CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ZWÖLFTER BAND

HERAUSGEGEBEN

VON DER

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN

1929

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND XII.

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ZWÖLFTER BAND.

HERAUSGEGEBEN
VON DER
GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU
GÖTTINGEN.
IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN.
1929.

VARIA.

KLEINERE NOTIZEN VERSCHIEDENEN INHALTS.

1. Aus dem Briefwechsel zwischen Gauss und Hansen.

HANSEN an GAUSS.

Seeberg, 27. November 1825.

Ew. Hochwohlgeboren

wollen gütigst entschuldigen, dass ich so frei bin, Sie mit diesen Zeilen zu beschweren.

Vor 14 Tagen bekam ich von Hrn. Prof. SCHUMACHER das 3te Heft der Astr[onomischen] Abh[andlungen], worin Ihre letzte Preisabhandlung[*)] abgedruckt ist. Ich hatte wohl früher das Manuscript in Händen gehabt, aber mir fehlte es an gehöriger Zeit, um es mit Aufmerksamkeit durchzugehen; daher liess ich dies jetzt mein angelegentlichstes Werk sein. Mit der Ihnen so eigenen Gründlichkeit und Klarheit, sehe ich, haben Sie auch diese Materie bearbeitet, und dadurch ein um so mehr erwünschtes Licht in diesem Zweige der Mathematik verbreitet, da bisher das darüber Bekannte in einem bunten Chaos durcheinander lag. Grösstentheils haben die Autoren der bisherigen Projectionsarten willkürlich eine Bedingung, zu mehr oder minderm Nachtheile der übrigen, zu erfüllen gesucht, ohne dabei zu zeigen, in wie ferne diese mit der Aufgabe in wesentlicher Verbindung stände. Ein wesentliches Erforderniss für die Darstellung irgend einer Fläche auf einer anderen, scheint mir zu sein: dass die Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen existirt; ohne dieses würde man immer weniger auf die Ähnlichkeit irgend eines endlichen Theils rechnen können, und ich wäre geneigt nur eine solche Darstellung

[*) *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen so abzubilden, dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird,* Altona 1825, Werke IV, S. 189—216.]

einer Fläche Projection zu nennen. Aber, abgesehen davon, dass die mehresten der bisherigen Kartenprojectionen aufhörten, Projectionen zu sein, finde ich ein stärker scheinendes Object in mancher perspectivischen Darstellung*), wo die Ähnlichkeit in den kleinsten Theilen nicht existirt. Gewiss ist jedoch, dass irgend ein Bedingniss da sein muss, um die Übertragung irgend einer Fläche, nach gewissen Regeln, auf eine andere, eine Darstellung der ersteren nennen zu können. Nemlich man würde ohne solches Bedingniss immer (in Zeichen Ihrer Abhandlg.)

$$T = f(t, u)$$
$$U = f'(t, u),$$

wo die durch f und f' angedeuteten Functionen ganz willkürlich wären, eine Darstellung oder Niederlegung oder Projection der durch t und u bestimmten Fläche nennen müssen. Es wäre mir sehr angenehm, wenn Sie die Güte haben wollten, mir gelegentlich einige Aufklärung darüber zu geben, falls es mit wenig Mühe geschehen könnte.

Der Artikel 11. Ihrer schätzbaren Abhandlung giebt Anlass, wie ich sehe, zu interessanten Resultaten über die stereographische Projection, auch habe ich andere daraus abgeleitet, aus welchen die verschiedentlich angeordneten stereographischen specielle Fälle sind. Die von Ihnen pag. 16[**)] gegebene Projection habe ich Hrn. Legationsrath Stieler mitgetheilt, welcher sie bei seinen Charten anwenden wird. Gewiss, jeder sieht, wie ich, sehnlich der Erscheinung von speciellen Anwendungen jener Aufgabe auf die höhere Geodäsie entgegen, wovon sie gewiss sehr fruchtbar ist. Sind nicht, unter andern, in Art. 13 die Grundzüge einer sphäroidischen Trigonometrie enthalten?

Vor einigen Tagen bekam ich von Hrn. v. Lindenau, *Supplement to the fourth, fifth, and sixth editions of the Encyclopaedia Britannica*, Vol. third.[***)] In dem Artikel »Differential calculus«[†)] finde ich manches Sonderbare, unter andern viele Bezeichnungen, die ich früher nirgends gesehen habe, ferner behauptet der Verf., dass die Differentialrechnung noch sehr unvollkommen

*) Z. B. der orthographischen (Projection).
[**) Werke IV, S. 203, 204.]
[***) Edinburgh, 1824.]
[†) a. a. O. S. 568—572.]

wäre, dass man nicht jede Function differentiiren könne. Letztere Behauptung scheint er besonders auf folgendes zu stützen. Er sagt [S. 569]

[Es sei]

$$x^{\underline{1}}a = x + a$$
$$x^{\underline{2}}a = x \times a$$
$$= x + \{x + \{\cdots \qquad \text{to } (a) \text{ terms}$$
$$x^{\underline{3}}a = x^a$$
$$= x \times \{x \times \{\cdots \qquad \text{to } (a) \text{ terms}$$
$$x^{\underline{4}}a = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \qquad \text{to } (a) \text{ terms}$$

Then generally

$$x^{\underline{n+1}}a = x^{\underline{n}}\{x^{\underline{n}}\{\cdots \qquad \text{to } (a) \text{ terms}$$

Alsdann sagt er auf dem folgenden Blatte [S. 571] unter anderm: »Let the most expert analyst . . . endeavour to develope $(x+h)^{\underline{n}}a$ in analogy to Sir Isaac Newton's expansion of $(x+h)^{\underline{3}}a$; or let him search for the differential of

$$a^{\underline{4}}x = a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \qquad \text{to } (x) \text{ terms,}$$

and he will be forced to admit the great imperfections of the instrument.«

Ich wäre sehr geneigt, dies Unsinn zu nennen, denn der obige allgemeine Ausdruck für $x^{\underline{n+1}}a$ passt nicht für die beigesetzten speciellen. Es ist nicht beigefügt, wie viele »terms« $x^{\underline{n}}$ enthalten soll, aber per analogiam kann es doch nur entweder 1 oder 0 terms enthalten, letzteres würde die Function auf Null reduciren, also muss es wohl 1 »term« enthalten. Hieraus folgt:

$$x^{\underline{n}} = x^{\underline{n-1}} = x^{\underline{n-2}} = \text{etc. bis} = x \text{ oder } = x + 1$$

je nachdem man bei $x^{\underline{2}}$ oder $x^{\underline{1}}$ aufhört. Also

$$x^{\underline{n+1}}a = x^a \text{ oder } = (x+1)^a$$

und eben so $x^{\underline{n}}a$, ferner $(x+h)^{\underline{n}}a = (x+h)^a$ oder $= (x+h$ . . . .[*)] mit dessen Entwickelung man fertig werden kann.

[*) An dieser Stelle ist der Brief beschädigt.]

Ausser einigen Cometenbeobachtungen habe ich bis jetzt nichts Wesentl[iches*)] beobachten können, da der Meridiankreis noch nicht angelangt ist. Ich würde mir die Freiheit nehmen, Ihnen diese Beobachtungen zu übersenden, aber ich hoffe, sie werden bald in den Astr. Nachr. erscheinen.

. . . .

Entschuldigen Sie gütigst diesen langen Brief.

Indem ich um Ihr ferneres Wohlwollen bitte, verharre ich mit der grössten Hochachtung

Ihr ergebenster
C. A. Hansen.

Sternwarte Seeberg 1825 Nov. 27.

Gauss an Hansen.

Göttingen, 11. Dezember 1825.

Hochgeschätzter Herr Director!

. . . .

Ihr gütiger Brief hat mir um so mehr Vergnügen gemacht, je seltener jetzt in Deutschland warmes Interesse an Mathematik ist. So erfreulich die gegenwärtige hohe Blüthe der Astronomischen Wissenschaften ist, so scheint doch die praktische Tendenz fast zu ausschliesslich vorherrschend, und die meisten sehen die abstracte Mathematik höchstens als Magd der Astronomie an, die nur deswegen zu toleriren ist.

Sie haben ganz Recht, dass bei allen Kartenprojectionen die Ähnlichkeit der kleinsten Theile die wesentlichste Bedingung ist, die man nur bei ganz speciellen Fällen und Bedürfnissen hintansetzen darf. Es wäre wohl zweckmässig, den Darstellungen, die jener Bedingung genüge leisten, einen eignen Namen zu geben. Inzwischen, Allgemein betrachtet, ist sie doch nur Eine Unterabtheilung des General-Begriffs von Darstellung einer Fläche auf der andern, die in der That gar nichts weiter enthält, als dass jedem Punkt der einen nach irgend einem stetigen Gesetz ein Punkt der andern correspondiren soll. Es mag erst etwas Abstraction kosten, sich zu diesem

[*) An dieser Stelle ist der Brief beschädigt.]

allgemeinen Begriff zu erheben: dann fühlt man sich aber auch wirklich auf einem höhern Standpunkt, wo alles in vergrösserter Klarheit erscheint. Es soll also T eine beliebige Function von t und u, und U eine andere, gleichfalls beliebige Function von t und u bedeuten, wo t, u die bestimmenden veränderlichen Grössen auf der Einen Fläche, T, U die auf der andern sind; auf welche Art t, u (jedes Paar seine) Punkte bestimmt, ist gleichfalls Willkürlich. Die einzige Bedingung ist, dass reellen Werthen von t, u reelle von T, U entsprechen, obwohl dies auch nicht einmahl im Ganzen Umfang der Fall zu sein braucht, wo dann aber freilich nur ein Theil der einen Fläche einer Darstellung auf der andern fähig ist. Dass der Fall eintreten kann, wo die eine Fläche oder ein Theil derselben wiederholte Darstellungen auf der andern erhält, ist von selbst einleuchtend, und viele gangbare Projectionen, wie z. B. die von Mercator geben davon Beispiele.

Man kann leicht zeigen, dass wie Allgemein dieser Begriff sei, doch allemahl jeder unendlich kleine Theil (mit Ausnahme der Stellen an singulären Punkten der Linien) wahrhaft perspectivisch dargestellt wird, entweder mit völliger Ähnlichkeit, so wie perspectivische Darstellung auf paralleler Tafel, oder mit halber Ähnlichkeit, indem in einem Sinn eine Verkürzung Statt hat.

Was die von Ihnen angezogene Stelle der *Encyclopaedia Britannica* betrifft, so habe ich zwar solche nicht selbst nachsehen können, aber es scheint mir doch nach dem was Sie anführen, dass Sie dem Verfasser (vielleicht Babbage?[*)]) Unrecht thun. Er hat die Idee der Abhängigkeit von zwei Grössen, die in $x+a$, xa, x^a ist, generalisiren wollen, aber nicht bemerkt, dass beim Fortschreiten zu einer neuen Ordnung eigentlich eine Willkürlichkeit Statt findet, da man x^{x^x} auf eine doppelte Art, nemlich

$$(x^x)^x \text{ oder } x^{(x^x)}$$

lesen könnte; vermuthlich haben Sie es auf die erste Art gethan, der Verf[asser] aber ohne Zweifel, nach der Art schon, wie er die Parenthesen schreibt, auf die zweite. Seine allgemeine Formel ist aber etwas verworren, gewissermaassen unrichtig ausgedrückt, sie sollte heissen

[*) A. a. O. S. 569 wird der *Essay towards the Calculus of Functions*, Phil. Transact. 1815, 1816, von Charles Babbage erwähnt.]

$$x^{\underline{n+1}}a = x^{\underline{n}}(x^{\underline{n}}(x^{\underline{n}} \ldots x^{\underline{n}}(a-1))\ldots),$$

so dass $x^{\underline{n}}$ a-mahl geschrieben gedacht wird.

Klarer wäre der Ausdruck:

$$f(x, n, a) = f(x, n-1, f(x, n, a-1)),$$

so dass also aus der Natur der Function für die Grösse (Ordnungszahl) $n-1$ die Natur für die folgende n abgeleitet werden soll. Offenbar hat dies aber nur einen Sinn, wenn n eine ganze Zahl ist, und kann nur dann eine Bestimmung der Function für ganze Werthe von a geben, wenn ein Anfangswerth vorgeschrieben ist. Aber hier ist nicht einmahl ein allgemeines Princip: der Verfasser scheint tacite vorauszusetzen, dass $f(x, n, 1) = x$ werden sol[l] (bei seinem $n = 4$), allein dies trifft nur bei $n = 2$ und $n = 3$ zu, aber nicht bei $n = 1$. Aufrichtig gesagt, glaube ich nicht, dass dies[e] Nebel-Speculation zu etwas führt; sonst wäre es wol nicht schwer, seine erste Aufgabe $(x+h)^{\underline{n}}a$ in der Form, deren sie fähig ist, aufzulösen, während die andere, wo in $a^{\underline{4}}x$ die Werthe für nicht ganze x eigentlich durch die Bedingung nicht bestimmt werden, keiner bestimmten Auflösung empfänglich ist.

Ich habe mich in diesem Herbst sehr viel mit der allgemeinen Betrachtung der krummen Flächen beschäftigt, welches in ein unabsehbares Feld führt. Es hängt aber als höheres Princip genau mit meiner Theorie der höhern Geodäsie zusammen, und so wird es damit so ganz geschwind nicht gehen, zumahl da meine Arbeiten durch andere unangenehme Geschäfte sehr gestört werden, die dann wieder desto abspannender und ermüdender wirken, je mehr das Heterogene Abspringen die Wiederanknüpfung der Ideenfäden erschwert. Jene Untersuchungen greifen tief in vieles andere, ich möchte sogar sagen, in die Metaphysik der Raumlehre ein, und nur mit Mühe kann ich mich von solchen daraus entspringenden Folgen, wie z. B. die wahre Metaphysik der negativen und imaginären Grössen ist, losreissen. Der wahre Sinn des $\sqrt{-1}$ steht mir dabei mit grosser Lebendigkeit vor der Seele, aber es wird sehr schwer sein, ihn in Worte zu fassen, die immer nur ein vages, in der Luft schwebendes Bild geben können.

Ich schliesse mit der Versicherung, dass jede Mittheilung über Ihre astronomischen Arbeiten mir immer willkommen sein wird; die Astron[omischen] Nachrichten kommen nicht in regelmässigen Zeiten, und ich erfahre daher

sonst manches erst viel später. Den Cometen d. i. den letzten, habe ich am 4. 6. Oct. im Meridian beobachtet. . . . . . .

Hochachtungsvoll
und
ergebenst

Göttingen, den 11. December 1825. C. F. Gauss.

BEMERKUNGEN.

Von C. A. Hansen sind im ganzen sechsundzwanzig Briefe an Gauss im Gaussarchiv (Kapsel 98) vorhanden; der vorstehend abgedruckte Brief von Gauss an Hansen befindet sich ebenfalls im Gaussarchiv (Kapsel 118).

Die von Hansen berührte Stelle der *Encyclop. Britannica*, über die Gauss in seinem Antwortschreiben auch einige Bemerkungen macht, bezieht sich auf die sogenannten höheren Rechenstufen, denen man auch sonst in der Literatur mehrfach begegnet. Wir begnügen uns mit der Angabe der folgenden einschlägigen Abhandlungen:

L. Euler, *De formulis exponentialibus replicatis*, Acta Acad. Sc. Petrop. 1777: I (1778), S. 38—60. Nr. 489 des Eneströmschen Verzeichnisses.

G. Eisenstein, *Entwicklung von* $\alpha^{\alpha^{\alpha^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$. Crelles Journal für Mathem. 28 (1844) S. 49—52.

F. Woepcke, *Note sur l'expression* $((a^a)^a)^{\cdot^{\cdot^{\cdot^a}}}$ *et les fonctions inverses correspondantes.* Crelles Journal für Mathem. 42 (1852), S. 83—90.

In bezug auf die »Metaphysik der Raumlehre« und die »wahre Metaphysik der negativen und imaginären Grössen«, die Gauss am Schluss seines Briefes erwähnt, vergl. die Notiz 13 weiter unten und die zugehörigen Bemerkungen.

Schlesinger.

2. Aufgabe.

[Einzelner Zettel.]

In der Illustrierten Zeitung findet sich eine Aufgabe, wo drei unbekannte Grössen x, y, z (Buchstabenzahlen des Wortes Don) vier Gleichungen genüge leisten sollen

$$
\begin{array}{ll}
(1) & xy - z = 43 \\
(2) & xz - y = 38 \\
(3) & yz - x = 178 \\
(4) & xyz = 728
\end{array}
$$

Jede der drei Gleichungen (1), (2), (3) mit (4) verbunden gibt eine quadratische Gleichung für z, y, x, woraus $x = 4$, $y = 14$, $z = 13$.

Allein offenbar ist nur nöthig, von den Gleichungen (1), (2), (3) zwei zu benutzen, z. B. (2), (3) woraus x und y bestimmt werden, indem z dann aus (4) von selbst folgt. Schwieriger ist die Auflösung, wenn (4) unbenutzt bleiben soll. Es wird dann

$$z = xy - 43$$

also

$$xxy - 43x - y = 38$$

$$xyy - x - 43y = 178$$

$$y = \frac{43x + 38}{xx - 1}$$

$$x\left(\frac{43x + 38}{xx - 1}\right)^2 - \frac{43(43x + 38)}{xx - 1} - x - 178 = 0$$

oder entwickelt

$$x^5 + 178x^4 - 2x^3 - 1990xx - 3292x - 1456 = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei rationale Wurzeln $x = 4$ und $x = -2$. Die drei andern Wurzeln sind enthalten in der Gleichung

$$x^3 + 180xx + 366x + 182 = 0.$$

Schreibt man $x = p - 1$, so wird sie $p^3 + 177pp + 9p - 5 = 0$, deren Wurzeln

$$p = +0,14451126$$
$$p = -0,19553345$$
$$p = -176,94898,$$

also

$$x = -0,8554887$$
$$x = -1,1955330$$
$$x = -177,9489782.$$

Als Buchstabenzahl ist bloss die Wurzel $x = 4$ zulässig, woraus $y = 14$, $z = 13$ von selbst folgen.

1852 Sept. 22.

BEMERKUNG.

Gauss hat wahrscheinlich darum $x = p - 1$ gesetzt, weil dann in der neuen Gleichung eine Wurzel leicht und scharf abgeschätzt werden kann. Diese Wurzel liegt nämlich in der Nähe von -177, und zwar muss die Abweichung von 177 so gross sein, dass ihr 177-faches die Zahl 9 um den 177. Teil von 5 übertrifft. Man hat also:

$$5 : 177 = 0,028; \quad 9,028 : 177 = 0,051; \quad p = -(177 - 0,051) = -176,949.$$

Durch Anwendung des sogenannten Hornerschemas erhält man hieraus

$$p = -176,9489782 \text{ und } x = -177,9489782.$$

Der letztere Wert stimmt vollständig mit dem von Gauss an dritter Stelle angegebenen überein. Der zweite Wert für p lautet nicht (wie bei Gauss) $-0,19553345$, sondern $-0,19553307$; damit würde auch der von Gauss gegebene entsprechende Wert von x besser übereinstimmen.

Maennchen.

3. Beziehungen zwischen den Summen der Zahlen und ihrer Würfel.

[1.]

Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher IV, Altona 1862, S. 310.

Gauss an Schumacher.

Göttingen, 26. September 1844.

. . . . . . Ich glaube nicht, dass die Relation zwischen den Summen der Zahlen u[nd] Würfel sich einfacher demonstriren lässt als auf folgende Art.

Zur Abkürzung setze ich $1+2+3+\cdots+x=\Sigma x$.
Man hat identisch

$$a^3 = a\begin{Bmatrix}1+2+3+4+\cdots+(a-1)+a \\ +(a-1)+(a-2)+(a-3)+(a-4)+\cdots+1\end{Bmatrix}$$

$$= a\{2\Sigma(a-1)+a\} = [\Sigma(a-1)+a]^2-[\Sigma(a-1)]^2 = (\Sigma a)^2-[\Sigma(a-1)]^2$$

oder so geschrieben

$$(\Sigma a)^2 = \Sigma(a-1)^2+a^3.$$

Setzt man nun Statt a der Reihe nach $a-1$, $a-2$, $a-3$ u. s. w. bis 1 und addirt, so hat man unmittelbar, weil $\Sigma 0 = 0$,

$$(\Sigma a)^2 = a^3+(a-1)^3+(a-2)^3+\cdots+8+1.$$

Diese an sich zierliche Relation steht nur isolirt, wie Sie selbst schon bemerkt haben. . . . .

[2.]

Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER V, Altona 1863, S. 299.

SCHUMACHER an GAUSS.

Altona, 12. April 1847.

{. . . . JACOBI bemerkt sonst in diesem Briefe in Bezug auf die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen, dass freilich die Relation $(\Sigma x^1)^2 = \Sigma x^3$ isolirt stehe, dass aber die Summen von zwei und mehreren dieser Reihen, mit bestimmten Coeffizienten multiplicirt, gleich einer Potenz einer einzelnen sein können, z. B.

$$\tfrac{1}{2}(\Sigma x^7+\Sigma x^5) = (\Sigma x^3)^2 = (\Sigma x^1)^4.$$

Dass $(\Sigma x^1)^2 = \Sigma x^3$, sagt JACOBI, stehe schon in LUCA DI BORGOS *Summa Arithmetica* [*)] . . . . . .}

[*) LUCA PACIUOLO (nach seinem Geburtsort auch LUCA DI BORGO SANCTI SEPULCHRI genannt), *Summa de Arithmetica, Geometria, Proporzioni e Proporzionalità,* Venet. 1494 (neuer Abdruck ebenda 1523), fol. 44 recto.]

4. Eulersche (magische) Quadrate.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER IV, Altona 1862, S. 61—65, 80—81.]

[1.]

SCHUMACHER an GAUSS. 12. März 1842.

{Ich sende Ihnen, mein theuerster Freund, ein paar Kleinigkeiten von CLAUSEN.

1) . . . .

2) . . . .

3) Ist eine Art magisches Quadrat. Man schreibt auf n Zettel A und bei A die natürlichen Zahlen von 1 bis n, ebenso auf n Zettel B und die natürlichen Zahlen von 1 bis n, und so fort bis man n Buchstaben hat. Aus diesen nn Zetteln soll ein Quadrat gelegt werden, mit der Bedingung, dass sowohl in jeder horizontalen, als verticalen Reihe alle Buchstaben und alle Zahlen vorkommen. Für $n=2$ ist dies unmöglich, für $n=3$ leicht, und ich glaubte früher von Ihnen verstanden zu haben, dass es auch für $n=4$ unmöglich sei, muss mich aber geirrt haben, da CLAUSEN mir beifolgende Auf-

A4	B1	C2	D3
C1	D4	A3	B2
D2	C3	B4	A1
B3	A2	D1	C4

Figur 1.

lösung brachte. Darf ich fragen, wenn sonst die Untersuchung Ihnen keine Mühe macht, für welche Werthe von n (das nur eine ganze Zahl sein kann) es unmöglich ist?

[2.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 2. April 1842.

Von den verschiedenen Clausen'schen Sachen, die Sie, mein theuerster Freund, in einem Ihrer letzten Briefe mitgetheilt haben, habe ich nur der dritten einige Minuten zuwenden können. Dass ich jemahls behauptet haben sollte, die fragliche Aufgabe werde für $n = 4$ unmöglich, kann ich schlechterdings nicht glauben, da man sogar beim ersten Blick erkannt hat, dass Hr. Clausen die Bedingungen sogar noch zu enge gestellt hat. Man muss nemlich noch die beifügen, dass auch in den beiden Diagonalen alle $ABCD$ und alle 1234 vorkommen sollen, was in dem von Ihnen mitgetheilten Diagramm nicht zutrifft, aber sehr leicht zu erreichen ist. Z. B. (die erste Zeile nach Clausen beibehaltend)

A_4	B_1	C_2	D_3
C_3	D_2	A_1	B_4
D_1	C_4	B_3	A_2
B_2	A_3	D_4	C_1

Figur 2.

Aus jeder gegebenen Auflösung kann man unmittelbar 575 andere erhalten, indem man die Elemente $ABCD$ auf beliebige Art vertauschen kann, u[nd] daneben wieder auf beliebige Art die Elemente 1, 2, 3, 4. Dann können Sie jede Seite auch zur oberen machen und auch jede Auflösung im Spiegel eine andere geben lassen. Das eigentlich interessante der Aufgabe besteht darin, dass jede Auflösung ein wirkliches magisches Quadrat gibt, indem Sie

$A = 0$, $B = 4$, $C = 8$, $D = 12$[*)] (für $n = 4$) setzen und die beiden zusammenstehenden Elemente addiren, wodurch also obiges Diagr[amm] gibt

4.	5.	10.	15
11.	14.	1.	8
13.	12.	7.	2
6.	3.	16.	9.

Ob aber auch das Umgekehrte allgemein gilt, nemlich, dass es keine andere magische Quadrate gibt, als die aus dieser Quelle abgeleitet werden können, wird wohl etwas schwerer zu entscheiden. Wenn ich nicht irre, findet sich in dem von Mollweide besorgten Bande von Klügel's mathem. Wörterb[uch**)] ein langer Artikel über magische Quadrate u[nd] auch eine besondere Dissertation von Mollweide[***)] über diesen Gegenstand. Mir fehlt es an Zeit, darüber jetzt Nachforschungen zu machen.

. . . .

[3.]

Schumacher an Gauss. Altona, 5. April 1842.

|. . . . .

Vielen Dank für Ihre Belehrungen über die Quadrate mit doppelten Elementen. Eine Frau v. Rosenkranz in Kopenhagen beschäftigte sich damit, und ich meine, dass Sie 1826 bei meiner Durchreise durch Göttingen mir Fälle genannt hätten, bei denen das Problem unmöglich sei, namentlich meinte ich dies für $n = 4$, aber ich kann mich sehr gut irren. Ist $n = 2$ denn der einzige unmögliche Fall?

. . . . |

[*)] Gauss schrieb zuerst »$D = 4$« und korrigierte dann die 4 in 16; in der Handschrift steht neben dieser Zahl, wahrscheinlich von Schumachers Hand »(12?)«, was in der Tat dem nachfolgenden Schema entspricht.]

[**)] G. S. Klügel, *Mathematisches Wörterbuch*, 1. Abtheilung, 4. Theil, 1823, S. 13—46, Artikel »Quadrat, magisches«.]

[***)] C. B. Mollweide, *De quadratis magicis commentatio*, Lipsiae 1816.]

[4.]

Schumacher an Gauss. Altona, 10. August 1842.

{. . . . .

Clausen ist noch hier, und wird erst in 14 Tagen reisen. Er hat unterdessen über die magischen Quadrate mit doppelten Characteren gearbeitet, deren Sie sich wohl aus unserer Correspondenz vor etwa einem halben Jahre erinnern (z. B. aus 9 kleinen, mit $a1$, $a2$, $a3$, $b1$, $b2$, $b3$, $c1$, $c2$, $c3$ bezeichneten Quadraten ein Quadrat zusammensetzen, in dem jede Horizontal- und Verticalreihe alle Buchstaben und alle Zahlen, aber keinen Character mehr wie einmal enthält) und kann beweisen, dass dies für 6 (6 Buchstaben und 6 Zahlen) unmöglich ist, ebenso wie für 2. Er bringt für 6 alle möglichen Fälle auf 17 Grundformen, deren Discussion die Unmöglichkeit ergiebt. Sie haben mir früher auch eine Zahl genannt, bei der es nicht möglich war, (obgleich Sie sich der Sache nicht mehr erinnern), dies wird auch 6, und nicht 4, wie ich irrthümlich glaubte, gewesen sein. Ich meine, es war 1817 bei meiner Durchreise nach München. Clausen vermuthet, dass es für jede Zahl von der Form $4n+2$ unmöglich sei, kann es aber noch nicht beweisen, und glaubt auch nicht, dass ihm überhaupt der Beweis gelingen wird, da nach seiner Meinung die Auflösung dieser Aufgabe mit der Theorie der Combinationen und deren Anwendung auf die analytische Auflösung der algebraischen Gleichungen sehr nahe zusammenhängt. Der Beweis der vermutheten Unmöglichkeit für 10, so geführt wie er ihn für 6 geführt hat, würde, wie er sagt, vielleicht für menschliche Kräfte unausführbar sein.

. . . .}

BEMERKUNGEN.

Das hier in Rede stehende Problem ist bereits von Leonhard Euler näher untersucht und eingehend behandelt worden (»*Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques*« [1779]. Verhandelingen uitgegeven door het Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen IX, 1782, p. 85—239 = Leonh. Euleri *Comment. arithm. coll.* Bd. II, 1849, p. 302—361 = Leonhardi Euleri *Opera omnia*, Series I, Vol. VII, 1923, p. 291—392). Es erscheint dort in einer Fassung, nach der es heute zumeist als das »Problem der n^2 Offiziere« bezeichnet wird. In dieser Fassung und unter Beschränkung auf den von Gauss hier besonders betrachteten Fall $n = 4$ würde es so lauten: »16 Offiziere gehören 4 verschiedenen Regimentern und 4 verschiedenen Chargen an, und zwar in der Weise, dass jedes Regiment durch jede der 4 Chargen

einmal vertreten ist. Die 16 Offiziere sollen nun in die 4.4 Felder eines Quadrats so eingeordnet werden, dass jede »Zeile« (Horizontalreihe) und ebenso jede »Spalte« (Vertikalreihe) des Quadrats jedes Regiment und ebenso jede Charge aufweist.«

Der Sonderfall $n = 4$ zumal legt es nahe, der Aufgabe auch folgende Einkleidung zu geben: »Die Asse, Könige, Damen und Buben eines Kartenspiels sollen so in die 4.4 Felder eines Quadrats eingeordnet werden, dass jede der 4 Zeilen und ebenso jede der 4 Spalten des Quadrats ein Ass, einen König, eine Dame, einen Buben und überdies auch jede der vier »Farben« des Kartenspiels aufweist.«

In derselben Fassung nun, wie Euler, studierte Th. Clausen das Problem, ohne dass jedoch über seine Ergebnisse etwas Weiteres als das von Schumacher in diesen Briefen an Gauss Mitgeteilte bekannt geworden wäre.

Die Forderung des Problems, bei Euler und Clausen, wie gesagt, für alle »Zeilen« und »Spalten« des Quadrats gestellt, erstreckt Gauss hier nun auch, insbesondre für seinen Fall $n = 4$, auf die beiden Diagonalen. Eine Veranlassung zu dieser weiteren Erschwerung lag für Euler umsoweniger vor, als der Fall $n = 6$, von dem er ausging, sich schon unter den leichteren Problembedingungen, ohne das Diagonalenpostulat also, als unlösbar erweist. Andererseits ist es Euler gewiss nicht entgangen, dass in besonderen Fällen Lösungen möglich sind, in denen auch die Diagonalen die sonst nur von den Zeilen und Spalten geforderten Eigenschaften besitzen; für $n = 4$ gibt Euler selbst die beiden einzigen, wesentlich verschiedenen Anordnungen, die für diesen Fall unter den Gaussschen Bedingungen existieren, an, darunter also auch die von Gauss hier gegebene Lösung.

Um einen einfachen Ausdruck zu haben, mögen die hier in Rede stehenden (aus Buchstaben und Zahlen zusammengesetzten) Quadrate — ohne Rücksicht darauf, ob sie nur den Eulerschen oder den weitergehenden Gaussschen Bedingungen genügen — »Eulersche Quadrate«, wie sie zumeist auch in der Literatur heissen, genannt werden.

Nach den hier wiedergegebenen brieflichen Äusserungen Schumachers ist anzunehmen, dass die Unmöglichkeit »Eulerscher Quadrate« im Falle $n = 6$ auch von Gauss ehemals bemerkt und im Gespräch erwähnt war. Eine solche Äusserung von Gauss glaubt Schumacher bei einer Durchreise durch Göttingen gehört zu haben, und zwar entweder im Jahre 1817 (über Schumachers damalige Durchreise durch Göttingen s. den Briefw., Bd. I, S. 133) oder im Jahre 1826 (vgl. Briefw., Bd. II, S. 77—79).

Der erste, der für diese Unlösbarkeit des Falles $n = 6$ einen Beweis fand, dürfte Clausen gewesen sein. Der erste, der einen solchen Beweis veröffentlichte, war G. Tarry (»*Les permutations carrées de base 6*«, Mém. de la Soc. Roy. des Sc. de Liège (3), II, 1900 = Mathesis (2) X, Juillet 1900, Suppl. p. 23—30, und »*Le problème des 36 officiers*«, Assoc. franç. pour l'avanc. des sc., XXIX, Congrès de Paris 1900, 1re partie, p. 122—123; 2e partie, 1901, p. 170—203). Nach Schumachers Angaben muss man übrigens glauben, dass Clausens Beweis im wesentlichen dasselbe Verfahren wie der Tarrys befolgte, (vgl. W. Ahrens, »*Mathematische Unterhaltungen und Spiele*«, 2. Aufl., Bd. II, 1918, S. 62). Über weitere einschlägige Veröffentlichungen von J. Petersen und Ed. Barbette s. Ahrens, a. a. O.

Wenn Clausen für die von ihm vermutete Unlösbarkeit des Problems im Falle jedes ungerad-geraden n den Beweis von der Seite der Substitutionentheorie und der Algebra her erwartete, so war diese Erwartung in ihm vermutlich durch seine damalige Beschäftigung mit algebraischen Untersuchungen (s. den Briefw. Gauss-Schumacher, Bd. IV, S. 65) rege geworden. Einen Beweisversuch für die Unlösbarkeit des Problems für jedes ungerad-gerade n veröffentlichte P. Wernicke (»*Das Problem der 36 Offiziere*«, Jahresbericht d. Deutsch. Mathem.-Vereinig., XIX, 1910, S. 264—266), doch hat dieser der Kritik (H. F. Mac Neish, ebenda, XXX, 1921, S. 151—153) nicht standzuhalten vermocht.

Erwähnt sei noch, dass die Darstellung, die S. Günther in der Abhandlung »*Die magischen Quadrate bei Gauss*« (Zeitschr. f. Math. u. Phys., XXI, 1876, Hist.-litt. Abt., S. 61—64) von der Problemfassung bei EULER und bei GAUSS gibt, irrtümlich ist (s. darüber AHRENS, »*Mathematische Unterhaltungen und Spiele*«, erste Aufl., 1901, S. 401/402).

Wenn GAUSS schliesslich in dem letzten Teil des Briefabschnittes das Verhältnis erörtert, in dem die von ihm hier betrachteten, also unsere »EULERschen Quadrate«, zu den eigentlichen »magischen« Zahlenquadraten stehen, so ist dazu folgendes zu bemerken: Offenbar hat GAUSS, wie auch die Schlussworte (»Mir fehlt es an Zeit« . . .) zu bestätigen scheinen, dieser ganzen, doch nur flüchtig im Briefe erörterten Frage der »EULERschen Quadrate« keine erhebliche Beachtung geschenkt; bei näherer Prüfung würde er sehr leicht solche »magische« Quadrate, die aus jener »Quelle« der »EULERschen Quadrate« nicht herleitbar sind, gefunden haben. Für den GAUSSschen Spezialfall $n = 4$ insbesondre ist das Verhältnis der Quadrate beider Kategorien zahlenmässig das folgende: Eigentlich »magische« Quadrate, d. h. Quadrate aus den Zahlen 1 bis 16, gibt es 880 wesentlich verschiedene; von diesen lassen sich 304 aus jener »Quelle« der »EULERschen Quadrate« herleiten, während dies bei allen übrigen 576 nicht angeht (s. W. AHRENS in der Zeitschrift »Der Islam«, Bd. 14, 1924, S. 105f.). Wenn GAUSS, wie es nach SCHUMACHERS Zeugnis doch scheint, bereits vor Jahren über den Fall $n = 6$ in dem angegebenen Sinne sich geäussert hatte, so war ja auch damit bereits implizite ausgesprochen, dass keineswegs alle »magischen« Quadrate aus »EULERschen« herleitbar sind; denn in diesem Falle gibt es, wie GAUSS eben damals schon bemerkt hatte, »EULERsche Quadrate« ja überhaupt nicht, während »magische« für $n = 6$ doch in grosser Zahl existieren.

Wenn übrigens MORITZ CANTOR in einer auf dem Pariser *Congrès d'histoire des Sciences* (1900) vorgelegten Abhandlung »*Beiträge zur Lebensgeschichte von* CARL FRIEDRICH GAUSS« (S. 18/19) in bezug auf den von GAUSS (S. 15) erwähnten Artikel des KLÜGELschen *Wörterbuchs* über magische Quadrate sagt, GAUSS sei von KLÜGEL für die Bearbeitung dieses, wie anderer Artikel des *Wörterbuchs* in Aussicht genommen gewesen, so stützt sich CANTOR nur auf den folgenden, von ihm erwähnten Satz aus GAUSS' Brief an OLBERS vom 24. Oktober 1810:

> »KLÜGEL hat mich neulich ersucht, das zur höheren Arithmetik gehörige für sein *Wörterbuch* auszuarbeiten. Ich werde mich aber nur auf den Fall dazu verstehen, dass ich nicht pressirt werde.«

In Wahrheit hat GAUSS zum KLÜGELschen *Wörterbuch* keine Beiträge geliefert, auch dürfte KLÜGEL bei seiner an GAUSS gerichteten Aufforderung kaum an einen Artikel über magische Quadrate gedacht haben. Diesen Artikel hat überhaupt erst KLÜGELS Nachfolger, der für diesen Gegenstand besonders interessierte MOLLWEIDE, in das Programm des *Wörterbuchs* eingefügt und auch selbst bearbeitet.

AHRENS.

5. Achtköniginnenproblem.

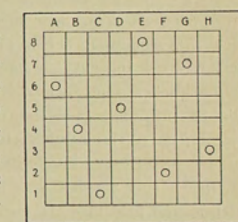
[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER VI, Altona 1865, S. 106—121.]

[1.]

GAUSS an SCHUMACHER.

Göttingen, den 1. September 1850.

. . . .



Figur 3.

Sie sind, wenn ich nicht irre, ein grosser Freund vom Schachspiele. So interessirt Sie vielleicht eine Aufgabe, die einige Ähnlichkeit mit dem Rösselsprung hat, und worüber Sie das Nähere in No. 361 der Illustrirten Zeitung finden (vom 1. Junius 1850). Die Sache ist: man soll 8 K[öni]ginnen auf dem Schachbrett so aufstellen, dass keine von den andern geschlagen werden kann. Der Urheber bemerkt, dass es 60 verschiedene Aufstellungen gebe; zunächst wird nur die verlangt, wo zwei Königinnen auf $B4$ und $D5$ stehen; es sei sehr leicht, 7 unterzubringen, aber man wisse dann nicht, wo man mit der 8ten hin solle. Ich habe nach einigen Versuchen den speciellen Fall leicht aufgelöset. Aber zusammen finde ich nicht 60, sondern 76 verschiedene Auflösungen[*)].

[*) Die Fortsetzung dieses Briefes ist abgedruckt Werke Bd. X 1, S. 434.]

[2.]

SCHUMACHER an GAUSS. 4. September 1850.

{. . . . .
Ihr Schachproblem ist sehr interessant, weil es schwieriger ist als es auf den ersten Blick scheint. . . . .
76 ist doch die Zahl der Auflösungen des allgemeinen Problemes, nicht des speciellen Falles, wenn zwei Königinnen auf $B4$, $D5$ stehen? . . . . }

[3.]

GAUSS an SCHUMACHER.

Göttingen, den 12. September 1850.

. . . . . . Rücksichtlich der in meinem letzten Briefe erwähnten Aufgabe muss ich bemerken, dass die Anzahl der von mir gefundenen Auflösungen nicht 76, sondern 72 beträgt; mit Gewissheit kann ich jedoch nicht verbürgen, dass weiter keine möglich sind. Für die specielle Aufgabe, wo $B4$ und $D5$ vorgeschrieben sind, habe ich nur die Eine Ihnen mitgetheilte gefunden[*)]. Die 72 Auflösungen reduciren sich übrigens auf nur 9 wesentlich verschiedene, indem jede Auflösung 8 Variationen repräsentirt. Es gehen nämlich zuerst aus jeder Auflösung durch Drehung um 90°, 180°, 270°, oder was dasselbe ist, indem man der Reihe nach jede der Quadratseiten unten stellt, 3 andere hervor; und jede dieser 4 Auflösungen liefert in ihrem Spiegelbild, oder was dasselbe ist, auf der Rückseite des Papiers eine neue. Bei einer mehr oder weniger symmetrischen Aufstellung, wäre denkbar, dass die 8 Variationen sich auf nur 4 oder 2 oder Eine reducirten. Allein von dem letzten und vorletzten Fall kann ich sagen, dass sie mit den Bedingungen der Aufgabe unvereinbar sind; hingegen die Möglichkeit einer solchen Symmetrie, wo die 8 Variationen auf 4 zusammenschmelzen, kann ich noch nicht unbedingt verneinen, ich hatte wirklich kurz vor Absendung meines letzten Briefes gemeint, eine solche Auflösung gefunden zu haben (daher die 76 anstatt 72), gleich

[*) Siehe zu dieser Stelle jedoch im letzten Absatz des weiter unten folgenden GAUSSschen Briefes (S. 27) die Berichtigung resp. Ergänzung, mit der »die spezielle Aufgabe« nunmehr erschöpft ist.]

nach Absendung des Briefes, wo ich die Stellung genauer besah, fand ich, dass sie unrichtig war. Indessen ist mir doch höchst wahrscheinlich, dass eine derartig symmetrische Auflösung wirklich nicht existirt[*)]. . . . .

[4.]

SCHUMACHER an GAUSS.

Altona, den 24. September 1850.

{Nehmen Sie, mein theuerster Freund, meinen besten Dank für die Belehrungen über das Problem der 8 Damen.

Wenn, sobald 2 Damen in der a und b Columne ihren Platz erhalten haben, nur eine Auflösung möglich ist, so liesse sich vielleicht die Zahl der möglichen Auflösungen des Problems durch die Anzahl der Stellungen, die den Damen in diesen beiden Columnen gegeben werden dürfen, entscheiden.

Es scheint mir, man brauche in der a Columne nur die Stellungen $a1$, $a2$, $a3$, $a4$ beachten, denn durch Drehung des Bretts um 180°, und Spiegelbild entspricht

$a1$	der Stellung	$a8$,
$a2$		$a7$,
$a3$		$a6$,
$a4$		$a5$.

Vielleicht aber darf die Dame nicht in den Ecken stehen, und dann wären nur 3 Stellungen auf der a Columne zu betrachten.

Jede Stellung in der Ecke schliesst unmittelbar 2 Stellungen in der b Columne aus, es sind also für die Stellung $a1$ 6 Fälle zu betrachten

$a1$ mit $b3$, $b4$, $b5$, $b6$, $b7$, $b8$.

Für jede andere Stellung auf a werden unmittelbar 3 Felder der b Columne ausgeschlossen. Nemlich

bei $a2$	sind möglich	$b4$, $b5$, $b6$, $b7$, $b8$,
$a3$		$b1$, $b5$, $b6$, $b7$, $b8$,
$a4$		$b1$, $b2$, $b6$, $b7$, $b8$.

[*) Von GAUSS im folgenden Briefe, S. 23, berichtigt.]

Dies gäbe also 21 mögliche Stellungen der Damen in den beiden ersten Columnen, wenn nicht aus Gründen, die ich nicht kenne, einige davon unzulässig sind, und wenn die Eckstellungen ausgeschlossen sind, 15. Es wären also $8 \times 21 = 168$, oder $8 \times 15 = 120$ verschiedene Auflösungen des Problems, von denen nur 21 oder 15 Grundauflösungen sind, aus denen die anderen durch Drehung des Bretts und Spiegelbild abgeleitet werden.

Wenn die Zahl 9, deren Sie erwähnen, exclusiv ist, so müssen die Stellungen auf der *a* und *b* Columne Beschränkungen unterworfen sein, die ich nicht kenne, aber gerne wissen möchte, vorausgesetzt, dass die Erklärung Ihnen nicht Mühe macht.

. . . .

Indem ich wieder das Schachproblem überdenke, werde ich besorgt, dass in meinen Schlüssen etwas vorausgesetzt ist, was vielleicht nicht statt findet. Sie haben mir gesagt, dass wenn man 2 Damen auf *a*6, *b*4 stellt, keine andere als die von Ihnen gegebene Auflösung möglich ist[*]; Sie haben aber nicht gesagt, dass für jede beliebige Stellung der Damen in der *a* und *b* Columne nur eine Auflösung des Problems möglich sei. Nur wenn der letzte Satz wahr wäre, scheinen mir meine Schlüsse richtig; denn bei jeder Auflösung des Problems muss eine Dame in der *a* Columne, die andere in der *b* Columne in irgend einer Stellung stehen; da nun für diese Stellung (den von Ihnen nicht aufgestellten Satz als richtig angenommen) die gegebene Auflösung die einzig mögliche ist, so hängt die Zahl der Auflösungen von den verschiedenen möglichen Stellungen in den erwähnten beiden Columnen ab.

. . . .]

[5.]

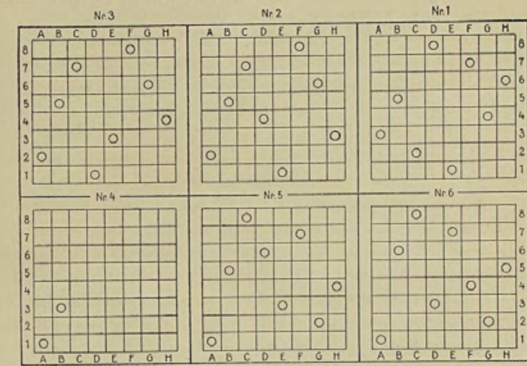
GAUSS an SCHUMACHER.

Göttingen, den 27. September 1850.

Da Sie, mein theuerster Freund, an der Aufgabe, die Königinnen auf dem Schachfelde unterzubringen, ein Interesse zu nehmen scheinen, so will ich noch einiges darüber hinzufügen.

[*] Nicht richtig und von GAUSS auch nicht behauptet; gemeint ist: *b*4, *d*5.]

Ich hatte in meinem letzten Briefe bemerkt, dass von meinen 76 Auflösungen 4 zu streichen seien, weil ich eine unrichtige symmetrische mit aufgenommen hatte. Ich liess es damals unentschieden, ob eine symmetrische möglich sei: bald nachher gelang es mir aber doch, eine richtige symmetrische zu finden: es ist untenstehendes Nro. 1[*]:



Figur 1.

Das was Sie über eine Vorausbestimmung der Gesamtzahl der Auflösungen unter den beiden Voraussetzungen

1) dass es, wenn zwei Königinnen in der ersten u[nd] zweiten Verticalreihen auf zulässige Art placirt sind, immer eine, und

2) nur Eine Art gebe, die übrigen 6 zu placiren,

sagen, nemlich, da diese Stellungen in den beiden ersten Reihen auf 42 Arten geschehen können oder, wenn man jedesmahl das Spiegelbild ausschliesst, auf 21 Arten, dass es dann $8 \times 21 = 168$ Auflösungen geben müsse,

kann ich nicht gelten lassen, sondern es würden, falls jene 2 Voraussetzungen richtig wären, mit jenen 42 Arten alle Auflösungen erschöpft sein.

[*] Im Nachlass befindet sich noch eine kleine Bleistiftskizze von GAUSS (die aus dem Besitz von J. B. LISTING stammt), darstellend das Spiegelbild der Nr. 1.]

Beide Voraussetzungen treffen aber nicht zu.

Die erste nicht, da es Anfangsstellungen gibt, wie in Nro. 4, deren Vervollständigung unmöglich ist. (Es wäre übrigens irrig zu glauben, die Königin dürfe auf keinem Eckfelde stehen; die Nro. 5 beweiset das Gegentheil, ebenso Nro. 6.)

Die zweite nicht. Denn es gibt bestimmte Besetzungen der beiden ersten Vertikalreihen, welche mehrere Ergänzungen der übrigen zulassen. Ein merkwürdiges Beispiel enthalten die Auflösungen 2 und 3, wo nicht bloss die beiden ersten Verticalreihen, sondern zugleich die 3te, 6te und 7te auf gleiche Weise besetzt sind. Ich könnte noch ein zweites ganz ähnliches Beispiel hinzufügen[*)].

Das Merkwürdigste aber, was ich noch zu berichten habe, ist, dass der Aussteller der Aufgabe (ein gewisser Dr. Nau[c]k irgendwo in Thüringen) in Nro. 377 der Illustrirten Zeitung vom 21. September selbst seine früher gegebene Zahl 60 widerrufen und sie auf 92 gesetzt hat, die er auch alle hat abdrucken lassen. Es gibt nemlich 11 nicht symmetrische (à 8 Variatt.) und Eine symmetrische (à 4 Var.). Ich schreibe Ihnen die 12 wesentlich verschiedenen hier her. Sie bemerken leicht, dass die Zahlen bloss die Numerirung der Horizontalreihen sind, in welche die Königin in den auf einander folgenden Verticalreihen zu placiren ist:

(1)	1	5	8	6	3	7	2	4	ist obiges Nro. 5
(2)	1	6	8	3	7	4	2	5	ist obiges Nro. 6
(3)	2	4	6	8	3	1	7	5	
(4)	2	5	7	1	3	8	6	4	ist obiges Nro. 3
(5)	2	5	7	4	1	8	6	3	ist obiges Nro. 2
(6)	2	6	1	7	4	8	3	5	
(7)	2	6	8	3	1	4	7	5	
(8)	2	7	3	6	8	5	1	4	
(9)	2	7	5	8	1	4	6	3	
(10)	3	5	2	8	1	7	4	6	ist obiges Nro. 1
(11)	3	5	8	4	1	7	2	6	
(12)	3	6	2	5	8	1	7	4	

[*) Vielleicht sind die Lösungen 3 5 2 8 1 7 4 6 und 3 5 8 4 1 7 2 6 gemeint, die auch in nicht weniger als fünf Vertikalreihen übereinstimmende Besetzung haben.]

Herr Nauck behauptet nun, dass es ausser den 92 (wovon diese 12 der Kern sind) weiter keine gebe, da er aber nicht angiebt, auf welche Weise er sich die Gewissheit verschafft hat, so kann man, da er früher irrig 60 angab, wol einstweilen noch zweifeln. Schwer ist es übrigens nicht, durch ein methodisches Tatonniren sich diese Gewissheit zu verschaffen, wenn man 1 oder ein Paar Stunden daran wenden will. Auf einem präparirten Quadratnetz (am besten wohl, wenn man auf einer Schiefertafel die Linien etwas tief einritzt, und die ○ Zeichen mit Stift, also leicht auszulöschen, einschreibt) kann man die erforderlichen Versuche leicht durchmachen. Ohne Tafel können auch die blossen Zahlen dazu dienen, woneben ich folgendes bemerke.

Die Aufgabe lässt sich so aussprechen. Man soll die 8 Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 in eine solche Ordnung bringen, dass

1) wenn man der geordneten Reihe nach sie resp. um 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 vergrössert, lauter ungleiche Summen hervorgehen;

2) dass auch, wenn man der Reihe nach 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 addirt, lauter ungleiche Summen erscheinen.

Es sind z. B. diese Summen bei Auflösung 1:

2. 7. 11. 10. 8. 13. 9. 12 oder geord[net] 2. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13, alle ungleich;

und 9. 12. 14. 11. 7. 10. 4. 5 oder geordnet 4. 5. 7. 9. 10. 11. 12. 14, alle ungleich.

Das Tatonniren ist nun sehr leicht. Z. B. ich versuche den Anfang

1. 3. . . . . . .

zu completiren. Vermöge jener zwei Bedingungen wird in der dritten Reihe nicht 2 und nicht 4 stehen dürfen, also nur 5. 6. 7 oder 8. Es müssen also die Anfänge

$$\left.\begin{array}{l}1.\ 3.\ 5.\ \ldots\\ 1.\ 3.\ 6.\ \ldots\\ 1.\ 3.\ 7.\ \ldots\\ 1.\ 3.\ 8.\ \ldots\end{array}\right\}$$

durchprobirt werden. Ich fange an mit 1. 3. 5. Vermöge jener Bedingungen darf am 4ten Platz nicht 4 und nicht 6 stehen. Es bleiben also bloss übrig 2. 7. 8 oder es sind durchzuprobiren die Anfänge:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ 3.\ 5.\ 2\\ 1.\ 3.\ 5.\ 7\\ 1.\ 3.\ 5.\ 8\end{array}\right\}$$

Ich fange wieder an mit 1. 3. 5. 2, wo in Folge jener Bedingungen am 5. Platz nicht stehen dürfen 6 und 7.

Es bleiben also bloss die Anfänge:

1. 3. 5. 2. 4 [*)] und 1. 3. 5. 2. 8 } Die Berücksichtigung obiger Bedingungen ergibt, dass bei dem Anfange 1. 3. 5. 2. 4 [*)] auf dem 6. Platz 6 [**)] 7. 8 nicht stehen dürfen. Es fällt also dieser Anfang weg. Eben so darf auch für Anfang 1. 3. 5. 2. 8 auf dem 6. Platz weder 4 noch 6 noch 7 stehen. Es fällt also auch dieser Anfang weg. Der Anfang 1. 3. 5. 2 ist also überhaupt unzulässig. Eben so verfährt man mit 1. 3. 5. 7 und 1. 3. 5. 8, die beide sich als unzulässig ausweisen. Es ist folglich überhaupt der Anfang 1. 3. 5 unzulässig und man wird ebenso 1. 3. 6; 1. 3. 7; 1. 3. 8 durchprobiren.

Auf einem schicklich präparirten Quadratnetz gehen die Tatonnements schneller. Sobald Ein Platz besetzt wird, etwa mit einem ⊕, fallen schon von allen übrigen 63 Plätzen viele aus, die durch ein Zeichen ○ als cassirt betrachtet werden. Besetzt man von den übrigen einen zweiten, so fallen wieder eine grosse Menge aus, und man gelangt bald dahin, entweder alle Plätze theils mit ⊕, theils mit ○ besetzt zu finden, oder zu einer wahren Auflösung zu gelangen.

Es liesse sich leicht über diese Gegenstände noch 1 oder ein Paar Bogen vollschreiben, aber man muss aufzuhören wissen. Am elegantesten ist es, die Sachen so einzukleiden, dass sie den complexen Zahlen angehören. Es heisst dann, man soll 8 verschiedene complexe Zahlen finden $a+bi$, so dass

1) sowohl a als b eine der 8 reellen positiven Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 bedeutet,

2) dass jeder Werth von a nur Einmahl vorkommt, und eben so jeder Werth von b,

3) dass die Werthe, welche $a+b$ bei jeder jener complexen Zahlen erhält, ungleich sind,

4) dass ebenso die acht Werthe von $a-b$ ungleich sind.

Es lässt sich dann der Zusammenhang der 8 zusammengehörigen Auflösungen zierlich so vorstellen:

[*) Hier bei Gauss versehentlich 6 statt 4.]
[**) Hier bei Gauss demzufolge 4 statt 6.]

		Spiegelbilder
durch Stellung auf die 4 Quadratseiten	$a+bi$	$a+(9-b)i$
	$b+(9-a)i$	$b+ai$
	$9-a+(9-b)i$	$9-a+bi$
	$9-b+ai$	$9-b+(9-a)i$

Noch eleganter ist, wenn man für a und b nicht die reellen positiven, sondern die ungeraden positiven und negativen -7, -5, -3, -1, $+1$, $+3$, $+5$, $+7$ wählt, in diesem Fall sind die 8 Variationen

$a+bi$	$a-bi$
$b-ai$	$b+ai$
$-a-bi$	$-a+bi$
$-b+ai$	$-b-ai$.

Man kann auch sagen, ist Eine der complexen Zahlen n, ihre Adjuncte n', so sind alle 8 Variationen

n	n'
in	in'
$-n$	$-n'$
$-in$	$-in'$

Vergl. *Theoria Residuorum Biquadraticorum*, Comm. secunda art. 31 [*)], der vollkommen verständlich ist, auch wenn man nicht das geringste von biquadratischen Resten weiss.

Ich habe noch zu erinnern, dass die specielle Aufgabe, wo $B4$, $D5$ besetzt werden sollen, zwei Auflösungen zulässt, die aus Nro. 5 und 11 folgen (von denen man nur die Spiegelbilder zu nehmen braucht), die erstere war die, die ich übersehen hatte. . . . .

BEMERKUNGEN.

Das »Achtköniginnenproblem«, das Problem der Aufstellung von acht sich gegenseitig nicht schlagenden Königinnen auf dem Schachbrett, wurde zum ersten Male im Jahre 1848 in der von der Berliner Schachgesellschaft herausgegebenen »Schachzeitung« (Bd. III, S. 363) von einem ungenannten »Schachfreund« — d. i. Max Bezzel in Ansbach**) — gestellt. Diese Fragestellung rief jedoch damals nur zwei spezielle Lösungen (ebda., Bd. IV, 1849, S. 40) hervor und erweckte also dem Problem kein grösseres Interesse.

Von neuem, und vermutlich ohne alle Kenntnis des früheren Vorkommnisses, stellte dann zwei Jahre später (1850) Dr. Nauck in Schleusingen dasselbe Problem auf, und zwar in der »Illustrierten Zeitung« (14. Bd., Nr. 361, 1. Juni 1850, S. 352), wo die »in das Gebiet der Mathematik fallende Aufgabe« nun einem wesentlich grösseren Leserkreise, darunter auch Gauss, zu Gesicht kam. Mit lebhaftem Eifer be-

[*) Werke II, S. 102/103.]
**) Nach Max Lange, *Handbuch der Schachaufgaben*, Leipzig 1862, S. 30, Anm. 6.

teiligten sich die Leser an der Lösung der Aufgabe. Freilich, die vollständige Reihe aller 92 Lösungen gab nur **ein** Leser, ein Blindgeborner, an (s. ebda, Bd. 15, Nr. 378 v. 28. Sept. 1850, S. 207). Alle diese 92 Lösungen gab schon vorher NAUCK selbst in Nr. 377 (Bd. 15, 21. Sept. 1850, S. 182), während er bei Stellung der Aufgabe nur 60 Lösungen besessen hatte. — Weiteres über die Literatur des Problems s. bei W. AHRENS, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Bd. I, 3. Aufl. 1921, S. 212.

Eine Ausdehnung der Fragestellung auf andere Schachbretter: von n^2 Feldern ($n = 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12 \ldots$) liegt nahe, und für die angegebenen, kleineren Werte von n sind die Lösungen ermittelt (siehe AHRENS, a. a. O., S. 225 ff.).

Über die acht, durch Drehungen und Spiegelungen ineinander übergehenden »Variationen« einer Lösung, von denen GAUSS im zweiten seiner Briefe spricht und die sich unter besonderen Symmetrieverhältnissen auf 4, 2 oder 1 »reduzieren« könnten oder können, sei noch folgendes bemerkt: Eine Reduktion auf 1 kann freilich — nach Art der »Bedingungen der Aufgabe« — tatsächlich nicht vorkommen. Vielmehr muss die **Spiegelung** zu jeder Lösung immer eine weitere, davon verschiedene Lösung hinzuliefern (AHRENS, a. a. O., S. 222 und 249). Auch eine Reduktion der 8 »Variationen« auf nur 2 ist im Falle des **gewöhnlichen** Schachbretts — und nur diesen Fall betrachtet GAUSS ja — nicht möglich. Dagegen gibt es für andere quadratische Bretter solche »doppelt-symmetrische« Lösungen, wie man diese Lösungen mit der »Variationen«-Zahl 2 nennen könnte, sehr wohl, so beispielsweise bereits für $n = 4$ und $n = 5$ und vielleicht überhaupt für jedes $n \equiv {1 \atop 0} \bmod 4$, ausgenommen $n = 8$ und $n = 9$ (vgl. AHRENS, a. a. O., S. 250/251); über die Existenz »doppelt-symmetrischer« Lösungen s. insbesondre auch die Abhandlung von G. PÓLYA bei AHRENS, a. a. O., Bd. II (2. Aufl.), S. 370 ff.

Die Ausführungen von GAUSS in dem dritten seiner Briefe dienen zu einem Teil der Widerlegung und Berichtigung der vorhergegangenen, wenig durchdachten Entwicklungen SCHUMACHERS. Dieser Teil des GAUSSschen Briefes bedarf irgendwelcher Zusätze nicht; dagegen sei zu den sonstigen, bedeutsameren Ausführungen von GAUSS in diesem Briefe folgendes bemerkt: Bekanntlich stellt die Gangart der Königin im Schachspiel eine Vereinigung von »Turm«- und von »Läufer«-Gangart dar. Sollen also die Forderungen unseres Problems erfüllt sein, so muss sowohl der »Turm«-, wie der »Läufer«-Angriff ausgeschaltet sein. In den GAUSSschen Problemansatz (S. 25) — in die Schreibweise 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 — ist nun bereits die Unmöglichkeit eines »Turm«-Angriffs hineingelegt, und es kann sich daher für GAUSS nur noch darum handeln, auch den »Läufer«-Angriff auszuschalten, für den er ein arithmetisches Kriterium gibt. Eine invers-korrespondierende Methode, bei der also durch die Wahl der Bezeichnungen der »Läufer«-Angriff ausgeschlossen ist und bei der das Verfahren nun dazu dient, auch alle Fälle von »Turm«-Angriff auszuscheiden, gab S. GÜNTHER (»*Zur mathem. Theorie des Schachbretts*«, Arch. f. Math. u. Phys. 56, 1874, S. 281—292).

Schliesslich noch ein Wort über die von GAUSS für die Zwecke dieses Problems gewählte Feldernotation: $a + bi$ usw.! »Wie gern er [GAUSS] mit dem »i« arbeitete«, so sagt STÄCKEL *), »zeigt übrigens auch sein Ansatz für das Problem der acht Königinnen, bei dem die Felder des Schachbrettes mit den Zahlen $a + ib$ ($a, b = 1, 2 \ldots, 8$) bezeichnet werden«. Es ist im grunde allerdings ziemlich nebensächlich, ob man sich unter dem »i« dieser GAUSSschen Bezeichnung die imaginäre Einheit oder nur ein Symbol zur Scheidung von »Zeilen«- und »Spalten«-Notation vorstellt. Auf jeden Fall aber ist GAUSS' Bezeichnung, wie er selbst sagt, »elegant« und auch geeignet, in manchen Spezialuntersuchungen wertvolle Dienste zu leisten (s. AHRENS, a. a. O., Bd. I, S. 221, und Bd. II, 2. Aufl., S. 349).

Die obigen Figuren 3, 4 weichen insofern von GAUSS' eigenhändigen Skizzen ab, als GAUSS die Stellungen der Königinnen in den Eckpunkten eines quadratischen Gitters markiert, während sie hier in üblicher Weise in die Felder eines Schachbretts eingezeichnet wurden.

AHRENS.

*) P. STÄCKEL, *C. F. Gauss als Geometer*, Werke X, 2 Abh. IV, S. 69.

6. Interpolationsmethode für halbe Intervalle des Arguments [*)].

Von GAUSS.

[Sammlung von Hülfstafeln, herausgegeben im Jahre 1822 von H. C. SCHUMACHER, neu herausgegeben und vermehrt von G. H. L. WARNSTORFF, Altona 1845, Seite 133.]

Diese bei Berechnung von Tafeln, Ephemeriden u.s.w. sehr bequeme Methode, bei der man nur die geraden Differenzen braucht, lässt sich nach folgendem Schema leicht übersehen

Argument	Function	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.	4. Diff.	5. Diff.	6. Diff.	
*	*							
		*						
*	*		*					
		*		*				
*	*		*		*			
		*		*		*		
p	a		b		c		d	
		*		*		*		u.s.w.
$p+\delta$	a'		b'		c'		d'	
		*		*		*		
*	*		*		*			
		*		*				
*	*		*					
		*						
*	*							

Es gehört dann zu dem Argumente $p + \frac{1}{2}\delta$ der Werth der Function

$$\tfrac{1}{2}\left((a+a') - \tfrac{1}{8}(b+b') + \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{3}{16}(c+c') - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{3}{16}\cdot\tfrac{5}{24}(d+d') + \cdots\right)$$

[*) Vergl. hierzu den Aufsatz *Über Interpolation* von J. F. ENCKE im Jahrgang 1830 des Berliner Astronomischen Jahrbuchs, Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen von J. F. ENCKE, I, Berlin 1888, S. 1—20, von dem der Verfasser in einer Fussnote (a. a. O., S. 1) folgendes sagt: »Der folgende Aufsatz ist aus den Vorlesungen entlehnt, die ich im Jahre 1812 bei dem Herrn Hofrath GAUSS zu hören das Glück hatte. In dem ganzen Gange der Entwickelung bin ich, so viel die Erinnerung gestattete, dem Vortrag meines hochgeehrten Lehrers gefolgt. . . .«]

Das Gesetz des Fortschreitens ist von selbst klar. Es versteht sich, dass die Zeichen der betreffenden Grössen gehörig beachtet werden müssen. Zur numerischen Berechnung ist es vortheilhafter, die Formel in diese Gestalt zu setzen

$$\tfrac{1}{2}(a+a'-\tfrac{1}{8}(b+b'-\tfrac{3}{16}(c+c'-\tfrac{5}{24}(d+d'+ \text{ u.s.w.}$$

und indem man mit den letzten Differenzen die vorletzten und so weiter mit den folgenden die unmittelbar vorhergehenden corrigirt, die Rechnung von hinten anzufangen.

