Göttingische gelehrte Anzeigen. 1837 October 30.

Die in der Sitzung der Königl. Societät am 19. September von dem Hofr. Gauss gehaltene Vorlesung hat zum Gegenstande

ein neues Hülfsmittel für die magnetischen Beobachtungen.

Die magnetische Declination, als eines der Elemente der Aeusserungen des Erdmagnetismus, hat nicht allein am frühesten die Beobachter beschäftigt, sondern sie ist, seitdem auch den andern Elementen die Aufmerksamkeit der Naturforscher zugewandt ist, doch in mehreren Beziehungen vor denselben bevorzugt geblieben; von einer der interessantesten Untersuchungen im Gebiete des Erdmagnetismus, über die wunderbaren unregelmässigen, aber über einen ganzen Welttheil gleichzeitig und gleichmässig wirkenden Störungen jener Kraft, wozu in den letzten Jahren ein eigener Verein von Beobachtern zusammen getreten ist, sind die beiden andern Elemente bisher noch ganz ausgeschlossen gewesen. Den Grund dieses der Declination vor den andern Elementen gegebenen Vorzugs hat man weniger in der vielfachen practischen Wichtigkeit der Kenntniss der Declination für Seefahrer, Geodäten und Markscheider zu suchen, als in dem bisherigen Zustande der Beobachtungsmittel, die, während sie für die Declination Nichts zu wünschen übrig lassen, in Beziehung auf die anderen Elemente noch viel weiter zurück sind. Zwar dient das seit einigen Jahren eingeführte Magnetometer, neben seiner Anwendung auf die Bestimmung der Declination, zugleich zur Aus-

mittlung der horizontalen Intensität, und gerade das Problem, diese auf absolutes Maass zurück zu führen, hat zuerst jenes Instrument veranlasst. Allein es löst das Problem noch nicht in *jeder* Beziehung; es kann seiner Natur nach nur einen Mittelwerth der Intensität während eines gewissen Zeitraumes mit Schärfe angeben, und obgleich dieser Zeitraum gewissermassen von unserer Willkühr abhängt, so darf er doch nicht zu klein genommen werden, weil sonst mit ihm auch die Schärfe und Zuverlässigkeit des Resultats verändert werden würde. Auf die Verfolgung der Veränderungen der Intensität während kurzer Zeitfristen ist daher das Magnetometer gar nicht anzuwenden. Der neue Apparat, welchen die Vorlesung zum Gegenstande hat, ist bestimmt, diese Lücke für die Intensität auszufüllen, und den Beobachtungen dieses Elements dieselbe Leichtigkeit und Sicherheit zu geben, die das Magnetometer für die Declination darbietet.

Der beschränkte Raum dieser Blätter verstattet nicht, hier eine Beschreibung dieses Apparats, den der Hofr. Gauss hat ausführen lassen, zu geben: auch ist dies um so weniger nöthig, da die Vorlesung selbst bald im Druck erscheinen wird. Das Instrument ist seit einigen Monaten in der hiesigen Sternwarte aufgehängt, und bereits in zwei magnetischen Terminen sind die Veränderungen der Intensität an demselben jedesmal 24 Stunden hindurch beobachtet. Verbindet man damit die im magnetischen Observatorium gleichzeitig beobachteten Veränderungen der Declination in Einer Zeichnung, so tritt das wunderbare Spiel der magnetischen Störungen auf eine eigenthümliche neue Art sehr anschaulich hervor, und es lässt sich mit Zuversicht erwarten, dass wenn erst auf ähnliche Weise an mehreren weit von einander entlegenen Orten gleichzeitig beobachtet werden wird, wir über die Sitze der Ursachen dieser räthselhaften Erscheinungen bald umfassendere Aufklärungen gewinnen werden. Während die Intensität sich eben so häufigen und eben so beträchtlichen regellosen Störungen unterworfen zeigt, wie die Declination, tritt doch auch bei jener wie bei dieser das Vorhandensein regelmässig wirkender und mit der Tageszeit zusammen hängender Aenderungen hervor, aber, so viel sich aus täglichen Aufzeichnungen zu bestimmten Stunden während eines Monats erkennen lässt, auf etwas andere Weise. Während nemlich die westliche Declination in unseren Gegenden von Vormittags 7 oder 8 Uhr bis eine oder zwei Stunden nach Mittag zunimmt, und dann wieder zurück geht, ist die Intensität in den ersten Vormittagsstunden abnehmend, erreicht aber ihr Minimum schon eine oder zwei Stunden vor dem Mittage, wo die Declination gerade im raschesten Zunehmen begriffen ist. Es bedarf jedoch kaum der Erinnerung, dass diese Regelmässigkeit an einzelnen Tagen durch die unregelmässigen Störungen oft ganz verdunkelt wird, und genauere Bestimmungen erst die Frucht von lange fortgesetzten Beobachtungen sein können.

Die Einrichtung des Apparats verstattet, denselben ausser seiner Hauptbestimmung noch zu vielen ganz verschiedenen Zwecken anzuwenden. Es ist durch ihn die Auflösung eines Problems gegeben, mit dem man sich früher wiederholt, obwohl ohne Erfolg, beschäftigt hat, nemlich die stündlichen und die unregelmässigen Aenderungen der Declination vergrössert darzustellen. So wie der Apparat gegenwärtig angeordnet ist, beträgt die Vergrösserung das Zehnfache, oder eine Veränderung der Declination, die sich am Magnetometer des magnetischen Observatoriums in 50 Scalentheilen zeigt, erscheint hier mit 500 Scalentheilen. Im letzten magnetischen Termine (30. Sept.) hat man dies durch 8 Stunden gleichzeitiger Beobachtungen an beiden Apparaten auf das befriedigendste bewährt gefunden.

Wie das Magnetometer in Verbindung mit einem Multiplicator bekanntlich ein sehr empfindliches Galvanometer abgibt, eben so der neue Apparat: aber die Empfindlichkeit des letztern in dieser Beziehung übertrifft die des Magnetometers gerade in demselben Verhältniss, wie wir in Beziehung auf Declinationsveränderungen angegeben haben. Der neue Apparat dient also zur scharfen Messung selbst der schwächsten galvanischen Ströme, und es pflegt Bewunderung zu erregen, wie diese den in jenem befindlichen 25 pfündigen Magnetstab in so bedeutende Bewegungen versetzen. In Beziehung auf thermogalvanisch erregte Ströme widerlegt sich dadurch auf das evidenteste die irrige Meinung vieler Physiker, als ob jene eine Kette von bedeutender Länge nicht durchdringen könnten. Durch eine noch so lange Kette werden solche Ströme nicht aufgehoben, sondern nur und zwar genau, in demselben Verhältnisse geschwächt, wie bei andern Erregungsarten. Unter Anwendung eines thermogalvanischen Apparats von eigenthümlicher Construction bringt die blosse Berührung der Verbindungsstellen mit dem Finger einen galvanischen Strom hervor, der, selbst wenn er eine fast zwei Meilen lange Kette meistens sehr dünnen Drahts zu durchlaufen hat, doch noch in sehr bedeutenden Ablenkungen des Magnetstabes sich zu erkennen gibt.

Die electromagnetischen Wirkungen der gewöhnlichen Reibungselectricität, wenn man sie durch den Multiplicator gehen lässt, gehören zu den schwächsten, schwer zu erkennenden und noch schwerer zu messenden. Bekanntlich ist das Dasein solcher Wirkungen zuerst von Colladon entdeckt und später von Faraday bestätigt. Anstatt wie diese Physiker gethan haben, eine starke electrische Batterie durch den Leitungsdraht zu entladen, beobachtete der Hofrath Gauss die Wirkung der Reibungselectricität bei fortgesetzter Drehung einer im physicalischen Cabinette aufgestellten Electrisirmaschine, deren Conductor und Reibzeug mit den Enden der grossen, nach der Sternwarte gehenden, Kette verbunden waren. In dieser Kette befand sich der Multiplicator, welcher den Magnetstab des neuen Apparats umgibt, und dieser Stab wurde dadurch in einer Ablenkung von 144 Scalentheilen oder 51 Minuten erhalten, positiver oder negativer, je nach der Richtung, in welcher die Electricität den Multiplicator durchlief. Die Drahtlänge der Kette betrug hierbei etwa 13000 Fuss; aber als besonders merkwürdig muss noch der Umstand hervorgehoben werden, dass eine Verlängerung der Kette bis fast zu einer ganzen Meile, durch Hineinbringen anderen Drahts, gar keine Verminderung der electromagnetischen Wirkung hervorbrachte. In dieser Beziehung verhält sich also die strömende Maschinenelectricität anders, als die galvanischen Ströme, die hydrogalvanisch, thermogalvanisch, oder durch Induction erregt werden, und deren durch die magnetische Wirkung gemessene Intensität immer desto schwächer wird, je länger die schliessende Kette ist. Allein weit entfernt, einen wesentlichen inneren Unterschied zwischen jenen und diesen Strömen zu beweisen, dient jene Erscheinung vielmehr zu einer Bestätigung der Gleichheit, und derjenigen Theorie, welcher zufolge ungleiche Intensität zweier Ströme nichts weiter ist, als ungleiche Menge in gegebener Zeit jeden Querschnitt der Leitung durchströmender Electricität. Nur setzen gegebene electromotorische Kräfte der zuletzt genannten Arten desto weniger Electricität in Bewegung, je grösser der Widerstand ist, den die längere Kette entgegensetzt. Aber bei dem oben angeführten Versuche musste *alle* von der Maschine auf den Conductor in Funkenform überspringende Electricität die ganze Kette durchlaufen, um sich mit der entgegengesetzten des Reibzeugs auszugleichen, die Kette mochte kurz oder lang sein (in so fern sie nur hinlänglich isolirt war). Die Menge der in bestimmter Zeit jeden Querschnitt des Leitungsdrahts durchströmenden Electricität hing also gar nicht von der Länge der Kette, sondern nur von dem Spiele der Maschine ab.

Bei den meisten der hier erwähnten Versuche hatte der galvanische oder electrische Strom die grosse zwischen der Sternwarte und dem physicalischen Cabinette im J. 1833 gezogene Kette zu durchlaufen, an welcher allein der in der Luft befindliche Draht eine Länge von fast 7000 Fuss hat. Der Hauptzweck dieser Anlage ist zwar, physikalische Untersuchungen über die Gesetze der galvanischen Ströme im grossen Maassstabe anzustellen; aber gleich von Anfang an war die Gelegenheit auch vielfältig zu Versuchen einer electromagnetischen Telegraphie benutzt, die auch mit ganzen Wörtern und kleinen Phrasen auf das befriedigendste gelangen, wie schon in diesen Blättern, bei Gelegenheit der ersten Nachricht von der Einrichtung des hiesigen magnetischen Observatoriums erwähnt ist (Gött. gel. Anz. 1834, Aug. 9). An die Stelle des dabei zuerst angewandten Verfahrens wurde 1835 ein anderes gesetzt, auf welches der Hofr. Gauss durch die Erwägung der Inductionsgesetze geführt war, und welches dem zuerst gebrauchten bei weitem vorzuziehen ist. Gerade bei dieser Art des Telegraphirens hat nun auch der neue in Rede stehende Apparat einen bedeutenden Vorzug vor dem gewöhnlichen Magnetometer, und von diesem Umstande nahm der Hofr. Gauss Veranlassung, dieses Verfahren, welches bisher noch nicht öffentlich erwähnt war, in der Vorlesung nach seinen Hauptzügen zu beschreiben, und was dasselbe leistet, anzugeben, was wir jedoch hier, des beschränkten Raumes wegen, mit Stillschweigen übergehen müssen. Aus demselben Grunde erwähnen wir hier auch nur kurz einer andern neuen Vorrichtung, die zum Zwecke hat, jede unzeitige, bei einem bestimmten Geschäft störende, Schwingungsbewegung einer Magnetnadel in kurzer Zeit von selbst zur Ruhe zu bringen, und die deshalb ein Dämpfer genannt ist. Diese Vorrichtung kann eben so gut bei dem neuen Apparate wie bei dem Magnetometer gebraucht werden, und ist so wohl bei der erwähnten Art des Telegraphirens, wie bei vielen anderen magnetischen Messungsgeschäften von wesentlichem Nutzen.

ÜBER EIN NEUES, ZUNÄCHST ZUR UNMITTELBAREN BEOBACHTUNG DER VERÄNDERUNGEN IN DER INTENSITÄT DES HORIZONTALEN THEILS DES ERDMAGNETISMUS BESTIMMTES INSTRUMENT*).

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1837. I.

Zur vollständigen Bestimmung des Erdmagnetismus an einem gegebenen Orte ist bekanntlich ein System von *drei* Elementen erforderlich, und gewöhnlich wählt man dazu die Abweichung, die Neigung und die Stärke; indessen obgleich diese Wahl die für den Begriff einfachste ist, so ist es doch nicht nur verstattet, sondern es kann auch in manchen Beziehungen empfehlenswerther sein, eine andere Combination zum Grunde zu legen. Namentlich ist es sowohl in praktischer als in theoretischer Hinsicht weit vortheilhafter, den horizontalen Theil der erdmagnetischen Kraft für sich zu betrachten, und in zwei Elementen darzustellen, der Richtung (Declination) und der Stärke. Verbindet man dann damit als drittes Element entweder die Stärke der verticalen Kraft, oder die Neigung der Ganzen, so ergibt sich daraus die Stärke der ganzen Kraft, wenn man sie verlangt, von selbst.

Was nun die beiden Elemente des horizontalen Erdmagnetismus, von welchem allein hier die Rede sein wird, betrifft, so sind für die Declination durch das seit fünf Jahren eingeführte Magnetometer alle vorkommenden Aufgaben voll-

*) Dieser Aufsatz enthält den wesentlichen Inhalt der in der öffentlichen Sitzung der Königlichen Societät der Wissenschaften am 19. September 1837 von mir gehaltenen Vorlesung.

kommen gelöst. Nicht allein zur Bestimmung ihres absoluten Werthes, sondern auch zur Verfolgung ihrer regelmässigen und zufälligen Aenderungen, von Jahr zu Jahr, von Monat zu Monat, von Stunde zu Stunde, ja selbst von einer Minute zur andern, dient dasselbe mit einer Sicherheit, Bequemlichkeit und Schärfe, die nichts zu wünschen übrig lassen.

Dasselbe Instrument dient nun zwar zugleich zur Bestimmung der Stärke des horizontalen Erdmagnetismus in absolutem Maass; ja, gerade diese Aufgabe hat, wie bekannt ist, zur Einrichtung des Magnetometers den ersten Anlass gegeben: gleichwohl löst dasselbe die Aufgabe noch keinesweges vollständig in *allen* Beziehungen.

Um das, was dabei noch zu wünschen bleibt, gehörig ins Licht zu setzen, muss ich zuvörderst in Erinnerung bringen, dass die Anwendung des Magnetometers zur Bestimmung der magnetischen Intensität auf einer Verbindung *mehrerer* Operationen beruht, deren Eine in der Beobachtung der Schwingungsdauer einer Nadel besteht. Diese erfordert aber ihrer Natur nach eine nicht unbeträchtliche Zeit, da die Anzahl der Schwingungen, aus denen man auf die Dauer Einer zurückschliessen muss, nicht zu klein sein darf. Ist nun während der Dauer einer solchen Operation die Intensität des Magnetismus constant, so entspricht allerdings die gefundene Schwingungsdauer *diesem* Werthe der Intensität; hingegen wird jene nur *dem Mittelwerthe* der Intensität während jenes Zeitraumes entsprechen, wenn dieselbe inzwischen veränderlich gewesen ist. Es bleibt uns aber auf diese Weise gänzlich verborgen, ob und was für Veränderungen in der magnetischen Intensität *während* dieser Zeit vorgegangen sind. Man sieht also, dass dieses Instrument nur Durchschnittswerthe während gewisser Zeiträume geben kann, nicht aber den treuen vollständigen Hergang innerhalb derselben; wollte man, um sich diesem mehr zu nähern, die Zeiträume kürzer wählen, oder die Resultate immer nur auf eine kleine Anzahl von Schwingungen gründen, so würden jene dadurch zu sehr an Schärfe und Sicherheit verlieren, und man würde Gefahr laufen, für Anomalien in der Intensität zu halten, was nur Fehler der Beobachtungen wäre.

Je interessanter nun aber gerade die in kurzen Zeitfristen wechselnden Störungen der erdmagnetischen Kraft schon in ihrer einseitigen Erscheinung bei der Declination durch die Erfahrungen der letzten Jahre hervorgetreten sind, desto lebhafter musste man wünschen, ein Mittel zu besitzen, wodurch auch die nicht

zu bezweifelnden Wirkungen solcher Störungen auf die Intensität mit derselben Leichtigkeit, Sicherheit und Schärfe verfolgt und gemessen werden könnten.

Die Untauglichkeit der bisherigen Beobachtungsmittel zu *diesem* Zwecke beruht nach dem, was ich eben entwickelt habe, darauf, dass sie auf Beobachtungen von Schwingungszeiten basirt sind, die ihrer Natur nach jedesmal eine zu lange Zeit erfordern. Die Schwingungsdauer einer Nadel dient hier aber selbst nur dazu, mittelbarerweise das Drehungsmoment zu bestimmen, welches die erdmagnetische Kraft der Nadel ertheilt, wenn sie sich nicht im magnetischen Meridian befindet. Kann man also dieses Drehungsmoment auf directem Wege, ohne Schwingungsbeobachtungen, scharf bestimmen, und seine Veränderungen sicher, scharf und schnell messen, so wird unsere Aufgabe in der Hauptsache gelöst sein. Das von mir dazu angewandte Mittel beruht auf folgender Grundlage.

Die Bedingungen des Gleichgewichts eines an zwei Fäden aufgehängten Körpers von beliebiger Gestalt, dessen Theile einstweilen bloss der Schwerkraft unterworfen und in festem Zusammenhange vorausgesetzt werden, lassen sich kurz so zusammenfassen, dass die Vertikale durch den Schwerpunkt des Körpers und die durch die Fäden dargestellten geraden Linien sich in Einer Ebene befinden, und zugleich entweder unter sich parallel sein, oder sich in Einem Punkt schneiden müssen. Allemal sind also bei der Gleichgewichtsstellung die beiden Fäden und der Schwerpunkt in Einer Vertikalebene. Um die Vorstellungen zu fixiren, mag man annehmen, dass die beiden Fäden gleich lang, ihre obern Anknüpfungspunkte in gleicher Höhe sind und von einander eben so weit abstehen, wie die beiden untern, endlich dass die letztern mit dem Schwerpunkte ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Unter diesen Voraussetzungen werden also im Gleichgewichtszustande die beiden Fäden vertikal hängen, und eine dritte Vertikallinie, mitten zwischen diesen Fäden gedacht, wird den Schwerpunkt des Körpers treffen. Bringt man den Körper aus dieser Lage vermittelst einer Drehung um letztere Linie, so werden die beiden Fäden nicht mehr vertikal und auch nicht mehr in Einer Ebene sein, und zugleich wird der Körper etwas gehoben. Es entsteht demnach ein Bestreben, zu der vorigen Lage zurückzukehren, mit einem Drehungsmomente, welches mit hinlänglicher Genauigkeit dem Sinus der Ablenkung von der Ruhestellung proportional gesetzt werden kann, also am grössten ist, wenn die Ablenkung 90 Grad beträgt: dieses grösste Drehungsmoment wird immer stillschweigends verstanden, wenn man von Drehungsmoment schlechthin spricht. Man kann dasselbe auch als das Maass einer Kraft ansehen, mit welcher der Körper vermöge der Aufhängungsart in seiner Gleichgewichtsstellung zurückgehalten wird, und die ich der Kürze wegen die aus der Aufhängungsart entspringende Directionskraft nennen will. Ihre Grösse hängt übrigens ab 1) von der Länge der Aufhängungsfäden, 2) deren Abstande, 3) dem Gewicht des Körpers, und zwar so, dass sie der Länge der Fäden verkehrt, dem Quadrate ihres Abstandes direct, und dem Gewicht des Körpers gleichfalls direct proportional ist. Wenn die obigen Voraussetzungen nicht genau zutreffen, so ist der Ausdruck für die Directionskraft complicirter, so wie auch die Reaction der Fäden gegen eine Torsion noch eine kleine Modification nöthig macht. Es fehlt jedoch nicht an Mitteln, die Grösse der Directionskraft in grösster Schärfe durch Versuche zu bestimmen. Ueberlässt man den Körper, nach einer kleineren oder grösseren Ablenkung von der Gleichgewichtsstellung, sich selbst, so wird er mit der grössten Regelmässigkeit Schwingungen machen, deren Mitte mit dieser Stellung zusammenfällt, und deren Dauer von der Grösse der Directionskraft und dem Trägheitsmoment des Körpers abhängt.

Gehen wir jetzt zu der Voraussetzung über, dass ein horizontaler Magnetstab einen Bestandtheil des aufgehängten Körpers ausmache, so tritt eine zweite Directionskraft mit ins Spiel, und die Erscheinungen hängen von der Zusammensetzung der beiden Directionskräfte, nach den bekannten Regeln der Statik ab. Es sind in dieser Beziehung drei Fälle zu unterscheiden, indem die beiden Stellungen des Körpers, in welchen er vermöge jeder der beiden Kräfte für sich allein im Gleichgewichtszustande sein würde, entweder zusammenfallen, oder entgegengesetzt sein, oder einen Winkel mit einander machen können. Man sieht leicht, dass der Unterschied dieser drei Fälle auf dem Verhältniss der beiden Winkel beruht, welche einerseits die gerade Linie durch die beiden untern Anknüpfungspunkte der Fäden mit dem Magnetstabe, und andererseits die gerade Linie durch die beiden obern Befestigungspunkte mit dem magnetischen Meridian macht. Denkt man sich den Körper in derjenigen Gleichgewichtslage, die durch die Aufhängungsart allein bedingt wird, so wird für den ersten unsrer drei Fälle der Magnetstab im magnetischen Meridian sein müssen, und zwar in seiner natürlichen Lage (Nordpol auf der Nordseite); für den zweiten Fall muss er in verkehrter Lage im Meridian sein, und für den dritten muss er mit dem magnetischen Meridian einen Winkel machen. Der Kürze wegen will ich diese drei möglichen Lagen des Magnetstabs in dem Apparate die natürliche, die verkehrte und die transversale nennen.

Bei der natürlichen Lage wird durch die Einwirkung des Erdmagnetismus auf den Magnetstab die der Aufhängungsart entsprechende Gleichgewichtsstellung des Apparats nicht abgeändert, aber dieser mit einer verstärkten Kraft darin zurückgehalten, welche die Summe der beiden Directionskräfte ist.

Im zweiten Falle, der verkehrten Lage, hört zwar das Gleichgewicht in jener Stellung auch nicht auf, allein es ist nur dann stabil, wenn die magnetische Directionskraft kleiner ist als die Directionskraft vermöge der Aufhängungsweise, und der Apparat wird dann in dieser Stellung nur mit einer Kraft zurückgehalten, die die Differenz jener beiden Directionskräfte ist. Wäre hingegen umgekehrt die magnetische Directionskraft die grössere, so würde jenes Gleichgewicht nur ein instabiles sein, und der Apparat, einmal davon abgelenkt, würde nicht dahin zurückkehren, sondern sich immer weiter davon entfernen, und nur in der entgegengesetzten Stellung zur Ruhe kommen, wo der Stab seine natürliche Lage im Raume hat, aber die Aufhängungsfäden einander kreuzen.

Im dritten Falle endlich, wo die beiden Directionskräfte einen Winkel mit einander machen, wird der Conflict dieser beiden Kräfte durch eine Zwischenstellung vermittelt, wobei weder der Stab im Meridian, noch eine gerade Linie durch die untern Anknüpfungspunkte der Fäden der durch die obern parallel ist, und diese Zwischenlage sowohl, als die Kraft, mit welcher der Apparat in derselben zurückgehalten wird, richten sich nach dem statischen Gesetze der Zusammensetzung zweier Kräfte. Man übersieht nun aber zugleich, dass wenn der Apparat Mittel darbietet, die Winkel zwischen den drei in Rede stehenden Stellungen zu messen, das Verhältniss der beiden componirenden Directionskräfte sich berechnen lässt, und dass man folglich auch die magnetische Directionskraft in absolutem Maasse angeben kann, wenn die Directionskraft vermöge der Aufhängungsweise in absolutem Maasse bekannt ist. Unsere Aufgabe ist dann also gelöst. Am vortheilhaftesten ist es übrigens, das Einliegen des Magnetstabes relativ gegen die andern Theile des Apparats so einzurichten, dass jener in der vermittelten Gleichgewichtsstellung nahe einen rechten Winkel mit dem magnetischen Meridian macht, welchem Fall also die Benennung der transversalen Lage vorzugsweise angemessen ist. Theils ist nemlich dann die Ablenkung der Fäden von ihrer Lage in Einer Ebene am grössten, und damit die Berechnung des Resultats am schärfsten, theils hat dann auch die kleine Veränderung der magnetischen Declination vermöge der stündlichen oder zufälligen Variationen auf die Stellung keinen merklichen Einfluss. Dagegen aber afficirt eine jede Veränderung in der Stärke des Erdmagnetismus die Stellung unmittelbar, und lässt sich mit derselben Leichtigkeit, Schnelligkeit und Schärfe sogleich erkennen und messen, wie das Spiel der Veränderungen der Declination am gewöhnlichen Magnetometer.

Die praktische Anwendbarkeit dieser Idee hatte ich schon vor mehreren Jahren durch vorläufige Versuche an einer freilich nur ganz rohen Vorrichtung bestätigt gefunden, wovon auch eine Andeutung in meinem Aufsatze über Erdmagnetismus und Magnetometer [S. 327 d. B.] gegeben ist. Seit kurzem habe ich aber einen vollkommneren Apparat ausführen lassen, und in der Sternwarte an dem Platze, wo sich bisher das Magnetometer mit fünfundzwanzigpfündigem Stabe befand, aufgehängt. Nach den bereits gegebenen Entwickelungen wird sich dieser Apparat kurz beschreiben lassen.

Er ist aufgehängt an zwei 17 Fuss langen Stahldrähten, oder genau zu reden, an einem einzigen, dessen Enden unten an den Apparat geknüpft sind, während seine Mitte oben über zwei Cylinder geht, die ihn in schicklicher Entfernung (etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll) auseinander halten: diese Einrichtung hat zugleich den Vortheil, dass die beiden Stränge von selbst gleiche Spannung haben. Die Aufhängung befindet sich oberhalb der Decke des Saals, und die Drähte hängen frei durch eine kreisrunde $3\frac{1}{2}$ Zoll weite Oeffnung in der Decke. Die Entfernung der Drähte von einander kann sowohl oben als unten nach Bedürfniss weiter oder enger gestellt werden. Der an den Drähten hängende Apparat selbst besteht aus vier Haupttheilen. Der erste, an welchem die Drähte fest sind, ist eine horizontale in Viertelsgrade auf Silber eingetheilte Kreisscheibe, von vier Zoll Durchmesser. Der zweite Theil besteht aus einer auf dem Limbus des Kreises, concentrisch mit diesem drehbaren Alhidade mit zwei Verniers, die einzelne Minuten geben; einer damit fest verbundenen ziemlich starken gegen die Kreisebene senkrechten Stange, und einem daran befindlichen sehr vollkommnen kreisrunden Spiegel von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser, in welchem man durch ein 16 Fuss entferntes Fernrohr das Bild eines Stücks einer in einzelne Millimeter eingetheilten unterhalb des Fernrohrs befestigten horizontalen Scale sieht. Auf diese Weise ist also jede Veränderung in der Lage des Kreises zu erkennen und zu messen; kleine Veränderungen unmittelbar mit äusserster Schärfe durch die im Fernrohr sich zeigenden Scalentheile, grössere, indem man damit eine Alhidadenbewegung verbindet und die Verniers abliest. Der dritte Theil ist das unter dem Kreise befindliche Schiffchen, ein doppelter Rahmen, durch welchen der vierte Bestandtheil, ein fünfundzwanzigpfündiger starker Magnetstab gesteckt wird. Dieses Schiffchen ist gleichfalls um das Centrum des Kreises drehbar, und mit zwei auf dem Kreislimbus aufliegenden Verniers versehen, wodurch man die Grösse der Drehung auf die Minute messen kann.

Stellt man nun zuvörderst das Schiffchen so, dass der Apparat einerlei Gleichgewichtslage behauptet, es möge der Magnetstab im Schiffchen liegen, oder ein nicht magnetischer Körper von gleichem Gewicht, so ist dies die erste oder die zweite der vorhin unterschiedenen Hauptlagen, jenachdem der Magnetstab sich dabei in seiner natürlichen, oder in der verkehrten Lage befindet. Die erstere bietet keine besonders wichtige praktische Anwendung dar, und die Brauchbarkeit der zweiten ist an die Bedingung geknüpft, dass die magnetische Directionskraft etwas kleiner sein soll, als die Directionskraft vermöge der Aufhängungsart. Bei dem hiesigen Apparat ist jetzt das Verhältniss dieser Directionskräfte nahe wie 10 zu 11; die resultirende Directionskraft ist also nur der zehnte Theil der magnetischen Directionskraft. Wir haben also hier ein Analogon einer astatischen Magnetnadel, und jede fremde Kraft, die die Richtung einer einfachen Nadel stört, äussert hier eine zehnmal grössere Wirkung, als bei einer Aufhängung an Einem Faden Statt haben würde, und zwar, wie man leicht einsieht, in entgegengesetztem Sinn. Es ist hiedurch also unter anderen die Auflösung einer Aufgabe gegeben, mit welcher man sich früher ohne Erfolg wiederholt beschäftigt hat, nemlich die täglichen und stündlichen Variationen der magnetischen Declination vergrössert darzustellen. Öftere gleichzeitige Beobachtungen dieser Art, an diesem Apparat und am Magnetometer des magnetischen Observatorium haben zwar immer die befriedigendsten Resultate gegeben: inzwischen verliert doch diese Anwendung jetzt von ihrer Wichtigkeit, weil die gewöhnlichen Magnetometer schon die kleinsten Veränderungen mit aller zu wünschenden Schärfe geben, mithin das Bedürfniss einer Vergrösserung jetzt nicht mehr Statt findet.

Diese und andere Anwendungen beim verkehrten Einliegen des Stabes, auf welche ich nachher noch zurückkommen werde, sind jedoch nur als untergeordnete zu betrachten: bei weitem wichtiger ist der Gebrauch des Apparats bei der dritten oder *transversalen* Lage für die Intensität. Wenn man, von der natürlichen Lage ausgehend, durch eine Drehung des Schiffchens den Magnetstab aus dem magnetischen Meridian bringt, so muss sich der ganze Apparat, um zum Gleichgewicht zu kommen, um einen gewissen dem Verhältniss der beiden Directionskräfte entsprechenden Winkel zurückdrehen; die Differenz dieser beiden Winkel wird die Abweichung des Magnetstabes vom magnetischen Meridian in der Gleichgewichtsstellung sein, und man kann es leicht so einrichten, dass diese Abweichung nahe 90 Grad beträgt, wodurch die vorhin bereits angeführten Vortheile erreicht werden. Ganz vorzüglich eignet sich dann aber der Apparat zur Beobachtung der *Änderungen* der Intensität, die sich unmittelbar durch den veränderten Stand kund geben. Dass dabei in Beziehung auf solche Änderungen, die erst nach längerer Zeit erfolgen, mehrere Umstände nicht unberücksichtigt bleiben dürfen, liegt unvermeidlich in der Natur der Sache selbst: namentlich erfordern jene, dass von Zeit zu Zeit durch (bekannte) geeignete Mittel untersucht werde, ob und in welchem Maasse die Stärke des Magnetismus im Stabe sich verändert habe; auch die Temperaturveränderungen kommen in Betracht, einmal insofern sie diese Stärke, und dann auch, insofern sie die Distanz und Länge der Aufhängungsdrähte, und damit die der Aufhängungsart zukommende Directionskraft afficiren. Aber in Beziehung auf die unregelmässigen in kurzen Zeitfristen wechselnden Veränderungen der Intensität leistet nun der Apparat ganz dasselbe, wie das Magnetometer in Beziehung auf ähnliche Änderungen der Declination; auch ist die Beobachtungsart an beiden Apparaten ganz gleich. Die Veränderungen der Intensität erhält man zunächst in Scalentheilen ausgedrückt, die man jedoch leicht auf Bruchtheile der Intensität selbst zurückführen kann. Unter den gegenwärtigen Verhältnissen des Apparats entspricht einem Scalentheile der 22000^{ste} Theil der ganzen Intensität.

Die freilich nur erst eine kurze Zeit umfassenden und nicht sehr zahlreichen bisherigen Erfahrungen an dem Apparat lassen doch schon einige nicht unwichtige Resultate erkennen.

Erstlich deuten die bisherigen Beobachtungen auf regelmässige von der Tageszeit abhängige Änderungen hin, die sich freilich mit unregelmässigen eben so häufig vermengen mögen, wie bei der Declination, und deren sichere Scheidung

Jahrelang fortgesetzte Beobachtungen erfordern wird. Wenn ich, nach so wenigen Erfahrungen, wie bisher vorliegen, mehr eine Vermuthung als ein Resultat aussprechen darf, so scheint der regelmässige Gang darin zu bestehen, dass die Intensität in den Vormittagsstunden abnimmt, so jedoch, dass sie schon eine oder zwei Stunden vor dem Mittage ihr Minimum erreicht, und von da an wieder zunimmt. Um doch vorläufig für das quantitative Verhältniss einen Anhaltspunkt zu bekommen, habe ich im August 1837 an 30 Tagen die Stellung Morgens um 10 Uhr und Nachmittags um 3 Uhr aufgezeichnet: das Resultat war, dass an 26 Tagen die Intensität Nachmittags grösser war, und nur an 4 Tagen kleiner, als Vormittags; der mittlere Unterschied betrug 39 Scalentheile, oder etwas mehr als den 600^{sten} Theil der ganzen Intensität. An den meisten jener Tage wurde der Stand des Apparats auch Vormittags um 9 Uhr aufgezeichnet; unter 28 Tagen waren 23, wo die Intensität um diese Stunde noch grösser war, als eine Stunde später, und nur an 5 Tagen fand das Umgekehrte Statt: der mittlere Unterschied betrug hier aber nur $11\frac{1}{2}$ Scalentheile, oder etwas mehr als den 2000^{sten} Theil der ganzen Intensität.

Zweitens bestätigen mehrere sehr durchgreifende Beobachtungsreihen, dass unregelmässige, zuweilen sehr beträchtliche und in kurzen Zeitintervallen wechselnde Störungen bei der Intensität nicht weniger häufig vorgehen, wie bei der Declination, woran freilich auch an sich nach der Analogie nicht gezweifelt werden konnte. Dreimal schon sind eine beträchtliche Zeit hindurch an diesem Intensitätsapparat und gleichzeitig am Magnetometer des magnetischen Observatorium ununterbrochen fortgesetzte Aufzeichnungen gemacht; am 15. Julius von Morgens 6 Uhr bis Nachmittags 6 Uhr; dann in dem ordentlichen magnetischen Termin vom 29.—30. Julius, endlich in dem ausserordentlichen Termin vom 31. August bis zum 1. September, beidemal 24 Stunden; die Aufzeichnungen geschahen immer von 5 zu 5 Minuten. Graphische Darstellungen der beiden Termine, wo die Curven für die Änderungen sowohl der Intensität als der Declination gezeichnet sind, setzen dies in ein helles Licht. Die beiderseitigen Bewegungen haben zwar, wie sich von selbst versteht, nicht die geringste Ähnlichkeit mit einander; aber sehr bemerklich ist doch, dass wo die Declination stark gestört wurde, meistens auch in der Intensität starke Störungen eintraten *).

*) Auf ähnliche Art und mit gleichem Erfolge ist später auch in dem Termine vom 13.—14. November an beiden Apparaten beobachtet.

Durch die Darstellung der Änderungen der Declination und der Intensität in zwei besondern Curven erhält man übrigens von dem Hergange der Störungen ein lange nicht so anschauliches Bild, wie durch ihre Vereinigung in eine einzige. Auf was es dabei ankommt, übersieht man am klarsten auf folgende Art. Eine vollständige Vorstellung der erdmagnetischen Kraft (nemlich des horizontalen Theils, wie immer stillschweigend verstanden wird) in jedem Augenblick kann man durch Eine gerade Linie geben, deren Länge der Intensität proportional ist, und die mit einer festen geraden Linie einen der Declination gleichen Winkel macht. Zur Darstellung der Kraft in mehrern auf einander folgenden Zeitpunkten lässt man den Anfangspunkt der verschiedenen geraden Linien unverändert, so dass die Endpunkte allein in Betracht kommen, die dann mit den entsprechenden Zeiten bezeichnet, und durch eine Linie vereinigt werden können. Die geraden Radien selbst werden gar nicht mitgezeichnet, und selbst der gemeinschaftliche Anfangspunkt wird bei einem nur einigermaassen schicklichen Maassstab für die Darstellung immer weit ausserhalb der Zeichnung liegen. Diese Behandlung führt uns zugleich auf einen neuen Gesichtspunkt, aus welchem wir solche Veränderungen der beiden magnetischen Elemente betrachten können. Sie sind in der That nur die beiden horizontalen Componenten derjenigen vergleichungsweise immer sehr kleinen störenden Kraft, welcher in jedem Augenblick die mittlere erdmagnetische Kraft unterworfen ist, indem nemlich jene in zwei Richtungen, die eine *im* magnetischen Meridian, die andere senkrecht gegen denselben zerlegt wird. Die zweite Componente wird unmittelbar durch das Magnetometer, die erste durch den neuen Apparat gegeben, wobei nur beide vor der Zeichnung auf ein gemeinschaftliches Maass zurückgeführt werden müssen.

Nur ein Umstand bei der Anwendung dieser an sich so anschaulichen Darstellungsart muss hier noch berührt werden, nemlich dass es nicht gut angeht, den Verlauf für einen ganzen Tag in Einer Zeichnung ohne Verwirrung darzustellen, wenn häufige schnell wechselnde Störungen vorkommen, da in diesem Fall die Curve eine grosse Menge von Verschlingungen darbietet: es wird dann nothwendig, kürzere Zeitabschnitte jeden für sich besonders zu zeichnen.

Halten wir die Leistungen des neuen Apparats und des Magnetometers zusammen, so ergibt sich, dass beide in Beziehung auf *einige* Zwecke einander wechselseitig ergänzen müssen, in Beziehung auf andere hingegen gleiche Anwendbarkeit haben. Zur Bestimmung der absoluten Declination kann nur das Magnetometer dienen, nicht aber der neue Apparat: die Veränderungen der Declination, und besonders die schnell wechselnden lassen sich mit beiden verfolgen. Zur Bestimmung der absoluten Intensität können beide Apparate dienen, obwohl die Anwendung des Magnetometers etwas weniger complicirt ist, als der alleinige Gebrauch des neuen Apparats sein würde; aber jenes für sich allein kann die Intensität nur in ihrem Mittelwerthe während eines gewissen Zeitraumes geben, und die schnell wechselnden Änderungen in demselben entgehen diesem Instrumente gänzlich, während der neue Apparat diese auf das befriedigendste nachweist. Für alle sonstigen Anwendungen, z. B. um Magnetstäbe rücksichtlich ihrer magnetischen Stärke unter einander zu vergleichen; ferner, in Verbindung mit einem Multiplicator, für galvanometrische und telegraphische Zwecke, sind beide gleich brauchbar; ja in den beiden letztern Beziehungen hat der neue Apparat noch einen bedeutenden Vorzug, da man, wie schon bemerkt ist, in seiner Gewalt hat, ihn so nahe man will astatisch zu machen.

Ein paar Proben von der Empfindlichkeit des Apparats als Galvanometer dürfen hier wohl angeführt werden. Der den Magnetstab umgebende Multiplicator enthält 610 Umwindungen mit Seide übersponnenen Kupferdrahts, und ein galvanischer Strom hat in diesem allein schon eine Drahtlänge von mehr als 6000 Fuss zu durchlaufen. Diese Drahtlänge vergrössert sich auf 13000 Fuss, wenn der Strom zugleich nach dem physikalischen Cabinet geht. Gewöhnlich aber werden noch andere Apparate mit in die Kette gebracht, so dass bei manchen Versuchen die ganze Drahtlänge 40000 Fuss oder fast zwei Meilen beträgt. Dabei muss aber noch bemerkt werden, dass bei weitem der grösste Theil dieses Drahts sehr dünner ist, und dass diese Länge, insofern die Stärke des Stroms dadurch bedingt wird, einem etwa 8 Meilen langen Draht von derjenigen Stärke äquivalirt, welche der Verbindungsdraht zwischen der Sternwarte und dem physikalischen Cabinet hat. Trotz der so langen Kette geben nun selbst die schwächsten galvanischen Kräfte dem schweren Magnetstabe eine nicht bloss merkliche, sondern zu scharfen Messungen hinreichende Ablenkung. Dies gilt z. B. vom Thermogalvanismus, in Beziehung auf welchen manche Physiker die irrige Vorstellung haben, als ob er eine sehr lange Kette nicht durchdringen könne. Bei den hiesigen Vorrichtungen, und unter Anwendung eines thermogalvanischen Apparats von eigenthümlicher Construction, reicht die Berührung der Verbindungsstelle mit dem Finger hin, jene Wirkung hervorzubringen.

Zu einer andern interessanten Bemerkung gibt die Anwendung auf die gewöhnliche Reibungselektricität Veranlassung. Dass diese, durch einen Multiplicator geleitet, die Magnetnadel auf ganz ähnliche Art ablenkt, wie ein hydrogalvanisch erregter Strom, hat bekanntlich Colladon entdeckt, dessen Anfangs bezweifelte Versuche späterhin durch Faraday bestätigt sind. Der letztere Physiker hat zuerst ins Licht gesetzt, dass in einer sehr starken elektrischen Batterie nicht mehr Elektricität entwickelt ist, als schon sehr geringe hydrogalvanische Erregungsmittel in wenigen Secunden durch einen Leitungsdraht von mässiger Länge treiben. Mit den hiesigen Apparaten war zwar gleichfalls schon vor mehreren Jahren sowohl die Realität, als die geringe Grösse der elektromagnetischen Wirkung der Maschinenelektricität durch Versuche bestätigt gefunden: es schien jedoch der Mühe werth, diese Versuche mit Hülfe des neuen so viel empfindlichern Apparats zu wiederholen. Anstatt eine Leidner Flasche oder eine Batterie von Flaschen durch die Drahtkette zu entladen (wie Colladon und Faraday gethan hatten), wurde nur Conductor und Reibzeug einer im physikalischen Cabinet stehenden Elektrisirmaschine mit den Enden der zur Sternwarte gehenden und mit Inbegriff des Multiplicators 13000 Fuss langen Drahtkette verbunden, und die Elektrisirmaschine anhaltend mit gleichförmiger Geschwindigkeit gedreht; geschah dies mit einer Geschwindigkeit von Einer Umdrehung auf die Secunde, so wurde dadurch der fünfundzwanzigpfündige Magnetstab im neuen Apparat in der Sternwarte in einer Ablenkung von 144 Scalentheilen (etwas über 30 Minuten) erhalten, positiver oder negativer, je nach der Richtung, in welcher die Elektricität den Multiplicator durchströmte, und in den Versuchen zeigte sich alle nur zu wünschende Regelmässigkeit. Aber als besonders merkwürdig erscheint dabei der Umstand, dass die elektromagnetische Wirkung dieselbe blieb, wenn man auch der Kette durch Hineinbringen andrer Apparate eine Länge von einer ganzen Meile gab. Dies könnte ein wesentlicher Unterschied von andern, hydrogalvanisch, thermogalvanisch, oder durch Induction erzeugten Strömen scheinen, deren durch die Grösse der elektromagnetischen Wirkungen sich äussernde Intensität allemal desto kleiner wird, je mehr man die Leitung verlängert. Ich finde aber darin nur eine schlagende Bestätigung der Theorie, welcher zufolge die durch ungleiche elektromagnetische Wirkung sich äussernde ungleiche Intensität zweier galvanischen Ströme nichts weiter ist, als ungleiche Menge in bestimmter Zeit jeden Querschnitt der Leitung durchströmender Elektricität.

Bei den andern Erzeugungsarten entwickelt eine gegebene elektromotorische Kraft desto weniger Elektricität in gegebener Zeit, je grösser der Widerstand ist, welchen die längere Kette dem Strome entgegenstellt: bei unserm Versuch hingegen hängt die Menge der bewegten Elektricität bloss von dem Spiel der Maschine ab, und *alle* in Funkenform auf den Conductor überspringende Elektricität muss die ganze Kette, sie mag kurz oder lang sein, durchlaufen, um sich mit der entgegengesetzten des Reibzeugs auszugleichen.

Um auch noch den Vorzug des neuen Apparats vor dem Magnetometer bei der elektromagnetischen Telegraphie nachweisen zu können, wird die Art, *wie* durch galvanische Ströme telegraphische Zeichen hervorgebracht werden, erst etwas näher betrachtet werden müssen.

