunmehr die seither betrachtete übergehen lassen will, ist in Fig. 2 gezeichnet. Sie entsteht aus der ursprünglichen Kurve folgendermaßen. Man löse die vier Ovale *I, II, III, IV* bzw. von den Doppeltangenten erster Art ab, so daß vier isolierte Doppeltangenten entstehen. Sodann projiziere man die



Figur in der Art, daß die eine dieser Doppeltangenten unendlich weit rückt, während die anderen ein (in unserem Falle) gleichseitiges Dreieck bilden. Die Doppeltangenten, welche in der neuen Figur mit 1, 2, 3 bezeichnet sind, sind diejenigen, welche früher die Ovale II, I, IV je zweimal berührten; die unendlich ferne Doppeltangente ist aus derjenigen entstanden, welche sich an III anschmiegte.

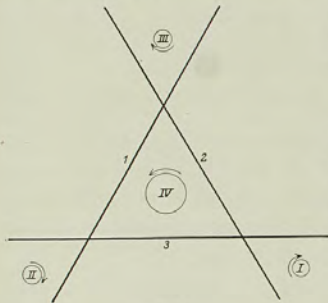


Fig. 2.

Bei dem geschilderten Änderungsprozesse bleibt, wie ich in dem ersten Aufsätze nachwies, die Zerschneidung der Riemannschen Fläche, die Definition der Normalintegrale usw. ungeändert. Es bleiben daher auch die Charakteristiken der Doppeltangenten die alten. Andererseits sind wir jetzt, bei der Symmetrie der Figur und der symmetrischen Benutzung, welche ihre Bestandteile bei der Definition der Normalintegrale erfahren, in der Lage, die Charakteristiken der vier Doppeltangenten erster Art ohne weiteres anzugeben. Die zugehörigen Zahlen m'_1, m'_2, m'_3 sind jedenfalls 1, 1, 1; denn m_1^0, m_2^0, m_3^0 wurden = 1, 1, 1 gefunden, während (§ 1) m'_1, m'_2, m'_3 für die Doppeltangenten erster Art = 0, 0, 0 waren. Für die Zahlen q''_1, q''_2, q''_3 bleiben daher nur noch die vier Möglichkeiten

- 1 0 0
- 0 1 0
- 0 0 1
- 1 1 1

und bei der Symmetrie der Figur ist nicht fraglich, wie sich diese Möglichkeiten auf die vier in Betracht kommenden Doppeltangenten verteilen.

Dieses Resultat muß auch für die ursprüngliche Kurve gelten. Ich benenne bei ihr, was am bequemsten scheint, die Doppeltangenten erster Art fortan nach demjenigen Ovale, welches sie berühren. Dann hat man also folgende Charakteristiken:

- I 1 1 1, 0 1 0
- II 1 1 1, 1 0 0
- III 1 1 1, 1 1 1
- IV 1 1 1, 0 0 1.

Zieht man von diesen Charakteristiken resp. den Größensystemen, die sie vertreten, diejenigen Argumente ab, welche den betr. Doppeltangenten anfänglich (§ 1) von uns beigelegt wurden, so erhält man die Konstanten K_k resp. das $\frac{P_0}{2}$. Aber die Argumente, welche ursprünglich der Doppeltangente IV beigelegt waren, sind einfach anzugeben: es sind geradezu die Konstanten $\frac{C_k}{2}$. Um dies deutlich zu sehen, lasse man μ , dessen Lage noch beliebig war, über das Oval IV, etwa nach rechts hin, wandern, bis es in den nächstgelegenen Berührungspunkt der Doppeltangente IV hineinfällt. Auf dem Wege hat es einen Wendepunkt und in demselben das zugehörige α überschritten; fortan ist, sofern wir an der alten Definition des C_k festhalten, nicht nur \int_{μ}^{β} sondern auch \int_{μ}^{α} in positivem Sinne an dem Ovale IV vorbeizuleiten. Sowie μ in den einen Berührungspunkt der Doppeltangente IV rückt, fallen α und β in den anderen Berührungspunkt zusammen; das \int_{μ}^{α} wird also mit dem \int_{μ}^{β} identisch, jedes einzelne also gleich $\frac{C_k}{2}$, da die Summe der beiden = C_k gesetzt war. Aber zugleich stellen dann die Integrale

$$\int_{\mu}^{\alpha} d\zeta_k \quad \text{oder} \quad \int_{\mu}^{\beta} d\zeta_k$$

die Argumente vor, welche der Doppeltangente IV beigelegt sind (dem der andere Berührungspunkt von IV fällt ja mit μ zusammen); diese Argumente werden also gleich den $\frac{C_k}{2}$, wie behauptet wurde.

Die Charakteristik

$$1 1 1 0 0 1,$$

welche wir der Doppeltangente IV beigelegten, vertritt die Größensysteme:

$$\frac{1}{2}(\beta_{1k} + \beta_{2k} + \beta_{3k} + a_{3k});$$

wir erhalten daher für die Konstanten K_k die Werte

$$K_k = -\frac{C_k}{2} + \frac{1}{2}(\beta_{1k} + \beta_{2k} + \beta_{3k} + a_{3k}),$$

oder, mit anderen Worten, das $\frac{P_0}{2}$ ist durch das folgende Symbol gegeben:

$$1 1 1, 0 0 1.$$



§ 4.

Die hyperelliptische Kurve. Bestimmung der Charakteristiken und des ausgezeichneten Kegelschnitts.

Ich werde jetzt die bisher betrachtete Kurve vierter Ordnung in einen doppeltzählenden Kegelschnitt überführen und an ihm die noch fehlende Bestimmung der Charakteristiken der 24 Doppeltangenten zweiter Art und des ausgezeichneten Berührungskegelschnitts durchführen. Zu dem Zwecke sollen p, q, r, s die vier Doppeltangenten erster Art bedeuten, $\Omega = 0$ sei der Kegelschnitt, welcher durch ihre acht Berührungspunkte hindurchgeht. So kann man die Gleichung der ursprünglichen Kurve in die Form setzen:

$$q = \Omega^2 - \lambda p q r s = 0.$$

In ihr betrachte man λ als einen Parameter, den man allmählich zu Null werden läßt. Die Kurve vierter Ordnung geht dann in bekamter Weise in diejenigen vier, doppelt zu zählenden Segmente von $\Omega = 0$ über, welche bez. durch p, q, r, s abgeschnitten werden, wie Fig. 3 erläutert.

Die 28 Doppeltangenten der C_4 verwandeln sich dabei, ohne unbestimmt zu werden, in die 28 Verbindungsgeraden der acht Scheitel (der acht Segmentendigungen), welche Ω trägt. Ich will annehmen, daß der Punkt μ während des Grenzüberganges fortwährend die besondere Lage beibehalten habe, welche wir ihm soeben (§ 3) erteilt. Dann ist er schließlich in einen der zwei Grenzpunkte des Segmentes IV übergegangen (vgl. die Fig. 3), während α, β in den anderen Grenzpunkt desselben Segmentes zusammenfallen. Die berührenden Kegelschnitte, die wir zu konstruieren haben, gehen dann also durch diesen Scheitel α, β hindurch und berühren in ihm die Doppeltangente IV. Insbesondere die acht Kegelschnitte der ausgezeichneten Gruppe sind ihrer Lage nach leicht völlig zu bestimmen. Offenbar sind sie in diejenigen acht Kegelschnitte der genannten Eigenschaft übergegangen, welche von den begrenzenden Scheiteln der Segmente I, II, III je einen enthalten.

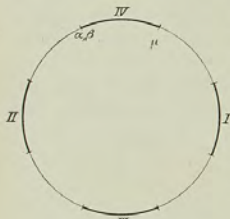


Fig. 3.

Eigenschaft übergegangen, welche von den begrenzenden Scheiteln der Segmente I, II, III je einen enthalten.

Betrachten wir jetzt die längs der Kurve erstreckten überall endlichen Integrale. Man kann dieselben, indem man den konstanten Faktor $2\sqrt{\lambda}$ im Zähler zusetzt, folgendermaßen schreiben:

$$\int \frac{2\sqrt{\lambda} \cdot |cx dx| \cdot u_x}{\Sigma c_i q_i} = \int \frac{2\sqrt{\lambda} \cdot |cx dx| \cdot u_x}{\Sigma c_i \left\{ 2\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial (p q r s)}{\partial x_i} \right\}}$$

Setzt man hier für Ω seinen Wert:

$$\Omega = \sqrt{\lambda \cdot p q r s}$$

und läßt dann $\lambda = 0$ werden, so erhält man die hyperelliptischen Integrale:

$$\int \frac{|cx dx| \cdot u_x}{\sqrt{p q r s} \cdot \Sigma c_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}}$$

welche längs des Kegelschnittes $\Omega = 0$ erstreckt sind und an den acht Stellen

$$p q r s = 0$$

Verzweigungen aufweisen (also vom Geschlechte 3 sind).

Entstand ein solches Integral auf die gegebene Weise aus dem Normalintegrale \mathfrak{F}_k , so soll es wieder \mathfrak{F}_k genannt sein; ebenso sollen die Größen a_{ik} ihre frühere Bedeutung erhalten. Führt man \mathfrak{F}_k längs des reellen Kegelschnittes Ω entlang, so erhält man bald reelle, bald rein imaginäre Zuwächse, je nach dem Vorzeichen des unter dem Quadratwurzelzeichen stehenden Produktes $p q r s$: innerhalb derjenigen Segmente von Ω , welche von reellen Punkten der ursprünglichen Kurve doppelt überdeckt sind, erweisen sich die Zuwächse als reell, innerhalb der anderen als rein imaginär. Achten wir also jetzt, da die imaginären Bestandteile der Integrale \mathfrak{F}_k bereits in den früheren Paragraphen genugsam berücksichtigt sind, auf die reellen Bestandteile derselben, so erhalten wir das in Fig. 4 gegebene Schema, in welchem die beigesetzten Argumente sich jedesmal gleichzeitig auf die beiden einander folgenden Scheitelpunkte beziehen. In dieser Figur nun lesen wir ohne weiteres die Beantwortung der noch ausstehenden Fragen ab.

Zunächst erfahren wir die Argumente

$$\frac{C_k}{2} + \frac{P'}{2},$$

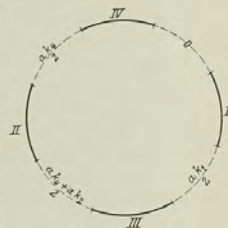


Fig. 4.

welche die einzelne Doppeltangente bei der hinsichtlich μ getroffenen Festsetzung erhält. Denn die imaginären Bestandteile von $\frac{P'}{2}$ kennen wir bereits (§ 1) und die reellen erhalten wir, indem wir einfach die beiden Zahlen zusammenaddieren, welche den beiden Scheiteln zugesetzt sind, die die Doppeltangente verbindet. Sodann ergibt sich (vgl. § 3) aus dem Umstande, daß α, β in den zweiten Begrenzungspunkt des Segmentes IV fallen:

$$\frac{C_k}{2} = \frac{a_{ik}}{2} = \frac{a_{1k} + a_{2k} + a_{3k}}{2}.$$



Die Konstanten K_k haben also folgende Werte:

$$K_k = -\frac{c_k}{2} + \frac{1}{2}(\beta_{1k} + \beta_{2k} + \beta_{3k} + a_{3k}) \\ = \frac{1}{2}(\beta_{1k} + \beta_{2k} + \beta_{3k} + a_{1k} + a_{2k}).$$

Indem wir sie zu den eben berechneten Argumenten der Doppeltangenten hinzufügen, haben wir deren eigentliche Charakteristiken, wie sie in Fig. 5 angegeben sind.

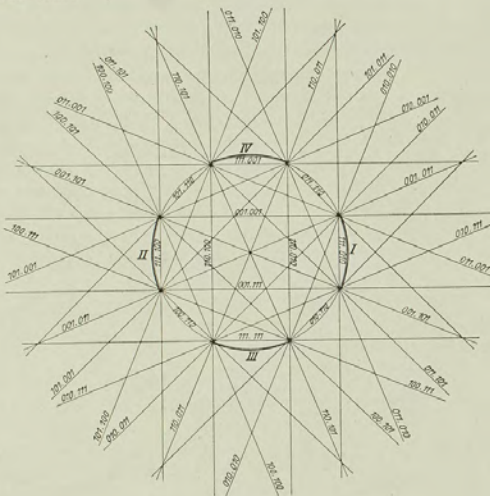


Fig. 5.

Der ausgezeichnete Kegelschnitt endlich bestimmt sich durch folgende Überlegungen. Man hat für seine drei Berührungspunkte c_1^0, c_2^0, c_3^0 folgende Gleichungen (§ 2):

$$-K_k = \int_{\mu}^{c_1^0} d\mathfrak{S}_k + \int_{\mu}^{c_2^0} d\mathfrak{S}_k + \int_{\mu}^{c_3^0} d\mathfrak{S}_k.$$

Es fallen dabei, wie bereits angegeben, c_1^0, c_2^0, c_3^0 in drei derjenigen Scheitel, welche bez. *I, II, III* begrenzen, und durch diesen Umstand werden die vorstehenden Gleichungen, was die imaginären Teile angeht, jedenfalls be-

friedigt. Es sind also nur noch die reellen Teile zu beachten. Mit anderen Worten: Die Punkte c_1^0, c_2^0, c_3^0 sind unter den die Segmente *I, II, III* begrenzenden Scheiteln in der Weise auszusuchen, daß die ihnen in Fig. 4 beigeetzten Zahlen zusammenaddiert kongruent werden mit den reellen Teilen der $(-K_k)$.

Aber die reellen Teile der $(-K_k)$ sind kongruent mit

$$-\frac{1}{2}(a_{1k} + a_{2k}),$$

oder, was dasselbe ist, mit

$$+\frac{1}{2}(a_{1k} + a_{2k});$$

es ergibt sich also der Kegelschnitt, den Fig. 6 darstellt.

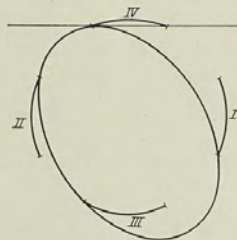


Fig. 6.

Er schließt das Segment *III* ein, während er mit den Segmenten *I* und *II* einen äußerlichen Kontakt besitzt. Damit ist zugleich angegeben, welche Lage der ausgezeichnete Berührungskegelschnitt besitzt, wenn an Stelle der hyperelliptischen Kurve wiederum die eigentliche Kurve vierter Ordnung mit ihren vier Ovalen tritt.

München, im August 1876.



XLII. Über Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalkurve der φ^1 .

[Math. Annalen, Bd. 42 (1892).]

Man kann die Wechselbeziehung zwischen algebraischen Kurven und Riemannschen Flächen unter einem doppelten Gesichtspunkte auffassen. Das Gewöhnliche ist, daß man die Flächen nur subsidiär benutzt, um den im komplexen Gebiete vorhandenen „Zusammenhang“ des Gebildes, die aus ihm hervorgehende Periodizität der zugehörigen Integrale, usw. besser verstehen zu können; als Definition der Kurve bleibt dann in herkömmlicher Weise die algebraische Gleichung oder eine mit ihr äquivalente „geometrische“ Konstruktionsvorschrift bestehen. Dementgegen betrachtet die andere Auffassungsweise die Riemannsche Fläche als das zunächst Gegebene und läßt aus ihr erst die verschiedenen „zugehörigen“ Kurven entstehen, mag man die Fläche nun mehrblättrig über der Ebene ausgebreitet, oder frei im Raume gelegen oder irgendwie als „Fundamentalebene“ gegeben denken. Indem der Riemannsche Existenzsatz z. B. bei der über der Ebene ausgebreiteten mehrblättrigen Fläche in Geltung bleibt, wie immer man auch die Verzweigungspunkte der Fläche gegen

¹⁾ [Eine Voranzeige der in diesem Aufsätze enthaltenen Resultate gab ich in Nr. 9 der Göttinger Nachrichten von 1892 am 20. April d. J. unter dem Titel „Über Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abelschen Funktionen“. Die genaue Ausführung folgte dann während des Sommers 1892 im zweiten Teile einer Vorlesung über Riemannsche Flächen, die ich schon im Herbst 1891 begonnen hatte. Die ausführliche Ausarbeitung der Gesamtvorlesung wurde hernach autographisch reproduziert und bei Teubner in Kommission gegeben. Hierüber werden in Bd. 3 dieser Gesamtausgabe noch einige Bemerkungen nachzutragen sein. Ebenso kommen erst in Bd. 3 dieser Gesamtausgabe die funktionentheoretischen Arbeiten über hyperelliptische und Abelsche Funktionen zum Wiederabdruck, welche ich seit dem Erscheinen der vorangehenden Abh. XLI im Jahre 1876 bis zum Jahre 1892 veröffentlicht habe. Es handelt sich um folgende Arbeiten: Über hyperelliptische Sigmafunktionen. Erste Abhandlung: Math. Annalen, Bd. 27 (1886). Zweite Abhandlung: ebenda, Bd. 32 (1888). — Zur Theorie der Abelschen Funktionen, Math. Annalen, Bd. 36 (1890). K.]

einander verschieben mag, hat man bei diesem zweiten Ansatz die Willkür, welche in den *Moduln* des Gebildes liegt, ganz anders in der Hand, als bei dem üblichen Ausgangspunkte, und kann darum die auf sie bezüglichen Probleme viel eingehender behandeln als sonst. Ich bezeichne hiermit diejenige Untersuchungsrichtung, zu der ich mit meiner *Schrift über Riemann* 1881 den Anstoß habe geben wollen²⁾. Indem ich im dritten Abschnitte daselbst den Begriff der „symmetrischen Riemannschen Fläche“ entwickelte und bald darauf durch Herrn Weichhold die Periodizitätseigenschaften der zugehörigen Normalintegrale erster Gattung untersuchen ließ³⁾, glaubte ich insbesondere für die *Diskussion der bei den algebraischen Kurven stattfindenden allgemeinen Realitätsverhältnisse* neue Grundlagen gewonnen zu haben. Inzwischen hat noch niemand, so viel ich weiß, die hier gegebene Fragestellung seither aufgegriffen, und ich nehme also an, daß es nicht unnützlich ist, wenn ich nachstehend auf die Sache zurückkomme und die bezüglichen Resultate mitteile, welche ich in einer Vorlesung [über Riemannsche Flächen] des letzten Sommersemesters in ausführlicher Form entwickelt habe. Es wird kaum der Rechtfertigung bedürfen, wenn ich dabei unter allen „Kurven“, die aus einer Riemannschen Fläche erwachsen, insbesondere die Normalkurve der φ herausgreife. Ich erreiche dadurch insbesondere den Vorteil, daß sich meine neuen Entwicklungen unmittelbar an diejenigen anreihen, welche ich in Bd. 10 und 11 der Math. Annalen 1876 [vgl. die vorstehenden Abh. XXXIX und XLI] über ebene Kurven vierter Ordnung gegeben habe. Alle die Kontinuitätsmethoden und die ganze Art des Ansatzes, welche ich damals für den besonderen Fall $p=3$ entwickelt habe, erscheinen hier auf den Fall eines beliebigen Geschlechtes übertragen. Und die Möglichkeit dieser Übertragung ruht, — um noch einmal auszusprechen, was mir an diesen Dingen das wesentlichste ist —, durchaus darauf, daß jetzt mit den Riemannschen Flächen als solchen begonnen wird. Ich hatte 1876 den Ausgangspunkt unmittelbar von den Kurven genommen. Das war bei $p=3$ möglich, wo ich zahlreiche geometrische Vorarbeiten, insbesondere diejenigen des Herrn Zeuthen in Bd. 7 der Math. Annalen (1874)⁴⁾, benutzen konnte. Aber eben dieses Ausgangspunktes halber wollte mir damals die Übertragung auf beliebige p nicht gelingen, so einfach die Theoreme sind, um die es sich schließlich handelt.

²⁾ Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. — Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. — Leipzig, B. G. Teubner, 1882. [Vgl. Bd. 3 dieser Gesamtausgabe.]

³⁾ Über symmetrische Riemannsche Flächen und die Periodizitätsmoduln der zugehörigen Abelschen Normalintegrale erster Gattung (Leipziger Dissertation 1883, abgedruckt in Bd. 28 von Schlömilchs Zeitschrift).

⁴⁾ Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre.



§ 1.

Von den verschiedenen Arten der symmetrischen Riemannschen Flächen, insbesondere im Falle der hyperelliptischen Gebilde.

Reelle algebraische Kurven ergeben *symmetrische* Riemannsche Flächen und können umgekehrt allgemein gültig von letzteren aus definiert werden, das ist der hier fundamentale Satz, den ich in § 21 meiner Schrift entwickelte. Ich bezeichne dabei eine Riemannsche Fläche als symmetrisch, wenn sie durch eine konforme Abbildung zweiter Art von der Periode 2 in sich übergeführt wird (i. e. durch eine konforme Abbildung, welche die Winkel umlegt). Die symmetrischen Riemannschen Flächen eines gegebenen p zerfallen, wie ich ebendort angab und Herr Weichold a. a. O. eingehender ausgeführt hat, nach der Zahl und Art ihrer „Symmetrielinien“ in $\left[\frac{3p+4}{2}\right]$ Arten. Wir haben erstlich $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ Arten *orthosymmetrischer* Flächen bez. mit $p+1, p-1, p-3, \dots$ Symmetrielinien; das sind solche symmetrische Flächen, welche längs ihrer Symmetrielinien zerschnitten, in zwei (zueinander symmetrische) Hälften zerfallen; — das einfachste (zu $p=0$ gehörige) Beispiel ist eine Kugel, welche durch „orthogonale“ Projektion auf sich selbst bezogen ist —. Wir haben ferner $(p+1)$ Arten *diasymmetrischer* Flächen bzw. mit $p, p-1, \dots, 1, 0$ Symmetrielinien; das sind Flächen, die längs ihrer Symmetrielinien zerschnitten gleichwohl noch ein zusammenhängendes Ganzes vorstellen; — man vergleiche, bei $p=0$, die durch eine „diametrale“ Projektion auf sich selbst bezogene Kugel. — Dabei bilden die Flächen derselben Art jedesmal ein zusammenhängendes Kontinuum: es ist möglich von jeder Fläche einer Art zu jeder anderen Fläche derselben Art kontinuierlich überzugehen, ohne aus der Art herauszutreten. *Hierin liegt, daß es genügt, die hiernach in Betracht kommenden Realitätsverhältnisse immer nur bei einem beliebig gewählten Repräsentanten der einzelnen „Art“ zu untersuchen; die Resultate gelten dann ohne weiteres für alle Flächen derselben Art.* Dabei kann die Reihenfolge, in der man die Symmetrielinien der einen Fläche den Symmetrielinien der anderen Fläche zuweist, beliebig gewählt werden. Wir drücken dies aus, indem wir die verschiedenen Symmetrielinien als *gleichberechtigt* bezeichnen.