Ein Beispiel wird dies deutlicher zeigen. Man sucht, wenn die 10-stelligen Logarithmen der Sinus für ganze Grade gegeben sind, den log sin 30°30'

Argument	log sin	1. Differenz	2. Differenz	3. Diff.	4. Diff.	5. Diff.	6. Diff.
27° 0'	9,6570467649						
		+145625260					
28 0	9,6716092909		−6005878				
		+139619382		+374248			
29 0	9,6855712291		5631630		−37052		
		+133987752		337196		−4688	
30 0	*9,6989700043		*5294434		*32364		*−722
		+128693318		304832		3966	
31 0	*9,7118393361		*4989602		*28378		*−594
		+123703716		276454		+3372	
32 0	9,7242097077		4713148		−25006		
		+118990568		+251448			
33 0	9,7361087645		−4461700				
		+114528868					
34 0	9,7475616513						

Die Rechnung sieht dann so aus, wie man mit der Feder in der Hand leicht versteht:

−1316	−60742	−10284036	19,4108093404
	+274	+11338	+1284088
	−60468	−10272698	19,4109377492
			9,7054688746
		Die Tafeln geben ...	9,7054688745.

Die Zwischenrechnung, nämlich $\frac{5}{24}\cdot 1316 = 274$, $\frac{3}{16}\cdot 60468 = 11338$, $\frac{1}{8}\cdot 10272698 = 1284087$, macht man auf einem besonderen Papiere. Statt der letzten, am nächsten kommenden Zahl ist 1284088 gesetzt, weil sonst eine ungerade Summe kommen würde, und man bei dem Halbiren zwischen 9,7054688745 und 9,7054688746 zu wählen hätte.

7. Mechanische Quadratur [*)].

[Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, Berlin 1880, S. 228, 230.]

Bessel an Gauss. Königsberg, 10. Januar 1816.

{. . . . Erlauben Sie mir eine Frage, lieber Gauss! — es ist klar, dass man durch die Cotesischen Formeln immer mehr Genauigkeit erhält, je mehr Ordinaten man zwischen zwei gegebenen annimmt; — dieses findet aber nicht immer statt, wenn die äusseren, durch die Vermehrung der Anzahl der zwischenliegenden, aus einanderrücken; — oder, wenn die Ordinaten einmahl bestimmte Intervalle haben, so wird es oft vortheilhafter sein, wenigere miteinander zu verbinden als mehrere. — Lässt sich dafür eine bestimmte Regel angeben? . . .}

Gauss an Bessel. Göttingen, 27. Januar 1816.

. . . . Das Integriren durch Näherung bei bestimmten Intervallen habe ich bei meinen ersten Störungsrechnungen über die Pallas immer in folgender

[*)] Vergl. hierzu die Aufsätze *Über mechanische Quadratur* (1837) und *Über die Cotesischen Integrations-Faktoren* (1863) von J. F. Encke im Berliner Astronomischen Jahrbuch, Gesammelte Abhandlungen von J. F. Encke, I, S. 21—60, bezw. 100—124, deren erster von dem Verfasser mit folgenden Worten eingeleitet wird (a. a. O., S. 21, Fussnote): »Bei meinem Aufenthalt in Göttingen im Jahre 1812 übertrug mir Herr Hofrath Gauss die Berechnung der speciellen Störungen der Pallas, und leitete mir zu diesem Behufe seine Methoden und Formeln ab, deren er seit längerer Zeit sich bedient hatte. Er hatte damals die Absicht, selbst etwas über diesen Gegenstand bekannt zu machen und behielt sich diese Erläuterung vor. Jetzt wo leider die Aussicht auf ein eigenes Werk von Gauss, wegen seiner vielfachen andern wichtigen Untersuchungen, so gut wie verschwunden scheint, hat er es mir gestattet, das was ich aus seinen Vorträgen für die nachherige häufige Anwendung auf Cometen und kleine Planeten benutzt habe, hier zu publiciren. . . .«]

Form ausgeführt

Differenzreihen

	I	II	III	IV	V	
$\varphi(x-2)$						
	$*$					
$\varphi(x-1)$		$*$				
	$*$		$*$			
φx		$*$		$*$		
	A		B		C	etc.
$\varphi(x+1)$		$*$		$*$		
	$*$		$*$			
$\varphi(x+2)$						

$$\int \varphi x\,dx = fx$$

$$f(x+\tfrac{1}{2}) = \Sigma x + \tfrac{1}{24}A - \tfrac{17}{5760}B + \tfrac{367}{967\,680}C - \tfrac{27\,859}{464\,486\,400}D + \text{etc.}$$

In der Regel divergirt diese Reihe, wenn sie weit fortgesetzt wird; ich glaube, dass man aufhören muss, wenn die Divergenz anfängt; ich habe aber immer meine Intervalle so klein genommen, 50 Tage, dass ich mit $\frac{1}{24}A$ schliessen, ja selbst dies Glied gewöhnlich vernachlässigen konnte. Die Coefficienten obiger Reihe findet man, wenn man 1 mit

$$1 - \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{x}{2}\right) + \tfrac{3}{40}\left(\tfrac{x}{2}\right)^2 - \tfrac{5}{112}\left(\tfrac{x}{2}\right)^3 + \text{etc.}$$

dividirt; in diesem Divisor sind die Coeff[icienten] dieselben, wie in Arc. sin., den Wechsel der Zeichen abgerechnet. . . . . .

8. Zu den Weidenbachschen Tafeln für den Unterschied der Logarithmen von Summe und Differenz zweier Zahlen.

[1.]

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER II, Altona 1861, S. 203.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 4. März 1829.

Beigehend übersende ich Ihnen durch H[er]rn H[au]ptm[ann] OLSEN eine kleine Tafel, die einer meiner Zuhörer, H[err] v. WEIDENBACH, auf meine Veranlassung mit grosser Sorgfalt berechnet hat. Sie ist ein Pendant zu meinen kleinen Tafeln für Logarithmen von Summen und Differenzen und in ihrer Art fast eben so nützlich. Die Tafel gibt für das Argument $A = \log x$, daneben $B = \log \frac{x+1}{x-1}$. Man berechnet also dadurch $\log \frac{a+b}{a-b}$ durch Eine Aufschlagung, wenn a und b nur durch ihre Logarithmen gegeben sind, wo man sonst 4 oder 3 oder wenigstens (wenn man einen Hülfswinkel gebraucht) zwei Aufschlagungen nöthig hat. Ich brauche Ihnen nicht zu sagen, dass jenes Geschäft häufig vorkommt, bei Auflösung der ebenen Dreiecke, wo 2 Seiten und der Winkel dazwischen gegeben sind, allgemein bei Bestimmung von P und p aus zwei solchen Gleichungen:

$$p \sin(A+P) = a$$
$$p \sin(B+P) = b$$

oder

$$p \cos(A+P) = a$$
$$p \cos(B+P) = b.$$

Die Absicht der Zusendung ist, Sie zu fragen, ob Sie geneigt sind, diese kleine Tafel zu drucken, in welchem Fall sie Ihnen zu Diensten steht, ich, falls Sie es wünschen, auch noch ein Paar Worte zur Erklärung beifügen kann, und bloss für mich und H[er]rn v. WEIDENBACH um einige Abdrücke auf starkem Papier bitte.

Wenn der Abdruck auf hohem Format geschieht, dass z. B. immer 40 Glieder in Eine Columne kommen, so werden Sie die dadurch nöthig werdende Abänderung dem Setzer leicht begreiflich machen können. Die Tafel ist absolut complet, da die Relation von A und B wechselseitig ist, so dass, was in der ersten Columne nicht steht, in der zweiten gesucht werden muss.

In entgegengesetztem Fall, dass Sie die Tafel nicht drucken können, erbitte ich sie mir zurück, da ich, bis sich eine andere Gelegenheit findet, die Bequemlichkeit ihres Gebrauchs nicht gern entbehren möchte, und nur das Eine Exemplar besitze.

Die 5te Ziffer wird überall die nächste sein. Die Tafel ist ursprünglich auf 7 Ziffern berechnet, und in den wenigen Fällen, wo dies nicht ausreichte, sogar 10 Ziffern befragt. . . . .

Titel könnte sein:

Tafel für den Unterschied der Logarithmen von Summe und Differenz zweier Zahlen, die nur durch ihre Logarithmen gegeben sind, berechnet von H. v. WEIDENBACH.

[2.]

[S. 1] TAFEL

um den Logarithmen von $\frac{x+1}{x-1}$ zu finden,

wenn der Logarithme von x gegeben ist,

von

Herrn v. WEIDENBACH

berechnet.

Mit einem Vorworte

von

Herrn Hofrath GAUSS.

Für die Astronomischen Nachrichten.

COPENHAGEN,

Gedruckt bey dem Director J. HOSTRUP SCHULTZ

königl. und Univers[itäts-]Buchdr[uckerei].

1829.

[S. 3] Gegenwärtige Tafel ist das Seitenstück zu der zuerst im Jahre 1812 bekannt gemachten und seitdem oft wieder abgedruckten Tafel für die Logarithmen von Summen und Differenzen, und von einer fast eben so häufigen Brauchbarkeit. Der Zusammenhang der beiden Columnen ist der, dass, wenn die eine den Logarithmen von x darstellt, die andere den Logarithmen von $\frac{x+1}{x-1}$ giebt. Diese Beziehung ist eine gegenseitige, und daher die Tafel absolut vollständig, indem man jeden positiven Logarithmen entweder in der einen oder andern Columne antrifft. Anstatt die Argumente mit 0.382 anfangen zu lassen, hätte man sie auch von 0 anfangen und mit 0.383 schliessen lassen können; die Tafel würde aber dann nicht so bequem für den Gebrauch ausgefallen sein.

Die Tafel ist von H[er]rn v. WEIDENBACH ursprünglich auf sieben Decimalen berechnet, um die fünfte auf eine halbe Einheit verbürgen zu können; in den Fällen, wo zu der Entscheidung selbst sieben Ziffern noch nicht zureichten, sind sogar noch mehrere zugezogen.

Man sieht leicht, dass eine Hauptanwendung der Tafel bei der so häufig vorkommenden Aufgabe Statt findet, wo zwei unbekannte Grössen p, P durch zwei Gleichungen

$$p \cos(P+A) = a$$
$$p \cos(P+B) = b$$

oder

$$p \sin(P+A) = a$$
$$p \sin(P+B) = b$$

[S. 4] oder

$$a \cos(P+A) = b \cos(P+B) = p$$

oder

$$a \sin(P+A) = b \sin(P+B) = p$$

bestimmt werden sollen. Es gehört dahin der Fall der ebnen Trigonometrie, wo aus zwei Seiten eines Dreiecks a, b und dem eingeschlossenen Winkel C die beiden andern Winkel A, B bestimmt werden sollen, und wo man bekanntlich

$$\frac{a+b}{a-b} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \operatorname{tang}(B + \tfrac{1}{2} C)$$

hat; indem man hier a die grössere gegebne Seite bedeuten lässt, giebt die Tafel, wenn man in sie mit $\log a - \log b$ eingeht, ohne weiteres den Logarithmen von $\frac{a+b}{a-b}$, wozu man sonst, wenn man erst a und b aus den Logarithmen berechnen wollte, vier Aufschlagungen, oder wenn man nach der Form

$$\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}$$

rechnete, drei, oder, wenn man den Hülfswinkel einführte, dessen Tangente $\frac{a}{b}$ ist, doch zwei Aufschlagungen nöthig hätte. Beispiele in Zahlen hier beizufügen würde wohl überflüssig sein.

Gauss.

---

9. Praxis des numerischen Rechnens.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher IV, Altona 1862, S. 44, 50, 315.]

[1.]

Schumacher an Gauss. Altona, 13. November 1841.

{. . . . . Ein Curiosum muss ich noch hinzufügen. Ich sprach neulich mit Lübsen über Ihre bewunderswürdige Fertigkeit im numerischen Rechnen. Er gestand, dass diese Fertigkeit ihm ganz unbegreiflich sei, wenn Sie nicht eigene Vortheile dabei hätten. Auf meine Frage, welche Vortheile er meine, nannte er die — biquadratischen Reste. Es war dies kein Scherz, wie mitunter Personen witzig zu sein glauben, wenn sie irgend eine ungereimte Behauptung aus der Luft greifen, sondern sein voller Ernst. . . . . .}

[2.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, den 6. Januar 1842.

. . . . . In einem früheren Briefe erwähnten Sie Lübsens Meinung von der mir zugeschriebenen Fertigkeit im numerischen Rechnen. Die biquadratischen Reste haben speciell betrachtet freilich gar nichts damit zu schaffen, aber meine jetzt fast 50jährigen Beschäftigungen mit der höhern Arithmetik überhaupt haben allerdings in so fern einen grossen Antheil daran, als dadurch von selbst vielerlei Zahlenrelationen in meinem Gedächtniss unwillkürlich hängen geblieben sind, die beim Rechnen oft zu Statten kommen. Z. B. solche Producte, wie $13 \times 29 = 377$, $19 \times 53 = 1007$ und dergl[eichen], schaue ich unmittelbar an, ohne mich zu besinnen, und bei andern, die sich aus solchen sogleich ableiten lassen, ist des Besinnens so wenig, dass ich mich desselben kaum selbst bewusst werde. Übrigens habe ich niemahls Rechnungsfertigkeit absichtlich irgendwie *cultivirt*, sonst hätte sie sich ohne Zweifel viel weiter treiben lassen; ich lege darauf gar keinen Wert, ausser in so fern sie *Mittel*, nicht aber Zweck ist. . . . .

[3.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 3. October 1844.

. . . . für mich ist immer das Subtrahiren etwas bequemer, als das Addiren (beim Rechnen, auch mitunter in andern Dingen). Obgleich der Unterschied sehr gering ist, so steht er doch als Factum bei mir seit 50 Jahren fest: aber erst heute, da Sie sagen, dass es bei Ihnen umgekehrt sei, habe ich darüber nachgedacht, was wohl bei mir der Grund davon sein möge: Ich glaube es ist folgender. Ich bin gewohnt, wenn zwei übereinanderstehende Zahlen addirt oder subtrahirt werden sollen, *immer* die Summe oder die Differenz sogleich von der Linken zur Rechten niederzuschreiben. Allen meinen Schülern, die sich Rechnungsfertigkeit erwerben wollten, habe ich immer gleich Anfangs empfohlen, sich daran zu gewöhnen (was in *sehr* kurzer Zeit geschieht) und alle ohne Ausnahme haben es mir nachher sehr Dank gewusst. Der Vortheil davon besteht darin, dass jeder, der kein Jude ist, viel geläufiger und calligraphischer von der Linken nach der Rechten schreibt als umgekehrt, und auf ein zierliches Ziffernschreiben, und dass sie immer recht ordentlich unter einander und neben einander stehen, kommt ja sehr viel an.

Cela posé, beantwortet sich obige Frage nun so: Während man Summe oder Differenz von der Linken zur Rechten schreibt, muss man immer zugleich die folgenden Ziffern berücksichtigen, die beim Addiren nötig machen können, eine um 1 grössere, beim Subtrahiren eine um 1 kleinere Zahl zu schreiben. Diese *Berücksichtigung* wird nun zwar bald so mechanisch, dass man gar nicht daran denkt, immer aber bleibt *sie* beim Subtrahiren ein klein wenig einfacher als beim Addiren: z. B. wird Addirt

387 . . .
218 . . . so kann die Summe sein 605 oder 606,

wird subtrahirt, so kann die Differenz sein 169 oder 168; allein die Entscheidung hängt beim Subtrahiren nur von Gleichheit oder Ungleichheit der übereinanderstehenden folgenden Ziffern ab, beim Addiren aber, ob Summe der übereinanderstehenden die 9 überschreitet, und das erstere ist einfacher, als das andere. Mit Worten ausgedrückt, würde die Ratio decidendi sein:

Beim Subtrahiren: wenn (von der betreffenden Stelle nach der rechten fortschreitend, und die übereinanderstehenden Ziffern immer als ein Paar bildend, betrachtet) — *das erste ungleiche* Paar die grössere Ziffer $\left|\begin{smallmatrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{smallmatrix}\right|$ hat, tritt $\left|\begin{smallmatrix}\text{keine}\\ \text{eine}\end{smallmatrix}\right|$ Verminderung um eine Einheit ein.

Beim Addiren: wenn [für] das erste Paar, welches eine von 9 verschiedene Summe gibt, diese Summe $\left|\begin{smallmatrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{smallmatrix}\right|$ ist als 9, tritt $\left|\begin{smallmatrix}\text{eine}\\ \text{keine}\end{smallmatrix}\right|$ Vergrösserung um eine Einheit ein. . . . . .

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher III, Altona 1861, S. 382 ff.]

[4.]

Schumacher an Gauss. Junius 30. 1840.

[. . . . Es war hier ein Kopfrechner Dahse, der mitunter auffallende Beweise seines Talents gab, mitunter aber auch sich bedeutend verrechnete, welches zu seinem Glücke seltener als das erste vorkam. Vorzüglich gerne zog er im Kopfe die fünfte (rationale) Wurzel aus, weil er bemerkt hatte, dass bei der fünften Potenz die Einheiten dieselben, als bei der Wurzel sind. Ich sah, dass bei unserm Zahlensystem die $(4n+1)$te Potenz dieselben Einheiten als die Wurzel hat, ein Satz, von dem der seinige nur ein einzelner Fall (für $n = 1$) ist. Lässt sich dies einfach beweisen?

Von Mathematik versteht er übrigens nichts, und Petersen hat sich vergeblich bemüht, ihm nur die ersten Elemente beizubringen. Jetzt ist er einem Hautboisten oder Unterofficier bei dem Hamburger Militair in die Hände gefallen, der mit ihm herumreiset und von seinen Kunststücken lebt, obgleich ich nicht recht begreife, warum die Leute Geld ausgeben, um ihn im Kopfe rechnen *zu sehen*. Wenn man aus glaubwürdigen Zeugnissen weiss, dass er es kann, so erfährt man durch die Exhibition nichts Neues. Man sieht einen jungen Menschen mit einem einfältigen Gesichte, der nach einiger Zeit die verlangten Zahlen ausspricht. . . . .}

[5.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 6. Julius 1840.

. . . . Genügender kann ich Ihnen auf Ihre zweite Frage Antwort geben: 1) Wenn a eine durch 5 nicht theilbare ganze Zahl ist, so ist $a^4 \equiv 1$ (mod. 5); dies wird bekanntlich gelesen a^4 ist congruent 1 nach dem Modulus 5 und bedeutet (Vid. § 1 der *Disq. Ar.*), dass $a^4 - 1$ durch 5 divisibel ist. Congruenz hat sehr grosse Analogie mit Gleichheit, und unzählige Sätze, die für Gleichsein gelten, gelten auch für congruent-sein. Also z. B., wenn $a \equiv b$, $c \equiv d$, so ist auch $ac \equiv bd$, alles nach einerlei beliebigem Modulus. So mögen Sie obigen Satz $a^4 \equiv 1$ (mod. 5) für ein Factum annehmen, welches bloss für $a \equiv 1, 2, 3, 4$ erkannt zu haben zureicht. Allgemeiner ist es ein concreter Fall von dem sogenannten FERMATschen Theorem (jetzt ein triviales ABC-Theorem), dass allgemein $a^{p-1} \equiv 1$ (mod. p), wenn p eine beliebige Primzahl und a durch p nicht theilbar ist.

2) Es ist also auch $a^{4n} \equiv 1$ (mod. 5), wenn n eine beliebige nicht negative ganze Zahl ist.

3) Daher auch $a^{4n+1} \equiv a$ (mod. 5).

Alles dieses gilt für jedes a, welches durch 5 nicht theilbar ist; offenbar gilt aber (3) auch für den Fall, wo a durch 5 theilbar ist, also allgemein für alle ganze Zahlen a.

4) Offenbar ist auch $a^k \equiv a$ (mod. 2), wenn a beliebige ganze Zahl und k positive ganze Zahl ist. Denn offenbar ist jede Potenz einer geraden Zahl gerade, einer ungeraden ungerade.

5) Wir haben also $a^{4n+1} \equiv a$ sowohl nach mod. 5, als nach mod. 2, daraus nach einem andern ABC-Theorem,

6) $a^{4n+1} \equiv a$ (auch mod. 10).

Nemlich $a^{4n+1} - a$ ist jedesmal sowohl durch 5 als durch 2, mithin auch durch 10 theilbar.

Entschuldigen Sie diese Ausführlichkeit. Ich schliesse aus Ihrer Frage, dass Sie mit der höhern Arithmetik ganz unbekannt sind, und wünschte Ihnen

nachzuweisen, dass in den ersten Theilen derselben nicht bloss gar nichts abschreckendes, sondern ohne alle Mühe die Quelle mannigfaltigen Genusses zu finden ist, wozu ich Sie gern einladen wollte. . . . .

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER V, Altona 1863, S. 296 ff., S. 302.]

[6.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 10. April 1847.

. . . . . Was durch Briefe oder öffentliche Blätter [über DASE] zu meiner Kenntniss gekommen ist, enthält eigentlich noch gar kein Zeugniss für eine ganz ausserordentliche Rechnensfertigkeit. Man muss hier zwei Dinge unterscheiden; ein bedeutendes Zahlengedächtniss und eigentliche Rechnungsfertigkeit. Dies sind eigentlich zwei ganz von einander unabhängige Eigenschaften, die verbunden sein können, aber es nicht immer sind. Es kann einer ein sehr starkes Zahlengedächtniss haben, ohne gut rechnen zu können, wie z. B. der HIRSCH DÄNEMARK, auch ein anderer wandernder Jude, dessen Namen ich vergessen habe. Umgekehrt kann jemand eine superiöre Rechnensfertigkeit haben, ohne ein ungewöhnlich starkes Zahlengedächtniss. Das letztere besitzt H[er]r DASE ohne Zweifel im eminenten Grade; ich gestehe aber, dass ich darauf sehr wenig Werth legen kann. Rechnensfertigkeit kann nur danach taxirt werden, ob jemand auf dem Papier ebensoviel oder mehr leistet als andere. Ob dies bei H[er]rn DASE der Fall ist, weiss ich nicht; nur wenn er um zwei Zahlen, jede von 100 Ziffern, mit einander im Kopf zu multipliciren $8\frac{3}{4}$ Stunden bedarf, so ist diess doch am Ende eine thörigte Zeitverschwendung, da ein einigermaassen geübter Rechner dasselbe auf dem Papier in viel kürzerer, in weniger als der halben Zeit würde leisten können. Als Beweis eines stupenden Zahlengedächtnisses — aber hat man denn die Richtigkeit seiner Rechnung controllirt? — ist allerdings jene Leistung etwas ausserordentliches; aber psychologisch recht interessant würde es erst dadurch werden können, wenn man sich ein ganz adäquates Bild von dem, was dabei in seinem Geiste vorgeht, machen könnte. Schwerlich wird der H[er]r DASE uns [die] dazu nöthige Erklärung geben können, worüber ich aber weit entfernt sein würde, ihm einen Vorwurf zu machen. Denn in der That, ich habe bei mir selbst manche Erfahrungen gemacht, die mir selbst räthselhaft bleiben. Eine davon ist folgende. Ich fange zuweilen, indem ich zu Fuss einen gewissen Weg mache, an, in Gedanken die Schritte zu zählen (beiläufig immer taktmässig zu gehen, so:

eins eins eins eins eins   eins eins eins eins eins
zwei zwei zwei zwei zwei   &c.)

So zähle ich fort bis hundert und fange dann wieder von 1 an. Aber alles dies thue ich, wenn es einmahl eingeleitet ist, unbewusst von selbst; ich denke an ganz andere Dinge, beachte allerlei mir auffallendes mit Aufmerksamkeit — nur sprechen darf ich nicht dazwischen — und nach einiger Zeit werde ich erst wieder gewahr, dass ich noch immer im Takt fortzähle z. B.

neun|und|sieb|zig|neun| und|neun|und|sieb|zig

und immer richtig, natürlich aber ohne zu wissen, ob oder wie oft ich durch hundert gegangen bin.

Ähnliches gilt beim Secundenzählen (nur das hier nicht zehn—zehn vereinigt werden, sondern einfach bis sechzig gezählt wird); auch hier kann ich an ganz andere Dinge denken, beobachten, schreiben, auf und abgehen — nur nicht sprechen! Übrigens hat, wenn ich nicht irre, diese Fertigkeit LALANDE von jedem praktischen Astronomen verlangt, auch ohne das Sprechen auszuschliessen. So kann, wie gesagt, ich es nicht. Ich weiss auch Niemand, der es kann. Hier erwähne ich der Sache nur, weil das Zählen bei mir durchaus unbewusst sein kann.

[7.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 16. April 1847.

In Nro. 589 der A[stronomischen] N[achrichten] führen Sie die Berechnung von π, mein theuerster Freund, als Ihnen von DASE mitgetheilt an. Sie scheinen also nicht gewusst zu haben (was ich selbst auch erst heute bemerkt, oder nachdem ich es vielleicht früher vergessen, wieder bemerkt habe), dass das Resultat der DASEschen Rechnung schon vor mehrern Jahren gedruckt ist; lesen Sie nur

gefälligst nach in CRELLES Journal 27, S. 198. Da derselbe, wie dort bemerkt ist, auch in Wien mit seinen Productionen nicht einmahl seine Kosten gedeckt hat, so scheint dadurch meine Besorgniss, dass es in Göttingen eben so gehen werde[*)], eine Bestätigung zu erhalten. Wenn es hier wenigstens sehr wahrscheinlich ist, dass seine Erwartung nicht befriedigt werden wird, so ist dagegen ein ähnlicher Erfolg in Beziehung auf seine andern Zwecke[**)] gewiss. Ich habe hin und her gesonnen, weiss ihm aber keine seinen Kräften angemessene Arbeit nachzuweisen, denen die in Ihrem Briefe erwähnten Qualificationen beigelegt werden könnten. Noch viel weniger aber eine solche, die für ihn irgend ein tangibles Resultat geben könnte. Ich für meine Person wünschte wohl, dass die Factorentafel, die BURCKHARDT bekanntlich bis 3 Million geliefert hat, weiter fortgesetzt würde. Allein

1) ist dazu eine besonders grosse Rechnungsfertigkeit keinesweges erforderlich, und einer, der nur sehr mässige Fertigkeit besitzt, wird die Arbeit eben so gut, ja auch beinahe eben so schnell machen können.

2) Existirt wirklich schon ein M[anu]s[cri]pt, eine solche Fortsetzung bis 6 Million, welches Mspt. sich bei der Akademie in Berlin befindet; es scheint aber nicht, dass diese geneigt ist, die Druckkosten daran zu wenden. In der That ist auf irgend nennenswerthe Anzahl von Käufern wenig zu rechnen, noch weniger auf ein Honorar für den, der eine ähnliche Arbeit ausführt.

Ich selbst habe in meinem Leben sehr viele und zum Theil sehr grosse Rechnungen ausgeführt, auch zuweilen dabei einige fremde Hülfe benutzt; ich wüsste mich aber kaum eines Falles zu erinnern, wo die Hülfe von Jemand, der bloss mechanische Rechnungsfertigkeit gehabt hätte — möchte diese auch noch so gross gewesen sein — mir von irgend einem Nutzen hätte sein können.

. . . .

Ich selbst werde schwerlich jemals noch Arbeiten auf mich nehmen, wobei ich mechanischen Rechnern Beschäftigung geben könnte. . . . . . .

[*)] DASE hatte die Absicht, Göttingen zu besuchen, um GAUSS seine Aufwartung zu machen und sich dort hören zu lassen, siehe den Brief von SCHUMACHER vom 7. April 1847.]

[**)] GAUSS sollte seinen Rat geben, wie DASE »grosse und wirklich nützliche Rechnungen machen« könne; Brief von SCHUMACHER vom 13. April 1847.]

[7.]

Gauss an Zacharias Dase.

Aus dem Vorwort zu den *Factoren-Tafeln für alle Zahlen der Siebenten Million von Zacharias Dase*, Hamburg 1862, Perthes-Besser & Mauke.

Mein lieber Herr Dase!

Ich nehme keinen Anstand, Ihrem Wunsche gemäss, das, was ich Ihnen über Factorentafeln mündlich erklärt habe, hier schriftlich zu wiederholen.

Das Bedürfniss, vorliegende Zahlen in ihre Factoren zu zerlegen, oder die Unmöglichkeit der Zerlegbarkeit zu erkennen, kommt jedem, der sich viel mit Zahlenrechnungen zu beschäftigen hat, sehr häufig vor. Bei kleinen Zahlen sieht jeder, der einige Fertigkeit im Rechnen hat, die Beantwortung solcher Frage sogleich unmittelbar, bei grössern mit mehr oder weniger Mühe; diese Mühe wächst aber, wie die Zahlen grösser werden, im steigenden Verhältniss, so dass auch einem sehr geübten Rechner dazu Stunden, ja ganze Tage für eine einzige Zahl erforderlich werden können, und bei noch grössern Zahlen zuletzt die Ermittelung durch specielle Rechnung für ganz unausführbar gelten muss. Sind aber ein- für allemal Tafeln berechnet, so geben sie, so weit sie reichen, die Antwort unmittelbar, die Zahl mag klein oder gross sein. Dies erkennend, hat man schon vor langer Zeit angefangen, solche Tafeln zu geben, und immer mehr zu erweitern. Als die eigentlichen Epochen müssen folgende Zeitpunkte betrachtet werden:

1658 Factorentafel in Rahn's *deutscher Algebra* bis 24000[*)].

1668 Pell's bis 100000 erweiterte Tafel in der englischen Übersetzung dieses Werks[**)].

1776 Felkel's Tafel bis 336000[***)].

[*) Johann Heinrich Rahn, *Teutsche Algebra oder algebraische Rechenkunst usw.*, Zürich 1659.]

[**) *An Introduction to Algebra*, translated out of the High-Dutch into English by Thomas Brancker, augmented by D. P. [= Dr. Pell], London 1668.]

[***) Anton Felkel, *Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 10000000.* I. Theil. Enthaltend die Factoren von 1 bis 144000. Wien 1776 (auch mit lateinischem Titel). Der zweite (bis 336000 reichende) und der dritte (bis 408000 reichende) Teil der Felkelschen Tafel ist zwar veröffentlicht, jedoch im Jahre 1788 vernichtet und zu Patronenpapier verarbeitet worden; es gibt nur ganz wenige Exemplare; vergl. weiter unten im Text.]

1811 Chernac's Tafel für die vollständige erste Million[*)].

1814 und 1816 Burckhardt's Tafel für die zweite und dritte Million[**)].

Dies sind vollständig die bisherigen **Originalarbeiten**, die, so weit sie **gedruckt**, Gemeingut des Publikums geworden sind.

Diejenigen zwischen diese Zeitpunkte fallenden Publicationen, die **nicht** Originalarbeiten sind, hier anzuführen, würde überflüssig sein, zumal da sie fast unzählbar sind. Sie unterscheiden sich meistens nur durch die verschiedenen Formen. So ist z. B. Pell's Tafel (die in Deutschland wenigstens überaus selten ist) vielfältig wieder abgedruckt, z. B. in Lambert's Supplementen[***)], wo jedesmal nur der kleinste Factor angegeben ist, in Vega's Tafeln[†)], wo alle Factoren angegeben sind. Auf den letzten Umstand legt ein Sachkenner durchaus gar keinen Werth, und sieht die, wenn nur der kleinste Factor gegeben wird, mögliche Concentrirung in einen viel kleineren Raum für einen viel wichtigeren Vortheil an. Chernac's Tafel giebt alle Factoren; Burckhardt giebt in den angeführten beiden Tafeln nur den kleinsten und hat 1817 auch die erste Million in derselben geschmeidigen Gestalt nachgeliefert.

Ziemlich viele Originalarbeiten fallen zwischen jene Zeitpunkte, die nicht publicirt sind. Sie geben den Beweis, wie viele Personen das Bedürfniss solcher Tafeln gefühlt haben, und dass es allerdings schwierig ist, berechnete Tafeln, die immer nur einen mässigen Käuferkreis haben, zur Veröffentlichung zu bringen. So hatte z. B. Obereit die Tafel bis 500000 berechnet und in Lambert's Hände gelegt; Rosenthal eine bis 750000, die in Kästner's Händen war[††)]; Felkel hatte die Tafel im Manuscripte bis 2 Millionen fertig und der

[*) L. Chernac, *Cribum arithmeticum*, Daventriae 1811 (vergl. Gauss' Werke II, S. 181, 182).]

[**) J. K. Burckhardt, *Tables des Diviseurs pour tous les nombres du 1., 2. et 3. million.* Paris 1814—1817. Vergl. Gauss' Werke II, S. 183—186].

[***) J. H. Lambert, *Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen u. s. w.*, Berlin 1770. Eine lateinische Übersetzung hiervon von A. Felkel erschien unter dem Titel: J. H. Lambert, *Supplementa tabularum logarithmicarum et trigonometricarum*, curante A. Felkel, Olisipone 1798.]

[†) G. Vega, *Tabulae logarithmico-trigonom.*, Leipzig 1797. Vergl. im übrigen die auf Faktorentafeln bezüglichen Angaben in L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. I, Washington 1919, S. 347ff. und in der Vorrede von F. Rudio zu L. Euler, Opera omnia ser. *I*, vol. 3, *Comm. arithm. II*, Leipzig 1917, S. Xff.

[††) Vergl. hierzu in J. H. Lambert, *Deutscher gelehrter Briefwechsel*, herausgegeben von Joh. Bernoulli, 5, Berlin und Leipzig 1787, die Briefe von Stamford, Rosenthal, Felkel und Hindenburg.]

Druck war bis 408000 fortgeschritten, dann aber sistirt, und die ganze Auflage wurde vernichtet bis auf wenige Exemplare des bis 336000 gehenden Theils, wovon die hiesige Bibliothek eines besitzt. Was aus jenen Manuscripten geworden (das Felkel'sche hatte Felkel noch 1798, wo er in Lissabon lebte) ist unbekannt. Burckhardt selbst erklärt, dass wenig Zeit erforderlich sein würde, sein eigenes Manuscript bis 6 Millionen zu vollenden, was aber nicht geschehen ist, da Burckhardt in den 20er Jahren [1825] gestorben ist. Felkel hatte gleich Anfangs seinen Plan bis 10 Millionen ausgedehnt, was sogar auf dem Titel des oben erwähnten Werkes (von 1776) steht; in einer späteren Nachricht aus Lissabon ist sogar von 24600000 die Rede, obwohl man nicht mit Gewissheit erkennt, ob nicht durch einen Druckfehler hier vielleicht eine Null zu viel gesetzt ist.

Die wichtigste Arbeit dieser Art ist aber das Manuscript, welches die 4te, 5te und 6te Million (also vor 3000000 bis 6000000) enthält und von Herrn Crelle vor mehreren Jahren der Berliner Akademie zur Verwahrung übergeben ist. Gegen Untergang ist es also geschützt, und ich zweifle nicht, dass es über kurz oder lang auch publicirt werden wird [*)].

In diesem Vertrauen ist also in meinen Augen das zunächst Wünschenswerthe, dass auch die vier Millionen von 6000000 bis 10000000 bearbeitet werden, natürlich unbeschadet künftiger noch weiterer Fortsetzung, insofern Kräfte zur Ausführung vorhanden sind. Sie selbst besitzen mehrere dazu erforderliche Eigenschaften im besonderen Grade, eine ausgezeichnete Fertigkeit und Sicherheit in Handhabung der arithmetischen Operationen, und, wie Sie schon in mehreren Fällen bewährt haben, eine unverwüstliche Beharrlichkeit und Ausdauer. Sollten Sie also durch Unterstützung der begüterten, den wissenschaftlichen Bestrebungen freundlich gesinnten Bürger Ihrer Vaterstadt, oder auf andere Weise, in den Stand gesetzt werden, sich solcher Arbeit zu unterziehen, so könnte dies den Freunden der Arithmetik nur angenehm sein.

Um jedoch Alles auf sein gehöriges Maass zurückzuführen und nicht übertriebene Erwartungen rege zu machen, darf ich auch die Kehrseite nicht verschweigen.

[*) Vergl. hierzu noch die folgende Stelle aus dem Briefe von Gauss an Schumacher vom 25. Januar 1842 (Briefwechsel, Bd. IV, S. 54): »dagegen wünschte ich sehr, dass die Factorentafel von 3000000 bis 6000000, deren Berechnung Crelle veranlasst und wovon er das Manuscript der Berliner Academie übergeben hat, gedruckt wird«. Tatsächlich ist dieses Manuskript nicht gedruckt worden.]

Was den Nutzen betrifft, so darf nicht unbemerkt bleiben, dass das Bedürfniss, die Factoren auszumitteln, bei grossen Zahlen lange nicht so oft vorkommt als bei kleineren. Man braucht also die Tafeln bis 100000 viel häufiger, als die folgenden Hunderttausende; ebenso die erste Million viel häufiger als die folgenden 9, wenn sie erst alle da sein werden. Es muss aber dagegen auch in Erwägung gezogen werden, dass wenn nun doch bei einer sehr grossen Zahl ein solches Bedürfniss eintritt, es (wie schon oben bemerkt ist) so gut wie unmöglich wird, dasselbe ohne Tafeln zu befriedigen, während bei kleinern Zahlen man bei einigem Zeit-Aufwande es doch möglich machen könnte, ohne Tafeln fertig zu werden.

Zweitens muss ich auf das Bestimmteste erklären, dass ein Absatz der Tafeln durch Verkauf niemals zureichen wird, die Kosten zu decken. Ein Buchhändler, der sie in Verlag nimmt, kann gewiss kein Honorar geben, ja er wird vielleicht nicht einmal die Druckkosten gedeckt sehen, und wird es also auch auf dieser Seite einiger Unterstützung bedürfen. Man muss hoffen, dass, soweit Privatmittel nicht ausreichen, eine oder die andere Akademie die hülfreiche Hand bieten wird.

Für wichtig halte ich noch, dass, wenn Sie die Arbeit unternehmen, Sie das Manuscript gleich so einrichten, wie es ohne alle Abänderung demnächst gedruckt werden soll. Unbedingt halte ich hier die Einrichtung der Burckhardt'schen Tafel für die beste.

Endlich mache ich Sie noch aufmerksam darauf, dass Burckhardt bei der Ausführung seiner Arbeit, mehrere sehr wichtige Erleichterungsmittel in Anwendung gebracht hat, ohne welche das Geschäft viel beschwerlicher und zeitraubender sein würde. Sie finden dieselben erwähnt in der Vorrede von Burckhardt's Tafeln und vielleicht noch etwas deutlicher in meiner Anzeige dieser Tafeln, Göttingische Gelehrte Anzeigen 1814, S. 1758 [Werke II, S. 183, 184]. Auch werden Sie noch allerlei Sie vielleicht interessirende Bemerkungen finden in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1812, S. 477 [Werke II, S. 180, 181] und 1816 S. 1776 [Werke II, S. 184, 185], wo Chernac's Tafeln und Burckhardt's dritte Million angezeigt sind.

Göttingen, den 7. December 1850.

Ihr ergebenster
C. F. Gauss

BEMERKUNG.

Zu der Angabe von GAUSS (oben S. 45), die PELLsche Tafel sei in LAMBERTS *Zusätzen* wieder abgedruckt, vergl. man die Einleitung LAMBERTS S. 3—7. Übrigens hat GAUSS das LAMBERTsche Tafelwerk schon sehr früh besessen; das im GAUSSarchiv befindliche Exemplar der *Zusätze* zeigt die eigenhändige Namenseintragung

K. Gauß. 1793.

und enthält noch zahlreiche handschriftliche Notizen von GAUSS.

Von DASE erschienen die folgenden Tafelwerke:

I. Faktoren-Tafel für alle Zahlen der siebenten Million, 1862,
II. desgl. achten Million, 1863,
III. desgl. neunten Million, ergänzt von H. ROSENBERG, 1865

alles im Verlag von W. MAUKE, Hamburg. Eine Anzeige dieser Tafeln befindet sich in den Astronomischen Nachrichten, Bd. 57, 1862, Nr. 1345, Sp. 11, wo es heisst: »Diese auf Anrathen und den Wunsch von GAUSS berechneten Tafeln haben dieselbe Einrichtung wie die BURCKHARDTschen und schliessen sich als Fortsetzung an diese und die von CRELLE berechneten Factorentafeln an, von denen die letztern jedoch noch nicht veröffentlicht sind.«

SCHLESINGER.

---

10. Drei Notizen zur Variationsrechnung.

[1.]

[Aus Handbuch 16, Bb, Den astronomischen Wissenschaften gewidmet, November 1801, S. 107.]

Der homogene Körper der grössten Attraction.

Man übersieht leicht, dass jedes Theilchen an seiner Oberfläche gleich starke Anziehung beitragen muss. Daher entsteht der Körper durch Umdrehung einer Curve, deren Gleichung

$$\frac{\cos u}{rr} = \frac{1}{A^2} \text{ [*)]}.$$

Hienach wird, die Dichtigk[eit] $= 1$ gesetzt,	bei der Kugel vom Halbmesser r
die Masse dieses Körpers $= \frac{4\pi A^3}{15}$	$\frac{4\pi r^3}{3}$
die Anziehung $= \frac{4\pi A}{5}$	$\frac{4\pi r}{3}$ an der Oberfläche.

Sind also die Massen gleich, so wird $r = A\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$, und die Anziehungen verhalten sich wie $3\sqrt[3]{5} : 5$ oder wie $3 : \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{\frac{27}{25}} : 1 = 1{,}025985$ [**)].

Wenn man a die halbe grosse Axe eines Sphäroids und die halbe kleine $a\cos\varphi$ nennt, so ist

$$\text{Anziehung der Sphäroids im Pole} = \frac{4\pi a \cos\varphi^2}{\sin\varphi^3}(\operatorname{tg}\varphi - \varphi)$$

$$\text{Masse} = \frac{4\pi}{3} a^3 \cos\varphi.$$

Der Radius der Kugel r, welche dieselbe Masse hat, wird mithin $= a\sqrt[3]{\cos\varphi}$ und die Anziehung der Kugel $= \frac{4}{3} a\pi \sqrt[3]{\cos\varphi}$. Also, letztre Anziehung $= 1$

[*) In der Handschrift ist die rechts vom Gleichheitszeichen auftretende Konstante mit A bezeichnet; will man aber mit den folgenden Formeln für die Masse und Anziehung in Übereinstimmung bleiben, so muss man die im Text angebrachte Änderung der Bezeichnung vornehmen.]

[**) Vergl. die Angabe in den *Principia generalia theor. fig. fluid. etc.* 1829, Werke V, S. 31 Fussnote.]

gesetzt, wird die des Sphäroids

$$= \frac{3 \cos \varphi^{\frac{4}{3}}}{\sin \varphi^3} (\operatorname{tg} \varphi - \varphi).$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn

$$\varphi = \frac{9 \operatorname{tg} \varphi + 2 \operatorname{tg} \varphi^3}{9 + 5 \operatorname{tg} \varphi^2}, \quad \text{also für } \varphi = 43^0 59' 2'',$$

und jener Werth selbst

$$= \frac{\text{secans } \varphi^{\frac{4}{3}}}{1 + \frac{2}{3} \operatorname{tg} \varphi^2} = 1{,}02204.$$

Eine ähnliche Untersuchung soll vom Herrn Playfair im VI. Band der Transactions of the Royal Society of Edinburgh angestellt sein (1812) [S. 187 bis 243], siehe die Göttinger Gel. Anz. für 1818, p. 860 [*)].

[2.]

[Aus Handbuch 21, Bf, S. 48.]

Zur Variationsrechnung.

Es soll

$$\int n ds = \int n \sqrt{(1 + pp)}\, dx$$

ein Minimum werden, wo

$$p = \frac{\partial y}{\partial x}, \qquad ds = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}.$$

Die Variation davon ist

$$\int \left\{ \partial x \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right) \sqrt{(1 + pp)}\, \delta y + \frac{np}{\sqrt{(1 + pp)}} \partial \delta y \right\} = \int \left\{ \partial x \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right) \frac{\delta y}{\cos \varphi} + n \sin \varphi\, \partial \delta y \right\}$$

$$= n \sin \varphi \,.\, \delta y + \int \Big(\partial x \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right) \frac{\delta y}{\cos \varphi} - n \cos \varphi \,.\, \partial \varphi \,.\, \delta y - \sin \varphi \,.\, \delta y \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right) \partial x$$

$$- \sin \varphi \,.\, \delta y \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right) \partial y \Big)$$

$$= n \sin \varphi \,.\, \delta y + \int \partial x \,.\, \delta y \left\{ \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right) \frac{1}{\cos \varphi} - n \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sin \varphi \cdot \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right) \frac{\sin \varphi^2}{\cos \varphi} \right\}$$

$$= n \sin \varphi \,.\, \delta y + \int \partial x \,.\, \delta y \left\{ \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right) \cos \varphi - \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right) \sin \varphi - n \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\}$$

[*) Der letzte Absatz scheint ein späterer Zusatz zu sein, da andere Schriftzüge und dunklere Tinte. Der Titel der von J. Playfair am 5. Jan. 1807 vorgelegten Abhandlung lautet: *Of the solids of greatest attraction, or those wich, among all the solids that have certain properties, attract with the greatest force in a given direction.*]

Die Bedingung des Minimum erfordert demnach, dass

$$\left(\frac{\partial n}{\partial y}\right) \cos \varphi - \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right) \sin \varphi = n \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{n \partial \varphi}{\partial s}$$

werde.

[3.]

[Einzelner Zettel].

Aufgabe.

Zwischen zwei gegebenen Punkten soll eine krumme Linie gezogen werden

1) von gegebener Länge $= S$,
2) von gegebenen Tangentenrichtungen im Anfangs- und Endpunkte,
3) von der Beschaffenheit, dass das Integral

$$\int_0^S \frac{ds}{\rho\rho}$$

ein Minimum werde.

ρ bedeutet hier den Krümmungshalbmesser,
ds ein Element der Länge.

Auflösung.

Wir nennen

x, y die Coordinaten eines unbestimmten Punkts der Curve
s die Länge der Curve bis zu diesem Punkte,
φ den Winkel, welchen das Element ds mit der Axe der x macht.

Es ist also

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi},$$

$$\delta \int \frac{ds}{\rho\rho} = \delta \int \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds = 2 \int \frac{d\varphi}{ds} d\delta\varphi = 2 \delta\varphi \frac{d\varphi}{ds} - 2 \int \delta\varphi \frac{dd\varphi}{ds^2} ds.$$

Ferner ist

$$x = \int \cos \varphi \,.\, ds \qquad \delta x = -\int \delta\varphi \sin \varphi \,.\, ds$$
$$y = \int \sin \varphi \,.\, ds \qquad \delta y = \int \delta\varphi \cos \varphi \,.\, ds.$$

Aus den vorgeschriebenen Bedingungen folgt also leicht, dass

$$\frac{dd\varphi}{ds^2}+A\cos\varphi+B\sin\varphi=0$$

sein muss, wo A, B Constanten bedeuten. Durch Integration folgt hieraus auch

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{ds}=-Ax-By-C.$$

Man kann hier die willkürliche Lage der Abscissen so wählen, dass $A=0$, $C=0$ und B positiv. Also

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{ds}=[-]\,By=\frac{\sin\varphi\,.\,d\varphi}{\sin\varphi\,.\,ds}=\frac{\sin\varphi\,.\,d\varphi}{dy}$$

oder

$$\cos\varphi=\tfrac{1}{2}Byy+\cos 2\theta,$$

wo $\cos 2\theta$ eine Constante ist. Diese Gleichung zeigt, dass y die Grenzen

$$\pm\sqrt{\frac{2-2\cos 2\theta}{B}}=\pm\frac{2\sin\theta}{\sqrt{B}}$$

nicht überschreiten darf, so wie φ nicht die Grenzen $\pm 2\theta$. Wir dürfen also eine neue Veränderliche u einführen, so dass

1) $$\sin\tfrac{1}{2}\varphi=\cos u\,.\,\sin\theta.$$

Dadurch wird

2) $$y=\frac{2}{\sqrt{B}}\sin\theta\,.\,\sin u$$

$$ds=[-]\,\frac{d\varphi}{2\sqrt{B}\sin\theta\,.\,\sin u}=\frac{du}{\sqrt{B}\cos\frac{1}{2}\varphi}=\frac{du}{\sqrt{B}\,\sqrt{(1-\sin\theta^2\cos u^2)}}$$

$$dx=\cos\varphi\,.\,ds=\frac{(1-2\cos u^2\sin\theta^2)\,du}{\sqrt{B}\,\sqrt{(1-\sin\theta^2\cos u^2)}}.$$

BEMERKUNG.

Die drei vorstehend abgedruckten Notizen dürften aus der Zeit um 1825 stammen. Den auf PLAYFAIR bezüglichen Zusatz zu [1.] hat GAUSS wahrscheinlich angebracht, als er die *Principia generalia* verfasste; die oben S. 49 angeführte Fussnote Werke V, S. 31 beginnt nämlich mit dem Worte »Constat«, was sich nur auf die Arbeit PLAYFAIRs beziehen kann.

Eine eingehende Analyse der drei vorstehend abgedruckten Notizen gibt O. BOLZA in dem Aufsatze *Gauss und die Variationsrechnung*, Werke X, 2, Abhandlung 5, IV. Teil, S. 84 ff.

SCHLESINGER.

11. Inhalt eines Vielecks von n Seiten*).

[Teil II, S. 362.]

{Anmerkung des Herausgebers.

Es ist nach einem schönen Theorem des Herrn Professor GAUSS, der Inhalt eines Vielecks von n Seiten, wenn die Coordinaten der Winkelpunkte nach der Reihe in einer Richtung gezählt:

$$x,y;\; x',y';\; \ldots;\; x^{(n-1)},y^{(n-1)}$$

sind

$$=\tfrac{1}{2}[x(y'-y^{(n-1)})+x'(y''-y)+x''(y'''-y')+\cdots+x^{(n-1)}(y-y^{(n-2)})],$$

worüber Er selbst vielleicht, bei einer andern Gelegenheit, uns eine vollständigere Abhandlung schenken wird.}

BEMERKUNGEN.

Man vergleiche hierzu die Bemerkung, die GAUSS in dem Werke VIII, S. 398 abgedruckten Briefe an OLBERs vom 30. Oktober 1825 macht, und die mit den Worten beginnt: »Ich hätte auch die Lehre von dem Flächeninhalt der Figuren überhaupt nennen können, die ich gleichfalls seit 30 und mehr Jahren aus einem von mir bisher für neu gehaltenen Gesichtspunkte betrachtet habe. Dies letztere ist aber zum Theil ein Irrthum: in der That habe ich erst vor kurzem eine Abhandlung von MEISTER (einem meiner Meinung nach sehr genialen Kopfe) im ersten Bande der *Novi Commentarii Gotting.* kennen gelernt, worin die Sache fast auf ganz gleiche Art betrachtet und sehr schön entwickelt wird«. Die Abhandlung, von der hier die Rede ist führt den Titel: *Generalia de genesi figurarum planarum et inde pendentibus earum affectionibus*, Novi Commentarii Soc. Reg. Scient. Gotting., t. I. ad a. 1769 et 1770, 1771, S. 144—180, ihr Verfasser, A. L. F. MEISTER (1724—1788) war ord. Professor der Philosophie zu Göttingen. Die Figur 27, VIII der MEISTERschen Abhandlung zeigt eine auffallende Übereinstimmung mit der, die Werke Band X, 1, S. 142 in der Nr. [8] der *Exercitationes Mathematicae* wiedergegeben ist**), überdies sagt MEISTER im Text S. 164, dass die Anzahl der verschiedenen Polygone von N Seiten gleich sei der Anzahl der Darstellungen von N als Summe von zwei teilerfremden Zahlen, und das gibt genau die von GAUSS a. a. O. in der

*) Nachtrag zu den in Band IV der Werke, S. 393 ff. abgedruckten *Zusätzen* zu SCHUMACHERs Übersetzung der *Geometrie der Stellung* von CARNOT, Altona 1810.

**) Sternförmiges Fünfeck, sogen. Drudenfuss.

Responsio auf die Frage: Quot formas diversas polygonum habere potest? gegebene Zahl: $\frac{1}{4}\varphi(N)$. Da die *Exercitationes* aus dem Jahre 1796 stammen, wird dadurch die Zeitangabe von Gauss in dem Briefe an Olbers (seit 30 und mehr Jahren) sehr gut bestätigt, ein neuer Beweis dafür, wie ausserordentlich zuverlässig derartige von Gauss gemachte Zeitangaben sind, indem er solche Angaben nicht nach dem Gedächtnis allein, sondern, wie auch hier, auf Grund von Aufzeichnungen zu machen pflegte. — Dass Gauss Meister als einen »genialen Kopf« bezeichnet, erinnert an die Bemerkung über Johann Bolyai (siehe Werke Band VIII, S. 220), »ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse«.

Die von Gauss gegebene Formel für den Flächeninhalt eines Polygons stimmt mit der von Jacobi (Jacobis Werke, Bd. VII, S. 40) aufgestellten überein. Sie gilt allgemein, auch für nicht konvexe Polygone. Vergl. P. Stäckel, *Gauss als Geometer*, Nr. 24, Werke X 2, Abh. 4, S. 75.

Schlesinger.

12. Geometrische Aufgabe.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher V, Altona 1863, S. 375—376.]

[1.]

Schumacher an Gauss. Altona, 1847. October 17.

{. . . . . . Ich las zufällig gestern Abend in Kästners Nachrichten von mathematischen Büchern, die er *Geschichte der Mathematik* nennt, und fand Th. 3, p. 294 ein Problem von 3 Schützen angeführt, die respective 50, 66 und 104 Fuss von einander, und alle gleichweit von der Vogelstange, nemlich 65 Fuss abstehen[*)]. Aus Neugierde rechnete ich nach und der Halbmesser des einem gradlinichten Dreiecke, dessen Seiten 50, 66 und 104 Fuss sind, umschriebenen Kreises, ist würklich 65 Fuss. Kästner meint, es sei eine nicht ganz leichte Aufgabe, die Seiten eines gradlinichten Dreiecks in ganzen Zahlen so zu bestimmen, dass der Halbmesser des umschriebenen Dreiecks auch in ganzen Zahlen ausgedrückt werde. . . .}

[*) A. G. Kaestner, *Geschichte der Mathematik*, 3. Band, Göttingen 1799; auf S. 293 ff. wird besprochen der *Tractatus geometricus u. s. w.* von Herrn Sybrand Hanss ... in Hochdeutsch transferirt durch Sebastianum Curtium, Amsterdam 1617, aus dem die Schützenaufgabe wiedergegeben ist.]

[2.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, den 21. October 1847.

Die arithmetische Aufgabe würde gewiss Diophant recht gut haben auflösen können, da dazu gar keine tiefern Einsichten, sondern nur eine gewisse Dexterität gehört. Mein Urtheil über Diophants Verdienste können Sie in der Vorrede der *Disquisitiones Arithmeticae* [Werke I, S. 5, 6] (etwas zwischen den Zeilen) lesen. Ich würde mich nicht wundern, wenn die Aufgabe in Diophants Werke schon vorkäme, habe aber weder Zeit — noch Lust — es deshalb durchzugehen. Lieber schicke ich Ihnen eine allgemeine Auflösung. Diese lässt sich in verschiedenen Formen geben, auch in solchen, die, genauer besehen, der nachfolgenden an Eleganz noch vorzuziehen sind, ich setze aber doch lieber diese her, theils wei[l] der Unterschied überhaupt ganz unerheblich ist, theils weil der Vorzug einer etwas andern Form nur durch einige erläuternde Entwicklungen ins Licht gesetzt werden könnte.

Es seien a, b, f, g vier beliebige, ganze positive Zahlen; macht man dann ein Dreieck, dessen Seiten

$$1)\qquad 4abfg(aa+bb)$$

$$2)\qquad 4ab(f+g)(aaf-bbg) \quad \text{oder} \quad 4ab(f+g)(bbg-aaf),$$

je nachdem

$$aaf \gtrless bbg,$$

$$3)\qquad 4ab(aaff+bbgg)$$

sind, so ist der Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises

$$4)\qquad (aa+bb)(aaff+bbgg).$$

Die Zahlen 1), 2), 3), 4) sind offenbar Ganze; haben sie einen gemeinschaftlichen Divisor, so ist erlaubt, damit alle vier zu dividiren.

Es giebt keine Auflösung, die nicht in dieser Vorschrift enthalten wäre. Curtius' Zahlen [50, 66, 104; 65] erhalten Sie, [indem Sie] $a = 1$, $b = 2$, $f = 10$, $g = 1$ setzen, und mit dem gemeinschaftl[ichen] Divisor 8 dividiren. Eine andere Auflösung für denselben Halbmesser 65 geht hervor, indem Sie $a = 2$, $b = 1$, $f = 1$, $g = 3$ setzen, woraus die Dreiecksseiten 120, 32[*)], 104.

[*) Gauss hat 112, vergl. die unten folgende *Bemerkung*.]

Es ist wohl überflüssig zu bemerken, dass man immer a, b, f, g so wählt, dass a keinen Divisor mit b gemein hat, und f keinen mit g, weil sonst das Quadrat eines solchen gemeinschaftl[ichen] Divisors schon von selbst als gemeinschaftlicher Divisor aller 4 Zahlen auftreten würde. Übrigens ist die Aufgabe etwas ganz elementarisches.

Auch kann man noch hinzusetzen, dass a, b, f, g nicht so gewählt werden dürfen, dass $aaf = bbg$ wird. Die Formeln geben dann zwei einander gleiche Seiten und die dritte $= 0$. Mit andern Worten ein Dreieck, von dessen drei Ecken zwei zusammenfallen. Um ein solches lassen sich unendlich viele Kreise beschreiben, oder mit andern Worten, der Halbmesser ist unbestimmt. Aus allen diesen unendlich vielen giebt die Formel einen bestimmten. Es ist derjenige, zu welchem eine unendliche Annäherung Statt findet, wenn man eine der vier Grössen a, b, f, g als veränderlich, und (wenn z. B. g als solche gewählt ist) dem Werte $\frac{aaf}{bb}$ sich unendlich nähernd annimmt.

BEMERKUNG.

Auf dem Briefe SCHUMACHERS vom 17. Okt. 1847 hat GAUSS nicht nur die in dem oben abgedruckten Briefe angegebenen Formeln 1) bis 4) mit den zugehörigen Werten, die nach Unterdrückung des gemeinsamen Divisors 8 die CURTIUSschen Zahlen geben, aufgezeichnet, sondern auch noch ein zweites Formelsystem mit entsprechenden, die CURTIUSschen Zahlen liefernden Werten, nämlich:

$$[\mathrm{II}] \quad \left\{ \begin{array}{ll} 4fg(aa+bb) & \\ 4(bf+ag)(af-bg) & a=1,\ b=2 \\ 4ab(ff+gg) & f=5,\ g=1 \\ (aa+bb)(ff+gg) & \end{array} \right. \quad \text{Divisor } 2.$$

Auch die in dem Briefe erwähnte zweite Lösung, die zu dem Halbmesser 65 gehört, hat GAUSS daselbst notiert, mit den unrichtigen Seitenzahlen 104, 112 [statt 32], 120. Auf dieses Versehen von GAUSS hat schon W. SCHRADER im 45. Teile von GRUNERTS Archiv der Math. und Phys. (1866), S. 226 aufmerksam gemacht. Ebenda gibt SCHRADER (S. 224 ff.) eine Ableitung der GAUSSschen Formeln 1) bis 4) und fügt von sich aus noch andere Lösungssysteme hinzu, von denen das eine (S. 228) mit dem oben aus der Handschrift wiedergegebenen GAUSSschen Formelsystem [II] übereinstimmt. Ebendieses System findet sich auch a. a. O., S. 222 in einer Note von H. GRETSCHEL. GRUNERT hatte nämlich im 44. Teil seines Archivs (1865), S. 504 ff., die kurz vorher im Briefwechsel GAUSS-SCHUMACHER erschienenen, oben wiedergegebenen Briefe abgedruckt und daran die Aufforderung geknüpft, die GAUSSschen Formeln zu verifizieren. Der Teil 45 des Archivs enthält auf den Seiten 220—231 die Lösungen von fünf verschiedenen Verfassern, darunter die beiden oben genannten. Wegen weiterer Literatur zu der Aufgabe vergl. man L. E. DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, vol. II, 1920, S. 191, 195, 200, 211.

SCHLESINGER.

13. Zur Metaphysik der Mathematik.

[Aus Varia (M), Kapsel 46, b.]

1. Gegenstand der Mathematik sind alle extensive Grössen (solche, bei denen sich Theile denken lassen); intensive Grössen (alle nicht extensive Grössen) nur insofern, als sie von extensiven abhangen. Zu der erstern Art von Grössen gehören: Der Raum oder die geometrischen Grössen, welche Linien, Flächen, Körper und Winkel unter sich begreifen, die Zeit, die Zahl: zu der letztern: Geschwindigkeit, Dichtigkeit, Härte, Höhe und Tiefe der Töne, Stärke der Töne und des Lichts, Wahrscheinlichkeit u. s. w.

2. Eine Grösse für sich kann noch kein Gegenstand einer wissenschaftlichen Untersuchung werden: die Mathematik betrachtet die Grössen nur in Beziehung auf einander. Die Beziehung der Grössen auf einander, die sie haben, nur in sofern sie Grössen sind, nenne man arithmetische Beziehung: Bei geometrischen Grössen findet auch eine Relation in Ansehung der Lage Statt und diese nenne man geometrische Beziehung. Es ist klar, dass geometrische Grössen auch arithmetische Beziehungen zu einander haben können.

3. Die Mathematik lehrt nun eigentlich allgemeine Wahrheiten, welche die Relationen der Grössen betreffen, und der Zweck davon ist, Grössen, die zu bekannten Grössen oder zu denen bekannte Grössen bekannte Beziehungen haben, darzustellen, d. h. eine Vorstellung davon möglich zu machen. Nun aber können wir von einer Grösse auf eine zwiefache Art eine Vorstellung haben, entweder durch unmittelbare Anschauung (eine unmittelbare Vorstellung), oder durch Vergleichung mit andern, durch unmittelbare Anschauung gegebnen Grössen (mittelbare Vorstellung). Die Pflicht des Mathematikers ist demnach, die gesuchte Grösse entweder wirklich darzustellen (geometrische Darstellung oder Construction), oder die Art und Weise

anzugeben, wie man von der Vorstellung einer unmittelbar gegebnen Grösse zu der Vorstellung der gesuchten Grösse gelange (arithmetische Darstellung). Dieses letztere geschieht nemlich vermittelst der Zahlen, welche anzeigen, wie viele male man sich die unmittelbar gegebne Grösse wiederholt vorstellen müsse*), um von der gesuchten Grösse eine Vorstellung zu bekommen. Jene Grösse nennt man hiebei die Einheit und das Verfahren selbst messen.

4. Diese verschiedenen Beziehungen der Grössen und die verschiedenen Darstellungsarten der Grössen sind die Grundlage der beiden Hauptdisciplinen der Mathematik. Die Arithmetik betrachtet Grössen in arithmetischen Beziehungen und stellt sie arithmetisch dar; die Geometrie betrachtet Grössen in geometrischen Beziehungen und stellt sie geometrisch dar. Grössen, die arithmetische Beziehungen haben, geometrisch darzustellen, was bei den Alten so gewöhnlich war, ist es gegenwärtig nicht mehr, sonst würde man dieses als einen Theil der Geometrie anzusehen haben. Im Gegentheil wendet man die arithmetische Darstellungsart äusserst häufig auf Grössen in geometrischen Beziehungen an, z[um] E[xempel] in der Trigonometrie, auch in der Lehre von den krummen Linien, welche man als geometrische Disciplinen betrachtet. Dass die Neuern der arithmetischen Darstellungsart so sehr den Vorzug vor der geometrischen geben, geschieht nicht ohne Grund, besonders da unsere Methode zu zählen (nach der Dekadik) so unendlich leichter ist, als die der Alten.