Sobald man wusste, dass die Wirkungen einer Voltaischen Säule sich durch eine sehr lange Kette fortpflanzen, lag der Gedanke sehr nahe, diese Naturkräfte zu telegraphischen Zwecken zu benutzen, und schon vor fast 30 Jahren*), also zu einer Zeit, wo man erst einen kleinen Theil der galvanischen Wirkungen kannte, schlug Sömmering die Gasentwicklung dazu vor: bei weitem mehr geeignet für zusammengesetzte Signalisirungen sind aber die erst später bekannt gewordenen magnetischen Wirkungen galvanischer Ströme; indessen ist es auffallend, dass seit Oersted's Entdeckung eine ziemliche Anzahl Jahre verstrichen ist, ehe jemand an diesen Gebrauch gedacht zu haben scheint. Freilich ist ein gründliches Urtheil über die Anwendbarkeit im Grossen nicht möglich ohne eine genaue quantitative Kenntniss der Schwächung galvanischer Ströme in Folge der Länge und Beschaffenheit der Leitungsdrähte, wovon man vor Ohm und Fechner sehr unvollkommene und unrichtige Vorstellungen hatte. Nachdem im Jahr 1833, hauptsächlich um ähnliche Untersuchungen über das Gesetz der Stärke galvanischer Ströme nach Verschiedenheit der Umstände in grossem Maassstabe anstellen zu können, zwischen der hiesigen Sternwarte und dem physikalischen Cabinet eine Drahtverbindung gemacht war, von welcher grossartigen Anlage das Ver-

*) Nach einer mir von Hrn. von Humboldt mitgetheilten Notiz hatte schon zehn Jahre früher Bétancourt eine Drahtkette von Aranjuez nach Madrid gezogen, vermittelst welcher die Entladung einer Leidner Flasche zu einer telegraphischen Signalisirung dienen sollte. Obgleich nähere Umstände über den Erfolg nicht bekannt zu sein scheinen, so ist doch an dem Gelingen eines solchen Versuchs, wenn er zweckmässig ausgeführt wird, nicht zu zweifeln. Aber immer müsste wohl eine solche Methode auf die Signalisirung eines Ja oder Nein auf eine oder ein Paar im Voraus verabredete Fragen beschränkt bleiben.

dienst der sehr schwierigen Ausführung allein dem Herrn Professor Weber gehört, wurde diese Kette gleich von Anfang an oft zu telegraphischen Zeichen benutzt, nicht bloss zu einfachen, um täglich die Uhren zu vergleichen, sondern versuchsweise auch zu zusammengesetzten; und die Möglichkeit, Buchstaben, Wörter und ganze Phrasen zu signalisiren, wurde dadurch schon damals zu einer evidenten Thatsache*). Bei diesen Versuchen wurde ein hydrogalvanisch und nur mit schwachen Mitteln, nemlich einem einzigen oder einem doppelten Plattenpaar und ungesäuertem Wasser, erregter Strom angewandt; ich halte mich jedoch nicht dabei auf, das damals gebrauchte Verfahren hier umständlich zu beschreiben, da ich später ein davon ganz verschiedenes an dessen Stelle gesetzt habe. Bei jenem Verfahren blieb die Unbequemlichkeit, dass durch unsere einfache Kette und nach der Einrichtung der Apparate, bei welchen dergleichen Versuche nur eine Nebensache waren, in Einer Minute sich nicht mehr als zwei Buchstaben signalisiren liessen. Auch bei einer abgeänderten bloss für das Telegraphiren berechneten Einrichtung hätte diese Geschwindigkeit (mit welcher übrigens offenbar die Länge der Kette oder die Entfernung der Endpunkte gar nichts zu thun hat) sich nicht viel vergrössern lassen, so lange nur eine einfache Kette angewandt würde, wohl aber in hohem Grade mit einer vielfachen: allein eine solche einzurichten, war hier kein hinlänglicher Beweggrund vorhanden, da theils der Erfolg an sich gar nicht zweifelhaft sein konnte, theils der eigentlich wissenschaftliche Nutzen einer solchen vielfachen Kette mit den bedeutenden Kosten in keinem Verhältniss gestanden haben würde.

Dagegen hat mich die Theorie der Inductionsgesetze auf ein ganz verschiedenes Verfahren geführt, wonach schon seit mehr als zwei Jahren eine einfache Kette mit dem vollkommensten Erfolge zu einem viel schnelleren Telegraphiren dient; und es wird mir um so eher verstattet sein, bei demselben noch etwas zu verweilen, da ich bisher noch nichts Näheres darüber öffentlich bekannt gemacht habe.

Die Vorrichtung, welche ich einen Inductor nenne, habe ich schon vor mehreren Jahren anderwärts beschrieben**). Ich muss jedoch bemerken, dass anstatt des in der ersten Nachricht beschriebenen Inductors von 1050 Umwindun-

*) Die erste öffentliche Erwähnung dieser Versuche findet man in den Gött. gel. Anz. 1834, Aug. 9. Vergl. Schumachers Jahrbuch für 1836, [S. 339 d. B.].

**) Gött. gel. Anz. 1835, März 7. Schumachers Jahrbuch für 1836, [S. 341 d. B.]

gen, und des nachher auf 3537 Umwindungen verstärkten, gegenwärtig einer von 7000 Umwindungen gebraucht wird, worin die Drahtlänge allein mehr als 7000 Fuss beträgt. Durch eine äusserst einfache Manipulation mit diesem Inductor (dadurch nemlich, dass man ihn von einem doppelten Magnetstab, über welchen er zu Anfang geschoben ist, schnell abzieht und sogleich wieder, ohne ihn umzukehren in die vorige Lage zurückbringt) wird bewirkt, dass schnell nach einander zwei starke entgegengesetzte galvanische Ströme durch den Leitungsdraht gehen, deren jeder nur eine äusserst kurze Zeit dauert. Die Wirkung dieser beiden Ströme auf eine wo immer in der Kette befindliche, von einem Multiplicator umgebene Magnetnadel besteht darin, dass dieser für einen Augenblick eine sehr lebhafte Geschwindigkeit ertheilt, aber dann sogleich vollkommen wieder aufgehoben wird. Die Nadel macht also eine sehr lebhafte, aber nur kleine Bewegung, nach Gefallen rechts oder links, und steht dann sogleich wieder ganz still.

Dass sich nun die Abwechslungen solcher zuckenden Bewegungen auf mancherlei Art combiniren und zur Signalisirung von Buchstaben benutzen lassen, ist von selbst klar. Die Zeichen möglichst schnell und präcis zu geben, so wie, von der andern Seite, sie mit Leichtigkeit und Schnelligkeit zu lesen, wird allerdings eine gewisse Einübung erforderlich sein: aber auch schon, ohne sich eine solche besonders angeeignet zu haben, kann man, wie öftere Erfahrungen gezeigt haben, in Einer Minute füglich etwa sieben Buchstaben signalisiren. Wollte man für die Manipulation eigne *mechanische* Vorrichtungen treffen, so würde sich ohne Zweifel die Schnelligkeit und Präcision noch bedeutend erhöhen lassen.

Gerade bei dieser Art des Telegraphirens hat nun der neue Apparat einen bedeutenden Vorzug vor dem Magnetometer, und zwar wegen folgender Umstände. Obgleich die beiden entgegengesetzten Impulse, aus welchen Ein einfaches Zeichen besteht, ihrer *Stärke* nach *genau gleich* sind, und daher der zweite genau eben so viel Geschwindigkeit vernichtet, als der erste hervorgebracht hat, so kann dennoch die Nadel zwischen den Zeichen nicht in absoluter Ruhe sein, weil diese nur da möglich ist, wo jene sich in ihrer natürlichen Gleichgewichtsstellung befindet. Ist sie auch, *vor* einem Zeichen, in dieser Stellung, so wird sie doch eben *durch* das Zeichen etwas, wenn auch nur wenig, daraus verrückt, und die auf die Nadel wirkende Directionskraft strebt dann, sie nach derselben zurückzuführen. Wenn nun gleich so, in Folge Eines Zeichens, nur eine äusserst schwache Bewegung entstehen kann, so wird doch nach einer grossen Menge von Zeichen durch Anhäufung eine beträchtliche Entfernung von der natürlichen Gleichgewichtsstellung eintreten können, mithin in Folge derselben auch zwischen den Zeichen so viel Bewegung, dass die Zeichen dadurch etwas von ihrer scharfen Ausprägung verlieren. Diese Störung tritt nun, wie man bei einiger Überlegung leicht einsieht, unter sonst gleichen Umständen nachtheiliger hervor, wenn die Nadel, an deren zuckenden Bewegungen die Zeichen beobachtet werden, eine kurze, als wenn sie eine lange Schwingungsdauer hat, daher mehr an dem Magnetometer des magnetischen Observatoriums, als an dem in der Sternwarte aufgehängt gewesenen mit fünfundzwanzigpfündiger Nadel; noch weniger hingegen, als bei letzterem, an dem neuen jetzt dessen Stelle einnehmenden Apparat, wenn dessen Magnetstab in der verkehrten Lage zu einer fast astatischen Nadel eingerichtet ist. In der That wird dann dieselbe, selbst nach einer beträchtlichen Entfernung von ihrer Gleichgewichtsstellung, von der sie dahin zurücktreibenden, vergleichungsweise schwachen, Directionskraft in keine die Zeichen erheblich störende Bewegungen versetzt, während der Strom im Multiplicator eben so stark auf sie wirkt, und also eben so grosse Zuckungen hervorbringt, als gehörte sie zu einem gewöhnlichen Magnetometer.

Gegen die Nachtheile und Unbequemlichkeiten unzeitiger Schwingungsbewegungen, sowohl bei dieser Art des Telegraphirens, als bei manchen andern Anwendungen der magnetischen Apparate, leistet übrigens eine eigne Vorrichtung, die ich vor kurzem habe ausführen lassen, ungemein nützliche Dienste. Ich nenne diese Vorrichtung einen *Dämpfer*, da ihre Wirkung darin besteht, Schwingungsbewegungen, die sonst mit sehr langsamer Abnahme viele Stunden fortdauern würden, in sehr kurzer Zeit ganz zu vernichten. Diese Wirkung leistet der vorerst nur für das Magnetometer des magnetischen Observatoriums angefertigte Dämpfer in ganz eminentem Grade, so dass die grössten Schwingungsbewegungen in wenigen Minuten gänzlich erlöschen. Eine ähnliche Vorrichtung kann aber bei jeder schwingenden Nadel, bei einem Magnetometer oder bei dem neuen hier in Rede stehenden Apparate angebracht werden, und wird bei allen Apparaten, die zum Telegraphiren nach der hier beschriebenen Methode ernstlich angewandt werden sollen, einen wesentlichen Bestandtheil ausmachen müssen. Eine ausführlichere Erklärung dieser Vorrichtung würde aber von dem gegenwärtigen Gegenstande zu weit abführen.

In obigem ist dem neuen Apparate noch keine besondere Benennung beigelegt. Nach seiner wichtigsten Anwendung könnte man ihn einen Intensitätsmesser nennen. In so fern er aber zu eben so mannichfaltigen scharfen magnetischen Messungen dient, wie das Magnetometer, hätte er wohl eben so gut auf *dieselbe* Benennung Anspruch. Der wesentlichste Unterschied ist der, dass der neue Apparat an *zwei* Fäden aufgehängt ist, wodurch eben eine *neue* Directionskraft gewonnen wird, mit welcher die magnetische commensurabel ist. Die übrigen Unterschiede, namentlich die Art, wie der Spiegel angebracht ist, ferner die Mittel zur Messung der Drehung der einzelnen Bestandtheile gegen einander, sind nothwendige sich von selbst ergebende Bedingungen für die zu erreichenden Zwecke. Man könnte daher den neuen Apparat ein *Bifilar-* oder *Bipensil-Magnetometer* nennen, um es von dem ältern Instrumente, dem einfachen oder Unifilar-Magnetometer zu unterscheiden. Ich darf wohl meine Überzeugung aussprechen, dass einer allgemeinern Verbreitung desselben, und besonders einer Anwendung in den Terminsbeobachtungen neben dem einfachen Magnetometer an mehrern weit von einander entlegenen Orten, bedeutende Fortschritte unsrer Kenntniss der wunderbaren Störungen des Erdmagnetismus bald folgen werden.

ANLEITUNG ZUR BESTIMMUNG

DER SCHWINGUNGSDAUER EINER MAGNETNADEL.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1837. IV.

Die Aufgabe, zu deren Auflösung hier eine Anleitung gegeben werden soll, hat ein mehrseitiges Interesse. Eine wenn auch noch nicht sehr genaue Kenntniss der Schwingungsdauer ist schon zur Ausübung der für die Bestimmung des Ruhestandes der Nadel gegebenen Vorschriften nothwendig (*Res.* von 1836, II.): zur Ausmittelung der absoluten Intensität des Erdmagnetismus hingegen ist der auf das schärfste bestimmte Werth der Schwingungsdauer ein wesentliches Element. Aber auch an sich kann die Ausübung der zur Bestimmung der Schwingungsdauer gehörenden Operationen wie eine gute Vorübungsschule für astronomische Beobachtungen betrachtet werden, da jene namentlich mit den Beobachtungen der Sterndurchgänge am Mittagsfernrohr die grösste Ähnlichkeit, aber vor denselben den Vorzug haben, dass sie grösserer Schärfe fähig sind, und, durch ungünstigen Luftzustand ungestört, jede Stunde nach Gefallen vorgenommen werden können. Es scheinen daher auch solche Beobachtungen am Magnetometer besonders dazu geeignet zu sein, über einen bisher noch nicht genügend aufgeklärten Gegenstand Licht zu verbreiten, nemlich über die constanten Differenzen zwischen den Resultaten verschiedener Beobachter am Mittagsfernrohr, welche doch nur daher rühren können, dass die optischen oder die akustischen Eindrücke oder beide, bei verschiedenen Personen und nach Verschiedenheit der Umstände nicht gleichzeitig ins Bewusstsein kommen.

Die Schwingungsdauer einer Nadel ist die Zwischenzeit zwischen zwei auf einander folgenden äussersten Stellungen (Elongationen) derselben. Die Nadel

befindet sich in jeder Elongation streng genommen ohne alles Verweilen; allein, da die Geschwindigkeit der Bewegung bis zum Verschwinden nach der Stetigkeit abnimmt, und eben so von da an wieder zunimmt, so erscheint sie für unsere Sinne um die Zeit der Elongation mit einer grössern oder geringern Dauer als ruhend, welche aber freilich als solche bei kurzen Schwingungszeiten und grossen Bögen kaum erkannt wird. In allen Fällen aber bleibt eine solche unmittelbare Auffassung des Zeitpunkts der Elongation an Schärfe weit zurück gegen eine mittelbare Bestimmung durch correspondirende Beobachtungen, indem man nemlich das Mittel aus den beiden Zeiten nimmt, wo ein und derselbe Theilstrich der Scale beim Hin- und Rückgange auf dem Vertikalfaden des Fernrohrs erscheint.

Im Allgemeinen ist es am vortheilhaftesten, dazu einen Theilstrich in oder nahe bei der Mitte des Schwingungsbogens zu wählen, theils weil da die Bewegung am schnellsten, mithin die Beobachtung der Zeit selbst am schärfsten ist, theils weil beim Beobachten mehrerer auf einander folgender Schwingungen die Zwischenzeiten zwischen den Aufzeichnungen nahe gleich werden. In einzelnen Fällen, namentlich bei sehr langer Schwingungsdauer, kann es übrigens allerdings zuweilen vortheilhaft sein, andere oder selbst mehrere verschiedene Scalenstellen anzuwenden, was jedoch hier bei Seite gesetzt bleiben kann.

Bei kleinen Schwingungen thut man wohl, den der Mitte nächsten Theilungspunkt selbst zu wählen, bei grössern ziehe man den bequemer zu beachtenden nächsten Theilstrich bei den Fünfern oder Zehnern der Scale vor; bei sehr grossen Schwingungen hingegen wird es wegen der grossen Schnelligkeit, mit welcher die Mitte der Scale durch das Gesichtsfeld geht, nothwendig, die gewählte Stelle der Scale, etwa durch einen nicht zu feinen über die Scale gehängten schwarzen Faden, gehörig augenfällig zu machen.

Wenn der Vorübergang am Faden nicht genau mit einem Secundenschlage zusammenfällt, so setzt man den Bruchtheil nach dem geschätzten Verhältniss der beiden Entfernungen an, in welchen die betreffende Scalenstelle vom Faden beim vorhergehenden und folgenden Sekundenschlage erscheint, eben so wie es die meisten Astronomen beim Beobachten am Mittagsfernrohr gewohnt sind. Man theilt also, unmittelbar, nicht die Zeit, sondern den Raum.

Die Bestimmung der Schwingungsdauer aus einer einzigen Schwingung ist natürlich nur einer sehr beschränkten Schärfe fähig; man gründet deshalb jene immer auf eine grössere Anzahl auf einander folgender Schwingungen. Zwar ist allerdings die Schwingungsdauer von veränderlichen Elementen abhängig, und daher auch, selbst streng genommen, beständigen Veränderungen unterworfen: allein von ganz ungewöhnlichen Fällen abgesehen*), wird diese Veränderlichkeit während einer nicht ganz kleinen Zeit als ganz unmerklich zu betrachten sein, so wie jedenfalls der aus einer beträchtlichen Anzahl von Schwingungen abgeleitete Werth der Dauer Einer Schwingung, dem Mittelwerthe der einzelnen in Betracht kommenden Elemente während dieser Zeit entsprechen wird. Es ist aber offenbar gar nicht nöthig, den Bewegungen der Nadel während eines solchen Zeitraumes ununterbrochen zu folgen, sondern es reicht hin, die Zeiten der ersten und der letzten Elongation zu kennen, so bald man von der Schwingungsdauer einen so weit genäherten Werth besitzt, dass über die *Anzahl* der Schwingungen während des verflossenen Zeitraums kein Zweifel übrig bleiben kann, was dadurch noch erleichtert wird, dass man allemal (nach der Gleichnamigkeit oder Ungleichnamigkeit der ersten und letzten Elongation) im Voraus weiss, ob diese Anzahl gerade oder ungerade ist.

Wenn die Schwingungsdauer nicht gar zu klein ist, so können zwischen den Vorübergängen auch die Elongationen selbst (nemlich die äussersten Scalentheile) mit aufgezeichnet werden, um daraus die zur schärfern Berechnung der Schwingungsdauer nöthigen Amplituden ableiten zu können, deren successive Abnahme überdies an sich zu merkwürdigen Betrachtungen Anlass gibt.

Die Behandlung der Beobachtungen selbst, um Resultate aus ihnen zu gewinnen, wird sich am besten an einem Beispiele zeigen lassen, wozu hier Beobachtungen am Magnetometer der Sternwarte mit fünfundzwanzigpfündigem Stabe, vom 29. November 1835 gewählt werden. Die folgende Tafel I. enthält zuerst die rohen Beobachtungen.

	1755.1		497.8		645.9		1232.1
$21^{h}55'26''9$	266.0	$23^{h}38'49''2$	1502.2	$1^{h}10'12''6$	1341.5	$2^{h}49'19''7$	775.9
56 8.4	1751.8	39 31.5	500.1	54.2	647.3	50 1.5	1231.0
51.2	268.5	40 13.6	1499.1	11 37.0	1339.4	44.1	776.4
57 33.0	1748.9	56.0	502.6	12 18.4	648.7	51 25.8	1228.7
58 15.5	271.6	41 38.1	1496.5	13 1.3	1337.0	52 8.5	778.0
57.4	1744.2	42 20.3	506.0	43.0	650.7	50.0	1227.0

*) Dass zu einer Zeit, wo die Declination schnell wechselnde starke Änderungen erleidet, *sehr kleine* Schwingungen (die aber schon an sich zur Bestimmung der Schwingungsdauer wenig tauglich sind) eine ganz entstellte Dauer zeigen können, braucht kaum bemerkt zu werden.

Diese Beobachtungen bestehen, wie man sieht, aus vier Sätzen; die erste Columne enthält die Zeiten der Vorübergänge des Scalenpunktes 1000, die zweite die Elongationspunkte, diesmal mit der Elongation anfangend, die dem ersten Vorübergange voranging, und mit derjenigen schliessend, die auf den letzten Vorübergang folgte. Wenn man die Elongationen nicht mit beobachtet, so thut man wohl, bei jedem Vorübergange anzumerken, ob wachsende oder abnehmende Zahlen durchgingen; nach der in Göttingen befolgten Art so:

$21^{h}\,55'\,26''9$ —
56 8.4 +
u. s. f.
$23^{h}\,38'\,49''2$ +
u. s. w.

Dies ist deswegen nöthig, um unterscheiden zu können, welche der aus den Vorübergängen abgeleiteten Elongationszeiten sich auf Minima oder Maxima beziehen. Bei der Zählung der Elongationszeiten haben wir die Gewohnheit angenommen, die erstern durch gerade, die andern durch ungerade Zahlen zu bezeichnen. Es wird daher der aus den beiden ersten Vorübergängen abgeleiteten Elongationszeit $21^{h}\,55'\,47''65$ die Zahl 0 vorgesetzt u. s. f.

Die folgende Tafel II. enthält nun die nächsten aus den unmittelbaren Beobachtungen berechneten Resultate.

0	$21^{h}55'47''65$	$21^{h}55'47''65$	277	$1^{h}10'33''40$	$21^{h}55'49''54$
1	56 29.80	47.62	278	11 15.60	49.56
2	57 12.10	47.74	279	11 57.70	49.48
3	57 54.25	47.71	280	12 39.85	49.45
4	58 36.45	47.73	281	13 22.15	49.57
147	23 39 10.35	21 55 49.89	418	2 49 40.60	21 55 49.36
148	39 52.55	49.91	419	50 22.80	49.38
149	40 34.80	49.98	420	51 4.95	49.35
150	41 17.05	50.05	421	51 47.15	49.37
151	41 59.20	50.02	422	52 29.25	49.29

In der zweiten Columne stehen hier die sich ergebenden Elongationszeiten. Die Bezifferung, in der ersten Columne, hat man, für die fünf ersten von selbst; für die spätern findet sie sich auf folgende Art.

Die Vergleichung der Elongation 0 mit 4 gibt als genäherten Werth der Schwingungsdauer 42″20; dividirt man damit die Zwischenzeit zwischen der Elongation 4 und der nächstfolgenden, $1^{h}40'33''90$, und erinnert sich, dass die Ordnungszahl der letztern eine ungerade sein muss, so lässt der Quotient 142.983 keinen Zweifel übrig, dass zwischen jenen beiden Elongationen 143 Schwingungen verflossen sein müssen; denn in der That, wollte man 141 oder 145 annehmen, so würde die Schwingungsdauer 42″7936 oder 41″6131 sich ergeben, viel zu stark von dem genäherten Werthe 42″20 abweichend, um zulässig zu sein. Von 143 Schwingungen ausgehend, findet man die Schwingungsdauer 42″1951, die man bei dem Übergange zu den folgenden Beobachtungssätzen zum Grunde legen könnte, um ihre Bezifferung zu erhalten, obwohl in dem gegenwärtigen Falle, wo keine *sehr* langen Unterbrechungen vorkommen, auch schon der erste genäherte Werth überall ausreicht.

Um die Schwingungsdauer genauer zu erhalten, und selbst ihre Veränderlichkeit im Laufe der ganzen Beobachtungsreihe zu erkennen, kann man nun zuerst den ersten Satz mit dem zweiten auf folgende Art vergleichen. Die Dauer von 147 Schwingungen findet sich aus

0 — 147	$1^{h}43'22''70$
1 — 148	22.75
2 — 149	22.70
3 — 150	22.80
4 — 151	22.75

im Mittel $1^{h}43'22''74$ oder die Dauer Einer = 42″19551. Auf gleiche Weise erhält man die Schwingungsdauer zwischen dem zweiten und dritten Satze = 42″17654, zwischen dem dritten und vierten = 42″17879, und zwischen dem ersten und vierten oder das Mittel aus der ganzen Reihe = 42″18344.

Diese Rechnung kann auch in einer etwas abgeänderten Form geführt werden, die zugleich den Vortheil einer klaren Übersicht des regelmässigen Ganges sämmtlicher einzelnen Beobachtungen gewährt. Man fängt damit an, die einzelnen gefundenen Elongationszeiten mit einem genäherten Werthe der Schwingungsdauer auf einerlei Epoche zu reduciren, indem man von jeder den Betrag aller seit dieser Epoche verflossenen Schwingungszeiten, mit Hülfe dieses genäherten Werthes zurückrechnet. Man subtrahirt also von jeder Zahl der zweiten

Columne das Product dieses angenommenen Werthes in die entsprechende Zahl der ersten Columne. Hätten die Beobachtungen eine absolute Genauigkeit, und wäre die Schwingungsdauer genau constant, und dem angenommenen Werthe genau gleich, so müssten sämmtliche so reducirte Zahlen genau gleich ausfallen. Aus dem Zunehmen der Zahlen von einem Satze zu dem folgenden hingegen erkennt man, dass die zum Grunde gelegte Schwingungsdauer für diesen Zeitraum zu klein war, und umgekehrt, während das unregelmässige Hinundherspringen der zu einem und demselben Satze gehörenden Resultate einen Maassstab für die Genauigkeit der Beobachtungen selbst darbietet.

In unserm Beispiele folgt aus der Vergleichung der ersten Elongationszeit mit der letzten die Schwingungsdauer = 42″18389, anstatt welcher der genäherte Werth 42″18 zur Berechnung der Zahlen der dritten Columne zum Grunde gelegt ist. Man sieht so mit Einem Blick, dass diese Schwingungsdauer für die Zeit vom ersten zum zweiten Satze etwas zu klein, hingegen von dem zweiten zum dritten, und eben so vom dritten zum vierten um ein geringes zu gross ist. Um genaue Resultate zu erhalten, nimmt man aus den zu jedem Satze gehörenden Zahlen der dritten Columne das Mittel; diese Mittel

$$21^{h}\,55'\,47''69$$
$$49.97$$
$$49.52$$
$$49.35$$

können als schärfere Werthe der zu den Ordnungszahlen 2, 149, 279, 420 gehörenden reducirten Zeiten angesehen werden. Man hat also vom ersten Satze zum zweiten ein Voreilen der Beobachtungen von 2″28 vor dem vorausgesetzten Gange während 147 Schwingungen, was auf Eine Schwingung 0″01551 beträgt, so dass der corrigirte Werth 42″19551 wird, genau mit dem oben gefundenen übereinstimmend. Denselben Erfolg ergibt die Vergleichung der folgenden Sätze.

Für die Güte der Beobachtungen selbst gibt der blosse Anblick der zu einerlei Satz gehörenden Zahlen Zeugniss; indess mögen hier die Vorschriften Platz finden, wonach man in geeigneten Fällen den Maassstab für die Genauigkeit bestimmter ausmitteln kann. Bezeichnet man den mittlern bei einem Antritt zu befürchtenden Fehler mit ε, die Anzahl der zu einem Satze gehörenden Resultate mit s, und die Summe der Quadrate der Differenzen dieser einzelnen Resultate von ihrem Mittel mit q, so kann man näherungsweise annehmen

$$\frac{(s-1)^2\varepsilon\varepsilon}{2s} = q$$

oder wenn mehrere Sätze vorhanden sind,

$$\varepsilon\varepsilon\Sigma\frac{(s-1)^2}{2s} = \Sigma q$$

also

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma q}{\Sigma\frac{(s-1)^2}{2s}}}$$

In unserm Beispiele sind bei dem ersten Satze die Differenzen vom Mittel 0″04, 0″07, 0″05, 0″02, 0″04, also $q = 110$, wenn man das Hunderttheil der Secunde als Einheit betrachtet; ferner $s = 5$, also $\frac{(s-1)^2}{2s} = \frac{8}{5}$. Für die drei folgenden Sätze ist, bei gleichem Werthe von s, $q = 190;\ 110;\ 50$. Wir haben also

$$\tfrac{32}{5}\varepsilon\varepsilon = 460$$

oder

$$\varepsilon = 8.5, \quad \text{d. i.}\ \varepsilon = 0''085.$$

Indessen muss bemerkt werden, dass die Gültigkeit dieser Vorschrift von mehrern Bedingungen abhängig ist, die unserm Beispiele nicht hinlänglich eigen sind: erstlich nemlich, dass der vorausgesetzte genäherte Werth der Schwingungsdauer, womit die reducirten Zahlen berechnet sind, ohne merklichen Fehler als der wahre während jedes Satzes betrachtet werden dürfe; zweitens, dass die verschiedenen Sätze, die man vereinigt, unter nahe gleichen Umständen (so weit sie die Genauigkeit des Beobachtens afficiren können) beobachtet seien. Beides trifft in unserm Beispiel nicht zu, und man hat daher obige Rechnung nur wie eine Erläuterung der Formel zu betrachten. Will man genauere Bestimmungen haben, so ist es besser, zunächst zu diesem Zweck besondere Beobachtungen zu machen. Unter dem Vorbehalt, diesen Gegenstand in Zukunft ausführlicher zu behandeln, mag hier nur bemerkt werden, dass die Genauigkeit des Beobachtens — neben der Individualität des Apparats und des Beobachters — auch nach der bessern oder schlechtern Beleuchtung der Scale, der Schnelligkeit der Schwingungsbewegung, und der Beschaffenheit der Uhr ungleich ist. Eine gar zu schnelle Bewegung sowohl, als eine gar zu langsame ist der Genauigkeit des Beobachtens weniger günstig, als eine mittlere Geschwindigkeit, und an einer Secundenuhr beobachtet man nicht so scharf, als an einem Chronometer, welches kleinere Zeittheile schlägt. Unter den günstigsten Umständen übertrifft die Genauigkeit dieser Beobachtungen sehr weit die der besten Beobachtungen an einem Mittagsfernrohr.

Die Schwingungsdauer ist bekanntlich, alles übrige gleich gesetzt, desto kleiner, je kleiner der Schwingungsbogen ist, und zwar so, dass während dieser sich dem Verschwinden unendlich nähert, jener einen Grenzwerth hat. Bezeichnen wir diesen Grenzwerth, oder, nach gewöhnlicher Sprachweise, die Zeit einer unendlich kleinen Schwingung, mit T, die einem Schwingungsbogen G entsprechende Dauer hingegen mit T', so hat man bekanntlich

$$T' = T(1 + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{4}G^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\sin\tfrac{1}{4}G^4 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{25}{36}\sin\tfrac{1}{4}G^6 + \text{etc.})$$

Bei der Kleinheit der Bögen, auf welche man beim Gebrauch des Magnetometers beschränkt bleibt, kann man die Glieder der vierten und höhern Ordnung unbedenklich bei Seite, und deshalb auch $\frac{g}{8r}$ anstatt $\sin\frac{1}{4}G$ setzen, wo g das dem Bogen G entsprechende Stück der Scale, und r die horizontale Entfernung der Mitte der Scale vom Spiegel bedeutet. Wir haben also $T' = T(1 + \frac{gg}{256rr})$, oder mit derselben Genauigkeit $T = T'(1 - \frac{gg}{256rr})$. Für unser Beispiel ist in Scalentheilen oder Millimetern $r = 4775.9$. Der Schwingungsbogen zwischen den Elongationen 0 und 1 ist $= 1485.8$, und damit die Reduction der Schwingungsdauer auf eine unendlich kleine Schwingung $= -0''01595$. Eben so findet sich die Reduction der zweiten Schwingung 0″01590, die der dritten 0″01584, die der vierten 0″01577, so dass im Mittel aus den vier ersten Schwingungen die auf unendlich kleine reducirte Dauer sich = 42″18414 ergibt.

Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens setzt aber die ununterbrochene Beobachtung der Elongation voraus. Die Reduction einer Reihe von Schwingungen, wovon nur Anfang und Ende beobachtet ist, auf unendlich kleine Bögen, mag man in dem Falle, wo der Schwingungsbogen in der Zwischenzeit nur eine mässige Abnahme erlitten hat, allenfalls so ausführen, dass man einen mittlern Werth der Grösse des Schwingungsbogens dabei zum Grunde legt. Allein die Reduction einer längern Reihe solcher Schwingungen, während welcher der Bogen sich stark vermindert hat, erfordert nothwendig eine wenigstens näherungsweise richtige

Kenntniss des Gesetzes, nach welchem diese Verminderung geschieht. Ich gehe daher zu der Behandlung der beobachteten Elongationen über, deren nächste Resultate in der folgenden Tafel III. enthalten sind.

0	1009.725	1487.45	3.17244	
1	1009.525	1484.55	3.17160	
2	1009.425	1481.85	3.17081	3.170710
3	1009.475	1478.85	3.16992	
4	1009.075	1474.95	3:16878	
147	1000.575	1003.25	3.00141	
148	1000.375	1000.55	3.00024	
149	1000.225	997.75	2.99902	2.999036
150	1000.200	995.20	2.99791	
151	1000.400	992.20	2.99660	
277	994.050	694.90	2.84192	
278	993.875	693.15	2.84083	
279	993.700	691.40	2.83973	3.839630
280	993.450	689.50	2.83853	
281	993.350	687.30	2.83715	
418	1003.725	455.65	2.65863	
419	1003.575	454.85	2.65787	
420	1003.125	453.45	2.65653	2.656152
421	1002.950	451.50	2.65466	
422	1002.925	449.85	2.65307	

Die erste Columne enthält die Ordnungszahl jeder Elongation; die zweite den entsprechenden Ruhestand der Nadel, nach der Formel $\frac{1}{4}(a+2b+c)$, wenn b die beobachtete Elongation, a und c die vorhergehende und folgende bedeuten (vergl. *Resultate* für 1836, II); in der dritten Columne steht die doppelte Entfernung jeder Elongation von dem entsprechenden Ruhestande, oder der Bogen, welcher ohne die Ursachen, welche ihn zu vermindern streben, von da an beschrieben sein würde, also $\frac{1}{2}(a-2b+c)$ oder $\frac{1}{2}(2b-a-c)$, d. i. das Mittel des vorhergehenden und folgenden Schwingungsbogens; in der vierten Columne befindet sich der Logarithme dieser Zahl; endlich daneben der Mittelwerth aus den Zahlen der vierten Columne, die zu einem Satze gehören.

Alle Erfahrungen stimmen dahin überein, dass man, wenigstens während einer mässig grossen Zeit, die Zahlen der dritten Columne als in geometrischer

mithin ihre Logarithmen als in arithmetischer Progression abnehmend betrachten, wenigstens dies als die plausibelste Annäherung gelten lassen darf. Die kleinen Unregelmässigkeiten, welche sich bei der Vergleichung auf einander folgender Zahlen eines Satzes finden, hat man nur den unvermeidlichen kleinen Beobachtungsfehlern oder zufälligen kleinen Störungen zuzuschreiben, und man vermindert den nachtheiligen Einfluss davon, so viel thunlich, wenn man die Mittelzahlen in der fünften Columne als den entsprechenden mittlern Ordnungszahlen angehörig betrachtet, und daraus dann den Gang während der ganzen Beobachtungsreihe ableitet.

Wir haben demnach, als Logarithmen der Amplituden für die Elongationen

2	3.170710
149	2.999036
279	2.839630
420	2.656152

Der Logarithme hat also vom ersten zum zweiten Satze während 147 Schwingungen die Abnahme 0.171674 erlitten, was nach gleichförmiger Vertheilung auf Eine Schwingung 0.00116785 beträgt: ich nenne diesen Quotienten das *logarithmische Decrement.* Von dem zweiten zum dritten Satze findet sich dasselbe $= 0.00122620$, vom dritten zum vierten $= 0.00130126$. Man sieht, dass an einer gleichförmigen Abnahme hier wenigstens nicht viel fehlt: ich werde aber unten auf die Veränderlichkeit des logarithmischen Decrements zurückkommen.

Unter der Voraussetzung nun, dass die Amplituden während einer Reihe von Schwingungen in geometrischer Progression abgenommen haben, lassen sich diese auf unendlich kleine leicht reduciren. Ist g die Grösse der ersten Schwingung in Scalentheilen, g^0 die Grösse der letzten, θ der Exponent der geometrischen Progression, also $g^0 = g\theta^{\mu}$, wenn μ die Anzahl der Schwingungen bedeutet, so wird die Reduction der ersten Schwingungszeit auf die unendlich kleine Schwingung

$$-\frac{Tgg}{256rr},$$

die der zweiten

$$= -\frac{Tgg\theta\theta}{256rr}$$

u. s. w. also die Summe aller

$$= -\frac{T(gg-g^0g^0\theta\theta)}{256rr(1-\theta\theta)}$$

Bezeichnen wir die zu der Anfangs- und End-Elongation gehörenden Amplituden, nach derselben Art berechnet wie in Tafel III, mit h und h^0, so ist $h = \frac{1}{2}(\frac{g}{\theta} + g)$, $h^0 = \frac{1}{2}(g^0 + g^0\theta)$, mithin obige Summe

$$= -\frac{T(hh - h^0 h^0)}{64rr} \cdot \frac{\theta\theta}{(1+\theta)^2(1-\theta\theta)}$$

Da in allen hier in Rede stehenden Fällen θ ein von der Einheit wenig verschiedener, also das mit λ zu bezeichnende logarithmische Decrement $= \log\frac{1}{\theta}$ ein kleiner Bruch ist, so kann man anstatt des zweiten Factors in jenem Ausdruck, für welchen sich, m den Modulus des Logarithmensystems bedeutend, folgende Reihe ergibt:

$$\frac{\theta\theta}{(1+\theta)^2(1-\theta\theta)} = \frac{m}{8\lambda} - \frac{5}{96}\cdot\frac{\lambda}{m} + \frac{37}{2880}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^3 \text{ etc.}$$

mit hinlänglicher Schärfe bloss das erste Glied $\frac{m}{8\lambda}$ setzen. Die Reduction der ganzen Dauer der μ Schwingungen wird also:

$$= -\frac{Tm(hh - h^0 h^0)}{512rr\lambda}$$

oder die Reduction des Durchschnittwerths für Eine Schwingung

$$= -\frac{Tm(hh - h^0 h^0)}{512rr\lambda\mu}$$

Es ist bei diesen Formeln aus den oben angeführten Gründen gleichgültig, ob man darin für T den berichtigten oder den unberichtigten Werth gebraucht. In unserm Beispiele findet sich der Werth der Reduction

	für die ganze Zeit	für Eine Schwingung	Reducirter Werth
2 149	—1″6111	—0″01096	42″18455
149 279	—0.6624	—0.00510	42.17144
279 420	—0.3285	—0.00233	42.17646

Die Abnahme des Schwingungsbogens ist, auch ausser ihrem Zusammenhange mit der genauern Berechnung der Schwingungsdauer, noch in mehrern andern Beziehungen von Interesse. Man hat dabei zunächst die äussern Umstände zu unterscheiden, unter welchen die Nadel ihre Schwingungen macht.

Wenn der Apparat zweckmässig eingerichtet und in vollkommen gutem Zustande ist*), und in seinen nächsten Umgebungen sich Nichts befindet, was eine beträchtliche Dämpfung der Schwingungsbewegung bewirken muss, so ist die Abnahme der Schwingungsbögen immer sehr langsam, und in so fern regelmässig, als sie wenigstens während einer mässigen Zeit in geometrischer Progression erfolgt, mithin das logarithmische Decrement nahe constant ist. In unserm Beispiele ändert sich dieses logarithmische Decrement während fast sechs Stunden nur von 0.00117 bis 0.00130, oder die Abnahme des Bogens von einer Schwingung zur andern schwankte von $\frac{1}{371}$ bis $\frac{1}{334}$. Allein die Erfahrung zeigt, dass sehr häufig sehr verschiedene Werthe des logarithmischen Decrements vorkommen: es steigt wohl an demselben Apparate bis gegen 0.00300, und sinkt zu andern Zeiten auf 0.00030 und selbst, in seltenen Fällen, noch tiefer herab. Immer aber geschehen, nach unsern Erfahrungen, die Veränderungen nur allmählig. Man wird also diese Abnahme nicht wohl allein dem Widerstande der Luft zuschreiben dürfen: aber die eigentliche Ursache, welche diese Verschiedenheiten bedingt, hat sich bisher unsern vielfach wiederholten Versuchen entzogen, und wir wünschen daher sehr, dass auch Beobachter an andern Orten ihre besondere Aufmerksamkeit auf dieses zur Zeit noch räthselhafte Phänomen richten mögen. Ein Umstand ist bei diesen Versuchen so oft bemerkt, dass wir ihn kaum noch für zufällig halten können, wenn auch ein Causalnexus noch ganz unerklärlich bleibt, nemlich dass die *sehr* kleinen Werthe des logarithmischen Decrements immer nur bei bedecktem, die sehr grossen hingegen gewöhnlich nur bei heiterm Himmel eintreten, wobei zum Überfluss noch bemerkt werden mag, dass der Apparat nicht an einem Seidenfaden, sondern an einem Metalldraht aufgehängt ist, und dass diese Versuche immer nur an windstillen Tagen angestellt, folglich in diesen beiden Beziehungen sowohl hygrometrischer Einfluss als Luftzug ganz ausser Frage sind.

Ist hingegen die Nadel von einem Multiplicator umgeben, der einen Theil einer geschlossenen Kette ausmacht, so tritt eine neue Ursache der Abnahme der Schwingungsbögen hinzu. Die Bewegung der Nadel inducirt nemlich in dieser Kette einen galvanischen Strom, dessen Intensität am stärksten ist, wenn die

*) Ein Mangel in der festen Verbindung der Theile des schwingenden Apparats unter einander hat immer eine schnelle unregelmässige Abnahme der Schwingungsbögen zur Folge.

Schwingungsgeschwindigkeit der Nadel am grössten ist, und der die entgegengesetzte Richtung annimmt, sobald die Nadel umkehrt: die Reaction dieses Stromes auf die Nadel besteht aber immer in einer Verminderung der Schwingungsgeschwindigkeit der letztern, und die Theorie ergibt, dass auch hievon eine Abnahme des Schwingungsbogens, sehr nahe in geometrischer Progression, die Folge sein muss. Da indessen die Intensität des inducirten Stromes auch durch den Widerstand, welchen die *ganze* Kette darbietet, bedingt wird, so ist die Vergrösserung des logarithmischen Decrements, welche der Multiplicator hervorbringt, am stärksten, wenn die Kette gleich hinter diesem abgeschlossen ist; sie fällt desto kleiner aus, je grösser der hinzukommende Theil der Kette ist, und bei offener Kette findet gar kein Einfluss Statt, sondern das logarithmische Decrement ist dasselbe, als wenn der Multiplicator ganz weggenommen ist. Der Apparat, an welchem die obigen Beobachtungen angestellt sind, hat einen Multiplicator von 610 Umwindungen, und wenn derselbe, ohne weitern Zusatz, geschlossen ist, steigt das logarithmische Decrement auf etwa 0.02400 *), so dass der Schwingungsbogen schon in etwa 9 Minuten auf die Hälfte reducirt wird, während bei offener Kette und einem solchen Werthe des logarithmischen Decrements, wie die obigen Beobachtungen ergaben, etwa drei Stunden dazu erforderlich sind. Bei der vierpfündigen Nadel des magnetischen Observatorium bewirkt der Schluss eines aus 536 Windungen bestehenden Multiplicators ein logarithmisches Decrement von nahe gleicher Grösse; da aber jene Nadel eine Schwingungsdauer von 21″6 hat, so kommt der Schwingungsbogen hier schon nach 4½ Minuten auf die Hälfte herab. Bei einer so bedeutenden Dämpfungskraft können, wenn die Nadel einmal beruhigt ist, falls nicht ausserordentliche Störungen von aussen oder ungewöhnlich starke schnelle Declinationsänderungen eintreten, gar keine erhebliche Schwingungen aufkommen, und ein solcher kräftiger Multiplicator gewährt daher, ausser seinen unzähligen andern Anwendungen, auch den wichtigen Nutzen, die Terminsbeobachtungen ungemein zu erleichtern, und alle andern Beruhigungsmittel entbehrlich zu machen.

In noch viel höherm Grade leistet aber diese Wirkung die oben [S. 372 d. B.] unter dem Namen eines Dämpfers erwähnte Vorrichtung. Der für das Magnetome-

*) Es ist nicht in allen Versuchen ganz gleich, da die Wirkung des Multiplicators sich mit einer, wie oben bemerkt ist, an sich nicht unveränderlichen Grösse verbindet. Auch hängt die Wirkung des Multiplicators selbst von dem mit der Temperatur veränderlichen Leitungsvermögen des Drahts mit ab.

ter des magnetischen Observatorium angefertigte Dämpfer besteht in zwei länglich viereckigen kupfernen Rahmen, jeder 13 Pfund wiegend, welche in die hölzernen Rahmen der zwei Multiplicatorhälften wie eine Fütterung eingeschoben werden können. Da diese Vorrichtung in sehr vielen Fällen ungemein nützliche Dienste leistet, und auch schon mehrern von Hrn. Meyerstein an auswärtige Beobachter gelieferten Magnetometern ein ähnlicher Hülfsapparat beigegeben ist, so werden einige denselben betreffende Bemerkungen hier nicht am unrechten Orte sein.

Zuvörderst wird jeder, welcher von einem solchen Apparat Gebrauch machen will, die Stärke seiner Dämpfungskraft in Zahlen kennen zu lernen wünschen. Man setzt zuerst die Nadel in sehr grosse Schwingungsbewegungen *) und zeichnet die Elongationen, so bald sie innerhalb der Scale fallen, und so lange der Schwingungsbogen noch eine beträchtliche Grösse behält, auf. Sind g, g', g'', g''' u.s.w. die so hervorgehenden Amplituden in Scalentheilen, so erhält man in den Differenzen ihrer Logarithmen $\log g - \log g'$, $\log g' - \log g''$, $\log g'' - \log g'''$ u.s.w. eben so viele Bestimmungen des logarithmischen Decrements. Zu einer Zeit, wo eine etwas beträchtliche Declinationsbewegung Statt findet, wird diese unter der Voraussetzung, dass sie während der Beobachtungen gleichförmig geschehe, eliminirt, wenn man sich der Formeln

$$\log(g+g') - \log(g'+g''), \quad \log(g'+g'') - \log(g''+g''') \text{ u.s.w.}$$

bedient, was, wie man leicht sieht, mit dem oben [S. 383 d. B.] angegebenen Verfahren auf Eins hinausläuft.

Einer der am 9. Januar 1838 angestellten Versuche gab z. B.

Elongationen	Amplitudem	Logarithmen	Differenzen
134.0			
1191.7	1057.7	3.02436	
			0.31137
675.3	516.4	2.71299	
			0.30850
929.1	253.8	2.40449	
			0.31141
805.2	123.9	2.09307	

*) Welche Mittel man auch dazu anwende, so wird man doch nicht darauf rechnen können, dass in völliger Strenge *reine* Schwingungen um eine verticale Axe erzeugt werden. Schon aus diesem Grunde darf man von den Resultaten nicht die allerschärfste Übereinstimmung erwarten, worauf es jedoch hier auch gar nicht ankommt.

Also im Mittel das logarithmische Decrement $= 0.31043$. Die andern Formeln geben

$$\log\frac{1574.1}{770.2} = 0.31043, \qquad \log\frac{770.2}{377.7} = 0.30945$$

also im Mittel 0.30994. Bei diesen Versuchen war der Multiplicator nicht geschlossen, oder es wirkte der Dämpfer allein. Aus andern Versuchen an demselben Tage, bei denen zugleich der Multiplicator geschlossen war, fand sich das logarithmische Decrement $= 0.33570$.

Da Kupfer, wenn es nicht ganz rein ist, einen wenn auch nur sehr schwachen directen magnetischen Einfluss ausüben kann, so ist es nicht rathsam, den Dämpfer bei solchen Beobachtungen anzuwenden, die absolute Declinationsbestimmungen zum Zweck haben, ohne sich vorher überzeugt zu haben, dass ein merklicher Einfluss dieser Art nicht vorhanden ist. Man erfährt dies durch Beobachtungen des Standes der Nadel, abwechselnd mit und ohne Dämpfer, verbunden mit gleichzeitigen Beobachtungen des Standes einer in angemessener Entfernung befindlichen zweiten Nadel, um von den während der Beobachtungen Statt findenden Declinationsveränderungen Rechnung tragen zu können. In Ermangelung eines zweiten Magnetometers kann man diese Elimination, nur weniger zuverlässig, dadurch beschaffen, dass man die alternirenden Bestimmungen in nahe gleichen Zwischenzeiten macht, und jeden Stand ohne Dämpfer mit dem Mittel des vorhergehenden und folgenden Standes mit Dämpfer, und umgekehrt, vergleicht. Bei der Anfertigung des Dämpfers für das hiesige magnetische Observatorium hat Hr. Meyerstein die Vorsicht angewandt, sich nur ganz neuer Feilen zu bedienen; der fertige Dämpfer ist hernach eine beträchtliche Zeit in verdünnte Salzsäure, dann in Lauge gelegt, und zuletzt mit Wasser abgespült. Versuche der beschriebenen Art haben keinen merklichen Einfluss dieses Dämpfers auf den Stand der Nadel zu erkenen gegeben.

