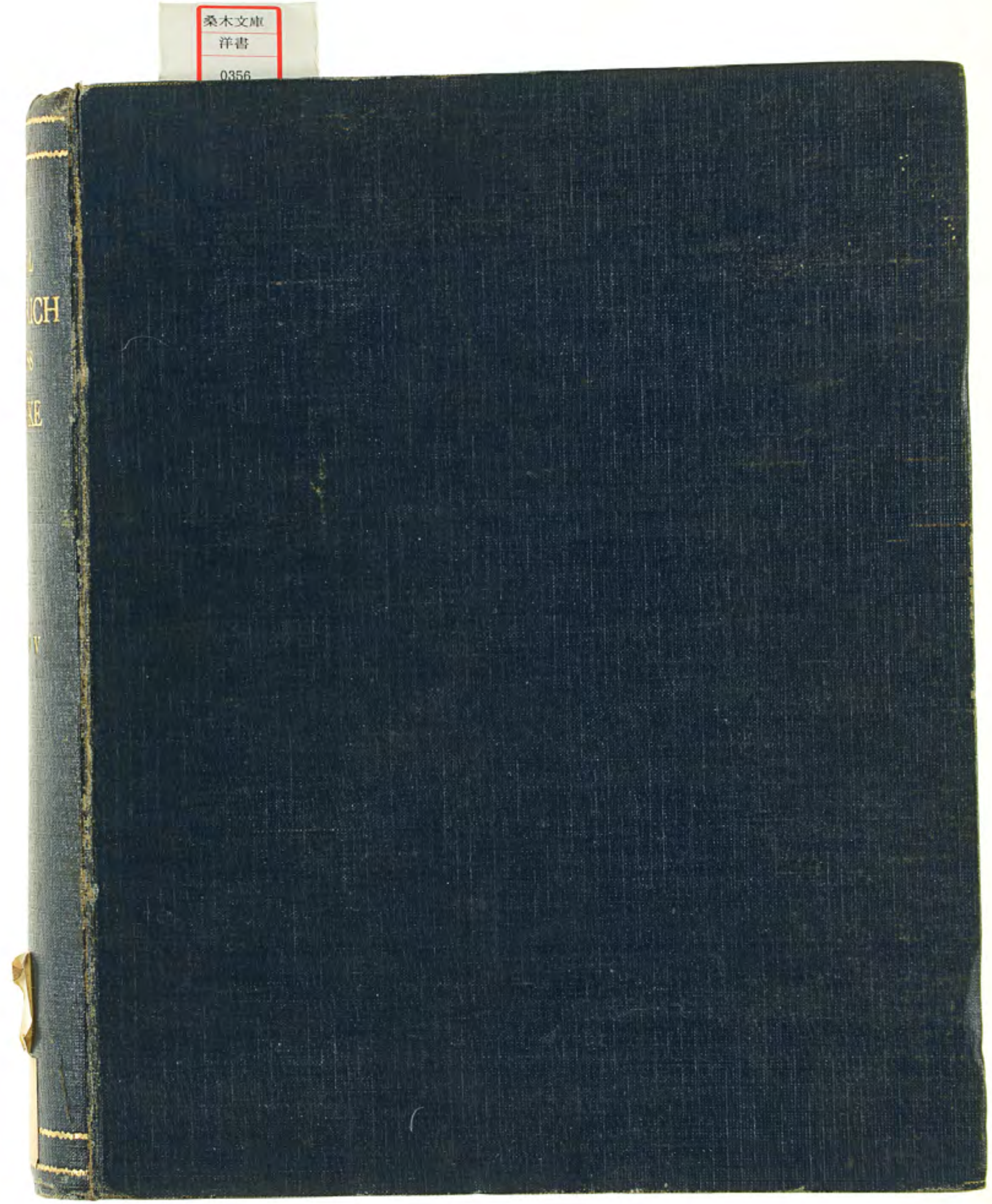
桑木文庫
洋書
0356

D.S

Reinig
Carten

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND V.

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

FÜNFTER BAND

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1867.

THEORIA ATTRACTIONIS
CORPORUM SPHAEROIDICORUM
ELLIPTICORUM HOMOGENEORUM

METHODO NOVA TRACTATA

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM TRADITA XVIII. MART. MDCCCXIII.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. II
Gottingae MDCCCXIII.

THEORIA ATTRACTIONIS CORPORUM

SPHAEROIDICORUM ELLIPTICORUM HOMOGENEORUM

METHODO NOVA TRACTATA.

1.

Satis quidem constat, problema de attractione corporis sphaeroidici elliptici homogenei in punctum quodvis exacte determinanda ad quaestiones difficillimas astronomiae physicae referri, pluresque geometras, inde a Newtoni temporibus, acriter iteratisque vicibus illi incubuisse. Primo quidem, investigatione ad sphaeroidem per revolutionem semiellipsis circa alterutrum axem ortam restricta, ipse summus Newton attractionem quam patitur punctum in axi situm invenire docuit, simulque nexum inter attractiones, quas patiuntur puncta intra sphaeroidem in eadem diametro sita, assignavit (*Princip. Lib.* I. *Prop.* XCI). Dein sagax Mac Laurin, synthesi perelegante usus, attractionem punctorum in sphaeroidis superficie vel in prolongatione plani aequatoris positorum determinavit, quo pacto simul theoria attractionis punctorum intra sphaeroidem sitorum, quae per Newtoni theorema ad attractionem punctorum in superficie facile referebatur, complete absoluta erat (De caussa physica fluxus et refluxus maris, in *Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'acad. roi. des sc. T.* IV; *Treatise of fluxions B.* I. *Ch.* 14). Quae Mac Laurin per synthesin enucleaverat, postea per analysin (cui antea huiusmodi quaestiones inaccessibiles visae erant) haud minus eleganter eruere docuit ill. Lagrange, atque sic viam ad ulteriores progressus patefecit (*Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin* 1773). Scilicet adhuc desiderabatur attractio punctorum extra sphaeroidem neque vero in axis nec in aequatoris prolongatione sitorum enodanda, quam difficillimam problematis partem absolvere contigit ill. Legendre (*Recherches sur l'attraction des sphéroides homogènes, Mémoires présentés à l'acad. roi. des sc. T.* X.)

Disquisitionem generalissimam de attractione sphaeroidum non per revolutionem ortarum, sed quarum sectiones cum quolibet plano sunt ellipses, iamiam inchoaverat Mac Laurin, sed substiterat in attractione punctorum in aliquo trium axium positorum. Theorema principale, cui solutio problematis generalissima praesertim innititur, per inductionem quidem iam coniectaverat ill. Legendre in commentatione modo laudata, sed ill. Laplace primo successit, omnia rigorose demonstrare atque sic solutionem ab omni parte perfectam reddere (*Hist. de l'acad. roi. des sc. de Paris* 1782; eadem solutio repetita in operibus *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes*, atque *Mécanique céleste* Vol. 2).

Elegantiam ingeniique subtilitatem in hac ill. Laplace solutione eminentem nemo quidem non mirabitur: nihilominus tamen ipsa subtilitas arsque admiranda, per quam arduas difficultates superavit, geometris desiderium liquit solutionis simplicioris, minus intricatae magisque directae. Nec plane satisfecit huic desiderio ill. Legendre per novam theorematis principalis demonstrationem (*Hist. de l'acad. roi. des sc.* 1788, *Sur les intégrales doubles*), etiamsi exquisita ars analytica omnium geometrarum suffragia merito tulerit*). Postea clar. Biot solutionem alteram, alteram clar. Plana simpliciorem reddere conati sunt (*Mém. de l'institut T.* VI, *Memorie di matematica e di fisica della società italiana T.* XV): sed sic quoque utramque solutionem ad intricatissimas analyseos applicationes referendam esse, quisque facile concedet.

Gratam itaque analystis atque astronomis fore speramus solutionem novam problematis celebratissimi per viam plane diversam procedentem, et ni fallimur ea simplicitate gaudentem, ut nihil amplius desiderandum linquat.

Ipsa quidem solutio nostra paucissimis pagellis continebitur. Operae tamen pretium esse censemus, antequam ad ipsum problema, cui haec commentatio dicata est, descendamus, quasdam disquisitiones praeliminares, quae in aliis quoque occasionibus opportune applicari poterunt, aliquanto generalius exsequi, fusiusque explicare, quam instituti nostri ratio per se spectata postularet.

*) De his duabus solutionibus e. g. ita iudicat ill. Lagrange: *On ne peut regarder leurs solutions que comme des chefs-d'oeuvres d'analyse, mais on peut désirer encore une solution plus directe et plus simple; et les progrès continuels de l'analyse donnent lieu de l'espérer.* Nouv. Mém. de l'acad. de Berlin 1793. p. 263.

2.

Considerabimus generalissime corpus finitum figurae cuiuscunque, a reliquo spatio infinito per superficiem unam continuam vel plures continuas interque se discretas separatum (si forte corpus cavitatem unam pluresve includat), quarum complexum simpliciter superficiem corporis dicemus. Concipiatur haec superficies in infinita elementa $\mathrm{d}s$ divisa; sit P punctum elementi $\mathrm{d}s$, cuius coordinatae ad tria plana inter se perpendicularia relatae denotentur per x, y, z. Sint PX, PY, PZ rectae axibus coordinatarum resp. parallelae, atque in plagas eas directae, versus quas coordinatae incrementa positiva capere supponuntur, porro sit PQ superficiei normalis extrorsumque directa. Sit M punctum attractum ubicunque libet situm, ipsius coordinatae a, b, c, atque distantia PM (semper positive accipienda) $= r$. Angulos quos facit recta PM cum PX, PY, PZ denotabimus per MX, MY, MZ, angulosque inter PQ atque PX, PY, PZ, PM per QX, QY, QZ, QM. Haec omnia ad puncta superficiei indefinite referuntur: quoties de pluribus punctis superficiei determinatis agendum erit, iisdem characteribus accentibus distinctis utemur.

3.

Concipiatur planum axi coordinatarum x normale, ita tamen, ut si ipsius aequatio exhibeatur per $x = \alpha$, α sit minor quam valor minimus coordinatae x in superficie corporis. Corpus in hoc planum proiectum figuram finitam ibi designabit, quam in elementa infinita $\mathrm{d}\Sigma$ dispertitam supponemus. In elementi $\mathrm{d}\Sigma$ puncto Π erigatur perpendiculum (sive axi coordinatarum x parallelum), quod secet corpus in punctis P', P'', P''' etc.: horum punctorum multitudo manifesto erit par. Erigantur etiam perpendicula ad planum in singulis punctis circumferentiae elementi $\mathrm{d}\Sigma$, quae formabunt superficiem cylindricam sensu latiori, atque e superficie corporis elementa $\mathrm{d}s', \mathrm{d}s'', \mathrm{d}s'''$ etc. rescindent. Elementum $\mathrm{d}\Sigma$ erit proiectio singulorum elementorum $\mathrm{d}s', \mathrm{d}s'', \mathrm{d}s'''$ etc., unde patet esse $\mathrm{d}\Sigma = \pm \mathrm{d}s'.\cos QX' = \pm \mathrm{d}s''.\cos QX'' = \pm \mathrm{d}s'''.\cos QX'''$ etc., signo superiori vel inferiori valente, prout cosinus anguli acuti vel obtusi adest. Quoniam vero manifesto perpendiculum in P' corpus ingreditur, in P'' e corpore exit, in P''' rursus intrat etc., facile perspicitur, QX' obtusum esse, QX'' acutum, QX''' obtusum etc., ita ut habeatur

$$\mathrm{d}\Sigma = -\mathrm{d}s'.\cos QX' = +\mathrm{d}s''.\cos QX'' = -\mathrm{d}s'''.\cos QX''' \text{ etc.}$$

adeoque propter partium multitudinem parem

$$\mathrm{d}s'.\cos QX' + \mathrm{d}s''.\cos QX'' + \mathrm{d}s'''.\cos QX''' + \text{etc.} = 0$$

Tractando eodem modo omnia reliqua elementa $\mathrm{d}\Sigma$, atque summando, nanciscimur

THEOREMA PRIMUM.

Integrale $\int \mathrm{d}s \cos QX$ *per totam corporis superficiem extensum fit* $= 0$.

Generalius eodem modo invenitur, integrale

$$\int (T\cos QX + U\cos QY + V\cos QZ)\,\mathrm{d}s$$

evanescere, si T, U, V resp. designent functiones rationales solarum y, z solarum x, z solarumque x, y.

4.

Quum volumina partium cylindri a plano nostro usque ad puncta P', P'', P''' etc resp. sint $= \mathrm{d}\Sigma.(x'-\alpha)$, $\mathrm{d}\Sigma.(x''-\alpha)$, $\mathrm{d}\Sigma.(x'''-\alpha)$ etc., pars voluminis corporis ea, quae intra cylindrum sita est, erit

$$\begin{aligned} &= -x'\mathrm{d}\Sigma + x''\mathrm{d}\Sigma - x'''\mathrm{d}\Sigma + \text{etc.} \\ &= \mathrm{d}s'.x'\cos QX' + \mathrm{d}s''.x''\cos QX'' + \mathrm{d}s'''.x'''\cos QX''' + \text{etc.} \end{aligned}$$

unde summando pro omnibus $\mathrm{d}\Sigma$ obtinemus

THEOREMA SECUNDUM.

Volumen integrum corporis exprimitur per integrale $\int \mathrm{d}s.x\cos QX$ *per totam superficiem extensum.*

Manifesto idem volumen etiam per $\int \mathrm{d}s.y\cos QY$ vel per $\int \mathrm{d}s.z\cos QZ$ exprimere licebit.

5.

Concipiatur iam primo cylinder totus materia uniformiter densa repletus, videamusque quantam singula eius elementa attractionem in punctum M exer-

ceant. Dividatur cylinder per plana infinite sibi proxima basique parallela in cylindros elementares, qualium unus, ad punctum cuius coordinatae sunt ξ, η, ζ, per $\mathrm{d}\Sigma.\mathrm{d}\xi$ exprimi poterit. Huius distantia a puncto M erit

$$= \sqrt{((a-\xi)^2 + (b-\eta)^2 + (c-\zeta)^2)} = \rho$$

unde ipsius attractio in punctum M exhiberi poterit per $\mathrm{d}\Sigma.\mathrm{d}\xi.f\rho$, denotante functione $f\rho$ legem attractionis. Quare quum per totum cylindrum sola ξ tamquam variabilis spectanda sit, erit $\rho\,\mathrm{d}\rho = -(a-\xi)\mathrm{d}\xi$, et proin attractio elementi $= -\frac{\rho f\rho.\mathrm{d}\rho.\mathrm{d}\Sigma}{(a-\xi)}$. Qua resoluta in tres attractiones partiales axibus coordinatarum x, y, z parallelas atque oppositas, prima erit $= -f\rho.\mathrm{d}\rho.\mathrm{d}\Sigma$. Hinc designando integrale $\int f\rho.\mathrm{d}\rho$ per $F\rho$, attractio cylindri a basi $\mathrm{d}\Sigma$ usque ad punctum cuius coordinata prima $= \xi$ in punctum M secundum axem coordinatarum x erit $= -(F\rho - \text{Const.})\,\mathrm{d}\Sigma = -(F\rho - FR)\mathrm{d}\Sigma$, si R supponitur designare distantiam basis $\mathrm{d}\Sigma$ a puncto M. Hinc sequitur, eandem attractionem partialem omnium partium corporis, quae intra cylindrum iacent, fieri

$$\begin{aligned} &= (Fr' - Fr'' + Fr''' - \text{etc.})\,\mathrm{d}\Sigma \\ &= -Fr'.\mathrm{d}s'.\cos QX' - Fr''.\mathrm{d}s''.\cos QX'' - Fr'''.\mathrm{d}s'''.\cos QX''' - \text{ etc.} \end{aligned}$$

Extendendo haec ratiocinia ad omnia elementa $\mathrm{d}\Sigma$, colligimus

THEOREMA TERTIUM.

Attractio corporis in punctum M, *axi coordinatarum* x *parallela atque opposita, exhibetur per integrale* $-\int Fr.\mathrm{d}s.\cos QX$ *per totam superficiem extensum.*

Prorsus simili modo manifesto attractio secundum duas reliquas directiones principales exprimetur per integralia $-\int Fr.\mathrm{d}s.\cos QY$, $-\int Fr.\mathrm{d}s.\cos QZ$.

6.

Iam rem alia via aggrediemur. Concipiatur superficies sphaerica radio $= 1$ circa centrum M descripta, atque in elementa infinite parva dispertita. Sit Π punctum huius superficiei ad spatiolum $\mathrm{d}\Sigma$ in eadem pertinens; ducatur radius $M\Pi$, atque si opus est ultra sphaerae superficiem indefinite producatur. Sint P', P'', P''' etc. puncta, in quibus hic radius superficiem corporis nostri deinceps secat, excluso tamen ipso puncto M, si forte in ipsa superficie iacet. Horum itaque punctorum multitudo par erit vel impar, prout M situm est extra soliditatem corporis vel intra, patetque casum ubi M in ipsa corporis superficie iacet, annumerari debere vel casui priori vel posteriori, prout radius $M\Pi$ ab initio vel a corporis soliditate recedit, vel eam intrat. Concipiantur porro rectae a M ad peripheriam spatioli $\mathrm{d}\Sigma$ ductae, quae formabunt superficiem conicam (sensu latiori), atque in superficie corporis nostri ad puncta P', P'', P''' etc. resp. spatiola $\mathrm{d}s'$, $\mathrm{d}s''$, $\mathrm{d}s'''$ etc. definient. Denique describantur per puncta P', P'', P''' etc. portiunculae superficierum sphaericarum e centro M radiis

$$MP' = r', \quad MP'' = r'', \quad MP''' = r''' \text{ etc.}$$

sintque spatiola, quae conus ex illis exsecat, $\mathrm{d}\sigma'$, $\mathrm{d}\sigma''$, $\mathrm{d}\sigma'''$ etc. Omnia haec spatiola $\mathrm{d}\Sigma$, $\mathrm{d}s'$, $\mathrm{d}\sigma'$ etc. tamquam positiva spectabimus. His praemissis habemus

$$\mathrm{d}\Sigma = \frac{\mathrm{d}\sigma'}{r'r'} = \frac{\mathrm{d}\sigma''}{r''r''} = \frac{\mathrm{d}\sigma'''}{r'''r'''} \text{ etc.}$$

Spatiolum $\mathrm{d}\sigma'$ considerari potest tamquam proiectio spatioli $\mathrm{d}s'$ in planum, cui recta $P'M$ est normalis. Hinc erit $\mathrm{d}\sigma' = \pm \mathrm{d}s'.\cos MQ'$, signo superiori vel inferiori accepto, prout MQ' acutus est vel obtusus: casus prior locum habet, quoties recta a P' ad M ducta a corpore recedit, i. e. quoties M iacet extra corpus, casus posterior vero, quoties recta $P'M$ in P' corpus intrat, i. e. quoties M iacet intra corpus. Perinde erit $\mathrm{d}\sigma'' = \mp \mathrm{d}s'' \cos MQ''$, $\mathrm{d}\sigma''' = \pm \mathrm{d}s'''.\cos MQ'''$ etc. unde patet,

I. Si M iaceat extra corpus, haberi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s'.\cos MQ' &= +r'r'\mathrm{d}\Sigma \\
\mathrm{d}s''.\cos MQ'' &= -r''r''\mathrm{d}\Sigma \\
\mathrm{d}s'''.\cos MQ''' &= +r'''r'''\mathrm{d}\Sigma \\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

II. Si vero M iaceat intra corpus, fieri

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s'.\cos MQ' &= -r'r'\mathrm{d}\Sigma \\
\mathrm{d}s''.\cos MQ'' &= +r''r''\mathrm{d}\Sigma \\
\mathrm{d}s'''.\cos MQ''' &= -r'''r'''\mathrm{d}\Sigma \\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

In casu I itaque erit (propter aequationum multitudinem parem)

$$\frac{\mathrm{d}s'.\cos MQ'}{r'r'} + \frac{\mathrm{d}s''.\cos MQ''}{r''r''} + \frac{\mathrm{d}s'''.\cos MQ'''}{r'''r'''} + \text{etc.} = 0$$

in casu II vero (propter aequationum multitudinem imparem)

$$\frac{\mathrm{d}s'.\cos MQ'}{r'r'} + \frac{\mathrm{d}s''.\cos MQ''}{r''r''} + \frac{\mathrm{d}s'''.\cos MQ'''}{r'''r'''} + \text{etc.} = -\mathrm{d}\Sigma$$

Tractando eodem modo omnia elementa $\mathrm{d}\Sigma$, et summando, ad laevam manifesto habebimus integrale $\int \frac{\mathrm{d}s.\cos MQ}{rr}$ per totam corporis superficiem extensum, ad dextram vero in casu priori 0, in posteriori aream integram superficiei sphaericae radio $= 1$ descriptae negative sumtam, i. e. -4π, denotante π semicircumferentiam circuli, cuius radius $= 1$.

De casu, ubi M in ipsa corporis superficie collocatur, seorsim dicendum est. Concipiatur planum tangens superficiem corporis in puncto M, quod superficiem sphaericam in duo hemisphaeria aequalia dirimet, alterum ab eadem parte plani, a qua est soliditas corporis in M, alterum a parte opposita. Respectu omnium elementorum $\mathrm{d}\Sigma$, quae sunt in hemisphaerio priori, punctum M considerandum erit tamquam punctum internum, pro reliquis tamquam externum. Hinc patet, e summatione omnium

$$\frac{\mathrm{d}s'.\cos MQ'}{r'r'} + \frac{\mathrm{d}s''.\cos MQ''}{r''r''} + \frac{\mathrm{d}s'''.\cos MQ'''}{r'''r'''} + \text{etc.}$$

prodire tantummodo aream dimidiam sphaerae negative sumendam. Ita stabilimus

THEOREMA QUARTUM.

Integrale $\int \frac{\mathrm{d}s.\cos MQ}{rr}$ *per totam corporis superficiem extensum fit vel* $= 0$, *vel* $= -2\pi$, *vel* $= -4\pi$, *prout* M *iacet extra corpus, vel in eius superficie, vel intra corpus.*

Ceterum per eadem ratiocinia demonstratur, generaliter integrale $\int \frac{P\mathrm{d}s.\cos MQ}{rr}$ in casu primo evanescere, si P denotet functionem quamcunque rationalem quantitatum $\cos MX$, $\cos MY$, $\cos MZ$.

7.

Volumen spatii conici a vertice usque ad punctum P', P'', P''' etc. resp. est

$$= \tfrac{1}{3}r'\mathrm{d}\sigma', \quad \tfrac{1}{3}r''\mathrm{d}\sigma'', \quad \tfrac{1}{3}r'''\mathrm{d}\sigma''' \text{ etc.}$$

sive

$$= \pm\tfrac{1}{3}r'\mathrm{d}s'.\cos MQ', \quad \mp\tfrac{1}{3}r''\mathrm{d}s''.\cos MQ'', \quad \pm\tfrac{1}{3}r'''\mathrm{d}s'''.\cos MQ''' \text{ etc.}$$

signis superioribus vel inferioribus valentibus, prout M iacet extra vel intra corpus. In casu priori autem partem soliditatis corporis constituunt partes coni a P' usque ad P'', a P''' usque ad P'''' etc., in posteriori vero partes coni a M usque ad P', a P'' usque ad P''' etc. In utroque igitur casu pars corporis ea, quae iacet intra conum basi $\mathrm{d}\Sigma$ insistentem, fit

$$= -\tfrac{1}{3}(r'\mathrm{d}s'.\cos MQ' + r''\mathrm{d}s''.\cos MQ'' + r'''\mathrm{d}s'''.\cos MQ''' + \text{etc.})$$

Tractando eodem modo cuncta elementa $\mathrm{d}\Sigma$, et summando, obtinemus

THEOREMA QUINTUM.

Volumen corporis integri aequale est integrali $-\tfrac{1}{3}\int r\,\mathrm{d}s.\cos MQ$ *per totam corporis superficiem extenso.*

8.

Iam supponamus, corpus esse uniformiter densum, singulaque eius elementa exercere attractionem in punctum M alicui functioni distantiae proportionalem, ita ut denotante ρ distantiam elementi a puncto attracto, attractio exprimatur per elementi volumen multiplicatum in $f\rho$. Concipiatur primo conus noster basi $\mathrm{d}\Sigma$ insistens totus materia plenus, atque per superficies sphaericas infinite sibi proximas e centro M descriptas in elementa infinita dispertitus. Tale elementum, ad sphaeram cuius radius $=\rho$, exprimetur per $\rho\rho\mathrm{d}\rho.\mathrm{d}\Sigma$, adeoque vis, qua agit in M, per $\mathrm{d}\Sigma.\rho\rho f\rho.\mathrm{d}\rho$. Denotando itaque integrale $\int\rho\rho f\rho.\mathrm{d}\rho$ per $\Phi\rho$, patet $\mathrm{d}\Sigma.(\Phi\rho - \Phi 0)$ exprimere attractionem partis coni a vertice usque ad distantiam ρ in punctum M, sive generaliter $\mathrm{d}\Sigma.(\Phi\rho' - \Phi\rho)$ attractionem coni inter distantias a vertice ρ et ρ'. Ab omnibus itaque partibus corporis nostri intra conum iacentibus attrahetur punctum M in directione $M\Pi$ vi, quae exprimitur per

$$\mathrm{d}\Sigma.(-\Phi r' + \Phi r'' - \Phi r''' + \text{etc.})$$

quoties M iacet extra corpus, vel per

$$\mathrm{d}\Sigma.(-\Phi 0 + \Phi r' - \Phi r'' + \Phi r''' - \text{etc.})$$

quoties M iacet intra corpus, sive

in casu priori per

$$-\frac{\mathrm{d}s'.\Phi r'.\cos MQ'}{r'r'} - \frac{\mathrm{d}s''.\Phi r''.\cos MQ''}{r''r''} - \frac{\mathrm{d}s'''.\Phi r'''.\cos MQ'''}{r'''r'''} - \text{etc.}$$

in casu posteriori vero per eandem formulam adiecta parte

$$-\mathrm{d}\Sigma.\Phi 0$$

Multiplicando hanc expressionem per $\cos MX$, habebimus vim, qua partes corporis intra conum sitae attrahunt punctum in directione axi coordinatarum x parallela atque opposita. Hinc vis, qua corpus integrum agit in eadem directione, exprimetur per integrale $-\int\frac{\mathrm{d}s.\Phi r.\cos MQ.\cos MX}{rr}$, per totam corporis superficiem extensum, siquidem punctum attractum iacet extra corpus, sed adiicere adhuc oportet integrale $-\Phi 0.\int\mathrm{d}\Sigma.\cos MX$ per totam superficiem sphaericam extensum, quoties M iacet intra corpus. Nullo porro negotio perspicitur, in casu eo, ubi M iaceat in corporis superficie, adiiciendum quidem esse idem integrale $-\Phi 0.\int\mathrm{d}\Sigma.\cos MX$, sed per dimidiam tantummodo sphaerae superficiem extensum, et quidem per hemisphaerium id, quod definitur plano corporis superficiem in M tangente atque ab eadem plani parte iacet, a qua est soliditas corporis in puncto M. Ut valorem huius integralis determinemus, concipiamus solidum intra hemisphaerium istud atque planum inclusum. Denotet θ indefinite angulum inter rectam superficiei huius solidi normalem extrorsumque directam atque rectam axi coordinatarum x parallelam. Hinc per Theorema Primum integrale $\int\mathrm{d}s.\cos\theta$ per *totam* solidi superficiem extensum evanescit, unde si integrale per solam partem planam superficiei extensum supponitur $=J$, integrale per superficiei partem curvam debebit esse $=-J$. Sed in parte curva $\mathrm{d}s$ convenit cum nostro $\mathrm{d}\Sigma$, θ vero fit $=180^0 - MX$. Hinc patet, integrale $-\int\mathrm{d}\Sigma.\cos MX$, per hemisphaerium extensum fieri $=-J$. In parte plana autem superficiei manifesto θ est constans, atque aequalis valori ipsius QX in puncto M, unde J aequalis erit producto cosinus huiusce anguli in aream plani, quae fit $=\pi$. Hinc colligitur, integrale $-\Phi 0.\int\mathrm{d}\Sigma.\cos MX$, per hemisphaerium quod supra definivimus extensum, fieri $=-\pi\Phi 0.\cos QX$, sumto pro QX valore in puncto M. Prorsus eodem modo valor integralis $-\Phi 0.\int\mathrm{d}\Sigma.\cos MX$ per hemisphaerium alterum extensum invenitur $=+\pi\Phi 0.\cos QX$, unde integrale per totam sphaeram fit $=0$. Ex his omnibus colligimus

THEOREMA SEXTUM.

Attractio corporis in punctum M, *axi coordinatarum* x *parallela et opposita, exhibetur per integrale*

$$-\int\frac{ds.\Phi r.\cos MQ.\cos MX}{rr}$$

per totam superficiem extensum, sive M *iaceat extra corpus, sive intra, sed adiecta parte* $-\pi\Phi 0.\cos QX$, *quoties* M *iacet in ipsa superficie, ubi pro* QX *accipiendus est valor definitus, quem habet in* M.

Manifesto vires secundum directiones axibus coordinatarum y, z parallelas atque oppositas perinde exprimentur per integralia

$$-\int\frac{ds.\Phi r.\cos MQ.\cos MY}{rr},\quad -\int\frac{ds.\Phi r.\cos MQ.\cos MZ}{rr}$$

quibus adiicere oportet $-\pi\Phi 0.\cos QY$, $-\pi\Phi 0.\cos QZ$ (sumtis pro angulis valoribus definitis in M), quoties M iacet in corporis superficie.

Ceterum facile perspicitur, tres vires

$$-\pi\Phi 0.\cos QX,\quad -\pi\Phi 0.\cos QY,\quad -\pi\Phi 0.\cos QZ$$

aequivalere unicae $=-\pi\Phi 0$ ipsi superficiei normali introrsumque directae.

Manifesto evolutione integralis $-\Phi 0.\int d\Sigma.\cos MX$ supersedere potuissemus, si functio f ita comparata est, ut liceat statuere $\Phi 0 = 0$; sed maluimus disquisitionem omni generalitate persequi. Quoties autem attractio cubo altiorive potestati distantiae inverse proportionalis supponitur, patet, illud non licere, sed necessario fieri $\Phi 0 = -\infty$, unde sequitur, in tali suppositione punctum in corporis superficie positum vi infinita versus solidum premi.

9.

Per methodos hactenus explicatas integralia, quae per totum corporis volumen extendi debuissent (integralia tripla), ad talia reduximus, quae tantummodo per corporis superficiem sunt extendenda, et quidem duplici modo. Indoles superficiei exprimitur per aequationem inter coordinatas x, y, z, i. e. per aequationem $W = 0$, denotante W functionem variabilium x, y, z, quam ab omni irrationalitate liberam supponere licet. Prodeat e differentiatione functionis W

$$dW = Tdx + Udy + Vdz$$

constatque, T, U, V resp. proportionales esse cosinibus angulorum rectae, quae superficiei normalis est, cum rectis axibus coordinatarum x, y, z parallelis, i. e. angulorum QX, QY, QZ. Hinc quidem colligitur, esse

$$\cos QX = \frac{\pm T}{\sqrt{(TT+UU+VV)}}$$
$$\cos QY = \frac{\pm U}{\sqrt{(TT+UU+VV)}}$$
$$\cos QZ = \frac{\pm V}{\sqrt{(TT+UU+VV)}}$$

sed ambiguum manet, utrum signa superiora, an inferiora adoptare oporteat. Quod ut decidamus, capiamus in recta PQ superficiei in P normali *extrorsumque* directa punctum P' ipsi P infinite proximum, sitque distantia $PP' = dw$. Erunt itaque coordinatae puncti P' resp.

$$x + dw.\cos QX = x + dx$$
$$y + dw.\cos QY = y + dy$$
$$z + dw.\cos QZ = z + dz$$

adeoque incrementum valoris functionis W inde a puncto P (ubi est $=0$) usque ad punctum P'

$$= dw.(T\cos QX + U\cos QY + V\cos QZ)$$
$$= \pm dw.\sqrt{(TT+UU+VV)}$$

Hinc patet, signa superiora valere, si recedendo a corporis soliditate functio W nanciscitur valorem positivum, et proin negativum ingrediendo corporis soliditatem, contra signa inferiora valere in casu opposito. Revera quum superficies nostra tum corporis soliditatem a reliquo spatio vacuo separet, tum spatii partes eas, ubi W positivum valorem obtinet, ab iis, ubi valor functionis W fit negativus, generaliter loquendo *vel* extra corpus valor functionis W positivus erit, intra negativus, in quo casu signa superiora accipienda erunt, *vel* functio W negativa erit extra, positiva intra corpus, in quo casu signa inferiora valebunt.

Cosinus angulorum reliquorum, quibus in formulis nostris opus est, adhuc facilius evolvuntur. Habemus scilicet

$$a = x + r\cos MX$$
$$b = y + r\sin MY$$
$$c = z + r\sin MZ$$

unde $r = \sqrt{((a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2)}$

$$\cos MX = \frac{a-x}{r}$$
$$\cos MY = \frac{b-y}{r}$$
$$\cos MZ = \frac{c-z}{r}$$

denique per theorema satis notum fit

$$\cos MQ = \cos MX.\cos QX + \cos MY.\cos QY + \cos MZ.\cos QZ$$

sive

$$\cos MQ = \pm \frac{T(a-x)+U(b-y)+V(c-z)}{r\sqrt{(TT+UU+VV)}}$$

10.

Iam ut integratio expressionum differentialium per totam superficiem absolvi possit, has expressiones ita transmutare oportet, ut duas tantummodo variabiles contineant. Hoc fieri quidem potest eliminando unam e variabilibus x, y, z adiumento aequationis $W=0$: sed plerumque hoc modo formulae minus tractabiles prodeunt. Praestat itaque, duas novas indeterminatas p, q introducere, ita ut tum x, tum y, tum z tamquam functiones harum indeterminatarum considerare oporteat.

Simulac igitur ipsis p, q valores determinati tribuuntur, etiam x, y, z determinatae erunt, i. e. illis punctum determinatum in corporis superficie respondebit. Haec mutua correlatio clarius ob oculos ponetur, si planum indefinitum concipiamus, cuius singula puncta per coordinatas rectangulares p, q exhibeantur. Cuivis itaque puncto plani respondebit punctum in superficie corporis et quidem unicum tantum, si res ita instructa est, ut x, y, z sint functiones uniformes indeterminatarum p, q. Quodsi vice versa etiam per x, y, z plene et absque ambiguitate determinantur p et q, manifesto cuivis puncto superficiei corporis unicum tantum plani punctum respondebit, planumque in hoc casu undique in infinitum porrigi debet, quo integram corporis superficiem exhauriat. Alioquin autem plani partem tantummodo considerare oportebit, limitibus finitis vel infinitis descriptam, quae corporis superficiem quasi repraesentabit. Concipiatur planum per infinitas rectas tum lineae abscissarum parallelas tum ipsi normales

in elementa rectangula divisum: huiusmodi elementum, inter puncta quorum coordinatae sunt

$$\begin{array}{ll} p, & q \\ p+\mathrm{d}p, & q \\ p, & q+\mathrm{d}q \\ p+\mathrm{d}p, & q+\mathrm{d}q \end{array}$$

contentum, erit $=\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$, respondebitque elemento parallelogrammatico in superficie corporis contento inter quatuor puncta, quorum coordinatae resp. erunt

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & x, & y, & z \\ \text{II.} & x+\lambda\mathrm{d}p, & y+\mu\mathrm{d}p, & z+\nu\mathrm{d}p \\ \text{III.} & x+\lambda'\mathrm{d}q, & y+\mu'\mathrm{d}q, & z+\nu'\mathrm{d}q \\ \text{IV.} & x+\lambda\mathrm{d}p+\lambda'\mathrm{d}q, & y+\mu\mathrm{d}p+\mu'\mathrm{d}q, & z+\nu\mathrm{d}p+\nu'\mathrm{d}q \end{array}$$

si supponimus, esse

$$\mathrm{d}x = \lambda\mathrm{d}p+\lambda'\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}y = \mu\mathrm{d}p+\mu'\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}z = \nu\mathrm{d}p+\nu'\mathrm{d}q$$

Proiectiones huius areae, quam statuimus $=\mathrm{d}s$, in tria plana axibus coordinatarum x, y, z normalia, facile inveniuntur resp. $=$

$$\pm(\mu\nu'-\nu\mu')\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$$
$$\pm(\nu\lambda'-\lambda\nu')\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$$
$$\pm(\lambda\mu'-\mu\lambda')\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$$

unde per theorema satis notum ipsa elementi area erit

$$=\mathrm{d}p.\mathrm{d}q.\sqrt{((\mu\nu'-\nu\mu')^2+(\nu\lambda'-\lambda\nu')^2+(\lambda\mu'-\mu\lambda')^2)}$$

Hinc patet, singula integralia in sex nostris theorematibus prolata, ad formam talem reduci $\int S\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$, ubi S vel explicite vel implicite sit functio duarum indeterminatarum p, q, integrationemque vel per totum planum infinitum extendendam esse, vel per eam plani partem, quae superficiem integram corporis nostri quasi repraesentat. Integratio ipsa autem modo his modo illis artificiis absolvetur, de quibus regulae generales dari nequeunt.

Ceterum adhuc observamus, quum substitutis pro x, y, z valoribus per p, q expressis, functio W necessario fieri debeat identice $= 0$, etiam identice i. e. independenter a valoribus ipsarum $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$ fieri debere

$$0 = (\lambda T + \mu U + \nu V)\,\mathrm{d}p + (\lambda' T + \mu' U + \nu' V)\,\mathrm{d}q$$

sive haberi

$$\lambda T + \mu U + \nu V = 0$$
$$\lambda' T + \mu' U + \nu' V = 0$$

Hinc sequitur, quantitates $\mu\nu' - \nu\mu'$, $\nu\lambda' - \lambda\nu'$, $\lambda\mu' - \mu\lambda'$ resp. ipsis T, U, V, sive cosinibus angulorum QX, QY, QZ proportionales evadere, quod iam e supra dictis, sed remanente signorum ambiguitate, colligere licuerat.

11.

Ab his disquisitionibus generalibus ad corpora sphaeroidica elliptica descendimus, quorum caussa illae fuerant susceptae. Initio abscissarum in corporis centro sumto, semiaxibusque per A, B, C designatis, aequatio superficiei erit

$$\frac{xx}{AA} + \frac{yy}{BB} + \frac{zz}{CC} = 1$$

Statuemus itaque $W = \frac{xx}{AA} + \frac{yy}{BB} + \frac{zz}{CC} - 1$, unde patet, pro omnibus punctis intra corpus W obtinere valores negativos, positivos autem pro omnibus punctis extra corpus. Porro erit $T = \frac{2x}{AA}$, $U = \frac{2y}{BB}$, $V = \frac{2z}{CC}$; statuendo itaque

$$\sqrt{\left(\frac{xx}{A^4} + \frac{yy}{B^4} + \frac{zz}{C^4}\right)} = \psi$$

erit

$$\cos QX = \frac{x}{\psi AA}, \quad \cos QY = \frac{y}{\psi BB}, \quad \cos QZ = \frac{z}{\psi CC}$$
$$\cos QM = \frac{1}{\psi r}\left(\frac{(a-x)x}{AA} + \frac{(b-y)y}{BB} + \frac{(c-z)z}{CC}\right)$$

12.

Iam introducamus duas indeterminatas p, q tales ut fiat

$$x = A\cos p$$
$$y = B\sin p . \cos q$$
$$z = C\sin p . \sin q$$

Facile perspicietur, totam sphaeroidis superficiem sic exhauriri, si p extendatur a 0 usque ad 180^0, q vero a 0 usque ad 360^0. Porro habebimus

$$\lambda = -A\sin p, \qquad \lambda' = 0$$
$$\mu = B\cos p . \cos q, \quad \mu' = -B\sin p . \sin q$$
$$\nu = C\cos p . \sin q, \quad \nu' = C\sin p . \cos q$$
$$\mu\nu' - \nu\mu' = BC\cos p . \sin p = ABC\sin p . \frac{x}{AA}$$
$$\nu\lambda' - \lambda\nu' = AC\sin p^2 . \cos q = ABC\sin p . \frac{y}{BB}$$
$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = AB\sin p^2 . \sin q = ABC\sin p . \frac{z}{CC}$$

Hinc quoniam $\sin p$ intra limites, quos hic consideramus, ubique fit quantitas positiva, statuere oportet

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}p . \mathrm{d}q . ABC . \psi . \sin p$$

Applicando has formulas ad theorema secundum, fit corporis volumen seu (statuendo densitatem $= 1$) massa

$$= \iint \mathrm{d}p . \mathrm{d}q . ABC . \cos p^2 . \sin p$$

sive integrando primo secundum q

$$= 2\pi \int \mathrm{d}p . ABC . \cos p^2 . \sin p = \tfrac{1}{2}\pi ABC \int \mathrm{d}p . (\sin p + \sin 3p)$$

quod integrale a $p = 0$ usque ad $p = 180^0$ est extendendum. Hinc provenit $\frac{4}{3}\pi ABC$, uti aliunde constat.

13.

Ad determinandam attractionem, quam sphaerois exercet in punctum quodcunque, si attractio cuiusvis elementi quadrato distantiae a puncto attracto reciproce proportionalis supponitur, habemus $fr = \frac{1}{rr}$, $Fr = -\frac{1}{r}$, $\Phi r = r$. Sit attractio sphaeroidis integri secundum directionem axi coordinatarum x parallelam atque oppositam $= \mathrm{X}$, statuaturque $\mathrm{X} = ABC\xi$. Erit itaque, per theorema tertium,

$$\mathrm{X} = \iint \mathrm{d}p . \mathrm{d}q \frac{BCx\sin p}{rA} = \iint \mathrm{d}p . \mathrm{d}q \frac{BC\cos p . \sin p}{r}.$$

adeoque

[1] $$\xi = \iint \frac{dp.dq.\cos p.\sin p}{Ar}$$

Perinde obtinemus, per theorema sextum

[2] $$\xi = -\iint \frac{dp.dq.\sin p}{r^3}.(a-x)\left(\frac{(a-x)x}{AA}+\frac{(b-y)y}{BB}+\frac{(c-z)z}{CC}\right)$$

Denique theorema quartum nobis suppeditat

[3] $$\iint \frac{dp.dq.\sin p}{r^3}\left(\frac{(a-x)x}{AA}+\frac{(b-y)y}{BB}+\frac{(c-z)z}{CC}\right) = 0$$
$$\text{vel } = -\frac{4\pi}{ABC}$$

prout punctum M iacet vel extra corpus, vel intra corpus.

Iam quantitates A, B, C tamquam valores particulares trium variabilium α, β, γ consideramus, ita comparatarum, ut $\alpha\alpha-\beta\beta$, $\alpha\alpha-\gamma\gamma$ sint constantes. Ita ξ spectari poterit tamquam functio variabilium α, β, γ seu potius unius ex ipsis: variationes simultaneas quantitatum $\xi, \alpha, \beta, \gamma$ per characteristicam δ distinguemus. Facile concluditur ex aequatione [1], crescentibus α, β, γ in infinitum, ξ ultra omnes limites decrescere, quum manifesto vel valor minimus ipsius r ultra omnes limites crescat. Statuere itaque oportet $\xi = 0$ pro $\alpha = \infty$. Differentiando aequationem [1] ita exhibitam

$$\alpha\xi = \iint \frac{dp.dq.\cos p.\sin p}{r}$$

secundum characteristicam δ, prodit

$$\alpha\delta\xi + \xi\delta\alpha = -\iint \frac{dp.dq.\cos p.\sin p.\delta r}{rr}$$

Sed habemus

$$\begin{aligned} r\delta r &= -(a-x)\delta x-(b-y)\delta y-(c-z)\delta z \\ &= -(a-x)\cos p.\delta\alpha-(b-y)\sin p.\cos q.\delta\beta-(c-z)\sin p\sin q.\delta\gamma \\ &= -(a-x)x.\frac{\delta\alpha}{\alpha}-(b-y)y.\frac{\delta\beta}{\beta}-(c-z)z.\frac{\delta\gamma}{\gamma} \\ &= -\alpha\delta\alpha.\left(\frac{(a-x)x}{\alpha\alpha}+\frac{(b-y)y}{\beta\beta}+\frac{(c-z)z}{\gamma\gamma}\right) \end{aligned}$$

(propter $\alpha\delta\alpha-\beta\delta\beta = 0$, $\alpha\delta\alpha-\gamma\delta\gamma = 0$): hinc fit

$$\alpha\delta\xi+\xi\delta\alpha = \delta\alpha.\iint \frac{dp.dq.x\sin p}{r^3}\left(\frac{(a-x)x}{\alpha\alpha}+\frac{(b-y)y}{\beta\beta}+\frac{(c-z)z}{\gamma\gamma}\right)$$

Hinc subtrahendo aequationem [2], in $\delta\alpha$ multiplicatam, postquam A, B, C in α, β, γ mutatae sunt, fit

$$\alpha\delta\xi = \delta\alpha.\iint \frac{dp.dq.a\sin p}{r^3}\left(\frac{(a-x)x}{\alpha\alpha}+\frac{(b-y)y}{\beta\beta}+\frac{(c-z)z}{\gamma\gamma}\right)$$

Huius aequationis pars ad dextram per aequ. [3] fit vel $= 0$ vel $= -\frac{4\pi a\delta\alpha}{\alpha\beta\gamma}$, prout M iacet extra vel intra corpus, ita ut fiat in casu priori

[4] $$\delta\xi = 0$$

in posteriori autem

[5] $$\delta\xi = -\frac{4\pi a\delta\alpha}{\alpha\alpha\beta\gamma}$$

Aequatio [4] protinus ostendit, ξ esse constantem, sive attractionem X massae proportionalem pro omnibus ellipsoidibus, in quibus $\alpha\alpha-\beta\beta$, $\alpha\alpha-\gamma\gamma$ sint quantitates constantes, i. e., quarum tres sectiones principales sint ellipses ex iisdem focis descriptae, quamdiu punctum attractum extra sphaeroidem iaceat. Quam conclusionem, quum omni rigore vera sit, quantumvis proxime sphaeroidis superficies ad punctum attractum accedat, necessario etiam ad sphaeroidem ipsam extendere licebit, cuius superficies per ipsum punctum attractum transit.

Problema itaque de attractione sphaeroidis in punctum quodcunque externum determinanda, reducitur ad duo alia problemata, scilicet primo ad determinationem dimensionum alius sphaeroidis ex iisdem quibus sphaerois proposita focis descriptae punctumque attractum transeuntis, secundo ad problema de attractione sphaeroidis in punctum in ipsius superficie positum. Problema prius pendet a solutione aequationis cubicae, quam semper radicem realem unicam involvere facile demonstratur, cuique hic immorari superfluum videtur. Ut vero problema alterum solvamus, consideremus casum alterum, ubi punctum attractum iacet intra corpus. Quum sit $\beta\beta = \alpha\alpha+BB-AA$, $\gamma\gamma = \alpha\alpha+CC-AA$, substituemus hos valores in aequatione 5, simulque faciemus $\frac{A}{\alpha} = t$. Hinc emergit

$$\delta\xi = \frac{4a\pi tt\delta t}{A^3\sqrt{((1-(1-\frac{BB}{AA})tt)(1-(1-\frac{CC}{AA})tt)}}$$

sive restituendo characteristicam d, et integrando

$$\xi = \frac{4a\pi}{A^3}\int \frac{ttdt}{\sqrt{((1-(1-\frac{BB}{AA})tt)(1-(1-\frac{CC}{AA})tt)}}$$

quod integrale ita sumendum est, ut evanescat pro $t = 0$, ac dein, pro sphaeroide determinata, cuius semiaxes sunt A, B, C, extendendum usque ad $t = 1$. Habemus itaque

$$[6] \qquad X = \frac{4a\pi BC}{AA}\int\frac{ttdt}{\sqrt{((1-(1-\frac{BB}{AA})tt)(1-(1-\frac{CC}{AA})tt)}}$$

integratione a $t=0$ usque ad $t=1$ extensa. Manifesto attractiones axibus coordinatarum y, z parallelae hinc sponte derivantur, si a, A cum b, B vel cum c, C permutantur.

Haec itaque formula suppeditat attractionem omnium punctorum intra sphaeroidem, et quum rigorose sit vera, quantumvis proximum sit punctum attractum ipsi sphaeroidis superficiei, etiam usque ad puncta in superficie posita valebit. Ad quam quum attractio punctorum externorum iam reducta sit, problema iam complete est solutum.

Aequatio [6] praeterea docet, pro puncto interno attractionem omnium sphaeroidum similium similiterque positarum prorsus identicam esse. Quodsi itaque huiusmodi sphaerois in plura strata divisa concipiatur, quorum superficies internae et externae superficiei sphaeroidis sint similes similiterque positae, manifesto singula strata punctum attractum circumvolventia ad attractionem in hoc punctum nihil conferent, ita ut tantummodo restet attractio nuclei interioris, cuius superficies per ipsum punctum transit.

14.

De ipsa integratione formulae [6] non opus est prolixe disserere. Constat scilicet, eam a transscendentibus pendere, circulo logarithmisque altioribus, si omnes A, B, C sint inaequales: in hoc itaque casu ad series confugiemus, quae tanto citius convergent, quo minus sphaerois a sphaera discrepat. Si vero duae quantitatum A, B, C sunt aequales, e. g. $A=B$, in quo casu sphaerois orta erit per revolutionem circa axem $=2C$, erit

$$X = \frac{4\pi aC}{A}\int\frac{ttdt}{\sqrt{(1-(1-\frac{CC}{AA})tt)}}$$

$$= \frac{2\pi a\cos\varphi}{\sin\varphi^3}(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi)$$

statuendo $\frac{C}{A}=\cos\varphi$, vel $\sqrt{(1-\frac{CC}{AA})}=\sin\varphi$, si $C<A$, aut

$$X = \frac{2\pi aCC}{CC-AA} - \frac{2\pi aAAC}{(CC-AA)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{C+\sqrt{(CC-AA)}}{A}$$

si $C>A$.

Attractio in directione coordinatis y parallela et opposita, prodit mutando in his formulis a in b, unde patet, has duas vires aequivalere unicae, cuius directio axi $2C$ normalis est, cuiusque intensitas invenitur, si in formula modo tradita a in distantiam puncti attracti ab hoc axe mutatur.

Attractio denique in directione coordinatis z parallela et opposita i. e. ad aequatorem normali, fit in casu, ubi $B=A$,

$$= \frac{4\pi cAA}{CC}\int\frac{ttdt}{1-(1-\frac{AA}{CC})tt}$$

unde eruitur, si $C<A$, ponendo ut supra $\frac{C}{A}=\cos\varphi$,

$$= \frac{4\pi c\cos\varphi}{\sin\varphi^3}(\mathrm{tang}\,\varphi-\varphi)$$

si vero $C>A$, prodit

$$\frac{4\pi cAAC}{(CC-AA)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{C+\sqrt{(CC-AA)}}{A} - \frac{4\pi cAA}{CC-AA}$$

Tandem, si omnes tres A, B, C sunt aequales, i. e. si corpus est sphaera, attractiones secundum tres directiones principales fiunt

$$\tfrac{4}{3}\pi a, \quad \tfrac{4}{3}\pi b, \quad \tfrac{4}{3}\pi c$$

i. e. identicae cum iis, quas nucleus sphaericus, in cuius superficie punctum attractum iacet, exerceret, si ipsius massa in centro esset concentrata. Hinc etiam sponte sequitur, puncta *externa* a sphaera perinde attrahi, ac si eius massa tota esset in centro, uti Newton primus docuerat.

ADDITAMENTUM.

Postquam haecce iam perscripta essent, innotuit, indicante ill. Laplace, commentatio egregia cl. Ivory in *Philosophical Transactions* ad A. 1809; ubi idem argumentum per methodum ab iis, quibus usi erant ill. Laplace et Legendre, prorsus diversam tractatur. Summa elegantia ille geometra attractionem puncti externi ad attractionem puncti interni reducere docuit, i. e. problematis partem, quae semper pro difficiliori habita est, ad faciliorem. Methodus autem, per quam hanc alteram partem tractavit, longe magis complicata est, partimque perinde ut methodus, qua ill. LAPLACE pro punctis externis usus erat, considerationi serierum infinitarum non semper convergentium innititur, quam utique evitare licuisset. Ceterum haec solutio clar. IVORY, quae obiter spectata quandam similitudinis speciem cum nostra prae se ferre videri posset, propius examinata principiis *omnino diversis* inniti invenietur, nec fere quidquam utrique solutioni commune est, nisi usus indeterminatarum a nobis per p, q denotatarum.

ÜBER EIN NEUES ALLGEMEINES GRUNDGESETZ DER MECHANIK.

Journal für die reine und angew. Mathematik herausg. v. CRELLE. Band IV. 1829.

ÜBER EIN NEUES

ALLGEMEINES GRUNDGESETZ DER MECHANIK.

Bekanntlich verwandelt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die ganze Statik in eine mathematische Aufgabe, und durch Dalembert's Princip für die Dynamik ist diese wiederum auf die Statik zurückgeführt. Es liegt daher in der Natur der Sache, dass es kein neues Grundprincip für die Bewegungs- und Gleichgewichts-Lehre geben *kann*, welches der Materie nach nicht in jenen beiden schon enthalten und aus ihnen abzuleiten wäre. Inzwischen scheint doch wegen dieses Umstandes noch nicht jedes neue Princip werthlos zu werden. Es wird allezeit interessant und lehrreich bleiben, den Naturgesetzen einen neuen vortheilhaften Gesichtspunkt abzugewinnen, sei es, dass man aus demselben diese oder jene einzelne Aufgabe leichter auflösen könne, oder dass sich aus ihm eine besondere Angemessenheit offenbare. Der grosse Geometer, der das Gebäude der Mechanik auf dem Grunde des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf eine so glänzende Art aufgeführt hat, hat es nicht verschmäht, Maupertuis Princip der kleinsten Wirkung zu grösserer Bestimmtheit und Allgemeinheit zu erheben, ein Princip, dessen man sich zuweilen mit vielem Vortheil bedienen kann *).

---

*) Es sei mir jedoch hier die Bemerkung erlaubt, dass ich die Art, wie ein anderer grosser Geometer versucht hat, Huyghens Gesetz für die ausserordentliche Brechung des Lichts in Krystallen von doppelter Brechung, vermittelst des Grundsatzes der kleinsten Wirkung zu beweisen, nicht befriedigend finde.

Der eigenthümliche Charakter des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten besteht darin, dass es eine allgemeine Formel zur Auflösung aller statischen Aufgaben, und so der Stellvertreter aller andern Principe ist, ohne jedoch das Creditiv dazu so unmittelbar aufzuweisen, dass es sich, so wie es nur ausgesprochen wird, schon von selbst als plausibel empföhle.

In *dieser* Beziehung scheint das Princip, welches ich hier aufstellen werde, den Vorzug zu haben: es hat aber auch noch den zweiten, dass es das Gesetz der Bewegung und der Ruhe auf ganz gleiche Art in grösster Allgemeinheit umfasst. So sehr es in der Ordnung ist, dass bei der allmäligen Ausbildung der Wissenschaft und bei der Belehrung des Individuum das Leichtere dem Schwereren, das Einfachere dem Verwickeltern, das Besondere dem Allgemeinen vorangeht, so fordert doch der Geist, einmal auf dem höhern Standpunkte angelangt, den umgekehrten Gang, wobei die ganze Statik nur als ein ganz specieller Fall der Mechanik erscheine. Selbst der oben erwähnte Geometer scheint darauf Werth zu legen, indem er als einen Vorzug des Princips der kleinsten Wirkung ansieht, dass es das Gleichgewicht und die Bewegung zugleich umfasse, wenn man jenes so ausdrücke, dass die lebendigen Kräfte bei beiden Kleinste seien, eine Bemerkung, die doch mehr witzig als wahr zu sein scheint, da das Minimum in beiden Fällen in ganz verschiedener Beziehung Statt findet.

Das neue Princip ist nun folgendes:

Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich grösster Übereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Producte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punkts von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet.

Es seien m, m', m'' u. s. w. die Massen der Punkte; a, a', a'' u. s. w. ihre Plätze zur Zeit t; b, b', b'' u. s. w. die Plätze, welche sie, nach dem unendlich

In der That ist die Zulässigkeit dieses Grundsatzes wesentlich von dem der Erhaltung der lebendigen Kräfte abhängig, nach welchem die Geschwindigkeiten der bewegten materiellen Punkte bloss durch ihre Plätze bedingt werden, ohne dass die Richtung der Bewegung Einfluss darauf haben kann, was doch in dem erwähnten Versuch vorausgesetzt wird. Es scheint mir, dass im Emanationssystem alle Bemühungen, die Erscheinungen der doppelten Brechung an die allgemeinen dynamischen Gesetze anzuknüpfen, so lange erfolglos bleiben müssen, als man die Lichttheilchen bloss wie Punkte betrachtet.

kleinen Zeittheilchen dt, in Folge der während dieser Zeit auf sie wirkenden Kräfte und der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeiten und Richtungen, einnehmen würden, falls sie alle vollkommen frei wären. Die wirklichen Plätze c, c', c'' u. s. w. werden dann diejenigen sein, für welche, unter allen mit den Bedingungen des Systems vereinbaren, $m(bc)^2 + m'(b'c')^2 + m''(b''c'')^2$ u. s. w. ein Minimum wird.

Das Gleichgewicht ist offenbar nur ein einzelner Fall des allgemeinen Gesetzes, und die Bedingung dafür, dass

$$m(ab)^2 + m'(a'b')^2 + m''(a''b'')^2 \text{ u. s. w.}$$

selbst ein Minimum sei, oder dass das Beharren des Systems im Zustande der Ruhe, der freien Bewegung der einzelnen Punkte näher liege, als jedes mögliche Heraustreten aus demselben.

Die Ableitung unsers Princips aus dem oben angeführten geschieht leicht auf folgende Art.

Die auf den materiellen Punkt m wirkende Kraft ist offenbar zusammengesetzt, erstens aus einer, die, in Verbindung mit der zur Zeit t Statt habenden Geschwindigkeit und Richtung, ihn in der Zeit dt von a nach c führt, und in einer zweiten, die ihn in derselben Zeit aus der Ruhe in c, durch cb führen würde, wenn man den Punkt als frei betrachtet. Dasselbe gilt von den andern Punkten. Nach Dalembert's Princip müssen demnach die Punkte m, m', m'' u. s. w., unter alleiniger Wirkung der zweiten Kräfte, nach cb, $c'b'$, $c''b''$ u. s. w., in den Plätzen c, c', c'' u. s. w. vermöge der Bedingungen des Systems, im Gleichgewicht sein.

Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erfordert dies Gleichgewicht, dass die Summe der Producte aus je drei Factoren, nemlich jeder der Massen m, m', m'' u. s. w., den Linien cb, $c'b'$ $c''b''$ u. s. w., und irgend welchen auf letztere resp. projicirten, vermöge der Bedingungen des Systems möglichen Bewegungen jener Punkte, immer $= 0$ sei, wie man es gewöhnlich ausspricht *)

*) Der gewöhnliche Ausdruck setzt stillschweigend solche Bedingungen voraus, dass die jeder möglichen Bewegung entgegengesetzte gleichfalls möglich sei, wie z. B. dass ein Punkt auf einer bestimmten Fläche zu bleiben genöthigt, dass die Entfernung zweier Punkte von einander unveränderlich sei u. dgl. Allein dies ist eine unnöthige und der Natur nicht immer angemessene Beschränkung. Die Oberfläche eines undurchdringlichen Körpers zwingt einen auf ihr befindlichen materiellen Punkt nicht, auf ihr zu bleiben, sondern verwehrt ihr bloss das Austreten auf die Eine Seite; ein gespannter, nicht ausdehnbarer

oder richtiger, dass jene Summe niemals positiv werden könne. Sind daher $\gamma, \gamma', \gamma''$ u. s. w. von c, c', c'' u. s. w. verschiedene, aber mit den Bedingungen des Systems verträgliche Plätze; und $\theta, \theta', \theta''$ u. s. w. die Winkel, welche $c\gamma, c'\gamma', c''\gamma''$ u. s. w. mit $cb, c'b, c''b''$ u. s. w. machen, so ist allemal $\Sigma m.cb.c\gamma.\cos\theta$ entweder 0 oder negativ. Da nun

$$\gamma b^2 = cb^2 + c\gamma^2 - 2cb.c\gamma.\cos\theta$$

so ist klar, dass

$$\Sigma m.\gamma b^2 - \Sigma m.cb^2 = \Sigma m.c\gamma^2 - 2\Sigma m.cb.c\gamma.\cos\theta$$

folglich immer positiv sein wird, also $\Sigma m.\gamma b^2$ immer grösser als $\Sigma m.cb^2$, d. i. dass $\Sigma m.cb^2$ ein Minimum sein wird. W. Z. B. W.

Es ist sehr merkwürdig, dass die freien Bewegungen, wenn sie mit den nothwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modificirt werden, wie der rechnende Mathematiker, nach der Methode der kleinsten Quadrate, Erfahrungen ausgleicht, die sich auf unter einander durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Grössen beziehen. Diese Analogie liesse sich noch weiter verfolgen, was jedoch gegenwärtig nicht zu meiner Absicht gehört.

---

aber biegsamer Faden zwischen zwei Punkten macht nur die Zunahme, nicht die Abnahme der Entfernung unmöglich u. s. w. Warum wollten wir also das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten nicht lieber gleich anfangs so ausdrücken, dass es *alle* Fälle umfasst?

PRINCIPIA GENERALIA
THEORIAE FIGURAE FLUIDORUM
IN STATU AEQUILIBRII

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM TRADITA XXVIII. SEPT. MDCCCXXIX.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VII.
Gottingae MDCCCXXX.

PRINCIPIA GENERALIA

THEORIAE FIGURAE FLUIDORUM

IN STATU AEQUILIBRII.

Vires ascensionem vel depressionem fluidorum in tubis capillaribus gubernantes primus acute et accurate enumeravit sagax CLAIRAUT, sed quum legem virium omnino intactam liquerit, nihil fructus ad explicationem mathematicam phaenomenorum ex illa enumeratione nasci potuit. Attractio vulgaris quadrato distantiae reciproce proportionalis, quae omnes motus coelestes tam felici successu explicat, nullius usus est nec in phaenomenis capillaribus, nec in phaenomenis adhaesionis et cohaesionis explicandis; calculus enim recte institutus facile docet, ad normam illius legis attractionem cuiusvis corporis, quocum experimenta instituere licet, i. e. cuius moles respectu totius terrae pro nihilo haberi potest, in punctum ubicunque vel adeo in contactu positum, evanescere respectu gravitatis *). Recte hinc concluditur, illam attractionis legem in distantiis minimis naturae haud amplius consentaneam esse, sed modificationem quandam postulare, sive quod eodem redit, corporum particulas praeter illam vim attractivam exercere aliam in distantiis minimis tantum conspicuam. Phaenomena omnia conspirant ad arguendum, hancce alteram vis attractivae partem (*attractionem mole-*

---

*) Constat, maximam attractionem, quam massa homogenea data in punctum datum secundum illam legem exercere potest, esse ad attractionem, quam eadem massa in figuram sphaericam redacta exercet in punctum in superficie positum, ut 3 ad $\sqrt[3]{25}$: posterior vero attractio cum gravitate facile comparatur.

cularem), in distantiis vel minimis quas mensurare licet insensibilem esse, dum in distantiis insensibilibus partem priorem (quadrato distantiae reciproce proportionalem) longe superare possit.

Ill. Laplace ab hac unica suppositione circa indolem virium molecularium proficiscens, ceteroqui autem legem diminutionis pro distantiis crescentibus prorsus indeterminatam linquens, primus effectum earum in figuram superficiei fluidorum calculo accurato subiecit, et, stabilita aequatione generali pro figura aequilibrii, non modo phaenomena capillaria proprie sic dicta, sed multa alia his affinia inde explicare conatus est. Hae investigationes, per mirum cum experimentis accuratis consensum ubique confirmatae, inter pulcherrima philosophiae naturalis incrementa, quae illi magno geometrae debemus, referendae, obiectiones autem a quibusdam auctoribus contra illas directae ad maximam partem vel levis vel nullius momenti sunt *).

In calculis ill. Laplace utique occurrunt quaedam stricto argumentandi modo haud prorsus consentanea. In commentatione priori, *théorie de l'action capillaire*, denotata per φf intensitate attractionis in distantia f, integrale $\int \varphi f . df$ ab $f = x$ usque ad $f = \infty$ extensum statuitur $= \Pi x$; dein integrale $\int \Pi f . f df$ ab $f = x$ usque ad $f = \infty$ extensum, $= \Psi x$; denique valores integralium $2\pi \int \Psi f . df$, $2\pi \int \Psi f . f df$ ab $f = 0$ usque ad $f = \infty$ extensorum statuuntur resp. $= K$, et $= H$, denotante π semicircumferentiam circuli pro radio $= 1$. Indoles functionis φf prorsus intacta linquitur, dummodo insensibilis sit pro omnibus valoribus sensibilibus ipsius f. At ex hac *sola* suppositione neutiquam sequeretur, etiam Πf, Ψf pro valoribus sensibilibus ipsius f necessario insensibiles fieri, neque maiori iure, valores integralium $2\pi \int \Psi f . df$, $2\pi \int \Psi f . f df$ ab $f = 0$ usque ad valorem sensibilem *finitum* ipsius f extensorum insensibiliter differre a K, H, uti in commentatione illa legitur; infinite multas enim formas functionis φf imaginari liceret, suppositioni fundamentali satisfacientes, pro quibus hae conclusiones erroneae forent. Quinadeo, si φf attractionem completam exprimere supponitur, revera etiam continebit partem formae $\frac{a}{ff}$, a qua attractio vulgaris pendet; sed etiamsi hic terminus pro insensibili habendus sit, dum dimensiones corporum attrahentium, quales in experimentis occurrere possunt, insensibiles sunt prae tota terra, tamen iam secunda integratio, si in infinitum extenderetur, inferret functioni Ψf terminum infinitum.

*) Ita iudicandum de plerisque obloquutionibus in ephemeridibus Ticinensibus (Giornale di fisica etc. T. 9) prolatis, quibus scite respondit clar. Petit in Annales de chimie et de physique T. 1.

At si his hisque similibus quaedam levis incuriae species subesse videtur, certe ad formam disserendi potius quam ad rem ipsam attinet. Apparet enim ex dissertatione secunda, *Supplément à la théorie de l'action capillaire*, ill. Laplace per φf non attractionem completam, sed partem eam tantum, quae attractioni vulgari accedit, tacite subintellexisse; posteriorem autem nullam experimentis nostris modificationem sensibilem afferre posse, facile elucet. Quinadeo addigitat, se functionem φf ad instar exponentialis e^{-if} considerare, denotante i quantitatem permagnam, aut potius $\frac{1}{i}$ lineam perparvam. Sed ne opus quidem est, generalitatem tantopere limitare, quum is, qui rem potius quam verba intuetur, facillime videat, sufficere, si integrationes illae non in infinitum, sed tantummodo usque ad distantiam sensibilem arbitrariam, aut si mavis ad distantiam finitam dimensionibus in experimentis occurrentibus maiorem extendantur.

Alio vero defectu laborat ista theoria longe graviori, et quem quantum scimus eius cavillatores ne animadverterunt quidem. Duabus illa partibus constat. Altera stabilit aequationem generalem pro fluidi superficie libera inter differentialia partialia coordinatarum: pendet haec aequatio a vi attractiva moleculari, quam fluidi particulae in se mutuo exercent, atque haec quidem theoriae pars ita absoluta est, ut nihil essentiale desiderandum restet. Sed talis aequatio inter differentialia partialia (cuius integratio, si in analysis potestate esset, functiones arbitrarias adduceret) non sufficit ad figuram superficiei *ex asse* determinandam, quod fieri nequit, nisi conditio *nova* accedat indolem figurae in limitibus definiens Talem conditionem sistit pars altera theoriae, eam scilicet, ut angulus plani superficiem fluidi liberam in confiniis vasis tangentis (sive exactius, in limite vis sensibilis attractivae parietis vasis) cum plano parietem vasis ibidem tangente *constans* sit, puta per relationem inter intensitates virium molecularium vasis et fluidi determinatus, siquidem continuitas figurae vasis apud confinia superficiei liberae fluidi non interrumpitur. At hancce propositionem cardinalem totius theoriae per calculum demonstrare ne suscepit quidem ill. Laplace; quae enim in dissertatione priori p. 5 huc spectantia afferuntur, argumentationem vagam tantummodo exhibent et quod demonstrandum erat iam supponunt: calculi autem p. 44 sq. suscepti effectu carent. In altera quidem dissertatione ascensus fluidi in tubis capillaribus per methodum aliam tractatur, cuius summa cum methodo priori collata formulam (veram utique) suppeditat pro angulo illo inter plana tangentia. Sed notare oportet, proprie hic iam *supponi* quod angulus sit constans, praetereaque methodum, per se parum satisfacientem, restringi ad casum maxime specialem, ubi vas prismaticum est, parietesque verticales. His perpensis fateri oportet, theoriam ab ill. Laplace propositam etiamnum essentialiter mancam et incompletam esse.

Resumemus itaque ab integro theoriam figurae aequilibrii fluidorum sub actione gravitatis et virium molecularium propriarum et vasis, in quo negotio methodum prorsus diversam e primis dynamicae principiis petitam sequemur, maximamque generalitatem statim ab initio amplectemur. Haec disquisitio perducet ad insigne theorema novum, theoriam completam in unicam formulam simplicissimam contrahens, e quo utraque pars theoriae ill. Laplace sponte demanabit.

1.

Ad stabiliendam aequationem aequilibrii systematis punctorum physicorum quotcunque, quorum motus conditionibus qualibuscunque adstringuntur, maxime idoneum est principium motuum virtualium, quod sic enunciamus.

Constet systema e punctis physicis m, m', m'' etc., in quibus massae per easdem literas denotandae concentratae concipiantur. Sit P una e viribus acceleratricibus in punctum m agentibus, et dum systemati motus qualiscunque infinite parvus cum conditionibus systematis sociabilis (motus virtualis) tribui fingitur, sit $\mathrm{d}p$ motus puncti m in directionem vis P proiectus, i. e. per cosinum anguli, quem facit cum directione vis P, multiplicatus; denique sit $\Sigma P\mathrm{d}p$ aggregatum omnium similium productorum respectu omnium virium punctum m sollicitantium. Perinde repraesentet P' indefinite vires punctum m' sollicitantes, atque $\mathrm{d}p'$ motus puncti m' ad singularum directiones proiectos, similiterque de reliquis punctis. Quibus ita intellectis, conditio aequilibrii systematis consistit in eo, ut aggregatum

$$m\Sigma P\mathrm{d}p + m'\Sigma P'\mathrm{d}p' + m''\Sigma P''\mathrm{d}p'' + \text{ etc.}$$

pro quocunque motu virtuali fiat $= 0$, uti principium motuum virtualium vulgo exprimitur, vel accuratius, in eo, ut illud aggregatum pro nullo motu virtuali adipisci possit valorem positivum.

2.

Vires hic considerandae ad tria capita reducuntur.

I. Gravitas, cuius intensitatem pro singulis punctis eandem, directiones parallelas supponere licet: illam denotabimus per g.

II. Vires attractivae, quas puncta m, m', m'' etc. a se mutuo experiuntur. Intensitas attractionis functioni distantiae proportionalis sive producto huius functionis per characteristicam f denotandae in massam in puncto attrahente concentratam aequalis supponitur.

III. Vires, quibus puncta m, m', m'' etc. ad puncta quotcunque fixa attrahuntur. Pro his viribus simili modo characteristica F distantiae praefigenda utemur, et per M, M', M'' etc. tum puncta fixa, tum massas, quae in ipsis concentratae supponuntur, designabimus.

Quodsi iam distantiam inter bina puncta m, m' per hoc signum denotamus (m, m'), et perinde per (m, M) distantiam inter puncta m, M etc., nec non per z, z', z'' etc. altitudines punctorum m, m', m'' etc. supra planum horizontale arbitrarium H, has partes complexus $\Sigma P\mathrm{d}p$ habebimus:

$$\begin{aligned}
&-g\,\mathrm{d}z\\
&-m'f(m,m')\,\mathrm{d}(m,m') - m''f(m,m'')\,\mathrm{d}(m,m'') - m'''f(m,m''')\,\mathrm{d}(m,m''') - \text{etc.}\\
&-MF(m,M)\,\mathrm{d}(m,M) - M'F(m,M')\,\mathrm{d}(m,M') - M''F(m,M'')\,\mathrm{d}(m,M'') - \text{etc.}
\end{aligned}$$

ubi differentialia $\mathrm{d}(m,m')$, $\mathrm{d}(m,m'')$ etc. sunt partialia, utpote ad solum motum virtualem puncti m relatae.

Iam introducamus loco functionis f eam, per cuius differentiationem oritur, puta statuatur $-fx.\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi x$, sive $\int fx.\mathrm{d}x = -\varphi x$. Constans integrationis ad lubitum eligi potest; si placet (et si res fert), ita determinetur, ut fiat $\varphi\infty = 0$, in quo casu φt exhibebit integrale $\int fx.\mathrm{d}x$ ab $x = t$ usque ad $x = \infty$ extensum. Prorsus simili modo loco functionis F introducatur alia Φ talis, ut habeatur $-Fx.\mathrm{d}x = \mathrm{d}\Phi x$. Ita complexus $\Sigma P\mathrm{d}p$ fit $=$

$$\begin{aligned}
&-g\,\mathrm{d}z\\
&+m'\mathrm{d}\varphi(m,m') + m''\mathrm{d}\varphi(m,m'') + m'''\mathrm{d}\varphi(m,m''') + \text{etc.}\\
&+M\mathrm{d}\Phi(m,M) + M'\mathrm{d}\Phi(m,M') + M''\mathrm{d}\Phi(m,M'') + \text{etc.}
\end{aligned}$$

ubi notandum, differentialia in linea secunda esse partialia ad solum motum puncti m relata.

At manifesto quodvis harum differentialium partialium habet supplementum suum in alio complexu. Ita tum complexus $m\Sigma P\mathrm{d}p$ tum complexus $m'\Sigma P'\mathrm{d}p'$ continet differentiale partiale $mm'\mathrm{d}\varphi(m,m')$, sed quod in priori refertur ad solum motum ipsius m, in posteriori ad solum motum ipsius m'. Hinc patet, aggre-

gatum in art. 1 prolatum revera esse differentiale completum, et quidem $= \mathrm{d}\Omega$, si statuatur $\Omega =$

$$\begin{aligned}
&-gmz - gm'z' - gm''z'' - \text{etc.}\\
&+mm'\varphi(m,m') + mm''\varphi(m,m'') + mm'''\varphi(m,m''') + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad + m'm''\varphi(m',m'') + m'm'''\varphi(m',m''') + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + m''m'''\varphi(m'',m''') + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.}\\
&+mM\Phi(m,M) + mM'\Phi(m,M') + mM''\Phi(m,M'') + \text{etc.}\\
&+m'M\Phi(m',M) + m'M'\Phi(m',M') + m'M''\Phi(m',M'') + \text{etc.}\\
&+m''M\Phi(m'',M) + m''M'\Phi(m'',M') + m''M''\Phi(m'',M'') + \text{etc.}\\
&+\text{etc.}
\end{aligned}$$

Conditio aequilibrii itaque in eo consistit, ut valor functionis Ω per nullum motum virtualem accipere possit incrementum positivum, sive quod idem est, *ut Ω sit maximum.*

Functionem Ω etiam sequenti modo exhibere licet:

$$\begin{aligned}
\Omega = \Sigma m\,\{&-gz + \tfrac{1}{2}m'\varphi(m,m') + \tfrac{1}{2}m''\varphi(m,m'') + \tfrac{1}{2}m'''\varphi(m,m''') + \text{etc.}\\
&+M\varphi(m,M) + M'\Phi(m,M') + M''\Phi(m,M'') + \text{etc.}\}
\end{aligned}$$

ubi characteristica Σ repraesentat aggregatum expressionis adscriptae cum omnibus, in quas transit, dum deinceps m cum m', m'', m''' etc. permutatur.

3.

Si loco punctorum discretorum M, M', M'' etc. assumimus corpus continuum explens spatium S densitate uniformi $= C$, aggregatum

$$M\Phi(m,M) + M'\Phi(m,M') + M''\Phi(m,M'') + \text{etc.}$$

transibit in integrale $C\int\mathrm{d}S.\Phi(m,\mathrm{d}S)$ per totum spatium S extendendum, denotando secundum analogiam per $(m,\mathrm{d}S)$ distantiam puncti m a quovis spatii S elemento $\mathrm{d}S$.

At si insuper loco punctorum discretorum m, m', m'' etc. corpus continuum, spatium s densitate uniformi $= c$ explens, considerandum est, computus ipsius Ω integrationem duplicem requiret, atque ita perficiendus erit, ut primo pro puncto indefinito μ eruatur valor expressionis

$$-gz + \tfrac{1}{2}c\int \mathrm{d}s\,.\,\varphi(\mu, \mathrm{d}s) + C\int \mathrm{d}S\,.\,\Phi(\mu, \mathrm{d}S)$$

ubi z est altitudo puncti μ supra planum H, atque integrale primum per totum spatium s, secundum per totum spatium S extendendum est. Qui valor, a solo loco puncti μ pendens, si per $[\mu]$ denotatur, erit

$$\Omega = c\int \mathrm{d}s\,.[\mathrm{d}s]$$

integratione per totum spatium s extensa.

Brevius hoc ita exprimitur:

$$\Omega = -gc\int z\mathrm{d}s + \tfrac{1}{2}cc\iint \mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}s'\,.\,\varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}s') + cC\iint \mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}S\,.\,\Phi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S)$$

ubi s, s' proprie denotant unum idemque spatium (a corpore mobili expletum), sed bis in elementa sua pro duplici integratione resolvendum.

4.

Corporum fluidorum indoles characteristica consistit in perfecta mobilitate vel minimarum partium, ita ut figuram quamlibet induere possint, et vel minimae potentiae, figuram mutare nitenti, cedant. In fluidis inexpansibilibus (liquidis), quibus nostra disquisitio dicata est, volumen cuiusvis particulae constans manere debet pro omnibus figurae mutationibus. Considerando itaque corpus fluidum, cuius motus per corpus immobile solidum (vas) limitatur, et in cuius particulas praeter gravitatem agere supponimus tum attractionem partium mutuam, tum attractionem partium vasis, status aequilibrii poscet, ut valor ipsius Ω sit maximum, i.e. ut nulla transpositio infinite parva partium fluidi ipsi Ω incrementum positivum inducere possit. Quapropter quum manifesto valor ipsius Ω eatenus tantum mutari possit, quatenus figura spatii, quod totum fluidum implet, mutatur (neque vero per solum motum fluidi internum), aequilibrium aderit, quoties Ω pro nulla illius figurae mutatione infinite parva cum figura vasis conciliabili, manente volumine constante, augmentum capere potest. Sponte hinc sequitur, si figura omnino nullam mutationem assumere possit (vase fluidum undique cingente et tangente), vires illas in fluidum agentes motum internum fluidi producere non posse, sed sibi aequilibrium facere.

5.

Progredimur ad accuratiorem investigationem expressionis Ω, quae tamquam fundamentum theoriae aequilibrii fluidorum considerari debet. Incipiendo

a termino primo, sponte patet, $\int z\mathrm{d}s$ exhibere productum e volumine spatii s in altitudinem centri gravitatis eius supra planum H, adeoque $c\int z\mathrm{d}s$ productum massae, $gc\int z\mathrm{d}s$ productum ponderis fluidi in eandem altitudinem. Quodsi itaque partes fluidi praeter gravitatem alii vi non essent obnoxiae, altitudo centri gravitatis in statu aequilibrii esse deberet quam minima, unde facile colligitur, superficiei partem liberam, seu partes liberas, in uno eodemque plano horizontali esse debere, fluidum superne limitante.

6.

Evolutio termini secundi et tertii refertur ad duos casus particulares problematis generalis, ubi, propositis duobus spatiis quibuscunque, singula elementa primi spatii cum singulis elementis secundi combinari, et producta e ternis factoribus, puta e volumine elementi spatii primi, volumine elementi spatii secundi, et functione data distantiae mutuae, in summam colligi debent. Terminus secundus refertur ad casum eum, ubi ambo spatia identica sunt, tertius ad eum, ubi alterum spatium totum est extra alterum: problema completum duos alios casus complectitur, scilicet ubi vel alterum spatium est pars alterius, vel alterum cum altero partem communem habet. Quamquam vero tum duo priores casus ad institutum nostrum sufficere, tum duo reliqui ad illos facile reduci possent, tamen operae pretium erit, problema per se satis insigne generalitate completa amplecti. Spatia in hac disquisitione generali per s, S, functionem distantiae per characteristicam φ denotabimus, ita ut in applicatione ad terminum secundum loco ipsius S ipsum spatium s, in applicatione ad terminum tertium loco functionis φ ipsam Φ substituere oporteat. Agitur itaque de integrali

$$\iint \mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}S\,.\,\varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S)$$

quod speciem quidem prae se fert integrationis duplicis, sed revera, quum utriusque spatii elementa a ternis variabilibus pendeant, integrationem sextuplicem implicat, quam iam ad integrationem quadruplicem reducere docebimus.

7.

Initium facimus ab evolutione integralis $\int \mathrm{d}s\,.\,\varphi(\mu, \mathrm{d}s)$ per omnes partes spatii s extendendi, denotante μ punctum determinatum vel extra vel intra spatium s situm. Concipiatur superficies sphaerica radio $= 1$ circa centrum μ descripta, atque in elementa infinite parva divisa; sit $\mathrm{d}\Pi$ tale elementum, secetque recta a μ versus punctum huius elementi ducta superficiem spatii s deinceps in punctis p', p'', p''' etc., quorum multitudo par erit vel impar, prout μ extra vel intra spatium s iacet; distantias $\mu p', \mu p'', \mu p'''$ etc. denotabimus per r', r'', r''' etc. Ducantur porro rectae a μ versus singula puncta peripheriae elementi $\mathrm{d}\Pi$, quo pacto formabitur spatium pyramidale, atque exsecabuntur e superficie spatii s, apud puncta p', p'', p''' etc., elementa resp. per $\mathrm{d}t', \mathrm{d}t'', \mathrm{d}t'''$ etc. denotanda. Denique sit q' angulus inter rectam $p'\mu$ atque normalem in elementum $\mathrm{d}t'$ extrorsum ductam; et perinde sint q'', q''' etc. inclinationes similium normalium apud puncta p'', p''' etc. ad rectam versus μ ductam. Ita manifesto erit

$$\mathrm{d}\Pi = \pm\frac{\mathrm{d}t'.\cos q'}{r'r'} = \mp\frac{\mathrm{d}t''.\cos q''}{r''r''} = \pm\frac{\mathrm{d}t'''.\cos q'''}{r'''r'''} \text{ etc.}$$

valentibus signis superioribus vel inferioribus, prout μ est extra vel intra spatium s.

Porro patet, integrale $\int \mathrm{d}s.\varphi(\mu, \mathrm{d}s)$ pro spatii s partibus intra spatium illud pyramidale contentis haberi per integrale $\mathrm{d}\Pi.\int rr\varphi r.\mathrm{d}r$ extensum ab $r = r'$ usque ad $r = r''$, dein ab $r = r'''$ usque ad $r = r''''$ etc., si μ iaceat extra spatium s, vel extensum ab $r = 0$ usque ad $r = r'$, dein ab $r = r''$ usque ad $r = r'''$ etc., si μ iaceat intra spatium s. Quodsi itaque statuimus indefinite

$$\int rr\varphi r.\mathrm{d}r = -\psi r$$

constante integrationis ad lubitum accepta, integrale $\int \mathrm{d}s.\varphi(\mu, \mathrm{d}s)$, quatenus extenditur ad partes spatii s intra spatium illud pyramidale sitas, erit

$$\begin{aligned} &= \mathrm{d}\Pi.(\psi r' - \psi r'' + \psi r''' - \text{ etc.}) \\ &= \frac{\mathrm{d}t'.\cos q'.\psi r'}{r'r'} + \frac{\mathrm{d}t''.\cos q''.\psi r''}{r''r''} + \frac{\mathrm{d}t'''.\cos q'''.\psi r'''}{r'''r'''} + \text{ etc.} \end{aligned}$$

quoties μ iacet extra spatium s; sed

$$\begin{aligned} &= \mathrm{d}\Pi.(\psi 0 - \psi r' + \psi r'' - \psi r''' + \text{ etc.}) \\ &= \mathrm{d}\Pi.\psi 0 + \frac{\mathrm{d}t'.\cos q'.\psi r'}{r'r'} + \frac{\mathrm{d}t''.\cos q''.\psi r''}{r''r''} + \frac{\mathrm{d}t'''.\cos q'''.\psi r'''}{r'''r'''} + \text{ etc.} \end{aligned}$$

quoties μ iacet intra spatium s.

Iam si haec summatio per omnes superficiei sphaericae partes colligitur, integrale $\int \mathrm{d}s.\varphi(\mu, \mathrm{d}s)$ completum fit

$$\begin{aligned} &\text{in casu priori} &&= \int \frac{\mathrm{d}t.\cos q.\psi r}{rr} \\ &\text{in casu posteriori} &&= 4\pi\psi 0 + \int \frac{\mathrm{d}t.\cos q.\psi r}{rr} \end{aligned}$$

denotando per $\mathrm{d}t$ indefinite omnia elementa superficiei spatii s, atque per q, r eorum respectu eadem, quae antea per literas accentuatas respectu elementorum determinatorum expressa sunt, denique per π semicircumferentiam circuli pro radio $= 1$.

Ceterum facile perspicitur, si punctum μ esset neque extra spatium s neque intra, sed in ipsa eius superficie, valere formulam secundam, mutato factore 4π in 2π, siquidem superficies in puncto μ neque cuspidem neque aciem offerat; sed ad propositum nostrum haud necessarium est, ad hunc casum attendere.

8.

Per disquisitionem art. praec. evolutio integralis $\iint \mathrm{d}s.\mathrm{d}S.\varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S)$ reducitur ad

$$4\pi\sigma\psi 0 + \iint \mathrm{d}t.\mathrm{d}S.\frac{\cos q.\psi(\mathrm{d}t, \mathrm{d}S)}{(\mathrm{d}t, \mathrm{d}S)^2}$$

si per σ denotamus volumen eius spatii, quod utrique spatio s, S commune est, ita ut prior pars $4\pi\sigma\psi 0$ excidat, si spatia s, S se invicem excludunt. Restat integrale novum, specie etiamnum duplex, revera quintuplex. Quod ut ad quadruplex reducamus, considerabimus integrale

$$\int \mathrm{d}S.\frac{\cos q.\psi(\mu, \mathrm{d}S)}{(\mu, \mathrm{d}S)^2}$$

per omnia elementa spatii S extendendum, denotante iterum μ punctum determinatum, atque q angulum inter duas rectas ab hoc puncto proficiscentes, alteram versus elementum $\mathrm{d}S$, alteram fixam. Hoc integrale, specie simplex, revera triplex, iam ad aliud integrale revera duplex reducere docebimus, et quidem duobus modis prorsus diversis.

Planum per punctum μ illi rectae fixae normale, per Π denotandum, quatenus per proiectionem spatii S attingitur, in elementa infinite parva $\mathrm{d}\Pi$ divisum esse concipiatur. Per punctum talis elementi $\mathrm{d}\Pi$ ducatur recta plano Π normalis, quae deinceps, i. e. progrediendo in directione rectae fixae parallela, secet superficiem spatii S in punctis P', P'', P''' etc., quorum distantiae a puncto μ sint resp. R', R'', R''' etc. Similes rectae per omnia puncta peripheriae elementi $d\Pi$, plano ad angulos rectos, ductae, spatium prismaticum formabunt, et apud puncta P', P'', P''' etc. e superficie spatii S elementa exsecabunt, quae per dT', dT'', dT''' etc. denotamus. Denique sit χ' angulus inter duas rectas a puncto P' proficiscentes, alteram extrorsum elemento dT' normalem, alteram rectae fixae parellelam, similesque angulos apud puncta P'', P''' etc. exprimant characteres χ'', χ''' etc. Ita manifesto erit

$$d\Pi = -dT'.\cos\chi' = +dT''.\cos\chi'' = -dT'''.\cos\chi''' \text{ etc.}$$

Spatium prismaticum in elementa infinite parva $d\Pi.dz$ dividatur, denotante z distantiam puncti indefiniti a plano Π (positive acceptam ab ea parte, a qua est recta fixa); si itaque eiusdem puncti distantiam a puncto μ per r designamus, erit $z = r\cos q$, nec non (quoniam $rr - zz$ constans est) $z\,dz = r\,dr$, sive $d\Pi.dz.\cos q = d\Pi.dr$. Hinc colligitur, integrale nostrum $\int dS.\frac{\cos q.\psi(\mu, dS)}{(\mu, dS)^2}$, extensum per eas spatii S partes, quae in spatio isto prismatico continentur, obtineri per integrale $d\Pi.\int\frac{dr.\psi r}{rr}$, si extendatur ab $r = R'$ usque ad $r = R''$, dein ab $r = R'''$ usque ad $r = R''''$ etc. Quodsi itaque indefinite statuimus

$$\int\frac{dr.\psi r}{rr} = -\vartheta r$$

constante integrationis ad lubitum accepta, integrale nostrum pro partibus spatii S intra spatium prismaticum sitis erit

$$\begin{aligned}&= d\Pi.(\vartheta R' - \vartheta R'' + \vartheta R''' - \text{ etc.})\\ &= -dT'.\cos\chi'.\vartheta R' - dT''.\cos\chi''.\vartheta R'' - dT'''.\cos\chi'''.\vartheta R''' - \text{ etc.}\end{aligned}$$

Collectis his summationibus per prismata omnibus elementis $d\Pi$ respondentia, manifesto omnia elementa superficiei spatii S exhausta erunt, habebimusque completum integrale

$$\int dS.\frac{\cos q.\psi(\mu, dS)}{(\mu, dS)^2} = -\int dT.\cos\chi.\vartheta R$$

denotante dT indefinite quodvis elementum superficiei spatii S, R eius distantiam a puncto μ, atque χ angulum inter normalem ad elementum dT extrorsum directam atque rectam rectae fixae parallelam.

Hoc itaque modo integrale $\iint ds.dS.\varphi(ds, dS)$ reductum est ad formam

$$4\pi\sigma\psi 0 - \iint dt.dT.\cos\chi.\vartheta(dt, dT)$$

ubi manifesto χ indicat inclinationem mutuam elementorum dt, dT, mensuratam per inclinationem normalium utrinque extrorsum respectu spatiorum s, S ductarum, integrationesque per superficies completas utriusque spatii extendi debent.

9.

Sicuti methodus praecedens divisioni spatii S in elementa prismatica innixa est, ita methodus secunda a divisione eiusdem spatii in elementa pyramidalia petetur. Concipiatur superficies sphaerica radio $= 1$ circa centrum μ descripta atque in elementa infinite parva divisa. Versus punctum talis elementi $d\Pi$ ducatur a puncto μ recta, quae superficiem spatii S secet deinceps in punctis P', P'', P''' etc.; distantiae horum punctorum a μ denotentur per R', R'', R''' etc. Rectae a μ versus omnia puncta peripheriae elementi $d\Pi$ ductae formabunt spatium pyramidale, et apud puncta P', P'', P''' etc. e superficie spatii S elementa exsecabunt, quae per dT', dT'', dT''' etc. designamus. Denique sit Q' angulus inter rectam $P'\mu$ atque normalem in elementum dT' extrorsum ductam, et perinde sint Q'', Q''' etc. inclinationes similium normalium apud puncta P'', P''' etc. ad rectam versus μ ductam. Ita erit

$$d\Pi = \pm\frac{dT'.\cos Q'}{R'R'} = \mp\frac{dT''.\cos Q''}{R''R''} = \pm\frac{dT'''.\cos Q'''}{R'''R'''} \text{ etc.}$$

valentibus signis superioribus vel inferioribus, prout μ est extra vel intra spatium S: casus, ubi μ est in ipsa superficie spatii S, adnumerandus est casui priori vel posteriori, prout linea $\mu P'$ extra vel intra spatium S cadit.

Porro patet, pro omnibus partibus spatii S intra illud spatium pyramidale sitis angulum q constantem esse, similique proin modo ut in art. 7 deducimus, si statuatur indefinite

$$\int\psi r.dr = -\theta r$$

constante integrationis ad lubitum accepta, integrale

$$\int\frac{dS.\cos q.\psi(\mu, dS)}{(\mu, dS)^2}$$

extensum per omnes partes spatii S intra illud spatium pyramidale sitas, fore in casu priori

$$= \cos q \,.\left(\frac{\mathrm{d}T'.\cos Q'.\theta R'}{R'R'} + \frac{\mathrm{d}T''.\cos Q''.\theta R''}{R''R''} + \frac{\mathrm{d}T'''.\cos Q'''.\theta R'''}{R'''R'''} + \text{etc.}\right)$$

in posteriori vero eidem formulae adiiciendum esse terminum $\mathrm{d}\Pi.\cos q.\theta 0$.

Iam si haec summatio per omnia superficiei sphaericae elementa colligitur, integrale completum

$$\int \frac{\mathrm{d}S.\cos q.\psi(\mu, \mathrm{d}S)}{(\mu, \mathrm{d}S)^2}$$

fiet

I. in casu eo, ubi punctum μ est extra spatium S,

$$= \int \frac{\mathrm{d}T.\cos q.\cos Q.\theta R}{RR}$$

denotante $\mathrm{d}T$ indefinite omnia elementa superficiei spatii S, atque Q, R illorum respectu eadem, quae antea per literas accentuatas respectu elementorum determinatorum expressa sunt, denique q inclinationem rectae a puncto μ versus elementum $\mathrm{d}T$ ductae ad rectam nostram fixam.

II. In casu eo, ubi punctum μ est intra spatium S, adiici debet terminus

$$\theta 0.\int \mathrm{d}\Pi.\cos q$$

ubi q est inclinatio rectae a μ versus $\mathrm{d}\Pi$ ductae ad rectam fixam, integratioque per totam superficiem sphaericam extendi debet. Sed facile perspicietur, integrale istud, extensum per hemisphaerium id, pro quo q acutus est, fieri $= +\pi$, per hemisphaerium alterum autem $= -\pi$; quapropter integrale completum evanescit, valetque pro hoc casu secundo pure eadem formula, quam pro primo tradidimus. Sed aliter se habet res in casu tertio

III. quoties punctum μ est in superficie ipsa spatii S. Scilicet hic quoque adiiciendus est terminus

$$\theta 0.\int \mathrm{d}\Pi.\cos q$$

sed integratione per eas tantummodo superficiei sphaericae partes extensa, pro quibus pars initialis rectae a μ versus $\mathrm{d}\Pi$ ductae cadit intra spatium S, sive (siquidem superficies spatii S in puncto μ neque cuspidem neque aciem offert) pro quibus haec recta facit angulum obtusum cum recta superficiei spatii S in puncto μ normali extrorsumque ducta. Superest itaque, ut integrale hoc sensu acceptum eruamus.

Secent haec normalis atque recta fixa superficiem sphaericam resp. in punctis G, H, statuatur arcus $GH = k$, arcus autem inter G et punctum indefinitum superficiei sphaericae $= v$; denique sit w angulus sphaericus inter arcus k, v. Ita erit $\cos q = \cos k.\cos v + \sin k.\sin v.\cos w$, et pro $\mathrm{d}\Pi$ accipiendum erit elementum $\sin v.\mathrm{d}v.\mathrm{d}w$. Integrale autem $\int \mathrm{d}\Pi.\cos q$

$$= \iint (\cos k.\cos v + \sin k.\sin v.\cos w)\sin v.\mathrm{d}v.\mathrm{d}w$$

extendi debet a $w = 0$ usque ad $w = 360^0$, atque a $v = 90^0$ usque ad $v = 180^0$. Hoc pacto integratio prior suppeditat

$$\int 2\pi \cos k.\cos v.\sin v.\mathrm{d}v$$

ac dein posterior $-\pi \cos k$.

Ad propositum nostrum hic casus tertius eatenus tantum in considerationem venit, quatenus superficies spatiorum s, S partem quandam finitam communem habent, in qua si punctum μ reperitur, erit vel $k = 0$ vel $= 180^0$, adeoque integrale $\int \mathrm{d}\Pi.\cos q$ vel $= -\pi$ vel $= +\pi$, prout scilicet apud punctum μ spatia s, S sunt vel in eadem plaga vel in plagis oppositis respectu plani utramque superficiem tangentis.

Applicando haec ad integrale nostrum primarium $\iint \mathrm{d}s.\mathrm{d}S.\varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S)$, huius valor fit

I. quoties superficies spatiorum s, S nullam partem finitam communem habent,

$$= 4\pi\sigma\psi 0 + \iint \frac{\mathrm{d}t.\mathrm{d}T.\cos q.\cos Q.\theta(\mathrm{d}t, \mathrm{d}T)}{(\mathrm{d}t, \mathrm{d}T)^2}$$

II. quoties superficies spatiorum s, S partem finitam $= 7$ communem habent,

$$= 4\pi\sigma\psi 0 \mp \pi 7\theta 0 + \iint \frac{\mathrm{d}t.\mathrm{d}T.\cos q.\cos Q.\theta(\mathrm{d}t, \mathrm{d}T)}{(\mathrm{d}t, \mathrm{d}T)^2}$$

ubi signum superius vel inferius valet, prout spatia s, S sunt ab eadem plaga vel a plagis oppositis respectu superficiei communis 7.

III. Quoties superficies spatiorum s, S plures partes finitas discretas communes habent, sit 7 summa earum, quibus spatia s, S ab eadem plaga adiacent, $7'$ summa earum, quibus haec spatia a plagis oppositis contigua sunt, eritque integrale nostrum

$$= 4\pi\sigma\psi 0 + \pi(T'-T)\theta 0 + \iint \frac{\mathrm{d}t.\mathrm{d}T.\cos q.\cos Q.\theta(\mathrm{d}t,\mathrm{d}T)}{(\mathrm{d}t,\mathrm{d}T)^2}$$

Haec tertia formula omnes casus complecti censeri potest. Integrale duplex per omnia elementa utriusque superficiei extendi debet, denotantque q, Q angulos, quos facit recta bina elementa $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}T$ iungens cum normalibus in haec elementa extrorsum ductis, directione illius rectae illinc a $\mathrm{d}t$ versus $\mathrm{d}T$, hinc a $\mathrm{d}T$ versus $\mathrm{d}t$ accepta.

10.

Duae transformationes integralis $\int \mathrm{d}s.\mathrm{d}S.\varphi(\mathrm{d}s,\mathrm{d}S)$ in artt. 8 et 9 evolutae aequali fere concinnitate se commendant, proposito autem nostro posterior magis accommodata est. Problema generale ulterius reduci nequit, nisi ad suppositiones determinatas vel circa spatia s, S, vel circa functionem φ descendamus. Et quum functio φ originem trahat a functione f, disquisitionem ulteriorem iam superstruemus eidem hypothesi, a qua ill. Laplace profectus est, puta vires attractivas moleculares in distantiis insensibilibus tantum sensibiles esse. Cui phrasi quum aliquid vagi inhaereat, quamdiu non assignatur unitas, ante omnia observamus, vim attractivam fr, per functionem distantiae r expressam, ut cum gravitate g homogenea evadat, antea per massam aliquam multiplicari debere; iam mens illius suppositionis ea est, ut denotante M massam aliquam, qualis in experimentis occurrere potest, puta quam respectu totius terrae pro nihilo habere licet, Mfr semper maneat insensibilis respectu gravitatis, quamdiu r valorem mensuris nostris sensibilem quantumvis parvum habet, dum nihil impediat, quominus valor ipsius Mfr in distantiis insensibilibus non solum sensibilis fieri, sed adeo, decrescente ipsa r, omnes limites superare possit. Haud sane sine admiratione deprehendimus, quam gravia ex hac sola hypothesi, dum ceteroquin lex functionis fr tamquam omnino incognita spectatur, eruere liceat, characterem mathematicum prorsus peculiarem prae se ferentia: dum scilicet rebus sic stantibus praecisionem mathematicam absolutam sibi vindicare nequeunt, tamen tantam certissime praecisionem tuentur, ut per nullum experimentum ulla aberratio a veritate absoluta reperiri possit; quamprimum enim successisset, talem aberrationem ulli mensurationi subiicere, suppositio ipsa cessaret.

11.

Supponere licebit, functionem fr (et perinde functionem Fr) attractionem denotare, omissa ea parte, quae ipsi rr reciproce proportionalis phaenomenis astronomicis explicandis inservit; haec enim pars, quaecunque sit figura fluidi et vasis, in quovis puncto insensibilem tantummodo modificationem gravitati afferre valet. Crescente itaque r a valore sensibili in infinitum, fr non modo per se insensibilis erit, sed etiam citius decrescet quam $\frac{1}{rr}$. Hinc facile colligitur, etiam integrale $\int fr.\mathrm{d}r$ a valore quocunque sensibili in infinitum extensum insensibile esse, quapropter constantem integrationis $\int fr.\mathrm{d}r = -\varphi r$ ita acceptam supponemus, ut habeatur $\varphi\infty = 0$, sive ut sit φr ipse valor integralis $\int fx.\mathrm{d}x$ ab $x = r$ usque ad $x = \infty$ extensus. Hoc pacto φr pro qualibet distantia r denotat quantitatem positivam, sed insensibilem, quamdiu r sensibilis est; contra pro valore insensibili ipsius r non solum sensibilis esse, sed adeo, continuo decrescente distantia r, omnes limites superare poterit, sive secundum vulgarem loquendi modum nihil obstat, quominus sit $\varphi 0 = \infty$.

12.

Inde quod functio φr pro quovis valore sensibili ipsius r insensibilis est et crescente r continuo decrescit, statim quidem sequitur, integrale $\int rr\varphi r.\mathrm{d}r$ a valore aliquo sensibili usque ad alium maiorem extensum etiamnum insensibile manere, dummodo posterior sit intra ambitum eorum, circa quos experimenta instituere licet: sed neutiquam ex illa proprietate sola concludere fas esset, integrale insensibile manere, ad quantumvis magnum intervallum integratio extendatur. Calculi ill. Laplace ita quidem pronunciati sunt, ut talem suppositionem involvant; at dum natura functionis φr incognita est, consultius videtur, ab omnibus suppositionibus hypotheticis, quibus supersedere possumus, abstinere. Quum itaque constans integrationis $\int rr\varphi r.\mathrm{d}r = -\psi r$ arbitrio relicta sit, sufficiat nobis, eam ita electam supponere, ut fiat $\psi r = 0$ pro valore aliquo sensibili ipsius r arbitrario, sed intra ambitum dimensionum corporum, circa quae experimenta instituere licet. Hoc pacto ψr pro quovis alio eiusmodi valore semper insensibilis erit (positiva pro minori, negativa pro maiori), sed nihil hinc obstat, quominus pro valore insensibili ipsius r sensibilis evadere possit: addere tamen oportet, phaenomenorum explicationem postulare ut decrescente distantia r in infinitum, valor ipsius ψr semper maneat finitus, sive ut $\psi 0$ sit quantitas finita. Ceterum manifesto $\frac{c\psi r}{r}$ est quantitas cum gravitate g homogenea, sive $\frac{c\psi r}{g}$ linea, adeoque $\frac{c\psi 0}{g}$ linea determinata (pro natura corporum, ad quorum vires attractivas functio fr refertur), cuius magnitudinem ingentem suspicari quidem licet, sed quam in casibus determinatis vix approximative assignare valemus, saltem non absque suppositionibus hypotheticis *).

13.

Prorsus simili modo in integratione $\int\psi r.\mathrm{d}r = -\theta r$ constantem ita electam supponimus, ut fiat $\theta r = 0$ pro valore arbitrario ipsius r intra ambitum eorum, pro quibus experimenta instituere licet, quo pacto θr insensibilis erit pro quovis eiusmodi valore sensibili ipsius r, etiamsi sensibilis evadere possit pro valore insensibili. Manifesto $\frac{c\theta r}{g}$ exprimit aream figurae duarum dimensionum, adeoque $\frac{\theta r}{\psi r}$ lineam. Necessario autem $\frac{\theta 0}{\psi 0}$ est linea magnitudinis insensibilis, quod ita demonstramus. Quum ψr inde a $r = 0$ continuo decrescat, et quidem tam cito, ut iam insensibilis evaserit, quamprimum r valorem sensibilem acquisivit, valor ipsius r, pro quo fit $\psi r = \frac{1}{2}\psi 0$, insensibilis esse debet: denotetur ille per ρ. Consideremus integrale $\int(\psi 0 - \psi r)\mathrm{d}r$, quod ab $r = 0$ usque ad $r = R$ extensum fit $= R\psi 0 - \theta 0 + \theta R$. Manifesto hoc integrale maius erit, quam idem integrale ab $r = \rho$ usque ad $r = R$ extensum, atque hoc iterum maius, quam integrale $\int(\psi 0 - \psi\rho)\mathrm{d}r$ inter eosdem limites. Quare quum integrale postremum fiat $= (\psi 0 - \psi\rho)(R - \rho) = \frac{1}{2}\psi 0.(R - \rho)$, erit generaliter pro quovis valore ipsius R (maiori quam ρ)

$$R\psi 0 - \theta 0 + \theta R > \tfrac{1}{2}\psi 0.(R - \rho)$$

Iam si R denotare supponitur valorem fractionis $\frac{\theta 0}{\psi 0}$, haec relatio suppeditat

$$\theta R > \tfrac{1}{2}\psi 0.(R - \rho)$$

quod foret absurdum, si R esset quantitas sensibilis.

*) Concessa explicatione phaenomenorum lucis in systemate emanationis, refractio pendet ab attractione particularum corporis pellucidi in particulas lucis moleculari, ratioque refractionis a valore ipsius $\psi 0$, ita quidem ut habeatur

$$\frac{c\psi 0}{g} = \frac{(nn-1)kk}{8\pi^2 l}$$

denotante l longitudinem penduli per minutum secundum vibrantis, k motum luminis in vacuo intra minutum secundum, n rationem sinus anguli incidentiae ad sinum anguli refracti: hoc pacto pro aqua fit $\frac{c\psi 0}{g}$ bis millies maior quam distantia media solis a terra.

Non obstante itaque ingente magnitudine ipsius $\psi 0$, nihil impedit, quominus $\theta 0$ esse possit quantitas satis modica et cum dimensionibus corporum experimentis subiectorum comparabilis.

14.

Superest, ut quae ex hac indole functionis θ respectu integralis (I)

$$\iint\frac{\mathrm{d}t.\mathrm{d}T.\cos q.\cos Q.\theta(\mathrm{d}t,\mathrm{d}T)}{(\mathrm{d}t,\mathrm{d}T)^2}$$

sequuntur, perscrutemur. Haec investigatio inchoare debet a simpliciori, dum in alterutra superficie punctum determinatum μ consideramus atque integrale (II)

$$\int\frac{\mathrm{d}t.\cos q.\cos Q.\theta(\mu,\mathrm{d}t)}{(\mu,\mathrm{d}t)^2}$$

per totam superficiem t extendendum evolvimus. Denotant hic Q angulum inter duas rectas a puncto μ proficiscentes, alteram versus elementum $\mathrm{d}t$, alteram fixam; q vero angulum inter duas rectas a puncto elementi $\mathrm{d}t$ proficiscentes, alteram versus punctum μ, alteram elemento normalem extrorsumque directam.

Primo loco observamus, si punctum μ sit in distantia sensibili a superficie t, valores omnium $\theta(\mu,\mathrm{d}t)$ insensibiles fore: in hoc itaque casu totum integrale (II) insensibile erit. Hoc itaque integrale eatenus tantum valorem sensibilem acquirere potest, quatenus superficies t offert partes in distantia insensibili a puncto μ positas, manifestoque sufficit, integrale (II) per tales partes extendere, neglectis omnibus, quae sunt in distantiis sensibilibus.

Porro pro $\frac{\mathrm{d}t.\cos q}{(\mu,\mathrm{d}t)^2}$ restituemus $\pm\mathrm{d}\Pi$, denotante $\mathrm{d}\Pi$ in superficie sphaerica radio $= 1$ circa centrum μ descripta elementum id, in quod elementum $\mathrm{d}t$ inde a puncto μ visum proiicitur, et valente signo superiori vel inferiori, prout elementum $\mathrm{d}t$ plagam exteriorem vel interiorem puncto μ advertit. Hoc pacto integrale (II) ita exhibetur

$$\int\pm\mathrm{d}\Pi.\cos Q.\theta(\mu,\mathrm{d}t)$$

patetque, huius integralis valorem eatenus tantum sensibilem fieri posse, quatenus elementa $\mathrm{d}\Pi$ talia, quae ad distantias insensibiles $(\mu,\mathrm{d}t)$ referuntur, spatium magnitudinis sensibilis in superficie sphaerica explent.

Hinc facile colligitur, integrale nostrum, generaliter loquendo, etiam insensibile manere, quoties punctum μ iaceat in ipsa superficie t: patet enim, proiectiones omnium elementorum $\mathrm{d}t$ a puncto μ insensibiliter remotorum esse in distantia insensibili a circulo maximo, quem format in superficie sphaerica planum superficiem t in puncto μ tangens. Excipere oportet tres casus, puta

1) eum, ubi radii curvaturae superficiei t in puncto μ sunt magnitudinis insensibilis.

2) eum, ubi continuitas curvaturae in puncto μ, vel intra distantiam insensibilem ab eo interrumpitur (Conf. *Disquiss. gen. circa superficies curvas* art. 3).

3) eum, ubi superficies t offert partem aliam a puncto μ insensibiliter distantem, puta si apud hoc punctum crassities spatii s est insensibilis. Ceterum huncce casum ei, quem in art. seq. tractabimus, adnumerare licet.

15.

Superest scilicet casus, ubi punctum μ non est in superficie ipsa t, attamen in distantia insensibili ab ea: in hoc casu integrale nostrum utique valorem sensibilem habere potest, quem iam accuratius examinabimus.

Secent superficiem sphaericam recta a puncto μ normaliter in superficiem t ducta, atque recta fixa ibinde proficiscens resp. in punctis G, H; statuatur arcus $GH = k$, arcus autem inter G atque punctum indefinitum superficiei sphaericae $= v$; denique sit w angulus sphaericus inter arcus k, v. Hoc pacto pro elemento $\mathrm{d}\Pi$ accipere licet productum $\sin v.\mathrm{d}v.\mathrm{d}w$, unde scribendo brevitatis caussa r pro $(\mu, \mathrm{d}t)$, integrale (II) fit

$$= \iint \pm (\cos k.\cos v + \sin k.\sin v.\cos w)\theta r.\sin v.\mathrm{d}v.\mathrm{d}w$$

quam integrationem extendere tantummodo oportet per eas partes superficiei sphaericae, in quas distantiae insensibiles r proiiciuntur. Referuntur hae ad partem insensibilem superficiei t, quam si pro *plana* habemus, distantiamque minimam (puncto G seu valori $v = 0$ respondentem) per ρ denotamus, fit $r = \frac{\rho}{\cos v}$, sive a w independens; perfecta itaque integratione respectu variabilis w, puta a $w = 0$ usque ad $w = 360^0$, integrale fit

$$= \pm \int 2\pi\theta r.\cos k.\cos v.\sin v.\mathrm{d}v = \pm \int \frac{2\pi \cos k.\rho\rho\theta r.\mathrm{d}r}{r^3}$$

quae integratio extendenda est ab $r = \rho$ usque ad valorem sensibilem arbitrarium quantumvis parvum. Statuendo itaque generaliter

$$2rr\int \frac{\theta r.\mathrm{d}r}{r^3} = -\theta' r$$

accepta constante integrationis, ita ut fiat $\int \frac{\theta r.\mathrm{d}r}{r^3} = 0$, pro valore arbitrario sensibili intra ambitum eorum, circa quos experimenta instituere licet, erit integrale (II), neglectis insensibilibus,

$$= \pm \pi \cos k.\theta' \rho$$

Si dubium videretur, utrum fas sit, partem superficiei t intra distantiam insensibilem a puncto μ positam pro plana habere, consideremus eius loco sphaericam, et quidem sit R distantia centri sphaerae a puncto μ positive vel negative sumenda, prout centrum est in directione versus G vel in opposita. Ita erit

$$\cos v = \frac{\rho}{r}\left(1 - \frac{\rho}{2R}\right) + \frac{r}{2R}$$

$$\sin v.\mathrm{d}v = \left[\frac{\rho}{rr}\left(1 - \frac{\rho}{2R}\right) - \frac{1}{2R}\right]\mathrm{d}r$$

unde facile colligitur, integrale pro hoc casu non differre quantitate sensibili a valore prius invento $\pm \pi \cos k.\theta'\rho$, si modo R sit quantitas sensibilis. Quaecunque autem sit curvatura superficiei t in ea parte, de qua agitur, dummodo radii curvaturae non sint insensibiles, semper duae superficies sphaericae assignari poterunt, superficiem t in puncto ipsi μ proximo tangentes, intra quas t sita sit, et quarum radii sint magnitudinis sensibilis, manifestoque tunc integrale nostrum intra integralia ad illas superficies relata cadet, et proin absque errore sensibili per eandem formulam exprimetur, quae tunc tantummodo exceptionem patitur, ubi superficies t in distantia insensibili a puncto μ vel curvaturam radii insensibilis, vel aciem vel cuspidem offert.

16.

Quodsi iam ab integratione (II) ad integrale (I) progredimur, manifestum est, hoc insensibile fieri, non solum in eo casu, ubi illa pro *nullo* puncto superficiei T valorem sensibilem produxit, sed in eo quoque, ubi complexus elementorum superficiei T, pro quorum punctis integrale (II) sensibile evaserat, aream tantummodo insensibilis magnitudinis sistit. Quae si rite perpenduntur, apparebit, integrale (I) eatenus tantum valorem sensibilem acquirere posse, quatenus superficies T partem vel partes sensibilis magnitudinis contineat in distantia insensibili a superficie t positas. Quales partes quum a parallelismo cum superficie t sensibiliter deviare nequeant, pro quovis earum puncto $\cos k$ non sensibiliter differet vel a $+1$ vel a -1, prout plaga superficiei T exterior vel interior superficiei t advertitur. Quodsi itaque per τ, τ' eas partes superficiei T denotamus, quae sunt in distantia insensibili a superficie t, et quidem per τ eas, ubi plaga exterior alterius superficiei plagae interiori alterius advertitur, per τ' autem eas, ubi plagae homonymae sibi mutuo obvertuntur, denique per ρ distantiam minimam cuiusvis elementi $\mathrm{d}\tau$ vel $\mathrm{d}\tau'$ a superficie t, integrale nostrum (I) neglectis insensibilibus fit

$$= -\int \pi\theta'\rho\,.\,\mathrm{d}\tau + \int \pi\theta'\rho\,.\,\mathrm{d}\tau'$$

Manifesto hic nihil interest, utrum partes τ, τ' ad superficiem T an ad t referantur.

Hoc itaque modo iam nacti sumus solutionem completam problematis, quod in art. 6 nobis proposueramus, pro ea functionis φ indole, cui tamquam basi disquisitio principalis de figura aequilibrii fluidorum innititur, scilicet habemus

$$\iint \mathrm{d}s\,.\,\mathrm{d}S\,.\,\varphi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}S) = 4\pi\sigma\psi 0 - \pi\mathcal{T}\theta 0 + \pi\mathcal{T}'\theta 0 - \pi\int \mathrm{d}\tau\,.\,\theta'\rho + \pi\int \mathrm{d}\tau'\,.\,\theta'\rho$$

17.

Origo functionis θ' ita enunciari potest, ut sit

$$\frac{\theta' r}{rr} = \int \frac{2\theta x\,.\,\mathrm{d}x}{x^3}$$

sumto integrali ab $x = r$ usque ad valorem constantem sensibilem arbitrarium, quem hic per R denotamus. Manifesto hoc integrale minus erit quam hoc $\int \frac{2\theta r\,.\,\mathrm{d}x}{x^3}$ inter eosdem limites, quod est $= \frac{\theta r}{rr} - \frac{\theta r}{RR}$, adeoque a potiori minus quam $\frac{\theta r}{rr}$. Quum autem indefinite habeatur

$$\int \frac{2\theta x\,.\,\mathrm{d}x}{x^3} = -\frac{\theta x}{xx} + \int \frac{\mathrm{d}\theta x}{xx} = -\frac{\theta x}{xx} - \int \frac{\psi x\,.\,\mathrm{d}x}{xx}$$

erit

$$\frac{\theta' r}{rr} = \frac{\theta r}{rr} - \frac{\theta R}{RR} - \int \frac{\psi x\,.\,\mathrm{d}x}{xx}$$

sumto integrali inter eosdem limites, quod minus erit quam integrale $\int \frac{\psi r\,\mathrm{d}x}{xx}$, adeoque etiam minus quam $\frac{\psi r}{r}$; quocirca valor ipsius $\frac{\theta' r}{rr}$ maior erit quam

$$\frac{\theta r}{rr} - \frac{\theta R}{RR} - \frac{\psi r}{r}$$

Cadit itaque $\theta' r$ inter limites

$$\theta r \text{ atque } \theta r - rr\,.\,\frac{\theta R}{RR} - r\psi r$$

quorum differentia, decrescente r in infinitum, manifesto quavis quantitate assignabili minor evadere potest, quum supponamus esse vel $\psi 0$ quantitatem finitam. Colligimus hinc, statui debere $\theta' 0 = \theta 0$. Patet itaque, in formula, ad quam in art. praec. pervenimus, terminum $-\pi\mathcal{T}\theta 0$ tamquam sub termino $-\pi\int \mathrm{d}\tau\,.\,\theta'\rho$, atque terminum $\pi\mathcal{T}'\theta 0$ tamquam sub termino $\pi\int \mathrm{d}\tau'\,.\,\theta'\rho$ comprehensum considerari posse, si distinctionem, quam inter distantiam insensibilem et distantiam nullam fecimus, tolleremus, atque partes $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ resp. partibus τ, τ' adnumeraremus. Sed quamquam hoc modo solutionis elegantia sensu mathematico augeretur, tamen ad propositum nostrum praestat, distinctionem illam conservare.