Als besonders einfache Repräsentanten kommen hier die *hyperelliptischen* Flächen in Betracht⁵⁾. Aber dieselben repräsentieren nicht die sämtlichen vorgenannten Arten und es hat mit ihnen überhaupt eine be-

⁵⁾ Wie ich dies für $p=3$ bereits in [der oben abgedruckten Abh. XLI, S. 156 f. u. 166 ff.] benutzte, entgegen der sonst verbreiteten Auffassung, welche die hyperelliptischen Fälle wesentlich als Ausnahmefälle angesehen wissen wollte.

sondere Bewandnis. Eine symmetrische hyperelliptische Fläche wird in der Art zweiblättrig über der z -Ebene ausgebreitet werden können, daß zu ihr eine Gleichung gehört:

$$(1) \quad s = \sqrt{f_{2p+2}(z)},$$

in welcher f_{2p+2} ein Polynom $(2p+2)$ -ten Grades von z mit reellen Koeffizienten ist. Nun beachte man, daß die Fläche durch die konforme Abbildung „erster Art“:

$$S: \quad s' = -s, \quad z' = z$$

in sich übergeht. Infolgedessen geht sie immer gleich durch zwei Abbildungen zweiter Art in sich über, die ich Σ_1 und Σ_2 nenne⁶⁾:

$$\Sigma_1: \quad s' = \bar{s}, \quad z' = \bar{z},$$

$$\Sigma_2: \quad s' = -\bar{s}, \quad z' = \bar{z},$$

ist also immer in zweifachem Sinne symmetrisch. Bei Σ_1 bilden die *jenigen Kurven der Fläche die Symmetrielinien, welche gleichzeitig reelles z und reelles s besitzen, bei Σ_2 diejenigen Kurven, deren Punkte reelles z und rein imaginäres s aufweisen.* Man betrachte nun zunächst die Fälle, wo wenigstens einige, sagen wir 2τ , der $2p+2$ Verzweigungspunkte $f_{2p+2}(z) = 0$ reell sind. Wir werden dann sowohl bei Σ_1 als bei Σ_2 τ Symmetrielinien der Fläche erhalten, die beide Mal in derselben Weise gegen einander liegen: *die Fläche gehört, mögen wir Σ_1 oder Σ_2 auswählen, beide Mal zu derselben Art symmetrischer Flächen.* Und zwar ist diese Art für $\tau = p+1$ selbstverständlich orthosymmetrisch, für $\tau < p+1$ aber diasymmetrisch. In der Tat: zerschneidet man die Fläche längs der τ Symmetrielinien, so wird sie für $\tau < p+1$ immer noch ein zusammenhängendes Ganzes vorstellen. Seien nun aber sämtliche Verzweigungspunkte imaginär. Das Polynom $f_{2p+2}(z)$ ist dann definit, und ich will der Bestimmtheit halber (hier wie weiter unten) annehmen, daß es positiv-definit sei. Es werden dann bei Σ_1 alle Punkte der Fläche festbleiben, welche reelles z haben, bei Σ_2 aber überhaupt keine Punkte. Wir sehen: *sofern wir Σ_1 zugrunde legen, haben wir eine orthosymmetrische Fläche, bei Σ_2 aber eine diasymmetrische.* Und dabei ist die Zahl λ der auftretenden Symmetrielinien bei Σ_2 natürlich 0, bei Σ_1 aber (wie man sofort sieht, wenn man die Figur macht) 2 oder 1, je nachdem p ungerade oder gerade ist. Dies stimmt damit, daß die Differenz $(p+1-\lambda)$ in den orthosymmetrischen Fällen immer gerade ausfällt. Wir werden kurz sagen dürfen, daß wir im Falle lauter imaginärer Verzweigungspunkte eines reellen hyperelliptischen Gebildes *entweder den niedrigsten diasymmetrischen Fall oder den niedrigsten orthosymmetrischen*

⁶⁾ In den Formeln bedeuten \bar{s} und \bar{z} bzw. die konjugierten Werte von s und z .



Fall des in Betracht kommenden Geschlechts vor uns haben. Nehmen wir dann ferner alle Fälle hinzu, wo einige oder alle der Verzweigungen reell sind, so erhalten wir Beispiele für die sämtlichen übrigen diasymmetrischen Fälle und den höchsten orthosymmetrischen Fall. Das macht bei $p=0, 1, 2, 3$ noch alle Arten symmetrischer Flächen, die es gibt, und hierin liegt z. B., daß man bei $p=3$ noch alle hier in Betracht kommenden Realitätsfragen von den hyperelliptischen Fällen aus diskutieren kann, wie ich in [der vorstehenden Abh. XLI] angab. Bei $p=4$ zum ersten Male existiert eine Art symmetrischer Flächen, welche keinen hyperelliptischen Repräsentanten zuläßt: das sind die orthosymmetrischen Flächen mit drei Symmetrielinien. Solcher Arten gibt es allgemein $\left[\frac{p-2}{2} \right]$.

§ 2.

Von den Normalkurven φ , die zu den symmetrischen Flächen gehören.

Wir definieren jetzt die Normalkurve der φ in üblicher Weise durch die Formeln:

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \dots : \varphi_p = dw_1 : dw_2 : \dots : dw_p,$$

unter w_1, w_2, \dots, w_p irgend p linear unabhängige überall endliche Integrale der Fläche verstanden²⁾. Dabei können wir vermöge der in meiner Schrift a. a. O. gegebenen Überlegung die dw jedenfalls so aussuchen, daß ihre Verhältnisse in symmetrischen Punkten der Fläche konjugiert imaginäre Werte annehmen. Solcherweise haben wir dann der symmetrischen Fläche entsprechend eine reelle Kurve der φ . Zugleich ist ersichtlich, daß diese Kurve abgesehen von reellen Kollineationen, denen man sie unterwerfen mag, bei gegebener Riemannscher Fläche völlig bestimmt ist. Den λ Symmetrielinien der Fläche entsprechend hat sie λ reelle Züge. Man überzeugt sich leicht, daß dieselben alle *paaren* Charakter besitzen. Überhaupt sind sie alle *gleichberechtigt*. Wir nennen die Kurve *orthosymmetrisch* oder *diasymmetrisch*, je nachdem es die zugehörige Riemannsche Fläche ist.

Beispielsweise entstehen bei $p=3$ sechs Arten von ebenen Kurven vierter Ordnung (wie das mit der von anderer Seite bekannten Theorie dieser Kurven stimmt): zwei orthosymmetrische Arten mit 4 bez. 2 und

²⁾ Was diesen Übergang zur „Sprechweise der analytischen Geometrie“ und die Einführung der „Kurve der φ “ insbesondere angeht, so darf ich den Leser, der damit nicht vertraut ist, auf die Darstellung verweisen, welche hierüber in meinen von Herrn Fricke bearbeiteten Vorlesungen „über elliptische Modulfunktionen“ in Bd. I (Leipzig 1890), S. 556–572 gegeben ist.

vier diasymmetrische Arten mit 3, 2, 1, 0 reellen Zügen. Es kann nur die Frage sein, welche der zwei bekannten zweiseitigen Kurven vierter Ordnung die orthosymmetrische ist, die „Gürtelkurve“ oder die andere, deren zwei Ovale getrennt liegen. Hier entscheiden die Riemannschen Flächen, die ich in [der oben abgedruckten Abh. XXXIX] zu den einzelnen Kurvenarten hinzukonstruiert habe³⁾. Nehmen wir etwa den Fall der Gürtelkurve. Zerschneiden wir die dort gegebene, zu ihr gehörige Riemannsche Fläche längs der beiden Züge der Kurve, so zerfällt die Fläche in zwei Stücke. Die Gürtelkurve ist also orthosymmetrisch. Das gleiche Resultat entsteht, wenn wir die hyperelliptischen Fälle heranziehen (wegen deren ich hier, wo es sich um $p=3$ handelt, auf die Darstellung in [Abh. XLI] verweisen darf). Wir haben da als Normalkurve der φ einen doppeltzählenden einteiligen Kegelschnitt, auf dem wir so viele „Scheitel“ anzubringen haben, als $f=0$ reelle Verzweigungspunkte liefert. Ist diese Zahl wieder gleich 2τ , und nehmen wir τ vorab > 0 , so zerfällt der Kegelschnitt durch besagte Scheitel in 2τ Segmente, die man dann, um zu einer allgemeinen Kurve vierter Ordnung überzugehen, abwechselnd wegnehmen, beziehungsweise in schmale Ovale verwandeln wird. Ist aber $\tau=0$, so werden wir beim Übergang zur allgemeinen Kurve vierter Ordnung entweder den ganzen Kegelschnitt wegnehmen müssen (was die nullteilige Kurve vierter Ordnung ergibt) oder ihn nach seiner ganzen Erstreckung in zwei reelle Züge spalten müssen (wobei eben die Gürtelkurve entsteht). Die Gürtelkurve entspricht also dem hyperelliptischen Falle mit $\tau=0$ und ist eben darum orthosymmetrisch.

Nehmen wir ferner $p=4$. Die Normalkurve der φ liegt hier im dreidimensionalen Raume und stellt sich als voller Schnitt einer Fläche zweiten und einer Fläche dritten Grades dar. Aber die verschiedenen Möglichkeiten des genannten Schnittes hat man direkt noch nicht untersucht und wir sehen uns also, was die Diskussion der möglichen Kurven gestalten betrifft, auf unsere eigenen Hilfsmittel angewiesen. Wir beginnen vielleicht vom hyperelliptischen Falle aus. Da haben wir (als Berührungsschnitt eines Kegels zweiter Ordnung mit einer Fläche dritten Grades) eine doppeltzählende Raumkurve dritter Ordnung vor uns und auf dieser je nachdem 10, 8, 6, 4, 2, 0 reelle Scheitel. Indem wir dann genau so operieren, wie mit dem doppeltzählenden Kegelschnitte im Falle der Kurven vierter Ordnung, erhalten wir zunächst Kurven sechster Ordnung, die aus 5, 4, 3, 2, 1 nebeneinander liegenden Ovalen bestehen: nur die

³⁾ Ich hebe gern hervor, daß ich [in der Abh. XL] beim näheren Studium meiner „neuen“ Riemannschen Flächen (auf S. 154) zum ersten Male zur Unterscheidung der reellen Kurven in orthosymmetrische und diasymmetrische geführt worden bin.



erste dieser Kurven ist orthosymmetrisch, die anderen sind diasymmetrisch. Ferner aber erhalten wir von der doppeltzählenden Kurve dritter Ordnung aus, die keinen reellen Scheitel trägt, einerseits die nullteilige C_0 (welche diasymmetrisch ist), andererseits eine merkwürdige einteilige C_0 , deren einer Kurvenzug sich längs der ganzen Erstreckung der Kurve dritter Ordnung doppelt hinzieht. Dies ist die einteilige orthosymmetrische C_0 . Es fehlt uns nun noch die orthosymmetrische Kurve mit drei reellen Zügen, und diese kann uns, wie wir wissen, vom hyperelliptischen Falle aus überhaupt nicht geliefert werden. Glücklicherweise gibt es einen anderen Ansatz, welcher in einfachster Weise eine dreiteilige C_0 liefert, welche von der gerade konstruierten dreiteiligen diasymmetrischen Kurve durch die Anordnung ihrer Ovale verschieden ist und daher notwendig orthosymmetrisch ist. Man schneide nämlich ein Ellipsoid oder auch ein Hyperboloid durch drei Parallelebenen in drei Ellipsen und ersetze dann die drei Parallelebenen durch eine in ihrer unmittelbaren Nähe verlaufende eigentliche Fläche dritter Ordnung. Die entstehende Durchschnittskurve hat ersichtlich keine dreifachen Tangentialebenen, welche alle drei Ovale der Kurve gleichzeitig berühren, und eben hierin werden wir bald eine Bestätigung ihres orthosymmetrischen Charakters erblicken.

§ 3.

Einführung der Doppelpunktmethode.

Die Überführung in ein hyperelliptisches Gebilde ist nur einer derjenigen Kontinuitätsprozesse, die wir beim Studium unserer reellen Kurven benutzen wollen. Wir stellen daneben die Überführung der Kurve in eine solche mit isoliertem Doppelpunkte. Wir denken uns dieselbe in der Weise bewerkstelligt, daß wir irgendeine der Symmetrielinien der zugehörigen Riemannschen Fläche auf einen Punkt zusammenziehen. Dies setzt natürlich voraus, daß die Fläche überhaupt eine Symmetrielinie hat: die nullteiligen Kurven bleiben also von unserem Verfahren ausgeschlossen. Aber auch diejenigen orthosymmetrischen Fälle müssen beiseite gelassen werden, welche nur eine Symmetrielinie besitzen (was natürlich gerades p voraussetzt). Ziehen wir nämlich bei ihnen die eine überhaupt vorhandene Symmetrielinie zu einem Punkte zusammen, so zerfällt dabei die Fläche in zwei Stücke. Dementsprechend degeneriert dann die zugehörige Kurve der φ in einer Weise, die kompliziert ist, und hier nicht weiter verfolgt werden soll. Glücklicherweise gehören die beiden hiernach auszuschließenden Fälle zu denjenigen, die man hyperelliptisch degenerieren lassen kann. Bei allen anderen Fällen hat die Durchführung des genannten Prozesses

und damit die Zusammenziehung eines beliebigen Ovals der Kurve zu einem isolierten Doppelpunkte keine Schwierigkeit. Dabei entsteht dann eine Kurve des Geschlechtes $(p-1)$, welche außer dem isolierten Punkte noch $(\lambda-1)$ reelle Züge hat, und übrigens orthosymmetrisch oder diasymmetrisch ist, je nachdem es die ursprüngliche Kurve war. Dieselbe ist nach wie vor von der Ordnung $(2p-2)$ und im Raume von $(p-1)$ Dimensionen gelegen. Projiziert man sie von ihrem Doppelpunkte aus auf einen Raum von $(p-2)$ Dimensionen, so entsteht in diesem eine Normalkurve der φ des Geschlechtes $(p-1)$ von der Ordnung $(2p-4)$.

Sollen wir diese geometrischen Verhältnisse durch Beispiele belegen, so nehmen wir vielleicht zunächst den Fall der Gürtelkurve $p=3$. Hier hat es ersichtlich keine Schwierigkeit, das innere Oval auf einen Punkt zusammenzuziehen. Von diesem aus projizieren wir jetzt die Kurve auf eine gerade Linie. Die Gerade wird dann nach ihrer ganzen Erstreckung von den Bildpunkten doppelt überdeckt, so zwar, daß dabei kein reeller „Scheitel“ auftritt. Das entspricht in der Tat dem orthosymmetrischen Falle $\lambda=1$ des Geschlechtes $p=2$. Wie aber kann man das äußere Oval einer Gürtelkurve zu einem isolierten Punkte zusammenziehen? Einfach so, daß man dasselbe vorab durch das andere Oval hindurchtreten läßt. Dabei wird als Zwischenfall ein doppeltzählender Kegelschnitt überschritten, der dem Geschlechte $p=3$ angehört, d. h. der bezügliche hyperelliptische Fall. — Man nehme ferner die dreiteilige orthosymmetrische Kurve des Geschlechtes $p=4$, die wir vorhin als den Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung und einer Fläche dritter Ordnung erzeugten. Hier erreichen wir durch Abänderung der genannten Flächen mit Leichtigkeit, daß sich ein beliebiges Oval der Kurve zum isolierten Punkte zusammenzieht. Projizieren wir dann die Kurve vom isolierten Punkte aus auf die Ebene, so entsteht in letzterer richtig die orthosymmetrische Kurve $\lambda=2$ des Geschlechtes 3, nämlich eine Gürtelkurve vierter Ordnung. —

Der Übergang zum hyperelliptischen Gebilde und die hiermit besprochene Einführung eines isolierten Doppelpunktes sind die einzigen Degenerationsprozesse, die wir bei unseren Kurven in Betracht ziehen wollen. Es hat ja keine Schwierigkeit, noch andere Prozesse heranzuziehen. Wir könnten z. B. mehrere Züge unserer Kurve gleichzeitig in isolierte Doppelpunkte überführen. Wir könnten auch jeden einzelnen der erhaltenen Doppelpunkte vollends verschwinden lassen, wodurch das Geschlecht wieder auf p steigt, die Zügezahl und Art unserer Kurve aber eine andere wird. Es ist besonders interessant, bei den sogleich zu gebenden Abzählungen alle diese Möglichkeiten ins Einzelne zu verfolgen. Doch würde es sich dabei nur um Bestätigungen der von uns zu machenden Angaben handeln, und wir lassen also alle diese Entwicklungen hier der Kürze halber beiseite.



§ 4.

Allgemeine Sätze über die zu unseren Kurven gehörigen Φ und F_μ .

Unter einer φ verstehe ich fortan allgemein ein solches Gebilde des Raumes der $\varphi_1: \varphi_2: \dots: \varphi_p$, welches durch eine lineare Gleichung zwischen den $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ dargestellt wird, unter einer f_μ aber ein Gebilde, welches durch eine Gleichung μ -ter Ordnung gegeben wird. Berühren die φ, f_μ unsere Kurve überall, wo sie dieselbe treffen, also in $(p-1)$, bez. in $\mu(p-1)$ Punkten, so nenne ich sie Φ , bez. F_μ . Die φ, Φ sind also nichts anderes als die f_1, F_1 , und es geschieht nur wegen ihrer Wichtigkeit, daß sie mit einem besonderen Namen belegt sind. *Der besondere Zeitpunkt der gegenwärtigen Arbeit soll sein, die Realitätsverhältnisse darzulegen, welche die Φ wie die F_μ bei den verschiedenen Arten reeller Normalkurven darbieten, die wir unterschieden haben, und damit die Realitätstheoreme, welche man über die Doppeltangenten und sonstigen Berührungskurven der ebenen Kurven vierter Ordnung hat, auf beliebige p zu übertragen.* Ich darf hier vorab die allgemeinen Sätze von der Theorie der Abelschen Funktionen zusammenstellen, welche die Grundlage für jedes Studium dieser Φ, F_μ bilden müssen:

Seien w_1, w_2, \dots, w_p irgend p zur Kurve gehörige linear unabhängige Integrale erster Gattung, $P_{a,1}, \dots, P_{a,p}$ die p ersten, $P'_{a,1}, \dots, P'_{a,p}$ die p zweiten Perioden von w_a . Seien ferner x_1, \dots, x_{2p-2} die Schnittpunkte unserer Kurve mit irgendeiner φ , z ein beliebiger fester Punkt der Kurve. Man hat dann die Gleichungen des Abelschen Theorems:

$$(1) \quad w_a^{x_1, z} + \dots + w_a^{x_{2p-2}, z} \equiv K_a \pmod{P_{a\beta}, P'_{a\beta}},$$

die umgekehrt ausreichen, nachdem man die K_a an irgendeiner besonderen φ berechnet hat, um die x_1, \dots, x_{2p-2} als volles Schnittpunktsystem der Kurve mit einer φ zu charakterisieren. Man beachte, daß die hiermit eingeführten Konstanten K_a ihrer Natur nach nur bis auf beliebige ganzzahlige Multipla der Perioden $P_{a\beta}, P'_{a\beta}$ definiert sind. — Wir betrachten ferner die Schnittpunktsysteme unserer Kurve mit einer f_μ . Wir erhalten als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Punkte $x_1, \dots, x_{2\mu(p-1)}$ unserer Kurve ein solches Schnittpunktsystem bilden, die Gleichungen:

$$(2) \quad w_a^{x_1, z} + \dots + w_a^{x_{2\mu(p-1)}, z} \equiv \mu K_a \pmod{P_{a\beta}, P'_{a\beta}}.$$

In (1) und (2) brauchen wir jetzt die Punkte x nur paarweise zusammenfallen zu lassen, um die Berührungspunkte einer Φ bez. F_μ zu erhalten. Indem wir beiderseits durch 2 dividieren, erhalten wir 2^{2p} verschiedene Gleichungssysteme, nämlich erstens für die Φ :

$$(3) \quad w_a^{x_1, z} + \dots + w_a^{x_{\mu(p-1)}, z} \equiv \frac{K_a}{2} + \sum_1^p \varrho_\beta \frac{P_{a\beta}}{2} + \sum_1^p \varrho'_\beta \frac{P'_{a\beta}}{2} \pmod{P, P'},$$

zweitens für die F_μ :

$$(4) \quad w_a^{x_1, z} + \dots + w_a^{x_{\mu(p-1)}, z} \equiv \frac{\mu K_a}{2} + \sum_1^p \varrho_\beta \frac{P_{a\beta}}{2} + \sum_1^p \varrho'_\beta \frac{P'_{a\beta}}{2} \pmod{P, P'};$$

hier bedeuten die $\varrho_\beta, \varrho'_\beta$ $2p$ Zahlen, welche nach Belieben gleich 0 oder 1 zu nehmen sind. *Diese 2^{2p} Gleichungssysteme stellen uns ebenso viele Umkehrprobleme zur Bestimmung der Φ bez. der F_μ vor.* Aber wir werden uns bei Diskussion derselben zunächst auf die Gleichungen (4) mit $\mu > 1$ beschränken müssen. Denn die Gleichungen (3) enthalten nur $(p-1)$ Unbekannte, sind also überzählig, und es bedarf tiefer gehender Untersuchungen, die erst durch die Theorie der Thetafunktionen geliefert werden, um zu unterscheiden, welche der 2^{2p} in (3) eingeschlossenen Gleichungssysteme überhaupt Lösungen zulassen. Für $\mu > 1$ aber haben wir folgende Sätze:

1. Ein jedes der 2^{2p} Umkehrprobleme hat sicher Lösungen; es gibt also 2^{2p} Scharen von F_μ .

2. Was die Zahl der Lösungen angeht, so müssen wir den Fall $\mu = 2$, $\varrho_\beta = 0$, $\varrho'_\beta = 0$ vorweg nehmen, für den die Gleichungen (4) mit den Gleichungen (1) zusammenfallen und bei dem es sich also einfach um diejenigen ∞^{p-1} Punktsysteme x_1, \dots, x_{2p-2} handelt, in denen die φ schneiden (welche doppeltzählend als uneigentliche F_2 anzusehen sind).

3. In allen anderen Fällen hat man es durchaus mit „bestimmten“ Umkehrproblemen zu tun, d. h. von den $\mu(p-1)$ Punkten $x_1, \dots, x_{\mu(p-1)}$ sind genau $\mu(p-1) - p$ willkürlich anzunehmen. Ich werde dies kurz wohl so ausdrücken, daß ich sage: die zugehörigen Scharen von F_μ sind $[\mu(p-1) - p]$ -fach unendlich. Da sind denn alle F_μ , welche in denselben Punkten x berühren, nur für eine F_μ gezählt, was ja natürlich ungenau ist, weil man bei höheren Werten von μ aus jeder F_μ , die in irgendwelchen Punkten x berührt, unendlich viele F_μ machen kann, die in den nämlichen Punkten x berühren, indem man einfach diejenigen f_μ , welche längs der Kurve identisch verschwinden, mit irgendwelchen Zahlenfaktoren multipliziert hinzuaddiert. Ich denke aber, daß diese Ungenauigkeit keine Mißverständnisse zur Folge haben wird.

4. Ist μ gerade und alle $\varrho_\beta, \varrho'_\beta$ gleich Null, so kann die Schar der F_μ allemal durch die Gesamtheit der doppeltgezählten $f_{\frac{\mu}{2}}$ ersetzt werden.

5. Überhaupt aber wird es bei geradem μ offenbar niemals zweifelhaft sein, welches Zahlensystem der $\varrho_\beta, \varrho'_\beta$ man einer bestimmten F_μ zuordnen soll.



Denn es handelt sich in den Gleichungen (4) bei geradem μ rechter Hand um ganzzahlige Multipla der K_α , und die K_α sind selbst, wie wir hervorhoben, bis auf ganzzahlige Multipla der Perioden $P_{\alpha\beta}, P'_{\alpha\beta}$ bestimmt. Das Zahlensystem q_β, q'_β , welches einer F_μ gerader Ordnung zugehört, nennen wir ihre Elementarcharakteristik.

6. Anders bei ungeradem μ , insofern die dann rechter Hand stehenden Größen $\frac{\mu K_\alpha}{2}$ von vornherein nur bis auf halbe Perioden bestimmt erscheinen. Die q_β, q'_β des einzelnen F_μ sind also keineswegs fixiert, nur die Differenzen $q_\beta - \bar{q}_\beta, q'_\beta - \bar{q}'_\beta$ sind es, welche zu zwei verschiedenen F_μ, \bar{F}_μ gehören. Wir haben da also zunächst keine absoluten Charakteristiken q, q' , sondern nur relative Charakteristiken (Elementarcharakteristiken).