Was bei sich immer gleich bleibenden Schwingungsbögen strenge gültig sein würde, erleidet im Fall der Natur, wo der Schwingungsbogen fortwährend abnimmt, mehrere Modificationen, die hier noch etwas näher betrachtet zu werden verdienen, wäre es auch nur, um bestimmt beurtheilen zu können, unter welchen Umständen sie als unmerklich betrachtet werden dürfen.

Eine in geometrischer Progression erfolgende Abnahme des Schwingungsbogens setzt eine der Bewegung in jedem Augenblick in einfachem Verhältniss

ihrer Geschwindigkeit entgegenwirkende Kraft voraus *). Die allgemeine Gleichung für die Schwingungsbewegung hat daher, wenn wir die Grössen von der dritten Ordnung in Beziehung auf den Schwingungsbogen vernachlässigen, die Form

$$0 = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2} + nn(x-p) + 2\varepsilon.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

wo x den den Stand der Nadel für die Zeit t bezeichnenden, p den dem Ruhestande entsprechenden Scalentheil bedeuten, nn und 2ε hingegen die magnetische Directionskraft und jene retardirende Kraft, beide mit dem Trägheitsmoment der Nadel dividirt. Das vollständige Integral dieser Gleichung ist

$$x = p + Ae^{-\varepsilon t}\sin\sqrt{(nn-\varepsilon\varepsilon)}.(t-B)$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, A und B die beiden durch die Integration eingeführten arbiträren Constanten bedeuten. Ohne die retardirende Kraft würde das Integral

$$x = p + A\sin n(t-B)$$

sein. Die Nadel macht also auch in jenem Fall wie in diesem periodische Oscillationen um den Punkt p, aber ein doppelter Unterschied findet dabei Statt. Theils ist im zweiten Fall die grösste Abweichung von der Mitte oder die halbe Amplitude constant $= A$, während sie im erstern in geometrischer Progression abnimmt, theils schreitet das Argument der periodischen Function im ersten Fall langsamer fort als im andern. Setzt man die Schwingungsdauer im zweiten Fall, wo sie allein von der magnetischen Directionskraft abhängt, $= T$, im ersten $= T'$, so hat man, π in üblicher Bedeutung genommen,

$$nT = \pi, \qquad \sqrt{(nn-\varepsilon\varepsilon)}.T' = \pi$$

Wenn man also Kürze halber n' anstatt $\sqrt{(nn-\varepsilon\varepsilon)}$ schreibt, und einen Hülfswinkel φ einführt, wonach

$$\sin\varphi = \frac{\varepsilon}{n}, \qquad \cos\varphi = \frac{n'}{n}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\varepsilon}{n'}$$

wird, wenn man ferner, wie oben, mit λ das logarithmische Decrement und mit

*) *Strenge* genommen gilt beides nur für unendlich kleine Schwingungen.

m den Modulus des Systems bezeichnet, so erhält man

$$T' = \frac{T}{\cos\varphi}$$
$$\frac{\lambda}{m} = \varepsilon T' = n' \operatorname{tang}\varphi \,.\, T' = \pi \operatorname{tang}\varphi$$

folglich

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\lambda}{m\pi} = \frac{\lambda}{1.364376}$$

Für $\lambda = 0.02400$ und $T = 42''18$ findet sich nach diesen Formeln $\varphi = 1^0\, 0'\, 28''$ und $T' = 42''18653$. Der blosse Schluss des Multiplicators bringt also nur eine geringe Vergrösserung der Schwingungsdauer hervor. Dagegen geben die oben beim Gebrauch des Dämpfers, allein, oder zugleich mit dem Multiplicator, gefundenen Zahlen, wenn man $T = 20''60$ setzt,

$\lambda = 0.30994$	$\varphi = 12^0\, 47'\, 54''$	$T' = 21''12484$
$\lambda = 0.33570$	$\varphi = 13\;\; 49\;\; 22$	$T' = 21.21439$

Die Beobachtungen stimmen mit dieser berechneten Vergrösserung der Schwingungsdauer so genau überein, als man nur von der geringen Anzahl von Schwingungen, auf die man sich dabei beschränken muss, erwarten kann.

In dem Fall abnehmender Schwingungsbögen sind die wahren Zeiten der Elongationen den aus correspondirenden Stellungen abgeleiteten nicht genau gleich, und bei so starken logarithmischen Decrementen, wie unter Anwendung eines Dämpfers Statt finden, wird dieser Unterschied ziemlich beträchtlich.

Da in dem oben gegebenen Integral offenbar B die Zeit eines Durchganges durch den Ruhestand p bedeutet, und es gleichgültig ist, von welchem Augenblick an die Zeit gezählt wird, so wollen wir grösserer Einfachheit wegen $B = 0$ setzen. Unsere Formel wird so

$$x = p + A e^{-\varepsilon t} \sin n't.$$

Der nächste Durchgang durch p, welcher auf den bei $t = 0$ folgt, findet Statt bei $n't = 180^0$, oder $t = T'$; die aus diesen correspondirenden Beobachtungen einfach abgeleitete Zeit der Elongation ist also $t = \frac{1}{2} T'$, während der wirkliche Stillstand schon früher eintritt. Man hat nemlich für $\frac{dx}{dt} = 0$,

$$0 = A e^{-\varepsilon t} (-\varepsilon \sin n't + n' \cos n't)$$

Mithin

$$\operatorname{cotang} n't = \frac{\varepsilon}{n'} = \operatorname{tang}\varphi$$

Daher der erste positive Werth von $n't = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, und $t = \frac{1}{2} T' - \frac{\varphi T'}{\pi}$, oder in so fern φ in Graden ausgedrückt ist,

$$t = \tfrac{1}{2} T' - \frac{\varphi}{180^0} \,.\, T'$$

Offenbar findet eine gleiche Differenz bei der folgenden Elongation Statt. Aus den oben angegebenen Zahlen findet sie sich $= 0''23$ für den fünfundzwanzigpfündigen Stab unter Anwendung des Multiplicators; $= 1''50$ für das Magnetometer des M. O., wenn der Dämpfer allein, und $= 1''63$, wenn Dämpfer und Multiplicator zugleich gebraucht werden.

Da die wirklichen Stillstände um eine constante, von der Grösse des Schwingungsbogens unabhängige, Zeit früher eintreten, als die aus aufeinanderfolgenden Durchgängen durch den Ruhestand p geschlossenen Augenblicke, so kann man auch ohne Weiteres die letztern beibehalten, da es für den Gebrauch zur Bestimmung der Schwingungsdauer nur auf die *Unterschiede* der Elongationszeiten ankommt. Nur muss man Sorge tragen, den Punkt p selbst oder einen sehr nahe liegenden zum Beobachten zu wählen, und kleine Schwingungsbögen auch noch um so mehr ausschliessen, weil bei solchen in dem Fall starker logarithmischer Decremente schon eine geringe Abweichung vom richtigen p einen merklichen Fehler erzeugen würde. Obgleich es nicht schwer ist, jener Bedingung Genüge zu leisten, so mag doch noch die allgemeine Formel für den Fehler der aus correspondirenden Durchgängen geschlossenen Elongationen hier Platz finden.

Es sei u die halbe Zwischenzeit zwischen zwei correspondirenden Durchgängen eines Punkts x, und $\frac{1}{2} T' - \delta$ das Mittel der Durchgangszeiten oder die daraus geschlossene Elongationszeit. Es sind also die Durchgangszeiten selbst $\frac{1}{2} T' - u - \delta$ und $\frac{1}{2} T' + u - \delta$, und wir haben folglich

$$x = p + A e^{-\varepsilon(\frac{1}{2} T' - u - \delta)} \sin n'(\tfrac{1}{2} T' - u - \delta)$$
$$x = p + A e^{-\varepsilon(\frac{1}{2} T' + u - \delta)} \sin n'(\tfrac{1}{2} T' + u - \delta)$$

woraus, wegen $\frac{1}{2} n' T' = \frac{1}{2}\pi$, folgt

$$e^{2\varepsilon u} \cos n'(u + \delta) = \cos n'(u - \delta)$$

und mithin

$$\operatorname{tang} n'\delta = \frac{e^{2\varepsilon u}-1}{(e^{2\varepsilon u}+1)\operatorname{tang} n'u}$$

Für $u = \frac{1}{2}T'$ gibt diese Formel $\delta = 0$; dies ist der Fall, wo der Ruhestandspunkt p selbst für die Durchgänge gewählt ist: hingegen entspricht die Annahme eines unendlich kleinen Werths dem wahren Stillstandspunkte, und die Formel gibt hier

$$\operatorname{tang} n'\delta = \frac{\varepsilon}{n'} = \operatorname{tang} \varphi$$

Also $\delta = \frac{\varphi}{n'} = \frac{\varphi T'}{\pi}$, übereinstimmend mit dem oben gefundenen.

Endlich bedarf in dem Fall abnehmender Schwingungsbögen auch die Berechnung der auf den Ruhestand der Nadel bezüglichen Beobachtungen einer Modification, die freilich nur dann merklich wird, wenn die Schwingungen eine sehr starke Abnahme erleiden.

Die Stellungen der Nadel x, x', welche zweien um eine Schwingungsdauer verschiedenen Zeiten t, $t+T'$ entsprechen, haben die Werthe

$$x = p + Ae^{-\varepsilon t}\sin n't$$
$$x' = p + Ae^{-\varepsilon t-\varepsilon T'}\sin(n't+n'T')$$

oder weil $n'T' = \pi$

$$x' = p - Ae^{-\varepsilon t-\varepsilon T'}\sin n't$$

oder wenn wir, wie oben, mit θ den Bruch bezeichnen, dessen briggischer Logarithme $-\lambda$, also der natürliche $\varepsilon T'$ ist,

$$x' = p - \theta Ae^{-\varepsilon t}\sin n't$$

Es erhellt also, dass man, um p zu finden, nicht mehr das arithmetische Mittel zwischen x und x' nehmen darf, sondern die Differenz zwischen x und x' in dem Verhältniss von 1 zu θ vertheilen muss, oder dass

$$p = \frac{\theta x + x'}{1+\theta} = x + \frac{1}{1+\theta}.(x'-x) = x' - \frac{\theta}{1+\theta}.(x'-x)$$

wird. Da übrigens bei diesen Beobachtungen die Differenz $x'-x$ immer sehr klein ist, so wird man zur Bequemlichkeit der Rechnung sich verstatten können, anstatt $\frac{\theta}{1+\theta}$ einen nahe kommenden durch kleine Zahlen auszudrückenden Bruch

anzuwenden, z. B. kann man für $\lambda = 0.30994$, anstatt des genaueren Werths 0.3288 den genäherten $\frac{1}{3}$ wählen.

Hiebei entsteht nun aber die Frage, für welchen Augenblick dieses Resultat als gültig zu betrachten ist. So wie in dem Falle, wo die Schwingungsbögen nur sehr langsam abnehmen, das einfache Mittel der Scalentheile als dem einfachen Mittel der Zeiten entsprechend angenommen wird, scheint nun zwar, dass bei ungleich vertheiltem Unterschied der Stände die Zwischenzeit in demselben Verhältniss zu theilen, also der Stand $x + \frac{x'-x}{1+\theta}$ als für $t + \frac{T'}{1+\theta}$ gültig anzusehen sei: allein dies ist theoretisch nicht richtig, und es scheint eine genauere Erörterung, wenn auch in gewöhnlichen Fällen praktisch ganz unerheblich, doch in theoretischer Beziehung hier noch eines Platzes nicht unwürdig zu sein.

Offenbar kommt der Gültigkeitsaugenblick nur in so fern in Frage, als man sich nicht erlauben will, die magnetische Declination in der Zwischenzeit zwischen den beiden Aufzeichnungen als constant zu betrachten: aber als sich gleichförmig während dieser Zwischenzeit ändernd wird man sie immer betrachten können, und müssen, wenn der Rechnung eine bestimmte Unterlage gegeben werden soll In diesem Falle hat also unsere Fundamentalgleichung die Form

$$0 = \frac{\mathrm{dd}x}{\mathrm{d}t^2} + nn(x-p-\alpha t) + 2\varepsilon.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

deren vollständiges Integral ist

$$x = p - \frac{2\alpha\varepsilon}{nn} + \alpha t + Ae^{-\varepsilon t}\sin n'(t-B)$$

wenn, wie oben, n' für $\sqrt{(nn-\varepsilon\varepsilon)}$ gesetzt wird. Wenn also x' den Stand für die Zeit $t+T'$ ausdrückt, so wird, θ in voriger Bedeutung genommen,

$$x' = p - \frac{2\alpha\varepsilon}{nn} + \alpha t + \alpha T' - \theta Ae^{-\varepsilon t}\sin n'(t-B)$$

und folglich

$$\frac{\theta x + x'}{1+\theta} = p - \frac{2\alpha\varepsilon}{nn} + \alpha t + \frac{\alpha T'}{1+\theta}$$

welches Resultat demnach der Ruhestand für die Zeit

$$t + \frac{T'}{1+\theta} - \frac{2\varepsilon}{nn} = t + \frac{T'}{1+\theta} - \frac{\sin 2\varphi . T'}{\pi}$$

ist. Für $\lambda = 0.30994$ ist also die Zeit, wofür das nach obiger Vorschrift berechnete Resultat gilt $= t + 0.5337\,T'$, für $\lambda = 0.33570$ hingegen $= t + 0.5365\,T'$.

Man sieht also, dass selbst bei einer so starken Dämpfung der Augenblick der Gültigkeit von dem einfachen Mittel der Zeiten nur wenig verschieden ist.

Bei allem, was bisher entwickelt ist, liegt die Voraussetzung zum Grunde, dass ε kleiner sei als n; im entgegengesetzten Fall nimmt das Integral der Fundamentalgleichung eine andere Form an. Man erhält nemlich anstatt des Gliedes $Ae^{-\varepsilon t}\sin\sqrt{(nn-\varepsilon\varepsilon)}.(t-B)$, in dem Fall, wo ε grösser ist als n, zwei Glieder von der Form

$$Ae^{-(\varepsilon+\sqrt{(\varepsilon\varepsilon-nn)})t}+Be^{-(\varepsilon-\sqrt{(\varepsilon\varepsilon-nn)})t}$$

und in dem Fall, wo $\varepsilon=n$ ist, von dieser

$$(A+Bt)e^{-\varepsilon t}$$

In beiden Fällen findet also in der Bewegung gar nichts periodisches mehr Statt, sondern der Stand nähert sich asymptotisch dem Ruhestande. Für unsern Dämpfer ist $\frac{\varepsilon}{n}=0.22152$, und es müsste also ein mehr als $4\frac{1}{2}$ mal stärker wirkender Dämpfer angewandt werden, um solchen Erfolg hervorzubringen. Offenbar aber würde es dazu nicht hinreichend sein, die Metallmenge nur in demselben Verhältniss zu vergrössern, in sofern diese Vergrösserung nach aussen angebracht werden müsste, und die äussern Schichten des Metallrahmens vergleichungsweise weniger zur Inductionswirkung beitragen als die innern. Allein es würde nicht einmal anzurathen sein, eine Dämpfung von einer solchen Stärke anzuwenden, dass die Bewegung aufhörte periodisch zu sein, theils weil, sobald ε den Grenzwerth n überschreitet, die Annäherung zu dem Ruhestand wieder langsamer geschieht, theils weil man dann den wesentlichen Vortheil verlöre, aus zwei beliebigen, um T' von einander entfernten, Aufzeichnungen den Ruhestand auf eine bequeme Art berechnen zu können.

ÜBER EIN MITTEL

DIE BEOBACHTUNG VON ABLENKUNGEN ZU ERLEICHTERN.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1839. II.

1.

Wenn zu der erdmagnetischen Kraft noch eine andere auf die Nadel eines Magnetometers stetig, aber in einer gegen den magnetischen Meridian geneigten Richtung wirkende Kraft hinzutritt, so erhält die Nadel eine veränderte Gleichgewichtsstellung, und die Grösse der Ablenkung kann zur Abmessung der Zusatzkraft dienen. Zur Messbarkeit der Ablenkung ist aber erforderlich, dass nicht nur die neue Gleichgewichtsstellung noch innerhalb der Scale liege, sondern auch, insofern man nicht den völligen Ruhezustand der Nadel abwarten kann oder will, dass die noch Statt findenden Schwingungen die Grenzen der Scale nicht überschreiten. War die Nadel, so lange der Erdmagnetismus allein auf sie wirkte, in Ruhe, und setzt man die Zusatzkraft auf einmal in volle Wirkung, so fängt jene eine Schwingung an, deren Mitte die neue Gleichgewichtsstellung ist, während die vorige Stellung den einen Elongationspunkt bildet, und der zweite eben soweit von der Mitte auf der entgegengesetzten Seite hinausfällt. Liegt nun die neue Gleichgewichtsstellung zwar innerhalb, aber doch nahe an der Grenze der Scale, so würde man bei der langsamen Abnahme des Schwingungsbogens ohne Anwendung künstlicher Hülfsmittel auf diese Art erst lange zu warten haben, bis die Bestimmung jenes Punkts möglich würde. Dadurch würde aber in allen Fällen schon wegen der stündlichen Veränderung der Declination, die Zuverlässigkeit und Brauchbarkeit der Bestimmung sehr vermindert, und fast ganz vereitelt werden in solchen Fällen, wo die Stärke der Zusatzkraft schon in kurzer Zeit beträchtliche Veränderungen erleidet, wie bei galvanischen Strömen.

2.

Durch folgendes einfache Verfahren wird diesem Übelstande abgeholfen. Man lässt die Zusatzkraft zuerst nur während des dritten Theils der Schwingungsdauer wirken, suspendirt sie dann während einer eben so langen Zwischenzeit und setzt sie darauf erst in beharrliche Wirksamkeit. Ist also z. B. die Schwingungsdauer der Nadel des Magnetometers 30 Secunden, und soll die durch einen galvanischen Strom erzeugte Ablenkung gemessen werden, so schliesst man die Kette bei einem Secundenschlage, welchen man als 0 zählt; öffnet wieder bei 10", und schliesst endlich definitiv bei 20". Soll die Ablenkung durch einen an einen bestimmten Platz zu legenden Magnetstab geschehen, so nähert man sich dem vorher genau und bequem bezeichneten Platze mit dem anfangs vertical gehaltenen Magnetstabe, legt denselben bei 0" plötzlich nieder, richtet ihn bei 10" eben so schnell wieder auf und legt ihn zum zweiten Male bei 20" definitiv hin. Der Erfolg ist, dass die Nadel von ihrer ursprünglichen Ruhestellung sich derjenigen Stellung, welche der Ablenkung entspricht, während der ersten 10 Secunden mit beschleunigter Geschwindigkeit nähert, bei 10" gerade die Mitte zwischen beiden Stellungen erreicht hat, und dann während der zweiten 10 Secunden die andere Hälfte des Zwischenraumes mit retardirter Bewegung durchläuft, so dass sie bei 20 Secunden die neue Stellung erreicht und alle Bewegung verloren haben wird.

Man sieht leicht, dass auf ganz ähnliche Weise die Nadel von einem ruhigen Ablenkungszustande zu dem entgegengesetzten so hinübergeführt werden kann, dass sie in demselben ohne Bewegung ist: man lässt nemlich die ablenkende Kraft während des dritten Theils der Schwingungsdauer im entgegengesetzten Sinne wirken, dann während eben so langer Zeit wieder im frühern Sinn, und wechselt darauf von neuem. Für galvanische Ströme erhält man den Wechsel fast augenblicklich durch einen zweckmässigen Commutator; für ablenkende Magnetstäbe durch eine rasche halbe Umdrehung (am bequemsten durch eine horizontale), so dass der Nordpol des Stabes an den Platz des Südpols kommt.

Endlich ist klar, dass auf dieselbe Weise nach beobachteter Ablenkung die Nadel wieder ruhig in den reinen magnetischen Meridian gebracht werden kann: man braucht nur die ablenkende Kraft zuerst während eines Drittheils der Schwingungsdauer zu suspendiren, dann eben so lange noch einmal wirken und endlich aufhören zu lassen.

3.

Dem beschriebenen Verfahren liegt die Voraussetzung zum Grunde dass

erstens die Schwingungen der Nadel so erfolgen, dass der Abstand von der Mitte der Schwingung (so lange diese Mitte selbst nicht abgeändert wird) dem Sinus eines sich gleichförmig ändernden und während einer Schwingungsdauer um 180° zunehmenden Winkels proportional bleibt, und

zweitens, die Schwingungsdauer durch die Zusatzkraft nicht verändert wird.

Insofern beide Voraussetzungen nicht *in absoluter Schärfe* gültig sind, und ausserdem auch bei der Ausführung weder der Wechsel ganz augenblicklich geschehen, noch die vorgeschriebenen Zwischenzeiten absolut genau eingehalten werden können, wird allerdings nach Vollendung der Operation die Nadel selten in vollkommener Ruhe angetroffen werden: allein für den praktischen Zweck ist es schon hinreichend, wenn die übrig bleibende Bewegung so gering ist, dass man die wahre Gleichgewichtsstellung auf gewöhnliche Weise sogleich zu beobachten anfangen kann.

Unter den Statt findenden Umständen werden jene Voraussetzungen nur sehr wenig von der Wahrheit abweichen können. Die Anwendbarkeit des Magnetometers beruht an sich schon darauf, dass die Zusatzkraft nur eine mässige Ablenkung hervorbringt, wobei (einen sogleich zu erwähnenden Ausnahmefall beiseite gesetzt) das in der ersten Voraussetzung enthaltene Gesetz hinreichend genau gilt. Die Veränderung der Schwingungsdauer durch die ablenkende Kraft ist ganz unmerklich, wenn diese senkrecht gegen den magnetischen Meridian wirkt, wie fast immer der Fall ist: wirkte sie aber auch in einer schiefen Richtung, so würde, insofern sie selbst nur ein kleiner Bruchtheil der erdmagnetischen Kraft ist, die dadurch bewirkte Veränderung der Schwingungsdauer doch für die kurze Zeit der Operation ganz unerheblich bleiben.

Nur Ein Fall ist auszunehmen, nemlich wenn die Nadel ihre Schwingungen unter dem Einflusse eines die Grösse des Schwingungsbogens bedeutend vermindernden Dämpfers macht. In diesem Falle ist das obige Gesetz nicht mehr gültig, und eine genaue Befolgung des oben beschriebenen Verfahrens würde nicht zum Ziele führen: von der andern Seite ist dann aber auch allerdings der im 1. Art. bemerkte Übelstand viel geringer, da ein kräftiger Dämpfer die Nadel von selbst in mässiger Zeit zur Ruhe bringt. Da indessen für diesen Fall jenes Verfahren nur einer Modification bedarf, um denselben Erfolg zu erreichen, und es allemal erwünscht sein muss, jeden unnöthigen Zeitverlust vermeiden zu können, so ist es, in praktischer wie in theoretischer Beziehung, der Mühe werth, die Frage ganz allgemein zu betrachten.

4.

Wir haben zuvörderst folgende allgemeine Aufgabe aufzulösen.

Ein Magnetstab schwingt unter wiederholter Abänderung der auf ihn wirkenden Kräfte, wobei jedoch die Schwingungsdauer und das logarithmische Decrement*) unverändert, und die Schwingungsbogen klein genug bleiben, um Grössen der dritten Ordnung vernachlässigen zu können. Man soll aus dem anfänglichen Bewegungszustande denjenigen, welcher nach der letzten Abänderung Statt findet, ableiten.

Es sei T die Schwingungsdauer, ε das logarithmische Decrement, e die Basis der hyperbolischen, m der Modulus der briggischen Logarithmen, π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser. Man setze

$$n = \frac{\pi}{T}, \qquad \varepsilon = \frac{\lambda}{mT}$$

Unter obigen Voraussetzungen wird demnach der Stand x für die Zeit t durch die Formel ausgedrückt

$$x = p + Ae^{-\varepsilon t}\sin(nt - B)$$

welcher man auch die Gestalt geben kann

$$x = p + ae^{-\varepsilon t}\cos nt + be^{-\varepsilon t}\sin nt$$

wo p die Gleichgewichtsstellung ausdrückt, und die Coëfficienten a, b so lange constant bleiben, als p constant ist. Die Geschwindigkeit der Bewegung findet sich hieraus

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-\varepsilon t}(na\sin nt + \varepsilon a\cos nt - nb\cos nt + \varepsilon b\sin nt)$$

oder wenn man einen Hülfswinkel φ einführt, so dass $\frac{\varepsilon}{n} = \operatorname{tang}\varphi$ wird,

*) Resultate, 1837. IV. [S. 383. d. B.]

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{ne^{-\varepsilon t}}{\cos\varphi}(a\sin(nt+\varphi) - b\cos(nt+\varphi))$$

Für $ae^{-\varepsilon t}\cos nt + be^{-\varepsilon t}\sin nt$ schreiben wir u, so dass $x = p + u$ wird.

Es seien nun t', t'', t''' die bestimmten Werthe von t, wo eine Veränderung der wirkenden Kraft vorgenommen wird; ferner seien die bestimmten Werthe von p, a, b in den verschiedenen Zeitabschnitten folgende:

$$\begin{array}{lll} p^0,\ a^0,\ b^0 & \text{vor} & t' \\ p',\ a',\ b' & \text{von} & t' \text{ bis } t'' \\ p'',\ a'',\ b'' & \text{von} & t'' \text{ bis } t''' \\ p''',\ a''',\ b''' & \text{nach} & t''' \end{array}$$

Endlich gehe der allgemeine Ausdruck von u, wenn für a und b die bestimmten Werthe substituirt werden, über in u^0, u', u'', u''', so dass vor dem ersten Wechsel $x = p^0 + u^0$ wird, von da bis zum zweiten $x = p' + u'$ u. s. f.

Da der Augenblick t' zugleich der letzte des ersten Zeitabschnitts und der erste des folgenden ist, so müssen für $t = t'$ sowohl x als $\frac{dx}{dt}$ einerlei Werth erhalten, man möge in den obigen allgemeinen Ausdrücken für p, a, b die Werthe p^0, a^0, b^0, oder p', a', b' substituiren.

Es ist also

$$0 = p' - p^0 + (a' - a^0)e^{-\varepsilon t'}\cos nt' + (b' - b^0)e^{-\varepsilon t'}\sin nt'$$
$$0 = (a' - a^0)\sin(nt' + \varphi) - (b' - b^0)\cos(nt' + \varphi)$$

woraus man leicht ableitet

$$a' - a^0 = -\frac{p' - p^0}{\cos\varphi}.e^{\varepsilon t'}\cos(nt' + \varphi)$$
$$b' - b^0 = -\frac{p' - p^0}{\cos\varphi}.e^{\varepsilon t'}\sin(nt' + \varphi)$$

und hieraus

$$u' = u^0 - \frac{p' - p^0}{\cos\varphi}.e^{-\varepsilon(t - t')}\cos(n(t - t') - \varphi)$$

Auf gleiche Art erhält man

$$u'' = u' - \frac{p'' - p'}{\cos\varphi}.e^{-\varepsilon(t - t'')}\cos(n(t - t'') - \varphi)$$
$$u''' = u'' - \frac{p''' - p''}{\cos\varphi}.e^{-\varepsilon(t - t''')}\cos(n(t - t''') - \varphi)$$

und so ferner, wenn noch mehrere Wechsel der bewegenden Kräfte Statt finden.

Es wird also hiedurch aus dem anfänglichen Bewegungszustande jeder nachfolgende bestimmt.

5.

Für den Fall der gegenwärtigen Untersuchung ist $p'' = p^0$ und $p''' = p'$ zu setzen. Dadurch wird

$$u''' = u^0 - \frac{p'-p^0}{\cos\varphi} \cdot e^{-\varepsilon t} \cdot$$
$$\cdot \{e^{\varepsilon t'} \cos(n(t-t')-\varphi) - e^{\varepsilon t''} \cos(n(t-t'')-\varphi) + e^{\varepsilon t'''} \cos(n(t-t''')-\varphi)\}$$

welche Formel, wenn man

$$e^{-\varepsilon(t''-t')} \cos n(t''-t') - 1 + e^{\varepsilon(t'''-t'')} \cos n(t'''-t'') = f$$
$$e^{-\varepsilon(t''-t')} \sin n(t''-t') \quad - \quad e^{\varepsilon(t'''-t'')} \sin n(t'''-t'') = g$$

setzt, übergeht in

$$u''' = u^0 - \frac{p'-p^0}{\cos\varphi} \cdot e^{-\varepsilon(t-t'')} \cdot \{f \cos(n(t-t'')-\varphi) - g \sin(n(t-t'')-\varphi)\}$$

Hieraus folgt, dass wenn die Zwischenzeiten $t''-t'$, $t'''-t''$ so bestimmt sind, dass $f=0$ und $g=0$ wird, allgemein

$$u''' = u^0$$

oder $a''' = a^0$, $b''' = b^0$ wird.

War also vor den Wechseln die Nadel in p^0 in Ruhe, so wird sie, nach denselben, sich in p' in Ruhe befinden: im entgegengesetzten Falle wird die Nadel nach den drei Wechseln in jedem Augenblick genau dieselbe Geschwindigkeit und dieselbe Stellung gegen den Mittelpunkt ihrer Bewegung p' haben, welche sie relativ gegen p^0 in demselben Augenblicke haben würde, wenn sie ihre ursprüngliche Bewegung ungestört fortgesetzt hätte: mit Einem Worte, bloss der Mittelpunkt der Bewegung wird versetzt, die Bewegung selbst aber gar nicht geändert sein.

6.

Es bleibt nun noch übrig, die Zwischenzeit so zu bestimmen, dass den Gleichungen $f=0$, $g=0$ Genüge geschehe. Setzt man

$$t''-t' = qT, \quad t'''-t'' = rT$$

und erinnert sich, dass $e = 10^m$, so werden jene Gleichungen

$$10^{-q\lambda} \cos q\pi + 10^{r\lambda} \cos r\pi = 1$$
$$10^{-q\lambda} \sin q\pi = 10^{r\lambda} \sin r\pi$$

Für den Fall einer unmerklichen Abnahme des Schwingungsbogens muss also $\cos q\pi + \cos r\pi = 1$ und $\sin q\pi = \sin r\pi$ gesetzt werden, mithin

$$q\pi = r\pi = 60^\circ \text{ oder } = \tfrac{1}{3}\pi, \quad \text{und } t''-t' = t'''-t'' = \tfrac{1}{3}T$$

wie schon im 2. Artikel bemerkt ist. Für den Fall eines merklichen logarithmischen Decrements hingegen werden jene Gleichungen auf indirectem Wege aufzulösen sein, welcher Rechnung man folgende Form geben kann.

Aus der Verbindung der Gleichungen folgt

$$\text{tang}\, r\pi = \frac{\sin q\pi}{10^{q\lambda} - \cos q\pi}, \qquad 10^{2r\lambda} = 1 - 2 \cdot 10^{-q\lambda} \cos q\pi + 10^{-2q\lambda}$$

Durch Elimination von r hat man also die Gleichung mit Einer unbekannten Grösse

$$\frac{\pi}{2\lambda} \log(1 - 2 \cdot 10^{-q\lambda} \cos q\pi + 10^{-2q\lambda}) = \text{Arc. tang} \frac{\sin q\pi}{10^{q\lambda} - \cos q\pi}$$

wo der briggische Logarithme verstanden ist. Nachdem derselben Genüge geleistet ist, hat man offenbar zugleich den Werth von r.

7.

Um denjenigen, welche das beschriebene Verfahren unter Anwendung eines Dämpfers ausüben wollen, die im vorhergehenden Artikel erklärte Rechnung zu ersparen, theile ich hier eine im voraus berechnete Tafel mit, aus welcher für jedes logarithmische Decrement das Verhältniss der beiden Zwischenzeiten zur Schwingungsdauer sogleich entnommen werden kann. Man sieht daraus, dass mit zunehmendem logarithmischen Decrement die erste Zwischenzeit immer grösser, die zweite immer kleiner wird. Die Summe beider ist zwar zwei Drittheilen der Schwingungsdauer nur für $\lambda = 0$ genau gleich, entfernt sich aber davon viel langsamer. Dass es bei der wirklichen Anwendung zureicht, etwa nur die ersten Decimalen der Werthe von q und r zu berücksichtigen, bedarf keiner Erinnerung.

Tafel.

λ	q	r	λ	q	r
0	0.33333	0.33333	0.30	0.45921	0.21406
0.01	0.33757	0.32911	0.31	0.46322	0.21048
0.02	0.34181	0.32489	0.32	0.46721	0.20694
0.03	0.34606	0.32068	0.33	0.47118	0.20343
0.04	0.35031	0.31648	0.34	0.47513	0.19996
0.05	0.35456	0.31229	0.35	0.47906	0.19652
0.06	0.35882	0.30812	0.36	0.48297	0.19311
0.07	0.36308	0.30395	0.37	0.48685	0.18975
0.08	0.36734	0.29981	0.38	0.49071	0.18641
0.09	0.37160	0.29568	0.39	0.49454	0.18311
0.10	0.37585	0.29156	0.40	0.49835	0.17985
0.11	0.38011	0.28746	0.41	0.50214	0.17663
0.12	0.38436	0.28338	0.42	0.50590	0.17344
0.13	0.38861	0.27932	0.43	0.50963	0.17029
0.14	0.39285	0.27528	0.44	0.51334	0.16718
0.15	0.39708	0.27126	0.45	0.51702	0.16411
0.16	0.40131	0.26727	0.46	0.52067	0.16107
0.17	0.40552	0.26329	0.47	0.52430	0.15808
0.18	0.40973	0.25934	0.48	0.52790	0.15512
0.19	0.41393	0.25542	0.49	0.53147	0.15220
0.20	0.41812	0.25152	0.50	0.53501	0.14931
0.21	0.42230	0.24764	0.51	0.53852	0.14647
0.22	0.42646	0.24379	0.52	0.54201	0.14367
0.23	0.43061	0.23997	0.53	0.54546	0.14090
0.24	0.43474	0.23618	0.54	0.54889	0.13817
0.25	0.43886	0.23242	0.55	0.55229	0.13548
0.26	0.44297	0.22868	0.56	0.55566	0.13283
0.27	0.44705	0.22498	0.57	0.55900	0.13022
0.28	0.45112	0.22131	0.58	0.56231	0.12765
0.29	0.45517	0.21767	0.59	0.56559	0.12511
0.30	0.45921	0.21406	0.60	0.56884	0.12261

8.

Die unserer Theorie zum Grunde liegende Voraussetzung, dass die drei Wechsel augenblicklich geschehen, findet bei der wirklichen Ausübung des Verfahrens in aller Schärfe niemals Statt, obwohl bei Ablenkungen durch galvanische Ströme die zu jedem Wechsel nöthige Zeit als unmerklich betrachtet werden kann. Bei Ablenkungen durch Magnetstäbe hingegen ist, nach Maassgabe ihrer Grösse und Schwere, diese Zeit schon mehr oder weniger bedeutend, und bei fünfundzwanzigpfündigen werden zu Vollführung eines Wechsels immer mehrere Secunden erforderlich sein, besonders wenn nicht von einem Wechsel zwischen verticaler und horizontaler Lage, sondern zwischen zweien entgegengesetzten La-

gen die Rede ist. Für diesen Fall, welcher in der That der bei weiten wichtigste und gewöhnlichste ist, lässt sich aber die Ausführung der Operation leicht so einrichten, dass der Erfolg kaum merklich gestört wird. Man muss nur Sorge tragen, dass der zweite und dritte Wechsel auf gleiche Weise geschehen, wie der erste, also auch eine gleich lange Zeit ausfüllen, und diese Zeit den sonst nöthigen Zwischenzeiten abbrechen. Ist z. B. (wie *Res.* 1837. IV.) [S. 390. d. B.] das logarithmische Decrement 0.33570, die Schwingungsdauer 21″21439, so folgt aus obiger Tafel die erste Zwischenzeit = 10″04, die zweite = 4″27: findet man nun zur Ausführung eines Wechsels drei Secunden nöthig, so *beginnt* man den ersten Wechsel bei 0″; von 3″ bis 10″ bleibt der Stab in der neuen Lage; durch den bei 10″ *anfangenden* neuen Wechsel ist der Stab bei 13″ in die erste Lage zurückgebracht, in welcher er nur 1¼ Secunden liegen bleibt, worauf der dritte Wechsel anfängt, so dass erst mit 17¼ Secunden die ganze Operation vollendet ist. Eine ausgedehntere, hier jedoch des Raumes wegen zu übergehende Untersuchung ergibt nemlich, dass wenn p^0 in p' nicht sprungsweise sondern allmählig übergeht, und eben so beim zweiten Wechsel p' in p^0, und beim dritten wiederum p^0 in p', der Erfolg ganz derselbe bleibt, wie er am Schluss des 5. Artikels angegeben ist, falls nur die drei Übergangszeiten gleich lang sind, die drei Übergänge selbst in ähnlichen Stufenfolgen geschehen, und die berechneten Zwischenzeiten qT, rT auf die Anfangsmomente der Wechsel bezogen, oder was dasselbe ist die beiden ersten Übergangszeiten ihnen eingerechnet werden.

ZUR BESTIMMUNG

DER CONSTANTEN DES BIFILARMAGNETOMETERS.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1840. I.

1.

Zum richtigen und sichern Gebrauche des Bifilarmagnetometers ist die Kenntniss der Zahlenwerthe gewisser Grössen erforderlich, die sich auf bedingungsweise wie constant zu betrachtende Verhältnisse der Theile des Apparats beziehen, und von denen als wesentlichen Elementen die nach den verschiedenen Stellungen der beweglichen Theile zu beobachtenden Gleichgewichtslagen und Schwingungszeiten abhängen. Diese Elemente sind vier, nemlich

1) die Stellung, welche der Index der Spiegelalhidade haben muss, damit die Normale gegen den Spiegel mit der optischen Axe des Beobachtungsfernrohrs in Eine Verticalebene falle, wenn die beiden Aufhängungsdrähte in einer Verticalebene sind; diese Stellung (so verstanden, dass die reflectirende Fläche des Spiegels dem Fernrohre zugekehrt sei) soll mit P bezeichnet werden.

2) die Stellung, welche bei eben dieser Lage der Aufhängungsdrähte dem Index des Schiffchens gegeben werden muss, damit die magnetische Axe des Magnetstabes sich in natürlicher Lage im magnetischen Meridiane befinde; ich bezeichne diese Stellung mit Q.

Es bedarf keiner Erinnerung, dass wenn jede der beiden Alhidaden mehr als einen Index hat, einer davon immer (nach Belieben) als Hauptindex zu wählen ist.

3) das Verhältniss der magnetischen Directionskraft zu der aus der Aufhängungsweise entspringenden, welche letztere die statische Directionskraft heissen mag: dieses Verhältniss soll durch $R:1$ ausgedrückt werden.

4) die statische Schwingungsdauer des Apparats, d. i. diejenige, welche bloss in Folge der Aufhängungsart oder ohne Einwirkung des Erdmagnetismus auf den Magnetstab, Statt finden würde: ich bezeichne das Quadrat dieser Schwingungsdauer mit S.

Es erhellt hieraus, dass $\frac{S}{R}$ das Quadrat der reinmagnetischen Schwingungsdauer ausdrückt, d. i. derjenigen, die bei der Aufhängung des Apparats an einem einfachen Faden ohne Torsion Statt haben würde.

2.

Es ist nun zuvörderst zu entwickeln, wie das, was am Bifilarmagnetometer unmittelbar beobachtet wird, mit der Stellung der beiden Alhidaden und diesen vier Elementen zusammenhängt.

Bei der Stellung der Alhidade des Spiegels auf A, der Alhidade des Schiffchens auf B, bezeichne t die Schwingungsdauer, und p den in Bogentheile verwandelten Abstand des der Gleichgewichtslage entsprechenden Skalentheils von demjenigen Punkte der Skale, der mit der optischen Axe des Beobachtungsfernrohrs in derselben Verticalebene ist, und durch den von der Mitte des Objectivs herabhängenden Lothfaden kenntlich gemacht wird. Um die Vorstellungen zu fixiren, nehme ich an, dass die Theilungen sowohl am Kreise als an der Skale von der Linken nach der Rechten laufen, und beziehe positive Zeichen von p auf den Fall, wo die auf dem Fadenkreuze des Fernrohrs beobachtete Zahl grösser ist, als die Zahl am Lothfaden. Bei jener Gleichgewichtslage befindet sich also das Bifilarmagnetometer um $A-P-p$ rückwärts, d. i. von der Rechten nach der Linken gedreht gegen diejenige Lage, wo die Aufhängungsdrähte parallel waren, oder $A-P-p$ ist der Winkel zwischen der geraden Linie durch die beiden untern Enden der Aufhängungsdrähte und einer Parallele mit der die beiden obern Enden verbindenden. Das durch die Aufhängungsweise hervorgebrachte Drehungsmoment ist zwar nicht in völliger Schärfe, aber hinlänglich genau für die Ausübung, dem Sinus dieses Winkels proportional; wir setzen dasselbe $= D\sin(A-P-p)$, wo also D die statische Directionskraft ausdrückt: die positiven Werthe des Drehungsmoments beziehen sich auf Drehung von der Linken nach der Rechten.

In derselben Lage des Apparats macht die magnetische Axe des Magnetstabes mit dem magnetischen Meridiane den von der Rechten nach der Linken gezählten Winkel $A-P-p-B+Q$, und das aus der Einwirkung des Erdmagnetismus auf den Magnetstab entspringende von der Linken nach der Rechten positiv gerechnete Drehungsmoment ist $= RD\sin(A-P-p-B+Q)$. Wir haben mithin die Gleichung (1)

$$0 = \sin(A-P-p)+R\sin(A-P-p-B+Q)$$

Wird der ganze Apparat aus der Gleichgewichtsstellung um den Winkel z von der Rechten nach der Linken gedreht, so wirkt im entgegengesetzten Sinn das Drehungsmoment

$$D\sin(z+A-P-p)+DR\sin(z+A-P-p-B+Q)$$

welcher Ausdruck nach Entwicklung der beiden Sinus und unter Berücksichtigung der Gleichung (1) in

$$D\sin z(\cos(A-P-p)+R\cos(A-P-p-B+Q))$$

übergeht, also dem Sinus von z proportional ist. Man hat also

$$D(\cos(A-P-p)+R\cos(A-P-p-B+Q))$$

wie die Directionskraft zu betrachten, die aus der Verbindung der statischen und magnetischen resultirt, und wir haben daher (2)

$$\frac{S}{tt} = \cos(A-P-p)+R\cos(A-P-p-B+Q)$$

Indem man in den beiden Gleichungen (1), (2) auf beiden Seiten quadrirt, und addirt, findet man (3)

$$\frac{SS}{t^4} = 1+2R\cos(Q-B)+RR$$

Bezeichnet man mit e die Basis der hyperbolischen Logarithmen und mit i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, so lassen sich die beiden Gleichungen (1), (2) bequem in Eine zusammenziehen

$$\frac{S}{tt} = e^{i(A-P-p)}+Re^{i(A-P-p-B+Q)}$$

oder noch einfacher in folgende (4)

$$1 = \frac{S}{tt}e^{i(P+p-A)}-Re^{i(Q-B)}$$

welche die beiden

$$1 = \frac{S}{tt}\cos(P+p-A)-R\cos(Q-B)$$
$$\frac{S}{tt}\sin(P+p-A) = R\sin(Q-B)$$

unter sich begreift.

Für die natürliche Lage, wo $Q=B$, wird

$$tt = \frac{S}{1+R}$$

für die verkehrte hingegen, wo $Q = B+180^0$,

$$tt = \frac{S}{1-R}$$

3.

Die transversale Stellung, im engern Sinne, erfordert, dass

$$A-P-p-B+Q = \pm 90^0$$

wird, wo das obere Zeichen sich auf den Fall bezieht, wo der Nordpol des Magnetstabs auf der Westseite des magnetischen Meridians sein soll, das untere auf die östliche Lage. Es wird also nach (1)

$$\sin(A-P-p) = \mp R$$

Bezeichnet man demnach mit φ den spitzen Winkel, dessen Sinus $=R$ ist, so wird für die westliche Stellung des Nordpols

$$A = P+p-\varphi, \quad B = Q-\varphi-90^0$$

für die östliche hingegen

$$A = P+p+\varphi, \quad B = Q+\varphi+90^0$$

Damit die Gleichgewichtsstellung dem durch den Lothfaden bezeichneten Skalenpunkte selbst entspreche, muss also die Spiegelalhidade auf $P-\varphi$ für den ersten Fall, und auf $P+\varphi$ für den zweiten gestellt werden.

Für die der Transversalstellung entsprechende Schwingungsdauer ergibt die Formel (2) sogleich

$$\frac{s}{tt} = \cos\varphi$$

oder

$$tt = \frac{s}{\sqrt{(1-RR)}}$$

Die Schwingungsdauer für die Transversalstellung ist demnach die mittlere Proportionale zwischen den Schwingungszeiten für die natürliche und für die verkehrte Stellung.

4.

Um klar übersehen zu können, in wiefern die Elemente veränderlich sind, müssen wir dieselben auf ihren Ursprung zurückführen.

Die Winkel P und Q sind jeder aus drei Theilen zusammengesetzt. Es besteht nemlich P aus dem Winkel zwischen dem nach dem Nullpunkte des Kreises gehenden Radius und der die beiden untern Enden der Aufhängungsdrähte verbindenden geraden Linie; dem Winkel zwischen der die beiden obern Enden der Aufhängungsdrähte verbindenden geraden Linie und der optischen Axe des Fernrohrs (oder vielmehr zwischen den Projectionen dieser geraden Linie auf eine Horizontalebene, was auch bei allen andern Winkelschenkeln, die nicht selbst horizontal sind, oder unmittelbar einander nicht schneiden, stillschweigend verstanden wird); dem Winkel zwischen der Normale gegen den Spiegel und dem nach dem Hauptindex der Spiegelalhidade gehenden Radius.

Der erste Bestandtheil von Q ist einerlei mit dem ersten Bestandtheile von P; der zweite ist der Winkel zwischen der die beiden obern Enden der Aufhängungsdrähte verbindenden geraden Linie und dem magnetischen Meridian; der dritte der Winkel zwischen der magnetischen Axe des im Schiffchen liegenden Magnetstabes und dem nach dem Hauptindex der Alhidade des Schiffchens gehenden Radius.

Alle diese fünf Winkel sind von der Linken nach der Rechten zu zählen. Es erhellt aus dieser Analyse, dass, insofern die Aufhängung des Instruments, die Verbindung des Spiegels mit seiner Alhidade und die Stellung des Beobachtungsfernrohrs unverrückt bleiben, P ganz unveränderlich sein wird; dass aber Q wegen seines zweiten Bestandtheils gerade dieselben Veränderungen erleidet, wie die magnetische Declination, die von der Linken nach der Rechten gehenden Veränderungen als positiv betrachtet.