18.

In applicatione disquisitionis praecedentis ad evolutionem termini secundi expressionis Ω art. 3, spatium secundum inde ab art. 6 per S denotatum cum primo identicum est; quae itaque in art. 16 erant σ, $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$, hic erunt s, t, 0, si t denotat totam superficiem spatii s a fluido impleti. Quapropter quoties hoc spatium neque partes sensibilis extensionis sed insensibilis crassitiei continet, neque eiusmodi interstitia (fissuras), pars secunda expressionis Ω fit

$$= \tfrac{1}{2}\pi cc(s\psi 0 - t\theta 0)$$

Exceptiones itaque adsunt duae:

1) Si spatium s continet partem insensibilis crassitiei, huius superficies duas partes sensibiliter aequales offeret, quarum alterutra per t' denotata, crassitieque spatii apud quodvis elementum $\mathrm{d}t'$ indefinite per ρ, accedet expressioni praecedenti terminus

$$\pi cc\int \theta'\rho\,.\,\mathrm{d}t'$$

2) Si spatium s continet cavitatem insensibilis crassitiei, accedet similis terminus, puta $\pi cc\int \theta'\rho\,.\,\mathrm{d}t''$, denotante t'' alterutram partem superficiei t fissurae contiguam, atque ρ indefinite crassitiem fissurae in quovis puncto.

In evolutione termini tertii expressionis Ω signum S retinendum erit, ut denotet spatium a vase repletum, sed loco characteristicae f characteristicam F

ad vim attractivam molecularum vasis relatam substituere oportebit. et perinde loco functionum per characteristicas $\varphi, \psi, \theta, \theta'$ denotatarum alias per characteristicas $\Phi, \Psi, \Theta, \Theta'$ denotandas adhibere, quas perinde ab F pendere supponimus ut illas ab f. Quae in disquisitione generali erant σ, τ', hic manifesto erunt 0: pro τ vero hic simpliciter literam T adoptabimus, ut indicet non superficiem totam spatii S, sed eam partem, quae fluido contigua est. Hoc pacto pars tertia expressionis Ω fit, generaliter loquendo,

$$= \pi c C T \Theta 0$$

exceptis etiam hic duobus casibus, puta

3) Si apud partem sensibilem T' superficiei T fluidum crassitiem insensibilem habet, indefinite per ρ exprimendam, accedet terminus

$$-\pi c C \int \Theta' \rho . \mathrm{d} T'$$

4) Si superficies vasis praeter partem T fluido contiguam, offert aliam T'' in distantia quidem sed insensibili a fluido positam, accedet, denotante ρ indefinite hanc distantiam pro quolibet puncto, terminus

$$+\pi c C \int \Theta' \rho . \mathrm{d} T''$$

Superfluum foret, exceptioni primae, quatenus sub tertia non continetur, nec non secundae vel quartae immorari: etiamsi enim aequilibrium fluidi in casibus quibusdam huc referendis, attamen maxime specialibus, locum habere queat, tale aequilibrium nec stabile neque experimentis accessibile esse posset. Contra casus exceptus primus, quatenus sub tertio continetur, utique theoriae essentialis est, verumtamen aliquantisper hic seponetur, ut conditiones aequilibrii, quatenus absque cute fluidi insensibili, vasi adhaerente, consistere potest, explorentur.

Dum itaque omnes has exceptiones seponimus, expressio, cuius valor in statu aequilibrii maximum esse debet, haec erit

$$-gc\int z \mathrm{d}s + \tfrac{1}{2} ccs\psi 0 - \tfrac{1}{2}\pi cct\theta 0 + \pi c C T \Theta 0$$

et quum in omnibus mutationibus, quas figura fluidi subire potest, spatium s invariatum maneat, expressio sequens

$$\int z \mathrm{d}s + \frac{\pi c \theta 0}{2g} . t - \frac{\pi C \Theta 0}{g} . T$$

in statu aequilibrii *minimum* esse debebit.

Iam supra monuimus, $\frac{c\theta 0}{g}$ exhibere spatium duarum dimensionum, idemque de $\frac{C\Theta 0}{g}$ valet. Statuendo itaque

$$\frac{\pi c \theta 0}{2g} = \alpha\alpha, \quad \frac{\pi C \Theta 0}{2g} = \beta\beta$$

erunt α, β lineae constantes a relatione gravitatis ad intensitatem virium, quas partes fluidi a se mutuo et a moleculis vasis patiuntur, pendentes; et si porro partem liberam superficiei fluidi, i. e. eam, quae vasi non est contigua, per U denotamus, ut habeatur $t = T + U$, minimum esse debet in statu aequilibrii expressio sequens, abhinc per W denotanda:

$$\int z \mathrm{d}s + (\alpha\alpha - 2\beta\beta) T + \alpha\alpha U$$

19.

Antequam quae ex hoc theoremate gravissimo sequuntur generaliter et complete evolvamus, operae pretium erit ostendere, quanta facilitate phaenomenon principale tuborum capillarium inde demanet.

Consideremus fluidum in aequilibrio in vase bicrurali, ita ut pars superficiei liberae fluidi sit in primo crure, pars alia in secundo: parietes vasis in confiniis harum partium verticales supponimus. Sit a area sectionis horizontalis internae primi cruris (vel exactius proiectionis horizontalis superficiei liberae fluidi in primo crure), b eiusdem peripheria, denique ah volumen fluidi in hoc crure, pariete verticali deorsum usque ad planum, a quo numerantur distantiae z, continuato, sive, quod eodem redit, h altitudo media fluidi supra hoc planum: similia denotentur pro secundo crure per literas a', b', h'. Si statum fluidi mutationem infinite parvam subire concipimus, et quidem talem, ut utraque superficiei liberae pars figuram suam servet, variatio partis primae expressionis W, puta integralis $\int z \mathrm{d}s$, manifesto erit

$$= ah\mathrm{d}h + a'h'\mathrm{d}h$$

variatio ipsius T autem

$$= b\mathrm{d}h + b'\mathrm{d}h'$$

denique per hyp $\mathrm{d}U = 0$. Hinc colligitur

$$\mathrm{d}W = ah\mathrm{d}h + a'h'\mathrm{d}h' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)(b\mathrm{d}h + b'\mathrm{d}h')$$

Porro quum volumen integrum fluidi invariatum maneat, erit

$$a\,\mathrm{d}h + a'\mathrm{d}h' = 0$$

et proin

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}h[a(h-h') - (2\beta\beta - \alpha\alpha)(b - \tfrac{ab'}{a'})]$$

Conditio itaque, ut W in statu aequilibrii sit minimum, perducit ad aequationem, phaenomenon principale tuborum capillarium implicantem

$$h - h' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)(\tfrac{b}{a} - \tfrac{b'}{a'})$$

sponteque patet, huic aequationi revera respondere valorem *minimum* ipsius W, quum valor ipsius $\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}W}{\mathrm{d}h^2}$ fiat $= a + \frac{aa}{a'}$, i. e. natura sua positivus.

Crus secundum priori largius pronunciatur, si quotiens $\frac{a'}{b'}$ est maior quam $\frac{a}{b}$; fluidum itaque in crure arctiori magis depressum vel magis elevatum erit quam in largiori, prout quadratum $\beta\beta$ minus vel maius est quam $\frac{1}{2}\alpha\alpha$; et si forte haberetur $\beta\beta = \frac{1}{2}\alpha\alpha$, altitudo in utroque crure eadem foret. Si crus secundum tam largum est, ut $\frac{b'}{a'}$ negligi possit prae $\frac{b}{a}$, erit proxime

$$h - h' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b}{a}$$

In tubis itaque capillaribus cylindricis fluidi depressio vel elevatio diametro tubo reciproce proportionalis est. Haec omnia tum cum experientia tum cum iis, quae ill. Laplace per theoriam stabilire conatus est, conveniunt.

Si vas pluribus cruribus verticalibus inter se communicantibus instructum est, designent a'', b'', h'' pro tertio, a''', b''', h''' pro quarto etc. eadem, quae a, b, h pro primo, eritque etiam

$$h - h'' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)(\tfrac{b}{a} - \tfrac{b''}{a''})$$
$$h - h''' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)(\tfrac{b}{a} - \tfrac{b'''}{a'''})$$

Concinnius hae aequationes ita exhibentur:

$$h - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b}{a} = h' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'}{a'} = h'' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b''}{a''} = h''' - (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'''}{a'''} \text{ etc.}$$

Quum planum horizontale, a quo altitudines numerantur, arbitrarium sit, patet, si illud ita assumatur, ut sit

$$h = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b}{a}$$

etiam in reliquis cruribus fore

$$h' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'}{a'}, \quad h'' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b''}{a''}, \quad h''' = (2\beta\beta - \alpha\alpha)\frac{b'''}{a'''} \text{ etc.}$$

Hocce planum, cuius conceptum infra generalius stabiliemus, vocari potest planum horizontale normale (plan de niveau). Supponendo (si opus est) parietes verticales singulorum crurium usque ad hoc planum productos, $ah, a'h', a''h''$ etc. expriment, pro $2\beta\beta > \alpha\alpha$, quantitates fluidi in singulis cruribus supra hoc planum elevati, vel pro $2\beta\beta < \alpha\alpha$, quantitates fluidi infra hoc planum in singulis cruribus deficientis: hae itaque quantitates aequales sunt productis ex area constante $2\beta\beta - \alpha\alpha$ in circumferentias b, b', b'', b''' etc.

20.

Superest iam, ut e theoremate art. 18 indolem figurae aequilibrii determinemus, cuius negotii cardo vertitur in evolutione generali variationis, quam expressio W patitur, dum figura spatii a fluido impleti mutationem quamcunque infinite parvam subit. Sed quum calculus variationum integralium duplicium pro casu, ubi etiam limites tamquam variabiles spectari debent, hactenus parum excultus sit, hanc disquisitionem subtilem paullo profundius petere oportet.

Considerabimus superficiei, quae spatium s a reliquo spatio separat, partem U, atque quodvis illius punctum per tres coordinatas x, y, z determinari supponemus, quarum tertia sit distantia a plano horizontali arbitrario. Spectari itaque poterit z tamquam functio indeterminatarum x, y, cuius differentialia partialia secundum morem suetum, sed omissis vinculis, per

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y$$

denotabimus. In quovis superficiei puncto rectam superficiei normalem et respectu spatii s extrorsum directam concipimus, cosinusque angulorum inter hanc normalem atque rectas axibus coordinatarum x, y, z parallelas per ξ, η, ζ denotamus. Hoc pacto erit

$$\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\xi}{\zeta}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{\eta}{\zeta}$$

Limes superficiei U erit linea in se rediens, quam per P denotamus, et dum motu continuo descripta supponitur, eius elementa $\mathrm{d}P$ (perinde ut elementa superficiei $\mathrm{d}U$) semper positive accipiemus. Cosinus angulorum, quos directio elementi $\mathrm{d}P$ facit cum axibus coordinatarum x, y, z, per X, Y, Z denotamus: ne vero sensus directionis ambiguus maneat, hanc ita decernimus, ut ipsa primo loco, directio normalis in elementum $\mathrm{d}P$ superficiem U tangentis et huius respectu introrsum ductae secundo loco, denique normalis in superficiem respectuque spatii s extrorsum ducta tertio loco, constituant systema trium rectarum similiter deinceps sitarum, ut axes coordinatarum x, y, z. Ita facile perspicietur (cf. *Disquiss. gen. circa superficies curvas* art. 2), cosinus angulorum inter directionem illam secundam atque axes coordinatarum x, y, z esse resp.

$$\eta^0 Z - \zeta^0 Y, \quad \zeta^0 X - \xi^0 Z, \quad \xi^0 Y - \eta^0 X$$

si ξ^0, η^0, ζ^0 sint valores ipsarum ξ, η, ζ pro puncto elementi $\mathrm{d}P$.

21.

His ita praeparatis supponamus, superficiem U pati mutationem qualemcunque infinite parvam. Si sufficeret, tales tantummodo mutationes considerare, pro quibus limes P semper invariatus, vel saltem in eadem superficie verticali maneret, manifesto soli coordinatae tertiae z variationem inducere oporteret, quo pacto problema longe facilius evaderet; sed quum problema maxima generalitate nobis ventilandum sit, in tali investigationis modo consideratio variabilitatis limitum in ambages incommodas concinnitatemque turbantes perduceret; quamobrem praestabit, statim ab initio omnes tres coordinatas variationi subiicere. Rem itaque sic imaginabimur, ut cuivis puncto superficiei, cuius coordinatae sunt x, y, z, substituamus aliud, cuius coordinatae sint $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, ubi $\delta x, \delta y, \delta z$ spectari possunt tamquam functiones indeterminatae ipsarum x, y, sed quarum valores manent infinite parvae. Inquiramus nunc in variationes singulorum elementorum expressionis W, et quidem initium faciamus a variatione ipsius elementi $\mathrm{d}U$.

Concipiamus elementum superficiei U triangulare $\mathrm{d}U$ inter puncta, quorum coordinatae sint

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z \\ x+\mathrm{d}x, & y+\mathrm{d}y, & z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y \\ x+\mathrm{d}'x, & y+\mathrm{d}'y, & z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y \end{array}$$

Area duplex huius trianguli per principia nota invenitur

$$= (\mathrm{d}x.\mathrm{d}'y - \mathrm{d}y.\mathrm{d}'x)\sqrt{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]}$$

si, quod licet, supponimus, $\mathrm{d}x.\mathrm{d}'y - \mathrm{d}y.\mathrm{d}'x$ esse quantitatem positivam.

In superficie variata loco illorum punctorum tria alia habebimus, quorum coordinatae erunt

puncti primi $\quad x+\delta x, \quad y+\delta y, \quad z+\delta z$

puncti secundi

$$\begin{array}{l} x+\mathrm{d}x+\delta x+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y \\ y+\mathrm{d}y+\delta y+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y \\ z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y+\delta z+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}y \end{array}$$

puncti tertii

$$\begin{array}{l} x+\mathrm{d}'x+\delta x+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y \\ y+\mathrm{d}'y+\delta y+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y \\ z+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y+\delta z+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}'x+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}.\mathrm{d}'y \end{array}$$

Area duplex trianguli inter haec puncta invenitur per eandem methodum

$$= (\mathrm{d}x.\mathrm{d}'y - \mathrm{d}y.\mathrm{d}'x)\sqrt{N}$$

si brevitatis caussa per N denotatur aggregatum

$$\begin{array}{l} \left[\left(1+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right)\left(1+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right)-\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}.\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right]^2 \\ +\left[\left(1+\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right)-\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)\right]^2 \\ +\left[\left(1+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right)\right]^2 \end{array}$$

Facta evolutione et reiectis quantitatibus secundi ordinis, invenitur

$$\sqrt{N} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]}.\left[1+\frac{L}{1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2}\right]$$

si brevitatis gratia per L denotatur aggregatum

$$\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2\right]-\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}-\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

Est itaque ratio trianguli primi ad secundum ut 1 ad

$$1+\frac{L}{1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2}$$

adeoque independens a figura trianguli $\mathrm{d}U$, resultatque

$$\delta\,\mathrm{d}U=\frac{L\,\mathrm{d}U}{1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2}$$

sive in terminis explicitis

$$\delta\,\mathrm{d}U=\mathrm{d}U\left(\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}(\eta\eta+\zeta\zeta)-\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}.\xi\eta-\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}.\xi\eta+\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}(\xi\xi+\zeta\zeta)-\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}.\xi\zeta-\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}.\eta\zeta\right)$$

22.

Variationem totius superficiei U obtinebimus per integrationem huius expressionis per omnia elementa $\mathrm{d}U$ extendendam. Ad hunc finem duas huius integralis partes, puta

$$\int\mathrm{d}U.\left((\eta\eta+\zeta\zeta)\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}-\xi\eta\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}-\xi\zeta\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)=A$$

atque

$$\int\mathrm{d}U\left(-\xi\eta\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}y}+(\xi\xi+\zeta\zeta)\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}y}-\eta\zeta\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right)=B$$

seorsim tractabimus.

Concipiatur planum axi coordinatarum y normale, et quidem tale, ut valor determinatus ipsius y, ei competens, sit intra ambitum valorum extremorum, quos habet y in superficie U. Hoc planum peripheriam P secabit vel in duobus, vel in quatuor, vel in sex etc. punctis, quorum coordinatae primae sint deinceps x^0, x', x'' etc.; perinde reliquae quantitates ad haec puncta pertinentes per indices distinguantur. Eodem modo secetur superficies per aliud planum illi infinite propinquum et parallelum, cui competat coordinata secunda $y+\mathrm{d}y$; inter haec plana reperientur elementa peripheriae $\mathrm{d}P^0, \mathrm{d}P', \mathrm{d}P''$ etc., perspicieturque facile, haberi

$$\mathrm{d}y=-Y^0\mathrm{d}P^0=+Y'\mathrm{d}P'=-Y''\mathrm{d}P''=+Y'''\mathrm{d}P''' \text{ etc.}$$

Si insuper concipimus infinite multa plana axi coordinatarum x normalia, cuivis elemento $\mathrm{d}x$ inter x^0 et x', vel inter x'' et x''' etc. sito respondebit elementum $\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}{\zeta}$, unde patet, eam partem integralis A, quae respondet parti superficiei inter plana $y, y+\mathrm{d}y$ sitae, haberi ex integratione

$$\mathrm{d}y\int\mathrm{d}x.\left(\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}.\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}x}-\frac{\xi\eta}{\zeta}.\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}-\xi\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right)$$

extensa ab $x=x^0$ usque ad $x=x'$, dein ab $x=x''$ usque ad $x=x'''$ etc. Indefinite vero hoc integrale exhibetur per

$$\left(\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}.\delta x-\frac{\xi\eta}{\zeta}.\delta y-\xi\delta z\right)\mathrm{d}y-\mathrm{d}y\int\left(\delta x.\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta y.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta z.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x$$

unde colligitur, prodire pro casu nostro

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\eta^0\eta^0+\zeta^0\zeta^0}{\zeta^0}.\delta x^0-\frac{\xi^0\eta^0}{\zeta^0}.\delta y^0-\xi^0\delta z^0\right)Y^0\mathrm{d}P^0\\
&+\left(\frac{\eta'\eta'+\zeta'\zeta'}{\zeta'}.\delta x'-\frac{\xi'\eta'}{\zeta'}.\delta y'-\xi'\delta z'\right)Y'\mathrm{d}P'\\
&+\left(\frac{\eta''\eta''+\zeta''\zeta''}{\zeta''}.\delta x''-\frac{\xi''\eta''}{\zeta''}.\delta y''-\xi''\delta z''\right)Y''\mathrm{d}P''\\
&+\text{etc.}\\
&-\int\zeta\,\mathrm{d}U.\left(\delta x.\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta y.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta z.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)
\end{aligned}$$

sive, quod idem est,

$$\Sigma\left(\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}.\delta x-\frac{\xi\eta}{\zeta}.\delta y-\xi\delta z\right)Y\mathrm{d}P-\int\zeta\,\mathrm{d}U.\left(\delta x.\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta y.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta z.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)$$

ubi tum summatio per omnia elementa $\mathrm{d}P$, tum integratio per omnia elementa $\mathrm{d}U$, intra plana y et $y+\mathrm{d}y$ sita, extendenda est.

Tota itaque quantitas A exprimetur per

$$\int\left(\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}.\delta x-\frac{\xi\eta}{\zeta}.\delta y-\xi\delta z\right)Y\mathrm{d}P-\int\zeta\,\mathrm{d}U.\left(\delta x.\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta y.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}-\delta z.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right)$$

ubi integrationem priorem per totam peripheriam P, posteriorem per totam superficiem U extendere oportet.

23.

Per ratiocinia prorsus similia invenimus

$$B = \int\left(\frac{\xi\eta}{\zeta}.\delta x - \frac{\xi\xi+\zeta\zeta}{\zeta}.\delta y + \eta\delta z\right)X\,\mathrm{d}P + \int\zeta\,\mathrm{d}U\left(\delta x.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} - \delta y.\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\xi+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} + \delta z.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)$$

Statuendo itaque, pro quovis puncto peripheriae P,

$$[X\xi\eta + Y(\eta\eta+\zeta\zeta)]\delta x - [X(\xi\xi+\zeta\zeta)+Y\xi\eta]\delta y + (X\eta\zeta - Y\xi\zeta)\delta z = \zeta Q$$

nec non, pro quovis puncto superficiei U,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}\right)\zeta\delta x + \left(\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\frac{\xi\xi+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}y}\right)\zeta\,\mathrm{d}y + \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)\zeta\delta z = V$$

erit tandem

$$\delta U = \int Q\,\mathrm{d}P + \int V\,\mathrm{d}U$$

ubi integratio prima per totam peripheriam P, secunda per totam superficiem U extendi debet.

24.

Formulas pro Q et V modo allatas notabiliter contrahere licet. Et quidem, adiumento aequationis $X\xi + Y\eta + Z\zeta = 0$, Q statim induit formam symmetricam sequentem:

$$Q = (Y\zeta - Z\eta)\delta x + (Z\xi - X\zeta)\delta y + (X\eta - Y\xi)\delta z$$

Quo etiam expressio pro V eruta in formam concinniorem reducatur, observamus, e formulis

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\xi}{\zeta}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{\eta}{\zeta}$$

sequi

$$\frac{\mathrm{d}\frac{\xi}{\zeta}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}\frac{\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}$$

Hinc fit

$$\frac{\mathrm{d}\frac{\xi\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}y} = \frac{\xi}{\zeta}.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} + \eta\frac{\mathrm{d}\frac{\xi}{\zeta}}{\mathrm{d}y} = \frac{\xi}{\zeta}.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} + \eta\frac{\mathrm{d}\frac{\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x}$$

Porro ex $\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$ deducimus

$$\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} + \zeta\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} = 0$$

atque hinc

$$\frac{\mathrm{d}\frac{\eta\eta+\zeta\zeta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} = \eta\frac{\mathrm{d}\frac{\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} + \frac{\eta}{\zeta}.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} = \eta\frac{\mathrm{d}\frac{\eta}{\zeta}}{\mathrm{d}x} - \frac{\xi}{\zeta}.\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$$

Substitutis his valoribus in coëfficiente ipsius δx in expressione pro V, ille fit

$$= \xi\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)$$

Prorsus simili modo coëfficiens ipsius δy in eadem expressione transit in

$$\eta\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)$$

Hoc itaque pacto nanciscimur

$$V = (\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z)\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right)$$

25.

Antequam ulterius progrediamur, significationem geometricam expressionum erutarum illustrare conveniet. Ad hunc finem directiones varias hic occurrentes intuitioni faciliori subiiciemus sequendo eum modum, quem in Disquiss. gen. circa superficies curvas introduximus, puta referendo illas ad puncta superficiei sphaericae radio $= 1$ circa centrum arbitrarium descriptae. Primo itaque directiones axium coordinatarum x, y, z denotabimus per puncta (1), (2), (3); dein directionem normalis in superficiem et respectu spatii s extrorsum ductae per punctum (4); denique directionem rectae a quolibet superficiei puncto versus ipsius locum variatum ductae, per punctum (5). Variationem loci ipsam, seu quantitatem $\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)}$, semper positive sumendam, brevitatis caussa per δe denotabimus, arcumque inter duo sphaerae puncta, ut e. g. (1) et (5), sive angulum, qui illum arcum mensurat, ita (1, 5) scribemus. Erit itaque

$$\delta x = \delta e.\cos(1,5), \quad \delta y = \delta e.\cos(2,5), \quad \delta z = \delta e.\cos(3,5)$$

Haec pro quovis superficiei puncto valent. In eius limite, seu peripheria P, duae aliae directiones accedunt. Primo directio elementi $\mathrm{d}P$, cui respondeat punctum (6); dein directio rectae huic normalis superficiem tangentis eiusque respectu introrsum ductae, cui respondeat punctum (7). Per hypothesin nostram puncta (6), (7), (4) eodem ordine iacent, ut (1), (2), (3), observetur praeterea, (4, 6), (4, 7), (6, 7) exhibere quadrantes seu angulos rectos. Ita prodeunt aequationes iam supra (art. 20) traditae

$$\eta Z - \zeta Y = \cos(1,7), \quad \zeta X - \xi Z = \cos(2,7), \quad \xi Y - \eta X = \cos(3,7)$$

formulaeque art. praec. has formas induunt:

$$\begin{aligned} Q &= -\delta e.\cos(5,7) \\ V &= \delta e.\cos(4,5).\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y}\right) \end{aligned}$$

Exprimit itaque Q translationem cuiusvis puncti peripheriae P a plano hanc tangente superficiei U normali, in plaga ab hac aversa positive sumendam; factor ipsius V autem $\delta e.\cos(4,5)$ manifesto indicat translationem cuiusvis puncti superficiei U a plano hanc tangente, positive sumendam in plaga a spatio s aversa.

Sed etiam factorem alterum ipsius V per significationem geometricam explicare licet. Habemus enim

$$\xi = -\zeta.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \quad \eta = -\zeta.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

$$\frac{1}{\zeta\zeta} = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2$$

Hinc prodit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\zeta &= \xi\zeta\zeta\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \eta\zeta\zeta\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} &= -\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}x} \\ &= -\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} + \xi\xi\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} + \xi\eta\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} \\ &= -\zeta(\eta\eta + \zeta\zeta)\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} + \xi\eta\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} &= -\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} + \eta\eta\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} + \xi\eta\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} \\ &= -\zeta(\xi\xi + \zeta\zeta)\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} + \xi\eta\zeta\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} \end{aligned}$$

et proin

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}y} = -\zeta^3\left\{\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2\right] - \frac{2\,\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\right\}$$

cuius expressionis valorem constat esse

$$= \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

denotantibus R, R' radios curvaturae extremos in puncto de quo agitur, et quidem positive accipiendos, quoties convexitas superficiei extrorsum vertitur.

26.

Examen attentum analysis nostrae inde ab art. 22 patefaciet suppositionem tacitam illi adhaerentem, scilicet quibusvis valoribus coordinatarum x, y unicum tantummodo valorem ipsius z respondere, atque valorem ipsius ζ ubique per totam superficiem U esse positivum. Nihilominus veritas theorematis finalis, ad quod analysis ista perduxit, puta (I)

$$\delta U = -\int\delta e.\cos(5,7).\,\mathrm{d}P + \int\delta e.\cos(4,5).\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\mathrm{d}U$$

ad hanc suppositionem non restringitur, sed generaliter valet. Quam generalitatem si statim ab initio amplecti voluissemus, vel quasdam ambages incurrere, vel methodum aliquantum diversam sequi oportuisset: sed ad eundem finem etiam per considerationes sequentes facile pervenire licet.

Analysis nostra manifesto independens est a suppositione, quod axis coordinatarum z est verticalis, quin potius in illa situs axium prorsus arbitrarius manet, veritasque theorematis stabilita est pro omnibus superficiebus, pro quibus complexus omnium punctorum (4) unico hemisphaerio includi potest; sufficit enim, talis hemisphaerii centrum (polum) pro (3) adoptare.

Si vero proponitur superficies huic conditioni non satisfaciens, certe in duas pluresve partes dispesci poterit, quae singulae tali conditioni satisfaciant. Iam facile perspicietur, si superficies quaedam in duas partes divisa fuerit, veritatem theorematis pro figura tota statim sequi e veritate pro singulis partibus. Constet enim figura U e partibus U', U'', sitque P' peripheria figurae U', atque P'' peripheria figurae U''; porro habeant P', P'' partem communem P''', ita ut P' constet ex P''' et P'''', P'' vero ex P''' et P''''', unde manifesto peripheria figurae U integra P constabit ex P'''' et P'''''. Ita erit quidem

$$\begin{aligned} \int\delta e.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P' &= \int\delta e.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P''' + \int\delta e.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P'''' \\ \int\delta e.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P'' &= \int\delta e.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P''' + \int\delta e.\cos(5,7)\,\mathrm{d}P''''' \end{aligned}$$

sed probe notandum, valorem integralis $\int \delta e . \cos(5,7)\,\mathrm{d}P'''$, quatenus est pars prioris integralis, exacte oppositum esse valori eiusdem integralis, quatenus est pars posterioris integralis, quum cuivis puncto lineae P''', in his duobus casibus directionibus oppositis describendae, loca puncti (7) opposita adeoque valores oppositi factoris $\cos(5,7)$ respondeant. In additione itaque hae partes sese destruunt, fitque

$$\int \delta e . \cos(5,7)\,\mathrm{d}P' + \int \delta e . \cos(5,7)\,\mathrm{d}P'' = \int \delta e . \cos(5,7)\,\mathrm{d}P$$

unde, quum habeatur $\delta U = \delta U' + \delta U''$, valor ipsius δU cum formula allata (I) conspirans sponte demanat, dum haec formula cum valoribus variationum $\delta U'$, $\delta U''$ quadrare supponitur.

Denique observamus, veritatem theorematis (I) etiam e considerationibus geometricis hauriri potuisse, et quidem facilius quam per methodum analyticam, quam tamen hic ideo praetulimus, ut occasionem, calculo variationum, pro integralibus duplicibus limitibus variabilibus inclusis parum hactenus exculto, aliquid lucis effundendi arriperemus, methodum alteram geometricam satis obviam lectori perito relinquentes.

27.

Superest, ut variationes evolvamus, quas elementa reliqua expressionis W per variationem figurae spatii s patiuntur, et primo de variatione voluminis spatii s agemus.

Resumamus duo triangula in art. 21 considerata, iungamusque laterum puncta respondentia per rectas, ut oriatur solidum, cuius loco accipere licet prisma basis $\mathrm{d}U$, altitudinis $\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z = \delta e . \cos(4,5)$; et quidem haec forma dabit altitudinem in forma positiva seu negativa, prout triangulum transpositum et proin totum solidum iacet extra vel intra spatium s. Hinc habemus (II)

$$\delta s = \int \mathrm{d}U . \delta e . \cos(4,5)$$

Porro hinc sequitur, variationem integralis $\int z\,\mathrm{d}s$ esse (III)

$$\delta \int z\,\mathrm{d}s = \int z\,\mathrm{d}U . \delta e . \cos(4,5)$$

Quod vero attinet ad variationem quantitatis T, ante omnia observamus, quum P denotet limitem communem superficierum T, U, transpositiones puncto-

rum peripheriae P satisfacere debere huic conditioni, ut loca nova in superficie spatii S maneant. Manifesto itaque per transpositionem elementi $\mathrm{d}P$, superficies T patitur mutationem $\pm\,\mathrm{d}P . \delta e . \sin(5,6)$, perspicieturque facile, generaliter loquendo signum positivum vel negativum a signo quantitatis $\cos(4,5)$ pendere. Sed concinnius haec variatio exprimitur introducendo directionem novam, quae sit in plano superficiem spatii S tangente, lineae P normalis, et respectu spatii s extrorsum ducta. Denotando per (8) punctum huic directioni respondens, variatio superficiei T a transpositione elementi $\mathrm{d}P$ oriunda erit $\mathrm{d}P . \delta e . \cos(5,8)$, sive (IV)

$$\delta T = \int \mathrm{d}P . \delta e . \cos(5,8)$$

ubi signum factoris $\cos(5,8)$ sponte decidet, utrum mutatio sit incrementum an decrementum.

Quum punctum (6) sit polus circuli maximi per puncta (7), (8) ducti, punctumque (5) iaceat in circulo maximo per puncta (6), (8) ducto, puncta (5), (7), (8) formabunt triangulum in (8) rectangulum, eritque adeo $\cos(5,7) = \cos(5,8) . \cos(7,8)$: arcus (7,8) autem est mensura anguli inter duo plana superficies spatiorum s, S in eorum intersectione P tangentia, et quidem inter eas horum planorum plagas, quae spatium vacuum includunt. Hunc angulum per i denotabimus, unde $180^0 - i$ erit angulus inter planorum plagas eas, quae spatium s continent, formulaque nostra (V)

$$\cos(5,7) = \cos(5,8) . \cos i.$$

28.

E combinatione formularum I....IV prodit variatio expressionis W

$$\delta W = \int \mathrm{d}U . \delta e . \cos(4,5) . \left[z + \alpha\alpha\left(\tfrac{1}{R} + \tfrac{1}{R'}\right)\right]$$
$$- \int \mathrm{d}P . \delta e . \cos(5.8) . (\alpha\alpha \cos i - \alpha\alpha + 2\acute{6}\acute{6})$$

ubi integrale prius extendi debet per omnia elementa $\mathrm{d}U$ partis liberae superficiei spatii s, vel partium liberarum (si forte plures separatae adsint), integrale posterius autem per omnia elementa $\mathrm{d}P$ lineae vel linearum, quae illam partem liberam, vel illas partes liberas a reliquis spatio S contiguis separant.

Iam quum in statu aequilibrii valor ipsius W debeat esse minimum, adeoque admittere nequeat mutationem negativam pro ulla mutatione infinite parva figurae fluidi, pro qua volumen s invariatum manet, i. e. pro qua $\delta s = \int \mathrm{d}U.\delta e.\cos(4,5)$ evanescit, facile perspicietur, figuram superficiei U in statu aequilibrii talem esse debere, ut in omnibus eius punctis elementum variationis δW hoc

$$\mathrm{d}U.\delta e.\cos(4,5).[z+\alpha\alpha(\tfrac{1}{R}+\tfrac{1}{R'})]$$

proportionale sit elemento variationis δs, puta quantitati $\mathrm{d}U.\delta e.\cos(4,5)$, sive quod idem est, ut fiat

$$z+\alpha\alpha(\tfrac{1}{R}+\tfrac{1}{R'}) = \text{Const.}$$

Manifesto enim, si haec proportionalitas locum non haberet, valor ipsius W decrementi capax foret per idoneam mutationem figurae superficiei U, limite P adeo invariato manente. Ceterum aequatio illa pro *tota* superficie U valet, etiamsi haec e pluribus partibus separatis constet, dummodo fluidum ipsum cohaereat.

Aequatio ista constituit theorema fundamentale primum in theoria aequilibrii fluidorum, quod iam ab ill. Laplace erutum est, sed per methodum a nostra plane diversam.

Si planum, pro quo z quantitati aequationis constanti aequalis est, et quod planum horizontale normale (plan de niveau) vocare possumus, loco eius, a quo coordinatae z numeratae erant, adoptamus, erit

$$z = -\alpha\alpha(\tfrac{1}{R}+\tfrac{1}{R'})$$

unde protinus demanant corollaria sequentia.

I. Si planum normale superficiem liberam U ullibi secat, in quovis sectionis puncto superficies necessario concavo-convexa erit, atque radius maximus convexitatis radio maximo concavitatis aequalis.

II. Supra planum normale superficies vel concavo-concava erit, vel, sicubi fuerit concavo-convexa, curvatura concava convexam superabit.

III. Infra planum normale superficies vel erit convexo-convexa, vel sicubi fuerit concavo-convexa, curvatura convexa concavam superabit.

IV. Superficies libera U nequit habere partem finitam planam nisi horizontalem et cum plano normali coincidentem.

29.

Aequatione, quam modo stabilivimus, subsistente, variatio valoris ipsius W reducitur ad

$$\delta W = -\int \mathrm{d}P.\delta e.\cos(5,8)(\alpha\alpha\cos i - \alpha\alpha + 2\beta\beta)$$

unde introducendo angulum A talem ut sit

$$\cos A = \frac{\alpha\alpha - 2\beta\beta}{\alpha\alpha} \quad \text{sive} \quad \sin\tfrac{1}{2}A = \frac{\beta}{\alpha}$$

habemus

$$\delta W = \alpha\alpha\int \mathrm{d}P.\delta e.\cos(5,8).(\cos A - \cos i)$$

integratione per totam lineam P extensa. Memores esse debemus, factorem $\cos(5,8)$ aequalem esse ipsi $\sin(5,6)$, signo positivo vel negativo affecto, prout fluidum in motu suo virtuali apud elementum $\mathrm{d}P$ vel ultra limitem P redundare, vel citra recedere concipitur. Hinc facile concludimus, in statu aequilibrii, generaliter loquendo, ubique esse debere $i = A$. Si enim in aliqua parte lineae P esset $i < A$, motus virtualis primi generis in hac parte, manente parte reliqua limitis P invariata, manifesto ipsi W variationem negativam induceret, et perinde negativa variatio ipsius W prodiret per motum virtualem fluidi secundi generis, si in ulla parte lineae P esset $i > A$: utraque igitur suppositio conditioni minimi in aequilibrio adversatur.

Hoc est theorema fundamentale secundum, quod etiam investigationibus ill. Laplace intertextum, sed e principio virium molecularium haud demonstratum videmus.

30.

Theorema art. praec. modificatione quadam eget in casu singulari, quem silentio praeterire non licet. Tacite scilicet supposuimus, superficiem vasis iuxta totum limitem P curvatura continua gaudere, ita ut in quovis huius limitis puncto *unicum* planum superficiem vasis tangens exstet. Si continuitas curvaturae in aliquo puncto singulari lineae P interrumpitur, sive cuspis ibi adsit, sive acies lineam P traiiciens, facile perspicietur, conclusionem nostram hinc non immutari; sed aliter res se habet, si continuitas curvaturae interrupta est in parte finita lineae P, i. e. si superficies vasis per partem finitam lineae P (vel adeo per totam hanc lineam) aciem offert. Tunc scilicet in quovis talis partis puncto bina plana superficiem vasis tangentia aderunt, quorum alterum refertur ad partem liberam superficiei vasis, alterum ad partem T. Retinendo itaque characterem i pro angulo inter planum prius atque planum tangens superficiem U, denotandoque per k angulum inter hoc planum et planum posterius, haud amplius erit $i+k=180^0$, sed maior minorve, prout acies est convexa vel concava. Et dum elementum variationis δW, pro motu virtuali fluidi ultra limitem P redundantis, etiamnum exprimitur per

$$\alpha\alpha \mathrm{d}P.\delta e.\sin(5,6).(\cos A-\cos i)$$

elementum illius variationis pro motu virtuali fluidi citra limitem P recedentis iam erit

$$-\alpha\alpha \mathrm{d}P.\delta e.\sin(5,6).(\cos A+\cos k)$$

Ne igitur valor ipsius W capax sit variationis negativae, requiritur, ut neque valor ipsius $\cos A-\cos i$ sit negativus, neque valor ipsius $\cos A+\cos k$ positivus, i. e. esse debet

$$\begin{array}{rll} \text{vel} & i=A, & \text{vel}\quad i>A \\ \text{atque vel} & k=180^0-A, & \text{vel}\quad k>180^0-A \end{array}$$

In statu aequilibrii itaque esse nequit $i+k<180^0$, sive, quod idem est, *in statu aequilibrii limes superficiei fluidi liberae U esse nequit, per extensionem finitam, in acie concava superficiei vasis.* Contra, quoties pars illius limitis coincidit cum acie convexa, ad aequilibrium requiritur et sufficit, ut angulus inter plana fluidum et vas tangentia sit inter limites A et $A+a$ (incl.), extra fluidum, sive inter 180^0-A et 180^0-A+a, intra fluidum mensuratus, si angulum inter duo plana superficiem vasis utrimque ab acie tangentia in quovis puncto indefinite per 180^0-a denotamus, quatenus hic angulus a plaga vasis mensuratur.

31.

Constantes $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, quarum ratio angulum A determinat, a functionibus f, F pendent, et quodammodo tamquam mensurae intensitatis virium molecularium, quas particulae fluidi et vasis exercent, considerari possunt. Si functiones istae ita comparatae sunt, ut fx, Fx sint in ratione determinata a distantia x independente, puta ut n ad N, manifesto statuere possumus

$\alpha\alpha:\beta\beta=cn:CN$, i. e. constantes $\alpha\alpha$, $\beta\beta$ erunt proportionales attractionibus, quas in eadem distantia exercent duae moleculae quoad volumen aequales, altera fluidi altera vasis. Iam quum angulus A fiat acutus, recto aequalis, obtusus, duobus rectis aequalis, prout $\beta\beta<\frac{1}{2}\alpha\alpha$, $\beta\beta=\frac{1}{2}\alpha\alpha$, $\beta\beta>\frac{1}{2}\alpha\alpha$ sed $<\alpha\alpha$, $\beta\beta=\alpha\alpha$: in sensu istius suppositionis (quae si gratuita est, tamen verisimilitudini non repugnat) dioere oportet, casum primum locum habere, quoties attractio partium fluidi mutua maior sit quam duplum attractionis partium vasis in fluidum; secundum, quoties prior attractio sit duplum posterioris; tertium, quoties prior maior quidem sit posteriori, sed minor eius duplo; denique quartum, quoties ambae attractiones sint aequales. Exemplum casus primi exhibet argentum vivum in vasibus vitreis.

32.

At quantus est valor anguli A in casu eo, ubi attractio vasis maior est quam attractio partium fluidi mutua? Valor imaginarius, quem pro $\beta\beta>\alpha\alpha$ formula $\sin\frac{1}{2}A=\frac{\beta}{\alpha}$ angulo A assignat, iam testatur, suppositionem aliquam in tali casu non admissibilem subesse. Revera quoties $\beta\beta>\alpha\alpha$, suppositio *limitationis* superficiei T cum conditione minimi respectû functionis W consistere nequit. Ubicunque enim limitem posueris, patet, si ultra hunc limitem cutem fluidi tenuissimam expansam concipias, ita ut T capiat augmentum T', et proin U augmentum huic proxime aequale, valorem functionis W assumere mutationem sensibiliter aequalem quantitati negativae $-(2\beta\beta-2\alpha\alpha)T'$; quinadeo valorem ipsius W tamdiu ulterioris diminutionis capacem manere, donec T' totam superficiem vasis reliquam occupaverit. Valor mutationis $-(2\beta\beta-2\alpha\alpha)T'$ eo magis exactus erit, quo minor crassities accipiatur, et quatenus tantummodo de valore expressionis W agitur, nihil impedit, quominus crassities usque ad evanescendum diminui concipiatur. Attamen cutis crassitiei evanescentis (probe distinguendae ab insensibili) nihil esset nisi fictio mathematica, figuraque spatii s tali fictioni accommodata revera non differret ab ea, pro qua W in casu $\beta\beta=\alpha\alpha$ valorem minimum acquirit.

Sed paullo aliter res se habet in problemate nostro physico, ubi talis cutis accessoria necessario gaudere debet certa crassitie, utut insensibili, quo aequilibrium consistere possit. Quoties talis pars adest, expressio W, uti in art. 18 docuimus, incompleta est, et denotata ea parte vasis, quam cutis tegit, per T', huiusque crassitie in quovis puncto indefinite per ρ, expressioni Ω adhuc adiiciendi erunt termini

$$\pi c c\int \vartheta'\rho\,.\,\mathrm{d}T' - \pi c C\int \Theta'\rho\,.\,\mathrm{d}T'$$

adeoque valori ipsius W hi

$$\frac{\pi C}{g}\int \Theta'\rho\,.\,\mathrm{d}T' - \frac{\pi c}{g}\int \vartheta'\rho\,.\,\mathrm{d}T'$$
$$= \int \mathrm{d}T'.\left(\frac{2\beta\beta}{\Theta 0}\,.\,\Theta'\rho - \frac{2\alpha\alpha}{\vartheta 0}\,.\,\vartheta'\rho\right)$$

Quocirca quum valor ipsius W, per accessionem istius cutis, iam acceperit mutationem $(2\beta\beta - 2\alpha\alpha)T'$, mutatio tota, ei valori ipsius W, qui omittendo cutem locum habet, adiicienda, erit

$$-2\int \mathrm{d}T'.\left[\beta\beta\left(1-\frac{\Theta'\rho}{\Theta 0}\right) - \alpha\alpha\left(1-\frac{\vartheta'\rho}{\vartheta 0}\right)\right]$$

Haec mutatio propter $\vartheta'0 = \vartheta 0$, $\Theta'0 = \Theta 0$, nulla esset pro crassitie evanescente; at quum $\vartheta'\rho$, $\Theta'\rho$, crescente crassitie ρ, citissime decrescant, et iam pro valore insensibili ipsius ρ insensibiles evadant, mutatio ista citissime versus valorem $-(2\beta\beta - 2\alpha\alpha)T'$ converget, atque pro statu aequilibrii fluidi, ne valor expressionis W correctae capax sit ulterioris diminutionis sensibilis, sensibiliter eidem aequalis esse debebit. Ceterum investigatio completa legis, quam crassities ρ sequi debet, profundiores evolutiones requireret, quibus tamen hic non immoramur, quum absque cognitione functionum f, F, a quibus functiones ϑ', Θ' pendent, nec non propter rationes in art. 34 indicandas, nimis otiosae videri possent. Ad investigationem partis substantialis fluidi, i. e. eius, cuius dimensiones omnes sensibiles sunt, sufficit, pro casu nostro, ubi $\beta\beta > \alpha\alpha$, vas in vicinia limitis partis substantialis *madefactum* concipere, i. e. cute fluida obductam, cuius crassities insensibilis quidem sit, attamen tanta, ut $\vartheta'\rho$, $\Theta'\rho$ negligi possint. Hoc pacto functio, quae in statu aequilibrii minimum esse debet, erit

$$\int z\,\mathrm{d}s - 2(\beta\beta - \alpha\alpha)(T+T') - \alpha\alpha T + \alpha\alpha U$$

ubi T, U ad solam partem substantialem fluidi referri supponuntur. Patet itaque, variationem huius functionis e mutatione virtuali figurae partis substantialis fluidi oriundam (qualis mutatio aggregatum $T+T'$ non afficit) convenire cum variatione expressionis

$$\int z\,\mathrm{d}s - \alpha\alpha T + \alpha\alpha U$$

i. e. eiusdem expressionis, quae minimum esse debet pro casu $\beta\beta = \alpha\alpha$. Hinc colligimus, figuram aequilibrii fluidi in vase, pro quo $\beta\beta > \alpha\alpha$, convenire cum figura aequilibrii eiusdem fluidi in vase, pro quo $\beta\beta = \alpha\alpha$, ea tamen differentia, ut illa in aequilibrio stricto desinere debeat in cutem crassitiei insensibilis. Ceterum ill. Laplace iam monuit, pro illo casu vas cute fluidi insensibilis crassitie obductum aequipollere vasi tali, cuius particulae vim attractivam in fluidum exerceant vi attractivae partium fluidi mutuae aequalem.

Sponte hinc sequitur modificatio, propositionibus art. 18 circa ascensum fluidorum in tubis capillaribus verticalibus adiicienda: quoties scilicet $\beta\beta > \alpha\alpha$, in formulis illic allatis $\alpha\alpha$ loco ipsius $\beta\beta$ substituere oportet.

33.

In casu eo, ubi $\beta\beta < \alpha\alpha$, madefactio vasis per cutem fluidi insensibilis crassitiei locum habere nequit, siquidem lex functionum ϑ', Θ' ea est, ut valor functionis

$$\alpha\alpha\left(1-\frac{\vartheta'\rho}{\vartheta'0}\right) - \beta\beta\left(1-\frac{\Theta'\rho}{\Theta'0}\right)$$

pro qua brevitatis caussa scribemus $Q\rho$, continuo crescat, dum ρ a valore 0 versus valorem sensibilem progreditur: manifesto enim pro tali functionis $Q\rho$ indole existentia talis cutis conditioni minimi repugnaret. Sponte illam indolem affert hypothesis, de qua in art. 31 loquuti sumus, puta ubi fx, Fx sunt in ratione determinata ab x independente, quoniam hinc etiam sequitur $\frac{\vartheta'\rho}{\vartheta'0} = \frac{\Theta'\rho}{\Theta'0}$, et proin $Q\rho = (\alpha\alpha - \beta\beta)\left(1-\frac{\vartheta'\rho}{\vartheta'0}\right)$. At si functiones f, F legem diversam sequerentur, haud impossibile esset, ut valore ipsius $\frac{\vartheta'\rho}{\vartheta'0}$ rapidius decrescente, quam valore ipsius $\frac{\Theta'\rho}{\Theta'0}$, functio $Q\rho$, intra ambitum valorum insensibilium ipsius ρ, primo fieret negativa, et postquam attigisset valorem suum minimum (i. e. extremum negativum) rursus ascenderet per valorem 0 versus limitem suum positivum $\alpha\alpha - \beta\beta$. In tali casu aequilibrium utique postularet cutem insensibilem, cuius crassities generaliter loquendo tanta esse deberet, ut $Q\rho$ haud sensibiliter discrepet a valore suo minimo. Qui si per $-\beta'\beta'$ denotatur, erit $\beta'\beta' < \beta\beta$; figura autem partis substantialis fluidi perinde determinabitur, ac si esset in vase, cuius respectu loco quantitatis $\beta\beta$ substituere oportet $\beta'\beta'$, i. e. angulus inter planum superficiem fluidi liberam in confiniis partis substantialis tangens atque parietem vasis erit $= 2 \operatorname{arc.sin} \frac{\beta'}{\alpha}$. Sed quum valde dubium sit, an talis casus in rerum natura exstet, superfluum videtur, diutius ei immorari.

34.

Alienum foret ab instituto nostro praesente, a principiis generalibus hic stabilitis ad phaenomena specialia descendere, praesertim quod illorum principiorum essentia quadrat cum theoria ea, per quam ill. Laplace aequali arte et successu permulta phaenomena in aequilibrio fluidorum conspicua iam explicavit. Vastus utique superest campus, largam messem novam pollicens: sed haec curis futuris reservata maneat. Contra e re erit, quasdam annotationes adiicere, quae vel novam lucem huic argumento affundere, vel interpretationem erroneam arcere poterunt.

I. Theoria nostra non arrogat sibi determinationem figurae aequilibrii mathematice exactam, sed acquiescit in determinatione figurae talis, a qua figura aequilibrii vera differre nequit quantitate sensibili. Errares, si hoc alicui imperfectioni theoriae tribueres, quae ex asse praestitit, quantum praestare possibile est, quamdiu lex attractionis molecularis ignoratur. In statu aequilibrii functio Ω exacte maximum esse debet, adeoque functio

$$\frac{2\pi c s \psi 0}{g} - \frac{\Omega}{g c}$$

minimum; haec autem, pro indole attractionis molecularis, non quidem exacte aequalis est functioni W, attamen insensibiliter tantum ab ea differt. Figura igitur, pro qua W fit minimum, non est exacta figura aequilibrii, sed differentia esse debet insensibilis, quatenus quidem quaelibet mutatio sensibilis istius figurae valorem sensibiliter maiorem functionis W produceret. Manifesto hinc non excluditur differentia sensibilis in curvatura superficiei, dummodo limitetur ad partem superficiei insensibilem: quapropter in figura aequilibrii exacta angulum constantem supra per A denotatum haud amplius considerare licet tamquam inclinationem superficiei fluidi ad parietem vasis in ipso contactu, sed tantummodo in distantia immensurabili a vase, sive, ut ill. Laplace recte iam monuit, inclinatio in limite sphaerae sensibilis attractionis vasis cum valore ipsius A sensibiliter coincidet.

II. Probe distinguere oportet figuram aequilibrii a figura quietis. Quoties fluidum est in statu aequilibrii, certo in eo perseverare debebit. At quoties figura fluidi aliquantum a figura aequilibrii differt, nihilominus accidere potest, ut fluidum vel in quiete permaneat, vel, si moveatur, motum iam amittat, antequam statum aequilibrii attigerit, perinde ut e. g. cubus plano horizontali tantum impositus in aequilibrio versatur, sed etiam supra planum inclinatum quiescere potest, frictione motum impediente. Ita fluidum talem statum occupans, pro quo W habet valorem minimum, certo quiescet: sed quoties est in statu ab illo diverso, puta ubi W diminutionis capax est, ex hoc statu in statum aequilibrii eatenus tantum transibit, quatenus frictio non impediverit. Hocce autem respectu duae conditiones aequilibrii essentialiter diversae sunt. Scilicet aequatio fundamentalis prior (art. 28) independens est a mutabilitate limitis P, i. e. ad conditionem minimi tunc quoque necessaria, ubi hic limes invariabilis supponitur: quapropter, quatenus quidem fluidum perfecta fluiditate gaudet, ut pars una supra alteram libere gliscere possit, dum vel minima vis motum postulat, fluidum necessario illi conditioni se accommodabit. Longe vero alia est ratio principii secundi (art. 29), quod essentialiter pendet a perfecta limitis P mobilitate in superficie vasis. Conditio minimi in valore ipsius W utique postulat aequationem $i = A$: si vero, postquam superficies fluidi priori quidem principio se accommodavit, angulus i nondum assequutus est valorem normalem, neque adeo W valorem absolute minimum, transitus in statum aequilibrii perfecti fieri nequit absque translocatione limitis P, sive absque motu fluidi in contactu cum vase, quali motui utique obstare potest frictio. Hinc manifestum est, cur in experimentis circa eadem corpora institutis tantas differentias in valore anguli i offendamus. Perinde in casu eo, ubi $\beta\beta > \alpha\alpha$, fluidum in vase, cuius parietes iam sunt madefacti, utique se componet ad legem aequilibrii, secundum quam pro parte substantiali fluidi esse debet $i = 180^0$: sed in vase, cuius parietes extra fluidum etiamnum sunt sicci, fluidum a statu non aequilibrato proficiscens parietesque vasis siccas invadens iam ad quietem pervenire poterit, antequam angulus i valorem 180^0 attigit. Hinc simul elucet ratio, cur phaenomena capillaria fluidorum talium, quae madefactioni non adversantur, in tubis siccis tantas irregularitates offerant, ascensumque saepissime longe minorem, quam in tubis iam humectatis, ubi consensum pulcherrimum cum theoria semper aspicimus.

III. Ratio constantium α, β e phaenomenis derivari nequit, quoties β est maior quam α: figura enim eiusdem fluidi in vasibus forma aequalibus materia diversis pro isto casu non differt nisi respectu cutis immensurabilis vas madefacientis. Quoties autem β minor est quam α, determinatio rationis inter has constantes possibilis quidem est adiumento anguli i, sed propter rationes modo allatas magnam praecisionem vix feret. Pro mercurio in vasibus vitreis ill. LAPLACE statuit angulum $i = 43^0\,12'$.

Longe maioris praecisionis capax est determinatio constantis α, praesertim si vasibus madefactionem admittentibus uti licet. Pro aqua sub temperatura 8,5 graduum thermometri centesimalis statuere oportet secundum experimenta ab ill. LAPLACE citata *)

$$\alpha\alpha = 7{,}5675 \text{ millim. quadr., sive}$$
$$\alpha = 2{,}7509 \text{ millim.}$$

Pro spiritu vini, cuius pondus specificum $= 0{,}81961$, sub eadem temperatura

$$\alpha\alpha = 3{,}0441 \text{ millim. quadr., sive}$$
$$\alpha = 1{,}7447 \text{ millim.}$$

Pro oleo terebinthino sub temperatura 8 graduum

$$\alpha\alpha = 3{,}305 \text{ millim. quadr., sive}$$
$$\alpha = 1{,}818 \text{ millim.}$$

Pro mercurio, sub temperatura 10 graduum, statuere licet, donec experimenta nova maiorem praecisionem suppeditaverint,

$$\alpha\alpha = 3{,}25 \text{ millim. quadr., sive}$$
$$\alpha = 1{,}803 \text{ millim.}$$

Ceterum verisimile est, temperaturam eatenus tantum valorem constantis $\alpha\alpha$ afficere, quatenus densitas inde pendet, cui itaque in hac hypothesi valor ipsius $\alpha\alpha$ proportionalis erit.

*) Observare convenit, quantitatem ab ill. LAPLACE per H denotatam convenire cum nostro $\pi c\vartheta_0$, adeoque α apud illum auctorem idem denotare, quod in signis nostris est $\frac{g}{\pi c\vartheta_0}$ sive $\frac{1}{2\alpha\alpha}$.

Valores isti conclusi sunt ex ascensione vel depressione fluidorum in tubis capillaribus: attamen valde difficile est, horum diametros exacte mensurare, difficilius, de forma circulari sectionis transversalis certitudinem acquirere. Longe maiorem praecisionem pollicentur experimenta circa diametros et volumina magnarum guttarum mercurii tabulae horizontali vel curvaturae perparvae notae insidentium, qualia iam instituerunt physici SEGNER et GAY-LUSSAC: nec non, pro liquidis vasa vitrea madefacientibus, experimenta circa dimensiones bullarum magnarum aeris in vasibus superne operculo madefacto plano horizontali vel parum et secundum radium notum curvato clausis, ad quae instituenda physicos invitamus.

IV. Ne limites huic commentationi praescriptos excederemus, applicationem principiorum nostrorum generalium hocce quidem loco ad casum simplicissimum restringere oportuit, ubi liquidum unicum in vase firmo consideratur. Nihil vero obstat, quominus theoriae summa generalitas concilietur, ita ut etiam problema plurium liquidorum in eodem vase, nec non casum eum amplectatur, ubi insuper corpora rigida, vel omnino vel ex parte libera, fluido immersa sunt. Sed harum quaestionum uberiorem expositionem ad aliam occasionem nobis reservare debemus.

INTENSITAS
VIS MAGNETICAE TERRESTRIS
AD MENSURAM ACSOLUTAM REVOCATA.

COMMENTATIO

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

IN CONSESSU SOCIETATIS MDCCCXXXII. DEC. XV. RECITATA.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VIII.
Gottingae MDCCCXLI.

INTENSITAS

VIS MAGNETICAE TERRESTRIS

AD MENSURAM ABSOLUTAM REVOCATA.

Ad determinationem completam vis magneticae telluris in loco dato tria elementa requiruntur: declinatio seu angulus inter planum in quo agit atque planum meridianum; inclinatio directionis ad planum horizontale; denique tertio loco intensitas. Declinatio, quae respectu omnium applicationum ad usus nauticos atque geodaeticos tamquam elementum primarium consideranda est, statim ab initio observatores atque physicos exercuit, qui etiam inclinationi curas assiduas iam per saeculum dicaverunt. Contra elementum tertium, intensitas, licet aeque dignum scientiae obiectum, usque ad tempora recentiora penitus neglectum mansit. Illustri Humboldt inter tot alias ea quoque laus debetur, quod primus fere huic argumento animum advertit, inque itineribus suis magnam copiam observationum circa intensitatem relativam magnetismi terrestris congessit, e quibus continuum incrementum huius intensitatis, dum ab aequatore magnetico versus polum progredimur, innotuit. Permulti physici, vestigiis huius naturae scrutatoris insistentes, iam tantam determinationum copiam contulerunt, ut clarissimus et de magnetismo terrestri meritissimus vir, Hansteen, specimen mappae universalis lineas isodynamicas exhibentis nuper iam edere potuerit.

Methodus, qua in hoc negotio utuntur, consistit in observatione temporis, per quod eadem acus magnetica in locis diversis numerum oscillationum eundem perficit, seu numeri oscillationum in temporis intervallo eodem, intensitasque quadrato numeri oscillationum in tempore dato proportionalis ponitur: hoc modo inter se comparantur intensitates totales, dum acus inclinatoria in centro gravitatis suspensa circa axem horizontalem ad meridianum magneticum normalem oscillat, seu intensitates vis horizontalis, dum acus horizontalis circa axem verticalem vibratur: posterior observandi modus maiorem praecisionem fert, et quae inde resultant, cognitis inclinationibus, facile ad intensitates totales reducuntur.