Zur Ergänzung dieser Sätze ziehen wir nunmehr die Theorie der Thetafunktionen heran. Indem wir auf der Riemannschen Fläche irgendwie ein „kanonisches“ Querschnittssystem konstruieren, führen wir statt der w_1, w_2, \dots, w_p Normalintegrale j_1, j_2, \dots, j_p ein, deren kanonische Perioden $P_{\alpha\beta}, P'_{\alpha\beta}$ in üblicher Weise so lauten werden:

$$(5) \quad \begin{array}{c|ccc|ccc} & P_{\alpha 1} & P_{\alpha 2} & \dots & P_{\alpha p} & P'_{\alpha 1} & \dots & P'_{\alpha p} \\ \hline j_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \tau_{11} & \dots & \tau_{1p} \\ j_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \tau_{21} & \dots & \tau_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_p & 0 & 0 & \dots & 1 & \tau_{p1} & \dots & \tau_{pp} \end{array}$$

Die $P_{\alpha\beta}$ entsprechen hier der Überschreitung der A_β , die $P'_{\alpha\beta}$ der Überschreitung der B_β . Ich will annehmen, daß man dabei einfach setzen kann:

$$(6) \quad \varphi_1 : \varphi_2 : \dots : \varphi_p = d j_1 : d j_2 : \dots : d j_p.$$

Unsere Kurve ist dann auf ein Normalkoordinatensystem bezogen; für jedes System kanonischer Querschnitte unserer Riemannschen Fläche wird es ein solches Koordinatensystem geben. Im übrigen definieren wir jetzt die 2^{2p} Thetafunktionen durch die Reihenentwicklungen:

$$(7) \quad \vartheta_{\substack{y_1 \dots y_p \\ h_1 \dots h_p}}(j_1, \dots, j_p; \tau_{11}, \dots, \tau_{pp}) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_p=-\infty}^{+\infty} E,$$

wo

$$E = e^{i\pi \left(\sum_{\alpha=1}^p \sum_{\beta=1}^p \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2} \right) \left(n_\beta + \frac{g_\beta}{2} \right) \tau_{\alpha\beta} + 2 \sum_{\alpha=1}^p \left(n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2} \right) \left(j_\alpha + \frac{h_\alpha}{2} \right) \right)}.$$

Hier haben die Zahlen $g_1 \dots g_p, h_1 \dots h_p$, welche die „Charakteristika“ der Thetafunktion ausmachen, unabhängig voneinander die Werte 0 und 1 anzunehmen, und die Thetafunktion ist als Funktion der $j_1 \dots j_p$ gerade oder ungerade, je nachdem $g_1 h_1 + \dots + g_p h_p \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod{2}$. Des weiteren ergibt sich dann:

1. Jeder Schar von F_μ ungerader Ordnung ist eine bestimmte Thetafunktion zugeordnet. Die Definition der Größen $\frac{\mu K_\alpha}{2}$ in den Formeln (4) läßt sich darauf so wählen, daß die q_β, q'_β gleich den h_β, g_β der zugehörigen Thetafunktion werden. Die F_μ ungerader Ordnung erhalten so absolute Charakteristiken, welche wir ihre Primcharakteristiken⁹⁾ nennen.

2. Nach der hiermit bezeichneten Fixierung der Größen $\frac{K_\alpha}{2}$ entscheidet sich die Frage, ob es den Gleichungen (3) entsprechend für bestimmte q, q' überall berührende Φ gibt, bez. wie viele solcher Φ es gibt, aus der Potenzentwicklung des zugehörigen ϑ (nach ansteigenden Potenzen der j_1, j_2, \dots, j_p). Im allgemeinen beginnt die Reihenentwicklung der geraden ϑ mit einem konstanten Gliede, diejenigen der ungeraden ϑ mit einem linearen Gliede:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial j_1} \right)_{0 \dots 0} \cdot j_1 + \dots + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial j_p} \right)_{0 \dots 0} \cdot j_p$$

(wo die den Differentialquotienten beigeetzten Indizes $0 \dots 0$ bedeuten sollen, daß für j_1, \dots, j_p die Werte $0, \dots, 0$ einzutragen sind). Dem geraden ϑ entspricht dann kein Φ , dem ungeraden ϑ eines, welches, auf das Normalkoordinatensystem bezogen, durch die Gleichung:

$$(8) \quad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial j_1} \right)_{0 \dots 0} \cdot \varphi_1 + \dots + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial j_p} \right)_{0 \dots 0} \cdot \varphi_p = 0$$

gegeben ist. In besonderen Fällen aber kann die Potenzentwicklung eines geraden oder ungeraden ϑ auch mit Gliedern höherer Ordnung, sagen wir der q -ten Ordnung, beginnen. Es wird dann eine $(q-1)$ -fach unendliche Schar zugehöriger Φ geben, deren Gleichungen aus dem Gliede q -ter Ordnung der für das ϑ geltenden Reihenentwicklung algebraisch abgeleitet werden können.

3. Die Theorie der Φ gestaltet sich hiernach im speziellen Falle vielfach anders als im allgemeinen Falle. So ist es besonders bei den hyperelliptischen Gebilden. Als Vergleichspunkt für Realitätsfragen muß dann nicht sowohl die Theorie der Φ selbst, sondern die Theorie der ϑ (speziell der ungeraden ϑ) dienen.

§ 5.

Besondere Angaben über die ϑ, Φ, F_μ der hyperelliptischen Gebilde¹⁰⁾.

Möge das hyperelliptische Gebilde analytisch wieder durch die Gleichung:

$$(1) \quad s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}$$

gegeben sein. Es ist dann bekanntlich möglich, über die zugehörigen

⁹⁾ [Vgl. die genannte Abhandlung in den Math. Annalen, Bd. 36.]

¹⁰⁾ [Vgl. meine oben genannten Abhandlungen in den Math. Annalen, Bd. 27 u. 32.]



ϑ, Φ, F_μ spezielle Angaben zu machen, sofern man die einzelnen Faktoren von f als bekannt ansehen will, so daß also ein Eingehen auf die transzendente Theorie hier noch nicht erforderlich ist. Es gelten in dieser Hinsicht die folgenden Sätze:

1. Für die Theorie der ϑ sind die Spaltungen von f in zwei Faktoren $\psi_{p+1-2\sigma} \cdot \chi_{p+1+2\sigma}$ fundamental (wo σ eine beliebige ganze Zahl bedeuten soll, die ≥ 0 und $\leq \frac{p+1}{2}$ ist). Einer jeden solchen Spaltung entspricht ein ϑ , und umgekehrt. Das betreffende ϑ ist gerade oder ungerade, je nachdem es σ ist.

2. Wir können hiernach die Φ , welche es gibt, direkt den Spaltungen von f in zwei Faktoren der genannten Art zuordnen. Die Sache wird dann die, daß nur bei solchen Spaltungen, deren $\sigma = 0$ ist, keine Φ auftreten und daß übrigens die zu der einzelnen Spaltung gehörigen Φ durch die Formel gegeben sind:

$$(2) \quad \sqrt{\Phi} = \Psi_{\sigma-1} \cdot \sqrt{\psi_{p+1-2\sigma}}.$$

Hier soll $\Psi_{\sigma-1}$ irgend ein Polynom von z vom Grade $(\sigma-1)$ bedeuten.

3. Ein entsprechender Ansatz wird für die F_μ ungerader Ordnung gelten. Sei $\mu = 2r+1$, so erhält man die sämtlichen existierenden F_μ , wenn man den verschiedenen unter 1 genannten Spaltungen entsprechend setzt:

$$(3) \quad \sqrt{F_\mu} = \Psi_{r(p-1)+\sigma-1} \cdot \sqrt{\psi_{p+1-2\sigma}} + X_{r(p-1)-\sigma-1} \cdot \sqrt{\chi_{p+1+2\sigma}}.$$

Hier bedeuten Ψ, X wieder irgend welche Polynome von dem durch den bezüglichen Index gegebenen Grade. Ferner hat σ alle seine Werte, die Null eingeschlossen, zu durchlaufen.

4. Für die F_μ gerader Ordnung kommen in analoger Weise die Zerlegungen von f in Faktoren $\psi_{2\sigma} \cdot \chi_{2p+2-2\sigma}$ in Betracht; das sind dieselben Zerlegungen, die wir schon betrachteten, wenn p ungerade, aber andere Zerlegungen, wenn p gerade ist.

5. Indem wir $\mu = 2r$ setzen, sind die F_μ gerader Ordnung den einzelnen Zerlegungen entsprechend durch die Formel gegeben:

$$(4) \quad \sqrt{F_\mu} = \Psi_{r(p-1)-\sigma} \cdot \sqrt{\psi_{2\sigma}} + X_{r(p-1)+\sigma-2} \cdot \sqrt{\chi_{2p+2-2\sigma}}.$$

Von diesen Sätzen aus kann man im Falle des einzelnen reellen hyperelliptischen Gebildes natürlich sehr leicht die Realität des einzelnen Φ oder F_μ (oder auch der ϑ) beurteilen. Es wird vor allem darauf ankommen, unter den Spaltungen von f in zwei Faktoren $\psi \cdot \chi$ die „reellen“ herauszugreifen. Reell ist aber eine Spaltung erstlich und hauptsächlich, wenn die Faktoren ψ, χ einzeln reell sind, dann noch, wenn die ψ, χ konjugiert imaginär sind. Letzteres kann natürlich nur bei solchen f eintreten, deren sämtliche Wurzeln imaginär sind, und auch dann nur bei

den Spaltungen in $\psi_{p+1} \cdot \chi_{p+1}$. Statt längerer Erläuterungen will ich Tabellen für $p=2, 3$ geben, aus denen die hier in Betracht kommende Gesetzmäßigkeit am besten ersichtlich ist. In denselben ist die Zahl der reellen Wurzeln von f wieder mit 2τ bezeichnet.

$p=2$. Spaltungen von f_6 .

a) Reelle Spaltungen der Form $\psi_{p+1-2\sigma} \cdot \chi_{p+1+2\sigma}$.

$2\tau =$	0	2	4	6
Reelle ψ_1, χ_5	0	2	4	6
Reelle ψ_3, χ_3	0	2	4	10
Konjugierte ψ_3, χ_3	4	0	0	0
Reelle Spaltungen überhaupt	4	4	8	16

b) Reelle Spaltungen der Form $\psi_{2\sigma} \cdot \chi_{2p+2-2\sigma}$.

$2\tau =$	0	2	4	6
Reelle ψ_0, χ_6	1	1	1	1
Reelle ψ_2, χ_4	3	3	7	15
Reelle Spaltungen überhaupt	4	4	8	16

Von hier aus ergibt sich beispielsweise als Regel: Ist p gerade und 2τ die Zahl der reellen Faktoren von f , so hat man für $\tau > 0$ sowohl bei a) wie bei b) $2^{p+\tau-1}$ Spaltungen in reelle Faktoren, für $\tau = 0$ aber bei a) 2^p Spaltungen in konjugierte Faktoren, bei b) 2^p Spaltungen in reelle Faktoren.

$p=3$. Spaltungen von f_8 .

Reelle Spaltungen der Form $\psi_{p+1-2\sigma} \cdot \chi_{p+1+2\sigma} = \psi_{2\sigma} \cdot \chi_{2p+2-2\sigma}$.

2τ	0	2	4	6	8
Reelle ψ_0, χ_8	1	1	1	1	1
Reelle ψ_2, χ_6	4	4	8	16	28
Reelle ψ_4, χ_4	3	3	7	15	35
Konjugierte ψ_4, χ_4	8	0	0	0	0
Reelle Spaltungen überhaupt	16	8	16	32	64



Von hier aus dann etwa wieder: Ist p ungerade und 2τ die Zahl der reellen Wurzeln von f , so hat man für $\tau > 0$ $2^{p+\tau-1}$ Spaltungen in reelle Faktoren, für $\tau = 0$ aber 2^p Spaltungen in konjugierte Faktoren und 2^p Spaltungen in reelle Faktoren.

An diese Realitätsdiskussion der Spaltungen schließt sich dann zunächst, von Formel (2) aus, diejenige der Φ . Ich will hier einen zusammenfassenden Satz nur für diejenigen Φ aussprechen, welche ungeraden σ zugehören; denn sie allein kommen in Betracht, wenn wir hernach vom hyperelliptischen Gebilde zum allgemeinen Gebilde übergehen. Wir haben:

So lange $\tau > 0$ und $< (p+1)$, ist die Zahl der verschiedenen hier in Betracht kommenden reellen Φ gleich $2^{p+\tau-2}$.

Für $\tau = p+1$ wird die Zahl gleich $2^{p-1}(2^p-1)$, für $\tau = 0$ bei geradem p gleich 0, bei ungeradem p gleich 2^{p-1} .

Ferner aber die Realitätsdiskussion der F_μ . Da sind die Gebilde mit $\tau > 0$ sofort erledigt, indem wir sagen:

Reelle Spaltungen von f ergeben auch reelle Scharen zugehöriger F_μ .

Dagegen ist der Fall $\tau = 0$ in nähere Betrachtung zu ziehen. Ich will f_{2p+2} hier wieder als positives Polynom voraussetzen. Das reelle hyperelliptische Gebilde kann dann noch in einer der beiden Formen vorgelegt sein:

$$\alpha) s = \sqrt{f_{2p+2}(z)}, \quad \beta) s' = i\sqrt{f_{2p+2}(z)}$$

im ersteren Falle ist es orthosymmetrisch, im letzteren diasymmetrisch.

Wir nehmen nun erstlich p gerade und betrachten die Zerlegungen von f in $\psi_{p+1-2\sigma} \cdot \chi_{p+1+2\sigma}$. Reell sind unter denselben nur diejenigen mit $\sigma = 0$, bei denen ψ und χ konjugiert imaginär sind. Wir setzen nun nach Formel (3):

$$\sqrt{F_\mu} = \Psi_{r(p-1)-1} \cdot \sqrt{\psi_{p+1}} + X_{r(p-1)-1} \cdot \sqrt{\chi_{p+1}}$$

und nehmen hier die Ψ, X ebenfalls konjugiert imaginär. Indem wir quadrieren, erhalten wir einen Wert von F_μ , in welchen wir entweder, vermöge α), das s , oder, vermöge β), das s' einführen werden. Wir sehen:

I. Im Falle α) liefert jede Spaltung von f in konjugiert imaginäre Faktoren eine Schar reeller F_μ (ungerader Ordnung), im Falle β) aber eine Schar, die man nur insofern als reell bezeichnen kann, als in ihr neben der einzelnen imaginären F_μ immer auch deren konjugierte auftritt.

Wir betrachten ferner, bei geradem p , die Zerlegungen von f in Faktoren $\psi_{2\sigma} \cdot \chi_{2p+2-2\sigma}$. Reelle Spaltungen entstehen hier nur so, daß man die ψ, χ einzeln reell nimmt. Ausgehend von Formel (4):

$$\sqrt{F_\mu} = \Psi_{r(p-1)-\sigma} \cdot \sqrt{\psi_{2\sigma}} + X_{r(p-1)-\sigma-2} \cdot \sqrt{\chi_{2p+2-2\sigma}}$$

werden wir jetzt sowohl im Falle α) als im Falle β) reelle F_μ erhalten

können. Wir werden zu dem Zwecke im Falle α) die Koeffizienten von Ψ, X sämtlich reell nehmen, im Falle β) aber die Koeffizienten von Ψ reell, die von X rein imaginär. Also:

II. Eine jede der hier in Betracht kommenden reellen Spaltungen von f liefert für α) wie für β) eine Schar reeller F_μ gerader Ordnung.

Wir nehmen endlich das p ungerade. Da haben wir nebeneinander 2^p Spaltungen von f in konjugiert imaginäre Faktoren und ebensoviele in reelle Faktoren zu betrachten. Eine jede dieser Spaltungen ergibt F_μ von ungerader, wie von gerader Ordnung. Wir sehen sofort:

III. Was die Realität der F_μ bei ungeradem p angeht, so haben wir für konjugiert imaginäre ψ, χ einen Satz ganz wie I, für reelle ψ, χ einen Satz wie II.

§ 6.

Die Realitätstheoreme des allgemeinen Falles.

Aus der Realität der Φ, F_μ der hyperelliptischen Fälle werden wir jetzt ohne weiteres auf die Realität der bezüglichen Gebilde in allen denjenigen Fällen symmetrischer Flächen schließen dürfen, die einen hyperelliptischen Repräsentanten enthalten; bei den Φ werden wir dabei natürlich, wie wir schon bemerkten, nur diejenigen mitzählen dürfen, welche Zerlegungen von f in $\psi_{p+1-2\sigma} \cdot \chi_{p+1+2\sigma}$ mit ungeradem σ entsprechen; denn nur diese gehören zu ungeraden θ . —

In der Tat ist klar, daß sich die Realität der einzelnen Scharen der F_μ , wie der Φ , nicht ändern kann (selbst wenn einzelne Φ zwischendurch einmal unbestimmt werden), so lange sich die symmetrische Riemannsche Fläche nur innerhalb ihrer Art abändert. Denn es können niemals zwei F_μ oder auch zwei Φ , die verschiedenen Charakteristiken angehören, zusammenfallen, so lange man es überhaupt mit einer Riemannschen Fläche vom Geschlechte p zu tun hat. — Aber wir können weiter gehen. Die Zahl der Berührungspunkte, welche eine reelle F_μ oder Φ mit dem einzelnen reellen Zuge unserer Kurve gemein hat, kann offenbar, so lange sich die Kurve innerhalb ihrer Art, d. h. stetig, ändert, nur um gerade Zahlen abgeändert werden; es wird also eine bleibende Unterscheidung abgeben, ob dieselbe gerade ist (die Null eingeschlossen) oder ungerade. Wir teilen unsere F_μ, Φ dementsprechend bei jeder einzelnen unserer Kurvenarten in Klassen, je nach den Kurvenzügen, welche sie ungeradzahlig berühren. Ich werde die Klassen in der Bezeichnung so weit zur Geltung bringen, daß ich die Zahl der ungeradzahlig berührten Ovale durch einen dem F_μ oder Φ oben zugesetzten Akzent bezeichne. $\Phi^{(0)}$ z. B. wird eine Φ heißen, wenn sie kein Oval ungeradzahlig berührt, wenn sie



also möglicherweise überhaupt kein Oval berührt (entsprechend den „Doppeltangenten erster Art“ der ebenen Kurven vierter Ordnung bei Zeuthen). Bei geradem μ wird es natürlich nur $F_\mu^{(0)}, F_\mu^{(2)}, F_\mu^{(4)}, \dots$ geben können (da doch die Gesamtzahl der reellen Berührungspunkte bei diesen F_μ gerade sein muß). Analog gibt es bei ungeradem μ , sofern p gerade ist, $F_\mu^{(1)}, F_\mu^{(3)}, \dots$, dagegen, wenn p ungerade ist, wieder $F_\mu^{(0)}, F_\mu^{(2)}, \dots$. Dasselbe gilt für die Φ . Die einzelnen $F_\mu^{(0)}, \Phi^{(0)}$ bezeichnen wir dabei als denjenigen ω Ovalen „zugehörig“, die eben von ihnen ungeradzahlig berührt werden. Natürlich können nur solche $F_\mu^{(0)}, \Phi^{(0)}$ existieren, welche, wie ich mich ausdrücke, kombinatorisch möglich sind. Es soll dies heißen, daß erstens ω gerade oder ungerade ist nach der soeben ange deuteten Regel, daß zweitens (wie selbstverständlich) $\omega \leq \lambda$ ist, unter λ die Gesamtzahl der überhaupt vorhandenen Kurvenovale verstanden. Und nun werden wir verlangen dürfen, bei jeder einzelnen unserer Kurvenarten die Gesamtzahl der verschiedenen Arten reeller $F_\mu^{(0)}, \Phi^{(0)}$ anzugeben, welche in irgend welche kombinatorisch-mögliche Klasse gehören.

Die so erweiterte Frage wird sich für die sämtlichen diasymmetrischen Arten wie für die beiden äußersten orthosymmetrischen Arten wieder ohne weiteres aus dem Verhalten der entsprechenden hyperelliptischen Gebilde beantworten lassen; man hat bei der Diskussion der letzteren nur noch mehr ins einzelne zu gehen, als wir im vorigen Paragraphen getan haben. Ich ziehe aber vor, die betreffenden Sätze, bei denen sich die „mittleren“ orthosymmetrischen Fälle von den übrigen Fällen schließlich gar nicht abtrennen, zunächst einmal als solche ganz allgemein hinzustellen. Die Beweisgründe sollen dann hinterher, soweit sie sich nicht aus der elementaren Betrachtung der hyperelliptischen Fälle ergeben, in den folgenden Paragraphen entwickelt werden. — Diese hier mitzuteilenden Sätze enthalten das eigentlich neue Resultat der vorliegenden Arbeit¹¹⁾. Ich sage folgendermaßen:

1. Was die Φ angeht, so nehme ich natürlich keine Notiz von den besonderen Φ , welche in einzelnen Fällen den geraden ϑ entsprechen mögen; auch drücke ich mich so aus, als wenn jedem ungeraden ϑ nur ein Φ zugehörte. Ich habe dann:

Man bilde sich bei den Φ die sämtlichen kombinatorisch möglichen Klassen, lasse dann aber in den orthosymmetrischen Fällen die eine Klasse $\omega = \lambda$ bei Seite. Jede einzelne dieser Klassen wird dann in jedem Falle genau 2^{p-1} reelle Φ enthalten.

¹¹⁾ Das auf die Φ bezügliche Resultat habe ich bereits in der oben genannten Mitteilung in den Göttinger Nachrichten vom Mai dieses Jahres [1892] bekanntgegeben.

Hiernach ist die Gesamtzahl der reellen Φ im Falle $\lambda = 0$ 2^{p-1} oder 0, je nachdem p ungerade oder gerade ist, in den diasymmetrischen Fällen $2^{p+\lambda-2}$, in den orthosymmetrischen Fällen $2^{p-1}(2^{\lambda-1} - 1)$.

2. Bei den F_μ nehme man die Fälle $\lambda > 0$ vorweg. Man hat dann:
Es gibt in diesen Fällen bei jedem μ von jeder kombinatorisch möglichen Klasse genau 2^p reelle Arten.

3. Was endlich die F_μ im Falle $\lambda = 0$ angeht, so hat man zwischen geradem und ungeradem p zu unterscheiden. Bei geradem p hat man wieder die geraden und die ungeraden μ auseinanderzuhalten. Bei geradem μ gibt es 2^p Scharen reeller F_μ (die natürlich als $F_\mu^{(0)}$ zu bezeichnen sind), bei ungeradem μ 2^p Scharen von F_μ , welche nur insofern als reell zu bezeichnen sind, als sie zu jeder imaginären F_μ die konjugierte enthalten (diese F_μ fallen aus der verabredeten Bezeichnung heraus; man könnte sie als $[F_\mu]$ benennen). Dagegen verhalten sich bei ungeradem p die geraden und ungeraden μ übereinstimmend: Es gibt bei jedem μ 2^p Scharen reeller $F_\mu^{(0)}$ und 2^p Scharen von $[F_\mu]$.

Hierzu dann etwa noch folgende Bemerkungen:

ad 1. Hier finden sich natürlich die Zeuthenschen Sätze von den Doppeltangenten der ebenen Kurven vierter Ordnung wieder und zwar in der Form: allemal gibt es vier Doppeltangenten Φ^0 und außerdem, sofern wir nur den Fall der Gürtelkurve beiseite lassen, zu je zwei Ovalen, die wir unter den vorhandenen nach Belieben herausgreifen mögen, vier zugehörige Doppeltangenten $\Phi^{(2)}$.

Übrigens mag man darin, daß bei ihnen die Kombination $\Phi^{(2)}$ wegfällt, den geometrischen Unterschied der λ -teiligen orthosymmetrischen Kurven von den mit gleicher Zügezahl ausgestatteten diasymmetrischen Kurven erblicken. So hat die dreiteilige orthosymmetrische Kurve des Geschlechtes 4 keine Tritangentialebenen $\Phi^{(3)}$ (wie wir schon am Schlusse des § 2 bemerkten), die dreiteilige diasymmetrische Kurve dagegen wird acht derselben besitzen (wie man ebenfalls aus der Figur ohne weiteres ersieht).

ad 2, 3. Unter den F_μ gerader Ordnung sind hier die doppeltzählenden f_μ mitgerechnet. Insofern alle reellen Züge unserer Kurve paaren Charakter haben, werden sie von jeder Fläche und also auch jeder f_μ in einer paaren Anzahl von Punkten geschnitten werden. Als F_μ betrachtet gehören die f_μ daher zu den $F_\mu^{(0)}$. Von dieser besonderen Art der $F_\mu^{(0)}$ muß man absehen, wenn man meine jetzige Angabe mit derjenigen ver-



gleichem will, welche ich selbst in Bd. 10 der Math. Annalen (vgl. Abhandlung XXXIX) oder Crone in Bd. 12 daselbst für die Scharen der Berührungskegelschnitte der ebenen Kurven vierter Ordnung gegeben haben.