Die statische Directionskraft wird durch die Formel

$$D = \frac{fgG}{4h}$$

ausgedrückt, wo G das Gewicht des Apparats (d. i. die durch die Schwerkraft multiplicirte Masse), f den Abstand der Aufhängungsdrähte bei den untern, g bei den obern Enden, h die Höhe der obern Befestigung über der untern bedeutet; wenigstens insofern man die kleine Vergrösserung bei Seite setzt, welche jene Kraft noch durch die Reaction der einzelnen Aufhängungsdrähte gegen die Torsion erhält, was hier, wo zunächst nur von der Veränderlichkeit der ganzen Kraft die Rede ist, füglich geschehen kann. Bezeichnet man noch das Trägheitsmoment in Beziehung auf die verticale Drehungsaxe mit K, so wird, π in üblicher Bedeutung genommen,

$$S = \frac{\pi\pi K}{D} = \frac{4\pi\pi hK}{fgG}.$$

Es erhellt nun, dass die einzelnen Factoren f, g, h, K in Folge des Temperaturwechsels Veränderungen erleiden, die freilich theils an sich sehr gering sind, theils wie weiter unten gezeigt werden wird, in dem Werthe von S sich fast vollkommen compensiren. Als ganz unmerklich kann diejenige Ungleichheit angesehen werden, die aus dem ungleichen Gewichtsverlust in Folge ungleicher Luftdichtigkeit entspringt.

Die magnetische Directionskraft ist $= TM$, wenn T die Intensität des horizontalen Erdmagnetismus, M das Moment des Magnetismus im Magnetstabe ausdrückt; wir haben demnach

$$R = \frac{TM}{D} = \frac{4TMh}{fgG} = \frac{STM}{\pi\pi K}$$

Die Veränderlichkeit von R beruht also auf einem dreifachen Grunde. Erstlich auf der fortwährenden Veränderlichkeit von T; zweitens auf der Veränderlichkeit der Temperatur, welche nicht allein die Lineargrössen f, g, h afficirt, sondern zugleich den Stabmagnetismus M; drittens auf der Veränderlichkeit von M unabhängig von dem jedesmaligen Temperaturzustande.

In Beziehung auf die dritte Ursache sind unsere Kenntnisse bisher noch ziemlich unvollkommen. Bei den im 2. Bande der *Resultate* mitgetheilten Versuchen des Hrn. Prof. Weber wurde der durch künstliche Erwärmung erlittene Verlust durch die nachherige Abkühlung niemals vollkommen ersetzt, sondern es blieb nach Wiederherstellung der anfänglichen Temperatur ein bedeutender nachhaltiger Verlust. Von der andern Seite lehrt die Erfahrung, dass Magnetnadeln ohne neue Bestreichung doch eine lange Reihe von Jahren, trotz der täglichen und jährlichen Abwechslung der Temperatur, einen bedeutenden Grad von Magnetismus behalten, woraus man also auf einen äusserst langsamen progressiven Verlust schliessen muss*). Es würde von grosser Wichtigkeit sein, die Bedingungen genau zu kennen, unter welchen der Temperaturwechsel den möglich kleinsten nachhaltigen Kraftverlust bewirkt. Ausser der Beschaffenheit und Härtung des Stahls, und einer kräftigen ursprünglichen Magnetisirung, wird es wahrscheinlich hauptsächlich darauf ankommen, dass seit dieser erst eine gewisse Zeit verflossen sein muss, dass die Temperaturänderungen gewisse Grenzen nicht überschreiten, und dass sie immer nur sehr langsam und allmählig erfolgen. Unter solchen Bedingungen wird es verstattet sein müssen, den magnetischen Zustand eines Magnetstabes — wenn wir mit dieser Benennung sein auf eine bestimmte Normaltemperatur reducirtes magnetisches Moment bezeichnen — während einer mässigen Zeit, z. B. einiger Tage, wie constant zu betrachten, und wenn nach einem längern Zeitraume eine entschiedene Abnahme gefunden wird, für die Zwischenzeit eine stetige Verminderung in geometrischer Progression zum Grunde zu legen. Die Ausführung des sinnreichen, von Hrn. Prof. Weber in dem weiter unten folgenden Aufsatze mitgetheilten Vorschlage scheint vorzüglich dazu geeignet, über diesen interessanten Gegenstand Licht zu verbreiten.

5.

Damit nun die Aufgabe, die Zahlenwerthe der Elemente eines Bifilarmagnetometers durch Versuche auszumitteln, eine präcise Bedeutung erhalte, verstehen wir unter den zu suchenden Werthen der veränderlichen Elemente diejenigen, die sich auf eine bestimmte Declination, eine bestimmte horizontale Intensität, eine bestimmte Temperatur und denjenigen magnetischen Zustand des

---

*) An der Nadel einer Bussole, die sich an einer im Jahre 1709 verfertigten Sonnenuhr der hiesigen Sternwarte befindet, konnte 1841 durch neue Bestreichung bis zur Sättigung der Magnetismus nur auf das Dreifache erhöhet werden; an einer andern von 1603 nur auf das Fünffache. In der sehr wahrscheinlichen Voraussetzung, dass beide seit ihrer Verfertigung niemals neu gestrichen waren, und wenn man zugleich annimmt, dass sie ursprünglich auch bis zur Sättigung magnetisirt gewesen sind, und dass die Kraft allmählig in geometrischer Progression abgenommen hat, beträgt der jährliche Verlust bei der erstern $\frac{1}{12}$, bei der zweiten $\frac{1}{14}$, und noch weniger, falls die ursprüngliche Magnetisirung die Sättigung nicht erreicht hatte.

Magnetstabes beziehen, welcher ihm zur Zeit dieser Versuche zukommt, wobei also die Veränderungen, welche letzterer nach längerer Zwischenzeit erleiden mag, gar nicht in Frage kommen. Wir bezeichnen diese Normalwerthe der veränderlichen Elemente mit Q^0, R^0, S^0 (indem P schon für sich constant ist), und setzen allgemein

$$Q = Q^0 + q, \qquad R = rR^0, \qquad S = sS^0$$

Auf gleiche Weise mögen $f^0, g^0, h^0, K^0, T^0, M^0$ die Normalwerthe der veränderlichen Grössen f, g, h, K, T, M bezeichnen. Wir haben also sofort

$$s = \frac{f^0 g^0 h K}{f g h^0 K^0}, \qquad r = \frac{f^0 g^0 h M T}{f g h^0 M^0 T^0}$$

Um bei der Bestimmung der Elemente die während der dazu erforderlichen Operationen Statt findenden Veränderungen in der Richtung und Stärke der erdmagnetischen Kraft berücksichtigen zu können, muss natürlich ein Hülfsapparat zu Gebote stehen, am besten ein Unifilarmagnetometer, an welchem gleichzeitig Schwingungsdauer und Stand beobachtet werden. Zugleich dient dieses Hülfsmagnetometer dazu, die zu wählende Normaldeclination und Normalintensität nachweisbar zu machen, zunächst dadurch, dass man jene einem bestimmten Skalenpunkte, diese einer bestimmten Schwingungsdauer für die Normaltemperatur entsprechen lässt, wobei man dann auch in seiner Gewalt hat, beide Normalgrössen nach bekannten Methoden auf absolutes Maass zu bringen. Hiernach ist ohne weiteres q der in Bogentheile verwandelte Unterschied des am Hülfsmagnetometer beobachteten Standes vom Normalstande. Bezeichnet man ferner, was am Bifilarmagnetometer M, K, t ist, für das Hülfsmagnetometer mit m, k, θ, und die Normalwerthe dieser Grössen mit m^0, k^0, θ^0, so wird

$$\frac{\theta\theta}{\theta^0\theta^0} = \frac{k m^0 T^0}{k^0 m T}$$

und folglich

$$r = \frac{f^0 g^0 h k m^0 M \theta^0 \theta^0}{f g h^0 k^0 m M^0 \theta\theta} = \frac{s k K^0 m^0 M \theta^0 \theta^0}{k^0 K m M^0 \theta\theta}$$

Von den sieben Factoren $\frac{f^0}{f}$, $\frac{g^0}{g}$, $\frac{h}{h^0}$, $\frac{k}{k^0}$, $\frac{K^0}{K}$, $\frac{m^0}{m}$, $\frac{M}{M^0}$, welche in den Ausdrücken für s und r vorkommen, wird man die fünf ersten nach der Ausdehnung, welche die betreffenden Metalle durch die Temperatur erleiden, die beiden letzten hingegen nach der besten Kenntniss, die man vom Einfluss der Temperatur auf den Stabmagnetismus besitzt, zu berechnen haben, indem das, was wir den magnetischen Zustand genannt haben, bei beiden Magnetstäben während der hier in Rede stehenden Operationen wie constant betrachtet wird. Wir fügen in Beziehung auf diese Rechnung noch einige Entwickelungen bei.

Indem wir zur Normaltemperatur den Gefrierpunkt wählen, bezeichnen wir mit c und c' die Temperatur im Kasten des Bifilar- und des Hülfsmagnetometers, mit c'' die Temperatur bei der obern Befestigung der Aufhängungsdrähte des erstern; ferner, für Einen Grad Wärmezunahme, die Ausdehnung des Stahls mit α, des Messings mit δ, und die Abnahme des Stabmagnetismus für die Stäbe der beiden Apparate mit γ und γ'. Da die Veränderung des Trägheitsmoments der beiden Apparate dem bei weitem grössten Theile nach von der Ausdehnung der Magnetstäbe selbst herrührt, so wird man ohne Bedenken

$$\frac{K}{K^0} = (1+\alpha c)^2, \qquad \frac{k}{k^0} = (1+\alpha c')^2$$

setzen; für die Ausdehnung der Aufhängungsdrähte, wenn sie, wie am hiesigen Apparate, Stahldrähte sind, wird man denselben Coëfficienten α beibehalten, und für ihre Temperatur $\frac{1}{2}(c+c'')$ annehmen können, so dass

$$\frac{h}{h^0} = 1+\tfrac{1}{2}\alpha(c+c'')$$

wird. Wir haben mithin (1)

$$s = \frac{(1+\alpha c)^2(1+\frac{1}{2}\alpha(c+c''))}{(1+\delta c)(1+\delta c'')}$$

wofür man auch, hinlänglich genau,

$$s = 1+(3\alpha-2\delta)c-(\delta-\tfrac{1}{2}\alpha)(c''-c)$$

setzen kann. Da nun, der Erfahrung zufolge, sehr nahe $\delta = \frac{3}{2}\alpha$ ist, so wird, sehr nahe, (2)

$$s = 1-\alpha(c''-c)$$

d i. die Veränderung des Elements S ist nur von der Ungleichheit der untern und obern Temperatur abhängig, so dass in der Regel S wie ganz constant betrachtet werden kann.

Wir haben ferner (3)

$$r = \frac{s\vartheta^0\vartheta^0}{\vartheta\vartheta}\cdot\frac{1-\gamma c}{1-\gamma' c'}\cdot\left(\frac{1+\alpha c'}{1+\alpha c}\right)^2$$

oder wenn die Temperaturänderungen auf beide Stäbe gleichen Einfluss haben, d.i. wenn $\gamma' = \gamma$ ist, hinlänglich genau,

$$r = \frac{s\vartheta^0\vartheta^0}{\vartheta\vartheta}(1+(\gamma+2\alpha)(c'-c))$$

oder in Gemässheit von (2), eben so genau (4)

$$r = \frac{\vartheta^0\vartheta^0}{\vartheta\vartheta}(1+(\gamma+2\alpha)(c'-c)-\alpha(c''-c))$$

Endlich muss noch der Umstand bemerkt werden, dass durch die Vergleichungsbeobachtungen am Unifilarmagnetometer nicht der für einen bestimmten Augenblick geltende Werth von $\frac{T}{T^0}$ abgeleitet werden kann, sondern nur der Mittelwerth für die ganze Zeit, welche die Schwingungsbeobachtungen umfassen. Es versteht sich also von selbst, dass auch alle die andern Grössen, mit denen jene Schwingungsbeobachtungen als gleichzeitige unmittelbar oder mittelbar combinirt werden sollen, sich gleichfalls als Mittelwerthe auf denselben Zeitraum beziehen müssen.

6.

Die kunstloseste Art, die vier Elemente auszumitteln, ist folgende:

Bei willkürlicher Stellung des Schiffchens legt man anstatt des Magnetstabes einen nicht magnetischen Stab, ungefähr von gleichem Gewicht, in dasselbe, und gibt dem Spiegel eine solche Stellung, dass in der Gleichgewichtslage das Bild irgend eines Punkts der Skale auf dem Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs erscheint, wo dann, A und p in der obigen Bedeutung genommen, $P = A-p$ wird. Um das Resultat von einer sehr genauen Kenntniss des Werthes der Skalentheile oder von einer sehr scharfen Reduction derselben auf Bogentheile unabhängiger zu machen, mag man die Operation, wenn das erstemal p noch sehr gross ausgefallen ist, mit einer neuen sehr genäherten Stellung des Spiegels wiederholen. Am meisten geeignet für diese Operation ist ein mit Blei belasteter Holzstab; das ungefähr gleiche Gewicht wird deswegen erfordert, um eine kleine Torsion, welche bei der Gleichgewichtsstellung des Ganzen die Aufhängungsdrähte für sich genommen möglicherweise haben könnten, unschädlich zu machen.

Ohne nun die Stellung des Spiegels weiter zu ändern, legt man anstatt der vorigen Belastung den Magnetstab in das Schiffchen, welches dann so gestellt werden soll, dass dem Ruhestande derselbe Skalenpunkt entspreche, wie zuletzt bei der nicht magnetischen Belastung. Man gelangt dazu, indem man durch Versuche zwei verschiedene Stellungen des Schiffchens ermittelt, zwischen welche die gesuchte fällt, und auf die bei jenen sich ergebenden Ablesungen an der Skale ein einfaches Interpolationsverfahren anwendet. Man kann sich hiebei entweder der natürlichen oder der verkehrten Lage des Magnetstabes bedienen; im ersten Falle ist das sich für B (die Stellung der Alhidade des Schiffchens) ergebende Resultat $= Q$, im zweiten $= Q \pm 180^0$. Die Anwendung der verkehrten Lage hat den Vorzug grösserer Schärfe, weil einer kleinen Änderung von B eine grosse Änderung der Skalentheile entspricht, die Anwendung der natürlichen Lage hingegen ist in so fern etwas bequemer, als man dabei dem Schiffchen eine nicht über die Grenzen der Skale hinausgehende Lage leichter geben kann. Man thut daher wohl, zur Vermeidung beschwerlichen Herumtastens, mit der natürlichen Lage anzufangen, das gefundene Resultat aber nur wie eine Vorbereitung zu betrachten, um bei den Versuchen in verkehrter Lage auf zwei nahe zusammenliegende Theilstriche einstellen zu können.

Das gefundene Resultat für Q bezieht sich auf diejenige Lage des magnetischen Meridians, welche derselbe in oder zwischen den beiden letzten Versuchen gehabt hat, und mehr als eine solche schwankende Bestimmung ist nicht zu fordern, wenn man keinen Hülfsapparat zu vergleichenden Beobachtungen anwenden kann. Steht aber ein Hülfsapparat zu Gebote, so geben gleichzeitige Standbeobachtungen an demselben die jenen beiden Beobachtungen correspondirenden Werthe von q und das obige Interpolationsverfahren auf die beiden Werthe von $B-q$ angewandt ergibt dann den Werth von Q^0 oder $Q^0 \pm 180^0$.

Endlich beobachtet man die Schwingungsdauer sowohl in der natürlichen als in der verkehrten Lage; man stellt zu dem Ende die Alhidade des Schiffchens so genau man kann auf denjenigen Werth von Q (und beziehungsweise von $Q+180^0$), der eben beim Anfang der Schwingungsbeobachtungen gilt. Die Schwingungsdauer in der natürlichen Lage sei t', in der verkehrten t''; kann man gleichzeitig Schwingungen am Hülfsmagnetometer beobachten, so erhält man dadurch die correspondirenden Werthe von r, die mit r', r'' bezeichnet werden mögen; will man auch die Veränderlichkeit von S berücksichtigen, so mögen s', s'' die correspondirenden Werthe von s sein. Die kleinen Veränderungen in der Lage des magnetischen Meridians während der Schwingungsbeobachtungen

werden in der Regel keinen merklichen Einfluss auf die Resultate haben. Die beiden Gleichungen am Schluss des 2. Artikels werden demnach

$$t't' = \frac{s'S^0}{1+r'R^0}$$
$$t''t'' = \frac{s''S^0}{1-r''R^0}$$

woraus durch Elimination folgt

$$R^0 = \frac{s't''t''-s''t't'}{r''s't''t''+r's''t't'}$$
$$S^0 = \frac{(r'+r'')t't't''t''}{r''s't''t''+r's''t't'}$$

Nach der im 5. Art. gemachten Bemerkung kann man füglich S wie constant betrachten, oder $s' = s'' = 1$ setzen, wodurch die Formeln in

$$R^0 = \frac{t''t''-t't'}{r''t''t''+r't't'}$$
$$S = \frac{(r'+r'')t't't''t''}{r''t''t''+r't't'}$$

übergehen. Kann man aber keine Vergleichungsbeobachtungen an einem Hülfsapparat zuziehen, so bleibt nichts übrig, als geradezu

$$R = \frac{t''t''-t't'}{t''t''+t't'}$$
$$S = \frac{2t't't''t''}{t''t''+t't'}$$

zu setzen, und es ist klar, dass der so gefundene Werth von R nur eine Art von Mittel zwischen den für die beiden Schwingungssätze geltenden bedeuten, S aber mit einer kleinen von der Ungleichheit der letztern abhängenden Unrichtigkeit behaftet bleiben wird.

7.

Die allgemeinere Auflösung unsrer Aufgabe gründen wir auf die gleichzeitigen Beobachtungen von Schwingungsdauer und Gleichgewichtsstand des Bifilarmagnetometers bei zwei beliebigen ungleichen Stellungen des Schiffchens. Wir bezeichnen die bestimmten Werthe der Grössen A, B, p, Q, R, S, t
für den ersten Satz der Beobachtungen mit $A', B', p', Q^0+q', r'R^0, s'S^0, t'$;
für den zweiten Satz mit $A'', B'', p'', Q^0+q'', r''R^0, s''S^0, t''$.

Anstatt aus den vier Gleichungen, welche die Substitution dieser Werthe in den beiden Gleichungen (1) und (2) Art. 2 ergibt, die unbekannten Elemente P, Q^0, R^0, S^0 durch Elimination abzuleiten, gelangen wir zu demselben Ziele viel leichter durch Benutzung des Calculs der imaginären Grössen, indem wir in Folge der Formel (4) Art. 2 von den beiden Gleichungen

$$1 = \frac{s' S^0}{t' t'} e^{i(P+p'-A')} - r' R^0 e^{i(Q^0+q'-B')}$$
$$1 = \frac{s'' S^0}{t'' t''} e^{i(P+p''-A'')} - r'' R^0 e^{i(Q^0+q''-B'')}$$

ausgehen, die sich, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{s'}{t' t'} e^{i(p'-A')} = a'$$
$$\frac{s''}{t'' t''} e^{i(p''-A'')} = a''$$
$$r' e^{i(q'-B')} = b'$$
$$r'' e^{i(q''-B'')} = b''$$
$$S^0 e^{iP} = x$$
$$R^0 e^{iQ^0} = y$$

setzen, in folgende verwandeln

$$1 = a'x - b'y$$
$$1 = a''x - b''y$$

woraus man

$$x = \frac{b''-b'}{a'b''-a''b'} = \frac{\frac{b''}{b'}-1}{\frac{b''}{b'}-\frac{a''}{a'}} \cdot \frac{1}{a'}$$
$$y = \frac{a''-a'}{a'b''-a''b'} = \frac{\frac{a''}{a'}-1}{\frac{b''}{b'}-\frac{a''}{a'}} \cdot \frac{1}{b'}$$

erhält. Es ergeben sich hieraus folgende entwickelte Rechnungsvorschriften. Man setze (I)

$$\frac{t't'}{s'} \cdot \frac{s''}{t''t''} \cdot \cos(A'-A''-p'+p'') = \mathfrak{A}$$
$$\frac{t't'}{s'} \cdot \frac{s''}{t''t''} \cdot \sin(A'-A''-p'+p'') = \mathfrak{A}_1$$
$$\frac{r''}{r'} \cdot \cos(B'-B''-q'+q'') = \mathfrak{B}$$
$$\frac{r''}{r'} \cdot \sin(B'-B''-q'+q'') = \mathfrak{B}_1$$

wodurch also

$$\frac{a''}{a'} = \mathfrak{A} + i\mathfrak{A}_1$$
$$\frac{b''}{b'} = \mathfrak{B} + i\mathfrak{B}_1$$

wird. Man bestimme ferner die sechs Grössen u, U, v, V, w, W aus den Gleichungen (II)

$$\mathfrak{A} - 1 = u \cos U$$
$$\mathfrak{A}_1 = u \sin U$$
$$\mathfrak{B} - 1 = v \cos V$$
$$\mathfrak{B}_1 = v \sin V$$
$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = w \cos W$$
$$\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1 = w \sin W$$

und zwar so, dass u, v, w positiv werden. Es wird dann

$$\frac{b''}{b'} - 1 = v e^{iV}$$
$$\frac{a''}{a'} - 1 = u e^{iU}$$
$$\frac{b''}{b'} - \frac{a''}{a'} = w e^{iW}$$

und folglich

$$x = \frac{t't'}{s'} \cdot \frac{v}{w} e^{i(V-W+A'-p')}$$
$$y = \frac{u}{r'w} e^{i(U-W+B'-q')}$$

woraus man leicht schliesst, dass (III)

$$P = V - W + A' - p'$$
$$Q^0 = U - W + B' - q'$$
$$R^0 = \frac{u}{r'w}$$
$$S^0 = \frac{t't'}{s'} \cdot \frac{v}{w}$$

Die vierzehn Formeln I, II, III enthalten die vollständige möglich einfachste Auflösung unsrer Aufgabe.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass für $r' = r''$, (sei es, dass die vergleichenden Beobachtungen diese Gleichheit ergeben, oder dass man in Ermangelung solcher Beobachtungen die Veränderlichkeit von R während der beiden Beobachtungssätze zu berücksichtigen nicht im Stande ist)

$$V = \tfrac{1}{2}(B' - B'' - q' + q'') \pm 90^0$$
$$v = \pm 2 \sin \tfrac{1}{2}(B' - B'' - q' + q'')$$

wird, wo die obern oder die untern Zeichen gelten, je nachdem

$$\sin \tfrac{1}{2}(B' - B'' - q' + q'')$$

positiv oder negativ ist.

8.

Zur Erläuterung dieser Vorschriften fügen wir noch die vollständige Berechnung eines Beispiels bei. Die Rechnung ist mit siebenzifrigen Logarithmen geführt, also viel schärfer, als für die Ausübung nöthig ist, wo fünfzifrige Logarithmen immer zureichen.

Am 24. März 1841 wurde die Schwingungsdauer des Bifilarmagnetometers aus Beobachtungen, welche $1^{St} 21'$ umfassten (wie sich von selbst versteht, nach gehöriger Reduction auf unendlich kleine Schwingungen) $= 28''89071 = t'$ gefunden; die Stellung der Spiegelalhidade war $154^0 20' 30'' = A'$, die der Alhidade des Schiffchens $= 27^0 40' 25'' = B'$. Im Mittel aus mehrern über jenen Zeitraum gleichförmig vertheilten Bestimmungen war der Stand 994.33 Skalentheile, also da der Lothfaden der Skalenzahl 1000 entspricht, und ein Skalentheil $21''5835$ beträgt, $p' = -2'\, 2''38$. Aus ganz gleichzeitigen Beobachtungen fand sich die Schwingungsdauer des Unifilarmagnetometers im magnetischen

Observatorium $= 20''72725$, und der Stand im Mittel $= 881.80$ Skalentheile. Als Normalstand wurde der mittlere Stand aus den täglichen Aufzeichnungen im Februar 888.40 gewählt (welchem übrigens die absolute Declination $18^0 11' 54''$ entspricht); da ein Skalentheil am Unifilarmagnetometer $21''3489$ beträgt, so findet sich daraus $q' = -2'\, 20''90$.

Der mittlere Thermometerstand (aus Aufzeichnungen unmittelbar vor dem Anfange und gleich nach dem Schluss der Beobachtungen) war im Kasten des Bifilarmagnetometers $+6^0 96$, bei der obern Befestigung der Aufhängungsdrähte $+7^0 6$, im Kasten des Unifilarmagnetometers $+7^0 45$, alles nach Réaumur.

Auf gleiche Weise war für einen zweiten Satz von Beobachtungen am folgenden Tage

$$t'' = 108''\,17$$
$$A'' = 151^0\, 27'\, 30''$$
$$B'' = 185\;\; 59\;\; 35$$
$$p'' = -\;\; 24'\, 33''07$$
$$q'' = +\;\; 2\;\; 42.04$$

die Schwingungsdauer des Unifilarmagnetometers $= 20''73117$, die Thermometerstände in derselben Ordnung wie oben $+6^0 36$, $+7^0 0$, $+7^0 1$.

Zur Berechnung des Einflusses der Temperatur setze ich

$$\alpha = 0.000016, \quad \beta = 0.000024, \quad \gamma = \gamma' = 0.000765$$

den letztern Werth nach HANSTEEN, da eigne entscheidende Bestimmungen zur Zeit noch fehlen. Es folgt hieraus nach den Formeln (1) und (3) des 5. Art., wenn wir $20''72 = \theta^0$ zur Normalschwingungsdauer des Unifilarmagnetometers wählen,

$$\log r' = -0.0001376$$
$$\log s' = -0.0000043$$
$$\log r'' = -0.0002155$$
$$\log s'' = -0.0000044$$

In Folge der abgekürzten Formeln (2) und (4) a. a. O. würde man setzen können

$$\log s = -\alpha k(c'' - c)$$
$$\log r = 2 \log \frac{\theta^0}{\theta} + (\gamma + 2\alpha) k(c' - c) - \alpha k(c'' - c)$$

wenn k den Modulus der briggischen Logarithmen bezeichnet, also mit obigen Werthen von $\alpha, \mathfrak{b}, \gamma$

$$\log s = 0.00000695\,(c''-c)$$
$$\log r = 2\log\tfrac{g^0}{g} + 0.0003461\,(c'-c) - 0.00000695\,(c''-c)$$

woraus für unsre Beobachtungen folgt

$$\log r' = -0.0001386$$
$$\log s' = -0.0000044$$
$$\log r'' = -0.0002169$$
$$\log s'' = -0.0000044$$

also kaum merklich von obigen Werthen verschieden.

Nach diesen Vorbereitungen sind die Hauptmomente der Rechnung selbst folgende:

$$A'-A''-p'+p'' = +\ \ 2^0\,30'\,29''31$$
$$B'-B''-q'+q'' = -158\ \ 14\ \ \ 7.06$$
$$\log\tfrac{t't's''}{s't''t'} = 8.8524525$$
$$\log\tfrac{r''}{r'} = 9.9999221$$

Hieraus nach I

$$\log\mathfrak{A} = 8.8520363$$
$$\log\mathfrak{A}_{1} = 7.4935432$$
$$\log\mathfrak{B} = 9.9678043\,\text{n}$$
$$\log\mathfrak{B}_{1} = 9.5690569\,\text{n}$$

woraus ferner

$$\log(\mathfrak{A}-1) = 9.9679562\,\text{n}$$
$$\log(\mathfrak{B}-1) = 0.2852304\,\text{n}$$
$$\log(\mathfrak{B}-\mathfrak{A}) = 9.9998589\,\text{n}$$
$$\log(\mathfrak{B}_{1}-\mathfrak{A}_{1}) = 9.5726915\,\text{n}$$

Hienach ergeben die Formeln II

$$U = 179^0\,48'\,28''15$$
$$V = 190\ \ 52\ \ 52.91$$
$$W = 200\ \ 30\ \ 14.79$$
$$\log u = 9.9679586$$
$$\log v = 0.2931101$$
$$\log w = 0.0282829$$

und endlich die Formeln III

$$P^0 = 144^0\,45'\,10''50$$
$$Q^0 = 7\ \ 0\ \ 59.26$$
$$\log R^0 = 9.9398133$$
$$\log S^0 = 3.1863476$$

9.

Noch mehr lässt sich die Aufgabe generalisiren, indem man *vier verschiedene* Beobachtungssätze zum Grunde legt, zwei für den Stand, zwei für die Schwingungsdauer, wobei man zugleich die Voraussetzung fahren lässt, dass diese und jene beziehungsweise denselben Werthen von B entsprechen. Man hat dabei zwar den Vortheil, die Beobachtungen für den Stand des Bifilarmagnetometers nach dem in den *Resultaten* für 1836. II. [S. unten] beschriebenen Verfahren bei einem beinahe ganz beruhigten Zustande des Magnetstabes machen zu können: allein dieser Vortheil verliert seinen Werth durch den Umstand, dass man genöthigt bleibt, für alle vier Sätze am Hülfsmagnetometer Schwingungsdauer und Stand zugleich zu beobachten, also letztern doch aus Elongationen bestimmen muss. Es erhellt also, dass diese Methode doppelt so viele Arbeit verursacht, als die des 7. Art., welche ausserdem den Vorzug einer so sehr einfachen Berechnung hat, während die directe Bestimmung der Elemente aus vier getrennten Beobachtungssätzen bei weitem weitläufiger ausfällt, daher wir auch ihre in mathematischer Beziehung nicht uninteressante Entwickelung lieber auf einen andern Ort versparen.

10.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass wenn man bei der Bestimmung des Standes aus beobachteten Elongationen das [S. unten] *Resultate* 1836 II angezeigte Verfahren schlechthin anwendet, die ungleiche Geltung der Skalentheile in Bogentheilen einen Fehler erzeugt, der desto grösser ist, je weiter der Stand von der Mitte der Skale abliegt. Verlangt man also ganz scharfe Resultate, so muss man jenes Verfahren nicht unmittelbar auf die in den Elongationen abgelesenen Skalentheile, sondern auf die nach strenger Formel in Bogentheile verwandelten Abstände der Elongationen von der Mitte der Skale anwenden. Ist der Stand nahe bei der Mitte, so ist allerdings jener Fehler unerheblich, und man wird daher immer die Stellung des Spiegels oder den Werth von A so wählen, dass der Stand von der Mitte wenig abweiche, oder dass p klein werde. Bei der ersten Bestimmung der Elemente ist dies freilich nur durch einen vorläufigen Versuch (auf ähnliche Art wie im Art. 6) zu erreichen: besitzt man aber schon eine genäherte Kenntniss der Elemente P, Q, R, so wird man zu diesem Zweck lieber eine Rechnung anwenden, welcher man am bequemsten folgende (aus Art. 2. Formel (1) oder (4) leicht abzuleitende) Gestalt gibt. Man bestimme einen Winkel ψ durch die Formel

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{1-R}{1+R}.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(Q-B) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^2.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(Q-B)$$

und zwar so, dass ψ in demselben Quadranten gewählt wird, in welchem $\frac{1}{2}(Q-B)$ liegt, und setze dann

$$A = \psi + P - \tfrac{1}{2}(Q-B)$$

11.

Es bleibt nun noch übrig, den Zusammenhang zu entwickeln, in welchem die Beobachtungen am Bifilarmagnetometer in der Transversalstellung mit den Veränderungen der Elemente stehen.

Es wird vorausgesetzt, dass die nach der Vorschrift von Art. 3 bestimmte Transversalstellung sich auf die Normalwerthe der Elemente beziehe: das Schiffchen ist also so gestellt, dass beim Ruhestande die magnetische Axe des Magnetstabes einen rechten Winkel mit dem magnetischen Normalmeridian macht, wenn das Verhältniss der magnetischen Richtungskraft zur statischen wie R^0 zu 1 ist; der Spiegel hingegen so, dass bei jener Stellung das Bild des durch den Lothfaden bezeichneten Skalenpunkts auf dem Fadenkreuze des Beobachtungsfernrohrs erscheint. Es ist also, wenn wir die unter jenen Umständen Statt findende Schwingungsdauer mit t^0 bezeichnen,

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= R^0 \\ A &= P \mp \varphi \\ B &= Q^0 \mp (90^0 + \varphi) \\ \frac{S^0}{t^0 t^0} &= \cos\varphi \end{aligned}$$

wo die doppelten Zeichen sich auf die westliche oder östliche Stellung des Nordpols des Magnetstabes beziehen. Indem wir nun die Zeichen

$$p, \quad Q = Q^0 + q, \quad R = rR^0, \quad S = sS^0, \quad t$$

in der bisherigen allgemeinen Bedeutung beibehalten, geben die Formeln (1) und (6) des 2. Art.

$$\begin{aligned} \sin(\varphi \pm p) &= rR^0\cos(p-q) \\ \frac{sS^0}{tt}\sin(\varphi \pm p) &= rR^0\cos(\varphi \pm q) \end{aligned}$$

oder

$$r = \frac{\sin(\varphi \pm p)}{\sin\varphi\cos(p-q)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{st^0t^0}{tt} = \frac{\cos(\varphi \pm q)}{\cos\varphi\cos(p-q)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

12.

Die wichtigste Anwendung des Bifilarmagnetometers ist die Bestimmung der Veränderungen der horizontaleh Intensität, mit welchen die Veränderungen von R durch die oben (Art. 5) gegebene Formel

$$r = \frac{f^0 g^0 h M T}{f g h^0 M^0 T^0}$$

zusammenhängen. Man muss sich hiebei erinnern, dass T^0 die Anfangs gewählte Normalintensität, M^0 das auf die Normaltemperatur reducirte magnetische Moment des Magnetstabes nach dessen magnetischem Zustande zur Zeit der Bestimmung der Constanten ausdrückt. Bezeichnen wir das eben so auf die Normaltemperatur reducirte magnetische Moment für eine unbestimmte Zeit mit $\mathfrak{M}$, und setzen

$$\frac{\mathfrak{M}}{M^0} = \lambda, \quad \frac{T^0}{\lambda} = \mathfrak{T}$$

so wird unter den im 4. Art. besprochenen Bedingungen λ ein für eine mässige

Zeit, z. B. für Einen Tag, wie constant zu betrachtender Coëfficient sein, und so wie dieser zugleich mit $\mathfrak{M}$ allmählig sehr langsam abnimmt, wird $\mathfrak{T}$ allmählig zunehmen und stets diejenige horizontale Intensität ausdrücken, bei welcher unter der Normaltemperatur das Verhältniss der magnetischen und der statischen Richtungskraft dem Verhältnisse $R^0 : 1$ gleich wird. Da nun obige Gleichung die Form

$$T = \frac{\mathfrak{M} f g h^0}{M f^0 g^0 h} \cdot r\mathfrak{T}$$

annimmt, wo der erste Factor $\frac{\mathfrak{M} f g h^0}{M f^0 g^0 h}$ bloss von der Temperatur abhängt, und (wenn wir die Bezeichnungen des 5. Art. beibehalten) durch

$$1 + (\gamma + 2\beta - \alpha)c + (\beta - \tfrac{1}{2}\alpha)(c'' - c)$$

ausgedrückt werden kann; r hingegen durch combinirte gleichzeitige Standbeobachtungen am Bifilarmagnetometer in der transversalen Stellung für p, und am Unifilarmagnetometer für q, nach Formel (1) des vorhergehenden Art. für jeden Augenblick bestimmbar ist: so erhellt, dass sich auf diese Weise die Veränderungen der Intensität in den kleinsten Zeitfristen mit grösster Schärfe verfolgen lassen, so lange es nur darauf ankommt, die veränderten Intensitäten während eines mässigen Zeitraumes, z. B. während eines vierundzwanzigstündigen Termins, oder während der zu einer absoluten Intensitätsbestimmung vermittelst des Unifilarmagnetometers erforderlichen Zeit, *unter sich* zu vergleichen. Indem man bei einer solchen absoluten Intensitätsbestimmung zu den Reductionen der einzelnen Operationen auf einerlei Normalintensität (vergl. *Intensitas vis magneticae* Art. 10 und 22) die gleichzeitigen Beobachtungen am Bifilarmagnetometer verwendet (was auch an sich vortheilhafter ist, als der a. a. O. empfohlene Gebrauch eines zweiten Unifilarmagnetometers), erhält man zugleich die Kenntniss des für diese Zeit gültigen Werths von $\mathfrak{T}$ in absolutem Maasse. Wenn man nun solche absolute Bestimmungen von Zeit zu Zeit wiederholt, so bleibt man fortwährend von den etwaigen allmähligen Veränderungen von $\mathfrak{T}$ in Kenntniss, und kann dieselben für die Zwischenzeit nach geometrischer Progression durch Interpolation ohne merklichen Fehler ansetzen, und sonach sämmtliche Veränderungen der Intensität nach allen ihren Abwechslungen in absolutem Maasse angeben. Übrigens versteht sich von selbst, dass, wenn nach längerer Zwischenzeit, in Folge der Säcularänderungen der magnetischen Declination und horizontalen Intensität, oder beträchtlicher Schwächung des Stabmagnetismus, p und q aufhören innerhalb mässiger Grenzen zu bleiben (wozu aber die Fälle grosser ausserordentlicher Anomalien nicht gerechnet werden müssen), man eine zweckmässige Abänderung an der Stellung des Schiffchens, des Spiegels, und wenn man es rathsam findet auch des Abstandes der Aufhängungsdrähte vornehmen, und so eine neue Reihe von Beobachtungen mit veränderten Elementen anfangen wird.

13.

So lange p und q nur klein sind, wird man für alle Zwecke, wo die grösste Schärfe nicht gefordert wird, anstatt der strengen Formel (1) eine abgekürzte anwenden können, wo q ganz herausfällt, also gleichzeitige Beobachtungen am Unifilarmagnetometer gar nicht gebraucht werden: dies gilt namentlich von den gewöhnlichen Terminsbeobachtungen. Anstatt jener Formel kann man nemlich setzen

$$r = 1 \pm \operatorname{cotang}\varphi \cdot \operatorname{tang} p \quad \text{oder auch} \quad r = 1 \pm \tfrac{1}{2}\operatorname{cotang}\varphi \cdot \operatorname{tang} 2p$$

Da nun, wenn n den Unterschied des abgelesenen Skalentheils von demjenigen, auf welchen der Lothfaden sich bezieht, und d die horizontale Entfernung der Mitte des Spiegels von letzterm Punkte in Skalentheilen gemessen, bedeutet,

$$\operatorname{tang} 2p = \frac{n}{d}$$

ist, so verwandelt sich diese Formel in

$$r = 1 \pm \frac{n}{2\operatorname{tang}\varphi \cdot d}$$

und es wird dann zugleich, hinlänglich genau,

$$T = \mathfrak{T}\left(1 \pm \frac{n}{2\operatorname{tang}\varphi \cdot d} + (\gamma + 2\beta - \alpha)c\right)$$

wenn man das geringfügige Glied $(\beta - \frac{1}{2}\alpha)(c'' - c)$ weglässt. Bei dem hiesigen Apparate ist $d = 4778{,}3$ Millimeter, und nach den Resultaten der im 8. Art. als Beispiel geführten Rechnung ergibt sich $\varphi = 60^0\,31'\,37''9$, also $2d\operatorname{tang}\varphi = 16910$. Mit den daselbst gebrauchten Werthen von α, β, γ erhält man also

$$T = \left(1 + \frac{n + 13{,}65\,c}{16910}\right)\mathfrak{T}$$

wenn der Nordpol des Magnetstabes auf der Westseite, und

$$T = \left(1 - \frac{n - 13{,}65\,c}{16910}\right)\mathfrak{T}$$

wenn er auf der Ostseite sich befindet.

Übrigens bedarf es keiner Erinnerung, dass die Berücksichtigung der Temperatur bei den Terminsbeobachtungen füglich ganz unterbleiben kann, so lange man nur darauf ausgeht, die Gestaltung der einzelnen in kurzen Zeitfristen wechselnden Anomalien zu erkennen.

14.

Wie bei der Transversalstellung des Bifilarmagnetometers die Veränderungen der Intensität in ihrer ganzen Stärke, die der Declination hingegen kaum merklich den Stand afficiren, so haben gerade umgekehrt auf die Schwingungsdauer die letztern Veränderungen den bedeutendsten, die erstern hingegen nur einen äusserst geringen Einfluss. In sofern p, q und die Abweichung des Elements S von dem Normalwerthe nur klein sind, wird ohne erheblichen Fehler anstatt der Formel (2) Art. 11 gesetzt werden können

$$\frac{t^0 t^0}{tt} = 1 \mp q \operatorname{tang}\varphi \qquad \text{oder auch} \qquad t = t^0(1 \pm \tfrac{1}{2} q \operatorname{tang}\varphi)$$

wenn q in Theilen des Halbmessers, und folglich

$$t = t^0 \pm \frac{t^0 \operatorname{tang}\varphi}{412530} \cdot q$$

wenn es in Bogensecunden ausgedrückt ist. Aus den Resultaten des oben berechneten Beispiels folgt $t^0 = 55{,}871$ Zeitsecunden, wonach also in Bogensecunden

$$q = \pm(t - 55{,}871)\ 4172''8$$

wird. Die ganz scharfe Transformation der Formel (2) zur Berechnung von q ist folgende

$$\pm \operatorname{tang} q = \frac{tt - s t^0 t^0 \cos p}{tt \operatorname{tang}\varphi \pm s t^0 t^0 \sin p}$$

Übrigens bedarf es keiner Erinnerung, dass auf diese Weise durch Schwingungsbeobachtungen nicht der für einen bestimmten Augenblick gültige Werth von q, sondern nur der Mittelwerth für die Dauer jener Beobachtungen bestimmt werden kann.

VORSCHRIFTEN ZUR BESTIMMUNG DER MAGNETISCHEN WIRKUNG WELCHE EIN MAGNETSTAB IN DER FERNE AUSÜBT.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1840. II.

Wenn man mehrere magnetische Apparate zugleich aufgestellt hat, dürfen die gegenseitigen Einwirkungen nicht unbeachtet bleiben. Die verschiedenen Apparate in so grossen Entfernungen von einander aufzustellen, dass diese Einwirkungen unbesehens für ganz unmerklich geachtet werden können, ist ein nicht überall anwendbares, und jedenfalls mit der Aufopferung mancher sonstigen Vortheile und Bequemlichkeiten verknüpftes Auskunftsmittel Kann man aber die Wirkungen, welche ein Apparat an dem Platze eines andern ausübt, durch Rechnung mit Schärfe bestimmen, und also von den am zweiten Apparate gemachten Beobachtungen abtrennen, so behält man die vollkommenste Freiheit, bei der Wahl der Aufstellungsplätze jeder andern Rücksicht ihr Recht widerfahren zu lassen, und die Entwickelung der zu diesen Rechnungen dienenden Formeln scheint daher hier einen Platz wohl zu verdienen.

1.

Die Lage des Punktes, für welchen die Wirkung eines Magnetstabes berechnet werden soll, werde durch drei rechtwinklige Coordinaten, x, y, z bestimmt, deren Anfang wir hier in den Mittelpunkt des Magnetstabes selbst setzen; um die Vorstellungen zu fixiren, nehmen wir an, dass die beiden ersten Coordinatenaxen horizontal sind, und zwar die erste im wahren Meridiane, die dritte also vertical, und rechnen positiv x nach Süden, y nach Westen, z nach oben. Zugleich setzen wir

$$\sqrt{(xx+yy+zz)} = r, \quad x = r\cos f\cos g, \quad y = r\cos f\sin g, \quad z = r\sin f$$

so dass g das Azimuth der von der Mitte des Stabes nach dem fraglichen Punkte gezogenen geraden Linie, und f ihre Neigung gegen die Horizontalebene bedeutet.

Wir bezeichnen ferner mit M das absolute magnetische Moment des Magnetstabes; mit F die Neigung seiner magnetischen Axe, positiv wenn der Nordpol höher liegt; mit G das Azimuth dieser Axe. Zur Abkürzung schreiben wir

$$\cos F\cos G = A, \quad \cos F\sin G = B, \quad \sin F = C$$

wodurch also die magnetischen Momente des Magnetstabes relativ gegen die drei Coordinatenaxen beziehungsweise MA, MB, MC werden.

Die von dem Magnetstabe in dem Punkte x, y, z ausgeübte magnetische Kraft zerlegen wir parallel mit den drei Coordinatenaxen in die partiellen Kräfte ξ, η, ζ.

Die ganze Intensität der reinen erdmagnetischen Kraft an diesem Orte bezeichnen wir mit U; ihren verticalen Theil mit Z; den horizontalen Theil T zerlegen wir parallel mit den beiden ersten Coordinatenaxen in die partiellen Kräfte X und Y. Alle diese Kräfte $\xi, \eta, \zeta, T, U, X, Y, Z$ sind homogene Grössen.

Endlich sei i die magnetische Inclination, D die Declination, wobei wir, um uns dem gewöhnlichen Gebrauche zu conformiren, D von Norden nach Westen zählen, und i wie positiv betrachten, wenn der Nordpol der Magnetnadel nach unten geneigt ist. Wir haben demnach

$$\begin{aligned} X &= -T\cos D = -U\cos i\cos D \\ Y &= T\sin D = U\cos i\sin D \\ Z &= -T\operatorname{tang} i = -U\sin i \end{aligned}$$

2.

Die Wirkung des Magnetstabes in dem Platze x, y, z besteht in geringen Veränderungen der Bestimmungsstücke der erdmagnetischen Kraft, welche wir, da sie wegen ihrer Kleinheit unbedenklich nach den Regeln der Differentialrechnung behandelt werden können, durch die vorgesetzte Charakteristik d bezeichnen wollen. Da nun

$$dX = \xi, \quad dY = \eta, \quad dZ = \zeta$$

so wird

$$\begin{aligned} \xi &= T\sin D.dD - \cos D.dT \\ \eta &= T\cos D.dD + \sin D.dT \\ \zeta &= -T\sec i^2 di \quad -\operatorname{tg} i.dT \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} dD &= \frac{\sin D}{T}.\xi + \frac{\cos D}{T}.\eta \\ dT &= -\cos D.\xi + \sin D.\eta \\ di &= -\frac{\cos i^2}{T}.\zeta - \frac{\sin 2i}{2T}.dT \end{aligned}$$

Endlich wird

$$dU = \cos i.dT - \sin i.\zeta$$

oder

$$\frac{dU}{U} = \frac{\cos i^2}{T}.dT - \frac{\sin 2i}{2T}.\zeta = \frac{dT}{T} + \operatorname{tang} i.di$$

3.