Manifesto nervus huius methodi pendet a suppositione, distributionem magnetismi liberi in particulis acus ad talem comparationem adhibitae in singulis experimentis invariatam mansisse: si enim vis magnetica acus lapsu temporis aliquantulam debilitationem passa esset, ob id ipsum postea tardius oscillaret, observatorque talis mutationis inscius intensitati magnetismi terrestris pro loco posteriori valorem nimis parvum tribueret. Quodsi experimenta temporis intervallum mediocre complectuntur, acusque ex chalybe bene durato confecta et magnetismo caute imbuta in usum vocatur, considerabilis vigoris debilitatio parum utique metuenda erit; praeterea incertitudo minuetur, si plures acus ad comparationes adhibentur; denique isti suppositioni maior fides accrescet, si peracto itinere acus in loco primo tempus vibrationis non mutasse invenitur. Sed quaecunque cautelae adhibeantur, lenta aliqua debilitatio vis acus vix evitari, adeoque talis consensus post longiorem absentiam raro exspectari poterit; quapropter in comparatione intensitatum pro locis terrae valde dissitis plerumque tantam praecisionem et certitudinem, quantam desiderare debemus, attingere haud licebit.

Ceterum hoc methodi incommodum minus grave est, quamdiu tantum de comparatione intensitatum simultanearum vel temporibus non longe inter se distantibus respondentium agitur. At quum experientia docuerit, tum declinationem tum inclinationem in loco dato mutationes continuas pati, quae post multos annos pergrandes evadant, dubium esse nequit, quin intensitas quoque magnetismi terrestris similibus mutationibus quasi saecularibus obnoxia sit; manifesto autem, quatenus de *hac* quaestione agitur, methodus ista prorsus inefficax evadit. Et tamen, ad scientiae naturalis incrementum summopere desiderandum foret, ut haec ipsa quaestio gravissima in plenissimam lucem promoveatur, quod certo fieri nequit, nisi methodo pure comparativa abrogata alia substituitur, quae a fortuitis acuum inaequalitatibus prorsus independens intensitatem magnetismi terrestris ad unitates stabiles mensurasque absolutas revocat.

Haud difficile est, principia theoretica stabilire, quibus talis methodus, diu iam in votis habita, inniti debet. Multitudo oscillationum, quas acus in tempore dato perficit, pendet tum ab intensitate magnetismi terrestris, tum a constitutione acus, puta a momento statico elementorum magnetismi liberi in illa contentorum, atque ab eius momento inertiae. Quum hoc momentum inertiae absque difficul-

tate assignari possit, patet, observationem oscillationum nobis suppeditare productum ex intensitate magnetismi terrestris in momentum staticum magnetismi acus: sed hae duae quantitates separari nequeunt, nisi observationibus alius generis accitis, quae diversam earum combinationem implicant. Ad hunc finem accedat acus secunda, quae exponatur actioni et magnetismi terrestris et magnetismi acus primae, ut, quam rationem inter se teneant hae duae actiones, explorari possit. Utraque quidem actio pendebit a distributione magnetismi liberi in secunda acu: sed posterior insuper a constitutione acus primae, distantia centrorum, positione rectae centra iungentis respectu axium magneticorum utriusque acus, denique a lege, quam attractiones et repulsiones magneticae sequuntur. Immortalis Tobias Mayer primus iam coniectaverat, hanc legem cum lege gravitationis eatenus convenire, quod illae quoque actiones decrescant in ratione duplicata distantiarum: experimenta clarissimorum virorum Coulomb et Hansteen magnam huic coniecturae plausibilitatem conciliaverunt, experimentaque novissima eam ultra omne dubium evehunt. Sed probe attendendum est, hanc legem referri ad singula elementa magnetismi liberi: effectus totalis corporis magnetismo imbuti longe aliter se habebit, atque in distantiis permagnis, uti ex illa ipsa lege deducere licet, proxime ad rationem inversam triplicatam distantiarum accedet, ita ut actio acus per cubum distantiae multiplicata, distantia ceteris paribus continuo crescente, ad valorem constantem asymptotice convergat, qui, dum distantiae, linea arbitraria pro unitate accepta, per numeros exprimuntur, cum actione vis terrestris homogeneus atque comparabilis erit. Per idoneam experimentorum adornationem et tractationem limes huius rationis eruendus est; qui quum tantummodo momentum staticum magnetismi primae acus involvat, iam habebitur quotiens e divisione huius momenti per intensitatem vis terrestris ortus, qui comparatus cum producto harum quantitatum antea eruto eliminationi istius momenti statici inserviet, atque valorem intensitatis magnetismi terrestris suppeditabit.

Quod attinet ad modum, actiones magnetismi terrestris et acus primae in acum secundam ad experimenta revocandi, duplex via patet, quum acum secundam vel in statu motus vel in statu aequilibrii observare possimus. Prior modus eo redit, ut oscillationes huius acus observentur, dum actio magnetismi terrestris coniungitur cum actione acus primae in distantia idonea ita collocatae, ut ipsius axis sit in meridiano magnetico per centrum acus oscillantis ducto: hoc pacto oscillationes vel accelerabuntur vel retardabuntur, prout poli amici vel inimici sibi mutuo obversi sunt, comparatioque vel temporum vibrationum pro utraque acus primae positione inter se, vel temporis alterutrius cum tempore vibrationum sub sola magnetismi terrestris actione (remota acu prima) locum habentium, rationem huius vis ad actionem primae acus docebit. Alter modus acum primam ita collocat, ut directio vis quam in regione acus secundae libere suspensae exercet, faciat angulum (e. g. rectum) cum meridiano magnetico, quo pacto haec ipsa a meridiano magnetico deflectetur, et e magnitudine deflexus ratio inter vim magneticam terrestrem atque actionem acus primae concludetur.

Ceterum modus prior essentialiter convenit cum eo, quem ill. Poisson iam ante aliquot annos proposuit. Sed experimenta ad ipsius normam a nonnullis physicis tentata, quae quidem mihi innotuerunt, vel successu omnino caruerunt, vel rudem tantummodo approximationem praebuerunt.

Difficultas rei inde potissimum pendet, quod ex actionibus acus in distantiis mediocribus observatis computari debet limes aliquis, qui ad distantiam quasi infinite magnam refertur, et quod eliminationes ad hunc finem necessariae tanto magis a levissimis observationum erroribus turbantur, imo pervertuntur, quo plures incognitae a statu acuum individuali pendentes eliminandae sunt: ad multitudinem perparvam incognitarum autem res tunc tantummodo deduci potest, ubi actiones in distantiis satis magnis (respectu longitudinis acuum) observatae sunt, adeoque ipsae iam perparvae evaserunt. Sed ad actiones tam parvas accurate mensurandas subsidia practica hactenus usitata non sufficiunt.

Ante omnia itaque in id mihi incumbendum esse vidi, ut subsidia nova pararem, per quae tum tempora oscillationum, tum directiones acuum longe maiori praecisione, quam hactenus licuit, observare ac metiri possem. Labores ad hunc finem suscepti et per plures menses continuati, in quibus a praestantissimo Weber multifariam adiutus sum, ad scopum exoptatum ita perduxerunt, ut exspectationem non modo non fefellerint, sed longe superaverint, nec iam quidquam desiderandum restet, ad praecisionem experimentorum subtilitati observationum astronomicarum aequiparandam, nisi locus ab influxu ferri propinqui atque agitationum aëris plene securus. Adsunt duo apparatus simplicitate non minus quam praecisione quam praebent insignes, quorum descriptionem quidem ad aliam occasionem mihi reservare debeo, dum experimenta ad determinandam intensitatem magnetismi terrestris hactenus in observatorio nostro instituta physicis in hac commentatione trado.

1.

Ad explicationem phaenomenorum magneticorum duo fluida magnetica postulamus; alterum cum physicis vocamus boreale, alterum australe. Elementa fluidi alterius attrahere alterius elementa, contra bina elementa eiusdem fluidi mutuo se repellere supponimus, et quidem utramque actionem variari in ratione inversa quadrati distantiae. Veritatem huius legis per ipsas nostras observationes plenissime confirmari infra apparebit.

Fluida ista non per se apparent, sed tantummodo iuncta cum particulis ponderabilibus corporum talium, quae magnetismi capaces sunt, illorumque actiones in eo se manifestant, quod has vel ad motum sollicitant, vel motum, quem aliae vires in ipsas agentes, e. g. gravitas, producerent, impediunt vel mutant.

Actio itaque quantitatis datae fluidi magnetici in quantitatem datam vel eiusdem fluidi vel alterius in distantia data comparabilis erit cum vi motrice data, i. e. cum actione vis acceleratricis datae in massam datam, et quum fluida magnetica ipsa non nisi per effectus quos producunt cognoscere liceat, hi ipsi illorum mensurae inservire debent.

Quo igitur hanc mensuram ad notiones distinctas revocare possimus, ante omnia circa tria quantitatum genera unitates stabilire oportet, puta unitatem distantiarum, unitatem massarum ponderabilium, unitatem virium acceleratricium. Pro tertia accipi potest gravitas in loco observationis: quod si minus arridet, insuper accedere debet unitas temporis, eritque nobis vis acceleratrix ea $= 1$, quae in unitate temporis mutationem velocitatis corporis in ipsius directione moti unitati aequalem gignit.

His ita intellectis, unitas quantitatis fluidi borealis ea erit, cuius vis repulsiva in aliam ipsi aequalem in distantia $= 1$ positam aequivalet vi motrici $= 1$, i. e. actioni vis acceleratricis $= 1$ in massam $= 1$, idemque de unitate quantitatis fluidi australis valebit: in hac determinatione manifesto tum fluidum agens, tum fluidum in quod agitur, in punctis physicis concentrata concipi debent. Insuper autem supponere oportet, attractionem inter quantitates datas fluidorum heteronymorum in distantia data aequalem esse repulsioni inter quantitates resp. aequales fluidorum homonymorum. Actio itaque quantitatis m fluidi magnetici borealis in quantitatem m' eiusdem fluidi in distantia r (dum utrumque in puncto physico concentratum supponitur), exprimitur per $\frac{mm'}{rr}$, sive vi motrici $= \frac{mm'}{rr}$ in directione a priori versus posterius agenti aequivalet, manifestoque haec formula generaliter valet, si, quod semper abhinc subintelligemus, quantitas fluidi australis tamquam negativa spectatur, ubi valor negativus vis $\frac{mm'}{rr}$ pro repulsione attractionem indicabit.

Si itaque in puncto physico aequales quantitates fluidi borealis et australis simul adsunt, nulla omnino actio hinc orietur, si vero inaequales, excessus alterius tantum, quem magnetismum *liberum* (positivum seu negativum) vocabimus, in considerationem veniet.

2.

Hisce suppositionibus fundamentalibus adhuc aliam, quam experientia undique confirmat, adiicere oportet, scilicet, quodvis corpus, in quo fluida magnetica adsint, semper aequalem utriusque quantitatem continere. Quinadeo experientia docet, hancce suppositionem etiam ad singulas talis corporis partes quantumvis parvas, dummodo sensibus nostris discerni possint, extendendam esse. Sed quum per ea, quae in fine art. praec. monuimus, actio eatenus tantum existere possit, quatenus aliqua separatio fluidorum locum habet, necessario hanc per intervalla tam parva fieri supponere debemus, ut mensuris nostris non sint accessibilia.

Corpus itaque magnetismi capax concipi debet tamquam compages innumerarum particularum, quarum quaevis certam quantitatem fluidi magnetici borealis et aequalem australis contineat, ita quidem, ut vel uniformiter inter se mixtae sint (magnetismus lateat), vel separationem minorem maioremve iniverint (magnetismus evolutus sit), quae tamen separatio numquam in transfusionem fluidi ab

una particula in aliam abire potest. Nihil refert, utrum separatio maior a maiori quantitate fluidorum quae libera evaserunt, an a maiori intervallo interposito orta supponatur: manifesto autem propter magnitudinem separationis simul eius directio in considerationem venire debet, quae prout in diversis corporis particulis vel conspirat vel refragatur, maior minorve energia totalis respectu punctorum extra corpus oriri poterit.

Quomodocunque autem distributio magnetismi liberi intra corpus se habeat, semper eius loco, per theorema generalius, substituere licet secundum certam legem aliam distributionem in sola corporis superficie, quae respectu virium extrorsum agentium illi exacte aequivaleat, ita ut elementum fluidi magnetici extra corpus ubicunque positum prorsus eandem attractionem vel repulsionem experiatur a distributione magnetismi vera intra corpus atque a fictitia in eius superficie. Eandem fictionem ad *bina* corpora, quae ratione magnetismi liberi in ipsis evoluti in se invicem agunt, extendere licet, ita ut pro utroque distributio fictitia in superficie distributionis verae internae vice fungi possit. Hocce demum modo vulgari loquendi mori, qui e. g. alteri acus magneticae extremitati solum magnetismum borealem, alteri australem tribuit, sensum verum conciliare possumus, quum manifesto haec phrasis cum principio fundamentali supra enunciato, quod alia phaenomena imperiose postulant, non quadret. Sed haec obiter hic annotavisse sufficiat; de theoremate ipso, quum ad institutum praesens non sit necessarium, alia occasione copiosius agemus.

3.

Status magneticus corporis consistit in ratione distributionis magnetismi liberi in singulis eius particulis. Respectu mutabilitatis huius status discrimen essentiale inter corpora diversa magnetismi capacia animadvertimus. In aliis, e. g. in ferro molli, ille status per levissimam vim protinus mutatur, hacque cessante status anterior redit: contra in aliis, praesertim in chalybe durato, vis certam intensitatem attigisse debet, antequam sensibilem status magnetici mutationem producere possit, vique cessante corpus vel in statu quem acquisivit permanet, vel saltem ad priorem non ex asse revenit. In corporibus itaque prioribus moleculae fluidi magnetici semper ad aequilibrium perfectum virium, quae tum inter ipsa mutuo, tum a caussis externis emanant, se componunt, vel saltem a tali aequilibrio sensibiliter vix differunt: contra in corporibus posterioris generis status magneticus etiam absque perfecto aequilibrio inter illas vires durabilis esse potest, si modo vires fortiores extraneae inde arceantur. Etiamsi caussa huius phaenomeni ignota sit, tamen eam ita imaginari licet, ac si partes ponderabiles corporis secundi generis motui fluidorum magneticorum cum ipsis iunctorum aliquod obstaculum frictioni simile opponant, quae resistentia in ferro molli vel nulla est, vel saltem perparva.

In disquisitione theoretica hi duo casus tractationem prorsus diversam requirunt, sed in commentatione praesente de solis corporibus secundi generis sermo erit: in experimentis, de quibus agemus, stabilitas status magnetici in singulis corporibus ad illa adhibitis erit suppositio fundamentalis, probeque proin cavendum est, ne inter experimenta alia corpora, quae hunc statum mutare possent, nimis prope accedant.

Attamen exstat quaedam caussa mutationis, cui etiam corpora secundi generis obnoxia sunt, puta calor. Nimirum experientia docet, statum magneticum corporis variari cum eius temperatura, caloremque auctum intensitatem magnetismi debilitare, ita tamen, ut nisi corpus ultra modum calefactum fuerit, cum priori temperatura prior quoque status magneticus redeat. Haec dependentia per experimenta idonea determinanda est, et si operationes ad idem experimentum pertinentes sub temperaturis inaequalibus institutae sunt, ante omnia ad eandem temperaturam revocandae erunt.

4.

Independenter a viribus magneticis, quas corpora singularia satis sibi vicina in se mutuo exercere videmus, alia vis in fluida magnetica agit, quam quum ubique terrarum se manifestet, ipsi globo terrestri tribuimus, atque magnetismum terrestrem vocamus. Duplici modo haec vis se exserit: corpora secundi generis, in quibus magnetismus evolutus est, si in centro gravitatis sustinentur, ad directionem determinatam sollicitantur: contra in corporibus primi generis fluida magnetica per istam vim sponte separantur, quae separatio, si corpora figurae idoneae eliguntur atque in positione idonea collocantur, persensibilis reddi potest. Utrumque phaenomenon explicatur, vim illam ita concipiendo, ut fluidum magneticum boreale in quovis loco versus certam directionem propellat, australe vero aequali intensitate versus oppositam. Directio prior semper intelligitur, dum de directione magnetismi terrestris loquimur, quae proin per inclinationem ad pla-

num horizontale atque declinationem plani verticalis, in quo agit, a plano meridiano determinatur: illud *planum meridianum magneticum* vocatur. Intensitas autem magnetismi terrestris per vim motricem, quam in unitatem fluidi magnetici liberi exserit, aestimanda est.

Haec vis non modo in diversis terrae locis diversa est, sed etiam in eodem loco variabilis, tum per saecula et annos, tum per anni aestates dieique horas. Respectu directionis haec variabilitas dudum quidem nota fuit: sed respectu intensitatis hactenus tantummodo per horas diei animadverti potuit, quum subsidiis ad longiora temporis intervalla aptis caruissemus. Huic defectui in posterum reductio intensitatis ad mensuram absolutam remedium afferet.

5.

Ut actio magnetismi terrestris in corpora magnetica secundi generis (qualia semper abhinc subintelligenda sunt) calculo subiiciatur, concipiatur tale corpus in partes infinite parvas divisum, sitque $\mathrm{d}m$ elementum magnetismi liberi in particula, cuius coordinatae respectu trium planorum inter se normalium et respectu corporis fixorum denotentur per x, y, z: elementa fluidi australis negative accipi supponimus. Ita primo patet, integrale $\int \mathrm{d}m$ per totum corpus collectum (imo per quamlibet corporis partem mensurabilem) esse $= 0$. Statuamus $\int x\,\mathrm{d}m = X$, $\int y\,\mathrm{d}m = Y$, $\int z\,\mathrm{d}m = Z$, quae quantitates vocari poterunt momenta magnetismi liberi respectu trium planorum fundamentalium, sive respectu axium in ipsa normalium. Quum denotante a quantitatem constantem arbitrariam, fiat $\int (x-a)\,\mathrm{d}m = X$, patet, momentum respectu axis dati pendere tantummodo ab eius directione, non autem ab eius initio. Si per initium coordinatarum axem quartum ducimus, qui cum primariis faciat angulos A, B, C, momentum elementi $\mathrm{d}m$ respectu huius axis erit $= (x\cos A + y\cos B + z\cos C)\,\mathrm{d}m$, adeoque momentum magnetismi liberi in toto corpore

$$= X\cos A + Y\cos B + Z\cos C = V$$

Statuatur

$$\sqrt{(XX+YY+ZZ)} = M, \quad \text{atque} \quad X = M\cos\alpha, \quad Y = M\cos\beta, \quad Z = M\cos\gamma$$

ducaturque axis quintus, qui cum tribus primariis faciat angulos α, β, γ, et cum axi quarto angulum ω; unde quum constet esse

$$\cos\omega = \cos A \cos\alpha + \cos B \cos\beta + \cos C \cos\gamma, \quad \text{fiet} \quad V = M \cos\omega$$

Hunc axem quintum simpliciter vocamus corporis *axem magneticum*, eiusque *directionem* ad valorem positivum radicalis $\sqrt{(XX + YY + ZZ)}$ referri supponimus. Si axis quartus cum hoc axe magnetico coincidit, momentum V fit $= M$, quod manifesto inter omnia est maximum: momentum respectu cuiuslibet alius axis invenitur, multiplicando hoc momentum maximum (quod quoties ambiguitas non metuenda est, simpliciter momentum magnetismi vocari potest) per cosinum anguli inter hunc axem atque axem magneticum. Momentum respectu cuiusvis axis in axem magneticum normalis fit $= 0$, negativum vero respectu cuiusvis axis, qui cum axe magnetico angulum obtusum facit.

Axis itaque magneticus non est recta determinata, quum per punctum quodlibet duci possit, sed tantummodo directio determinata, sive adsunt infinite multi axes magnetici inter se paralleli. E quibus si aliquem ad lubitum eligimus, longitudinemque determinatam ipsi tribuimus, eius termini vocantur poli, alter australis, a quo, alter borealis, versus quem directio axis procedit.

6.

Si in singulas fluidorum magneticorum particulas vis agit intensitate et directione constans, vis totalis in corpus inde resultans facile e principiis staticis derivatur, quum in corporibus, quae hic consideramus, particulae illae fluiditatem quasi amiserint, et cum corpore ponderabili massam unam rigidam sistant. Agat in quamvis moleculam magneticam dm vis motrix $= P dm$ secundum directionem D (ubi pro moleculis fluidi australis signum negativum iam per se directionem oppositam implicat); sint A, B duo corporis puncta in directione axis magnetici iacentia, eorumque distantia $= r$, positive accepta, dum axis magneticus tendit ab A versus B: ita facile intelligitur, si viribus istis duae novae adiungantur, utraque $= \frac{PM}{r}$, et quarum altera agat in A secundum directionem D, altera in B secundum directionem oppositam, inter omnes has vires aequilibrium fore. Quapropter vires priores aequivalebunt duabus viribus $= \frac{PM}{r}$, quarum altera in B secundum directionem D, altera in A secundum directionem oppositam agit, manifestoque hae duae vires in unam conflari nequeunt.

Si praeter vim P alia similis P' secundum directionem D' in corporis fluida magnetica agit, eius loco iterum duae aliae vel in eadem puncta A, B, vel generalius in puncta alia A', B' agentia substitui possunt, dummodo $A'B'$ quoque sit axis magneticus, et quidem faciendo distantiam $A'B' = r'$, hae vires debent esse $= \frac{P'M}{r'}$, atque in B' agetur secundum directionem D', in A' secundum oppositam, et perinde de pluribus.

Vi magneticae terrestri intra tam parvum spatium, quantum corpus experimentis subiiciendum explet, tuto intensitatem atque directionem ubique constantem (etiamsi respectu temporis variabilem) tribuere, adeoque ea, quae modo diximus, ad eam applicare licet. Sed commodum esse potest, statim ab initio in duas vires eam resolvere, alteram horizontalem $= T$, alteram verticalem, nostris regionibus deorsum tendentem, $= T'$. Quum, si pro posteriori duas alias in puncta A', B' agentia substituere placet, tum punctum A' tum distantiam $A'B' = r'$ pro lubitu assumere liceat, pro A' adoptabimus centrum gravitatis, et denotato pondere corporis, i. e. vi motrice, quam gravitas massae corporis inducit, per p, statuemus $\frac{T'M}{p} = r'$. Hoc pacto effectus vis T' resolvitur in vim $= p$ in A' sursum, atque in aliam aequalem in B' deorsum tendentem, adeoque quum prior manifesto per ipsam gravitatem destruatur, effectus vis magneticae terrestris verticalis simpliciter reducitur ad transpositionem centri gravitatis ex A' in B'. Ceterum manifestum est, pro iis regionibus, ubi vis magnetica terrestris facit angulum acutum cum linea verticali, sive ubi eius pars verticalis fluidum magneticum boreale sursum propellit, similem transpositionem centri gravitatis in axi magnetico versus polum australem locum habere.

Ex hoc rem concipiendi modo sponte elucet, quaecunque experimenta instituantur cum acu magnetica in *unico* statu magnetico, ex his solis inclinationem derivari non posse, sed opus esse ut situs centri gravitatis *veri* aliunde iam innotuerit. Hic situs stabiliri solet, antequam acus magnetismo imbuatur: sed hic modus parum tutus est, quum plerumque acus chalybea iam inter ipsam fabricationem magnetismum utut debilem assumat. Necessarium itaque est pro determinatione inclinationis, ut per mutationem idoneam status magnetici acus, *alia* transpositio centri gravitatis eliciatur, quae quo a priori quam maxime diversa evadat, polos invertere oportebit, quo pacto transpositio duplex obtineri potest. Ceterum transpositio centri gravitatis vel in acubus dimensionum aptissimarum magnetismoque usque ad saturationem imbutis certum limitem transscendere nequit, qui (pro transpositione simplice) in nostris regionibus est circiter 0,4 millimetri, et in regionibus, ubi vis verticalis maxima est, infra 0,6 millimetri manet: unde simul intelligitur, quanta subtilitas mechanica in acubus ad inclinationem determinandam destinatis requiratur.

7.

Si corporis magnetici punctum aliquod C fixum supponitur, ad aequilibrium requiritur et sufficit, ut planum per C, centrum gravitatis atque axem magneticum ductum cum plano meridiano magnetico coincidat, praetereaque momenta, quibus vis magnetica terrestris atque gravitas illud planum circa punctum C vertere nituntur, se destruant: posterior conditio eo redit, ut denotante T partem horizontalem vis magneticae terrestris, i inclinationem axis magnetici ad planum horizontale, esse debeat $TM\sin i$ aequalis producto e pondere corporis in distantiam centri gravitatis transpositi B' a recta verticali per C ducta: manifesto haec distantia esse debet a parte australi vel boreali, prout i est elevatio vel depressio, et pro $i = 0$, B' in ipsa ista recta verticali. Quodsi iam corpus circa hanc verticalem ita motum fuerit, ut axis magneticus pervenerit in planum verticale, cuius azimuthum magneticum, i. e. angulus cum parte boreali meridiani magnetici, (ad lubitum vel versus orientem vel occasum pro positivo acceptum) sit $= u$, magnetismus terrestris exseret vim ad corpus circa axem verticalem vertendum, i. e. ad angulum u minuendum, cuius momentum erit $= TM\cos i \sin u$, corpusque circa hunc axem oscillationes faciet, quarum duratio per methodos notas calculari potest. Scilicet denotando per K momentum inertiae corporis respectu axis oscillationis (i. e. aggregatum molecularum ponderabilium multiplicatarum per quadrata distantiarum ab axe), et pro more per π semicircumferentiam circuli pro radio $= 1$, erit tempus unius oscillationis infinite parvae $= \pi\sqrt{\frac{K}{TM\cos i}}$, siquidem quantitatibus T, M subest unitas virium acceleratricium ea, quae in unitate temporis gignit velocitatem $= 1$: reductio oscillationum finitarum ad infinite parvas simili modo ut pro oscillationibus penduli calculari poterit. Quodsi igitur tempus unius oscillationis infinite parvae ex observationibus erutum est $= t$, habebimus $TM = \frac{\pi\pi K}{tt\cos i}$, adeoque, si quod semper abhinc subintelligimus, corpus ita suspensum est, ut axis magneticus sit horizontalis

$$TM = \frac{\pi\pi K}{tt}$$

Si magis placeret, gravitatem pro unitate virium acceleratricium adoptare, illum

valorem per $\pi\pi l$ dividere oporteret, denotante l longitudinem penduli simplicis per unitatem temporis vibrantis, ita ut generaliter haberetur $TM = \frac{K}{ttl\cos i}$, vel pro casu nostro $TM = \frac{K}{ttl}$.

8.

Si experimenta huius generis in acubus magneticis instituuntur ad filum verticale suspensis, reactio, quam torsio exserit, in experimentis subtilioribus haud negligenda erit. Distinguamus in tali filo duos diametros horizontales, alterum D in termino inferiori, ubi acus adnexa est, axi magnetico acus parallelum, alterum E in termino superiori, ubi filum fixum est, ipsi D parallelum in statu detorsionis. Supponamus, E facere cum meridiano magnetico angulum v, contra axem magneticum vel D angulum u, eritque experientia duce vis torsionis, proxime saltem, angulo $v - u$ proportionalis: statuemus itaque momentum, quo haec vis angulum u ipsi v aequalem reddere nititur, $= (v-u)\theta$. Iam quum momentum vis magneticae terrestris ad angulum u minuendum sit $= TM\sin u$, conditio aequilibrii continetur in aequatione $(v-u)\theta = TM\sin u$, quae eo plures solutiones reales admittet, quo minor est θ respectu ipsius TM: quatenus autem hic tantummodo de valoribus parvis ipsius u agitur, tuto eius loco hanc adoptare licet $(v-u)\theta = TMu$ sive $\frac{v}{u} = \frac{TM}{\theta} + 1$. In apparatibus nostris terminus fili superior brachio horizontali mobili adnexus est, quod portat indicem in peripheria circuli in gradus divisi incedentem. Etiamsi itaque error collimationis (i. e. divisio cui respondet valor $v = 0$) nondum satis exacte cognitus sit, tamen iste index differentiam binorum valorum ipsius v monstrat: perinde alia apparatus pars differentiam inter valores ipsius u statui aequilibrii respondentes summa praecisione subministrat, patetque, valorem ipsius $\frac{TM}{\theta} + 1$ e divisione differentiae inter duos valores ipsius v per differentiam inter valores respondentes ipsius u obtineri. Quatenus inter experimenta ad hunc finem instituenda temporis intervallum aliquanto longius praeterlabitur, necesse erit, si summa praecisio desideratur, ut variationis diurnae declinationis magneticae ratio habeatur, quod facile fit adiumento observationum simultanearum in secundo apparatu, in quo fili terminus superior intactus conservatur: vix opus est monere, distantiam inter ambos apparatus tantam esse debere, ut sensibiliter se mutuo turbare nequeant.

Ut quantam subtilitatem huiusmodi observationes admittant eluceat, exemplum e diario adscribimus. Observatae sunt 1832 Sept. 22, salvis erroribus collimationis, declinationes u atque anguli v sequentes*):

Exp.	tempus	Acus prima		Acus secunda
		u	v	u
I	$9^h\ 33'$ matut.	$+0^0\ 4'\ 19''\ 5$	300^0	$+0^0\ 2'\ 12''\ 1$
II	9 57	$-0\ 0\ 19,6$	240	$+0\ 1\ 37,7$
III	10 16	$-0\ 4\ 40,5$	180	$+0\ 1\ 18,8$

Sunt itaque declinationes acus primae ad statum primae observationis reductae hae

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & u = +0^0\ 4'\ 19''\ 5 & & v = 300^0 \\ \text{II} & \quad\ \ +0\ \ 0\ 14,8 & & \quad\ \ 240 \\ \text{III} & \quad\ \ -0\ \ 3\ 47,2 & & \quad\ \ 180 \end{array}$$

Hinc prodit valor fractionis $\frac{TM}{\theta}$ e combinatione observationum

I et II 881,7
II et III 891,5
I et III 886,6

Variationes declinationis magneticae diurnae per torsionem in ratione unitatis ad $\frac{n}{n+1}$ minuuntur, statuendo $\frac{TM}{\theta} = n$, quae mutatio, si filis tam parvae torsionis, qualem exemplum praecedens exhibet, utimur, pro insensibili haberi potest. Quod vero attinet ad tempus oscillationum (infinite parvarum), e principiis dynamicis facile concluditur, hoc in ratione unitatis ad $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ per torsionem minui. Proprie haec referuntur ad casum eum, ubi $v = 0$: formulae vero generaliter valerent, si statueremus $\frac{TM \cos u^0}{\theta} = n$, denotando per u^0 valorem ipsius u aequilibrio respondentem: sed differentia prorsus insensibilis erit.

9.

Coëfficiens θ principaliter pendet a longitudine, crassitie et materia fili; insuper in filis metallicis aliquantulum a temperatura, in bombycinis a statu hygrometrico: contra in illis (forsanque etiam in his, *dum sunt simplicia*) haud qua-

*) Utraeque divisiones a laeva versus dextram crescunt.

quam a pondere, quo onerantur, pendere videtur. Aliter vero se habet res in filis bombycis compositis, quales ad acus graviores ferendas adhibere oportet: in his θ cum pondere appenso augetur, multo tamen minor manet valore ipsius θ pro filo metallico eiusdem longitudinis eidemque ponderi ferendo apto. Ita e. g. per methodum prorsus similem ei, quam in art. praec. tradidimus (sed in alio filo aliaque acu), inventus est valor ipsius $n = 597,4$, dum filum portabat acum cum sola supellectile ordinaria, ubi pondus integrum erat 496,2 grammatum; contra $= 424,8$, quum pondus usque ad 710,8 grammata auctum esset, sive erat in casu primo $\theta = 0,0016740\, TM$, in casu secundo $\theta = 0,0023542\, TM$. Filum, cuius longitudo est 800 millimetrorum, compositum est e 32 filis simplicibus*), quae singula 30 fere grammata tuto portant, atque ita ordinata sunt, ut aequalem tensionem patiantur. Ceterum verisimile est, valorem ipsius θ constare e parte constante et parte ponderi proportionali, atque partem constantem aequalem fieri aggregato valorum ipsius θ pro singulis filis simplicibus. In hac hypothesi (per experimenta hactenus nondum satis confirmata) pars constans pro exemplo allato invenitur $= 0,0001012\, TM$, adeoque valor ipsius θ filo simplici respondens $= 0,00000316\, TM$. Adiumento valoris ipsius TM mox eruendi ex hac hypothesi colligitur, reactionem fili simplicis per arcum radio aequalem ($57^0\ 18'$) torsi aequivalere gravitati milligrammatis in vectem longitudinis circiter $\frac{1}{17}$ millimetri prementis.

10.

Si corpus oscillans est acus simplex figurae regularis massaeque homogeneae, momentum inertiae K per methodos notas calculari potest. E. g. si corpus est parallelepipedum rectangulum, cuius latera sunt a, b, c, densitas $= d$, et proin massa $q = abcd$, momentum inertiae respectu axis per centrum transeuntis laterique c paralleli erit $= \frac{1}{12}(aa + bb)q$: et quum in acubus magneticis talis formae latus, cui axis magneticus parallelus est, a, longe maior esse soleat latitudine b, pro experimentis crassioribus adeo sufficiet, statuere $K = \frac{1}{12}aaq$. At in experimentis subtilioribus, etiam ubi acus simplex adhibetur, suppositionem gratuitam massae perfecte homogeneae formaeque perfecte regularis aegre admit-

*) Proprie haec fila partialia non sunt vere simplicia, sed tantummodo talia, qualia a mercatoribus non neta venduntur.

teremus, et pro experimentis nostris, ubi non acus simplex, sed acus cum supellectile complicatiore iuncta oscillat, rem per talem calculum expedire omnino impossibile est, adeoque de alio modo, momentum K maxima praecisione determinandi, cogitare oportuit.

Cum acu coniungebatur virga lignea transversalis, a qua pendebant duo pondera aequalia, per cuspides acutissimas in puncta virgae A, B prementia: haec puncta erant in recta horizontali, in eodem plano verticali cum axe suspensionis, et utrimque inde aeque distantia. Denotando massam utriusque ponderis per p, distantiam AB per $2r$, per accessionem huius apparatus momentum K augebitur quantitate $C+2prr$, ubi C est aggregatum momenti inertiae virgae respectu lineae suspensionis atque momentorum ponderum respectu axium verticalium per cuspides et centra gravitatis transeuntium. Si itaque oscillationes tum acus non oneratae, tum acus in duabus distantiis diversis oneratae, puta pro $r=r'$ atque $r=r''$ observatae, temporaque oscillationum (ad infinite parvas reductarum et ab effectu torsionis purgatarum) resp. $=t, t', t''$ inventa sunt, e combinatione aequationum

$$\begin{aligned} TMtt &= \pi\pi K \\ TMt't' &= \pi\pi(K+C+2pr'r') \\ TMt''t'' &= \pi\pi(K+C+2pr''r'') \end{aligned}$$

tres incognitae TM, K et C erui poterunt. Praecisionem adhuc maiorem assequemur, si observatis oscillationibus pro pluribus valoribus ipsius r, puta pro $r=r', r'', r'''$ etc. respondentibus temporibus t', t'', t''' etc., per methodum quadratorum minimorum duas incognitas x, y ita determinamus, ut satisfiat quam proxime aequationibus

$$\begin{aligned} t' &= \sqrt{\frac{r'r'+y}{x}} \\ t'' &= \sqrt{\frac{r''r''+y}{x}} \\ t''' &= \sqrt{\frac{r'''r'''+y}{x}} \text{ etc.} \end{aligned}$$

quo facto habebimus

$$\begin{aligned} TM &= 2\pi\pi px \\ K+C &= 2py \end{aligned}$$

Circa hanc methodum sequentia adhuc monere convenit.

I. Quoties acus non nimis laevigata adhibetur, sufficit, virgam ligneam simpliciter illi imponere. Quoties autem superficies acus perlaevis est, ut frictio impedire nequeat, quominus virga super illa gliscere possit, necesse est, quo totus apparatus ad instar unius corporis rigidi moveatur, virgam apparatui reliquo firmius adstringere. In utroque vero casu prospiciendum est, ut puncta A, B sint satis exacte in recta horizontali.

II. Quum complexus talium experimentorum aliquot horas postulet, variabilitas intensitatis magnetismi terrestris intra hoc temporis spatium, siquidem summa praecisio desideratur, haud negligenda est. Quocirca antequam eliminatio suscipiatur, tempora observata ad valorem constantem ipsius T, e. g. ad valorem medium experimento primo respondentem, reducere oportet. Ad hunc finem observationibus simultaneis in alia acu (perinde ut in art. 8.) opus est, quae si tempus unius oscillationis pro temporibus mediis singulorum experimentorum resp. prodiderunt $=u, u', u'', u'''$ etc., ad calculum loco valorum observatorum t', t'', t''' etc. resp. adhibendi sunt hi

$$\frac{ut'}{u'},\quad \frac{ut''}{u''},\quad \frac{ut'''}{u'''} \text{ etc.}$$

III. Simile monitum valet circa variabilitatem ipsius M, a variatione temperaturae, si quae inter experimenta locum habuit, oriundam. Sed patet, reductionem modo adscriptam iam per se hanc correctionem implicare, si utraque acus aequali temperaturae mutationi subiecta fuerit, et perinde a tali mutatione afficiatur.

IV. Quoties tantummodo de valore ipsius TM eruendo agitur, manifesto experimentum primum superfluum est. Attamen utile erit, experimentis acu onerata factis statim adiungere aliud acu non onerata, ut simul valor ipsius K prodeat, qui experimentis alio tempore eadem acu instituendis substrui possit, quum manifesto hic valor invariatus maneat, etiamsi T et M lapsu temporis mutationem subire possint.

11.

Ad maiorem illustrationem huius methodi e magna copia applicationum exemplum unum hic adscribimus. Ecce conspectum numerorum, quos experimenta 1832 Sept. 11 instituta prodiderunt.

Exp.	Oscillationes simultaneae		
	acus primae		acus secundae
	Oneratio	una oscillatio	una oscillatio
I	$r = 180^{\mathrm{mm}}$	24″ 63956	17″ 32191
II	$r = 130$	20, 77576	17, 32051
III	$r = 80$	17, 66798	17, 31653
IV	$r = 30$	15, 80310	17, 30529
V	sine oneratione	15, 22990	17, 31107

Tempora observata sunt ad chronometrum, cuius retardatio intra diem temporis medii erat 14″24; utrumque pondus p erat 103,2572 grammatum; distantiae r in millimetris microscopica praecisione determinatae; duratio unius oscillationis ad minimum ex 100 oscillationibus (in experimento quinto adeo ex 677 pro acu prima) conclusa reductionem ad infinite parvam iam accepit: ceterum hae reductiones propter perparvam oscillationum amplitudinem *), quam in apparatibus nostris salva summa praecisione adhibere licet, insensibiles sunt. Haec tempora oscillationum reducemus, primo ad valorem medium ipsius TM, qui inter experimentum quintum locum habuit, adiumento praeceptorum art. praec. II.; dein ad valores, qui absque torsione proventuri fuissent, multiplicatione per $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, ubi n in quatuor primis experimentis $= 424,8$, in quinto $= 597,4$ (conf. art. 9); denique ad tempus solare medium multiplicatione per $\frac{86400}{86385,76}$: hoc pacto nanciscimur

I.	$24''\,65717 = t'$	pro	$r' = 180^{\mathrm{mm}}$
II.	$20,\,79228 = t''$	pro	$r'' = 130^{\mathrm{mm}}$
III.	$17,\,68610 = t'''$	pro	$r''' = 80^{\mathrm{mm}}$
IV.	$15,\,82958 = t''''$	pro	$r'''' = 30^{\mathrm{mm}}$
V.	$15,\,24515 = t$	pro acu non onerata.	

Accipiendo pro unitatibus temporis, distantiae et massae minutum secundum, millimetrum et milligramma, ut sit $p = 103257,2$, e combinatione experimenti primi cum quarto deducimus:

*) E. g. amplitudo oscillationum acus primae in experimento primo fuit initio 0°37′26″, in fine 0°28′34″; in experimento quinto initio 1°10′21″, post 177 oscillationes 0°45′35″, post 677 oscillationes 0°6′44″.

$$TM = 179\,641\,070, \qquad K + C = 4374\,976\,000$$

ac dein ex experimento quinto

$$K = 4230\,282\,000, \quad \text{nec non} \quad C = 144\,694\,000$$

Si vero cuncta experimenta ad calculum revocare placet, methodus quadratorum minimorum commodissime sequenti modo applicatur. Proficiscimur a valoribus approximatis incognitarum x, y e combinatione experimenti primi et quarti prodeuntibus, denotatisque correctionibus adhuc adiiciendis per ξ, η, statuimus

$$x = 88,13646 + \xi$$
$$y = 21184,85 \quad + \eta$$

Hoc pacto valores calculati temporum t', t'', t''', t'''' prodeunt per methodos obvias

$$t' = 24,65717 - 0,13988\,\xi + 0,00023008\,\eta$$
$$t'' = 20,78731 - 0,11793\,\xi + 0,00027291\,\eta$$
$$t''' = 17,69121 - 0,10036\,\xi + 0,00032067\,\eta$$
$$t'''' = 15,82958 - 0,08980\,\xi + 0,00035838\,\eta$$

quorum comparatio cum valoribus observatis secundum methodum quadratorum minimorum tractata suppeditat

$$\xi = -\ 0,03230, \qquad \eta = -\ 12,38$$
$$x = 88,10416, \qquad y = 21172,47$$

Hinc denique prodit

$$TM = 179\,575\,250, \qquad K + C = 4372\,419\,000$$

ac dein per experimentum primum

$$K = 4228\,732\,400, \qquad C = 143\,686\,600$$

Ecce comparationem temporum e valoribus correctis quantitatum x, y calculatorum cum observatis:

Exper.	Tempus calculatum	Tempus observatum	Differentia
I	24″ 65884	24″ 65717	+0″ 00167
II	20, 78774	20, 79228	−0, 00454
III	17, 69046	17, 68610	+0, 00436
IV	15, 82805	15, 82958	−0, 00153

Longitudinem penduli simplicis Gottingae statuimus $= 994^{\text{mm}}126$, unde fit gravitas, per eam unitatem virium acceleratricium, quae calculis praecedentibus subest, mensurata, $= 9811,63$: quodsi itaque gravitatem ipsam pro unitate accipere malumus, fit $TM = 18302,29$: hic numerus exprimit multitudinem milligrammatum, quorum pressio, sub actione gravitatis, in vectem, cuius longitudo est millimetrum, aequivalet vi, qua magnetismus terrestris acum illam circa axem verticalem vertere nititur.

12.

Postquam determinationem producti vis magneticae terrestris horizontalis T in momentum magnetismi acus datae M absolvimus, iam ad alteram disquisitionis partem progredimur, puta ad determinationem quotientis $\frac{M}{T}$. Quam assequemur per comparationem actionis istius acus in aliam acum cum actione magnetismi terrestris in eandem, et quidem, uti iam in introductione expositum est, haec vel in statu motus vel in statu aequilibrii observari poterit: utramque methodum frequenter experti sumus; sed quum posterior pluribus rationibus priori longe praeferenda sit, hocce quidem loco disquisitionem ad illam restringemus, praesertim quum prior prorsus simili modo absque difficultate tractari possit.

13.

Conditiones aequilibrii corporis mobilis, in quod vires quaecunque agunt, per principium motuum virtualium perfacile in formulam unicam contrahuntur, scilicet aggregatum productorum singularum virium per motum infinite parvum puncti, in quod quaelibet agit, in huius directionem proiectum, esse debet tale, ut pro nullo motu virtuali, i. e. cum conditionibus generalibus, quibus motus corporis subiectus est, conciliabili, valorem positivum obtinere possit, adeoque, quatenus motus virtuales in partes oppositas ubique possibiles sunt, ut illud aggregatum, quod per $\mathrm{d}\Omega$ denotabimus, fiat $= 0$ pro quolibet motu virtuali.

Corpus mobile, quod hic consideramus, est acus magnetica, cuius punctum G filo torsili superne fixo annexum est. Hoc filum tantummodo impedit, quominus distantia puncti G a termino fili fixo fieri possit maior longitudine fili; ita ut hic quoque, ut in casu corporis perfecte liberi, positio corporis in spatio a sex variabilibus, adeoque eius aequilibrium a sex conditionibus pendeat: sed quum hoc loco problematis solutio tantummodo determinationi quotientis $\frac{M}{T}$ inservire

debeat, sufficit consideratio motus virtualis eius, qui in rotatione circa axem verticalem per G transeuntem consistit, manifestoque talem axem tamquam fixum et solum angulum inter planum verticale, in quo est acus axis magneticus, atque planum meridianum magneticum tamquam variabilem considerare licebit. Hunc angulum a parte meridiani boreali versus orientem numerabimus et per u denotabimus.

14.

Concipiamus volumen acus mobilis in elementa infinite parva divisum, sintque x, y, z coordinatae elementi indefiniti, atque e elementum magnetismi liberi in ipso contentum. Initium coordinatarum collocamus in rectae verticalis per G transeuntis puncto arbitrario h intra acum; axes coordinatarum x, y sunto horizontales, ille in meridiano magnetico boream versus, hic versus orientem; coordinatam z sursum numeramus. Ita actio magnetismi terrestris in elementum e producit partem ipsius $\mathrm{d}\Omega$ hancce $Te\,\mathrm{d}x$.

Simili modo dividatur volumen acus secundae fixae in elementa infinite parva, respondeantque elemento indefinito coordinatae X, Y, Z, atque quantitas magnetismi liberi E; denique sit $r = \sqrt{((X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2)}$. Hoc pacto actio elementi E in elementum e sistit partem aggregati $\mathrm{d}\Omega$ hanc $\frac{eE\,\mathrm{d}r}{r^n}$, si potestati r^n distantiae r reciproce proportionalis supponitur.

Denotando per N eum valorem ipsius u, qui detorsioni fili respondet, momentum vis torsionis fili per $\theta(N-u)$ exprimi poterit: haec vis ita concipi potest, ac si in diametri horizontalis fili ad punctum G terminum utrumque ageret vis tangentialis $= \frac{\theta(N-u)}{D}$, denotante D hunc diametrum, unde facile perspicitur, hinc prodire partem aggregati $\mathrm{d}\Omega$ hanc $\theta(N-u)\,\mathrm{d}u$.

Gravitas particularum acus manifesto nihil confert ad aggregatum $\mathrm{d}\Omega$, qum u sit unica variabilis, quapropter habemus

$$\mathrm{d}\Omega = \Sigma\, Te\,\mathrm{d}x + \Sigma \frac{eE\,\mathrm{d}r}{r^n} + \theta(N-u)\,\mathrm{d}u$$

ubi summatio in termino primo refertur ad cuncta elementa e, in secundo ad cunctas combinationes singulorum e cum singulis E. Patet itaque, conditionem aequilibrii stabilis consistere in eo, ut

$$\Omega = \Sigma\, Tex - \Sigma \frac{eE}{(n-1)r^{n-1}} - \tfrac{1}{2}\theta(N-u)^2$$

fiat maximum.

15.

Ad propositum nostrum convenit, experimenta ita semper adornare, ut axis magneticus utriusque acus sit horizontalis, atque utraque acus in eadem fere altitudine: his itaque suppositionibus calculos ulteriores adstringemus.

Referamus coordinatas punctorum primae acus ad axes in hac fixos in puncto h etiamnum se secantes, et quidem sit axis primus in directione axis magnetici, secundus horizontalis primoque ad dextram, tertius verticalis sursum directus: coordinatae elementi e respectu horum axium sint a, b, c. Perinde sint A, B, C coordinatae elementi E respectu similium axium in acu secunda fixorum et in puncto H huius acus se secantium: hoc punctum prope medium acus atque in eadem altitudine cum puncto h electum supponimus.

Situs puncti H commodissime quidem per distantiam a puncto h atque directionem rectae iungentis determinaretur, si de uno tantum experimento ageretur: sed quum ad institutum nostrum semper plura experimenta requirantur ad diversas puncti H positiones spectantia, quae quidem omnes sunt in eadem recta, attamen haud necessario in recta per punctum h exacte transeunte, praestat, signa statim ab initio ita adornare, ut systema talium experimentorum ab unica variabili pendeat. Referemus itaque punctum H ad punctum arbitrarium h' in eodem plano horizontali ipsi h propinquum, cuius coordinatae sint $\alpha, \beta, 0$, statuemusque distantiam $h'H = R$, angulumque rectae $h'H$ cum meridiano magnetico $= \psi$. Quodsi iam angulum axis magnetici secundae acus cum meridiano magnetico per U denotamus, habebimus

$$\begin{aligned}
x &= a\cos u - b\sin u\\
y &= a\sin u + b\cos u\\
z &= c\\
X &= \alpha + R\cos\psi + A\cos U - B\sin U\\
Y &= \beta + R\sin\psi + A\sin U + B\cos U\\
Z &= C
\end{aligned}$$

Ita omnia ad evolutionem aggregati Ω, atque quotientis $\frac{d\Omega}{du}$, qui pro statu aequilibrii evanescere debet, praeparata sunt.

16.

Primo fit $\Sigma Tex = T\cos u.\Sigma ae - T\sin u.\Sigma be = mT\cos u$, si momen-

tum magnetismi liberi primae acus Σae per m denotamus, quum constet esse $\Sigma be = 0$: pars ipsius $\frac{d\Omega}{du}$ e termino primo ipsius Ω redundans erit $= -mT\sin u$.

Statuendo brevitatis caussa:

$$\begin{aligned}
k &= \alpha\cos\psi + \beta\sin\psi + A\cos(\psi - U) + B\sin(\psi - U) - a\cos(\psi - u) - b\sin(\psi - u)\\
l &= (\alpha\sin\psi - \beta\cos\psi + A\sin(\psi - U) - B\cos(\psi - U) - a\sin(\psi - u) + b\cos(\psi - u))^2\\
&\quad + (C - c)^2
\end{aligned}$$

erit $rr = (R + k)^2 + l$.

Quum in experimentis utilibus R dimensionibus utriusque acus multo maior esse debeat, quantitas $\frac{1}{r^{n-1}}$ in seriem valde convergentem

$$\begin{aligned}
&R^{-(n-1)} - (n-1)kR^{-n} + \left(\tfrac{nn-n}{2}kk - \tfrac{n-1}{2}l\right)R^{-(n+1)}\\
&\quad - \left(\tfrac{1}{6}(n^3 - n)k^3 - \tfrac{1}{2}(nn-1)kl\right)R^{-(n+2)} + \text{etc.}
\end{aligned}$$

evolvitur, cuius lex, si operae pretium esset, facile assignaretur. Singuli termini aggregati $\Sigma\frac{eE}{r^{n-1}}$, post substitutionem valorum quantitatum k, l prodeuntes implicabunt factorem talem

$$\Sigma eEa^\lambda b^\mu c^\nu A^{\lambda'} B^{\mu'} C^{\nu'}$$

qui aequivalet producto e factoribus $\Sigma ea^\lambda b^\mu c^\nu$, $\Sigma EA^{\lambda'} B^{\mu'} C^{\nu'}$ a statu magnetico primae et secundae acus resp. pendentibus. Quae hoc respectu generaliter stabilire licet, restringuntur ad aequationes

$$\Sigma e = 0,\ \Sigma ea = m,\ \Sigma eb = 0,\ \Sigma ec = 0,\ \Sigma E = 0,\ \Sigma EA = M,\ \Sigma EB = 0,\ \Sigma EC = 0$$

ubi per M denotamus momentum magnetismi liberi secundae acus. In casu speciali, ubi acus prioris figura magnetismique distributio est symmetrica iuxta longitudinem, puta ut bina semper elementa sibi respondeant, pro quibus a et e habeant valores oppositos, b et c aequales, centro cum puncto h coincidente, semper erit $\Sigma ea^\lambda b^\mu c^\nu = 0$ pro valore pari numeri $\lambda + \mu + \nu$, et similia valent de secunda acu, si figura magnetismique distributio respectu puncti H symmetrica est. Generaliter itaque evanescent in aggregato $\Sigma\frac{eE}{r^{(n-1)}}$ coëfficientes potestatum $R^{-(n-1)}$ et R^{-n}; in casu speciali, ubi utraque acus symmetrica magnetismoque symmetrice imbuta est, simulque centrum prioris, h et h', nec non centrum posterioris et H coincidunt, evanescent etiam coëfficientes potestatum $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$, $R^{-(n+6)}$ etc., qui, quoties conditiones illae proxime locum habent, saltem perparvi evadere debent. Terminus principalis, qui ex evolutione partis secundae ipsius Ω, puta huius $-\Sigma \frac{eE}{(n-1)r^{(n-1)}}$, prodit, erit

$$\begin{aligned} &= -\tfrac{1}{2} R^{-(n+1)}(n\Sigma eEkk - \Sigma eEl) \\ &= mMR^{-(n+1)}(n\cos(\psi - U)\cos(\psi - u) - \sin(\psi - U)\sin(\psi - u)) \end{aligned}$$

Hinc colligitur, partem ipsius $\frac{d\Omega}{du}$ actioni acus secundae respondentem exprimi per seriem talem

$$fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} + \text{ etc.}$$

ubi coëfficientes sunt functiones rationales cosinuum et sinuum angulorum ψ, u, U atque quantitatum α, β, insuperque implicant quantitates constantes a statu magnetico acuum pendentes; et quidem erit

$$f = mM(n\cos(\psi - U)\sin(\psi - u) + \sin(\psi - U)\cos(\psi - u))$$

Evolutio completa coëfficientium sequentium f', f'' etc. ad institutum nostrum non est necessaria: sufficit observare

1) in casu symmetriae perfectae modo addigitatae coëfficientes f', f''' etc. evanescere.

2) si manentibus quantitatibus reliquis invariatis ψ augeatur duobus rectis (sive quod idem est, si distantia R capiatur in eadem recta retrorsum producta ab altera parte puncti h'), coëfficientes f, f'', f'''' etc. valores suos retinere, contra f', f''', f^{v} etc. valores oppositos nancisci, sive seriem in

$$fR^{-(n+1)} - f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} - \text{ etc.}$$

mutari: facile hoc inde concluditur, quod per illam mutationem ipsius ψ, k transit in $-k$, l vero non mutatur.

17.

Conditio itaque, ut acus mobilis per complexum virium non vertatur circa axem verticalem, comprehenditur in aequatione sequente

$$0 = -mT\sin u + fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} + \text{ etc. } - \theta(u - N)$$

Quum facile effici possit, ut valor ipsius N, si non exacte $= 0$, saltem perparvus sit, atque etiam u pro experimentis, de quibus hic agitur, intra arctos

limites maneat, pro termino $\theta(u - N)$ absque erroris sensibilis metu substituere licebit $\theta\sin(u - N)$, eo magis, quod $\frac{\theta}{mT}$ est fractio perparva. Sit u^0 valor ipsius u, aequilibrio acus primae absente secunda respondens, sive

$$mT\sin u^0 + \theta\sin(u^0 - N) = 0$$

unde facile colligitur

$$mT\sin u + \theta\sin(u - N) = (mT\cos u^0 + \theta\cos(u^0 - N))\sin(u - u^0)$$

ubi loco factoris primi tuto adoptare licet $mT + \theta$. Ita aequatio nostra fit

$$(mT + \theta)\sin(u - u^0) = fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} + \text{ etc.}$$

Quodsi hic terminum primum $fR^{-(n+1)}$ solum retinemus, solutio in promtu est, scilicet habemus

$$\operatorname{tang}(u - u^0) = \frac{mM(n\cos(\psi - U)\sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U)\cos(\psi - u^0))R^{-(n+1)}}{mT + \theta + mM(n\cos(\psi - U)\cos(\psi - u^0) - \sin(\psi - U)\sin(\psi - u^0))R^{-(n+1)}}$$

ubi in denominatore partem, quae implicat factorem $R^{-(n+1)}$, eodem iure supprimere poterimus, sive statuere

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}(u - u^0) &= \frac{mM}{mT + \theta}(n\cos(\psi - U)\sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U)\cos(\psi - u^0))R^{-(n+1)} \\ &= FR^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Si vero terminos ulteriores respicere volumus, patet, $\operatorname{tang}(u - u^0)$ in seriem talem evolvi

$$\operatorname{tang}(u - u^0) = FR^{-(n+1)} + F'R^{-(n+2)} + F''R^{-(n+3)} + \text{ etc.}$$

ubi levis attentio docet, coëfficientes F, F', F'' etc. usque ad coëfficientem potestatis $R^{-(2n+1)}$ incl. oriri resp. ex

$$\frac{f}{mT + \theta}, \quad \frac{f'}{mT + \theta}, \quad \frac{f''}{mT + \theta} \text{ etc.}$$

mutato u in u^0, inde a termino sequente autem partes novae accedent, quibus tamen accuratius persequendis ad institutum nostrum non opus est. Ceterum manifesto $u - u^0$ in seriem similis formae explicabitur, quae adeo usque ad potestatem $R^{-(3n+2}$ cum serie pro $\operatorname{tang}(u - u^0)$ coincidet.

18.

Patet iam, si acu secunda in diversis punctis eiusdem rectae collocata, ut manentibus ψ et U sola distantia R mutetur, deflexiones acus mobilis a statu aequilibrii, acu secunda absente, puta anguli $u-u^0$ observentur, hinc valores coëfficientium F, F', F'' etc., quotquot adhuc sensibiles sunt, per eliminationem erui posse, quo facto habebimus

$$\frac{M}{T} = \left(1+\frac{\theta}{Tm}\right)\frac{F}{n\cos(\psi-U)\sin(\psi-u^0)+\sin(\psi-U)\cos(\psi-u^0)}$$

ubi valor quantitatis $\frac{\theta}{Tm}$ per methodum, quam in art. 8 docuimus, inveniri poterit. Sed ad praxin magis commodam sequentia observare e re erit.

I. Loco comparationis ipsius u cum u^0 praestat, binas deflexiones oppositas inter se comparare, situ acus secundae inverso, puta, ut manentibus R et ψ angulus U duobus rectis augeatur. Designatis valoribus ipsius u his positionibus respondentibus per u', u'', *exacte* foret $u'' = -u'$ pro casu symmetriae perfectae, si simul $u^0 = 0$; sed superfluum est, has conditiones anxie servare, quum pateat, u' et u'' per series similes determinari, in quibus termini primi *exacte* oppositos valores habeant, adeoque etiam $\frac{1}{2}(u'-u'')$ nec non $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(u'-u'')$ per seriem similem, in qua termini primi coëfficiens sit *exacte* $= F$.