5. Da unter den arithmetischen Beziehungen der Grössen auf einander eine grosse Verschiedenheit Statt finden kann, so sind auch die Theile der arithmetischen Wissenschaften von sehr verschiedener Natur. Am wichtigsten ist der Umstand, ob bei dieser Beziehung der Begriff des Unendlichen muss vorausgesetzt werden oder nicht; der erste Fall gehört in die Rechnung des Unendlichen oder die höhere Mathematik, der letztere in die gemeine oder niedere Mathematik. Die fernern Unterabteilungen, die sich aus den vorigen Begriffen ableiten lassen, übergehe ich.

6. In der Arithmetik bestimmt man demnach alle Grössen dadurch, dass man angibt, wie viele male man eine bekannte Grösse (die Einheit) oder einen aliquoten Theil derselben wiederhohlen oder zusammensetzen müsse, um eine

*) Zuweilen auch, wie viele male man einen Theil derselben als wiederholt sich vorstellen müsse, welches dann den Begriff der gebrochenen Zahl gibt.

ihr gleiche Grösse zu bekommen, d. i. man drückt sie durch eine Zahl aus, und hiedurch wird der eigentliche Gegenstand der Arithmetik die Zahl. Damit es indess möglich wird, hiebei von der Bedeutung der Einheit zu abstrahiren, muss es Mittel geben, Grössen, die durch verschiedene Einheiten bestimmt sind, auf Eine zu reduciren: diese Aufgabe wird in der Folge aufgelöset werden.

7. Da der eigentliche Gegenstand der Mathematik die Relationen der Grössen sind, so haben wir uns mit den wichtigsten dieser Beziehungen und besonders mit denen bekannt zu machen, die ihrer Einfachheit wegen als die Elemente der übrigen angesehen werden, wiewohl eigentlich selbst hier die erstern (Addition und Subtraktion) bei den Übrigen (Multiplic[ation] und Division) zum Grunde liegen*).

8. Die einfachste Beziehung unter Grössen ist unstreitig die unter dem Ganzen und seinen Theilen, welche schon eine unmittelbare Folge des Begriffs der extensiven Grösse ist. Der Hauptlehrsatz bei dieser Beziehung, den man als Grundsatz ansehen kann, ist, dass »die Theile in irgend einer Ordnung vereinigt, wenn nur keiner übergangen wird, dem Ganzen gleich sind«. Aus den Theilen das Ganze finden, lehrt die erste Rechnungsart (Species) die Addition, wie man aus dem Ganzen und einem Theile den andern findet, wird in der zweiten R. A., der Subtraction, gezeigt. In Beziehung auf die Addition heissen die Theile die summirenden Grössen, das Ganze die Summe oder das Aggregat; in Beziehung auf die Subtraction heisst das Ganze der Maior oder Minuendus, der bekannte Theil der Minor, der gesuchte die Differenz oder der Rest. Es ist klar, dass Minor und Differenz sich mit einander verwechseln lassen müssen.

9. Nächst der Beziehung zwischen dem Ganzen und seinen Theilen, hat man die Beziehung des Einfachen und Vielfachen zu merken, welche gleichfalls zwei Rechnungsarten gibt. Bei dieser Beziehung haben wir auf drei Grössen zu sehen, das Einfache, das Vielfache und die Zahl, welche angibt,

*) Obgleich übrigens die folgenden Wahrheiten nicht weniger von Brüchen als von ganzen Zahlen gelten, so werden sie doch hier nur von ganzen Zahlen bewiesen werden können, sowie auch die Erklärungen, um auch auf Brüche zu passen, in der Folge einer kleinen Abänderung zum Theil bedürfen werden.

was für ein Vielfaches es sei. Aus der erstern und letztern die zweite zu finden, lehrt die Multiplication, aus den ersten beiden die letzte, die Division: in Beziehung auf die Multiplication heisst das Einfache der **Multiplikandus**, die Zahl, welche die Art des Vielfachen bestimmt, der **Multiplikator**, beide die **Factoren**, das Vielfache das **Produkt**. In Beziehung auf die Division heisst das Einfache der Divisor, die Zahl, die die Art des Vielfachen bestimmt, der **Quotient** und das Vielfache der Dividendus.

10. Die vornehmsten Wahrheiten, welche die Multiplikation betreffen, sind folgende:

1) Der Multiplikator mit dem Multiplikandus multiplicirt, gibt eben das Produkt, was die Multiplikation des letztern mit dem erstern gibt, oder die Factoren lassen sich verwechseln; $a.b = b.a$.

2) Wenn der Multiplikator ein Produkt ist, so kann man anstatt den M-andus mit dem M-tor zu m-ciren, den M-andus mit dem einen Faktor des M-ators und das daraus entstandene Produkt mit dem zweiten Faktor multipliciren; $(a.b).c = a.(b.c)$.

3) Ein Product aus mehreren Faktoren bleibt unverändert, in welcher Ordnung man auch diese Faktoren nimmt;

$$a.b.c.d = a.d.c.b = c.b.a.d \quad \&cc.$$

4) Es ist gleichgültig, ob man den M-andus auf einmal oder seine Theile einzeln mit dem M-tor m-cirt und die daraus entstehenden Produkte addirt: $(a+b).c = ac+bc$.

5) Es ist gleichgültig, ob man mit dem M-tor auf einmal oder mit seinen Theilen einzeln den M-andus m-cirt, und die Produkte vereinigt;

$$a(b+c) = ab+ac.$$

11. Die Division lehrt aus dem Vielfachen und Einfachen die Grösse finden, welche die Art des Vielfachen bestimmt. Hier sind also drei Grössen völlig in derselben Beziehung auf einander, wie bei der Multiplikation, und was dort von ihnen bewiesen wird, muss auch hier gelten, nur dass man die bei dieser Rechnungsart üblichen Namen hier statt der bei der Multiplikation gewöhnlichen gebraucht. Wenn dort bewiesen wird, dass Multipl-tor und M-andus sich verwechseln lassen, (d. i. dass das Einfache sich als eine Bestimmungsgrösse des Vielfachen und die Best[immungs]grösse des Vielfachen

sich als das Einfache ansehen lasse) so heisst das hier soviel, als Quotient und Divisor lassen sich verwechseln; und ist folglich der Quotient und Dividendus gegeben, so findet man den Divisor durch völlig dieselbe Operation, als wenn der Divisor und der Dividendus gegeben wäre. Daher sieht man, dass, ungeachtet drei Combinationen möglich sind, dennoch nur zwei Rechnungsarten entstehen.

BEMERKUNG.

SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN bemerkt in seiner Schrift *Gauss zum Gedächtniss* (1856, S. 80, vergl. auch Werke VIII, Seite 267), GAUSS habe sich in früherer Zeit, als er noch daran denken musste, irgendwo als Lehrer der Mathematik aufzutreten, ein Papier ausgearbeitet, auf dem er die Anfänge der Mathematik philosophisch entwickelt habe. Dieses Papier enthält (vergl. auch die Bemerkung von P. STÄCKEL, Werke VIII, S. 268) die vorstehend abgedruckte Notiz, die man also auf eine recht frühe Zeit, etwa die ersten Jahre des XIX. Jahrhunderts, zu datieren hätte *). In der Werke X 1, S. 396 abgedruckten Aufzeichnung, die aus den Jahren 1825—26 stammt, finden wir in gewissem Sinne eine Fortführung der Gedanken, die in der vorstehenden älteren Notiz entwickelt werden, und dies zeigt die Zulässigkeit der gewählten Überschrift. — Metaphysik bedeutet nämlich bei GAUSS und überhaupt zu GAUSS' Zeit nicht etwa die Lehre vom Übersinnlichen, sondern das innere Wesen, den Kern eines Gegenstandes, in dem Sinne wie es GOETHE meint, wenn er Faust sagen lässt »dass ich erkenne, was die Welt im Innersten zusammenhält«. So verstehen die Mathematiker des XVIII. Jahrhunderts unter der Metaphysik einer Beweisführung den Grundgedanken, aus dem der Beweis geschöpft ist, und ähnlich spricht auch GAUSS z. B. in dem Briefe an BESSEL vom 28. Febr. 1839 (*Briefwechsel* Nr. 176, S. 523) von der in der *Theoria Motus* angewandten Metaphysik für die Methode der kleinsten Quadrate, in dem oben (Nr. 1) abgedruckten Briefe an HANSEN von der Metaphysik der Raumlehre und der der negativen und komplexen Grössen, in dem Briefe an DROBISCH (Werke X 1, S. 101) von der Metaphysik der Mathematik, in dem an GRASSMANN (ebenda S. 436), wie auch in der *Anzeige* (Werke II, S. 175), von der Metaphysik der komplexen bezw. imaginären Grössen usw. Man wird also dem, was GAUSS im Auge hat, wenn er von der »Metaphysik« der Mathematik oder einzelner mathematischer Disziplinen handelt, am nächsten kommen, wenn man ihm das moderne Wort »Grundlagenforschung«, wenn auch nicht immer im Sinne von Axiomatik, an die Seite stellt.

SCHLESINGER.

*) Auf S. 98 der angeführten Schrift gibt SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN eine mündliche Äusserung von GAUSS wieder, in der auf den ersten Satz unserer Notiz (»Gegenstand der Mathematik sind alle extensive Grössen usw.«, siehe oben S. 50) ausdrücklich bezug genommen wird.

14. Über Philosophen. Schwerpunkt eines Körpers.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER IV, Altona 1862, S. 332 ff.]

[1.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 29. Oktober 1844.

{Ich sah neulich in WOLFS *Anfangsgründe der Mathem. Wiss.* [*)] . . . .; und fand zu meinem Erstaunen eine Nachlässigkeit und Verwirrung der Begriffe in manchen Definitionen, die man einem Philosophen ex professo schwerlich zutrauen sollte. Z. B. Anfangsgründe der Mechanik, 17te Erklärung:

> 34. Der Mittelpunct der Schwere (centrum gravitatis) ist derjenige Punct, dadurch der Körper in zwei gleichschwere[**)] Theile getheilt wird.

Ein Körper kann also durch einen Punct in zwei Theile getheilt werden. Es ist kein Druckfehler, denn unmittelbar folgt:

> 35. Der M[ittelpunct] der Grösse (centrum magnitudinis) ist derjenige, dadurch der Körper in zwei gleichgrosse Theile getheilt wird.}

. . . .

[2.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 1. November 1844.

. . . . Dass Sie einem Philosophen ex professo keine Verworrenheiten in Begriffen und Definitionen zutrauen, wundert mich fast. Nirgends mehr sind solche ja zu Hause, als bei Philosophen, die keine Mathematiker sind, und WOLF war kein Mathematiker, wenn er auch wohlfeile Compendien gemacht hat. Sehen Sie sich doch nur bei den heutigen Philosophen um, bei

[*) CHRISTIAN FREIHERR V. WOLF, *Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften*, 4 Bände, Halle 1710 und zahlreiche spätere Auflagen.]

[**) »Gleichwichtige« hat WOLF.]

SCHELLING, HEGEL, NEES VON ESENBECK und Consorten, stehen Ihnen nicht die Haare bei ihren Definitionen zu Berge? Lesen Sie in der Geschichte der alten Philosophie, was die damaligen Tagesmänner PLATO und andere (ARISTOTELES will ich ausnehmen) für Erklärungen gegeben haben. Aber selbst mit KANT steht es oft nicht viel besser; seine Distinction zwischen analytischen und synthetischen Sätzen ist meines Erachtens eine solche, die entweder nur auf eine Trivialität hinausläuft oder falsch ist. Was übrigens WOLF hat sagen wollen, scheint mir zu sein: »In jedem Körper gibt es, wie sich nachweisen lässt, einen und nur Einen Punkt, der die Eigenschaft hat, dass jede durch ihn gelegte Ebene den Körper in zwei Stücke (oder sit venia verbo Hälften) scheidet, die« — nicht wie WOLF sagt gleich schwer sind, sondern — »in Beziehung auf diese Ebene gleiche Momente haben: diesen Punkt nennt man den Schwerpunkt«. — Einen Punkt, der auf ähnliche Art verstanden, einen Körper in zwei gleich grosse Hälften zertheilte, gibt es im Allgemeinen nicht, sondern nur in speciellen Fällen, man müsste denn anstatt gleich grosser Hälften, gleichmomentige Räume verstehen, wo dann [der] Mittelpunkt der Grösse, der Schwerpunkt eines den Raum homogen erfüllenden Körpers wäre. . . . . .

BEMERKUNG.

Äusserungen von GAUSS über Philosophen finden sich nur spärlich. Abgesehen von einer Stelle in dem Briefe an DROBISCH vom 14. Aug. 1834 (Werke X 1, S. 106) beziehen sich die meisten auf KANTS Lehre vom Raum (so *Anzeige*, 1816, Werke VIII, S. 172; *Anzeige*, 1831, Werke II, S. 177 Fussnote; Brief an W. BOLYAI vom 6. März 1832, Werke VIII, S. 224; Brief an SCHUMACHER vom 8. Febr. 1846, Werke VIII, S. 247), während die vorstehend wiedergegebene Briefstelle zu KANTS Lehre von den analytischen und synthetischen Urteilen Stellung nimmt. Nach einer mündlich überlieferten Äusserung des Jenenser Botanikers SCHLEIDEN (siehe A. GALLE, *Das Weltall*, 24, 1925, S. 230) soll GAUSS sich eingehend mit Schriften von KANT beschäftigt haben.

SCHLESINGER.

15. Mittelpunktsgleichung nach Ulughbe in Zeittertien.

$$[=]\ 4 \cdot \frac{36525}{36625} \text{ Arc sin } e \text{ sin Anom[alie]}$$

$e = 0{,}0237037$ $\log e\,[=]\ 8{,}5276776$ Aphelium $[=]\ 93^0 0' 18''$

[A] [1]	[Z nach ULUGH BEIGH] [2]	[μ nach GAUSS] [3]	[$A - \alpha$ nach GAUSS] [4]	[Z nach GAUSS] [5]	ΔZ G. minus U. B. [6]
0°	27414'''	+ 27698,'''78[*)]	*0*	27415,'''22	+ 1,'''22
10	39286	27530,34	*+ 11703,44*	39287,10	+ 1,10
20	50740	26525,18	*22151,39*	50740,21	+ 0,21
30	60575	24713,87	*30174,66*	60574,79	— 0,21
40	67752	22151,59	*34789,38*	67751,79	— 0,21
50	71514	18916,36	*35315,59*	71513,23	— 0,77
60	71516	15106,60	*31508,37*	71515,77	— 0,23
70	67947	10838,15	*23669,95*	67945,80	— 1,20
80	61570	+ 6240,68	*+ 12695,68*	61569,00	— 1,00
90	53661	+ 1453,78	*0*	53660,22	— 0,78
100	45796	— 3377,24	*— 12695,68*	45795,56	— 0,44
110	39550	8105,76	*23669,95*	39549,81	— 0,19
120	36194	12588,23	*31508,37*	36193,86	— 0,14
130	36487	16688,52	*35315,59*	36486,93	— 0,07
140	40606	20282,02	*34789,38*	40606,64	+ 0,64
150	48198	23259,48	*30174,66*	48198,81	+ 0,81
160	58493	25530,24	*22151,39*	58492,85	— 0,15
170	70435	— 27025,17	*— 11703,44*	70435,73	+ 0,73
180	82811	— 27698,78[*)]	*0*	82812,78	+ 1,78
190	94347	27530,34	*+ 11703,44*	94347,78	+ 0,78
200	103790	26525,18	*22151,39*	103790,57	+ 0,57
210	110001	24713,87	*30174,66*	110002,53	+ 1,53
220	112054	22151,59	*34789,38*	112054,97	+ 0,97
230	109345	18916,36	*35315,59*	109345,95	+ 0,95
240	101728	15106,60	*31508,37*	101728,97	+ 0,97
250	89622	10838,15	*23669,95*	89622,00[**)]	0
260	74054	— 6240,68	*+ 12695,68*	74050,36	— 3,64
270	56568	— 1453,78	*0*	56567,78	— 0,22
280	39042	+ 3377,24	*— 12695,68*	39041,08	— 0,92
290	23339	8105,76	*23669,95*	23338,29	— 0,71
300	11018	12588,23	*31508,37*	11017,40	— 0,60
310	3111	16688,52	*35315,59*	3109,89	— 1,11
320	43	20282,02	*34789,38*	42,60	— 0,40
330	1680	23259,48	*30174,66*	1679,86	— 0,14
340	7432	25530,24	*22151,39*	7432,37	+ 0,37
350	16385	+ 27025,17	*— 11703,44*	16385,39	+ 0,39

[Zu Z hinzugefügte Constante nach GAUSS = 55114'''.]

[*) Die Zahl enthält einen kleinen Rechenfehler; sie sollte sein: 27698,72.]
[**) » » » » » » » » » : 89622,10.]

Die berechneten Werthe enthalten noch Fehler

$$+0{,}'''278 \sin 2A + 0{,}'''108 - 0{,}'''217 \sin A - 0{,}'''443 \cos A.$$

Nähme man noch einen Fehler an von $+0{,}'''732 \cos 2A$, so würde die Übereinstimmung noch sehr vergrössert: allein ein solcher Fehler ist unzulässig.

Corrigirte Constante $55113{,}'''722$ [*)].
Correction von e $-0{,}00000055148$
$e = 0{,}0337031485$ $\log e = 8{,}5276705$
Correct[ion] von Aphelium $-1{,}''4430$
Also Aphelium $93^0 0' 16{,}''557$
Correction der Schiefe $-0{,}''16054$ [*)]
Also Schiefe $23^0 30' 16{,}''83946$.

BEMERKUNGEN.

In den »Allgemeinen Geographischen Ephemeriden«, herausgegeben von v. ZACH, dritter Band, Februar 1799, Seite 179, sind aus einem Briefe von BURCKHARDT an ZACH einige Mitteilungen über die astronomischen Tafeln ULUGH BEIGHs, des Fürsten von Samarkand und bekannten Astronomen aus dem XV. Jahrhundert, abgedruckt. Dabei findet sich auch ein Abdruck von »*Ulugh Beighs Zeitgleichungstafel im Auszuge, zur Verwandlung der mittleren Zeit in scheinbare*«. Dieser Tafel liegen nach BURCKHARDT die Werte:

Schiefe der Ekliptik $= 23^0 30' 17''$
Länge des Apheliums $= 92^0 36' 37''$
Grösste Mittelpunktsgleichung $= 1^0 55' 53{,}''2$

zu Grunde, und die Zeitgleichung ist um die Konstante $15' 17''$ vergrössert worden, um durchweg positive Werte zu erhalten.

GAUSS hat 1799 diese Zeitgleichungstafel einer Nachrechnung unterworfen und schärfere Werte der dort benutzten Konstanten abzuleiten versucht, wobei er die Methode der kleinsten Quadrate bereits in vollem Umfange angewandt hat. Er schrieb darüber an ZACH in einem Briefe, der nicht mehr erhalten ist, und spricht sich später öfter darüber aus, besonders in einem Briefe an SCHUMACHER vom 3. Dezember 1831; die auf diese Rechnung und auf die »Entdeckung« der Methode der kleinsten Quadrate bezüglichen Briefstellen sind in den Werken VIII, S. 136—141 und X 1, S. 373 und 380 abgedruckt.

Die Papiere mit den Rechnungen, die den Beweis für diese frühe, im Frühjahr 1799 gemachte Anwendung der Methode erbringen sollten, waren nach dem Briefe an OLBERS vom 24. Januar 1812 (Werke VIII, S 140) »verloren gegangen«. Indessen scheint es (vergl. die Bemerkung, Werke X 1, S. 445, Fussnote *)), dass GAUSS wenigstens einen Teil jener Papiere im Jahre 1850 wiedergefunden hat, zusammen mit Aufzeichnungen über den Grad der Konvergenz der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung. Über

[*) Über vermutlich unterlaufene Rechenfehler siehe S. 67 unten.]

diese Aufzeichnungen berichtet GAUSS nämlich in Briefen an SCHUMACHER vom 6. Dezember 1849 und 5. Februar 1850 (Werke X 1, S. 432, 433) und zwar datiert er sie in dem ersten Briefe aus dem Gedächtnis auf eines der ersten Jahre des XIX. Jahrhunderts, während er in dem Briefe vom 5. Febr. 1850 sagt, er habe jene Aufzeichnungen aufgefunden und das Blatt sei »wohl 50 ± Jahre alt«. Dass er die Datierung jetzt bis in die letzten Jahre des XVIII. Jahrhunderts zurückverlegt, könnte seinen Grund darin haben, dass bei diesen auf die Entwicklung der Mittelpunktsgleichung bezüglichen Blättern (abgedruckt Werke X 1, S. 420—428) auch der mit Sicherheit aus dem Jahr 1799 stammende, vorstehend abgedruckte Zettel lag, der zu den 1812 vermissten Papieren gehört. In der Tat fanden sich auch im Nachlass beide Aufzeichnungen in einem gemeinsamen Umschlag. Die vorstehend abgedruckte, auf ULUGH BEIGH bezügliche, trägt jetzt die Bezeichnung Astr. d. 7; sie enthält einen Teil der Rechnung und deren wesentliches Ergebnis, woraus sich der von GAUSS eingeschlagene Weg lückenlos feststellen lässt.

Die Zeitgleichung setzt sich bekanntlich aus der Mittelpunktsgleichung und der Reduktion auf die Ekliptik zusammen. Der erste dieser beiden Teile ergibt sich in der PTOLEMÄischen Theorie, gleichviel ob man den exzentrischen Kreis oder den Epizykel anwendet, aus der Formel

$$\text{1)} \qquad \sin\mu = e\sin v = e\sin(A-\pi),$$

wo μ die Mittelpunktsgleichung, v die wahre Anomalie, A die wahre Länge, π die Länge des Perihels und e die Exzentrizität bedeutet; letztere ist doppelt so gross, wie in der KEPLERschen Bewegung. Zur Verwandlung der in Bogensekunden gefundenen Mittelpunktsgleichung in Sonnenzeittertien ist der Faktor $4\cdot\frac{36525}{36625}$ hinzuzufügen. Die GAUSSsche Rechnung nach dieser Formel ist in aller Ausführlichkeit auf dem Zettel vorhanden. Als Argument dient die wahre Länge A und nicht die mittlere, wie man fälschlich aus der der Tafel von BURCKHARDT gegebenen Überschrift schliessen könnte.

Die GAUSSsche Berechnung der Reduktion auf die Ekliptik ist nicht mehr vorhanden; die Werte weichen zum Teil um einige Einheiten der letzten Dezimale von den strengen Werten ab. Vielleicht hat sich GAUSS einer der vorhandenen Näherungsformeln bedient.

Die Zeitgleichung nebst der hinzuzufügenden Konstante ist dann *)

$$\text{2)} \qquad Z = (A-\alpha) - \mu + c$$

Beim Abdruck des Zettels ist die ausführliche Berechnung der Mittelpunktsgleichung unterdrückt worden; dagegen sind in der Tabelle zu den Angaben des Originals zwei Spalten hinzugefügt. Das Original enthält ausser dem Argument nur die Spalten 2, 5 und 6. Die Zahlen der Spalte 3 sind der Originalrechnung der Mittelpunktsgleichung entnommen, die Spalte 4 der Übersicht halber aus den GAUSSschen Werten abgeleitet und hinzugefügt worden.

Die Angaben ULUGH BEIGHs sind in mittleren Sonnenzeittertien ausgedrückt; GAUSS legt seiner Rechnung die zum Teil abgerundeten, durch die Ausgleichung zu verbessernden Näherungswerte

Exzentrizität	= 0,0337037
Aphelium	= 93°0′18″
Schiefe	= 23°30′17″
Hinzuzufügende Konstante	= 55114 Zeittertien

zugrunde und rechnet bis auf Hundertstel Tertien. Er bildete (Spalte 6) die Differenz, GAUSS minus ULUGH BEIGH $= \Delta Z$. Diese Differenz zeigte einen deutlichen Gang und musste sich daher zu einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate eignen. Hierbei muss auffallen, dass dieser Gang nicht stärker durch die Abrundung von ULUGH BEIGHs Zahlen auf volle Tertien verwischt wird. Bei seiner Rechnung

*) α = wahre Rektaszension, c = Konstante, $A-\alpha$ = Reduktion auf die Ekliptik.

hat GAUSS Gelegenheit genommen, die Werte der Spalte 2 für $A = 0°, 100°, 160°$ zu verbessern, da der BURCKHARDTsche Abdruck hier offenbar Druckfehler enthält. Dort lauten die Angaben $7'16''54''' = 26214'''$, $12'53''16''' = 46396'''$, $16'14''27''' = 58467'''$.

Für die Ausgleichung der Grössen e, π, ε und c gelten nach den Gleichungen 1) und 2) die Bedingungsgleichungen

$$\Delta Z = -\sin A\,.\,\Delta(e\cos\pi) + \cos A\,.\,\Delta(e\sin\pi) + \sin 2A\,.\,\Delta(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2) + \Delta c,$$

wenn man μ, $A-\alpha$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^2$ als kleine Grössen ansieht *).

Infolge des Fortschreitens des Arguments A in gleichen Intervallen werden die Normalgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten besonders einfach, nämlich

$$\begin{aligned}
18\,\Delta(e\cos\pi) &= -0{,}'''041\\
18\,\Delta(e\sin\pi) &= -7{,}\ 276\\
18\,\Delta(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2) &= +3{,}\ 002\\
36\,\Delta c &= -0{,}\ 11
\end{aligned}$$

womit man, abweichend von GAUSS, erhält:

$$\Delta Z = +0{,}'''002\sin A - 0{,}'''404\cos A + 0{,}'''167\sin 2A - 0{,}'''003.$$

GAUSS hat aber offenbar den Wert für $A = 260°$ fortgelassen, weil er so stark abweicht, dass er, ausser den drei oben erwähnten, ebenfalls als fehlerhaft anzunehmen ist; hiermit ändern sich die Normalgleichungen wie folgt:

$$\begin{array}{rrrrrl}
+17{,}035\,\Delta(e\cos\pi) & -\ 0{,}171\,\Delta(e\sin\pi) & +\ 0{,}337\,\Delta(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2) & +\ 0{,}985\,\Delta c & +3{,}'''544 & = 0\\
-\ 0{,}171 \quad » & +17{,}975 \quad » & +\ 0{,}060 \quad » & +\ 0{,}174 \ » & +7{,}\ 910 & = 0\\
+\ 0{,}337 \quad » & +\ 0{,}060 \quad » & +17{,}888 \quad » & -\ 0{,}342 \ » & -4{,}\ 247 & = 0\\
+\ 0{,}985 \quad » & +\ 0{,}174 \quad » & -\ 0{,}342 \quad » & +35{,}000 \ » & -3{,}\ 530 & = 0.
\end{array}$$

Ihre Lösung führt zu den Werten

$$\text{3)} \qquad \begin{array}{ll}
\Delta(e\cos\pi) = +0{,}'''224 & \Delta(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2) = +0{,}'''245\\
\Delta(e\sin\pi) = -0{,}\ 444 & \Delta c = +0{,}\ 112.
\end{array}$$

Diese Zahlen stimmen so nahe mit den GAUSSschen überein, dass kein Zweifel über den von ihm eingeschlagenen Weg bestehen kann; vielleicht sind auch bei dieser Rechnung, die nicht mehr vorhanden ist, kleinere Rechenfehler unterlaufen.

Aus GAUSS' Werten für die Fehler

$$\begin{array}{ll}
\Delta(e\cos\pi) = +0{,}'''217 & \Delta(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varepsilon^2) = +0{,}'''278\\
\Delta(e\sin\pi) = -0{,}\ 443 & \Delta c = +0{,}\ 108
\end{array}$$

erhält man die Korrektionen

der Exzentrizität	= — 0,00000055148
der Länge des Apheliums	= — 1,″4391
der Schiefe der Ekliptik	= — 0,″32100
der Konstanten	= — 0,108 Zeittertien.

Der erste dieser Werte stimmt genau mit dem GAUSSschen überein, der zweite sehr nahe. Bei der Korrektion der Schiefe hat GAUSS offenbar versehentlich **) den halben Wert genommen, da ja in der Tat die Grösse $\frac{1}{2}\varepsilon$ in den Formeln vorkommt. Ebenso **) dürfte GAUSS bei der Berechnung der »Corrigirten Constanten« den Faktor des Arguments $\sin 2A$, nämlich 0,278 anstatt 0,108 genommen haben.

*) ε = Schiefe der Ekliptik. — Mit Vernachlässigung von $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^4$ ist $A-\alpha = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon^2\,.\sin 2A$.

**) Siehe S. 65.

Die GAUSSsche Bemerkung über den Fehler mit dem Argument $\cos 2A$ erklärt sich, wenn man bei der Ausgleichung noch das Glied mit diesem Argument berücksichtigt. Man erhält dann, wieder mit Ausschluss des Wertes für $A = 260°$:

$$-0{,}'''183 \sin A - 0{,}'''437 \cos A + 0{,}'''231 \sin 2A + 0{,}'''722 \cos 2A + 0{,}'''091.$$

Das Glied in $\cos 2A$ ist hier bei weitem das grösste und doch ist ein solches durch die Form der Funktion nicht gerechtfertigt. Es ist zu erwarten, dass die Übereinstimmung, wie GAUSS sagt, bei Mitnahme dieses Gliedes »noch sehr vergrössert« wird. Man findet nach der Ausgleichung, mit Unterdrückung des Wertes für $A = 260°$, die Summe der Fehlerquadrate

mit Rücksicht auf das Glied in $\cos 2A$ zu 6,47
ohne diese Rücksicht » 15,34.

GAUSS sagt in dem Briefe an SCHUMACHER vom 3. Dezember 1831 (Werke VIII, S. 138), dass seine Rechnung »zu manchen ganz kuriosen Resultaten geführt« habe, was nach dem Vorigen verständlich ist.

Nach dem Ergebnis der Rechnung hat der Gang der Differenzen GAUSS minus ULUGH BEIGH als Hauptglied ein solches von der Periode π, was schon der blosse Anblick lehrt, der vier Nullstellen zeigt. Da diese Nullstellen nicht bei $A = 0°, 90°, 180°, 270°$ liegen, sich dort vielmehr Maxima zeigen, so muss bei der Kleinheit der übrigen Glieder, neben dem in $\sin 2A$, ein beträchtliches in $\cos 2A$ erscheinen. Die Bestimmung der Konstanten wird hiermit gegenstandslos und das Merkwürdige bleibt der ausgeprägte Gang der Differenzen nach dem genannten Gliede.

BRENDEL.

---

16. Ein Brief an Encke.

GAUSS an ENCKE. 9. Juli 1826.

. . . .

Den Gebrauch, den Sie bei Ihren Vorlesungen von solchen Dingen machen, die meinen Vorträgen etwa eigenthümlich sein möchten, kann ich ganz Ihrer Beurtheilung überlassen.

Ich habe jetzt angefangen einen 3ten Theil oder ein *Supplementum* meiner *Theoria Combinationis Observationum* [*)] aufzusetzen für den Fall, wo die Data der Aufgabe nicht in der Form vorliegen, die im 1ten Theile vorausgesetzt wird. Ob man gleich sie immer in diese Form bringen kann, so ist es doch oft vortheilhafter es nicht zu thun, sondern die Aufgabe auf eine ganz eigne Art zu behandeln. Was mir bei dieser Ausarbeitung vorzüglich viel Plage macht, ist die Wahl der Bezeichnungen. Ihnen ist es nicht unbekannt, dass ich bei allen meinen Arbeiten darauf immer grosse Sorgfalt gewandt habe, gewöhnlich viel grössere, als man nachher der Arbeit ansieht. Wenn das Griechische Alphabeth durchweg dem Lateinischen correspondirte und die grossen Griechischen Buchstaben dann auch durchweg von den Lateinischen verschieden wären, würde man den Zweck der grössten, elegantesten Übersichtlichkeit viel leichter erreichen. Das Deutsche Alphabeth ist mir immer nur ein Nothbehelf, zu dem ich mich ungern entschliesse, und eben so wenig mag ich die oben und unten zugleich accentuirten Bezeichnungen leiden. In dem gegenwärtigen Fall vergrössert sich die Schwierigkeit durch einen Nebenumstand. Nemlich fast alle Relationen in der 2ten Behandlung haben eine bewunderungswürdige Analogie zu denen der erstern, so dass sich analytisch betrachtet fast ganz dieselben Gleichungen ergeben, obwohl hier die darin vorkommenden Grössen etwas ganz anderes bedeuten.

[*) *Supplementum theoriae combinationis observationum etc.* Werke IV, S. 55.]

Aber hin und wieder reichen die Alphabethe nicht aus, immer eine symmetrische Bezeichnung zu gewinnen. Ich denke bei dieser Abhandlung auch einige Zahlenbeispiele zu geben, von meinen und KRAYENHOFFS Messungen entlehnt; durch jenes wird dann implicite das unverständige Urtheil über meine Dreiecke im Lüneburgischen, welches ZACH vor einigen Jahren sich nicht geschämt hat, in seiner Corr. zu drucken[*)], beseitigt, und von welchem ich natürlicherweise explicite keine Notiz nehmen kann.

Zugleich wird das Verständniss dadurch erleichtert. Meine beiden ersten Abhandlungen über diesen Gegenstand[**)] sind, wie mir scheint, noch von wenigen in sucum et sanguinem verwandelt.

Ein junger Deutscher aus Aachen, DIRICHLET, der sich in Paris aufhält, hat mir vor kurzem eine kleine Abhandlung aus der höheren Arithmetik[***)] zugesandt, welche ein ausgezeichnetes Talent verräth. Je seltener die Beispiele sind, dass jemand sich mit diesen Gegenständen vertraut macht — in Deutschland weiss ich gar keines — und jemehr ich überzeugt bin, dass dies eines der besten Mittel ist, das Mathematische Talent auch für andere, ganz verschiedene Zweige der Mathematik zu schärfen, um so erfreulicher ist mir das Phänomen und um so betrübender würde es sein, wenn sein Vaterland, Preussen, sich zuvorkommen liesse und Frankreich sich auch dieses ausgezeichnete Talent zueignete. Vielleicht haben Sie einmahl Gelegenheit die Aufmerksamkeit geltender Personen auf dasselbe zu lenken. Soweit sich über den Charakter des jungen Mannes aus seinem Briefe[†)] schliessen lässt, würde es, glaube ich, auch in dieser Rücksicht Ihnen angenehm sein müssen, wenn er in Berlin fixirt werden könnte. . . . .

BEMERKUNGEN.

Auf das in der ZACHschen Correspondance astronomique enthaltene Urteil über die Lüneburgischen Dreiecke wurde GAUSS aufmerksam gemacht durch OLBERS in dem Briefe vom 8. Juni 1824 (W. OLBERS,

[*) Siehe Correspondance astronomique etc. du Baron DE ZACH, vol. X (Genève 1824), S. 164.]

[**) *Theoria combinationis observationum etc.* Pars prior, Werke IV, S. 1, Pars posterior, ibid. S. 27.]

[***) P. G. LEJEUNE DIRICHLET, *Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré*, Paris 1825, Imprimerie de HUZARD-COURCIER, DIRICHLETS Werke I, S. 1 ff.]

[†) Dieser vom 28. Mai 1826 aus Paris datierte Brief ist abgedruckt in DIRICHLETS Werken II, S. 373, 374; das Antwortschreiben von GAUSS vom 13. September 1826 findet sich in GAUSS' Werken II, S. 514, 515.]

Sein Leben und seine Werke, II, 2, S. 310) und durch BESSEL in dem Briefe vom 23. Oktober 1824 (*Briefwechsel*, S. 440). Eine Äusserung von GAUSS über diesen Angriff in dem Briefe an BESSEL vom 15. Januar 1825 (*Briefwechsel*, S. 444) und der Wortlaut des Angriffs selbst ist wiedergegeben in dem Aufsatz von A. GALLE, *Über die geodätischen Arbeiten von Gauss*, Werke XI 2, Abhandl. 1, S. 93, 94 Fussnote. — Der erste, hier weggelassene Teil des vorstehend abgedruckten Briefes an ENCKE enthält unter anderem die Tabelle von GAUSS' Pallas-Beobachtungen, die aus einem Briefe an BODE vom 10. Juli 1826 im Astronomischen Jahrbuch für 1829 (Berlin 1826), S. 144, 145 (Werke VI, S. 454, 455) wiedergegeben ist.

SCHLESINGER.

17. Kindersterblichkeit.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER V, Altona 1863, S. 325.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 12. Juli 1847.

Anliegend übersende ich Ihnen, mein theuerster Freund, Ihrer Erlaubniss zufolge mein Schreiben an H[er]rn Geh[eimen] Conferenzrath COLLIN[*)]. Ich hoffe, dass die Adresse so richtig sein wird. Sie haben es zu verantworten, dass ich mir die Freiheit genommen habe, in dem Briefe einige Wünsche anzudeuten, namentlich besonders den, dass das Absterben der Kinder im frühesten Lebensalter in engern Fortschreitungsstufen angesetzt werden möchte. Veranlasst bin ich zu solchem Wunsche durch die Bemerkung, welche ich vor längerer Zeit gemacht habe, dass die in QUETELET gegebene Tafel (nemlich im Annuaire stereotyp.[**)], z. B. für 1844, p. 193, für 1846, p. 185) sich für die ersten sechs Monate durch Eine Formel mit einer fast wunderbaren Übereinstimmung darstellen lässt. Ich habe dabei freilich in dem Briefe noch eine Äusserung hinzugesetzt, die ich etwas modificiren könnte, nemlich dass ich nicht genau wisse, auf welche Thatsachen QUETELETS Angaben sich gründen. Nachdem ich nemlich jenen Brief schon beendigt und versiegelt hatte, fand ich in QUETELET *sur l'homme* p. 144 der

[*) Vorsitzender der dänischen Tabellen-Kommission für Sammlung statistischer Angaben. GAUSS dankt in diesem Briefe für die Übersendung eines statistischen Werkes, die durch Vermittlung von SCHUMACHER geschah.]

[**) Gemeint ist wohl das von QUETELET herausgegebene »Annuaire de l'Observatoire Royal de Bruxelles«; dieses enthält in der Tat an den weiter im Text von GAUSS angegebenen Stellen eine *Table de Mortalité*.]

RIE[C]KESCHEN Übersetzung[*)] Zählungen aus Westflandern, die, wie es scheint, die Grundlage der Zahlen im Annuaire gewesen sind. Ich habe jedoch deshalb den Brief nicht noch einmahl öffnen und abändern wollen.

Vielleicht interessirt Sie, wenn ich jene Formel hier beifüge. Die letzte Columne[**)] nemlich wird für die ersten sechs Monate durch die Formel

$$10000 - A\sqrt[3]{n},$$

wo $\log A = 3{,}98273$ und n die Anzahl der Monate, mit einem Grade von Übereinstimmung dargestellt, den man sonst bei Mortalitätstafeln niemals findet. Weiter hinaus von 1 Jahr—4 Jahr gibt die Formel mehr als die Tafel, von 5 Jahr bis zu Ende aber weniger. Die grosse Übereinstimmung in den ersten sechs Monaten würde ich, wenn sie durch andere Zählungen in andern Ländern (versteht sich eventuell mit andern Constanten) sich gleichfalls fände, daraus erklären, dass in den ersten 6 Monaten eine vergleichungsweise geringe Complication von Todesursachen Statt findet; das nachherige Überschreiten der Todesfälle der Formel durch die Todesfälle der Wirklichkeit durch das Eintreten neuer Todesursachen, Kinderkrankheiten, die eben erst im zweiten Halbjahre zum Vorschein kommen; endlich die Abweichung im entgegengesetzten Sinn von 5 Jahr an sehe ich bloss als einen Beweis an, dass jene Formel nicht die wahre naturgemässe Form***) hat, aber einer naturgemässern für kleine Werthe von n nahe äquivalirt. Übrigens bemerke ich, dass MOSER[†)] eine ähnliche Formel wie obige angegeben hat, aber dass er Biquadratwurzel anstatt meiner Cubikwurzeln hat. Dann lässt sich allerdings eine nothdürftige Übereinstimmung für eine längere Reihe von Jahren erzwingen, aber die schöne Übereinstimmung in dem ersten halben Jahre geht verloren. Ich könnte hierüber noch viel anderes hinzufügen, was aber mehr Zeit erfordern würde, als ich jetzt diesen Andeutungen widmen kann. . . . .

[*) A. QUETELET, *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale*, 2 voll., Paris 1835; deutsche Ausgabe besorgt von Dr. V. A. RIECKE unter dem Titel: *Über den Menschen und die Entwicklung seiner Fähigkeiten oder Versuch einer Physik der Gesellschaft*, Stuttgart 1838.]

[**) Die Anzahl der lebenden Kinder des Alters n.]

***) Es ist sonst ein curieuser Umstand, dass die Formel das Lebensende auf 100 Jahre 7 Monate gibt; welcher Umstand aber in Folge obiger Bemerkung eigentlich gar keine Bedeutung hat.

[†) LUDWIG F. MOSER, *Die Gesetze der Lebensdauer u. s. w.*, Berlin 1839. Daselbst S. 281—283 wird für die Anzahl der von je einem Neugeborenen im Alter x noch Lebenden, für die 30 ersten Lebensjahre die Formel gegeben: $y = 1 - 0{,}2\sqrt[4]{x}$.]

18. Schriftstücke zu den trigonometrischen Messungen im Bremischen.

[Aus dem Staatsarchiv der freien Hansestadt Bremen.]

[1.]

Schreiben von W. OLBERS an den Senat der Stadt Bremen*).

{Ew. Magnificenz

erlaubten und befahlen mir hochgeneig[te]st, Ihnen dasjenige, was ich über eine wünschenswerthe Verbindung der dänisch-hannovrischen Gradmessung mit der englisch-französischen Ihnen mündlich vorzutragen die Ehre hatte, schriftlich einzureichen. Ich habe dies in beikommendem Aufsatz versucht, und muss nur gehorsamst um Nachsicht und Verzeihung bitten, wenn das formale gar nicht dabei beobachtet ist.

Mit der grössten Verehrung

Ew. Magnificenz

V. G. d. 10^{t} Januar 1823. gehorsamster Diener

W. OLBERS.}

{Die von den Regierungen mehrerer Staaten angeordneten, und zum Theil mit beträchtlichem Kostenaufwande ausgeführten Messungen zur genauen Bestimmung der Figur unserer Erde haben sich besonders seit den letzten 30 Jahren sehr vervielfältiget und sind mit einer Schärfe und Sorgfalt ausgeführt

*) {Verlesen in der Senatsversammlung am 15^{ten} Januar 1823. Beschlossen: an die Commission in auswärtigen Angelegenheiten, um mit Zuziehung des Herrn Senator J. GILDEMEISTER diesen Gegenstand zu berathen und darüber zu berichten.}

worden, die alles, was vordem unter Ludewig dem 14ten und 15ten in Frankreich, England und Peru und nachmals im Kirchenstaat, Oesterreich, Piemont, Pensilvanien u. s. w. unternommen und geleistet wurde, weit übertrifft. Die grosse von der französischen National-Versammlung zur Bestimmung des Meter beschlossene und von Dünkirchen bis zur balearischen Insel Iviça ausgedehnte Gradmessung gab dazu den Impuls. England veranstaltete eine ähnliche Messung von der Insel Wight bis zu den Schottländischen Inseln. Die schon 1788 von französischen und englischen Commissarien gemeinschaftlich durch Dreiecke gemachte Verbindung zwischen den Sternwarten von Paris und Greenwich schien noch nicht mit aller der Sorgfalt und Genauigkeit gemacht zu sein, die die jetzt immer mehr vervollkommneten Werkzeuge gewähren können, und so ist diesen Sommer gemeinschaftlich von Arago und Mudge die gegenseitige Lage dieser beiden Sternwarten aufs genaueste bestimmt. So hat man nun einen grossen zusammenhängenden Bogen eines Meridians von Iviça im mittländischen Meer bis Unst auf den Schottländischen Inseln, mehr als 22° betragend, gemessen.

Allein eben diese grossen und genauen Messungen haben gelehrt, dass ein einzelner Meridianbogen, so gross seine Ausdehnung auch sein mag, noch nicht hinreichend ist, die Figur der Erde völlig kennen zu lernen. Die Meridiane sind sich nicht völlig unter einander gleich und zeigen manche Unregelmässigkeiten, zum Theil vielleicht auch von localen Verschiedenheiten in der Dichtigkeit der obern Erdschichten veranlasst. Es ist deswegen erforderlich, dass mehrere Meridianbogen gemessen werden, wenn man die nicht ganz regelmässige Gestalt des Erd-Sphäroids genau genug bestimmen will. Dies hat den ruhmwürdigen König von Dänemark bewogen, eine mit den besten Instrumenten und Hülfsmitteln aufs schärfste auszuführende Messung des Meridianbogens in seinen Staaten von Lauenburg bis Skagen in Jütland zu befehlen, die jetzt seit mehrern Jahren unablässig von dem Professor Schumacher betrieben wird. Um den Bogen noch mehr zu verlängern, schlug der dänische Monarch dem damaligen Prinzen Regenten, jetzigem Könige von Grossbrittanien und Hannover vor, diese dänische Gradmessung auch Hannovrischer Seits bis Thüringen fortzusetzen. S[ein]e Majestät haben darin gewilliget, nach Hannover die nöthigen Befehle gegeben, und seit zwei Jahren

ist Hofrath Gauss beschäftiget, den Bogen vom Inselsberg in Thüringen bis Lauenburg zu messen.

Auch der Kaiser von Russland ist diesem Beispiel gefolgt und hat eine Gradmessung von Liefland über den finnischen Meerbusen weg durch Finland bis an Laplands Grenzen befohlen. Die Instrumente dazu sind schon angeschafft, die vorläufigen Recognoscirungen angestellt, und das nächste Jahr wird die Operation selbst beginnen.

So werden wir also bald die Krümmung mehrerer Meridianbögen unsers Erd-Sphäroids mit einander vergleichen können. Aber dies ist noch nicht alles. An die zur Bestimmung des Meridianbogens gemessenen Dreiecke lassen sich andere leicht anschliessen und so ein grosses Land ganz mit genau bestimmten Dreiecken überziehen. Durch diese Dreiecke wird nicht nur die geographische Lage aller Dreiecks-Punkte gegen den Meridian, worauf sie sich beziehn, gegeben: sie dienen nicht nur zur unentbehrlichen Controlle und Anlehnung aller zum Behuf anderer Zwecke, z. B. eines Cadasters, vorzunehmenden speciellen Messungen: sondern da auch durch sie die Länge eines Bogens des Parallelkreises bekannt wird, so sind sie zur Bestimmung der Gestalt der Erde eben so wichtig, als die Meridian-Gradmessung selbst. Ganz Frankreich und ganz Grossbrittanien sind schon mit solchen Dreiecken überzogen. An die französischen Dreiecke schliessen sich diejenigen an, die der General-Lieutenant von Krayenhof[f] mit musterhafter Genauigkeit bis an die Grenze des Herzogthums Oldenburg über die Niederlande, Holland und Ostfriesland geführt hat. Die Preussen haben sich südlicher an die französischen Dreiecke angeschlossen, und unter der Direction des Generallieutenants von Müffling ihre Triangel vom Rhein bis nach Berlin geführt: wahrscheinlich werden sie noch dieselben bis an die Grenzen von Liefland und Curland fortsetzen. Churhessen wird sich an die hannovrische Gradmessung anschliessen, und Professor Gerling aus Marburg ganz Hessen mit einem Dreiecksnetz bedecken. Auch in Ober-Italien sind Oesterreichischer Seite Carlini, Sardinischer Seite Plana beschäftiget, eine Triangel-Kette von der französischen Grenze bis zum adriatischen Meerbusen zu ziehen. In wenig Jahren dürfen wir also hoffen, den grössten Theil von Europa, von den Pirenäen und Brest bis Petersburg triangulirt zu sehen.

Unter den bisher unternommenen Gradmessungen scheint die dänischhannovrische an Schärfe und Genauigkeit noch alles zu übertreffen, was bisher bei ähnlichen Messungen geleistet war. Der grössere und reichere Vorrath der ganz vorzüglichen, zum Theil neu erfundenen Werkzeuge und das bewundernswürdige Genie, der Scharfsinn, die Geschicklichkeit und Sorgfalt des Hofrath Gauss und des Professor Schumacher scheinen dies zu verbürgen. Um so mehr wäre es zu wünschen, dass diese Gradmessung unmittelbar mit der französisch-englischen in Verbindung gesetzt würde. Dies kann am besten geschehen, wenn die Holsteinischen und Lüneburgischen von Schumacher und Gauss gemessenen Dreiecke durch andere Triangel bis an die Krayenhof[f]ischen geführt werden. Krayenhof[f]s östlichste Seite ist die Stollham-Varel, schon diesseits der Jahde. Gauss westlichste Seiten sind Hamburg-Wilsede und Wilsede-Falckenberg, sodass der Zwischenraum nicht mehr gross ist, und diese Verbindung für sehr leicht gehalten werden könnte, wenn nicht ein ganz ebenes, von Waldungen durchschnittenes Land, wie das Herzogthum Bremen ist, zuweilen eigene, aber doch immer zu beseitigende Schwierigkeiten darböte.

Die Verbindung der Gaussischen und Krayenhof[f]ischen Dreiecke könnte vielleicht am bequemsten über Sandstädt und Neuenkirchen stattfinden: aber sie muss und wird über Bremen geschehen, um so Bremen und Oldenburg mit zu begreifen.

Ob man in Hannover daran denkt, die Verbindung mit den Krayenhof[f]ischen Dreiecken schon jetzt vornehmen zu lassen, ist mir nicht bekannt. Es scheint, dass das Ministerium nur auf ausdrücklichen Befehl des Königs die Gradmessung veranstaltet hat, auf die es sich sonst, jede nicht dringende Ausgabe bei dem Zustande der Finanzen gern vermeidend, vielleicht nicht eingelassen hätte. Es könnte sein, dass man, eben aus diesem Princip einer sonst lobenswürdigen Sparsamkeit, sich begnügen wollte, nur strenge den königlichen Befehl zu befolgen, und weiter nichts auszuführen, als was dieser ausdrücklich vorschreibt. Indessen würde man in Hannover das Aufschieben der zu dieser Verbindung nöthigen Operationen bald bereuen. Geschehen muss sie doch einmal, über kurz oder lang: der Zustand der Wissenschaft erfordert sie zu gebieterisch. Auch wird Hannover bald die Nothwendigkeit fühlen, das ganze Königreich zum Behuf eines Cadasters mit einem Dreiecks-Netz zu überziehen, wovon die zu jener Verbindung erforderlichen Triangel einen grossen und nothwendigen Theil ausmachen. Jetzt ist alles zu diesen Ver-

messungen einmal organisirt, alle erforderlichen Instrumente angeschafft und in der brauchbarsten Ordnung: jetzt wird sich also alles mit der Hälfte der Kosten, der Mühe und der Zeit ausführen lassen, die man wird anwenden müssen, wenn man die Operation noch einige Jahre verschiebt.

Für die Stadt Bremen würde unmittelbar aus der Verbindung der Gaussischen und Krayenhof[f]ischen Dreiecke nur der Nutzen entstehen, dass die geographische Lage der Stadt, so wie ihre Höhe über dem Spiegel der Nordsee aufs genaueste bestimmt würden. Ich muss gehorsamst anheim geben, ob dieser individuelle Nutzen für die Stadt, verbunden mit der so oft rühmlichst bewiesenen Neigung eines hohen Senats, auch im allgemeinen den Fortgang der Wissenschaften zu befördern, Hochdenselben vielleicht veranlassen könnte, diese Anschliessung der Gaussischen Vermessung an die französische auch mit einiger Aufopferung von Kosten zu bewirken. Sollte der hohe Senat dazu geneigt sein, so wäre wohl unmassgeblich dem Geheimen Cabinets-Rath Hoppenstedt, der über die Messungs-Angelegenheit bei dem Königlichen Ministerium referirt, privatim zu eröffnen, wie man mit allem Interesse, das ein für die Wissenschaften so wichtiges Unternehmen einflössen könne, die von der hannovrischen Regierung veranstaltete Gradmessung beachte, und da der hohe Senat sich überzeugt halte, dass eine Verbindung dieser Gradmessung mit der französisch-englischen durch Anschliessung derselben an die Krayenhof[f]ischen Dreiecke sowohl für die Bestimmung der Gestalt der Erde als für die Geographie des nördlichen Deutschlands, ja des nördlichen Europa überhaupt, von dem grössten Nutzen sein werde, man von bremischer Seite gern bereit sei, wenn die hannovrische Regierung diese Verbindung ausführen lassen wolle, durch Stellung und Besoldung eines tüchtigen Gehülfen während der dazu nöthigen Operationen, diese zu befördern, zu erleichtern und zu beschleunigen. Mit Instrumenten sei man aber durchaus nicht versehen und müsse diese, so wie die Instruction des Gehülfen, von der Güte des H[errn] Hofrath Gauss, dem der Gehülfe natürlich ganz untergeordnet bliebe, erwarten.

Höchst wahrscheinlich wird eine solche Eröffnung bremischer Seite die hannovrische Regierung veranlassen, diese so wünschenswerthe Anschliessung schon jetzt im Fortgange des gegenwärtigen Messungs-Geschäfts vornehmen zu lassen. Vielleicht wird sie das Anerbieten eines von bremischer Seite zu stellenden Gehülfen ablehnen: wenn sie es aber annimmt, so können die

Kosten nicht sehr bedeutend sein. Genau lassen sie sich nicht anschlagen, weil man nicht wissen kann, welche Schwierigkeiten das Terrain zwischen der Elbe und Weser den Messungen vielleicht entgegen setzen mag; vermuthlich werden sie aber noch unter 600 ₰ und ganz gewiss nicht über 1000 ₰ betragen.

WILH. OLBERS.

[2.]

GAUSS an HOPPENSTEDT. Göttingen, 5. Februar 1823.

Hochwohlgeborner Herr
Hochzuverehrender Herr Geheimer Cabinets-Rath.

In Folge Ihrer gütigen Aufforderung habe ich die Ehre, über den Gegenstand, welchen das hiebei zurück erfolgende Schreiben des Herrn Doctor OLBERS in Anregung gebracht hat, folgendes zu erwiedern.

Herr Doctor OLBERS hat vollkommen recht, wenn er auf die Verbindung der Hannoverschen Gradmessung mit der Triangulirung des Generals VON KRAYENHOFF eine grosse Wichtigkeit legt. Letztere Messungen knüpfen sich bei Dünkirchen unmittelbar an die französische Gradmessung, welche sich bekanntlich bis zu den Balearischen Inseln erstreckt, und die ihrerseits wieder mit den wichtigen vom verstorbenen General MUDGE in England ausgeführten Messungen, über den Canal herüber, in Verbindung gebracht ist. Meine Triangulirung hingegen knüpft sich im Norden an die Dänischen Messungen, die demnächst bis Skagen an der Nordküste von Jütland und bis Copenhagen ausgedehnt werden sollen, und im Süden an die Preussischen und Hessischen, wodurch eine Verbindung vom Rhein bis Schlesien effectuirt werden wird. — Es springt in die Augen, dass eine Verbindung dieser beiden grossen Messungs-Systeme von sehr grosser Wichtigkeit sein muss, nicht bloss für die Geographie von Hannover und Nord-Deutschland, sondern wie man wohl sagen kann, für die von Europa, so wie in Rücksicht auf die Gestalt der Erde. Die KRAYENHOFFschen Messungen sind übrigens durch den Druck bekannt gemacht, und ich habe mich selbst durch vielfache Prüfungen überzeugt, dass sie mit ganz vorzüglicher Sorgfalt ausgeführt sind.

Die Verbindung meiner Dreiecke mit den KRAYENHOFFschen liesse sich übrigens auf mehr als einem Wege machen. — Wird eine Reihe von Dreiecken über Bremen geführt, so würde der Anschluss in Ostfriesland geschehen; man könnte jedoch auch weiter südlich durch das Osnabrucksche ein Dreiecksnetz führen und den Anschluss bei Bentheim vollenden. — An sich möchten in Rücksicht auf die Schwierigkeiten der Ausführung beide Wege ungefähr gleich stehen, soweit ich es bis jetzt beurtheilen kann. — Indessen, wenn unter beiden gewählt werden muss, möchte doch der über Bremen den Vorzug verdienen. — Denn nicht zu gedenken, dass das liberale Anerbieten des Senats der Stadt Bremen Berücksichtigung verdient, ist es auch an sich für die mathematische Geographie wünschenswerth, dass Bremen und Lilienthal, wo so manche astronomische Beobachtungen gemacht sind, mit in das Dreiecksnetz kommen, und zweitens wird auf diesem Wege auch die Verbindung mit der Nordsee und dadurch die Möglichkeit, alle meine relativen Höhen Messungen in absolute über der Meeresfläche verwandeln zu können, erreicht werden, ein Vortheil, der bei dem südlichern Wege verloren ginge. —

In Rücksicht auf diesen vielfachen Nutzen erkläre ich mich gern bereit, die Arbeiten, welche eine solche Erweiterung der unmittelbaren Gradmessungsoperationen erfordern würde, auf mich zu nehmen, wenn ich dazu höheren Orts autorisirt werde. —

Die Erfahrungen des vorigen Jahrs haben hinlänglich bewiesen, wie sehr die Arbeiten durch die Vergrösserung der Gehülfenzahl gefördert sind. Ich würde daher, bei Erweiterung des Plans darauf antragen, mir noch einen Gehülfen mehr beizugeben, wenn nicht das Erbieten des bremischen Senats mir darin schon zuvorgekommen wäre, vorausgesetzt, dass die hohe königlich Hannöversche Regierung nicht etwa sich bewogen findet, solches abzulehnen. Ich für mein Theil würde übrigens kein Bedenken haben, einen von Herrn Doctor OLBERS empfohlenen Gehülfen gern anzunehmen, da ich dann von dessen Brauchbarkeit im Voraus überzeugt sein könnte. —

In Rücksicht auf den Nutzen, welchen meine Messungen für die Geographie des Königreichs Hannover in mehr als einer Beziehung haben können, halte ich es für Pflicht, hier noch eines Umstands besonders zu erwähnen. —

Beinahe alle meine bisherigen Dreieckspunkte sind zu ebener Erde auf offenem Felde oder auf Bergspitzen und werden eigentlich durch aufgemauerte

Steinpostamente gebildet, auf welchen die Instrumente aufgestellt werden. Nur im Jahre 1821, gleich zu Anfang, habe ich zwei grosse Signalthürme erbaut, nachher aber, als die hohe Brauchbarkeit der Heliotrope sich noch über mein Erwarten bewährte, niemals wieder zum grössten Gewinn für die Genauigkeit und Schnelligkeit der Operationen.

Inzwischen ist diese Einrichtung doch mit einer grossen Unannehmlichkeit verbunden. Trotz den von den respectiven Beamten erlassenen Drohungen, und der auf Anzeigen ausgelobten Belohnungen, hat sich doch der rohe Muthwille fast an allen diesen Postamenten vergriffen und sie mehr oder weniger beschädigt, ja eines auf dem Hohenhagen ist ganz weggestohlen. Ich habe nun zwar Anstalten nach Möglichkeit getroffen, um an den Punkten, wo im bevorstehenden Sommer noch beobachtet werden muss, die genaue Identität der Stelle restituiren zu können, und es steht auch wohl zu hoffen, dass dieses in diesem Jahre noch bei allen Punkten möglich sein wird. Allein dass nicht nach einigen Jahren dieser oder jener Hauptdreieckspunkt so vollkommen zerstört sein könnte, dass Anschliessung neuer Messungen in Dreiecken erster Ordnung unmöglich werden würde, möchte sich schwerlich verbürgen lassen. Aus dieser Ursache möchte es daher sehr rathsam sein diejenigen Erweiterungen der Triangulirung, die gewünscht werden, bald möglichst vorzunehmen. —

In grösster Verehrung habe ich die Ehre zu beharren

Ewr. Hochwohlgeboren

Göttingen, den 5. Februar 1823. gehorsamster Diener

C. F. Gauss.

[3.]

An den Hohen Senat der freien Stadt Bremen.

Bericht des Hofraths Gauss

über die im Jahr 1824 ausgeführten Trigonometrischen Messungen.

Der Hohe Senat der freien Stadt Bremen hat die im Jahr 1824 von mir unternommenen Messungen auf so liberale und so vielfache Art befördert,

dass ich mich der Pflicht, einen Bericht über dieselben abzustatten, nur mit dem Gefühle der lebhaftesten Dankbarkeit entledigen kann.

Die von mir in den Jahren 1821—1823 von der südlichen Grenze des Königreichs Hannover längs dem Göttingischen Meridian bis Hamburg ausgeführte Triangulirung, zunächst zur Fortsetzung der Dänischen Gradmessung bestimmt, war an den südlichsten Punkten mit der Preussischen und Hessischen Vermessung, und durch letztere mittelbar mit der Darmstädtschen, Bayrischen, Würtembergschen und Oestreichschen in Verbindung gebracht. Wenn erst alle diese Messungen vollendet sein werden, wird Eine Kette von Dreiecken von der Nordspitze Jütlands bis Italien, an die Türkische Grenze und bis in Russland hinein laufen.

Eine nicht minder colossale Kette bilden die englischen und französischen Dreiecke von Schottland bis zu den Balearischen Inseln laufend, und verbunden damit sind bei Dünkirchen die Holländischen, die sich bis über Ostfriesland erstrecken.

Im Anfang des Jahrs 1824 erhielt ich von Sr. K. Majestät den ehrenvollen Auftrag, vermittelst einer durch das Bremische zu führenden Dreieckskette die Hannöverschen Dreiecke mit den Krayenhof[f]schen, und dadurch jene beiden grossen Dreiecks-Systeme mit einander, zu verbinden.

Leichter als auf dem vorgeschriebenen Wege würde sich ohne Zweifel die Verbindung weiter südlich, über das Osnabrücksche und Bentheim, haben ausführen lassen, wo das Terrain solchen Operationen weit günstiger gewesen wäre. Allein der nördliche Weg bot dagegen andere sehr wichtige Vortheile dar: die Verbindung mit dem Meere, und dadurch die Verwandlung der relativen Höhenmessungen in absolute, und die Anknüpfung Bremens, eines in den Annalen der Astronomie so wichtig gewordenen Punktes. Seitdem ist auch Helgoland ein astronomisch merkwürdiger Platz, und dessen trigonometrische Anknüpfung wünschenswerth geworden.

Die grossen Schwierigkeiten auf dem nördlichen Wege entspringen theils aus der Beschaffenheit des Terrains, theils aus dem gewöhnlichen Zustande der Atmosphäre.

Das Land, flach und von Waldungen in allen Richtungen durchschnitten, bietet nur wenige zu Dreieckspunkten brauchbare Plätze dar, in so fern die Dreiecke von bedeutender Grösse sein sollen, und die Tauglichkeit ist um so schwerer zu erkennen, da sie nicht von der Beschaffenheit der Plätze an sich, sondern von ihren Verhältnissen zu einander abhängt. Die höhern Plätze sind öfters unbrauchbar, weil sie sich nicht unter einander verbinden lassen; dagegen erlauben zuweilen ganz unscheinbare Plätze Combinationen, deren Möglichkeit man erst nach mühsamem Studium des Landes und langem vergeblichen Suchen zu erkennen das Glück hat. Die meisten Verbindungen findet man nicht offen vor, sie müssen erst durch Holzlichtungen erzwungen werden, und die möglich schonendste, präcise und schnelle Ausführung solcher Durchhaue ist wiederum von einer schon genauen Bekanntschaft mit dem Lande abhängig.

Ganz besonders erschwert wird das Auffinden tauglicher Combinationen durch die gewöhnlich dunstige Beschaffenheit der Atmosphäre, eine Folge des weit verbreiteten Moorbrennens. Man kann sich Monate lang an einem Platze aufhalten, ohne nur ein einzigesmahl die entfernten Gegenstände zu bemerken, die man bei ganz reiner Luft ohne viele Mühe erkennt.

Dieser Umstand stört gleichfalls die Ausführung der Messungen selbst, obwohl, unter Anwendung heliotropischer Zielpunkte, nicht ganz in demselben Grade, wie das Auffinden tauglicher Combinationen. Wenn freilich, was nicht selten ist, der Moorrauch so dicht ist, dass Gegenstände unsichtbar werden, die kaum eine Stunde Weges entfernt sind, so muss natürlich alles Messen aufhören; dagegen dringt bei schwächern Graden des Moordampfs das Licht der Heliotrope noch durch, wenn von den Hügeln oder Thürmen wo sie aufgestellt sind, längst nicht die geringste Spur zu erkennen ist.