Das Potential der in dem Magnetstabe enthaltenen magnetischen Flüssigkeiten, in dem Punkte x, y, z, lässt sich in eine nach den Potenzen von $\frac{1}{r}$ fortschreitende Reihe entwickeln, von welcher für unsern Zweck bloss das Hauptglied beibehalten zu werden braucht, welches von der Ordnung $\frac{1}{rr}$ ist. Bezeichnen wir dies Potential mit V, so sieht man leicht, dass unter dieser Einschränkung

$$V = \frac{M(Ax+By+Cz)}{r^3}$$

wird. Bekanntlich erhält man ξ, η, ζ durch die partiellen Differentialquotienten von V nach x, y, z; es ist nemlich

$$\xi = -\frac{dV}{dx}, \quad \eta = -\frac{dV}{dy}, \quad \zeta = -\frac{dV}{dz}$$

folglich, wenn man, um abzukürzen,

$$\frac{Ax+By+Cz}{r}=k$$

setzt, und erwägt, dass die partiellen Differentialquotienten $\frac{dr}{dx}, \frac{dr}{dy}, \frac{dr}{dz}$ beziehungsweise $=\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ sind,

$$\xi=\frac{3Mkx}{r^4}-\frac{MA}{r^3}$$
$$\eta=\frac{3Mky}{r^4}-\frac{MB}{r^3}$$
$$\zeta=\frac{3Mkz}{r^4}-\frac{MC}{r^3}$$

Substituirt man also für x, y, z, A, B, C ihre Werthe, so erhält man

$$k=\cos f\cos F\cos(G-g)+\sin f\sin F$$
$$dD=\frac{M}{Tr^3}(3k\cos f\sin(D+g)-\cos F\sin(D+G))$$
$$\frac{dT}{T}=\frac{M}{Tr^3}(-3k\cos f\cos(D+g)+\cos F\cos(D+G))$$
$$di=-\tfrac{1}{2}\sin 2i.\frac{dT}{T}-\frac{M}{Tr^3}.\cos i^2(3k\sin f-\sin F)$$
$$\frac{dU}{U}=\cos i^2.\frac{dT}{T}-\frac{M}{2Tr^3}.\sin 2i(3k\sin f-\sin F)$$

welche Formeln die vollständige Auflösung unsrer Aufgabe enthalten. Ohne unser Erinnern sieht man, dass dD und di hier in Theilen des Halbmessers ausgedrückt sind, und also den Werthen noch der Factor $206265''$ beigefügt werden muss, um jene Änderungen in Bogentheilen zu erhalten. Der Werth von $\frac{M}{T}$ wird übrigens durch Versuche nach der in der *Intensitas vis magneticae terrestris* gelehrten Methode bestimmt werden müssen.

4.

In der Ausübung sind solche Fälle die häufigsten, wo unsre allgemeinen Formeln durch specielle Verhältnisse eine bedeutende Vereinfachung erhalten. Es verdienen hier besonders die beiden folgenden bemerkt zu werden.

I. Wenn der Magnetstab vertical, also $F=\pm 90^0$ ist, so nehmen die allgemeinen Formeln folgende Gestalt an:

$$k=\pm\sin f$$
$$dD=\pm\frac{3M}{2Tr^3}\sin 2f\sin(D+g)$$
$$\frac{dT}{T}=\mp\frac{3M}{2Tr^3}\sin 2f\sin(D+g)$$
$$di=-\tfrac{1}{2}\sin 2i.\frac{dT}{T}\mp\frac{M}{Tr^3}\cos i^2(3\sin f^2-1)$$
$$\frac{dU}{U}=\cos i^2.\frac{dT}{T}\mp\frac{M}{2Tr^3}\sin 2i(3\sin f^2-1)$$

Liegt zugleich der Punkt x, y, z mit der Mitte des Magnetstabes in gleicher Höhe, so wird $z=0$, $f=0$ und folglich

$$dD=0$$
$$dT=0$$
$$di=\pm\frac{M}{Tr^3}\cos i^2$$
$$\frac{dU}{U}=\pm\frac{M}{2Tr^3}\sin 2i$$

Es erhellt daraus, dass die Beobachtungen an einem Unifilar- oder Bifilarmagnetometer durch einen in demselben Locale befindlichen zweiten Magnetstab gar nicht gestört werden, so lange derselbe in verticaler Stellung und seine Mitte in derselben Höhe mit dem Stabe des Magnetometers erhalten wird.

II. Ist der Magnetstab horizontal, oder $F=0$, so gehen unsre Formeln in folgende über:

$$k=\cos f\cos(G-g)$$
$$dD=\frac{M}{Tr^3}(3\cos f^2\cos(G-g)\sin(D+g)-\sin(D+G))$$
$$\frac{dT}{T}=\frac{M}{Tr^3}(-3\cos f^2\cos(G-g)\cos(D+g)+\cos(D+G))$$
$$di=-\tfrac{1}{2}\sin 2i.\frac{dT}{T}-\frac{3M}{2Tr^3}\cos i^2\sin 2f\cos(G-g)$$
$$\frac{dU}{U}=\cos i^2.\frac{dT}{T}-\frac{3M}{4Tr^3}\sin 2i\sin 2f\cos(G-g)$$

Ist zugleich der Magnetstab im magnetischen Meridian (also $G=180^0-D$ für die natürliche Lage), oder senkrecht gegen denselben (also $G=90^0-D$ oder $=270^0-D$, jenachdem der Nordpol auf der Westseite oder auf der Ostseite sich befindet), so erhalten offenbar die Formeln für dD und dT noch weitere Vereinfachung; diese Fälle treten ein, wenn der Stab, dessen Wirkung in der Ferne gesucht wird, den Bestandtheil eines Unifilar- oder eines Bifilarmagnetometers in transversaler Stellung ausmacht.

5.

Wenn man die Wirkung eines Magnetstabes in verschiedenen horizontalen Lagen unter einander vergleichen will, so kann man jeder der im vorhergehenden Artikel II gegebenen Formeln leicht eine dazu zweckmässige Gestalt geben. Bestimmt man z. B. zwei Grössen p, P durch die Gleichungen

$$p\cos P = (3\cos f^2 - 1)\sin(D+g)$$
$$p\sin P = \cos(D+g)$$

so verwandelt sich die Formel für $\mathrm{d}D$ in folgende

$$\mathrm{d}D = \frac{Mp}{Tr^3}\cos(G-g+P)$$

woraus erhellt, dass $\mathrm{d}D$ für $G = g - P$ oder für $G = 180^0 + g - P$ seinen grössten Werth $\frac{Mp}{Tr^3}$ mit positivem oder negativem Zeichen erhält, hingegen für $G = 90^0 + g - P$ und für $G = 270^0 + g - P$ verschwindet. Auf gleiche Weise wird, wenn man

$$q\cos Q = (3\cos f^2 - 1)\cos(D+g)$$
$$q\sin Q = \sin(D+g)$$

setzt,

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{Mq}{Tr^3}\cos(G-g-Q)$$

woraus für den Maximumwerth und das Verschwinden ähnliche Bestimmungen hervorgehen.

6.

Die hiesigen Einrichtungen bieten zu einer mehrfachen Anwendung der gegebenen Vorschriften Gelegenheit dar, bei Bestimmung der wechselseitigen Einwirkung der Magnetstäbe des Unifilar- und des Bifilarmagnetometers auf einander, und der Wirkungen beider Stäbe an einem dritten Platze, wo auf einem festen Steinpostamente mit andern Apparaten von Zeit zu Zeit magnetische Beobachtungen im Freien gemacht werden. Die in Metern ausgedrückten auf die Mitte

der Axe des Reichenbachschen Meridiankreises, und rücksichtlich der dritten Coordinate auf den Fussboden der Sternwarte bezogenen absoluten Coordinaten dieser drei Plätze sind folgende:

(I) Mitte des fünfundzwanzigpfündigen Magnetstabes des Bifilarmagnetometers, für welchen, das Meter als Längeneinheit angenommen, $\frac{M}{T} = 2.63318$ ist,

$$x = -3.391, \quad y = +6.708, \quad z = +0.661$$

(II) Mitte des vierpfündigen Magnetstabes des Unifilarmagnetometers, für welchen $\frac{M}{T} = 0.48592$

$$x = -23.618, \quad y = +69.206, \quad z = -2.235$$

(III) Mitte des Steinpostaments, und rücksichtlich der Höhe, Platz welchen die Mitte der Nadel eines Robinsonschen Inclinatoriums einnimmt,

$$x = -21.546, \quad y = +56.979, \quad z = -1.665$$

Hier mögen nur die Endresultate einer vierfachen Rechnung Platz finden, in welcher für D und i die Werthe $18^0 11' 54''$ und $67^0 36'$ zum Grunde gelegt sind. Die Veränderlichkeit dieser Grössen, so wie der Werthe von $\frac{M}{T}$ für die beiden Magnetstäbe kommt für den gegenwärtigen Zweck nicht in Betracht.

(1) und (4) Wirkungen des Magnetstabes des Unifilarmagnetometers, jene an dem Platze (III), diese an dem Platze (I).

(2) und (3) Wirkungen des Magnetstabes des Bifilarmagnetometers an den Plätzen (III) und (II), indem jener Stab in der transversalen Lage, Nordpol im Westen vorausgesetzt wird.

	$\mathrm{d}D$	$\mathrm{d}T$	$\mathrm{d}i$	$\mathrm{d}U$
(1)	$+64''72$	$-0.0000884\,T$	$+6''91$	$-0.0000071\,U$
(2)	$+3.04$	$+0.0000250\,T$	-1.76	$+0.0000043\,U$
(3)	$+1.82$	$+0.0000132\,T$	-0.93	$+0.0000023\,U$
(4)	$+0.50$	$+0.0000001\,T$	-0.00	$+0.0000001\,U$

Die Zahlen für (2) und (3) verändern bloss ihre Zeichen, wenn im Bifilarmagnetometer der Stab die transversale Lage Nordpol Ost hat. Es beträgt also die ganze Störung an dem Platze III durch beide Apparate

	Nordpol im Bifilarmagnetometer.	
	West	Ost
dD	$+67''76$	$+61''68$
dT	$-0.0000634\,T$	$-0.0001134\,T$
di	$+\ 5''15$	$+\ 8''67$
dU	$-0.0000028\,U$	$-0.0000114\,U$

7.

Schliesslich soll hier noch der Zusammenhang der im 2. Art. für die Wirkung eines Magnetstabes in der Ferne gegebenen Formeln mit einer einfachen schon im 2. Bande der *Resultate* [1837. II.] erwähnten Construction gezeigt werden. Eine Figur kann man entweder nach den folgenden Angaben sich leicht selbst entwerfen, oder a. a. O. nachsehen.

Es sei A der Mittelpunkt des Magnetstabes, n ein beliebiger anderer Punkt seiner durch A gelegten magnetischen Axe auf der Seite des magnetischen Nordpols, s ein ähnlicher Punkt auf der Seite des Südpols, C der Punkt, für welchen die magnetische Wirkung des Magnetstabs auf die daselbst concentrirt gedachte Einheit des nördlichen magnetischen Fluidums bestimmt werden soll. Die partiellen Kräfte ξ, η, ζ werden nach Art. 2 durch die Formeln ausgedrückt

$$\xi = \frac{3Mkx}{r^4} - \frac{MA}{r^3}$$
$$\eta = \frac{3Mky}{r^4} - \frac{MB}{r^3}$$
$$\zeta = \frac{3Mkz}{r^4} - \frac{MC}{r^3}$$

wo, wie man leicht sieht, k dem Cosinus des Winkels zwischen An und AC gleich ist. Die ersten Theile von ξ, η, ζ vereinigen sich offenbar in Eine Kraft $\frac{3Mk}{r^3}$, die abstossend in der Richtung der geraden Linie AC wirkt, wenn k positiv ist, anziehend oder in der entgegengesetzten Richtung CA, wenn k negativ ist. Eben so werden die zweiten Theile von ξ, η, ζ zu Einer Kraft $\frac{M}{r^3}$ zusammengesetzt, deren Richtung immer mit ns parallel ist. Für den speciellen Fall, wo AC mit der magnetischen Axe einen rechten Winkel macht, also $k = 0$ ist, verschwindet die erste Kraft, und die zweite allein stellt also die

ganze Wirkung dar. In jedem andern Falle sei in der Ebene, in welcher n, A, s, C liegen, CB eine Normale gegen CA, B ihr Durchschnittspunkt mit der magnetischen Axe, und [D derjenige Punkt auf der Geraden AB, für welchen] $AD = \frac{1}{3} AB$. Für den Fall der Figur im 2. Bande der *Resultate*, wo AC mit An einen stumpfen Winkel macht, also D und B auf der Seite des Südpols liegen, sind die beiden oben angegebenen Kräfte den geraden Linien CA und AD offenbar proportional, und der Richtung nach die erste mit CA zusammenfallend, die andere mit AD parallel; die Richtung ihrer Resultante wird also CD und die Stärke derselben $= \frac{CD}{AD} \cdot \frac{M}{r^3}$ sein. Für den andern in der Figur a. a. O. nicht gezeichneten Fall, wo AC mit An einen spitzen Winkel macht, also B und D auf der Seite des Nordpols liegen, findet dasselbe Resultat bloss mit dem Unterschiede Statt, dass die Richtung des Winkels des Magnetstabes auf ein Element nördlichen Fluidums nicht durch CD, sondern durch DC ausgedrückt wird, was mithin a. a. O. zur Vervollständigung noch hinzugefügt werden muss.

ÜBER DIE ANWENDUNG DES MAGNETOMETERS

ZUR BESTIMMUNG DER ABSOLUTEN DECLINATION.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1841. I.

Es ist nicht meine Absicht, den in der Überschrift bezeichneten Gegenstand, über welchen bereits im 2. Bande der *Resultate* [1837. VII.] ein sehr ausführlicher Aufsatz mitgetheilt ist, hier noch einmal vollständig abzuhandeln. Ich werde vielmehr mich hier auf Eine Hauptaufgabe beschränken, in Beziehung auf welche die a. a. O. S. 121—124 gegebene Entwicklung als ungenügend erscheint: diese Aufgabe betrifft die Bestimmung des Azimuths derjenigen Verticalebene, in welcher sich die optische Achse des Beobachtungsfernrohrs befindet.

Die in Rede stehende Verticalebene ist festgestellt durch die Marke und einen festen Punkt der Scale, welcher durch den über der Mitte des Objectivs des Beobachtungsfernrohrs herabhangenden Lothfaden bestimmt wird. Von dem Standpunkte des Beobachtungsfernrohrs aus muss ein entfernter Gegenstand sichtbar sein, dessen Azimuth anderweitig schon bekannt ist, und es kommt also zunächst darauf an, den auf den Horizont projicirten Winkel zwischen diesem Gegenstande und der Marke zu bestimmen. Ich nehme an, dass zu diesem Geschäft ein Theodolith nach der bekannten von Reichenbach eingeführten Construction angewandt wird, ohne darum zugleich vorauszusetzen, dass derselbe Theodolith auch zu den magnetischen Beobachtungen gebraucht werde, wozu vielmehr füglich ein besonderes Ablesungsfernrohr verwandt werden kann.

Der gewöhnliche Gebrauch solcher Theodolithen bezieht sich auf Winkelmessungen zwischen Gegenständen in so grossen Entfernungen, dass eine geringe

Abweichung von mehrern der Idee des Instruments zum Grunde liegenden Bedingungen in der Ausführung seines Baues einen merklichen Fehler nicht hervorbringen kann, wie denn in der That absolute Vollkommenheit in keiner mechanischen Arbeit erreichbar ist. Allein wenn die Gegenstände (oder wie im vorliegenden Falle einer derselben) vergleichungsweise sehr nahe sind, so wird es allerdigs nothwendig, es mit solchen Abweichungen schärfer zu nehmen, und namentlich müssen hier folgende Umstände in Erwägung kommen.

I. Die verticale Drehungsachse, die horizontale Drehungsachse und die optische Achse des Fernrohrs sollten einander in Einem Punkte schneiden. In so fern dieser Bedingung vollkommen nicht genügt ist, wird eine dreifache Abweichung vorkommen. Es seien A, B resp. die beiden Punkte in der verticalen und der horizontalen Drehungsachse, wo diese einander am nächsten sind; imgleichen C, D die ähnlichen Punkte der horizontalen Drehungsachse und der optischen Achse. Man bezeichne die Entfernungen AB, BC, CD mit α, β, γ, unter beliebiger Bestimmung rücksichtlich der Zeichen; man mag z. B. α positiv setzen, wenn A auf derselben Seite der horizontalen Drehungsachse liegt wie das Ocular des Fernrohrs; β positiv, wenn für den am Ocular stehenden Beobachter der Punkt C rechts von B fällt; γ positiv, wenn D oberhalb C fällt.

II. Die optische Achse des Fernrohrs sollte normal gegen die horizontale Drehungsachse sein. Dieser Bedingung kann man zwar mit aller nöthigen Schärfe Genüge leisten: allein da man, um nach der Beobachtung eines entfernten Gegenstandes einen nahen deutlich sehen zu können, nothwendig die Ocularröhre weiter*) herausziehen, also dem Fadenkreuze eine veränderte Stellung gegen das Objectiv geben muss, so ist man nicht berechtigt vorauszusetzen, dass beiden Stellungen der Ocularröhre einerlei optische Achse entspreche, sondern muss darauf gefasst sein, dass die für eine Stellung gemachte Berichtigung bei der andern wieder verloren gehe. Grösserer Allgemeinheit wegen mag man voraussetzen, dass für keine von beiden Stellungen die Berichtigung genau gemacht sei, und den Collimationsfehler für die erste Stellung mit c, für die zweite mit c' bezeichnen: als positiv mag man dieselben annehmen, wenn die optische Achse mit dem dem Beobachter rechts liegenden Arme der horizontalen Achse einen spitzen Winkel macht.

*) Bei den weiter unten anzuführenden Beobachtungen etwa 20 Millimeter.

Offenbar werden auch, wenn die Grössen $\mathfrak{b}$, γ der erstern Ocularstellung angehören, etwas veränderte Werthe bei der zweiten an ihre Stelle treten, die mit $\mathfrak{b}'$, γ' bezeichnet werden mögen.

Es ist nun zwar leicht, den Einfluss aller dieser Abweichungen auf die Messung sowohl des horizontalen Winkels zwischen den beiden Gegenständen, als ihrer Elevationen (wenn der Theodolith zugleich einen Höhenkreis hat) in strengen Gleichungen darzustellen, aus welchen die Resultate vermittelst einer biquadratischen Gleichung abzuleiten sein würden; allein da die sieben Grössen $\alpha, \mathfrak{b}, \gamma, \mathfrak{b}', \gamma', c, c'$ alle nur sehr klein sein können, so kann man unbedenklich alle Grössen, welche in Beziehung auf jene von der zweiten oder höherer Ordnung sind, vernachlässigen, und das Resultat ihres Einflusses in sehr einfache Form bringen. Aber selbst dieser Darstellung können wir hier überhoben sein. Man sieht nemlich leicht ein, dass, wenn man das Fernrohr auf gehörige Art umlegt, sämmtliche sieben Abweichungen, ohne ihre Grösse zu ändern, bloss die entgegengesetzten Zeichen annehmen, und dass mithin dasselbe auch von den Fehlern der Messungen gelten wird, die man bei den zwei verschiedenen Arten des Einliegens anstellt. Das Mittel aus diesen beiden Messungen ist folglich von dem Einflusse dieser Fehler, ohne dass man die einzelnen Bestandtheile davon zu kennen braucht, von selbst befreit, und man erhält dadurch den wahren Werth des Winkels zwischen den beiden in der Verticalachse des Instruments sich schneidenden Verticalebenen, in denen die beiden Gegenstände liegen. Dasselbe gilt von den Elevationen, welche sich dann auf den Punkt A beziehen, aber für unsern gegenwärtigen Zweck unnöthig sind.

Das Umlegen muss so geschehen, dass die Zapfen wieder in dieselben Pfannen zu liegen kommen, während die obere Seite des Fernrohrs zur untern wird und das Objectiv an die Stelle des Oculars kommt: es ist also dies Umlegen dasselbe, was eine halbe Umdrehung um die horizontale Achse sein würde, welche auszuführen die Stützen nur nicht hoch genug sind. Wollte man anstatt dieser Art das Umlegen so verrichten, dass die Zapfen in die andern Pfannen gelegt würden, während das Objectivende auf derselben Seite bliebe (was geometrisch betrachtet einerlei ist mit einer halben Umdrehung um die Achse des Fernrohrs), so würden nicht alle sieben Grössen $\alpha, \mathfrak{b}, \gamma, \mathfrak{b}', \gamma', c, c'$ in dem Fall sein, schlechthin die entgegengesetzten Zeichen anzunehmen, sondern dies würde nur von γ, γ', c, c' gelten. Man hat nemlich keine Sicherheit, dass die Stützen *genau*

gleich weit von der Verticalachse abstehen, und es würden daher, nach solchem Umlegen, der Punkt B ein anderer sein können als vorher, mithin auch $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$ andere Werthe annehmen. Dass zugleich α das entgegengesetzte Zeichen nicht annimmt, sondern ganz den vorigen Werth behält, ist übrigens allerdings hier unwesentlich, weil in dem linearen Ausdruck für den Fehler der horizontalen Winkelmessung α gar nicht vorkommt.

Wie nun eine solche Winkelmessung für den beabsichtigten Zweck zu benutzen sei, wird sich am einfachsten durch ein Beispiel zeigen lassen, wozu ich die letzte am 11. März d. J. ausgeführte Anwendung des Verfahrens wähle.

In dem hiesigen magnetischen Observatorium dient zur Anknüpfung der Beobachtungen an den wahren astronomischen Meridian ein Stadtkirchthurm, dessen Knopfstange an dem Platze des Beobachtungsfernrohrs durch das geöffnete nordliche Fenster frei sichtbar ist*), und zwar von der Mitte der Säule aus, welche seit Julius 1837 an die Stelle des früher gebrauchten hölzernen Stativs getreten ist, in dem Azimuth $173^0\ 35'\ 25''5$. Gefunden war dieses Azimuth, indem man einen Theodolithen an einer andern Stelle des Saales aufstellte, die Verticalachse genau im Allignement der Mitte der Säule und des Kirchthurms, und die Winkel zwischen letzterm und zweien andern daselbst sichtbaren Kirchthürmen maass; die Lage dieser verschiedenen Thürme gegen den Nullpunkt in der Sternwarte war durch frühere an die Gradmessung geknüpfte Messungen genau bekannt, und das in Rede stehende Azimuth liess sich daher aus jenen Winkelmessungen leicht berechnen.

Es wurde nun ein achtzolliger Ertelscher Repetitionstheodolith auf der Säule so aufgestellt, dass seine Verticalachse so genau wie möglich mit der Mitte der Säule zusammenfiel, und der horizontale Winkel zwischen der Marke und der Knopfstange des Thurms bei den beiden verschiedenen oben bezeichneten Arten des Einliegens des Fernrohrs, jedesmal durch 25 Repetitionen, gemessen. In der ersten Lage fand sich der Winkel

$$= 11^0\ 40'\ 54''\ 50$$

*) Auf der ersten Tafel des ersten Bandes der *Resultate* [1836. I.] ist dieser Thurm angedeutet, ungefähr so, wie er bei nicht geöffnetem Fenster von dem Theodolithenplatz aus erscheint: an dem Orte des Auges, welcher der perspectivischen Zeichnung eigentlich zum Grunde liegt, wird der Thurm durch die Wand links vom Fenster verdeckt.

in der zweiten

$$= 11^0\ 41'\ 36''\ 18$$

Der wahre Werth des Winkels, seinen Scheitel in die Verticalachse des Theodolithen gesetzt, ist folglich

$$= 11^0\ 41'\ 15''\ 34$$

mithin das Azimuth der durch diese Verticalachse und die Marke gelegten Verticalebene

$$= 161^0\ 54'\ 10''\ 16$$

Mit dieser Operation war eine andere verbunden, deren Zweck war, auszumitteln, in welchem Punkte die Scale von dieser Verticalebene geschnitten wird. Auf dem Objectivende des Theodolithenfernrohrs ist ein Ring aufgesteckt, der auf seiner Vorderfläche zwei einander diametral gegenüber liegende zarte Einschnitte und diesen correspondirend auf der äussern runden Fläche zwei Häkchen hat, in welche nach der verschiedenen Lage des Fernrohrs ein feiner mit einem Gewichte beschwerter Goldfaden eingehängt wird. Der Ring wird so gedreht, dass der durch die Einschnitte gehende Diameter gegen die horizontale Drehungsachse des Fernrohrs normal ist: man erkennt die Erfüllung dieser Bedingung, wenn der in dem obern Einschnitte einliegende Lothfaden zugleich genau dem untern entspricht, zu welchem Ende man das Fernrohr nahe horizontal stellen muss, nemlich nur so wenig nach unten geneigt, dass der Faden noch eben frei vor dem Ringe spielen kann: die Coincidenz wird mit einer Loupe geprüft. Der Lothfaden spielt in einer sehr geringen Entfernung vor der Scale, und es kommt nun darauf an, die correspondirenden Punkte der Scale in den beiden verschiedenen Lagen des Fernrohrs, indem es jedesmal auf die Marke, oder vielmehr in deren Verticalebene gerichtet ist, zu notiren. Genau genommen, sind damit diejenigen Punkte der Scale gemeint, welche in der durch die Marke und den Lothfaden gehenden Verticalebene liegen, und man kann dies unmittelbar in dem Spiegel des Magnetometers erkennen, wenn der Theodolith selbst die Bestimmung hat, als Ablesungsfernrohr zu dienen, also die Scale sich in einer dieser Bestimmung angemessenen Höhe befindet. Es ist wohl überflüssig zu erinnern, dass es in diesem Falle nothwendig werden kann, den Magnetstab

des Magnetometers vermittelst eines aus der Ferne wirkenden Ablenkungsstabes erst in eine solche Stellung zu bringen, dass der betreffende Scalenpunkt nahe am Fadenkreuz des Theodolithenfernrohrs erscheint. Im hiesigen magnetischen Observatorium, wo jetzt die magnetischen Beobachtungen mit einem besondern Ablesungsfernrohre angestellt werden, welches sich in einer geringern Höhe über der Säule befindet als das Theodolithenfernrohr, ist mit diesem das Bild der in einer der Lage des Ablesungsfernrohrs angemessenen Höhe angebrachten Scale im Spiegel des Magnetometers nicht sichtbar. Ich habe daher zur Bestimmung des dem vom Theodolithenfernrohr herabgehenden Lothfaden correspondirenden Scalenpunktes das Ablesungsfernrohr selbst gebraucht, welches zu diesem Zweck nahe an der Marke in der betreffenden Verticalebene aufgestellt wurde: dass man nicht nöthig hat, wegen letzterer Bedingung gar zu ängstlich zu sein, in sofern der Lothfaden, wie schon bemerkt ist, in geringer Entfernung von der Scale spielt, leuchtet von selbst ein. Es fand sich auf diese Weise der Lothfaden correspondirend

dem Scalenpunkte 850.8 bei der ersten Lage des Theodolithenfernrohrs, und
dem Punkte 849.4 bei der zweiten Lage,

woraus man schliessen darf, dass die durch die Marke und die Verticalachse des Theodolithen gehende Verticalebene, deren Azimuth oben bestimmt ist, die Scale in dem Punkte 850.1 schneidet.

Die Bestimmung des Azimuths derjenigen Verticalebene, in welcher sich die optische Achse des Beobachtungsfernrohrs befindet, hat nun weiter keine Schwierigkeit. Correspondirt der vor der Mitte des Objectivs desselben herabhängende Lothfaden dem Scalenpunkte $850{,}1 + n$, so reicht es hin (weil die Scale als normal gegen jene Ebene gestellt vorausgesetzt wird), das Product $n.206265''$ mit der horizontalen Entfernung der Scale von der Marke, in Scalentheilen ausgedrückt, zu dividiren, und den Quotienten mit seinem Zeichen zu $161^0\ 54'\ 10''\ 16$ hinzuzufügen. Gegenwärtig ist jene Entfernung $= 9638.7$. Diente also der Theodolith selbst, und zwar bei der ersten Lage des Fernrohrs, zum Beobachten, so wäre dieses Azimuth

$$= 161^0\ 54'\ 25''\ 1$$

bei der zweiten Lage hingegen

$$= 161^0\ 53'\ 55''\ 2$$

Da aber, wie schon bemerkt ist, zum Beobachten ein besonderes Ablesungsfernrohr dient, welches nach der Beendigung der obigen Operationen so aufgestellt wurde, dass, bei der Richtung der optischen Achse auf die Verticale der Marke, der Lothfaden dem Punkte 850.0 entsprach, so ist das verlangte Azimuth

$$= 161^{0}\ 54'\ 8''\ 0$$

Es mögen über das hier behandelte Geschäft noch ein Paar Bemerkungen hier beigefügt werden.

I. Wenn die horizontale Achse in ihren Lagern einigen Spielraum in dem Sinn ihrer Länge hat, so muss man Sorge tragen, dass sie bei den einzelnen Winkelmessungen immer gleiche Lage gegen die Stützen habe, etwa dadurch, dass man jedesmal den Spielraum auf Einer Seite durch einen leichten Druck gegen das Ende eines bestimmten Zapfens zum Verschwinden bringt. Ohne diese Vorsicht würde man nicht darauf rechnen können, dass die oben mit σ bezeichnete Grösse in der ersten Lage des Fernrohrs bei allen Repetitionen immer denselben, und in der zweiten immer genau den entgegengesetzten Werth behält.

II. Dass die optische Achse des Theodolithenfernrohrs für eine der beiden Ocularstellungen genau berichtigt, d. i. gegen die horizontale Drehungsachse normal sei, ist nicht nöthig für die hier beschriebenen Operationen: dient aber der Theodolith zugleich als Ablesungsfernrohr, so muss allerdings vor solchem Gebrauch diese Berichtigung gemacht sein, und zwar für diejenige Stellung der Ocularröhre, bei welcher beobachtet wird, oder wo Marke und Spiegelbild der Scale deutlich erscheinen. Bekanntlich prüft man die Normalität der optischen Achse zur horizontalen Drehungsachse durch Umlegen, und zwar gerade durch dasjenige Umlegen, welches bei obigen Winkelmessungen *nicht* angewandt werden durfte [S. 439 d. B.], nemlich indem man die Zapfen in die entgegengesetzten Lager legt, ohne den Sinn der Richtung des Fernrohrs zu verändern. Gewöhnlich bezieht sich eine solche Prüfung auf diejenige Stellung der Ocularröhre, wobei man sehr entfernte Gegenstände deutlich sieht, und in diesem Falle ist allerdings weiter nichts nöthig, als dass ein solcher Gegenstand vor und nach dem Umlegen auf dem Fadenkreuze erscheine: in dem gegenwärtigen Falle aber muss man, wenn nach dem Umlegen der vor der Mitte des Objectivs herabhangende Lothfaden eine andere Lage hat als vorher, einen zweiten Zielpunkt neben dem ersten in eben so viel veränderter Lage anwenden. Offenbar muss auch ein anstatt des Theodolithen angewandtes besonderes Ablesungsfernrohr derselben Berichtigung unterworfen werden, und also eine dazu taugliche Aufstellung haben; von selbst versteht sich, dass auch die horizontale Drehungsachse gehörig nivellirt sein muss. Die beiden bei den hiesigen Magnetometern gebrauchten Ablesungsfernröhre haben, bei einer bedeutend stärkern optischen Kraft, als man den Theodolithenfernröhren zu geben pflegt, fast ganz dieselbe Aufstellung, wie Theodolithen, nur ohne getheilte Kreise.

Übrigens mag noch bemerkt werden, dass der *Einfluss* eines Fehlers der Collimation auf das Azimuth der optischen Achse von dem Collimationsfehler selbst nur ein sehr kleiner Bruchtheil ist, welcher durch den Unterschied der Secanten der beiden Neigungen bestimmt wird, indem das Fernrohr einmal gegen die Marke, und dann gegen den Spiegel gerichtet ist. Bei dem hiesigen Unifilarmagnetometer sind diese Neigungen $1^{0}\ 55'$ und $5^{0}\ 16'$: der Unterschied der Azimuthe der optischen Achse, bei der Richtung auf Marke und Spiegel, beträgt folglich nur $\frac{1}{272}$ des Collimationsfehlers selbst. Unter ähnlichen Umständen wird man sich daher gewöhnlich damit begnügen können, die Collimation an einem entfernten Gegenstande zu berichtigen: denn wenn nicht in Folge solcher Berichtigung das Fadenkreuz weit aus der Mitte der Ocularröhre gekommen ist, wird das weitere Herausziehen der letztern schwerlich einen Collimationsfehler erzeugen können, der mehr als einen kleinen Bruchtheil einer Bogenminute betrüge, so dass der Einfluss davon durchaus unmerklich bleibt.

III. Der Zweck, warum man den Lothfaden am Beobachtungsfernrohre fortwährend hängen lässt, besteht darin, dass eine zufällige Verrückung der Scale sofort erkennbar werden soll. Hat eine solche Statt gefunden, so mag man entweder die Scale wieder in ihre vorige Stellung bringen, oder auch in der Rechnung von dem Punkte der Scale, welcher dem Lothfaden nach der Veränderung entspricht, eben so zählen, wie vorher von dem frühern. Bei der gegenwärtig im magnetischen Observatorium angewandten Befestigungsart der Scale an der Säule kommen übrigens zufällige Verschiebungen gar nicht mehr vor.

BEOBACHTUNGEN

DER MAGNETISCHEN INCLINATION IN GÖTTINGEN.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1841. II.

1.

Das Inclinatorium, mit welchem die hier mitzutheilenden Beobachtungen angestellt sind, ist von Robinson; es war das letzte Instrument dieser Art, welches der ausgezeichnete Künstler geliefert hat.

Der verticale Kreis hat im Lichten den Durchmesser 241.169 Millimeter und ist von zehn zu zehn Minuten getheilt; der Abstand zweier Theilstriche an ihren innern Enden beträgt daher 0.351 Millimeter. Die Theilstriche erscheinen auch im Mikroskop unter beträchtlicher Vergrösserung sehr edel; ihre Breite habe ich durch die an mehrern gemachten Messungen = 0.024 Millimeter gefunden, so dass einer nahe 41 Secunden deckt.

Der Durchmesser des horizontalen Kreises, da gemessen, wo die Theilstriche von dem Ende des Indexstriches getroffen werden, ist 148 Millimeter; die Theilung geht durch halbe Grade und der Vernier gibt einzelne Minuten: es findet nur Eine Ablesung Statt.

Die Grade des Verticalkreises sind von beiden Endpunkten eines horizontalen Durchmessers an nach oben und nach unten bis 90 gezählt, eine Einrichtung, welche vielleicht in den gewöhnlichen Beobachtungsfällen bequem scheinen mag, aber leicht Verwirrung hervorbringt, wenn man sich einer absichtlich belasteten Nadel bedient, und diese dadurch in einen andern Quadranten tritt, oder wenn man auch Beobachtungen in einer gegen den magnetischen Meridian rechtwinkligen Verticalebene anstellt: wenigstens macht diese Einrichtung in sol-

chen Fällen eine etwas beschwerlichere und weniger übersichtliche Protocollführung nothwendig. Ich würde daher eine in unverändertem Sinne von 0 bis 360° oder zweimal von 0 bis 180° fortlaufende Graduirung vorziehen, und habe mich gewöhnt, immer im untern Quadranten auf der linken, oder im obern auf der rechten Seite anstatt der gravirten Zählung sofort die Ergänzung zu 180° niederzuschreiben: auf diese Art sind in gegenwärtigem Aufsatze alle Ablesungen angegeben. Am horizontalen Kreise laufen die Zahlen zweimal in einerlei Sinn von 0 bis 180°; natürlicher und bequemer wäre eine ununterbrochene Durchzählung bis 360°, und in dieser Form habe ich die hier vorkommenden Ablesungen angesetzt.

An der Libelle entspricht ein Ausschlag von einem Millimeter einer Neigung von 9 Secunden.

2.

Zu dem Instrumente gehören vier Nadeln, die ich durch die Zahlen 1, 2, 3, 4 unterscheide: die beiden letzten haben drehbare Achsen, auf welche Einrichtung ich weiter unten zurückkommen werde. An allen acht Zapfen hat die mikroskopische Abmessung keinen Unterschied der Dicke erkennen lassen; ich habe diese Dicke = 0.590 Millimeter gefunden. Die Nadeln 1 und 2 wiegen jede 16.5 Gramme, die beiden andern jede 20.5 Gramme.

In den Längen der einzelnen Nadeln finden sich kleine Unterschiede; die Messung ergibt

für 1	. . . .	240.931 Millimeter
2	. . . .	240.866 —
3	. . . .	240.938 —
4	. . . .	240.954 —

Die kürzeste der Nadeln ist also nur um 0.303, und die längste nur um 0.215 Millimeter kürzer, als der Durchmesser des Kreises im Lichten. Dieser Umstand ist nun zwar dem schärfern Ablesen förderlich, hat aber zugleich die Folge, dass schon eine sehr geringe Excentricität die freie Bewegung der Nadel stören kann, und dass es daher schwer ist, diejenigen Theile des Instruments, von deren Stellungen die Excentricität abhängt, auf eine ganz befriedigende Art zu reguliren, zumal da die Stellungen noch vier andern, zusammen also *sechs* Bedingungen Genüge leisten sollen.

3.

Diese sechs Bedingungen sind folgende:

Die beiden Achatplatten, auf deren obern Rändern die Zapfen der Nadel beim Beobachten zu liegen kommen, sollen durch die beiden Schraubenpaare, auf welche sie sich stützen, so regulirt sein, dass

1) ihre obern Ränder in Einer Ebene liegen,

2) dass diese Ebene normal gegen die Ebene des Verticalkreises ist, und

3) unterhalb des Mittelpunkts dieses Kreises liegt, mit einem der halben Zapfendicke gleichkommenden Abstande,

4) dass die Durchschnittslinie jener beiden Ebenen mit der Verticalachse einen rechten Winkel macht.

Es müssen ferner die Pfannen, vermittelst welcher man die Nadel von den Achatplatten abhebt und wieder auflegt, und die auf dem Hebelrahmen mit einiger Verschiebbarkeit aufgeschraubt sind, so regulirt sein, dass nach dem Auflegen der Nadel

5) ihre Achse normal gegen die zuletzt (in 4) genannte Durchschnittslinie wird (mithin in Verbindung mit der Bedingung 2 auch normal gegen die Ebene des Verticalkreises) und zugleich

6) den verticalen Durchmesser des Kreises trifft.

Die Bedingungen 1, 2, 4 zusammengenommen vertreten die Stelle der einen, dass bei genau senkrechter Stellung der aufrechten Drehungsachse eine horizontale Ebene die Ränder der beiden Achatplatten der Länge nach oder in zwei Linien berühren soll, insofern vorausgesetzt wird, dass die Ebene des Verticalkreises mit jener Drehungsachse parallel ist, also mit ihr zugleich senkrecht wird: man kann dies als die siebente Bedingung betrachten, welche man stillschweigend im Vertrauen auf die Geschicklichkeit des Künstlers vorauszusetzen pflegt, und zu deren Prüfung und, eventuell, Berichtigung das Instrument, wie es ist, keine Mittel darbietet.

4.

Bei den in diesem Aufsatze anzuführenden Beobachtungen war ich in Beziehung auf die Prüfung der angegebenen Bedingungen, in Ermangelung anderer Mittel, auf folgende Art zu Werke gegangen.

Zur Prüfung der *ersten* Bedingung gebrauchte ich das Planglas eines sogenannten künstlichen Horizonts, welches (nachdem vorher der Rahmen mit den Pfannen weggenommen war) so auf die Achatläger gelegt wurde, dass die mattgeschliffene Rückseite nach oben gekehrt war. Wenn die Bedingung nicht erfüllt ist, wird immer nur *eine* Achatplatte nach der ganzen Länge, die andere am einen Endpunkte berührt werden, was man, wenn der Fehler nicht sehr gering ist, schon mit dem Auge erkennt; mehr Genauigkeit und Sicherheit gibt eine auf die Glasplatte gestellte Libelle, welche zeigt, ob diese zwei verschiedene Berührungslagen hat oder nur eine. Man sieht leicht, dass mit Hülfe dieser Libelle nach Erfüllung der ersten Bedingung auch die *zweite* und *vierte* geprüft werden kann.

Zur Prüfung der *fünften* Bedingung muss die Nadel in zwei verschiedene Gleichgewichtsstellungen gebracht werden, und zwar solche, wo bei gleicher Lage der Zapfen auf den Lägern (oder indem dieselbe Nadelfläche vorne ist) die Nadel nur eine mässige Neigung gegen die Horizontallinie hat, aber das Ende, welches in der einen Lage auf der linken Seite war, bei der andern rechts zu stehen kommt. Man verschafft sich diese beiden Stellungen am bequemsten vermittelst angemessener Belastungen der Nadel, und erkennt das Erfülltsein der in Rede stehenden Bedingung daran, dass von der Schärfe jedes Nadelendes in der einen Stellung eben so viel vor den Rand des Kreises vortreten muss, wie in der andern. In Gegenden, wo nur eine mässige Inclination Statt findet, würden die betreffenden beiden Lagen schon durch blosse halbe Umdrehung des Instruments, so dass die Kreisfläche beidemal nahe am magnetischen Meridian ist, zu erhalten sein.

Eine ähnliche Prüfungsart lässt sich übrigens auch für die *zweite* Bedingung anwenden, nur dass dabei zwei entgegengesetzte nahe verticale Stellungen der Nadel hergestellt sein müssen, wovon die eine sich von selbst ergibt, wenn man die Kreisebene nahe rechtwinklig gegen den magnetischen Meridian bringt, die andere entweder durch eine angemessene Belastung, oder durch Umkehren der Pole. Man sieht aber leicht, dass dieses Verfahren mit dem oben erwähnten vermittelst der Libelle nur dann gleichgeltend ist, wenn die siebente Bedingung erfüllt ist, und dass man also durch Verbindung beider Methoden eine Art von Prüfung dieser Bedingung selbst erhält, die freilich nur eine sehr unvollkommene sein kann, da sich das gleiche Vortreten der Nadelschärfe vor den Kreisrand nur schätzungsweise beurtheilen lässt.

Dieselben combinirten Stellungen der Nadel dienen zugleich zur Prüfung der beiden übrigen Bedingungen; die *sechste* Bedingung ist erfüllt; wenn jedes Nadelende in der ersten nahe horizontalen Stellung eben so weit von der innern Fläche des Kreises absteht, wie in der zweiten; für die *dritte* Bedingung gilt ähnliches bei den nahe verticalen Stellungen. Offenbar würde zu der Prüfung hinreichen, die Abstände beider Nadelenden von der innern Kreisfläche unter sich bei Einer nahe horizontalen und Einer nahe verticalen Stellung zu vergleichen, wenn die beiden Nadelhälften genau gleich lang wären, aber bei unserm Instrumente, wo die Zwischenräume überhaupt so sehr klein sind, genügt dies nicht, und selbst eine sehr geringe Ungleichheit in den beiden Nadelhälften wird dabei schon bemerkbar.

5.

Wie schwer es ist, auf solche Art allen Bedingungen zugleich Genüge zu thun, erhellt schon aus dem Umstande, dass die zwei Schrauben, auf welchen jede Achatplatte ruht, nur acht Millimeter von einander abstehen, so dass, da die Weite eines Schraubengewindes 0.283 Millimeter beträgt, schon eine halbe Umdrehung einer Schraube die betreffende Achatplatte um einen Grad wendet.

Sehr erleichtert wird aber das Geschäft durch eine eigne Vorrichtung, die ich erst später habe anfertigen lassen, und die dazu dient die Ränder der Achatplatten in Eine Ebene zu bringen und diese horizontal zu machen; ich halte mich aber jetzt nicht bei einer Beschreibung derselben auf, da sie für die gegenwärtigen Beobachtungen*) noch nicht hatte benutzt werden können. Eine zweite gleichfalls erst nach dem Schluss der Beobachtungen fertig gewordene Vorrichtung dient zu einer scharfen Bestimmung der Abweichung des Hauptkreises von der verticalen Lage. Sie hat diese Abweichung zu *zehn Minuten* ergeben, aber die Wegschaffung der Abweichung wird erst eine Abänderung am Instrumente erfordern. Übrigens kann der Einfluss dieser Abweichung auf die Inclinationen nicht einmal eine Secunde betragen.

Überhaupt darf ich nicht unbemerkt lassen, dass kleine Fehler in den verschiedenen Berichtigungen nur einen kaum merklichen Einfluss auf die Inclina-

*) Mit Ausnahme der vom 23. September.

tionsbestimmungen haben können. Der Einfluss, welchen auf die Stellung der Nadel ein Theil der Fehler hat, ist in Beziehung auf diese nur eine Grösse der zweiten Ordnung, und die Wirkung der andern, namentlich einer Excentricität, und einer Neigung der die Achatplatten berührenden Ebene in dem Sinn parallel mit der Ebene des Kreises (Fehler gegen die Bedingungen 3, 6 und 4) werden durch die Combination der einzelnen Beobachtungsstücke völlig eliminirt. Ich kann daher dem Urtheil Horner's, dass *vor allem* auf die Wegschaffung dieses letzten Fehlers zu sehen sei (Physik. Wörterb. 5. Band, S. 759) nicht beistimmen, sondern betrachte diesen Fehler als denjenigen, an dessen vollkommener Wegschaffung am wenigsten gelegen ist.

6.

Die hier aufzuführenden Inclinationsbeobachtungen sind sämmtlich im Freien an dem in den *Resultaten* 1840. II. [S. 433 d. B.] bezeichneten Platze angestellt; ein Schirmdach hielt die Sonnenstrahlen von dem Instrumente ab. Dieses wurde auf dem Steine so aufgestellt, dass die gerade Linie durch zwei Fussspitzen nahe senkrecht gegen den magnetischen Meridian wurde, für welche Stellung die Plätze der drei Füsse bezeichnet waren. Die genaue magnetische Orientirung des Instruments wurde durch eine demselben beigegebene Hülfsnadel erhalten, die mit einem Achathütchen auf eine Spitze aufgehängt wird; der Träger dieser Spitze hat zwei kurze cylindrische Seitenarme, die in die beiden Pfannen eingelegt werden, wodurch sich die Spitze in Folge des Gewichts des frei herabhängenden Theils des Trägers von selbst vertical stellt. Ich habe öfters mit dieser Orientirungsart auch die sonst übliche durch correspondirende Neigungen in zwei nahe gegen den magnetischen Meridian senkrechten Stellungen des Verticalkreises verbunden und immer nur ganz unerhebliche Unterschiede gefunden, woraus hervorgeht, dass die Hülfsnadel hinlänglich empfindlich ist und keine constante Abweichung hervorbringt. Eine geringe Abweichung der Verticalebene, in welcher man beobachtet, von dem ohnehin während der Beobachtungen nicht ganz unveränderlichen magnetischen Meridian hat übrigens auf die Neigung der Inclinationsnadel nur einen als ganz unmerklich zu betrachtenden Einfluss von der zweiten Ordnung.

7.