II. Adhuc melius erit, quaterna semper experimenta copulare, etiam angulo ψ duobus rectis mutato, sive distantia R ab altera parte sumta. Si duobus posterioribus experimentis respondent valores ipsius u hi u''', u'''', etiam differentia $\frac{1}{2}(u'''-u'''')$ per similem seriem exprimetur, cuius terminus primus quoque habebit coëfficientem $= F$. Observare convenit (quod e praecedentibus facile colligitur), si n esset numerus impar, coëfficientes F, F'', F'''' etc. in infinitum in utraque serie pro $u'-u^0$, atque $u'''-u^0$ exacte aequales, coëfficientesque F', F''', F^{v} etc. in infinitum exacte oppositos fore, et perinde pro $u''-u^0$ et $u''''-u^0$, ita ut in serie pro $u'-u''+u'''-u''''$ termini alternantes exciderent. Sed in casu naturae, ubi $n = 2$, generaliter loquendo ista relatio inter series pro $u'-u^0$ atque $u'''-u^0$ stricte non valet, quum iam pro potestate R^{-6} coëfficientes non exacte oppositi prodeant: attamen ostendi potest, pro hoc quoque termino compensationem completam in combinatione $u'-u''+u'''-u''''$ intercedere, ita ut $\mathrm{tang}\,\frac{1}{4}(u'-u''+u'''-u'''')$ habeat formam

$$LR^{-3}+L'R^{-5}+L''R^{-7}+ \text{ etc.}$$

sive generalius, dum valorem ipsius n tantisper indeterminatum linquimus, hancce

$$LR^{-(n+1)}+L'R^{-(n+3)}+L''R^{-(n+5)}+ \text{ etc.}$$

existente $L = F$.

III. Angulos ψ, U ita eligere expediet, ut leves errores in ipsorum mensura commissi valorem ipsius F sensibiliter non mutent. Ad hunc finem valor ipsius U, pro valore *dato* ipsius ψ, ita accipi debet, ut F fiat maximum, puta esse debet

$$\mathrm{cotang}(\psi-U) = n\,\mathrm{tang}(\psi-u^0)$$

unde fit

$$F = \pm\frac{mM}{mT+\theta}\sqrt{(nn\sin(\psi-u^0)^2+\cos(\psi-u^0)^2)}$$

Angulus vero ψ ita eligendus est, ut hic valor ipsius F fiat vel maximum vel minimum: illud evenit pro $\psi-u^0 = 90^0$ vel 270^0, ubi

$$F = \pm\frac{nmT}{mT+\theta}$$

hoc pro $\psi-u^0 = 0$ vel 180^0, ubi

$$F = \pm\frac{mM}{mT+\theta}$$

19.

Duae itaque methodi praesto sunt ad praxin maxime idoneae, quarum elementa sequens schema exhibet.

Modus primus.

Acus secundae tum centrum tum axis in recta ad meridianum magneticum *) normali.

Deflexio	Situs acus		centrum versus	polus borealis versus
$u = u'$	$\psi = 90^0$	$U = 90^0$	orientem	orientem
$u = u''$	$\psi = 90^0$	$U = 270^0$	orientem	occidentem
$u = u'''$	$\psi = 270^0$	$U = 90^0$	occidentem	orientem
$u = u''''$	$\psi = 270^0$	$U = 270^0$	occidentem	occidentem

*) Accuratius, ad planum verticale, cui respondet valor $u = u^0$, i. e. in quo axis magneticus in aequilibrio est, acu secunda absente. Ceterum in praxi, differentia tum propter parvitatem, tum propter ipsam rationem, a qua in art. praec. III. profecti sumus, tuto semper negligi potest.

Modus secundus.

Acus secundae centrum in meridiano magnetico, axis huic normalis.

Deflexio	Situs acus		centrum versus	polus borealis versus
$u = u'$	$\psi = 0$	$U = 270^0$	boream	occidentem
$u = u''$	$\psi = 0$	$U = 270^0$	boream	orientem
$u = u'''$	$\psi = 180^0$	$U = 90^0$	austrum	occidentem
$u = u''''$	$\psi = 180^0$	$U = 90^0$	austrum	orientem

Statuendo dein $\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u'''') = v$, atque

$$\text{tang } v = LR^{-(n+1)} + L'R^{-(n+3)} + L''R^{-(n+5)} + \text{etc.}$$

erit

pro modo priori $L = \frac{nmM}{mT+\theta}$

pro modo posteriori $L = \frac{mM}{mT+\theta}$

20.

E theoria eliminationis facile colligitur, calculum, propter inevitabiles observationum errores, eo magis incertum fieri, quo plures coëfficientes per eliminationem determinare oporteat. Hanc ob caussam modus in art. 18, II. praescriptus magni aestimandus est, quod coëfficientes potestatum $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$ supprimit. In casu perfectae symmetriae quidem hi termini iam per se exciderent, sed parum tutum esset, illi fidem habere. Ceterum parvula a symmetria aberratio longe minoris momenti esset in modo primo quam in secundo, et si in illo saltem cavetur, ut punctum h', a quo distantiae numerantur, sit satis exacte in meridiano magnetico per h transeunte, vix differentia sensibilis inter $u' - u''$ atque $u''' - u''''$ se manifestabit. Sed hoc secus se habet in modo secundo, praesertim si apparatus suspensionem excentricam postulat. Per hunc modum, quoties spatium non permittit observationes ab utraque parte, semper praecisionem multo minorem assequeris. Praeterea modus primus eo quoque nomine praeferendus est, quod, quum in casu naturae sit $n = 2$, duplo maiorem valorem ipsius L producit, quam secundus. Ceterum si in modo secundo terminum a $R^{-(n+2)}$ pendentem, in casu suspensionis excentricae, quantum licet exterminare studemus,

punctum h' ita eligendum est, ut centrum acus (pro $u = u^0$) sit medium inter h et h': calculum tamen, qui hoc docuit, brevitatis caussa hic supprimere oportet.

21.

In calculis praecedentibus exponentem n indeterminatum liquimus: diebus Iunii 24—28, 1832 duas series experimentorum exsequuti sumus, ad tantas distantias, quantas spatium permisit, extensas, per quas, quemnam valorem natura postulet, evidentissime apparebit. In prima serie acus secunda (ad modum primum art. 19) in recta ad meridianum magneticum normali, in secunda centrum acus in ipso meridiano collocabatur. Ecce conspectum summae horum experimentorum, ubi distantiae R in partibus metri expressae, valoresque anguli $\frac{1}{4}(u - u' + u'' - u''')$ pro prima serie per v, pro secunda per v' denotati sunt.

R	v			v'		
$1^m 1$				1^0	$57'$	$24'' 8$
1, 2				1	29	40, 5
1, 3	2^0	$13'$	$51'' 2$	1	10	19, 3
1, 4	1	47	28, 6	0	55	58, 9
1, 5	1	27	19, 1	0	45	14, 3
1, 6	1	12	7, 6	0	37	12, 2
1, 7	1	0	9, 9	0	30	57, 9
1, 8	0	50	52, 5	0	25	59, 5
1, 9	0	43	21, 8	0	22	9, 2
2, 0	0	37	16, 2	0	19	1, 6
2, 1	0	32	4, 6	0	16	24, 7
2, 5	0	18	51, 9	0	9	36, 1
3, 0	0	11	0, 7	0	5	33, 7
3, 5	0	6	56, 9	0	3	28, 9
4, 0	0	4	35, 9	0	2	22, 2

Hi numeri vel obiter inspecti monstrant, pro valoribus maioribus tum numeros secundae columnae proxime duplo maiores esse numeris tertiae, tum numeros utriusque columnae proxime in ratione inversa cubi distantiarum; ita ut de veritate valoris $n = 2$ nullum dubium remanere possit. Quo magis adhuc haec lex in singulis experimentis confirmaretur, omnes numeros per methodum quadratorum minimorum tractavimus, unde valores coëfficientium sequentes prodierunt:

$$\operatorname{tang} v = 0{,}086870\, R^{-3} - 0{,}002185\, R^{-5}$$
$$\operatorname{tang} v' = 0{,}043435\, R^{-3} + 0{,}002449\, R^{-5}$$

Ecce conspectum comparationis valorum per has formulas computatorum cum observatis:

Valores computati.

R	v	differentia	v'	differentia
$1^m 1$			$1^0\ 57'\ 22''\,0$	$+2''\,8$
1, 2			1 29 46, 5	−6, 0
1, 3	$2^0\ 13'\ 50''\,4$	$+\ 0''\,8$	1 10 13, 3	+6, 0
1, 4	1 47 24, 1	+ 4, 5	0 55 58, 7	+0, 2
1, 5	1 27 28, 7	− 9, 6	0 45 20, 9	−6, 6
1, 6	1 12 10, 9	− 3, 3	0 37 15, 4	−3, 2
1, 7	1 0 14, 9	− 5, 0	0 30 59, 1	−1, 2
1, 8	0 50 48, 3	+ 4, 2	0 26 2, 9	−3, 4
1, 9	0 43 14, 0	+ 7, 8	0 22 6, 6	+2, 6
2, 0	0 37 5, 6	+10, 6	0 18 55, 7	+5, 9
2, 1	0 32 3, 7	+ 0, 9	0 16 19, 8	+4, 9
2, 5	0 19 2, 1	−10, 2	0 9 38, 6	−2, 5
3, 0	0 11 1, 8	− 1, 1	0 5 33, 9	−0, 2
3, 5	0 6 57, 1	− 0, 2	0 3 29, 8	−1, 0
4, 0	0 4 39, 6	− 3, 7	0 2 20, 5	+1, 7

22.

Experimenta praecedentia eum potissimum in finem suscepta fuerunt, ut lex actionis magneticae ultra omne dubium eveheretur, porro, ut quot terminos seriei respicere conveniat, quantamque praecisionem ferant experimenta, appareret. Docuerunt, si ad distantias minores quadruplo longitudinis acuum non descendamus, duos seriei terminos sufficere *). Ceterum differentiae, quas calculus prodidit, neutiquam pure pro erroribus observationum haberi debent: plures enim cautelae, a quarum usu harmoniam adhuc maiorem sperare licet, tunc temporis nondum praeparatae erant. Huc referendae sunt correctiones propter variabilitatem horariam intensitatis magnetismi terrestris, cuius rationem habere oportet adiumento alius acus comparativae ad instar methodi, de qua in art. 10, II. loquuti sumus. Quo tamen valor magnetismi terrestris, quatenus ex *his* experimentis derivari potest, cognoscatur, summam reliquorum experimentorum huc spectantium adiicimus.

Valor fractionis $\frac{9}{Tm}$ pro acu prima et filo, a quo pendebat, erutus est per methodum in art. 8 traditam $= \frac{1}{251{,}96}$. Hinc itaque fit

$$\frac{M}{T} = 0{,}0436074$$

Huic numero subest metrum tamquam unitas distantiarum. Si pro unitate millimetrum adoptare malumus, iste numerus per cubum millenarii multiplicandus est, ita ut habeatur

$$\frac{M}{T} = 43\,607\,400$$

Pro acu secunda per experimenta d. 28. Junii instituta iisque prorsus similia, quae pro alia acu in art. 11 tractavimus, prodiit, dum millimetrum, milligramma et minutum secundum temporis solaris medii pro unitatibus accipiebantur,

$$TM = 135\,457\,900$$

atque hinc, eliminata quantitate M

$$T = 1{,}7625$$

23.

Quoties experimenta eum in finem instituuntur, ut valor absolutus magnetismi terrestris T determinetur, magni momenti est, curare, ut ipsorum complexus intra modicum tempus absolvatur, ne mutatio sensibilis status magnetici acuum ad illa adhibitarum metuenda sit. Conveniet itaque in observandis deflexionibus acus mobilis solum modum primum art. 20 sequi, adhibitis tantummodo

*) Longitudo acuum in his experimentis adhibitarum est circiter $0^m 3$; si terminum R^{-7} in calculis respicere periclitati essemus, certitudo minuta potius quam aucta fuisset.

duabus distantiis diversis apte electis, siquidem duo seriei termini sufficiunt. E pluribus applicationibus huius methodi hic unam tamquam exemplum eligimus, et quidem eam, cui cura maxime scrupulosa impensa est, distantiis microscopica praecisione mensuratis.

Experimenta instituta sunt 1832 Sept. 18, in duobus apparatibus, quos per literas A, B, tribus acubus, quas per numeros 1, 2, 3 distinguemus. Acus 1, 2 sunt eaedem, quae in art. 11 prima et secunda vocabantur. Experimenta ad duo capita discedunt.

Primo observatae sunt oscillationes simultaneae acus 1 in apparatu A, acusque 2 in apparatu B. Tempus unius oscillationis, ad amplitudinem infinite parvam reductum prodiit

pro acu 1 . . . . $15''\,22450$
pro acu 2 . . . . $17,\,29995$

illud ex 305, hoc ex 264 oscillationibus conclusum.

Dein acus 3 in apparatu A suspensa, acus 1 autem in recta ad meridianum magneticum normali tum versus orientem tum versus occidentem, et utrimque duplici modo collocata, deflexioque acus 3 pro singulis positionibus acus 1 observata est. Haec experimenta, pro duabus distantiis diversis R repetita prodiderunt valores sequentes anguli v perinde intelligendi ut in artt. 19, 21

$$R = 1^{m}2, \qquad v = 3^{0}\,42'\,19''\,4$$
$$R' = 1,6. \qquad v' = 1\;\;34\;\;19,3$$

Inter haec quoque experimenta oscillationes acus 2 in apparatu B observatae sunt: tempori medio respondet valor unius oscillationis infinite parvae ex 414 oscillationibus conclusus $= 17''\,29484$.

Tempora observabantur ad chronometrum, cuius retardatio diurna $= 14''\,24$.

Denotantibus M, m momenta magnetismi liberi pro acu 1 et 3, θ constantem torsionis fili in apparatu A, dum acum 1 vel 3 (quarum pondus fere idem est) ferebat, habemus

$$\frac{\theta}{TM} = \frac{1}{597,4}$$

uti in art. 11

$$\frac{\theta}{Tm} = \frac{1}{721,6}$$

quippe acus 3 fortiori magnetismo imbuta erat, quam acus 1.

Momentum inertiae acus 1 per experimenta anteriora iam cognitum erat (vid. art. 11), quae prodiderant $K = 4228\,732400$, millimetro et milligrammate pro unitatibus acceptis.

Variatio thermometri in utroque atrio, ubi apparatus stabiliti sunt, per totum experimentorum tempus tam parva erat, ut superfluum sit eius rationem habere.

Aggrediamur iam calculum horum experimentorum, ut intensitas magnetismi terrestris T inde eruatur. Inaequalitas oscillationum acus 2 levem istius intensitatis variationem manifestat: quo itaque de valore determinato sermo esse possit, reducemus tempus observatum oscillationis acus 1 ad statum medium magnetismi terrestris intra secundam observationum partem. Reductionem aliam requirit hoc tempus propter retardationem chronometri, tertiamque propter torsionem fili. Hoc modo prodit tempus unius oscillationis acus 1 reductum

$$= 15,22450 \times \frac{17,29484}{17,29995} \cdot \frac{86400}{86385,76} \cdot \sqrt{\frac{598,4}{597,4}}$$
$$= 15''\,23530 = t$$

Hinc deducitur valor producti $TM = \frac{\pi\pi K}{tt} = 179\,770600$. Parvula differentia inter hunc valorem atque eum, quem supra art. 11 pro die 11. Sept. invenimus, variationi tum magnetismi terrestris tum status magnetici acus tribuenda est.

E deflexionibus observatis obtinemus

$$F = \frac{R'^3 \operatorname{tang} v' - R^3 \operatorname{tang} v}{R'R' - RR} = 113\,056200$$

si millimetrum pro unitate accipimus, atque hinc

$$\frac{M}{T} = \tfrac{1}{2} F\left(1 + \frac{\theta}{Tm}\right) = 56\,606437$$

Comparatio huius numeri cum valore ipsius TM tandem producit

$$T = 1,782088$$

tamquam valorem intensitatis vis magneticae terrestris horizontalis die 18. Septembris hora 5.

24.

Experimenta praecedentia facta sunt in observatorio, loco apparatuum ita electo, ut ferrum a vicinia quantum licuit arceretur. Nihilominus dubitari nequit, quin ferri moles, in parietibus, fenestris et ianuis aedificii copiose sparsae, imo etiam partes ferreae instrumentorum astronomicorum maiorum, in quibus per ipsam vim magneticam terrestrem magnetismus elicitur, effectum neutiquam insensibilem in acus suspensas exerceant. Vires hinc oriundae magnetismi terrestris tum directionem tum intensitatem aliquantulum mutant, experimentaque nostra non valorem purum intensitatis magnetismi terrestris, sed valorem pro loco apparatus A modificatum exhibent. Haec modificatio, quamdiu moles ferreae locum non mutant, ipsaque elementa magnetismi terrestris (puta intensitas et directio) non magnopere mutantur, sensibiliter constans manere debet, quae vero ipsius sit quantitas, hactenus quidem ignotum est, attamen vix crediderim, eam ultra unam duasve partes centesimás valoris totalis ascendere. Ceterum haud difficile foret, quantitatem, proxime saltem, per experimenta determinare, observatis oscillationibus simultaneis duarum acuum, quarum altera in observatorio loco sueto, altera subdiu in distantia satis magna ab aedificio aliisve ferri molibus turbantibus suspendenda esset, et quae dein vices suas commutare deberent. Sed hactenus haec experimenta exsequi non vacavit: tutissimum vero remedium afferet aedificium peculiare, observationibus magneticis destinatum, munificentia regia mox exstruendum, a cuius fabrica ferrum omnino excludetur.

25.

Praeter experimenta allata permulta alia similia exsequuti sumus, etsi, tempore anteriori cura multo laxiori. Iuvabit tamen, quae e singulis prodierunt, hic in unum conspectum producere, omissis iis, quae ante apparatus subtiliores stabilitos, per alia rudiora subsidia in acubus diversissimarum dimensionum prodierunt, etiamsi *omnia* approximationem saltem ad veritatem praebuerint. Ecce valores ipsius T per repetita experimenta subinde erutos:

Numerus	Tempus, 1832	T
I	Maii 21	1,7820
II	Maii 24	1,7694
III	Iun. 4	1,7713
IV	Iun. 24—28	1,7625
V	Iul. 23, 24	1,7826
VI	Iul. 25, 26	1,7845
VII	Sept. 9	1,7764
VIII	Sept. 18	1,7821
IX	Sept. 27	1,7965
X	Octobr. 15	1,7860

Experimenta V—IX omnia in eodem loco facta sunt, contra I—IV in locis aliis; experimentum X proprie est mixtum, quum deflexiones loco quidem sueto observatae sint, oscillationes vero alio. Experimentis VII et VIII aequalis fere cura impensa est; contra experimentis IV, V, VI, X paullo minor, experimentisque I—III cura multo laxior. In experimentis I—VIII adhibitae sunt acus diversae quidem, sed eiusdem fere ponderis et longitudinis (pondus erat inter 400 et 440 grammata); contra experimento X inserviit acus, cuius pondus 1062 grammatum, longitudo 485 millimetrorum. Experimentum IX eum tantummodo in finem susceptum est, ut appareret, quemnam praecisionis gradum per acum minusculam attingere liceat: pondus acus adhibitae erat tantummodo 58 grammatum, ceterum cura haud minor, quam in experimentis VII et VIII. Nullum est dubium, subtilitatem observationum notabiliter auctum iri, si acus adhuc graviores, e. g. quarum pondus ad 2000 vel 3000 grammata surgat, in usum vocentur.

26.

Dum intensitas magnetismi terrestris T per *numerum* k exprimitur, huic subest unitas certa V, puta vis cum illa homogenea, cuius nexus cum aliis unitatibus immediate datis in praecedentibus quidem continetur, attamen modo aliquantulum complicatiori: operae itaque pretium erit, hunc nexum hic denuo producere, ut, quam mutationem patiatar numerus k, si loco unitatum fundamentalium ab aliis proficiscamur, elementari claritate ob oculos ponatur.

Ad stabiliendam unitatem V proficisci oportuit ab unitate magnetismi liberi M*) atque unitate distantiae R, statuimusque V aequalem vi ipsius M in distantia R.

Pro unitate M adoptavimus eam quantitatem fluidi magnetici, quae in quantitatem aequalem M in distantia R collocatam agens producit vim motricem (aut si mavis pressionem) aequalem ei W, quae pro unitate accipitur, i. e. aequalem vi, quam exercet vis acceleratrix A pro unitate accepta in massam P pro unitate acceptam.

Ad stabiliendam unitatem A duplex via patet: scilicet vel depromi potest a vi simili immediate data, e. g. a gravitate in loco observationis, vel ab ipsius effectu in corporibus movendis. In modo posteriori, quem in calculis nostris sequuti sumus, duae novae unitates requiruntur, puta unitas temporis S atque unitas celeritatis C, ut pro unitate A accipiatur vis acceleratrix ea, quae per tempus S agens producit velocitatem C: denique pro hac ipsa accipitur ea, quae motui uniformi per spatium R intra tempus S respondet.

Ita patet, unitatem V a tribus unitatibus vel R, P, A vel R, P, S pendere.

Supponamus iam, loco unitatum V, R, M, W, A, P, C, S alias accipi $V', R', M', W', A', P', C', S'$ simili quo priores modo inter se nexas, atque utendo mensura V' magnetismum terrestrem per numerum k' exprimi, qui quomodo se habeat ad k inquirendum est.

Statuendo

$$\begin{aligned}
V &= vV' \\
R &= rR' \\
M &= mM' \\
W &= wW' \\
A &= aA' \\
P &= pP' \\
C &= cC' \\
S &= sS'
\end{aligned}$$

erunt v, r, m, w, a, p, c, s numeri abstracti, atque

*) Vix necesse erit monere, significationes literis antea tributas hic cessare.

$$\begin{aligned}
kV &= k'V' \quad \text{sive} \quad kv = k' \\
v &= \frac{m}{rr} \\
\frac{mm}{rr} &= w = pa \\
a &= \frac{c}{s} \\
c &= \frac{r}{s}
\end{aligned}$$

e quarum aequationum combinatione obtinemus

$$\text{I.} \qquad k' = k\sqrt{\frac{p}{rss}}$$

$$\text{II.} \qquad k' = k\sqrt{\frac{pa}{rr}}$$

Quamdiu modum, quem in calculis nostris sequuti sumus, retinemus, formula priori uti oportet; e. g. si loco millimetri et milligrammatis metrum et gramma pro unitatibus accipimus, erit $r = \frac{1}{1000}$, $p = \frac{1}{1000}$, adeoque $k' = k$; si lineam Parisiensem et libram Berolinensem, habebimus $r = \frac{1}{2,255829}$, $p = \frac{1}{467711,4}$, adeoque $k' = 0,002196161\,k$, unde e. g. experimenta VIII producunt valorem $T = 0,0039131$.

Si modum alterum sequi, atque gravitatem pro unitate virium acceleratricium adoptare malumus, statuemus pro observatorio Gottingensi $a = \frac{1}{9811,63}$, unde, quamdiu millimetrum et milligramma retinemus, numeri k per 0,01009554 multiplicandi, mutationesque illarum unitatum secundum formulam II tractandae erunt.

27.

Intensitas vis magneticae terrestris horizontalis T, ut ad absolutam reducatur, per secantem inclinationis multiplicanda est. Hanc Gottingae variabilem esse, nostrisque temporibus diminutionem pati, docuerunt observationes ill. Humboldt, qui mense Decembri 1805 invenit $69^0\,29'$, mense Septembri 1826 autem $68^0\,29'\,26''$. Equidem d. 23. Iunii 1832 adiumento eiusdem inclinatorii, quo olim usus erat b. Mayer, inveni $68^0\,22'\,52''$, quod retardationem diminutionis indicare videtur, attamen huic observationi minorem fidem haberem, tum propter instrumentum minus perfectum, tum quod observatio in observatorio facta a turbatione molium ferrearum non satis tuta est. Ceterum huic quoque elemento plenior cura in posterum dicabitur.

28.

Sequuti sumus in hac commentatione modum vulgo receptum, phaenomena magnetica explicandi, tum quod his complete satisfacit, tum quod per calculos longe simpliciores procedit, quam modus is, ubi magnetismus gyris galvano-electricis circa particulas corporis magnetici adscribitur: talem modum, qui utique pluribus nominibus se commendat, nec affirmare nec reiicere in animo fuit, quod inopportunum fuisset, quum lex actionis mutuae inter elementa talium gyrorum nondum satis explorata videatur. Quicunque vero modus phaenomena tum pure magnetica tum electromagnetica concipiendi in posterum adoptetur, certe respectu illorum cum modo vulgari ubique ad eundem finem perducere debet, et quae hoc ducente in hac commentatione evoluta sunt, forma tantum, non essentia, mutari poterunt.

ALLGEMEINE THEORIE

DES

ERDMAGNETISMUS

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838.
Herausg. v. GAUSS u. WEBER. Leipzig 1839.

ALLGEMEINE THEORIE

DES

ERDMAGNETISMUS.

Der rastlose Eifer, womit man in neuerer Zeit in allen Theilen der Erdoberfläche die Richtung und Stärke der magnetischen Kraft der Erde zu erforschen strebt, ist eine um so erfreulichere Erscheinung, je sichtbarer dabei das rein wissenschaftliche Interesse hervortritt. Denn in der That, wie wichtig auch für die Schifffahrt die möglichst vollständige Kenntniss der Abweichungslinie ist, so erstreckt sich doch ihr Bedürfniss eben nicht weiter, und was darüber hinausliegt, bleibt für jene beinahe gleichgültig. Aber die Wissenschaft, wenn gleich gern auch dem materiellen Interesse förderlich, lässt sich nicht auf dieses beschränken, sondern fordert für Alle Elemente ihrer Forschung gleiche Anstrengung.

Die Ausbeute der magnetischen Beobachtungen pflegt man auf den Erdkarten durch drei Systeme von Linien darzustellen, die man wohl die isogonischen, isoklinischen und isodynamischen Linien genannt hat. Diese Linien ändern ihre Gestalt und Lage im Laufe der Zeit sehr bedeutend, so dass Eine Zeichnung nur den Zustand der Erscheinung für einen bestimmten Zeitpunkt angibt. Halley's Declinationskarte ist sehr verschieden von Barlow's Darstellung im Jahr 1833; und Hansteen's Inclinationskarte für 1780 weicht schon sehr stark von der jetzigen Lage der isoklinischen Linien ab: die Versuche, die Intensität darzustellen, sind noch zu neu, als dass sich bei derselben schon jetzt ähnliche Änderungen nachweisen liessen, die ohne Zweifel im Laufe der Zeit nicht ausbleiben werden. Alle diese Karten sind jetzt noch mehr oder weniger lückenhaft, oder theilweise unzuverlässig: es steht aber zu hoffen, dass, wenn sie auch die Vollständigkeit, wegen der Unzugänglichkeit einiger Theile der Erdfläche, nicht ganz erreichen können, sie doch mit raschen Schritten sich ihr mehr nähern werden.

Vom höhern Standpunkt der Wissenschaft aus betrachtet ist aber diese möglichst vollständige Zusammenstellung der Erscheinungen auf dem Wege der Beobachtung noch nicht das eigentliche Ziel selbst: man hat damit nur ähnliches gethan, wie der Astronom, wenn er z. B. die scheinbare Bahn eines Kometen auf der Himmelskugel beobachtet hat. Man hat nur Bausteine, kein Gebäude, so lange man nicht die verwickelten Erscheinungen Einem Princip unterwürfig gemacht hat. Und wie der Astronom, nachdem das Gestirn sich seinen Augen entzogen hat, sein Hauptgeschäft erst anfängt, gestützt auf das Gravitationsgesetz aus den Beobachtungen die Elemente der wahren Bahn berechnet, und dadurch sogar sich in den Stand setzt, den weitern Lauf mit Sicherheit anzugeben: so soll auch der Physiker sich die Aufgabe stellen, wenigstens in so weit die ungleichartigen und zum Theil weniger günstigen Umstände es verstatten, die die Erscheinungen des Erdmagnetismus hervorbringenden Grundkräfte nach ihrer Wirkungsart und nach ihren Grössenwerthen zu erforschen, die Beobachtungen, so weit sie reichen, diesen Elementen zu unterwerfen, und dadurch selbst wenigstens mit einem gewissen Grade von sicherer Annäherung die Erscheinungen für die Gegenden, wohin die Beobachtung nicht hat dringen können, zu anticipiren. Es ist jedenfalls gut, dies höchste Ziel vor Augen zu haben, und die Gangbarmachung der dazu führenden Wege zu versuchen, wenn auch gegenwärtig, bei der grossen Unvollkommenheit des Gegebenen, mehr als eine entfernte Annäherung zu dem Ziele selbst noch nicht möglich ist.

Es ist nicht meine Absicht, hier diejenigen frühern erfolglosen Versuche zu erwähnen, wobei man ohne alle physikalische Grundlage das grosse Räthsel errathen zu können meinte. Eine physikalische Grundlage kann man nur solchen Versuchen zugestehen, welche die Erde wie einen wirklichen Magnet betrachten, und die erwiesene Wirkungsart eines Magneten in die Ferne allein der Rechnung unterstellen. Aber alle bisherigen Versuche dieser Art haben das gemein, dass man, anstatt zuerst zu untersuchen, *wie* dieser grosse Magnet beschaffen sein müsse, um den Erscheinungen Genüge zu leisten, gleich gefasst darauf, eine

einfache oder eine sehr zusammengesetzte Beschaffenheit hervorgehen zu sehen, vielmehr von vorne her von einer bestimmten einfachen Beschaffenheit ausging, und probirte, ob die Erscheinungen sich mit solcher Hypothese vertrügen. Indessen wiederholt sich hierin nur, was die Geschichte der Astronomie und der Naturwissenschaften von den Anfängen so vieler unserer Kenntnisse berichtet.

Die einfachste Hypothese dieser Art ist die, nur einen einzigen sehr kleinen Magnet im Mittelpunkt der Erde anzunehmen, oder vielmehr (da schwerlich jemand im Ernste an das wirkliche Vorhandensein eines solchen Magnets geglaubt hat) vorauszusetzen, der Magnetismus sei in der Erde so vertheilt, dass die Gesammtwirkung nach aussen der Wirkung eines fingirten unendlich kleinen Magnets äquivalire, ungefähr eben so, wie die Gravitation gegen eine homogene Kugel der Anziehung einer gleich grossen, im Mittelpunkt concentrirten Masse gleichkommt. In dieser Voraussetzung sind die beiden Punkte, wo die Fortsetzung der magnetischen Axe jenes Centralmagnets die Erdfläche schneidet, die magnetischen Pole der Erde, in denen die Magnetnadel vertical steht, und zugleich die Intensität am grössten ist; in dem grössten Kreise mitten zwischen beiden Polen (dem magnetischen Aequator) wird die Inclination $= 0$ und die Intensität halb so gross als in den Polen; zwischen dem magnetischen Aequator und einem Pole hängt sowohl Inclination als Intensität nur von dem Abstande von jenem Aequator (der magnetischen Breite) ab, und zwar so, dass die Tangente der Inclination der doppelten Tangente dieser Breite gleich ist; endlich fällt die Richtung der horizontalen Nadel überall mit der Richtung eines nach dem nordlichen magnetischen Pole gezogenen grössten Kreises zusammen. Mit allen diesen nothwendigen Folgen jener Hypothese stimmt aber die Natur nur in roher Annäherung überein; in der Wirklichkeit ist die Linie verschwindender Inclination kein grösster Kreis, sondern eine Linie von doppelter Krümmung; bei gleichen Neigungen findet man nicht gleiche Intensitäten; die Richtungen der horizontalen Nadel sind weit davon entfernt, alle nach Einem Punkte zu convergiren u. s. f. Es reicht also schon die oberflächliche Betrachtung hin, die Verwerflichkeit dieser Hypothese zu zeigen: gleichwohl wendet man den Einen der obigen Sätze noch jetzt als eine Näherung an, um die Lage der Linie verschwindender Inclinationen aus solchen Beobachtungen abzuleiten, die in einiger Entfernung von ihr, bei mässigen Inclinationen, gemacht sind.

Von einer ähnlichen Hypothese war bereits vor 80 Jahren Tobias Mayer ausgegangen, nur mit der Modification, dass er den unendlich kleinen Magnet nicht in den Mittelpunkt der Erde, sondern etwa um den siebenten Theil des Erdhalbmessers davon entfernt setzte: doch behielt er, vermuthlich um grössere Verwicklung der Rechnung zu vermeiden, die an sich ganz willkürliche Beschränkung bei, dass die gegen die Axe des Magnets senkrechte Ebene durch den Mittelpunkt der Erde gehe. Auf diese Art fand er, bei einer freilich nur sehr kleinen Anzahl von Oertern, die beobachteten Abweichungen und Neigungen mit seiner Rechnung ganz gut übereinstimmend. Eine ausgedehntere Prüfung würde aber bald gezeigt haben, dass man mit jener Hypothese das Ganze der Erscheinungen dieser beiden Elemente nicht viel besser darstellen kann, als mit der zuerst erwähnten. Intensitätsbestimmungen gab es bekanntlich damals noch gar nicht.

Hansteen ist einen Schritt weiter gegangen, indem er die Hypothese *zweier* unendlich kleiner Magnete von ungleicher Lage und Stärke den Erscheinungen anzupassen versucht hat. Die entscheidende Prüfung der Zulässigkeit oder Unzulässigkeit einer Hypothese bleibt immer die Vergleichung der in ihr erhaltenen Resultate mit den Erfahrungen. Hansteen hat die seinige mit den Beobachtungen an 48 verschiedenen Oertern verglichen, unter denen sich jedoch nur 12 befinden, wo die Intensität mit bestimmt ist, und überhaupt nur 6, wo alle drei Elemente vorkommen. Wir treffen hier noch Differenzen zwischen der Rechnung und Beobachtung an, die bei der Inclination fast auf 13 Grad steigen *).

Wenn man nun so grosse Abweichungen den Forderungen nicht entsprechend findet, die an eine genügende Theorie gemacht werden müssen, so kann man nicht umhin, den Schluss zu ziehen, dass die magnetische Beschaffenheit des Erdkörpers keine solche ist, für welche eine Concentrirung in Einen oder ein Paar einzelne unendlich kleine Magnete als Stellvertreterin gelten könnte. Es wird damit nicht geleugnet, dass mit einer *grössern* Anzahl solcher fingirten Magnete zuletzt eine genügende Uebereinstimmung erreichbar werden könnte: allein eine ganz andere Frage ist, ob eine solche Form der Auflösung der Aufgabe gerathen sein würde; es scheint in der That, dass die schon bei zwei Magneten so

*) Bei der Declination kommt sogar einmal ein Unterschied von mehr als 29 Grad vor: allein es ist billig, den Fehler der Rechnung nicht nach der Zahl der Declinationsgrade, sondern nach der wirklichen Ungleichheit zwischen der berechneten und beobachteten ganzen Richtung zu schätzen, wo er bei dem in Rede stehenden Orte $11\frac{1}{2}$ Grad beträgt.

überaus beschwerlichen Rechnungen für eine bedeutend grössere Zahl der Ausführbarkeit unübersteigliche Schwierigkeiten entgegensetzen würden. Das Beste wird sein, diesen Weg ganz zu verlassen, der unwillkürlich an die Versuche erinnert, die Planetenbewegungen durch immer mehr gehäufte Epicykeln zu erklären.

In der gegenwärtigen Abhandlung werde ich die allgemeine Theorie des Erdmagnetismus, unabhängig von allen besondern Hypothesen über die Vertheilung der magnetischen Flüssigkeit im Erdkörper, entwickeln, und zugleich die Resultate mittheilen, welche ich aus der ersten Anwendung der Methode erhalten habe. So unvollkommen diese Resultate auch sein müssen, so werden sie doch einen Begriff davon geben können, was man hoffen darf in Zukunft zu erreichen, wenn einer feinern und wiederholten Ausfeilung derselben erst zuverlässige und vollständige Beobachtungen aus allen Gegenden der Erde werden untergelegt werden können.

1.

Die Kraft, welche einer in ihrem Schwerpunkte aufgehängten Magnetnadel an jedem Orte der Erde eine bestimmte Richtung ertheilt, indem jede fremde äussere Ursache, die auf die Nadel wirken könnte (wie die Nähe eines andern künstlichen Magnets, oder die Nähe des Leiters eines galvanischen Stroms) als beseitigt vorausgesetzt wird, nennt man die erdmagnetische Kraft, insofern man den Sitz ihrer Ursache nur in dem Erdkörper selbst suchen kann. Zweifelhaft ist allerdings, ob die regelmässigen und unregelmässigen stündlichen Aenderungen in jener Kraft nicht ihre nächsten Ursachen ausserhalb des Erdkörpers haben mögen, und es steht zu hoffen, dass die jetzt auf diese Erscheinungen allgemein gerichtete Aufmerksamkeit der Naturforscher uns darüber in Zukunft bedeutende Aufschlüsse geben werde. Allein man darf nicht vergessen, dass diese Änderungen vergleichungsweise nur sehr klein sind, und dass also eine viel stärkere beharrlich wirkende Hauptkraft da sein muss, deren Sitz wir in der Erde selbst annehmen. Es knüpft sich hieran sofort die Folgerung, dass die zur Untersuchung dieser Hauptkraft dienenden thatsächlichen Grundlagen eigentlich von den erwähnten anomalischen Aenderungen befreiet sein sollten, was nur durch Mittelwerthe aus zahlreichen fortgesetzten Beobachtungen möglich ist, und dass so lange solche reine Resultate nicht von einer grossen Anzahl von Punkten auf der ganzen Erdoberfläche vorhanden sind, das Höchste, was man wird erreichen können, eine Annäherung ist, wobei Differenzen von der Ordnung solcher Anomalien zurückbleiben können.

2.

Die Grundlage unserer Untersuchungen ist die Voraussetzung, dass die erdmagnetische Kraft die Gesammtwirkung der magnetisirten Theile des Erdkörpers ist. Das Magnetisirtsein stellen wir uns als eine Scheidung der magnetischen Flüssigkeit vor: diese Vorstellungsweise einmal angenommen, gehört die Wirkungsart dieser Flüssigkeiten (Abstossung oder Anziehung des Gleichnamigen oder Ungleichnamigen im verkehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung) zu den erwiesenen physikalischen Wahrheiten. Eine Vertauschung dieser Vorstellungsart mit der Ampèreschen, wonach, mit Beseitigung der magnetischen Flüssigkeiten, der Magnetismus nur in beharrlichen galvanischen Strömungen in den kleinsten Theilen der Körper besteht, würde in den Resultaten gar nichts abändern; dasselbe würde auch gelten, wenn man den Erdmagnetismus einer gemischten Ursache zuschreiben wollte, so dass derselbe theils aus Scheidung der magnetischen Flüssigkeiten in der Erde, theils aus galvanischen Strömungen in derselben herrührte, indem bekanntlich anstatt eines jeden galvanischen Stromes eine solche bestimmte Vertheilung von magnetischen Flüssigkeiten an einer von der Stromlinie begrenzten Fläche substituirt werden kann, dass dadurch in jedem Punkte des äussern Raumes genau dieselbe magnetische Wirkung ausgeübt wird, wie durch den galvanischen Strom.

3.

Zur Abmessung der magnetischen Flüssigkeiten legen wir, wie in der Schrift *Intensitas vis magneticae* etc., diejenige Quantität nordlichen Fluidums als positive Einheit zum Grunde, welche auf eine eben so grosse Quantität desselben Fluidums in der zur Einheit angenommenen Entfernung eine bewegende Kraft ausübt, die der zur Einheit angenommenen gleich ist. Wenn wir von der magnetischen Kraft, welche in irgend einem Punkte des Raumes, als Wirkung von anderswo befindlichem magnetischen Fluidum, schlechthin sprechen, so ist darunter immer

die bewegende Kraft verstanden, welche daselbst auf die Einheit des positiven magnetischen Fluidums ausgeübt wird. In diesem Sinne übt folglich die in Einem Punkt concentrirt gedachte magnetische Flüssigkeit μ in der Entfernung ρ die magnetische Kraft $\frac{\mu}{\rho\rho}$ aus, und zwar abstossend oder anziehend in der Richtung der geraden Linie ρ, je nachdem μ positiv oder negativ ist. Bezeichnet man durch a, b, c die Coordinaten von μ in Beziehung auf drei unter rechten Winkeln einander schneidende Axen; durch x, y, z die Coordinaten des Punkts, wo die Kraft ausgeübt wird, so dass $\rho = \sqrt{((x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2)}$, und zerlegt die Kraft den Coordinatenaxen parallel, so sind die Componenten

$$\frac{\mu(x-a)}{\rho^3}, \quad \frac{\mu(y-b)}{\rho^3}, \quad \frac{\mu(z-c)}{\rho^3}$$

welche, wie man leicht sieht, den partiellen Differentialquotienten von $-\frac{\mu}{\rho}$ nach x, y und z gleich sind.

Wirken ausser μ noch andere Theile magnetischen Fluidums, μ', μ'', μ''' u.s.w., concentrirt in Punkten, deren Entfernung von dem Wirkungsorte bezugweise ρ', ρ'', ρ''' u.s.w. ist, so sind die Componenten der ganzen daraus resultirenden magnetischen Kraft, parallel mit den Coordinatenaxen, gleich den partiellen Differentialquotienten von

$$-\left(\frac{\mu}{\rho}+\frac{\mu'}{\rho'}+\frac{\mu''}{\rho''}+\frac{\mu'''}{\rho'''}+ \text{ u.s.w.}\right)$$

nach x, y und z.

4.

Man übersieht hienach leicht, welche magnetische Kraft in jedem Punkte des Raumes von der Erde ausgeübt werde, wie auch die magnetischen Flüssigkeiten in derselben vertheilt sein mögen. Man denke sich das ganze Volumen der Erde, so weit es freien Magnetismus, d. i. geschiedene magnetische Flüssigkeiten enthält, in unendlich kleine Elemente zerlegt, bezeichne unbestimmt die in jedem Elemente enthaltene Menge freien magnetischen Fluidums mit $d\mu$, wobei südliches stets als negativ betrachtet wird; ferner mit ρ die Entfernung des $d\mu$ von einem unbestimmten Punkte des Raumes, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sein mögen, endlich mit V das Aggregat der $\frac{d\mu}{\rho}$ mit verkehrtem Zeichen durch die Gesammtheit aller magnetischen Theilchen der Erde erstreckt, oder es sei

$$V = -\int \frac{d\mu}{\rho}$$

Es hat also V in jedem Punkte des Raumes einen bestimmten Werth, oder es ist eine Function von x, y, z, oder auch von je drei andern veränderlichen Grössen, wodurch man die Punkte des Raumes unterscheidet. Die magnetische Kraft ψ in jedem Punkte des Raumes, und die Componenten ξ, η, ζ, die aus der Zerlegung von ψ parallel mit den Coordinatenaxen entstehen, finden sich dann durch die Formeln

$$\xi = \frac{dV}{dx}, \quad \eta = \frac{dV}{dy}, \quad \zeta = \frac{dV}{dz}, \quad \psi = \sqrt{(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta)}$$

5.

Es sollen nun zuvörderst einige allgemeine von der Form der Function V unabhängige Sätze entwickelt werden, die wegen ihrer Einfachheit und Eleganz merkwürdig sind.

Das vollständige Differential von V wird

$$\begin{aligned} dV &= \frac{dV}{dx}.dx + \frac{dV}{dy}.dy + \frac{dV}{dz}.dz \\ &= \xi dx + \eta dy + \zeta dz \end{aligned}$$

Bezeichnet man mit ds die Entfernung zwischen den beiden Punkten, auf welche sich V und $V + dV$ beziehen, und mit θ den Winkel, welchen die Richtung der magnetischen Kraft ψ mit ds macht, so wird

$$dV = \psi \cos\theta . ds$$

weil $\frac{\xi}{\psi}, \frac{\eta}{\psi}, \frac{\zeta}{\psi}$ die Cosinus der Winkel sind, welche die Richtung von ψ mit den Coordinatenaxen macht, hingegen $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel zwischen ds und denselben Axen. Es ist also $\frac{dV}{ds}$ gleich der auf die Richtung von ds projicirten Kraft; dasselbe folgt auch schon aus der Gleichung $\frac{dV}{dx} = \xi$, wenn man sich erinnert, dass die Coordinatenaxen nach Willkür gewählt werden können.

6.

Werden zwei Punkte im Raume, P^0, P' durch eine beliebige Linie verbunden, wovon ds ein unbestimmtes Element vorstellt, und bedeutet wie vorhin θ den Winkel zwischen ds und der Richtung der daselbst Statt findenden

magnetischen Kraft, und ψ deren Intensität, so ist

$$\int \psi \cos\theta . ds = V' - V^0$$

wenn man die Integration durch die ganze Linie ausdehnt, und mit V^0, V' die Werthe von V an den Endpunkten bezeichnet.

Folgende Corollarien dieses fruchtbaren Satzes verdienen hier besonders angeführt zu werden:

I. Das Integral $\int \psi \cos\theta . ds$ behält einerlei Werth: auf welchem Wege man auch von P^0 nach P' übergeht.

II. Das Integral $\int \psi \cos\theta . ds$ durch die ganze Länge irgend einer in sich zurückkehrenden Linie ausgedehnt, ist immer $= 0$.

III. In einer geschlossenen Linie muss, wenn nicht durchgehends $\theta = 90^0$ ist, ein Theil der Werthe von θ kleiner und ein Theil grösser als 90^0 sein.

7.

Die Fläche, in deren sämmtlichen Punkten V einerlei bestimmten Werth $= V^0$ hat, scheidet die Punkte des Raumes, in welchen V einen Werth grösser als V^0 hat, von denen, wo der Werth kleiner als V^0 ist*). Aus dem Satz des Art. 5. folgt leicht, dass die magnetische Kraft in jedem Punkte dieser Fläche eine gegen die Fläche senkrechte Richtung hat, und zwar nach der Seite zu, auf welcher die grössern Werthe von V Statt finden. Ist ds eine unendlich kleine gegen die Fläche senkrechte Linie, und $V^0 + dV^0$ der Werth von V an dem andern Endpunkte derselben, so wird die Intensität der magnetischen Kraft $= \frac{dV^0}{ds}$. Die Gesammtheit der Punkte, wofür $V = V^0 + dV^0$ ist, bildet eine zweite der ersten unendlich nahe Fläche, und an den verschiedenen Stellen des ganzen Zwischenraumes ist die Intensität der magnetischen Kraft der Entfernung beider Flächen von einander verkehrt proportional. Lässt man V durch unendlich kleine aber gleiche Stufen sich ändern, so entsteht dadurch ein System

*) Könnte die Function V jede willkürlich aufgestellte Form haben, so könnte in besondern Fällen ein Maximum- oder Minimum-Werth von V einem isolirten Punkte oder einer isolirten Linie entsprechen, um welchen oder um welche ringsum bloss kleinere oder bloss grössere Werthe Statt finden würden, oder auch einer Fläche, auf deren *beiden* Seiten zugleich kleinere oder grössere Werthe gälten. Allein die Bedingungen, denen die Function V unterworfen ist, lassen diese Ausnahmsfälle nicht zu. Eine ausführliche Entwickelung dieses Gegenstandes muss aber, da sie für unsern gegenwärtigen Zweck unnöthig ist, einer andern Gelegenheit vorbehalten bleiben.

von Flächen, die den Raum in unendlich dünne Schichten abtheilen, und die verkehrte Proportionalität der Dicke der Schichten zu der Intensität der magnetischen Kraft gilt dann nicht bloss für verschiedene Stellen einer und derselben Schicht, sondern auch für verschiedene Schichten.

8.

Wir wollen nun das Verhalten der Werthe von V auf der Oberfläche der Erde betrachten.

Es sei in einem Punkte P der Erdoberfläche ψ die Intensität, PM die Richtung der ganzen magnetischen Kraft; ω die Intensität, PN die Richtung der auf die horizontale Ebene projicirten Kraft, oder PN die Richtung des magnetischen Meridians, in dem Sinn vom Südpol der Magnetnadel zum Nordpol; i der Winkel zwischen PM und PN oder die Inclination; θ, t die Winkel zwischen dem Elemente ds einer auf der Erdoberfläche liegenden Linie und den Richtungen PM, PN; endlich entsprechen V und $V + dV$ dem Anfangs- und Endpunkte von ds. Wir haben folglich

$$\cos\theta = \cos i \cos t, \qquad \omega = \psi \cos i$$

und die Gleichung des Art. 5. verwandelt sich in

$$dV = \omega \cos t . ds$$

Sind also zwei Punkte P^0, P' auf der Erdoberfläche, in welchen V die Werthe V^0, V' hat, durch eine ganz auf der Erdoberfläche liegende Linie verbunden, von welcher ds ein unbestimmtes Element bedeutet, so ist

$$\int \omega \cos t . ds = V' - V^0$$

wenn die Integration durch die ganze Linie ausgedehnt wird, und offenbar gelten nun auch hier drei den im Art. 6. angeführten ganz ähnliche Corollarien, nemlich:

I. Das Integral $\int \omega \cos t ds$ behält einerlei Werth, auf welchem Wege auf der Oberfläche der Erde man auch von P^0 nach P' übergeht.

II. Das Integral $\int \omega \cos t . ds$ durch die ganze Länge einer auf der Oberfläche der Erde liegenden geschlossenen Linie ist immer $= 0$.

III. In einer solchen geschlossenen Linie muss nothwendig, falls nicht

durchgehends $t = 90^0$ ist, ein Theil der Werthe von t spitz und ein Theil stumpf sein.

9.

Die Sätze I. und II. des vorhergehenden Artikels (welche eigentlich nur zwei verschiedene Einkleidungen derselben Sache sind) lassen sich wenigstens näherungsweise an wirklichen Beobachtungen prüfen. Es sei $P^0 P' P'' \ldots P^0$ ein Polygon auf der Erdoberfläche, dessen Seiten die kürzesten Linien zwischen ihren Endpunkten, also, wenn man die Erde hier nur als kugelförmig betrachtet, grösste Kreisbögen sind. Es seien ω^0, ω', ω'' u. s. w. die Intensitäten der horizontalen magnetischen Kraft in den Punkten P^0, P', P'' u. s. w.; ferner δ^0, δ', δ'' u. s. w. die Declinationen, die man nach üblicher Weise westlich vom Nordpunkte als positiv, östlich als negativ betrachten mag: endlich sei (01) das Azimuth der Linie $P^0 P'$ in P^0, und zwar nach üblicher Weise von Süden aus nach Westen herumgezählt; eben so (10) das Azimuth derselben Linie rückwärts genommen in P' u. s. w.

Man bemerke, dass t zwar in jeder Polygonseite sich nach der Stetigkeit ändert, in den Eckpunkten hingegen sprungsweise, und also in diesen zwei verschiedene Werthe hat; z. B. in P' hat t

den Werth $(10) + \delta'$, insofern P' der Endpunkt von $P^0 P'$ ist,

den Werth $180^0 + (12) + \delta'$, insofern P' der Anfangspunkt von $P' P''$ ist.

Von dem Integral $\int \omega \cos t . ds$, durch $P^0 P'$ ausgedehnt, kann man als genäherten Werth betrachten

$$\tfrac{1}{2}(\omega^0 \cos t^0 + \omega' \cos t') . P^0 P'$$

wenn t^0, t' die Werthe von t in P^0 als Anfangspunkt und in P' als Endpunkt von $P^0 P'$ bedeuten; diese Annäherung ist alles, was man erlangen kann, insofern man die Werthe von ω und t eben nur in den Endpunkten P^0, P' hat, und sie ist um so zulässiger, je kleiner die Linie ist. Der angegebene Ausdruck ist in unsern Bezeichnungen

$$= \tfrac{1}{2}\{\omega' \cos((10) + \delta') - \omega^0 \cos((01) + \delta^0)\} . P^0 P'$$

Auf ähnliche Art ist der genäherte Werth des Integrals, durch $P' P''$ ausgedehnt,

$$= \tfrac{1}{2}\{\omega'' \cos((21)+\delta'') - \omega' \cos((12)+\delta')\} . P'P''$$

u. s. f. durch das ganze Polygon.

Für ein Dreieck gibt also unser Satz die näherungsweise richtige Gleichung

$$\begin{aligned} &\omega^0 \{P^0P' \cos((01)+\delta^0) - P^0P'' \cos((02)+\delta^0)\} \\ +&\omega' \{P'P'' \cos((12)+\delta') - P^0P' \cos((10)+\delta')\} \\ +&\omega'' \{P^0P'' \cos((20)+\delta'') - P'P'' \cos((21)+\delta'')\} \\ =& 0 \end{aligned}$$

Offenbar sind bei dieser Gleichung die Einheiten für die Intensitäten und Distanzen willkürlich.

10.

Als ein Beispiel wollen wir die Formel auf die magnetischen Elemente von

Göttingen	$\delta^0 = 18^0\,38'$	$i^0 = 67^0\,56'$	$\psi^0 = 1,357$
Mailand	$\delta' = 18\ 33$	$i' = 63\ 49$	$\psi' = 1,294$
Paris	$\delta'' = 22\ \ 4$	$i'' = 67\ 24$	$\psi'' = 1,348$

anwenden, woraus

$$\omega^0 = 0,50980$$
$$\omega' = 0,57094$$
$$\omega'' = 0,51804$$

folgt. Legt man die geographische Lage

Göttingen	$51^0\,32'$ Breite	$9^0\,58'$ Länge von Greenwich
Mailand	45 28	9 9
Paris	48 52	2 21

zum Grunde, und führt die Rechnung nur wie auf der Kugelfläche, so findet sich

$$\left.\begin{aligned}(01) &= 5^0\,11'\,31'' \\ (10) &= 184\ 35\ 35\end{aligned}\right\} P^0P' = 6^0\ \ 5'\,20''$$

$$\left.\begin{aligned}(12) &= 128\ 47\ 31 \\ (21) &= 303\ 48\ \ 1\end{aligned}\right\} P'P'' = 5\ 44\ \ 6$$

$$\left.\begin{aligned}(20) &= 238\ 20\ 20 \\ (02) &= 64\ 10\ 12\end{aligned}\right\} P^0P'' = 5\ 32\ \ 4$$

Substituirt man diese Werthe, und die obigen von $\delta^0, \delta', \delta''$ in unsrer Gleichung, indem man die Distanzen in Secunden ausdrückt, so wird sie

$$0 = 17556\,\omega^0 + 2774\,\omega' - 20377\,\omega''$$

oder

$$\omega'' = 0,86158\,\omega^0 + 0,13613\,\omega'$$

Aus den beobachteten horizontalen Intensitäten in Göttingen und Mailand folgt hienach die für Paris $\omega'' = 0,51696$, fast genau mit dem beobachteten Werthe 0,51804 übereinstimmend.

Uebrigens sieht man leicht, dass, wenn man sich erlauben will, anstatt der Distanzen P^0P' u. s. w. ihre Sinus zu setzen, die obige Formel unmittelbar durch die geographischen Längen und Breiten der Örter ausgedrückt werden kann.

11.

Die Linie auf der Erdoberfläche, in deren sämmtlichen Punkten V einerlei bestimmten Werth $= V^0$ hat, scheidet, allgemein zu reden, die Theile jener Fläche, in welchen V einen Werth grösser als V^0 hat, von denen, wo er kleiner ist. Die horizontale magnetische Kraft in jedem Punkte dieser Linie ist offenbar senkrecht gegen dieselbe, und zwar nach der Seite zu gerichtet, wo die grössern Werthe von V Statt finden. Ist $\mathrm{d}s$ eine unendlich kleine Linie in dieser Richtung, und $V^0 + \mathrm{d}V^0$ der Werth von V an deren anderm Endpunkte, so ist $\frac{\mathrm{d}V^0}{\mathrm{d}s}$ die Intensität der horizontalen magnetischen Kraft an dieser Stelle. So wie nun auch hier die Gesammtheit der Punkte, welchen der Werth $V = V^0 + \mathrm{d}V^0$ entspricht, eine zweite der ersten unendlich nahe liegende Linie bildet, also aus der ganzen Erdfläche eine *Zone* aussondert, innerhalb welcher die Werthe von V zwischen V^0 und $V^0 + \mathrm{d}V^0$ liegen, und wo die horizontale Intensität der Breite der Zone verkehrt proportional ist, so wird, wenn man V durch unendlich kleine aber gleiche Stufen von dem kleinsten auf der Erdoberfläche Statt habenden Werthe bis zum grössten sich ändern lässt, die ganze Erdfläche in eine unendlich grosse Anzahl unendlich schmaler Zonen abgetheilt, gegen deren Scheidungslinien die horizontale magnetische Kraft überall normal, und in ihrer Intensität der Breite der Zonen an den betreffenden Stellen verkehrt proportional ist. Den beiden äussersten Werthen von V entsprechen hiebei zwei von den Zonen eingeschlossene Punkte, in welchen die horizontale Kraft $= 0$ wird, und wo also die ganze magnetische Kraft nur vertical sein kann: diese Punkte heissen die magnetischen Pole der Erde.

Die Scheidungslinien der Zonen sind nichts anderes, als die Schnitte der im 7. Art. betrachteten Flächen mit der Erdoberfläche, während in den Polen nur Berührung Statt findet.

12.

Die im vorhergehenden Artikel beschriebene Gestaltung des Liniensystems ist eigentlich nur der einfachste Typus, der mancherlei Ausnahmen erleiden könnte, wenn jede mögliche Vertheilung des Magnetismus in der Erde berücksichtigt werden sollte. Wir werden indess hier diesen Gegenstand nicht erschöpfen, sondern zur Erläuterung nur einige Bemerkungen über die Ausnahmsfälle beifügen, zumal da bei der *wirklichen* magnetischen Beschaffenheit der Erde das Liniensystem auf ihrer Oberfläche allerdings jene Gestaltung hat, wenigstens gewiss keine ins Grosse gehende Ausnahmsfälle darbietet, sondern höchstens vielleicht hie und da einen bloss localen.

Von einigen Physikern ist die Meinung aufgestellt, dass die Erde zwei magnetische Nordpole und zwei Südpole habe: es scheint aber nicht, dass vorher der wesentlichsten Bedingung genügt, und eine *präcise* Begriffsbestimmung gegeben sei, was man unter einem magnetischen Pole verstehen wolle. Wir werden mit dieser Benennung jeden Punkt der Erdoberfläche bezeichnen, wo die horizontale Intensität $= 0$ ist: allgemein zu reden ist also daselbst die Inclination $= 90°$; es ist aber auch der singuläre Fall (wenn er vorkäme) mit eingeschlossen, wo die ganze Intensität $= 0$ ist. Wollte man diejenigen Stellen magnetische Pole nennen, wo die ganze Intensität einen Maximumwerth hat (d. i. einen grössern, als ringsherum in der nächsten Umgebung): so darf man nicht vergessen, dass dies etwas von jener Begriffsbestimmung ganz verschiedenes ist, dass letztere Punkte mit jenen weder dem Orte noch der Anzahl nach einen nothwendigen Zusammenhang haben, und dass es zur Verwirrung führt, wenn man ungleichartige Dinge mit einerlei Namen benannt werden.

Sehen wir von der wirklichen Beschaffenheit der Erde ab, und fassen die Frage allgemein auf, so können allerdings mehr als zwei magnetische Pole existiren; es scheint aber noch nicht bemerkt zu sein, dass sobald z. B. zwei Nordpole vorhanden sind, es nothwendig zwischen ihnen noch einen dritten Punkt

geben muss, der gleichfalls ein magnetischer Pol, aber eigentlich weder ein Nordpol noch ein Südpol, oder, wenn man lieber will, beides zugleich ist.

Zur Aufklärung dieses Gegenstandes ist nichts dienlicher, als die Betrachtung unsers Liniensystems.