Das liberale Anerbieten des Hohen Senats, mir einen besondern Gehülfen beizugeben, musste mir daher doppelt willkommen sein, da ich wegen des erwähnten Umstandes fast ausschliesslich auf heliotropische Zielpunkte beschränkt wurde, und offenbar die Arbeiten desto mehr gefördert werden, je mehrere von den Plätzen, zwischen welchen ich auf meiner jedesmaligen Station Winkel zu messen hatte, gleichzeitig mit Heliotropen besetzt werden konnten. Die Lenkung des Heliotroplichts erfordert einen sorgsamen, in der Behandlung des Instruments hinlänglich eingeübten Gehülfen; sie ist aber nur Eine der den Gehülfen obliegenden Functionen, und nicht weniger wichtig sind die Dienstleistungen bei den ersten Recognoscirungen, dem Aufsuchen tauglicher Plätze, der Untersuchung der Hindernisse, welche den Verbindungen im Wege stehen,

bei der Ausführung der Durchhaue u. s. w. So wie hiezu mancherlei Eigenschaften erforderlich sind, Thätigkeit, Leichtigkeit sich zu orientiren, scharfe Sinne, körperliche Gewandtheit, z. B. beim Erklettern hoher Bäume u. dergl., so muss ich dem mir beigegebenen Gehülfen Klüver das Zeugniss geben, dass er diese Eigenschaften in ausgezeichnetem Grade besitzt, und sich bei den ihm aufgetragenen Geschäften sehr nützlich gemacht hat.

Die im Jahr 1823 zuerst von mir, hernach in grösserer Ausdehnung von einem meiner Gehülfen, und zuletzt im September von dem Herrn Senator Gildemeister und dem erwähnten Stud. Klüver, in der Gegend von Bremen bis zu den Dreiecken der Gradmessung vorgenommenen Recognoscirungen hatten eine Menge nützlicher Notizen geliefert, blieben jedoch noch weit davon entfernt, einen bestimmten ausführbaren Plan zu den neuen Dreiecken zu begründen. So viel war gewiss, dass diese entweder an die Seite Falkenberg-Wilsede, oder an die Wilsede-Hamburg, oder an beide gelehnt werden mussten, und für die eine und die andere war durch die Plätze Elmhorst und Litberg ein erstes Dreieck ausgemittelt; in wie fern aber die andern durch die Recognoscirungen bekannt gewordenen Plätze sich mit jenen zu neuen Dreiecken verbinden lassen würden, blieb noch meistens unentschieden.

Dies war die Lage der Sachen, als ich am 20. Mai die Arbeiten auf dem Falkenberge eröffnete. Die Messungen an den schon eingerichteten Dreieckspunkten, die Untersuchungen zur Ausmittlung neuer, und deren Instandsetzung wurden mit gleicher Thätigkeit, und berechnet in einander eingreifend betrieben und ungeachtet der Erschwerung durch den fast immerwährenden Moorrauch war schon gegen Ende Junius der Plan zu einem sehr schönen Dreiecksnetze bis Bremen hin ausfindig gemacht und die Plätze eingerichtet. Der Elmhorst schloss sich nemlich, wie schon gesagt ist, an den Falkenberg und Wilsede, der Litberg an Hamburg, Wilsede und den Elmhorst, der Bullerberg an Wilsede und den Elmhorst, die Brüttendorfer Höhe an den Litberg, Wilsede und den Bullerberg, der Bottel an Wilsede, Brüttendorf und den Bullerberg, endlich Bremen an Brüttendorf und den Bottel. Während dieser Plan sich nach und nach bildete, waren zugleich die Messungen selbst der Reihe nach an den vier Plätzen Falkenberg, Elmhorst, Bullerberg und Bottel bereits absolvirt.

Während ich sodann mit den Messungen auf der Brüttendorfer Höhe beschäftigt war, liess ich durch zwei meiner Gehülfen die Gegend von Bremervörde, Basdahl, Gnarrenburg, Hambergen bis zum Weiherberge untersuchen, aber alle Bemühungen, einen Platz aufzufinden, der mit dem Litberg und Brüttendorf, oder mit Brüttendorf und Bremen zu einem neuen Dreiecke verbunden werden könnte, blieben völlig fruchtlos. Da ich nun gegen die Mitte des Julius die Messungen auf der Brüttendorfer Höhe in Beziehung auf die in das Dreieckssystem aufgenommenen Punkte vollendet hatte, hielt ich für das Beste, hier für jetzt nicht länger zu verweilen, sondern sofort erst die Messungen in Bremen anzufangen. Zugleich liess ich eine Recognoscirung im Hoyaischen vornehmen, in der Hoffnung, hier die Möglichkeit des Fortschreitens auf der Südseite um Bremen herum, ausfindig zu machen. Allein auch diese Versuche blieben durchaus ohne Erfolg, da das ganz flache mit Wald durchschnittene Land nirgends einen dominirenden Punkt darbot.

Es würde also jetzt um die weitere Fortsetzung sehr misslich gestanden haben, wenn ich nicht zum Glück auf dem Ansgariusthurm eine unerwartete Bemerkung gemacht hätte, die nemlich, dass daselbst die Spitze des Thurms von Zeven noch eben sichtbar wird. Dieser Thurm war 1823 und 1824 zu wiederholten malen von meinen Gehülfen besucht und für unbrauchbar für die Messungen erklärt, da nach keiner Seite hin etwas Entferntes sichtbar gewesen war. Allein jetzt war entschieden, dass auf dem Thurm von Zeven der Ansgariusthurm gesehen werden könne, und eine jetzt gleich wiederhohlte Untersuchung jenes Thurms gab dazu das nicht minder wichtige und unerwartete Resultat, dass auch der Wilseder Berg dort sichtbar war. Man würde Unrecht thun, die frühere Nichtbeachtung dieser wichtigen Umstände einer Fahrlässigkeit der Gehülfen bei den Recognoscirungen zuzuschreiben; der habituell dunstige Zustand der Atmosphäre erklärt sie hinlänglich.

Es ergab sich nun die Möglichkeit eines neuen Planes, der in der beigefügten Karte mit stärkern Linien gezeichnet ist. Zeven liess sich mit dem Bottel nicht verbinden (wegen zu hohen zwischenliegenden Terrains), wohl aber vermittelst eines bedeutenden Durchhaus mit dem Steinberg, der seinerseits, gleichfalls vermittelst eines grossen Durchhaus, mit Wilsede zu verknüpfen war. Die Richtung vom Steinberg nach Bremen war offen und die von Zeven zum Litberge liess sich mit geringer Mühe öffnen. Die Messungen, welche

sich auf die Plätze Bullerberg, Bottel und Brüttendorf beziehen, könnte man jetzt gewissermaassen wie unnöthig betrachten, wenigstens würde ich sie nicht gemacht haben, hätte die Möglichkeit des neuen Planes gleich anfangs ausgemittelt werden können*). Einmahl gemacht aber, dürfen sie bei dem heutigen mathematischen Zustande der Höhern Geodäsie nicht unterdrückt werden, sondern müssen nach bestimmten Principien mit dazu beitragen, die Genauigkeit der Endresultate zu vergrössern.

Nachdem alles in Beziehung auf die beiden neuen Plätze eingeleitet war, wurden abermalige Recognoscirungen zum weitern Fortbauen auf die Seite Bremen-Zeven veranstaltet. Es fand sich ein schicklicher Punkt in Brillit, und späterhin ein zweiter auf dem hohen Rücken der Garlster Haide, welche auf dieser Seite den Horizont von Bremen begrenzt und das unmittelbare Anknüpfen eines entferntern Platzes unmöglich macht.

Während nun alle diese Punkte von Bremen aus eingeschnitten wurden, war die Jahreszeit so weit vorgerückt, dass ich höchstens noch hoffen konnte, die Messungen auf den sechs noch nicht besuchten Stationen, Garlsterhaide, Brillit, Zeven, Steinberg, Litberg und Wilsede in diesem Jahre zu absolviren. Ich durfte daher in Bremen die Resultate neuer Recognoscirungen, während welcher die Messungen selbst hätten ruhen müssen, nicht abwarten, sondern, indem ich einem meiner Gehülfen eine vorläufige Bereisung des Oldenburgischen von Wildeshausen bis Langwarden aufgab, fing ich selbst am 22. August an, die Messungen an den gedachten sechs Plätzen der Reihe nach vorzunehmen. An den fünf ersten wurde ich auch noch leidlich, auf dem Wilseder Berge aber so wenig vom Wetter begünstigt, dass ich daselbst während eines dreiwöchentlichen Aufenthalts die nöthigen Messungen nicht ganz zu meiner Zufriedenheit vollenden konnte, und wegen des immer winterlicher werdenden Wetters die Messungen für dies Jahr schliessen musste. In einer günstigern Jahreszeit würde ein nochmaliger Aufenthalt von wenigen Tagen auf diesem Berge hinreichen, das noch fehlende zu ergänzen.

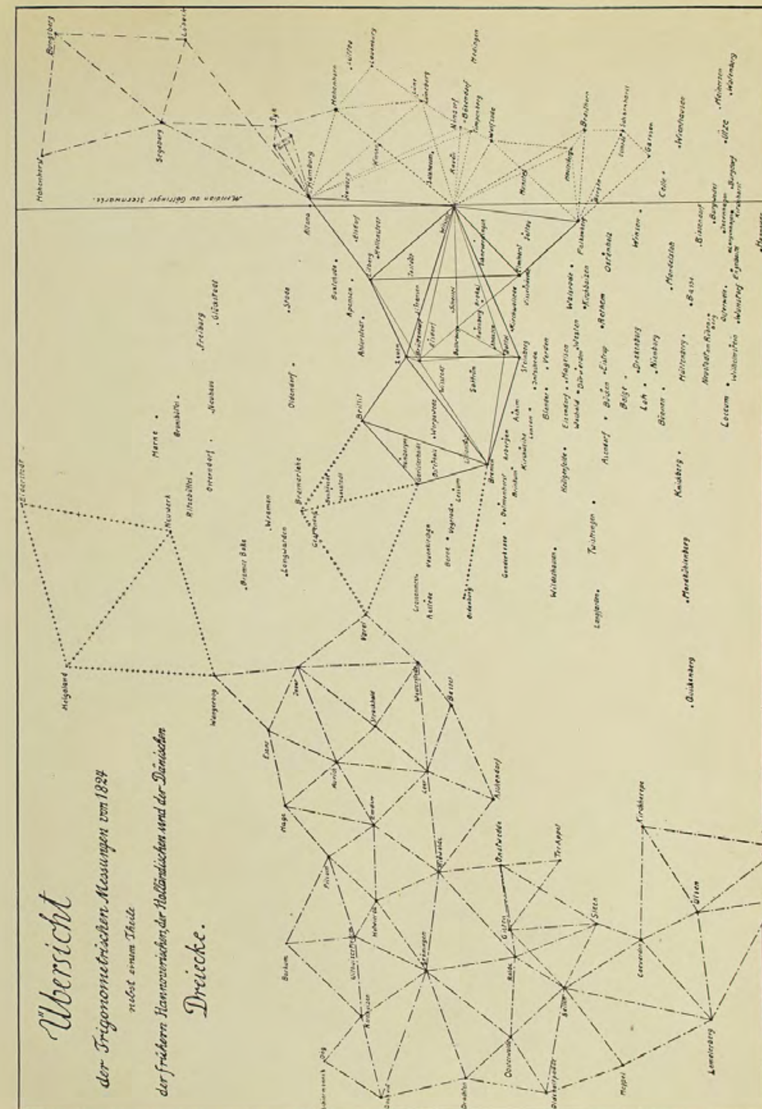
*) Indessen, selbst in diesem Fall, hätte ich die beiden grossen und kostbaren Durchhaue nicht *ausführen können*, ohne vorher durch anderweitige wohl fast eben so viele Zeit kostende Messungen die gegenseitige Lage der Plätze schon mit grosser Genauigkeit ausgemittelt zu haben, und nicht *ausführen dürfen und wollen*, ohne vorher die andern Möglichkeiten erschöpft zu haben.

In dem Landstrich, welcher meine äussersten Dreieckspunkte noch von den Krayenhof[f]schen und vom Meere trennt, sind zwar eben so grosse, wo nicht grössere Hindernisse von Seiten des Terrains und der Atmosphäre zu erwarten, wie in demjenigen, welcher der Schauplatz der Messungen von 1824 gewesen ist; doch wird die genäherte Kenntniss der Lage vieler Punkte, welche sich aus den zwar wenig genauen ältern Oldenburgischen Vermessungen schöpfen lässt, das Auffinden schicklicher Dreieckspunkte, wo es solche gibt, bedeutend erleichtern. Einige wichtige Notizen haben mir meine eignen Messungen bereits dazu geliefert, namentlich die Sichtbarkeit der Thürme von Bremerlehe und Varel auf der Garlster Haide. Sollten sich, was freilich noch ungewiss ist, jene beiden Plätze auch unter einander, und Bremerlehe (vermittelst eines, wahrscheinlich bedeutenden Durchhaus) mit Brillit verbinden lassen, so wären schon zwei neue schöne Dreiecke ausfindig gemacht, und mit ihnen ein grosser Schritt zur Vollendung geschehen. Ob die Hoffnung nicht zu kühn ist, Bremerlehe unmittelbar mit Neuwerk zu verbinden, ist noch unentschieden, aber die Ausführbarkeit des Dreiecks Neuwerk-Wangeroog-Helgoland ist gewiss*). Auf alle Fälle darf ich mir schmeicheln, dass die grössten Schwierigkeiten jetzt bereits überwunden sind, und dass Alles der wichtigen Unternehmung einen glücklichen Ausgang verspricht.

Zur Erläuterung dieses Berichts füge ich noch eine im Verhältniss von $\frac{1}{100000}$ der natürlichen Grösse gezeichnete Karte bei[**)], welche die Messungen vom Jahre 1824 ganz, ferner einen Theil meiner frühern, und einen Theil der Krayenhof[f]schen und Schumacherschen Dreiecke darstellt. Die holländischen und dänischen Dreiecke sind roth, die hannoverischen schwarz gezeichnet, und zwar die vom Jahre 1824 mit vollen, die frühern mit punktirten Linien; die

*) Sowie auch die des Dreiecks Helgoland-Neuwerk-Eiderstedt, dessen Messung aber nicht zu meinem Ressort gehören würde, sondern dem Dänischen Astronomen überlassen bleiben müsste.

[**) Das Original der Karte misst 83,5 × 57 cm, es wurde zum Zweck der Reproduktion photographisch verkleinert. Die im Original farbig gezeichneten Linien sind in der Reproduktion wie folgt wiedergegeben: die roten Linien durch —·—·—·—, die grünen vollen Linien durch ++++++, die grünen punktierten Linien durch ▷▷▷▷▷▷. Die schwarzen Linien des Originals sind unverändert geblieben. Die Basis bei Lüneburg ist im Original durch eine rote Doppellinie bezeichnet. Die Ortsnamen wurden orthographisch getreu nach dem Original abgeschrieben.]



einfachsten Übergänge sind durch starke Linien, die andern durch schwache ausgedrückt. Noch sind die projectirten Combinationen grün vorgestellt, wobei die vollen Linien offene Verbindungen anzeigen, die punktirten solche, deren Ausführbarkeit noch ungewiss ist. Die sonst in die Karte eingetragenen Örter können dienen, sich von der Lage der Dreieckspunkte, deren Namen sonst grossentheils unbekannt sein möchten, und von der Reichhaltigkeit der Ausbeute der Messungen für die Geographie des Königreichs einen Begriff zu machen, indem die Lage aller dieser Örter durch Nebendreiecke, und bei den meisten von mir selbst, bestimmt ist.

C. F. Gauss.

Göttingen, den 17. Februar 1825.

BEMERKUNGEN.

Zum Vorstehenden vergleiche man ausser dem Aufsatz von A. Galle, *Über die geodätischen Arbeiten von Gauss* (Werke XI 2, Abh. I) auch den Briefwechsel zwischen Gauss und Olbers (W. Olbers, *Sein Leben und seine Werke II, 1, 2*), im besonderen die Briefe von Olbers an Gauss vom 9. Juni 1822, 6. Februar und 5. April 1823, von Gauss an Olbers vom 24. Juli, 24. Oktober, 29. Dezember 1822, 6. Februar und 10. April 1823, sowie viele spätere Briefe.

In dem Briefe vom 9. Juni 1822 regt Olbers zuerst die Verbindung der Hannoverschen mit den Krayenhoffschen Dreiecken an, indem er sagt: »Aber .... wenn gleich Ihre Gradmessung durch die Müfflingischen Triangel schon im Süden mit der französischen zusammenhängt, so wäre es doch für Geographie und in so vielfacher Rücksicht höchst interessant, wenn auch das nördliche Ende derselben sich an die Krayenhoffschen Dreiecke anschliessen liesse. Vorläufig wollte ich also nur bitten, wenn es irgend Zeit und Gelegenheit erlaubt, von den Stationen Winsen, Falkenberg, Wilsede und Hamburg oder Steinbeck auch die noch sichtbaren entferntesten westlichen Punkte mit zu beobachten. Es würde dann darauf ankommen, wie nahe diese westlichen Punkte unserm Bremen kommen möchten, und ob es möglich sei, von hier aus die Lücke durch einige Dreiecke auszufüllen.«

Die Verhandlungen wurden, ausser durch den unter 1. abgedruckten Bericht von Olbers an den Bremer Senat, durch das in dem unter 2. abgedruckten Brief erwähnte Schreiben von Olbers an Hoppenstedt eingeleitet. Hoppenstedt erbat sich darauf Gauss' Ansicht, die dieser in dem unter 2. abgedruckten Brief erstattet und schrieb daraufhin wiederum an Olbers (vgl. die Briefe von Gauss vom 6. Februar 1823 und von Olbers vom 5. April 1823).

Die unter 1. und 3. abgedruckten Schriftstücke befinden sich im Original im Staatsarchiv der freien Hansestadt Bremen, das unter 2. abgedruckte eben dort in Abschrift. Eine erste Veröffentlichung ist durch Dr. C. H. W. Finke in den *Bremer Nachrichten* vom 23. August 1924 erfolgt. Dank dem Entgegenkommen des Staatsarchivs konnten dem vorstehenden Abdruck die Handschriften zugrunde gelegt werden.

Brendel.

19. Zwei Briefe von Gauss an Joh. Georg Soldner.

[Franz Johann Müller, *Johann Georg Soldner der Geodät*, München 1914, S. 149—155. Handschriften im Landesvermessungsamt zu München.]

[1.]

Wohlgeborner Herr Steuerrath.

Durch meine Messungen im vorigen Sommer ist die Verknüpfung meiner Dreiecke mit den Schumacherschen, soweit solche zu meinem Ressort gehören, ganz vollendet, und nur auf einem oder ein Paar Dänischen Punkten werden die Messungen von einigen dritten Winkeln nochmals zu wiederhohlen sein. Dies wird aber keinen merklichen Einfluss auf die Anknüpfung von Altona an meine Dreiecke mehr haben können. Es trifft sich gerade, dass die kleine Sternwarte des Hrn. Prof[essor] Schumacher in Altona, welche mit trefflichen Instrumenten versehen ist, nur 15 Meter von dem Meridian der Göttinger Sternwarte abliegt, nemlich von dem Meridiandurchschnitt, in welchem die Reichenbachschen Instrumente aufgestellt sind. Schumacher hat nun bereits seinen Reichenbachschen Meridiankreis zu gebrauchen angefangen, und seine bisherigen Beobachtungen geben eine Polhöhe, die 5″ kleiner ist, als die durch meine Dreiecke aus der Polhöhe von Göttingen abgeleitete.

Obgleich Schumachers Messungen noch kein Definitivresultat geben können, so ist ihre Anzahl doch schon zu beträchtlich, als dass man annehmen dürfte, die spätern Beobachtungen würden diesen Unterschied grösstentheils wegschaffen.

Bei meinen Rechnungen habe ich die von Wahlbeck[*)] aus dem Ensemble aller brauchbaren Gradmessungen abgeleiteten Dimensionen der Erde

[*) H. Joh. Walbeck, *De forma et magnitudine telluris, ex dimensis arcubus meridiani definiendis*, Aboae 1819, wiederabgedruckt mit einer Einleitung in der Zeitschrift f. Vermessungswesen 1893, Bd. 22. S. 426—434].

zum Grunde gelegt, und Ewr. Wohlg. werden mir wohl glauben, wenn ich ohne viele Worte bloss versichere, dass in dem geodätischen und Calcultheile des Geschäfts nichts ist, was eine mit jenem Unterschiede im Verhältniss stehende Wirkung hervorbringen könnte.

So hätten wir denn beim Gebrauch Reichenbachscher Meridiankreise in Deutschland ein ähnliches Phänomen, wie diejenigen, die in neuern Zeiten so oft besprochen sind.

Altona liegt in einer ganz flachen Gegend, noch ziemlich weit vom Meere entfernt; sehr bedeutende Bergmassen finden sich auch in der Nähe von Göttingen nicht.

Von dem oben angeführten Resultat bitte ich, vorerst noch gar keinen weitern Gebrauch zu machen, da ich nicht weiss, ob Hrn. Prof. Schumacher dies nicht ungelegen sein könnte. Ich würde auch gegen Sie von einer noch unreifen Mittheilung nichts erwähnt haben, wenn nicht durch diesen Umstand bei mir wieder mit grosser Lebhaftigkeit der Wunsch sich aufgedrungen hätte, dass auch unsre beiden Sternwarten Bogenhausen und Göttingen durch Dreiecke verbunden seien, und diese dann auch nach denselben Principien wie die andern Dreiecke berechnet werden möchte[n].

Vielleicht ist der erste Wunsch im Grunde schon gewissermaassen erfüllt.

Ich habe nemlich im September und Oktober bei einem wiederholten Besuch mehrerer meiner Dreieckspunkte und unter Cooperation von Gerling die Hannöverschen Dreiecke mit den Churhessischen verknüpft.

Um Ihnen eine anschauliche Vorstellung zu geben, lege ich eine Zeichnung von dem Hessischen Triangelnetz und seiner Verbindung mit dem meinigen hier bei[*)]. Von meinem Dreieckssystem habe ich nur den südlichsten Theil gezeichnet, da Sie das übrige bis Hamburg (mit Ausnahme von einigen noch in diesem Jahre hinzugekommenen Punkten und Verbindungen) bereits aus Schumachers Astronomischen Nachrichten Nr. 24 I[**)] kennen.

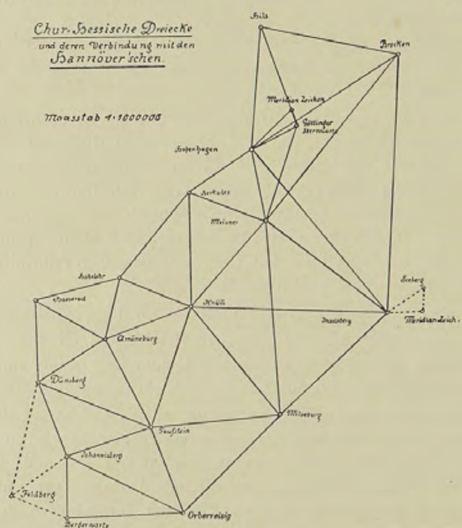
Die hessischen Dreiecke sind zwar erst zum Theil wirklich executirt, liefern aber doch schon hinreichende Materialien, um den Taufstein und Feld-

[*) Der Massstab 1:1000000 ist der der Gaussschen Originalzeichnung; die Wiedergabe auf S. 90 entspricht der in der Müllerschen Schrift und dürfte annähernd den Massstab 1:1500000 haben.

[**) Astron. Nachr. Bd. I, Nr. 24, 1822, S. 441—444, Werke IX, S. 397—400.]

berg an meine Dreiecke vorläufig anzuschliessen, mit Vorbehalt weiterer Ausfeilung, wenn die Dreiecke erst vollständig gemessen sein werden.

Taufstein und Feldberg sind aber zwei Bayrische Punkte in der Zeichnung, die Sie mir vor drei Jahren schickten[*)] unter der Bemerkung, dass Sie nicht wüssten, ob im damaligem Augenblick die Dreiecke schon wirklich gemessen seien oder nicht.



Wahrscheinlich ist dies doch, da seitdem 3 Sommer verflossen sind, wenigstens jetzt geschehen.

Ich habe daher keinen dringenderen Wunsch, als die sämmtlichen Bay-

[*) Vergl. SOLDNERS Brief an GAUSS vom 13. Mai 1821, abgedruckt in F. J. MÜLLERS oben genannter Schrift, S. 131—134.]

rischen Dreiecke, die von der N.-W. Landesgrenze bis Bogenhausen gehen, baldmöglichst mitgetheilt zu erhalten, und zwar wohl auf die resp. Centra reducirt, aber übrigens unverändert und ohne Ausgleichung. Ich zweifle nicht, dass das liberale Bayrische Gouvernement eine solche Mittheilung gern gutheissen wird, zumal da ich weiss, dass Hr. Prof[essor] BOHNENBERGER in den Besitz derjenigen Dreiecke gesetzt ist, die München und Tübingen verbinden. Ich hoffe daher, dass eine ähnliche Gunst auch mir nicht abgeschlagen werden wird. Ich erbiete mich übrigens ad reciproca.

Sollten Ewr. Wohlgeboren nicht selbst im Besitz der Dreiecke sein und mir solche auch nicht ohne zu viele Mühe für Sie verschaffen können, so ersuche ich Sie wenigstens um einen Wink, auf welchem Wege ich dazu gelangen kann. Am allererwünschtesten würde es freilich sein, wenn das Bayrische Gouvernement bald eine Publication sämmtlicher Dreiecke erster Ordnung verfügte, und dadurch auch die andern Staaten, wo ähnliche Messungen mit guten Hülfsmitteln ausgeführt worden sind, zur Nachfolge anreizte. Je mehr alle diese Messungen nach und nach zur Verknüpfung unter sich gelangen, je mehr gehören sie dem ganzen gebildeten Europa, der Mitwelt und Nachwelt an, und sollten daher auch durch den Druck in dessen wirklichen Besitz gebracht werden.

Unsre Regierung ist nicht abgeneigt, die Hannöverschen Dreiecke nach Westen fortsetzen zu lassen, wodurch sie sich an die KRAYENHOFFschen (bekanntlich gedruckten) und dadurch an die französischen und englischen anschliessen werden. Die Preussischen Messungen sind zwar durch TRANCHOTS Dreiecke auch schon mit denen der franz[ösischen] Gradmessung verbunden, allein die TRANCHOTschen Dreiecke sind nicht bekannt gemacht, für das Publicum also so gut wie gar nicht vorhanden, und Gen[eral] VON MÜFFLING besitzt sie selbst nur in einer unvollständigen Form (wie es scheint nach DELAMBRES widerwärtiger Methode auf die Chordenwinkel reducirt und diese schon zur Summe 180° ausgeglichen; in ähnlicher Form besitze ich einige Dreiecke von EPAILLY in Ostfriesland gemessen), wodurch sie allen höhern wissenschaftlichen Werth verlieren. — Bei den Hessischen Messungen wird ein 12 z[olliger] Theodolith von ERTEL, ganz dem meinigen ähnlich, gebraucht. Bei unsern grossen Verbindungsdreiecken wurde bloss Heliotroplicht angewandt.

Über verschiedenes andere behalte ich mir vor, mich ein anderesmal mit

Ihnen zu unterhalten und füge nur noch die Versicherung der grossen Hochachtung bei, mit der ich bin Ihr gehorsamer Diener

Göttingen, den 12. November 1823. C. F. Gauss.

[2.]

Göttingen, den 21. Januar 1824.

Ewr. Wohlgeboren gefällige vorläufige Mittheilungen[*)], die Bayrischen Messungen betreffend, sind mir sehr angenehm gewesen, und haben schon mehrfache Vergleichungen dargeboten, welche sehr befriedigend ausgefallen sind. Ich finde z. B. den Log[arithmus] der Seite Taufstein-Orb, aus der Dänischen Basis durch die ganze Reihe meiner u[nd] durch die Gerlingschen Dreiecke abgeleitet, in Toisen 4,2892383, nach Ihnen 4,2892335. Unterschied 0,0000048. Ferner das Azimuth des Feldbergs auf dem Taufstein, von der durch das P[assagen] I[nstrument] der Gött. Sternwarte erhaltenen Orientierung meiner Dreiecke abgeleitet, 60° 35′ 7″,976, nach Ihnen 60° 35′ 1″,5. Unterschied 6″,476. Ferner die Geogr[aphische] Lage aus meinen Messungen, Göttingen = 51° 31′ 48″,7 gesetzt

	Breite	Aus den Bayr. Mess.	Länge v. Göttingen	also München von Göttingen
Orberreisig	50° 11′ 25″,466	− 1″,966	− 0° 33′ 30″,979	+ 1° 37′ 51″,221
Taufstein	50 31 6,385	− 1,785	− 0 42 16,788	51,212
Feldberg	50 13 59,997	− 1,797	− 1 29 9,241	51,459
Kreuzberg	50 22 17,071	—	+ 0 2 14,943	—
Mannheim	49 29 15,530	− 2,090	− 1 29 0,298	51,402.

Die auf Mannheim sich beziehenden Zahlen habe ich aus den mir seit meinem letzten Briefe durch die Gefälligkeit des Hrn. Eckhardt vollständig mitgetheilten Darmstädtschen Dreiecken abgeleitet, welche ich an die bloss aus den Hessischen Messungen gefolgerte Lage des Feldbergs und Dünsberges, also ohne alle Intervention der Preussischen Messungen, angeknüpft habe. Diese Rechnung gab zugleich den Logar[ithmus] der Darmstädtschen Basis Darmstadt-Griesheim in Toisen, aus der Dänischen Basis gefolgert 3,5994562,

[*) Siehe Soldners Brief an Gauss vom 26. Dezember 1823, abgedruckt bei F. J. Müller a. a. O., S. 135—137.]

während die unmittelbare Messung 3,5994560 gab, Unt[erschied] = 0,0000002. Den Kreuzberg (Observatorium) hat Gerling vom Inselsberg und von der Milseburg aus geschnitten, obwohl nur wenige male, und darauf ist meine Rechnung gegründet, deren Resultat ich zu beliebiger Vergleichung mit dem Bayrischen beigesetzt habe.

Ich muss noch bemerken:

1. dass die Länge der Dänischen Basis erst provisorisch angegeben ist, da die Messstangen erst noch mit dem neuerdings aus Paris erhaltenen Toisen-Etalon verglichen werden sollten, auch ist sie noch nicht auf den Meereshorizont reducirt; letztere Reduction wird jedoch nur klein sein und vermuthlich den obigen Unterschied der Linie Taufstein-Orberreisig noch mehr vermindern.
2. Auch die Verbindung meines Dreieckssystems ist noch nicht vollkommen und wird es, wenn auf der Dänischen Seite noch einige Winkel gemessen sind, noch mehr werden.
3. In den benutzten Hessischen Dreiecken sind auch zum Theil erst 2 Winkel gemessen, namentlich sind die Stationen Meisner u[nd] Knill noch nicht besucht.

Sie sehen, dass, wenn sämmtliche Messungen erst vollendet sein werden, die Bayrischen Messungen mit den Nordischen in einen schönen Zusammenhang kommen. Die eigentliche Verbindungs-Seite ist Orb-Taufstein; der Feldberg ist eigentlich kein Churhessischer Standpunkt, sondern bisher nur von der Bergerwarte u[nd] dem Taufstein (nicht wie in meiner Zeichnung unrichtig angegeben von Johannisberg) geschnitten, und wird demnächst auch noch vom Dünsberg geschnitten werden. Es wäre zu wünschen, dass auch der Feldberg selbst noch zu einer Station gemacht und die Richtungen zum Dünsberg und Taufstein eingeschnitten werden möchten. Vielleicht haben dies indessen die Bayrischen Trigonometer bereits gethan, obgleich der Dünsberg nicht zu ihrem System gehört, da letztrer Punkt durch ein Signal sichtbar gemacht wird.

Die Verknüpfung meiner Messungen mit den Bayrischen macht nun mein Verlangen, bald in den Besitz der letztern[*)] zu kommen, um so leb-

[*) In Gauss' Nachlass befindet sich ein autographiertes Heft *Resultate des Hauptdreiecksnetzes über das Königreich Bayern* mit den Messungsergebnissen, dabei ein Blatt mit einer Zeichnung von Gauss' Hand, überschrieben *Würtembergsche Dreiecke und deren Verbindung mit den Bayrischen und Badischen.*]

hafter, da ich gern sämmtliche Messungen nach einerlei Methode und Grund-Quantitäten berechnen möchte. Sie machen mir Hoffnung dazu, und ich würde mich dadurch sehr verpflichtet halten. Meinen letzten Brief, der die Gründe meines Wunsches noch ausführlicher enthält, können Sie nach Gefallen zu diesem Zwecke produciren, da Prof[essor] SCHUMACHER bloss wünscht, dass öffentlich nicht eher von dem Unterschiede der berechneten und gemessenen Breiten die Rede sein möchte, als bis er selbst davon zu reden Gelegenheit nehmen wird.

Ich kenne den Umfang der Bayrischen Messungen nicht genug, um beurtheilen zu können, ob es von meiner Seite nicht zu unbescheiden sein würde, um eine Abschrift der Winkel der sämmtlichen Hauptdreiecke zu bitten. In diesem Falle schränke ich jetzt meinen Wunsch nur auf die westliche Hälfte ein, wodurch mit meinen Messungen theils die astron[omischen] Punkte Bogenhausen, Darmstadt u[nd] Tübingen, theils die sämmtlichen Würtembergschen Messungen in Verbindung kommen. Ich bitte bloss um die Winkel der Hauptdreiecke, wie sie wirklich gemessen sind, d. i. zwar auf Centra reducirt, aber nicht ausgeglichen. Auch verlange ich gar keine Rechnungen. Endlich wiederhole ich mein Anerbieten, Ihnen alles, was Sie von meinen eignen Messungen, die übrigens zu ihrer Zeit ausführlich bekannt gemacht werden sollen, zu haben wünschen, mit Vergnügen mitzutheilen. Bei meinen Rechnungen liegen die von WALBECK berechneten Dimensionen des Erdsphäroids zu Grunde.

Mit SCHUMACHER habe ich die correspondirenden Beobachtungen von etwa einem Dutzend Zenithalsternen verabredet. Indessen ist das Wetter bisher sehr ungünstig gewesen, und da diese Sterne bald bei Tage culminiren, so zweifle ich, dass wir eine zulängliche Anzahl Beobachtungen erhalten werden. BESSEL ist auch davon avertirt. In jenem Fall werden wir nachher eine neue Reihe vornehmen, und wenn Sie Neigung haben, auch an diesen Beobachtungen Antheil zu nehmen, werde ich Ihnen das Verzeichniss demnächst zusenden. Zenithalsterne beseitigen fast ganz die Zweifel, die sonst noch wegen Refraction und Flexion stattfinden können, und die Gleichzeitigkeit der Beobachtungen macht uns von den Ungewissheiten in der Aberration, dem Schwanken der Erdaxe, der Präcession u[nd] eignen Bewegung, sowie von der Furcht unabhängig, dass noch kleine unbekannte Anomalien vorhanden sein könnten.

Ich bin daher neugierig auf die Resultate. Die Beobachtungen mit dem Zenith-Sektor in Göttingen und Altona sollen erst noch künftig gemacht werden.

Ich glaube schon in meinem vorigen Briefe bemerkt zu haben, dass die Hannövrischen, Dänischen u[nd] Churhessischen Dreiecke mit ganz gleichen Instrumenten gemessen sind, d. i. 12zolligen ERTELschen Theodolithen; die Preussischen Messungen waren mit einem 8zolligen sogenannten astronomischen Theodolithen gemacht. Bei meinen Winkelmessungen finde ich im Durchschnitt den mittlern Fehler bei n Repetitionen $= \frac{3.''3}{\sqrt{n}}$, oder den sogenannten wahrscheinlichen Fehler $= \frac{2.''2}{\sqrt{n}}$. Bei der Churhessischen ist er etwas grösser. Über die Dänischen habe ich in dieser Rücksicht noch keine Prüfungen angestellt.

Das Wetter ist seit einigen Wochen hier überaus ungünstig, und ich habe den Cometen erst ein Paarmal gesehen (zuletzt nur auf Augenblicke den 16. abends) aber bisher noch nicht beobachten können. Bei günstigerm Wetter würde er sonst jetzt recht gut im Meridian in der untern Culmination und bald einige Tage in beiden Culminationen beobachtet werden können.

Ihrem freundschaftlichen Andenken empfehle ich mich gehorsamst

C. F. GAUSS.

BEMERKUNG.

Im GAUSSarchiv befinden sich 10 Briefe von SOLDNER an GAUSS aus den Jahren 1814—1823, die in der oben S. 88 genannten Schrift F. J. MÜLLERS S. 112—137 abgedruckt sind. Aus ihnen geht hervor (siehe a. a. O. S. 115, 122, 131, 135), dass GAUSS am 22. Dezember 1814, ferner vor dem 21. Januar 1820, vor dem 13. Mai 1821 und vor dem 26. Dezember 1823 Briefe an SOLDNER gerichtet hat. Von diesen vier Briefen ist nur der letzte (vom 12. November 1823 datierte) vorhanden; er wurde mit noch einem späteren um das Jahr 1914 unter den Akten des Katasterbureaus in München aufgefunden. Den vorstehenden Abdruck dieser beiden Briefe von GAUSS an SOLDNER hat O. PERRON mit den jetzt im Landesvermessungsamt zu München befindlichen Handschriften kollationiert.

SCHLESINGER.

20. Sechs Briefe an Friedrich Wilhelm Spehr über die Braunschweigische Landesvermessung 1828—1832.

[Handschriften in der Landesbibliothek in Wolfenbüttel.]

[1.]

Wohlgeborner Herr
Hochgeehrter Herr Professor.

Auf Ewr. Wohlgeboren geehrte Zuschrift erwiedere ich mit Vergnügen, dass ich Ihnen Behuf Ihrer Triangulirung des Herzogthums Braunschweig sehr gern aus den Resultaten meiner Gradmessungs-Triangulirungen sehr gern dasjenige mittheilen werde, was zu jenem Zweck nöthig sein wird.

Einstweilen schicke ich Ihrem Wunsche zufolge die auf Lichtenberg sich beziehenden Zahlen.

Ich finde: Azimuth von Lichtenberg im Centrum des Andreasthurms in Braunschweig (vom wahren Meridian des Andreasthurm an gezählt . . . . $44^{0}35'54''51$,
Entfernung . . . . 11737,39 Toisen.

Diese Zahlen beziehen sich auf den Dreieckspunkt Lichtenberg. Für das Centrum der in einiger Entfernung (gegen 300 Schritt) östlich davon liegenden Thurm-Ruine ist

Azimuth auf dem Andreasthurm . . . . $44^{0}16'37''8$,
Abstand . . . . 11656,8 Toisen.

Alle meine Resultate sind in einer durchaus andern Form, aus welcher obige Zahlen erst durch einige Rechnungen abgeleitet werden mussten, wozu ich nicht eher Zeit gefunden habe, daher einige Verspätung dieser Antwort.

Ich füge für jetzt noch folgende Bemerkungen bei. Ich habe auf Braunschweigschem Gebiete zwei Hauptdreieckspunkte gehabt; der eine ist der oben angegebne Lichtenberg; er wird durch ein steinernes Postament bezeichnet,

und ist auf einem Berge, der den Namen Cruxberg führt und ungefähr dieselbe Höhe haben mag wie der Theil des Gebirges, wo die Ruine liegt (die beiden Plätze waren 1822 gegenseitig nicht sichtbar wegen des Holzes dazwischen, und es war nicht wichtig genug, deshalb eine Öffnung durch das Holz zu machen). — Der zweite Dreiecksp[un]kt war bei Ammensen auf dem östlichsten Theile des Hilsrückens, dort Amtmannshay genannt.

Hier war ein einige 30 Fuss hoher Signalthurm errichtet, und der eigentliche Dreieckspunkt war gleichfalls durch ein steinernes Postament bezeichnet. Jener Signalthurm ist vor ein Paar Jahren (vermuthlich um das Holz u[nd] Eisen zu stehlen) zerstört, eben so auch das Steinpostament. Allein im September d. J. habe ich durch einen der als Gehülfen mir beigegebnen Officiere das Stein-Postament neu aufrichten lassen und ist die Identität des Platzes auf 1—2 Zoll constatirt. Das Postament bei Lichtenberg stand wenigstens im vorigen Sommer noch unbeschädigt, nach einem Briefe des dortigen Reitenden Försters.

Diese zwei Punkte sind mit äusserster Schärfe niedergelegt, sie bilden die Seite von zwei Dreiecken, indem nemlich auf der einen Seite der Brockenhausthurm, auf der andern ein P[un]kt auf dem Deister damit verknüpft ist.

Ausserdem sind noch eine Anzahl anderer Punkte im Braunschweigschen theils bestimmt, theils aus den vorhandenen Messungen bestimmbar, obwohl, da dieselben nur gleichsam gelegentlich bestimmt sind, mit ungleicher Genauigkeit. Der Andreasthurm in Braunschweig, obgleich kein Hauptdreieckspunkt, auch kein Standpunkt für feinste Messungen, ist doch durch meine Schnitte von Brocken, Lichtenberg u[nd] Deister her beinahe mit derselben Schärfe bestimmt wie die Hauptdreieckspunkte, also wahrscheinlich auf einen Bruch[theil] eines Fusses sicher. Die Genauigkeit von 1—2 Fuss möchte auch mehrern Punkten beigelegt werden können, und viel ungenauer möchte auch die Ruine Lichtenberg nicht sein. Innerhalb etwa 5 Fuss genau werden sich recht viele Punkte ansetzen lassen und, wenn die Grenzen noch etwas weiter gesetzt werden, so möchten fast alle Thürme im Westlichen Theil der Nördlichen Hälfte des Herzogthums, d. i. was Westlich von den Strassen von Braunschweig nach Lutter am Bar[enberge] u[nd] Celle liegt, bestimmt oder bestimmbar sein. (Im südlichen Theile ist der neue Thurm von Naensen mit vieler Genauigkeit bestimmt.)

Ich möchte Ihnen hienach anheim geben, ob Sie vielleicht, den betreffenden Kreisämtern noch eine ganz besondere Sorgfalt für die Conservation der beiden Hauptplätze bei Lichtenberg u[nd] Ammensen zur Pflicht zu machen, veranlassen könnten, da Sie daran die allersichersten Anhaltspunkte finden. Für meine eignen Messungen haben sie fortan nur ein untergeordnetes Interesse, aber für Sie selbst sind sie von grosser Wichtigkeit.

Weitere Mittheilungen werden vorerst noch anstehen können, und wird dazu auch erforderlich sein, dass ich erst unterrichtet bin, in welchem Geist und mit welchen Mitteln Sie die Triangulirung auszuführen gedenken. Astronomische Beobachtungen können Sie ganz und gar entbehren, da ich Ihnen gern alles in dieser Hinsicht nöthige mittheilen werde, selbst mit viel grösserer Genauigkeit als es anderswo wie auf einer festen Sternwarte erreicht werden könnte. Allein bei den eigentlichen Hauptwinkelmessungen dürfte, nach meinem Urtheil, nichts gespart werden, um eine so grosse Genauigkeit zu erhalten, dass die Messung einen bleibenden Werth erhält. In der That werden die Kosten dadurch, vergleichungsweise, nicht so sehr erhöhet, und es wäre ewig Schade, wenn durch unzeitige Sparsamkeit die Messungen einen untergeordneten Charakter erhielten. Der Theodolith, womit ich alle meine Hauptwinkel gemessen habe, von Reichenbach, 12 Zoll im Durchmesser, gibt unter gehöriger Vorsicht die Winkel auf Theile der Secunde, kostete nur 800 Gulden (leicht Geld) und einige Abänderungen, die keinen wesentlichen Nachtheil, wohl aber wesentlichen Vortheil gewähren, würden selbst diesen Preis noch vermindern. Man richtet dafür mit einem guten Instrument in viel kürzerer Zeit dasselbe und mehr aus, wie mit einem schlechten in viel längerer oder nie.

Indem ich nochmals das Erbieten meiner Bereitwilligkeit, zur Vervollkommnung Ihrer Arbeit gern beizutragen*) wiederhohle, verharre ich mit vollkommner Hochachtung

Ewr Wohlgeboren

Göttingen, den 18. November 1828.

ergebenster Diener

C. F. Gauss.

*) Da behuf der Detailaufnahme mehrerer Landestheile des Hannoverschen noch mehrere Messungen in der Nähe der Grenzen vorzunehmen sind, so würden vielleicht selbst die beiderseitigen Messungen einander wechselseitig die Hand bieten können, wenn nemlich beide mit gleicher Genauigkeit ausgeführt werden.

[2.]

Wohlgeborner Herr

Hochzuehrender Herr Professor.

In Folge des Verlangens der Vermessungs-Commission und der mir von Ihnen zu erkennen gegebenen Wünsche habe ich gleich nach Ihrem Hiersein einen 12zolligen Repetitions-Theodolithen, ganz demjenigen ähnlich, womit ich selbst die Hauptwinkel bei meiner Triangulirung gemessen habe, bei dem mechanischen Institut von H[errn] Ertel in München bestellt. Da ich aus einer vor kurzen daher erhaltenen Antwort sehe, dass Sie jenes Instrument im Julius d. J. schon erwarten können (eben so wie ich ein ähnliches damals zugleich von mir bestelltes), so habe ich geglaubt, dass es Ihnen angenehm sein würde, diese Nachricht zu erhalten. H[err] Ertel meint, das Instrument gegen Ende Juni schon absenden zu können; inzwischen pflegen solche Überschläge selten genau zuzutreffen.

Ich wiederhohle bei dieser Gelegenheit nochmals, dass ich mit Vergnügen bereit bin, was von mir abhängt, zur Erleichterung und Vervollkommnung Ihrer Messung beizutragen. Auch werden bei meinen eignen Messungen noch mehrere Hauptstandpunkte in der Nähe der Braunschweigschen Grenze vorkommen, die sich mit den Ihrigen verknüpfen lassen können.

Hochachtungsvoll beharre ich

Ewr. Wohlgeboren

Göttingen, den 4. April 1829.

ergebenster Diener

C. F. Gauss.

[3.]

Wohlgeborner Herr

Hochzuehrender Herr Professor.

Da Ewr. Wohlgeboren in Ihrem geehrten Schreiben den Wunsch ausdrücken, Krayenhoffs Werk[*)] zur Ansicht zu erhalten, und ich nicht weiss, ob die hiesige Bibliothek solches hat, so steht Ihnen mein eignes Exemplar

[*) C. R. Th. von Krayenhoff, *Précis historique des opérations géodesiques et astronomiques faites en Hollande*, La Haye 1815.]

mit Vergnügen auf einige Wochen zu Diensten und übersende ich dasselbe hiebei. Vielleicht ists Ihnen lieb auf eine merkwürdige Stelle p. 17, so wie auf die hin und wieder beigeschriebenen Änderungen, die K. zur Ausgleichung angebracht hat (u[nd] die aus Vergleichung mit dem *Tableau définitiv* zusammengelesen werden) aufmerksam gemacht zu werden. Einige Abänderungen sind sehr stark z. B. bei der Station Onstwedde p. 83.

Dieser Tage habe ich von München den schon im vorigen Jahre bestellten 8zolligen Theodolithen erhalten, der sehr schön ausgefallen ist. Den später, mit dem Ihrigen zugleich bestellten 12zolligen verspricht Ertel, so wie den Ihrigen, Ende Julii zu vollenden, falls er mit der Optik nicht zu sehr aufgehalten werde, d. i. falls er aus dem Utzschneiderschen Institut die Gläser zeitig genug erhält.

Es ist gegenwärtig einer der unter meiner Leitung arbeitenden Officiere im Hildesheimschen beschäftigt, wobei er auch einen oder ein Paar Plätze auf Braunschweigschen Gebiet zu Winkelmessungen nöthig hat. Einer ist auf dem Schildberge bei Seesen, wo er mit Erlaubniss des Eigenthümers einen mässigen Pfahl zur Bezeichnung des Platzes u[nd] Rückvisirung eingeschlagen hat. Er schrieb mir neulich er habe erfahren, dass der dortige Bürgermeister Dieterichs dies sehr anstössig gehalten habe u[n]d den Pfahl, auf fremdem Gebiet errichtet, habe ausreissen lassen wollen, aber durch Zureden von Freunden des Officiers noch davon abgehalten sei. So viel ich weiss, ist seinerseits dieser Pfahl von den andern Stationen auch schon wieder eingeschnitten; allein da es für Sie jedenfalls nützlich sein kann, dass dieser Platz, der sehr scharf bestimmt ist, conservirt werde, so könnten Sie oder die Vermessungs-Commission wohl veranlassen, dass dieser Pfahl dem Schutz des dortigen Magistrats besonders empfohlen werde. Ein zweiter Platz wird vielleicht noch in der Gegend von Gandersheim zu besetzen sein.

Hoffentlich haben Sie doch Ihre frühere Idee, einen Hauptplatz auf dem Elm zu wählen, nicht aufgegeben. Er würde mit Lichtenberg u[nd] dem Brocken (wo mein Platz nahe am Centrum des Thurms und seine Lage gegen die Peripherie bestimmt ist) ein gutes Dreieck bilde[n], u[nd] wahrscheinlich würde er wieder mit dem Brocken u[nd] einem Platz auf dem Schlossberge von Blankenburg ein schönes Dreieck formiren, dessen Winkel sich durch Heliotroplicht leicht messen lassen. In Huyseburg fürchte ich, werden Sie

für die Aufstellung noch viel grössere Schwierigkeit finden, als auf dem Andreasthurm in Braunschweig.

Der Platz bei Broizen ist mir wohl bekannt; ich habe daselbst schon A[nn]o 1803—1805 mit einem Sextanten die Winkel gemessen, u[nd] kann Ihnen demnächst, wenn Sie mit dem Theodolithen eine reichere u[nd] genauere Erndte gehalten haben, alle sichtbaren Punkte namhaft machen, die entferntern auf der Ostseite etwa ausgenommen.

Ich selbst werde den grössten Theil des Sommers in Göttingen anwesend sein, vielleicht nur einmal Ende dieses oder im nächsten Monat einen Ausflug nach Westphalen auf 10—14 Tage, und im September einen etwas längern machen.

Hochachtungsvoll beharrend

Ewr. Wohlgeboren

Göttingen, den 18. Junius 1829. ergebenster Diener

C. F. Gauss.

[4.]

Wohlgeborner Herr

Hochzuehrender Herr Professor.

Die Nachricht in Ihrem geehrten Schreiben von dem bevorstehenden wirklichen Anfange der trigonometrischen Vermessung des Herzogthums Braunschweig habe ich mit um so lebhafterm Vergnügen erfahren, je mehr die obwaltenden Umstände die Ausführung jetzt zweifelhaft zu machen schienen; ich wünsche Ihnen daher herzlich dazu Glück.

Mein Dreieckspunkt auf dem Brocken war die Mitte des Thurms auf dem Wirthshause, oder richtiger die Mitte der Marmorplatte, die oben den Dorn der Wendeltreppe bedeckt. Ich habe damals die Radien von diesem Centrum bis zu mehrern Punkten der äussern Peripherie gemessen; unglücklicherweise ist das Blatt, welches die Resultate darstellt, in diesem Augenblick verlegt — das Suchen danach hat meine Antwort etwas verzögert — ich bin indess gewiss, dass es noch vorhanden sein muss; jedenfalls lässt es sich aus den Originalabmessungen wiederherstellen und werde ich es Ihnen in der Folge mittheilen. Übrigens beträgt diese Abweichung des Centrum des Instruments vom Centrum des Thurms nur wenig über einen Zoll.

Es wird mir sehr erwünscht sein, von dem Fortgang Ihrer Messung weitere Nachricht und von den gemessenen Winkeln Mittheilung zu erhalten. Ich lasse in diesem Jahr die Messungen östlich von meinen Gradmessungsdreiecken anfangen. In diesem Gebiete werden ohne Zweifel mehrere Punkte sich finden, die sich vortheilhaft mit Ihrem Elmplatz verbinden liessen, daher mir demnächst die baldige Kenntniss der Winkel, die diesen Platz bestimmen, erwünscht sein würde. Ist daselbst ein Signal errichtet und von welcher Form?

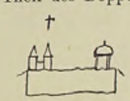
Die Messungen des G[ene]ral v. Müffling fangen in der Gegend von Coblenz an, wo sie sich an Tranchots Dreiecke anschliessen; wie weit sie sich in diesem Augenblicke erstrecken, weiss ich nicht; ich besitze die Dreiecke bis Berlin. Der Brocken u[nd] der Nördliche Domthurm von Magdeburg sind die einzigen Punkte dieser Kette, die in dem Bereich Ihrer Messungen liegen.

Ich füge Ihnen die Azimuthe einiger Punkte von Brocken aus gesehen hier bei; es sind eigentlich nicht die wahren Azimuthe, sondern die Winkel mit einer Parallele mit dem Göttinger Meridian:

5° 10′	Inselsberg Haus
18 7	Struth (Kirchth[urm] b[ei] Mühlhausen)
57.35	Hercules
63.15	Plesse
97. 8	Doppelthurm; damals für Gandersheim gehalten, ist aber nicht
97.11	Gandersheim (Ihrer Aufmerksamkeit empfohlen). Vielleicht Gittelde?
141.12	Sutmerthurm b[ei] Goslar
145.58	Otfresen
147.15	Lichtenberg Dreieckspunkt
171.45	Heiningen
171.53	Wolfenbüttel Kirchth[urm]
172.19	Braunschweig Andreas
172.26	Sehr hell leuchtendes Object (Ihrer Aufmerksamkeit empfohlen) vielleicht Fenster eines Treibhauses
176.53	Spitzer Thurm
235.13	Huyseburg
*235.14	Huyseburg
241.42	Magdeburg
241.43	Magdeburg

249.39	Halberstadt
270.54	Quedlinburg
*278.53	Hüttenrode
282.39	Petersberg b[ei] Halle.

Ich bemerke noch, dass ich die beiden mit * bezeichneten Richtungen sehr genau mit den Hauptrichtungen verbunden, oder wie ich es nenne, sie in mein Messungssystem aufgenommen habe; ich würde Ihnen daher anheim geben, dasselbe zu thun, um unsre Messungen desto besser vergleichbar zu machen. Meine Hauptrichtungen waren Inselsberg, Hohehagen, Hils u[nd] Lichtenberg, welche alle vier durch Heliotroplicht sichtbar gemacht werden mussten. Falls Sie also nicht auch etwa den D[reiecks]p[un]kt Lichtenberg durch Heliotroplicht einschneiden, würde, ohne Zuziehung von Huyseburg oder Hüttenrode, ein Verknüpfungspunkt unsrer Messungen fehlen, da ich Braunschweig nur mit einer geringen Anzahl von Repetitionen eingeschnitten habe. Allen Irrthum zu vermeiden, bemerke ich noch, dass bei Huyseburg der Mittelste der Thürme, oder der rechte Theil des Doppelthurms gemeint ist.



(aus dem Gedächtnis gezeichnet.)

Auch ich habe in den Jahren 1822—1825 einen sehr grossen Spiegel mit mir geführt, dem ich durch ein höchst einfaches Verfahren mit grösster Schärfe die erforderliche Richtung gab, und der mir besonders bei sehr grossen Entfernungen oder in den mit Moordampf angefüllten Gegenden oft gute Dienste geleistet hat. Sie werden nur sorgfältig darauf achten müssen, dass nicht nur vorher der Hülfsspiegel nach Verhältniss der beiden mathematischen Bedingungen, denen seine Stellung Genüge leisten muss, genau berichtigt sei, sondern auch, dass diese Berichtigung beim Transport nicht wieder derangirt werde. Vielleicht wäre es in dieser Beziehung vortheilhafter, wenn der grosse Spiegel von seinem Stell-Apparat ganz getrennt wäre, oder wenigstens beim Einpacken davon getrennt würde.

. . . .

Ich muss noch einmal auf die Brockenmessungen zurückkommen. Hier sind noch die Azimuthe (so verstanden wie oben) von einigen Plätzen des

Lieutenants HARTMANN von vorigem Jahre, an welchen Pfähle errichtet sind, die Sie (in sofern solche noch stehen, was doch wenigstens von einigen zu präsumiren ist) mit dem kräftigen Fernrohr des ERTELschen Theodolithen unter günstigen Umständen wohl werden einschneiden können. Auf dem Festberge steht ohnehin Ihr eignes Signal.

$150^0 36'$ { Hamberg bei Kniestedt (Platz nahe an der Braunschw[eigschen] Grenze, der eine sehr reiche Aussicht beherrscht)

181. 9½ Festberg }
181.43 Vorberg } im Braunschweigschen

167.26 Harlysberg

168. 9 Platz am Hohen Wege bei Schladen

148. 0 Bärenkopf bei Liebenburg (äusserst reiche Aussicht).

Sehr hinderlich ist den Messungen auf dem Brocken die Seltenheit windstiller Tage. Ich habe fast immer einen oder ein Paar Schirme auf der Windseite aufgespannt halten lassen müssen.

Mit ausgezeichneter Hochachtung habe ich die Ehre zu beharren

Ewr. Wohlgeboren

Göttingen, den 9ten Junius 1830. gehorsamster Diener

C. F. GAUSS.

[5.]

Wohlgeborner Herr

Hochzuehrender Herr Professor.

Eine fast unabsehbare Menge von Arbeiten hat mich in meiner ganzen Correspondenz ausserordentlich zurückgesetzt und ich bin noch auf eine grosse Anzahl von Briefen mit der Antwort im Rückstande. Entschuldigen Sie es daher, dass ich auf Ihren gütigen Brief so spät antworte.

Für die Mittheilung der von Ihnen gemessenen Winkel auf Lichtenberg und dem Festberge danke ich bestens. Ich finde, dass sie sehr gut zu den diesseitigen passen, mit Ausnahme des Schnitts von Barwede auf dem Festberge, welcher über einen Grad unrichtig ist. Allein dies liegt natürlich nur an einer Verwechslung des Objects, und es ist sogar nach den Untersuchungen, die mein Sohn in Barwede, obwohl nur bei einem kurzen Aufenthalt und unter

sehr ungünstigen Witterungsumständen angestellt hat, sehr wahrscheinlich geworden, dass Barwede und Festberg gar nicht gegenseitig sichtbar sind, sondern dass ein Holz bei Möhrse (unweit Fallersleben) dazwischen liegt. Im nächsten Jahre werden darüber genauere Nachforschungen angestellt werden: Vorläufig ist aber der Platz von Bawerde schon sehr gut bestimmt.

Dann muss ich noch bemerken, dass bei den Schnitten auf dem Festberge, welche mein Sohn auf Ihren Wunsch maass, zum Theil unrichtige Namen gebraucht sind. Ich kann die Verbesserung jetzt mit Zuversicht machen, da die betreffenden Punkte bereits vor einem Jahre in Folge der Messungen des H[errn] Lieutenant HARTMANN von mir ausgemittelt sind. Es ist nemlich

$14^0 28' 27'',813$ der Winkel zwischen Brocken und Lengde (nicht Achim)

19 10 27,863 . . . . Bornum

15 $\underline{36}$ 9,688 (nicht 13 26 9,688 wie durch einen Schreibfehler in der Handschrift stand) W[inkel] zw[ischen] Brocken und Borsheim (nicht Hornburg).

Was die Bestimmungsstücke der Seite Lichtenberg-Brocken betrifft, so bin ich ungewiss, in welcher Form Sie solche wünschen. Ich gebe sie daher in doppelter, wie ich überhaupt die Berechnung der Gradmessungsdreiecke auf zwei ganz von einander unabhängige Arten geführt habe.

1) Der Logarithm der Entfernung Lichtenberg-Brocken, den Erdmeridian zu 40 000 000 Meter gerechnet und WALBECKS Erddimensionen zum Grunde gelegt (vergl. meine Breitenbest[immung] von Göttingen und Altona), ist

4,6015606.

Das Azimuth des Brockens auf Lichtenberg $327^0 30' 59'',257$.

Das Azimuth von Lichtenberg auf dem Brocken 147 46 36,286.

Ferner ist für

Brocken	Breite $51^0 48' 1'',999$	Lange östl. von Göttingen	$0^0 40' 23'',071$
Lichtenberg	52 7 22,171		0 20 33,348.

Dagegen

2) in meinem Verfahren, die Plätze der Punkte durch Coordinaten relativ gegen Göttingen anzugeben, wovon freilich die vollständige Theorie eine eigne Abhandlung erfordert, sind die Coordinaten

vom Brocken $x = -30310{,}^m087$, $y = -46418{,}^m626$

von Lichtenberg $x = -66001{,}353$, $y = -23458{,}424$.

Der Logarithm der geradlinigten Entfernungen zwischen beiden Punkten in dieser Projection ist aber 4,6015611;

ferner die Richtungswinkel dieser geraden Linie in der Projection gegen den Göttinger Meridian resp. 327° 14′ 48″,546
147 14 48,546.

Endlich sind die beobachteten Richtungen, die sich also nicht auf diese gerade Linie selbst, sondern auf die ersten Elemente der Projection der geodätischen Linie (oder auf die Tangenten an denselben in der Zeichnung beziehen) resp. 327° 14′ 45″,733
147 14 52,050,

da meine Projectionsart eine solche ist, wobei die Ähnlichkeit in den unendlich kleinen Theilen mit absoluter Schärfe bleibt. Die Formeln, nach denen die Reductionen von letzern auf erstere berechnet werden

diesmal + 2″,812
− 3,504,

stehen Ihnen auf Verlangen gern zu Dienste, so wie alles was Sie nur von den Resultaten meiner Messungen zu haben wünschen.

Die Coordinaten von Festberg sind	− 69406,765	−47208,411
Braunschweig (Andr[eas]-Th[urm])	− 82417,632	−39390,457
Wolenberg Signal	−102753,813	−31556,860
Barwede Signal	−111021,4	−56285,3.

. . . .

Für heute muss ich schliessen. Mein Sohn ist in diesem Augenblick noch hier, da er mir seit 6 Wochen bei Verarbeitung der Lüneburgischen und Westphälischen Messungen (die eine ungeheure Masse bilden) geholfen hat, wird aber nächstens nach Hannover zurück reisen, vielleicht auch zu den mobil gemachten Truppen mit abgehen müssen. Er lässt sich Ihnen bestens empfehlen.

Mit wahrer Hochachtung beharre ich

Ewr. Wohlgeboren

Göttingen, den 6. December 1830. gehorsamster Diener

C. F. Gauss.

P. S. Ich brauche kaum zu bemerken, dass ich die Mittheilung Ihrer Schnitte (von Huyseburg, Regenstein, Olleberg p.) mit grösstem Dank erkenne u[nd] mit allem was Sie wünschen mögen erwiedern werde.

[6.]

Wohlgeborner Herr
Hochgeehrtester Herr Professor.

Mit Vergnügen erfülle ich Ihr Verlangen, indem ich Ihnen das mir zugesandte Blatt mit Ausfüllung der Coordinaten, die aus meinen oder meiner Gehülfen Messungen abgeleitet sind, zurückgehen lasse. Die Unterschiede sind meistens klein, und ich habe nichts dagegen, in den meisten Fällen selbst den grössern Theil ihres Betrags auf meine Rechnung zu nehmen. Bei zwei Plätzen Wolfelbüttel Schlossthurm und Dungelbeck sind die Differenzen hingegen grösser; ich habe noch nicht Zeit gehabt, nachzusehen, auf welche Messungen meine Bestimmungen gegründet sind, und ob die Schnitte vielleicht der Art sind, dass eine solche Ungewissheit übrig bliebe. Abbenrode gehörte in eine solche Kategorie, da nur zwei einen sehr spitzen Winkel mit einander machende Schnitte vorhanden waren; gleichwohl ist auch hier der Unterschied klein. Noch über zwei Punkte habe ich etwas zu merken: nemlich Duttenstedt stand ursprünglich in meinem Verzeichniss mit −90575,2 −24625,7, ex post ist aber corrigirt −90854,3 −24139,6; ferner Königslutter habe ich −80083,2 −59506,0. Auch bei diesen beiden Punkten kann ich in diesem Augenblick die Ursache dieser Discrepanz nicht untersuchen, und habe die Coordinaten auf dem Blatt nicht mit angesetzt. In Königslutter sind, meine ich, mehrere Thürme.