§ 7.

Die Weicholdschen Periodizitätsschemata.

Ich werde den Beweis der vorstehend formulierten Theoreme, soweit er durch elementare Betrachtung der hyperelliptischen Gebilde geführt werden kann, nicht weiter verfolgen. Insbesondere mag der Fall der nullteiligen Kurven fortan durch den Verweis auf die entsprechenden hyperelliptischen Verhältnisse als erledigt gelten. Statt dessen wende ich mich zu neuen Betrachtungen, welche gestatten werden, den Beweis nach gleichförmiger Methode für die sämtlichen nicht nullteiligen Kurven zu erbringen¹²⁾. Damit ist dann die Lücke, welche der hyperelliptische Ansatz betreffs der „mittleren“ orthosymmetrischen Fälle ließ, von selbst mit ausgefüllt.

Die neuen Betrachtungen schließen sich direkt an die in § 4 gegebenen Sätze aus der Theorie der Abelschen Funktionen an. Sie gehen darauf aus, durch Konstruktion möglichst „symmetrischer“ kanonischer Schnittsysteme auf den symmetrischen Flächen mit $\lambda = 0$ Normalintegrale j_a festzulegen, bei denen man über die Realität der Perioden $\tau_{a\beta}$ etwas aussagen kann, um dann eine direkte Realitätsdiskussion derjenigen Umkehrprobleme, bez. Thetaformeln eintreten zu lassen, durch welche man die F_p , bez. die Φ bestimmen kann. Die erste Hälfte dieses Gedankenganges ist bereits in der in der Einleitung genannten Weicholdschen Dissertation zur Durchführung gekommen; ich darf mich hier darauf beschränken, über die bezüglichlichen von Herrn Weichold gefundenen Resultate zu referieren (wobei ich ausschließlich diejenigen Momente hervorkehre, welche für meine jetzigen Zwecke von Wichtigkeit sind):

Wir setzen $\lambda > 0$ voraus. Dementsprechend gibt es sicher Symmetrielinien, und nun wollen wir irgendeine derselben bevorzugen und als *ausgezeichnete* Symmetrielinie zugrunde legen. Die übrigen $(\lambda - 1)$ Symmetrielinien benutzen wir dann in irgendeiner Reihenfolge als die Schnitte $A_1, \dots, A_{\lambda-1}$ unseres kanonischen Schnittnetzes. Ferner wählen wir die zugehörigen Schnitte $B_1, \dots, B_{\lambda-1}$ so, als sich selbst symmetrische Kurven, daß jede derselben das ihr entsprechende A wie auch die ausgezeichnete Symmetrielinie einmal schneidet. Es gilt jetzt noch, weitere Schnitte $A_\lambda, \dots, A_p, B_\lambda, \dots, B_p$ in geeigneter Weise einzuführen. Hier muß ich

¹²⁾ Dies ist dieselbe Methode, welche ich (in Abh. XXXIX) insbesondere bei Untersuchung der ebenen Kurven vierter Ordnung gebrauchte.

wegen der Einzelheiten auf Weicholds eigene Darstellung verweisen. In der Tat werden wir diese Einzelheiten weiterhin doch nicht in Diskussion ziehen. Die Festsetzungen werden so gemacht, daß die sämtlichen Normalintegrale j_a rein imaginär ausfallen. Wir setzen daraufhin $ij_a = j'_a$. Die „reellen“ Integrale j'_a zeigen dann bei Überschreitung der Querschnitte A, B Periodizitätsmoduln, die wir der Deutlichkeit halber hier ausführlich hersetzen:

	A_1	A_2		A_p	B_1	B_2		B_p
j'_1	i	0		0	$i\tau_{11}$	$i\tau_{12}$		$i\tau_{1p}$
j'_2	0	i		0	$i\tau_{21}$	$i\tau_{22}$		$i\tau_{2p}$
j'_p	0	0		i	$i\tau_{p1}$	$i\tau_{p2}$		$i\tau_{pp}$

Und nun ist die Sache die, daß man in allen unseren Fällen die imaginären Teile der hier auftretenden Größen $i\tau_{a\beta}$ durch eine einfache Hilfsbetrachtung (die wir hier überspringen) angeben kann. *Besagte imaginäre Teile sind im allgemeinen Null, nur in $(p + 1 - \lambda)$ Feldern unserer Tabelle betragen sie jedesmal $\frac{i}{2}$.* Und zwar liegen diese $(p + 1 - \lambda)$ Felder in den orthosymmetrischen Fällen rechter Hand und linker Hand von den $(p + 1 - \lambda)$ letzten Feldern der Hauptdiagonale, wie folgendes Schema aufweist:

	B_1		$B_{\lambda-1}$	B_λ	$B_{\lambda+1}$		B_{p-1}	B_p
j'_i	0		0	0	0		0	0
j'_{i-1}	0		0	0	0		0	0
j'_i	0		0	0	$\frac{i}{2}$		0	0
j'_{i+1}	0		0	$\frac{i}{2}$	0		0	0
j'_{p-1}	0		0	0	0		0	$\frac{i}{2}$
j'_p	0		0	0	0		$\frac{i}{2}$	0



in den diasymmetrischen Fällen aber rücken sie in die Hauptdiagonale selbst hinein:

	B_1		B_{i-1}	B_i	B_{i+1}		B_{p-1}	B_p
j'_1	0		0	0	0		0	0
j'_{i-1}	0		0	0	0		0	0
j'_i	0		0	$\frac{i}{2}$	0		0	0
j'_{i+1}	0		0	0	$\frac{i}{2}$		0	0
j'_{p-1}	0		0	0	0		$\frac{i}{2}$	0
j'_p	0		0	0	0		0	$\frac{i}{2}$

Dies ist alles, was wir aus der Weicholdschen Dissertation gebrauchen. Ich darf aber folgende Bemerkungen hinzufügen:

a) Weichold hat auch den Fall der diasymmetrischen Fläche ohne Symmetrielinie behandelt und bei ihm „reelle“ Normalintegrale j_a gefunden, deren Perioden $\tau_{a\alpha}$ reell sind, während ihre übrigen $\tau_{a\beta}$ sämtlich den imaginären Bestandteil $\frac{i}{2}$ aufweisen. *Dieses Weicholdsche Schema ist indessen überflüssig.* Ich sage, daß man für die diasymmetrische Fläche ohne Symmetrielinie immer dasselbe Schema aufstellen kann, wie für die niederste orthosymmetrische Fläche; nur sind bei ihr die zu diesem Schema gehörigen j'_a als rein imaginär zu bezeichnen, die j_a selbst also als reell. Man führe nämlich die gegebene diasymmetrische Fläche durch Kontinuität in den zugehörigen hyperelliptischen Fall (mit lauter imaginären Verzweigungspunkten) über. Die so gewonnene hyperelliptische Fläche gehört dann von selbst, wie wir wissen, zugleich der niedersten orthosymmetrischen Art an. Man ziehe auf ihr jetzt diejenigen Querschnitte, wie sie Weichold für diese orthosymmetrische Art vorschreibt. Zugleich konstruiere man diesen Querschnitten zugehörig genau dieselben Integrale wie im orthosymmetrischen Falle. Diese Integrale, welche im orthosymmetrischen Falle reell waren, werden eben deshalb jetzt als rein imaginär zu bezeichnen sein. Denn diese Integrale haben alle die Gestalt:

$$\int \frac{q_{p-1} dz}{\sqrt{f_{2p+2}}}$$

(unter q_{p-1} ein Polynom $(p-1)$ -ten Grades von z verstanden) und hier ist nun die $\sqrt{f_{2p+2}}$ im orthosymmetrischen Falle gleich s , in unserem diasymmetrischen Falle aber gleich $i s'$ zu setzen. Endlich gehe man von der hyperelliptischen Fläche durch Kontinuität zur ursprünglichen Fläche zurück, indem man Sorge trägt, daß die Querschnitte dabei fortgesetzt diejenige Symmetrieeigenschaft behalten, welche sie auf der hyperelliptischen Fläche bezüglich der zugehörigen symmetrischen Umformung Σ_2 besessen haben.

b) Lassen wir dem gerade Gesagten zufolge das besondere Schema der nullteiligen Kurve bei Seite, so bleiben $\left[\frac{3p+2}{2}\right]$ unabhängige Periodizitätsschemata für die $\left[\frac{p+2}{2}\right]$ orthosymmetrischen und die p von uns beibehaltenen diasymmetrischen Arten übrig. *Diese Schemata können bei beliebigem p durch Abänderung der Schnittsysteme unmöglich aufeinander reduziert werden.* Von dem Schema hängt nämlich, wie wir bald sehen werden, in einfacher Weise die jeweilige Gesamtzahl der reellen Φ ab, und diese Gesamtzahl ist bei jeder der genannten Arten eine andere (ausgenommen den niedersten diasymmetrischen und niedersten orthosymmetrischen Fall eines ungeraden p). — Da scheint nun, auf den ersten Blick, ein Widerspruch vorzuliegen gegen ein Resultat, welches Herr Hurwitz in Bd. 94 des Journals für Mathematik (1882) abgeleitet hat. Herr Hurwitz untersucht dort, von dem Allgemeinbegriff *reeller* $2p$ -fach periodischer Funktionen ausgehend, deren Periodizitätseigenschaften und bringt dieselben auf nur $(p+1)$ Schemata zurück, die so konstruiert sind, daß die Perioden zweiter Art entweder nirgends oder nur in einer Anzahl von Gliedern der Hauptdiagonale den imaginären Bestandteil $\frac{i}{2}$ aufweisen, sofern man die Perioden erster Art in der Weise rein imaginär gewählt hat, wie wir dies bei den j'_a getan haben. Das wäre also unser oberstes orthosymmetrisches Schema zusammen mit unseren p diasymmetrischen Schematen. — Aber der Widerspruch ist nur scheinbar, wie mir Herr Burkhardt bemerkt. Hurwitz sagt in der Tat nirgends, daß er *kanonische* Perioden betrachten will. Und verzichtet man hierauf, so sind aus den orthosymmetrischen Schematen mit $\lambda < p+1$ natürlich sofort diasymmetrische zu machen. Man hat nur die Kolonnen B_i und B_{i+1}, \dots, B_{p-1} und B_p zu vertauschen.

§ 8.

Direkte Abzählung der reellen F_n in den Fällen $\lambda > 0$.

Auf Grund der mitgeteilten Schemata erledigt sich nun die Abzählung der Scharen reeller F_n in den hier zu betrachtenden Fällen $\lambda > 0$ mit großer Leichtigkeit. Wir werden zunächst einiges über die Werte be-



haupten, welche unsere Integrale j'_a annehmen, wenn man sie von einem Punkte z der ausgezeichneten Symmetrielinie nach einem andern Punkte x der symmetrischen Fläche hinleitet. Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergibt sich aus den jeweiligen geometrischen Verhältnissen sofort; wir brauchen dabei nicht zu verweilen. Wir haben:

1. Ist x selbst ein Punkt der ausgezeichneten Symmetrielinie, so sind sämtliche $j'_a{}^{x,z}$ reell (d. h. bis auf beliebig hinzuzufügende Multipla der Perioden reell).

2. Liegt dagegen x auf einer der anderen Symmetrielinien, sagen wir auf A_β , so wird das $j'_\beta{}^{x,z}$, modulo der Perioden genommen, den Bestandteil $\frac{i}{2}$ aufweisen; die anderen $j'_a{}^{x,z}$ sind wie ad 1 reell.

3. Ist x ein beliebiger Punkt der Riemannschen Fläche und \bar{x} der zu ihm symmetrische Punkt, so wird $j'_a{}^{x,z} + j'_a{}^{\bar{x},z}$ bis auf Multipla der Perioden allemal einer reellen Größe gleich sein.

Wir betrachten ferner irgendwelches Umkehrproblem:

$$j'_a{}^{x_1,z} + j'_a{}^{x_2,z} + \dots = K_a \pmod{P_{\alpha\beta}, P'_{\alpha\beta}}$$

und fragen, wie hier die K_a beschaffen sein müssen, damit die x , soweit sie nicht den verschiedenen Symmetrielinien angehören (also reell sind), paarweise imaginär symmetrisch ausfallen, damit also das Umkehrproblem eine reelle Lösung zulasse, wie wir sagen wollen. Offenbar kommt:

Zu dem genannten Zwecke ist notwendig und hinreichend, daß, von Multipla der Perioden abgesehen,

diejenigen K_a , deren Index $> (\lambda - 1)$ ist, reell sind,

diejenigen K_a aber, deren Index $\leq (\lambda - 1)$ ist, entweder reell

sind oder den imaginären Bestandteil $\frac{i}{2}$ aufweisen.

Und zwar werden wir, was die einzelne reelle Lösung des Umkehrproblems angeht, sagen dürfen:

Je nachdem das einzelne K_a der letzteren Kategorie ($\alpha \leq (\lambda - 1)$) reell ist oder den imaginären Bestandteil $\frac{i}{2}$ besitzt, wird die Symmetrielinie A_α eine gerade oder ungerade Zahl bezüglicher Punkte x enthalten.

Damit ist dann zugleich gesagt, ob die „ausgezeichnete“ Symmetrielinie eine gerade oder ungerade Zahl der Punkte x trägt; dies wird ersichtlich davon abhängen, ob die Gesamtzahl der gesuchten x von der Zahl der auf die $A_1, \dots, A_{\lambda-1}$ entfallenden x um eine gerade oder ungerade Differenz abweicht.

So vorbereitet greifen wir jetzt auf die Ansätze des § 4 zurück, indem wir nur die damals zugrunde gelegten beliebigen Integrale erster Gat-

tung w_a durch die reellen Integrale j'_a ersetzen. Wir nehmen dementsprechend zunächst die $2p - 2$ Schnittpunkte $x_1, x_2, \dots, x_{2p-2}$ unserer Kurve mit irgendwelcher φ und schreiben:

$$j'_a{}^{x_1,z} + j'_a{}^{x_2,z} + \dots + j'_a{}^{x_{2p-2},z} = k_a \pmod{P_{\alpha\beta}, P'_{\alpha\beta}}.$$

Möge die φ hier insbesondere reell sein. Dann liegen die x , soweit sie nicht paarweise konjugiert imaginär sind, in gerader Zahl auf die verschiedenen reellen Züge unserer Kurve verteilt. Daher kommt:

Die k_a sind bis auf Multipla der Perioden reellen Größen gleich.

Dementsprechend mögen wir uns fortan die k_a als reelle Größen denken. Wir bilden uns jetzt die 2^{2p} Umkehrprobleme, von deren Auflösung die Bestimmung der F_μ ($\mu > 1$) abhängt:

$$j'_a{}^{x_1,z} + \dots + j'_a{}^{x_{\mu(p-1)},z} = \frac{\mu k_a}{2} + \sum \varrho_\beta \frac{P_{\alpha\beta}}{2} + \sum \varrho'_\beta \frac{P'_{\alpha\beta}}{2}.$$

Welche dieser Umkehrprobleme werden reelle Lösungen zulassen? Indem wir die näheren Angaben über die $P_{\alpha\beta}, P'_{\alpha\beta}$ heranziehen, die wir im vorigen Paragraphen entwickelten, kommt:

Nur diejenigen Umkehrprobleme, bei denen die Zahlen $\varrho'_k, \varrho'_{k+1}, \dots, \varrho'_p$ verschwinden, ergeben reelle Lösungen (und also Scharen reeller F_μ).

Von den 2^{2p} Umkehrproblemen sind dies $2^{p+\lambda-1}$, in Übereinstimmung mit unserer früheren Angabe. Ferner aber:

Von den zugehörigen Punkten x liegen auf der Symmetrielinie A_β eine gerade oder ungerade Zahl, je nachdem ϱ_β gleich Null oder Eins ist.

Auf der ausgezeichneten Symmetrielinie findet sich eine gerade oder ungerade Zahl der Punkte x , je nachdem $\mu(p-1) - \sum_1^{\lambda-1} \varrho_\beta$ gerade oder ungerade ist.

Alle F_μ gegebener Ordnung also, die in den $\varrho_1, \dots, \varrho_{\lambda-1}$ übereinstimmen, zeigen betreffs der Verteilungsweise der Punkte x auf die verschiedenen Symmetrielinien einen übereinstimmenden Charakter, sie gehören im Sinne der früheren Benennung zu derselben Klasse. Wir sehen:

Die einzelne Klasse ist durch die Werte der $\varrho_1, \dots, \varrho_{\lambda-1}$ bestimmt.

Hat man über die $\varrho_1, \dots, \varrho_{\lambda-1}$ irgend verfügt, so können die $\varrho_1, \dots, \varrho_p$ und die $\varrho'_1, \dots, \varrho'_{\lambda-1}$ noch beliebig angenommen werden, was 2^p Möglichkeiten gibt. Daher:

Jede kombinatorisch mögliche Klasse existiert und enthält noch 2^p verschiedene Arten von F_μ .

Damit haben wir in der Tat die sämtlichen für die F_μ von uns aufgestellten Sätze für die hier in Betracht kommenden Fälle ($\lambda > 0$) zur Ableitung gebracht. Wir haben aber noch mehr gewonnen. In der Tat



sehen wir, wie sich die *reellen* F_μ von den imaginären und hinwieder die verschiedenen *Klassen* reeller F_μ voneinander durch ihre „Elementarcharakteristiken“ $\varrho_\beta, \varrho'_\beta$ unterscheiden. Von hier aus ist dann nur noch ein Schritt, um bei einer Kurve, bei welcher man die sämtlichen *Arten* reeller F_μ geometrisch beherrscht, für jede derselben die ganze Reihe der zugehörigen $\varrho_\beta, \varrho'_\beta$ anzuschreiben. Ich will annehmen, daß wir das gleiche auch für die „Primcharakteristiken“ geleistet hätten, welche den F_μ ungerader Ordnung, bez. den Φ zuzuordnen sind; ich werde darüber im folgenden Paragraphen noch nähere Bemerkungen machen. Wir sind dann in der Lage, alle die schönen Theoreme, die man über die Gruppierung der Charakteristiken besitzt, was die reellen F_μ und die reellen Φ angeht, in die volle geometrische Anschauung zu übersetzen. Die Schwierigkeit liegt hier nur im Vordersatz. Was gibt es für Kurven der q , bei denen man die sämtlichen Arten reeller F_μ wie Φ auf Grund bestimmter geometrischer Definitionen auseinanderhalten kann? Natürlich sind es die hyperelliptischen Kurven in diesem Falle; bei ihnen sind ja die sämtlichen F_μ , wie die Φ durch ihr Verhalten zu den Verzweigungspunkten des Gebildes algebraisch bestimmt, wie wir in § 5 des näheren ausführten. Da hat es in der Tat keine Schwierigkeit, jeder reellen F_μ oder Φ diejenige Charakteristik $\varrho_\beta, \varrho'_\beta$ oder auch diejenige Primcharakteristik zuzusetzen, die ihr vermöge unserer Festsetzungen zukommt. Von da aus beherrscht man dann durch Kontinuität die reellen F_μ und Φ bei allen denjenigen unserer Kurven, die eben aus den hyperelliptischen Fällen durch Kontinuität hervorgehen, d. h. also in den beiden äußersten orthosymmetrischen und in den sämtlichen diasymmetrischen Fällen (inklusive den Fall $\lambda = 0$). Die verschiedenen Scharen der F_μ sind dabei nicht mehr algebraisch, sondern nur noch durch *Ungleichheiten* getrennt, die in abstracto vielleicht schwierig zu formulieren, aber bei jeder ausgeführten Figur unmittelbar zu verstehen sind. Ich darf mich in diesem Betracht auf die Zeichnungen berufen, die ich in der [vorstehenden Abh. XLI] für die vierteilige ebene Kurve vierter Ordnung gegeben habe (wobei ich gleich die Bemerkung zufügen will, daß die Festlegung der dort für das hyperelliptische Gebilde gebrauchten Primcharakteristiken vermöge der Regeln, welche Herr Burkhardt und ich über diesen Gegenstand in Bd. 32 der Math. Annalen (1888) entwickelt haben¹²⁾, wesentlich vereinfacht werden kann). — Die Frage bleibt, wie man das gleiche für die „mittleren“ orthosymmetrischen Fälle soll leisten können, welche dem hyperelliptischen Ansatz unzugänglich sind. Vielleicht wird hier eine Ausbildung der Doppelpunktmethode im Sinne der dem § 3 beigefügten Schlußbemerkungen nützlich.

¹²⁾ [Vgl. speziell § 3 meiner Arbeit. — Bei Burkhardt siehe besonders S. 426. K.]

§ 9.

Von der Realität der Φ .

Sollen wir jetzt noch die Realität der Φ diskutieren, so wollen wir dabei, weil es keine Mühe macht, unsere sämtlichen Kurvenarten, auch die mit $\lambda = 0$, gleichförmig nebeneinander behandeln. Bemerken wir zunächst, daß in allen Fällen das „normale“ Koordinatensystem, das wir durch die Formeln definierten: $q_1 : \dots : q_p = dj_1 : \dots : dj_p$, insofern doch die dj_α mit den dj'_α proportional sind, *reell* ist. In bezug auf dieses Koordinatensystem stellen sich nun die Φ des allgemeinen Falles (und nur von diesen soll hier die Rede sein) nach Formel (8) des § 4 durch die Gleichung dar:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial j_1}\right)_{0 \dots 0} \cdot q_1 + \dots + \left(\frac{\partial \theta}{\partial j_p}\right)_{0 \dots 0} \cdot q_p = 0;$$

θ soll dabei der Reihe nach alle ungeraden θ -Funktionen bedeuten. *Wir werden hiernach die sämtlichen reellen Φ erhalten, indem wir unter den ungeraden θ jeweils diejenigen herausuchen, bei denen sich die Nullwerte der Differentialquotienten $\frac{\partial \theta}{\partial j_1}, \dots, \frac{\partial \theta}{\partial j_p}$ vermöge der in § 7 gegebenen Schemata der $\tau_{\alpha\beta}$ wie reelle Größen verhalten.* Dies ist eine ganz elementare Aufgabe. Wir finden sofort: daß bei Zugrundelegung der *orthosymmetrischen* Schemata reelle Φ von denjenigen ungeraden θ geliefert werden, welche *verschwindende* $g_\lambda, g_{\lambda+1}, \dots, g_p$ besitzen, im Falle der *diasymmetrischen* Schemata aber von den anderen, deren $g_\lambda, g_{\lambda+1}, \dots, g_p$ *gleich Eins* sind. Hieran schließt sich dann folgende Abzählung:

In den orthosymmetrischen Fällen wird man, um reelle Φ zu bekommen, die h_1, \dots, h_p ganz beliebig annehmen können, dagegen die $g_1, \dots, g_{\lambda-1}$ und $h_1, \dots, h_{\lambda-1}$ der einen Bedingung unterwerfen müssen, daß $g_1 h_1 + \dots + g_{\lambda-1} h_{\lambda-1}$ ungerade sein soll. *Dies gibt*

$$2^{p-\lambda+1} \cdot 2^{\lambda-2} (2^{\lambda-1} - 1) = 2^{p-1} (2^{\lambda-1} - 1)$$

reelle Φ . Der Minimalwert von λ ist hier für gerade p , wie wir wissen, gleich 1, für ungerade p gleich 2. Dies gibt für die niederste orthosymmetrische Kurve beziehungsweise 0 und 2^{p-1} reelle Φ . Eben diese Zahlen gelten dann auch für die zugehörige *nullteilige* Kurve, wie aus den Angaben, die wir über deren Periodizitätsschemata machten, ohne weiteres hervorgeht. Was die anderen diasymmetrischen Fälle angeht, so werden wir bei ihnen (um reelle Φ zu bekommen) die Größen $g_1, \dots, g_{\lambda-1}, h_1, \dots, h_{\lambda-1}$ beliebig annehmen dürfen und haben dann die h_2, \dots, h_p der einen Bedingung zu unterwerfen, daß

$$g_1 h_1 + \dots + g_{\lambda-1} h_{\lambda-1} + h_2 + \dots + h_p$$

ungerade sein soll. *Dies gibt ersichtlich $2^{p+\lambda-2}$ reelle Φ .* — Wir haben damit die früheren Angaben über die Gesamtzahlen der reellen Φ sämtlich bestätigt.