Wenn die Function V in einem Punkte der Erdoberfläche P^* einen Maximumwerth V^* hat, also ringsum kleinere Werthe, so wird einer Reihe von stufenweise abnehmenden Werthen ein System von Ringlinien entsprechen, deren jede alle vorhergehenden und den Punkt P^* einschliesst, und die Richtung der horizontalen magnetischen Kraft oder des Nordpols der Magnetnadel wird auf jeder dieser Ringlinien *nach Innen* gehen *): dies ist das charakteristische Merkmal eines magnetischen Nordpols **). Man kann offenbar die Ringe so klein, oder die entsprechenden Werthe der Function V so wenig von V^* verschieden annehmen, dass jeder andere gegebene Punkt noch ausserhalb bleibt.

Wir wollen mit S den Inbegriff aller Punkte auf der Erdoberfläche bezeichnen, in welchen der Werth von V grösser ist als eine gegebene Grösse W. Offenbar wird S entweder Einen zusammenhängenden Flächenraum bilden, oder mehrere von einander getrennte, und *in* der Begrenzungslinie oder den Begrenzungslinien, welche dieselbe von den übrigen Theilen, wo V kleiner als W ist, scheiden, wird $V = W$ sein. Lässt man W ab- oder zunehmen, so erweitert oder verengt sich jener Flächenraum.

Nehmen wir nun an, P^{**} sei ein zweiter Punkt von ähnlicher Beschaffenheit wie P^*, so dass auch in jenem V einen Maximumwerth $= V^{**}$ habe. Da man, nach dem was vorhin bemerkt ist, der Grösse W einen Werth kleiner als V^* und so wenig davon verschieden beilegen kann, das P^{**} ausserhalb desjenigen Stücks von S fällt, in welchem P^* liegt, so wird, wenn man voraussetzt, dass V^{**} nicht kleiner ist als V^* (was erlaubt ist), mithin auch grösser als W,

*) Diese Ringlinien sind, selbst als unendlich klein angenommen, nicht nothwendig kreisrund, sondern allgemein zu reden elliptisch, und daher die gegen sie normale Richtung der Magnetnadel nicht mit der Richtung nach P^* zusammenfallend, ausser an vier Stellen jedes Ringes. Man kann daher bedeutende Fehler begehen, wenn man den Durchschnitt von zwei verlängerten Compassrichtungen, aus beträchtlichen Entfernungen, ohne Weiteres für P^* annimmt.

**) Wir conformiren uns hier dem gewöhnlichen Sprachgebrauche, wonach man den von Capitaine Ross festgelegten Punkt mit jenem Namen belegt, obgleich er eigentlich ein Südpol ist, insofern man die Erde selbst wie einen Magnet betrachtet.

nothwendig auch P'' einem Stück von S angehören: es liegen folglich P' und P'' zwar beide in S, aber in getrennten Stücken von S.

Offenbar kann man dagegen auch W so klein annehmen, dass P' und P'' in Einem zusammenhängenden Stücke von S liegen, da, wenn man nur W klein genug nimmt, S die ganze Erdfläche umfassen kann.

Lässt man nun W alle Werthe vom ersten zum zweiten stufenweise durchlaufen, so muss einer darunter V''' der letzte sein, für welchen P', P'' noch in getrennten Stücken von S liegen, welche, sobald W von da noch weiter abnimmt, in Ein Stück zusammenfliessen.

Geschieht dieses Zusammenfliessen in Einem Punkte P''', so hat die Begrenzungslinie, in welcher $V = V'''$ ist, die Gestalt einer Acht, die in jenem Punkte sich selbst kreuzt, und man überzeugt sich leicht, dass daselbst die horizontale Intensität $= 0$ sein muss. In der That geschieht jene Kreuzung entweder unter einem messbaren Winkel, oder nicht. Im erstern Fall müsste die horizontale Kraft, wenn sie nicht $= 0$ wäre, gegen zwei verschiedene Tangenten normal sein, was absurd ist; im zweiten Falle, wo die beiden Hälften der Acht in P''' einander berühren, oder einerlei Tangente haben würden, könnte die gegen diese Tangente normale Kraft nur gegen das Innere der einen Flächenhälfte der Acht gerichtet sein, was einen Widerspruch enthält, da der Werth von V nach beiden Seiten zu wächst; es ist also P''' nach unserer Definition ein wahrer magnetischer Pol, aber ein Pol, welcher in Beziehung auf die zunächstliegenden Punkte innerhalb der beiden Öffnungen der Acht wie ein Südpol, in Beziehung auf die ausserhalb liegenden hingegen wie ein Nordpol betrachtet werden muss. Zur Erläuterung dieser Gestaltung des Liniensystems kann die Fig. 1. dienen.

Geschieht das Zusammenfliessen an zwei verschiedenen Stellen zugleich, so gilt von diesen dasselbe, was eben von Einem Punkte bewiesen ist, und man sieht leicht ein, dass sich dann innerhalb des P' und P'' einschliessenden Raumes ein inselförmiger Raum bilden wird, der bei fortwährender Abnahme von W sich immer mehr verengen, und zuletzt nothwendig in einen wahren Südpol auflösen muss.

Ähnliches gilt, wenn das Zusammenfliessen zugleich in drei oder mehrern einzelnen Punkten Statt findet. Geschieht es aber auf einmal in einer ganzen Linie, so muss auch in allen Punkten derselben die horizontale Kaft verschwinden.

Übrigens ist von selbst klar, dass eben so die Annahme von zwei *Südpolen* zugleich das Dasein eines dritten Polpunkts bedingt, welcher weder Südpol noch Nordpol, oder vielmehr beides zugleich ist.

13.

Aus dem, was im vorhergehenden Artikel entwickelt ist, übersieht man nun leicht, welche Bewandtniss es mit mehrern denkbaren Ausnahmen von dem einfachsten Typus unsers Liniensystems habe. Der Inbegriff aller Punkte, denen ein bestimmter Werth von V entspricht, kann eine Linie sein, die aus mehrern Stücken besteht, wovon jedes in sich selbst zurückkehrt, die aber ganz von einander getrennt sind; es kann eine Linie sein, die sich selbst kreuzt; endlich kann es auch eine solche sein, der auf beiden Seiten Flächenräume anliegen, wo V grösser ist als in der Linie, oder auf beiden Seiten kleiner.

Wir können behaupten, dass etwas ins Grosse gehende Abweichungen solcher Art vom einfachsten Typus auf der Erde nicht Statt finden. Aber locale Abweichungen sind sehr wohl denkbar, wo nahe unter der Erdoberfläche magnetische Massen sich befinden, die zwar in etwas beträchtlicher Entfernung keine merkliche Wirkung mehr ausüben, aber in der unmittelbaren Umgebung doch eine so starke, dass die in regelmässiger Fortschreitung wirkende erdmagnetische Kraft davon ganz überboten und unkenntlich gemacht wird. In der einfachsten Form könnte dann das Liniensystem in einer solchen Gegend eine Gestaltung haben, wie die 2^{te} Figur versinnlicht.

14.

Nach dieser geometrischen Darstellung der Verhältnisse der horizontalen magnetischen Kraft schreiten wir zur Entwicklung der Art, wie sie dem Calcül unterworfen werden, fort. Auf der Oberfläche der Erde geht V in eine blosse Function zweier veränderlichen Grössen über, wofür wir die geographische Länge von einem beliebigen ersten Meridian östlich gezählt und die Distanz vom Nordpol annehmen wollen: jene soll mit λ, diese, das Complement der geographischen Breite, mit u bezeichnet werden. Betrachten wir die Erde als aus der Umdrehung einer Ellipse, deren halbe grosse Axe $= R$, die halbe kleine $= (1-\varepsilon) R$, um letztere entstanden, so ist die Grösse eines Elements des Meridians

$$= \frac{(1-\varepsilon)^2 R \,.\, \mathrm{d}u}{(1-(2\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und die Grösse eines Elements des Parallelkreises

$$= \frac{R \sin u \,.\, \mathrm{d}\lambda}{\sqrt{(1-(2\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)\cos u^2)}}$$

Zerlegt man die horizontale magnetische Kraft in zwei Theile, wovon der eine X in der Richtung des Erdmeridians, der andere Y senkrecht dagegen wirkt, und betrachtet man als positiv X, insofern diese Componente nach Norden, und Y, insofern diese nach Westen gerichtet ist, so wird

$$X = -\frac{(1-(2\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\varepsilon)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{R\,\mathrm{d}u}$$

$$Y = -\sqrt{(1-(2\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)\cos u^2)} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{R \sin u \,.\, \mathrm{d}\lambda}$$

Die ganze horizontale Kraft wird sodann

$$= \sqrt{(XX+YY)}$$

und die Tangente der Declination

$$= \frac{Y}{X}$$

Vernachlässigt man das Quadrat der Abplattung ε, so werden jene Ausdrücke

$$X = -(1+(2-3\cos u^2)\varepsilon) \cdot \frac{\mathrm{d}V}{R\,\mathrm{d}u}$$

$$Y = -(1-\varepsilon\cos u^2) \cdot \frac{\mathrm{d}V}{R\sin u \,.\, \mathrm{d}\lambda}$$

oder wenn man die Abplattung ganz bei Seite setzt

$$X = -\frac{\mathrm{d}V}{R\,\mathrm{d}u}$$

$$Y = -\frac{\mathrm{d}V}{R\sin u \,.\, \mathrm{d}\lambda}$$

Die bis jetzt zu Gebote stehenden Beobachtungsdata sind noch viel zu dürftig, und die meisten derselben viel zu roh, als dass es gegenwärtig schon rathsam sein könnte, die sphäroidische Gestalt der Erde zu berücksichtigen, was zwar an sich nicht schwer sein, aber die Einfachheit der Rechnungen ohne allen Nutzen

sehr beeinträchtigen würde. Wir werden daher hier bei den zuletzt angeführten Formeln stehen bleiben, indem wir die Erde wie eine Kugel betrachten, deren Halbmesser $= R$ ist.

15.

Ist X durch eine gegebene Function von u und λ ausgedrückt, so lässt sich daraus Y a priori ableiten. Man setze das Integral $\int_0^u X\mathrm{d}u = T$, indem man bei der Integration λ wie constant betrachtet; offenbar wird dann, wenn man auf gleiche Weise nach u differentiirt, $\frac{\mathrm{d}(V+RT)}{\mathrm{d}u} = 0$, mithin $V+RT$ eine von u unabhängige Grösse, oder was dasselbe ist, in allen Punkten Eines Meridians constant; sie muss daher auch absolut constant sein, weil alle Meridiane in den Polen zusammenlaufen. Setzt man den Werth von V im Nordpole $= V^*$, so wird also

$$T = \frac{V^* - V}{R}$$

und daher

$$Y = \frac{\mathrm{d}T}{\sin u \,.\, \mathrm{d}\lambda}$$

Man kann dieses Resultat auch so ausdrücken:

$$Y = \frac{1}{\sin u}\int_0^u \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\lambda} \,.\, \mathrm{d}u$$

16.

Dieser merkwürdige Satz, dass *wenn die nach Norden gerichtete Componente der horizontalen magnetischen Kraft für die ganze Erdoberfläche gegeben ist, die nach Westen (oder Osten) gerichtete Componente von selbst daraus folgt*, gilt verkehrt nur mit einer Modification. Ist nemlich Y durch eine gegebene Function von u und λ ausgedrückt, und bezeichnet man mit U das unbestimmte Integral $\int \sin u \,.\, Y \mathrm{d}\lambda$, bei der Integration u als constant angenommen, so wird $\frac{\mathrm{d}(V+RU)}{\mathrm{d}\lambda} = 0$, oder $V+RU$ eine von λ unabhängige Grösse, mithin allgemein zu reden eine Function von u. Es ist also auch $\frac{\mathrm{d}(V+RU)}{R\,\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u} - X$ eine solche Function, d. i. die Formel $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}u}$ gibt einen unvollständigen Ausdruck von X, indem ein bloss u enthaltender Bestandtheil unbestimmt bleibt. Dieser Mangel wird sich aber ergänzen lassen, wenn man ausser dem Ausdrucke für Y auch den für X in irgend Einem bestimmten Meridian, oder noch allgemeiner in irgend einer vom

Nordpol zum Südpol reichenden Linie besitzt. Man sieht also, dass, *wenn man die Componente der horizontalen magnetischen Kraft in der Richtung nach Westen für die ganze Erdoberfläche, und die Componente in der Richtung nach Norden für alle Punkte in irgend einer vom Nordpol zum Südpol gehenden Linie kennt, die letztere Componente für die ganze Erdfläche von selbst daraus folgt.*

17.

Die vorhergehenden Untersuchungen beziehen sich allein auf den horizontalen Theil der erdmagnetischen Kraft: um auch den verticalen zu umfassen, müssen wir die Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit, also V wie eine Function von *dreien* veränderlichen Grössen betrachten, die den Platz eines unbestimmten Punktes im Raume O ausdrücken. Wir wählen dazu die Entfernung r vom Mittelpunkte der Erde, den Winkel u, welchen r mit dem nordlichen Theile der Erdaxe macht, und den Winkel λ zwischen der durch r und die Erdaxe gelegten Ebene und einem festen Meridian, nach Osten zu als positiv gezählt.

Es sei die Function V in eine nach den Potenzen von r fallende Reihe entwickelt, der wir folgende Form geben

$$V = \frac{RRP^0}{r} + \frac{R^3 P'}{rr} + \frac{R^4 P''}{r^3} + \frac{R^5 P'''}{r^4} + \text{u. s. w.}$$

Die Coëfficienten P^0, P', P'' u. s. w. sind hier Functionen von u und λ; um zu übersehen, wie sie mit der Vertheilung des magnetischen Fluidums im Innern der Erde zusammenhängen, sei $\mathrm{d}\mu$ ein Element desselben, ρ seine Entfernung von O, und für $\mathrm{d}\mu$ bedeuten r^0, u^0, λ^0 dasselbe, was r, u, λ für O sind. Man hat also $V = -\int\frac{\mathrm{d}\mu}{\rho}$ durch alle $\mathrm{d}\mu$ ausgedehnt; ferner

$$\rho = \sqrt{\{rr - 2rr^0(\cos u \cos u^0 + \sin u \sin u^0 \cos(\lambda - \lambda^0)) + r^0 r^0\}}$$

und wenn man $\frac{1}{\rho}$ in die Reihe entwickelt

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\left(T^0 + T'.\frac{r^0}{r} + T''.\frac{r^0 r^0}{rr} + \text{u. s. w.}\right)$$

so wird

$$RRP^0 = -\int T^0 \mathrm{d}\mu, \quad R^3 P' = -\int T' r^0 \mathrm{d}\mu, \quad R^4 P'' = -\int T'' r^0 r^0 \mathrm{d}\mu \ \text{u. s. w.}$$

Da $T^0 = 1$ ist, so wird vermöge der Fundamentalvoraussetzung, dass die Menge des positiven und negativen Fluidums in jedem messbaren Theilchen seines Trägers, mithin auch in der *ganzen* Erde, gleich gross, oder dass $\int \mathrm{d}\mu = 0$ ist,

$$P^0 = 0$$

oder das erste Glied unsrer Reihe für V fällt aus.

Man sieht ferner, dass P' die Form hat

$$R^3 P' = \alpha \cos u + \mathfrak{b} \sin u \cos\lambda + \gamma \sin u \sin\lambda$$

wo $\alpha = -\int r^0 \cos u^0 . \mathrm{d}\mu$, $\mathfrak{b} = -\int r^0 \sin u^0 \cos\lambda^0 \mathrm{d}\mu$, $\gamma = -\int r^0 \sin u^0 \sin\lambda^0 . \mathrm{d}\mu$. Es sind also $-\alpha$, $-\mathfrak{b}$, $-\gamma$ nach der in der *Intensitas vis magneticae* Art. 5 festgesetzten Erklärung die Momente des Erdmagnetismus in Beziehung auf drei rechtwinklige Axen, wovon die erste die Erdaxe, die zweite und dritte die Aequatorsradien für die Länge 0 und 90^0 sind.

Die allgemeinen Formeln für alle Coëfficienten der Reihe für $\frac{1}{\rho}$ können wir als bekannt voraussetzen; für unsern Zweck ist aber bloss nöthig zu bemerken, dass in Beziehung auf u und λ die Coëfficienten rationale ganze Functionen von $\cos u$, $\sin u \cos\lambda$ und $\sin u \sin\lambda$ sind, und zwar T'' von der zweiten Ordnung, T''' von der dritten u. s. w. Dasselbe gilt also auch für die Coëfficienten P'', P''' u. s. w.

Die Reihen für $\frac{1}{\rho}$ und für V convergiren, solange r nicht kleiner als R ist, oder vielmehr, nicht kleiner, als der Halbmesser einer Kugel, welche die sämmtlichen magnetischen Theile der Erde einschliesst.

18.

Die Function V thut, in Folge ihrer Zusammensetzung aus $-\int\frac{\mathrm{d}\mu}{\rho}$, folgender partiellen Differentialgleichung Genüge:

$$0 = \frac{r\,\mathrm{dd}\,rV}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}u^2} + \operatorname{cotg} u . \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}u} + \frac{1}{\sin u^2} . \frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}\lambda^2}$$

welche nichts anderes ist, als eine Umformung der bekannten

$$0 = \frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}z^2}$$

wo x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten von O bedeuten. Substituirt man in jener den Werth von V

$$V = \frac{R^3 P'}{rr} + \frac{R^4 P''}{r^3} + \frac{R^5 P'''}{r^4} + \text{u. s. w.}$$

so erhellt, dass für die einzelnen Coëfficienten P', P'', P''' u. s. w. gleichfalls partielle Differentialgleichungen Statt finden, deren allgemeiner Ausdruck ist

$$0 = n(n+1)P^{\mathrm{n}} + \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}P^{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}u^2} + \operatorname{cotg} u \frac{\mathrm{d}P^{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}u} + \frac{1}{\sin u^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}P^{\mathrm{n}}}{\mathrm{d}\lambda^2}$$

Aus dieser Gleichung, verbunden mit der Bemerkung im vorhergehenden Artikel, ergibt sich die allgemeine Form von P^{n}. Bezeichnet man nemlich mit $P^{\mathrm{n,m}}$ folgende Function von u

$$\Big\{\cos u^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos u^{n-m-2} + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} \cos u^{n-m-4} - \text{u. s. w.}\Big\} \sin u^m$$

so hat P^{n} die Form eines Aggregats von $2n+1$ Theilen

$$P^{\mathrm{n}} = g^{\mathrm{n},0} P^{\mathrm{n},0} + (g^{\mathrm{n},1} \cos\lambda + h^{\mathrm{n},1} \sin\lambda) P^{\mathrm{n},1} + (g^{\mathrm{n},2} \cos 2\lambda + h^{\mathrm{n},2} \sin 2\lambda) P^{\mathrm{n},2} + \text{etc.} + (g^{\mathrm{n,n}} \cos n\lambda + h^{\mathrm{n,n}} \sin n\lambda) P^{\mathrm{n,n}}$$

wo $g^{\mathrm{n},0}$, $g^{\mathrm{n},1}$, $h^{\mathrm{n},1}$, $g^{\mathrm{n},2}$ u. s. w. bestimmte Zahlcoëfficienten sind.

19.

Zerlegt man die in dem Punkte O Statt findende magnetische Kraft in drei auf einander senkrechte X, Y, Z, wovon die dritte gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet ist, X und Y also die durch O gelegte mit der Erde concentrische Kugelfläche berühren, und zwar X in der durch O und die Erdaxe gelegten Ebene nach Norden, Y parallel mit dem Erdäquator nach Westen, so wird

$$X = -\frac{\mathrm{d}V}{r\,\mathrm{d}u}, \quad Y = -\frac{\mathrm{d}V}{r \sin u\, \mathrm{d}\lambda}, \quad Z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

folglich

$$X = -\frac{R^3}{r^3}\left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}u} + \frac{R}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}P''}{\mathrm{d}u} + \frac{RR}{rr} \cdot \frac{\mathrm{d}P'''}{\mathrm{d}u} + \text{u. s. w.}\right)$$

$$Y = -\frac{R^3}{r^3 \sin u}\left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{R}{r} \cdot \frac{\mathrm{d}P''}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{RR}{rr} \cdot \frac{\mathrm{d}P'''}{\mathrm{d}\lambda} + \text{u. s. w.}\right)$$

$$Z = \frac{R^3}{r^3}\left(2P' + \frac{3RP''}{r} + \frac{4RRP'''}{rr} + \text{u. s. w.}\right)$$

Auf der Oberfläche der Erde sind X, Y dieselben horizontalen Componenten, welche oben mit diesen Buchstaben bezeichnet sind, und Z ist die verticale, positiv, wenn nach unten gerichtet. Die Ausdrücke für diese Kräfte auf der Oberfläche der Erde sind also

$$X = -\left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}P''}{\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}P'''}{\mathrm{d}u} + \text{u. s. w.}\right)$$

$$Y = -\frac{1}{\sin u}\left(\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\mathrm{d}P''}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\mathrm{d}P'''}{\mathrm{d}\lambda} + \text{u. s. w.}\right)$$

$$Z = 2P' + 3P'' + 4P''' + \text{u. s. w.}$$

20.

Verbinden wir nun mit diesen Sätzen das bekannte Theorem, dass jede Function von λ und u, die für alle Werthe von λ von 0 bis 360°, und von u von 0 bis 180° einen bestimmten endlichen Werth hat, in eine Reihe von der Gestalt

$$P^0 + P' + P'' + P''' + \text{u. s. w.}$$

entwickelt werden kann, deren allgemeines Glied P^{n} der obigen partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, dass eine solche Entwicklung nur auf Eine bestimmte Art möglich ist, und dass diese Reihe immer convergirt, so erhalten wir folgende merkwürdige Sätze:

I. Die Kenntniss des Werths von V in allen Punkten der Erdoberfläche reicht hin, um den allgemeinen Ausdruck von V für den ganzen unendlichen Raum ausserhalb der Erdfläche daraus abzuleiten, und somit auch die Bestimmung der Kräfte X, Y, Z nicht bloss auf der Erdoberfläche, sondern auch für den ganzen unendlichen Raum ausserhalb derselben. Offenbar ist dazu nur nöthig, $\frac{V}{R}$ nach dem erwähnten Theorem in eine Reihe zu entwickeln.

Es soll daher im Folgenden das Zeichen V immer in der auf die Oberfläche der Erde beschränkten Bedeutung verstanden werden, wenn das Gegentheil nicht ausdrücklich gesagt ist, oder als diejenige Function von λ und u, welche aus dem allgemeinen Ausdruck hervorgeht, wenn $r = R$ gesetzt wird, also

$$V = R(P' + P'' + P''' + \text{u. s. w.})$$

II. Die Kenntniss des Werthes von X in allen Punkten der Erdoberfläche reicht hin, um alles in I. angeführte zu erlangen. In der That ist nach Art. 15 das Integral $\int_0^u X\mathrm{d}u = \frac{V^0 - V}{R}$, wenn V^0 den Werth von V im Nordpole bedeutet, und die Entwickelung von $\int_0^u X\mathrm{d}u$ in eine Reihe der erwähnten Form muss nothwendig mit

$$V^0 - P' - P'' - P''' - \text{u. s. w.}$$

identisch sein.

III. Auf gleiche Weise und unter Bezugnahme auf Art. 16 ist klar, dass die Kenntniss des Werthes von Y auf der ganzen Erde verbunden mit der Kenntniss von X in allen Punkten einer von einem Erdpole zum andern laufenden Linie zur Begründung der *vollständigen* Theorie des Erdmagnetismus zureicht.

IV. Endlich ist klar, dass die vollständige Theorie auch aus der blossen Kenntniss des Werthes von Z auf der ganzen Erdfläche abzuleiten ist. In der That, wenn Z in eine Reihe entwickelt wird

$$Z = Q^0 + Q' + Q'' + Q''' + \text{u. s. w.}$$

so dass das allgemeine Glied der mehrerwähnten partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, so wird nothwendig $Q^0 = 0$ und $P' = \frac{1}{2}Q'$, $P'' = \frac{1}{3}Q''$, $P''' = \frac{1}{4}Q'''$ u. s. w sein müssen.

21.

Wegen der einfachen Art der Abhängigkeit der einzelnen Kräfte X, Y, Z von einer einzigen Function V, und des einfachen Zusammenhanges, in welchem jene unter sich stehen, sind dieselben weit mehr geeignet, zur Grundlage der Theorie zu dienen, als der gewöhnliche Ausdruck der magnetischen Kraft durch die drei Elemente ganze Intensität, Inclination und Declination, oder vielmehr, die letztere Art, so natürlich sie an sich scheint, wo es nur darauf ankommt die Thatsachen aufzufassen, kann unmittelbar gar nicht zur Begründung der Theorie, wenigstens nicht zur ersten Begründung, dienen, ehe sie nicht in die andere Form übersetzt ist. In dieser Beziehung wäre es daher sehr wünschenswerth, dass eine allgemeine graphische Darstellung der horizontalen Intensität veranstaltet würde, theils weil diese dem für die Theorie brauchbaren näher steht als die ganze Intensität, theils weil jene bei weiten in den meisten Fällen das ursprünglich wirklich beobachtete, die letztere hingegen nur durch Rechnung vermittelst der Inclination daraus abgeleitet ist. Die Elemente des horizontalen Magnetismus für sich rein zu erhalten, bleibt um so mehr zu empfehlen, da sie durch die gegenwärtigen Hülfsmittel sich mit überwiegender Schärfe bestimmen lassen, und man sollte wenigstens niemals mit Unterdrückung der beobachteten horizontalen Intensität die durch Rechnung daraus abgeleitete ganze Intensität bekannt machen, ohne die bei der Rechnung angewandte Inclination mit anzugeben, damit derjenige, welcher sie für die Theorie benutzen will, im Stande sei, die ursprünglichen Zahlen unverfälscht wieder herzustellen.

So interessant es übrigens auch sein würde, die ganze Theorie des Erdmagnetismus allein auf Beobachtungen der horizontalen Nadel zu gründen, und damit den verticalen Theil oder die Inclination zu anticipiren, so ist es doch dazu gegenwärtig noch viel zu früh: die Mangelhaftigkeit der jetzt zu Gebote stehenden Data verstattet nicht, auf den Mitgebrauch des verticalen Theils zu verzichten. Im Grunde empfängt auch die Theorie schon dadurch ihre Bestätigung, wenn die Vereinbarkeit sämmtlicher Elemente unter Ein Princip nachgewiesen werden kann.

22.

Wenn wir gleich *a priori* gewiss sind, dass die Reihen für V, X, Y, Z convergiren, so lässt sich doch im voraus nichts über den Grad der Convergenz bestimmen. Wären entweder die Sitze der magnetischen Kräfte auf einen mässigen Raum um den Mittelpunkt der Erde her beschränkt, oder fände eine solche Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten in der Erde Statt, die jenem Falle äquivalirte, so würden die Reihen sehr schnell convergiren müssen; je weiter hingegen jene Sitze bis gegen die Oberfläche hin sich erstrecken, und je unregelmässiger die Vertheilung ist, desto mehr wird man auf eine langsame Convergenz sich gefasst halten müssen.

Bei der praktischen Anwendung ist absolute Genauigkeit unerreichbar: man verlangt nur einen den Umständen angemessenen Grad von Annäherung. Je langsamer nun die Convergenz ist, eine desto grössere Anzahl von Gliedern wird berücksichtigt werden müssen, um einen bestimmten Grad von Genauigkeit zu erreichen.

Nun enthält P' drei Glieder, und erfordert also die Kenntniss von drei Coëfficienten $g^{1,0}, g^{1,1}, h^{1,1}$; P'' erfordert fünf Coëfficienten, P''' sieben, P'''' neun u. s. w. Indem wir also P', P'', P''' u. s. w. als Grössen erster, zweiter, dritter Ordnung u. s. w. betrachten, erhellt, dass wenn die Rechnung bis zu den Grössen der Ordnung n einschliesslich getrieben werden soll, die Werthe von $nn + 2n$

Coëfficienten ausgemittelt werden müssen, also z. B. 24, wenn man bis zur vierten Ordnung gehen will.

Jeder gegebene Werth von X, Y oder Z, für gegebene Werthe von u und λ verschafft uns eine Gleichung zwischen den Coëfficienten, mithin geben die vollständig bekannten Elemente des Erdmagnetismus von jedem Orte drei Gleichungen. Dürfte man also annehmen, dass nur die Glieder bis zur vierten Ordnung merklich bleiben, so würden zur Bestimmung aller nöthigen Coëfficienten die vollständigen Beobachtungen von acht verschiedenen Punkten, theoretisch betrachtet, zureichen: allein jene Voraussetzung ist schwerlich zulässig, und so würden die allen Beobachtungen anhängenden zufälligen Fehler verbunden mit der Vernachlässigung der Glieder der höhern Ordnung die Eliminationsresultate sehr entstellen können*). Den schädlichen Einfluss dieser Umstände zu vermindern, müsste man eine viel grössere Anzahl von Beobachtungsstücken, als unbekannte Grössen sind, von weit auseinander liegenden Punkten aus allen Theilen der Erde, zum Grunde legen, und die unbekannten Grössen nach der Methode der kleinsten Quadrate daraus ableiten. So einförmig indessen, da alle Gleichungen nur linearisch sind, die Ausführung eines solchen Geschäfts auch sein würde, so möchte doch die ausserordentliche aus der grossen Menge der unbekannten Grössen und Gleichungen entspringende Weitläuftigkeit auch den muthigsten Rechner abschrecken, die Arbeit in dieser Form jetzt schon zu unternehmen, zumal da das Einschleichen von unzuverlässigen Beobachtungsstücken oder von Rechnungsfehlern den Erfolg ganz verderben könnte.

23.

Es gibt aber ein anderes Verfahren, welches, von einem Theile dieser Schwierigkeiten frei, sich vorzugsweise für den ersten anzustellenden Versuch zu eignen scheint, und welches wir hier entwickeln wollen, ohne die Bedenklichkeiten zu verschweigen, denen die Anwendung desselben bei jetziger Lage der Sachen noch unterliegt. Dies Verfahren setzt die Kenntniss aller drei Elemente in Punkten voraus, die auf einer hinlänglichen Anzahl von Parallelkreisen so gruppirt sind,

*) Am wenigsten nachtheilig würden bei einer solchen Bestimmungsweise diese Umstände einwirken, wenn die acht Punkte ganz symmetrisch auf der Erdoberfläche vertheilt wären, d. i. wenn sie mit den Ecken eines in der Erdkugel eingeschriebenen Würfels zusammenfielen, oder doch einer solchen Lage sehr nahe kämen.

dass jeder Parallelkreis dadurch in eine hinlängliche Anzahl gleicher Stücke getheilt wird.

Aus den in gewöhnlicher Form gegebenen Elementen hat man zuvörderst die numerischen Werthe von X, Y und Z abzuleiten.

Man bringt sodann, nach bekannter Methode, die Werthe von X, Y und Z auf jedem Parallelkreise in die Form

$$\begin{aligned}
X &= k + k'\cos\lambda + K'\sin\lambda + k''\cos 2\lambda + K''\sin 2\lambda + k'''\cos 3\lambda + K'''\sin 3\lambda + \text{ u. s. w.}\\
Y &= l + l'\cos\lambda + L'\sin\lambda + l''\cos 2\lambda + L''\sin 2\lambda + l'''\cos 3\lambda + L'''\sin 3\lambda + \text{ u. s. w.}\\
Z &= m + m'\cos\lambda + M'\sin\lambda + m''\cos 2\lambda + M''\sin 2\lambda + m'''\cos 3\lambda + M'''\sin 3\lambda + \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Man erhält also für jeden der Coëfficienten k, l, m, k' u. s. w. so viele Werthe, als Parallelkreise behandelt sind.

Der Theorie zufolge sollte auf jedem Parallelkreise $l = 0$ werden; die aus der Rechnung hervorgehenden Werthe von l geben also schon eine Art von Maassstab für den Grad von Unzuverlässigkeit, welcher die zum Grunde gelegten Zahlen noch unterliegen.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
k &= -g^{1,0}\frac{dP^{1,0}}{du} - g^{2,0}\frac{dP^{2,0}}{du} - g^{3,0}\frac{dP^{3,0}}{du} - \text{ u. s. w.}\\
m &= 2g^{1,0}P^{1,0} + 3g^{2,0}P^{2,0} + 4g^{3,0}P^{3,0} + \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

deren Gesammtanzahl doppelt so gross ist, als die Anzahl der Parallelkreise, wird man, nachdem in $\frac{dP^{1,0}}{du}$ u. s. w. und in $P^{1,0}$ u. s. w. die entsprechenden Zahlwerthe von u substituirt sind, von den Coëfficienten $g^{1,0}$, $g^{2,0}$, $g^{3,0}$ u. s. w. so viele, als berücksichtigt werden sollen, nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen.

Eben so dienen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
-k' &= g^{1,1}\frac{dP^{1,1}}{du} + g^{2,1}\frac{dP^{2,1}}{du} + g^{3,1}\frac{dP^{3,1}}{du} + \text{ u. s. w.}\\
L' &= g^{1,1}\frac{P^{1,1}}{\sin u} + g^{2,1}\frac{P^{2,1}}{\sin u} + g^{3,1}\frac{P^{3,1}}{\sin u} + \text{ u. s. w.}\\
m' &= 2g^{1,1}P^{1,1} + 3g^{2,1}P^{2,1} + 4g^{3,1}P^{3,1} + \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

deren Anzahl zusammen dreimal so gross ist, als die Anzahl der Parallelkreise, zur Bestimmung der Coëfficienten $g^{1,1}$, $g^{2,1}$, $g^{3,1}$ u. s. w.; so wie folgende

$$-K' = h^{1,1}\frac{\mathrm{d}P^{1,1}}{\mathrm{d}u} + h^{2,1}\frac{\mathrm{d}P^{2,1}}{\mathrm{d}u} + h^{3,1}\frac{\mathrm{d}P^{3,1}}{\mathrm{d}u} + \text{u. s. w.}$$
$$-l' = h^{1,1}\frac{P^{1,1}}{\sin u} + h^{2,1}\frac{P^{2,1}}{\sin u} + h^{3,1}\frac{P^{3,1}}{\sin u} + \text{u. s. w.}$$
$$M' = 2h^{1,1}P^{1,1} + 3h^{2,1}P^{2,1} + 4h^{3,1}P^{3,1} + \text{u. s. w.}$$

zur Bestimmung der Coëfficienten $h^{1,1}$, $h^{2,1}$, $h^{3,1}$ u. s. w.

Ferner dienen zur Bestimmung der Coëfficienten $g^{2,2}$, $g^{3,2}$, $g^{4,2}$ u. s. w. die Gleichungen

$$-k'' = g^{2,2}\frac{\mathrm{d}P^{2,2}}{\mathrm{d}u} + g^{3,2}\frac{\mathrm{d}P^{3,2}}{\mathrm{d}u} + g^{4,2}\frac{\mathrm{d}P^{4,2}}{\mathrm{d}u} + \text{u. s. w.}$$
$$L'' = 2g^{2,2}\frac{P^{2,2}}{\sin u} + 2g^{3,2}\frac{P^{3,2}}{\sin u} + 2g^{4,2}\frac{P^{4,2}}{\sin u} + \text{u. s. w.}$$
$$m'' = 3g^{2,2}P^{2,2} + 4g^{3,2}P^{3,2} + 5g^{4,2}P^{4,2} + \text{u. s. w.}$$

und auf ähnliche Weise ergeben sich die Coëfficienten der folgenden höhern Ordnungen.

24.

Der Vorzug dieses Verfahrens vor dem im 22. Art. angegebenen besteht hauptsächlich darin, dass die unbekannten Grössen in Gruppen zerfallen, die jede für sich bestimmt werden, wodurch die Rechnung eine ausserordentliche Erleichterung erhält, während bei dem andern Verfahren die Vermengung sämmtlicher Unbekannten unter einander die Scheidung überaus beschwerlich macht. Dagegen hat jenes Verfahren den Nachtheil, dass es seine Grundlagen gar nicht in unmittelbaren Beobachtungen findet, sondern sie aus graphischen Darstellungen entlehnen muss, welche in den Gegenden, wo Beobachtungen vorhanden sind, diese doch nur roh darstellen können, in solchen Gegenden aber, wo es weit und breit ganz an Beobachtungen fehlt, nur vermuthungsweise, gewissermaassen willkürlich ergänzt sind, und sich daher sehr weit von der Wahrheit entfernen können. Indessen bleibt keine Wahl, als entweder alle Versuche so lange auszusetzen, bis viel vollständigere und zuverlässigere Data bereit sein werden, oder mit den jetzt noch so höchst precären Mitteln einen ersten Versuch zu wagen, von dem man wenig mehr als eine rohe Annäherung erwarten darf. Einen sichern Maassstab für den Werth des Erfolges gibt jedenfalls hinterdrein die scharfe Vergleichung der Resultate mit wirklichen Beobachtungen aus allen Theilen der Erde; und wenn solche Prüfung dahin ausfällt, dass der erste Versuch nicht ganz misslungen ist, so wird dieser eine kräftige Hülfe darbieten, um künftige neue Versuche, auf dem einen oder auf dem andern Wege, zweckmässig vorzubereiten.

25.

Schon vor vielen Jahren hatte ich zu wiederholten malen angefangen, mich solchen Versuchen zu unterziehen, von denen ich aber immer wieder abzustehen genöthigt war, weil die zu Gebote stehenden Data sich als gar zu dürftig auswiesen. Gleichwohl würde ich schon früher einen Versuch zu Ende zu führen geneigt gewesen sein, wenn der mehrmals von mir ausgesprochene Wunsch in Erfüllung gegangen wäre, dass die reinen horizontalen Intensitäten in einer allgemeinen Karte dargestellt werden möchten, für deren Mangel die Verbindung der vorhandenen unvollkommenen Generalkarten für die Inclination und ganze Intensität keinen Ersatz geben konnte.

Die Erscheinung der Sabineschen Karte für die ganze Intensität (im siebenten *Report of the British association for the advancement of science*) hat mich jetzt zur Unternehmung und Vollendung eines neuen Versuchs angeregt, der übrigens nur aus dem im vorhergehenden Artikel angegebenen Gesichtspunkte angesehen werden soll.

Die der Rechnung unterzulegenden Data wurden aus der erwähnten Karte für die Intensität, der Barlowschen für die Declination (*Philosophical Transactions* 1833), und der von Horner entworfenen für die Inclination (Physikalisches Wörterbuch Band 6.) entnommen, und zwar für je zwölf Punkte auf sieben Parallelkreisen. Die Lücken, welche jene Karten in weiten Strecken übrig lassen, konnten meistens nur auf höchst precäre Art ergänzt werden.

Im Laufe der Rechnung ergab sich bald, dass dieselbe wenigstens bis zu den Grössen der vierten Ordnung ausgedehnt werden müsse, wonach die Anzahl der zu bestimmenden Coëfficienten auf 24 steigt. Aller Wahrscheinlichkeit nach werden auch die Glieder der fünften Ordnung noch ansehnlich genug sein; allein bei einem ersten Versuche bleiben die Werthe von k, m, k' u. s. w. noch viel zu sehr mit dem Einfluss der vielen unzuverlässigen Daten behaftet, die jener seiner Natur nach einschliessen muss, als dass es verstattet sein könnte, in das Eliminationsgeschäft eine noch grössere Anzahl von unbekannten Grössen aufzunehmen.

Es muss noch bemerkt werden, dass die Intensitäten in SABINE's Karte dieselbe willkürliche Einheit haben, in welcher sie gewöhnlich bisher angegeben zu werden pflegen, und wonach in London die ganze Intensität $= 1,372$ gesetzt wird. Diese Einheit ist hier bei der Berechnung der Coëfficienten, eben so wie bei der weiter unten zu erklärenden Hülfstafel, dahin abgeändert, dass alle Zahlen tausendmal grösser werden, wobei also die Intensität für London $= 1372$ zum Grunde liegt. Übrigens kann offenbar für die Intensität eine jede beliebige Einheit gebraucht werden, insofern man auch die Einheit für μ als willkürlich betrachten, und diese immer jener gemäss annehmen kann. Will man weitere Folgerungen daran knüpfen, für welche μ auf ein absolutes Maass gebracht sein muss, so brauchen nur sämmtliche Coëfficienten mit demselben Factor multiplicirt zu werden, welcher zur Reduction der nach jener Einheit ausgedrückten Intensitätszahlen auf absolutes Maass erforderlich ist.

26.

Die aus der ersten Rechnung, wobei die Längen λ von Greenwich östlich gezählt sind, erhaltenen Zahlwerthe der 24 Coëfficienten sind folgende:

$$
\begin{array}{ll|ll}
g^{1,0} & = +925,782 & g^{2,2} & = +\ \ 0,493 \\
g^{2,0} & = -\ \ 22,059 & g^{3,2} & = -73,193 \\
g^{3,0} & = -\ \ 18,868 & g^{4,2} & = -45,791 \\
g^{4,0} & = -108,855 & h^{2,2} & = -39,010 \\
g^{1,1} & = +\ \ 89,024 & h^{3,2} & = -22,766 \\
g^{2,1} & = -144,913 & h^{4,2} & = +42,573 \\
g^{3,1} & = +122,936 & g^{3,3} & = +\ \ 1,396 \\
g^{4,1} & = -152,589 & g^{4,3} & = +19,774 \\
h^{1,1} & = -178,744 & h^{3,3} & = -18,750 \\
h^{2,1} & = -\ \ \ \ 6,030 & h^{4,3} & = -\ \ 0,178 \\
h^{3,1} & = +\ \ 47,794 & g^{4,4} & = +\ \ 4,127 \\
h^{4,1} & = +\ \ 64,112 & h^{4,4} & = +\ \ 3,175
\end{array}
$$

Diese Zahlen, welche man als die *Elemente der Theorie des Erdmagnetismus* betrachten kann, sind hier genau so angesetzt, und als Grundlage der nachher zu beschreibenden Hülfstafel angewandt, wie die Rechnung sie gegeben hat, ohne die Decimalbrüche wegzulassen. Für jeden Rechnungskundigen ist die Bemerkung überflüssig, dass diese Bruchtheile an sich keinen Werth haben, da wir noch weit davon entfernt sind, nur die ganzen Einer mit Zuverlässigkeit ausmitteln zu können: allein es ist von Wichtigkeit, dass die Beobachtungen mit einem und demselben bestimmten System von Elementen scharf verglichen werden, und da war kein Grund vorhanden, an dem, was die Rechnung ergeben hatte, etwas zu verändern, weil durch Weglassung der Decimalbrüche für die Bequemlichkeit der Vergleichungsrechnungen gar nichts gewonnen worden sein würde.

27.

Der entwickelte Ausdruck für V nach obigen Zahlen ist folgender, wobei der Abkürzung wegen e für $\cos u$ und f für $\sin u$ geschrieben ist.

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{R} = & \quad -1,977 + 937,103\,e + 71,245\,ee - 18,868\,e^3 - 108,855\,e^4 \\
& + (64,437 - 79,518\,e + 122,936\,ee + 152,589\,e^3)\,f\cos\lambda \\
& + (-188,303 - 33,507\,e + 47,794\,ee + 64,112\,e^3)\,f\sin\lambda \\
& + (7,035 - 73,193\,e - 45,791\,ee)\,ff\cos 2\lambda \\
& + (-45,092 - 22,766\,e - 42,573\,ee)\,ff\sin 2\lambda \\
& + (1,396 + 19,774\,e)\,f^3\cos 3\lambda \\
& + (-18,750 - 0,178\,e)\,f^3\sin 3\lambda \\
& + 4,127\,f^4\cos 4\lambda \\
& + 3,175\,f^4\sin 4\lambda
\end{aligned}
$$

Es mögen ferner die vollständig entwickelten Ausdrücke für die drei Componenten der magnetischen Kraft hier Platz finden.

$$
\begin{aligned}
X = & \quad (937,103 + 142,490\,e - 56,603\,ee - 435,420\,e^3)\,f \\
& + (-79,518 + 181,435\,e - 298,732\,ee - 368,808\,e^3 + 610,357\,e^4)\cos\lambda \\
& + (-33,507 + 283,892\,e + 259,349\,ee - 143,383\,e^3 - 256,448\,e^4)\sin\lambda \\
& + (-73,193 - 105,652\,e + 219,579\,ee + 183,164\,e^3)\,f\cos 2\lambda \\
& + (-22,766 + 175,330\,e + 68,098\,ee - 170,292\,e^3)\,f\sin 2\lambda \\
& + (19,774 - 4,188\,e - 79,096\,ee)\,ff\cos 3\lambda \\
& + (-0,178 + 56,250\,e + 0,716\,ee)\,ff\sin 3\lambda \\
& - 16,508\,ef^3\cos 4\lambda \\
& - 12,701\,ef^3\sin 4\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y = {} & (188{,}303 + 33{,}507\,e - 47{,}794\,ee - 64{,}112\,e^3)\cos\lambda \\
& + (64{,}437 - 79{,}518\,e + 122{,}936\,ee - 152{,}589\,e^3)\sin\lambda \\
& + (90{,}184 + 45{,}532\,e - 85{,}146\,ee)f\cos 2\lambda \\
& + (14{,}070 - 146{,}386\,e - 91{,}582\,ee)f\sin 2\lambda \\
& + (56{,}250 + 0{,}534\,e)ff\cos 3\lambda \\
& + (4{,}188 + 59{,}322\,e)ff\sin 3\lambda \\
& - 12{,}701\,f^3\cos 4\lambda \\
& + 16{,}508\,f^3\sin 4\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z = {} & -24{,}593 + 1896{,}847\,e + 400{,}343\,ee - 75{,}471\,e^3 - 544{,}275\,e^4 \\
& + (79{,}700 - 107{,}763\,e + 491{,}744\,ee - 762{,}946\,e^3)f\cos\lambda \\
& + (-395{,}724 - 155{,}473\,e + 191{,}176\,ee + 320{,}560\,e^3)f\sin\lambda \\
& + (34{,}187 - 292{,}772\,e - 228{,}955\,ee)ff\cos 2\lambda \\
& + (-147{,}439 - 91{,}064\,e + 212{,}865\,ee)ff\sin 2\lambda \\
& + (5{,}584 + 98{,}870\,e)f^3\cos 3\lambda \\
& + (-75{,}000 - 0{,}890\,e)f^3\sin 3\lambda \\
& + 20{,}635\,f^4\cos 4\lambda \\
& + 15{,}876\,f^4\sin 4\lambda
\end{aligned}
$$

Nachdem diese Componenten für einen gegebenen Ort berechnet sind, erhält man die Bestimmungsstücke der magnetischen Kraft in der gewöhnlichen Form auf folgende Art. Es sei δ die Declination, i die Inclination, ψ die ganze, ω die horizontale Intensität. Man bestimmt zuerst δ und ω vermittelst der Formeln

$$X = \omega\cos\delta, \qquad Y = \omega\sin\delta$$

und sodann i und ψ vermittelst der folgenden

$$\omega = \psi\cos i, \qquad Z = \psi\sin i$$

28.

Da die Formeln für X, Y, Z zusammen 71 Glieder enthalten, so ist die unmittelbare Rechnung nach denselben eine ziemlich beschwerliche Arbeit, und die Wiederholung derselben für eine grosse Anzahl von Örtern würde allerdings desto mehr abschreckendes haben, da man ohne dieselbe Rechnung zweimal zu machen nicht wohl hoffen dürfte, gegen mögliche Rechnungsfehler geschützt zu

sein. Auch würde man wenig gewinnen, wenn man sämmtliche Glieder, deren Coëfficienten weniger als eine Einheit, oder selbst weniger als 10 Einheiten betragen, unterdrücken wollte, da die Anzahl der übrigen sich doch noch auf 65 belaufen würde. Da nun aber der ganze Werth der Arbeit ungewiss bleiben würde, wenn man sie nicht an einer beträchtlichen Anzahl wirklicher Beobachtungen prüfte, so habe ich die Mühe nicht gescheut, eine Hülfstafel zu berechnen*), bei deren Gebrauch die Arbeit in hohem Grade abgekürzt und erleichtert, und eben dadurch die Sicherstellung gegen Rechnungsfehler wesentlich befördert wird. Ihre Einrichtung beruhet darauf, dass die Werthe der Componenten in folgende Form gebracht sind

$$
\begin{aligned}
X &= a^0 + a'\cos(\lambda + A') + a''\cos(2\lambda + A'') + a'''\cos(3\lambda + A''') + a''''\cos(4\lambda + A'''') \\
Y &= \phantom{a^0 +{}} b'\cos(\lambda + B') + b''\cos(2\lambda + B'') + b'''\cos(3\lambda + B''') + b''''\cos(4\lambda + B'''') \\
Z &= c^0 + c'\cos(\lambda + C') + c''\cos(2\lambda + C'') + c'''\cos(3\lambda + C''') + c''''\cos(4\lambda + C'''')
\end{aligned}
$$

Die erste Tafel enthält die von λ unabhängigen Theile von X und Z: in den vier folgenden findet man die Werthe der Hülfswinkel A', A'' u. s. w., und der Logarithmen von a', a'' u. s. w., alles für die einzelnen Grade der Breite $\varphi = 90^0 - u$. [Die Tafel ist bei dem vorliegenden Abdruck in einer wegen der Verschiedenheit des Formats etwas abgeänderten Anordnung dem Ende dieser Abhandlung angeschlossen.]

Als Beispiel mag die Rechnung für Göttingen hier Platz finden.

Mit der Breite $+51^0\,32'$ findet man aus den Tafeln

$a^0 = +500{,}8$		$c^0 = +1465{,}2$
$\log a' = 2{,}28980$	$\log b' = 2{,}18900$	$\log c' = 2{,}20204$
$\log a'' = 1{,}79403$	$\log b'' = 2{,}03220$	$\log c'' = 2{,}12777$
$\log a''' = 1{,}32522$	$\log b''' = 1{,}46845$	$\log c''' = 1{,}43199$
$\log a'''' = 0{,}59391$	$\log b'''' = 0{,}70016$	$\log c'''' = 0{,}59091$
$A' = 249^0\,30'$	$B' = 358^0\,24'$	$C' = 105^0\,44'$
$A'' = 311\;\;45$	$B'' = 64\;\;50$	$C'' = 165\;\;15$
$A''' = 234\;\;10$	$B''' = 318\;\;13$	$C''' = 42\;\;22$
$A'''' = 142\;\;26$	$B'''' = 232\;\;26$	$C'''' = 322\;\;26$

*) Die Berechnung eines Theils dieser Hülfstafel hat Hr. Doctor Goldschmidt ausgeführt.

und hienach mit der Länge $\lambda = 9^0\,56\tfrac{1}{2}'$ die Theile von

X	Y	Z
$+500,8$		$+1465,2$
$-\ 35,71$	$+152,89$	$-\ 68,99$
$+\ 54,76$	$+\ 9,92$	$-\ 133,67$
$-\ 2,21$	$+\ 28,77$	$+\ 8,27$
$-\ 3,92$	$+\ 0,19$	$+\ 3,90$
$X = +513,72$	$Y = +191,77$	$Z = +1274,71$

Die weitere Rechnung ergibt dann

$$\delta = +20^0\,28' \quad \log\omega = 2,73907$$
$$i = +66\ \ 43$$
$$\psi = \quad 1387,6 \text{ oder in der gewöhnlichen Einheit}$$
$$\psi = \quad 1,3876$$

29.

Die folgende Tafel enthält nun die Vergleichung unsrer Formeln mit den Beobachtungen von 91 Punkten aus allen Theilen der Erde. Da die drei Karten, aus welchen die Data für unsre Rechnung entnommen waren, den Zustand für die neueste Zeit darzustellen bestimmt sind, so wurden auch nur Beobachtungen aus dieser in die Vergleichung aufgenommen, und vorzugsweise von solchen Orten, wo alle drei Elemente des Magnetismus beobachtet sind. Die Forderung einer genauen Gleichzeitigkeit kann jetzt noch nicht gemacht werden, ohne unsern Besitz auf eine äusserst kleine Anzahl herabzusetzen.

Über die hier [am Ende dieses Artikels] zur Vergleichung gebrachten Beobachtungen gebe ich noch folgende Nachweisungen:

Die Intensitätsbestimmungen sind grösstentheils entlehnt aus Sabine's *Report on the variation of magnetic intensity* (in dem schon oben erwähnten *Seventh Report of the British Association for the advancement of Science*).

Die grosse Anzahl magnetischer Beobachtungen aus dem Russischen Reiche und dem angrenzenden Theile von China verdanken wir

Hansteen (Poggendorffs Annalen).

Erman (*Reise um die Erde*, und handschriftliche Mittheilungen).

von Humboldt (*Voyage aux regions équinoxiales* T. 13).

Fuss (*Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, Sixième série*).

Fedor (Handschriftlich mitgetheilt durch v. Struve).

Reinke (*Observations météorologiques et magnétiques faites dans l'étendue de l'empire de Russie, rédigées par* A. T. Kupffer, Nr. II).

Bei folgenden Örtern wurde das Mittel aus den Bestimmungen mehrerer Beobachter genommen, die zum Theil unter einander grössere Verschiedenheit darbieten, als auf Rechnung der jährlichen Änderungen gesetzt werden kann:

(12) *Tobolsk*

Declination.	Hansteen 1828	$-\ 9^0\ 58'$
	Erman 1828	$-\ 9\ \ 47$
	Fuss 1830	$-11\ \ 52$
	Fedor 1833	$-10\ \ 20$
Inclination.	Erman 1828	71 7
	Von Humboldt 1829 . .	70 56
	Fuss 1830	71 1
	Fedor 1833	71 2

(16) *Catharinenburg*

Declination.	Hansteen 1828	$-\ 6^0\ 27'$
	Erman 1828	$-\ 7\ \ 23$
	Reinke 1836	$-\ 5\ \ 5$
Inclination.	Erman 1828	69 24
	Von Humboldt 1829 . .	69 6
	Fuss 1830	69 19
	Fedor 1832	69 15

(17) *Tomsk*

Declination.	Hansteen 1828	$-\ 8^0\ 32'$
	Erman 1829	$-\ 8\ \ 36$
Inclination.	Erman 1829	70 59
	Fuss 1830	70 51

(18) *Nishny Nowgorod*

Declination.	Erman 1828	$-\ 0^0\ 46'$
	Fuss 1830	$-\ 0\ \ 8$

(19) *Krasnojarsk*

Declination.	Hansteen 1829	—	6°	43′
	Erman 1829	—	6	37
	Fedor 1835	—	7	26
Inclination.	Erman 1829		70	53
	Fedor 1835		71	8

(20) *Kasan*

Inclination.	Erman 1828		68°	21′
	Von Humboldt 1829 . .		68	27
	Fuss 1830		68	26

(21) *Moskwa*

Declination.	Hansteen 1828	+	3°	3′
	Erman 1828	+	3	1
Inclination.	Erman 1828		68	58
	Von Humboldt 1829 . .		68	57

(30) *Irkuzk*

Declination.	Hansteen 1829	—	1°	37′
	Erman 1829	—	1	52
	Fuss 1830	—	1	25
Inclination.	Erman 1829		68	7
	Fuss 1830		68	15
	Fuss 1832		68	20

(36) *Orenburg*

Inclination.	Von Humboldt 1829 . .		64°	41′
	Fedor 1832		64	47

(44) *Troizkosawsk*

Declination.	Hansteen 1829	+	0°	5′
	Erman 1829	+	0	33
	Fuss 1830	—	0	1
Inclination.	Erman 1829		66	14
	Fuss 1830		66	24

Die meisten Bestimmungen in der südlichen Hemisphäre rühren von den Capitaines King und Fitz Roy her, und sind aus einer kleinen Schrift von Sabine (*Magnetic Observations made during the voyages of the ships Adventure and Beagle* 1826—1836) entlehnt.

Die Bestimmungen für die übrigen einzelnen Punkte sind zum Theil auch aus den angeführten Quellen entlehnt; von den andern erwähne ich noch folgende:

(1) Spitzbergen. Beobachter Sabine 1823 (Aus dessen *Account of experiments to determine the figure of the earth*).

(2) Hammerfest. Declination und Inclination im Mittel nach den Bestimmungen von Sabine 1823 (aus angeführtem Werke) und von Parry 1827 (aus dessen *Narrative of an attempt to reach the North Pole*).

(3) Magnetischer Pol, nach Ross 1831 (*Philosophical Transactions* 1834).

(4) Reikiavik nach Beobachtungen von Lottin 1836 (*Voyage en Islande*).

(28) Berlin nach Encke 1836 (*Astronomisches Jahrbuch* 1839).

(38) Göttingen. Die Declination gilt für 1835 Oct. 1 (*Resultate für* 1836 S. 59); die Inclination ist durch Interpolation zwischen von Humboldts Beobachtung 1826 und Forbes 1837 auf dieselbe Epoche reducirt.

(39) London, nach handschriftlich mitgetheilten Beobachtungen für die Declination von Capitaine Ross; für die Inclination von Phillips, Fox, Ross, Johnson und Sabine; die mittlere Epoche für die Declination April 1838, für die Inclination Mai 1838.

(48) Paris für 1835 aus dem *Annuaire* für 1836.

(54) Mailand 1837, von Kreil, nach dessen handschriftlichen Mittheilungen.

(58) Neapel, 1835 nach Beobachtungen von Sartorius und Listing. Die in absolutem Maasse bestimmte Intensität wurde mit dem unten (Art. 31) gegebenen Factor auf die gewöhnliche Einheit reducirt.

(64) Madras 1837 nach Taylors Beobachtungen, entlehnt aus dem *Journal of the Asiatic Society of Bengal*, Mai 1837.