Mit Verlangen sehe ich der gütigst versprochenen Mittheilung Ihrer vollständigen Coordinaten[*]] entgegen, wodurch ohne Zweifel auch viele von unsern Schnitten, über welche sich nichts mit Wahrscheinlichkeit conjecturiren liess ihre Benennung erhalten werden. Sehr oft findet sich dann auf solche Weise, dass wirklich manche Punkte zweimahl geschnitten sind, was man aber vorher keinen bestimmten Grund hatte anzunehmen.

Mit besonderer Hochachtung verharre ich stets

Ewr. Wohlgeboren

Göttingen, den 17. Februar 1832. gehorsamster Diener

C. F. Gauss.

[*) In Gauss' Nachlass befindet sich eine Abschrift des umfangreichen Ergebnisses »*Des weiland Professor Dr. Spehrs geodätische Messungen im Herzogthume Braunschweig*«.]

21. Flächeninhalt des grossen Oceans und einiger Länder.

[1.]

[Aus einer Besprechung des Werkes von E. A. W. v. ZIMMERMANN, *Australien und der Grosse Ocean*, Hamburg 1810, in BERTUCHs Allgemeinen geographischen Ephemeriden, Bd. 35, S. 48 *)].

{Der Verf[asser] sucht nun den grossen Ocean . . . . . zu begränzen, ... Dieses grosse Wasserbecken erstreckt sich demnach von . . . . bis . . . . . ., und beträgt nach den besten Karten, zu Folge der Berechnung des Prof. GAUSS, 2834000 geogr[aphische] $\square$ Meilen, folglich über $\frac{1}{4}$ der ganzen Erdoberfläche, wenn man diese KLÜGELS Berechnung zu Folge = 8400165 annimmt.}

[2.]

[E. A. W. v. ZIMMERMANN, *Australien und der Grosse Ocean*, Hamburg 1810.
(Aus der Vorrede.)]

{Um kein Werk zu liefern, welches einem solchen Unternehmen gänzlich unwürdig wäre, suchte ich einige vorzügliche Männer auf, mir hierbei die Hand zu bieten. Der Herr Professor GAUS[s], dessen Name jede weitere Anpreisung unnütz macht, übernahm aus vieljähriger Freundschaft die Berechnung der Grösse mehrerer der wichtigsten Länder Australiens nach einigen der neuesten Karten. Er schuf sich hierzu eigene Methoden, worüber er gelegentlich etwas Bestimmtes bekannt machen wird.}

[*) Bei der Angabe des Oberflächeninhalts des grossen Ozeans im Text des v. ZIMMERMANNschen Buches S. 11 ist in einer Fussnote bemerkt, dass die Berechnung von GAUSS ausgeführt worden ist. Auch das Manuskript zu seinem Werk, *Frankreich und die Freistaaten von Nordamerika, Vergleichung beider Länder, ein Versuch*, Berlin 1795, liess v. ZIMMERMANN von GAUSS durchsehen; denn in einem im Braunschweigischen Landes-Hauptarchiv befindlichen Originalbrief von GAUSS an v. ZIMMERMANN vom 19. Oktober 1795 macht GAUSS auf eine Reihe von Irrtümern in den angegebenen statistischen Zahlen aufmerksam.]

22. Über ein neues Hilfsmittel für die magnetischen Beobachtungen.

Vorgelesen in der Sitzung der k. Societät am 19. Sept. 1837 [*)].

Zu der Feier der Georgia Augusta tritt unsere Societät, wie beim goldenen Feste der Mutter die Tochter erscheint, nicht, um in zierlicher Rede ihre Gefühle auszusprechen, sondern um die Freude des Hauses zu theilen, und eine bescheidene Gabe zu überreichen. Wohl bringt nach heimischer Sitte die Tochter eine einfache in nächtlichen Stunden gefertigte Arbeit ihrer Hände, oder eine im eignen Garten selbst gezeitigte Frucht. Aber die Gefühle der Tochter am Ehrentage der geliebten Mutter, der sie Dasein, Pflege und Gedeihen verdankt, die Gefühle dankbarer freudiger Rührung, sind zu sehr Eins mit ihrem Wesen, um der Worte zu bedürfen. Der Ehrentag der Mutter ist ja auch der Ehrentag der Tochter.

Indem mir die Ehre zu Theil wird, in diesem festlichen Moment und vor einer so glänzenden Versammlung die erste Sitzung unsrer Societät in den neuen Räumen in diesem Sinn mit einem Vortrage zu eröffnen, bin ich mir wohl bewusst, wie sehr ich dabei auf eine wohlwollende Nachsicht in mehr als Einer Beziehung rechnen muss. Ein Vortrag aus dem Gebiete der strengen Wissenschaften, an sich schon wenig verträglich, und jedenfalls unter meinen Händen unbekleidet mit dem Schmuck der Rede, kann im günstigsten Fall eine besondere Theilnahme nur bei denen erregen, die mit ähnlichen Bestrebungen selbst näher befreundet sind. Um so dankbarer wird es anzuerkennen sein, wenn auch solche, die von diesen Wissenschaften entfernter stehen, ihre ehrende Aufmerksamkeit einem Vortrage nicht versagen, von dem ich mehrere ihnen vielleicht trocken erscheinende Entwicklungen nicht wohl trennen kann, ohne oberflächlich, oder selbst unverständlich zu werden.

[*) Vergl. Werke V, S. 352—356.]

Der Gegenstand meines Vortrags ist ein neues Hilfsmittel für die magnetischen Beobachtungen.

[Von hier an ist der Wortlaut identisch mit dem der in Werke V, S. 357 ff. abgedruckten Abhandlung: *Über ein neues, zunächst zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderungen in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmtes Instrument.*]

BEMERKUNG.

Die öffentliche Sitzung der Gesellschaft der Wissenschaften am 19. September 1837 fand zur Feier des hundertjährigen Bestehens der Universität Göttingen statt. E. SCHERING berichtet (Abhandlungen der Ges. d. Wiss. Bd. 34, 1887, Mathem. Classe, S. 1 ff., abgedruckt in SCHERINGs Werken II, S. 234), GAUSS habe den Vortrag in der öffentlichen Sitzung auf den ausgesprochenen Wunsch von ALEXANDER V. HUMBOLDT übernommen, der auch bei jener Sitzung anwesend war. Die vorstehend abgedruckten einleitenden Sätze des von GAUSS gehaltenen Vortrags sind der im GAUSSarchiv (Abteilung D, Manuskripte gedruckter Abhandlungen) befindlichen Originalhandschrift entnommen.

SCHLESINGER.

---

23. Extrait d'un mémoire, contenant une nouvelle theorie des attractions d'un corps homogene de figure spheroïdique elliptique: lequel paraitra dans le 2. Volume des Nouveaux Memoires de la Societé royale de Göttingen.

Je commence par établir trois théoremes generaux. Soit ∂s un element de la surface d'un corps de figure quelconque; PQ, PM, PX, PY, PZ des droites tirées de cet element, la premiere perpendiculairement à la surface et dans le sens de dehors, la seconde au point attiré M, la troisieme, quatrieme et cinquieme parallelement aux axes des coordonnées. Soit r la distance du point M à l'element ∂s, de plus MQ l'angle entre les droites PM et PQ, QX l'angle entre les droites PQ et PX et ainsi de suite, π le rapport de la peripherie au diametre, X l'attraction que le corps entier exerce sur le point M parallelement à l'axe des coordonnées x. On aura

$$\text{I.} \qquad \int \frac{\partial s.\cos MQ}{rr} = -4\pi \quad \text{ou} = 0$$

selon que le point M est interieur ou exterieur au corps.

$$\text{II.} \qquad \int \frac{\partial s.\cos QX}{r} = X.$$

$$\text{III.} \qquad \int \frac{\partial s.\cos MQ.\cos MX}{r} = -X.$$

Les integrales doivent s'étendre par la surface entiere du corps. Je supprime la demonstration de ces théorèmes, qui est aisée à trouver.

Pour un spheroide elliptique, dont les trois axes principales sont A, B, C, les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de la surface sont liées par l'equation

$$\frac{xx}{AA} + \frac{yy}{BB} + \frac{zz}{CC} = 1.$$

En designant le radical $\sqrt{\left(\frac{xx}{A^4} + \frac{yy}{B^4} + \frac{zz}{C^4}\right)}$ par ρ, on trouve aisément

$$\cos QX = \frac{x}{AA\rho}, \quad \cos QY = \frac{y}{BB\rho}, \quad \cos QZ = \frac{z}{CC\rho}.$$

De plus, a, b, c étant les coordonnées du point M, on a

$$r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2},$$

et

$$\cos MX = \frac{a-x}{r}, \quad \cos MY = \frac{b-y}{r}, \quad \cos MZ = \frac{c-z}{r}.$$

Enfin

$$\cos MQ = \frac{1}{\rho r}\left(\frac{(a-x)x}{AA} + \frac{(b-y)y}{BB} + \frac{(c-z)z}{CC}\right).$$

Pour exprimer ∂s, nous introduisons deux indeterminées p, q telles qu'on ait

$$x = A\cos p$$
$$y = B\sin p\cos q$$
$$z = C\sin p\sin q$$

où, pour embrasser la surface entiere, p doit s'étendre de 0 a 180° et q de 0 a 360°. On trouvera, par des procedés connûs, qu'on doit faire

$$\partial s = \partial p.\partial q.ABC.\rho.\sin p.$$

Ainsi, nos trois théorèmes nous fournissent

$$(1.) \qquad \iint \frac{\partial p.\partial q.\sin p}{r^3}\left(\frac{(a-x)x}{AA} + \frac{(b-y)y}{BB} + \frac{(c-z)z}{CC}\right) = -\frac{4\pi}{ABC} \quad \text{ou} = 0,$$

selon que M est en dedans de l'ellipsoide ou en dehors.

$$\text{(2.)}\qquad \iint \frac{\partial p\,.\,\partial q}{r}\cdot BC\,.\cos p\sin p = \mathrm{X}$$

$$\text{(3.)}\qquad -\iint \frac{\partial p\,.\,\partial q\,.\,ABC\,.\sin p}{r^3}(a-x)\Big(\frac{(a-x)x}{AA}+\frac{(b-y)y}{BB}+\frac{(c-z)z}{CC}\Big) = \mathrm{X}.$$

Les integrales (2) et (3) ne pouvant être obtenues par les méthodes connûes, j'y parviens de la maniere suivante. En faisant $X = ABC\xi$, nous avons

$$\text{(4.)}\qquad \xi = \iint \frac{\partial p\,.\,\partial q\,.\cos p\,.\sin p}{Ar}$$

$$\text{(5.)}\qquad \xi = -\iint \frac{\partial p\,.\,\partial q\,.\sin p}{r^3}(a-x)\Big(\frac{(a-x)x}{AA}+\frac{(b-y)y}{BB}+\frac{(c-z)z}{CC}\Big).$$

Maintenant je considere A, B, C comme des valeurs particulieres de trois variables α, β, γ, liées entre elles par la condition, que $\alpha\alpha-\beta\beta$, $\alpha\alpha-\gamma\gamma$ soient des quantités constantes. On conclut facilement de l'équation (4), que α croissant à l'infini, ξ diminuera continuellement: on a donc, pour α infini, $\xi = 0$. Je differentie l'équation (4) par rapport aux variables α, β, γ, d'où il s'ensuit, en emploïant la characteristique δ,

$$\begin{aligned}\alpha\delta\xi+\xi\delta\alpha &= -\iint \frac{\partial p\,.\,\partial q\,.\cos p\,.\sin p\,.\,\delta r}{rr}\\ &= \delta\alpha\iint \frac{\partial p\,.\,\partial q\,.\,x\sin p}{r^3}\Big(\frac{(a-x)x}{\alpha\alpha}+\frac{(b-y)y}{\beta\beta}+\frac{(c-z)z}{\gamma\gamma}\Big)\end{aligned}$$

ou, mettant pour ξ sa valeur, tirée de l'équation (5),

$$\alpha\delta\xi = \delta\alpha\,.\iint \frac{\partial p\,.\,\partial q\,.\,a\,.\sin p}{r^3}\Big(\frac{(a-x)x}{\alpha\alpha}+\frac{(b-y)y}{\beta\beta}+\frac{(c-z)z}{\gamma\gamma}\Big).$$

Cette équation, comparée à l'équation (1), nous donne

$$\text{(6.)}\qquad \delta\xi = -\frac{4a\pi\delta\alpha}{\alpha\alpha\beta\gamma},$$

tandisque M est en dedans du corps, et

$$\text{(7.)}\qquad \delta\xi = 0,$$

tandisque M est en dehors du corps. L'équation (7) nous enseigne, que ξ reste constante, ou l'attraction proportionelle à la masse, pour tous les spheroïdes, dont les ellipses principales ont les mêmes foïers, pourvûque le point

M ne devienne pas interieur. Le probleme de l'attraction d'un spheroïde sur un point externe quelconque se reduit donc à l'évaluation de l'attraction d'un autre spheroïde, decrit des mêmes foïers et passant par le point attiré. Pour la determiner, passons à l'autre cas, où le point attiré est interieur. Comme on a $\beta\beta = \alpha\alpha+BB-AA$, $\gamma\gamma = \alpha\alpha+CC-AA$, nous substituerons ces valeurs dans l'équation (6), en faisant en même tems $\frac{A}{\alpha} = t$. De la nous tirons

$$\delta\xi = \frac{4a\pi tt\delta t}{A^3\sqrt{\Big\{\Big(1-\Big(1-\frac{BB}{AA}\Big)tt\Big)\Big(1-\Big(1-\frac{CC}{AA}\Big)tt\Big)\Big\}}},$$

ou en remettant la characteristique ∂

$$\xi = \frac{4a\pi}{A^3}\int \frac{tt\partial t}{\sqrt{\Big\{\Big(1-\Big(1-\frac{BB}{AA}\Big)tt\Big)\Big(1-\Big(1-\frac{CC}{BB}\Big)tt\Big)\Big\}}},$$

l'intégral étant determiné de maniere, qu'il s'evanouisse pour $t = 0$ et étendu jusqu'à $t = 1$, pour le spheroïde determiné. On a donc

$$\text{(8.)}\qquad \mathrm{X} = \frac{4a\pi BC}{AA}\int \frac{tt\partial t}{\sqrt{\Big\{\Big(1-\Big(1-\frac{BB}{AA}\Big)tt\Big)\Big(1-\Big(1-\frac{CC}{AA}\Big)tt\Big)\Big\}}}.$$

Cette équation donne donc l'attraction pour tous les points, qui ne sont pas exterieurs, et puisqu'elle doit être juste jusqu'à la surface même, est que l'attraction sur un point exterieur est deja reduite à l'attraction sur un point de la surface, **le problème est complettement resolu** *).

L'équation (8) montre de plus, que pour un point interieur, l'attraction de tous les spheroïdes **semblables** et semblablement posés est identique. En supposant donc un tel spheroïde partagé en couches, dont les surfaces exterieures et interieures soient semblables, il est évident que toutes les couches exterieures au point attiré produisent une attraction égale à zéro, de sorte qu'il ne reste que l'attraction du noïau, dont la surface passe par le point attiré.

Göttingen, le 5. Novembre 1812. Ch. F. Gauss.

*) Il est superflu de remarquer, que l'attraction parallele aux deux autres axes se trouve immediatement, en échangeant a, A en b, B ou en c, C.

BEMERKUNG.

Über die Entstehungsweise der vorstehend abgedruckten Notiz orientiert der Werke X, 1, S. 378, 379 wiedergegebene Brief von GAUSS an LAPLACE vom 5. November 1812, wo es in bezug auf die der Gesellschaft der Wissenschaften vorzulegende Abhandlung über die Attraktion eines elliptischen Sphäroïds (Werke V, S. 1 ff.) heisst: »J'ai l'honneur de vous offrir ici un Extrait de ce qui est essentiel au problème cité . . .« Diesen Auszug hat LAPLACE, dem Wunsche von GAUSS gemäss, den dafür interessierten Mitgliedern des Französischen Instituts mitgeteilt (siehe das Antwortschreiben von LAPLACE vom 20. November 1812, Werke X, 1, S. 380, 381); das Manuskript ist später in der Besitz von M. CHASLES übergegangen, der es dann J. BERTRAND geschenkt hat. Dieser berichtet nämlich in seinem *Éloge historique de Michel Chasles*, Paris 1892, das folgende: . . . CHASLES m'apportait en échange un précieux autographe de GAUSS. C'était le résumé inédit, écrit pour LAPLACE, du beau mémoire sur l'attraction des ellipsoides. La démonstration est réduite au plus petit nombre de lignes qu'il soit possible; il semble que GAUSS ait voulu, à l'avance, vaincre en simplicité le mémoire tant admiré de CHASLES sur le même sujet[*)]. Ce petit chef-d'oeuvre calligraphié par son illustre auteur avec une sorte de coquetterie, se trouve aujourd'hui à Stockholm parmi les papiers laissés par Mme. DE KOWALEWSKI, qui l'avait admiré, et à qui j'en avait fait don«. Nach einer Mitteilung von G. MITTAG-LEFFLER an den Unterzeichneten vom 8. Okt. 1917 hat SOPHIE KOWALEWSKI das in Rede stehende Manuskript noch bei ihren Lebzeiten an MITTAG-LEFFLER weitergegeben, der es in seiner Bibliothek zu Djursholm aufbewahrt und die Güte hatte, für das GAUSSarchiv eine photographische Nachbildung davon anfertigen zu lassen. Diese Nachbildung ist dem vorstehenden, buchstabengetreuen Abdruck zugrunde gelegt worden.

SCHLESINGER.

---

24. Zwei Briefe von Gauss an Joh. Friedr. Benzenberg[**)].

[Handschriften in der Stadtbibliothek zu Bremen.]

[1.]

GAUSS an BENZENBERG. Göttingen, 25. August 1830.

Hochgeschätzter Herr Professor.

Die von Ihnen gütigst übersandte Schrift habe ich erhalten, und sage Ihnen meinen gehorsamsten Dank dafür. Ich habe die darin enthaltenen

[*)] M. CHASLES, *Solution synthétique du problème de l'attraction des ellipsoides etc.*, Comptes rendus **6**, 1838, S. 902—915 auch LIOUVILLEs Journal de Mathém. **5**, 1840, S. 465—488.]

[**)] Vgl. hierzu die Anzeige von BENZENBERGs Schrift »*Über die Daltonsche Theorie*«, Göttingische Gelehrte Anzeigen, Dezember 1830, Werke V, S. 583—591.]

Zusammenstellungen mit Vergnügen, obwohl bisher nur sehr flüchtig, gelesen, wenn ich gleich mich mit der DALTONschen Hypothese nicht befreunden kann. Nach meiner Ansicht können barometrische Messungen von Berghöhen schwerlich etwas darüber entscheiden, weil die Rechnungsconstanten, welche bei Berechnung solcher Messungen zum Grunde gelegt werden sollten, eben aus solchen Messungen selbst erst abgeleitet werden müssen (wenigstens halte ich die andern Methoden durch Abwägen von Luft u[nd] Quecksilber nicht der gleichen Genauigkeit fähig). Ich dächte, die Erfahrung, dass wir Kanonenschüsse in bedeutenden Entfernungen nicht als 4 von einander ganz getrennte Knälle hören, sei eine vollständige Widerlegung von DALTONS Hypothese.

. . . .

Ihrem Verlangen zufolge habe ich mir von der hiesigen Universitätsbibliothek den Band des Journal de physique, worin D'AUBUISSONS Messungen[*)] stehen, für Sie auf 14 Tage ausgebeten und schicke solchen hierneben; bei der Zurücksendung wollen Sie sich bloss der Addresse

An die Königliche Sternwarte zu Göttingen

bedienen.

Ihren Unfall beklage ich mit herzlicher Theilnahme. Auch mich würden Sie seit den 9 Jahren, wo ich Sie mit Hrn. Prof. BRANDES hier sah, wol bedeutend verändert finden. Glücklich, bei wem nur die Gesetze der materiellen Welt das Altern beschleunigen.

Leben Sie wohl GAUSS.

Göttingen, den 25. August 1830.

Ich ersuche Sie das Paket unfrankirt zurückzusenden, wo es sicherer geht.

[*)] J. F. D'AUBUISSON, *Mémoire sur la mésure des hauteurs à l'aide du baromètre.* Journal de physique, t. 70, janvier 1810, S. 434—475, t. 71, juin 1810, S. 1—42 ter.

[2.]

Gauss an Benzenberg. Göttingen, 27. Oktober 1830.

Hochzuehrender Herr Doctor.

Ich war eben im Begriffe, Sie an die Zurücksendung des Journal de physique zu erinnern, um welches ich, da ich es nur auf einige Wochen geborgt hatte, bereits gemahnt war, als ich das Paket erhielt. . . . .

Den zweiten Band des J[ournal] d[e] ph[ysique] hatte ich nicht mitgeschickt, um das Paket nicht unnützerweise zu vergrössern, da ich vermuthete, dass nur der erste, die Thatsachen enthaltende Theil besonderes Interesse für Sie haben könne. Da Sie jedoch so grossen Werth darauf zu legen scheinen, so habe ich es Ihnen nicht abschlagen wollen, Ihnen jetzt auch diesen Theil zuzufertigen, muss Sie aber dringend ersuchen, ihn baldmöglichst wieder zurückzusenden.

Übrigens darf ich Ihnen nicht verschweigen, dass ich bei genauerer Prüfung Ihrer Schrift Ihre Berechnung der Barometerhöhen in Daltons Hypothese unrichtig befunden habe, und dass diese Hypothese, von welcher Sie den H[errn] Dr. Olbers mit Unrecht für einen Anhänger halten, weit entfernt, die barometrische Höhe des Monte Gregorio der von d'Aubuisson gemessenen trigonometrischen näher zu bringen, sie sogar noch etwas weiter davon entfernt. Bei mässigen Höhen ist der Unterschied in Daltons Hypothese von der gewöhnlichen Rechnung ganz unmerklich und würde bei einer Höhe von 400 Fuss nicht $-0,9$ Fuss, sondern $+0,01$ Fuss betragen. Sie brauchen sichs also in dieser Rücksicht nicht gereuen zu lassen, Ihr Project mit dem Michaelisthurm aufgegeben zu haben.

Ich bin so sehr mit Arbeiten überhäuft, dass ich mich auf diese Anzeige jetzt einschränken muss, zumahl da ich nicht weiss, ob Ihnen die umständlichere Auseinandersetzung angenehm sein würde. Sollten Sie jedoch solche wünschen, und mir Ihren Wunsch bei Zurücksendung des Journal de physique zu erkennen geben, so bin ich dazu erbötig, sobald ich Zeit gewinnen kann, und zweifle nicht, Ihnen den Irrthum vollkommen evident zu machen.

. . . .

BEMERKUNG.

Bei Gelegenheit der im Jahre 1924 durch Vermittlung des Oberbibliothekars H. Schneider (damals an der Landesbibliothek zu Wolfenbüttel) geführten Verhandlungen mit dem Bremer Staatsarchiv wegen der oben S. 73 ff. abgedruckten Handschriften wurden wir durch das Staatsarchiv darauf hingewiesen, dass sich auch im Besitz der Bremer Stadtbibliothek einige Gausshandschriften befinden. Es sind dies ausser den beiden vorstehend abgedruckten beiden Briefen an Benzenberg noch ein Brief an Dr. Christian Focke den Schwiegersohn von Olbers) vom 2. Juni 1831 und die Originalhandschrift der Abhandlung *Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden* (Werke VI, S. 148 ff.); auf die letztgenannte Handschrift wird weiter unten noch zurückzukommen sein. Die Stadtbibliothek hat die Erlaubnis erteilt, dass von diesen Handschriften photographische Nachbildungen für das Gaussarchiv angefertigt werden; diese sind dem Abdruck der beiden Briefe zugrunde gelegt worden.

Schlesinger.

25. Briefwechsel zwischen Gauss und Karl August v. Steinheil.

[1.]

Steinheil an Gauss.

[München, den 3ten December 1835.

Ew. Hochwohlgeboren

beehre ich mich beifolgend die Variationsbeobachtungen des letzten Haupttermines, wie wir sie hier anzustellen im Stande waren, in Original zu übersenden.

Das Observationslocale war im Saale des phys[ikalischen] Staatscabinetes von nahe 50 Fuss Länge und 40′ Br[eite], im Gebäude der Kgl. Akademie gelegen. Die Erschütterungen, welche vorüberfahrende Wagen in den Mauern hervorbringen, sind sehr bedeutend; doch haben sie bei der von Ew. Hochwohlgeboren gewählten Aufhängung der Nadel auf diese keinen sichtbaren Einfluss, weil sie in verticaler Richtung wirken. Der Theodolit wurde so aufgestellt, dass er von dem Fussboden getrennt ist. Auch bei ihm wirken die Erschütterungen senkrecht, und ändern, wie sich aus den Beobachtungen ergab, das Azimut nicht. Der 4-pfündige Magnetstab wurde an einem Stahldraht von 15 Fuss Länge und $0\overset{\prime\prime\prime}{,}0937$ Par[iser] Duod[ecimal] Linien Dicke mittels der Schraubensuspension aufgehängt, und bis auf wenige Minuten mit seiner mechanischen Axe horizontal gelegt, dann mit dem vor Luftzug schützenden Kasten umgeben. Die Scala am Stativtische des Theodoliten befestigt, ist $7\overset{m}{,}3745$ (Scala-Mètre) von der Spiegelebene entfernt. Mittels des Theodoliten ergab sich der Werth eines Scalatheiles d. i. eines Scala-Millimètres = $13\overset{\prime\prime}{,}985$ Bogen. Die optische Kraft des Theodolitenfernrohres war unter diesen Umständen zu gering, um mit Bequemlichkeit noch $^1/_{10}$ Scalatheil schätzen zu können. Desshalb wurde ein FRAUNHOFERsches Fernrohr von 29‴ Öffnung und 60 maliger Vergrösserung mit einer Theodoliten-Axe versehn, und benutzt. Der Planspiegel der Nadel ist so vollkommen, dass das Scalabild bei dieser starken Vergrösserung und bedeutenden Entfernung noch völlig scharf erscheint. Die Schwingungsdauer der Nadel betrug ohne aufgelegtes Gewicht, d. h. bloss Schiffchen und Spiegel tragend, $27\overset{\prime\prime}{,}49$. Der grössern Bequemlichkeit beim Notiren der Zeit wegen, brachte ich durch Auflegen der virga transversalis und kleiner Gewichte die Schwingungszeit auf $29\overset{\prime\prime}{,}715$ m[ittlere] Zeitsecunden. Dann wurde von 30″ zu 30″ die Lage der Scala notirt. Zur Beruhigung der Nadel habe ich eine eigene Vorrichtung getroffen, die sich als sehr zweckmässig bewährte. Ich befestigte nämlich einen 4-pfündigen Magnetstab mit hölzerner Klammer in seiner Mitte auf einer Axe, welche parallel mit der magnetischen Axe der Nadel liegt, so, dass sich der Magnetstab um diese Axe drehen lässt und dabei eine Ebene beschreibt, welche mit der Spiegelebene der Nadel parallel ist. Wird dieser Magnetstab vertical gestellt, so influenzirt er bekanntlich nicht auf die Nadel; er gewinnt aber um so grössern Einfluss, je mehr er nach beiden Seiten geneigt wird, bis er in horizontaler Lage sein Maximum erreicht. Man hat es daher völlig in seiner Gewalt, durch horizontale Lagen des Stabes grossen Schwingungen rasch entgegen zu wirken, in dem Maasse aber, in welchem die Schwingungen kleiner werden, durch kleine Neigungen des Stabes auch nur kleine magnetische Gegenkräfte zu benutzen. Die Drehungsaxe dieses Beruhigungsstabes liegt in der Colimations-Ebene, und ist an dem Stativtische des Theodoliten befestigt, so dass der Beobachter ohne mit dem Auge das Fernrohr zu verlassen, in jedem Augenblicke beruhigen kann. — Dass diess aber während der Beobachtungen nicht geschehen darf und auch nicht geschah, versteht sich von selbst. Noch habe ich zu bemerken, dass der Theodolit **südlich** von der Nadel aufgestellt ist, die Mire aber nördlich und etwas höher steht. Zur Beleuchtung der Scala bei Tag benützte ich einen Hohlspiegel von Glas, der 2 Fuss Durchmesser hat, und das Bild des nahe liegenden Fensters auf die Scala bringt. Dennoch ist nachts durch 2 grosse ARGAND'sche Lampen die Erleuchtung noch angenehmer. Ganz nahe zur rechten Seite des Beobachters ist eine LIEBHERR'sche Halbsecunden-Uhr aufgestellt, deren Abfall sehr vernehmlich ist. So schien mir für Bequemlichkeit und Sicherheit gehörig gesorgt.

Ich forderte nun mehrere meiner Freunde und Leute des Faches zur Theilnahme an den Terminbeobachtungen auf, und sie entsprachen alle mit grosser Bereitwilligkeit. Doch waren nur wenige Tage zu Vorübungen gegeben und Manche des Beobachtens überhaupt noch unkundig. Jeden Falles wird es in Zukunft besser gehn. SIBER ist mein specieller College als Professor der Physik, zudem jetzt Prorector der Universität; er konnte daher nicht wohl umgangen werden. PAULI ist Director der Polytechnischen Schule dahier. LAMONT, wie Ew. Hochwohlgeboren bekannt, Conservator der Sternwarte in Bogenhausen; SCHRÖDER, HIERL, ZUCCARINI sind Professoren an hiesiger Hochschule. LIPPOLT ist mein Mechanikus, SCHLEICHER mein Cabinetsdiener, welche letzten beide während der ganzen Beobachtungszeit für den Nothfall oder unvorhergesehner Ereignisse wegen zugegen sein mussten.

Recht neugierig sind wir alle, die gleichzeitigen Beobachtungen an andern Orten zu sehn. Dürfte ich wohl Ew. Hochwohlgeboren bitten, mir durch Freund WEBER einen Abdruck der Curven, oder wenigstens der Göttinger Curve zukommen zu lassen?

Ich hoffe in Kurzem einen 2ten magnetischen Apparat auf dem Observatorio des hohen Peissenberges aufgestellt zu haben, wo ebenfalls an den Terminbeobachtungen Theil genommen werden soll. Zu absoluten Bestimmungen werde ich wohl erst in einiger Zeit kommen, so wie zu dem Versuche mit der autographischen Construction der magn[etischen] Abweichungen.

Bald werde ich auch Ew. Hochwohlgeboren eine kleine optische Arbeit zusenden können, worin ich zeige, dass man die Kugelaberration und Farbenzerstreuung der Fernröhren durch 3 Linsen mit 2 **variabeln Abständen**, empirisch in aller Schärfe heben kann, wenn die Linsen nur nahezu die von der analytischen Rechnung verlangten Krümmungshalbmesser haben. Für die Praxis — namentlich bei der Construction grosser Refractoren — scheint dieser Gegenstand von einigem Belang. In wenig Wochen wird das erste Fernrohr dieser Art vollendet sein. — Entschuldigen Ew. Hochwohlgeboren die Eile in diesen Mittheilungen.

Mit der Versicherung der unbegrenztesten Verehrung

Ew. Hochwohlgeboren

ergebenst gehorsamster

STEINHEIL.]

[2.]

GAUSS an STEINHEIL.

Hochwohlgeborner Herr
Hochgeehrtester Herr Professor.

Für die gütige Mittheilung der dortigen magnetischen Beobachtungen sage ich Ihnen meinen verpflichtetsten Dank. Ich kann nicht läugnen, dass es mich eben so sehr gewundert als gefreut hat, dass schon dieser erste Versuch so vortrefflich ausgefallen ist, obgleich Ihre Cooperatoren nur erst eine so kurze Anweisung genossen hatten. Machen Sie doch sämmtlichen Theilnehmern darüber mein dankbares aufrichtiges Compliment.

Nur einer geringfügigen Kleinigkeit will ich erwähnen. Sie zählen die Scalentheile als Centimeter, während wir hier, und eben so die Beobachter an allen andern Orten die Gewohnheit angenommen haben, die Millimeter zu zählen. Ich vermuthe, dass Sie sich eben so leicht an diese zweite Zählart oder Schreibart gewöhnen werden, und für uns, die wir oft die Beobb. von vielen Orten neben einander vor uns haben, würde dadurch die freilich nur sehr unbedeutende und nur durch ihre hundertfache Wiederkehr etwas fühlbare Mühe des Überspringens aus einem Register in ein anderes (wie LICHTENBERG so etwas einmahl nannte) erspart.

Hr. MEIERSTEIN wird Ihnen die Abschrift des Extracts aus den hiesigen Beobachtungen zugeschickt, und Sie werden daraus mit Vergnügen die ausserordentliche Übereinstimmung ersehen haben. Nur sind die absoluten Grössen

in München meistens bedeutend kleiner, wie sich früher in ähnlichen Fällen auch immer schon gezeigt hat. Es scheint daher, dass die mysteriösen Ursachen solcher Phänomene grösstentheils im hohen Norden ihren Sitz haben mögen. Wie interessant wird es sein, wenn in Zukunft die Beobachtungen in Upsala zutreten. Diesmahl hatte unser Freund SVANBERG seinen Apparat noch nicht aufstellen können, da erst einige Baueinrichtungen ausgeführt werden mussten. Hoffentlich werden diese fortan keine Verzögerung leiden. Auch ist Hoffnung, dass späterhin noch zwei andere nordliche Plätze zutreten werden, Helsingfors und Lund. — Für Hr. AIRY, bisher in Cambridge, künftig in Greenwich, habe ich unlängst einen Apparat bei Hr. MEIERSTEIN bestellen müssen, wie Ihnen dieser vielleicht selbst gemeldet haben wird.

Vom letzten Termin sind ausser den Münchner Beobachtungen bisher nur noch die von Marburg und vom Haag (Obs. Dr. WENKBACH) eingelaufen. Erstere sind vortrefflich, und die vom Haag lassen zwar noch manches zu desideriren,, sind aber bei allem dem, als erster Versuch, und unter Berücksichtigung mehrerer nicht günstiger Umstände, schon sehr schätzbar. Hr. WENKBACH hatte nur eine Einpfündige Nadel, ein schwaches Fernrohr mit einem Menschenhaar im Focus, und wie es scheint keine Versicherungsmarke. Wegen des zweiten Umstandes sind immer nur ganze Scalentheile (Millimeter) ohne Bruch angesetzt, und der dritte Umstand scheint Schuld zu sein, dass verglichen mit den andern Örtern die Curve für Haag sich allmählig immer mehr herunter senkt, einmahl sogar unverkennbar plötzlich. Bei allem dem ist die Übereinstimmung im einzelnen zwischen allen vier Örtern überraschend gross. Ich bin nicht abgeneigt, diesen Termin lithographiren zu lassen, besonders wenn noch interessante Beobachtungen von andern Orten einlaufen, namentlich Copenhagen, Leipzig, Freiberg, Mailand und Sicilien. Das wird also erst noch eine Zeitlang abgewartet werden müssen.

Electromagnetische Versuche sind seit Ihrem Hiersein noch mehrere interessante vorgekommen. Die Inductionsstösse gingen, wenn der menschliche Körper, etwa mit angefeuchteten Händen, in die Kette gebracht war, auch durch diesen, wie das Magnetometer zeigte, aber ohne eine merkliche Empfindung. Es ergab sich aber zugleich, dass der Hauptwiderstand (der den Strom schwächt) an der Oberhaut war; denn die Stärke des Stroms war nach Ausweis des Magnetometers fast eben so gross, wenn er von einer Hand zur andern durch den Körper gehen musste, als wenn er an einem Punkte einer Hand eintrat und an einem andern Punkte derselben Hand wieder austrat. Daraus wurde geschlossen, dass der Strom viel stärker ausfallen würde, wenn Ein- und Austritt an solchen Theilen des Körpers geschähe, wo die Haut viel dünner ist. Dies bestätigte wieder das Magnetometer vollkommen, zugleich aber war nun auch die Empfindung sehr merklich. Am Zahnfleisch, Zunge oder Gaumen angebracht, sah man zugleich starke Blitze; an wundgelegten Stellen der Arme angebracht, war die Empfindung äusserst schmerzhaft. Die allerwichtigste Bemerkung aber scheint mir die zu sein, dass, an beiden Lippen angebracht, man auf das bestimmteste die Richtung des Stroms unterscheidet, was bei vielen hundert Versuchen nie gefehlt hat. Immer empfindet man den Strom an der Lippe, wo der negative Strom eintritt, und zwar an dieser Lippe allein, (etwa wie einen scharfen Wind), insofern der Strom eine mässige Stärke hat; oder wenigstens ganz überwiegend vorherrschend, falls der Strom sehr stark wird*). Höchst merkwürdig ist noch, dass, während die Wirkung auf die Magnetnadel fast ganz gleiche Grösse behält, man möge die Rolle schnell oder langsam bewegen, (wie solches der Theorie gemäss und von mir schon früher wiederholt öffentl[ich] ausgesprochen ist), die physiologische Wirkung von der Schnelligkeit der Manipulation wesentlich abhängt, so dass man nach Gefallen von völliger Unmerklichkeit bis zu unerträglicher Stärke steigen kann. Dadurch wird nun auch über das Verhalten der gewöhnlichen (Reibungs)electricität mehr Licht verbreitet. Wir haben über die electromagnetische Wirkung der letzteren auch viel experimentirt (bekanntlich hatte COLLADON[***)] zuerst [diese] Wirkung gesehen, die jedoch anfangs vielfach bezweifelt, aber später auch von FARADAY[†)] bestätigt ist). Unsere Experimente gelangen vortrefflich,

*) Man könnte diesen Umstand für die magnetische Telegraphie benutzen, so dass eine Depesche, anstatt in positiven u[nd] negativen Zuckungen gesehen zu werden, aufgeschmeckt werden könnte[**)]. Unter schicklichen mechanischen Einrichtungen könnte zu eben dem telegraphischen Zweck auch eine auf der folgenden Seite angeführte neue Bemerkung benutzt werden.

[**) Vergl. hierzu auch die Briefe von GAUSS an OLBERS vom 11. Nov. 1835, *Briefwechsel usw.*, II. Abt. S. 627, und an SCHUMACHER vom 13. Sept. 1835, *Briefwechsel usw.*, Bd. II, S. 417.]

[***) JEAN DANIEL COLLADON, *Déviation de l'aiguille aimantée par le courant d'une machine électrique ordinaire, et par l'électricité des nuages*, Annales de chimie et de physique t. XXXIII, 1826, S. 62—75.]

[†) M. FARADAY, *Experimental researches in electricity*, Series III, 1833, artt. 288—308; deutsch in *Ostwalds Klassikern* Nr. 86, S. 11 ff.]

und die Reibungselectricität geht (unter gehöriger Vorsicht) ebenso sicher durch unsere ganze Kette vom phys[ikalischen] Cab[inet] zur Sternwarte, und eben so ohne merklichen oder erheblichen Verlust, wie ein hydrogalvanischer oder ein Inductionsstrom.

Seit einigen Wochen habe ich nun meinen Inductor abermahls verstärken lassen (von 3537 Umwindungen auf etwa 6800), wo nun alles in noch helleres Licht tritt. Die physiologische Wirkung durch den Körper (von Hand zu Hand, ohne Wundlegung, bloss mit einiger Befeuchtung, ja bei Dr. GOLDSCHMIDT ohne alle Befeuchtung) ist nicht nur sehr merklich, sondern bei sehr schneller Bewegung fast unerträglich. Am interessantesten aber ist mir gewesen, dass es mir seit einigen Tagen gelungen ist, Funken zu erzeugen, indem eine sehr feine Nadelspitze einer Metallplatte gegenübersteht, in fester Distanz, was ich dem Gebrauch von Quecksilber vorziehe, insofern die Funken in demselben Saal hervorkommen sollen, wo die Inductionsbewegungen gemacht werden, weil dann durch diese das Quecksilber immer in einige Bewegung kommt. Daher gelingen die Versuche bei meiner Einrichtung, nachdem die Nadel Einmahl gestellt ist*), nachher jedesmahl unausbleiblich wieder (was beim Gebrauch des Quecksilbers nicht der Fall ist) bis etwa die Spitze der Nadel abgeschmolzen ist, was schon öfters vorgekommen. Der merkwürdigste Umstand aber bei diesen Versuchen ist, dass die Funken eine nach der Richtung des Stroms verschiedene Farbe haben, nemlich wenn der positive Strom durch die Nadel zur Platte geht, ist der Funken gelb oder gelbgrün; geht hingegen der negative Strom aus der Nadel zur Platte, so ist der Funken violett. Unter hunderten von Versuchen hat dies nicht ein einziges mahl gefehlt, wenn nur die Funken nicht gar zu schwach ausfielen.

Schliesslich noch eine Kleinigkeit die magnetischen Beob[achtungen] betreffend. Nemlich in den Nebenterminen wird hier und anderwerts von 3 zu 3 Minuten beobachtet, da gerade Hauptzweck dieser Nebentermine ist, die

*) Die Entfernung der Spitze von der Platte muss sehr klein sein, vermuthlich wenigstens unter $\frac{1}{1000}$ Zoll. Ich bewirke sie mit einer feinen Schraube, die $\frac{1}{8000}$ Zoll unmittelbar angibt, und hoffe ihre Grenzen künftig schärfer bestimmen zu können. Ich habe oben schon bemerkt, dass diese Versuche erst aus den letzten Tagen sind[**)].

[**) Diese Note ist im Original mit Bleistift geschrieben.]

Bewegungen in ihren kleinsten Details sorgfältig zu verfolgen. Ich bitte daher, es dort künftig eben so zu halten, und immer gerade zu den Nebenterminen die am meisten geübten Beobachter zu wählen.

Ich unterzeichne mich mit hochachtungsvoller freundschaftlicher Ergebenheit

Göttingen, 20. December 1835. GAUSS.

N. S. Sollten Sie von dem Inhalt dieses Schreibens etwas der k. Akademie, deren Mitglied ich zu sein die Ehre habe, mitzutheilen für angemessen halten, so steht dies ganz bei Ihnen.

[3.]

STEINHEIL an GAUSS.

[München, den 10ten Februar 1836.

Hochwohlgeborener Herr!
Hochverehrtester Herr Hofrath!

Der Vorstand unserer Akademie, Geheimrath VON SCHELLING, hat mich beauftragt, Ew. Hochwohlgeboren im Namen der Akademie den verbindlichsten Dank auszudrücken für die gefällige Mittheilung Ihrer so höchst interessanten und wichtigen Entdeckungen. Die math[ematisch-]physik[alische] Classe hat sich durch Dero Güte eben so sehr geschmeichelt, als von wissenschaftlichem Interesse ergriffen gefühlt, und erwartet mit wahrer Sehnsucht die letzten Apparate aus Göttingen, welche es möglich machen werden, auch hier Dero belehrende und anziehende Versuche zu wiederholen.

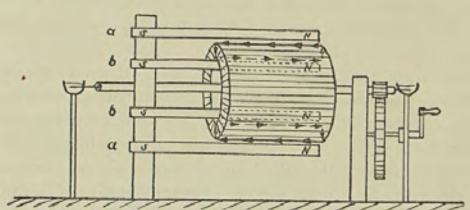
Empfangen Ew. Hochwohlgeboren auch meinen ergebensten Dank für die Güte Ihrer Mittheilung und die Nachsicht, womit unsere ersten Variationsbeob[achtungen] aufgenommen wurden, endlich aber ganz besonders für die gefällige Überlassung der beiden grossen Magnetstäbe, die hier glücklich angekommen sind und durch die Kraft, welche sie besitzen, vielseitiges Erstaunen erregt haben.

Ew. Hochwohlgeboren werden die Verspätung der beifolgenden letzten Terminbeobachtungen gütigst entschuldigen. Eine Verzögerung bei der Abschrift, die wir jedesmal hier zurückbehalten, ist Ursache daran. Ich habe mich auch sehr zu entschuldigen wegen einiger Versehn, welche vorgefallen sind. Es scheint, dass einige der Herrn Theilnehmer zu sehr auf die früher erlangte Übung bauten und die Sache diessmal leichter nahmen als sie zu nehmen ist. Hoffentlich kann diess in Zukunft vermieden werden.

Unter den neu hinzugetretenen Beobachtern [habe ich Ew. Hochwohlgeboren die Studierenden MIELACH und RECHT, welche sich bis zum nächsten Termin wohl noch besser einüben werden, dann Herrn POHRT zu nennen, welcher letztere bei STRUVE in Dorpat Gehülfe an der Sternwarte war und nun hier ist, um sich in der prakt[ischen] Mechanik bei ERTEL auszubilden. Dieser junge Mann scheint mir sehr fähig und mit den nöthigen Eigenschaften zum Beobachter begabt. Desshalb habe ich ihm auch die Beobachtung der beiden Nebentermine anvertraut, und die Übereinstimmung der Beob[achtungen] unter sich scheint meine Wahl zu rechtfertigen. Ich habe bei dem Haupttermin die Uhr nahezu nach Göttinger Zeit gerichtet, um einen etwaigen Versuch der Längendifferenzbestimmung aus beiden Beobachtungsreihen zu erleichtern. Auffallend scheint mir die Abweichung der hiesigen Curve von der Göttinger zwischen 0^h und 2 Uhr. Wenn die übrigen Beobachtungsreihen hierüber keinen Aufschluss geben, so ist vielleicht bei uns der Grund zu suchen, indem sehr nahe bei der Akademie eine bedeutende Eisenhandlung ist, welche besonders Samstags ihre Speditions-Geschäfte macht.

Einen galvanischen Telegraphen habe ich hier im Kleinen jetzt zu Stande gebracht, und er dient wenigstens zur Erläuterung der Sache, um welche sich bereits hohe Herrschaften interessirt haben, so dass ich hoffe, meinen Plan wenigstens vorläufig zwischen hier und Augsburg mit dem Entstehn der neuen Eisenbahn in Ausführung zu bringen. Bei dieser Gelegenheit habe ich die Erfahrung gemacht, dass man den Magnetstab durch gehörige Anwendung des Commutators ungemein rasch und beinahe ebenso gut als mit dem 2ten Magnetstabe beruhigen kann. In 5 bis 6 Secunden bringe ich den Stab zum Stehn oder wenigstens zu Schwingungen, die nur einige Millimètres betragen. Ich lasse gegenwärtig in der Werkstätte des physikalischen Cabinetes (die ich allerhöchster Gnade verdanke) einen neuen Inductor ausführen, welcher durch Rotation zwischen Magnetstäben, wie ich erwarte, bedeutende galvanische

Ströme hervorbringen wird. Der Multiplicator ist um einen ringförmigen hohlen Körper gewunden, dessen äussere und innere cylindrische Fläche bei den feststehenden Magnetstäben vorübergeht und so den Strom erregt, etwa wie die Figur zeigt:



Die Axe des Multiplicators ist durchbrochen und zur Aufnahme der Enden bestimmt, welche als drehende Axe in Quecksilbergefässe geleitet werden. Statt der 2 Magnetstäbe *aa* kann ein ganzer Kranz von Stäben angebracht werden; eben so statt der Stäbe *bb*; auch kann eine 2te Multiplicatorrolle auf der Axe befestigt werden, welche im entgegengesetzten Sinne umwickelt ist und also durch Drehung an den südlichen Polen der Stäbe einen Strom derselben Richtung im Draht hervorbringt. Jede Rolle kann leicht 50000 Umgänge erhalten und dann noch in der Secunde etwa 20 Umgänge machen. Wenn also das magnetische Magazin gross ist, muss die Wirkung exorbitant werden. —

Das Fernrohr mit veränderlichen Abständen der Objectiv-Linsen, wovon ich Ew. Hochwohlgeboren das letzte mal sprach, ist gegenwärtig ausgeführt. Bei 28 Zoll Länge erträgt es 37 Linien Öffnung — selbst bei 150 mal[iger] Vergr[össerung] — vollkommen gut. Das Bild ist besonders in der Nähe der Axe so vollkommen scharf und achromatisch, dass es einen Vergleich mit einem vorzüglichen Fraunhofer von 42 Zoll Brennweite rühmlich besteht. Doch ist das Gesichtsfeld kleiner als bei Fraunhofer. Die Farbenzerstreuung ausser der Axe ist durch das Okular gehoben.

Entschuldigen Ew. Hochwohlgeboren, dass ich Dero kostbare Zeit so

lange in Anspruch genommen habe. Mit der Versicherung der unbegrenztesten Hochachtung

Ew. Hochwohlgeboren

ergebenst gehorsamster

Steinheil.}

[4.]

Gauss an Steinheil.

Ich kann unsern Weber nicht nach München reisen lassen, ohne ihm einige Zeilen an Sie, mein hochgeschätzter Freund, mitzugeben. Zuvörderst meinen verbindlichsten Dank für Ihr letztes gütiges Schreiben und für die Mittheilung der Münchner Beobachtungen von dem Januartermin, wovon die Ausbeute alles, was früher vorgekommen, übertrifft. Wie herrlich die Beobachtungen von sieben Orten, Haag, Göttingen, Marburg, Leipzig, München, Mailand und Catania harmoniren, wird Ihnen Weber ausführlicher sagen. Einmal (30. Jan. Nachm. 1^h) ist ein zwar nicht sehr beträchtliches, aber doch hinlänglich prononcirtes Herabsinken in München, was sich an den andern Orten nicht findet, und man möchte wirklich, nach Ihrer Vermuthung, darin den Einfluss der Wegführung einer bedeutenden Eisenmasse aus der Nachbarschaft des Beobachtungslocals zu erkennen geneigt sein.

Mit vielem Interesse habe ich die sinnreiche von Ihnen angegebene Vorrichtung, die Induction durch eine schnelle Rotationsbewegung kräftig hervortreten zu lassen, gelesen, und ich erwarte das Resultat der Versuche mit desto grösserem Verlangen, weil es zu einer Prüfung der Richtigkeit meiner Theorie dienen kann. Ist nemlich meine Theorie richtig, so müssen (insofern Sie nicht noch eine wesentliche Abänderung anbringen) die in den den Magnetpolen nächsten Drähten hervorgebrachten galvanischen Strömungen durch die in den gleichzeitig auf der andern Seite liegenden Drähten hervorgebrachten entgegengesetzten Strömungen vollkommen compensirt oder destruirt werden, also schlechterdings gar keine Wirkungen erfolgen [*)]. Jedenfalls hat die Idee etwas sehr captiöses. Sollte sie sich aber als noch mehr als captiös ausweisen, d. i. sollte wirklich eine erhebliche Wirkung erfolgen, so würde mir diess

[*) Am Rande steht die Bemerkung:] Verzeihung für die ungeschickte Einschachtelungs Construction, in Eile.

höchst wichtig sein, und ich bitte dann mich baldmöglichst von solchem Erfolg, besonders wo möglich mit allen quantitativen Verhältnissen erläutert, zu benachrichtigen. Meine Theorie ist mir allerdings werth, aber unendlich viel mehr: die Wahrheit.

Ganz vorzüglich begierig bin ich aber auf die Erfolge Ihrer höchst interessanten Versuche mit einer abgeänderten Einrichtung der achromatischen Fernröhre, und ich hoffe dass unser WEBER bei seiner Rückkehr mir davon recht viel berichten wird.

Da Sie, wie ich von Hr. Doctor GOLDSCHMIDT verstehe, so gütig sind, auch auf meine unbedeutenden Impressa einen Werth zu legen, so bitte ich Sie, das 1808 gedruckte und nicht in den Buchhandel gekommene Programm [*)], dessen Inhalt freilich höchst unbedeutend ist, in dem auf jene Veranlassung noch aufgesuchten Exemplare gütigst anzunehmen.

Mich Ihrem freundschaftlichen Andenken

Göttingen, d. 16. März 1836. bestens empfehlend

GAUSS.

[5.]

STEINHEIL an GAUSS.

[München, den 5ten April 1836.

Hochwohlgeborener Herr!

Hochverehrtester Herr Hofrath!

Empfangen Ew. Hochwohlgeboren vor Allem meinen innigsten Dank für Dero gütiges Schreiben, welches mir Freund WEBER bei seiner Ankunft überbrachte, so wie für das schöne und seltene Geschenk, womit mich Ew. Hochwohlgeboren erfreuten. Dass die Induction ohne Commutation nicht gehn würde, hat die Theorie vollkommen richtig vorausgesagt. Ich erhielt keine Spur von galvanischem Strome selbst dann, wenn bei 50 Umgängen in einer Secunde der Inductor in entgegengesetzten Richtungen während mehrern Minuten auf das Galvanometer wirkte. Wenn also die Theorie von Ew. Hochwohlgeboren noch einer fernern Bestätigung bedurft hätte, so wäre sie aus diesem Versuche auf glänzende Weise hervorgegangen. Jeden Falles aber

[*)] *Methodum peculiarem elevationem poli determinandi explicat simulque praelectiones suas proximo semestri habendas indicat* D. CAROLUS FRIDERICUS GAUSS. Gottingae, MDCCCVIII, Werke VI, S. 37—49.]

habe ich um Entschuldigung zu bitten, dass ich Ew. Hochwohlgeboren einen so unreifen und falsch bedachten Gegenstand zur Vorlage brachte. Die März-Termine, welche ich die Ehre habe Ew. Hochwohlgeboren beifolgend in Abschrift zu überschicken, sind weniger interessant ausgefallen als die vorhergehenden. In der That bietet der Anblick der 7 gleichzeitig beobachteten Curven, die auch bis in die kleinsten Details grosse Ähnlichkeit und Analogie besitzen, ein höchst anziehendes und überraschendes Resultat. Gewiss tritt durch dieses Beispiel das Bedürfniss noch klarer hervor, diesen ganzen Reichthum von Ergebnissen in einer Schrift zur Publicität zu bringen, und ich habe daher mit ganz besonderem Interesse den schönen Vorschlag, für messende Physik eine eigene Schrift zu gründen, mit Freund WEBER besprochen und in Überlegung gezogen. Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, wie sehr ehrenvoll es für uns Südteutsche sein würde, wenn sich ein solches literarisches Band mit dem gelehrten Norden knüpfen würde. Auch haben wir von dem Vorstande der hiesigen Akademie nicht nur die Bezeugung des grössten Interessens vernommen, sondern auch die Zusicherung materieller Unterstützung, falls sie nöthig werden sollte, erhalten. Glaubten Ew. Hochwohlgeboren wohl, dass der Titel »Beiträge zur messenden Physik, herausgegeben von Mitgliedern der Kgl. Hannöverschen und Kgl. Bayerschen Akademie der Wissenschaften« geeignet wäre? Dürften wir Ew. Hochwohlgeboren um Dero gütige Ansicht hierüber bitten?

Die Absendung der Terminbeobachtungen hat sich um einige Tage verzögert, weil WEBER noch eine absolute Intensitäts-Messung und vorläufige Declinationsbestimmung für München beifügen wollte. Beide sind in dem Locale angestellt, wo die Variations-Beobachtungen gemacht werden. Wir hoffen später mit dem grössern Appar[at]e zuverlässigere Resultate zu erlangen.

Die Abänderung in der Form der Terminbeobachtungen — dass nämlich nur die Mittel angeführt sind — dann, dass sie für die Nebentermine von Minute zu Minute bestimmt wurden, hat Freund WEBER veranlasst, und daher toute auch die Verantwortung übernommen.

Mit der Versicherung der unbegrenztesten Hochachtung

Ew. Hochwohlgeboren

ergebenst gehorsamster

STEINHEIL.]

[6.]

STEINHEIL an GAUSS.

Hochwohlgeborner Herr!
Hochverehrtester Herr Hofrath!

Gestern haben wir mit der Legung der Drähte des galvanischen Telegraphen nach Bogenhausen begonnen. Wir können durch die ganze Stadt d. h. circa 6000 Fuss lang, unterirdische Wasserkanäle benutzen und werden von da aus die Drähte durchgängig unter die Erde legen. Ich habe Eisendraht gewählt, denselben ausglühen und mit Leinöhl abbrennen lassen, wodurch er einen Überzug bekömmt, der ihn wenigstens einige Jahre vor Oxydation schützen wird. Da der ganze Versuch einem grösseren Unternehmen dieser Art blos als belehrendes Beispiel vorangehen soll, so scheint die hiedurch erlangte Verminderung der Ausgabe zweckdienlich.

Bei dieser Gelegenheit hat sich eine Erscheinung gezeigt, welche mir so überraschend war, dass ich sie gleich im ersten Beginne Ew. Hochwohlgeboren mittheilen zu müssen glaube, und die eigentlich Veranlassung dieses Schreibens ist.

Ich liess die Arbeiter vor dem Hinweggehen die Kette schliessen, um durch Induktionsstösse zu erkennen, ob alle Verbindungen gehörig ausgeführt sind und wie gross der Kraftverlust sei. Da bemerkte ich, dass die Scala des Galvanometer um 10 Scala-Theile im Mittel anders steht, wenn die Kette in, als wenn sie ausser der Verbindung war. Beim Vertauschen der Multiplicatorsdrähte erhielt auch diese Abweichung das entgegengesetzte Zeichen. Als ich der Ursache dieses galvanischen Stromes, der nothwendig aus dem neugelegten Theil der Kette kommen musste, nachforschte, war mir die Nähe eines Blitzableiterdrahtes an den Drähten der Kette bemerklich.

Der Abstand betrug für den einen Draht nur circa 4 Zoll. Um zu untersuchen, ob die bemerkte Ablenkung von dieser Nachbarschaft herrühre, verband ich beide Drähte metallisch. In demselben Augenblick erhielt der Galvanometer eine so rasche Ablenkung, dass die Zahlen nicht mehr erkannt wurden und die Scala nicht mehr in's Gesichtsfeld zurückkehrte. Ich untersuchte den Blitzableiter (von vielfach gewundenem Messingdraht) in Bezug auf

Elektricität mittelst des sehr empfindlichen BOHNENBERGERschen Elektroscopes. Allein es zeigte sich auch bei Anwendung des Condensators kaum die leiseste Spur von Elektricität. Solches wäre zu erwarten gewesen, da sich in Osten Gewitterwolken zeigten. Beim Wechseln der Kette verschwand die Scala im entgegengesetzten Sinne. Ich vermuthete thermo-magnetische Wirkungen; aber auch diese bestätigten sich bis jetzt nicht.

Dieselben Erscheinungen zeigten sich auch heute Morgen, nachdem die Kette von den Arbeitern zur Weiterführung geöffnet war. Um die Ablenkung messbar zu machen, sah ich mich genöthigt, dem Galvanometer einen Magnet so nahe zu bringen, dass die Schwingungszeit der Nadel des Galvanometers, die früher 32″ betrug, nun auf 14″ herunterkam. Dabei betrug die Ablenkung für den Polwechsel des Multiplicators circa 800 Scala-Theile. Der Draht, welcher aus der Erde kömmt, entspricht dem der Zinkplatte, der Draht vom Blitzableiter dem der Kupferplatte einer galvanischen Batterie. Der Blitzableiterdraht, mit welchem die Communication hergestellt, ist einer von sechsen, die von dem Blitzableiter selbst zur Erde führen; wie der Draht, welcher zur Erde führt, ausgelöset und ebenfalls mit dem Blitzableiter verbunden wird, hört die Ablenkung auf.

Den ganzen Tag über habe ich die Erscheinungen beobachtet und ganz ähnliche momentane Störungen wahrgenommen wie bei den Termin-Beobachtungen. Nur waren die Ablenkungen weit grösser (ungeachtet des vorgelegten Magnetes) ja manche fast momentane Stösse von 30 Scala-Theilen und darüber.

Woher rührt dieser wie es scheint constante Quell so starker galvanischer Ströme bei nicht geschlossener Kette? Mir ist keine Beobachtung dieser Art bekannt und ich wünschte sehr, recht bald von Ew. Hochwohlgeboren Belehrung über diese die Aufmerksamkeit besonders reizende Erscheinung. Noch dürfte angeführt werden, was diesen Strom als galvanisch bezeichnet, dass er durch eine Wasserschichte von weniger als $\frac{1}{10}$ Linie Dicke fast gänzlich unterbrochen wurde.

Ich werde natürlich dieses Phänomen weiter modif[ic]iren und alles numerisch zu bestimmen suchen. Das Urtheil hierüber von Ew. Hochwohlgeboren zu vernehmen, bin ich auf das Äusserste gespannt.

Entschuldigen Ew. Hochwohlgeboren, dass ich, um Zeit für diese Beobachtungen zu gewinnen, heute dieselbe Hand wie bei den Helligkeits-Messungen zu dieser Mittheilung benutze.

Mit der Versicherung der unbegrenztesten Hochachtung verharre ich

Ew. Hochwohlgeboren

gehorsamst ergebener

München, den 18ten Juni 1836. STEINHEIL.]

[7.]

GAUSS an STEINHEIL.

Für die gütige Mittheilung Ihrer interessanten Beobachtung die Wirkung des mit Ihrem Multiplicator in Verbindung gebrachten Blitzableiters betreffend habe ich Ihnen, mein hochgeschätzter Freund, noch meinen verbindlichsten Dank abzustatten. Es würde schon früher geschehen sein, ohne die Hoffnung, Ihnen Erfolg von ähnlichen, längst beabsichtigten Versuchen über die atmosphärische Electricität mittheilen zu können, deren Anstellung jedoch bisher immer noch durch mancherlei andere Geschäfte gehindert ist. Vielleicht kann jedoch etwas der Art in Kürze vorgenommen werden. Einstweilen würde es mir sehr interessant sein, Theils über den weiteren Erfolg Ihrer Versuche, Theils über verschiedene damit in Zusammenhang stehende Umstände näheres zu erfahren, z. B. von wie vielen Spitzen die Luftelectricität in die Ableitung geführt wird, wie hoch über der Erde, ob das Dach selbst mit Metall gedeckt ist, ob mehrere Ableitungen an verschiedenen Stellen in die Erde geführt sind u. dergl.[*)].

Unser Haupttermin ist vollständig wahrgenommen. Am Sonnabend war der Verlauf fast ganz regelmässig, aber nach Mitternacht traten stärkere Anomalien ein u[nd] Sonntag Vormittags wurden recht schroffe beobachtet, besonders ein schnelles Steigen von $21^h 20'$ bis $21^h 35'$ und ein noch stärkeres Fallen von da bis $21^h 45'$, die sich vielleicht selbst zu genäherten Längenbestimmungen qualificiren werden. Recht sehr verlangt mich diesmal nach den Upsaler Beob[achtungen] wo vermuthlich das erste mahl der Haupttermin beobachtet sein wird. Die Nebentermine zum Mai hatte SVANBERG (wie SCHUMACHER mir schrieb) schon beobachtet, aber vermuthlich, weil darin gar nichts Besonderes vorge-

[*)] Vergl. den weiter unten folgenden *Anhang* [a.] S. 136.]

kommen war, die Einsendung nicht der Mühe werth gehalten. Vielleicht haben Sie die Anzeige und Aufforderung des H[errn] v. HUMBOLDT in der Preussischen Staatszeitung No. 209 gelesen, nemlich dass ein Franzose (dessen Namen ich vergessen habe) zu Reikiavik in Island die magnetische Variation 8 Tage hindurch von 15 Min[uten] zu 15 Minuten mit einem GAMBEYschen Instrument beobachten wolle vom 10. August—18. August u[nd] dass H[err] v. H[UMBOLDT] die Besitzer magnetischer Apparate an anderen Orten auffordert, dabei ein Paar Tage mitzuwirken. Schwerlich wird irgend jemand sich entschliessen, während dieser ganzen Zeit auf die nemliche Weise wie jener Franzose zu beobachten. Und wenn dagegen einige von unserm Verein nur zu Zeiten und ohne weitere Verabredung Aufzeichnungen machen wollten, so scheint mir, würde diess ziemlich ohne allen Nutzen sein. Durch eine verabredete Zusammenwirkung mehrerer Mitglieder unseres Vereins würde dagegen allerdings etwas Nützliches erreicht werden können, namentlich die Nothwendigkeit enger Beobachtungszeiten (die freilich für uns längst erwiesen ist) auch dem unkundigen noch einleuchtender zu machen.

Wir haben daher hier beschlossen noch einen Haupttermin extra abzuhalten und zwar übrigens genau in derselben Art wie wir es sonst thun (von 5′ zu 5′) und während 24 Stunden. Da hier bloss Angehörige der Universität beobachten, die an den andern Wochentagen sich schwerer vereinigen lassen, so bleiben wir auch hierin bei unserer gewohnten Einrichtung, Sonnabend Mittag anzufangen, zumahl da auch in Leipzig (wo gerade jene Einrichtung zuerst gewünscht war) u[nd] München, wahrscheinlich auch an andern Orten diese Tage die leichteste Ausführung gestatten werden. Nach diesen Prämissen bliebe also gar keine Wahl weiter. Der Tag würde gerade zwei Wochen nach unserm eben geendigten Haupttermin fallen müssen, nemlich von ♄ den 13. August bis ☉ den 14. August.