Das Zusammenfallen des Schwerpunkts einer Nadel mit der Drehungsachse können die geschicktesten Künstler nur näherungsweise bewirken: es bleibt fast immer eine Abweichung zurück, deren Einfluss auf die Einstellung der Nadel durch die Combination von Beobachtungen unter mehrfach gewechselten Umständen ermittelt oder eliminirt werden soll: zu diesen abgeänderten Umständen gehört wesentlich die Umkehrung der Pole der Nadel. Unter sonst gleichen Umständen ist jener Einfluss desto stärker, je schwächer die Nadel magnetisirt ist; da man aber nicht befugt ist, anzunehmen, dass die Stärke des Nadelmagnetismus nach dem Umkehren der Pole wieder eben so gross wird, wie vorher, so ist eine genaue Reduction der Beobachtungen von der Kenntniss des Verhältnisses dieser Stücke abhängig. Man gelangt dazu durch Beobachtung der Schwingungsdauer der Nadel: ich habe aber aus mehrern Gründen *horizontalen* Schwingungen den Vorzug gegeben, und zu deren Beobachtung einen besondern von Hrn. Inspector Meyerstein verfertigten Apparat angewandt. Die Nadel schwingt in einem hölzernen Kasten mit verglasten Deckeln, und liegt dabei auf einem leicht gearbeiteten Bügel, der an einem 270 Millimeter langen von einer Glasröhre gegen Luftzug geschützten Seidenfaden hängt, und ihre Enden spielen während der Schwingungen an zwei Gradbogen, deren jeder 40 Grad umfasst, in halbe Grade getheilt ist, und 5 Minuten mit Sicherheit zu schätzen verstattet. Die Schwingungsdauer jeder Nadel wurde vor und nach dem Umstreichen jedesmal aus 150 in drei Sätze vertheilten Schwingungen bestimmt, die nach gehöriger Reduction auf unendlich kleine Bögen stets vortrefflich übereinstimmende Resultate geben. Angefangen wurde gewöhnlich mit einem Schwingungsbogen von etwa 36 Grad, und es verdient hier wohl bemerkt zu werden, dass, im Gegensatz gegen die in den *Resultaten* 1837. IV [S. 385 d. B.] erwähnten Erfahrungen an schwereren Stäben, die Abnahme des Schwingungsbogens an allen Tagen und Nadeln mit fast gleicher Geschwindigkeit erfolgte, so dass die Zeit, innerhalb welcher der Bogen auf seinen vierten Theil herabkam, mit geringen Schwankungen 14 Minuten betrug. Übrigens wurden diese Schwingungsbeobachtungen immer in der Sternwarte auf einem Steinpostamente angestellt, indem es dabei nicht sowohl auf die absolute Dauer, als auf das Verhältniss ankommt, welches von den kleinen in diesem Local möglicherweise Statt findenden fremden Einflüssen nicht merklich afficirt werden kann.

8.

Bei den im Sommer 1842 angestellten Inclinationsbeobachtungen bezweckte ich ausser der Feststellung der für diese Zeit geltenden magnetischen Inclination zugleich die Bestimmung des Grades der Genauigkeit, welche mit dem angewandten Instrument erreicht wird. Es schien mir nicht genügend, die Zuverlässigkeit der Endresultate, auf welche so mancherlei Umstände Einfluss haben, nach den Unterschieden abzuschätzen, die sich in den Einstellungen der Nadel bei wiederholtem Abheben *vermittelst des Pfannenhebels* ergeben; eben so wenig aber kann zu diesem Zwecke die blosse Vergleichung der Resultate dienen, die man für die Inclination aus den Beobachtungen verschiedener Tage erhält, da sich dabei die zufälligen dem Instrument beizumessenden Beobachtungsfehler mit den wirklichen Schwankungen der Inclination selbst vermischen. Ich war ferner begierig zu erfahren, ob meine vier Nadeln übereinstimmende, oder wie es einigen Beobachtern begegnet ist*), entschieden und bedeutend ungleiche Resultate geben würden.

Diese Rücksichten haben mich bewogen, eine von der gewöhnlichen etwas abweichende Anordnung der Beobachtungen zu wählen; das Wesentliche des Unterschiedes ergibt sich aus folgendem.

Gewöhnlich beobachtet man den Stand der Nadel, d. i. die Stellung beider Spitzen gegen die Theilung des Kreises, in vier verschiedenen Combinationen der Stellung des Kreises und der Art des Einliegens der Nadel, indem die getheilte Fläche des erstern und die gezeichnete Fläche der letztern nach Osten oder Westen, nach gleicher oder nach entgegengesetzter Weltgegend gekehrt sein können. Dieselben Combinationen werden nach dem Umkehren der Pole wiederholt, so dass zusammen 16 Ablesungszahlen vorliegen, aus welchen man, in so fern sie nicht in Folge einer starken Abweichung des Schwerpunkts der Nadel von ihrer Zapfenachse grosse Verschiedenheiten darbieten, das einfache arithmetische Mittel für die Inclination annimmt, oder im entgegengesetzten Falle eine künstlichere Rechnung anwendet. Es versteht sich, dass jede der 16 Zahlen

*) Das auffallendste Beispiel dieser Art wird in dem *Fifth Report of the British association for the advancement of Science* S. 142 angeführt, wo acht Nadeln, mit welchen Capitaine Ross in London die Inclination bestimmte, Unterschiede bis zu 41 Minuten ergaben, obgleich die Beobachtungen mit jeder einzelnen Nadel zahlreich und unter sich gut übereinstimmend waren. Die Ursache dieser sonderbaren Erscheinung, über welche näheres Detail nicht mitgetheilt ist, hat man in England der nicht vollkommen cylindrischen Gestalt der Zapfen beigemessen, und gerade deshalb drehbare Zapfen versucht.

selbst schon das Mittel aus einer kleinern oder grössern Anzahl von Einstellungen sein kann, die man in jeder Combination durch wiederholtes Aufheben erhält.

Hievon unterscheidet sich das von mir befolgte Verfahren dadurch, dass ich an jedem Tage mit zwei Nadeln beobachtet habe, ohne zwischen den Beobachtungen die Pole umzukehren; das Umkehren der Pole geschah zwischen zwei auf einander folgenden Beobachtungen und zwar wechselsweise immer nur an einer Nadel. Man sieht, dass auf diese Art die Beobachtungen von vier Tagen alle Combinationen der verschiedenen Polarisirungen beider Nadeln umfassen, wie dies mit den Nadeln 1 und 3 vom 6. bis 9. Julius, und mit den Nadeln 2 und 4 vom 17. bis 20. Julius geschehen ist. Eine Fortsetzung ähnlich combinirter Abwechslungen durch acht Beobachtungstage, wie mit den Nadeln 1 und 2 vom 20. Mai bis 5 Junius, und mit den Nadeln 3 und 4 vom 8. bis 25. Junius ausgeführt ist, gab also jede Combination der Polarisirungen zweimal. Die Beobachtungen an jedem Tage wurden so geordnet, dass die Resultate aus beiden Nadeln, so viel thunlich, gleichzeitig wurden. Dies wurde dadurch erreicht, dass zuerst die oben erwähnten vier Combinationen an der einen Nadel durchbeobachtet wurden, und zwar jede mit viermal wiederholter Auflegung; sodann die ähnlichen Combinationen an der zweiten Nadel unter achtmal wiederholter Auflegung; endlich wiederum an der ersten Nadel dieselben Combinationen, aber in verkehrter Ordnung und unter viermal wiederholter Auflegung.

Bei dieser Einrichtung geben die Beobachtungen Eines Tages für sich allein noch keine Inclinationsbestimmung; allein wenn damit die Beobachtungen des folgenden Tages verbunden werden, so lässt offenbar die nicht umgestrichene Nadel erkennen, um wie viel die Inclination an den beiden Tagen ungleich war, und die einseitigen Beobachtungen an der andern können danach auf Einen Zeitpunkt reducirt, und also vollständig gemacht werden. Zu einer strengern die Gesammtheit der Beobachtungen von allen 24 Tagen umfassenden Behandlung wird aber erst das gegenseitige Verhalten der partiellen Beobachtungsresultate näher erörtert werden müssen.

9.

Diese in mehr als einer Beziehung wichtige Entwickelung wird sich am bequemsten an ein Beispiel anknüpfen lassen, entnommen von einer auf die gewöhnliche Art angestellten Beobachtung, dergleichen von mir auch an mehrern Tagen gemacht sind.

Ich wähle dazu die Beobachtung mit der Nadel 1 vom 23. September 1842 Vormittags von $8\frac{1}{2}$ bis 11 Uhr. Die magnetische Orientirung wurde auf die im 6. Art. angezeigte Art mit der Hülfsnadel erhalten, und der Index des Azimuthalkreises (dessen von der Linken nach der Rechten wachsende Grade ich, wie schon oben bemerkt ist, von 0 bis 360° durchzähle) zeigte bei der Stellung des Verticalkreises im Meridian, die getheilte Seite nach Osten gekehrt, 90° 5′.

Ausser den gewöhnlichen acht Combinationen im magnetischen Meridian machte ich an diesem Tage noch eben so viele in der gegen denselben normalen Verticalebene: ich nehme diese Beobachtungen hier mit auf, da sie zu mehrern Erörterungen Gelegenheit geben. Die Nadel ist (eben so wie die drei andern) auf einer Seite mit den Buchstaben *A*, *B* an den Enden gezeichnet, wodurch die Polarisirung und Einlegungsart bequem unterschieden werden kann. In jeder der 16 Combinationen wurde die Nadel fünfmal mit dem Pfannenhebel auf die Achatplatten gelegt: in der folgenden Übersicht gebe ich aber nur die Mittelwerthe aus den zusammengehörigen Einstellungen.

Nadelende B Nordpol.

Azimuthal Kreis	Bezeichnete Nadelfläche vorne		hinten	
	unten	oben	unten	oben
90° 5′	67° 27′ 54″	67° 29′ 36″	67° 45′ 39″	67° 44′ 51″
180 5	89 52 39	89 52 51	90 12 30	90 10 30
270 5	112 18 39	112 16 45	112 38 51	112 33 54
0 5	89 58 33	89 57 48	90 13 27	90 10 54

Nadelende A Nordpol.

90° 5′	68° 2′ 51″	68° 2′ 33″	67° 35′ 15″	67° 37′ 0″
180 5	90 14 48	90 12 21	89 51 12	89 51 36
270 5	112 27 21	112 22 33	112 7 6	112 5 33
0 5	90 16 15	90 14 0	89 53 54	89 54 18

Die Dauer einer horizontalen Schwingung wurde gefunden

vor den Beobachtungen . . . . 5″83555
nach den Beobachtungen 5.87416

10.

Ich verweile nun zuerst bei den Unterschieden zwischen den Ablesungen der untern und obern Spitze, welche davon abhängen, dass die Zapfenachse weder durch den Mittelpunkt der Theilung, noch durch die die beiden Spitzen der Nadel verbindende gerade Linie geht. Bezeichnen wir mit x, y die Coordinaten des Schnittes der Zapfenachse mit der Kreisebene relativ gegen den Mittelpunkt der Theilung, ausgedrückt in Bogentheilen der innern Kreisperipherie, und zwar x parallel mit dem Diameter durch die beiden Nullpunkte und positiv nach der rechten, y parallel mit dem Diameter durch die beiden 90^0 Punkte und positiv nach oben; ferner mit $180^0 - z$ den Winkel zwischen den beiden durch die Zapfenachse und die Spitzen A und B gelegten Ebenen, so verstanden, dass, indem man sich die Nadel horizontal und die gezeichnete Seite nach oben gekehrt denkt, in dem Sinne von der linken nach der rechten von A nach B gezählt wird; endlich mit l das Mittel zwischen den beiden Ablesungen: so wird der Unterschied derselben (so verstanden, dass die untere Ablesung von der obern abgezogen wird)

$$= 2x \sin l + 2y \cos l \pm z$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn zugleich die gezeichnete Fläche vorne und A oben (also hier Südpol), oder jene hinten und B oben ist, das untere Zeichen in den beiden andern Fällen.

Die obigen Beobachtungen geben so 16 Gleichungen, aus welchen nach der Methode der kleinsten Quadrate gefunden wird

$$x = -\ 38''3$$
$$y = +153.2$$
$$z = +\ 75.4$$

Die Vergleichung gibt dann, wenn man nach der Grösse von l ordnet,

l	Beobachtung	Rechnung	Fehler
67° 28′ 45″	+102″	+122″	−20″
67 36 7	+105	+121	−16
67 45 15	− 48	− 30	−18
68 2 42	− 18	− 32	+14
89 51 24	+ 24	0	+24
89 52 45	+ 12	− 1	+13
89 54 6	+ 24	− 1	+25
89 58 10	− 45	− 1	−44
90 11 30	−120	−153	+33
90 12 10	−153	−153	0
90 13 34	−147	−153	+ 6
90 15 7	−135	−153	+18
112 6 19	− 93	−111	+18
112 17 42	−114	−112	− 2
112 24 57	−288	−264	−24
112 36 22	−297	−264	−33

Die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ist 7924, woraus man schliesst, dass der mittlere Fehler der Differenz zweier Mittel aus fünf Ablesungen

$$= \sqrt{\tfrac{7924}{13}} = 24''7$$

und der mittlere Fehler der einfachen Ablesung Einer Spitze

$$= \sqrt{\tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{7924}{13}} = 39''0$$

angenommen werden kann, eine in der That sehr befriedigende Genauigkeit, welche durch ähnliche Discussion der Beobachtungen von andern Tagen nicht nur bestätigt, sondern zuweilen noch übertroffen wird. Es mag jedoch dabei bemerkt werden, dass die Erreichung einer solchen Übereinstimmung wesentlich von dem Umstande abhängt, dass das Abheben der Nadel immer nur dann geschieht, wenn sie in Ruhe oder ihrer Ruhestellung nahe ist. Ohne diese Vorsicht würde die Nadel, deren Schwingung in einem Rollen der Zapfen auf dem Lager besteht, an einer andern Stelle des Lagers, als wo sie niedergelegt wird, zur Ruhe kommen, und also das Excentricitätselement x ein veränderliches sein.

Man erhält auf die hier angegebene Art allerdings die Werthe der Excentricitätselemente x und y mit vieler Genauigkeit, allein diese Werthe können nicht ohne Weiteres dazu dienen, uns zu belehren, ob und wie viel die Läger und Pfannen noch verrückt werden müssen, um den Bedingungen 3 und 6 im 3. Art. Genüge zu leisten, indem diese sich auf den Mittelpunkt des innern Kreises, jene aber auf den Mittelpunkt der Eintheilung beziehen, welche beide etwas verschieden sein können, und an dem in Rede stehenden Instrumente auch wirklich verschieden sind. In der That waren vor den hier angeführten Beobachtungen die betreffenden Berichtigungen mit aller möglichen Sorgfalt ausgeführt.

Die mit z bezeichnete Grösse ist offenbar für jede Nadel unveränderlich, und eine ähnliche Behandlung der Beobachtungen von andern Tagen hat nahe denselben Werth ergeben. Für die drei andern Nadeln habe ich gefunden

für Nadel 2	. . . .	$+3'\ 18''$
3	. . . .	$-1\ \ 4$
4	. . . .	$+1\ \ 2$

Obwohl die Kenntniss dieser Werthe kein besonderes praktisches Interesse hat, so gibt doch ihre Kleinheit ein rühmliches Zeugniss für die von dem ausgezeichneten Künstler auf die Bearbeitung der Nadeln verwandte Sorgfalt.

11.

Das Mittel der Ablesungen der beiden Spitzen gibt uns die Neigung der diese Spitzen verbindenden geraden Linie oder einer Parallele mit derselben gegen den mit 0 bezeichneten Diameter des Verticalkreises. Ich stelle diese 16 Mittel hier paarweise zusammen.

Nadelende B Nordpol

Azim. Kr.	Bez. Nadelfl. vorne	Azim. Kr.	Bez. Nadelfl. hinten
90° 5′	67° 28′ 45″	270° 5′	112° 36′ 23″
180 5	89 52 45	0 5	90 12 11
270 5	112 17 43	90 5	67 45 15
0 5	89 58 10	180 5	90 11 30

Nadelende A Nordpol

Azim. Kr.	Bez. Nadelfl. vorne	Azim. Kr.	Bez. Nadelfl. hinten
90° 5′	68° 2′ 42″	270° 5′	112° 6′ 20″
180 5	90 13 34	0 5	89 54 6
270 5	112 24 57	90 5	67 36 7
0 5	90 15 8	180 5	89 51 24

Nebeneinander stehen hier diejenigen Einstellungen, bei welchen in entgegengesetzter Lage des Verticalkreises die Zapfenachse gleiche Lage (gegen die Weltgegenden) hatte. Der Zusammenhang zweier solcher Zahlen l und l' ist ein sehr einfacher, wenn die Läger so berichtigt sind, dass eine gegen die verticale Drehungsachse normale Ebene sie berührt. In dieser Voraussetzung liegt in beiden Einstellungen die Zapfenachse auf einer horizontalen Ebene und der Ruhestand der Nadel ist daher offenbar derselbe, d. i. wenn wir unter L die Neigung der von der obern zur untern Spitze gezogenen geraden Linie gegen denjenigen horizontalen Radius des Kreises verstehen, der jedesmal auf der rechten Seite der gezeichneten Nadelfläche liegt, so wird L in beiden Einstellungen gleiche Werthe haben. Diese Neigung ergibt sich aber

in der ersten Einstellung $= l - \alpha$

und in der zweiten $= 180^0 - (l' - \alpha)$

wenn α den Fehler des Nullpunkts (d. i. die Ablesung an demjenigen Kreisradius, der mit der Verticalachse einen rechten Winkel macht) bedeutet. Wir haben also unter obiger Voraussetzung

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(l + l') - 90^0, \quad L = \tfrac{1}{2}(l + 180^0 - l')$$

Aus den Beobachtungen vom 23. Sept., wo diese Berichtigung mit Hülfe der im 5. Art. erwähnten Vorrichtung auf das sorgfältigste ausgeführt war, erhalten wir also acht verschiedene Bestimmungen von α, nemlich

$+2'\ 34''$
2 28
1 29
4 50
4 31
3 50
0 32
3 16

Die Summe der Quadrate der in Secunden ausgedrückten Abweichungen von dem Mittelwerthe 2′ 56″ findet sich $= 57214$; wenn man also diese Abweichungen wie ganz zufällige betrachtet, so ergeben sie den mittlern Fehler des

Resultats aus einem Paar coordinirten Einstellungen $= \sqrt{\frac{57214}{7}} = 90''4$. Man sieht, dass bei diesem Instrumente die Anomalien der Einstellung viel beträchtlicher sind, als die reinen Ablesungsfehler.

12.

Anders verhält es sich aber, wenn die vorausgesetzte genaue Berichtigung der Läger nicht Statt findet. Nehmen wir an, dass zwar die Ränder derselben in Einer Ebene liegen, aber nicht in einer gegen die Verticalachse normalen, so ist in den beiden Einstellungen diese Ebene auf entgegengesetzte Art gegen die Horizontalebene geneigt. Hier kommt indessen nur die Neigung in dem Sinn der Lagerränder oder parallel mit der Kreisebene in Betracht, indem eine kleine Neigung in der Querrichtung oder in dem Sinn der Nadelachse keinen merklichen Einfluss auf die Ruhestellung der Nadel hat. Es bezeichne nun L diejenige Neigung der Nadel (eben so verstanden wie oben), welche bei dem Aufliegen auf einem vollkommen horizontalen Lager Statt finden würde; δ die entsprechende Richtungskraft, d. i. den Coëfficienten, in welchen der Sinus einer Ablenkung von der Ruhestellung multiplicirt werden muss, um das Drehungsmoment der die Nadel nach dieser Stellung zurücktreibenden Kraft auszudrücken; endlich sei $L+\sigma$ die in der ersten Einstellung auf dem geneigten Lager wirklich Statt findende Neigung. Es lässt sich dann leicht zeigen, dass

$$\delta \sin \sigma = p\rho \sin \gamma$$

wird, wo p das Gewicht der Nadel, ρ den Halbmesser der Zapfen und γ die Neigung des Lagers gegen die Horizontallinie bedeuten, letztere Grösse positiv genommen, wenn das Lager auf der rechten Seite der gezeichneten Nadelfläche niedriger ist. Offenbar muss nun aber in der zweiten Einstellung $-\gamma$ anstatt γ gesetzt werden, wodurch σ in $-\sigma$ übergeht, daher in dieser zweiten Einstellung die Neigung der Nadel $L-\sigma$ wird. Wir haben also

$$l-\alpha = L+\sigma, \quad 180^0-(l'-\alpha) = L-\sigma$$

und folglich, eben so wie im vorhergehenden Art.

$$\tfrac{1}{2}(l+180^0-l') = L$$

hingegen anstatt der andern dortigen Gleichung jetzt

$$\tfrac{1}{2}(l+l')-90^0 = \alpha+\sigma$$

Liegen aber die Ränder der Achatplatten gar nicht in Einer Ebene, so werden eben diese beiden Formeln auch noch hinlänglich genau gültig bleiben, wenn man nur für γ das Mittel der Neigungen der beiden Kanten annimmt, vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt der Nadel von den beiden aufliegenden Punkten der Zapfen nahe gleich weit absteht. Genau genommen entsteht zwar noch eine kleine Modification aus dem Umstande, dass dann die gerade Linie, welche die beiden Berührungspunkte der Zapfen und Läger verbindet, in den beiden Einstellungen nicht ganz gleiche Azimuthe hat; der Einfluss dieses Umstandes auf die Stellung der Nadel wird aber auch da, wo er am stärksten ist, nemlich bei Beobachtungen in der gegen den magnetischen Meridian normalen Ebene, wie ganz unmerklich betrachtet werden dürfen.

13.

Da es nicht uninteressant ist, übersehen zu können, in welchem Verhältnisse bei nicht berichtigtem Zustande der Läger die Neigung derselben auf die Einstellung der Nadel wirkt, so füge ich hier noch das dazu nöthige für die am 23. Sept. gebrauchte Nadel bei. Zu dem Zweck, ihr Trägheitsmoment zu bestimmen, hatte ich schon früher horizontale Schwingungen derselben beobachtet, theils ohne, theils mit Auflegung eines Ringes, dessen eignes Trägheitsmoment sich aus Gewicht und Dimensionen mit hinlänglicher Schärfe berechnen liess. Es war am 21. September

Schwingungsdauer ohne Ring	5''88431	
— mit Ring	7.32835	
Gewicht des Ringes	19.2385	Gramme
Innerer Durchmesser	75.525	Millimeter
Äusserer Durchmesser	79.767	—

Hieraus folgt, Gramm und Millimeter als Einheit angenommen,

Trägheitsmoment des Ringes	29019
— der Nadel*)	52662

*) Eigentlich ist es die Summe der Trägheitsmomente der Nadel und des Bügels; beide von einander zu scheiden ist theils unthunlich, theils überflüssig, da keine andere Schwingungen als horizontale mit diesem Bügel gebraucht werden.

Hieraus verbunden mit den oben Art. 9 angegebenen Schwingungszeiten vom 23. September, und die Länge des einfachen Secundenpendels in Göttingen zu 994.126 Millimeter angenommen, ergibt sich auf bekannte Weise

horizontale magnetische Richtungskraft

vor dem Umstreichen 1.5556

nach dem Umstreichen 1.5352

Diese Zahlen gelten, genau genommen, zunächst nur für den Platz, wo die Schwingungen beobachtet sind, und schliessen also die daselbst etwa statt findenden localen Einflüsse ein: für den gegenwärtigen Zweck kommt dieser jedenfalls nur geringe Einfluss nicht in Betracht.

Mit Neigung $67^0\ 40'\ 54''$ folgt hieraus ferner

ganze magnetische Richtungskraft,

vor dem Umstreichen 4.0965

nach dem Umstreichen 4.0429

verticale magnetische Richtungskraft

vor dem Umstreichen 3.7897

nach dem Umstreichen 3.7401

Diese vier Zahlen können, wenn man die kleine Modification, welche die magnetische Richtungskraft der Nadel durch die Excentricität des Schwerpunkts erhält, nicht berücksichtigt, als die Werthe von δ betrachtet werden, je nachdem die Beobachtung im magnetischen Meridian oder in der dagegen normalen Ebene gemacht ist. Da σ und γ immer klein genug sind, um diese Grössen selbst an die Stelle ihrer Sinus setzen zu können, also

$$\sigma = \frac{p\rho}{\delta}\cdot\gamma$$

so ergibt sich hieraus, je nachdem die Stärke der Magnetisirung, wie sie vor oder wie sie nach dem Umstreichen war, zum Grunde gelegt wird

für Beobachtungen im magnetischen Meridian

$$\sigma = 1{,}1882\gamma \quad \text{oder} \quad \sigma = 1{,}2039\gamma$$

für Beobachtungen in der gegen den magnetischen Meridian normalen Ebene

$$\sigma = 1{,}2844\gamma \quad \text{oder} \quad \sigma = 1{,}3014\gamma$$

Übrigens sind zwar die bisher betrachteten Relationen zwischen den einzelnen Beobachtungsstücken nicht wesentlich, insofern es nur gilt, aus allen die magnetische Inclination abzuleiten: allein sie sind nicht unwichtig für die Prüfung und Befestigung des Resultats, indem das rechte Vertrauen in das Ganze erst aus der klaren Einsicht in die befriedigende Übereinstimmung der Theile erwachsen kann.

14.

Die Ausbeute der Beobachtungen ist nunmehr auf die acht Werthe von L zurückgeführt, welche erklärt werden können als die Neigungen der von der Südpolspitze der Nadel nach der Nordpolspitze gezogenen geraden Linie gegen den auf der rechten Seite der gezeichneten Nadelfläche liegenden horizontalen Kreisradius im Zustande des Gleichgewichts, insofern die Nadelzapfen auf einer horizontalen Fläche aufliegend gedacht werden, oder, was in statischer Rücksicht offenbar ganz dasselbe ist, insofern die Nadel als nur um die Achsenlinie der Zapfen drehbar angenommen wird. Mit andern Worten, die Werthe von L sind die verbesserten d. i. vom Einfluss des Fehlers des Nullpunkts und der Nichthorizontalität der Läger befreieten Werthe der im 11. Art. unter der Überschrift *Bezeichnete Nadelfläche vorne* aufgeführten Zahlen

Werthe von L.

Az. Kr.	B Nordpol	A Nordpol
$90^0\ 5'$	$67^0\ 26'\ 11''$	$67^0\ 58'\ 11''$
180 5	89 50 17	90 9 44
270 5	112 16 14	112 24 25
0 5	89 53 20	90 11 52

Um nun den Zusammenhang der Werthe von L mit den Elementen, von welchen er abhängt, in einer Gleichung auszudrücken, bediene ich mich folgender Bezeichnungen.

V Stellung des Azimuthalkreises für die Beobachtung.

V^0 Stellung des Azimuthalkreises, bei welcher der Verticalkreis im magnetischen Meridian, und die getheilte Seite nach Osten gerichtet ist.

i magnetische Inclination.

m das Product des magnetischen Moments der Nadel in die ganze Intensität der erdmagnetischen Kraft, wobei die Schwere als Einheit der beschleunigenden Kräfte angenommen wird.

q das Gewicht der Nadel multiplicirt in die Entfernung des Schwerpunkts von der Zapfenachse.

c der spitze Winkel zwischen der die Spitzen der Nadel verbindenden geraden Linie und der magnetischen Achse derselben, positiv, wenn letztere rechts liegt, indem die Nadel mit der gezeichneten Seite nach oben horizontal liegend gedacht wird.

Q der Winkel zwischen der geraden Linie von der Südpolspitze der Nadel nach der Nordpolspitze einerseits und der geraden Linie von der Zapfenachse nach dem Schwerpunkt andererseits, so verstanden, dass man von der ersten anfangend bei derselben Lage der Nadel wie für c von der Linken nach der Rechten zählt.

δ die Richtungskraft.

Zerlegt man die erdmagnetische Kraft in einen verticalen und einen horizontalen Theil, so entsteht aus dem erstern das Drehungsmoment, positiv genommen in dem Sinn wachsender L,

$$m \sin i \cos(L+c)$$

aus dem andern

$$-m \cos i \cos(V-V^0) \sin(L+c)$$

Die Schwere hingegen bewirkt das Drehungsmoment

$$q \cos(L+Q)$$

Da L die Gleichgewichtsstellung ausdrückt, so wird die Summe dieser drei Momente $=0$; woraus wir die Hauptgleichung erhalten

$$-\sin i \cos(L+c) + \cos i \cos(V-V^0) \sin(L+c) = \tfrac{q}{m} \,.\, \cos(L+Q)$$

Schreiben wir in der Summe der drei Momente $L+z$ anstatt L, so erhalten wir das Drehungsmoment, welches bei einer Ablenkung z von der Gleichgewichtsstellung Statt findet; entwickelt man diesen Ausdruck in zwei Theile mit den Factoren $\cos z$ und $\sin z$, so verschwindet der erste vermöge der Hauptgleichung, und der zweite wird in Folge des Begriffs der Richtungskraft $= -\delta \sin z$.

Wir haben also für δ die allgemeine Formel

$$\delta = m \sin i \sin(L+c) + m \cos i \cos(V-V^0) \cos(L+c) + q \sin(L+Q)$$

Für die drei speciellen Hauptfälle finden wir hieraus:

I. Für $V = V^0$

$$\sin(L+c-i) = \tfrac{q}{m} \cos(L+Q)$$
$$\delta = m \cos(L+c-i) + q \sin(L+Q)$$
$$= \frac{m \cos(Q+i-c)}{\cos(L+Q)} = \frac{q \cos(Q+i-c)}{\sin(L+c-i)}$$

II. Für $V = V^0 + 180^0$

$$\sin(L+c+i) = -\tfrac{q}{m} \cos(L+Q)$$
$$\delta = -m \cos(L+c+i) + q \sin(L+Q)$$
$$= -\frac{m \cos(Q-c-i)}{\cos(L+Q)} = \frac{q \cos(Q-c-i)}{\sin(L+c+i)}$$

III. Übereinstimmend für $V = V^0 + 90^0$ und $V = V^0 + 270^0$

$$\sin i \cos(L+c) = -\tfrac{q}{m} \cos(L+Q)$$
$$\delta = m \sin i \sin(L+c) + q \sin(L+Q)$$
$$= -\frac{m \sin i \sin(Q-c)}{\cos(L+Q)} = \frac{q \sin(Q-c)}{\cos(L+c)}$$

Unser Beispiel gibt für die beiden letzten Fälle anstatt gleicher Werthe von L Ungleichheiten von resp. 3′ 3″ und 2′ 8″, welche theils in den zufälligen Beobachtungsfehlern, theils in der Conspiration mehrerer Umstände ihren Grund haben: in einer kleinen Unsicherheit der anfänglichen magnetischen Orientirung; in der Veränderlichkeit der magnetischen Declination und also des Werthes von V^0 im Laufe der Beobachtungen; in einer kleinen Excentricität des Horizontalkreises, welche in Ermangelung einer doppelten Ablesung nicht controllirt werden kann; endlich darin, dass die Rechtwinkligkeit der Zapfenachse gegen die Kreisebene durch die Auflegung vermittelst der Pfannen nur auf eine unvollkommene Art erhalten werden kann. Alle diese Umstände werden, so viel thunlich, unschädlich gemacht, indem man aus beiden Einstellungen die Mittel nimmt, also

für B Nordpol . . . . . $L = 89^0\ 51'\ 49''$
für A Nordpol . . . . . $L = 90\ \ 10\ \ 48$

setzt. Indessen wird man dieser Umstände wegen immer dem Resultate für die Einstellung bei einer gegen den magnetischen Meridian normalen Lage eine etwas geringere Zuverlässigkeit beilegen müssen, als bei den Lagen im Meridian selbst, wo der Einfluss jener Ursachen als unmerklich betrachtet werden kann.

15.

Die aus den 32 ursprünglichen Zahlen uns übrig gebliebenen sechs mögen fortan auf folgende Art bezeichnet werden:

Werthe von L	für $V - V^0 =$
f, f'	0
$180^0 - g,\ 180^0 - g'$	180^0
h, h'	90^0 und 270^0

wo die nicht accentuirten Zeichen sich auf B Nordpol, die accentuirten auf A Nordpol beziehen sollen. Offenbar sind so f, f', g, g' für die Stellungen im magnetischen Meridian die Neigungen der von der Südpolspitze der Nadel nach der Nordpolspitze gezogenen geraden Linie sämmtlich unter der nördlichen Horizontallinie, und zwar die beiden ersten für die Stellung, wo die gezeichnete Nadelfläche nach Osten gekehrt ist, die beiden andern für die entgegengesetzte; h, h' hingegen sind, für die Stellungen in der gegen den magnetischen Meridian normalen Ebene, die Neigungen derselben geraden Linie gegen die östliche oder westliche Horizontallinie, je nachdem die gezeichnete Nadelfläche nach Süden oder nach Norden gekehrt ist.

Was die Elemente betrifft, von welchen diese sechs Grössen abhängen, so ist q ganz constant, und i muss für alle als gleich angenommen werden, insofern wir die im Laufe der Beobachtungen etwa Statt habenden kleinen Schwankungen doch nicht berücksichtigen können; Q, m, c hingegen ändern nach dem Umstreichen ihre Werthe, und zwar Q genau um 180^0, m und c aber so, dass weiter kein bestimmter Zusammenhang mit den frühern Statt findet, als dass wir wenn zum Umkehren der Pole eine gleichförmige Streichmanipulation und kräftige Streichstäbe angewandt werden, versichert sein dürfen, dass der Unterschied und für c auch die absoluten Werthe nicht sehr beträchtlich sein können. Indem ich nun fortan die nicht accentuirten Zeichen Q, m, c die bestimmten für die Beobachtungen mit B Nordpol geltenden Werthe bedeuten, und für die Beobachtung mit A Nordpol, $Q + 180^0, m', c'$ an ihre Stelle treten lasse, verwandeln sich die allgemeinen Gleichungen des vorhergehenden Art. in folgende sechs:

$$\sin(f + c - i) = \tfrac{q}{m}\cos(f + Q) \quad \ldots \quad (1)$$
$$\sin(g - c - i) = \tfrac{q}{m}\cos(g - Q) \quad \ldots \quad (2)$$
$$\sin i\cos(h + c) = -\tfrac{q}{m}\cos(h + Q) \quad \ldots \quad (3)$$
$$\sin(f' + c' - i) = -\tfrac{q}{m'}\cos(f' + Q) \quad \ldots \quad (4)$$
$$\sin(g' - c' - i) = -\tfrac{q}{m'}\cos(g' - Q) \quad \ldots \quad (5)$$
$$\sin i\cos(h' + c') = \tfrac{q}{m'}\cos(h' + Q) \quad \ldots \quad (6)$$

16.

Theoretisch betrachtet reichen diese sechs Gleichungen hin, um die sechs unbekannten Grössen $c, c', \frac{q}{m}, \frac{q}{m'}, Q, i$ zu bestimmen, und es mag der Auflösung dieser Aufgabe ein Platz hier vergönnt sein, obgleich sie gar keinen praktischen Werth hat, da der enorme Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die Endresultate dieses Verfahren ganz unbrauchbar macht.

Multiplicirt man die Gleichungen 1, 2, 3 resp. mit

$$\sin(g + h), \quad \sin(f - h), \quad \sin(f + g)$$

und addirt, so erhält man nach einigen leichten Reductionen

$$\sin(f + c) . \sin(g + h) = \sin(g - c) . \sin(h - f)$$

woraus sich c leicht bestimmen lässt, am bequemsten vermittelst der Formel

$$\operatorname{tang}(c + \tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{2}g) = -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(f + g)^2 . \operatorname{cotang}(h - \tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{2}g)$$

Auf ähnliche Art erhält man aus den Gleichungen 4, 5, 6

$$\operatorname{tang}(c' + \tfrac{1}{2}f' - \tfrac{1}{2}g') = -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(f' + g')^2 . \operatorname{cotang}(h' - \tfrac{1}{2}f' + \tfrac{1}{2}g')$$

Die Zahlen unsers Beispiels sind

$$f = 67^0\,26'\,11'' \qquad f' = 67^0\,58'\,11''$$
$$g = 67\;\;43\;\;46 \qquad g' = 67\;\;35\;\;35$$
$$h = 89\;\;51\;\;49 \qquad h' = 90\;\;10\;\;48$$

woraus nach obigen Formeln folgt

$$c = +\,12'\,21'' \qquad c' = -\,14'\,18''$$

Werthe, deren Grösse schon fast die Wahrscheinlichkeit überschreitet, und deren geringe Zuverlässigkeit sichtbar wird, wenn man den Einfluss entwickelt, welchen kleine Fehler in den ihnen zum Grunde liegenden Zahlen auf sie haben. Man kann der dazu dienenden Differentialformel mehrere Formen geben; eine derselben ist folgende:

$$\mathrm{d}c = -\frac{\sin(g-c).\sin(h+c)}{\sin(h-f).\sin(f+g)}\mathrm{d}f + \frac{\sin(f+c).\sin(h+c)}{\sin(g+h).\sin(f+g)}.\mathrm{d}g + \frac{\sin(f+c).\sin(g-c)}{\sin(h-f).\sin(h+g)}.\mathrm{d}h$$

Für $\mathrm{d}c'$ gilt dieselbe Formel, wenn man nur f, g, h mit f', g', h' vertauscht. Auf unsere Rechnung angewandt, ergeben sie

$$\mathrm{d}c = -3{,}435\,\mathrm{d}f + 3{,}441\,\mathrm{d}g + 5{,}876\,\mathrm{d}h$$
$$\mathrm{d}c' = -3{,}499\,\mathrm{d}f' + 3{,}494\,\mathrm{d}g' + 5{,}993\,\mathrm{d}h'$$

Erwägt man also, dass die Werthe von h und h' selbst nur eine geringere Zuverlässigkeit haben und füglich Fehler von einer oder ein Paar Minuten einschliessen können, so erhellt, dass die gefundenen Werthe von c und c' kein Vertrauen verdienen

Der Vollständigkeit wegen lasse ich hier noch die Art, wie die übrigen unbekannten Grössen gefunden werden können, folgen.

Aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (2) folgt

$$\cos i = -\frac{q}{m}.\frac{\sin(f+g)\sin(Q-c)}{\sin(2c+f-g)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und also unter Zuziehung von Gleichung (3)

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sin(2c+f-g)}{\sin(f+g).\cos(h+c)}.\frac{\cos(Q+h)}{\sin(Q-c)}$$

Auf ganz ähnliche Weise geben die Gleichungen 4 — 6

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sin(2c'+f'-g')}{\sin(f'+g').\cos(h'+c')}.\frac{\cos(Q+h')}{\sin(Q-c')}$$

Es wird folglich, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\sin(2c'+f'-g').\sin(f+g).\cos(h+c)}{\sin(2c+f-g).\sin(f'+g').\cos(h'+c')} = k$$

schreibt,

$$\cos(Q+h).\sin(Q-c') = k\cos(Q+h').\sin(Q-c)$$

Diese Gleichung nimmt, wenn man

$$\cos(h-c') - k\cos(h'-c) = A\sin B$$
$$\sin(h-c') - k\sin(h'-c) = A\cos B$$
$$\frac{\sin(h+c') - k\sin(h'+c)}{A} = C$$

setzt, die einfache Form an

$$\cos(2Q-B) = C$$

wodurch Q bestimmt wird; sodann findet sich i aus einer der beiden Gleichungen für $\operatorname{tang} i$; endlich $\frac{q}{m}$ und $\frac{q}{m'}$ aus (1) oder (2) und aus (4) oder (5). Über diese Rechnungen ist noch folgendes zu bemerken.

I. Um die numerische Rechnung nach obigen Formeln mit Schärfe führen zu können, müssen c und c' mit viel mehr Genauigkeit berechnet sein, als ihre absolute Unzuverlässigkeit an sich verdient; im entgegengesetzten Falle würde die doppelte Bestimmung für $i, \frac{q}{m}, \frac{q}{m'}$ geringe Übereinstimmung geben*). Es lassen sich übrigens für jene Formeln andere diesem Übelstande nicht unterworfene, aber etwas weniger einfache substituiren, die ich mit Übergehung der nicht schweren Ableitung hieher setze.

$$\operatorname{tang} i = -\frac{2\sin(f+c).\sin(g-c)}{\sin(f+g).\sin(h+c)}.\frac{\cos(Q+h)}{\sin(Q-c)}$$
$$= -\frac{2\sin(f'+c').\sin(g'-c')}{\sin(f'+g').\sin(h'+c')}.\frac{\cos(Q+h')}{\sin(Q-c')}$$
$$k = \frac{\sin(f+g).\sin(f'+c').\sin(g'-c').\sin(h+c)}{\sin(f'+g').\sin(f+c).\sin(g-c).\sin(h'+c')}$$

*) Alle in diesem Aufsatze vorkommenden Berechnungen sind zwar mit grösster Schärfe geführt, aber beim Abdruck die Bruchtheile der Secunden weggelassen. Wer also mit den abgekürzten Zwischenzahlen weiter rechnet, wird zuweilen etwas abweichende Resultate finden.

II. Die Gleichung $\cos(2Q-B) = C$ hat, den speciellen Fall wo $C = \pm 1$ ist ausgenommen, immer vier verschiedene Auflösungen oder zwischen 0 und 360^0 liegende Werthe von Q, welche paarweise um 180^0 verschieden sind. Solche zwei Werthe von Q gehören zu einerlei Werth von i, aber zu entgegengesetzten sonst gleichen Werthen von $\frac{q}{m}, \frac{q}{m'}$: da nun letztere Grössen ihrer Natur nach positiv sein müssen, so fällt dadurch in jedem Paare ein Werth von Q von selbst weg. Gibt aber ein Werth von Q die Zeichen von $\frac{q}{m}, \frac{q}{m'}$ unter sich entgegengesetzt, so ist offenbar das ganze Paar zu verwerfen, und wenn dasselbe bei beiden Paaren Statt finden sollte, so ist daraus weiter nichts zu schliessen, als dass die Beobachtungsfehler die Combination der Gleichungen 1—6 zur Bestimmung der unbekannten Grössen ganz untauglich machen. In unserm Beispiele gibt die Rechnung folgende zwei Systeme von Werthen:

Erstes System

$$Q = \begin{cases} 12^0\ 44'\ 41'' \\ 192\ \ 44\ \ 41 \end{cases}$$

$$i = 67\ \ 41\ \ 33$$

$$\frac{q}{m} = \mp 0.0051395$$

$$\frac{q}{m'} = \mp 0.0042073$$

Zweites System

$$Q = \begin{cases} 179^0\ 57'\ 42'' \\ 359\ \ 57\ \ 42 \end{cases}$$

$$i = 60\ \ 2\ \ 11$$

$$\frac{q}{m} = \mp 0.3443905$$

$$\frac{q}{m'} = \pm 0.3563855$$

Hier ist offenbar das zweite System ganz, und im erstern der obere Werth von Q zu verwerfen, also der Werth $Q = 192^0\ 44'\ 41''$ allein zulässig. Dass aber damit ein recht guter Werth von i verbunden, und dass die schon sehr starke Abweichung des Verhältnisses der Werthe von $\frac{q}{m}$ und $\frac{q}{m'}$, von dem Verhältnisse der Quadrate der Schwingungszeiten (Art. 9), denen jene proportional sein sollten, nicht noch viel grösser ist, hat man bloss einer zufälligen Compensation der Beobachtungsfehler zuzuschreiben. In der That bringt schon die blosse Vergrösserung des Werthes von h' um Eine Minute (bei unveränderten Werthen

der fünf übrigen Grössen f, g, h, f', g') ganz untaugliche Resultate hervor, indem die nach obiger Methode geführte Rechnung zwei Systeme von Auflösungen ergibt, in welchen die Neigung resp. $68^0\ 17'\ 40''$ und $66^0\ 23'\ 12''$ wird, während in beiden Systemen die Werthe von $\frac{q}{m}, \frac{q}{m'}$ entgegengesetzte Zeichen erhalten, ein schlagender Beweis, dass die Rechnung nicht auf solche Combinationen gegründet werden darf.

17.

Lassen wir nun aber die Beobachtungen in der gegen den magnetischen Meridian rechtwinkligen Ebene fahren, so müssen diese entweder durch andere Data ersetzt werden, oder man muss gewisse willkürliche Voraussetzungen, die nicht strenge richtig sind, zum Grunde legen, und sich mit dem Grade von Genauigkeit begnügen, welchen man auf diese Weise den Resultaten verschaffen kann. Bei meinen Beobachtungen ist durchgängig ein neues Datum aus den vor und nach dem Umkehren der Pole bestimmten Schwingungszeiten zu entnehmen, deren Quadrate als den Grössen $\frac{q}{m}, \frac{q}{m'}$ proportional betrachtet werden können. Derselbe Apparat, mit welchem diese Schwingungszeiten beobachtet werden, kann zwar auch zu einer unmittelbaren Bestimmung der Grössen c und c' dienen, wenn man bei zwei Einlegungen der Nadel in den Bügel (die gezeichnete Seite einmal oben, das andere mal unten) die Stellung der Spitzen gegen den Gradbogen beobachtet, und von den etwaigen Declinationsänderungen vermittelst gleichzeitiger Beobachtungen am Unifilar-Magnetometer Rechnung trägt. Allein jener Apparat verträgt keine so scharfen Ablesungen, als zu *dieser* Anwendung (für welche er nicht bestimmt ist) erforderlich sein würden. Wäre aber ein solcher Apparat viel genauer getheilt, für eine unverrückbare Aufstellung gesorgt, und geschähe etwa die Ablesung mit Mikroskopen, so würde es allerdings möglich sein, c und c' mit aller nur zu wünschenden Schärfe direct zu bestimmen, und wir hätten dann sogar ein Datum mehr als nöthig, so dass durch eine angemessene Ausgleichung die Genauigkeit des Resultats noch erhöhet werden könnte.

Ich ersetze sonach einstweilen das fehlende Datum durch die Voraussetzung, dass die magnetische Achse der Nadel durch die Umkehrung der Pole nicht verändert ist, oder dass $c' = c$. Diese Voraussetzung haben alle Beobachter gemacht, welche die Inclination durch eine strengere Rechnung, als nach der sonst allgemein gebräuchlichen Formel $i = \frac{1}{4}(f+g+f'+g')$ zu bestimmen versucht haben, und man hat allerdings Grund anzunehmen, dass sie nicht leicht *viel* fehlen wird, wenn man das Streichen immer mit grosser Sorgfalt, mit einerlei Streichstäben, und bei einerlei Lage der Nadel in einem zweckmässig construirten Troge ausführt. Inzwischen zeigen meine eignen Erfahrungen, dass trotz dieser Vorsicht doch nicht unbedeutende Ungleichheiten in der Lage der magnetischen Achse der Nadel vorkommen können, und auch in den Angaben anderer Beobachter erkennt man oft sichere Spuren davon. (So geben z. B. Ermans Beobachtungen vom 13. Oct. 1829, nach seinen eignen Grundsätzen behandelt, die Abweichung der magnetischen Achse an der einen Nadel 36′ 24″, während sie zu andern Zeiten sehr klein gewesen zu sein scheint). Glücklicherweise kann übrigens selbst eine beträchtliche Unrichtigkeit bei jener Voraussetzung, unter solchen Umständen wie hier Statt finden, nur einen sehr geringen Einfluss auf das Resultat haben.