Das Problem der Φ ist jetzt für alle diejenigen Kurven bereits erledigt, bei denen es hinsichtlich der Φ nur eine kombinatorische Möglichkeit gibt, insbesondere also bei der nullteiligen Kurve und bei geradem p für die niedrigste orthosymmetrische Kurve. Bei den übrigen Kurven wird jetzt zu beweisen sein, was in § 6 über die Zugehörigkeit der verschiedenen reellen Φ zu den einzelnen Ovalen der Kurven behauptet wurde. *Hier gehe ich nun den Weg der vollen Induktion, indem ich die Doppelpunktmethode des § 3 heranziehe* (die ja bei allen hier noch in Betracht kommenden Kurven ohne weiteres angewandt werden kann), folgendermaßen:

Wir ziehen ein beliebiges Oval der uns vorgelegten Kurve C_{2p-2} des Raumes von $(p-1)$ Dimensionen zu einem isolierten Punkt zusammen. Dabei verwandeln sich diejenigen reellen Φ , welche das Oval ungeradzahlig berühren, indem sie paarweise zusammenfallen, in solche Φ , welche durch den Doppelpunkt hindurchgehen; die anderen reellen Φ erleiden keine besondere Änderung, sie haben mit dem Doppelpunkte nichts zu schaffen. Wir achten nun insbesondere auf die ersteren Φ und bemerken, daß sie bei der Projektion vom Doppelpunkte aus direkt die Φ' (wollen wir sagen) derjenigen C'_{2p-4} des Raumes von $(p-2)$ Dimensionen liefern, in welche sich unsere C_{2p-2} projiziert. Aber diese C'_{2p-4} ist nichts anderes als die Normalkurve des Geschlechtes $(p-1)$. Daher werde angenommen, daß für sie unser Satz über die Verteilungsweise der reellen Φ auf die verschiedenen Klassen bereits bewiesen sei, daß also bei den zugehörigen Φ' innerhalb jeder kombinatorisch möglichen Klasse 2^{p-2} Individuen vorhanden seien, ausgenommen die Klasse $\omega' = \lambda - 1$ der orthosymmetrischen Fälle, der keinerlei Φ' angehören. Wir gehen jetzt zur ursprünglichen C_{2p-2} zurück. Da spaltet sich dann umgekehrt jede reelle Φ' in zwei reelle Φ , welche das aus dem Doppelpunkte entstehende Oval ungeradzahlig berühren, und es entstehen so aus den 2^{p-2} Φ' einer Klasse 2^{p-1} Φ , welche wieder einer Klasse angehören. Wir werden schließen, daß unsere Behauptung über die Anzahl der reellen Φ in den verschiedenen kombinatorisch möglichen Klassen für alle Φ der ursprünglichen Kurve, welche das ausgezeichnete Oval ungeradzahlig berühren, richtig ist. Aber das ausgezeichnete Oval ist doch nur ein beliebiges unter den übrigen. Wir schließen:

Ist unser Theorem für das Geschlecht $(p-1)$ richtig, so ist es auch beim Geschlechte p richtig hinsichtlich aller derjenigen Φ , welche wenigstens ein Kurvenoval ungeradzahlig berühren.

Daraufhin wird aber die Zahl 2^{p-1} der Φ^0 , welche unserem Theorem zufolge bei ungeradem p auftreten sollen, jedenfalls auch richtig sein. Wir brauchen, um dies zu sehen, nur die Gesamtzahl der reellen Φ , die wir vorhin bestimmten, heranzuziehen und von ihr die jetzt gewonnenen Zahlen der verschiedenartigen $\Phi^{(2)}$, $\Phi^{(4)}$, ... zu subtrahieren. Wir sehen:

Unser Satz ist allgemein für das Geschlecht p richtig, sobald er für $(p-1)$ bewiesen ist. —

und damit ist dann die Sache erledigt, da sie für $p=2$ bekanntlich stimmt.

Es erübrigt, daß wir noch einiges wenige über die *Primcharakteristiken* sagen, welche den reellen Φ , wie den F_n ungerader Ordnung, zukommen. Wir bemerkten bereits, daß die g_1, \dots, g_p der reellen Φ alle gleich Null oder Eins sind, je nachdem es sich um eine orthosymmetrische oder diasymmetrische Kurve handelt. Dies gilt gleichförmig für die F_n ungerader Ordnung, wie die Betrachtung der geraden ϑ zeigt. Aber auch die h_1, \dots, h_{2-1} lassen sich für jede Φ oder F_n sofort angeben. *Die einzelne dieser Zahlen ist nämlich Null oder Eins, je nachdem das mit gleichem Index versehene Kurvenoval ungeradzahlig oder geradzahlig berührt wird.* Alle Φ also, resp. F_n , welche derselben „Klasse“ angehören, stimmen in den h_1, \dots, h_{2-1} überein. Dabei haben wir, wie wir bereits bemerkten, die h_β mit den früheren q'_β (die g_β mit den q_β) zu vergleichen. Wir sehen dann, daß unsere Behauptung gerade entgegengesetzt zu derjenigen ist, welche wir oben für die Elementarcharakteristiken fanden: $q'_\beta = 0$ bedeutete damals den geradzahigen, $q'_\beta = 1$ den ungeradzahigen Kontakt mit A_β . Ich kann leider diese Angabe hier nicht näher beweisen, weil ich zu dem Zwecke das Verhalten der ϑ bei der Kurve mit Doppelpunkt noch ausführlicher studieren müßte; man vergleiche hierzu die Entwicklungen [von § 20 meiner Arbeit aus] Bd. 36 der Math. Annalen (1889). Übrigens aber schließen sich hier die Bemerkungen vom Ende des vorigen Paragraphen an, auf die ich nicht weiter zurückkomme.

Wir haben hiermit die sämtlichen Entwicklungen durchlaufen, welche in der vorliegenden Arbeit gegeben werden sollten. Wir könnten ja mannigfache Verallgemeinerungen anschließen, unter Festhaltung der methodischen Grundgedanken. Einmal wird man statt der f_n , welche unsere Kurve überall berühren, solche f_n heranziehen können, welche überall oskulieren, hyperoskulieren usw. (wie ich dies zum Teil schon [in Abh. XXXIX] für die dort behandelten ebenen Kurven vierter Ordnung getan habe). Dann aber wird man die Betrachtung von der Normalkurve der q als solcher ablösen. Die Unterscheidung der symmetrischen Flächen in orthosymmetrische und diasymmetrische gibt ein durchgreifendes Einteilungsprinzip für sämtliche reelle Kurven. Und so oft man bei einer solchen Kurve eine Anwendung der Abelschen Funktionen zu machen weiß, sind wir in der Lage, eine vollständige *Realitätsdiskussion* der bei dieser Anwendung in Betracht kommenden Gebilde hinzuzufügen.

Göttingen, den 2. September 1892.



XLIII. Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen.

[Aus dem Katalog mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente. Herausgegeben im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von W. Dyck. (1892).]

Sylvester und Kronecker haben bereits in den 60er Jahren bei der Diskussion der Wurzelrealität algebraischer Gleichungen geometrische Konstruktionen in der Weise herangezogen, daß sie die Koeffizienten der Gleichung oder sonstige Größen, von denen man die Gleichung abhängig denken mag, als Koordinaten eines Raumpunktes interpretierten, — wobei natürlich ihrer unmittelbaren Anschaulichkeit wegen diejenigen Fälle besondere Berücksichtigung fanden, bei denen man mit Räumen von zwei oder drei Dimensionen ausreicht¹⁾. Es handelt sich da insbesondere um den Verlauf derjenigen Mannigfaltigkeit, welche durch Nullsetzen der Diskriminante der vorgelegten Gleichung vorgestellt wird — die Diskriminantenmannigfaltigkeit —, und um die durch diese Mannigfaltigkeit vermittelte Zerlegung des Gesamtraumes in verschiedene Gebiete. — Ich möchte im nächstehenden an den bezeichneten Ansatz in der Weise anknüpfen, daß ich die elementaren, für Gleichungen beliebigen Grades gültigen Kriterien in Betracht ziehe, durch welche man die Anzahl der reellen Wurzeln abzählen vermag, die gegebenen Falles vorhanden sein mögen. Bei der geometrischen Interpretation dieser Kriterien entsteht, wie von selbst, eine Auffassung derselben, vermöge deren die etwas stereotypen Darstellungen der Lehre von der Wurzelrealität, wie sie sich in unseren Lehrbüchern finden, der Neubelebung und Weiterentwicklung zugänglich werden²⁾. Der

¹⁾ Sylvester in den „Philosophical Transactions“ Bd. 154, 1864 (On the real and imaginary roots of equations) [=Werke II, S. 376]; Kronecker in Vorlesungen.

²⁾ Ich werde weiter unten noch hervorheben, daß die bez. Darstellungen der Lehrbücher vielfach auch unvollständig sind. Aber der wesentliche Mangel liegt wohl darin, daß die Lehrbücher durchgängig an der Auffassung festhalten, als handele es sich bei den hier in Betracht kommenden Fragen um „numerische“ Gleichungen, also um Verfahrensweisen, welche keinen allgemeinen Charakter haben, sondern sich jeweils nach dem besonderen vorgelegten Falle richten. Im Gegensatz dazu läßt die geometrische Interpretation die Koeffizienten der zu untersuchenden Gleichungen notwendig als frei veränderliche reelle Größen ansehen.

Zweck der vorliegenden kurzen Mitteilung wird erreicht sein, wenn es mir gelingen sollte, in dieser Richtung einen Anstoß zu geben. Um so lieber will ich mich im folgenden auf die allerelementarsten Fälle, nämlich auf Gleichungen zweiten und dritten Grades, beschränken: ich hoffe da allgemein verständlich zu sein und kann doch schon alles Wesentliche, was ich zu sagen habe, hervortreten lassen.

Zunächst der allgemeine Ansatz. Sei

$$(1) \quad f(z) = z^n + nAz^{n-1} + \frac{n \cdot n - 1}{2} Bz^{n-2} + \dots + N = 0$$

eine vorgelegte Gleichung n -ten Grades (wo die Binomialkoeffizienten hinzugesetzt sind, weil dadurch die später zu gebenden Formeln einfacher werden). So interpretiere man einfach A, B, \dots, N als Punktkoordinaten in einem n -dimensionalen Raume R_n . Gleichung (1) repräsentiert dann, sofern man das z als gegebene Größe und die A, B, \dots als Veränderliche ansehen will, einen in diesem R_n enthaltenen $(n-1)$ -fach ausgedehnten Raum, R_{n-1} , und die ganze Reihenfolge von R_{n-1} , welche man so für wechselnde Werte von z erhält, umhüllt in ihrer Aufeinanderfolge eben jene *Diskriminantenmannigfaltigkeit*, von welcher bereits oben die Rede war; kann man doch die Diskriminante als Resultante von $f(z) = 0$ und $\frac{df(z)}{dz} = 0$ berechnen. — In nächster Beziehung zu diesem R_{n-1} und damit zur Diskriminantenmannigfaltigkeit steht nun diejenige rationale „Kurve“, die den Gleichungen (1) mit n -facher Wurzel entspricht:

$$(z - \lambda)^n = 0,$$

d. h. diejenige Kurve, deren Punkte sich mit Hilfe eines Parameters λ so darstellen lassen:

$$(2) \quad A = -\lambda, \quad B = \lambda^2, \quad \dots \quad N = (-1)^n \lambda^n.$$

Möge dieselbe, entsprechend der Ausdrucksweise der neueren Geometer, hier schlechtweg als *Normkurve* benannt werden³⁾; den einzelnen durch (2) gegebenen Punkt der Kurve werde ich als den Punkt λ derselben bezeichnen. Da ist denn unmittelbar ersichtlich, daß die sämtlichen n Schnittpunkte, welche der durch (1) gegebene R_{n-1} mit der Normkurve gemein hat, in den einen Punkt $\lambda = z$ koinzidieren: unsere R_{n-1} sind *Schmiegräume* der Normkurve und eben dadurch unter allen anderen $(n-1)$ -fach ausgedehnten linearen Räumen unseres R_n charakterisiert. Die Wurzeln z_i aber, welche die Gleichung $f(z) = 0$ besitzt, werden auf der Normkurve durch die n Punkte $\lambda = z_i$ vorgestellt sein, nämlich durch diejenigen Punkte der Normkurve, in welchen die von dem Raumpunkte (A, B, \dots, N) an

³⁾ Vgl. z. B. Franz Meyer, Apolarität und rationale Kurven. Tübingen 1883.



die Kurve laufenden Schmiegräume $(n-1)$ -ter Dimension dieselbe berühren. Insbesondere werden von diesen Wurzeln genau so viele reell sein, als von unserem Raumpunkte aus reelle Schmiegräume an die Kurve gehen⁴⁾.

Spezifizieren wir diesen Ansatz zunächst für $n=2$, so haben wir in der Gleichung zweiten Grades

$$(3) \quad z^2 + 2Az + B = 0$$

die A, B als Punktkoordinaten (etwa geradezu als rechtwinklige Punktkoordinaten) der Ebene zu interpretieren. Wir haben dann als Definition der Normkurve

$$(4) \quad A = -\lambda, \quad B = \lambda^2$$

zugrunde zu legen, was eine Parabel mit der Gleichung $A^2 - B = 0$ ergibt, wie sie durch die nebenstehende Fig. 1 versinnlicht wird; man beachte, daß auf dieser Parabel die Punkte mit positivem λ linker Hand, die mit negativem λ rechter Hand liegen. Gleichung (3) wird zwei reelle oder zwei

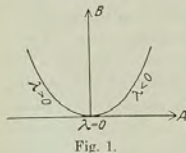


Fig. 1.

imaginäre Wurzeln haben, je nachdem von dem repräsentierenden Punkte (A, B) aus zwei reelle oder zwei imaginäre Tangenten an die Parabel gehen. Augenscheinlich zerfällt mit Rücksicht hierauf die Ebene in zwei durch

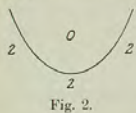


Fig. 2.

die Parabel getrennte Teile; ich habe dieselben in der nebenstehenden Fig. 2 durch die Ziffern 2 und 0 unterschieden. Die durch die Parabel vorgestellte Normkurve ist hier eben selbst die Diskriminantenmannigfaltigkeit, und unsere Figur also ein Gegenbild dafür, daß die quadratische Gleichung (3) zwei oder null reelle Wurzeln

hat, je nachdem die Diskriminante $A^2 - B$ positiv oder negativ ist.

Wir gehen über zur kubischen Gleichung:

$$(5) \quad z^3 + 3Az^2 + 3Bz + C = 0.$$

Die Raumkonstruktionen, welche hier auszuführen sind, lassen sich nicht

⁴⁾ [Ich weise hier gern darauf hin, daß man sich auch die bei einer Gleichung vierten Grades vorliegenden Verhältnisse im dreidimensionalen Raume anschaulich klar machen kann, wenn man diese so transformiert, daß der Koeffizient $A=0$ wird, also die Gleichung der Normkurve in der Form

$$(z + 3\lambda)(z - \lambda)^2 = 0$$

schreibt. Das von Herrn Hartenstein auf meine Veranlassung konstruierte Fadenmodell der Diskriminantenfläche ist im Verlage von Martin Schilling erschienen und in meiner von E. Hellinger ausgearbeiteten Vorlesung „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte (1908)“ (in Kommission bei B. G. Teubner) Bd. I, 1. Aufl., S. 220–231, 2. Aufl., S. 222–234 beschrieben. Die Fläche zerfällt übrigens in einen Bestandteil fünfter Ordnung und die unendlich ferne Ebene. K.]

mehr kurz durch ebene Figuren erläutern, und ich muß den Leser bitten, falls anders er die Angaben, die ich fernerhin über kubische Gleichungen zu machen habe, völlig in sich aufnehmen will, sich selbst geeignete räumliche Modelle zu verfertigen⁵⁾. Wir haben da erstlich als Normkurve die Raumkurve dritter Ordnung

$$(6) \quad A = -\lambda, \quad B = \lambda^2, \quad C = -\lambda^3,$$

dann als Diskriminantenmannigfaltigkeit die zu dieser Raumkurve gehörige developpable Fläche. Durch selbige wird der Raum in zwei Gebiete zerlegt, entsprechend der Möglichkeit, daß die Gleichung (5) drei oder eine reelle Wurzel für z ergeben kann. Wir werden diese Gebiete dementsprechend mit den Ziffern 3 und 1 bezeichnen. Von den Punkten des Gebietes 3 aus laufen immer drei reelle Oskulationsebenen an die Kurve, von den Punkten des Gebietes 1 aus nur eine.

Ich wende mich nun gleich zu den Kriterien für die Abzählung der reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung. Dabei werde ich gelegentlich etwas ausholen müssen, insofern diese Kriterien in der Mehrzahl der Lehrbücher, wie ich schon andeutete, nur unvollständig mitgeteilt werden. Ich unterscheide in erster Linie zwischen solchen Kriterien, welche die Gesamtzahl der reellen Wurzeln betreffen, und den anderen, die sich auf die reellen Wurzeln in einem gegebenen Intervalle beziehen. Andererseits trenne ich zwischen *genauen* Kriterien und solchen, welche nur eine Grenze der Wurzelanzahl geben (*approximierende* Kriterien).

Um hiernach mit den genauen Kriterien zu beginnen, durch welche man die Gesamtzahl der reellen Wurzeln bestimmt, so habe ich gleich hier von der üblichen Darstellung der Lehrbücher abzuweichen. Man findet in den letzteren übereinstimmend das Verfahren von Sturm und einen mehr oder minder ausführlichen Exkurs über diejenigen Methoden, welche sich an das *Trägheitsprinzip* der quadratischen Formen schließen. Dagegen fehlt zumeist jeder Hinweis auf die bestimmte Ausgestaltung, welche letztere Methoden durch Hermite und Sylvester vermöge Aufstellung jener quadratischen Form von $(n-1)$ Veränderlichen gefunden haben, welche Sylvester als *Bezoutiante* bezeichnet⁶⁾. Und doch zweifle ich nicht, daß erst mit der Bezoutiante der Kernpunkt der ganzen Fragestellung getroffen ist.

Sei wieder $f(z) = 0$ die vorgelegte Gleichung. Wir machen der Be-

⁵⁾ [Auf meine Veranlassung hat W. Ludwig nach Vorarbeiten von E. Lange ein besonders schönes Fadenmodell konstruiert, welches gleichfalls im Verlage Martin Schilling erschienen ist. K.]

⁶⁾ Vgl. Sylvester in den „Philosophical Transactions“ Bd. 143, 1853: On the syzygetic relations usw. (= Werke I, S. 429). Hermite in Bd. 52 von „Crelles Journal“, 1856 [= Werke I, S. 397]. Vgl. übrigens auch Baltzers Determinanten.



quemlichkeit halber homogen, indem wir z durch $\frac{z_1}{z_2}$ ersetzen und mit z_2^n heraufmultiplizieren. Solcherweise entstehe $f(z_1, z_2) = 0$, wo wir nun die linke Seite kurzweg mit f bezeichnen werden. Entsprechend werde f' abkürzenderweise für $f'(z_1', z_2')$ geschrieben, unter z_1', z_2' eine zweite Variabelreihe verstanden. Man bilde sich jetzt die „Kombinante“:

$$(7) \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial f'}{\partial z_2'} - \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{\partial f'}{\partial z_1'}$$

Dieselbe ist linear und homogen einerseits in

$$z_1^{n-2}, z_1^{n-3} z_2, \dots, z_2^{n-2},$$

andererseits in

$$z_1'^{n-2}, z_1'^{n-3} z_2', \dots, z_2'^{n-2}.$$

Die Bezoutiante

$$(8) \quad B(t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$$

entsteht nun einfach aus (7), indem man die genannten aufeinanderfolgenden Verbindungen der z_1, z_2 , wie der z_1', z_2' beide bez. durch die $(n-1)$ Unbestimmten t_1, t_2, \dots, t_{n-1} ersetzt. Und nun handelt es sich nur noch darum, die „Trägheit“ der so gewonnenen quadratischen Form von $(n-1)$ Veränderlichen zu konstatieren, d. h. zuzusehen, wie viele positive bez. negative Vorzeichen hervortreten, wenn man es unternimmt, die Form B durch reelle lineare Substitution der t_1, t_2, \dots, t_{n-1} in ein Aggregat bloßer Quadrate zu verwandeln. Die Regel wird kurzweg die, daß $f = 0$ genau so viele Paare imaginärer Wurzeln besitzt, als bei der genannten Reduktion von B negative Quadrate auftreten. Die prinzipielle Einfachheit dieser Aussage aber ruht darin, daß B nicht nur von den t , sondern auch von den Koeffizienten von f in quadratischer Weise abhängt (so daß also bei unserer geometrischen Interpretation $B = 0$ eine von den Parametern t_1, \dots, t_{n-1} abhängige Schar von Flächen zweiten Grades gibt).

Für die quadratische Gleichung (3) liefert die so formulierte Regel natürlich nichts Neues. Gehen wir also gleich zur kubischen Gleichung (5). Hier wird die Bezoutiante:

$$(9) \quad (A^2 - B)t_1^2 + (AB - C)t_1 t_2 + (B^2 - AC)t_2^2,$$

ist also (wie man erwarten konnte), von einem negativen Zahlenfaktor abgesehen, mit der sog. Hesseschen Form von $f(z_1, z_2)$ identisch. Wir werden wünschen, uns im geometrischen Bild darüber klar zu werden, weshalb die „Trägheit“ von (9) in der angegebenen Weise mit der Realität der Wurzeln von $f = 0$ zusammenhängt, oder wenigstens weshalb $f = 0$ drei oder eine reelle Wurzel liefert, je nachdem die Gleichung

$$(10) \quad (A^2 - B)t_1^2 + (AB - C)t_1 t_2 + (B^2 - AC)t_2^2 = 0$$

für t_1, t_2 null oder zwei reelle Wurzeln ergibt. Zu dem Zwecke fragen wir nach der geometrischen Bedeutung der Gleichung (10) bei stehenden t_1, t_2 und finden, daß dieselbe den Kegel zweiten Grades vorstellt, der sich von dem Punkte $\lambda = \frac{t_1}{t_2}$ der Normkurve nach den anderen Punkten der Normkurve hin erstreckt. Unsere kubische Gleichung soll also 3 oder 1 reelle Wurzel haben, je nachdem durch den Raumpunkt (ABC) , 0 oder 2 reelle Projektionskegel dieser Art hindurchgehen. Nun haben zwei Kegel (10) außer der Normkurve dritter Ordnung selbst immer noch die Verbindungsgerade ihrer Spitzen gemein. Sind die Kegel reell, so ist diese Gerade ebenfalls reell und damit eine eigentliche Sekante der Normkurve, im Gegensatz zu den gleichfalls reellen aber uneigentlichen Sekanten, welche unsere Normkurve je in zwei konjugiert imaginären Punkten treffen (und die der Schnitt zweier konjugiert imaginärer Kegel (10) sind). Daher läßt sich der an Gleichung (10) anknüpfende Satz dahin aussprechen:

daß die Gleichung $f = 0$ eine oder drei reelle Wurzeln haben wird, je nachdem durch den Raumpunkt (A, B, C) eine eigentliche oder eine uneigentliche Sekante der Normkurve dritter Ordnung geht.

Und in dieser Form ist der Satz den Geometern ohne weiteres einleuchtend. Denn die Normkurve dritter Ordnung projiziert sich vom Punkte (A, B, C) aus im ersteren Falle als ebene Kurve dritter Ordnung mit eigentlichem Doppelpunkte, im zweiten Falle als solche mit isoliertem Punkte, und es ist wohlbekannt, daß eine Kurve der ersteren Art nur einen, eine Kurve der zweiten Art drei reelle Wendepunkte besitzt.