Ich lade Sie, mein werthester Freund, nun ein, auch in München die Beob[achtungen] einzuleiten und bitte nur, in dem unwahrscheinlichen Fall, dass es nicht angeht dort Theilzunehmen, uns bald Nachricht zu geben. Wir werden dieselbe Aufforderung und Bitte nach Leipzig gelangen lassen, und im Fall wir auch nur von Einem Orte guter correspondirender Beob[achtungen] gewiss sind, die Beobachtungen unfehlbar machen. Hoffentlich wird es aber an beiden geschehen, ja vermuthlich selbst an mehreren; wenigstens wird WEBER auch nach Haag u[nd] Upsala die Aufforderung gelangen lassen. In Marburg wird wohl nicht beobachtet werden können, da Prof. GERLING diesen Sommer von da abwesend ist. Ob diesem Extra-Haupttermine auch noch ♂ u[nd] ☿ am 16. und 17. August Abends Nebentermine beigefügt werden, habe ich vergessen mit WEBER zu besprechen und will nicht gern diesen Brief einen Posttag aufhalten. Ich vermuthe, dass GOLDSCHMIDT es gern thun wird, und mögen Sie es also damit nach Gefallen halten. Von der einen Seite sind, meine ich, 24 Stunden zureichend das Beabsichtigte ins gehörige Licht zu setzen, von der andern ist auch am Ende zwei oder 4 Stunden Arbeit kein so grosses Object, dass man solches nicht allenfalls auch aufs Ungewisse wagen könnte. Vielleicht ist es am zweckmässigsten die Nebentermine noch nachzunehmen, in dem Fall, wo unglücklicherweise 13.—14. Aug. gar keine erhebliche Anomalien vorgekommen sein sollten, im entgegengesetzten es aber dabei bewenden zu lassen[*)].

Für das mir durch Freund WEBER übergebene Exemplar Ihrer schönen photometrischen Preisschrift[**)] habe ich noch meinen verbindlichsten Dank nachzuhohlen.

Dass in HUMBOLDTS Briefe an den Herzog v. SUSSEX unsere Termine ganz unrichtig angegeben sind, welcher Irrthum auch in BREWSTERS Übersetzung jenes Briefes übergegangen ist, brauche ich Ihnen nicht zu sagen. Zu SCHUMACHERS Astronomischen Nachrichten habe ich, (obwohl für alle Theilnehmer überflüssig), ein Paar Worte zur Berichtigung gegeben[***)].

Stets mit bekannter freundschaftlicher Gesinnung

Ihr ergebenster

Göttingen, den 1. August 1836. C. F. GAUSS.

Den Extract der hiesigen Terminsbeob[achtungen] werden Sie demnächst erhalten.

Darf ich um gütige Abgabe der Einlage bitten?

[*) Vergl. den Anhang [d.] und [e.], S. 137, 138.]

[**) C. A. STEINHEIL, *Elemente der Helligkeitsmessungen am Sternenhimmel*, Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der kön. bayr. Academie der Wissenschaften, Bd. 2, 1837, S. 1—140; vergl. auch GAUSS Werke XI, 1, S. 168—170.]

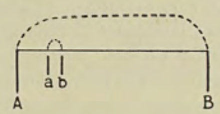
[***) Vergl. den Anhang [b.] und [c.], S. 136, 137.]

[8.]

GAUSS an STEINHEIL.

Für die gütige Mittheilung der Münchner Beobachtungen vom letzten magnetischen Termin, statte ich Ihnen, mein hochgeschätztester Freund, den verbindlichsten Dank ab. Von neuem bestätigt sich die schöne Übereinstimmung auch der Intensitätsbewegungen zwischen Göttingen, München und Leipzig, und sind starke Bewegungen in diesem Termin überall nicht vorgekommen. — Dagegen scheinen die von WEBER in London angeordneten (ohne seine Theilnahme aber — nach seiner Abreise — ausgeführten) Intensitätsbeobachtungen gänzlich misrathen zu sein.

Von Ihrer schönen Entdeckung, das starke galvanische Leitungsvermögen der Erde betreffend, hatte ich schon durch die Zeitungen etwas erfahren, und demzufolge selbst einen Versuch im Kleinen gemacht — soweit in dem Augenblick mein Drahtvorrath reichte — d. i. auf etwa 500 Fuss Entfernung mit gleichem Erfolge wie Sie. Die Sache ist mit der Theorie völlig harmonisch, und man braucht dem Erdreich nur ein kleineres Leitungsvermögen als Wasser hat beizulegen, um die Erscheinung zu erklären, obwohl Letzteres schon mehrere hunderttausendmahl kleiner ist, als das Leitungsvermögen der Metalle. Gleichermassen ist es der Theorie conform, dass wenn dem in Erde zwischen A und B gehenden Strome durch zwei andere ab, etwas abgefangen wird, so zwar



Dass 1) AB eine sehr grosse Entfernung
2) ab eine gegebene kleine
3) ab viel näher bei A als bei B eingesetzt werde
4) und so dass $AabB$ nahe in Einer Richtung (oder wenigstens Aab)

der partielle Strom, übriges gleichgesetzt, dem Quadrate der Entfernung des ab von A verkehrt proportional sein muss. Doch scheint mir, kann man bei diesen Versuchen schon wegen der Ungleichheit des Terrains in Beziehung auf Feuchtigkeit nicht viel Übereinstimmung erwarten, und die Übereinstimmung würde ohne Zweifel viel grösser werden, wenn Aab etwa in einem See, nicht gar zu nahe am Ufer eingesetzt würde.

Übrigens haben meine kleinen Versuche noch etwas anderes gelehrt, was mir sehr interessant scheint, nemlich dass wenn Platten von ungleichem Metall an den beiden Enden eingesetzt werden, ein kräftiger hydrogalvanischer Strom entsteht. Es ist doch überraschend, dass an die Stelle eines $\frac{1}{2}$ Linie dicken, mit gesäuertem Wasser getränktem Tuchlappens eine 500 Fuss dicke Erdschicht treten kann mit, wenn auch nicht gleich grossem, doch ganz ähnlichem Erfolg. Ich zweifle nicht, dass Sie bei Ihren viel grössern Entfernungen doch das gleiche finden werden. Da Freund WEBER so eben wieder zurückgekommen ist, so hoffe ich, dass auch wir die Versuche hier bald in etwas grösserem Maassstabe und mit lehrreichen Abänderungen werden machen können.

Stets mit aufrichtiger Hochschätzung
Göttingen, den 28. August 1838. und Freundschaft
C. F. GAUSS.

Anhang zu [7.]

Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER, III, Altona 1861, S. 73, 106.

[a.]

GAUSS an SCHUMACHER, Göttingen den 24. Juni 1836.

. . . . STEINHEIL führt jetzt (als Probeversuch für künftig weiter zu erstreckende magnetische Telegraphie) eine Drahtleitung von München nach Bogenhausen, bei welcher Gelegenheit er schon eine interessante Bemerkung gemacht hat — meinem Vermuthen nach in der atmosphärischen Electricität begründet, welche sich also an Magnetometern ausserordentlich stark sichtbar machen lässt. . . . .

[b.]

GAUSS an SCHUMACHER, Göttingen den 31. Julius 1836.

. . . . . . Dabei fällt mir noch eine der Unrichtigkeiten des HUMBOLDTschen Aufsatzes ein, die ich freilich schon damals bemerkte, aber ihre Berichtigung der Mühe nicht werth hielt, indem ich glaubte, dass jeder der

Theilnehmer sie sogleich von selbst erkennen würde. Da jedoch der Irrthum jetzt weiter verbreitet wird, so überlasse ich Ihnen, ob Sie, gleichviel ob in Ihrem oder in meinem Namen, die auf der andern Seite stehende Berichtigung abdrucken lassen wollen, in dieser oder in irgend einer andern Fassung, was ich Ihnen selbst ganz überlasse. . . . . . .

P. S. Da ich BREWSTERS Journal nicht im Hause habe und vor Absendung des Briefes nicht nachsehen kann, so bemerke ich, dass ich nicht ganz gewiss bin, ob der eigentliche Titel *Philosophical Journal* oder *Philosophical magazine* heisst. Sie werden dies eventuell leicht verbessern können. Es ist eines der allerneuesten Stücke, ich glaube etwa Nr. 50 oder 51 oder 52.

[c.]

Berichtigung.

Astronomische Nachrichten, XIV. Band, Altona 1837, Nr. 316, Spalte 53, 54.

In Folge der seit November 1834 genommenen Verabredung fallen die Termine für die gemeinschaftlichen Beobachtungen der magnetischen Variation immer auf den letzten Sonnabend (von Mittag Göttinger M. Z. bis zum folgenden Mittag) in jedem ungeraden Monat des Jahrs, wie auch in den A[stronomischen] N[achrichten] Nr. 276 angezeigt ist. Unter ungeraden Monaten sind aber der erste, dritte, fünfte, siebente, neunte und eilfte verstanden, und nicht wie in dem Aufsatz von Herrn VON HUMBOLDT (A. N. Nr. 306) die Monate, die eine ungerade Anzahl Tage enthalten. Diese Berichtigung ist vielleicht nicht überflüssig, da das Missverständniss des Herrn VON HUMBOLDT auch in die englische Übersetzung übergegangen ist, welche in dem Philosophical Magazine, Julius 1836 von jenem Aufsatz gegeben ist.

GAUSS.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER, III, Altona 1861, S. 407, 112.]

[d.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona den 5. August 1836.

|. . . . . . Unser König hat es mit Recht nicht gut aufgenommen, dass Herr v. HUMBOLDT und die Franzosen, ohne vorzufragen, ein magnetisches

Observatorium auf Island etabliert haben. So viel als er für Wissenschaften thut, hätte dies doch wohl einer vorläufigen Bitte bedurft, und eigentlich hätte man ihn ersuchen sollen, es selbst zu tun. . . . . .]

[e.]

Gauss an Schumacher, Göttingen den 17. August 1836.

. . . . . . Auf Humboldts Bitte, um Mitwirkung zu den isländer Beob-[achtungen], habe ich einen Extratermin veranstaltet, der von heute Mittag bis morgen Mittag abgehalten wird; es nehmen daran auch Auswärtige Theil (vermuthlich 5). Ich habe eben 40' hindurch in der Sternwarte beobachtet, aber nur kleine Bewegungen gefunden. Hoffentlich gibt es Abends u[nd] Nachts mehr. . . . .

BEMERKUNGEN.

Von dem vorstehend wiedergegebenen Briefwechsel zwischen Gauss und Carl August v. Steinheil (1832—1849 ord. Professor der Physik und Mathematik an der Universität München, später Ministerialrat im bayr. Handelsministerium, Begründer der optisch-astronomischen Werkstätte C. A. Steinheil Söhne) sind die Briefe 1., 3., 5., 6. Steinheils an Gauss nach den im Gaussarchiv befindlichen Handschriften, die Briefe 2., 4., 7., 8. von Gauss an Steinheil nach (durch Schering beglaubigten) Abschriften abgedruckt worden; jedoch war der gegenwärtige Inhaber der Firma Steinheil, Professor Dr. Rudolf Steinheil in München so gütig, den Abdruck der vier Briefe von Gauss mit den im Besitz der Firma befindlichen Originalhandschriften zu kollationieren.

Der Franzose, dessen Namen Gauss vergessen hatte (oben S. 133), war V. Ch. Lottin, Astronom der Corvette »la Recherche«, von dem es in der Nr. 209 der »Allgemeinen Preussischen Staatszeitung« ausdrücklich heisst, dass er die von Gauss erwähnten Versuche in Reikiavik gemacht habe.

Schlesinger.

26. Ein Brief von Gauss an Christopher Hansteen.

Göttingen, den 29. Mai 1832.

Hochgeehrtester Herr Professor.

Ihr gütiges Schreiben vom 14. April hat mir viele Freude gemacht. Schon seit vielen Jahren habe ich an den Erscheinungen des Erdmagnetismus

ein lebhaftes Interesse genommen, allein seit vorigem Winter ist dies Interesse durch mancherlei zufällige Umstände wieder besonders angeregt und vergrössert, wohin ich auch vorzüglich die freundliche Willfährigkeit rechne, mit der mir mein trefflicher College Weber das Anstellen eigner Versuche erleichtert hat. Um so schätzbarer ist es mir nun, mit Ihnen in Verbindung zu treten, dem dieser Zweig der Naturkunde so ungemein viel verdankt, und der mit allen Thatsachen vertrauter ist, als irgend ein anderer.

Es scheint mir nicht, dass die Oerstedtsche Entdeckung und deren weitere Entwickelungen uns berechtigen, noch weniger zwingen, von der Voraussetzung abzugehen, dass die Erscheinungen des Erdmagnetismus zur Hauptursache Anziehungen und Abstossungen haben, die von (sehr unregelmässig vertheilten) magnetisch polarisirten Molecules des festen Erdkörpers ausgehen und deren Intensitäten in Beziehung auf jedes Molecule dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind. Meiner Meinung nach bestätigt sich dies Gesetz überall auf das schönste, und in seiner Art eben so gut wie das Gesetz der Gravitation in den astronomischen Phänomenen.

Wie unregelmässig nun auch jene Molecules vertheilt sein mögen, so weiset doch die Analyse gewisse Bedingungen oder Relationen nach, die zwischen den magnetischen Erscheinungen auf der Erdoberfläche Statt finden müssen, lediglich schon in Folge der Voraussetzung, dass jene Phänomene nur die Gesammtwirkung von Elementaren Anziehungen u[nd] Abstossungen nach obigem Gesetze sind. Ich werde weiter hin eine der schönsten aus diesen Relationen anführen, die in den Thatsachen nachzuweisen von ungemein grossem Interesse sein würde.

Meine Absicht geht nun dahin, die magnetischen Erscheinungen auf der Erdoberfläche bloss aus jenem Gesichtspunkte auf- u[nd] so zu sagen in Eine Formel zusammenzufassen, die freilich, um sich an alle solche Anomalien anzuschliessen, die nicht bloss örtlich, d. i. auf eine kleine Fläche beschränkt sind, viele Glieder wird enthalten müssen, ungefähr wie die Mondstafeln aus einer grossen Anzahl Gleichungen bestehen. Eine Hypothese von zwei oder vier Polen, die ich nach dem obigen nicht angemessen halten kann, wird also ausgeschlossen; aber das ganze Geschäft wird auf eine streng geregelte Art durchzuführen sein, so bald nur die Thatsachen in einer dazu bequemen Form vorliegen. Dies muss aber, zu diesem Zweck, die Form der drei partiellen

Kräfte (gegen Nadir, Nord- u[nd] Westpunkt jedes Orts) sein, wie ich bereits in meinem Briefe an SCHUMACHER [*)] angegeben habe. Eine graphische Darstellung ist zwar an sich nicht nothwendig, aber man wird doch schwerlich ohne solche das erhalten können, was um die Rechnung ausführbar zu machen nöthig ist. Nemlich um diese Rechnung zu führen, bedarf ich jene drei Elemente für eine bedeutende Anzahl regelmässig auf der Erde vertheilter Punkte, nemlich so dass sie sich in mehrere Systeme ordnen z. B. 1) alle Punkte im Äquator in gleichen Intervallen z. B. von 30° zu 30° Längendifferenz, 2) ähnliche Punkte für eine Anzahl anderer Parallelkreise wenigstens von 30° zu 30°, also 30°, 60° Nördl[ich] u[nd] Südlich. Insofern 60° südlich wohl bis jetzt noch zu dürftig ausfallen wird, ist zu wünschen, dass diejenigen Parallelkreise, für welche man die erforderlichen Zahlen ausmittelt, etwas enger als 30° liegen. — Freilich wird noch viel fehlen, für alle solche Punkte die erforderlichen Data mit Zuverlässigkeit anzugeben. Allein immerhin mag dabei vorerst einiges nach dem sonst kenntlichen Zuge der Linien supplirt werden. Übrigens bemerke ich, dass der Besitz der Data für die solchergestalt regelmässig vertheilten Punkte an sich nicht unumgänglich nothwendig, sondern dass es theoretisch betrachtet möglich ist, die Eliminationen aus einer grossen Zahl beliebig liegender Punkte zu führen; allein die Arbeit würde dann 100 mal grösser sein, und ich würde davon abstrahiren. Man hat vorerst nur auf jene Art gleichsam die erste Annäherung zu machen; die spätere Ausfeilung wird sich lediglich auf die einzelnen unmittelbar durch Beob[achtungen] bekannten Punkte stützen müssen.

Sehr zu wünschen wäre nun freilich, wenn Sie selbst eine solche Darstellung, wenn nicht von allen 3 Kräften, doch von Einer vornähmen. Kann dies aber für jetzt nicht geschehen, so könnte ich vielleicht einen Versuch dazu auf anderem Wege machen lassen, wenn nur die zuverlässigen Grunddata vorlägen. Dann können Sie sich also die Berechnung der 3 partiellen Kräfte ersparen, und hätte ich dann nur um Mittheilung der Grunddata zu bitten. Dabei brauche ich kaum zu bemerken, dass es zu diesem Zweck wenig Werth hat, aus irgend einem vergleichungsweise kleinen Theile der

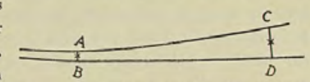
[*)] Vom 3. Mai 1832, im Auszug wiedergegeben Werke XI, 1. S. 73 ff., wo auch (bis S. 115) noch andere, aus derselben und späterer Zeit stammende Briefstellen über Erdmagnetismus zusammengestellt sind; man vergleiche auch die daselbst gegebenen Literaturnachweise.]

Erdoberfläche sehr viele Angaben zu haben, für ganz Europa werden z. B. drei oder vier recht zuverlässige hinreichend sein.

Vielleicht spricht Sie noch mehr als jene drei graphischen Darstellungen eine vierte auf einem andern Princip beruhende an, die ich schon lange gewünscht habe, und die mit einer oben angedeuteten Relation zusammenhängt, nemlich eine Darstellung einer Anzahl von Linien auf der Erdoberfläche, die an jedem Punkt den magnetischen Meridian senkrecht durchschneiden (also ein specieller Fall von loxodromischen Linien, die sich auf den magnetischen Meridian beziehen). Es lässt sich nemlich a priori (unter der oben angeführten Voraussetzung, dass der Erdmagnetismus das Aggregat von unendlich vielen partiellen Wirkungen ist, die von Punkt zu Punkt gehen, und deren Intensität nach einerlei Gesetz von der Entfernung abhängt, selbst wenn dies nicht das verkehrte der Quadrate wäre) beweisen:

1) dass jede solche Linie genau in sich selbst zurückkehren muss,

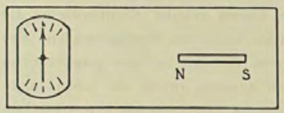
2) dass in einer (streng genommen unendlich schmalen) Zone zwischen zwei solchen Linien die Intensität des horizontalen Magnetismus verkehrt der Breite der Zone proportional ist, z. B. die Intensität zwischen A u[nd] B (am genauesten, wenn die Breite der Zone AB nicht unbeträchtlich ist, in der Mitte) verhält sich zu der zwischen C und D wie $\frac{1}{AB} : \frac{1}{CD}$.

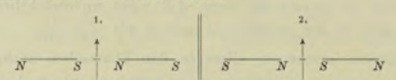


Es wäre höchst interessant, diess in den Thatsachen nachzuweisen und ich sollte glauben, dass man wenigstens grosse Stücke solcher Linien zu ziehen viele hinlängliche Data müsste zusammenbringen können. Ich brauche nicht zu erinnern, dass wenn die Zeichnung nach Mercators (oder auch einer andern in den kleinsten Theilen ähnlichen) Darstellung gemacht wird, diese Linien mit den Erdparallelen überall solche Winkel machen, die der Declination gleich sind.

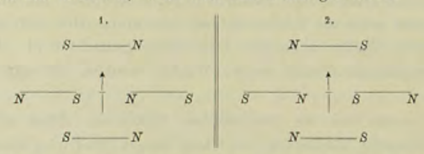
So viel heute über die theoretischen Ansichten. Über meine eignen praktischen Versuche könnte ich einen sehr langen Brief oder vielmehr schon ein kleines Buch schreiben; allein da ich noch nicht ganz mit meinen Einrichtungen fertig bin, so sehe ich alle meine bisherigen Versuche nur erst als provisorische an. Inzwischen denke ich bald jene Einrichtungen hinlänglich vollkommen zu haben, und werde Ihnen dann ausführliche Mittheilungen machen. Vorläufig heute nur noch ein Paar Worte über die absolute Intensität.

Ich habe es damit auf alle verschiedenen Arten versucht, und finde die Benutzung des Gleichgewichtszustandes vortheilhafter als die der Schwingungen, obwohl auch letztere nicht unbrauchbar sind. Eine Art den Gleichgewichtszustand zu benutzen war, eine bewegliche Nadel (über einen Gradbogen spielend) mit dem einwirkenden Stabe auf Einem Brett zu haben, letztern so zu legen, dass er rechtwinklich gegen denjenigen Radius des Gradbogens liegt, mit dem die Richtung der Nadel coincidirte, ehe der Stab hingelegt war, und dann das Ganze zu drehen bis die Nadel wieder auf denselben Punkt kommt. Die Drehung des Bretts muss gemessen werden, und man findet leicht Mittel, solches auf 1' genau zu thun. Offenbar braucht auch kein Gradbogen sondern nur ein Index da zu sein. Man verdoppelt die Genauigkeit, wenn man den Stab in zwei entgegengesetzten Lagen auflegt (N u[nd] S vertauscht), wo man sich dann um die Stellung des Bretts, bei welcher die Nadel mit dem Index ohne Zuziehung des Stabs coincidirt, gar nicht zu bekümmern braucht; man vervierfacht die Genauigkeit, wenn man anstatt Eines Stabes zwei anwendet:





und man versechsfacht sie, wenn man vier Stäbe gebraucht:



nemlich in gleichen Entfernungen wirkt ein südlich oder nördlich liegender Stab nur halb soviel als ein in Ost oder West liegender.

Die Versuche sind in verschiedenen Distanzen gemacht, die aber immer ein bedeutendes Vielfache der Längen der Nadel u[nd] der Stäbe sein müssen, und wobei die Wirkung, ganz comme il faut, dem Cubus der Entfernung verkehrt proportional wird.

Indessen habe ich jetzt die Sache etwas anders eingerichtet. Allein da meine Versuche bisher nur vorläufige sind, so behalte ich mir eine nähere Anzeige auf einen spätern Brief vor. Doch geben auch diese vorläufigen Versuche ein Resultat. das ich schon als sehr genähert betrachte, nemlich Intensität des horizontalen Erdmagnetismus in Göttingen $= \frac{1}{55}$, wenn man 1 Milligramm, 1 Millimeter und die Schwere in Göttingen als Einheit nimmt. Ich habe Ursache zu glauben, dass der Nenner 55 schwerlich mehr als eine Einheit ungewiss ist (zwei Versuche mit ganz verschiedenen Nadeln gaben der Eine 54, der andere 56*), auch sind noch nicht alle kleinen Correctionen z. B. wegen der Torsion des Fadens, mit in Rechnung genommen, obgleich ich die Elemente dazu habe; denn wie gesagt, diese Versuche, die bei einer wenig soliden Aufstellung gemacht sind, nur um meine erste Neugierde zu befriedigen, werden künftig ganz cassirt, und ich hoffe mit Zuversicht, dann eine viel grössere Genauigkeit zu erhalten. Von H[errn] RIESSERS[**)] Zahlen in Berlin weicht dies toto coelo ab, und H[errn] ERMANNS[***)] Zahl gibt, auf meine Einheiten reducirt, einen Nenner, der fast um die Hälfte grösser ist.

Den Tadel, der gegen die Zulässigkeit Ihrer Annäherung in den Göttingischen Anzeigen gemacht ist, finde ich unpassend (der Verf[asser] jener Re[cension] ist leicht zu erkennen). Dagegen aber möchte ich die Zulässigkeit Ihrer Voraussetzung über die Vertheilung des Magnetismus in der Nadel ($\varphi x = xx$) bestreiten. COULOMBS Versuche geben eine Art logarithmischer Linien. Allein ich glaube nicht, dass man in allen Nadeln einerlei Vertheilung annehmen darf, auch wenn man sie auf gleiche Art gestrichen hat, und

*) Eine grosse Menge anderer vorläufiger Versuche mit weniger vollkommnen Einrichtungen und Nadeln von den allerungleichsten Dimensionen, gaben immer nur wenige Einheiten anders.

[**) Gemeint ist wohl PETER RIESS, siehe L. MOSER und P. RIESS, *Über die Messung der Intensität des tellurischen Magnetismus*, POGGENDORFFS Annalen 18, 1830, S. 226.]

[***) PAUL ERMAN, *Über die magnetischen Verhältnisse der Gegend von Berlin*, Abhandlungen der k. Akademie d. Wiss. zu Berlin für 1828, 1831, S. 97 ff.]

halte für unumgänglich nöthig, jedes Verfahren von der Kenntnis der Vertheilung so viel möglich unabhängig zu machen. Damit ist nun übrigens auch von selbst die Richtigkeit Ihrer Bemerkung über BIOTS Verfahren, aus COULOMBS Versuchen das Gesetz $\frac{1}{rr}$ zu deduciren, anerkannt.

Ich möchte wohl wissen, wo die Originalangabe Ihrer Bestimmung der thermometrischen Correction, die verschiedentlich z. B. von QUETELET gebraucht wird, und die ich nicht habe auffinden können, steht[*)]. Ich habe mir vorgesetzt, auch hierüber künftig Versuche zu machen, was ich eben auf den Winter verspare, wo man sich leichter grosse Temperaturverschiedenheiten verschaffen kann. Ich werde dann immer wenigstens zwei Nadeln gleichzeitig, die eine in einem warmen, die andere in einem kalten Locale schwingen lassen, und sie nachher umtauschen. Nur so, deucht mir, kann man die stündlichen Variationen (die bei meinen Versuchen ganz unabhängig von Temperaturänderungen auf das deutlichste hervortreten) von dem Einflusse der Temperatur trennen.

Sehr würde mich freuen, von Ihnen die im Anfang dieses Briefes angezeigten Mittheilungen zu erhalten. Ich möchte Ihnen aber zugleich anheim geben, ob es nicht gut wäre, von Zeit zu Zeit, etwa alle 5 oder 10 Jahre, gleichsam neue Ausgaben von den Tafeln zu geben, die wie in Ihrem Werke den Zustand unserer Kenntnisse von den zuverlässigsten Bestimmungen der 3 magnetischen Elemente darlegen, ungefähr so, wie alle Jahr in der Con-n[aissance] des T[ems] ein Verzeichniss der geographischen Positionen gegeben wird.

Ich schliesse mit dem Ausdruck meiner aufrichtigsten Hochachtung und Ergebenheit

C. F. GAUSS.

[*) Siehe CHR. HANSTEEN, *Über Beobachtungen der magnetischen Intensität bei Berücksichtigung der Temperatur, sowie über den Einfluss des Nordlichtes auf die Magnetnadel*, POGGENDORFFS Annalen 9, 1827, S. 161.]

27. Gauss an Carl Ludwig Harding.

Braunschweig, 28. November 1806.

. . . .

Wie gross setzen Sie die Declination der Magnetnadel zu Göttingen? Können Sie mir nicht die Declinationen für diejenigen Örter nachweisen, für die H[err] VON HUMBOLDT im Nov[emberheft] der M[onatlichen] C[orrespondenz] die Inclinationen gibt? Oder auch für einige von denen, wofür HUMBOLDT im IV. Bande der A[llgemeinen] G[eographischen] E[phemeriden] die Inclination angab? Declination und Inclination zugleich für eine beträchtliche Anzahl von Örtern auf sehr verschiednen Punkten der Erde, z. B. dem Kap, Batavia, in Südamerika, dem Südmeere, Nordamerika u[nd] Egypten würden für mich einen ungemein grossen Werth haben. Ich wünschte, dass jemand aus den vielen in den neuesten Zeiten gemachten Reisen Beobachtungen dieser Art in einem eignen Werke sammelte. Ich glaube, in diesem Felde werden sich noch höchst interessante Resultate ziehen lassen, die bisher noch ganz im Dunkeln liegen. Sobald die Göttingische Bibliothek die kleine v[on] HUMBOLDT angekündigte Schrift erhält, werden Sie mich sehr durch eine Mittheilung der darin enthaltenen numerischen Resultate verpflichten. . . . .

28. Zwei Briefe von Gauss an Johann Georg Repsold in Hamburg*).

[1.]

Braunschweig, den 30. Sept. 1807.

Auf Veranlassung eines Schreibens von Ihrem Herrn Onkel[**)] habe ich den KLÜGELschen Aufsatz über die Dimensionen eines Doppelobjectivs in HINDENBURGS Archiv[***)] durchgesehen: diesen Zweig der Mathematik habe ich

[*) Vergl. die Briefstellen GAUSS an SCHUMACHER Werke XI, 1, S. 145—149.]

[**) Cand. theol. G. C. BÖHMER, ein Bruder von REPSOLDS Mutter, der mit GAUSS bekannt war. Vgl. JOH. A. REPSOLD, *Vermehrte Nachrichten über die Familie Repsold u. s. w.* 2. Ausgabe, Hamburg, 1915.]

[***) G. S. KLÜGEL, *Angabe eines Doppelobjectivs, das von aller Zerstreuung der Strahlen frey ist*, Archiv der r. u. a. Mathematik, 6. Heft, 1797, S. 141—161.

zwar bisher noch zu keiner Hauptbeschäftigung gemacht, und mancherlei meine Zeit jetzt beschränkende Arbeiten verbieten mir, in diesem Augenblick tief in diesen Gegenstand einzugehen, indessen glaube ich doch Ihre Fragen, mein theuerster Herr REPSOLD, ziemlich befriedigend beantworten zu können.

Erstlich wenn die Dicke des vorhandnen Glases zu den von KLÜGEL vorgeschriebnen Dimensionen nicht zureicht, so kann man allenfalls die Linsen so viel dünner schleifen*) und übrigens die Dimensionen der Krümmungen beibehalten. KLÜGEL erklärt selbst S. 154, dass dadurch kein sehr bedeutender Fehler entstehen könne. Um aber nichts zu wünschen übrig zu lassen, habe ich für dünnere Linsen die Dimensionen eines Objectivs berechnet, von dem ich versichern kann, dass es völlig so gut ist als das von KLÜGEL angegebne und in der Voraussetzung dass die Zerstreuungskräfte der beiden Glasarten den S. 151 angegebnen Datis entsprechen, sowohl die Abweichung wegen der Farben als die wegen der Gestalt vollkommen hebt.

Brennweite der Doppelobjektivs von der hintern Fläche an gerechnet	31938 Theile
Brennweite des Convexglases	9962
Brennweite des Concavglases	
Halbmesser der Vorderfläche beim Convexglase	6943
Hinterfläche	22712
Halbmesser der Vorderfläche beim Concavglase	14938
Hinterfläche	18709
Dicke des Convexglases	100
Ganze Öffnung des Convexglases	2055
Dicke des Concavglases (in der Axe)	35
Distanz der innern Flächen der beiden Gläser	80

Der Theorie nach muss dies Glas für 8 Fuss Brennweite eine wirkliche Öffnung von 5½ Zoll vollkommen vertragen. Schlimm ists nur, dass man schwerlich darauf rechnen kann, dass die Zerstreuungskräfte der beiden Glasarten vollkommen mit den vorausgesetzten Zahlen übereinstimmen, und dass

*) Wovon denn freilich die natürliche Folge ist, daß die Convexlinse eine verhältnissmässig kleinere Öffnung erhält.

man von der andern Seite die vorgeschriebnen Krümmungen nie aufs allerschärfste in der Praxis wird ausführen können. Gerade dieser Umstand aber gibt die Antwort

auf Ihre zweite Frage. An sich ist allerdings keineswegs nothwendig, dass die beiden Gläser durch einen Zwischenraum getrennt sind. Allein die Absicht warum bei der Rechnung einer gelassen ist, geht dahin um einigen Spielraum zu gewinnen, so dass man durch Verringerung oder Vergrösserung der Distanz demjenigen durch Probiren nachhelfen könne, was an der Beschaffenheit der Glasarten und der Ausführung der verlangten Krümmungen etwa noch fehlen kann. Die Engländer leisten dieses Nachhelfen nicht durch Verschieben der Gläser, sondern dadurch, dass sie aus einer sehr grossen Menge von Linsen diejenige aussuchen, die den besten Effect thut. Könnten Sie mir einerseits die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse Ihrer Glasarten haarscharf angeben und zweitens gewiss sein, die vorgeschriebnen Krümmungen eben so haarscharf auszuführen, so wäre es ein leichtes die Dimensionen zu dem besten Objectiv, wo die Linsen sich berühren, anzugeben. Allein bei den kleinen doch immer unvermeidlichen Unvollkommenheiten ist es dem, der nicht unter Hunderten von Linsen aussuchen kann, nothwendig, sich gleichsam den Rücken frei zu erhalten, um wenigstens durch eine kleine Verschiebung der beiden Linsen das gefehlte wieder einzubringen zu suchen. Ob übrigens nach Hrn. KLÜGELS Vorschriften schon ein Glas ausgeführt ist, weiss ich nicht: aber gewiss glaube ich, dass man durch zweckmässige Benutzung der Theorie vor der blossen Empirie einen sichern Vorsprung müsste erhalten können.

. . . .

Mit ausgezeichne[te]r Achtung und unter vielen Empfehlungen an Ihren Herrn Onkel verharre ich

Ihr ergebenster
C. F. GAUSS.

[2.]

Göttingen, den 2. September 1809.

Mit vielem Vergnügen höre ich heute von Hrn. Dr. SCHUMACHER, dass Sie, werthester Freund, mir bald über die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse der beiden Glasarten die Resultate Ihrer eignen Versuche mittheilen wollen. Schon die mitgetheilten Dimensionen der zwei Fernrohre sind mir schätzbar, obwohl sie noch nicht zureichend oder nicht durchgehends genau genug sind, um die Verhältnisse daraus rückwerts abzuleiten. Ich habe so eben aus der mitgetheilten Brennweite des Kronglases bei dem grössern Fernrohre (21 Zoll) die ohne Zweifel für die mittlern Strahlen gilt? das correspondirende Brechungsverhältniss abgeleitet und finde wie 1 : 1,4918, welches doch wohl etwas zu wenig ist. Allein eine kleine Abänderung in der Brennweite ändert hier schon viel, und das Verhältniss würde schon merklich stärker ausfallen, wenn wie ich vermuthe jene Brennnweite etwa einen halben Zoll kleiner wäre. Es wäre also schon von Werth, wenn Sie die Brennweite sowohl des Convexglases für sich (die 21 Zoll) als die Brennweite des ganzen Objectivs (61 Zoll) nicht in runden Zollen, sondern in Theilen von Zollen bestimmen wollten, und allenfalls nach Jeaurats[*)] Manier zugleich für beide Fälle untersuchten, was erfolgte, wenn Sie nahe an der Stelle des Bildes durch ein vorgehaltnes rothes und ein violettes Blendglas die übrigen Strahlen separirten. Alsdann werde ich mit Vergnügen untersuchen, in wie fern bei der daraus folgenden Beschaffenheit der Gläser, das Objectivglas etwa noch vollkommner eingerichtet werden könnte und zweitens, wie es zu berechnen sei, damit das Concavglas die möglich kleinste Dicke erhalte. Sicherer wäre es freilich, an Ihrem eignen Glasvorrathe erst Versuche zu machen, weil doch vielleicht ein kleiner Unterschied Statt haben könnte. Die Brennweiten bitte ich immer so anzugeben, wie sie von der nächsten Glasfläche gemessen werden.

. . . .

Mit grösster Achtung und Ergebenheit

Ihr

gehorsamster Diener

C. F. Gauss.

[*) E. S. Jeaurat, *Détermination de la réfraction et de la dispersion des rayons dans le crown-glass et le verre de Venise et dans le flint-glass ou cristal blanc d'Angleterre etc.*, Histoire de l'Académie royal des sciences, Paris 1770, S. 461 ff.]

29. Urteil über Kellners orthoskopisches Okular.

[1.]

[Handschriftliche Bemerkung von Gauss auf dem Briefe von Carl Kellner, Wetzlar, den 14. Januar 1850.]

Am Merzschen Fernrohr ist diess Ocular bei der Stellung 79 anzubringen. Gesichtsfeld 27′ 30″.

[2.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, den 22. Februar 1850.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, VI, Altona 1865, S. 67. 68.]

. . . . . Wegen Kellners Ocular haben Sie mir nicht geantwortet[*)]. Ich habe eines, was recht gute Dienste leistet; am Merzschen Fernrohr 96-mal vergrössert. Das Gesichtsfeld hat $27\frac{1}{2}$ Min[uten] Durchmesser und ist ziemlich in der ganzen Ausdehnung gleich deutlich. Das Merzsche Ocular von dieser Vergrösserung hat nur 18 Min. 25 Sec. Durchmesser. Wahrscheinlich wird letzteres bei einem $1\frac{1}{2}$-mal weiteren Gesichtsfelde gegen den Rand zu merklich undeutlicher werden.

[3.]

Carl Kellner an Gauss. Wetzlar, den 12. März 1850.

|. . . . . Wie Ihnen bekannt sein wird, erscheint in Giessen ein *Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie, Physik usw.* Der Professer der Mathematik daselbst, Dr. [Friedrich Georg Carl] Zamminer, der auch die Optik vorträgt, interessirt sich sehr für meine Arbeiten und will als Mitarbeiter obigen Jahresberichts mein Ocular in demselben anführen. Weil aber in dieser Sache nur das Urtheil grosser Astronomen Gewicht hat, so würde ich

[*) Siehe den Brief von Gauss an Schumacher vom 5. Februar 1850, *Briefwechsel* VI, S. 59; vergl. auch ebenda SS. 73, 80—83.]

Ihnen zum grössten Danke verpflichtet sein, wenn Sie mir Ihr Urtheil, soweit Sie es bis jetzt gefällt haben, gütigst mittheilen wollten. . . . . .}

[4.]

GAUSS an KELLNER. Göttingen, zwischen dem 14. und 17. März 1850.

[Jahresbericht über die Fortschritte der ... Chemie, Physik, Mineralogie und Geologie ... herausgegeben von JUSTUS LIEBIG und HERMANN KOPP. Für 1849. Giessen 1850. S. 134.]

. . . . . Das Ocular vergrössert, an das MERZsche Fernrohr angebracht, 96 mal und steht daher in dieser Beziehung ganz einem der vorhandenen MERZschen Oculare gleich. In der Deutlichkeit und Farblosigkeit des Bildes habe ich keine entschiedene Ungleichheit bemerken können. Aber Ihr Ocular hat ein Gesichtsfeld von 27′ 36″ Durchmesser, das MERZsche nur 18′ 25″. Es ist mithin die Fläche des Gesichtsfeldes bei Ihrem Ocular mehr als doppelt so gross, als unter gleicher Vergrösserung bei dem MERZschen. Die Deutlichkeit des Sehens ist bei Ihrem Ocular bis zum Rande des Gesichtsfeldes, wenn nicht ganz, doch gewiss fast gleich gut. . . . . .

[5.]

CARL KELLNER an GAUSS. Wetzlar den 19. März 1850.

{. . . . . Aus Ihrem mir sehr werthen Briefe, womit ich dieser Tage beehrt wurde, habe ich mit Freude ersehen, dass Sie mit den Leistungen des orthosk[opischen] Okulars wohl zufrieden sind. . . . Ihrem schwerwiegenden Rathe zufolge, hätte ich besser gethan, wenn ich die Berechnung meiner Okulare offen vorgelegt hätte. . . . .

Die gewünschte Quittung folgt einliegend.}

[6.]

CARL KELLNER an GAUSS. Wetzlar, den 13. Mai 1850.

{. . . . . Den richtigen Empfang der acht Thaler ergebenst anzeigend, verfehle ich nicht, . . . nochmals meinen innigsten Dank abzustatten. . . . und

ich erfülle mit Vergnügen Ihren Wunsch, Ihnen Aufschluss über das Zusammenleimen der Linse zu geben. . . . .}

BEMERKUNG.

Über das in Rede stehende Okular vergl. *Das orthoscopische Ocular usw., eine verbesserte Construction der Objectivgläser, nebst Anleitung zu richtiger Beurtheilung und Behandlung optischer Instrumente* von C. KELLNER, Optiker in Wetzlar; mit einem Anhang von M. HENSOLDT . . ., Braunschweig 1849. — Im GAUSSarchiv befinden sich die oben erwähnten vier Briefe KELLNERS an GAUSS. — Die Handschriften der Briefe von GAUSS an KELLNER haben sich trotz dankenswerter Bemühungen des Chefs der Firma E. LEITZ in Wetzlar — der Nachfolgerin C. KELLNERS — weder bei der Firma, noch bei den Nachkommen KELLNERS auffinden lassen; wir mussten uns daher damit begnügen, den bereits veröffentlichten Auszug [4.] und einige Stellen der Briefe von KELLNER, in denen von dem Inhalt der GAUSSschen Briefe die Rede ist, wiederzugeben.

SCHLESINGER.

30. Schreiben des Herrn Ministerialraths v. Steinheil an den Herausgeber [der Astronomischen Nachrichten].

Astronomische Nachrichten, Bd. 53, 1860, Spalte 305.

{Das neue (nahezu GAUSSische*)) Objektiv $\frac{36'''}{46''}$ ist fertig und verglichen. Es ist entschieden achromatischer und schärfer als irgend ein FRAUNHOFER. Auch das Gesichtsfeld ist wenigstens ebenso gut, als bei FRAUNHOFERS Construction. Die secundären Farben scheinen mir dünner, durchsichtiger. Ein künstlicher Stern (Sonnenreflex auf Stahlkugel 9‴ Durchm[esser] und 60′ Abstand) erscheint auf schwärzerem Grunde umgeben mit ganz feinen Lichtringchen. Es erträgt gut eine 300 malige Vergrösserung. Ich habe das Sonnenbild durch ein Prisma zerlegt und das Bild successive in allen Farben auf der Stahlkugel reflectirt. Zum deutlichsten Sehen ist keine Ocular-Verstellung erforderlich (eine Verstellung von 0,‴02 ist bemerklich). Ebenso behauptet das Ocular seine Stellung, wenn man bis auf 1 Zoll Öffnung diaphragmirt und excentrisch bis zum Rande des Objectivs mit der freien Öffnung fortwirkt. Es sind daher

*) S. BOHNENBERGERS Zeitschr. f. Astron. 4. Bd. XXX, p. 345—351 [vgl. Werke V, S. 504.]

Farben erster Ordnung und Kugelgestalt streng gehoben. Eine ringförmige Objectiv-Öffnung erträgt es ebensowenig, als der Fraunhofer. Offenbar ist Beugung des zerlegten Lichtes Ursache. Die Erscheinung verdient aber noch besonders studirt zu werden.

Ich konnte mir nicht versagen, Ihnen vorläufig diese Notiz zu geben, da es mir eine überaus grosse Freude macht, eine Arbeit von Gauss, die bisher nicht verstanden und verkannt war, zur vollen Geltung zu bringen, woran ich nach dem vorliegenden Erfolge nicht mehr zweifeln kann.

Dieser erste Versuch zeigt, dass man das Gaussische Objectiv ohne Abweichung für die Zwischenstrahlen ($\frac{3}{4}$ der Öffnung) herstellen kann. Da nun hier der mittlere und der farbige Strahl über die ganze Öffnung beisammen liegen, die Zwischenabweichung aber auch noch gehoben werden könnte, wenn sie viel grösser wäre, so bin ich der festen Meinung, dass es gelingen wird, das neue Objectiv mit weit grösserer Öffnung als das Fraunhofer'sche herzustellen, und ich habe deshalb ein zweites in Arbeit, welches 54 Linien Öffnung und nur 48 Zoll Brennweite bekömmt. Gelingt auch dieses, dann ist für die Dioptrik viel gewonnen. Dann werden wir alle grossen Objective so construiren müssen, auch schon wegen der Durchbiegung in verschiedenen Lagen, die hier wegen der starken Krümmung ($g' = \frac{1}{10}$ Brennweite) fast ganz unschädlich wird.

Ergänzend zu meiner letzten Mittheilung über Reflexe, habe ich noch beizufügen, dass eine Glaskugel ein Ocular bildet, welches *ganz frei* ist von Reflexen. Natürlich sind aber dabei die andern Bedingungen nicht erfüllt. Indessen zeigt die Kugel als Ocular in der Mitte des Gesichtsfeldes sehr scharf, so dass sie besonders bei starken Vergrösserungen und für das Filarmicrometer gewiss mit Vortheil angewendet werden kann.

München, 1860 Mai 20. C. A. Steinheil.

---

31. Ein Brief von Gauss an Adolf und Georg Repsold in Hamburg.

Göttingen, den 23. September 1836.

Ewr. Wohlgeboren

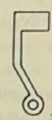
beeile ich mich anzuzeigen, dass das Hannoversche Pfund des Herrn Etatsrath Schumacher, welches Sie in dessen Auftrag hieher geschickt haben, wohlbehalten angekommen ist. Da unter allen meinen Gabeln, deren ich eine ziemliche Anzahl habe, keine für den Hals dieses Gewichts weit genug war, und Hr. Meierstein von einer Reise, auf der er begriffen ist, erst in ein Paar Tagen zurückkommen wird, so habe ich nur Einen Wägungsversuch einstweilen gemacht, wobei ich das Gewicht mit Handschuhen aufsetzte. Nach diesem vorläufigen Versuche war dieses Gewicht gegen 3 Milligramm leichter, als dasjenige preussische Pfund, welches ich aus Berlin erhalten habe. Da jedoch nach Hrn. Etatsrath Schumachers Angabe das specifische Gewicht jenes Pfundes bedeutend geringer ist, als nach meiner eignen Abwägung im Wasser das des letztern, und nach einem Überschlage jenes in der Luft etwa $2\frac{1}{2}$ Milligramme mehr verlieren muss als letzteres, so würde (so viel man aus einer einmaligen nicht unter günstigen Umständen gemachten Abwägung schliessen darf) das wahre (im Vacuum gedachte) Gewicht des von Ihnen verfertigten Pfundes kaum $\frac{1}{2}$ Milligramm von dem wahren Gewicht des aus Berlin erhaltenen differiren. Ich bin in der That neugierig, zu erfahren, nach was für einem Standard Sie jenes Pfund dargestellt und wie Sie haben justiren können, ohne dass an dem so überaus eleganten Kunstwerke eine Spur davon zu erkennen ist.

Was dann die von Ihnen schon vor einigen Monaten übersandte Wage betrifft, so habe ich es zwar höchst dankbar erkannt, dass Ihre überaus grosse Güte es mir überliess, ob ich sie käuflich oder borgweise annehmen wollte, und ich hätte Ihnen allerdings meinen Dank dafür sogleich selbst bezeugen sollen. Dass ich zuvörderst erst Hrn. Etatsrath Schumacher damit beauftragte, wollen Sie gütigst mit der Verlegenheit entschuldigen, die daraus entsprang, dass ich damals ausser Stande war, wegen jener Alternative eine bestimmte

Erklärung abzugeben. Das Geschäft wobei ich die Wage brauche (in gar keinem Zusammenhange mit meiner Stelle als Professor oder Director der Sternwarte) und die Fonds, woraus die Kosten bestritten werden müssen, relevirt von einem ganz andern Ministerium, mit dem ich sogar nicht einmal direct, sondern nur durch Vermittlung einer Commission communicire. Da ich nun aber einerseits Ihre grosse Güte nicht missbrauchen wollte, und auch andererseits mir einige (ich weiss freilich noch nicht, ob gegründete?) Hoffnung mache, dass nach Vollendung des Geschäfts die Wage der Sternwarte geschenkt werden könnte, die nur eine (ohne Vergleich schlechtere) von Rumpf besitzt, so habe ich mir die Autorisation ausgewirkt, Ihre Wage käuflich zu behalten, und bitte in dieser Beziehung, dass Sie mir den Preis unter Anfügung der Kosten für die zwei Halbkilogramme, welche Sie durch Vermittlung des Hrn. Etatsrath Schumacher für mich anzufertigen die Güte haben, melden, oder durch Hrn. Et[ats]r[ath] Sch[umacher] demnächst anzeigen lassen.

Übrigens wird Ihnen Herr Etatsrath Schumacher gemeldet haben, dass nach meinen bisherigen Versuchen diese Wage eine Genauigkeit gibt, mit der ich auch völlig zufrieden sein kann, obgleich ich natürlich mir es gern gefallen lassen will, wenn Sie demnächst die Wage gegen eine andere umtauschen wollen. Bloss, auf dem Agatplättchen zeigt sich auf dem hintern Theile unter der Schneide ein schwacher Strich, vermuthlich dadurch entstanden, dass beim Transport der hintere Theil der Schneide aufgesessen hat. Ob die Harmonie der Wägungen, mit der ich wie gesagt auch jetzt völlig zufrieden sein kann, ohne diesen Strich noch grösser sein würde, wage ich nicht zu entscheiden.

Bei einer neuen Wage würde ich nur bei Einer Kleinigkeit eine Abänderung wünschen, nemlich dass das Ohr A in dem Hakenförmigen Theil worin vermittelst eines S jede Wagschale hängt, scharfe Kante hätte,



A

während diese Kanten jetzt abgerundet sind. Früher hatte ich zwar auch den Wunsch, dass die Arme des Wagebalckens eine feine Eintheilung hätten, um ein Laufgewichtchen anbringen zu können, dessen Moment sich dadurch scharf evaluiren lassen würde; allein ich lege gegenwärtig darauf eben keinen Werth mehr, nachdem ich durch Erfahrung mich überzeugt habe, dass ich mir durch Golddraht, wovon 37

engl[ische] Fuss ein Gramm wiegen, kleine Gewichtchen mit grösster Leichtigkeit und Zuverlässigkeit verschaffen kann.

Mit grosser Hochachtung habe ich die Ehre zu beharren

Ewr. Wohlgeboren

ergebenster Diener

C. F. Gauss.

BEMERKUNG.

Der vorstehend (Nrn. 24—31) abgedruckten Auswahl von noch nicht veröffentlichten, physikalisch interessanten Teilen des Briefwechsels von Gauss reihen sich noch an: die im II. Bande der *Correspondance de H. C. Örsted avec divers savants* publiée par M. C. Harding, Copenhague 1920, auf S. 347—353 wiedergegebenen Briefe von Gauss an Örsted vom 10. November 1834, 21. Januar 1835 und 6. Juli 1837, deren Handschriften in der Universitätsbibliothek zu Kopenhagen aufbewahrt werden, sowie die ebenda auf S. 623—631 abgedruckten Briefe von Örsted an Gauss vom 3. November und 23. Dezember 1834, 31. Januar, 17. April und 14. Juli 1835 sowie vom 2. Februar 1837, deren Handschriften sich im Gaussarchiv befinden.

Schlesinger.

32. Deutscher Entwurf der Einleitung zur Theoria motus corporum coelestium.

Einleitung.

Nachdem Kepler die Gesetze entdeckt hatte, nach denen sich die Planeten um die Sonne bewegen, wusste sein fruchtbares Genie sich auch Mittel zu schaffen, um die Elemente der Bahnen der einzelnen Planeten zu bestimmen. Tycho Brahe hatte die Beobachtungskunst zu einer bis dahin unbekannten Vollkommenheit gebracht; er hatte alle Planeten eine lange Reihe von Jahren hindurch sorgfältig und anhaltend beobachtet, und aus diesem reichen Schatze von Erfahrungen durfte Kepler nur auswählen, was sein Scharfsinn zu seiner jedesmaligen Absicht am zweckmässigsten fand, wobei ihm überdiess die sehr genaue Kenntniss, die man von den mittlern Bewegungen der Planeten vermittelst der Beobachtungen der Alten bereits hatte, ungemein zu Statten kam.

So wie in den folgenden Zeiten die Beobachtuugen immer zahlreicher und immer vollkommner wurden, liessen sich die Planetenbahnen auch immer schärfer bestimmen. Diejenigen Astronomen, die sich nach Kepler damit beschäftigten, hatten dieselben oder noch grössere Vortheile zu Gebote. Sie brauchten nicht ganz unbekannte Elemente von Anfang auszumitteln, sondern nur schon ziemlich genau bekannte Elemente schärfer zu bestimmen, und zwar mit Hülfe von Beobachtungen, die sie, wie es ihnen am bequemsten war, auswählen konnten.

Newton entdeckte das Princip der allgemeinen Schwere, aus welchem a priori folgte, dass die Bewegungen aller Himmelskörper, insofern sie nur unter dem Einflusse der Sonne stehen, den Keplerschen Gesetzen, mit geringen Modificationen, unterworfen sein müssen. Kepler hatte gefunden, dass die Bahnen der Planeten Ellipsen sind, dass die Sonne in einem Brennpunkte

derselben stehe, dass die von einem Planeten um die Sonne beschriebenen Flächenräume im Verhältnisse der Zeiten stehen, endlich dass die Quadrate der Umlaufszeiten in verschiedenen Ellipsen sich wie die Würfel der halben grossen Axen der Bahnen verhalten. Nach dem Princip der allgemeinen Schwere müssen alle Weltkörper, durch den Einfluss der Sonne gelenkt, überhaupt Kegelschnitte beschreiben, die nur unter den Umständen, worin sich die Planeten befinden, Ellipsen werden, unter andern Umständen hingegen eben so gut Parabeln oder Hyperbeln werden können; dass die Sonne allemal in einem Brennpunkte des Kegelschnitts sich befindet; dass die Flächenräume, die Ein und derselbe Weltkörper um die Sonne in verschiedenen Zeiten beschreibt, diesen Zeiten proportional sind; endlich dass die Flächenräume, die verschiedene Weltkörper in einerlei Zeiten um die Sonne beschreiben, sich wie die Quadratwurzeln aus den halben Parametern ihrer Bahnen verhalten: dieses letztere Gesetz, das sich auch bei Parabeln und Hyperbeln anwenden lässt, wo von Umlaufszeit nicht die Rede sein kann, ist für Ellipsen mit dem letztgenannten Keplerschen identisch. Jetzt war der Leitfaden gefunden, an den man sich bei Untersuchung der bis dahin unerklärlich gewesenen Bewegungen der Kometen zu halten hatte. Bei allen Kometen, von denen man hinreichende Beobachtungen hatte, fand man nach angestellter Prüfung, dass man nur voraussetzen dürfe, ihre Bahnen seien Parabeln, um ihre beobachteten oft sehr bizarren Bewegungen mit den Keplerschen Gesetzen in vollkommener Übereinstimmung zu finden. Dadurch wurde Newtons grossen Entdeckungen die Krone aufgesetzt; die aus dem Princip der allgemeinen Schwere abgeleiteten Lehren erhielten die schönste Bestätigung. Nach gleichen ewigen Gesetzen sah man die Planeten in ihren Ellipsen und die Kometen in ihren Parabeln um die Sonne laufen, und die bisher so widerspenstig gewesenen Erscheinungen der letztern schmiegten sich unterwürfig dem Calcül.

Die Bestimmung der parabolischen Bahnen der Kometen aus ihren beobachteten Erscheinungen war nun hauptsächlich deswegen bei weiten schwerer als die Berechnung der Planetenbahnen, weil jene nur eine kurze Zeit sichtbar sind, und man die Beobachtungen nicht so wie bei den Planeten seiner Bequemlichkeit nach auswählen kann, sondern sie so nehmen muss, wie gerade die Lage desjenigen Stücks ihrer Bahnen, worin sie sichtbar gewesen sind, gegen die gleichzeitigen Örter der Erde und andere zufällige Umstände es mit sich bringen. NEWTON selbst, der erste Geometer seines Jahrhunderts, erkannte die Schwierigkeit dieses Problems an, und wusste sie zu besiegen. Viele Geometer haben sich, seit NEWTON, mit eben diesem Probleme mit mehr oder weniger Glück beschäftigt, und gegenwärtig ist die Auflösung desselben zu einem verhältnissmässigen Grade von Leichtigkeit gebracht, der nicht viel zu wünschen übrig lässt.

Inzwischen muss bei dieser Aufgabe ein Umstand nicht übersehen werden, der viel dazu beiträgt, sie einfacher und leichter zu machen; der nemlich, dass Ein Element (die halbe grosse Axe, die unendlich gross ist) schon als bekannt angesehen wird. Alle möglichen Parabeln, abgesehen von ihrer Lage, unterscheiden sich bloss durch den verschieden[en] Abstand des Brennpunkts vom Scheitel: hingegen findet unter Kegelschnitten überhaupt eine unendlich grössere Mannichfaltigkeit Statt. Man war zwar nicht berechtigt zu behaupten, dass die Bahnen der Kometen im strengsten Sinn wirklich Parabeln sind: im Gegentheil hatte man alle Ursache, dies für höchst unwahrscheinlich zu halten. Allein man wusste, dass die Erscheinungen eines Weltkörpers, der sich in einer Ellipse oder Hyperbel von einer im Verhältniss gegen den Parameter sehr langen grossen Axe bewegt, in der Nähe des Periheliums wenig von den Erscheinungen verschieden sind, die die Bewegung in einer Parabel von demselben Abstande des Brennpunkts vom Scheitel darbietet, und um so genauer damit übereinstimmen, je länger jene grosse Axe ist. Wenn man also fand, wie dies wirklich fast bei allen Kometen der Fall war, dass zwischen den Erscheinungen, wie man sie in der Voraussetzung einer parabolischen Bahn berechnet hatte, und den beobachteten eben keine grösseren Unterschiede sich äusserten, als man aus den unvermeidlichen und bei Kometen ohnehin gewöhnlich ziemlich beträchtlichen Fehlern der Beobachtungen erklären konnte, so schloss man mit Recht, dass die vorhandenen Hülfsmittel durchaus nicht hinreichten, zu entscheiden, ob und in wie fern die Bahn von einer Parabel verschieden sei, und begnügte sich demnach mit der gefundenen Parabel. Der HALLEYsche Komet macht davon eine Ausnahme. Durch seine zu oft wiederholten malen beobachtete Wiederkehr zur Sonnennähe war man zur Kenntniss seiner Umlaufszeit gelangt; die Berechnung der elliptischen Elemente hatte nun aber, da die halbe grosse Axe bereits bekannt war, im Grunde wenig mehr Schwierigkeit, als die Berechnung von parabolischen Elementen.

Man hat freilich auch bei einigen andern Kometen, deren Sichtbarkeit von etwas längerer Dauer als gewöhnlich gewesen war, aus den Beobachtungen zu bestimmen versucht, in wie fern die Bahn von einer Parabel abwiche. Allein immer lag doch bei den zu dieser Absicht ersonnenen und angewandten Methoden die Voraussetzung zum Grunde, dass diese Abweichung nicht sehr beträchtlich sei, daher man bei diesen Versuchen die schon vorher berechnete Parabel und die dadurch erlangte schon ziemlich genaue Kenntniss von den übrigen Bestimmungsstücken der Bahn benutzen konnte. Überdies muss man noch hinzusetzen, dass eigentlich alle diese Versuche noch bei keinem einzigen Kometen (man müsste denn den von 1770 ausnehmen) etwas entschiedenes gelehrt haben.

Sobald man den 1781 entdeckten Uranus für einen Planeten erkannt hatte, berechnete man seine Bahn zuerst in der Voraussetzung, dass sie ein Kreis sei. Dies führt auf sehr leichte und einfache Rechnungen. Glücklicherweise ist wirklich die Bahn dieses Planeten nicht sehr excentrisch; man konnte daher die aus dieser Hypothese gefolgerten Resultate immer schon als eine brauchbare Annäherung bei der späterhin berechneten elliptischen Bahn benutzen. Ausserdem waren hier die sehr langsame Bewegung des Planeten und die sehr geringe Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik in mehr als Einer Rücksicht günstige Umstände. Sie erleichterten nicht allein die Rechnung sehr und verstatteten die Anwendung von Methoden, die man in andern Fällen nicht hätte anwenden können; sie schützten auch, verbunden mit dem ziemlich hellen Lichte dieses Planeten vor der Besorgniss, durch seine Unsichtbarkeit von einem Jahre zum andern seine Spur zu verlieren, daher man mit der Berechnung der elliptischen Elemente füglich warten konnte, bis ein Vorrath von Beobachtungen vorhanden war, aus dem man zu dieser Rechnung solche auswählen konnte, die die meiste Bequemlichkeit darboten.

Man sieht, dass in allen Fällen, wo man die Bahnen von Himmelskörpern berechnete, Umstände obwalteten, die die Anwendung von speciellen Methoden begünstigten: der Umstand vornehmlich, dass man durch hypothetische Voraussetzungen immer schon zu einer genäherten Kenntniss von einigen Elementen hatte gelangen können, ehe man die Berechnung einer elliptischen Bahn unternahm. Daher scheint es gekommen zu sein, dass dem allgemeinen Problem

Die wahre Bahn eines Weltkörpers, ohne weitere hypothetische Voraussetzungen, als dass er sich nach den Keplerschen Gesetzen um die Sonne bewege, unmittelbar aus Beobachtungen zu bestimmen, die einen zu kurzen Zeitraum umfassen, als dass man solche aus ihnen auswählen könnte, die specielle Vortheile darbieten (z. B. lauter Oppositionen)

bis zu Ende des vorigen Jahrhunderts gar keine ernstliche Bearbeitung gewidmet worden ist, so viel Anziehendes dasselbe auch schon von analytischer Seite hat. In der That hielt man bis dahin dafür, dass dies durch eine kurze Reihe von Beobachtungen zu erreichen unmöglich sei, eine freilich ganz falsche Meinung, da man jetzt weiss, dass bei der Vollkommenheit unsrer heutigen praktischen Astronomie die Beobachtungen eines Himmelskörpers während eines Zeitraums von wenigen Wochen, worin er einen heliocentrischen Bogen von wenigen Graden beschrieben hat, hinreichend sein können, eine genäherte Kenntniss von allen Bestimmungsstücken seiner Bahn ohne irgend eine hypothetische Voraussetzung zu geben.

Es war im Sommer 1801, als ich auf die ersten Grundideen zu der im gegenwärtigen Werke vorgetragenen Auflösung des gedachten Problems kam, und zwar bei Gelegenheit einer ganz andern Beschäftigung. Nicht selten lässt man in einem solchen Falle Ideenverbindungen, die näher ins Auge gefasst fruchtbar an wichtigen Folgen sein könnten, ungenützt vorbeigehen, um nicht von einer interessanten Untersuchung zu weit abgezogen zu werden. Auch jene Grundideen hätten vielleicht ein solches Schicksal gehabt, wären sie nicht ganz zufällig in einen Zeitpunkt gefallen, der für ihre Erhaltung nicht günstiger hätte sein können. Gerade um diese Zeit kamen nemlich die ersten genauern Nachrichten über den von Piazzi am 1. Januar 1801 entdeckten neuen Planeten ins Publikum. Noch niemals war in der Astronomie ein Fall eingetreten, wo das Bedürfniss einer von allen Hypothesen unabhängigen Methode, die Bahn eines Planeten aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen mit möglichster Genauigkeit zu bestimmen, so fühlbar und so dringend gewesen wäre als damals, wo nach einer ansehnlichen Zwischenzeit die Wiederauffindung und fernere Erhaltung eines äusserst kleinen, nur durch gute Fernröhre sichtbaren Planetenatoms nur von einer schon sehr genäherten Kenntniss seiner Bahn abhing. Keinen entscheidendern Probirstein konnte ich folglich für die Wichtigkeit und praktische Brauchbarkeit meiner Ideen finden, als wenn ich

davon eine Anwendung auf die Bestimmung der Bahn der Ceres machte, die in den wenigen Wochen ihrer ersten Sichtbarkeit eine nur drei Grad betragende geocentrische Bewegung gezeigt hatte, und nun ein Jahr nachher in einer ganz verschiedenen Himmelsgegend aufgesucht werden musste. Diese erste Anwendung der Methode wurde im October 1801 gemacht, und die Ceres wurde in der ersten heitern Nacht, wo man sie mit Hülfe der daraus abgeleiteten Resultate aufsuchte, wiedergefunden*). Ein zweiter, ein dritter und ein vierter neuer Planet haben nicht lange darauf die allgemeine Brauchbarkeit der Methode von neuen zu bewähren Gelegenheit gegeben.