		Breite	Länge	Declination		
				Berechn.	Beobacht.	Untersch.
1	Spitzbergen	+ 79° 50′	11° 40′	+ 26° 31′	+ 25° 12′	+ 1° 19′
2	Hammerfest	70 40	23 46	+ 12 23	+ 10 50	+ 1 33
3	Magn. Pol. n. Ross	70 5	263 14	− 22 23		
4	Reikiavik	64 8	338 5	+ 40 12	+ 43 14	− 3 2
5	Jakutsk	62 1	129 45	+ 0 5	+ 5 50	− 5 45
6	Porotowsk	62 1	131 50	+ 0 4	+ 4 46	− 4 42
7	Nochinsk	61 57	134 57	− 0 3	+ 2 11	− 2 14
8	Tschernoljes	61 31	136 23	0 0	+ 3 30	− 3 30
9	Petersburg	59 56	30 19	+ 6 47	+ 6 44	+ 0 3
10	Christiania	59 54	10 44	+ 19 55	+ 19 50	+ 0 5
11	Ochotsk	59 21	143 11	− 0 18	+ 2 18	− 2 36
12	Tobolsk	58 11	68 16	− 7 19	− 10 29	+ 3 10
13	Tigil Fluss	58 1	158 15	− 4 20	− 4 6	− 0 14
14	Sitka	57 3	224 35	− 28 45	− 28 19	− 0 26
15	Tara	56 54	74 4	− 7 44	− 9 36	+ 1 52
16	Catharinenburg	56 51	60 34	− 5 20	− 6 18	+ 0 58
17	Tomsk	56 30	85 9	− 7 21	− 8 34	+ 1 13
18	Nishny Nowgorod	56 19	43 57	+ 1 10	− 0 27	+ 1 37
19	Krasnojarsk	56 1	92 57	− 5 49	− 6 40	+ 0 51
20	Kasan	55 48	49 7	− 1 7	− 2 22	+ 1 15
21	Moskwa	55 46	37 37	+ 4 26	+ 3 2	+ 1 24
22	Königsberg	54 43	20 30	+ 14 15	+ 13 22	+ 0 53
23	Barnaul	53 20	83 56	− 7 0	− 7 25	+ 0 25
24	Uststretensk	53 20	121 51	+ 1 29	+ 4 21	− 2 52
25	Gorbizkoi	53 6	119 9	+ 1 5	+ 2 54	− 1 49
26	Petropaulowsk	53 0	158 40	− 3 34	− 4 6	+ 0 32
27	Uriupina	52 47	120 4	+ 1 16	+ 4 4	− 2 48
28	Berlin	52 30	13 24	+ 18 31	+ 17 5	+ 1 26
29	Pogromnoi	52 30	111 3	− 0 38	+ 0 18	− 0 56
30	Irkuzk	52 17	104 17	− 2 27	− 1 38	− 0 49
31	Stretensk	52 15	117 40	+ 0 54	+ 2 52	− 1 58
32	Stepnoi	52 10	106 21	− 1 52	− 1 8	− 0 44
33	Tschitanskoi	52 1	113 27	0 0	+ 1 13	− 1 13
34	Nertschinsk Stadt	51 56	116 31	+ 0 42	+ 2 53	− 2 11
35	Werchneudinsk	51 50	107 46	− 1 26	− 0 24	− 1 2
36	Orenburg	51 45	55 6	− 2 48	− 3 22	+ 0 34
37	Argunskoi	51 33	119 56	+ 1 22	+ 3 44	− 2 22
38	Göttingen	51 32	9 56	+ 20 28	+ 18 38	+ 1 50
39	London	51 31	359 50	+ 25 37	+ 24 0	+ 1 37
40	Nertschinsk Bergw.	51 19	119 37	+ 1 20	+ 4 6	− 2 46
41	Tschindant	50 34	115 32	+ 0 34	+ 2 14	− 1 40
42	Charazaiska	50 29	104 44	− 2 9	− 2 27	+ 0 18
43	Zuruchaitu	50 23	119 3	+ 1 18	+ 3 11	− 1 53
44	Troizkosawsk	50 21	106 45	− 1 34	− 0 12	− 1 22
45	Abagaitujewskoi	49 35	117 50	+ 1 8	+ 2 54	− 1 46
46	Altanskoi	49 28	111 30	− 0 16	+ 0 48	− 1 4
47	Mendschinskoi	49 26	108 55	− 0 56	+ 0 12	− 1 8
48	Paris	48 52	2 21	+ 24 6	+ 22 4	+ 2 2
49	Chunzal	48 13	106 27	− 1 30	− 1 6	− 0 24
50	Urga	47 55	106 42	− 1 26	− 1 16	− 0 10

	Inclination			Intensität		
	Berechn.	Beobacht.	Untersch.	Berechn.	Beobacht.	Untersch.
1	+ 82° 1′	+ 81° 11′	+ 0° 50′	1.599	1.562	+ 0.037
2	77 19	77 15	+ 0 4	1.545	1.506	+ 0.039
3	88 48	90 0	− 1 12	1.717		
4	80 40	77 0	+ 3 40	1.527		
5	74 36	74 18	+ 0 18	1.661	1.697	− 0.036
6	74 27	74 0	+ 0 27	1.658	1.721	− 0.063
7	74 12	73 37	+ 0 35	1.653	1.713	− 0.060
8	73 48	73 8	+ 0 40	1.648	1.700	− 0.052
9	70 25	71 3	− 0 38	1.469	1.410	+ 0.059
10	72 4	72 7	− 0 3	1.456	1.419	+ 0.037
11	71 36	70 41	+ 0 55	1.621	1.615	+ 0.006
12	70 13	71 1	− 0 48	1.575	1.557	+ 0.018
13	69 55	68 28	+ 1 27	1.583	1.577	+ 0.006
14	76 30	75 51	+ 0 39	1.697	1.731	− 0.034
15	69 46	70 28	− 0 42	1.586	1.575	+ 0.011
16	68 24	69 16	− 0 52	1.535	1.523	+ 0.012
17	70 33	70 55	− 0 22	1.613	1.619	− 0.006
18	67 9	68 41	− 1 32	1.469	1.442	+ 0.027
19	70 24	71 0	− 0 36	1.638	1.657	− 0.019
20	67 13	68 25	− 1 12	1.477	1.433	+ 0.044
21	66 45	68 57	− 2 12	1.446	1.404	+ 0.042
22	67 19	69 26	− 2 7	1.410	1.365	+ 0.045
23	67 50	68 10	− 0 20	1.591	1.605	− 0.014
24	68 32	68 11	+ 0 21	1.609	1.656	− 0.047
25	68 32	68 22	+ 0 10	1.611	1.660	− 0.049
26	65 31	63 50	+ 1 41	1.521	1.489	+ 0.032
27	68 17	67 53	+ 0 24	1.612	1.667	− 0.055
28	66 45	68 7	− 1 22	1.391	1.367	+ 0.024
29	68 25	68 8	+ 0 17	1.616	1.640	− 0.024
30	68 17	68 14	+ 0 3	1.616	1.647	− 0.031
31	67 55	67 38	+ 0 17	1.606	1.649	− 0.043
32	68 12	68 10	+ 0 2	1.615	1.663	− 0.048
33	67 56	67 42	+ 0 14	1.609	1.668	− 0.059
34	67 43	67 11	+ 0 32	1.604	1.635	− 0.031
35	67 55	68 6	− 0 11	1.612	1.657	− 0.045
36	63 14	64 44	− 1 30	1.461	1.432	+ 0.029
37	67 10	66 54	+ 0 16	1.595	1.655	− 0.060
38	66 43	67 56	− 1 13	1.388	1.357	+ 0.031
39	68 54	69 17	− 0 23	1.410	1.372	+ 0.038
40	66 59	66 33	+ 0 26	1.593	1.617	− 0.024
41	66 35	66 32	+ 0 3	1.592	1.650	− 0.058
42	66 45	66 56	− 0 11	1.599	1.643	− 0.044
43	66 12	66 13	− 0 1	1.584	1.626	− 0.042
44	66 38	66 19	+ 0 19	1.597	1.642	− 0.045
45	65 33	64 48	+ 0 45	1.577	1.583	− 0.006
46	65 46	65 20	+ 0 26	1.585	1.619	− 0.034
47	65 48	65 31	+ 0 17	1.587	1.630	− 0.043
48	66 45	67 24	− 0 39	1.389	1.348	+ 0.041
49	64 42	64 29	+ 0 13	1.574	1.612	− 0.038
50	64 25	64 4	+ 0 21	1.571	1.583	− 0.012

		Breite	Länge	Declination		
				Berechn.	Beobacht.	Untersch.
51	Astrachan	+ 46° 20′	48° 0′	+ 1° 40′	+ 1° 12′	+ 0° 28′
52	Chologur	46 0	110 34	− 0 20	+ 0 49	− 1 9
53	Ergi	45 32	111 25	− 0 6	+ 1 7	− 1 13
54	Mailand	45 28	9 9	+ 20 56	+ 18 33	+ 2 23
55	Sendschi	44 45	110 26	− 0 20	+ 0 30	− 0 50
56	Batchay	44 21	112 55	+ 0 16	+ 0 59	− 0 43
57	Scharabudurguna	43 13	114 6	+ 0 32	+ 0 46	− 0 14
58	Neapel	40 52	14 16	+ 18 53	+ 15 20	+ 3 33
59	Chalgan	40 49	114 58	+ 0 42	+ 1 13	− 0 31
60	Pekin	39 54	116 26	+ 0 58	+ 1 48	− 0 50
61	Terceira	38 39	332 47	+ 25 17	+ 24 18	+ 0 59
62	San Francisco	37 49	237 35	− 16 22	− 14 55	− 1 27
63	Port Praya	14 54	336 30	+ 16 17	+ 16 30	− 0 13
64	Madras	+ 13 4	80 17	− 4 1		
65	Galapagos Insel	− 0 50	270 23	− 8 57	− 9 30	+ 0 33
66	Ascension	7 56	345 36	+ 14 37	+ 13 30	+ 1 7
67	Pernambuco	8 4	325 9	+ 5 58	+ 5 54	+ 0 4
68	Callao	12 4	282 52	− 9 32	− 10 0	+ 0 28
69	Keeling Insel	12 5	96 55	+ 0 23	+ 1 12	− 0 49
70	Bahia	12 59	321 30	+ 3 12	+ 4 18	− 1 6
71	St. Helena	15 55	354 17	+ 19 27	+ 18 0	+ 1 27
72	Otaheite	17 29	210 30	− 5 45	− 7 54	+ 2 9
73	Mauritius	20 9	57 31	+ 11 9	+ 11 18	− 0 9
74	Rio de Janeiro	22 55	316 51	− 1 11	− 2 8	+ 0 57
75	Valparaiso	33 2	288 19	− 13 45	− 15 18	+ 1 33
76	Sydney	33 51	151 17	− 7 51	− 10 24	+ 2 33
77	Vorg. d. g. Hoffn.	34 11	18 26	+ 27 24	+ 28 30	− 1 6
78	Monte Video	34 53	303 47	− 11 23	− 12 0	+ 0 37
79	K. Georgs Sund	35 2	117 56	+ 5 12	+ 5 36	− 0 24
80	Neu Seeland	35 16	174 0	− 11 10	− 14 0	+ 2 50
81	Concepcion	36 42	286 50	− 14 43	− 16 48	+ 2 5
82	Blanco Bay	38 57	298 1	− 12 57	− 15 0	+ 2 3
83	Valdivia	39 53	286 31	− 16 13	− 17 30	+ 1 17
84	Chiloe	41 51	286 4	− 16 56	− 18 0	+ 1 4
85	Hobarttown	42 53	147 24	− 5 51	− 11 6	+ 5 15
86	Port Low	43 48	285 58	− 17 32	− 19 48	+ 2 16
87	Port San Andres	46 35	284 25	− 19 4	− 20 48	+ 1 44
88	Port Desire	47 45	294 5	− 16 52	− 20 12	+ 3 20
89	R. Santa Cruz	50 7	291 36	− 18 23	− 20 54	+ 2 31
90	Falkland Insel	51 32	301 53	− 15 16	− 19 0	+ 3 44
91	Port Famine	− 53 38	289 2	− 20 28	− 23 0	+ 2 32
8*	Port Etches	+ 60 21	213 19	− 28 33	− 31 38	+ 3 5
8**	Lerwick	+ 60 9	358 53	+ 27 10	+ 27 16	− 0 6
11*	Stockholm	+ 59 20	18 4	+ 15 22	+ 14 57	+ 0 25
34*	Valentia	+ 51 56	349 43	+ 30 2	+ 28 43	+ 1 19
40*	Brüssel	+ 50 52	4 50	+ 23 23	+ 22 19	+ 1 4
54*	Montreal	+ 45 27	286 30	+ 5 23	+ 7 30	− 2 7
62*	Oahu	+ 21 17	202 0	− 12 19	− 10 40	− 1 39
64*	Panama	+ 8 37	280 31	− 6 44	− 7 37	+ 0 53

	Inclination			Intensität		
	Berechn.	Beobacht.	Untersch.	Berechn.	Beobacht.	Untersch.
51	+ 56° 59′	+ 59° 58′	− 2° 59′	1.358	1.334	+ 0.024
52	62 31	61 54	+ 0 37	1.545	1.580	− 0.035
53	61 58	61 22	+ 0 36	1.539	1.559	− 0.020
54	62 13	63 48	− 1 35	1.331	1.294	+ 0.037
55	61 15	60 42	+ 0 33	1.529	1.530	− 0.001
56	60 46	60 18	+ 0 28	1.520	1.553	− 0.033
57	59 32	59 3	+ 0 29	1.502	1.538	− 0.036
58	56 26	58 53	− 2 27	1.271	1.271	0.
59	56 51	56 17	+ 0 34	1.465	1.459	+ 0.006
60	55 43	54 49	+ 0 54	1.448	1.453	− 0.005
61	68 34	68 6	+ 0 28	1.469	1.457	+ 0.012
62	64 14	62 38	+ 1 36	1.592	1.591	+ 0.001
63	45 51	46 3	− 0 12	1.168	1.156	+ 0.012
64	4 14	6 52	− 2 38	1.038	1.031	+ 0.007
65	13 24	9 29	+ 3 55	1.085	1.069	+ 0.016
66	5 32	1 39	+ 3 53	0.813	0.873	− 0.060
67	+ 13 2	+ 13 13	− 0 11	0.909	0.914	− 0.005
68	− 4 39	− 6 14	+ 1 35	1.003	0.97	+ 0.033
69	− 39 19	− 38 33	− 0 46	1.161		
70	+ 3 59	+ 5 24	− 1 25	0.883	0.871	+ 0.012
71	− 14 52	− 18 1	+ 3 9	0.811	0.836	− 0.025
72	− 27 26	− 30 26	+ 3 0	1.113	1.094	+ 0.019
73	− 54 8	− 54 1	− 0 7	1.060	1.144	− 0.084
74	− 14 49	− 13 30	− 1 19	0.879	0.878	+ 0.001
75	− 37 56	− 39 7	+ 1 11	1.094	1.176	− 0.082
76	− 58 11	− 62 49	+ 4 38	1.667	1.685	− 0.018
77	− 51 4	− 52 35	+ 1 31	0.981	1.014	− 0.033
78	− 35 34	− 35 40	+ 0 6	1.022	1.060	− 0.038
79	− 62 39	− 64 41	+ 2 2	1.658	1.709	− 0.051
80	− 54 46	− 59 32	+ 4 46	1.616	1.591	+ 0.025
81	− 42 49	− 44 13	+ 1 24	1.147	1.218	− 0.071
82	− 42 1	− 41 54	− 0 7	1.103	1.113	− 0.010
83	− 46 13	− 46 47	+ 0 34	1.145	1.238	− 0.093
84	− 48 14	− 49 26	+ 1 12	1.227	1.313	− 0.086
85	− 66 57	− 70 35	+ 3 38	1.894	1.817	+ 0.077
86	− 50 4	− 51 20	+ 1 16	1.257	1.326	− 0.069
87	− 53 0	− 54 14	+ 1 14	1.310		
88	− 51 22	− 52 43	+ 1 21	1.263	1.359	− 0.096
89	− 53 49	− 55 16	+ 1 27	1.321	1.425	− 0.104
90	− 52 46	− 53 25	+ 0 39	1.276	1.367	− 0.091
91	− 57 38	− 59 53	+ 2 15	1.424	1.532	− 0.108
8*	+ 76 25	+ 76 3	+ 0 22	1.678	1.75	− 0.072
8**	+ 73 46	+ 73 45	+ 0 1	1.469	1.421	+ 0.048
11*	+ 70 52	+ 71 40	+ 0 48	1.451	1.382	+ 0.069
34*	+ 71 25	+ 70 52	+ 0 33	1.448	1.409	+ 0.039
40*	+ 67 29	+ 68 49	− 1 20	1.393	1.369	+ 0.024
54*	+ 77 24	+ 76 19	+ 1 5	1.713	1.805	− 0.092
62*	+ 37 36	+ 41 35	− 3 59	1.125	1.14	− 0.015
64*	+ 34 40	+ 31 55	+ 2 45	1.238	1.19	+ 0.048

30.

Wenn man bei der Beurtheilung der Unterschiede zwischen Rechnung und Beobachtung, welche die vorstehende tabellarische Vergleichung ergibt, in Erwägung zieht, dass einerseits fast sämmtliche Beobachtungen mit den Fehlern der Operation und den zufälligen Anomalien in der magnetischen Kraft selbst behaftet sind, und nicht für ein und dasselbe Jahr gelten *); andererseits, dass in unsern Formeln nur die Glieder bis zur vierten Ordnung enthalten sind, während die folgenden noch sehr merklich sein mögen: so scheint die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung allen billigen Erwartungen zu genügen, die man von einem ersten Versuche haben durfte. Unser Ausdruck für $\frac{V}{R}$ darf also wohl als der Wahrheit nahe kommend betrachtet werden, wenigstens in seinen beträchtlichern Gliedern, und es hat daher der Mühe werth geschienen, von dem Gange der numerischen Werthe von $\frac{V}{R}$ durch eine graphische Darstellung eine Versinnlichung zu geben. Es ist diess durch eine von Hrn. Dr. Goldschmidt gezeichnete Karte in drei Abtheilungen geschehen, deren erste nach Mercator's Projection den ganzen Erdgürtel zwischen 70^0 nordlicher und 70^0 südlicher Breite, die beiden andern nach stereographischer Projection die Polargegenden bis zu 65^0 Breite vorstellen. Die Correctionen und Vervollständigungen, welche in Zukunft eine wiederholte und auf vollkommnere Data gegründete Berechnung an dem Ausdruck für $\frac{V}{R}$ nöthig machen wird, werden zwar ohne Zweifel noch bedeutende Verschiebungen in diesem Liniensystem hervorbringen, besonders in den hohen südlichen Breiten: aber eine wesentliche Änderung in der ganzen Gestaltung selbst ist nicht denkbar ohne so grosse Änderungen in dem Ausdrucke für $\frac{V}{R}$, dass die Übereinstimmung mit den vorhandenen Beobachtungen verloren gehen müsste. Wir sind also hiedurch zu dem wichtigen Resultate geführt, dass das System der

*) Von der bedeutenden Discordanz zwischen verschiedenen Beobachtern bei einem und demselben Orte gibt schon das im vorhergehenden Artikel Mitgetheilte einige Proben; einige andere mögen hier noch angeführt werden, wo die Unterschiede viel grösser sind, als mit irgend einiger Wahrscheinlichkeit auf Rechnung regelmässiger jährlicher Änderung gesetzt werden kann. Die Inclination in Valparaiso war 1829 nach King $-40^0\,11'$, 1835 nach Fitz Roy $-38^0\,3'$. Auf der Insel Mauritius war die Intensität im Jahre 1818 nach Freycinet 1,096, im Jahr 1836 nach Fitz Roy 1,192. Noch grösser ist der Unterschied bei Otaheite, wo die Intensität 1830 von Erman $= 1,172$ gefunden ist, hingegen 1835 von Fitz Roy $= 1,017$. Diese letztere Verschiedenheit an einem für künftige Verbesserung der Elemente höchst wichtigen Platze ist bedeutend grösser, als die grösste, die unter allen unsern 86 Vergleichungen berechneter Intensitäten mit beobachteten vorkommt.

Linien gleicher Werthe von V auf der Oberfläche der Erde wirklich unter dem einfachsten oben Art. 11 beschriebenen Typus begriffen ist, und dass also *nur zwei magnetische Pole* auf der Erde vorhanden sind, wenn man von dem im 13. Artikel erwähnten Falle einer localen Ausnahme absieht, dessen Vorkommen oder Nichtvorkommen zur Zeit noch dahin gestellt bleiben muss. Die genaue Berechnung nach unsern Elementen gibt die Plätze dieser beiden Pole

1) in $73^0\,35'$ nordlicher Breite, $264^0\,21'$ Länge östlich von Greenwich, mit dem Werthe der ganzen Intensität $= 1,701$ (nach gewöhnlicher Einheit).

2) in $72^0\,35'$ südlicher Breite, $152^0\,30'$ Länge mit der ganzen Intensität $= 2,253$.

Im erstern Punkte hat $\frac{V}{R}$ seinen grössten Werth $= +895,86$, im zweiten den kleinsten $= -1030,24$.

Nach Ross's Beobachtung fällt der nordliche magnetische Pol um $3^0\,30'$ südlicher als nach unserer Rechnung, und letztere gibt, wie aus unsrer Vergleichungstafel ersichtlich ist, eine um $1^0\,12'$ fehlerhafte Richtung der magnetischen Kraft an jenem Platze. Beim südlichen magnetischen Pole wird man eine bedeutend grössere Verschiebung zu erwarten haben. Da in Hobarttown, als dem demselben am nächsten liegenden Beobachtungsorte, die berechnete Inclination ohne Rücksicht auf das Zeichen, von der Rechnung um $3^0\,38'$ zu klein angegeben wird, insofern man sich auf die Beobachtung verlassen kann, so wird der wirkliche südliche magnetische Pol wahrscheinlich bedeutend nordlicher liegen als ihn unsere Rechnung angibt, und möchte derselbe etwa in der Gegend von 66^0 Breite und 146^0 Länge zu suchen sein.

31.

Wenngleich man den beiden Punkten auf der Erdoberfläche, wo die horizontale Kraft verschwindet, und die man die magnetischen Pole nennt, wegen ihrer Beziehung auf die Gestaltung der Erscheinungen der horizontalen Kraft auf der ganzen Erdfläche eine gewisse Bedeutsamkeit wohl beilegen mag, so muss man sich doch hüten, dieser Bedeutsamkeit eine weitere Ausdehnung zu geben: namentlich ist die Chorde, welche jene beiden Punkte verbindet, ohne alle Bedeutung, und es würde ein unpassender Missgriff sein, wenn man *diese* gerade Linie durch die Benennung *magnetische Axe* der Erde auszeichnen wollte. Die einzige Art, wie man dem Begriffe der magnetischen Axe eines Körpers eine allgemein gültige Haltung geben kann, ist die im 5. Artikel der *Intensitas vis magneticae* festgesetzte, wonach darunter eine gerade Linie verstanden wird, in Beziehung auf welche das Moment des in dem Körper enthaltenen freien Magnetismus ein Maximum ist. Zur Bestimmung der Lage der magnetischen Axe der Erde in diesem Sinn, und zugleich des Moments des Erdmagnetismus in Beziehung auf dieselbe, ist nun nach dem, was oben im 17. Art. bereits bemerkt ist, bloss die Kenntniss der Glieder erster Ordnung von V erforderlich. Nach unsern Elementen Art. 26 ist

$$P' = +925{,}782\cos u + 89{,}024\sin u\cos\lambda - 178{,}744\sin u\sin\lambda$$

mithin sind $-925{,}782\,R^3$, $-89{,}024\,R^3$, $+178{,}744\,R^3$ die Momente des Erdmagnetismus in Beziehung auf die Erdaxe, und die beiden Erdradien für die Länge 0 und 90^0. Bei der Erdaxe ist die Richtung nach dem Nordpole zu verstanden, und das negative Zeichen des entsprechenden Moments zeigt an, dass die magnetische Axe einen stumpfen Winkel mit jener macht, d.i. dass ihr magnetischer Nordpol nach Süden gekehrt ist. Die Richtung der magnetischen Axe findet sich hieraus parallel dem Erddiameter von $77^0\,50'$ N. Breite $296^0\,29'$ Länge nach $77^0\,50'$ S. Breite $116^0\,29'$ Länge, und das magnetische Moment in Beziehung auf dieselbe $= 947{,}08\,R^3$. Bei letzterm muss man sich erinnern, dass unsern Elementen eine Einheit für die Intensität zum Grunde liegt, die ein Tausendtheil der gewöhnlich gebrauchten ist. Um die Reduction auf die in der *Intensitas vis magneticae* festgesetzte absolute Einheit zu erhalten, bemerken wir, dass in letzterer die horizontale Intensität in Göttingen, 1834 am 19. Julius $= 1{,}7748$ gefunden war, woraus mit der Inclination $68^0\,1'$ die ganze Intensität $= 4{,}7414$ folgt, während sie nach obiger Einheit $= 1357$ angenommen wird. Der Reductionsfactor ist also $= 0{,}0034941$, und sonach das magnetische Moment der Erde nach der absoluten Einheit

$$= 3{,}3092\,R^3$$

Da bei dieser absoluten Einheit für die erdmagnetische Kraft das Millimeter als Längeneinheit angenommen ist, so muss auch R in Millimetern angesetzt werden, wobei es, da ohnehin die Ellipticität der Erde hier nicht berücksichtigt wird, hinreichend ist, R als Radius eines Kreises zu betrachten, dessen Umfang 40000 Millionen Millimeter beträgt. Hienach wird obiges magnetische Moment durch

eine Zahl ausgedrückt, deren Logarithme $= 29{,}93136$ oder durch 853800 Quadrillionen. Nach derselben absoluten Einheit wurde das magnetische Moment eines einpfündigen Magnetstabes nach den im Jahre 1832 angestellten Versuchen $= 100877000$ gefunden (*Intensitas* Art. 21); das magnetische Moment der Erde ist also 8464 Trillionen mal grösser. Es wären daher 8464 Trillionen solcher Magnetstäbe, mit parallelen magnetischen Axen, erforderlich, um die magnetische Wirkung der Erde im äussern Raume zu ersetzen, was bei einer gleichförmigen Vertheilung durch den ganzen körperlichen Raum der Erde beinahe acht Stäbe (genauer 7,831) auf jedes Kubikmeter beträgt. So ausgesprochen, behält dies Resultat seine Bedeutung, auch wenn man die Erde nicht als einen wirklichen Magnet betrachten, sondern den Erdmagnetismus blossen beharrlichen galvanischen Strömen in der Erde zuschreiben wollte. Betrachten wir aber die Erde als einen wirklichen Magnet, so sind wir genöthigt, *durchschnittlich* wenigstens*) jedem Theile derselben, der ein Achtel Kubikmeter gross ist, eine eben so starke Magnetisirung beizulegen, als jener Magnetstab enthält, ein Resultat, welches wohl den Physikern unerwartet sein wird.

32.

Die Art der wirklichen Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten in der Erde bleibt nothwendigerweise unbestimmt. In der That kann nach einem allgemeinen Theorem, welches bereits in der *Intensitas* Art. 2 erwähnt ist, und bei einer andern Gelegenheit ausführlich behandelt werden soll, anstatt jeder beliebigen Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten innerhalb eines körperlichen Raumes allemal substituirt werden eine Vertheilung auf der Oberfläche dieses Raumes, so dass die Wirkung in jedem Punkte des äussern Raumes genau dieselbe bleibt, woraus man leicht schliesst, dass *einerlei* Wirkung im ganzen äussern Raume aus unendlich vielen *verschiedenen* Vertheilungen der magnetischen Flüssigkeiten im Innern abzuleiten ist.

Dagegen können wir diejenige fingirte Vertheilung auf der Oberfläche der Erde, welche der wirklichen im Innern, in Beziehung auf die daraus nach Aussen entstehenden Kräfte, vollkommen äquivalirt, angeben, und sogar, wegen der Ku-

*) Insofern wir nemlich nicht befugt sind, bei allen magnetisirten Theilen der Erde durchaus parallele magnetische Axen vorauszusetzen. Je mehr an solchem Parallelismus fehlt, desto stärker muss die durchschnittliche Magnetisirung der Theile sein, um dasselbe magnetische Totalmoment hervorzubringen.

gelgestalt der Erde, auf eine höchst einfache Art. Es wird nemlich die Dichtigkeit des magnetischen Fluidums in jedem Punkte der Erdoberfläche, d. i. das Quantum des Fluidums, welches der Flächeneinheit entspricht, durch die Formel

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{V}{R} - 2Z\right)$$

ausgedrückt, oder durch

$$-\frac{1}{4\pi}(3P' + 5P'' + 7P''' + 9P'''' + \text{u. s. w.})$$

Der Werth dieser Formel wird demnächst durch eine graphische Darstellung versinnlicht werden; hier mag nur bemerkt werden, dass er negativ an der nordlichen, positiv an der südlichen Hälfte der Erde ist, so jedoch, dass die Scheidungslinie den Äquator zweimal schneidet (in 6° und 186° Länge) und sich auf beiden Seiten bis zu etwa 15° nordlicher und südlicher Breite von demselben entfernt; ferner dass auf der nordlichen Hälfte *zwei* Minima Statt finden, auf der südlichen hingegen nur ein Maximum. Nach einer flüchtigen Rechnung finden sich diese Minima und das Maximum

$-209{,}1$	in	55° N. Breite	263° Länge
$-200{,}0$	in	71° N. Breite	116° Länge
$+277{,}7$	in	70° S. Breite	154° Länge

Bei den Werthen selbst liegt die Einheit unsrer Elemente zum Grunde, und sie müssen daher noch mit 0,0034941 multiplicirt werden, wenn sie in absolutem Maass ausgedrückt werden sollen.

33.

Unsere Elemente sollen, wie schon oben bevorwortet ist, für nichts weiter gelten, als für eine erste Annäherung, und als solche stimmen sie nach Art. 29 mit den Beobachtungen befriedigend genug überein. Es leidet keinen Zweifel, dass eine Verbesserungsrechnung nach diesen Beobachtungen eine viel grössere Übereinstimmung verschaffen würde, und eine solche Rechnung würde an sich weiter keine Schwierigkeit haben als ihre Länge, die immer noch abschreckend gross bleibt, auch wenn man zur Abkürzung ähnliche Kunstgriffe anwenden wollte, wie von den Astronomen bei Verbesserung der Elemente der Planeten- und Kometenbahnen benutzt werden. Obgleich indessen diese Schwierigkeit leicht

überwindlich sein würde, wenn die Arbeit unter eine Anzahl von Rechnern vertheilt werden könnte, so möchte es doch nicht gerathen sein, eine solche Verbesserung schon jetzt vorzunehmen, wo die Data von so vielen Plätzen, deren Mitbenutzung wesentlich sein würde, noch so geringe Zuverlässigkeit haben. Es wird am besten sein, vorerst die Vergleichung der Elemente mit Beobachtungen weiter fortzusetzen, wodurch man das Mittel finden wird, den allgemeinen Karten eine viel grössere Zuverlässigkeit zu geben, als bei dem bisher ausschliesslich empirischen Verfahren möglich war. Es sei uns aber erlaubt, einige Blicke auf die künftigen Fortschritte der Theorie zu werfen, deren völlige Realisirung freilich noch sehr entfernt sein mag.

34.

Zu einer befriedigenden Ausfeilung und Vervollständigung der Elemente müssen an die Beobachtungsdata viel höhere Forderungen gemacht werden, als bisher erfüllt sind. Jene sollten an allen zu benutzenden Punkten eine Schärfe haben, die bisjetzt nur an äusserst wenigen erreicht ist; sie sollten von den unregelmässigen Bewegungen gereinigt sein; sie sollten für Einerlei Zeitpunkt gelten. Es wird noch lange dauern, bis solchen Forderungen genügt werden kann: was aber zunächst am meisten Noth thut, ist die Herbeischaffung von *vollständigen* (d. i. alle drei Elemente umfassenden) Beobachtungen an einem oder dem andern Punkte innerhalb derjenigen grossen Flächenräume, wo dergleichen bisher noch ganz fehlen; denn in der That hat ein neu hinzukommender Punkt allemal für die allgemeine Theorie desto grössere Wichtigkeit, je weiter er von den andern schon zu unserm Besitz gehörenden entfernt liegt.

Nach einer hinlänglichen Zwischenzeit wird man für einen zweiten Zeitpunkt die Elemente von neuem bestimmen, und so ihre Säcularänderungen erhalten. Aber offenbar wird dazu unumgänglich nöthig sein, das bisherige Maass der Intensitäten ganz fahren zu lassen, und ein absolutes an dessen Stelle zu setzen.

Im Laufe künftiger Jahrhunderte werden auch diese Änderungen nicht mehr als gleichförmig erscheinen, und die Erforschung des Ganges, in dem die Elemente fortschreiten, wird den Naturforschern unerschöpflichen Stoff zu Untersuchungen darbieten.

35.

Aber auch Aufschlüsse über interessante Punkte der Theorie wird die Folgezeit bringen.

In unsrer Theorie ist angenommen, dass in jedem messbaren magnetisirten Theile des Erdkörpers genau eben so viel positives wie negatives Fluidum enthalten sei. Hätten die magnetischen Flüssigkeiten gar keine Realität, sondern wären sie nur ein fingirtes Substitut für galvanische Ströme in den kleinsten Theilen der Erde, so ist jene Gleichheit schon von selbst an die Befugniss zu dieser Substitution geknüpft: legt man hingegen den magnetischen Flüssigkeiten wirkliche Realität bei, so könnte man ohne Ungereimtheit die vollkommene Gleichkeit der Quantitäten beider Flüssigkeiten in Zweifel ziehen. In Beziehung auf einzelne magnetische Körper (natürliche oder künstliche Magnete) liesse sich die Frage, ob in ihnen ein merklicher Überschuss der einen oder der andern Flüssigkeit enthalten sei, oder nicht, leicht durch sehr scharfe Versuche entscheiden, da im ersten Falle ein mit einem solchen Körper belasteter Lothfaden eine Abweichung von der verticalen Lage zeigen müsste (und zwar in der Richtung des magnetischen Meridians). Wenn dergleichen Versuche, mit vielen künstlichen Magneten in einem von Eisen hinlänglich entfernten Locale angestellt, niemals die geringste Abweichung zeigen sollten (wie wohl zu vermuthen steht), so würde allerdings jene Gleichheit auch für die ganze Erde mit grösster Wahrscheinlichkeit anzunehmen sein, immer aber doch die Möglichkeit einiger Ungleichheit noch nicht ganz ausgeschlossen.

In unsrer Theorie würde durch das Vorhandensein einer solchen Ungleichheit weiter kein Unterschied entstehen, als dass P^0 (Art. 17) nicht mehr $= 0$ sein würde. Die Folge davon würde sein, dass im ganzen unendlichen äussern Raume dem Ausdrucke für Z noch das Glied $\frac{RRP^0}{rr}$, und also auf der Oberfläche der Erde das (constante) Glied P^0 beigefügt werden müsste, während X und Y gar nicht dadurch geändert werden. Wenn die Zukunft einen viel umfassendern Reichthum an scharfen Beobachtungen geliefert haben wird, als jetzt zu Gebote steht, wird sich allerdings ausmitteln lassen, ob ihre genaue Darstellung einen nicht verschwindenden Werth für P^0 erfordert oder nicht. Bei gegenwärtiger Beschaffenheit der Daten würde aber ein solches Unternehmen noch gar keinen Erfolg haben können.

36.

Ein anderer Theil unserer Theorie, über welchen ein Zweifel Statt finden kann, ist die Voraussetzung, dass die Agentien der erdmagnetischen Kraft ihren Sitz ausschliesslich im Innern der Erde haben.

Sollten die unmittelbaren Ursachen ganz oder zum Theil ausserhalb gesucht werden, so können wir, insofern wir bodenlose Phantasien ausschliessen und uns nur an wissenschaftlich bekanntes halten wollen, nur an galvanische Ströme denken. Die atmosphärische Luft ist kein Leiter solcher Ströme, der leere Raum auch nicht: unsre Kenntnisse verlassen uns also, wenn wir einen Träger für galvanische Ströme in den obern Regionen suchen. Allein die räthselhaften Erscheinungen des Nordlichts, bei welchem allem Anscheine nach Elektricität in Bewegung eine Hauptrolle spielt, verbieten uns, die Möglichkeit solcher Ströme bloss jener Unwissenheit wegen geradezu zu läugnen, und es bleibt jedenfalls interessant, zu untersuchen, wie die aus denselben hervorgehende magnetische Wirkung auf der Erdoberfläche sich gestalten würde.

37.

Nehmen wir also an, dass in einem die Erde gewölbartig oder schalenförmig einschliessenden Raume S beharrliche galvanische Ströme Statt finden, und bezeichnen den ganzen von S eingeschlossenen Raum mit S', den ganzen äussern S und S' einschliessenden Raum mit S''. Wie nun auch jene galvanische Ströme configurirt sein mögen, so lässt sich allemal anstatt derselben eine fingirte Vertheilung von magnetischen Flüssigkeiten und zwar innerhalb des Raumes S substituiren, durch welche in dem ganzen übrigen Raume S' und S'' genau dieselbe magnetische Wirkung ausgeübt wird, wie durch jene Ströme. Dieser wichtige schon im 3. Artikel erwähnte Satz gründet sich darauf, dass erstlich jene Ströme sich in eine unendliche Anzahl elementarer Ströme (d. i. solcher, die als linear betrachtet werden dürfen) zerlegen lassen; zweitens auf das bekannte, meines Wissens zuerst von Ampère nachgewiesene Theorem, dass an die Stelle eines jeden linearen eine beliebige Fläche begrenzenden Stromes eine Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten an beiden Seiten dieser Fläche in unmessbar kleinen Distanzen von derselben mit vorgedachter Wirkung substituirt werden kann; drittens auf die evidente Möglichkeit, für jede innerhalb S liegende geschlossene Linie eine von ihr begrenzte Fläche anzugeben, die gleichfalls ganz innerhalb S liegt.

Bezeichnet man nun mit $-v$ das Aggregat aller Quotienten, die entstehen, wenn sämmtliche Elemente jenes fingirten magnetischen Fluidums mit der Entfernung von einem unbestimmten Punkte O in S' oder S'' dividirt werden, wobei, wie sich von selbst versteht, die Elemente des südlichen Fluidums als negativ betrachtet werden müssen, so drücken die partiellen Differentialquotienten von v (ganz eben so wie in unsrer obigen Theorie die von V) die Componenten der in O durch die galvanischen Ströme hervorgebrachten magnetischen Kraft aus.

38.

Obgleich die ausführliche Entwickelung der Theorie, aus welcher der im vorhergehenden Artikel gebrauchte Satz entlehnt ist, einer andern Gelegenheit vorbehalten bleiben muss, so verdient doch ein wichtiger dieselbe betreffender Punkt hier noch erwähnt zu werden. Wenn zwei *verschiedene* Flächen F, F' construirt werden, deren jede denselben linearischen Strom G zur Begrenzung hat, und hier der Kürze wegen nur der einfachste Fall in Betrachtung gezogen wird, wo jene Flächen ausser der gemeinschaftlichen Begrenzungslinie keinen Punkt weiter gemein haben, so schliessen dieselben einen körperlichen Raum ein. Liegt nun O ausserhalb dieses Raumes, so erhält man für denjenigen Bestandtheil von v, welcher sich auf G bezieht, *einerlei* Werth, man möge die magnetischen Fluida an F oder an F' vertheilen, und zwar ist derselbe äqual dem Producte aus der Intensität des galvanischen Stromes G (mit schicklicher Einheit gemessen) in den körperlichen Winkel, dessen Spitze in O, und der von den aus O nach den Punkten von G gezogenen geraden Linien eingeschlossen ist, oder was dasselbe ist, in denjenigen Theil der mit dem Halbmesser 1 um O beschriebenen Kugelfläche, der die gemeinschaftliche Projection sowohl von F als von F' ist. Liegt hingegen O innerhalb des von F und F' eingeschlossenen Raumes, so sind zwar die beiden Werthe des in Rede stehenden Theils von v, je nachdem man die magnetischen Flüssigkeiten an F oder an F' austheilt, ungleich, weil ihnen verschiedene Theile der erwähnten Kugelfläche entsprechen, und zwar solche, die einander zur ganzen Kugelfläche ergänzen. Allein es müssen dann, weil die Richtung des galvanischen Stroms gegen F und gegen F' entgegengesetzte Lage hat, der Intensität des Stromes, bei der Multiplication in die Kugelflächenstücke, in den beiden Fällen entgegengesetzte Zeichen beigelegt werden. Die Folge davon ist, dass die algebraische Differenz zwischen beiden Werthen

des fraglichen Theils von v äqual wird dem Producte aus der Intensität des Stromes in die ganze Kugelfläche, oder in 4π.

Man schliesst hieraus leicht, dass, wenn O in S'' liegt, der Werth von v von der Wahl der Verbindungsflächen ganz unabhängig bleibt, dass hingegen, wenn O in S' sich befindet, zwar der absolute Werth von v von dieser Wahl abhängt, nicht aber die Differentiale von v.

Übrigens bedarf das hier berührte höchst fruchtbare Theorem, wonach in Beziehung auf die magnetische Wirkung eines linearen galvanischen Stromes das Product der Intensität desselben in das Stück der Kugelfläche, welches durch die Projection der Stromlinie, von O aus, begrenzt wird, dieselbe Bedeutung hat, wie in Beziehung auf Anziehungs- oder Abstossungskräfte die durch den Abstand von O dividirten Massentheile, in seiner Allgemeinheit noch mehrerer nähern Erläuterungen, die auf eine ausführliche Behandlung des Gegenstandes verspart werden müssen.

39.

Der Werth von v, welcher im Allgemeinen eine Function von r, u und λ ist, geht auf der Oberfläche der Erde in eine Function von u und λ allein über, und

$$-\frac{dv}{R\,du}, \quad -\frac{dv}{R\sin u\,d\lambda}$$

sind die horizontalen Componenten der aus den galvanischen Strömen daselbst hervorgehenden magnetischen Kraft, beziehungsweise nach Norden und Westen gerichtet. Es ist also offenbar, dass die merkwürdigen oben Art. 15 und 16 angeführten Sätze hier gleichfalls gelten. Allein mit der dritten Componente, der verticalen magnetischen Kraft, wird es, wenn die Agentien ihren Sitz oberhalb haben, eine etwas andere Bewandtniss haben, als wenn sie im Innern sich befinden. Um die aus jenen entspringende verticale Kraft zu ermitteln, muss zuerst v als Function von r, u und λ zugleich betrachtet, nach r differentiirt, und sodann $r = R$ substituirt werden. Allein für den innern Raum S', welchem die Erdoberfläche angehört, kann v nur in eine Reihe nach steigenden Potenzen von r entwickelt werden. Setzen wir

$$\frac{v}{R} = p^0 + \frac{r}{R}\cdot p' + \frac{rr}{RR}\cdot p'' + \frac{r^3}{R^3}\cdot p''' + \text{u. s. w.}$$

so ist p^0 eine constante Grösse, nemlich der Werth von $\frac{v}{R}$ im Mittelpunkte der

Erde; p', p'', p''' u. s. w. hingegen sind Functionen von u und λ, die denselben partiellen Differentialgleichungen wie oben P', P'', P''' u. s. w. Genüge leisten. Hieraus folgt, auf ähnliche Art wie oben Art. 20, dass die Kenntniss des Werths von v in jedem Punkt der Erdoberfläche hinreicht, um den allgemeinen für den ganzen Raum S' gültigen Ausdruck daraus abzuleiten; dass man zur Kenntniss jenes Werths mit Ausnahme eines constanten Theils, oder was dasselbe ist, zur Kenntniss der Coëfficienten p', p'', p''' u. s. w. schon durch die Kenntniss der horizontalen Kräfte auf der Erdoberfläche gelangen kann; dass aber der Werth der verticalen Kraft auf derselben nicht

$$= 2p' + 3p'' + 4p''' + \text{ u. s. w.}$$

ist (wie er sein würde, wenn die Kräfte vom Innern der Erde aus bewirkt werden), sondern

$$= -p' - 2p'' - 3p''' - \text{ u. s. w.}$$

Da nun unsere numerischen Elemente (Art. 26), unter Voraussetzung der erstern Formel bestimmt, eine schon sehr befriedigende Darstellung der Gesammtheit der Erscheinungen geben, während diese mit der zweiten Formel ganz und gar unverträglich sein würden, so ist die Unstatthaftigkeit der Hypothese, die die Ursachen des Erdmagnetismus in den Raum ausserhalb der Erde stellt, als erwiesen anzusehen.

40.

Indess darf hiemit die Möglichkeit, dass ein *Theil* der erdmagnetischen Kraft, wenn auch nur ein vergleichungsweise sehr geringer, von oben her erzeugt werde, noch nicht als entschieden widerlegt betrachtet werden. Eine viel vollständigere und viel schärfere Kenntniss der Erscheinungen wird in Zukunft über diesen wichtigen Punkt der Theorie Belehrung geben. Wenn in der Voraussetzung gemischter Ursachen die Zeichen V, P^0, P', P'' u. s. w., v, p^0, p', p'' in derselben Bedeutung wie oben verstanden werden, so dass die erstern sich auf die aus dem Innern her, die letztern auf die von dem äussern Raume aus wirkenden Ursachen beziehen; wenn ferner

$$V + v = W,\quad P^0 + p^0 = \Pi^0,\quad P' + p' = \Pi',\quad P'' + p'' = \Pi'' \text{ u. s. w.}$$

gesetzt wird, so wird auf der Oberfläche der Erde

$$\frac{W}{R} = \Pi^0 + \Pi' + \Pi'' \text{ u. s. w.}$$

sein, wo Π^n derselben partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, wie P^n (Art. 18), und die beiden Componenten der daselbst Statt findenden horizontalen magnetischen Kraft werden durch

$$-\frac{\mathrm{d}W}{R\,\mathrm{d}u},\quad -\frac{\mathrm{d}W}{R\sin u\,\mathrm{d}\lambda}$$

ausgedrückt werden. Es behalten also auch hier die Art. 15 und 16 angeführten Sätze ihre Gültigkeit, und man kann aus der blossen Kenntniss der horizontalen Kräfte die Grössen Π', Π'', Π''' u. s. w. bestimmen, aber daraus allein über das Vorhandensein gemischter Ursachen gar nichts schliessen. Wird aber die verticale Kraft für sich betrachtet, und in die Form

$$Q^0 + Q' + Q'' + Q''' + \text{ u. s. w.}$$

gebracht, so dass Q^n der vorerwähnten partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, so wird

$$Q^0 = P^0,\quad Q' = 2P' - p',\quad Q'' = 3P'' - 2p'',\quad Q''' = 4P''' - 3p'''$$

u. s. w. sein, und folglich

$$\begin{aligned} 3P' &= \Pi' + Q', & 3p' &= 2\Pi' - Q' \\ 5P'' &= 2\Pi'' + Q'', & 5p'' &= 3\Pi'' - Q'' \\ 7P''' &= 3\Pi''' + Q''', & 7p''' &= 4\Pi''' - Q''' \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Man erhält also durch die Combination der horizontalen Kräfte mit der verticalen das Mittel, W in seine Bestandtheile V und v zu scheiden, und also zu erkennen, ob letzterm ein merklicher Werth beigelegt werden muss. Bloss den constanten Theil von v, nemlich p^0, lassen die Beobachtungen völlig unbestimmt, wovon der Grund aus dem 38. Art. von selbst klar ist.

Es erscheint daher, auch von diesem interessanten Gesichtspunkte aus, als wichtig, dass die horizontale magnetische Kraft für sich betrachtet werde, und wir sehen darin einen Grund mehr für die oben (Art. 21) empfohlenen Rücksichten.

41.

Zu der im vorhergehenden Artikel angedeuteten Untersuchung wird es wahrscheinlich noch lange an zureichenden Daten fehlen. Es verdient aber bemerkt zu werden, dass die Variationen der magnetischen Kraft, wie sie sich gleichzeitig in den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche manifestiren, eine ganz ähnliche Behandlung vertragen, wozu vielleicht schon weit früher nothdürftige Data zusammengebracht werden können: dies gilt sowohl von den regelmässigen nach Tages- und Jahreszeit wechselnden Änderungen, als von den unregelmässigen. Einigen allgemeinen Andeutungen, diese künftigen Untersuchungen betreffend, darf hier wohl noch ein Platz vergönnt sein.

Nachdem man die beobachteten gleichzeitigen Änderungen für jeden Ort in die Form von Änderungen der Componenten der magnetischen Kraft, ΔX, ΔY, ΔZ, gebracht hat, wird man zuvörderst zu untersuchen haben, ob die Änderungen der beiden horizontalen Componenten sich unserer Theorie gemäss verhalten, wonach $-\Delta X$ und $-\sin u . \Delta Y$ die Werthe der partiellen Differentialquotienten einer Function von u und λ nach diesen Veränderlichen sein müssen. Im bejahenden Fall wird man schliessen, dass die Ursachen entweder wirkliche galvanische Ströme sind, oder doch wenigstens auf gleiche Art wie diese, oder wie geschiedene magnetische Flüssigkeiten wirken. Im entgegengesetzten Falle würde erwiesen sein, dass die Ursachen keine galvanischen Ströme sein können. Man sieht, dass schon die Kenntniss solcher Veränderungen der horizontalen Kraft allein (in hinlänglicher Schärfe, Menge und Verbreitung) höchst wichtige Aufschlüsse geben kann. Ist man aber ausserdem noch im Besitz der gleichzeitigen Änderungen der verticalen Kraft, so wird, *unter Voraussetzung jenes erstern Falles*, die Methode des vorhergehenden Artikels Auskunft darüber geben, ob die Ursachen oberhalb oder unterhalb der Erdoberfläche ihre Sitze haben; ja es wird dann, in sofern diese Sitze doch wahrscheinlich in einer vergleichungsweise gegen den ganzen Erdkörper wenig dicken Schicht enthalten sind, auch die Art ihrer Verbreitung wenigstens näherungsweise bestimmbar sein.

Was dagegen den zweiten, oben als möglich erwähnten Fall betrifft, so glaube ich zwar, denselben in Beziehung auf die regelmässigen von Tages- und Jahreszeit abhängenden Änderungen der erdmagnetischen Kraft für wenig wahrscheinlich halten zu dürfen, allein in Beziehung auf die unregelmässigen in kurzen Zeitfristen wechselnden Änderungen würde ich zur Zeit kaum wagen, in dieser Hinsicht eine Vermuthung auszusprechen. Sollten dieselben ihre Quelle in grossen Electricitätsbewegungen oberhalb der Atmosphäre haben, so würden diese schwerlich in die Kategorie galvanischer Ströme zu setzen sein. Denn wenn gleich alles dafür spricht, galvanischen Strom für Elektricität in Bewegung zu halten, so ist doch nicht jede Bewegung der Elektricität galvanischer Strom, sondern nur dann, wenn die Bewegung einen in sich selbst zurückkehrenden Kreislauf bildet. Da nun bloss unter dieser Bedingung die mehrmals erwähnte Substitution geschiedener magnetischer Flüssigkeiten anstatt des galvanischen Stromes verstattet ist, so würden in der erwähnten Hypothese unsre Relationen zwischen den Componenten nicht mehr zutreffen, d.i., der zweite Fall würde wirklich eintreten. Allein theils würde schon eine zur Gewissheit gebrachte Constatirung dieses wichtigen Umstandes an sich von grossem Interesse sein, theils würde es auch dann bei hinlänglich ausgebreiteten und zuverlässigen Beobachtungen nicht ausser unserm Bereich liegen, den Sitzen und dem Verhalten solcher Bewegungen auf die Spur zu kommen.

NACHTRAG.

In der Vergleichungstafel ist, nach dem Abdruck, bei zwei Örtern eine kleine Unrichtigkeit bemerkt, die bei Callao aus einer fehlerhaften Längenangabe in der angeführten Schrift, bei St. Helena durch einen Rechnungsfehler entstanden ist. Ich benutze diese Gelegenheit, um mit der Angabe der Resultate einer verbesserten Rechnung hier noch die Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen an acht andern Örtern zu verbinden, die seitdem zu meiner Kenntniss gekommen sind. [Die Berichtigungen sind bei dem Wiederabdruck berücksichtigt, auch ist zur leichtern Übersicht die Vergleichung der Beobachtungen an jenen acht Orten mit denen an den ursprünglich 91 Orten schon oben zusammengestellt.]

Die Beobachtungen in Stockholm sind von Rudberg; Intensität und Inclination 1832, Declination 1833 (Poggendorff's Annalen Band 37). In Brüssel sind die Beobachtungen vom Jahr 1832; für Declination und Inclination von Quetelet (Bulletins de l'Académie de Bruxelles T. VI), für Intensität von Rudberg (Sabine's oben [S. 154] angeführte Schrift). Der gefälligen Mittheilung Sabine's verdanke ich die Bestimmungen für die übrigen neuen Örter, so wie für Callao die Bestimmung der Intensität, und eine neuere Beobachtung der Inclination. Die Beobachtungen in Lerwick und Valentia sind 1838 vom Capitaine James Ross angestellt; die in Port Etches, Panama, und Oahu 1837 vom Capitaine Belcher, die in Callao 1838 von demselben; endlich in Montreal ist Inclination und Intensität 1838 vom Major Estcourt beobachtet, die Declination hingegen ist von 1834, und der Beobachter nicht genannt.

In Beziehung auf die Figurentafel, welche zur Versinnlichung der im 12. Artikel entwickelten Untersuchungen dient, ist hier noch zu bemerken, dass der geschickte Lithograph, Hr. Rittmüller daran einen Versuch gemacht hat, zugleich die ungleiche Intensität auszudrücken, und zwar auf eine doppelte Art, nemlich sowohl durch die verschiedene Stärke der Linien, als durch die ungleiche Schattirung der Zwischenräume.

Bei der verzögerten Vollendung des Drucks des gegenwärtigen Bandes ist es möglich geworden, demselben ausser der Karte für die Werthe von V [s. Art. 30] noch zwei andere beizufügen. Die erste, welche die nach den Elementen oder aus den Tafeln, *berechneten* Werthe der Declinationen darstellt, verdanken die Leser meinem verehrten Freunde, dem Mitherausgeber der *Resultate*. Um die verwickelte Gestaltung des Systems der Linien gleicher Declinationen recht deutlich übersehen zu können, sind die Punkte, wo die Declination einen Maximumwerth hat, so wie diejenigen, wo zwei Linien gleicher Declination einander kreuzen (oder wo eine sich selbst kreuzt), mit besonderer Sorgfalt berechnet; Punkte der ersten Art finden sich zwei, Punkte der zweiten vier: der gemeinschaftliche Charakter solcher Punkte besteht darin, dass daselbst das erste Differential der Declination nach jeder Richtung verschwindet. Übrigens ist überflüssig zu bemerken, dass in solchen Gegenden, wo die Declinationen nach allen Seiten zu sich langsam ändern, wie im südlichen und südöstlichen Asien, geringe Abänderungen in den Werthen der Declinationen schon sehr grosse in der Gestaltung des Liniensystems hervorbringen können.

Fig. 1.

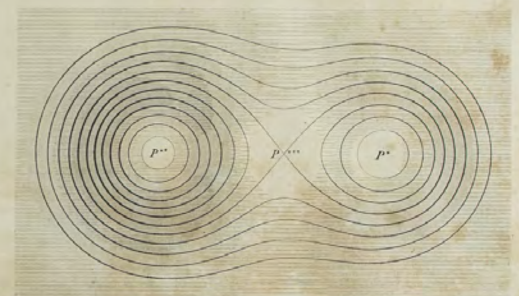

Fig. 2.

Ähnliches gilt in Beziehung auf die von Herrn Doctor GOLDSCHMIDT nach den Tafeln construirte Karte für die ganze Intensität, wobei sich zwei Maximumpunkte und ein Kreuzungspunkt in der nordlichen, und ein Maximumpunkt in der südlichen Hemisphäre, imgleichen zwei Minimumpunkte und zwei Kreuzungspunkte in der mittlern Zone ergeben haben.

An ähnlichen, auf die Theorie gegründeten, Karten für die Inclination, die horizontale Intensität, die drei Componenten der erdmagnetischen Kraft, und für diejenige Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten auf der Erdoberfläche, die als Stellvertreterin der wirklichen im Innern gelten kann [s. Art. 32], wird bereits gearbeitet, und wir hoffen, sie dem nächsten Bande der *Resultate* beifügen zu können.

[Alle die hier genannten Karten so wie Tafeln für die von 5 zu 5° Breite und von 10 zu 10° Länge berechneten Werthe sowol der in Art. 27 mit $\frac{V}{R}$, X, Y, Z bezeichneten Grössen, als auch der Declination, Inclination, der ganzen und der horizontalen Intensität sind unter dem Titel '*Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie entworfen*' als Supplement zu den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, unter Mitwirkung von C. W. B. GOLDSCHMIDT, von CARL FRIEDRICH GAUSS und WILHELM WEBER in Leipzig 1840 herausgegeben. Da von diesem Atlas zur Zeit noch Exemplare in genügender Anzahl vorhanden sind, so ist dem gegenwärtigen Abdruck der allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus nur die Karte für die Werthe von $\frac{V}{R}$ beigefügt.]

[Ausser den in der Abhandlung angegebenen Vergleichungen der Formeln mit den Beobachtungen an 99 Orten sind in den *Resultaten* und in dem genannten *Atlas* noch die hier zusammengestellten Vergleichungen für 44 andere Orte mitgetheilt.

Die Angaben für die Insel Zafarine, für Toulon und für den Ort unter 70° 53′ N. Breite und 170° Länge finden sich in dem Atlas.