Ich habe diese Betrachtung über die Kegel zweiten Grades, welche von den Punkten der Normkurve dritter Ordnung auslaufen, um so lieber gegeben, als ihre Besprechung ohnehin unerläßlich ist, wenn man die Zahl der reellen Wurzeln von $f = 0$ durch die sogenannte Newtonsche Regel abschätzen will. Ich denke dabei an jenes approximierende Kriterium, welches ursprünglich in Newtons Arithmetica universalis (1707) gegeben worden ist, aber erst 1865 von Sylvester bewiesen und zugleich nach verschiedenen Richtungen erweitert wurde⁷⁾. In ihrer einfachsten Gestalt, die wir hier allein in Betracht ziehen, lautet diese Regel dahin:

daß unsere Gleichung (1) mindestens so viele imaginäre Wurzeln besitzt, als die Reihe der quadratischen Ausdrücke

$$(11) \quad 1, A^2 - B, B^2 - AC, \dots, N^2$$

Zeichenwechsel darbietet.

⁷⁾ Vgl. insbesondere Transactions of the R. Dublin Academy, t. 24 (1871), sowie Philosophical Magazine, 4 ser., t. 31 (1866). [Vgl. Sylvesters Werke Bd. II, S. 704 u. II, S. 542.] — Auch diese Regel fehlt in vielen Lehrbüchern; Ausführlicheres darüber gibt u. a. Petersen in seiner „Theorie der algebraischen Gleichungen“ (Kopenhagen 1878).



Im Falle der Gleichungen dritten Grades (5) haben wir also sicher zwei imaginäre Wurzeln; wenn von den beiden Ausdrücken

$$A^2 - B, \quad B^2 - AC$$

auch nur einer negativ ist. Hier bemerke man nun, daß nach Gleichung (10)

$$(12) \quad A^2 - B = 0, \quad B^2 - AC = 0$$

die Gleichungen der beiden Projektionskegel sind, die von den Punkten

$$\lambda = \infty, \quad \text{bez. } \lambda = 0$$

der Normkurve dritter Ordnung nach dieser Kurve hinlaufen. Der geometrische Sinn des Newtonschen Kriteriums ist dementsprechend der, daß bei der Gleichung dritten Grades sicher zwei imaginäre Wurzeln vorhanden sind, sobald der Raumpunkt (A, B, C) im Innern auch nur eines der beiden genannten Kegel liegt. Die geometrische Anschauung bestätigt nicht nur, sondern vervollständigt diese Regel und bringt sie dadurch mit dem aus der Bezoutiante abgeleiteten Kriterium in klaren Zusammenhang. Wir wissen bereits, daß keiner der Kegel (10) in das Raumstück eindringt, welches den kubischen Gleichungen mit drei reellen Wurzeln entspricht; wir fügen jetzt hinzu, was uns ein Blick auf die Gestalt der Kurve dritter Ordnung lehrt, daß dieses Raumstück außerhalb der sämtlichen Kegel (10) liegt. Wir wissen andererseits, daß das Raumstück, welches den kubischen Gleichungen mit nur einer reellen Wurzel entspricht, von den reellen Kegeln (10) durchweg zwifach ausgefüllt wird, und hierin liegt, daß jeder Punkt (A, B, C) im Innern dieses Raumstückes jedenfalls auch im Innern einer unendlichen Zahl von Kegeln (10) liegt. Wir werden also folgenden genauen Satz aufstellen: daß die kubische Gleichung dann und nur dann zwei imaginäre Wurzeln besitzt, wenn die Bezoutiante (10) für irgendwelche reelle Werte von t_1, t_2 negativ wird. Und von diesem Satze ist dann die Newtonsche Regel ein bloßes Korollar.

So viel über die allgemeine Abzählung der reellen Wurzeln. Wir wenden uns jetzt zur Abzählung der Wurzeln in einem Intervalle von x bis y ($x < y$). Auch hier werde ich mich auf die elementarsten Erläuterungen beschränken. Insbesondere will ich der Kürze halber die exakten Abzählmethoden ganz beiseite lassen und unter den approximierenden Kriterien nur diejenigen betrachten, bei denen lineare Funktionen der Koeffizienten zugrunde liegen, also den Cartesischen Satz, das Theorem von Budan-Fourier usw. Auch mögen jetzt vor allen Dingen die quadratischen Gleichungen (3) herangezogen werden, insofern bereits bei ihnen alles Wesentliche hervortritt; über die kubischen Gleichungen gebe ich nur eine kurze Schlußbemerkung.

Wir hatten bei den Gleichungen zweiten Grades als Normkurve die

Parabel der Fig. 1. Markieren wir auf ihr die beiden Punkte $\lambda = x$ und $\lambda = y$ (wobei für $x < y$ der Punkt x rechts von y liegt) und unterscheiden dann drei Gebiete der Ebene, je nachdem sich vom einzelnen Punkte (A, B) aus an das zwischen x und y verlaufende Parabelstück 2 oder 1 oder 0 Tangenten legen lassen, so entsteht offenbar die nebenstehende Fig. 3, welche ich kurzweg als die „richtige“ Figur (x, y) bezeichnen werde: — die Grenzen der dreierlei bei ihr zu unterscheidenden Gebiete werden teils von dem genannten Parabelstücke selbst, teils von den beiden, zu den Punkten x und y gehörigen Parabeltangente gebildet. — Lassen wir hier y insbesondere ins Unendliche rücken, so entschwindet für die Anschauung die ganze zu y gehörige Tangente und wir haben als zugehörige Gebietseinteilung den in Fig. 4 vorgestellten Fall; wir benennen diese Figur als die „richtige“ Figur (x, ∞) .

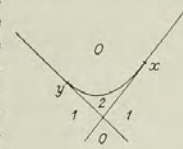


Fig. 3.

Aufgabe der zu diskutierenden linearen Kriterien wird es nun sein, diese richtigen Figuren mit möglichster Annäherung durch solche zu ersetzen, bei welchen nur gerade Linien zur Felderabgrenzung gebraucht werden.

Von dieser Auffassung ausgehend, betrachten wir zunächst die Cartesische Zeichenregel. Wir wollen dieselbe gleich in die verallgemeinerte Form setzen, in der sie die reellen Wurzeln von $f(z) = 0$ abzuschätzen gestattet, die größer als ein beliebiges vorgegebenes x sind. Es handelt sich da um die Funktionsreihe:

$$(13) \quad f(x), \quad f'(x), \quad f''(x)$$

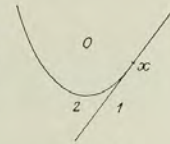


Fig. 4.

und die Regel behauptet, daß $f(z) = 0$ höchstens so viele reelle Wurzeln $> x$ besitzt, als Zeichenwechsel in dieser Funktionsreihe vorhanden sind, und daß die richtige Zahl der Wurzeln von der durch die Zeichenwechsel gegebenen Zahl immer nur um ein Multiplum von 2 verschieden sein kann. Zwecks Übersetzung der Regel in die geometrische Anschauung werden wir vor allen Dingen die drei geraden Linien konstruieren, welche in der Ebene (A, B) durch Nullsetzen der drei Ausdrücke $f(x), f'(x), f''(x)$ vorgestellt werden. Hier gibt $f''(x) = 0$ die unendlich ferne Gerade und kommt also für die Zeichnung in Wegfall. $f'(x) = 0$ gibt die vertikale Linie $A = -x$, d. h. den durch den Punkt x der Parabel laufenden Durchmesser derselben. Endlich $f(x) = 0$, wie wir von früher wissen, die zum Punkte x gehörige Parabeltangente. Ein jedes der von den genannten Geraden umgrenzten Gebiete der Ebene bietet bestimmte Vorzeichen von



$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ dar. Nun kommt es uns aber nicht auf diese Vorzeichen, sondern nur auf die Zahl der Zeichenwechsel an, welche die Reihe $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ darbietet. Wir markieren dieselbe für die verschiedenen Teile der Ebene und erhalten so schließlich die folgende Fig. 5, welche ich die „Cartesische Figur“ (x, ∞) nennen darf.

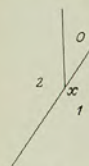


Fig. 5.

Wir verstehen die Cartesische Regel in geometrischer Form, indem wir diese neue Figur mit Fig. 4 [der „richtigen“ Figur (x, ∞)] vergleichen. Und dabei bestätigen wir nicht nur die Cartesische Regel, sondern erkennen auch ihre Vorzüglichkeit. In der Tat sieht man, daß man die „richtige“ Figur vermöge einer geradlinigen Feldereinteilung, an der (unter Einrechnung der unendlich fernen Geraden) drei gerade Linien partizipieren, in der durch den Cartesischen Satz vorgesehenen Weise unmöglich besser approximieren kann, als dies durch die Cartesische Figur geschieht.

Wir erläutern ferner, in gleichem Sinne, den Budan-Fourierschen Satz. Es handelt sich bei demselben allgemein um die Zahl der reellen Wurzeln von $f(z) = 0$, welche zwischen zwei beliebig vorgegebenen Grenzen, x und y ($x < y$) liegen. Man bildet die beiden Funktionsreihen:

$$(14) \quad \begin{cases} f(x), f'(x), f''(x) \text{ und} \\ f(y), f'(y), f''(y), \end{cases}$$

bestimmt zuerst die Zahl $V(x)$ der Zeichenwechsel, welche die erstere Reihe darbietet, ferner die Zahl $V(y)$ der Zeichenwechsel der zweiten Reihe, und hat dann in $V(x) - V(y)$ eine Zahl, welche von der Zahl der zwischen x und y gelegenen reellen Wurzeln von $f(z) = 0$ höchstens um ein positives Vielfaches von 2 abweicht. Wieder übersetzen wir diese Regel in eine geometrische Figur. Indem wir ganz ähnlich verfahren, wie vorhin, ergibt sich die folgende Feldereinteilung (Fig. 6).

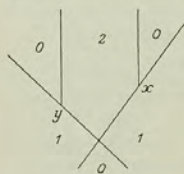


Fig. 6.

Ein Vergleich mit Fig. 3 bestätigt darauf die Richtigkeit des Budan-Fourierschen Satzes: überall da, wo Fig. 3 und Fig. 6 den Punkten der Ebene verschiedene Zahlen beilegen, ist die Zahl der Fig. 6 um ein positives Vielfaches von 2 größer. Aber wir fragen angesichts unserer Figuren nicht nur nach der Richtigkeit, sondern auch nach der Zweckmäßigkeit des Budan-Fourierschen Satzes. Und da kommen wir zu einem Resultate, welches bei einem so elementaren Gegenstande überraschen muß und eben darum geeignet sein dürfte, die geometrische Betrachtungsweise, für die wir hier eintreten, nicht nur als eine beiläufige

Erläuterung, sondern als eine notwendige Ergänzung der gewöhnlich gegebenen Entwicklungen erscheinen zu lassen: Fig. 6 mit ihren, vier verschiedenen geraden Linien angehörigen Begrenzungstücken ist als Annäherung an Fig. 3 keineswegs besonders zweckmäßig gewählt, man kann der Fig. 3 mit einer nur aus drei geraden Linien gebildeten Figur viel näher kommen. Man hat einfach eine Figur zu zeichnen, welche man als projektive Verallgemeinerung der Cartesischen Figur betrachten kann (sofern man bei letzterer die unendlich ferne Gerade mitzählen will), d. h. die nachstehende Figur, welche neben den Tangenten der beiden Parabelpunkte x , y das geradlinige Verbindungsstück xy enthält. Will man das analytische Kriterium aufstellen, welches dieser Figur entspricht, so ist es bequem, wieder homogen zu machen, also statt $f(z)$ die binäre Form

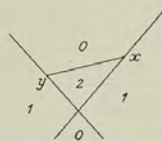


Fig. 7.

$f(z_1, z_2)$ und statt x und y die Variabelpaare x_1, x_2 und y_1, y_2 einzuführen. Ich setze außerdem symbolisch $f(z_1, z_2) = a^2$. Bei Fig. 7 handelt es sich dann einfach um die Zeichenwechsel der Funktionsreihe:

$$(15) \quad a_x^2, a_x a_y, a_y^2.$$

Es ist kaum nötig, daß ich beim Beweise dieser Behauptung oder der damit aufgestellten Regel für die Abzählung der Wurzeln im Intervall $x \dots y$ verweile. Es handelt sich einfach darum, in die Gleichung $f(z_1, z_2) = 0$ $z_1 + \lambda y_1$ für z_1 , $x_2 + \lambda y_2$ für z_2 zu substituieren und nun für die so entstehende Gleichung in λ die Zahl der positiven Wurzeln durch das Cartesische Theorem festzulegen, bzw. zu umgrenzen. Das ist so einfach, daß es wundernehmen müßte, wenn dieser Ansatz nicht schon in früherer Zeit bemerkt sein sollte. Und in der Tat findet sich derselbe beispielsweise bei Jacobi in Crelles Journal, Bd. 13 (1835) (Observatiunculæ ad theoriam æquationum pertinentes). Nur fügt Jacobi merkwürdigerweise hinzu: regula a clarissimo Fourier proposita multis nominibus præstat.

Es erübrigt nur noch, daß ich angebe, wie man bei der Normkurve dritten Grades diejenige räumliche Figur konstruiert, welche man als Verallgemeinerung der ebenen Fig. 7 zu betrachten hat. Bezeichnet man die



gegebene kubische Gleichung symbolisch mit $a_x^3 = 0$, so handelt es sich zumal um die geometrische Definition der Ebenen

$$(16) \quad a_x^3 = 0, \quad a_x^2 a_y = 0, \quad a_x a_y^2 = 0, \quad a_y^3 = 0.$$

Diese ist natürlich äußerst einfach. Die drei Schnittpunkte, welche die einzelne dieser Ebenen mit der Normkurve gemein hat, fallen alle nach x oder y ; die folgende Tabelle gibt die Multiplizitäten, mit der x und y als Schnittpunkte zählen, genauer an:

	x	y
a_x^3	3	0
$a_x^2 a_y$	2	1
$a_x a_y^2$	1	2
a_y^3	0	3

In dieser Tabelle tritt das einfache Gesetz, welches für $n=2$ in Fig. 7 befolgt ist, in einer für alle n erkennbaren Form hervor. — Wir sollten jetzt ferner eine genaue Beschreibung der verschiedenen Stücke geben, in welche der Raum entsprechend der Zahl der bei den Funktionen (16) auftretenden Zeichenwechsel durch unsere Ebenen zerlegt wird. Daran würde sich dann der Vergleich mit denjenigen Raumeinteilungen schließen, die als Analoga der ebenen Fig. 3, 4, 5 und 6 anzusehen sind. Hier ist offenbar ohne geeignete Modelle nicht durchzukommen. Es wird sehr dankenswert sein, wenn jemand die Herstellung solcher Modelle in die Hand nehmen wollte.

Göttingen, den 9. Juni 1892.

[Der vorstehende kleine Aufsatz, der inhaltlich aus dem Rahmen der hier zusammengestellten Arbeiten einigermaßen herausfällt, ist aus einer Vorlesung über Algebra, die ich im Winter 1891/92 hielt, entstanden. K.]

XLIV. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung.¹⁾

[Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1895). Heft 3. Vorgelegt in der Sitzung vom 19. Okt. 1895.]

Sei ω eine reelle Größe, die ich der Einfachheit halber als irrational voraussetzen will; sei ferner in gewöhnlicher Kettenbruchentwicklung:

$$\omega = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \frac{1}{\mu_3 + \dots}}$$

Die sukzessiven Näherungswerte nenne ich $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots$, wobei die p, q als teilerfremde Zahlen definiert sein sollen, die man einzeln noch beliebig mit dem $+$ oder $-$ Zeichen ausstatten kann. Ich lege nunmehr ein gewöhnliches X - Y -Koordinatensystem zugrunde, konstruiere das zugehörige Gitter der ganzzahligen Punkte, und suche unter ihnen diejenigen, für welche $x, y = p, q$, ist. Man weiß, daß diese „Näherungspunkte“ abwechselnd auf der rechten und linken Seite der geraden Linie $\frac{x}{y} = \omega$ liegen. Es ist aber überhaupt leicht, wie ich gefunden habe, für dieselben eine kurze geometrische Definition aufzustellen. Ich will hier nur den einen der beiden Quadranten unseres Koordinatensystems ins Auge fassen, welche von der geraden Linie ω durchzogen werden. Derselbe wird durch die Gerade ω in zwei Sektoren zerlegt, deren einer an die X -Achse, deren anderer an die Y -Achse angrenzt; ich will kurzweg von einem X -Sektor und einem Y -Sektor sprechen. Jetzt betrachte man die ganzzahligen Punkte des einzelnen so gewonnenen Sektors. Ersichtlich kann man dieselben durch ein geradliniges Polygon umgrenzen, etwa indem man sich die ganzzahligen Punkte durch kleine Stifte markiert denkt und um das Ganze einen Faden schlingt. Die Punkte $p_1, q_1; p_2, q_2; \dots$ sind nun nichts anderes als die Eckpunkte des zum Y -Sektor gehörigen Umrißpolygons;

¹⁾ [Vgl. auch meinen Vortrag vor der Naturforscherversammlung in Lübeck, Sept. 1895. (Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 4.) K.]
Klein, Gesammelte math. Abhandlungen. II. 14



die Punkte $p_1, q_2; p_1, q_1, \dots$ gehören entsprechend zum X -Sektor. Die einzelne Seite des Umrißpolygons, sagen wir etwa, um beim Y -Sektor zu bleiben, die Seite von (p_{2s-1}, q_{2s-1}) bis (p_{2s+1}, q_{2s+1}) , kann dabei möglicherweise selbst noch Gitterpunkte tragen. Die Anzahl der Stücke, in welche sie durch dieselben zerlegt sind, ist gerade μ_{2s} ; dieses ist die einfache Deutung der bei der Kettenbruchentwicklung auftretenden Teilnennern.

Auf Grund der hiermit gegebenen Deutung kann man nun sämtliche Eigenschaften der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung und der sich an dieselben anschließenden analytischen Verfahrungsweisen geometrisch ohne weiteres einsehen.

Ich gebe hier in dieser Hinsicht einige Erläuterungen über binäre quadratische indefinite Formen. Es sei $f = ax^2 + bxy + cy^2$ eine solche Form, deren Diskriminante $b^2 - 4ac$ keine Quadratzahl ist. Dann gibt $f = 0$ zwei reelle irrationale Werte von $\frac{x}{y}$, die ich mit ω' und ω'' bezeichne. Ich ziehe in unserem Koordinatensysteme die betreffenden beiden geraden Linien und konstruiere, was ich die zugehörigen natürlichen Umrißpolygone nenne, nämlich die Umrißpolygone derjenigen ganzzahligen Punkte, welche in die einzelnen von ω' und ω'' umgrenzten Sektoren eingeschlossen sind. Das einzelne solche Polygon mag nach seinem Gesamtverlaufe mit einem vollen Hyperbelast verglichen werden (welcher sich nach zwei Seiten ins Unendliche erstreckt). Man kann nun geradezu sagen, daß die von Lagrange und Gauß herrührende Theorie der Formen eine Betrachtung dieser Polygone ist, und wird finden, daß die Theorie durch explizite Einführung der Polygone noch verschiedentlich vereinfacht werden kann. Dabei ist nützlich, in Anlehnung an Cayleys projektive Maßbestimmung den Ausdruck \sqrt{f} geradezu als „Abstand“ des Punktes x, y vom Koordinatenanfangspunkt zu bezeichnen und von zugehörigen „Bewegungen“ zu sprechen²⁾. Ich verfolge das hier nicht weiter, sondern gedenke nur noch der Rolle, welche in dieser Theorie die Kettenbruchentwicklung der Wurzeln ω', ω'' spielt. Dieselbe kommt darauf zurück, daß die von den Koordinatenachsen abhängigen Umrißpolygone, welche aus der Kettenbruchentwicklung entspringen, nach einer endlichen Anzahl von Seiten notwendigerweise in die vorerwähnten „natürlichen“ Umrißpolygone einmünden.

Soweit gibt unser Ansatz nur erst eine geometrische Interpretation oder auch eine Vereinfachung bekannter Betrachtungsweisen. Das Schöne aber ist, daß er sich auf höhere, noch nicht in dieser Weise behandelte

²⁾ [Hierauf habe ich schon in den Göttinger Nachrichten von 1893 in der Note „Über die Komposition der binären quadratischen Formen“, welche in Bd. 3 dieser Gesamtausgabe abgedruckt werden soll, hingewiesen. K.]

Fälle überträgt. Ich will hier beispielsweise zwei Arten ternärer Formen heranziehen. Sei $f(xyz)$ eine indefinite quadratische Form, $F(xyz)$ aber eine kubische Form, welche sich in drei reelle Linearfaktoren spalten läßt. Ich konstruiere mir im gewöhnlichen Koordinatensystem xyz den Kegel $f = 0$ und das Ebenentripel $F = 0$ und betrachte nun sämtliche ganzzahlige Punkte, welche entweder von der einen Hälfte des Kegels $f = 0$ umschlossen sind oder in einem der durch $F = 0$ gebildeten Oktanten liegen. Ersichtlich kann man zu diesen ganzzahligen Punkten jeweils ein ebenflächiges Umrißpolyeder konstruieren. Die Betrachtung dieses Umrißpolyeders gibt eine neue einfache Theorie der Formen f und F .

[Auf den Inhalt der vorstehenden Notiz wird in Bd. 3 dieser Ausgabe gelegentlich des Referates über meine zahlentheoretische Vorlesung von 1895/96 zurückzukommen sein. — Hinsichtlich der Formen f und F hatte ich zunächst an das Reduktions- und Äquivalenzproblem gedacht. Die sonach in Aussicht genommenen Untersuchungen scheinen noch von niemand aufgenommen zu sein. K.]



Vorbemerkungen zu den erkenntnistheoretischen Abhandlungen XLV—XLIX.

Die folgenden Aufsätze, die dem Grenzgebiet von Geometrie und Erkenntnistheorie angehören, sind hier (bis auf die wenigen, äußerlich durch eckige Klammern gekennzeichneten Zusätze) genau so abgedruckt, wie ich sie s. Z. veröffentlicht habe. Es würde ja mit Rücksicht auf die Entwicklung, welche die Wissenschaft seitdem genommen hat, vielerlei hinzugefügt werden können, vielleicht auch einiges zu ändern sein. Ich will hier aber nur noch einige Worte über die einschlägige, schon oben genannte Vorlesung vom Sommer 1901 „*Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie*, eine Revision der Prinzipien“ sagen, welche Conrad Müller damals ausgearbeitet hat¹⁾. Insbesondere handelt es sich dort darum, das praktische Zeichnen und Messen mit dem Verfahren der abstrakten Geometrie in Vergleich zu bringen. Ich verlangte u. a. für das Zeichnen eine ähnliche Fehlertheorie, wie man sie seit Gauß bei allen exakten Messungen verwendet. Nach der anderen Seite gab ich Figuren, welche das Zustandekommen z. B. der Weierstraßschen nicht-differentierbaren Funktion oder der in Abh. XLVI (S. 227) genannten in der Theorie der automorphen Funktionen vorkommenden nichtanalytischen Kurven dem Verständnis näherbringen dürften. In beiderlei Hinsicht hat bereits früher Christian Wiener bemerkenswerte Ansätze gemacht, deren weiterer Ausbau mir wesentlich scheint. Überall wird der Gesichtspunkt hervorgekehrt, daß es nicht eigentlich die Lehre von den Gleichungen ist (die *Präzisionsmathematik*, wie ich sie nenne), welche als theoretische Grundlage der praktischen Anwendungen in Betracht kommt, sondern die Lehre von den Ungleichungen, die *Approximationsmathematik*. Hiermit wird die Brücke von der reinen zur angewandten Mathematik geschlagen. Mir hat gelegentlich ein hervorragender Physiker gesagt, daß ihm mit diesen Erläuterungen eine förmliche Last von der Seele genommen sei.