Bald nach der Wiederauffindung der Ceres wurde ich von mehrern geschätzten Astronomen aufgefordert, die von mir gebrauchten Methoden öffentlich bekannt zu machen; allein theils mancherlei andere Abhaltungen, theils der Wunsch, diesen Gegenstand mit Ausführlichkeit zu behandeln, theils endlich die Hoffnung, dass die fortgesetzte Beschäftigung mit diesen Arbeiten Gelegenheit geben würde, die verschiedenen Theile der Methode zu einem höhern Grade von Vollkommenheit, Allgemeinheit und Leichtigkeit zu bringen, sind die Ursachen, dass ich dem Wunsche dieser Freunde erst jetzt Genüge leiste. Ich schmeichle mir, dass man mit dieser Verspätung nicht unzufrieden zu sein Ursache haben wird. Ich habe in dieser Zwischenzeit nach und nach so vieles an meinen zuerst gebrauchten Methoden abgeändert, so manches hinzugesetzt, und für manche Theile ganz neue Wege eingeschlagen, dass sich zwischen der Art, wie ich Anfangs die Planetenbahnen wirklich berechnete und der im gegenwärtigen Werke vorgetragenen nur noch geringe Ähnlichkeit finden würde. Obgleich es nun freilich nicht in meinem Plane lag, von allen diesen meinen Untersuchungen eine vollständige Nachricht zu geben, so habe ich doch auch manche meiner frühern, nachher mit andern vertauschten Methoden nicht ganz unterdrücken zu müssen geglaubt, zumal wenn sie die Auflösung von besonders interessanten Aufgaben betrafen. Vielmehr habe ich neben den eigentlich leichtesten und brauchbarsten Auflösungsmethoden des gedachten Hauptproblems, von allem was ich bei meiner nun schon ziemlich langen Beschäftigung mit den die Bewegung der Himmelskörper betreffenden Rechnungen merkwürdig und praktisch bewährt gefunden habe, hier zusammen-

*) Den 7. December 1801 durch H[err]n von Zach.

gestellt. Jedoch habe ich hiebei das mir Eigenthümliche immer ausführlicher behandelt und das schon bekannte nur in so fern es zur Vollständigkeit des Ganzen nothwendig war, berührt.

Auf diese Weise zerfällt dieses Werk von selbst in zwei Abtheilungen. Die erste ist dazu bestimmt, alle die interessantesten und brauchbarsten Relationen zwischen den verschiedenen Grössen zu untersuchen, die auf die Bewegung der Himmelskörper um die Sonne nach [den] KEPLERschen Gesetzen Bezug haben. Diese Untersuchungen geben unter andern auch zu mehrern eigenthümlichen Verfahrungsarten Anlass, die geocentrischen Erscheinungen aus den Elementen abzuleiten. Diese Erscheinungen sind das Resultat einer künstlich verwickelten Combination der Elemente, und man muss sich daher erst eine vertraute Bekanntschaft mit allen einzelnen Verflechtungen in diesem Gewebe erwerben, ehe man die einzelnen Fäden wiederum zu entwirren, und das Ganze in seine ursprünglichen Bestandtheile glücklich zu zerlegen hoffen darf. In der zweiten Abtheilung wird es dann um so leichter, dieses umgekehrte Problem aufzulösen, nemlich die Elemente aus den Erscheinungen abzuleiten, da der grösste Theil der hiezu erforderlichen einzelnen Operationen bereits aus dem ersten Theile bekannt ist, und es nur hauptsächlich darauf ankommt, sie zu sammeln, zu ordnen und zu einem Ganzen zu verbinden.

Ich habe die meisten Aufgaben mit Beispielen begleitet, und zwar, wo es geschehen konnte, mit solchen, die von wirklichen Fällen hergenommen sind. Dies wird hoffentlich dazu dienen, die praktische Brauchbarkeit der Auflösungen zu bewähren und anschaulicher zu machen, und durch die vergrösserte Leichtigkeit, womit auch weniger geübte sich mit dem Ganzen werden vertraut machen können, die Zahl der Freunde dieser Berechnungen zu vermehren, die einen der vornehmsten und schönsten Theile der theorischen Astronomie ausmachen.

BEMERKUNGEN.

Im Herbst 1806 begann GAUSS mit der Ausarbeitung seiner »*Theorie der Bewegung der Himmelskörper nach den Keplerschen Gesetzen*« und etwa im April 1807 war das Werk in deutscher Sprache vollendet (vgl. die Briefe an OLBERS vom 29. September 1806 und vom 28. April 1807); einen Verleger für das Werk hatte er noch nicht. OLBERS wandte sich in dieser Sache an den Buchhändler PERTHES in Hamburg, der erst ablehnte, dann aber sich zur Herausgabe des Werkes in lateinischer Sprache bereit erklärte (vgl. die Briefe von OLBERS an GAUSS vom 21./22. April und vom 6./7. Mai 1807). GAUSS wurde

mit PERTHES einig und begann sogleich mit der Übersetzung (vgl. den Brief an OLBERS vom 26. Mai 1807). Im November 1807 begann der Druck (vgl. den Brief an OLBERS vom 29. Oktober 1807), der indessen nur langsam vonstatten ging und erst im Juni 1809 vollendet wurde (vgl. den Brief an OLBERS vom 27. Juni 1809).

Von der ursprünglichen Handschrift in deutscher Sprache ist nur noch die *Einleitung* vorhanden, die vorstehend abgedruckt ist.

BRENDEL.

---

33. Zusatz zu der Abhandlung „Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden“ *).

Beilagen.

Verschiedene Formeln zur theoretischen Astronomie gehörig, die bisher nicht bekannt zu sein scheinen.

Reduction der Länge in der Bahn $= v$ auf die Länge in der Ekliptik $= \lambda$. Neigung der Bahn $= i$, Knoten $= \Omega$, Breite $= \beta$.

$$\sin(v-\lambda) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i \, . \operatorname{tg}\beta \, . \cos(v-\Omega)$$
$$= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i \, . \sin\beta \, . \cos(\lambda-\Omega).$$

Herr SCHUBERT sucht in seiner *Astronomie*[**)] die Tangente der Reduction, die er durch eine Reihe ausdrücken muss.

Für die grösste Mittelpunktsgleichung ist folgendes eine sehr bequeme Näherung, solange die Eccentr[icität] nicht gar zu gross ist.

Eccentricität $= \sin\varphi$

Äq[uatio] Centr[i] Max[ima] $= \varphi + e + \frac{3}{8}(\varphi - e)$[***)]

e wird in Sekunden ausgedrückt, d. i. mit 206265 multiplicirt.

Um aus der mittlern Anomalie die wahre $= A$ zu finden, bediene ich mich stets der indirecten Methode, die ich ohne Vergleich bequemer finde

*) Siehe Werke VI, S. 148 ff.

[**) FR. TH. SCHUBERT, *Theoretische Astronomie*, St. Petersburg und Riga 1798, II. Theil, § 80.]

***) Die Handschrift hat, wohl infolge eines Schreibfehlers: $\varphi + e + \frac{3}{8}(\varphi + e)$, vgl. Werke VII, S. 291.]

als irgend eine andere. Zumal wenn man viele Örter berechnet, kann man immer den Unterschied der eccentrischen Anomalie $= E$ von der mittl[ern] auf 1 oder ein Paar Sekunden voraus wissen. Die gewöhnl[ichen] Formeln wären hier[*)]

$$E = m - e \sin E$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E . \sqrt{\tfrac{1-e}{1+e}} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E . \operatorname{tg} (45 - \tfrac{1}{2} \varphi)$$
$$r = \frac{k}{1 - e \cos A}.$$

Ich habe folgende, theils weil sie bei gleich genau geführter Rechnung schärfer sind, oder um gleiche Schärfe zu erhalten weniger Genauigkeit in der Rechnung erfordern, theils weil sie bequemer scheinen und wegen der leichten Kontrole vor Rechnungsfehlern eher schützen, vorgezogen:

$$E = m - e \sin E, \qquad \frac{r}{a} = 1 + e \cos E$$
$$\sin \tfrac{1}{2} (E - A) = \frac{\sin E . \sin \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{\frac{r}{a}}}.$$

Zur Kontrole dient

$$\frac{\sin E}{\frac{a}{r}} = \frac{\sin A}{\cos \varphi}.$$

Oben kommt die umgekehrte Aufgabe vor, wo aber r schon bekannt ist; da stehen die Formeln so

$$\sin \tfrac{1}{2} (E - A) = \sin A . \sin \tfrac{1}{2} \varphi . \sqrt{\tfrac{r}{k}}.$$

Zur Kontrole: $\sin A \cdot \frac{r}{k} = \frac{\sin E}{\cos \varphi}$,

$$m = E + e \sin E.$$

BEMERKUNGEN.

Wie bereits S. 117 bemerkt worden ist, befindet sich im Besitz der Stadtbibliothek zu Bremen eine Handschrift des Aufsatzes »*Summarische Übersicht der zur Bestimmung der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden*«, der in der »Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde«, September 1809 (Werke VI, S. 148) abgedruckt ist.

[*) Die Anomalien sind vom Aphel gezählt.]

Über die Entstehung und das Schicksal dieser Handschrift geben die folgenden Briefstellen Aufschluss: GAUSS an OLBERS am 6. August 1802: »Ich habe daher einige Stunden angewandt, um einen ganz summarischen Abriss derselben zu Papier zu bringen. Sie finden indess darin alles Wesentliche; was bei der Entwicklung der Rechnung fehlt, werden Sie leicht ergänzen, und was ich sonst noch bei meinen Rechnungen Eigenthümliches habe, ist von geringerer Bedeutung. Ich habe, um Sie noch in Rehburg zu treffen, so sehr geeilt, dass ich mir nicht die Zeit genommen habe, es nochmals ins Reine zu schreiben. Sie verzeihen es der Ursache der Eile, dass ich Ihnen also ein blosses Brouillon schicke, das ich mir künftig einmal, wenn ich an eine ausführliche Bearbeitung denken kann, zurück erbitten werde.« OLBERS an GAUSS am 2. November 1805: Hier erhalten Sie den vortrefflichen kleinen Aufsatz über die Bestimmung der Planetenbahnen, für den ich nochmals recht herzlich danke, zurück. Zwar hat Herr BESSEL ihn mir abgeschrieben, aber als ein Andenken von Ihrer Hand möchte ich ihn doch gerne, wenn Sie ihn garnicht mehr brauchen, zurückhaben.« Den Abdruck in der Monatlichen Correspondenz begleitet der Herausgeber, v. LINDENAU, mit den Worten: »Als ich vor einiger Zeit die persönliche Bekanntschaft des Hrn. Prof. GAUSS zu machen zu Glück hatte, sah ich unter dessen Papieren den hier folgenden, schon vor mehreren Jahren entworfenen und noch nirgends bekannt gemachten Aufsatz, der die frühere Methode des Verfassers zu Bestimmung der Planetenbahnen enthält.«

Die Bremer Handschrift, die uns von dem Direktor der Bremer Stadtbibliothek, Dr. KNITTERMEYER, freundlichst zur Verfügung gestellt wurde, trägt den Vermerk: »am 21. Februar 1840 durch Herrn Dr. med. WILHELM OLBERS der Bibliothek geschenkt. Nach desselben Erklärung eigenhändig verfertigtes Manuskript des Verfassers Professor GAUSS, und Geschenk desselben an Herrn Dr. OLBERS. E. MEYER, Bibliothekar.« Eine Vergleichung der Handschriften in Verbindung mit den angeführten Briefstellen lässt aber keinen Zweifel, dass es sich hier nicht um die Originalhandschrift von GAUSS, sondern um die BESSELsche Abschrift handelt, umsomehr als das Schriftstück sehr sorgfältig und sauber geschrieben ist und keineswegs als ein »blosses Brouillon« bezeichnet werden kann. Dieses letztere dürfte vielmehr in den Händen v. LINDENAUS geblieben sein. Man vergleiche auch den Aufsatz über GAUSS astronomische Arbeiten, Band XI, 2. Die oben abgedruckten »Beilagen« befinden sich am Schluss der Bremer Handschrift und werden hier zum ersten Male veröffentlicht.

BRENDEL.

34. Über einen Brief von Gauss an J. Bertrand, betreffend eine Stelle in der Theoria Motus.

[Comptes rendus de l'Académie des Sciences, tome 40, p. 1082, Paris 1855.
Lettre de M. J. BERTRAND.]

{M. VALSON, professeur au lycée de Marseille, vient de soumettre au jugement de l'Académie un Mémoire intéressant sur un cas d'exception que présente la méthode à l'aide de laquelle M. GAUSS détermine l'orbite d'une planète[*)]. J'avais indiqué ce cas d'exception dans une leçon au Collège de France, en signalant à mes auditeurs le passage du *Theoria motus*, auquel M. Valson fait allusion, comme une tache regrettable dans un ouvrage aussi parfait.

Ayant eu, peu de temps après, occasion d'écrire à M. Gauss, je crus pouvoir lui soumettre les doutes que j'avais conçus sur l'exactitude du paragraphe 160 de son livre. L'illustre géomètre a bien voulu répondre à mon objection par une Lettre datée du 22 janvier 1855. Je crois devoir transmettre à l'Académie un passage de cette Lettre, qui peut-être est la dernière que Gauss ait écrite.}

»..... Vous mentionnez des scrupules concernant un cas exceptionnel dans le *Theoria motus corporum coelestium*, dans lequel les méthodes exposées dans cet ouvrage cessent d'être applicables. Je parle[**)] du cas où une orbite devrait être déterminée par trois lieux géocentriques dont le troisième coïncide avec le premier. Comment avez-vous pu me prêter l'idée absurde que, dans ce cas, l'orbite deviendrait indéterminée en elle-même? Il n'est question dans le lieu cité que de la solution du problème: trouver une première approximation, et il est clair comme le jour que, dans ce cas, la méthode générale ne donne rien: mais il n'en est pas moins vrai que les data ne laisseraient pas l'orbite indéterminée, et le problème de la déterminer aurait beaucoup d'intérêt pour la théorie, quoique peut-être assez peu pour la pratique; du moins, je présume que, généralement, il existe deux solutions peu différentes et énormément affectées des erreurs inévitables des observations.

Je reçus votre Lettre dans un temps où l'état de ma santé fut très-maladif, ce qui me disposa à en différer la réponse de semaine en semaine; mais mes espérances d'une restauration prompte ne se sont pas accomplies; au contraire, ma santé se détériorant de plus en plus, j'ai cru devoir ne plus tarder à me purger d'une accusation tout à fait injuste.«

{On voit par ces dernières lignes quelle importance M. Gauss attachait à ne pas être soupçonné d'une erreur même légère et portant sur un point

[*) Ein Auszug der Abhandlung von Valson: *Examen de la méthode de M. Gauss pour la détermination des orbites planétaires* ...... befindet sich in dem gleichen Bande der Comptes rendus, p. 1023.]

[**) Werke VII, S. 217].

secondaire de son oeuvre. Cette préoccupation chez un homme aussi éminent n'a rien qui doive surprendre. M. Gauss se distinguait, en effet, entre les géomètres du premier ordre, par le soin qu'il a toujours eu de ne livrer au public que des ouvrages longuement médités. Aussi, tout en sachant que des inadvertances de détail n'auraient rien ôté à l'admiration qu'inspirait son rare génie, on conçoit qu'il se montrât cependant jaloux de joindre au mérite d'avoir fait tant d'immortels travaux, le mérite beaucoup moindre, quoique fort rare, de ne s'être jamais trompé.}

BEMERKUNG.

In einem »Paris 2 mai 1877« datierten Briefe schreibt J. Bertrand an E. Schering: »J'ai reçu moi même trois lettres de C. F. Gauss mais deux d'entre elles ont été brûlées dans l'incendie de la commune en 1871 en même temps qu'une lettre adressée à Arago qui était entre mes mains. L'une des trois lettres qui m'ont été adressées est entre les mains de M. Chasles à qui je l'ai donnée, mais il ne l'a pas encore retrouvée et à l'age de 84 ans sa mémoire lui fait souvent défaut. Je m'empresserai dès qu'il l'aura retrouvée de vous en envoyer la copie. Une des lettres que Gauss m'a fait l'honneur de m'écrire a précédé sa mort de quelques semaines seulement et elle était relative à une inadvertance que j'avais cru remarquer dans le *theoria motus corporum coelestium* et contre laquelle il proteste energiquement. Je l'ai inserée dans les comptes rendus de l'académie des sciences tome 40, 1855 en supprimant seulement ce qui n'était pas relatif à la science.«

Hieraus geht mit ziemlicher Sicherheit hervor, dass die Handschrift des Briefes, den Gauss am 22. Januar 1855 an Bertrand gerichtet hatte, zu denen gehört, die beim Brande im Jahre 1871 vernichtet worden sind. Dies wird auch in einer Mitteilung des Sohnes von J. Bertrand, Colonel J. Bertrand, an N. E. Nörlund vom 12. Juli 1927 als sehr wahrscheinlich bezeichnet.

Brendel. Schlesinger.

35. Ein Brief von Gauss an W. v. Struve.

Göttingen, 2. März 1820.

. . . .

Der nächste Zweck meines heutigen Schreibens ist, Sie zur Theilnahme an gewissen Mondsbeobachtungen einzuladen, die ich mit den Herren En[c]ke, Nicolai und Soldner verabredet habe, und die auch bereits seit einiger Zeit im Gange sind. Wir vergleichen die Rectascension des Mondes mit verabredeten nahe stehenden Sternen, um die Längendifferenzen unsrer Sternwarten hiedurch zu bestimmen. Obgleich die Bestimmung von Einem Tage derjenigen, die durch eine gut beobachtete Sternbedeckung erhalten wird, an Genauigkeit nicht ganz gleich kommt, so hat doch dagegen jenes Verfahren wieder mehrere bedeutende Vorzüge vor dem andern, die Unabhängigkeit von nicht ganz aufs Reine gebrachten Rechnungselementen und von den doch an vielen Stellen sehr ansehnlichen Ungleichheiten des Mondsrandes, und die Leichtigkeit, womit man, im Besitz eines guten Mittagsfernrohrs, in kurzer Zeit nach jenem Verfahren eine grosse Menge Bestimmungen erhalten kann. Bisher haben wir uns fast ganz auf den ersten Mondsrand beschränkt, in den Sommermonaten werden wir aber auch einige Nächte nach dem Vollmonde hinzunehmen. Um Ihr Vertrauen für diese Methode zu gewinnen, setze ich Ihnen von den bisher berechneten Unterschieden die zwischen Göttingen und Mannheim, und die zwischen Göttingen und Bogenhausen her:

Längenunterschied

Göttingen-Mannheim		Bogenhausen-Göttingen	
1819 Sept. 28	353″5	Sept. 28	399″2
Oct. 1	357,1	Oct. 1	403,7
2	354,0	2	406,7
1820 Jan. 22	355,4	Jan. 21	404,9
23	347,9	23	406,1
24	354,0	24	401,7
25	351,2	25	406,7
Febr. 22	357,2	26	400,8
23	354,1	Mittel	403,7
Mittel	353,5		

Sie sehen, dass bei Mannheim der grösste Unterschied vom Mittel nur 5″6 und bei Bogenhausen nur 4″5 ist; jener setzt einen Unterschied der in Göttingen und Mannheim beobachteten Ascensionaldifferenzen, wenn sie auf Einen Zeitpunkt reducirt wären, von 3″ Bogen voraus, so dass jeder Beobachter nur 0″75 in Bogen bei Mond und Sternen in entgegengesetztem Sinn gefehlt zu haben braucht, um dies zu erklären.

Ich schicke Ihnen beigehend das Verzeichniss der von Herrn Nicolai für die Monate März und April ausgewählten Sterne und hoffe, dass es früh

genug in Dorp[a]t ankommen wird, dass Sie, wenn Sie anders Lust dazu haben, auch noch die erstern, wenigstens zum Theil, werden beobachten können. Auch Bessel schicke ich dieses Verzeichniss. Für May und Junius wird nächstens auch H[er]r En[c]ke die Sterne auswählen. H[er]r Nicolai hat bisher die Arbeit der Berechnung der gemachten Beobachtungen über sich genommen, und Sie können demnächst die Ihrigen an ihn oder an mich oder H[er]rn En[c]ke einsenden. Das Verzeichniss ist übrigens von selbst verständlich; die Zahlen der ersten Columne enthalten die ungefähre AR. des ersten Mondsrandes für Göttingen; bei Ihnen wird sie ein Paar Zeitminuten kleiner sein. Vielleicht setzen wir ein ähnliches Verzeichniss für alle Monate des Jahrs 1821 in das nächste astronomische Jahrbuch, um die Mühe des öftern Abschreibens zu ersparen, und vielleicht noch einige andere Astronomen zur Theilnahme zu veranlassen. Bei Einsendung Ihrer Beobachtungen können Sie die Reductionen, die von der Stellung des Instruments u[nd] dem Gange der Uhr abhangen, selbst machen, so dass nur die Unterschiede der wahren Culminationszeiten nach wahrer Sternzeit angegeben werden; Sie werden aber gebeten, bei jedem Stern u[nd] dem Mond die Anzahl der Fäden anzugeben; beim Mond selbst werden Sie, insofern es irgend möglich ist, suchen, keinen Faden zu verfehlen, weil die Reduction der einzelnen Fäden sonst leicht einige Unsicherheit behält, indem die dazu nöthigen Elemente mit der Genauigkeit, wie sie hiezu erforderlich sind, nicht ohne einige Weitläuftigkeit erhalten werden können.

. . . .

Hochachtungsvoll

Ihr ganz ergebenster

C. F. Gauss.

36. Prüfung eines von dem Uhrmacher Herrn I. C. Hanneke zu Bremerlehe verfertigten Chronometers.

[Mittheilungen des Gewerbe-Vereins für das Königreich Hannover, Jahrgang 1844—1845, Hannover 1845, S. 63.]

{Dieses Chronometer, dessen oben in der Rubrik »Angelegenheiten des Vereins« gedacht wurde, ist von H[er]rn Hofrath Gauss in Göttingen auf seinen Gang untersucht worden, der darüber folgenden Bericht erstattete:}

Ich beehre mich, hierneben das mit den nöthigen Erläuterungen begleitete Register über den Gang des von Hanneke in Bremerlehe angefertigten Chronometers zu übersenden. Da die Vergleichungen einen Zeitraum von fast dritthalb Monaten umfassen, so scheint es nicht nöthig, sie noch länger fortzusetzen.

Es ergibt sich daraus, dass der Gang des Chronometers zunächst nach seiner Ankunft fast genau mittlere Zeit hielt, aber fortwährend, so lange es in geheitztem Lokal aufbewahrt wurde, sich beschleunigte, so dass die Uhr zuletzt täglich 8 bis 9 Sekunden gewann. In nicht geheitztem Lokale zeigte sich der Gang sofort um ein Paar Sekunden langsamer, und wurde dann täglich langsamer, so dass er am Schluss ungefähr wieder auf den ursprünglichen, der mittlern Zeit konformen Gang zurückgekommen war.

Es ist also zwar nicht zu verkennen, dass das Chronometer während dieser Zeit nicht geleistet hat, was Chronometer von erster Güte von den ersten Künstlern wie Kessels, Dent u. A. leisten, die aber auch bekanntlich einen etwa dreimal so grossen Preis haben wie den, welchen Hanneke für sein Chronometer angesetzt hat; allein die Allmäligkeit in den Veränderungen des Ganges lässt einerseits vermuthen, dass daran nicht sowohl das Werk, als eine äussere Ursache, und wahrscheinlich das Oel hauptsächlich Schuld hat; anderseits aber ist ein Chronometer, welches solche doch immer geringe und ohne Sprünge ganz allmälig eintretende Veränderungen des Ganges zeigt, für die meisten Anwendungen fast ebenso brauchbar, wie ein noch vollkommeneres, selbst für die nautischen Anwendungen, wenn nur die eigentlich chronometrischen Längen-Bestimmungen, nach grösseren Zeit-Intervallen, ausgenommen werden.

Es wäre daher dem wackern Künstler eine Aufmunterung wohl zu wünschen.

Register über Stand und täglichen Gang eines Chronometers von Hanneke.

1844 Mittag	Stand gegen mittlere Göttinger Zeit	Täglicher Gang	1844 Mittag	Stand gegen mittlere Göttinger Zeit	Täglicher Gang
Januar 12	− 9′ 11″2		Februar 17	− 6′ 52″9	
13	9 10.7	+ 0″5	18	6 46.4	+ 6″5
14	9 10.7	0.0	19	6 40.4	6.0
15	9 9.9	0.8	20	6 34.2	6.2
16	9 9.2	0.7	21	6 27.8	6.4
17	9 8.3	0.9	22	6 20.1	7.7
18	9 6.0	2.3	23	6 13.5	6.6
19	9 2.7	3.3	24	6 6.5	7.0
20	8 59.7	3.0	25	5 58.2	8.3
21	8 56.6	3.1	26	5 51.0	7.2
22	8 53.0	3.6	27	5 43.7	7.3
23	8 49.3	3.7	28	5 37.8	5.9
24	8 45.5	3.8	29	5 31.4	6.4
25	8 41.7	3.8	März 1	5 24.0	7.4
26	8 37.8	3.9	2	5 17.7	6.3
27	8 33.7	4.1	3	5 10.3	7.4
28	8 29.6	4.1	4	5 2.8	7.5
29	8 25.4	4.2	5	4 55.1	7.7
30	8 21.0	4.4	6	4 47.5	7.6
31	8 16.6	4.4	7	4 40.0	7.5
Februar 1	8 12.2	4.4	8	4 32.3	7.7
2	8 7.6	4.6	9	4 24.1	8.2
3	8 2.7	4.9	10	4 15.2	8.9
4	7 57.8	4.9	11	4 6.8	8.4
5	7 53.1	4.7	12	3 58.8	8.0
6	7 48.2	4.9	13	3 50.6	8.2
7	7 43.9	4.3	14	3 45.1	5.5
8	7 39.0	4.9	15	3 40.4	4.7
9	7 33.9	5.1	16	3 35.9	4.5
10	7 28.6	5.3	17	3 32.1	3.8
11	7 23.8	4.8	18	3 28.5	3.6
12	7 18.9	4.9	19	3 25.2	3.3
13	7 13.7	5.2	20	3 22.6	2.6
14	7 8.9	4.8	21	3 20.3	2.3
15	7 3.4	5.5	22	3 19.0	1.3
16	6 58.5	4.9	23	3 19.0	0.0
17	6 52.9	5.6	24	3 18.5	0.5

Bemerkungen. Das Chronometer wurde jeden Tag zwei Mal, nämlich Vormittags 9 Uhr und Nachmittags 3 Uhr, verglichen: das Mittel aus beiden Vergleichungen ist in vorstehender Tafel als der Stand im Mittage angesetzt. Das Minuszeichen (—) bei dem Stande bedeutet, dass das Chronometer während des ganzen Zeitraums gegen die mittlere Zeit der Sternwarte zurück war; das Pluszeichen (+) bei dem Gange hingegen, dass es schneller ging als nach mittlerer Zeit.

Während der ersten zwei Monate, oder genauer bis Mittag den 13. März, wurde das Chronometer in einem geheitzten Zimmer aufbewahrt und die Temperatur an dem Platze, wo es stand, wird immer nahe auf 15° Reaumur zu schätzen sein, mit Ausnahme der späteren Nachtstunden, wo sie einige Grade tiefer herabgegangen sein mag. In eine tiefere Temperatur kam das Chronometer nur während der wenigen Minuten, wo es zur Vergleichung mit der Hauptuhr der Sternwarte in diese gebracht wurde.

Vom 13. März an hingegen blieb das Chronometer ununterbrochen in der Sternwarte, wo die Temperatur während des betreffenden Zeitraums (bis 24. März) sich immer sehr nahe auf 3° gehalten hat.

Aufgezogen wurde das Chronometer jeden Tag zu gleicher Stunde.

37. Über den d'Angosschen Kometen.

[1.]

Gauss an Schumacher, Göttingen den 30. Mai 1846.

Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, V, Altona 1863, S. 163, 159.

.... Seit langer Zeit habe ich vielfältigst erfahren, dass bei brieflichen Discussionen über Streitfragen selten etwas herauskommt, als der Verdruss, Zeit und Mühe verschwendet zu haben. ..... Eine mir unvergessliche Ausnahme machte unser Olbers, mit dem ich sehr oft solche kleine Scharmützel gehabt habe, die allemahl (den Fall von Dangos Betrug abgerechnet, den Olbers als durch Encke erwiesen ansah, ich nur wie zu einem gewissen Grade von Wahrscheinlichkeit gebracht, weit entfernt von Gewissheit .....) auf eine befriedigende Art zum Ziele kamen. .....

[2.]

Astronomische Nachrichten, Bd. 66, 1866, Nr. 1574, Spalte 219—222.

Schreiben des Herrn C. Behrmann an den Herausgeber.

[In N. 1555 der Astron. Nachrichten[*)] findet sich ein Aufsatz über den zweiten Cometen von 1784 von Herrn Prof. d'Arrest. In einer Anmerkung[**)] thuen Sie der Gaussschen Ansicht Erwähnung, wie derselbe sich in einem Briefe an Schumacher[***)] in dieser Sache geäussert. Es wird vielleicht Ihnen und den Lesern der Astronomischen Nachrichten angenehm sein, im folgenden kleinen Aufsatze etwas Näheres über die Gausssche Ansicht zu erfahren. Es stammt diese Schrift aus dem letzten Decennium seines Lebens und scheint ganz zum Drucke oder zu sonstiger Mittheilung fertig zu sein; irgend ein unbekannter Umstand muss ihn von der Veröffentlichung abgehalten haben. Ich theile Ihnen das Manuscript hier wörtlich mit:]

Über den Dangosschen Cometen.

In von Zachs Correspondance Astronomique T. 4 p. 456ff. hat Encke gezeigt[†)], dass um Dangos angebliche Beobachtungen mit dessen parabolischen Elementen in Übereinstimmung zu bringen, ein allgemeiner Rechnungsfehler vorausgesetzt werden müsse, der alle Distanzen des Cometen von der Sonne zehnfach vergrössert habe.

Encke führt zugleich seine vergeblichen Versuche an, die Beobachtungen durch eine parabolische, elliptische oder hyperbolische Bahn zu erklären, und zieht daraus den Schluss, dass die Beobachtungen garnicht gemacht, sondern

[*)] Astronomische Nachrichten, Bd. 65, herausgegeben von C. A. F. Peters, 1865, Spalte 288—296.]

[**)] a. a. O. Spalte 295, 296.]

[***)] Siehe die vorstehend unter 1. abgedruckte Briefstelle.]

[†)] *Imposture astronomique grossière du Chevalier D'Angos.* Dévoilée par J. F. Encke à Gotha. Correspondance astronomique, géographique, hydrographique et statistique du Baron de Zach, vol. IV, 1820, S. 456—469, Notes S. 470—474. Der Teil des Enckeschen Aufsatzes, der einen Brief von Olbers wiedergibt, ist abgedruckt in Olbers *Werken* Bd. I, 1894, S. 185—189. Vgl. auch ebenda, S. 189, 190.]

die Positionen nur nach willkürlich angenommenen Elementen berechnet, und zum Unglück des Falsarius, unrichtig berechnet seien.

In Folge dieser Discussion hat OLBERS in seinem 18.. gedruckten Cometenverzeichniss[*)] den in Rede stehenden Cometen als eine schändliche Erdichtung des Ritter D'ANGOS bezeichnet, welcher Ausdruck auch buchstäblich in GALLES Cometentafel von 1847 aufgenommen ist.

Ich gestehe, dass mir immer durch das, was von ENCKES Untersuchung vorliegt, eine solche vernichtende Brandmarkung eines längst verstorbenen Astronomen nicht hinlänglich gerechtfertigt geschienen hat. Immerhin mag durch jene, zumal in Verbindung mit andern aus D'ANGOS Persönlichkeit geschöpften Umständen, ein solches Urtheil auf einen überaus hohen Grad von Wahrscheinlichkeit gebracht sein. Aber um dasselbe in so schneidender Entschiedenheit aussprechen zu können, musste doch die absolute Unmöglichkeit, die bekannt gemachten Beobachtungen durch eine wirkliche Bahn in richtiger Rechnung zu erklären, in ein viel helleres Licht erst gesetzt sein, als durch ENCKES Aufsatz geschehen ist.

Dass D'ANGOS Elemente dies nicht leisten, kann als gewiss betrachtet und ENCKES Nachweisung eines Rechnungsfehlers darf garnicht bezweifelt werden. Aber das ist gar kein Beweis für eine Erdichtung, sondern nur ein Indicium. Denn in der That, wie oft hat man wahre Facta durch falsche Hypothesen erklärt. Weiset man in einer solchen Erklärung einen wesentlichen Fehlschluss nach, so folgt daraus zunächst nur die Verwerflichkeit der Hypothese, und noch nicht die der Thatsachen selbst. Um diese für erdichtet erklären zu können, muss erst ihre Unverträglichkeit mit feststehenden Wahrheiten nachgewiesen werden.

Alles was ENCKE von seinen in dieser Absicht geführten Rechnungen mittheilt, besteht nur in der Andeutung von 5 verschiedenen von ihm berechneten Bahnen, wobei er für die Distanz von der Erde am 15. April die Werthe 0,42, 0,25, 0,15, 0,051, 0,0013, successive annimmt, und dazu solche correspondirende Distanzen für den 29. April bestimmt, dass der an die Positionen dieser beiden Tage sich anschliessende Kegelschnitt die Länge des 22. April darstelle; die Abweichungen in der Breite werden in diesen 5 Bahnen 16, 14, 13, 12, 2½ Minuten. Die beiden ersten Bahnen sind Hyperbeln, die drei

[*) *Astronomische Abhandlungen* herausg. von SCHUMACHER I, 1823, S. 50.]

letzten Ellipsen. Dass eine Bahn mit so grosser Annäherung an die Erde, wie die letzte, unzulässig ist, mag durch das was ENCKE darüber beibringt als hinlänglich erwiesen erscheinen. Wenn er aber sagt, »dass aus jener Übersicht erhelle, dass mit Vergrösserung der Distanz auch der Fehler in der Breite zunehme«, so ist doch klar, dass dieser Schluss nur so weit gültig ist, als die Versuche reichen und man bleibt ganz im Ungewissen, ob nicht bei weiterer Vergrösserung der Distanz jener Breitenfehler wieder abnehmen und vielleicht bei irgend einer Distanz auf 0 kommen könne.

Um hierüber bessere Einsicht zu erlangen, habe ich Herrn GOULD veranlasst, eine unabhängige Bahnbestimmung nach der allgemeinen Methode zu versuchen. Seine auf die Beobachtungen vom 10., 16., 22. April gegründete Rechnung führte zu der Hauptgleichung:

$$(9.9616862)\sin z^4 = \sin(z + 19^0 37' 39''12)$$

welche nur die beiden reellen Auflösungen zulässt:

$$z = 159^0 35' 51''646$$
$$z = 340\ 57\ 57{,}288$$

beide unbrauchbar, da $\delta' = 100^0 35' 16''21$.

Die Grösse $\frac{\sin z^4}{\sin(z + 19^0 37' 39''1)}$ hat einen Maximalwerth bei $z = 97^0 12' 31''$, dessen Logarithm $= 0{,}03$.

Es fehlt demnach nicht viel daran, dass hier noch eine oder zwei reelle Wurzeln stattfinden, die eben der grossen Annäherung an die Erde entsprechen würden.

Was die Hypothese grosser Distanzen betrifft, so dient folgendes dazu, sie ins Licht zu setzen. Bei solchen müsste die geocentrische Bahn gegen den hel[iocentrisch]en Ort der Erde concav sein; sie ist aber den Beobachtungen zufolge convex. Der grösste Kreis durch die Örter vom 10. und 22. April trifft die Ekliptik in $270^0 33' 58''$ mit Neigung $42^0 56' 23''$. Die Breite in diesem grössten Kreise bei Länge $296^0 48' 41''$ wird $30^0 36' 56''$, also Fehler $-5' 5''$.

Ein grösster Kreis durch die Örter vom 10. April und 1. Mai trifft die Ekliptik in $270^0 57' 24''21$ mit Neigung $43^0 4' 32''57$, log tang ... 9,9708064. Für die Längen der übrigen Tage werden die correspondirenden Breiten in diesem grössten Kreise:

April 14	315° 3′12″	33° 2′52″65	— 8′47″35
15	312 31 1	31 48 37,51	— 10 32,59
16	310 3 24	30 31 36,31	— 10 24,69
17	307 39 49	29 11 57,14	— 11 10,86
18	305 23 48	27 52 7,63	— 11 52,37
22	296 48 41	22 10 57,52	— 11 3,48
23	294 41 2	20 37 2,67	— 11 47,33
25	290 59 59	17 46 3,93	— 8 54,07
26	289 12 21	16 19 10,37	— 7 39,63
28	285 47 48	13 28 1,07	— 4 57,93
29	284 11 31	12 4 57,60	— 3 27,40
30	282 37 17	10 42 17,36	— 13 23,64

Der Ort der Erde war (nach Herrn GOULD):

April 10	201°49′20″5
16	207 43 4,4
22	213 33 2,8

woraus also ersichtlich ist, dass die Convexität der geocentrischen Bahn dem heliocentrischen Ort der Erde zugekehrt war.

Nimmt man an, die Bahn sei geradlinig in unendlicher Entfernung, die die Längen vom 10., 22., 31., darstellt, so ist Perihel:

April 18,65700, in Arg. der Breite 43°24′44″.

Für eine andere Zeit: $\operatorname{tang} v = [8{,}64187]\,(t - 18{,}65700)$.

f	Ber. Arg. der Breite	Länge	Error
10,60619	19°26′24″	325°53′15″	0
16,63819	5 33 28	310 28 15	+ 24′51
22,62407	350 8 3	296 47 56	0
26,66678	340 39 4	289 1 20	— 11 1
31,61826	330 23 38	281 7 58	0

Göttingen, 1866 Febr. 10.

C. BEHRMANN.

38. Astronomische Antrittsvorlesung.

Es wird nicht unzweckmässig sein, — wenn ich gleich bei Eröffnung dieser Vorlesungen mich über den Gesichtspunkt erkläre, aus dem ich sie betrachte, damit Sie im Voraus wissen, was Sie davon zu erwarten haben. Die Kenntnisse, deren Inbegriff die Astronomie ausmacht, sind die Ausbeute von mehr als 2000jährigen Arbeiten über einen der allerreichhaltigsten Gegenstände des menschlichen Wissens, wobei die ersten Köpfe aller Zeiten alle Ressourcen des Genies und des Fleisses aufgeboten haben: selten oder nie hat man in diesem grossen Geschäfte Rückschritte gemacht; sogar die dunkeln Jahrhunderte des Mittelalters, wo die Wissenschaften doch bei den Arabern einen Zufluchtsort fanden, waren für das Fortschreiten der Astronomie nicht ganz verloren, und besonders in den beiden letztern Jahrhunderten, wo so vieles sich vereinigte, die Riesenschritte der Wissenschaft zu beschleunigen, ist sie zu einer solchen Höhe gestiegen, dass es kaum noch Einem Menschen möglich ist, ihrer in ihrem ganzen Umfang Meister zu sein. Es versteht sich also von selbst, dass wir in den wenigen Stunden, die wir in diesen Vorlesungen der Astronomie widmen, nicht dasjenige erschöpfen können, wozu kaum ein Menschenleben zureicht; dass wir nicht darauf ausgehen können, das ganze grosse Gebiet der Astronomie nach allen Details aufs vollständigste und genaueste kennen zu lernen; dass Sie nicht erwarten können, nach Anhörung dieser Vorlesungen, und wenn Sie auch kein Wort davon verlören, nun von allem, was der menschliche Geist zu Tage gefördert hat, ganz au fait zu sein. Überdiess gründen sich auch besonders die feinern Untersuchungen auf so viele und so tiefe Vorkenntnisse der reinen Mathematik, die ich wohl noch nicht durchgängig bei Ihnen voraussetzen dürfte, und endlich ist es auch nicht Ihr Zweck, sich gerade zu eigentlichen Astronomen von Profession zu bilden, was begreiflich auch hier eben so wenig oder vielmehr noch weniger als bei andern Wissenschaften durch Vorlesungen geschehen kann. — Lassen Sie uns also die Absichten, die man bei Anhörung astronomischer Vorlesungen haben kann, etwas näher ins Auge fassen. Ich stelle mir vor, dass man in dieser Rücksicht vorzüglich drei Klassen von Zuhörern unterscheiden kann. Einige wünschen, von den allgemein interessantesten Wahrheiten der Astronomie eine deutliche Einsicht zu erhalten, weil es eines gebildeten Menschen unwürdig ist, ganz Fremdling darin zu sein, weil diese Wahrheiten für eine sehr natürliche Wissbegierde einen so hohen Reiz haben; es fehlt ihnen aber zu sehr an tiefern mathematischen Vorkenntnissen, als dass sie in das Innere der Untersuchungen eindringen könnten, und sie sind daher zufrieden, von solchen Nachforschungen, deren Detail ihnen unzugänglich ist, nur die Hauptresultate zu wissen und eine Idee von der Art zu erhalten, wie sie haben gefunden werden können. Die Forderungen und Wünsche dieser Klasse, welche man die Klasse der th[eoretischen] Dilett[anten] nennen könnte, werden hauptsächlich auf eine recht klare und ausführliche Behandlung der Elementargegenstände und auf die Auswahl von solchen Wahrheiten und Lehren gehen, die interessant sind, ohne schwer zu sein, so wie auf die Weglassung von allem, was ihnen unverständlich und also unnütz sein würde. Zu einer zweiten Klasse rechne ich diejenigen, die sich nicht bloss auf das theoretische Wissen des Allgemein Interessantesten einschränken, sondern sich zugleich zu einer gewissen praktischen Thätigkeit vorbereiten wollen, ohne darum weder eigentliche praktische Astronomen werden, noch die tiefsten Geheimnisse der Theorie ergründen zu wollen. Dies wären die praktischen Dilettanten. Unter praktischer Thätigkeit verstehe ich hier nicht das blosse indolente Besehen der eclatantesten Gegenstände des Himmels, als des Mondes und seiner Flecken, der Planeten, der Sonne, der Nebelsterne u. dergl. durch Fernröhre, denn dies wäre noch mehr die Sache des bloss theoretischen Dilettanten, indem dazu weiter eben keine besondern Kenntnisse oder Fertigkeiten gehören, sondern ich verstehe darunter die Beschäftigungen mit solchen Beobachtungen, die zu einem gewissen Zwecke führen, und die selbst für den Astronomen ihren Werth, und manchmal einen grossen Werth haben können, wozu also wenigstens gehört, dass man im Stande sei, genaue Zeitbestimmungen zu machen, die Polhöhe zu bestimmen, genaue Mittagslinien zu ziehen, auch wohl Planeten- und Kometenörter zu beobachten u. dergl., ferner dass man es im astronomischen Kalkül so weit gebracht habe, um die gemachten Beobachtungen selbst berechnen und Resultate daraus ziehen zu können. Wer sich zu dieser Klasse zählt, wird nun auch schon tiefer einzudringen und von viel mehrern Gegenständen gründlich belehrt zu sein wünschen: die meisten

Theile der sphärischen Astronomie werden ihm unentbehrlich sein, wenn er bei seinen Beschäftigungen nicht bloss mechanisch zu Werke gehen, sondern auch die Gründe seiner Operationen gehörig einsehen will. Er wird zugleich wünschen, die brauchbarsten astronomischen Werkzeuge, ihre Einrichtung und Behandlungsart nicht bloss theoretisch, sondern auch praktisch kennen zu lernen: es muss ihm also Gelegenheit gegeben werden, selbst Hand anzulegen, selbst zu beobachten und aus der Beobachtung durch den Kalkül Resultate zu ziehen. Um sich aber auch Fertigkeit in solchen praktischen Beschäftigungen zu erwerben, ist freilich die Zeit eines Kollegiums, das alle Haupttheile der Astronomie befassen soll, viel zu kurz, und begreiflich kann jene nur nach und nach durch fortgesetzte Übung erlangt werden. Zu der dritten Klasse endlich werden diejenigen zu rechnen sein, die sich selbst bei ihrem Studium der Astronomie keine Schranken setzen, und sich also nicht scheuen, sich alle nötigen Hülfskenntnisse zu erwerben, um von allen Theilen der Astronomie eine möglichst gründliche und vollständige Kenntniss zu erhalten. Nach dem, was ich gleich anfangs erklärt habe, wird diess nur durch anhaltend fortgesetztes eignes Studium geschehen können, und nicht durch blosse Vorlesungen. Der mündliche Unterricht soll bloss zum Wegweiser bei den ersten Schritten dienen, soll verhüten, dass sich irrige Ansichten nicht anfangs festsetzen und dass man nicht unrechte und unzweckmässige Wege einschlage, soll Gelegenheit geben, das mathematische Vorstellungsvermögen und das eigene Nachdenken zu üben, mit einem Worte, der mündliche Unterricht soll bis dahin führen, von wo aus man durch eignes Studium weiter fortgehen kann. Über einen gewissen Punkt hinaus ist in den mathematischen Wissenschaften der mündliche Unterricht nicht bloss überflüssig, sondern sogar schädlich: man muss nicht von Anfang bis zu Ende seiner Bahn einen Hofmeister nöthig haben, sondern mit der Zeit selbst mündig werden; gewiss ist es hundertmal mehr werth, wenn man sich eine Schwierigkeit durch eigne Anstrengung löset, als wenn man immer und immer fremder Zurechtweisung bedarf, eben so wie die gelungenen Resultate des eignen Nachdenkens immer hundertmal mehr werth sind, als alle erborgte fremde Weisheit. Freilich muss man auch von der andern Seite sich nicht zu früh der Nothwendigkeit mündlicher Belehrung überhoben glauben: so lange man bei dem Studium von Schriften, die nicht notorisch fehlerhaft, dunkel und undeutlich geschrieben sind, noch oft anstösst und Schwierigkeiten findet, die man sich nicht selbst heben kann, ist die mündliche Belehrung immer noch unentbehrlich.

Der Lehrer der Astronomie, der bloss Zuhörer aus einer dieser Klassen von ganz gleichen Vorkenntnissen und von gleichen Absichten hat, wird nun leicht die Auswahl der Gegenstände den Wünschen und Bedürfnissen derselben gemäss treffen und den Vortrag danach einrichten können. Inzwischen lassen sich zwischen jenen Klassen noch vielerlei Abstufungen denken, und bei einem gemischten, wenn auch nicht zahlreichen Auditorium wird nicht bei allen eine völlige Gleichheit in Vorkenntnissen und Übung vorauszusetzen sein. Der Lehrer, der ohnehin hierüber nicht genau unterrichtet sein kann, wird also suchen müssen, nach Möglichkeit allen Genüge zu leisten, aber eben deswegen muss auch jeder einzelne Zuhörer billig genug sein, den Vortrag nicht bloss nach seinen individuellen Wünschen eingerichtet zu verlangen. Der Geübtere muss sich gefallen lassen, dass auch öfters Gegenstände ausführlich entwickelt werden, die er vielleicht schon nach einigen Winken fasst oder schon weiss; der weniger Geübte darf nicht verlangen, dass schlechterdings alle Untersuchungen ausgeschlossen werden, die über seine Zwecke hinaus liegen, oder dass diejenigen nur oberflächlich behandelt werden, wozu ihm die Vorkenntnisse fehlen[*)].

Dies m[eine] H[erren] sind meine Ansichten über den Vortrag der Astronomie überhaupt, und ich werde den meinigen so anzuordnen suchen, wie es mir nach dem, was ich von Ihren Absichten und Vorkenntnissen weiss, am zweckmässigsten scheint. Sie haben alle in den mathematischen Vorkenntnissen schon einen guten Grund gelegt, und ich werde daher nicht nöthig haben, weder bei den leichtern Gegenständen gar zu ausführlich, noch bei den schwierigern gar zu furchtsam zu sein, und darin bei oberflächlichem Halbwissen stehen zu bleiben. Bei unsrer beschränkten Zeit werden freilich viele Untersuchungen nur summarisch vorgenommen werden können; in solchen Fällen werde ich Sie immer mit den besten Schriften bekannt machen, und solche, die ich in meiner eigenen Sammlung habe, selbst vorlegen, damit Sie sich, wenn Sie Zeit und Lust haben, künftig selbst weiter unterrichten können. Sollte ich hie und da Sätze voraussetzen müssen, die Ihnen nicht allen be-

[*) Der hier endende, mit den Worten »Der Lehrer der Astronomie« beginnende Absatz ist in der Handschrift mit der Bemerkung »fällt weg« versehen.]

kannt oder geläufig wären, oder sollte Ihnen sonst in meinem Vortrage etwas dunkel und unverständlich gewesen sein, so rechne ich darauf, dass Sie mir es anzeigen, und immer werde ich mir ein Vergnügen daraus machen, Ihnen die nöthigen Erläuterungen zu geben.

Zunächst ist diese Vorlesung eigentlich freilich nur der theoretischen Astronomie gewidmet; inzwischen sollen Sie doch die Erscheinungen des Himmels nicht bloss vom Hörensagen sondern durch eigene Anschauung kennen lernen; auch würde selbst die theoretische Einsicht mangelhaft bleiben, ohne einige Bekanntschaft mit der Einrichtung u[nd] Theorie derjenigen Messwerkzeuge, die nach dem heutigen Zustande der Astronomie die brauchbarsten sind, und da Ihre Anzahl so klein ist, so wird es füglich angehn, dass Sie sich durch eigenes Handanlegen mit dem Gebrauch der Instrumente noch bekannter machen. Um sich aber für die eigentliche Praxis zu bilden, ist wie Sie begreifen, die Zeit in diesem Kollegio viel zu kurz und dazu bedarf es nothwendig einer länger fortgesetzten Übung.

Ich habe bisher von den Zwecken gesprochen, die man durch astronomische Vorlesungen überhaupt und durch die gegenwärtige insbesondere zu erreichen erwarten kann; hieran schliesst sich nun sehr natürlich die Frage, welches ist die zweckmässigste Ordnung, in der die verschiedenen Haupttheile der Astronomie vorgetragen werden können? Um dies zu entscheiden, werden wir also den Anfang mit den Fragen machen müssen: was ist die Astronomie überhaupt und welches sind die verschiedenen Haupttheile der Astronomie?

Der Gegenstand der Astronomie oder Sternkunde sind die sämmtlichen Weltkörper, insofern wir eine wissenschaftliche Kenntniss von ihnen haben. Die Definition würde zu vermessen sein, wenn wir unbedingt sagen wollten, alle Weltkörper seien der Gegenstand der Astronomie, denn es ist nicht bloss möglich, sondern höchst wahrscheinlich, dass es manche Weltkörper von ganz eigener Art geben kann, deren Existenz uns ganz unbekannt bleibt. Also nach dem heutigen Zustande der Wissenschaft beschäftigt sie sich mit der Sonne, mit den 10 Hauptplaneten, wozu auch unsere Erde selbst, insofern sie den übrigen Hauptplaneten ganz ähnlich ist, als der 11-te kommt, dem Monde, den Monden oder Trabanten der andern Planeten, den Saturnsringen, den Kometen, den Fixsternen und Nebelflecken. Von allen diesen

Weltkörpern gehört nun aber eigentlich in die Astronomie nur das, was wir wirklich wissen, was auf zuverlässige Beobachtung gegründet, durch reiflich durchdachtes Raisonnement und strengen Calcül daraus gefolgert und durch vollkommene, niemals gestörte Übereinstimmung unwidersprechlich bestätigt ist. Nicht aber schlecht begründete Vermuthungen, müssige Träume und aus der Luft gegriffene Hypothesen. Über die natürliche Beschaffenheit der Weltkörper wissen wir aber im Grunde nur sehr wenig, und die Astronomie als exacte Wissenschaft kann daher von den Vermuthungen darüber nur wenige und nur solche aufnehmen, die mit grosser Vorsicht den Regeln der Analogie gemäss gebildet sind. Das Meinen in der Astronomie hört erst da auf und das eigentliche Wissen fängt bei den Gegenständen an, die einer mathematischen Behandlung fähig sind: und das sind die Grösse und Gestalt der H[immels-]K[örper], ihre Entfernungen, ihre gegenseitigen Lagen und ganz vorzüglich die Veränderungen in den gegenseitigen Lagen oder mit andern Worten, die Bewegungen. In der That, ist die Untersuchung der Bewegung der H[immels-]K[örper] verglichen mit dem, was wir sonst von ihnen wissen, von einem solchen überwiegenden Umfange, dass einige Schriftsteller dadurch veranlasst sind, die Astronomie schlechthin als die Wissenschaft von der Bewegung der H[immels-]K[örper] zu definiren, nach dem Grundsatze, a potiori fit denominatio. Diese Definition ist nun freilich für unsere heutige Astronomie zu enge, indess bei der Alten Astronomie war dies weniger der Fall, da wir unsre Kenntnisse von der Grösse und Gestalt der W[elt-]K[örper] nur der Erfindung der Fernröhre verdanken, die den Alten unbekannt waren. Die Alten mussten sich also bloss auf die Bewegung der W[elt-]K[örper] und die Erforschung ihre Gesetze einschränken, daher auch der Name Astronomie sehr schicklich gewählt war. Der Name Sternkunde ist auch sehr gut gewählt, insofern das Wort Sterne in weiterer Bedeutung genommen wird und alle H[immels-]K[örper] darunter verstanden werden. Der deutsche Sprachgebrauch ist hier etwas unbestimmt; im engern Verstande braucht man sonst Stern nur für Fixstern, und dann pflegt man für den allgemeinern Begriff das Wort Gestirn zu gebrauchen; indess ist der Sprachgebrauch auch hierin schwankend und manche verstehen unter Gestirn den Inbegriff gehörig nahe zusammenstehender Fixsterne, oder was man sonst ein Sternbild nennt*).

*) Französisch: astre, étoile; lateinisch: sidus, stella.

Insofern nun die Bewegungen der H[immels-]K[örper] der Hauptgegenstand der Astronomie sind, ist klar, dass diese Wissenschaft uns auf folgende 3 Fragen die Antwort geben muss:

1. Welches sind die Bewegungen der Himmelskörper und nach was für Gesetzen geschehen sie,
2. Welches sind die Ursachen dieser Bewegungen und wie sind sie es;
3. Was für Erscheinungen haben diese Bewegungen zur Folge.

Wenn es bloss die Absicht wäre, die Lehren der Astronomie oder die Antwort, die sie auf diese 3 Fragen gibt zu wissen, so würde es am zweckmässigsten sein, diese drei Fragen entweder in derselben Ordnung, wie ich sie aufgestellt habe vorzunehmen oder auch statt der ersten, mit dem 2^{ten} Theile anzufangen, nämlich von dem Princip der allgemeinen Schwere (welches eben die Antwort der zweiten Frage ist) auszugehen, zu zeigen, was für Bewegungen hieraus nothwendig erfolgen müssen und endlich zu untersuchen, was für Phänomene diese Bewegungen uns darbieten müssen, insofern wir sie aus einem selbst bewegten Standorte betrachten. Diese Ordnung, welche man die synthetische nennen könnte, ist auch wirklich von verschiedenen Schriftstellern gewählt: indess ist es aus zwei Gründen nicht rathsam, sie beim ersten Unterrichte zu befolgen. Einmal weil dann gerade bei den ersten Schritten schon sehr feine mathematische Kenntnisse nöthig sind, noch mehr aber zweitens des wegen, weil man auf diesem Wege nicht sieht, auf welche Art man zu den Kenntnissen gelangt ist und also auch von ihrer Wahrheit keine recht vollständige und lebendige Überzeugung erhält. Zur Erreichung dieses Zwecks wird es vortheilhafter sein, ein gerade umgekehrtes also analytisches Verfahren zu befolgen: Man wird also 1) von den Phänomenen der scheinbaren Bewegungen ausgehen, und zwar von solchen, welche das Resultat der einfachsten Beobachtung sind, ohne sich durch eine zu scrupulöse und detaillirte Erschöpfung aller etwaigen kleinen Anomalien oder Modificationen zu zerstreuen; hiernächst 2) durch eine sorgfältige Zergliederung dieser scheinbaren Bewegungen, die wahren Bewegungen und ihre Gesetze entwickeln, durch deren genaue Kenntniss man dann im Stande sein wird, die vorher nur in unvollkommenen Umrissen bekannten scheinbaren Bewegungen vollständiger und schärfer zu bestimmen, und also durch stets fortgesetzte Vergleichung der Theorie und der beobachteten Erscheinung jene (die Theorie) zu prüfen, immer neu zu bestätigen und so auf den Gipfel der Gewissheit zu bringen: endlich 3) wird man durch die Betrachtung der Gesetze, welche allen Bewegungen der H[immels-]K[örper] zum Grunde liegen, auf die Spur des grossen Princips geleitet werden, aus dem jene alle wie aus Einer Quelle abstammen, man wird sich zu dem allgemeinen Gravitations-Princip erheben, und darin den Ursprung nicht allein von allen Bewegungsgesetzen sondern auch von den kleinern Anomalien und Störungen erkennen, die die Beobachtung vorher wohl ahnen liessen, die aber solange ein Räthsel bleiben mussten, als man mit ihrer Quelle unbekannt war.

Das ist eine gedrängte Darstellung des zu befolgenden Ganges, welcher soviel als möglich derselbe sein wird, wie die Lehren der Astronomie entweder wirklich gefunden sind, oder wie sie hätten gefunden werden können, wenn man allemal den kürzesten und geradesten Weg eingeschlagen hätte: ein solches Verfahren ist natürlich am lehrreichsten und zugleich am angenehmsten, indem man dabei stets wenigstens etwas ähnliches von dem Gefühl der ersten Erfinder haben wird, dagegen das synthetische Verfahren, wo man ganz den Faden der Entdeckung verliert, und von der Menge und Grösse der Wahrheiten gleichsam erdrückt wird, etwas demüthigendes haben muss. Durch die Darstellung, die ich so eben gemacht habe, werden nun auch die Grenzen der 3 Haupttheile der Astronomie sichtbar werden. Die Phänomene der scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper oder der Veränderungen in der relativen Lage der Himmelskörper gegen die Erde entstehen aus der Kombination der absoluten Bewegungen der H[immels-]K[örper] mit den Bewegungen der Erde. Diese letzteren sind aber, wie wir in der Folge sehen werden, oder vielmehr, wie Sie bereits wissen, zwiefach, nämlich eine tägliche Umwälzung um ihre Axe (Rotation) und eine progressive jährliche um die Sonne. Diejenigen Phänomene nun, die bloss in der täglichen Umwälzung der Erde um ihre Axe ihren Grund haben, und welche wegen der Schnelligkeit ihres Entstehens und Vergehens zuerst auch dem rohesten Beobachter in die Sinne fallen, sind Gegenstand der sphärischen Astronomie. Da werden also betrachtet der Aufgang und Untergang der Gestirne, ihre verschiedenen scheinbaren Bewegungen in Beziehung auf den Horizont und Meridian und die Umstände, wovon diese Bewegungen abhängig sind, oder wodurch sie modificirt werden. Unter diese Umstände gehören also die Polhöhe

des Ortes, das Allgemeine von der Gestalt der Erde, die Parallaxe, die Refraction, die Lage der Himmelskörper gegen einander und gegen gewisse Ebnen, als den Äquator, folglich ihre gerade Aufsteigung und Abweichung, Länge und Breite, endlich die Anwendung jener scheinbaren Bewegungen zur Abmessung der Zeit.

Von denjenigen Erscheinungen der H[immels-]K[örper], die in der jährlichen Bewegung der Erde um die ⊙ und in der eigenen Bewegung der W[elt-]K[örper] selbst ihren Grund haben, nimmt die sphärische Astronomie nur ganz im Allgemeinen einige auf, ohne welche die ihr eigenthümlichen Lehren nicht wohl verständlich sein würden, als z. B. das allgemeine von der jährlichen scheinbaren Bewegung der Sonne. Die nähere Erörterung dieser Erscheinungen hingegen überlässt sie dem 2$^{\text{ten}}$ Theile der Astronomie, der theorischen Astronomie, weil das eigenthümliche Geschäft dieser, nämlich die Ausmittelung der wahren Bew[egungen] der H[immels-]K[örper] selbst, mit der Betrachtung der Erscheinungen, worauf sich jene gründen muss, gar zu genau verwebt ist. Der dritte Theil endlich, die physische Astronomie zeigt, wie die a posteriori aus den Erscheinungen abgeleiteten Gesetze der Bewegungen alle nur die Folgen Einer grossen, allgemein verbreiteten und überall auf gleiche Art wirkenden Naturkraft sind. Indem sie sich nicht darauf einlässt[*)] die Ursache dieser Kraft weiter erklären zu wollen, sondern bloss ihr Dasein als durch die Erscheinung unwidersprechlich bewiesen annimmt, ist ihr Geschäft die Wirkungen derselben mit Hilfe der feinsten Analyse zu entwickeln: zuerst die Bewegung der H[immels-]K[örper] in Kegelschnitten nach den Keplerschen, in der theorischen Astronomie gefundenen Gesetzen als die nothwendige Wirkung der wechselseitigen Anziehung 2$^{\text{er}}$ Weltkörper zu zeigen, sodann die Störungen in jenen Bewegungen, die eine Folge der wechselseitigen Anziehung mehrerer W[elt-]K[örper] sind zu bestimmen, also die Perturbationen der Hauptplaneten unter einander, die allmählige Vorrückung ihrer Bahnen, die Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes, endlich auch die Gestalt der Weltkörper, deren Theile sich nach den Gesetzen der wechselseitigen Anziehung in einen Zustand des Gleichgewichts gesetzt haben, [sowie] die Störungen der Rotation durch Veränderung der Lage der Ro-

[*) In der Handschrift steht einzulassen.]

tationsaxe zu entwickeln. Diese Untersuchungen sind der Triumph des menschlichen Verstandes, allein sie gehören zu den schwersten der Astronomie, erfordern die Anwendung der feinsten Kunstgriffe der Analyse und sind von einem solchen Umfang, dass uns schwerlich in unserem Collegio Zeit bleiben wird, in das innere derselben einzudringen.

Erlauben Sie mir nun noch, über die gegebenen Erklärungen einige Anmerkungen hinzuzufügen. Zuerst muss ich ein Paar Worte über den Ausdruck *scheinbar* sagen. Nach dem gewöhnlichen deutschen Sprachgebrauche hängt diesem Worte der Nebenbegriff des Irrthums an: man denkt bei scheinbar immer an Schein, an Täuschung; also das Scheinbare denkt man sich immer als im Widerspruch mit dem Wahren. Wer diesen Begriff mit dem Worte verbindet, muss sich billig wundern, wenn die Astronomen die sphärische Astr[onomie] als die Lehre von den scheinbaren Bewegungen und die theorische als die Lehre von den wahren Bewegungen definiren; er wird natürlich fragen, ob es denn durchaus nothwendig sei, sich den Weg zur Wahrheit durch den Irrthum zu bahnen, und noch mehr, ob es nothwendig sei, sogar eine ganze Hauptabtheilung bloss dazu zu widmen, den Irrthum zu lehren. Allein dies Räthsel löst sich sogleich durch die Bemerkung auf, dass die Astronomen mit dem Worte scheinbar den Nebenbegriff des Irrthums nicht verbinden; ihnen ist das Scheinbare an einem Phänomen, das, was unmittelbar durch die Sinne wahrgenommen wird, ohne Einmischung eines Urtheils, dagegen im gemeinen Sprachgebrauch darunter verstanden wird, das, was die Sinne wahrnehmen mit Einmischung eines Urtheils und zwar eines irrigen Urtheils: der Astronom braucht das Wort in seinem Sinn, weil die Sprache kein besseres hat. Die ausländischen Sprachen, die lateinische, französische, englische, italienische, sind hierin glücklicher, indem den Wörtern apparens etc. der Nebenbegriff des falschen nicht anklebt. Ist demnach z. B. von scheinbarer Bewegung die Rede, so wird damit nicht gesagt, wenigstens liegt es nicht in den Worten, dass die Bewegung nur Schein, nur eingebildet ist, sondern dass die Sinne eine Bewegung, d. h. hier bloss eine Veränderung der Lage gegen unsere Erde wahrnehmen; lediglich dies einfache Factum wird bezeichnet, ohne hier zu entscheiden, ob diese Erscheinung von wirklicher absoluter Bewegung des Gegenstandes oder von Bewegung der Erde oder von Bewegung beider herrühre; in sofern ist also hier von

Irrthum oder falschem Schein nicht die Rede, denn die Sinne urtheilen nie falsch, sondern gar nicht. Um also das Resultat dieser Bemerkung kurz zusammenzufassen, so versteht man in der Astr[onomie] unter scheinbar das, was und wie es erscheint, im gem[einen] Leben hingegen das, was bloss zu sein scheint.