Die übrigen Vergleichungen sind von B. GOLDSCHMIDT berechnet und von ihm in Bezug auf die Beobachtungen die weiter unten folgenden Nachweisungen in den *Resultaten* für 1840 und 1841 angegeben:]

		Breite	Länge	Declination			Inclination			Intensität		
				Berechn.	Beobacht.	Untersch.	Berechn.	Beobacht.	Untersch.	Berechn.	Beobacht.	Untersch.
1	Auf dem Eise	+ 70° 53′	170° 0′	− 16° 47′	− 18° 49′	+ 2° 2′	+ 79° 27′	+ 81° 9′	− 1° 42′	1.675		
2	Turuchansk	65 55	87 33	− 9 19	− 15 0	+ 5 41	77 20	77 46	− 0 26	1.662	1.678	− 0.016
3	Drontheim	63 26	10 24	+ 20 17	+ 20 0	+ 0 17	74 7	74 12	− 0 5	1.483	1.415	+ 0.068
4	Viluisk	62 49	119 27	+ 0 37	+ 1 52	− 1 15	75 44	76 46	− 1 2	1.675	1.765	− 0.090
5	Bogoslowskoie	59 45	60 7	− 5 38	− 9 9	+ 3 31	70 45	71 36	− 0 51	1.556	1.524	+ 0.032
6	Fredriksvarn	59 0	10 4	+ 20 18			71 37	72 1	− 0 24	1.450	1.436	+ 0.014
7	Jeniseisk	58 27	92 11	− 6 33	− 6 57	+ 0 24	72 33	73 24	− 0 51	1.647	1.674	− 0.027
8	Kodiack	57 20	207 9	− 24 38	− 26 43	+ 2 5	73 22	72 43	+ 0 39	1.638	1.603	+ 0.035
9	Copenhagen	55 41	12 34	+ 18 37	+ 17 40	+ 0 57	68 52	70 0	− 1 8	1.419	1.372	+ 0.047
10	Altona	53 33	9 56	+ 20 28	+ 18 43	+ 1 45	68 9	69 2	− 0 53	1.405	1.357	+ 0.048
11	Semipalatinsk	50 24	80 21	− 6 50	− 6 43	− 0 7	64 44	65 18	− 0 34	1.551	1.560	− 0.009
12	Kremsmünster	48 3	14 8	+ 18 26	+ 15 46	+ 2 40	63 8	64 34	− 1 26	1.348	1.339	+ 0.009
13	Baker's Bay	46 17	235 58	− 20 46	− 19 11	− 1 35	71 12	69 27	+ 1 45	1.675	1.643	+ 0.032
14	Fort Vancouver	45 37	237 24	− 20 8	− 19 22	− 0 46	70 56	69 22	+ 1 34	1.676	1.657	+ 0.019
15	Toulon	43 6	5 55	+ 22 26	+ 19 6	+ 3 20	61 15	62 58	− 1 43	1.320		
16	Barcelona	41 25	2 15	+ 23 45			61 12	62 15	− 1 3	1.324	1.288	+ 0.036
17	Lissabon	38 43	350 58	+ 26 1			63 0	61 58	+ 1 2	1.352	1.299	+ 0.053
18	Angra (Terceira)	38 39	332 47	+ 25 17	+ 24 2	+ 1 15	68 34	66 50	+ 1 44	1.469	1.449	+ 0.020
19	Port Bodega	38 18	236 58	− 16 41	− 15 20	− 1 21	64 28	62 53	+ 1 35	1.588	1.563	+ 0.025
20	Messina	38 11	15 34	+ 19 16			54 12	56 10	− 1 58	1.219	1.232	− 0.013
21	Palermo	38 7	13 21	+ 19 29	+ 16 3	+ 3 26	53 54	57 16	− 3 22	1.242	1.274	− 0.032
22	Algier	36 47	3 4	+ 23 18	+ 19 25	+ 3 53	56 52	57 43	− 0 51	1.267	1.272	− 0.005
23	Monterey	36 36	238 7	− 15 47	− 14 13	− 1 34	63 10	61 4	+ 2 6	1.579	1.531	+ 0.048
24	Gibraltar	36 7	354 41	+ 24 54	+ 21 40	+ 3 14	59 35	59 40	− 0 5	1.307	1.297	+ 0.010
25	Zafarine (Ins.)	35 11	357 34	+ 24 35	+ 21 7	+ 3 28	57 32	58 34	− 1 2	1.283		
26	Sta Barbara	34 24	240 19	− 14 40	− 13 28	− 1 12	61 23	58 54	+ 2 29	1.559	1.501	+ 0.058
27	San Pedro	33 43	241 45	− 14 13	− 13 8	− 1 5	60 56	58 21	+ 2 35	1.556	1.480	+ 0.076
28	San Diego	32 41	242 47	− 13 42	− 12 21	− 1 21	60 7	57 6	+ 3 1	1.547	1.482	+ 0.065
29	San Quentin	30 22	244 2	− 12 53	− 12 6	− 0 47	57 42	54 30	+ 3 12	1.514	1.461	+ 0.053
30	San Bartolomeo	27 40	245 7	− 12 1	− 10 46	− 1 15	54 43	51 41	+ 3 2	1.475	1.432	+ 0.043
31	Magdalena Bay	24 38	247 53	− 11 5	− 9 15	− 1 50	51 24	46 34	+ 4 50	1.434	1.362	+ 0.072
32	Mazatlan	23 11	253 36	− 10 15	− 9 24	− 0 51	50 35	46 38	+ 3 57	1.429	1.370	+ 0.059
33	San Lucas Bay	22 52	250 7	− 10 31	− 8 37	− 1 54	49 26	45 39	+ 3 47	1.411	1.359	+ 0.052
34	San Blas	21 32	254 44	− 9 55	− 9 0	− 0 55	48 35	44 33	+ 4 2	1.405	1.362	+ 0.043
35	Socorro Insel	18 43	249 6	− 9 55			43 11	40 44	+ 2 27	1.331	1.307	+ 0.024
36	Clarion Insel	18 21	245 19	− 10 0			41 50	37 3	+ 4 47	1.310	1.222	+ 0.088
37	Acapulco	16 50	260 5	− 9 3	− 8 23	− 0 40	+ 42 50	+ 37 57	+ 4 53	1.335	1.316	+ 0.019
38	Trevandrum	8 31	77 0	− 3 14	− 0 44	− 2 30	− 7 15	− 2 50	− 4 25	1.014	1.012	+ 0.002
39	Cocos Insel	+ 5 53	272 58	− 8 11	− 8 24	+ 0 13	+ 27 46	+ 22 56	+ 4 50	1.172	1.125	+ 0.047
40	Puna Insel	− 2 47	280 5	− 8 23	− 8 56	+ 0 33	+ 13 23	+ 9 8	+ 4 15	1.062	1.024	+ 0.038
41	Martins Insel	− 8 56	220 20	− 5 27			− 12 44	− 14 6	+ 1 22	1.026	1.024	+ 0.002
42	Bow Insel	− 18 5	219 7	− 5 21			− 28 46	− 30 16	+ 1 30	1.125	1.123	+ 0.002
43	Rio Grande	− 32 2	307 40	− 7 29			− 33 14	− 30 4	− 3 10	0.997	0.967	+ 0.030
44		− 67 4	147 30	+ 6 20	− 12 35	+ 18 55	− 85 59	− 87 30	+ 1 31	2.248		
14	Sitka	+ 57 3	224 35	− 28 45	− 29 32	+ 0 47	+ 76 30	+ 75 49	+ 0 41	1.697	1.704	− 0.007
62	San Francisco	+ 37 49	237 35	− 16 22	− 15 20	− 1 2	+ 64 14	+ 62 6	+ 2 8	1.592	1.540	+ 0.052
62*	Oahu	+ 21 17	202 0	− 12 19	− 10 40	− 1 39	+ 37 36	+ 41 17	− 3 41	1.125	1.134	− 0.009
72	Otaheite	− 17 29	210 30	− 5 45	− 6 30	+ 0 45	− 27 26	− 30 18	+ 2 52	1.113	1.133	− 0.020

{Die Beobachtungen in Palermo sind von Dr. SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN und Prof. LISTING zu Ende des Jahres 1835 angestellt.

Die Bestimmungen in Gibraltar wie die Inclination und Intensität in Algier sind 1840 auf einer Expedition der Norwegischen Corvette Ornen von den Capitains KONOW und VALEUR ausgeführt und uns von Herrn Professor HANSTEEN mitgetheilt. Die Declination in Algier ist im Jahre 1832 bestimmt und der Description nautique des côtes de l'Algérie par BÉRARD (Paris 1839) entlehnt.

Die Beobachtung in 67° 4' südlicher Breite ist 1840 vom amerikanischen Flottencapitain WILKES angestellt und in den Blättern für literarische Unterhaltung 1841 Nr. 6 mitgetheilt.

Die Beobachtungen in Kodiack, Baker's Bay, Fort Vancouver, Bodega, Monterey, Sta Barbara, San Pedro, San Diego, San Quentin, San Bartolomeo, Magdalena Bay, Mazatlan, San Lucas Bay, San Blas, Acapulco, Cocos Insel, Puna Insel, sind vom Capitaine BELCHER in den Jahren 1837 — 1840 ausgeführt, und von SABINE in einer der königlichen Societät zu London vorgelegten Abhandlung *Contributions to terrestical Magnetism* veröffentlicht. Auf Socorro, Clarion, Martins und Bow Island sind die Declinationen ebenfalls bestimmt, aber in der SABINE'schen Abhandlung noch nicht mitgetheilt. Um die Unsicherheit zu heben, welche noch rücksichtlich der Intensität auf Otaheite Statt fand, richtete BELCHER seine Rückreise über Otaheite und bestimmte durch vielfache Beobachtungen die Elemente auf Point Venus. Ausser diesem Orte sind auch Sitka, San Francisco, Oahu, wo BELCHER neue Beobachtungen angestellt, schon nach andern Beobachtungen in der ersten Vergleichungstafel aufgenommen.

Die Elemente von Kremsmünster sind von Herrn Professor KOLLER bestimmt. Die Beobachtungen in Trevandrum, vom Director des dortigen magnetischen Observatoriums Herrn CALDECOTT angestellt, sind in einer kleinen Brochüre von SABINE *Observations made at the magnetic observatories of Toronto, Trevandrum and St. Helena during a remarkable magnetic disturbance on the 25th and 26th Sept.* 1841 angeführt.

Die Mittheilung der Beobachtungen in Turuchansk, Drontheim, Viluisk, Bogoslowskoie, Fredriksvarn, Jeniseisk, Copenhagen, Altona, Semipalatinsk, Barcelona, Lissabon, Angra, Messina, Rio Grande verdanke ich der Güte des Herrn Professor HANSTEEN.}

HÜLFSTAFELN

ZUR BERECHNUNG

DER RICHTUNG UND STÄRKE

DER MAGNETISCHEN KRÄFTE

AUF DER OBERFLÄCHE DER ERDE

AUS DEN ELEMENTEN DER THEORIE.

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON X.

φ	a^0	A'	$\log a'$	A''	$\log a''$	A'''	$\log a'''$	$A''''=142°\ 26'$ $\log a''''$
+90°	+ 0.0	292° 9′	2.07430	347° 16′	−∞	221° 48′	−∞	−∞
89	10.3	292 4	2.07444	347 15	0.60246	221 48	8.41399	6.04417
88	20.5	291 50	2.07488	347 13	0.90273	221 50	9.01555	6.94686
87	30.8	291 26	2.07563	347 8	1.07753	221 52	9.36689	7.47447
86	41.2	290 52	2.07669	347 2	1.20066	221 54	9.61559	7.84836
85	51.6	290 10	2.07811	346 54	1.29525	221 58	9.80790	8.13790
84	62.1	289 19	2.07990	346 44	1.37159	222 2	9.96441	8.37399
83	72.8	288 20	2.08211	346 32	1.43517	222 8	0.09612	8.57310
82	83.5	287 14	2.08477	346 19	1.48927	222 14	0.20957	8.74509
81	94.3	286 0	2.08791	346 3	1.53601	222 21	0.30901	8.89629
80	105.3	284 41	2.09156	345 45	1.57682	222 29	0.39732	9.03103
79	116.5	283 16	2.09573	345 25	1.61273	222 37	0.47655	9.15241
78	127.8	281 46	2.10046	345 3	1.64451	222 47	0.54824	9.26271
77	139.3	280 13	2.10574	344 39	1.67272	222 57	0.61353	9.36366
76	151.0	278 37	2.11157	344 13	1.69780	223 9	0.67331	9.45660
75	162.9	276 59	2.11794	343 43	1.72012	223 21	0.72831	9.54260
74	175.0	275 20	2.12481	343 12	1.73995	223 34	0.77908	9.62252
73	187.4	273 41	2.13215	342 38	1.75753	223 49	0.82611	9.69707
72	199.9	272 3	2.13991	342 1	1.77302	224 4	0.86977	9.76682
71	212.6	270 25	2.14803	341 20	1.78662	224 20	0.91040	9.83226
70	225.6	268 50	2.15646	340 37	1.79844	224 38	0.94825	9.89381
69	238.9	267 17	2.16512	339 51	1.80860	224 56	0.98357	9.95181
68	252.3	265 46	2.17394	339 1	1.81720	225 16	1.01656	0.00656
67	266.0	264 19	2.18288	338 7	1.82433	225 37	1.04739	0.05833
66	279.9	262 56	2.19183	337 9	1.83005	225 59	1.07620	0.10734
65	294.0	261 36	2.20074	336 6	1.83444	226 22	1.10314	0.15379
64	308.3	260 19	2.20954	334 59	1.83756	226 47	1.12831	0.19786
63	322.8	259 7	2.21816	333 48	1.83947	227 13	1.15183	0.23969
62	337.6	257 58	2.22656	332 30	1.84022	227 40	1.17377	0.27943
61	352.5	256 53	2.23468	331 7	1.83986	228 9	1.19422	0.31720
60	367.6	255 52	2.24246	329 38	1.83845	228 39	1.21325	0.35311
59	382.9	254 55	2.24986	328 3	1.83604	229 11	1.23093	0.38725
58	398.3	254 1	2.25686	326 20	1.83270	229 45	1.24732	0.41972
57	413.9	253 11	2.26339	324 29	1.82850	230 21	1.26246	0.45059
56	429.6	252 24	2.26944	322 30	1.82350	230 58	1.27641	0.47993
55	445.4	251 40	2.27497	320 23	1.81779	231 37	1.28922	0.50781
54	461.3	250 59	2.27996	318 6	1.81148	232 19	1.30091	0.53428
53	477.2	250 21	2.28439	315 39	1.80465	233 2	1.31152	0.55941
52	493.3	249 46	2.28822	313 2	1.79747	233 48	1.32110	0.58323
51	509.3	249 13	2.29145	310 14	1.79005	234 36	1.32967	0.60579
50	525.4	248 43	2.29406	307 14	1.78257	235 26	1.33726	0.62713
49	541.4	248 15	2.29603	304 4	1.77522	236 19	1.34390	0.64728
48	557.4	247 49	2.29734	300 42	1.76818	237 15	1.34960	0.66628
47	573.4	247 25	2.29799	297 8	1.76168	238 14	1.35441	0.68415
46	589.2	247 3	2.29796	293 25	1.75593	239 16	1.35835	0.70092
45	605.0	246 43	2.29724	289 31	1.75115	240 21	1.36143	0.71661

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON X.

φ	a^0	A'	$\log a'$	A''	$\log a''$	A'''	$\log a'''$	$A''''=142°\ 26'$ $\log a''''$
+45°	+ 605.0	246° 43′	2.29724	289° 31′	1.75115	240° 21′	1.36143	0.71661
44	620.7	246 24	2.29581	285 30	1.74752	241 30	1.36369	0.73124
43	636.2	246 6	2.29367	281 22	1.74521	242 43	1.36514	0.74483
42	651.5	245 49	2.29080	277 9	1.74436	243 59	1.36581	0.75740
41	666.6	245 34	2.28719	272 54	1.74504	245 19	1.36574	0.76895
40	681.5	245 19	2.28282	268 38	1.74726	246 44	1.36494	0.77950
39	696.2	245 5	2.27770	264 24	1.75098	248 13	1.36344	0.78905
38	710.6	244 52	2.27179	260 15	1.75611	249 47	1.36129	0.79761
37	724.7	244 39	2.26510	256 10	1.76251	251 26	1.35850	0.80518
36	738.5	244 25	2.25760	252 13	1.77000	253 11	1.35513	0.81176
35	752.0	244 12	2.24928	248 23	1.77838	255 1	1.35122	0.81735
34	765.2	243 58	2.24012	244 43	1.78746	256 57	1.34681	0.82195
33	777.9	243 44	2.23010	241 11	1.79704	258 59	1.34196	0.82555
32	790.3	243 28	2.21920	237 49	1.80692	261 8	1.33672	0.82814
31	802.3	243 10	2.20742	234 36	1.81694	263 23	1.33116	0.82970
30	813.9	242 51	2.19471	231 32	1.82693	265 45	1.32535	0.83023
29	825.0	242 30	2.18107	228 35	1.83676	268 13	1.31937	0.82970
28	835.7	242 5	2.16647	225 47	1.84632	270 49	1.31330	0.82808
27	845.9	241 37	2.15089	223 6	1.85551	273 31	1.30722	0.82536
26	855.7	241 4	2.13431	220 31	1.86425	276 21	1.30123	0.82149
25	864.9	240 26	2.11671	218 2	1.87248	279 17	1.29542	0.81644
24	873.7	239 41	2.09807	215 38	1.88014	282 19	1.28988	0.81017
23	882.0	238 49	2.07839	213 18	1.88721	285 28	1.28470	0.80263
22	889.8	237 49	2.05768	211 3	1.89364	288 42	1.27997	0.79374
21	897.0	236 37	2.03595	208 51	1.89942	292 1	1.27576	0.78345
20	903.8	235 13	2.01326	206 42	1.90455	295 24	1.27214	0.77168
19	910.0	233 35	1.98970	204 35	1.90900	298 50	1.26916	0.75832
18	915.8	231 39	1.96540	202 30	1.91277	302 19	1.26686	0.74327
17	921.0	229 23	1.94057	200 26	1.91588	305 50	1.26524	0.72639
16	925.7	226 45	1.91553	198 23	1.91832	309 21	1.26430	0.70753
15	929.8	223 41	1.89072	196 21	1.92011	312 52	1.26403	0.68650
14	933.5	220 9	1.86675	194 18	1.92126	316 22	1.26438	0.66306
13	936.7	216 7	1.84438	192 15	1.92179	319 51	1.26530	0.63693
12	939.4	211 35	1.82457	190 12	1.92170	323 17	1.26672	0.60776
11	941.6	206 34	1.80835	188 7	1.92104	326 41	1.26859	0.57511
10	943.3	201 12	1.79678	186 1	1.91982	330 1	1.27080	0.53839
9	944.6	195 33	1.79064	183 53	1.91806	333 19	1.27328	0.49686
8	945.4	189 50	1.79046	181 43	1.91581	336 32	1.27595	0.44948
7	945.7	184 15	1.79621	179 31	1.91309	339 43	1.27873	0.39482
6	945.7	178 56	1.80737	177 16	1.90995	342 49	1.28156	0.33075
5	945.2	174 3	1.82310	174 59	1.90641	345 53	1.28435	0.25400
4	944.3	169 39	1.84235	172 38	1.90253	348 54	1.28706	0.15908
3	943.0	165 47	1.86409	170 15	1.89835	351 51	1.28963	0.03568
2	941.4	162 26	1.88741	167 48	1.89392	354 47	1.29201	9.86069
1	939.4	159 34	1.91156	165 17	1.88929	357 40	1.29418	9.56033
0	937.1	157 9	1.93596	162 43	1.88452	0 31	1.29611	−∞

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON X.

φ	a°	A'	$\log a'$	A''	$\log a''$	A'''	$\log a'''$	$A''''=322^\circ\,26'$ $\log a''''$
0°	+ 937.1	157° 9'	1.93596	162° 43'	1.88452	0° 31'	1.29611	−∞
− 1	934.5	155 7	1.96018	160 6	1.87966	3 21	1.29778	9.56033
2	931.5	153 26	1.98393	157 25	1.87476	6 10	1.29918	9.86069
3	928.3	152 3	2.00702	154 41	1.86989	8 58	1.30030	0.03568
4	924.8	150 55	2.02930	151 54	1.86509	11 46	1.30115	0.15908
5	921.0	150 0	2.05070	149 4	1.86042	14 34	1.30175	0.25400
6	917.0	149 16	2.07116	146 11	1.85592	17 22	1.30211	0.33075
7	912.8	148 41	2.09068	143 17	1.85164	20 11	1.30226	0.39482
8	908.4	148 14	2.10923	140 20	1.84762	23 0	1.30223	0.44948
9	903.8	147 54	2.12683	137 22	1.84388	25 51	1.30205	0.49686
10	899.1	147 39	2.14348	134 23	1.84045	28 43	1.30176	0.53839
11	894.1	147 28	2.15919	131 23	1.83733	31 36	1.30140	0.57511
12	889.1	147 22	2.17398	128 24	1.83452	34 30	1.30103	0.60776
13	883.9	147 18	2.18785	125 25	1.83203	37 26	1.30068	0.63693
14	878.6	147 16	2.20083	122 27	1.82983	40 23	1.30041	0.66306
15	873.2	147 16	2.21292	119 31	1.82790	43 21	1.30025	0.68650
16	867.7	147 18	2.22413	116 36	1.82621	46 20	1.30026	0.70753
17	862.1	147 19	2.23446	113 44	1.82470	49 19	1.30047	0.72639
18	856.4	147 22	2.24391	110 54	1.82335	52 19	1.30091	0.74327
19	850.7	147 24	2.25250	108 7	1.82211	55 18	1.30160	0.75832
20	844.9	147 25	2.26022	105 23	1.82091	58 16	1.30258	0.77168
21	839.1	147 26	2.26706	102 43	1.81971	61 14	1.30384	0.78345
22	833.2	147 25	2.27302	100 5	1.81846	64 9	1.30539	0.79374
23	827.3	147 23	2.27809	97 30	1.81710	67 3	1.30722	0.80263
24	821.4	147 19	2.28227	94 59	1.81560	69 54	1.30931	0.81017
25	815.4	147 13	2.28554	92 31	1.81388	72 42	1.31164	0.81644
26	809.3	147 4	2.28790	90 5	1.81193	75 27	1.31417	0.82149
27	803.2	146 52	2.28932	87 43	1.80968	78 8	1.31685	0.82536
28	797.1	146 37	2.28978	85 23	1.80711	80 45	1.31964	0.82808
29	790.9	146 18	2,28928	83 5	1.80419	83 17	1.32249	0.82970
30	784.7	145 55	2.28780	80 50	1.80087	85 45	1.32535	0.83023
31	778.5	145 27	2.28530	78 36	1.79714	88 7	1.32816	0.82970
32	772.1	144 54	2.28177	76 25	1.79296	90 25	1.33087	0.82814
33	765.7	144 15	2.27720	74 14	1.78834	92 38	1.33340	0.82555
34	759.3	143 30	2.27156	72 5	1.78323	94 46	1.33572	0.82195
35	752.7	142 37	2.26483	69 57	1.77765	96 49	1.33776	0.81735
36	746.1	141 36	2.25701	67 49	1.77157	98 46	1.33947	0.81176
37	739.3	140 25	2.24809	65 42	1.76499	100 39	1.34081	0.80518
38	732.5	139 4	2.23808	63 35	1.75791	102 27	1.34172	0.79761
39	725.5	137 30	2.22701	61 27	1.75034	104 10	1.34215	0.78905
40	718.4	135 43	2.21492	59 19	1.74228	105 49	1.34208	0.77950
41	711.1	133 40	2.20190	57 10	1.73373	107 24	1.34145	0.76895
42	703.7	131 20	2.18809	55 0	1.72472	108 54	1.34022	0.75740
43	696.0	128 39	2.17367	52 49	1.71526	110 20	1.33836	0.74483
44	688.2	125 37	2 15891	50 37	1.70537	111 42	1.33584	0.73124
45	680.2	122 10	2.14420	48 23	1.69506	113 0	1.33262	0.71661

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON X.

φ	a°	A'	$\log a'$	A''	$\log a''$	A'''	$\log a'''$	$A''''=322^\circ\,26'$ $\log a''''$
− 45°	+ 680.2	122° 10'	2.14420	48° 23'	1.69506	113° 0'	1.33262	0.71661
46	672.0	118 16	2.13005	46 7	1.68438	114 15	1.32867	0.70092
47	663.5	113 56	2.11708	43 49	1.67335	115 26	1.32395	0.68415
48	654.8	109 7	2.10605	41 29	1.66199	116 34	1.31844	0.66626
49	645.9	103 53	2.09781	39 7	1.65036	117 39	1.31210	0.64728
50	636.7	98 16	2.09320	36 42	1.63848	118 40	1.30491	0.62713
51	627.2	92 24	2.09289	34 16	1.62640	119 39	1.29681	0.60579
52	617.3	86 25	2.09739	31 47	1.61415	120 35	1.28780	0.58323
53	607.2	80 27	2.10679	29 17	1.60177	121 28	1.27783	0.55941
54	596.8	74 40	2.12081	26 45	1.58929	122 19	1.26686	0.53428
55	586.0	69 11	2.13887	24 11	1.57675	123 7	1.25486	0.50781
56	574.9	64 5	2.16018	21 37	1.56417	123 53	1.24178	0.47993
57	563.5	59 25	2.18391	19 2	1.55158	124 37	1.22759	0.45059
58	551.7	55 12	2.20923	16 26	1.53898	125 19	1.21223	0.41972
59	539.6	51 25	2.23544	13 51	1.52638	125 59	1.19566	0.38725
60	527.0	48 4	2.26198	11 17	1.51376	126 36	1.17782	0.35311
61	514.1	45 4	2.28840	8 44	1.50111	127 12	1.15865	0.31720
62	500.9	42 26	2.31436	6 13	1.48839	127 46	1.13808	0.27943
63	487.2	40 5	2.33963	3 45	1.47556	128 19	1.11603	0.23969
64	473.2	38 1	2.36405	1 20	1.46254	128 49	1.09244	0.19786
65	458.8	36 10	2.38751	358 58	1.44928	129 18	1.06719	0.15379
66	444.0	34 32	2.40996	356 40	1.43567	129 46	1.04019	0.10734
67	428.9	33 5	2.43134	354 27	1.42163	130 12	1.01132	0.05833
68	413.3	31 47	2.45165	352 19	1.40704	130 36	0.98045	0.00656
69	397.4	30 37	2.47088	350 15	1.39176	130 59	0.94743	9.95181
70	381.2	29 35	2.48904	348 18	1.37567	131 21	0.91208	9.89381
71	364.6	28 40	2.50615	346 25	1.35860	131 42	0.87421	9.83226
72	347.6	27 50	2.52223	344 39	1.34039	132 1	0.83357	9.76682
73	330.3	27 5	2.53729	342 59	1.32084	132 19	0.78990	9.69707
74	312.7	26 25	2.55136	341 25	1.29975	132 36	0.74286	9.62252
75	294.8	25 49	2.56447	339 56	1.27687	132 52	0.69208	9.54260
76	276.6	25 17	2.57662	338 34	1.25192	133 7	0.63709	9.45660
77	258.1	24 48	2.58784	337 18	1.22457	133 20	0.57730	9.36366
78	239.3	24 23	2.59816	336 8	1.19443	133 32	0.51202	9.26271
79	220.3	24 0	2.60758	335 4	1.16100	133 44	0.44034	9.15241
80	201.0	23 40	2.61613	334 5	1.12370	133 54	0.36110	9.03103
81	181.6	23 22	2.62382	333 13	1.08172	134 3	0.27280	8.89629
82	161.9	23 7	2.63067	332 26	1.03401	134 11	0.17337	8.74509
83	142.1	22 53	2.63668	331 45	0.97911	134 19	0.05992	8.57310
84	122.1	22 42	2.64187	331 10	0.91487	134 25	9.92822	8.37399
85	101.9	22 32	2.64624	330 40	0.83802	134 30	9.77171	8.13790
86	81.7	22 25	2.64981	330 16	0.74302	134 34	9.57941	7.84836
87	61.3	22 19	2.65258	329 57	0.61958	134 38	9.33071	7.47447
88	40.9	22 15	2.65456	329 44	0.44456	134 40	8.97937	6.94686
89	20.5	22 12	2.65574	329 35	0.14417	134 41	8.37781	6.04417
90	0	22 11	2.65614	329 33	−∞	134 42	−∞	−∞

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON Y.

φ	B'	$\log b'$	B''	$\log b''$	B'''	$\log b'''$	$B'''' = 232° 26'$ $\log b''''$
+ 90°	22° 9'	2.07430	77° 16'	−∞	311° 48'	−∞	−∞
89	22 7	2.07437	77 16	0.60263	311 48	8.41408	6.04423
88	22 2	2.07458	77 15	0.90333	311 49	9.01591	6.94713
87	21 54	2.07493	77 12	1.07889	311 50	9.36770	7.47507
86	21 43	2.07543	77 9	1.20311	311 52	9.61702	7.84942
85	21 29	2.07607	77 5	1.29903	311 54	9.81013	8.13956
84	21 11	2.07686	77 0	1.37704	311 57	9.96763	8.37637
83	20 51	2.07781	76 55	1.44260	312 0	0.10050	8.57635
82	20 28	2.07891	76 48	1.49899	312 3	0.21530	8.74933
81	20 2	2.08017	76 40	1.54833	312 8	0.31627	8.90167
80	19 33	2.08160	76 32	1.59206	312 12	0.40629	9.03768
79	19 2	2.08320	76 22	1.63121	312 17	0.48742	9.16047
78	18 28	2.08498	76 12	1.66655	312 23	0.56119	9.27231
77	17 52	2.08693	76 0	1.69865	312 29	0.62875	9.37493
76	17 14	2.08906	75 48	1.72795	312 36	0.69100	9.46969
75	16 34	2.09138	75 35	1.75483	312 43	0.74864	9.55766
74	15 52	2.09388	75 20	1.77955	312 50	0.80226	9.63968
73	15 9	2.09658	75 5	1.80237	312 59	0.85232	9.71647
72	14 24	2.09945	74 49	1.82347	313 7	0.89922	9.78862
71	13 37	2.10252	74 31	1.84301	313 17	0.94327	9.85659
70	12 50	2.10577	74 13	1.86114	313 26	0.98476	9.92082
69	12 2	2.10920	73 53	1.87798	313 37	1.02392	9.98166
68	11 13	2.11280	73 32	1.89362	313 48	1.06095	0.03940
67	10 24	2.11658	73 11	1.90815	313 59	1.09603	0.09430
66	9 34	2.12052	72 48	1.92165	314 11	1.12930	0.14661
65	8 44	2.12461	72 24	1.93420	314 23	1.16091	0.19651
64	7 55	2.12885	71 58	1.94584	314 37	1.19098	0.24419
63	7 5	2.13322	71 32	1.95663	314 50	1.21961	0.28981
62	6 15	2.13772	71 4	1.96663	315 5	1.24689	0.33350
61	5 26	2.14232	70 35	1.97587	315 20	1.27290	0.37538
60	4 38	2.14703	70 4	1.98440	315 35	1.29773	0.41558
59	3 50	2.15183	69 33	1.99224	315 51	1.32144	0.45419
58	3 3	2.15669	69 0	1.99944	316 8	1.34409	0.49130
57	2 17	2.16162	68 25	2.00602	316 26	1.36574	0.52700
56	1 32	2.16659	67 49	2.01200	316 44	1.38644	0.56135
55	0 48	2.17159	67 12	2.01743	317 3	1.40624	0.59444
54	0 5	2.17661	66 33	2.02232	317 22	1.42517	0.62633
53	359 23	2.18164	65 52	2.02669	317 42	1.44329	0.65706
52	358 43	2.18666	65 10	2.03056	318 3	1.46062	0.68669
51	358 3	2.19166	64 26	2.03396	318 25	1.47720	0.71528
50	357 25	2.19662	63 41	2.03690	318 47	1.49306	0.74287
49	356 49	2.20155	62 54	2.03941	319 10	1.50823	0.76950
48	356 13	2.20641	62 5	2.04151	319 34	1.52274	0.79520
47	355 39	2.21121	61 14	2.04320	319 58	1.53661	0.82002
46	355 6	2.21593	60 22	2.04451	320 24	1.54987	0.84398
45	354 34	2.22057	59 27	2.04545	320 50	1.56254	0.86712

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON Y.

φ	B'	$\log b'$	B''	$\log b''$	B'''	$\log b'''$	$B'''' = 232° 26'$ $\log b''''$
+ 45°	354° 34'	2.22057	59° 27'	2.04545	320° 50'	1.56254	0.86712
44	354 4	2.22512	58 31	2.04605	321 17	1.57464	0.88947
43	353 35	2.22956	57 33	2.04632	321 44	1.58619	0.91105
42	353 7	2.23389	56 33	2.04627	322 13	1.59721	0.93189
41	352 40	2.23811	55 30	2.04592	322 42	1.60771	0.95201
40	352 14	2.24221	54 26	2.04530	323 13	1.61772	0.97143
39	351 50	2.24618	53 20	2.04441	323 44	1.62725	0.99018
38	351 26	2.25002	52 12	2.04328	324 16	1.63631	1.00827
37	351 4	2.25372	51 1	2.04191	324 49	1.64493	1.02571
36	350 43	2.25728	49 49	2.04034	325 23	1.65311	1.04254
35	350 22	2.26071	48 34	2.03857	325 57	1.66087	1.05876
34	350 3	2.26398	47 17	2.03662	326 33	1.66822	1.07439
33	349 44	2.26711	45 28	2.03452	327 9	1.67518	1.08944
32	349 27	2.27009	44 37	2.03228	327 47	1.68175	1.10393
31	349 10	2.27292	43 14	2.02991	328 25	1.68796	1.11786
30	348 54	2.27560	41 49	2.02744	329 5	1.69380	1.13126
29	348 38	2.27813	40 22	2.02488	329 45	1.69930	1.14413
28	348 23	2.28052	38 53	2.02226	330 27	1.70446	1.15647
27	348 9	2.28275	37 22	2.01958	331 9	1.70930	1.16831
26	347 55	2.28483	35 50	2.01686	331 52	1.71382	1.17965
25	347 41	2.28677	34 15	2.01413	332 37	1.71804	1.19050
24	347 28	2.28856	32 39	2.01139	333 22	1.72197	1.20086
23	347 15	2.29021	31 1	2.00866	334 8	1.72561	1.21075
22	347 3	2.29171	29 22	2.00595	334 56	1.72898	1.22017
21	346 50	2.29309	27 41	2.00328	335 44	1.73208	1.22912
20	346 38	2.29433	26 0	2.00065	336 33	1.73493	1.23763
19	346 26	2.29544	24 17	1.99808	337 23	1.73754	1.24568
18	346 14	2.29642	22 33	1.99557	338 14	1.73991	1.25329
17	346 2	2.29728	20 48	1.99313	339 6	1.74206	1.26046
16	345 49	2.29802	19 3	1.99077	339 59	1.74399	1.26719
15	345 36	2.29865	17 17	1.98848	340 53	1.74570	1.27370
14	345 23	2.29917	15 31	1.98626	341 48	1.74722	1.27938
13	345 10	2.29958	13 44	1.98413	342 43	1.74855	1.28484
12	344 56	2.29990	11 57	1.98207	343 40	1.74969	1.28988
11	344 42	2.30014	10 11	1.98007	344 37	1.75065	1.29451
10	344 27	2.30028	8 24	1.97815	345 35	1.75145	1.29872
9	344 11	2.30035	6 38	1.97629	346 33	1.75208	1.30253
8	343 55	2.30035	4 52	1.97446	347 32	1.75255	1.30593
7	343 37	2.30029	3 7	1.97268	348 32	1.75287	1.30892
6	343 19	2.30018	1 22	1.97092	349 33	1.75305	1.31151
5	343 0	2.30002	359 37	1.96919	350 34	1.75309	1.31370
4	342 40	2.29983	357 54	1.96746	351 35	1.75299	1.31549
3	342 18	2.29961	356 11	1.96573	352 37	1.75276	1.31688
2	341 56	2.29938	354 29	1.96397	353 39	1.75241	1.31788
1	341 32	2.29914	352 48	1.96218	354 42	1.75193	1.31847
0	341 7	2.29890	351 8	1.96035	355 45	1.75132	1.31867

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON. Y.

φ	B'	$\log b'$	B''	$\log b''$	B'''	$\log b'''$	$B'''' = 232° 26'$ $\log b''''$
0°	341° 7′	2.29890	351° 8′	1.96035	355° 45′	1.75132	1.31867
— 1	340 40	2.29869	349 29	1.95846	356 47	1.75060	1.31847
2	340 12	2.29850	347 50	1.95649	357 51	1.74976	1.31788
3	339 42	2.29836	346 13	1.95444	358 54	1.74880	1.31688
4	339 11	2.29827	344 36	1.95228	359 57	1.74772	1.31549
5	338 38	2.29824	343 1	1.95002	1 0	1.74652	1.31370
6	338 3	2.29830	341 26	1.94764	2 3	1.74520	1.31151
7	337 27	2.29846	339 53	1.94512	3 6	1.74376	1.30892
8	336 49	2.29873	338 20	1.94246	4 9	1.74219	1.30593
9	336 10	2.29912	336 47	1.93964	5 11	1.74049	1.30253
10	335 29	2.29965	335 16	1.93667	6 13	1.73867	1.29872
11	334 46	2.30033	333 45	1.93352	7 14	1.73670	1.29451
12	334 1	2.30118	332 14	1.93020	8 15	1.73460	1.28988
13	333 15	2.30222	330 45	1.92669	9 16	1.73234	1.28484
14	332 27	2.30345	329 15	1.92299	10 16	1.72994	1.27938
15	331 37	2.30489	327 47	1.91910	11 15	1.72737	1.27350
16	330 47	2.30655	326 18	1.91501	12 14	1.72464	1.26719
17	329 54	2.30845	324 50	1.91071	13 12	1.72174	1.26046
18	329 1	2.31059	323 22	1.90621	14 9	1.71865	1.25329
19	328 6	2.31298	321 54	1.90150	15 6	1.71537	1.24568
20	327 11	2.31564	320 26	1.89658	16 1	1.71189	1.23763
21	326 14	2.31856	318 58	1.89145	16 56	1.70820	1.22912
22	325 16	2.32176	317 30	1.88612	17 50	1.70430	1.22017
23	324 18	2.32523	316 2	1.88057	18 43	1.70017	1.21075
24	323 20	2.32899	314 34	1.87483	19 35	1.69580	1.20086
25	322 21	2.33302	313 5	1.86887	20 27	1.69118	1.19050
26	321 22	2.33733	311 37	1.86272	21 17	1.68630	1.17965
27	320 22	2.34191	310 8	1.85637	22 6	1.68115	1.16831
28	319 23	2.34675	308 38	1.84983	22 54	1.67572	1.15647
29	318 24	2.35186	307 8	1.84311	23 42	1.67000	1.14413
30	317 25	2.35722	305 38	1.83621	24 28	1.66398	1.13126
31	316 27	2.36281	304 7	1.82913	25 13	1.65763	1.11787
32	315 30	2.36863	302 35	1.82188	25 58	1.65096	1.10393
33	314 33	2.37467	301 3	1.81447	26 41	1.64395	1.08944
34	313 37	2.38091	299 31	1.80690	27 23	1.63658	1.07439
35	312 42	2.38733	297 58	1.79919	28 4	1.62884	1.05876
36	311 48	2.39392	296 25	1.79134	28 45	1.62072	1.04254
37	310 56	2.40066	294 51	1.78335	29 24	1.61220	1.02571
38	310 4	2.40754	293 16	1.77524	30 2	1.60327	1.00827
39	309 14	2.41454	291 41	1.76701	30 40	1.59391	0.99018
40	308 25	2.42163	290 6	1.75866	31 16	1.58411	0.97143
41	307 37	2.42882	288 31	1.75020	31 51	1.57385	0.95201
42	306 51	2.43606	286 55	1.74163	32 26	1.56312	0.93189
43	306 6	2.44336	285 19	1.73297	32 59	1.55188	0.91105
44	305 23	2.45069	283 43	1.72420	33 31	1.54014	0.88947
45	304 41	2.45804	282 7	1.71533	34 3	1.52785	0.86712

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON Y.

φ	B'	$\log b'$	B''	$\log b''$	B'''	$\log b'''$	$B'''' = 232° 26'$ $\log b''''$
— 45°	304° 41′	2.45804	282° 7′	1.71533	34° 3′	1.52785	0.86712
46	304 1	2.46539	280 31	1.70636	34 34	1.51502	0.84398
47	303 22	2.47272	278 56	1.69729	35 3	1.50161	0.82002
48	302 44	2.48003	277 21	1.68810	35 32	1.48759	0.79520
49	302 8	2.48730	275 47	1.67880	36 0	1.47296	0.76950
50	301 33	2.49451	274 13	1.66937	36 27	1.45767	0.74287
51	301 0	2.50166	272 40	1.65981	36 54	1.44170	0.71528
52	300 28	2.50873	271 8	1.65009	37 19	1.42502	0.68669
53	299 57	2.51571	269 37	1.64021	37 44	1.40761	0.65706
54	299 28	2.52260	268 7	1.63013	38 7	1.38942	0.62633
55	299 0	2.52937	266 39	1.61985	38 30	1.37041	0.59444
56	298 33	2.53603	265 12	1.60933	38 53	1.35055	0.56135
57	298 7	2.54256	263 47	1.59855	39 14	1.32980	0.52700
58	297 43	2.54895	262 23	1.58747	39 35	1.30810	0.49130
59	297 20	2.55521	261 2	1.57607	39 54	1.28541	0.45419
60	296 57	2.56131	259 42	1.56430	40 14	1.26166	0.41558
61	296 36	2.56727	258 25	1.55212	40 32	1.23680	0.37538
62	296 16	2.57306	257 9	1.53949	40 50	1.21076	0.33350
63	295 57	2.57868	255 56	1.52635	41 6	1.18346	0.28981
64	295 39	2.58413	254 46	1.51265	41 23	1.15481	0.24419
65	295 22	2.58941	253 37	1.49834	41 38	1.12473	0.19651
66	295 5	2.59451	252 31	1.48335	41 53	1.09311	0.14661
67	294 50	2.59942	251 28	1.46760	42 7	1.05982	0.09430
68	294 35	2.60415	250 27	1.45101	42 21	1.02473	0.03940
69	294 22	2.60868	249 29	1.43351	42 34	0.98770	9.98166
70	294 9	2.61302	248 34	1.41498	42 46	0.94854	9.92082
71	293 57	2.61716	247 41	1.39531	42 57	0.90705	9.85659
72	293 45	2.62111	246 51	1.37437	43 8	0.86299	9.78862
73	293 35	2.62485	246 3	1.35202	43 19	0.81610	9.71647
74	293 25	2.62839	245 18	1.32808	43 28	0.76604	9.63968
75	293 16	2.63172	244 36	1.30235	43 37	0.71242	9.55766
76	293 7	2.63484	243 57	1.27458	43 46	0.65478	9.46969
77	292 59	2.63776	243 21	1.24448	43 53	0.59254	9.37493
78	292 52	2.64046	242 47	1.21167	44 1	0.52498	9.27231
79	292 45	2.64296	242 16	1.17572	44 7	0.45122	9.16047
80	292 39	2.64524	241 47	1.13602	44 13	0.37009	9.03768
81	292 34	2.64730	241 22	1.09181	44 19	0.28007	8.90167
82	292 29	2.64915	240 59	1.04207	44 24	0.17911	8.74933
83	292 25	2.65079	240 39	0.98533	44 28	0.06431	8.57635
84	292 21	2.65220	240 21	0.91948	44 32	9.93144	8.37637
85	292 18	2.65340	240 6	0.84123	44 35	9.77395	8.13956
86	292 16	2.65439	239 54	0.74509	44 37	9.58084	7.84942
87	292 14	2.65515	239 45	0.62075	44 39	9.33151	7.47507
88	292 13	2.65570	239 38	0.44509	44 41	8.94136	6.94713
89	292 12	2.65603	239 34	0.14432	44 42	8.33933	6.04423
90	292 11	2.65614	239 33	$-\infty$	44 42	$-\infty$	$-\infty$

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON Z.

φ	e^0	C'	$\log e'$	C''	$\log e''$	C'''	$\log e'''$	$C'''' = 322^\circ\ 26'$ $\log e''''$
$+90^\circ$	$+1652.9$	172° 29′	$-\infty$	176° 59′	$-\infty$	36° 0′	$-\infty$	$-\infty$
89	1652.8	172 27	0.72139	176 59	9.17222	36 0	6.83649	4.38300
88	1652.7	172 20	1.02153	176 58	9.77385	36 1	7.73926	5.58686
87	1652.4	172 8	1.19615	176 56	0.12532	36 2	8.26700	6.29078
86	1652.1	171 51	1.31904	176 53	0.37419	36 4	8.64106	6.78992
85	1651.7	171 30	1.41333	176 49	0.56672	36 6	8.93082	7.17676
84	1651.1	171 3	1.48952	176 45	0.72351	36 8	9.16719	7.49252
83	1650.5	170 31	1.55192	176 40	0.83554	36 11	9.36663	7.75916
82	1649.7	169 54	1.60623	176 34	0.96937	36 15	9.53899	7.98980
81	1648.8	169 11	1.65259	176 27	1.06923	36 19	9.69062	8.19291
80	1647.7	168 22	1.69305	176 19	1.15802	36 23	9.82585	8.37426
79	1646.4	167 28	1.72868	176 10	1.23779	36 28	9.94777	8.53797
78	1645.0	166 27	1.76027	176 1	1.31006	36 34	0.05867	8.68709
77	1643.3	165 20	1.78844	175 50	1.37599	36 40	0.16026	8.82393
76	1641.4	164 6	1.81369	175 39	1.43647	36 46	0.25391	8.95028
75	1639.3	162 45	1.83641	175 27	1.49222	36 53	0.34068	9.06756
74	1637.0	161 16	1.85697	175 14	1.54381	37 1	0.42143	9.17693
73	1634.3	159 41	1.87567	175 0	1.59171	37 9	0.49686	9.27932
72	1631.3	157 57	1.89278	174 45	1.63630	37 17	0.56756	9.37551
71	1628.0	156 6	1.90856	174 29	1.67772	37 26	0.63402	9.46615
70	1624.4	154 6	1.92325	174 12	1.71684	37 36	0.69664	9.55179
69	1620.3	151 59	1.93709	173 54	1.75329	37 46	0.75579	9.63290
68	1615.9	149 44	1.95028	173 35	1.78747	37 57	0.81266	9.70988
67	1611.0	147 21	1.96304	173 14	1.81956	38 8	0.86482	9.78309
66	1605.7	144 51	1.97558	172 53	1.84971	38 20	0.91520	9.85283
65	1600.0	142 15	1.98809	172 31	1.87806	38 32	0.96309	9.91937
64	1593.7	139 33	2.00074	172 7	1.90472	38 45	1.00868	9.98295
63	1586.9	136 46	2.01369	171 42	1.92979	38 59	1.05213	0.04377
62	1579.6	133 55	2.02708	171 16	1.95338	39 13	1.09356	0.10202
61	1571.7	131 2	2.04101	170 48	1.97557	39 28	1.13312	0.15786
60	1563.2	128 8	2.05556	170 20	1.99642	39 43	1.17090	0.21146
59	1554.1	125 15	2.07077	169 50	2.01601	39 59	1.20702	0.26294
58	1544.4	122 22	2.08665	169 18	2.03440	40 16	1.24157	0.31242
57	1534.0	119 33	2.10318	168 45	2.05165	40 34	1.27462	0.36001
56	1523.0	116 48	2.12032	168 10	2.06780	40 52	1.30626	0.40583
55	1511.2	114 8	2.13799	167 34	2.08291	41 11	1.33655	0.44994
54	1498.9	111 35	2.15610	166 56	2.09694	41 30	1.36556	0.49245
53	1485.8	109 7	2.17456	166 17	2.11015	41 51	1.39345	0.53343
52	1471.9	106 47	2.19326	165 35	2.12237	42 12	1.41996	0.57295
51	1457.4	104 34	2.21210	164 52	2.13370	42 34	1.44546	0.61107
50	1442.1	102 29	2.23098	164 7	2.14417	42 57	1.46990	0.64787
49	1426.0	100 32	2.24979	163 20	2.15372	43 20	1.49327	0.68335
48	1409.2	98 42	2.26848	162 31	2.16267	43 45	1.51567	0.71762
47	1391.6	96 59	2.28692	161 40	2.17076	44 10	1.53711	0.75071
46	1373.2	95 24	2.30508	160 47	2.17810	44 36	1.55764	0.78266
45	1354.1	93 56	2.32288	159 51	2.18474	45 3	1.57728	0.81352

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON Z.

φ	e^0	C'	$\log e'$	C''	$\log e''$	C'''	$\log e'''$	$C'''' = 322^\circ\ 26'$ $\log e''''$
$+45^\circ$	$+1354.1$	93° 56′	2.32288	159° 51′	2.18474	45° 3′	1.57728	0.81352
44	1334.2	92 34	2.34027	158 53	2.19069	45 31	1.59606	0.84332
43	1313.6	91 18	2.35721	157 53	2.19598	46 0	1.61401	0.87209
42	1292.1	90 9	2.37367	156 50	2.20064	46 30	1.63116	0.89987
41	1270.0	89 5	2.38961	155 44	2.20468	47 1	1.64754	0.92670
40	1247.1	88 6	2.40502	154 36	2.20815	47 33	1.66317	0.95260
39	1223.5	87 12	2.41988	153 25	2.21106	48 6	1.67807	0.97759
38	1199.2	86 23	2.43417	152 11	2.21343	48 40	1.69226	1.00171
37	1174.1	85 39	2.44789	150 55	2.21531	49 15	1.70578	1.02497
36	1148.4	84 58	2.46103	149 35	2.21671	49 51	1.71862	1.04741
35	1122.0	84 22	2.47360	148 12	2.21766	50 29	1.73083	1.06904
34	1094.9	83 48	2.48558	146 46	2.21819	51 7	1.74241	1.08988
33	1067.2	83 19	2.49699	145 16	2.21834	51 47	1.75338	1.10994
32	1038.9	82 52	2.50782	143 44	2.21813	52 28	1.76376	1.12926
31	1009.9	82 28	2.51808	142 8	2.21759	53 10	1.77356	1.14784
30	980.5	82 7	2.52779	140 29	2.21677	53 54	1.78283	1.16570
29	950.4	81 48	2.53693	138 47	2.21568	54 39	1.79154	1.18286
28	919.9	81 32	2.54554	137 1	2.21438	55 25	1.79974	1.19932
27	888.9	81 18	2.55360	135 12	2.21287	56 12	1.80742	1.21510
26	857.4	81 6	2.56113	133 20	2.21123	57 1	1.81462	1.23022
25	825.5	80 55	2.56815	131 25	2.20947	57 51	1.82134	1.24468
24	793.2	80 47	2.57465	129 26	2.20762	58 43	1.82759	1.25850
23	760.5	80 39	2.58066	127 25	2.20572	59 36	1.83341	1.27168
22	727.5	80 33	2.58618	125 21	2.20380	60 30	1.83879	1.28424
21	694.1	80 29	2.59121	123 15	2.20189	61 26	1.84375	1.29619
20	660.5	80 25	2.59578	121 6	2.20002	62 23	1.84832	1.30752
19	626.7	80 22	2.59991	118 56	2.19821	63 21	1.85250	1.31826
18	592.6	80 20	2.60356	116 43	2.19649	64 21	1.85630	1.52840
17	558.4	80 19	2.60679	114 29	2.19487	65 23	1.85975	1.33796
16	523.9	80 18	2.60959	112 14	2.19337	66 25	1.86286	1.34695
15	489.4	80 17	2.61198	109 58	2.19199	67 30	1.86563	1.35535
14	454.8	80 16	2.61397	107 41	2.19075	68 35	1.86809	1.36320
13	420.1	80 15	2.61556	105 23	2.18963	69 42	1.87025	1.37047
12	385.4	80 15	2.61677	103 6	2.18864	70 50	1.87212	1.37720
11	350.7	80 13	2.61761	100 49	2.18776	71 59	1.87372	1.38337
10	316.0	80 11	2.61809	98 33	2.18699	73 9	1.87505	1.38898
9	281.3	80 9	2.61822	96 17	2.18630	74 21	1.87613	1.39406
8	246.7	80 5	2.61802	94 2	2.18568	75 34	1.87698	1.39859
7	212.3	80 0	2.61750	91 48	2.18510	76 47	1.87759	1.40258
6	177.9	79 54	2.61667	89 36	2.18454	78 2	1.87799	1.40604
5	143.7	79 46	2.61554	87 25	2.18397	79 17	1.87818	1.40896
4	109.6	79 37	2.61414	85 16	2.18336	80 34	1.87816	1.41134
3	75.8	79 25	2.61246	83 8	2.18269	81 51	1.87796	1.41320
2	42.1	79 12	2.61054	81 3	2.18191	83 8	1.87757	1.41452
+ 1	+ 8.6	78 56	2.60839	78 59	2.18103	84 26	1.87700	1.41531
0	− 24.6	78 37	2.60603	76 57	2.17998	85 45	1.87626	1.41558

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON Z.

φ	c^0	C'	$\log c'$	C''	$\log c''$	C'''	$\log c'''$	$C'''' = 322^\circ\ 26'$ $\log c''''$
0°	— 24.6	78° 37′	2.60603	76° 57′	2.17998	85° 45′	1.87626	1.41558
1	57.6	78 15	2.60347	74 56	2.17876	87 3	1.87535	1.41531
2	90.3	77 50	2.60075	72 58	2.17733	88 22	1.87426	1.41452
3	122.8	77 22	2.59789	71 1	2.17566	89 41	1.87301	1.41320
4	154.9	76 50	2.59491	69 6	2.17374	91 0	1.87159	1.41134
5	186.9	76 14	2.59185	67 12	2.17154	92 19	1.87000	1.40896
6	218.5	75 34	2.58874	65 20	2.16905	93 38	1.86824	1.40604
7	249.8	74 50	2.58562	63 29	2.16623	94 56	1.86630	1.40258
8	280.8	74 1	2.58252	61 39	2.16309	96 14	1.86418	1.39859
9	311.6	73 8	2.57949	59 50	2.15959	97 31	1.86187	1.39406
10	342.0	72 11	2.57658	58 2	2.15573	98 48	1.85936	1.38898
11	372.1	71 8	2.57383	56 15	2.15150	100 4	1.85665	1.38337
12	402.0	70 1	2.57129	54 29	2.14689	101 19	1.85373	1.37720
13	431.6	68 49	2.56902	52 43	2.14188	102 33	1.85058	1.37047
14	460.8	67 32	2.56707	50 57	2.13648	103 47	1.84720	1.36320
15	489.8	66 11	2.56549	49 12	2.13067	104 59	1.84357	1.35535
16	518.6	64 45	2.56435	47 26	2.12446	106 10	1.83968	1.34695
17	547.0	63 15	2.56368	45 41	2.11785	107 20	1.83552	1.33796
18	575.3	61 42	2.56354	43 55	2.11083	108 29	1.83107	1.32840
19	603.2	60 5	2.56397	42 9	2.10341	109 36	1.82632	1.31826
20	631.0	58 26	2.56499	40 22	2.09559	110 42	1.82125	1.30752
21	658.5	56 44	2.56664	38 34	2.08737	111 47	1.81585	1.29619
22	685.7	55 1	2.56893	36 45	2.07878	112 51	1.81010	1.28424
23	712.8	53 17	2.57187	34 56	2.06981	113 53	1.80398	1.27168
24	739.7	51 32	2.57546	33 5	2.06047	114 53	1.79749	1.25850
25	766.4	49 47	2.57966	31 13	2.05078	115 53	1.78960	1.24468
26	792.9	48 3	2.58447	29 20	2.04076	116 51	1.78329	1.23022
27	819.3	46 20	2.58984	27 26	2.03041	117 47	1.77555	1.21510
28	845.5	44 39	2.59572	25 29	2.01975	118 42	1.76737	1.19932
29	871.6	43 0	2.60207	23 32	2.00881	119 36	1.75872	1.18286
30	897.5	41 24	2.60883	21 33	1.99760	120 28	1.74958	1.16570
31	923.3	39 51	2.61593	19 32	1.98614	121 19	1.73995	1.14784
32	949.0	38 21	2.62331	17 30	1.97445	122 8	1.72979	1.12926
33	974.6	36 55	2.63090	15 26	1.96255	122 56	1.71909	1.10994
34	1000.1	35 32	2.63864	13 20	1.95047	123 43	1.70784	1.08988
35	1025.5	34 13	2.64646	11 14	1.93821	124 28	1.69601	1.06904
36	1050.9	32 58	2.65430	9 6	1.92581	125 12	1.68358	1.04741
37	1076.1	31 46	2.66210	6 57	1.91327	125 54	1.67053	1.02497
38	1101.2	30 38	2.66980	4 47	1.90061	126 36	1.65684	1.00171
39	1126.3	29 34	2.67736	2 37	1.88785	127 16	1.64249	0.97759
40	1151.3	28 33	2.68471	0 26	1.87498	127 55	1.62745	0.95260
41	1176.2	27 36	2.69181	358 14	1.86202	128 32	1.61171	0.92670
42	1201.0	26 42	2.69862	356 3	1.84896	129 9	1.59523	0.89987
43	1225.8	25 52	2.70510	353 52	1.83580	129 44	1.57800	0.87209
44	1250.5	25 4	2.71121	351 42	1.82252	130 18	1.55998	0.84332
45	1275.1	24 19	2.71691	349 33	1.80912	130 52	1.54115	0.81352

TAFEL ZUR BERECHNUNG DER WERTHE VON Z.

φ	c^0	C'	$\log c'$	C''	$\log c''$	C'''	$\log c'''$	$C'''' = 322^\circ\ 26'$ $\log c''''$
— 45°	— 1275.1	24° 19′	2.71691	349° 33′	1.80912	130° 52′	1.54115	0.81352
46	1299.5	23 37	2.72218	347 25	1.79558	131 23	1.52147	0.78266
47	1323.9	22 58	2.72698	345 18	1.78186	131 54	1.50092	0.75071
48	1348.1	22 21	2.73129	343 13	1.76793	132 24	1.47945	0.71762
49	1372.3	21 47	2.73508	341 10	1.75376	132 53	1.45705	0.68335
50	1396.2	21 14	2.73833	339 10	1.73931	133 21	1.43365	0.64785
51	1420.0	20 44	2.74100	337 12	1.72452	133 48	1.40924	0.61107
52	1443.7	20 16	2.74307	335 17	1.70935	134 14	1.38376	0.57295
53	1467.1	19 49	2.74453	333 25	1.69375	134 39	1.35716	0.53343
54	1490.3	19 25	2.74534	331 35	1.67764	135 [illegible]	1.32940	0.49245
55	1513.2	19 1	2.74550	329 50	1.66098	135 26	1.30043	0.44994
56	1536.1	18 40	2.74495	328 7	1.64368	135 48	1.27017	0.40583
57	1558.6	18 20	2.74370	326 28	1.62568	136 10	1.23857	0.36001
58	1580.8	18 1	2.74169	324 52	1.60691	136 31	1.20556	0.31242
59	1602.7	17 43	2.73892	323 21	1.58728	136 50	1.17106	0.26294
60	1624.2	17 26	2.73535	321 52	1.56672	137 9	1.13498	0.21146
61	1645.4	17 11	2.73094	320 27	1.54513	137 28	1.09724	0.15786
62	1666.1	16 57	2.72566	319 6	1.52242	137 45	1.05774	0.10202
63	1686.5	16 43	2.71948	317 48	1.49850	138 2	1.01635	0.04377
64	1706.4	16 31	2.71235	316 34	1.47326	138 18	0.97296	9.98295
65	1725.9	16 19	2.70421	315 24	1.44658	138 33	0.92742	9.91937
66	1744.9	16 8	2.69503	314 17	1.41834	138 48	0.87957	9.85283
67	1763.3	15 58	2.68474	313 13	1.38840	139 2	0.82925	9.78309
68	1781.2	15 49	2.67328	312 12	1.35661	139 15	0.77624	9.70988
69	1798.6	15 40	2.66056	311 15	1.32281	139 28	0.72031	9.63290
70	1815.3	15 32	2.64650	310 21	1.28680	139 40	0.66122	9.55179
71	1831.4	15 24	2.63100	309 30	1.24837	139 51	0.59864	9.46615
72	1846.9	15 17	2.61395	308 42	1.20727	140 1	0.53223	9.37551
73	1861.6	15 11	2.59520	307 57	1.16322	140 11	0.46157	9.27932
74	1875.7	15 5	2.57459	307 16	1.11588	140 21	0.38618	9.17693
75	1889.1	14 59	2.55193	306 37	1.06485	140 30	0.30547	9.06756
76	1901.7	14 54	2.52699	306 0	1.00966	140 38	0.21874	8.95028
77	1913.5	14 50	2.49948	305 27	0.94972	140 45	0.12512	8.82393
78	1924.6	14 45	2.46904	304 56	0.88472	140 52	0.02356	8.68709
79	1934.8	14 42	2.43523	304 28	0.81256	140 59	9.91270	8.53797
80	1944.2	14 38	2.39746	304 3	0.73327	141 5	9.79081	8.37426
81	1952.8	14 35	2.35498	303 40	0.64493	141 10	9.65560	8.19291
82	1960.5	14 32	2.30676	303 19	0.54547	141 15	9.50400	7.98980
83	1967.3	14 30	2.25136	303 1	0.43201	141 19	9.33165	7.75916
84	1973.3	14 28	2.18665	302 46	0.30031	141 22	9.13223	7.49252
85	1978.3	14 26	2.10937	302 33	0.04380	141 25	8.89588	7.17676
86	1982.5	14 25	2.01401	302 22	9.95118	141 28	8.60613	6.78992
87	1985.7	14 24	1.89028	302 14	9.70281	141 30	8.23208	6.29078
88	1988.0	14 23	1.71505	302 8	9.35148	141 31	7.70435	5.58686
89	1989.5	14 23	1.41453	302 5	8.74992	141 32	6.80158	4.38300
90	1989.9	14 23	$-\infty$	302 3	$-\infty$	141 32	$-\infty$	$-\infty$