„Approximationsmathematik“, wie ich sie bei diesen Auseinandersetzungen verstehe, ist, wohlverstanden, eine ganz strenge und sogar besonders schwierige Disziplin, nicht etwa *approximative Mathematik*. Immer wird es zur vollen Klarstellung der Sachlage nützlich sein, an dieser Stelle zu bemerken, daß sich der Praktiker in den meisten Fällen mit der letzteren begnügt. Ich erläutere dieses am liebsten an demjenigen Zweige der angewandten Mathematik, der die äußersten Anforderungen an numerische Genauigkeit stellt, der rechnenden Astronomie. Die Fachastronomen haben nicht die Zeit und vielfach auch nicht die theoretischen Mittel, die Zuverlässigkeit ihrer Resultate in mathematisch bestimmte Grenzen einzuschließen, sondern sie begnügen sich damit, ihre Rechnungen jeweils da abzubrechen, wo sie nach ihrer durch Erfahrung verschärften Empfindung die hinreichende Genauigkeit erreicht zu haben glauben. Unendliche Reihen z. B. werden, ohne Abschätzung des Restgliedes

¹⁾ Diese Ausarbeitung ist 1902 in autographierter Form bei B. G. Teubner erschienen; zweiter Abdruck 1907.

da abgebrochen, wo die einzelnen Glieder hinreichend klein geworden sind (oder auch nur hinreichend klein geworden zu sein scheinen). Das theoretisch Unzureichende eines solchen Verfahrens hat u. a. um 1890 herum H. Poincaré in seiner *Mécanique* ecleste vielfach gekennzeichnet. Andererseits belehrt uns die Geschichte, daß Irrtümer in der Tat vorgekommen sind, daß aber im großen und ganzen die Vorausberechnungen der Astronomen die Probe der Erfahrung durchaus bestanden haben. Ich empfehle dieses Sachverhältnis dem immer wiederholten Nachdenken der Mathematiker. Es bleibt eine für alle Erkenntnistheorie höchst beachtenswerte Tatsache, daß man in praxi in der Mehrzahl der Fälle instinktiv ausreichende Genauigkeit erreicht, wo man von dem theoretischen Hintergründe einer exakten Approximationsmathematik noch weit entfernt bleibt.

Ein anderer sehr merkwürdiger Umstand, von dem ich in meinen Arbeiten zur anschaulichen Geometrie, aber auch weiterhin in der Funktionentheorie usw. mannigfachen Gebrauch gemacht habe, ist der, daß die geometrisch physikalische Anschauung, ungenau, wie sie ist, dennoch vielfach zu richtigen Theoremen der Präzisionsmathematik hinleitet. Ich knüpfte hier nur an das Beispiel an, über welches ich mich auch in meiner autographierten Vorlesung verbreite, ich meine die Relation zwischen den reellen Singularitäten einer ebenen algebraischen Kurve, von der in Abh. XXXVII gehandelt ist. Es ist ganz klar, daß ein strenger Beweis nur geführt werden kann, wenn man neben den geometrischen Axiomen irgendeine zureichende Definition der Kurven, welche algebraisch genannt werden, heranzieht — am einfachsten also, wenn man sich kurz entschlossen auf den Boden der abstrakten analytischen Geometrie stellt. Ein solcher Beweis läßt sich auch durchführen; es genüge hier in diesem Betracht, auf die schon genannte Arbeit von Brill in den *Math. Annalen*, Bd. 16 zu verweisen. Trotzdem hat das empirische Zeichnen von Kurvenformen mit unbestimmter Anlehnung an die analytischen Beziehungen zur Aufindung der Relation und ihrer wesentlichen Beweisgründe geführt. Ich empfehle diese Tatsache, neben vielen ähnlichen, die in der Geschichte der Mathematik bekannt genug sind, der Aufmerksamkeit aller derjenigen, die sich für das Zustandekommen mathematischer Einsichten interessieren. K.



XIV. Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve¹⁾.

[Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen vom 8. Dezember 1873, abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 22 (1883).]

Der allgemeine Funktionsbegriff ist historisch aus der analytischen Geometrie (resp. aus der Mechanik und überhaupt der mathematischen Physik) erwachsen; aber es besteht kein Zweifel, daß er, um völlig korrekt zu sein, von jedem anschauungsmäßigen Gebiete abgelöst und auf rein arithmetische Grundlage gestellt werden muß. Ich glaube, daß dies seither, auch nach Dirichlets strenger Definition einer Funktion, noch nicht in hinreichendem Maße geschehen ist²⁾, so sehr das Bedürfnis dazu in allgemeinen mathematischen Kreisen empfunden wird. Und eben hierin scheint der Grund für die Schwierigkeiten zu liegen, die in so manchen Sätzen über willkürliche Funktionen gefunden werden, wie z. B. in dem, daß es stetige Funktionen ohne Differentialquotienten gibt.

Demgegenüber denke ich im folgenden den rein arithmetischen Charakter des Funktionsbegriffes deutlich zu bezeichnen (§ 1, 2). Ich gehe sodann dazu über, die [anschauliche] Vorstellung der willkürlichen Kurve zu analysieren (§ 3, 4) und finde, daß sie den aus ihr folgenden Eigenschaften nach nicht sowohl dem Funktionsbegriffe als einem verwandten analytischen Begriffe, dem des *Funktionsstreifens*, wie ich ihn neme, entspricht (§ 5, 6). Den inneren Grund dafür erblicke ich, ganz allgemein gesagt, in der Un-

¹⁾ [Im Zusammenhange mit dem im Texte wiederabgedruckten Aufsätze verweise ich auf die beiden im vorigen Jahre erschienenen Lehrbücher von Herrn Pasch: „Vorlesungen über neuere Geometrie“, und: „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung“, (Leipzig, B. G. Teubner). Es ist meine Ansicht, daß, ähnlich wie im Texte, in jedem Lehrbuche der Differential- und Integralrechnung der Unterschied zwischen der unmittelbaren (physikalischen) Anschauung, und der abstrakten, mathematischen Auffassung zur Sprache gebracht werden sollte. (Zusatz beim Wiederabdruck in Math. Annalen, Bd. 22, 1883.)]

²⁾ Wenigstens gelangte eine solche Auffassung noch nicht zur Darstellung. Ich kann aber nicht zweifeln, daß sich mancher Mathematiker diesen Überlegungen mehr oder minder deutlich gebildet hat, wie sie im Texte entwickelt werden sollen.

genauigkeit unserer räumlichen Anschauung (§ 3). Ich bin mir freilich bewußt, daß ich mit diesem Versuche einer Begründung aus dem rein mathematischen Gebiete hinaustrete und psychologische Probleme berühre, über die etwas Richtiges auszusagen außerordentlich schwierig ist. Aber einmal stehe ich mit der bez. Auffassung der Raumschauung nicht allein (vgl. § 3); andererseits empfiehlt sie sich durch ihren Erfolg: die ganze Reihe von Mißlichkeiten, welche die gewöhnliche Auffassung mit sich führt (§ 4), erledigt sich ohne weiteres. In § 7 endlich gebe ich noch einige Sätze über den Gebrauch von Reihen zur Darstellung willkürlicher Kurven.

§ 1.

Rein arithmetische Definition und Erzeugung einer Funktion.

Bei der Definition dessen, was Funktion zu nennen ist, wird man immer von einer reellen Größe x als unabhängiger Variablen ausgehen, die im folgenden insbesondere so gedacht sein soll, daß sie nicht nur alle rationalen, sondern auch alle irrationalen Werte annehmen kann³⁾.

Eine andere Größe y heißt eine (eindeutige) Funktion von x innerhalb eines Intervalls⁴⁾, wenn zu jedem Werte von x innerhalb des Intervalls ein bestimmter Wert von y gehört. Dies ist Dirichlets bekannte Definition; aber man wird die weitere Frage aufwerfen, wie man eine solche Funktion herzustellen hat? Indem die Betrachtung der anschauungsmäßigen Gebiete, welche nach der gewöhnlichen Auffassung hier von Belang sind, zunächst völlig beiseite gelassen werden soll, stellen wir folgenden Satz als Ausgangspunkt voran:

Es kann nie eine unendliche, sondern immer nur eine endliche Anzahl von Dingen als willkürlich gegeben vorausgesetzt werden⁵⁾.

Dementsprechend kann eine Funktion nie für die unendlich vielen Werte des Argumentes, für die sie hergestellt werden soll, willkürlich gegeben sein, sondern sie muß aus einer endlichen Zahl gegebener Elemente

³⁾ Der rein arithmetische Begriff der Irrationalzahl ist in neuerer Zeit von mehreren Seiten her scharf als solcher entwickelt worden, was hier angeführt sei, weil diese Schriften ihrer Tendenz nach mit dem, was in § 1, 2 des Textes auseinandergesetzt werden soll, übereinstimmen. Es sind: Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872; Heine, Die Elemente der Funktionenlehre, Crelles Journal, Bd. 74 (1871/72); Cantor, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen, Bd. 5 (1872/73).

⁴⁾ An und für sich steht nichts im Wege, von Funktionen zu sprechen, die innerhalb verschiedener Intervalle oder auch nur für einzelne Werte von x existieren. Aber die hierin liegende größere Allgemeinheit würde für die Betrachtungen des Textes ohne Bedeutung sein, so daß es nicht nötig scheint, sie explizite einzuführen.

⁵⁾ Ich habe diesen Satz am schärfsten ausgesprochen und durchgeführt gefunden in Dührings „Natürlicher Dialektik“ (Berlin 1865).



vermöge eines bestimmten Gesetzes für jeden Wert ihres Argumentes berechnet werden können.

Es soll das nicht mißverstanden werden. Wenn die Funktion nach gewöhnlicher Ausdrucksweise in verschiedenen Intervallen oder auch für einzelne Werte des Argumentes verschiedenen Gesetzen genügt, so bezeichnen wir deren Inbegriff eben als ein Gesetz.

In diesem Gesetze und der in ihm liegenden Möglichkeit der Berechnung ist dann das Wesen der Funktion zu erblicken. Die Funktion ist dementsprechend nicht als *fertig existierend* vorzustellen, wie dies in Anlehnung an die räumliche Anschauung wohl nur zu oft geschieht; sie existiert, im strengen Sinne des Wortes, nur für die einzelnen Werte des Argumentes, für die sie berechnet worden ist (was selbst wieder voraussetzt, daß es Werte gibt, für welche die Berechnung durch einen endlichen Prozeß geleistet werden kann).

Insofern zwei verschiedene Werte, für die man die Berechnung durchgeführt haben mag, notwendig *endlich* verschieden sind, hat man bei diesen Festsetzungen über das Verhalten der Funktion für unmittelbar aufeinanderfolgende Argumente und also über das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein eines Differentialquotienten gar keine Intuition; die Schwierigkeit, welche man in der Annahme stetiger Funktionen ohne Differentialquotienten zu finden glaubt, existiert überhaupt nicht.

§ 2.

Von der Darstellung einer Funktion durch Reihen. Einführung des Funktionsstreifens.

Entsprechend dem vorausgeschickten Satze von der Unmöglichkeit, unendlich viele Dinge als willkürlich gegeben anzunehmen, hat eine unendliche Reihe von Operationen nur dann einen bestimmten Sinn, wenn wir in ihr bloß eine *endliche* Anzahl von Bestimmungen willkürlich denken, die übrigen durch ein *Gesetz* aus ihr ableiten. So ist es z. B. mit einer Potenzreihe; wir können von einer solchen Reihe als einer gegebenen nur sprechen, indem wir uns die Koeffizienten der ins Unendliche fortlaufenden Glieder durch eine Regel aus einer endlichen Anzahl vorausgegangener bestimmt denken⁶⁾.

Wenn wir, ohne weitere Beschränkung, sagen, daß eine Reihe eine gewisse Funktion *darstellen* könne, so meinen wir einfach, daß das Gesetz.

⁶⁾ Ich bin hierauf gelegentlich von Herrn Kronecker gesprächsweise aufmerksam gemacht worden; in seiner Bemerkung lag für mich wohl der erste Anlaß, mit die in § 1, 2 des Textes niedergelegte Anschauung zu bilden.

welches zur Berechnung der Funktion dient, in die Form des durch die Reihe angegebenen regelmäßigen Prozesses gebracht werden kann.

Etwas, was von dieser *exakten* Darstellung einer Funktion durch eine Reihe begrifflich durchaus verschieden ist, was aber unter verschiedenen Gesichtspunkten (und insbesondere in allen Fällen der Anwendung auf praktische Verhältnisse) dasselbe leistet, ist *die nur approximative Darstellung* einer Funktion. Wir sagen, daß eine (endliche oder unendliche) Reihe eine gegebene Funktion approximativ darstelle, wenn der Unterschied des Funktionswertes und des aus der Reihe berechneten immer kleiner ist, als eine gegebene Größe δ . Die Darstellung würde nur dann eine exakte sein, wenn diese Größe *beliebig klein* gelassen werden könnte.

Über die Möglichkeit der approximativen Darstellung von Funktionen durch Reihen lassen sich ohne weiteres allgemeine Sätze aufstellen, wie das in der Folge noch geschehen soll (§ 7), während es bekannt ist, daß über die Möglichkeit einer exakten Darstellung durch die gewöhnlich gebrauchten Reihen so lange nichts behauptet werden kann, als nicht die im allgemeinen Funktionsbegriffe liegende Willkürlichkeit beträchtlich eingeschränkt ist und namentlich sehr viel mehr eingeschränkt ist, als es durch die bloße Annahme der Stetigkeit geschieht.

Die nur approximative Darstellung einer Funktion charakterisiert einen wichtigen Teil mathematischer Spekulation, in welchem nicht von den exakten, sondern nur von den angenäherten Relationen der Größen gehandelt wird⁷⁾. In ihm wird man alle Funktionen, deren Werte um weniger als eine gegebene Größe δ voneinander abweichen, zu einem Ganzen zusammenfassen, das dann durch eine Gleichung der Form

$$y = f(x) \pm \varepsilon \quad \varepsilon < \delta$$

charakterisiert sein wird. Ein solches umfassendes Gebiet von zwei Dimensionen ist es, welches im folgenden als ein *Funktionsstreifen* oder schlechthin als ein *Streifen* bezeichnet werden soll. Diese Benennung ist mit Absicht so gewählt, daß sie an die geometrische Anschauung erinnert; denn diese kann, wie die weitere Überlegung zeigt, für die Theorie der Streifen, wie dieselbe im folgenden gebraucht werden soll, ohne weiteres verwendet werden (vgl. § 5).

Was ein Streifen ist, mag durch die vorstehenden Sätze nur erst veranschaulicht, noch nicht scharf definiert sein. In der Tat werden wir weiterhin (§ 5) noch eine wesentliche Zusatzbestimmung treffen und überdies die Willkürlichkeit der zugrundeliegenden Funktion $f(x)$ in einem gewissen Sinne einschränken.

⁷⁾ In diesen Teil ist z. B. fast die ganze sogenannte „angewandte Mathematik“ zu verweisen.



§ 3.

Über die Möglichkeit, eine Funktion durch eine Kurve darzustellen.

Indem ich mich nunmehr zu der Frage wende, in wie weit eine Funktion anschauungsmäßig gegeben sein kann, beschränke ich mich auf das abstrakteste unter den hier in Betracht kommenden Gebieten, auf den *Raum*, und, da nur von zwei Veränderlichen die Rede sein soll, auf die Ebene⁸⁾. Die Punkte der Ebene seien in gewöhnlicher Weise durch die Werte von y und x repräsentiert; ist es möglich, durch eine in der Ebene verlaufende Kurve ein Funktionsverhältnis zwischen y und x genau zu bezeichnen?

Durch eine willkürlich *gezeichnete* Kurve sicher nicht; denn die Zeichnung sowohl als ihre spätere Beobachtung sind, wie alle derartigen Tätigkeiten, nur von approximativer Genauigkeit.

Durch eine *gesetzmäßig erzeugte Kurve* gewiß, sofern das Gesetz mitgeteilt wird, welches sie beherrscht. Aber in dem Falle ist es eben dieses Gesetz und die Voraussetzung voller Genauigkeit der geometrischen Axiome, durch welche die Funktion bestimmt wird; die Frage, mit der wir uns hier beschäftigen wollen, liegt in einer wesentlich anderen Richtung.

Es soll sich nämlich darum handeln, ob man sich eine Kurve überhaupt exakt vorstellen und dieselbe somit, wenn auch nur subjektiv, als genaues Bild einer Funktion betrachten könne? wobei es dann gleichgültig sein wird, ob wir uns die Kurve willkürlich oder vermöge eines bestimmten Gesetzes konstruiert denken. Ich behaupte: *Nein. Die Vorstellung einer Kurve hat nur approximative Genauigkeit; das analytische Gegenbild der Kurve ist nicht die Funktion, sondern der Streifen.* Es mag zunächst der Sinn dieser Behauptung näher formuliert und erst in den folgenden Paragraphen auf die Vorteile hingewiesen werden, welche aus ihr hervorgehen. Nach der psychologischen Seite soll sie sich insbesondere auf diejenigen Erörterungen stützen, die neuerdings von Herrn Stumpf in seinem Buche: „Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung“ (Leipzig, 1873) gegeben worden sind (vgl. daselbst bes. S. 280).

Das Element der räumlichen Anschauung ist im Sinne der hier vorzutragenden Ansicht nicht der einzelne Punkt, sondern der (dreifach) ausgedehnte Körper⁹⁾. Wir können uns den Körper in hohem Maße verkleinert denken, bekommen aber niemals die fertige Anschauung eines einzelnen Punktes. Es ist in demselben Sinne unmöglich, eine Kurve exakt vorzu-

⁸⁾ Auf mechanische Vorstellungen wird man im großen und ganzen die Betrachtungen des Textes übertragen können.

⁹⁾ Hierin also liegt ein fundamentaler Unterschied zwischen unserer Vorstellung vom Punktraum und demjenigen arithmetischen Begriffe, den man als sein Analogon konstruiert hat, nämlich dem Begriffe der (n -fach ausgedehnten) *Mannigfaltigkeit*; das erste bei der Auffassung der Mannigfaltigkeit ist das einzelne Wertsystem.

stellen; wir erblicken immer einen Körper, von dem nur zwei Dimensionen beträchtlich gegen die dritte zurücktreten. Wenn wir Geometrie auf einer Fläche, also insbesondere Geometrie der Ebene treiben, so ist damit die Tiefenvorstellung nicht ausgeschlossen; es wird nur nicht auf sie geachtet.

Bezüglich der Breite, die wir einer Kurve in unserer Anschauung beilegen, gelten dann die folgenden Bestimmungen, die geeignet scheinen, den Gegenstand, um den es sich handelt, noch deutlicher zu bezeichnen: Man kann die Breite für einzelne Stellen der Kurve durch Konzentrieren der Aufmerksamkeit auf dieselben beträchtlich verringern, aber wohl nicht¹⁰⁾ unter jede gegebene Grenze und sicher nicht unter jede beliebige Grenze. Für jede Stelle aber, die selbständig aufgefaßt wird, ist dabei ein besonderer Akt der Aufmerksamkeit notwendig, wie man am besten wahrnimmt, wenn man sich die Kurve in sehr viel größerem Maßstabe [vorzustellen sucht] als man gewohnt ist.

§ 4.

Schwierigkeiten, die sich ergeben, wenn man Kurve und Funktion entsprechend setzt.

Entgegen der Behauptung, wie sie im vorigen Paragraphen entwickelt wurde, soll jetzt zunächst ein genaues Entsprechen von Kurve und Funktion angenommen und auf die Widersprüche hingewiesen werden, welche dann entstehen. Es versteht sich dabei von selbst, daß der zusammenhängenden Kurve nur eine Funktion ohne alle Unstetigkeiten entsprechend gesetzt werden kann.

Eine Kurve hat, nach der Anschauung, die wir tatsächlich besitzen¹¹⁾, in jedem Punkte eine Tangente. *Dementsprechend müßte jede stetige Funktion einen ersten Differentialquotienten haben, was nicht richtig ist.*

Die Neigung dieser Tangente ändert sich, unserer Anschauung entsprechend, stetig, wenn wir auf der Kurve fortschreiten. Sie ist also selbst wieder durch eine stetige Funktion dargestellt, die man von neuem durch eine Kurve repräsentieren mag. Man findet so, daß jede stetige Funktion nicht nur einen ersten, sondern auch einen zweiten Differentialquotienten hat; und wenn man in derselben Weise fortfährt, ergibt sich, daß sie auch einen dritten, vierten, . . . , überhaupt unbegrenzt viele Differentialquotienten besitzt. Aber eine solche Funktion ist, nach dem Taylorschen Satze, durch ihren Verlauf in dem kleinsten Intervalle ge-

¹⁰⁾ In der Tat scheint es unmöglich, einen Körper von gegebener Größe [anschaulich] zu denken, wenn diese Größe sehr klein angenommen wird.

¹¹⁾ Nur von dieser (gewöhnheitsmäßigen) Anschauung ist im Texte überhaupt die Rede; ob wir dieselbe ev. werden modifizieren können, ist eine Frage, die durchaus jenseits der Grenzen unserer Betrachtung liegt.



geben¹²⁾. Eine willkürliche Kurve müßte also durch ihr kleinstes Stück völlig bestimmt sein, was eine *Contradictio in adjecto* ist.

Wäre sie es nicht, so gäbe es eine neue Schwierigkeit. Ist eine Kurve, ob auch willkürlich, in allen Punkten exakt aufzufassen, so würde es möglich sein, eine Funktion für jeden Wert ihres Argumentes innerhalb eines Intervalls willkürlich zu geben, und dies verstößt gegen die in § 1 formulierte Unmöglichkeit, unendlich viele Dinge als willkürlich gegeben vorzusetzen.

Die entwickelten Schwierigkeiten fallen fort, wenn man die Kurve nicht der Funktion, sondern dem Funktionsstreifen adäquat setzt, wie nun gezeigt werden soll. Zugleich scheint dies die einzige Lösung zu sein, welche hier möglich ist. Wenigstens ist eine andere Lösung, soviel ich weiß, noch nicht vorgeschlagen worden¹³⁾.

§ 5.

Nähere Betrachtung der Funktionsstreifen.

Den Funktionsstreifen führten wir in § 2 durch eine Gleichung

$$y = f(x) \pm \varepsilon \quad \varepsilon < \delta$$

in die Betrachtung ein. Wählen wir die gegebene Größe δ so groß, daß sie bei räumlicher Repräsentation der y und x eine merkliche Strecke bezeichnet, so stellt die vorstehende Gleichung eben dasjenige dar, was man auch in der gewöhnlichen Ausdrucksweise als einen *Streifen* bezeichnet, und wofür ein *Weg*, ein *Strom* der gewöhnlichen Anschauung entnommene Bilder sein mögen.

Die Ränder eines solchen Streifens wird man, je nachdem man sich der in § 3 formulierten Ansicht anschließt, oder nicht, als unbestimmt und nur approximativ gegeben oder als völlig bestimmt vorstellen. Demgegenüber soll jetzt die analytische Definition so gestellt werden, daß

¹²⁾ [Dies ist, neueren Untersuchungen zufolge, ein Irrtum; vgl. du Bois, Math. Annalen, Bd. 21 (1882), S. 109 ff. Der Einwurf des Textes sollte also vorsichtiger formuliert werden. (Zusatz beim Wiederabdruck, 1883.)]