18.

Nach dieser Grundlage ergibt sich die Auflösung der Aufgabe auf folgende Art. Mit der schon oben gebrauchten Gleichung (7)

$$\frac{\cos i \,.\, \sin(2c+f-g)}{\sin(f+g)} = -\frac{q}{m} \,.\, \sin(Q-c)$$

verbinde ich die auf ähnliche Art aus (4) und (5) folgende, indem ich darin c anstatt c', und $\frac{\lambda q}{m}$ anstatt $\frac{q}{m'}$ schreibe,

$$\frac{\cos i \,.\, \sin(2c+f'-g')}{\sin(f'+g')} = -\frac{\lambda q}{m} \,.\, \sin(Q-c) \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

also

$$\lambda \sin(f'+g') \sin(2c+f-g) = \sin(f+g) \,.\, \sin(2c+f'-g')$$

wodurch c bestimmt wird, am besten vermittelst der Formel (9)

$$\operatorname{tang}(2c - \tfrac{1}{2}(g+g'-f-f')) = \frac{\lambda \sin(f+g) - \sin(f'+g')}{\lambda \sin(f+g) + \sin(f'+g')} \,.\, \operatorname{tang}(f-g-f'+g')$$

Es folgt ferner aus (1) und (2)

$$2\cos i \,.\, \sin(f+c) \sin(g-c) - \sin i \,.\, \sin(f+g) = \frac{q}{m} \,.\, \cos(Q-c)$$

also, durch Verbindung mit (7)

$$\operatorname{cotang}(Q-c) = \frac{\sin(f+g)}{\sin(2c+f-g)} \,.\, \operatorname{tang} i - \frac{2\sin(f+c) \,.\, \sin(g-c)}{\sin(2c+f-g)}$$

Auf ähnliche Weise wird aus (4), (5) und (8) abgeleitet

$$\operatorname{cotang}(Q-c) = \frac{\sin(f'+g')}{\sin(2c+f'-g')} \,.\, \operatorname{tang} i - \frac{2\sin(f'+c) \,.\, \sin(g'-c)}{\sin(2c+f'-g')}$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$\operatorname{cotang}(f+c) = F \qquad \operatorname{cotang}(f'+c) = F'$$
$$\operatorname{cotang}(g-c) = G \qquad \operatorname{cotang}(g'-c) = G'$$

so erhalten diese beiden Gleichungen die Form

$$\operatorname{cotang}(Q-c) = \frac{G+F}{G-F} \,.\, \operatorname{tang} i - \frac{2}{G-F}$$
$$\operatorname{cotang}(Q-c) = \frac{G'+F'}{G'-F'} \,.\, \operatorname{tang} i - \frac{2}{G'-F'}$$

woraus endlich sich ergibt

$$\operatorname{tang} i = \frac{G'-F'-G+F}{G'F-GF'}$$
$$\operatorname{cotang}(Q-c) = \frac{G'+F'-G-F}{G'F-GF'}$$

Nachdem i und Q gefunden sind, kann man $\frac{m}{q}$ aus irgend einer der Gleichungen 1, 2, 4, 5, 7, 8 bestimmen.

In unserm Beispiele haben wir

$$\lambda = \left(\frac{5{,}87416}{5{,}83555}\right)^2$$

und die weitere Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} c &= -0^0\ 1'\ 13'' \\ i &= 67\ 40\ 54 \\ Q-c &= 145\ 17\ 10 \\ Q &= 145\ 15\ 57 \\ \frac{q}{m} &= 0.0055111 \\ \frac{q}{m'} &= 0.0055843 \end{aligned}$$

Die nach diesen Elementen *berechneten* Werthe von h, h' finden sich

$$\begin{aligned} h &= 89^0\ 49'\ 30'' \\ h' &= 90\ 12\ 59 \end{aligned}$$

von welchen mithin die beobachteten um $+2'\ 19''$ und $-2'\ 11''$ abweichen.

19.

In Ermangelung einer directen Bestimmung des Verhältnisses von $\frac{q}{m}, \frac{q}{m'}$ ist man genöthigt, anstatt Einer willkürlichen Voraussetzung zwei zu machen. Folgende zwei Arten sind bei den Beobachtern zur Anwendung gekommen.

I. Man nimmt an, dass zugleich $c = 0$ und $c' = 0$, wonach wir für i die Formel haben

$$\operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{cotg} g' - \operatorname{cotg} f' - \operatorname{cotg} g + \operatorname{cotg} f}{\operatorname{cotg} g' \operatorname{cotg} f - \operatorname{cotg} f' \operatorname{cotg} g}$$

Es ist dies das gewöhnliche Verfahren, wenn man nach Mayers Vorgang die Nadel vorsätzlich mit einem kleinen Seitengewicht belastet hat. Da man auf diese Weise Einstellungen der Nadel an ganz andern Stellen des Limbus erhält, als ohne Belastung, so gewinnt man, wenn keine bedeutend abweichende Resultate sich ergeben, einige Beruhigung darüber, dass der Limbus keine selbstmagnetische Theile enthalte. Es ist übrigens rathsam, sich auf mässige Belastung zu beschränken, weil im entgegengesetzten Falle die Beobachtungsfehler einen ungebührlich vergrösserten Einfluss auf das Resultat erhalten, und auch von den vernachlässigten c, c' eine merklich nachtheilige Wirkung zurückbleiben würde.

II. Man setzt voraus, dass $m = m'$ und $c = c'$. Man sieht, dass dies nur ein specieller Fall von dem im vorhergehenden Art. abgehandelten ist, und kann also die dortigen Formeln ohne weiteres anwenden, indem man $\lambda = 1$ setzt. Die Formel (9) für c nimmt dann eine noch etwas einfachere Gestalt an, nemlich

$$\operatorname{tang}(2c - \tfrac{1}{2}(g + g' - f - f')) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(f + g - f' - g') \,.\, \operatorname{tang}\frac{1}{2}(f - g - f' + g')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(f + g + f' + g')}$$

Für den Fall, dass man c nicht mit verlangt, sondern bloss i bestimmen will, findet sich eine elegante Rechnungsvorschrift in Ermans Reise, 2. Abtheilung 2. Band, S. 22.

20.

Die bisher entwickelten Relationen der Beobachtungen zu der Inclination und den übrigen Elementen sind allgemein gültig, möge die Abweichung des Schwerpunkts von der Zapfenachse gross oder klein sein. Der letztere Fall wird aber immer Statt finden bei Nadeln, die von einem tüchtigen Künstler herrühren, so lange sie nicht durch fremde Ursachen (z. B. Rostflecken, Abschleifen, Herausnehmen der Zapfen oder vorsätzlich angebrachte Zusatzgewichte) verändert werden, und dann verstatten die Formeln eine höchst wesentliche Vereinfachung. So lange $\frac{q}{m}$ oder $\frac{q}{m'}$ den Werth 0.03 nicht überschreitet, kann der Unterschied zwischen den Sinussen von $f + c - i$, $g - c - i$, $f' + c' - i$, $g' - c' - i$ und den Bögen selbst noch nicht den Betrag einer Secunde erreichen, und man wird also in Betracht des mässigen Grades von Genauigkeit, welchen Beobachtungen mit dem Inclinatorium verstatten, die Vertauschung des Bogens und Sinus selbst noch bei bedeutend grössern Werthen von $\frac{q}{m}, \frac{q}{m'}$ ohne Bedenken sich erlauben dürfen. Bei den vier Nadeln des Robinsonschen Inclinatoriums liegen die Werthe in noch viel engern Grenzen, und ich werde daher die hier mitzutheilenden Beobachtungen nach einem solchen abgekürzten Verfahren behandeln, vorher aber demselben das bisher betrachtete Beispiel unterwerfen.

21.

Wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{206265''\, q \cos Q}{m} = t$$

$$\frac{206265''\, q \sin Q}{m} = u$$

setzen, so nehmen unter der Voraussetzung, dass

$$f + c - i, \quad g - c - i, \quad f' + c' - i, \quad g' - c' - i$$

klein genug sind, um mit ihren Sinussen vertauscht werden zu können, die Gleichungen 1, 2, 4, 5 des 15. Art. folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}
i &= f + c - t \cos f + u \sin f \\
i &= g - c - t \cos g - u \sin g \\
i &= f' + c' + \lambda t \cos f' - \lambda u \sin f' \\
i &= g' - c' + \lambda t \cos g' + \lambda u \sin g'
\end{aligned}$$

Die fünf unbekannten Grössen i, c, c', t, u lassen sich nun zwar nicht durch vier Gleichungen bestimmen, aber wohl durch Eine unbestimmt bleibende Grösse ausdrücken, und wählt man dazu $c' - c$, so erkennt man auf diese Weise auf das Klarste, in welchem Maasse man befugt ist, sie zu vernachlässigen. Die Elimination selbst führt man in jedem einzelnen Falle am bequemsten erst nach der Substitution der Zahlwerthe der Beobachtungsdata aus.

In unserm Beispiele werden die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
i &= 67^0\ 26'\ 11''+c-0{,}3837\,t+0{,}9234\,u\\
i &= 67\ \ 43\ \ 46\ -c-0{,}3790\,t-0{,}9254\,u\\
i &= 67\ \ 58\ \ 11\ +c'+0{,}3801\,t-0{,}9393\,u\\
i &= 67\ \ 35\ \ 35\ -c'+0.3862\,t+0{,}9368\,u
\end{aligned}$$

woraus man durch Elimination findet

$$\begin{aligned}
i &= 67^0\ 41'\ \ 54''-0{,}0006\,(c'-c)\\
t &= -\quad 934\ +0{,}0002\,(c'-c)\\
u &= +\quad 648\ +0{,}5369\,(c'-c)\\
\tfrac{1}{2}(c'+c) &= -\quad\ 73\ +0{,}0037\,(c'-c)
\end{aligned}$$

Man erkennt daraus, dass die willkürliche Voraussetzung der Gleichheit von c und c' zwar eine sichere Bestimmung von u unthunlich macht, aber auf die Werthe von i und t keinen merklichen, und selbst auf die Bestimmung des Mittelwerths von c und c' nur einen geringen Einfluss hat.

Das Mittel aus den vier Gleichungen ist

$$i = 67^0\ 40'\ 56''+0{,}0009\,t-0{,}0011\,u$$

wo der absolute Theil das einfache Mittel aus f, g, f', g' ist, und füglich ohne weiteres für die Inclination hätte angenommen werden können. Dies ist in der That das gewöhnliche Verfahren, welches auch immer in denjenigen Fällen unbedenklich ist, wo die Werthe von f, g, f', g' keine grossen Ungleichheiten darbieten.

22.

Ehe ich das bisher behandelte Beispiel verlasse, will ich noch bemerken, dass die Gleichungen 3 und 6 eine ganz ähnliche Abkürzung verstatten, wie die andern. Man kann nemlich setzen

$$\begin{aligned}
c &= 90^0-h+\frac{\cos h}{\sin i}\,.\,t-\frac{\sin h}{\sin i}\,.\,u\\
c' &= 90^0-h'-\frac{\lambda\cos h'}{\sin i}\,.\,t+\frac{\lambda\sin h'}{\sin i}\,.\,u
\end{aligned}$$

Bei der numerischen Berechnung kann hier unbedenklich für i der Werth

$\frac{1}{4}(f+g+f'+g')$ substituirt werden, wonach in unserm Beispiele diese Gleichungen sich so stellen:

$$\begin{aligned}
c &= +491''+0{,}0026\,t-1{,}0810\,u\\
c' &= -648\ +0{,}0034\,t+1{,}0953\,u
\end{aligned}$$

Da die Werthe von h und h' auf doppelt so vielen Einstellungen beruhen, als die Werthe von f, g, f', g', so würde man, wenn es nur auf die Anzahl der Einstellungen ankäme, jeder dieser Gleichungen das Gewicht $2\sin i^2$ beilegen müssen, das Gewicht jeder der vier Gleichungen des vorhergehenden Art. $=1$ gesetzt: allein aus den oben (Art. 14) angeführten Gründen haben die Bestimmungen von h, h' eine bedeutend geringere Zuverlässigkeit, und es mag daher zur Vereinfachung der Rechnung das Gewicht aller sechs Gleichungen gleich angenommen werden. Wenn man auf diese Weise aus denselben die fünf unbekannten Grössen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, so findet sich

$$\begin{aligned}
i &= 67^0\ 40'\ \ 55''\\
t &= \ -\quad 934\\
u &= \ -\quad 211\\
c &= \ +\quad 719\\
c' &= \ -\quad 880
\end{aligned}$$

durch welche Werthe den sämmtlichen Gleichungen bis auf 1″ und 2″ Genüge geschieht, ein Grad von Übereinstimmung, der freilich nur als zufällig betrachtet werden muss, da die Data viel grössere Unzuverlässigkeit einschliessen. Die Werthe von u, c, c' verdienen auch kein Vertrauen, da überhaupt bei so grossen Inclinationen wie in unsern Gegenden, die Data zu einer nur einigermaassen zuverlässigen Scheidung jener Grössen gar nicht geeignet sind.

23.

Nach dieser Musterung der verschiedenen Rechnungsmethoden gehe ich zu dem Hauptgegenstande über, und stelle zuerst die auf die im 8. Art. beschriebene Art angestellten Beobachtungen tabellarisch zusammen. Ich führe hier nur die mit f, g, f', g' bezeichneten Grössen auf, mit Weglassung der partiellen Resultate, aus welchen sie auf die in den Artt. 11—13 angegebene Art abgeleitet sind, theils des Raumes wegen, theils weil die Elemente, womit sie zusammenhängen, wegen oftmaliger Veränderungen an den Lägern und Pfannen an den verschiedenen Tagen nicht gleiche Werthe gehabt haben. Meistens sind die Beobachtungen in den Vormittagsstunden zwischen 8 und 11 Uhr angestellt; am 16. 22. 25. Juni und 17. 20. Juli aber Nachmittags zwischen 4 und 6 Uhr.

Die einzelnen Columnen geben an: das Zeichen des Nordpolendes der Nadel, die Werthe von f und g oder von f' und g', je nachdem B oder A der Nordpol gewesen, und die Dauer der horizontalen Schwingung.

Beobachtungen mit Nadel 1.

Mai 20	B	67° 11′ 0″	67° 58′ 46″	5″87152
21	A	57 1	35 14	5.81508
22	A	56 29	36 45	5.82044
24	B	16 45	45 48	5.81557
31	B	18 1	49 41	5.82075
Juni 2	A	53 55	33 9	5.85778
4	A	56 38	32 10	5.86442
5	B	24 13	46 44	5.83615
Juli 6	A	59 41	35 21	5.83716
7	A	58 7	37 51	5.83818
8	B	20 8	44 47	5.89602
9	B	20 43	44 25	5.90035

Beobachtungen mit Nadel 2.

Mai 20	A	67° 40′ 57″	67° 20′ 37″	5″72416
21	A	41 8	21 5	5.72453
22	B	43 28	50 45	5.65355
24	B	41 43	54 32	5.66875
31	A	43 34	18 29	5.67439
Juni 2	A	41 46	18 12	5.67665
4	B	42 42	46 57	5.68010
5	B	44 53	50 24	5.68890
Juli 17	B	45 20	50 17	5.70183
18	A	40 26	22 50	5.68692
19	A	40 21	22 10	5.69677
20	B	40 40	54 19	5.66585

Beobachtungen mit Nadel 3.

Juni 8	B	67° 47′ 58″	67° 48′ 52″	6″17149
9	B	40 55	42 28	6.18077
11	A	30 58	32 35	6.18080
16	B	40 0	42 40	6.17046
18	B	43 13	47 40	6.18005
22	A	27 33	39 19	6.16591
23	A	29 46	41 8	6.16948
25	A	29 3	41 7	6.17663
Juli 6	A	32 38	40 37	6.18305
7	B	45 56	42 12	6.17982
8	B	46 59	43 37	6.18339
9	A	30 42	39 42	6.23905

Beobachtungen mit Nadel 4.

Juni 8	A	67° 45′ 9″	67° 27′ 3″	5″96200
9	B	22 56	68 8 28	5.91653
11	B	23 16	7 48	5.94665
16	A	49 54	67 12 8	6.01785
18	B	27 48	68 8 45	5.93204
22	B	26 46	3 56	5.94065
23	A	50 19	67 15 37	5.93939
25	A	50 4	15 22	5.94731
Juli 17	A	50 13	15 43	5.96850
18	A	49 57	14 48	5.96931
19	B	22 43	68 9 18	5.92673
20	B	22 41	10 19	5.92783

24.

Bei der Berechnung dieser Beobachtungen werde ich anstatt der oben (Art. 21. 22) gebrauchten t, u etwas modificirte Hülfsgrössen einführen. Wenn man für eine der Nadeln die Dauer einer horizontalen Schwingung mit n, die Summe der Trägheitsmomente der Nadel und des Bügels in Beziehung auf die bei diesen Schwingungen verticale Drehungsachse mit k, und die Länge des einfachen Secundenpendels mit l bezeichnet, so ist bekanntlich

$$l m n n \cos i = k$$

Man wähle eine Normalschwingungsdauer N und eine Normalinclination, die zwischen den vorgekommenen Werthen von n und i ungefähr das Mittel halten, und bezeichne den entsprechenden Werth von m mit M, so dass

$$lMNN\cos I = k$$

wird. Endlich sei

$$x = \frac{q\cos Q\,.\,\cos I\,.\,206265''}{M}$$
$$y = \frac{q\sin Q\,.\,\sin I\,.\,206265''}{M}$$

welche Grössen also für alle Beobachtungen mit dieser Nadel constant sind. Die Gleichungen werden dann

$$i = f + c - \frac{nn\cos f}{NN\cos I}\cdot\frac{\cos i}{\cos I}\cdot x + \frac{nn\sin f}{NN\sin I}\cdot\frac{\cos i}{\cos I}\cdot y$$
$$i = g - c - \frac{nn\cos g}{NN\cos I}\cdot\frac{\cos i}{\cos I}\cdot x - \frac{nn\sin g}{NN\sin I}\cdot\frac{\cos i}{\cos I}\cdot y$$

wenn B der Nordpol ist; für den Fall, wo A der Nordpol ist, hat man nur den x und y enthaltenden Gliedern die entgegengesetzten Zeichen zu geben.

Diese Form hat den Vortheil, dass die Coëfficienten von x und y immer wenig von der Einheit verschieden sind, und in der That kann man bei so geringer Excentricität des Schwerpunkts, wie die vier in Rede stehenden Nadeln haben, und bei so mässigen Schwankungen von n, anstatt jener Coëfficienten füglich die Einheit annehmen, welches ich die abgekürzte Rechnung nenne. Indessen habe ich mir doch die Mühe gegeben, die 192 Coëfficienten genauer zu berechnen und nur den Factor $\frac{\cos i}{\cos I}$ weggelassen, wenn auch der Nutzen davon hauptsächlich nur darin besteht, die Zulässigkeit der abgekürzten Rechnung desto anschaulicher zu machen. Fortan sollen die nichtaccentuirten Buchstaben N, x, y sich auf die Nadel 1 beziehen, und die Werthe für die drei andern Nadeln der Reihe nach durch einen, zwei und drei Accente unterschieden werden. Gewählt sind für gegenwärtige Rechnung die Werthe

$$I = 67^0\ 40'\ 0''$$
$$N = 5''847785$$
$$N' = 5.686867$$
$$N'' = 6.181742$$
$$N''' = 5.949567$$

Die Rechnungen selbst werde ich, um den Raum zu schonen, hier nicht in extenso aufnehmen, sondern nur so viel davon mittheilen, als nöthig ist, um dem Gange im Allgemeinen folgen zu können. Übrigens sind die von der Einheit am meisten abweichenden Werthe der Coëfficienten 0.96895 und 1.04324, welche am 9. und 16. Juni bei Nadel 4 vorkommen.

25.

Aus den beiden Gleichungen, welche die Beobachtungen mit einer Nadel an jedem Tage liefern, bilden sich, indem man sowohl ihre Summe als ihre Differenz halbirt, zwei andere, die mit I und II bezeichnet werden mögen. Es entstehen also 48 Gleichungen I, und eben so viele II, von denen ich die ersten als Probe hersetze. Die ursprünglichen Gleichungen aus den Beobachtungen vom 20. Mai mit Nadel 1 sind

$$i = 67^0\ 11'\ \ 0'' + c - 1{,}02880x + 1{,}00460y$$
$$i = 67\ \ 58\ \ 46 - c - 0{,}99473x - 1{,}01038y$$

woraus die abgeleiteten entstehen

$$i = 67^0\ 34'\ 53'' - 1{,}01176x - 0{,}00289y \quad \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$
$$c = +\ 1433'' + 0{,}01703x - 1{,}00749y \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Um die im 8. Art. angedeutete Prüfung anstellen zu können, habe ich aber den Gleichungen I noch ein Glied beigefügt, indem ich $i+e$ anstatt i schreibe, so dass e den etwanigen constanten *) Fehler der Nadel 1 ausdrückt; bei den Nadeln 2, 3, 4 soll der präsumtive constante Fehler mit e', e'', e''' bezeichnet werden.

Auf diese Weise schliessen also die 48 Gleichungen I zusammen 36 unbekannte Grössen ein, nemlich die Inclinationen an den 24 Beobachtungstagen, und die 12 Grössen x, y, e, x', y', e', x'' u. s. w. Es muss aber zuvörderst bemerkt werden, dass die Glieder, welche y, y', y'', y''' enthalten, alle nur sehr kleine Coëfficienten haben, und in der abgekürzten Rechnung ganz fehlen: der grösste dieser 48 Coëfficienten ist eben 0.00289 in der obigen Probegleichung. Will

*) Es bedarf keiner Erinnerung, dass ein solcher Fehler, der, wenn er überhaupt reell ist, nur einer Abweichung der Zapfen von der cylindrischen Gestalt zugeschrieben werden kann, nur in sofern constant ist, als immer dieselben Stellen der Zapfen zum Aufliegen kommen, also bei einer ganz andern Inclination auch einen ganz verschiedenen Werth haben könnte.

man aber einmal den geringen nur wenige Secunden betragenden Einfluss berücksichtigen, so muss man zuvor die Werthe dieser y, y', y'', y''' anderswoher abgeleitet haben, wo aber jedenfalls grob genäherte Werthe zu diesem Zweck schon zureichend sind.

26.

Zu dieser Ableitung stehen uns nun nur die Gleichungen II zu Gebote. Allein wenn man erwägt, dass in den 12 Gleichungen dieser Abtheilung, welche sich auf Eine Nadel beziehen, der Buchstab c ungleiche Werthe repräsentirt, indem bei jedem Umstreichen der Werth verändert werden kann, so erkennt man leicht, dass es unmöglich ist, diese c aus den Gleichungen zu eliminiren, und dass man also *gezwungen* ist, eine etwas precäre Hypothese zu Hülfe zu nehmen. Die meinige besteht in Folgendem. Da, bei allen bedeutenden Schwankungen von c, doch unter Anwendung eines immer gleichen Streichverfahrens ein Mittelwerth von c sich herausstellen wird, so nehme ich an, dass der Mittelwerth für die eine Lage der Pole derselbe ist wie für die andere. Freilich wird nur eine sehr unvollkommene Compensation zu erwarten sein, wenn nur eine geringe Anzahl von Umstreichungen Statt gefunden hat, und der auf diese Weise abgeleitete Werth von y wird also wenig Sicherheit haben; allein dieser Unsicherheit ist gar nicht auszuweichen, wenn man nicht die Werthe von c durch einen besondern Apparat ausmittelt (S. oben Art. 17). Zur Benutzung jenes Princips wird man also bei jeder Nadel zuerst die Gleichungen II, welche sich auf B Nord beziehen, von denen trennen, wo A Nord war; dann die erstern und die letztern in so viele Gruppen zerlegen, als veränderte magnetische Zustände Statt gefunden haben; aus den zu derselben Gruppe gehörenden Gleichungen (in sofern mehrere in Eine Gruppe kommen) das Mittel, und aus diesen partiellen Mitteln wieder das Mittel nehmen; indem man dann die so hervorgehenden Mittelwerthe einander gleich setzt, erhält man die Gleichung, durch welche y bestimmt wird. Zur Erläuterung setze ich die *abgekürzte* Rechnung für Nadel 1 her, bei welcher ich *zu diesem Zwecke* obigen 12 Beobachtungen auch noch drei andere*) vom 1. August, 7. August, 23. September benutzt habe. Während des ganzen Zeit-

*) Die vom 23. September ist die, welche oben Art. 9—22 als Beispiel gedient hat; die beiden andern werden unten Art. 30 angeführt.

raumes war die Nadel neunmal umgestrichen, so dass zehn verschiedene Zustände Statt gefunden haben, wovon fünf auf jede Lage der Pole kommen.

Nadel 1, *B Nord*

	$c+y=$	
Mai 20	. . .	$+1433''$
24	$+871''$	$+910$
31	$+950$	
Juni 5	. . .	$+675$
Juli 8	$+739$	
9	$+711$	$+723$
Aug. 1	$+720$	
7	$+584$	$+556$
Sept. 23	$+528$	
Mittel	$c+y=$	$+859''$

Nadel 1, *A Nord*

Mai 21	$-653''$	$-623''$
22	-592	
Juni 2	-623	-678
4	-734	
Juli 6	-730	-669
7	-608	
Aug. 1	-720	-752
7	-785	
Sept. 23	. . .	-680
Mittel	$c-y=$	-680

woraus also $y = +769''$ folgt. Die nicht abgekürzte Rechnung ergab

für B Nord, $c = +859+0.00102x-1.00290y$
für A Nord, $c = -680+0.00082x+0.99915y$

woraus

$$y = +769''+0.00097x$$

folgt. Auf gleiche Weise findet sich für die drei andern Nadeln

$$y' = +\ 456'' - 0.00192\,x'$$
$$y'' = -\ 101 + 0.00134\,x''$$
$$y''' = +1107 + 0.00224\,x'''$$

Die Schwankungen in den Werthen von c gehen bei der Nadel 1 auf $14\frac{1}{2}$ Minuten, bei den Nadeln 2 und 3 auf $4\frac{1}{2}$ Minuten, bei der Nadel 4 auf 10 Minuten. Damit man übrigens dem Umstande, dass gerade an dem ersten Beobachtungstage der am meisten abweichende Werth bei der Nadel 1 vorkommt, nicht eine besondere Wichtigkeit beilege, will ich noch bemerken, dass sowohl an dieser, wie an den übrigen Nadeln die Pole vor den hier mitgetheilten Beobachtungen schon oft und immer mit derselben Sorgfalt und denselben Streichmitteln umgekehrt gewesen waren.

27.

Nachdem die Werthe von y, y', y'', y''' in den Gleichungen I substituirt sind, bleiben in denselben noch 32 unbekannte Grössen, und wenn man dann immer die beiden Gleichungen, welche für die Beobachtungen eines und desselben Tages gelten, von einander abzieht, so bilden sich 24 neue Gleichungen, welche nur die acht unbekannten Grössen $x, x', x'', x''', e, e', e'', e'''$ enthalten. Die vier letzten kommen aber nur in den Differenzen von je zweien vor, so dass man, wenn man

$$e' - e = d'$$
$$e'' - e = d''$$
$$e''' - e = d'''$$

setzt, nur sieben unbekannte Grössen behält. Die Coëfficienten von d', d'', d''' sind darin alle $+1$ oder -1, und die Coëfficienten von x, x', x'', x''' alle von $+1$ oder -1 sehr wenig verschieden. Zur Bestimmung der Werthe der sieben unbekannten Grössen vermittelst der Methode der kleinsten Quadrate wird man, Behuf der Bildung der auf x, x', x'', x''' sich beziehenden Normalgleichungen, die Multiplication mit den respectiven Coëfficienten ohne Bedenken unterlassen können, so dass zur Bildung sämmtlicher sieben Normalgleichungen nichts als einfache Addition erforderlich ist. Auf diese Art haben sich folgende Normalgleichungen ergeben:

$$0 = +4804'' + 12.00266\,x - 0.00708\,x' + 0.01900\,x''$$
$$0 = -5806 + 0.01559\,x + 12.01005\,x' - 0.00072\,x'''$$
$$0 = -3228 + 0.00145\,x + 12.00544\,x'' + 0.04561\,x'''$$
$$0 = -5267 + 0.01786\,x' - 0.00489\,x'' + 12.00343\,x'''$$
$$0 = -\ 297 + 0.02717\,x + 0.11088\,x' - 0.04723\,x''' - 12\,d' + 4\,d'''$$
$$0 = -\ 241 + 0.06326\,x + 0.05839\,x'' - 0.08085\,x''' - 12\,d'' + 8\,d'''$$
$$0 = +\ 254 - 0.02682\,x' - 0.02676\,x'' + 0.12808\,x''' + 4\,d' + 8\,d'' - 12\,d'''$$

und hieraus die Werthe

$$x = -400''$$
$$x' = +484$$
$$x'' = +267$$
$$x''' = +438$$
$$d' = -\ 22$$
$$d'' = -\ 23$$
$$d''' = +\ 1$$

Anstatt der drei letzten kann man auch, indem man

$$\tfrac{1}{4}(e + e' + e'' + e''') = \varepsilon$$

setzt, schreiben

$$e = +11'' + \varepsilon$$
$$e' = -11 + \varepsilon$$
$$e'' = -12 + \varepsilon$$
$$e''' = +12 + \varepsilon$$

wo der gemeinschaftliche Theil ε offenbar aus den zu Gebote stehenden Daten nicht bestimmbar ist. Die Substitution der gefundenen Werthe von x, e, x', e' u.s.w. in den (von y, y' u.s.w. bereits befreieten) Gleichungen I gibt uns nun, unter Weglassung von ε, folgende 48 Inclinationen:

		Nadel		Nadel	
Mai	20	1	67° 41′ 25″	2	67° 39′ 12″
	21		39 21		39 31
	22		39 51		39 22
	24		37 43		40 21
	31		40 17		39 17
Juni	2		36 39		38 16
	4		37 31		37 0
	5		41 56		39 48
	8	3	44 12	4	43 14
	9		37 27		38 15
	11		36 27		38 1
	16		37 6		38 17
	18		41 12		40 48
	22		38 5		37 51
	23		40 6		40 2
	25		39 45		39 49
Juli	6	1	40 42	3	41 17
	7		41 11		39 49
	8		39 5		41 3
	9		39 12		39 57
	17	2	39 55	4	40 7
	18		39 56		39 31
	19		39 35		38 32
	20		39 43		39 1

28.

Die Ungleichheiten zwischen den beiden Bestimmungen der Inclination an jedem Tage werden uns nun den Maassstab für die Unsicherheit der Beobachtungen selbst geben müssen. Die grösste Ungleichheit (am 24. Mai) beträgt 2′ 38″, und die Summe der Quadrate aller 24 Unterschiede, die Secunde als Einheit angenommen, ist 124389. Aus den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist leicht abzuleiten, dass wenn wir den Beobachtungen mit den einzelnen vier Nadeln gleiche Zuverlässigkeit beilegen (von welcher Voraussetzung abzugehen keine Gründe vorhanden sind), die mittlere Unsicherheit eines aus den Beobachtungen gefundenen und unsern Rechnungen untergelegten Werthes von $\frac{1}{2}(f+g)$ oder $\frac{1}{2}(f'+g')$, so weit sich darüber nach unsern Zahlen urtheilen lässt,

$$=\sqrt{\tfrac{124389}{34}} = 60''5$$

gesetzt werden muss, insofern nemlich nur von den zufälligen oder regellosen Beobachtungsfehlern die Rede ist. Das Mittel aus zwei solchen auf von einander unabhängige Beobachtungen gegründeten Zahlen wird folglich mit der mittlern Unzuverlässigkeit

$$=\sqrt{\tfrac{124389}{68}} = 42''8$$

behaftet sein, und dies kann auch wie der mittlere Fehler einer auf die gewöhnliche Art (d. i. mit Einer Nadel aber in *beiden* Lagen der Pole) bestimmten Inclination betrachtet werden, insofern die kleine zu $\frac{1}{4}(f+g+f'+g')$ hinzukommende Correction entweder für ganz unmerklich gilt, oder auf sonst schon feststehende Bestimmung von u oder y gegründet werden kann (vergl. Art. 21). Es versteht sich von selbst, dass diese Fehlerschätzung zunächst nur für dieses Instrument und für solche Beobachtungen gilt, die unter ganz ähnlichen Umständen gemacht sind, wie die zum Grunde liegenden. Bei einer geringern Anzahl von Einstellungen, als acht in jeder Combination, würde die Zuverlässigkeit geringer sein, obwohl ich nicht behaupten möchte, dass der mittlere Fehler des Endresultats genau im verkehrten Verhältnisse der Quadratwurzel aus der Zahl der mit Pfannen vervielfältigten Einstellungen stehe. Von der andern Seite darf ich nicht unbemerkt lassen, dass während der ganzen Dauer obiger Beobachtungen die Läger nicht so vollkommen berichtigt werden konnten, wie ich wünschte, und nachher durch Anwendung des oben (Art. 5) erwähnten Apparats wirklich erreichte: die aus einer unvollkommenen Lagerberichtigung möglicher Weise entspringende Vergrösserung der Beobachtungsfehler (wobei an einen Einfluss von constanter Grösse um so weniger zu denken ist, weil sehr oft an den Lägern Veränderungen gemacht wurden) ist demnach in obiger Zahl schon mit begriffen, und ich habe daher Grund zu erwarten, dass künftige Beobachtungen mit demselben Instrument eher noch kleinere Fehler zeigen werden.

Eine besondere Untersuchung, deren Einzelnes ich hier übergehe, hat übrigens ergeben, dass die mittlere Unsicherheit der im vorhergehenden Art. angegebenen 48 Inclinationen nicht viel von der mittlern Unsicherheit der $\frac{1}{2}(f+g)$ verschieden ist, und dass den im 30. Art. zusammenzustellenden Mitteln aus jedem zusammengehörenden Paare nahe das doppelte Gewicht, also der mittlere Fehler 42″8, beigelegt werden muss.

29.

Als ein besonders merkwürdiges und willkommenes Resultat erscheint die Kleinheit der für e, e', e'', e''', oder vielmehr zunächst für ihre Unterschiede von ihrem Mittel ε gefundenen Werthe. Eine besondere Untersuchung hat das Gewicht dieser Bestimmungen $\frac{96}{11}$ mal grösser als das Gewicht von $\frac{1}{2}(f+g)$ ergeben, folglich die mittlere daran haftende Unsicherheit $= 60''5\sqrt{\frac{11}{96}} = 20''5$, woraus erhellt, dass sogar die Realität von Ungleichheiten zwischen e, e', e'', e''' ganz zweifelhaft bleibt. Da es nun höchst unwahrscheinlich ist, dass bei vier Nadeln constante Fehler von fast genau gleicher Grösse Statt finden sollten, so ist man berechtigt anzunehmen, dass dieselben gar keine oder doch nur ganz unmerkliche constante Fehler haben, und es möchte daher fast unnöthig scheinen, von der Drehbarkeit der Achsen an zweien derselben zu weitern Proben einen Gebrauch zu machen.

Für eine der Nadeln, nemlich für Nr. 4, geben wirklich schon einige frühere Beobachtungen eine Verstärkung dieses Schlusses. Es waren nemlich an vier Tagen vom 15.—19. Mai mit den Nadeln 3 und 4 ähnlich combinirte Beobachtungen gemacht, wie später vom 8.—25. Junius, nur mit dem Unterschiede, dass jedes partielle Resultat nicht auf acht, sondern nur auf vier Einstellungen beruhte; an der Nadel 3 waren die Zapfen in derselben Lage wie später, aber an der Nadel 4 standen sie anders, indem nach dem 19. Mai eine Drehung von etwa einem Quadranten vorgenommen ist. Die Beobachtungen, eben so geschrieben wie im 23. Art., sind folgende:

Beobachtungen mit Nadel 3.

Mai 15	*B*	67° 41′ 26″	67° 44′ 53″	6″16166
17	*B*	43 52	45 52	6.20333
18	*A*	33 56	39 15	6.17781
19	*A*	36 8	37 8	6.19566

Beobachtungen mit Nadel 4.

Mai 15	*A*	67° 14′ 28″	67° 47′ 49″	5″94332
17	*B*	68 5 39	36 36	5.92034
18	*B*	3 30	36 13	5.94235
19	*A*	67 3 4	59 47	5.94663

Die Beobachtungen sind alle in den Vormittagsstunden gemacht.

Zur Berechnung sind bei Nadel 3 die oben gefundenen Werthe von x'', y'', e'' angewandt; bei Nadel 4 mussten hingegen die Werthe von x''', y''', e''', so gut es angeht, aus diesen Beobachtungen selbst abgeleitet werden, wobei gefunden wurde

$$\begin{aligned} y''' &= -1103'' \\ x''' &= +\ 556'' \\ e''' - \varepsilon &= +\ 24'' \end{aligned}$$

Die Bestimmung von y''', auf so wenige Beobachtungen gegründet, ist allerdings sehr unsicher, allein der Einfluss davon auf die Reduction von $\frac{1}{2}(f+g)$ bleibt ganz unbedeutend, indem der grösste Coëfficient von y''' in den Gleichungen I nur 0.00341 ist. Die Resultate für i stehen dann so:

	Nadel 3	Nadel 4
Mai 15	67° 38′ 57″	67° 40′ 0″
17	40 36	41 36
18	41 15	40 15
19	41 19	40 16

Das Gewicht der Bestimmung von $e''' - \varepsilon$ wird hier nur doppelt so gross, als das Gewicht von $\frac{1}{2}(f+g)$, und da die Beobachtungen selbst eine bedeutend geringere Genauigkeit haben, als die spätern, so erhellt, dass der jetzt gefundene Werth eben so wenig für die Realität eines constanten Fehlers spricht, als der aus den spätern Beobachtungen abgeleitete.

Die starke Abweichung der Werthe von x''' und y''' von den oben (Art. 26. 27) gefundenen, beweist nur, dass der drehbare Theil der Nadel für sich betrachtet seinen Schwerpunkt nicht in der Zapfenachse hat, woran übrigens auch wenig gelegen ist.

30.

Ich stelle nun noch die Endresultate für die Inclination aus den sämmtlichen behandelten Beobachtungen zusammen, und nehme unter dieselben auch die Resultate der schon oben erwähnten Beobachtungen vom 1. und 7. August mit auf, welche mit der Nadel 1 ganz auf dieselbe Art wie am 23. September gemacht sind. Diese Beobachtungen selbst waren folgende:

	August 1	August 7
f	67° 20′ 12″	67° 22′ 41″
g	44 11	42 8
f'	59 53	68 1 56
g'	35 53	67 35 46

Inclinationsbestimmungen

1842 Mai 15	67° 39′ 28″	Juni 18	67° 41′ 0″
17	41 6	22	37 58
18	40 45	23	40 4
19	40 47	25	39 47
20	40 18	Juli 6	41 0
21	39 26	7	40 30
22	39 36	8	40 4
24	39 2	9	39 34
31	39 47	17	40 1
Juni 2	37 27	18	39 44
4	37 15	19	39 4
5	40 52	20	39 22
8	43 43	Aug. 1	39 57
9	37 51	7	40 26
11	37 14	Sept. 23	40 54
16	37 42		

Das Mittel aus allen 31 Bestimmungen, ohne einen Gewichtsunterschied zu berücksichtigen, wird

67° 39′ 44″

und mag als für den 21. Junius gültig angesehen werden. Das Mittel aus den 24 Bestimmungen vom 20. Mai bis 20. Julius allein, dem als mittlerer Zeitpunkt der 19. Junius entspricht, ist

67° 39′ 31″

31.

Die Unterschiede der Inclinationen für die einzelnen 31 Tage von ihrem Mittel sind zusammengesetzt aus der noch nachbleibenden Wirkung der Beobachtungsfehler und den wirklichen Ungleichheiten der Inclination selbst. Für die

einzelnen Tage lassen sich zwar diese Bestandtheile nicht von einander scheiden, allein eine Abschätzung eines Mittelwerths der wirklichen Schwankungen mag bei einer so zahlreichen Reihe wohl versucht werden. In dieser Absicht habe ich zuvörderst die Inclinationen unter Voraussetzung einer regelmässigen jährlichen Abnahme von 3 Minuten auf den 21. Junius reducirt, und dann die Quadrate der Differenzen von dem Mittelwerthe addirt; diese Summe 220184 mit 30 dividirt gibt 7339.5 als Quadrat des mittlern Fehlers, dem man sich aussetzt, wenn man aufs Gerathewohl eine jener 31 Inclinationen als die mittlere für die Zeit der Beobachtung gültige ansehen wollte. Soll die ungleiche Zuverlässigkeit der drei Beobachtungsgruppen berücksichtigt werden, so ergeben die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, indem man den mittlern Fehler für die vier ersten Beobachtungen mit m', für die drei letzten mit m'', und für die 24 übrigen mit m, das mittlere Schwanken der Inclination selbst aber mit M bezeichnet, folgende Gleichung:

$$7339{,}5 = \frac{24mm + 4m'm' + 3m''m''}{31} + MM$$

Für mm ist oben der Werth 1829.25 gefunden, oder es kann wenigstens diese Zahl wie eine hinlängliche Annäherung angesehen werden, für die sieben andern Beobachtungen mag in Ermangelung eines sichern Maassstabes die Zahl der Einstellungen, woraus die Resultate abgeleitet sind, zum Grunde gelegt, also

$$m'm' = 2mm, \qquad m''m'' = \tfrac{8}{5}mm$$

gesetzt werden. Dadurch wird

$$MM = 7339{,}5 - \tfrac{184}{155}.1829{,}25 = 5168$$

und $M = 71''9$.

32.

Mit demselben Instrumente und an demselben Platze hatte ich auch schon im vorigen Jahre eine Reihe von Inclinationsbeobachtungen gemacht, von denen ich jedoch nur die Endresultate hieher setze.

1841 Sept.	22 . . .	67° 40′ 20″
	24	40 53
	27	46 41
Oct.	2	42 57
	7	42 14
	10	42 40
	12	43 15
	20	44 2
	20	42 5
	22	42 52
Mittel, Oct.	8	67° 42′ 48″

Die ersten acht Beobachtungen sind auf ähnliche Art angestellt, wie die diesjährigen, indem an jedem Tage, ohne die Pole zwischen den Beobachtungen umzukehren, zwei Nadeln (Nr. 1 und 2) angewandt wurden; die beiden letzten hingegen wurden auf die gewöhnliche Art gemacht, die zweite vom 20. Oct. mit Nadel 4, die vom 22. mit Nadel 3. Die Zeit war am 27. Sept. und 10. Oct. Nachmittags zwischen 3 und 5 Uhr, bei allen übrigen Vormittags. Jede dieser 10 Inclinationen beruhete auf 16 Einstellungen, und es wird ihnen aus diesem Grunde auch nur ein verhältnissmässig kleineres Gewicht zuzuerkennen sein, als den Inclinationen von 1842, die resp. auf 32, 64 und 40 Einstellungen beruheten.

33.

Sämmtliche bisher angeführte Inclinationen bedürfen noch einer kleinen gemeinschaftlichen Correction wegen des Einflusses, welchen an dem Beobachtungsplatze die Magnetstäbe der Magnetometer in der Sternwarte und im magnetischen Observatorium ausüben. Um die Resultate davon zu befreien, muss durchgehens 5″15 abgezogen werden (vergl. *Resultate* für 1840. II. Art. 6) [S. 433 d. B.]

Die *absolute* Zuverlässigkeit der Inclinationsbestimmungen bleibt übrigens noch abhängig von der Richtigkeit der Voraussetzung, dass das Instrument selbst keine Theile enthält, die eine magnetische Wirkung auf die Nadel haben können. Ein Grund zu einer solchen Befürchtung ist bei dem von mir gebrauchten Instrumente nicht vorhanden; einige Beobachtungen, die ich nach der im 18. Art. erwähnten Art mit einer belasteten Nadel anstellte, haben immer nur Abweichungen von ein Paar Minuten gezeigt, die sich aus den unvermeidlichen zufälligen Beobachtungsfehlern und den wirklichen Anomalien der Inclination selbst ganz ungezwungen erklären lassen. Auch die hinlänglich befriedigende Übereinstimmung der Werthe, welche im 11. Art. für die daselbst mit α bezeichnete Grösse gefunden sind, spricht gegen das Vorhandensein von solchen Störungen. Zur Erkennung ganz kleiner Einflüsse sind freilich solche Prüfungen nicht geeignet, und ich muss mir daher die weitere Prüfung durch mehr durchgreifende Mittel vorbehalten.

34.

Zum Schluss stelle ich noch meine Resultate mit einigen ältern Bestimmungen zusammen.

1805 Dec.	69° 29′	VON HUMBOLDT
1826 Sept.	68 29 26″	VON HUMBOLDT
1837 Juli 1	67 47 0	FORBES
— —	67 53 30	FORBES
1841 Oct. 8	67 42 43	
1842 Juni 21	67 39 39	

Die beiden ersten Beobachtungen habe ich aus den *Additions* zu dem XIII. Bande der *Voyage aux régions équinoxiales* entlehnt (S. 152); die erste ist mit einem Inclinatorium von LENOIR, die zweite mit einem Instrument von GAMBEY angestellt; letztere beruhet auf den Beobachtungen mit zwei Nadeln, deren Resultate a. a. O. zu 68° 30′ 7″ und 68° 28′ 15″ angegeben werden, womit das ebendaselbst angesetzte Mittel nicht übereinstimmt; vermuthlich ist die Zahl für die zweite Nadel durch einen Druckfehler um 30″ zu klein angesetzt. Der Beobachtungsplatz 1805 ist mir nicht bekannt; 1826 war er im freien Felde einige hundert Schritte östlich von der Sternwarte.

FORBES Beobachtungen sind in den *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* Vol. XV, Part. 1, S. 31 und 32 abgedruckt; sie wurden an einem ROBINSONschen Instrument von kleinern Dimensionen als das hiesige mit zwei Nadeln von 6 engl. Zoll Länge im Garten der Sternwarte angestellt; die zweite Nadel hält der Beobachter selbst für die bessere.

Ich habe unter diese Beobachtungen die von MAYER im März 1814 angestellten und in den *Commentationes recent. Soc. Gotting.* T. III, S. 36 u. 37 angeführten nicht einreihen wollen, da dieselben gar kein Vertrauen verdienen. Wie sehr unvollkommen das von MAYER gebrauchte Instrument war, zeigt die von ihm selbst S. 35 gegebene Probe, wo bei bleibender Stellung des Instruments zehn wiederholte Einstellungen Differenzen von mehr als einem Grade gaben. Seine Resultate für die Inclination selbst, von zwei verschiedenen Tagen, weichen um einen halben Grad von einander ab.

Eben so wenig verdiente meine eigne Beobachtung vom 23. Juni 1832, die in der *Intens. vis magneticae terrestris* art. 27 angeführt ist, hier einen Platz, sowohl wegen der Unvollkommenheit des Instruments, als wegen des Locals in der Sternwarte, wo nicht sehr entferntes Eisenwerk das Resultat bedeutend afficiren, und zwar nachweislich eine Vergrösserung der Inclination hervorbringen musste.

Die angeführten Inclinationen lassen sich nun zwar sehr gut durch die Annahme einer jährlichen gleichförmigen Verminderung von 3 Minuten oder genauer 3′ 2″3 vereinigen, wenn man bei FORBES Beobachtungen sich an das Resultat der zweiten Nadel hält, und es bleiben nur Abweichungen übrig, die füglich dem Conspiriren der Beobachtungsfehler und der Schwankungen der Inclination zugeschrieben werden können. Da jedoch nach HANSTEENS Untersuchungen über die Beobachtungen an andern europäischen Orten die jährliche Abnahme allmählig langsamer geworden ist, so wird man die angegebene Zahl nur wie einen mittlern etwa für 1829 gültigen Werth zu betrachten, und die Bestätigung und genauere Festsetzung der Ungleichförmigkeit erst von künftigen Beobachtungen zu erwarten haben.

AUFSÄTZE

ÜBER VERSCHIEDENE GEGENSTÄNDE

DER MATHEMATISCHEN PHYSIK.

FUNDAMENTALGLEICHUNGEN
FÜR DIE BEWEGUNG SCHWERER KÖRPER
AUF DER ROTIRENDEN ERDE.

Benzenberg. Versuche über das Gesetz des Falls. 1804.

Brief von Gauss an Benzenberg.

Braunschweig 1803. Februar 2.

— — — In der Theorie unsres Freundes Olbers ist eine Voraussetzung, die mir nicht zulässig scheint. Nemlich: *dass der Körper während des Falls in einer Ebene bleibe.* Allein dies darf man, meiner Meinung nach, *nicht* voraussetzen, wenn man den Widerstand der Luft in Betracht zieht, den man hier *nothwendig* in Betracht ziehen muss, weil die geschlossene Abweichung nach Süden lediglich darauf beruht. Eine leichte Betrachtung zeigt nemlich folgendes: die Ebene (A), in welcher der Körper sich ursprünglich zu bewegen anfängt, geht durch den Mittelpunkt der Erde (oder allgemeiner, der Attraction), und steht auf derjenigen Ebene (B) senkrecht, in der der Meridian des Beobachtungsorts beim Anfang des Falls war. Allein man sieht leicht, dass die Lufttheile an allen Stellen der Ebene A schief dadurch gehen, bloss die gerade Linie ausgenommen, wo A von B geschnitten wird. Die Luft wirkt daher dem Körper nicht in dieser Ebene A entgegen, sondern treibt ihn daraus weg nach Norden, und es schien mir, dass der Effect davon gerade so gross sein würde, dass er die aus der Verspätung des Falls geschlossene Abweichung nach Süden aufhöbe.

Nachdem ich durch Ihren letzten Brief veranlasst war, aufs Neue an diese Materie zu denken, betrachtete ich in einer müssigen halben Stunde die Sache auf eine ganz verschiedene Art, und entwickelte die analytischen Gleichungen, die die relative Bewegung des Körpers gegen die bewegte Erdoberfläche in sich fassen, aus den ersten Fundamentalsätzen der Dynamik, und hier fand ich zu meiner Verwunderung

1) die Abweichung nach Süden wiederum 0 oder ganz unvermerklich:

2) die Abweichung nach Osten nur $\frac{2}{3}$ von dem, was Dr. Olbers gefunden hat. Nemlich in Dr. Olbers Zeichen, wenn man den Widerstand der Luft vernachlässigt,

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi \cos\psi . a t}{86164}$$

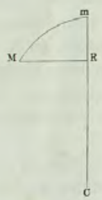
oder wenn man ihn mit in Betrachtung zieht, nach einer hier zureichenden Näherung

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi \cos\psi . t}{86164}\left(\tfrac{3}{2}a' - \tfrac{1}{2}a\right)$$

wo a die Höhe ist, durch die der Körper in der Zeit t im leeren Raume fallen würde, also $= \frac{1}{2}g'tt$ [wo ferner ψ die Polhöhe des Beobachtungsortes und a' die wirkliche Fallhöhe bezeichnet].

Hienach finde ich für Ihre Versuche, indem ich die Pendellänge für Hamburg $= 440.75$ Linien (woraus g' fast eben so kommt, wie Dr. Olbers es annimmt), *die Abweichung nach Osten* 3.951 *pariser Linien*; welches sehr genau mit Ihren Versuchen übereinstimmte, — da hingegen die Abweichung nach Süden nicht zu meinen Resultaten passt.

Diese Verschiedenheit in Ansehung der Abweichung nach Osten — veranlasste mich, Dr. Olbers Schlüsse darüber aufmerksamer durchzugehen, und die Ursache davon nachzuspüren. Wie mir scheint, liegt sie darin, dass Dr. Olbers die wirkliche Bewegung des Körpers gegen Osten *bloss* aus seiner tangentiellen ursprünglichen Geschwindigkeit ableitet, und von der daraus entspringenden Bewegung die gleichzeitige Bewegung des Fusses des Thurms abzieht, um die scheinbare Bewegung nach Osten zu haben. — Allein wenn die Fläche des Papiers die obige Ebene A vorstellt, C den Mittelpunkt der Erde, mM die wirkliche Bewegung des Körpers: so darf man, meiner Meinung nach, nicht ausser Acht lassen, dass selbst die Anziehung nach C während die Bewegung nicht mit mC parallel ist, und eben da-



her die Geschwindigkeit nach Osten wirklich vermindert wird, daher der Körper, wenn er in M anlangt, nicht so weit nach Osten gekommen ist, als er mit der ursprünglichen Geschwindigkeit gekommen sein würde. Nach darüber geführter Rechnung finde ich auch, dass durch diese Betrachtung die scheinbare Bewegung nach Osten wirklich um den dritten Theil vermindert wird.

Brief von Gauss an Benzenberg.

Braunschweig 1803. März 8.

— — — — An unsern Freund Olbers habe ich vor acht Tagen einen kleinen Aufsatz über die Abweichung fallender Körper eingesandt. Heute erhalte ich darauf die Antwort:

1) die Abweichung nach Osten sei nur $\frac{2}{3}$ von der, die er berechnet hätte:

2) dass er meinen Schlüssen, dass die Abweichung nach Süden $= 0$ sei, nichts entgegenzusetzen habe, aber zu wissen wünsche, *worin* eigentlich *sein* Raisonnement fehlerhaft sei.

Ich bemerke hiebei noch folgendes:

Vorausgesetzt, dass meine Schlüsse in Ansehung der Abweichung nach Süden gewiss sind, so scheint mir der Grund von der von Dr. Olbers herausgebrachten Abweichung noch immer darin zu liegen, dass er voraussetzt, der Körper *bleibe* auch bei widerstehender Luft in der auf den Meridian senkrechten, und durch den Mittelpunkt der Erde gehenden Ebene. Es scheint mir, dass diese Voraussetzung nothwendig gerechtfertigt werden müsse, aber ich zweifle, ob sie sich rechtfertigen lasse. Die kegelförmige Bewegung der Luft macht, dass die Lufttheile, worin der Körper ist, sobald die Erde aus ihrer ersten Lage gekommen, in einem Winkel durch jene Ebene gehen, den man nicht vernachlässigen darf, und wodurch es geschieht, dass der Körper, dem die Luft nicht in der Richtung dieser Ebene widersteht, aus der Ebene gegen Norden heraustritt: und ich bin noch immer der Meinung, dass sie aus der Verzögerung dadurch vollkommen compensirt wird. Es ist mir auch wahrscheinlich, dass Guglielmini eben dies hat sagen wollen, und dass er nur deswegen Olbers Beifall nicht erhalten hat, weil er sich nicht bestimmt genug erklärt. Ich hoffe indess zuversichtlich, dass entweder ich mit Dr. Olbers, oder Dr. Olbers mit mir vollkommen zu einerlei Überzeugung kommen werden. — — —

Fundamentalgleichungen für die Bewegung schwerer Körper auf der rotirenden Erde.

Die Lage eines Punkts wird auf eine doppelte Art bestimmt.

Erstens durch seine senkrechten Abstände X, Y, Z, von drei auf einander senkrechten *festen* Ebnen. Den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt dieser Ebnen, C, setzen wir in einen beliebigen Punkt der Erdaxe; die Ebene der Z legen wir dem Aequator parallel; die Ebene der Y in denjenigen Meridian, worin sich der anfängliche Ort des Körpers befindet; endlich die Ebne der X in den auf den vorigen senkrechten Meridian. Die Z sind positiv auf der Nordseite; die X auf der Seite des anfänglichen Orts des Körpers, die Y auf derjenigen Seite, wohin dieser anfängliche Ort durch die Rotation geführt wird.

Zweitens durch die senkrechten Abstände x, y, z, von drei auf einander senkrechten *beweglichen* d. i. gegen die Erde ruhenden und mit ihr rotirenden Ebnen. Am schicklichsten setzen wir den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt derselben in den anfänglichen Ort des Körpers. Die Ebne der z setzen wir senkrecht auf die scheinbare Richtung der Schwere; die der y in den Meridian: dadurch ist die auf beide senkrechte der x von selbst bestimmt; Pole dieser drei Ebnen sind also resp. das scheinbare Zenith, der Ostpunkt, der Südpunkt, und *diese* Pole sollen zugleich diejenigen Seiten der Ebnen bezeichnen, wo die Abstände z, y, x positiv genommen werden.

Es sei jetzt für den Punkt C, $x = a$, $(y = 0)$, $z = -c$; ferner die (scheinbare, nördliche) Polhöhe des Beobachtungsorts φ, und der Winkel, um den sich die Erde nach der Zeit t gegen Osten bewegt hat, θ. Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich leicht folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x &= X\sin\varphi\cos\theta + Y\sin\varphi\sin\theta - Z\cos\varphi + a \\ y &= -\ X\sin\theta + Y\cos\theta \\ z &= X\cos\varphi\cos\theta + Y\cos\varphi\sin\theta + Z\sin\varphi - c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad [1]$$

$$\left.\begin{aligned} X &= (x-a)\sin\varphi\cos\theta - y\sin\theta + (z+c)\cos\varphi\cos\theta \\ Y &= (x-a)\sin\varphi\sin\theta + y\cos\theta + (z+c)\cos\varphi\sin\theta \\ Z &= -(x-a)\cos\varphi \qquad\qquad\qquad + (z+c)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad [2]$$

Die Coordinaten X, Y, Z lassen sich einerseits als Functionen von t allein, anderseits aber auch als Functionen der vier veränderlichen Grössen θ, x, y, z betrachten, und haben also in letzterer Hinsicht vier partielle Differentiale. Es ist demnach

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= \left(\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = \left(\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\theta}\right)\mathrm{d}\theta + \left(\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + \left(\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}y + \left(\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z}\right)\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}Y &= \text{etc.} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit des Körpers zerlegt sich, wie seine Bewegung, in drei partielle auf die Ebnen der X, Y, Z senkrechte Geschwindigkeiten, die mithin $\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\right)$ sind. Die Geschwindigkeiten des Luftelements hingegen, in welchem er sich jedesmal befindet, in Beziehung auf dieselben Ebnen sind offenbar $\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, $\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, $\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. Folglich die *relativen* Geschwindigkeiten des Körpers nach diesen drei Richtungen

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right)\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}\right)\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \left(\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z}\right)\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \xi = \sin\varphi\cos\theta\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \sin\theta\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \cos\varphi\cos\theta\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ \left(\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right)\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}\right)\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \left(\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}z}\right)\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \eta = \sin\varphi\sin\theta\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \cos\theta\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \cos\varphi\sin\theta\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ \left(\tfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x}\right)\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\tfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}y}\right)\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \left(\tfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right)\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \zeta = -\cos\varphi\tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad + \sin\varphi\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Die totale relative Geschwindigkeit ist folglich $= \sqrt{(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta)} = u$, welches, wie die Entwickelung aus obigen Werthen leicht zeigt, $= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}\right)}$ wird. Der Widerstand der Luft ist dem Quadrate davon proportional, wir setzen ihn daher $= Muu$, und zerlegen ihn nach obigen drei Richtungen in $Mu\xi$, $Mu\eta$, $Mu\zeta$.

Wir sehen hier die Erde als ~~ein~~ Revolutions-Sphäroid an; die Richtung der Schwere geht daher durch die Erdaxe. Der Punkt, wo sie diese schneidet, liege um q über C, oder es sei für denselben $Z = q$.

Setzt man nun ferner die Stärke der Gravitation $= p$ und

$$XX + YY + (Z-q)^2 = rr$$

so ist nach den Grundsätzen der Dynamik

$$\left.\begin{aligned}0 &= \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t^2}+\frac{pX}{r}+Mu\xi\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{pY}{r}+Mu\eta\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{p(Z-q)}{r}+Mu\zeta\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad[3]$$

Aus obigen Werthen von X, Y, Z in [2] findet man, wenn man für $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, welches beständig ist, n schreibt, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t^2} &= \sin\varphi\cos\theta\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2}-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t^2}+\cos\varphi\cos\theta\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t^2}\\ &\quad -2n\sin\varphi\sin\theta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2n\cos\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-2n\cos\varphi\sin\theta\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-nnX\\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t^2} &= \sin\varphi\sin\theta\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2}+\cos\theta\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t^2}+\cos\varphi\sin\theta\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t^2}\\ &\quad +2n\sin\varphi\cos\theta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2n\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2n\cos\varphi\cos\theta\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-nnY\\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t^2} &= -\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2}+\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}\qquad[4]$$

Multiplicirt man die drei Gleichungen [3] resp. mit $\sin\varphi\cos\theta$, $\sin\varphi\sin\theta$, $-\cos\varphi$ und addirt die Producte; multiplicirt man zweitens eben diese Gleichungen mit $-\sin\theta$, $\cos\theta$, 0; und drittens mit $\cos\varphi\cos\theta$, $\cos\varphi\sin\theta$, $\sin\varphi$, und addirt beidemale die Producte: so erhält man, nachdem man statt $\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t^2}$, $\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t^2}$, $\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t^2}$ ihre Werthe aus [4], statt X, Y, Z die aus [2], und statt ξ, η, ζ die ihrigen substituirt hat, folgende drei neue:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2}-2n\sin\varphi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(x-a)\left(\frac{p}{r}-nn\right)+\cos\varphi\left(\frac{pq}{r}-nnZ\right)+Mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t^2}+2n\sin\varphi\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2n\cos\varphi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+y\left(\frac{p}{r}-nn\right)+Mu\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t^2}-2n\cos\varphi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(z+c)\left(\frac{p}{r}-nn\right)-\sin\varphi\left(\frac{pq}{r}-nnZ\right)+Mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Ist also der Körper gegen die Erde in Ruhe, oder $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=\mathrm{d}z=0$, so scheint er senkrecht auf die Ebnen der x, y, z von den Kräften

$$\begin{aligned}&(x-a)\left(\frac{p}{r}-nn\right)+\cos\varphi\left(\frac{pq}{r}-nnZ\right)\\ &y\left(\frac{p}{r}-nn\right)\\ &(z+c)\left(\frac{p}{r}-nn\right)-\sin\varphi\left(\frac{pq}{r}-nnZ\right)\end{aligned}$$

sollicitirt zu werden. Ein schon in Bewegung begriffener Körper hingegen wird anders afficirt. Denn ausser dem Widerstande der Luft, der den Körper nach diesen Richtungen wie Kräfte, deren Maass $Mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $Mu\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $Mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ ist, treibt und folglich auf der rotirenden Erde völlig eben so wirkt, als er auf der ruhenden wirken würde, kommen nach jenen Richtungen noch die drei Kräfte

$$-2n\sin\varphi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\qquad 2n\sin\varphi\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2n\cos\varphi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\qquad -2n\cos\varphi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

hinzu, und diese sind es allein, wodurch die Rotation der Erde an fallenden Körpern sichtbar wird. Die bisherigen Schlüsse und Folgerungen sind streng und allgemein richtig.

Bei *Versuchen*, die in dieser Hinsicht angestellt werden, geschieht allemal die Bewegung des Körpers in einem so kleinen Raume, dass man die Stärke der auf ruhende Körper wirkenden scheinbaren Schwere innerhalb desselben, als unveränderlich $=g$, und ihre Richtung als immer parallel, also senkrecht auf die Ebne der z annehmen kann. Es wird also ohne Bedenken erlaubt sein, statt der obigen drei Grössen

$$\begin{aligned}&(x-a)\left(\frac{p}{r}-nn\right)+\cos\varphi\left(\frac{pq}{r}-nnZ\right)\\ &y\left(\frac{p}{r}-nn\right)\\ &(z+c)\left(\frac{p}{r}-nn\right)-\sin\varphi\left(\frac{pq}{r}-nnZ\right)\end{aligned}$$

respective 0, 0, g zu substituiren. Dadurch werden die drei Fundamentalgleichungen

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2}-2n\sin\varphi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+Mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t^2}+2n\sin\varphi\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2n\cos\varphi\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+Mu\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t^2}-2n\cos\varphi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+g+Mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Die Integration dieser Gleichungen ist leicht, wenn man den Widerstand der Luft vernachlässigt, oder $M = 0$ setzt. Man findet nemlich

$$x = \mathfrak{A} - \mathfrak{D} \cos\varphi . t + \tfrac{1}{2n} \mathfrak{E} \sin\varphi \cos(2nt + \mathfrak{F}) + \tfrac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi . gtt$$
$$y = \mathfrak{B} - \tfrac{1}{2n} \mathfrak{E} \sin(2nt + \mathfrak{F}) + \tfrac{1}{2n} \cos\varphi . gt$$
$$z = \mathfrak{C} + \mathfrak{D} \sin\varphi . t + \tfrac{1}{2n} \mathfrak{E} \cos\varphi \cos(2nt + \mathfrak{F}) - \tfrac{1}{2} \sin\varphi^2 . gtt$$

Auch ist es leicht, folgende Werthe der arbiträren Grössen zu entwickeln, wenn man voraussetzt, dass der Körper anfänglich gar keine scheinbare Geschwindigkeit hat:

$$\mathfrak{A} = -\tfrac{g}{4nn} \cos\varphi \sin\varphi, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = -\tfrac{g}{4nn} \cos\varphi^2$$
$$\mathfrak{D} = 0, \quad \mathfrak{E} = \tfrac{g}{2n} \cos\varphi, \quad \mathfrak{F} = 0$$

Also

$$x = \tfrac{g}{2n} \cos\varphi \sin\varphi \left(ntt - \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} \cos 2nt\right)$$
$$y = \tfrac{g}{2n} \cos\varphi \left(t - \tfrac{1}{2n} \sin 2nt\right)$$
$$z = -\tfrac{1}{2} gtt + \tfrac{g}{2n} \cos\varphi^2 \left(ntt - \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} \cos 2nt\right)$$

Diese Integration ist freilich nicht *allgemein* zulässig, da obige Voraussetzung nur in so fern erlaubt ist, als der Körper sich von seinem anfänglichen scheinbaren Orte nicht weit entfernt. Für diesen Fall aber können wir die trigonometrischen Functionen in Reihen auflösen, und so wird

$$x = \tfrac{1}{6} \cos\varphi \sin\varphi . gnnt^4 \; . \; . \; .$$
$$y = \tfrac{1}{3} \cos\varphi . gnt^3 \; . \; . \; .$$
$$z = -\tfrac{1}{2} gtt + \tfrac{1}{6} \cos\varphi^2 . gnnt^4 \; . \; . \; .$$

Da die Zeit des Falls nur wenige Secunden, also nt höchstens einige Raumminuten beträgt, und (weil Radius $= 1$) $1' = \frac{1}{3438}$, so wird x und der zweite Theil von z ganz unmerklich, also $y = -\frac{2}{3} z \cos\varphi . nt$. Bei Dr. Benzenbergs Versuche im Michaelisthurme war $z = -235$ Fuss, $\varphi = 53^0\, 33'$, $t = 4''$ Sonnenzeit, also $nt = \frac{366}{365}$ Raumminuten. Hieraus wird $y = 3{,}91$ Linien.

Wenn man bei der Integration obiger Gleichungen den Widerstand der Luft mit in Betrachtung ziehen will, so wird man sich mit Näherungen begnügen müssen; die Entwickelung der Werthe von x, y, z in Reihen nach den Potenzen von n und M ist alsdann sehr leicht. Das höchste Glied von x wird wie vorhin $= \frac{1}{6} \cos\varphi \sin\varphi . gnnt^4$, und ist also von gar keiner Bedeutung; für y und z findet man mit Vernachlässigung der Quadrate und höhern Potenzen von n und M folgende Werthe:

$$y = \tfrac{1}{3} \cos\varphi . gnt^3 - \tfrac{1}{12} \cos\varphi . Mggnt^5$$
$$z = -\tfrac{1}{2} gtt + \tfrac{1}{12} Mggt^4.$$

Setzen wir also $-z$, den wirklichen Fall, $= f$; $\frac{1}{2} gtt$ oder den Fall im luftleeren Raume $= f + \delta$, so ist

$$y = \tfrac{2}{3} \cos\varphi . nt(f + \delta) - \cos\varphi . nt\delta = \tfrac{2}{3} \cos\varphi . nt\left(f - \tfrac{1}{2}\delta\right)$$

Für die Versuche in St. Michael, wo $f + \delta = 241{,}47$ Fuss war, erhalten wir daher die Abweichung nach Osten $y = 3{,}86$ Linien.

ÜBER DIE ACHROMATISCHEN DOPPELOBJECTIVE
BESONDERS IN RÜCKSICHT
DER VOLLKOMMENERN AUFHEBUNG DER FARBENZERSTREUUNG.

Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften
herausgegeben von B. von Lindenau und Bohnenberger. Bd. IV. N. XXX. 1817. December.

Der schöne Aufsatz des Hrn. Prof. Bohnenberger über die achromatischen Objective im ersten Bande dieser Zeitschrift hat das Verdienst, einen für diese Theorie wichtigen Umstand zuerst zur Sprache gebracht zu haben. Ich bin dadurch veranlasst, einige frühere Untersuchungen wieder vorzunehmen und weiter zu entwickeln, deren Resultate ich hier mittheilen werde.

Man begnügte sich bisher bei den Doppelobjectiven, die Farbenzerstreuung für die der Axe unendlich nahen Strahlen, und die Abweichung wegen der Kugelgestalt für die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit zu heben, wobei also für die Randstrahlen noch eine kleine Farbenzerstreuung zurückbleiben kann. Bei dieser Einrichtung ist die Berechnung des achromatischen Objectivs eine unbestimmte Aufgabe, d. i., zu jeder Kronglaslinse von positiver Brennweite, wie auch immer das Verhältniss der Halbmesser der Flächen sein mag, lässt sich eine Flintglaslinse berechnen, die mit jener vereinigt ein in obiger Bedeutung achromatisches Objectiv gibt. So viel ich weiss, haben bisher alle Optiker beide Flächen der Kronglaslinse convex angenommen: allein für das Verhältniss der beiden Halbmesser haben die Theoretiker sehr verschiedene Werthe in Vorschlag gebracht, je nachdem sie von diesem oder jenem Princip ausgingen. Will man mit Euler die Abweichung wegen der Gestalt bei der Kronglaslinse zu einem Kleinsten machen, so müssen die Halbmesser ungefähr in dem Verhältniss von

1 zu 7 stehen; sie müssen einander gleich sein, wenn man, wie Klügel in der analytischen Dioptrik, die möglich kleinsten Krümmungen zu haben wünscht; sollen die Brechungen selbst die möglich kleinsten werden, wie derselbe Schriftsteller in einer spätern Abhandlung sich vorsetzt, so müssen diese Brechungen einander gleich sein, und die Halbmesser nahe in dem Verhältniss von 1 zu 3 stehen. Es scheint nicht, dass alle diese verschiedenen Vorschläge hinlänglich motivirt sind. Klügels Augenmerk ist besonders die Abweichung wegen der Kugelgestalt gewesen, welche für *alle* Strahlen in mathematischer Schärfe zu heben bekanntlich unmöglich ist: bei Eulers Behandlung dieser Rechnungen ist diese Abweichung eigentlich nur für die der Axe nächsten Strahlen gehoben, und es bleibt eine sehr nahe dem Biquadrat des Abstandes von der Axe proportionale, also für die Randstrahlen am meisten merkliche Abweichung zurück; oder wenn man mit Klügel die Rechnung so führt, dass die Abweichung für die Randstrahlen verschwindet, so kommt sie wieder bei den Zwischenstrahlen zum Vorschein, am merklichsten bei denen, deren Entfernung nahe $\frac{7}{18}$ von dem Halbmesser der Öffnung ist. Diese unvermeidlich übrigbleibende Abweichung wegen der Gestalt so unschädlich wie möglich zu machen, war Klügels Absicht bei der Wahl des Verhältnisses der beiden ersten Halbmesser: es erhellt jedoch nicht klar genug weder, dass wirklich dieser Zweck bei dem gewählten Verhältniss am allerbesten erreicht werde, noch, dass dieser Zweck wichtig genug sei, um ihn vorzugsweise allein zur Grundlage der Bestimmung dieses Verhältnisses zu machen. Finden nemlich noch *andere* Unvollkommenheiten bei einem solchen Objectiv statt, die beträchtlich grösser sind als die von der nicht ganz zu hebenden Abweichung wegen der Gestalt herrührenden, so ist es offenbar wichtiger, jene als diese zu berücksichtigen.

Aus dieser Ursache wird es vortheilhafter sein, die Freiheit, die man in der Bestimmung des Verhältnisses der beiden ersten Halbmesser hat, zur Verminderung oder Wegschaffung der Farbenzerstreuung bei den Randstrahlen zu benutzen. In der That hat Hr. Prof. Bohnenberger durch Rechnung gezeigt, dass in dieser Beziehung das Verhältniss 2 zu 3 dem Verhältnisse 1 zu 3 vorzuziehen ist, indem bei dem ersten eine beträchtlich kleinere Farbenzerstreuung der Randstrahlen bewirkt wird, ohne dass die übriggebliebene Abweichung wegen der Kugelgestalt erheblich geworden wäre. Inzwischen bleibt auch bei Hrn. Prof. Bohnenbergers Einrichtung noch eine Farbenzerstreuung der Randstrahlen zurück, die noch mehr zu vermindern oder ganz wegzuschaffen sehr wünschenswerth wäre. Da Hr. Prof. Bohnenbergers zu diesem Zwecke angestellte Versuche, der Äusserung S. 392 zufolge, ohne Erfolg gewesen sind, und die Vermuthung zu begründen scheinen könnten, dass dies unmöglich sei, so hat mich dies zu einer besondern Untersuchung veranlasst, aus der sich, was mir sehr merkwürdig scheint, das Gegentheil ergeben hat.

Die vollkommne Wegschaffung der Farbenzerstreuung bei den Randstrahlen und den der Axe nächsten Strahlen ist nemlich allerdings möglich, oder bestimmter, es lässt sich ein Objectiv berechnen, welches alle Strahlen von zwei bestimmten Farben, sowohl diejenigen, welche in einer bestimmten Entfernung von der Axe, als die, welche unendlich nahe bei derselben (und zwar, wie hier immer vorausgesetzt wird, mit ihr parallel) auffallen, in Einem und demselben Punkt vereinigt. Dies Objectiv erhält eine von den bisher ausschliesslich angewandten ganz abweichende Form, so dass beide Linsen convex-concav werden und die convexen Flächen dem Gegenstande zukehren. Inzwischen obgleich hierdurch grössere Brechungen vorkommen als bei andern Einrichtungen, ist dennoch die übrig bleibende unvermeidliche Abweichung wegen der Gestalt noch sehr unbedeutend, und also die Vereinigung *aller* auf das Objectiv parallel mit der Axe auffallenden Strahlen vollkommener als bei irgend einer andern Einrichtung. Es wäre daher wohl der Mühe werth, dass geschickte Künstler diese neue Form versuchten. Es kann vielleicht sein, dass gegenwärtig dabei noch *practische* Schwierigkeiten statt finden; eine davon wird die sein, dass die Glasstücken, aus denen die Linsen geschliffen werden sollen, eine grössere Dicke haben müssen. Allein bei der immer fortschreitenden Vollkommenheit des technischen Theils der Dioptrik steht zu hoffen, dass Schwierigkeiten der Art zu besiegen sein werden, und dann ist es an der Mathematik, das Ideal der Form zur vollkommensten Vereinigung zu geben.

Die von mir geführte Rechnung soll übrigens bloss als Beispiel dienen, das Gesagte zu bestätigen, nicht aber dazu, dass Künstler diese Maasse genau befolgen sollen. Es ist unumgänglich nothwendig, dass für die Glasarten, aus denen ein vollkommenes Objectiv geschliffen werden soll, die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse erst besonders mit möglichster Schärfe bestimmt, und die Maasse des Objectivs diesem gemäss von Neuem berechnet werden. In meiner Rechnung habe ich genau dieselben Zahlen zum Grunde gelegt, nach denen Hr.

Prof. Bohnenberger gerechnet hat: auch dieselbe Dicke und Entfernung der Linsen habe ich beibehalten *). Da aber bei der neuen Einrichtung die convexe Fläche der Flintglaslinse eine stärkere Krümmung hat, als die concave der Kronglaslinse, so können beide Linsen einander näher kommen (welches auch in einer andern hier nicht weiter auszuführenden Rücksicht vortheilhafter sein wird); ja, wenn die Künstler sonst keine Bedenklichkeit dagegen haben, kann der Zwischenraum ganz wegfallen, oder die Linsen können einander in der Axe berühren. Es versteht sich, dass dies einige Modification der Krümmungshalbmesser nach sich ziehen wird.

Es gehört nicht zu meiner Absicht, den mathematischen Theil dieser Untersuchung hier zu entwickeln. Ich bemerke nur, dass die Aufgabe, wenn man die Abweichung wegen der Gestalt nach Eulers Art betrachtet, und Dicke und Entfernung der Glaslinse bei Seite setzt, auf eine Gleichung des vierten Grades führt, welche zwei reelle Wurzeln hat. Die hieraus sich ergebende genäherte Auflösung dient zur Grundlage einer indirecten Rechnung, durch welche alles genau in Übereinstimmung gebracht wird. Für Mathematiker wird diese Andeutung hinreichen. Die eine reelle Wurzel jener Gleichung muss übrigens verworfen werden, weil mit ihr zu starke Krümmungen der Glasflächen zusammenhängen, und die unvollkommene Aufhebung wegen der Gestalt zu sehr fühlbar machen würden.

Das Resultat meiner Rechnung ist nun folgendes:

Wenn die Halbmesser der Reihe nach zu

$$+3415{,}287;\quad -10133{,}007;\quad +4207{,}421;\quad -2807{,}320$$

angenommen werden, so vereinigen sich die rothen und violetten Strahlen, sowohl die, welche unendlich nahe bei der Axe, als die, welche in der Entfernung 1083,687 auffallen, alle in Einem Punkt der Axe, dessen Entfernung von der letzten Fläche $= 28293{,}3$ wird. Wird jene Entfernung von der Axe, bei welcher der Einfallswinkel $18^0\,30'$ ist, als Halbmesser der Öffnung angenommen, so ist der Durchmesser der Öffnung sehr nahe $\frac{1}{13}$ der Brennweite. Um beurthei-

*) [Dicke der ersten Linse $= 200$, der zweiten $= 80$ Abstand zwischen beiden Linsen $= 50$.
Exponenten der Brechungsverhältnisse beziehlich für Kronglas und Flintglas]

$$\begin{Bmatrix} 1.525976 & 1.62173 & \text{viol. Strahlen} \\ 1.515162 & 1.60177 & \text{mittl. —} \\ 1.504348 & 1.58181 & \text{rothe —} \end{Bmatrix}$$

len zu können, wie gross die noch übrig bleibende Abweichung wegen der Gestalt für die Strahlen zwischen dem Rande und der Axe wird, habe ich die Vereinigungsweiten für den Einfallswinkel 13^0 berechnet und gefunden

28289,3 für die rothen
28290,0 für die violetten Strahlen.

Ich kann nicht umhin, hier noch eine Erinnerung über eine Äusserung des Hrn. Prof. Bohnenberger in dem erwähnten Aufsatze beizufügen. Ich halte nemlich dafür, dass es am vortheilhaftesten ist, die Abweichung wegen der Gestalt genau für die Randstrahlen zu heben. Hr. Prof. Bohnenberger hat S. 279 dieses Verfahren wie mir deucht mit Unrecht getadelt. Man könnte, sagt er, wenn die Abweichung für die Randstrahlen genau gehoben sei, die Öffnung ohne Schaden der Deutlichkeit bis dahin vergrössern, wo die Abweichung wieder der grössten Abweichung der Zwischenstrahlen gleich werde, und es sei daher am vortheilhaftesten, die Abweichung nicht für die Randstrahlen, sondern für Strahlen zwischen dem Rande und der Axe zu heben. Dies würde allerdings wahr sein, wenn die übrigbleibende Abweichung jenseits und diesseits der Entfernung, für welche sie gehoben ist, *einerlei Zeichen* hätte, was aber nicht der Fall ist. Man könnte zwar hiegegen mit einigem Schein einwenden, dass es bei der Längenabweichung auf das Zeichen gar nicht ankomme, und dass positive und negative Abweichungen eine und dieselbe Undeutlichkeit im Auge hervorbringen. Allein hiebei nähme man offenbar stillschweigend an, dass das Ocular immer genau für das deutliche Sehen desjenigen Bildes gestellt sei, welches durch die der Axe nächsten Strahlen hervorgebracht wird, und dies kann doch nicht eingeräumt werden. Man mag dies Bild immerhin das Hauptbild nennen: es fällt mit dem von den Randstrahlen hervorgebrachten Bilde zusammen, wenn die Abweichung für diese gehoben ist, und alle übrigen Bilder werden dann (wenigstens allgemein zu reden) jenseits oder diesseits des Hauptbildes liegen. Da man nun das Ocular immer so stellt, dass die Undeutlichkeit so klein wie möglich wird, so sieht man gerade das Hauptbild am wenigsten deutlich, und jede Vergrösserung der Öffnung vergrössert auch die Undeutlichkeit. Eine ausführlichere Erörterung dieses Umstandes würde mich hier zu weit abführen.

Gehler's Physikalisches Wörterbuch. 1831. Artikel:
Linsenglas, Berechnungen über achromatische und aplanatische Linsengläser aus zwei Glaslinsen.

Brief von Gauss an Brandes.

Auf Veranlassung Ihres Briefes habe ich eine freie Stunde auf den in jenem Aufsatze*) am Ende kurz erwähnten Umstand gewandt. Der eigentliche Sinn der dortigen Bemerkung scheint nicht von allen ganz richtig aufgefasst zu sein, aber auch meine Angabe bedarf einer kleinen Modification. Ich finde nemlich jetzt durch eine *tiefer eindringende* Untersuchung, dass die Undeutlichkeit, die in dem Ausdrucke für die Längen-Abweichung von der vierten Potenz des Abstandes der auffallenden Strahlen von der Axe abhängt, den möglich kleinsten Total-Einfluss hat, wenn man das Objectiv so construirt, dass diejenigen Strahlen, die unendlich nahe bei der Axe einfallen, und diejenigen, die in einer Entfernung $= R.\sqrt{\frac{6}{5}}$ auffallen würden, (wo $R =$ Radius des Objectivs ist) in *einem* Punkte A sich vereinigen, wobei das Ocular dann so steht, dass man denjenigen Punkt der Axe, wo die Strahlen, die in der Entfernung $= (\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10})R$ und $= (\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10})R$ von der Axe aufgefallen sind, sich alle vereinigen, deutlich sieht. Denken Sie Sich nemlich durch diesen Punkt eine auf die Axe senkrechte Ebene, so ist das Bild desto undeutlicher, je grösser der Kreis um A ist, den die von einem Punkte des Objects auf das Objectivglas gefallenen Strahlen füllen, doch so, dass die Intensität der Strahlen an jeder Stelle dieses Kreises mit berücksichtigt werden muss. Hiebei ist nun einige Willkürlichkeit; ich halte für das zweckmässigste, hier nach denselben Principien zu verfahren, die der Methode der kleinsten Quadrate zum Grunde liegen. Ist nemlich ds ein Element dieses Kreises, ρ die Entfernung des Elements von A, und i die Intensität der Strahlen daselbst, so nehme ich an, dass $\int i\rho\rho ds$ als das Maass der Total-Undeutlich-

*) [Über die achromatischen Doppelobjective besonders in Rücksicht der vollkommnern Aufhebung der Farbenzerstreuung.]

keit zu betrachten sei, und mache dies zu einem Minimum. Ich finde dabei folgende Resultate: 1. Construirte man das Objectiv so, dass dasjenige Glied der Längen-Abweichung, welches von dem Quadrate der Entfernung von der Axe abhängt, $= 0$ wird, und setzte das Ocular so, dass A dahin fällt, wo die der Axe unendlich nahen Strahlen diese schneiden, so sei der Werth dieses Integrals $= E$. 2. Stellte man aber *bei derselben Einrichtung* das Ocular so, dass das Integral so klein wird, wie es bei dieser Einrichtung werden kann (wobei A der Vereinigungspunkt der in der Entfernung $= R\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ auffallenden Strahlen sein wird), so ist das Integral $= \frac{1}{4}E$. 3. Dagegen ist bei der obigen Einrichtung und der vortheilhaftesten Stellung des Oculars das Integral $= \frac{1}{100}E$, als absolutes Minimum. Obiges Resultat, dass nemlich mit dem Vereinigungspunkte der der Axe unendlich nahen Strahlen ein bloss *fingirtes* Bild (von Strahlen aus grösserer Distanz von der Axe als der Halbmesser des Objectivs) vereinigt werden soll, ist anfangs sehr überraschend und paradox scheinend; aber bei näherer Betrachtung sieht man den eigentlichen Grund leicht ein. Jenes erste *sogenannte* Hauptbild (von Strahlen sehr nahe bei der Axe) ist nemlich dabei gleichsam das Unwichtigste wegen seiner geringen Intensität, viel wichtiger ist, dass die Strahlen von den der Peripherie näheren Ringen des Objectivs *unter sich* besser zusammen gehalten werden, was bei jener Einrichtung am besten erreicht wird. Es thut mir leid, dass die Grenzen eines Briefes jetzt grössere Ausführlichkeit nicht gestatten; der scharfe Calcül lässt sich nichts abstreiten und bei einem vagen Raisonnement übersieht man leicht einen wesentlichen Umstand; allein für den Kenner werden diese Winke schon zureichen.

Allgemein finde ich, dass immer *bei der vortheilhaftesten Stellung des Oculars* jenes Integral $= \frac{1}{4}E(1 - \frac{8}{5}\mu\mu + \frac{2}{3}\mu^4)$ wird, wenn das Objectiv so construirt ist, dass Strahlen aus der Entfernung μR von der Axe sich mit dem (oben sogenannten) Hauptbilde in einem Punkte vereinigen. Dies ist ein Minimum für $\mu = \sqrt{\frac{6}{5}}$ und ist dann $= \frac{1}{100}E$; für $\mu = 1$ wäre es nur $= \frac{1}{60}E$ und für $\mu =$ unendlich klein, $= \frac{1}{4}E$. Nicht allein hat also hienach Bohnenberger Unrecht, sondern auch ich habe damals Unrecht gehabt, aber insofern, als ich noch nicht weit genug von Bohnenberger abgewichen bin. Ich hatte damals bloss die *ganze Grösse* des undeutlichen Bildes berücksichtigt, ohne auf die ungleiche Intensität der einzelnen Theile Rücksicht zu nehmen.

[BERICHTIGUNG DER SCHNEIDEN EINER WAAGE.]

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1837 März 13.

In der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vom 28. Januar nahm der Hofr. Gauss von der Vorlesung des Hrn. Prof. Weber, über welche im 22. Stücke dieser Blätter Bericht abgestattet ist, Veranlassung, einen Vortrag über einen nahe verwandten Gegenstand zu halten, von welchem wir den Hauptinhalt hier zur Anzeige bringen.

Er betrifft eine neue Berichtigungsmethode zur Erfüllung einer wesentlichen Bedingung bei den feineren Hebelwaagen, deren Wichtigkeit bisher nicht genug gewürdigt zu sein scheint. Solche Waagen haben drei prismatische Schneiden; die eine nach unten gekehrte, in der Mitte des Waagebalkens, ruht auf einem harten horizontalen Lager von Stein oder Stahl, und dient als Drehungsaxe bei dem Spiel des Waagebalkens; die beiden andern an den Enden des Waagebalkens sind aufwärts gerichtet, und auf jeder derselben schwebt das Tragestück, woran die Waageschale hängt. Die Tragestücke selbst sind von gehärtetem Stahl, und ihre unteren, auf den Schneiden aufliegenden Flächen vollkommen plan und hochpolirt.

Eine wesentliche Bedingung ist nun, dass diese beiden äussern Schneiden mit der mittleren parallel sein sollen. In der That, da vor jedem Umtausch der Gewichte in einer Schale die Waage erst gehemmt und dabei das Tragestück von der Schneide abgehoben wird, so ist nie darauf zu rechnen, dass sich nach Aufhebung der Hemmung das Tragestück *genau* wieder eben so auf die Schneide legt, wie zuvor: dies ist zwar unschädlich, wenn die betreffende Schneide mit der mittleren parallel ist, verursacht aber ein verändertes Moment, wenn eine Divergenz der Schneiden statt findet. Eine unvollkommene Berichtigung in dieser Beziehung ist eine Hauptursache, warum bei oft wiederholten Wägungen zuweilen bedeutend grössere Abweichungen in den Resultaten sich zeigen, als man sonst von der vortrefflichen Arbeit und der Empfindlichkeit einer Waage erwarten sollte.

Die Mittel, deren sich die Künstler zur Berichtigung des Parallelismus der Schneiden bisher gewöhnlich bedient haben, sind nicht geeignet, alle zu wünschende Schärfe zu geben; auch ist es, bei feinen Waagen wie bei astronomischen Instrumenten, nicht der Verfertiger, von dem man die feinste Berichtigung zu fordern hat, sondern diese kommt dem zu, der die Waage gebraucht.

Das Verfahren, dessen sich der Hofr. Gauss zu dieser Berichtigung mit dem besten Erfolge bedient hat, beruht auf folgenden Gründen.

Bei den Schwingungen des Waagebalkens verändert die zu prüfende äussere Schneide zwar ihre Lage im Raume; diese verschiedenen Lagen sind aber alle unter einander parallel, wenn diese Schneide mit der (ruhenden) mittleren parallel ist. Anders verhält es sich dagegen, wenn die äussere Schneide der mittleren nicht parallel ist. Nehmen wir, um die Vorstellung zu fixiren, an, dass die äussere Schneide zwar mit der mittleren in Einer Ebene liege, dass aber die Richtungen der beiden Schneiden abwärts vom Beobachter divergiren. In diesem Falle wird bei dem Spiele des Waagebalkens die äussere Schneide sich auf einer Kegelfläche bewegen; ihr abwärts gekehrtes Ende wird, relativ gegen das nähere Ende, steigen oder sinken, so wie der Hebelarm, an welchem diese Schneide sich befindet, steigt oder sinkt. Dasselbe wird von dem die Schneide stets berührenden Tragestücke gelten.

Welcher von beiden Fällen nun statt finde, lässt sich erkennen, wenn auf dem Tragestücke ein Planspiegel befestigt ist. Am vortheilhaftesten ist es, diesen Spiegel so anzubringen, dass seine Ebene nahe senkrecht zu der Schneide ist, obwohl man darin nicht zu ängstlich zu sein braucht. In dem ersten der beiden Fälle bleibt der Spiegel, während des Spiels des Waagebalkens, sich selbst parallel, im zweiten nicht; im ersten Falle wird also das Bild eines in schicklicher Entfernung vor dem Spiegel sich befindenden Gegenstandes unverrückt bleiben, im zweiten hingegen (wie man leicht übersieht), mit dem betreffenden Hebelarme steigen oder sinken. Das umgekehrte würde statt finden, wenn die beiden Schneiden anstatt abwärts vom Beobachter zu divergiren, convergiren, es würde dann nemlich mit dem Steigen des Waagebalkenarmes ein Sinken des Bildes, und umgekehrt, verbunden sein.

Nun lässt sich, wenn der Spiegel ein sehr vollkommner ist, selbst eine äusserst kleine Verrückung des Bildes sicher und scharf mit einem Fernrohre erkennen. Der Hofr. Gauss gebrauchte als Gegenstand eine etwa 5 Meter vor dem Spiegel vertical aufgerichtete, in Millimeter eingetheilte Scale; das 35 mal vergrössernde Fernrohr stand in nahe eben so grosser Entfernung. Es erschien so das Bild eines Millimeters etwa 20 Secunden gross, wovon man noch Zehntel schätzen kann. So lange die Schneide noch nicht vollkommen berichtigt war, ging das Bild der Scale an dem Fadenkreuze des Fernrohrs auf das regelmässigste auf und ab, wie der Waagebalken seine Schwingungen machte.

Für mathematisch gebildete Leser bedarf es blos der Andeutung, dass auf diese Weise nicht blos erkannt werden kann, nach welcher Seite eine Divergenz statt findet, sondern auch, hinreichend genau, wie gross dieselbe ist, wodurch, verbunden mit der Kenntniss der Weite der Gewinde der Correctionsschrauben, das Correctionsgeschäft in einen sichern Gang gebracht wird.

Der Vollständigkeit wegen mögen noch ein Paar andere Umstände hier erwähnt werden.

Wenn man einen etwas grossen Spiegel anwendet (der vom Hofr. Gauss gebrauchte, auf das Tragestück vermittelst einer eigenen Vorrichtung befestigte, hat 75 Millimeter Höhe), so ist es nothwendig, die Schalen mit hinlänglich schweren Gewichten zu belasten, weil sonst das Tragestück seitwärts umschlagen würde.

Es ist oben vorausgesetzt, dass die zu prüfende äussere Schneide mit der mittleren in Einer Ebene liege, also, wenn man die mittlere genau horizontal gestellt hat, bei horizontalem Stande des Waagebalkens gleichfalls horizontal sei, und nur etwa seitwärts divergire. Gewöhnlich wird aber diese Voraussetzung auch nicht in äusserster Schärfe statt finden, sondern, die äussere Schneide bei jener Stellung etwas geneigt, oder das eine Ende etwas höher sein können als das andere. Man erkennt dies, bei der beschriebenen Prüfungsmethode, daran, wenn beim Steigen des Waagebalkenarmes das Spiegelbild sich zugleich seitwärts, und beim Sinken nach der entgegengesetzten Seite bewegt. Inzwischen muss bemerkt werden, dass dieser Fehler, wenn er vorhanden ist, an einer Waage von einem geschickten Künstler jedenfalls viel zu klein sein wird, um einen noch merklichen Fehler in den Resultaten der Wägungen hervor zu bringen, und dass man daher auch bei den besten Waagen keine Correctionsmittel zur Wegschaffung dieses Theils des Nicht-Parallelismus angebracht hat.