¹³⁾ In einer Rede vor der British Association zu Brighton (On the aims and instruments of scientific thoughts, 1872) hat Herr Clifford darauf aufmerksam gemacht, daß eine Erledigung der entsprechenden Schwierigkeiten, die sich bei der Betrachtung der mechanischen Probleme aufdrängen, sachlich darin gesucht werden könne, daß man für unsere kontinuierliche Anschauung ein diskontinuierliches Substrat voraussetzt — eine Vorstellungsweise, die sich auch schon in Riemanns Habilitationsvortrag: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen (1854) [Ges. Werke, 1. Aufl., S. 254, 2. Aufl., S. 272], als eine mit den Tatsachen verträgliche angedeutet findet. Eine solche Vorstellung von dem, was unserer Anschauung in der Sphäre des Seins entspricht, macht die Erläuterungen des Textes nicht nur nicht überflüssig, sondern muß dieselben geradezu voraussetzen.

diese Ränder unbestimmt gedacht werden müssen. Es möge nämlich ϱ eine gegen δ sehr kleine Größe bezeichnen, die aber im übrigen völlig unbestimmt gelassen wird, und der Streifen sei fortan definiert durch die Gleichung:

$$y = f(x) \pm \varepsilon \quad \varepsilon < \delta - \varrho.$$

Wir haben sodann noch eine Beschränkung hinsichtlich der Willkürlichkeit von $f(x)$ hinzuzufügen, damit der analytische Ausdruck völlig dem geometrischen Anschauungsbilde entspricht, wie es durch die Worte: Weg, Strom bezeichnet wird. Diese Bilder sagen nämlich aus, daß wir es mit einem Gebiete zu tun haben, das in einer Dimension sehr viel ausgedehnter als in der anderen ist. Analytisch wird man dies so formulieren können: Sei λ im Vergleiche zu δ eine beträchtliche, μ eine geringe Zahl; so bestimme man für alle in Betracht kommenden Werte x_0 der unabhängigen Variablen eine lineare Funktion

$$y = ax + \beta,$$

welche für die Argumente x_0 und $x_0 + \lambda$ mit den Werten $f(x_0)$ und $f(x_0 + \lambda)$ zusammenfällt (was natürlich voraussetzt, daß innerhalb des Intervalls, für welches die Funktion existiert, Differenzen von der Größe λ Platz finden). Die hinzutretende Voraussetzung sei dann die, daß diese lineare Funktion innerhalb des Intervalls von x_0 bis $x_0 + \lambda$ von der gegebenen Funktion $f(x)$ nirgends um mehr als um μ abweicht.

Man kann dann zeigen, daß die Abweichung der Funktion $f(x)$ innerhalb der beiden Intervalle x_0 bis $x_0 + \lambda$ und $x_0 + \lambda$ bis $x_0 + 2\lambda$ von einer quadratischen Funktion:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

die mit ihr für die Werte x_0 , $x_0 + \lambda$, $x_0 + 2\lambda$ des Argumentes übereinstimmt, ebenfalls in bestimmte Grenzen eingeschlossen ist usw.

§ 6.

Fortsetzung. Differentialquotienten eines Streifens.

Zahl der Bestimmungsstücke, von denen ein Streifen abhängt.

Was geometrisch unter der Richtung eines Streifens, unter seiner Krümmung zu verstehen ist, ist ersichtlich; beide sind keine exakt bestimmten Größen, sondern nur in dem Maße genauer anzugeben, als der Streifen schmäler ist. Dementsprechend wird man analytisch von einem ersten und zweiten Differentialquotienten des Streifens als approximativ gegebenen Größen reden können. Als ersten Differentialquotienten im Punkte x_0 wird man geradezu den ersten Differentialquotienten der im vorigen Paragraphen aufgestellten berührenden linearen Funktion, a , oder auch der dort gegebenen berührenden quadratischen Funktion, $2ax_0 + b$,



bezeichnen können. Als zweiten Differentialquotienten mag man den zweiten Differentialquotienten der ersetzenden quadratischen Funktion, also $2a$, einführen. Die Grenzen, zwischen welche diese Angaben eingeschlossen sind, rücken in dem Maße enger aneinander, als man die Quotienten $\frac{\lambda}{\delta}$ und $\frac{\mu}{\delta}$ der im vorigen Paragraphen eingeführten Hilfsgrößen beträchtlicher resp. geringer annimmt. Überhaupt wird man von einem n -ten Differentialquotienten des Streifens reden können; ein solcher Quotient ist niemals exakt, [sondern nur mit einer größeren oder geringeren Genauigkeit] bestimmt.

Der Unterschied aber besteht zwischen den Differentialquotienten einer Funktion und eines Streifens (abgesehen davon, daß letzterer keine exakt gegebene Größe ist): daß bei der Funktion der betr. Quotient streng an dem einzelnen Werte des Argumentes haftet, daß er bei dem Streifen dagegen sich erst durch Beurteilung des Gesamtverlaufes [in dem in Betracht gezogenen Intervall] ergibt.

Achten wir noch auf das Maß der Willkürlichkeit, deren ein Streifen fähig ist, wobei ausdrücklich an die Unbestimmtheit seiner Ränder erinnert werden soll. Dementsprechend ist nämlich ein Streifen so vollkommen, als überhaupt möglich, bestimmt, wenn wir in jeder Strecke λ seines Intervalls eine endliche (hinreichend große) Zahl ihm angehöriger Punkte kennen. *Der Streifen selbst hängt also nur von einer endlichen Zahl willkürlicher Festsetzungen ab.*

Vergleichen wir das Resultat dieser Überlegungen mit den Widersprüchen, die sich in § 4 ergaben, wo wir die Kurve als exakt dem Begriffe der Funktion entsprechend auffassen wollten. So ist ersichtlich, daß die letzteren alle fortfallen, sobald wir die Kurve dem Streifen entsprechend setzen. *Die Schwierigkeiten betr. die Differentialquotienten existieren nicht mehr, weil letztere jetzt eine andere Definition erhalten haben; der Widerspruch, daß unendlich viele Dinge als gegeben vorausgesetzt werden müßten, ist weggehoben, da die willkürliche Kurve nur von einer endlichen Zahl von Festsetzungen abhängt.* Und dieses ist die hauptsächlichste Einsicht, welche durch die gegenwärtige Mitteilung entwickelt werden sollte.

§ 7.

Repräsentation der Streifen (Kurven) durch Reihen.

Noch einige Bemerkungen über die Repräsentation von Streifen durch Funktionen und insbesondere durch Reihen mögen hier zugesetzt werden. Wir werden dabei sagen, daß eine Funktion einen Streifen darstelle, wenn alle ihre Werte dem Gebiete des Streifens angehören. Es ist dabei weder nötig, daß die Funktion Differentialquotienten besitzt (nicht einmal, daß

sie stetig ist), noch auch, wenn sie solche besitzt, daß dieselben mit den Differentialquotienten des Streifens [annähernd] übereinstimmen. Aber man wird diejenige Darstellung für die vollkommenste halten, bei der dies der Fall ist.

Als ein erstes Beispiel nenne ich eine nach dem vorhergehenden naheliegende Darstellung durch Fouriersche Reihen. Man verbinde nämlich (geometrisch geredet) Punkte, welche dem Streifen angehören und den Argumenten

$$-n\lambda, \dots, -\lambda, 0, +\lambda, \dots, +n\lambda$$

entsprechen, so wie sie aufeinander folgen, durch begrenzte gerade Linien; das entstehende Polygon repräsentiere man durch eine Fouriersche Reihe. *Dann hat man eine Repräsentation des Streifens durch eine Funktion, die mit alleiniger Ausnahme der Punkte*

$$x = 0, \pm\lambda, \dots, \pm n\lambda$$

überall Differentialquotienten hat. Die ersten Differentialquotienten stimmen mit denen des Streifens (annähernd) überein; die übrigen nicht, sie haben den konstanten Wert Null.

Diese Art der Repräsentation hat den Vorzug, an jeder Stelle nur von dem Verlaufe des Streifens in nächster Nähe abhängig zu sein, und also die Willkürlichkeit, die wir in den Streifen hineinlegen, auch analytisch zum Ausdruck zu bringen.

Als ein zweites Beispiel, das den entgegengesetzten Charakter besitzt, sei die Darstellung des Streifens durch eine [endliche] *Potenzreihe* genannt. Wir können, vermittelt der bekannten Lagrangeschen Interpolationsformel eine Potenzreihe herstellen, welche jede beliebige (endliche) Anzahl von Punkten des Streifens enthält. Man überzeugt sich — und dieser Satz liegt implizite der Definition der Differentialquotienten eines Streifens in § 6 zugrunde — daß bei richtiger Wahl der bestimmenden Punkte nicht nur die Potenzreihe selbst den Streifen annähernd darstellt, sondern namentlich auch, daß ihre Differentialquotienten an jedem Punkte mit den bez. Differentialquotienten des Streifens approximativ übereinstimmen. *In diesem Sinne kann also jeder Streifen durch eine Potenzreihe dargestellt werden.*

Schließt man sich der Anschauung an, daß eine Kurve nichts anderes ist, als ein Streifen, so sind diese Sätze Fundamentalsätze über die Darstellung willkürlicher Kurven.

§ 8.

Schlußbemerkung.

Die vorgetragenen Betrachtungen legen die Frage nahe, in wie weit es bei analytischen Untersuchungen gestattet ist, geometrische Anschauung zu verwenden. Diese Frage ist um so wichtiger, als man einen Gebrauch



dieser Anschauung in den mannigfachsten Gebieten nicht nur in ausgiebigster Weise, sondern auch mit dem größten Erfolge macht. Ich denke dabei nicht sowohl an eigentliche Geometrie, die ja außer in dem lebendigen Erfassen des im Raume Angeschauten noch an den Axiomen eine Stütze findet, als vielmehr an solche Disziplinen wie Analysis situs oder geometrische Theorie der Differentialgleichungen. Es dürfte sehr schwer sein, die Grenzen für die Richtigkeit solcher Betrachtungen allgemein anzugeben. Aber die Fruchtbarkeit, welche diese Verknüpfung analytischer Probleme mit der Raumanschauung besitzt, scheint auf die erhöhte *Übersicht* hinauszukommen, welche die Anschauung mit sich führt, und für welche die nach der entwickelten Ansicht fehlende Genauigkeit im kleinen nicht nur kein Hindernis, sondern geradezu eine Förderung ist.

Die vorstehenden Erörterungen sollten sich von vornherein auch auf die Zulässigkeit der Nicht-Euklidischen Doktrinen, d. h. ihre Verträglichkeit mit unserer Raumanschauung beziehen. Man wolle hierzu die Abhandlung „Zur Nicht-Euklidischen Geometrie“, Math. Annalen, Bd. 37 (1890) vergleichen, die bereits in Bd. 1 dieser Gesamtausgabe unter Nr. XXI abgedruckt ist; siehe insbesondere S. 381 bis 382 daselbst. Im übrigen komme ich auf diese Verhältnisse in Abb. XLIX zurück. K.]

XI.VI. On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences.

[Aus dem „Evanston Colloquium“, Lectures on Mathematics delivered at the Northwestern University Evanston, Ill.]¹⁾

In the preceding lectures I have laid so much stress on geometrical methods that the inquiry naturally presents itself as to the real nature and limitations of geometrical intuition.

In my address²⁾ before the Congress of Mathematics at Chicago I referred to the distinction between what I called the *naïve* and the *refined* intuition. It is the latter that we find in Euclid; he carefully develops his system on the basis of well-formulated axioms, is fully conscious of the necessity of exact proofs, clearly distinguishes between the commensurable and incommensurable, and so forth.

The naïve intuition, on the other hand, was especially active during the period of the genesis of the differential and integral calculus. Thus we see that Newton assumes without hesitation the existence, in every case, of a velocity in a moving point, without troubling himself with the inquiry whether there might not be continuous functions having no derivative.

At the present time we are wont to build up the infinitesimal calculus on a purely analytical basis, and this shows that we are living in a *critical* period similar to that of Euclid. It is my private conviction, although I may perhaps not be able to fully substantiate it with complete proofs, that Euclid's period also must have been preceded by a "naïve" stage of development. Several facts that have become known only quite

¹⁾ [Dieser Vortrag wurde als sechster von zwölf Vorlesungen am 2. September 1893 in Evanston gehalten und findet sich in dem schon auf S. 5 dieses Bandes genannten Buche abgedruckt. Ich habe damals englisch vorgetragen, und im Anschluß daran hat Herr Ziwet naturgemäß auch englisch berichtet; hieran habe ich bei dem nunmehrigen Wiederabdruck festhalten wollen, wo doch jede Übersetzung den Sinn des einzelnen Satzes einigermaßen abgeändert haben würde. K.]

²⁾ [Weiter unten in Abschnitt III dieses Bandes abgedruckt.]



recently point in this direction. Thus it is now known that the books that have come down to us from the time of Euclid constitute only a very small part of what was then in existence; moreover, much of the teaching was done by oral tradition. Not many of the books had that artistic finish that we admire in Euclid's "Elements"; the majority were in the form of improvised lectures, written out for the use of the students. The investigations of Zeuthen³⁾ and Allman⁴⁾ have done much to clear up these historical conditions.

If we now ask how we can account for this distinction between the naïve and refined intuition, I must say that, in my opinion, the root of the matter lies in the fact that *the naïve intuition is not exact, while the refined intuition is not properly intuition at all, but arises through the logical development from axioms considered as perfectly exact.*

To explain the meaning of the first half of this statement it is my opinion that, in our naïve intuition, when thinking of a point we do not picture to our mind an abstract mathematical point, but substitute something concrete for it. In imagining a line, we do not picture to ourselves "length without breadth", but a *strip* of a certain width. Now such a strip has of course *always* a tangent (Fig. 1); *i. e.* we can always imagine a straight strip having a small portion (element) in common with the curved strip; similarly with respect to the osculating circle. The definitions in this case are regarded as holding only approximately, or as far as may be necessary.

The "exact" mathematicians will of course say that such definitions are not definitions at all. But I maintain that in ordinary life we actually operate with such inexact definitions. Thus we speak without hesitancy of the direction and curvature of a river or a road, although the "line" in this case has certainly considerable width.

As regards the second half of my proposition, there actually are many cases where the conclusions derived by purely logical reasoning from exact definitions can no more be verified by intuition. To show this, I select examples from the theory of automorphic functions, because in more common geometrical illustrations our judgment is warped by the familiarity of the ideas.

Let any number of non-intersecting circles 1, 2, 3, 4, ... be given (Fig. 2), and let every circle be reflected (*i. e.* transformed by inversion, or reciprocal radii vectores) upon every other circle; then repeat this

³⁾ Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Übersetzt von R. v. Fischer-Benzon, Kopenhagen, Høst, 1886.

⁴⁾ Greek geometry from Thales to Euclid. Dublin, Hodges, 1889.



Fig. 1.

operation again and again, *ad infinitum*. The question is, what will be the configuration formed by the totality of all the circles, and in particular what will be the position of the limiting points. There is no difficulty in answering these questions by purely logical reasoning; but the imagination seems to fail utterly when we try to form a mental image of the result.

Again, let a series of circles be given, each circle touching the following, while the last touches the first (Fig. 3). Every circle is now reflected upon every other just as in the preceding example, and the process is repeated indefinitely. The special case when the original points of contact happen to lie on a circle being excluded, it can be shown analytically that

the continuous curve which is the locus of all the points of contact is *not an analytic curve*⁵⁾. The points of contact form a manifoldness that is everywhere dense on the curve (in the sense of G. Cantor), although there are intermediate points between them. At each of the former points

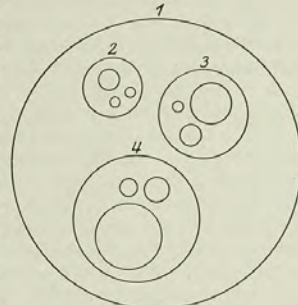


Fig. 2.

there is a determinate tangent, while there is none at the intermediate points. Second derivatives do not exist at all.

It is easy enough to imagine a *strip* covering all these points; but when the width of the strip is reduced beyond a certain limit, we find undulations, and it seems impossible to clearly picture to the mind the final outcome. It is to be noticed that we have here an example

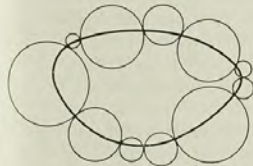


Fig. 3.

of a curve with indeterminate derivatives arising out of purely geometrical considerations, while it might be supposed from the usual treatment of such curves that they can only be defined by artificial analytical series.

Unfortunately, I am not in a position to give a full account of the

⁵⁾ [Vgl. die Ausführungen in Fricke's und meinen Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. 1, 1897, S. 411-424, wie auch in meinen autographierten Vorlesungen „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie“, 1901, S. 298-318. K.]



opinions of philosophers on this subject. As regards the more recent mathematical literature, I have presented my views as developed above in a paper published in 1873, and since reprinted in the *Math. Annalen*⁶⁾. Ideas agreeing in general with mine have been expressed by Pasch, of Gießen, in two works, one on the foundations of geometry⁷⁾, the other on the principles of the infinitesimal calculus⁸⁾. Another author, Köpcke, of Hamburg, has advanced the idea that our space-intuition is exact as far as it goes, but so limited as to make it impossible for us to picture to ourselves curves without tangents⁹⁾.

On one point Pasch does not agree with me, and that is as to the exact value of the axioms. He believes — and this is the traditional view — that it is possible finally to discard intuition entirely, basing the whole science on the axioms alone. I am of the opinion that, certainly, for the purposes of research it is always necessary to combine the intuition with the axioms. I do not believe, for instance, that it would have been possible to derive the results discussed in my former lectures, the splendid researches of Lie, the continuity of the shape of algebraic curves and surfaces, or the most general forms of triangles, without the constant use of geometrical intuition.

Pasch's idea of building up the science purely on the basis of the axioms has since been carried still farther by Peano, in his logical calculus.

Finally, it must be said that the degree of exactness of the intuition of space may be different in different individuals, perhaps even in different races. It would seem as if a strong naive space-intuition were an attribute pre-eminently of the Teutonic race, while the critical, purely logical sense is more fully developed in the Latin and Hebrew races. A full investigation of this subject, somewhat on the lines suggested by Francis Galton in his researches on heredity, might be interesting.

What has been said above with regard to geometry ranges this science among the applied sciences. A few general remarks on these sciences and their relation to pure mathematics will here not be out of place. From the point of view of pure mathematical science I should lay particular stress on the *heuristic value* of the applied sciences as an aid to discovering new truths in mathematics. Thus I have shown (in my little book

⁶⁾ Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve. *Math. Annalen*, Bd. 22 (1883), S. 249—259. [Siehe die vorstehend abgedruckte Abh. XLV dieses Bandes.]

⁷⁾ Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig, B. G. Teubner, 1882.

⁸⁾ Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Leipzig, B. G. Teubner, 1882.

⁹⁾ Über Differentiierbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Funktionen. *Math. Annalen*, Bd. 29 (1887), S. 123—140.

on Riemann's theories¹⁰⁾) that the Abelian integrals can best be understood and illustrated by considering electric currents on closed surfaces. In an analogous way, theorems concerning differential equations can be derived from the consideration of sound-vibrations; and so on.

But just at present I desire to speak of more practical matters, corresponding as it were to what I have said before about the inexactness of geometrical intuition. I believe that the more or less close relation of any applied science to mathematics might be characterized by the degree of exactness attained, or attainable, in its numerical results. Indeed, a rough classification of these sciences could be based simply on the number of significant figures averaged in each. Astronomy (and some branches of physics) would here take the first rank; the number of significant figures attained may here be placed as high as seven, and functions higher than the elementary transcendental functions can be used to advantage. Chemistry would probably be found at the other end of the scale, since in this science rarely more than two or three significant figures can be relied upon. Geometrical drawing, with perhaps 3 to 4 figures, would rank between these extremes; and so we might go on.

The ordinary mathematical treatment of any applied science substitutes exact axioms for the approximate results of experience, and deduces from these axioms the rigid mathematical conclusions. In applying this method it must not be forgotten that mathematical developments transcending the limit of exactness of the science are of no practical value. It follows that a large portion of abstract mathematics remains without finding any practical application, the amount of mathematics that can be usefully employed in any science being in proportion to the degree of accuracy attained in the science. Thus, while the astronomer can put to good use a wide range of mathematical theory, the chemist is only just beginning to apply the first derivative, *i. e.* the rate of change at which certain processes are going on; for second derivatives he does not seem to have found any use as yet.

As examples of extensive mathematical theories that do not exist for applied science, I may mention the distinction between the commensurable and incommensurable, the investigations on the convergency of Fourier's series, the theory of non-analytical functions, etc. It seems to me, therefore, that Kirchhoff makes a mistake when he says in his *Spectral-Analyse* that absorption takes place only when there is *exact* coincidence between the wave-lengths. I side with Stokes, who says that absorption takes place *in the vicinity* of such coincidence. Similarly, when the astro-

¹⁰⁾ [Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig, B. G. Teubner, 1882. Vgl. Bd. 3 dieser Gesamtausgabe.]



nomer says that the periods of two planets must be exactly commensurable to admit the possibility of a collision, this holds only abstractly, for their mathematical centres; and it must be remembered that such things as the period, the mass, etc., of a planet cannot be exactly defined, and are changing all the time. Indeed, we have no way of ascertaining whether two astronomical magnitudes are incommensurable or not; we can only inquire whether their ratio can be expressed approximately by two *small* integers. The statement sometimes made that there exist only analytic functions in nature is in my opinion absurd. All we can say is that we restrict ourselves to analytic, and even only to simple analytic, functions because they afford a sufficient degree of approximation. Indeed, we have the theorem (of Weierstraß) that any continuous function can be approximated to, with any required degree of accuracy, by an analytic function. Thus if $\Phi(x)$ be our continuous function, and δ a small quantity representing the given limit of exactness (the width of the strip that we substitute for the curve), it is always possible to determine an *analytic* function $f(x)$ such that

$$\Phi(x) = f(x) + \varepsilon, \text{ where } |\varepsilon| < |\delta|,$$

within the given limits.

All this suggests the question whether it would not be possible to create a, let us say, *abridged* system of mathematics adapted to the needs of the applied sciences, without passing through the whole realm of abstract mathematics. Such a system would have to include, for example, the researches of Gauß on the accuracy of astronomical calculations, or the more recent and highly interesting investigations of Tchebycheff on interpolation. The problem, while perhaps not impossible, seems difficult of solution, mainly on account of the somewhat vague and indefinite character of the questions arising.

I hope that what I have here said concerning the use of mathematics in the applied sciences will not be interpreted as in any way prejudicial to the cultivation of abstract mathematics as a pure science. Apart from the fact that pure mathematics cannot be supplanted by anything else as a means for developing the purely logical powers of the mind, there must be considered here as elsewhere the necessity of the presence of a few individuals in each country developed in a far higher degree than the rest, for the purpose of keeping up and gradually raising the *general* standard. Even a slight raising of the general level can be accomplished only when some few minds have progressed far ahead of the average.

Moreover, the "abridged" system of mathematics referred to above is not yet in existence, and we must for the present deal with the material at hand and try to make the best of it.

Now, just here a practical difficulty presents itself in the teaching of mathematics, let us say of the elements of the differential and integral calculus. The teacher is confronted with the problem of harmonizing two opposite and almost contradictory requirements. On the one hand, he has to consider the limited and as yet undeveloped intellectual grasp of his students and the fact that most of them study mathematics mainly with a view to the practical applications; on the other, his conscientiousness as a teacher and man of science would seem to compel him to detract in nowise from perfect mathematical rigour and therefore to introduce from the beginning all the refinements and niceties of modern abstract mathematics. In recent years the university instruction, at least in Europe, has been tending more and more in the latter direction; and the same tendencies will necessarily manifest themselves in this country in the course of time. The second edition of the *Cours d'analyse* of Camille Jordan may be regarded as an example of this extreme refinement in laying the foundations of the infinitesimal calculus. To place a work of this character in the hands of a beginner must necessarily have the effect that at the beginning a large part of the subject will remain unintelligible, and that, at a later stage, the student will not have gained the power of making use of the principles in the simple cases occurring in the applied sciences.

It is my opinion that in teaching it is not only admissible, but absolutely necessary, to be less abstract at the start, to have constant regard to the applications, and to refer to the refinements only gradually as the student becomes able to understand them. This is, of course, nothing but a universal pedagogical principle to be observed in all mathematical instruction.

Among recent German works I may recommend for the use of beginners, for instance, Kiepert's new and revised edition of Stegemann's text-book¹¹⁾; this work seems to combine simplicity and clearness with sufficient mathematical rigour. On the other hand, it is a matter of course that for more advanced students, especially for professional mathematicians, the study of works like that of Jordan is quite indispensable.

I am led to these remarks by the consciousness of a growing danger in the higher educational system of Germany, — the danger of a separation between abstract mathematical science and its scientific and technical applications. Such separation could only be deplored; for it would necessarily be followed by shallowness on the side of the applied sciences, and by isolation on the part of pure mathematics.

¹¹⁾ Grundriß der Differential- und Integralrechnung. 6. Auflage. Herausgegeben von Kiepert. Hannover, Helwing, 1892.