Eine zweite Bemerkung betrifft die Grenzlinie zwischen der sphärischen und theorischen Astronomie überhaupt. Es ist zwar nicht zu leugnen, dass ganz scharfe Grenzen zwischen den verschiedenen Abtheilungen einer Wissenschaft nicht immer möglich sind, und wenn es auch möglich wäre, ganz scharfe Grenzen wirklich zu ziehen und genau zu bestimmen, wo diese Wahrheit in die eine und jene in eine andere Abtheilung zu setzen ist, so würde es doch wenigstens in einer rationellen Wissenschaft, wo immer ein Satz auf den andern gegründet werden muss, nicht immer ausführbar sein, solche Grenzlinien aufs strengste zu respectiren und in einer vorhergehenden Abtheilung durchaus nichts zu berühren, was eigentlich erst in eine spätere gehört. Aus diesem Grunde würde es also eine Art von Mikrologie sein, wenn man es mit diesen Abtheilungen gar zu genau nehmen wollte: wenn indessen viele Schriftsteller auch in Hauptpunkten nicht consequent und ihrer eigenen Definition nicht treu bleiben, so verdient dies wohl, dass man die Aufmerksamkeit einige Augenblicke darauf richte, zumal da durch dergleichen Betrachtungen die Begriffe selbst noch mehr aufgehellet und geordnet werden. Eine solche Inconsequenz finde ich nun beinahe bei allen Schriftstellern in den Erklärungen der sphärischen und theorischen Astronomie. Jene definiren sie nämlich als die Lehre von den scheinbaren Bewegungen, diese als die Lehre von den wahren Bewegungen. Da nun die wahren, d. i. absoluten Bewegungen durchaus kein Gegenstand der Beob[achtungen] sind, sondern bloss durch Schlüsse aus den scheinbaren Bewegungen, welche allein die Erfahrung hergibt, abgeleitet werden müssen, so muss man nach jener Definition natürlich schliessen, dass die sphärische Astronomie der wissenschaftlich geordnete Inbegriff alles dessen sei, was die Beobachtungen über die scheinbaren Bewegungen darbieten, dass sie so zu sagen den Stoff liefern, welchen nachher die theorische Astronomie als blosse rationelle Wissenschaft verarbeitet, um die Kenntniss der wahren Bewegungen daraus abzuleiten. Wenn Sie nun aber nach der Hand nachsehen, was alle Schriftsteller in der sphärischen Astronomie vortragen, so werden Sie finden, dass jene Voraussetzung gar nicht Statt hat. Allerdings beschäftigt sich die sph[ärische] A[stronomie] mit scheinbaren Bewegungen und **bloss** mit sch[einbaren] Bew[egungen], aber keineswegs umfasst sie vollständig das **ganze** Gebiet der sch[einbaren] Be-w[egungen]; diejenigen **die** sie betrachtet, sind zwar allerdings die am meisten in die Augen fallenden (nämlich die, die mit der scheinbaren täglichen Bewegung zusammenhängen), aber doch im Grunde nur die allereinfachsten; hingegen um die viel intricateren und eben deswegen viel merkwürdigeren sch[einbaren] Bew[egungen], die von der eigenen Bewegung der H[immels-]K[örper] und von der jährlichen Bewegung der ♁ abhängen, als z. B. das scheinbare Vor- und Rückwärtsgehen und Stillstehen der Planeten, die bizarren scheinbaren Bewegungen der Kometen, die feineren Phänomene in den sch[einbaren] B[ewegungen] des ☾ und der ☉, bekümmert sie sich entweder gar nicht, oder entlehnt nur einige allgemeine Resultate davon, ohne welche die ihr eigenthümlichen Lehren unvollständig sein würden. Alle jene scheinbaren Bewegungen kommen erst in der theorischen Astronomie vor, aber nicht etwa als abgesonderte erste Abtheilung derselben (denn sonst würde ja nichts hindern, sie der Definition zu folge mit in die sphärische Astronomie zu nehmen) sondern in genauer Verbindung mit den daraus abgeleiteten wahren Bewegungen, so dass also die theorische Astr[onomie] halb Erfahrungs-Wissenschaft, halb rationelle Wissenschaft ist.

Durch diese Bemerkung wird die Erklärung, die **ich** vorhin von den drei Hauptabschnitten der Astr[onomie] gegeben habe, mehr ins Licht gesetzt[*)]; ich füge nun noch eine dritte Bemerkung hinzu, über den Ausdruck **physische Astronomie**. Nach meiner vorhin gegebenen Darstellung verstehen wir darunter die Entwicklung der wahren Bewegungen als Folgen des Princips der allgemeinen Schwere, und diesen Begriff verbinden mit jenem Ausdruck alle bessern Schriftsteller: indess findet man, dass einige Schriftsteller — freilich nur solche, denen **jene** phys[ische] Astron[omie] eine terra incognita ist — das Wort phys[ische] Astron[omie] in einem ganz und gar verschiedenen Sinne gebrauchen und darunter das wenige, was wir über die physikalische Beschaffenheit der Weltkörper selbst, ihre Oberfläche, Atmosphäre, über die Sonnen-

[*) Die Handschrift hat »setzen«.]

flecken etc., das wenige sage ich, was wir über diese Gegenstände wissen, und das viele, was darüber vermuthet und geträumt, erdichtet und gefaselt ist, verstehen. Es ist immer gut, diesen Solöcismus zu kennen, weil sonst leicht lächerliche Missverständnisse entstehen können.

Ich beschliesse diese Auseinandersetzung über die 3 Haupttheile der Astr[onomie] mit einem nicht übel gewählten Gleichnisse von SCHUBERT (Po-p[uläre] Ast[ronomie, Theil I], p. 152)[*)]. ,Dies Gleichniss ist allerdings ganz glücklich gewählt, indess freilich darf man bei der Ähnlichkeit zwischen der grossen H[immels-]Uhr und unsern Werkzeugen nicht zu sehr ins Einzelne gehn, sonst zeigt sich auch hier das Omne simile claudicat. Wir können, wenn ich in SCHUBERTS Metapher mich ausdrücken darf, die grosse Welten-Uhr und ihre einzelnen Räder **nicht** aus einandernehmen, wie unsere Taschen-Uhren, sondern wenn das Zifferblatt einmal die scheinbare Bewegung vorstellen soll, so ist dieses das einzige, was wir besehen dürfen, und woraus allein wir durch scharfsinnige Combinationen auf die Beschaffenheit der Räder **schliessen** können. Soll ich nun das Gleichniss weiter fortsetzen, so ist nachdem, was ich vorhin erklärt habe, die sphärische Astronomie nicht sowohl die Kenntniss des ganzen Zifferblattes, als vielmehr die Kenntniss von **einem**

[*) In FRIEDRICH THEODOR SCHUBERT, *Populäre Astronomie*, erster Theil, Hamburg, bei PERTHES & BESSER 1804 (neue wohlfeile Ausgabe 1834) S. 152 heisst es: »Die Himmels-Sphäre, mit den unzähligen Bewegungen, die in ihrem Innern verrichtet werden und sich uns nur an ihrer Oberfläche zeigen, ist die grosse Uhr des Universums, eine Maschine aus unzähligen Rädern zusammengesetzt, die in der That die einzige vollkommen gleichförmige Bewegung darbietet, wodurch wir die Zeit genau messen können: sie ist der grosse Regulator, nach dem alle von Menschen Händen verfertigten Uhren geprüft und berichtigt werden müssen. Die Oberfläche der Sphäre ist das Zifferblatt, die scheinbaren oder sphärischen Bewegungen sind die Zeiger, die durch ihren Umlauf Secunden, Minuten, Stunden, und Jahrtausende anzeigen: die wahren Bewegungen, die im Inneren dieser Maschine vorgehen, sind das Räderwerk, dessen einfachste und zweckmässigste Anordnung zur Erkenntniss des wahren Welt-Systems führt: die physische Kraft endlich, die alle diese Räder treibt, und dadurch den Zeiger in Bewegung setzt, ist die Schwere, der Pendel, oder die Federkraft der Uhr. Die sphärische Astronomie betrachtet bloss das Zifferblatt und den Gang der Zeiger, und lehrt, wie jede wahre Zeit dadurch angegeben wird: die theorische nimmt die Uhr auseinander, um die Zusammensetzung ihres Räderwerks zu untersuchen; die physische Astronomie findet endlich die erste, alles in Bewegung setzende Kraft der Schwere. Diese Vergleichung scheint am deutlichsten zu zeigen, nach welcher Ordnung der Mechanismus des Weltbaus studirt werden müsse. Wer den Bau einer Uhr untersuchen will, fängt mit dem Zifferblatt und der Bewegung der Zeiger an, betrachtet dann die Räder, die den Zeigern am nächsten sind, oder mit ihnen in unmittelbarer Verbindung stehen, und geht nach und nach zu den entferntern Rädern fort, bis er endlich durch diese analytische Methode zu dem letzten Rade kömmt, das unmittelbar vom Pendel in Bewegung gesetzt wird.«]

der Zeiger, der am schnellsten und regelmässigsten umläuft und am ersten in die Sinne fällt; die Betrachtung der kleinern und versteckteren Zeiger, deren Bewegung weit künstlicher ist, gehört in die Theorische Astronomie, wo sie gleichsam den Schlüssel zur Enträthselung des Innern geben muss.

Sie erinnern sich, dass ich für den zweckmässigsten Vortrag der Theile der Astr[onomie] diejenige Ordnung erklärt habe, wie die Wahrheiten entweder gefunden sind, oder doch hätten gefunden werden können, indem immer das vorhergehende zur Begründung des folgenden dienen muss. Eine solche Ordnung werden auch wir nach Möglichkeit befolgen. Abweichungen davon werden wir uns freilich oft erlauben müssen, besonders im Praktischen; denn da ich wünsche, Sie mit den vornehmsten und merkwürdigsten Himmels-Erscheinungen durch eigene Ansicht bekannt zu machen, und diese sich da, wo man sie im Vortrage braucht, nicht nach Gefallen citiren lassen, so müssen wir die Gelegenheit wahrnehmen, wo wir sie finden; gibts z. B. an den Jupiterstrabanten etwas zu observiren, so werden wir nicht damit warten, bis wir in der Astr[onomie] selbst bis dahin gekommen sind, weil gegen die Zeit der ♃ vielleicht gar nicht mehr sichtbar sein möchte. Solche Abweichungen werden indess nichts zu bedeuten haben, da ohnehin die Hauptlehren der Astr[onomie] Ihnen nicht ganz fremd sein werden.

Verschiedene Verfasser astronomischer Systeme und Lehrbücher haben ihren Schriften einen kurzen Auszug aus denjenigen mathematischen Hülfskenntnissen vorausgeschickt, die sie beim Vortrage der Astr[onomie] selbst voraussetzen, natürlich blosse abgerissene Sätze ohne System, Verbindung und Beweis. Ich zweifle, dass ein solches Verfahren sonderlichen Nutzen haben kann; denn, wer mit diesen Hülfsmitteln schon vertraut ist, für den ist eine solche magere Darstellung überflüssig, und wer mit den Hülfswissenschaften noch ganz unbekannt ist, für den ist sie doch unzulänglich. Ich werde also ein solches Verfahren nicht nachahmen. Nur von diesen und jenen Formeln, die etwa häufig gebraucht werden und die vielleicht dem Gedächtnisse noch nicht geläufig sind, kann es vielleicht gut sein, eine gedrängte Zusammenstellung zu machen, damit man immer da, wo man sie braucht, sie gleich zur Hand habe; immer wird aber vorausgesetzt, dass man die Theorie, worauf sie beruhen, schon gefasst habe: Ich werde daher vielleicht zu seiner Zeit in der sph[ärischen] Astr[onomie], wo dergleichen Fälle am meisten vorkommen,

Ihnen eine solche erleichternde Übersicht von den Fundamentalformeln der sph[ärischen] Astr[onomie] mittheilen. In Ansehung anderer Hülfskenntnisse würde uns freilich ein solches Verfahren zu weit von unserm Hauptgegenstande abführen; ich werde aber alles weniger bekannte, was ich etwa entlehnen muss, so vortragen, wie ich glaube, dass es sich am leichtesten und natürlichsten an die Ihnen geläufigen Vorkenntnisse anschliesst. Hier beim Eingange mag es genug sein, die nöthigen Hülfskenntnisse nur summarisch aufzuzählen. Dass man in einer Wissenschaft, wo stündlich gerechnet oder gemessen wird, die Elementare Arithmetik und Geometrie, Fertigkeit im numerischen Kalkül gar nicht entbehren kann, springt von selbst in die Augen. Die Überschrift, die ein alter Philosoph über den Eingang seines Hörsaals setzte, Μητις αγεωμετρητος εισιτω lässt sich mit noch viel grösserm Rechte auf die Astronomie anwenden. Aber auch ohne die ebene und sphärische Trigonometrie, besonders die letztere, ziemliche Fertigkeit im trigonometrischen und analytischen Kalkül und mancherlei Kenntnisse der höhern Geometrie, kann man in dieser Wissenschaft nicht weit kommen. Die tiefern und feinern Untersuchungen besonders der phys[ischen] Ast[ronomie] setzen freilich noch weit mehr voraus, und sind daher nur denen zugänglich, die in das Heiligthum der Analyse eingedrungen sind. Bei dergleichen Untersuchungen aber tief ins Detail einzugehn, dazu wird natürlich in unserm Collegium ohnehin nicht der Ort sein. Eben so nöthig sind Kenntnisse in den optischen Wissenschaften, wenn man sich Einsicht in die Beobachtungsmethoden, und noch mehr wenn man sich praktische Fertigkeiten darin erwerben will. Mit der Dynamik muss man völlig vertraut sein, um in der physischen Astronomie fortkommen zu können.

In den Prolegomenis einer jeden Wissenschaft ist es so hergebracht, dass man sich auch mit der Frage beschäftigt hat, wozu nützt die Wissenschaft? Es ist kein gutes Zeichen von dem Geiste der Zeit, wenn man eine solche Frage oft und immer wieder aufwerfen hört. Es spricht sich darin theils ein unseliges Missverhältniss zwischen den nothwendigen oder für nothwendig gehaltenen Bedürfnissen des Lebens und den Ressourcen, ihnen Genüge zu leisten, aus: es ist ein stillschweigendes Eingeständniss eines wahrlich nicht ehrenvollen Grades von Abhängigkeit von jenen Bedürfnissen, wenn man alles auf unsere physischen Bedürfnisse beziehen zu müssen glaubt, wenn man für die

Beschäftigung mit einer Wissenschaft gleichsam eine Rechtfertigung verlangt und nicht begreifen kann, dass es Leute gibt, die studiren, bloss weil das Studiren selbst ihnen auch ein Bedürfniss ist. Aber nicht bloss unsere Armuth documentirt eine solche Art zu urtheilen, sondern zugleich eine kleinliche, engherzige und träge Denkungsart, eine Disposition, immer den Lohn jeder Kraftäusserung ängstlich zu calculiren, einen Kaltsinn und eine Gefühllosigkeit gegen das Grosse und den Menschen Ehrende. Man kann es leider sich nicht verheelen, dass man eine solche Denkungsart in unserm Zeitalter sehr verbreitet findet, und es ist wohl völlig gewiss, dass gerade diese Denkart mit dem Unglück, was in den letzten Zeiten so viele Staaten betroffen hat, in einem sehr genauen Zusammenhange steht; verstehen Sie mich recht, ich spreche nicht [von] dem so häufigen Mangel an Sinn für die Wissenschaften an sich, sondern von der Quelle, woraus derselbe fliesst, von der Tendenz überall zuerst nach dem Vortheil zu fragen, und alles auf physisches Wohlsein zu beziehen, von der Gleichgültigkeit gegen grosse Ideen, von der Abneigung gegen Kraftanstrengung bloss aus reinem Enthusiasmus für eine Sache an sich: ich meine, dass solche Charakterzüge, wenn sie sehr vorherrschend sind, einen starken Ausschlag bei den Katastrophen, die wir erlebt haben, gegeben haben können. Es gibt Wissenschaften, die bei einer solchen Denkungsart gar nicht gedeihen können, zu deren Studium man durch die Betrachtung von Nutzen im gewöhnlichen Sinne, durch die Aussicht von Vortheilen für die physische Existenz nicht aufgemuntert wird, zu denen man bloss durch eine reine, uninteressirte Freude am Studium selbst hingezogen werden muss. Die Astronomie gehört zwar nicht eigentlich unter diese Wissenschaften; man vergisst wohl zuweilen, aber es springt doch bei dem mindesten Nachdenken sogleich in die Augen, dass die menschliche Societät in einem kläglichen Zustande sein würde, wenn es gar keine Astronomie gäbe und nie gegeben hätte: allein ich behaupte, dass die wahre, ächte Wärme für die Wissenschaft nicht durch solche Betrachtungen hervorgebracht wird. Die glücklichen grossen Geister, die die Astronomie eben so wie die andern schönern Theile der Mathematik geschaffen und erweitert haben, wurden gewiss nicht durch die Aussicht des künftigen Nutzens angefeuert: sie suchten die Wahrheit um ihrer selbst willen und fanden in dem Gelingen ihrer Anstrengungen allein schon ihren Lohn und ihr Glück. Ich kann nicht umhin,

Sie hier an ARCHIMEDES zu erinnern, den seine Zeitgenossen am meisten nur wegen seiner künstlichen Maschinen, wegen der zauberhaft scheinenden Wirkungen derselben bewunderten, der aber auf alles dieses in Vergleichung mit seinen herrlichen Entdeckungen im Felde der reinen Mathematik, die an und für sich nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch wenigstens damals meistens gar keinen sichtbaren Nutzen hatten, einen so geringen Werth legte, dass er uns über jene nichts aufzeichnete, während er diese in seinen unsterblichen Werken mit Liebe entwickelt hat. Sie kennen gewiss alle das schöne Gedicht von SCHILLER [*Archimedes und der Schüler*]. Lassen Sie uns auch die erhabene Astronomie am liebsten aus diesem schönern Gesichtspunkte betrachten. Welches edlere Gemüth hat nicht schon früh beim Anblick des gestirnten Himmels den lebhaften Wunsch empfunden, mit diesem herrlichen Schauspiel näher bekannt zu werden, seine wunderbaren Phänomene und wo möglich selbst seine verborgenen Geheimnisse zu ergründen, so weit es wenigstens sein individueller Beruf und seine Verhältnisse verstatten: wer hat nicht beim Lesen der schönen OVIDschen Verse [P. OVIDII NASONIS *Fastorum* lib. I, 297 squ.]

Felices animos, quibus haec cognoscere primis,
Inque domos superas scandere cura fuit!
Credibile est illos pariter vitiisque locisque
Altius humanis exseruisse caput.
Non Venus et vinum sublimia pectora fregit,
[Officiumve fori, militiaeve labor.*)]
Nec levis ambitio, perfusaque gloria fuco,
Magnarumve fames sollicitavit opum.
Admovere oculis distantia sidera nostris,
Aetheraque ingenio supposuere suo.

von ganzem Herzen eingestimmt?

Dieser erhabene Genuss, den dies Studium der Astr[onomie] gewährt, die eigenthümliche Satisfaction, welche die Beschäftigung mit den ernsten Wissenschaften gibt, und welche sich nicht beschreiben sondern nur empfinden lässt, wenn man anders den Sinn dafür hat, das wohlthätige Abziehen von der

[*) Dieser Pentameter fehlt in der GAUSSschen Handschrift.]

manchmal nicht erfreulichen Aussenwelt durch stille, keine Leidenschaften aufregende Contemplation, endlich die Grösse und Erhabenheit der Gegenstände selbst, die unsre Weltansicht erweitert, und sovieles, was uns in dem feindseligen Treiben auf unserm unruhigen Planeten gross und wichtig dünkt, klein erscheinen lässt, und, warum wollten wir es nicht bekennen, die Beruhigung, in der wunderbaren Anordnung des Weltbaus immer die Spuren einer ewigen Weisheit wiederzufinden, die unsre Kurzsichtigkeit eben bei jenem feindseligen Treiben wohl manchmal aus dem Gesichte zu verlieren glaubt: dieses sind nach meinem Gefühl die würdigen Antworten auf die Frage, wozu nützt das Studium der Astronomie? Die Sonnen sind, um mich eines schönen Worts unseres unvergleichlichen Jean Paul zu bedienen, zu etwas Höherem da, als bloss um zu Schrittzählern und Wegweisern für zurückkehrende Pfefferflotten zu dienen, und die Bestimmung der Musen ist eine höhere, als die, bloss Mägde unserer Bedürfnisse zu sein.

Wenn diese Seite des Werths der Astronomie, von der ich sie Ihnen so eben vorgestellt habe, auch die schönere ist, wenn auch diese allein schon die Astronomie zu einem würdigen Gegenstande unseres Studiums macht, so wollen wir darum doch auch die andern Seiten derselben nicht übergehen, wo sich dieselbe auch in Ansehung ihres Einflusses auf das Wohl des physischen Menschen auf eine sehr glänzende Art zeigt. Manchen von diesen wohlthätigen Einflüssen haben wir freilich ganz zu schätzen verlernt, gerade dadurch, dass wir sie schon zu lange und immer geniessen, weil wir selten Veranlassung haben, uns in die Lage derer zu versetzen, die ihrer entbehren müssen. Dahin rechne ich vorzüglich die Befreiung von dem schimpflichen und ängstigenden Aberglauben, welchen die Unwissenheit so leicht erzeugt. Was für alberne Vorurtheile haben nicht manche alte Nationen, und haben nicht noch jetzt uncultivirte neuere von Sonnen- und Mondfinsternissen?

Wie manchmal haben Schlauköpfe solche Vorurteile benutzt, um die davon befangenen hinters Licht zu führen? Wie oft haben nicht Cometen, deren Erscheinung den Astronomen so willkommen ist, die Nichtunterrichteten in Angst und Schrecken gesetzt. Ja selbst in unsern Zeiten geben solche ungewöhnliche Erscheinungen dem aufmerksamen Beobachter noch oft Gelegenheit zu bemerken, wie sehr viel noch an der allgemeinen Verbreitung des Lichts der Wissenschaften fehlt, wie unsinnige Vorstellungen der grosse

Haufen und selbst solche, die sich zu den Gelehrten zählen, davon haben, und wie leicht es sein würde, noch heute eine solche terreur panique zu verbreiten, wie Lalande unschuldigerweise im Jahre 1773 in Paris erregte. —

Erinnern wir uns also immer dankbar, dass nur die Aufklärungen des Astronomen es sind, die uns so schimpflichen und unwürdigen Besorgnissen entreissen können.

Ein zweiter Nutzen, den uns die Astr[onomie] täglich leistet, und den wir ebendeswegen hinnehmen, ohne ihn sonderlich zu schätzen, ist die Bestimmung der Zeit. Wir brauchen uns, um einen Tag der längst verflossenen Vergangenheit oder der spätesten Zukunft aufs unzweideutigste zu designiren, nur auf unsern Jedermann bekannten Kalender zu beziehen. Wir können, wenn uns daran liegt, mit Leichtigkeit erfahren oder bestimmen, ob an einem solchen Tage Vollmond oder Neumond u. s. w. gewesen ist oder sein wird: wir wissen dies einmal nicht anders, aber schaden kann es nicht, wenn wir uns einmal erinnern, dass die Völker des Alterthums, ehe die astronomischen Kenntnisse so weit ausgebildet waren, es nicht so gut hatten, als wir. Die meisten Nationen des Alterthums, die vielleicht gerade darum eine besondere Wichtigkeit darauf legten, die Erscheinung der ☾-Gestalten voraus zu bestimmen, weil es ihnen schwerer wurde als uns, hatten ☾-Monate angenommen und mussten also, da 12 ☾-Monate für ein Sonnenjahr zu kurz, und 13 zu lang sind, bald Jahre von 12, bald von 13 Monaten gebrauchen; dadurch wurde ihre Zeitrechnung sehr confus und willkürlich und in Griechenland, wo Meton endlich durch Erfindung seiner 19jährigen Periode das schwankende Jahr fixirte, wurde [er] als ein Mann gepriesen, der sich um ganz Griechenland höchst verdient gemacht hatte. Noch viel verworrener ging es bei den Römern her. Diese Nation, deren Grösse im Erobern und im Verderben der neben ihnen bestehenden Sta[a]ten bestand, die aber für die Wissenschaften wenig oder Nichts gethan hat, war viele Jahrhunderte hindurch in Ansehung astronomischer Kenntnisse in der krassesten Ignoranz. Romulus gab seinen Bürgern ein Jahr von 10 Monaten oder von 300 Tagen: eine solche Unwissenheit ist sogar bei einer grösstentheils aus Räubern zusammengesetzten Menschenmasse kaum begreiflich; Numa wurde als ein Weiser verehrt, dass er 2 Monate hinzusetzte und dem Jahr eine Länge von 354 oder 355 Tagen gab, wodurch es ein vollkommenes ☾-Jahr wurde: dass das Jahr auch so noch viel zu kurz war, musste freilich bald durch Vorrückung der Jahreszeiten sichtbar werden, man musste um dieser Inconvenienz abzuhelfen, von Zeit zu Zeit [Monate] einschalten; aber ganz charakteristisch für dieses nur im Kriege und als Bürger grosse, aber alle feinere Kultur verachtende Volk ist es, dass sie über 700 Jahr sich mit dieser höchst confusen Jahresrechnung begnügten und das Einschalten der Monate dem Gutdünken ihrer Priester überliessen. Wir wissen aus der Geschichte, dass diese oftmals ihre Einschaltungs-Monate für Geld feil hatten; Magistratspersonen, die gern noch etwas länger im Amte bleiben wollten, liessen sich von ihnen einen Monat einschalten, wenn nicht etwa die neuen Kandidaten durch grössern Kredit oder mehr Geld das Gegentheil bewirkten. Erst Julius Cäsar machte dem Unwesen ein Ende, aber mit fremder Hilfe: ein Egypter, Sosigenes, musste ihm einen verbesserten Kalender angeben, den wir noch unter seinem Namen als den Julianischen kennen.

Aber nicht bloss die grosse Abtheilung der Zeit in Jahre, auch die kleinere Abtheilung des Tages in Stunden verdanken wir lediglich der Astronomie. Die Alten hatten keine Uhren wie wir, sie hatten bloss höchst unvollkommene Wasseruhren. In Rom hatte man eine solche Wasseruhr auf dem Markte, wohin man einen Sklaven schickte, wenn man wissen wollte, welche Stunde es sei. Erst da die Sonnenuhren bekannt wurden, konnte man in die für das bürgerliche Leben so nothwendigen und wichtigen Zeitabtheilungen eine etwas grössere Genauigkeit bringen.

In Rom wurden diese etwa um 300 J. vor Ch. durch Papirius Cursor bekannt, in Griechenland hatte man sie 250 Jahre früher. Noch zu Plautus Zeiten muss die allgemeine Verbreitung der Sonnenuhren ziemlich neu gewesen sein, wie man aus dem Fragment eines seiner Lustspiele sieht, wo ein Parasit sich darüber auf eine sehr possirliche Art beklagt ([J. F.] Montucla, [*Histoire des Mathématiques*, nouvelle édition, an VII] I, p. 718)[*]. Dass die

[*) Montucla zitiert a. a. O. das Fragment *Boeotia* des Plautus, wo es heisst:

Ut illum dii perdant, primus qui horas repperit,
Quique adeo primus statuit hic solarium,
Qui mihi comminuit misero articulatim diem!
Nam me puero venter erat solarium,
Multo omnium istorum optumum et verissumum.
Ubi is te monebat, esses, nisi quom nihil erat;
Nunc etiam quod est non estur, nisi Soli lubet.

Theorie der Sonnenuhren oder die Gnomonik eine bloss astronomische Wissenschaft ist, liegt in der Natur der Sache. Wir sind nun freilich durch Erfindung der Pendeluhren im Besitz der Mittel einer viel genauern Zeitbestimmung, allein begreiflich kann die Stellung und Berichtigung derselben immer wieder nur durch Sonnenuhren oder durch andere astronomische Beobachtungen geschehen.

Auch für die historische Chronologie ist die Astronomie von grosser Bedeutung. Die alten Geschichtsschreiber sind in ihrer Zeitrechnung so nachlässig, und ausserdem ist die Anzahl der verschiedenen Zeitrechnungen bei den verschiedenen Völkern so gross, dass es nicht möglich sein würde, Licht hineinzubringen, wenn nicht zugleich manche Himmelsbegebenheiten, besonders Finsternisse, angeführt würden, nach denen wir noch jetzt zurückrechnen können, und so feste Punkte erhalten, woran sich Begebenheiten anreihen. Wir würden dieser Hülfe ganz entbehren, wenn es nicht schon im Alterthum Astronomen gegeben hätte, die solche Phänomene aufzeichneten, und wenn unsere heutige Astronomie nicht so vollkommen wäre, dass wir damit mehrere Jahrtausende zurückrechnen können.

Noch 2 der allerwichtigsten Anwendungen sind zurück, nämlich die Anwendung auf die Geographie und auf die Schifffahrt. Die Kenntniss von der Gestalt und Grösse der Erde verdanken wir lediglich der Astronomie. Dass wir jetzt von so vielen Ländern so genaue Karten besitzen, haben wir bloss der Vervollkomnung der Astronomie und der Beobachtungsmethoden, der Leichtigkeit, womit wir jetzt Längen- und Breitenbestimmungen machen, zu verdanken. Man braucht bloss einen Blick auf die ältern Karten zu werfen, die zu einer Zeit gemacht sind, wo die Beobachtungsmethoden noch nicht so vollkommen waren, um die Verzerrung und Entstellung ganzer Länder, ihre ganz unrichtig dargestellten Grössenverhältnisse sogleich zu bemerken. Auch nicht einmal eine kleine Specialkarte, deren Entwerfung sich etwa auf geometrische oder trigonometrische Vermessung gründet, kann man richtig orientiren, ohne astronomische Kenntnisse, ohne Ziehung einer genauen Mittagslinie. Von grossen Reichen, wie zum Beispiel das Russische, deren trigonometrische Vermessung unerschwingliche Summen kosten würde, erhält man

Itaque adeo iam oppletum oppidum est solariis:
Maior pars populi aridi reptant fame.

Der vorstehende Text nach T. Macci Plauti *Comoediae*, rec. Lindsay, t. II, Oxonii, s. d. a.]

durch zahlreiche astronomisch-geographische Bestimmungen mit geringen Kosten in kurzer Zeit brauchbare Karten, auf die man ohne jene ganz hätte Verzicht leisten müssen.

Und nun endlich, was wäre die Schifffahrt ohne Astronomie? Der Kompass und die Logleine sind schätzbare Hülfsmittel, aber sehr unzureichende bei weiten Seereisen. Die Sterne sind es, die den Schiffer durch das Meer von einem Welttheile zum andern leiten und immer sicher leiten. Wie sehr die Schifffahrt der Hülfe der Astronomie und zwar der feinsten Astronomie bedürftig ist, kann man schon aus den hohen Preisen schliessen, die die erste seefahrende Nation der Welt, die Britten, auf die Verbesserung der Methode zur Erforschung der Meereslänge gesetzt haben. Und jetzt sind denn auch diese Methoden zu einem solchen Grade von Vollkommenheit gebracht, dass wenig zu wünschen und fast nichts zu hoffen übrig bleibt. Die Mondtafeln, die Sternverzeichnisse, die Messwerkzeuge haben eine Stufe von Genauigkeit erreicht, die das non plus ultra zu sein scheint, wenn nicht in Zukunft noch ganz neue Mittel entdeckt werden, wovon wir jetzt noch gar keine Idee, gar keine Ahnung haben. Der wohlunterichtete Schiffer fährt, auf seinen Sextanten, auf seine Seeuhr, auf seine Ephemeriden sich verlassend, fast eben so sicher den geraden Weg über das Meer, wie der Fuhrmann seine Chaussee; wir haben Beispiele, dass Schiffe die ganze Erde umsegelt, unterwegs an mehr als einer Küste planmässig ihre Geschäfte gemacht haben und in weniger als einem Jahr in den europäischen Hafen zurück gekommen sind. Vergleichen Sie damit das unsichere Herumtappen bei ältern Seereisen, die Verzögerungen, Gefahren und das Unglück, dem sie so oft bloss aus Unkunde ihres eigentlichen Weges ausgesetzt waren, die tragikomischen Abentheuer, die man noch jetzt öfters von schlecht unterrichteten Schiffern hört, so werden Sie lebhaft fühlen, dass alle Staaten, die nicht ganz von Seehandel und Schifffahrt abgeschnitten sind, die grösste Ursache haben, die Fortschritte der Astronomie ihrer Aufmerksamkeit und ihrer Unterstützung auch aus diesem Gesichtspunkte sehr würdig finden [zu] müssen.

BEMERKUNGEN.

Die Handschrift des vorstehend abgedruckten Aufsatzes besteht aus 36 eng beschriebenen Kleinoktavseiten und gehört zu den im Besitz der Nachkommen von Gauss ältestem Sohne, Joseph, befindlichen

Familienpapieren, die (wie z. B. auch das *Tagebuch*, vergl. Werke X, 1, S. 485) gemäss der Verfügung von Carl Gauss (dem am 22. Januar 1927 in Hameln verstorbenen Sohne von Joseph G.) dauernd im Gaussarchiv aufbewahrt werden. In der Handschrift folgen auf den oben wiedergegebenen Text noch Literaturangaben und einige Stichworte zur sphärischen Astronomie, deren Abdruck unterlassen wurde.

In Nr. 35 der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich vom Jahre 1890 (S. 236 ff.) berichtet Rudolf Wolf über ein Kollegheft, das Peter Merian aus Basel im Sommer 1815 nach einer Vorlesung von Gauss über die *Elemente der Astronomie* nachgeschrieben hat. Der Geologe Bernhard Studer sei im Jahre 1816 mit Merian in Göttingen bekannt geworden und habe mit Merians Erlaubnis sich eine Abschrift des Kollegheftes angefertigt, die nach einer letztwilligen Verfügung Studers in der historischen Sammlung der Züricher Sternwarte aufbewahrt wird. Die von Wolf a. a. O. abgedruckten Stellen aus dem Heft decken sich inhaltlich zum Teil mit der vorstehend abgedruckten Handschrift. Man darf wohl annehmen, dass Gauss diese für seine erste astronomische Vorlesung angefertigt und auch später bei seinen Vorlesungen über allgemeine Astronomie benutzt hat, woraus sich die Bezeichnung des Aufsatzes als »Antrittsvorlesung« rechtfertigen dürfte.

Nach den Ankündigungen der Vorlesungen in den Gött. Gelehrten Anzeigen hat Gauss für das Sommersemester 1808, in dem er wohl zum ersten Male las, kurzweg *Astronomie* als einzige Vorlesung angekündigt, und im oben erwähnten Sommer 1815, *Theoretische Astronomie* ferner *Art und Weise, die Bewegungen der Kometen zu berechnen* und *Praktische Astronomie, privatissime*. Der Titel keiner dieser Vorlesungen deckt sich genau mit dem des Merianschen Kollegheftes; doch ist anzunehmen, dass dieses sich auf die *Theoretische Astronomie* bezieht.

In Bezug auf das Zitat aus Jean Paul (oben S. 194 *)) ist es von Interesse, dass Charles de Villers (der von 1811 bis 1814 Professor in Göttingen war) in einem Briefe an Jean Paul vom 2. Januar 1813, dessen Handschrift sich in der Preussischen Staatsbibliothek befindet, schreibt: »Unter Ihren wärmsten Anbetern hier ist auch zu zählen der Himmel- und Zahl- und Sideral-Mann, Prof. Gauss. Der stille, sanfte, geistreiche Gauss liest und liebt Sie beinahe so leidenschaftlich als ich; — diese gemeinschaftliche Neigung hat gegenseitige Neigung zwischen uns gestiftet und ich habe den Freund Ihnen zu danken, mit dem ich vielleicht sonst wenig Berührungspunkte gehabt hätte.« — Wir verdanken diese Briefstelle einer freundlichen Mitteilung von Eduard Berend in Berlin.

Brendel. Schlesinger.

*) Es heisst in Jean Pauls *Hesperus*, zu Anfang des 13. *Hundposttages* (Sämmtl. Werke VII, Berlin 1826, S. 237): »... Diese Menschen ... ehren ... in der erhabenen Astronomie nur die Verwandlung der Sonnen in Schrittzähler und Wegweiser für Pfefferflotten ...«.

39. Gauss an Encke.

Göttingen, 25. Februar 1819.

. . . .

Ich beschäftige mich jetzt mit Untersuchungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wodurch die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate auf eine neue Art begründet wird, unabhängig von dem Gesetz der Fehler und der Voraussetzung einer grossen Zahl der Beobachtungen. Auf ersterm beruhete meine Begründung in der *Th[eoria]* *M[otus]* *C[orporum]* *C[oelestium]*, auf der andern die Laplacesche. Ausserdem werde ich einige Untersuchungen weiter ausführen oder specieller behandlen, da ich bemerkt habe, dass häufig die Methode der kl[einsten] Quadrate auf eine Art angewandt wird, die dem eigentlichen Geiste nicht ganz gemäss ist. Eine Berichtigung eines bis jetzt ganz allgemeinen Irrthums will ich hier besonders anführen. Ich habe in der Z[eitschrift] f[ür] A[stronomie*)] gezeigt, wie man aus n wirklich begangnen Beobachtungsfehlern $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ ... den wahrscheinlichen (Littrow nennt ihn unpassend wahrscheinlichsten) Beobachtungsfehler ableiten kann, welcher $= 0{,}67\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \text{etc.}}{n}}$ wird. Dies hat seine Richtigkeit, wenn $\varepsilon, \varepsilon'$ etc. die wirklichen Beobachtungsfehler sind. Ich habe als solche in meinem Beispiel die Differenzen der jedesmaligen Beob[achtungen] von dem Mittel angenommen, und bei einer so grossen Anzahl Beob[achtungen] hat dies auch weiter nichts zu sagen. Aber streng ist es nicht. Nach der strengen Theorie muss man, wenn $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ etc. nicht die Beobachtungsfehler, sondern die Differenzen zwischen den beobachteten Grössen und denjenigen, die aus den nach der M[ethode] d[er] kl[einsten] Q[uadrate] bestimmten Werthen der unbekannten Grössen, berechnet werden, bedeuten, nicht mit n sondern mit $n-m$ divi-

[*) Zeitschrift für Astronomie herausg. von B. von Lindenau und J. G. F. Bohnenberger, Bd. I, 1816, S. 185; Werke IV, S. 109 ff.]

diren, wenn n die Anzahl der Beobachtungen, m die Anzahl der unbekannten Grössen bedeuten. Dies Resultat ist eben so praktisch wichtig als es elegant ist. Man sieht, dass wenn m gegen n beträchtlich ist, durch das unrichtige Verfahren sehr unrichtige Resultate entstehen. So sind die wahrscheinlichen Fehler der Resultate bei Ihrem Cometen von 1812 jetzt in dem Verhältnisse von $\sqrt{2} : \sqrt{5}$ zu vergrössern. Übrigens ist dieses Resultat meiner Untersuchung, wenn nur eine kleine Modification im Ausdruck angebracht wird, auch von dem Fehlergesetz unabhängig. Allein die Bestimmung der dem wahrscheinlichen Fehler selbst beizulegenden Genauigkeit ist es nicht, dies ist auch eine nicht ganz leichte Aufgabe. Sehr merkwürdig aber ist, dass wenn die Formel e^{-hhxx} angenommen wird, jene Bestimmung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers gerade eben so zuverlässig ist, als wäre sie auf $n-m$ wirklich bekannte Beobachtungsfehler gegründet. Sie sehen daraus zugleich, dass diese Zuverlässigkeit bei Ihrem Cometen aus den 5 Normalörtern nur sehr gering wird. — So sind unter andern auch die wahrscheinlichen Fehler der Besselschen Beobachtungen rücksichtlich der einzelnen Fadenantritte, welche Littrow bestimmt hat, in dem Verhältniss von $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ zu vergrössern.

---

40. Zwei Briefe an Jakob Friedrich Fries.

[1.]

Wilhelm Weber an Fries. Göttingen, 12. Februar 1841.

{Verehrter Freund,

Ihren gütigen Brief vom 28ten v. M. habe ich sogleich Herrn Hofrath Gauss mitgetheilt, der die Güte hatte, über die Fragen, die Sie darin wegen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorlegen, sich ausführlich mündlich zu äussern. Ich werde versuchen, so gut ich kann, seine Meinung wiederzugeben.

Er gab Ihnen gleich von Anfang darin Recht, dass in den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr gefehlt werden könne, wenn man nur auf die Zahlen bauet, welche wiederholte Beobachtungen geben, und nicht jeder andern Kenntniss, die man sich von der Natur der Sache und deren Verhältnissen verschaffen kann, ihr Recht widerfahren lässt, so schwer dies oft auch sei. In dieser Hinsicht könne nicht genug Vorsicht empfohlen werden. Die französischen Mathematiker hätten wohl diese Vorsicht nicht immer genug beobachtet; GAUSS hat diese Vorsicht bei allen Anwendungen, die er gemacht, nie aus dem Auge gelassen, und hat beim Vortrag immer vorausgeschickt: die Wahrscheinlichkeitsrechnung habe den Zweck, nur in solchen Fällen eine bestimmte Auskunft zu geben, wo man ausser den Beoachtungszahlen nichts weiter von der Sache wisse oder berücksichtigen wolle.

GAUSS erwähnte einen Fall, wo LAPLACE durch Mangel an jener Vorsicht einen Fehler begangen, der von Niemand bemerkt zu sein scheint. LAPLACE sucht nämlich die Wahrscheinlichkeit einer Ursache zu bestimmen, welche die Ebenen der Kometenbahnen den Ebenen der Planetenbahnen genähert habe. Er zählt die Kometen, deren Bahnen mit der Erdbahn einen Winkel zwischen 0° und 45° und zwischen 45° und 90° machen, findet ihre Zahl nahe gleich und schliesst daraus, dass keine solche Ursache wahrscheinlich Statt gefunden habe. LAPLACE hat dabei ausser Acht gelassen, dass, wenn jede Lage der Bahn gleiche Wahrscheinlichkeit besässe, die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bahn mit der Erdbahn einen Winkel von 0° bis 45° mache, viel kleiner ist, als die eines Winkels von 45° bis 90°. Zieht man nämlich vom Mittelpunkt einer Kugel senkrecht gegen die Kometenbahn eine gerade Linie nach der einen oder andern Seite, je nachdem die Bahn vorwärts oder rückwärts durchlaufen wird, und nennt den Durchschnittspunkt mit der Kugelfläche den Pol der Bahn, so würde, wenn man diese Fläche in gleiche Theile theilt, der Pol in jedem Theile mit gleicher Wahrscheinlichkeit vermuthet werden. Nun ist aber der Theil vom Pol der Erdbahn bis zu 45° Abstand nicht dem Theile von 45° bis 90° Abstand gleich, sondern es muss 60° statt 45° gesetzt werden, um beide Theile gleich zu machen. Berücksicht man dies geometrische Gesetz, so muss man das Gegentheil schliessen von dem, was LAPLACE.

In allen Fällen, welche Sie anführen als solche, wo die Wahrscheinlichkeitsrechnung keine Anwendung finde, stimmt GAUSS Ihnen im Wesentlichen bei und führt den Grund immer darauf zurück, dass Kenntnisse vorhanden sind, die in den der Rechnung zum Grunde zu legenden Beobachtungszahlen

nicht enthalten sind: z. B. wenn es sich bei Leibrenten um eine bestimmte Person handelt, von deren Constitution und Lebensart wir im Vergleich zur Mehrzahl der Menschen eine gewisse Vorstellung haben.

Der hohe Werth der Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht aber darin, dass sie gerade in den Fällen, wo gar keine andern Kenntnisse vorliegen, die uns leiten können, irgend eine Richtschnur an die Hand gibt: z. B. bei der Einrichtung einer Leibrentenanstalt.

Ebenso kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung dem Gesetzgeber eine Richtschnur für die Bestimmung der Zahl der Zeugen und der Richter geben, wenn sie auch für den einzelnen Fall nichts lehrt. Sie gibt eine Richtschnur für Wetten, in welchem Verhältnis die wahren und unwahren Nachrichten in einem Zeitungsblatte sich verhalten werden, wenn Zählungen aus längerer Zeit vorliegen. Sobald es sich aber von einem bestimmten Fall handelt, so gilt von Zeugen dasselbe, wie von einer Zeitungsnachricht, die wir vor Augen haben, von der wir viel mehr wissen, als was jene Zählungen enthalten.

Eine Angabe kann durch Vermehrung der Beobachtungen, denen aus subjectiven Gründen gleiches Vertrauen geschenkt wird, der Wahrheit immer näher gebracht werden, d. h. demjenigen Werthe, welcher nach der angewandten Beobachtungsweise ohne Beobachtungsfehler erhalten werden würde. Ist aber die Beobachtungsweise irrig, was aus objectiven Gründen, z. B. nach den dabei in Betracht kommenden Naturgesetzen zu beurtheilen ist, so geht ein constanter Fehler durch alle Beobachtungen, welcher durch Wiederholung der Beobachtung nicht herauszubringen ist.

Bei der Wiederkehr des Sonnenaufgangs kommt nicht bloss die wiederholte Erfahrung in Betracht, sondern weit mehr noch die Kenntniss der Gesetze, welche macht, dass diese und ähnliche Fälle in der Natur ganz anders beurtheilt werden müssen, als die wiederkehrenden Erscheinungen in der organischen Natur, wo man von solchen Gesetzen nichts weiss. Dort folgt aus dem Ausbleiben einer erwarteten Erscheinung, dass man ein in der Natur wirkendes Element übersehen hat: wir würden also die Wahrscheinlichkeit eines solchen Übersehens vorher zu schätzen haben. Ganz anders verhält es sich z. B. mit der Verbindung der Thiere, aus der junge Thiere hervorgehen, man weiss nicht wie. Hier hält man sich bloss an die wiederholte Beobachtung des Factums, und die Wahrscheinlichkeit wächst mit der Wiederholung.

Der Erfahrene unterscheidet hier Wahrscheinlichkeiten, wo der Unerfahrene keinen Unterschied macht. Dort hält aber bloss der ungebildete Mann, der nichts von Gesetzen weiss, die künftige Wiederkehr der Sonne bloss der bisherigen Erfahrung wegen für wahrscheinlich.

Gauss hätte selbst wohl einige Zeilen beigelegt, wenn er etwas zu sagen gehabt, dessen Ausdruck, um nichts an Präcision zu verlieren, schwieriger gewesen wäre. Er lässt Sie vielmals grüssen. Eine Anzeige hat ihn mit Ihrer *Geschichte der Philosophie*[*)] bekannt gemacht, wodurch er sehr begierig geworden, sie näher kennen zu lernen, vorzüglich was die Verirrungen des menschlichen Geistes betreffe, welche neuerlich vorgekommen.

Mit der Bitte, mich Ihrer Frau Gemahlin gütigst zu empfehlen, verharre ich

Ihr
ganz ergebener
Wilhelm Weber.}

[2.]

Gauss an Fries. Göttingen, 11. Mai 1841.

Verehrtester Herr Hofrath

Für die gewogentliche Übersendung Ihrer *Geschichte der Philosophie* und das gütige Schreiben, womit Sie dieselbe begleitet haben, bin ich Ihnen noch meinen herzlichsten Dank schuldig. Ich habe von jeher grosse Vorliebe für philosophische Speculation gehabt, und freue mich nun um so mehr, in Ihnen einen zuverlässigen Führer bei dem Studium der Schicksale der Wissenschaft von den ältesten bis auf die neuesten Zeiten zu haben, da ich bei eigner Lecture der Schriften mancher Philosophen nicht immer die gewünschte Befriedigung gefunden habe. Namentlich haben die Schriften mehrerer vielgenannter (vielleicht besser, sogenannter) Philosophen, die seit Kant aufgetreten sind, mich mitunter an das Sieb des Bockmelkers[**)] erinnert, oder, um anstatt des antiken ein modernes Bild zu gebrauchen, an Münchhausens

[*) J. Fr. Fries, *Geschichte der Philosophie*, 2 Bände, Heidelberg 1837—40.]

[**) Vergl. die Briefstelle Gauss an Schumacher vom 21. April 1836, Werke X 1, S. 467, wo Gauss davon spricht »was die Römer hircum mulcere nannten«, und die zugehörige *Bemerkung*, daselbst S. 468. — Zu der ganzen Briefstelle 2. vergl. Gauss an Schumacher vom 1. Dezember 1844, S. 62, 63 dieses Bandes.]

Zopf, woran er sich selbst aus dem Wasser zog. Der Dilettant würde nicht wagen, vor dem Meister ein solches Bekenntniss abzulegen, wäre es ihm nicht vorgekommen, als ob dieser nicht viel anders über jene Verdienste urtheilte. Ich habe oft bedauert, nicht mit Ihnen an Einem Orte zu leben, um aus der mündlichen Unterhaltung mit Ihnen über philosophische Gegenstände eben so viel Vergnügen als Belehrung schöpfen zu können.

Da Sie auch die Astronomie von Ihren Beschäftigungen nicht ausschliessen, so hat folgende Notiz für Sie einiges Interesse. Vor mehr als 50 Jahren glaubte Herschel einen brennenden Vulkan im Monde zu wiederholten malen gesehen zu haben; in Deutschland wollte man aber nicht recht daran glauben. Die interessanteste Beobachtung dieser Art ist die, welche Olbers am 5. Februar 1821 gemacht hat; aus einem Berichte darüber in einem Briefe an mich habe ich damals einen Auszug in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen (1821, S. 449) gegeben[*)]; Olbers hält das Phänomen für reflectirtes Erdenlicht von einer sehr glatten Felswand, vielleicht im oder in der Nähe vom Aristarch. Kater hatte dasselbe Phänomen beobachtet (Philosophical Transactions F. 1821, part I), und nennt es geradezu einen Mondvulkan. Ist Olbers' Erklärung (wie wohl nicht zu zweifeln ist) die richtige, so hat man Grund, bei ähnlichen Librationsverhältnissen die Wiederkehr einer ähnlichen Erscheinung zu erwarten. Ich finde nun nach einem flüchtig gemachten Überschlage, dass die Librationsverhältnisse am Abend des 24. Mai d. J., und noch etwas mehr die vom 20. Junius, denen vom 5. Februar 1821 ziemlich nahe kommen. Es versteht sich von selbst, dass man auch schon einen Tag früher Acht geben mag, zumal da Kater schon am 4. Februar 1821 beobachtet hatte; seine Beschreibung weicht übrigens etwas von der des Dr. O[lbers] ab, und am 5., wo er selbst abgehalten war und sein Fernrohr einigen Freunden überlassen hatte, scheint in London das Phänomen auch nicht ganz so markirt gewesen zu sein, wie in Bremen. Vielleicht lassen Sie sich durch diese Notiz anreizen, wenn das Wetter in Jena günstig ist, mit einem Fernrohr nach der immer seltenen Erscheinung auszuschauen.

Ihrem freundlichen Andenken mich
in hochachtungsvoller Ergebenheit empfehlend

Göttingen, 11 Mai 1841. C. F. Gauss.

[*) Werke VI, S. 436.]

BEMERKUNGEN.

Der Brief [1.] ist die Antwort auf eine Anfrage, die J. FR. FRIES durch Vermittlung von W. WEBER an GAUSS richtete, als er mit den Vorarbeiten zu seinem *Versuch einer Kritik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Braunschweig 1842, beschäftigt war. Die Briefe [1.] und [2.] sind bereits veröffentlicht in den *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, Neue Folge, Heft III, Göttingen 1906, S. 434—439 durch LEONARD NELSON. Ebendort ist noch ein früherer Brief von GAUSS an FRIES abgedruckt, in dem GAUSS seinen Dank ausspricht für die Übersendung von FRIES' 1822 in Heidelberg erschienenem Werke *Mathematische Naturphilosophie*. Auf GAUSS' Urteil über dieses Werk bezieht sich eine Äusserung von M. J. SCHLEIDEN in dem Aufsatze *Über den Materialismus in der neueren deutschen Naturwissenschaft*, Leipzig 1863, wo man auf S. 43 folgendes liest: »Als ich (1830—1834) in Göttingen studirte, kam einer der gediegeneren Studenten zu GAUSS, sah auf dessen Tische das genannte Werk und sagte . . . . Aber Herr Professor, geben Sie sich denn auch mit dem confusen philosophischen Zeug ab? Worauf sich GAUSS sehr ernst an den Frager wendete mit den Worten: Junger Mann, wenn Sie es in Ihrem Triennium dahin bringen, dass Sie dieses Buch würdigen und verstehen können, so haben Sie Ihre Zeit bei weitem besser angewendet als die meisten Ihrer Commilitonen.« Vergl. auch L. KOENIGSBERGER, *Zur Erinnerung an Jacob Friedrich Fries*, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathem.-naturw. Klasse, Jahrgang 1911, 9. Abhandlung, S. 11 und 27.

Die Handschriften der Briefe [1.] und [2.] befinden sich im Nachlass von FRIES; sie waren uns unzugänglich.

SCHLESINGER.

---

41. Ein Brief von Gauss an Joh. Chr. Ludwig Hellwig.

[1.]

{Aus

J. H. UFLAKKERS *Exempelbuch für Anfänger und Liebhaber der Algebra*

erste Auflage 1793; zweite Auflage 1799;

dritte Auflage, nach dem Tode des Verfassers, des Pastors UFLAKKER zu Ohrum im Hildesheimschen, herausgegeben von JOH. CHR. LUDWIG HELLWIG, Prof. der Mathematik und der Naturgeschichte am Collegium Carolinum und am Catharinen-Gymnasium zu Braunschweig, 1804.

In der Schulbuchhandlung.

Aufgabe 250 [Seite 88 der dritten Auflage].

Ein Fleischer hat für 100 Thaler [100] Schaafe von dreierlei Sorte gekauft. Ein Stück von der mittleren Sorte kostet 24 Gr. 7 Pf. mehr als eins von der kleinen und die grössern kosten alle 2 Thlr. 21 Gr. weniger als die mittlern. Wie viel Stück hat er von jeder Sorte und wie theuer jedes Stück gekauft?

Antwort: Er kann unter andern gekauft haben:

33 grosse	zu	1 Thlr. 12 Gr.,	thun	44 Thlr.
43 mittlere	zu	1 Thlr. 3 Gr.,	thun	46 Thlr. 21 Gr.
24 kleinere	zu	14 Gr. 1 Pf.,	thun	9 Thlr. 15 Gr. [*)]
100 Schaafe	. . .	. . . . . .		100 Thlr.}

[2.]

GAUSS an HELLWIG. Braunschweig, 28. Juli 1800.

Den folgenden Bemerkungen über die UFLACKERische Aufgabe muss ich sogleich die Entschuldigung vorausschicken, dass ich sie in grosser Eile niederschreibe, theils um Ihrem Verlangen, verehrungswürdigster Herr Professor, sogleich zu willfahren, theils weil ich selbst in diesen Tagen sehr pressirt bin, da nächsten Dienstag von meinen *Disquisitiones* eine Correctur kommt, der ich bei der Zurücksendung für einen Bogen neues M[anu]s[kri]pt beifügen muss, über eine Materie, die erst nach der Hand hinzugekommen und daher in meiner ersten Ausarbeitung des Werkes noch nicht enthalten ist. — Diess zur Entschuldigung, wenn Sie in dem Folgenden hin und wieder von derjenigen Ordnung und Klarheit, die man von ausgearbeiteten Aufsätzen verlangt, etwas vermissen, welches indess hier von keinem Belang sein wird, da Sie selbst darüber gearbeitet haben. Folgende Bemerkungen sollen Alles, was ich bei dem Problem, als H[err] HILDESHEIMER es mir zeigte, gedacht habe, enthalten (wenn nicht vielleicht irgend ein damals gebrauchter, weniger bedeutender Kunstgriff meiner Erinnerung entgeht), und in gewisser Rücksicht noch mehr, und es würde mich sehr freuen, wenn Sie darunter etwas finden, was Sie Ihrer Aufmerksamkeit nicht ganz unwerth halten.

Ich glaube, und auch Sie scheinen dieser Meinung zu sein, dass man eine unbestimmte Aufgabe, welche nur eine endliche Anzahl von Auflösungen zulässt, als aufgelöset ansehen kann, wenn man entweder aus Einer der vorgeschriebenen Bedingungen oder aus der geschickten Combi-

[*) 1 Thlr. = 36 Gr.; 1 Gr. = 8 Pf.]

nation mehrerer, Grenzen für jede der unbekannten Grössen hergeleitet hat, zwischen denen sie nothwendig enthalten sein müssen, oder durch irgend ein Mittel die Anzahl der zu machenden Versuche auf eine endliche Anzahl reducirt hat. Alles, was man ausserdem thun kann, ist nicht sowohl ad soluendum problema sondern nur ad melius soluendum oder ad contrahendam solutionem, und eines der zweckmässigsten Hülfsmittel ist in solchen Fällen, wenn man von den anzustellenden Versuchen sogleich einen Theil als untauglich ausschliessen kann.

Die einfachste Darstellung der Aufgabe, wenn man sie von dem Nichtmathematischen entkleidet hat, scheint mir diese zu sein: »Man sucht zwei ganze positive Zahlen x und y die folgenden drei Bedingungen Genüge thun:

I. $x+y<100$ oder $100-x-y$ eine positive Zahl $=z$ (eine ganze Zahl wird z von selbst wenn x u[nd] y es sind).

II. Der Werth von $\frac{29544-398y}{x+2y}$ soll gleichfalls eine ganze positive Zahl werden $=m$ (Preis eines Stückes von x).

III. Der Werth von $\frac{y(m+199)-744}{z}$ gleichfalls ganz u[nd] positiv $=A$*) Preis Eines Stückes von z).

Ich behalte geflissentlich für alle Grössen die von Ihnen gebrauchten Buchstaben bei. Diese drei Bedingungen erschöpfen das Problem ganz und enthalten auch nichts Überflüssiges; jede Auflösung der Aufgabe muss den Bedingungen Genüge thun, und umgekehrt, alle mit diesen Bedingungen übereinstimmende Werthe von x u[nd] y geben eine brauchbare Auflösung der Aufgabe.

Gewissermassen enthält nun schon die erste Bedingung die Auflösung;

*) Es kommt mir vor, als wenn die Art, wie Sie sagen, auf diese Bedingung Rücksicht genommen zu haben, doch noch nicht zureichend wäre; denn wenn gleich z, eben so wie x, y, m ganze Werthe bekommen, so kann doch ganz füglich A ein Bruch werden; der Gewohnheit der Rechenmeister nach scheint aber doch tacite bei der Aufgabe vorausgesetzt zu werden, dass auch die Preise jedes einzelnen Stücks keinen Bruch enthalten; wollte man sich dispensiren, A zu einer ganzen Zahl zu machen, so hätte man eben das Recht mit m, u[nd] dann liesse sich die ganze Auflösung mit ein Paar Worten abthun.

da nemlich die Summe der ganzen positiven Grössen x u[nd] y kleiner als 100 sein soll, so wird schon dadurch die Anzahl aller Werthe von x und y auf eine endliche Anzahl beschränkt; man könnte also dem x der Reihe nach alle Werthe von 1 bis 98 inclus[ive] beilegen, und für jeden derselben y nach und nach die Werthe $1, 2 \ldots$ bis $99-x$ incl[usive] geben, jede dieser Combinationen (deren Anzahl $=4851$) mit den zwei übrigen Bedingungen zusammenhalten, diejenigen, die mit einer derselben oder beiden nicht zusammenstimmen, aussch[l]iessen, so würden die zurückbleibenden die vollständige Auflösung geben.

Diese Auflösungsart wird schon um ein Beträchtliches abgekürzt durch die aus II. folgende Bemerkung, dass $y<\frac{29544}{398}<74\frac{46}{199}$, also höchstens $=74$; legte man also der Reihe nach dem y die Werthe $1 \ldots 74$, dem x aber, für jeden Werth von y, diese $1, 2, 3 \ldots 99-y$ bei, so würde die Anzahl der zu machenden Versuche auf 4551 gebracht. — Allein man sieht leicht, dass es nicht nöthig ist, bei einem bestimmten Werthe von y dem x alle Werthe zwischen jenen Grenzen beizulegen und sie mit den Bedingungen II., III. zusammenzuhalten; nach II. muss $x+2y$ ein Factor von $29544-398y$ werden; ferner muss $x+2y>2y$ und $<x+2y+z$ d. i. $<100+y$ sein, woraus man dann schliesst, dass, wenn man alle Factoren von $29544-398y$, welche zwischen den Grenzen $2y$ und $100+y$ liegen (exclus[ive]), der Reihe nach $=x+2y$ setzt und daraus x bestimmt, man alle Werthe von x und y, die den beiden ersten Bedingungen Genüge leisten, vollständig bekommen werde. Diess ist das Verfahren, was ich Ihnen als das kürzeste angegeben habe, wenn bloss die Bedingungen I., II. erfüllt werden sollen. Alle Auflösungen der Aufgabe lassen sich dann daraus ableiten, wenn man diejenigen Werthe von x u[nd] y allein zurückbehält, die auch der dritten Bedingung Genüge thun. — Übrigens lassen sich diejenigen Werthe von x u[nd] y, die bloss I., II. erfüllen, auch durch folgende Methoden finden, und ich glaube behaupten zu können, dass sich keine Methode erdenken lasse (immer abstractione facta a conditione tertia), die nicht mit einer derselben im Wesentlichen übereinstimmte.

Zweite Methode.

Man setze x der Reihe nach $=1, 2, 3 \ldots 98$; für jeden bestimmten $\left\{\begin{matrix}\text{geraden}\\ \text{ungeraden}\end{matrix}\right\}$ Werth von x sammle man alle diejenigen $\left\{\begin{matrix}\text{geraden}\\ \text{ungeraden}\end{matrix}\right\}$ respective Factoren der Zahl $29544+199x$, die zwischen den Grenzen $x+1$ und $x+149$ exclus[ive] liegen, und setze dieselben $=x+2y$ und bestimme daraus y.

Dritte Methode.

Man setze z der Reihe nach $=1, 2, 3 \ldots 98$; für jeden bestimmten Werth von z sammle man alle Factoren der Zahl $69344-398z$, welche zwischen $100-z$ und $75-z$ excl[usive] liegen, wenn $z<25$; oder zwischen $100-z$ und $100-2z$, wenn $z>25$ (für $z=25$ sind jene Grenzen diesen gleichgültig); setze dieselbe[n] $=t$ und bestimme daraus x und y vermittelst der Gleichungen $x=200-t-2z$, $y=t+z-100$. Alle diese drei Methoden stimmen im Wesentl[ichen] überein; verschieden davon ist die

Vierte Methode.

Man lege der Grösse t nach und nach die Werthe $3, 4, 5 \ldots 173$ bei; für jeden $\begin{Bmatrix}\text{geraden}\\ \text{ungeraden}\end{Bmatrix}$ Werth von t bestimme man, wenn es möglich ist, einen $\begin{Bmatrix}\text{geraden}\\ \text{ungeraden}\end{Bmatrix}$ von x so, dass $29544+199x$ durch t theilbar werde*) und x zwischen die Grenzen

$$\begin{Bmatrix} 0 & \text{und} & t-1 \\ 0 & \text{und} & 199-t \\ t-149 & \text{und} & 199-t \end{Bmatrix}$$

exclusive liege, je nachdem die eine oder die andere Grenze am **engsten** sind, d. i. je nachdem t

$$\begin{Bmatrix} \text{zwischen} & 3 & \text{und} & 100 \\ \text{zwischen} & 100 & \text{und} & 149 \\ \text{zwischen} & 149 & \text{und} & 174 \end{Bmatrix}.$$

Aus x und t folgte dann y vermittelst der Gleichung $y=\frac{1}{2}(t-x)$. Diejenigen Werthe von t, bei welchen eine solche Bestimmung von x nicht möglich ist, werden weggeworfen.

Fünfte Methode.

Man mache wie vorher nach und nach $t=3, 4, 5 \ldots 173$; bestimme, wenn es möglich, für jedes t, y so, dass $29544-398y$ durch t theilbar werde

*) Dieses Problem gehört in die **Höhere Arithmetik**, ist eines der **leichtesten** derselben; auch hat man das, worauf die Auflösung beruhet, schon im vorigen Jahrhunderte gewusst. Es kommt auch, wiewohl in andren Ausdrücken, in meinen *Disquis[itione]s* vor. Hier würde es zu weitläufig sein, mehr davon zu sagen.

und y zwischen den Grenzen

$$\begin{Bmatrix} 0 & \text{und} & \frac{1}{2}t \\ t-100 & \text{und} & \frac{1}{2}t \\ t-100 & \text{und} & 75 \end{Bmatrix}$$

liege, je nachdem die ersten, zweiten oder dritten die engsten sind oder je nachdem t zwischen

$$\begin{Bmatrix} 3 & \text{und} & 100 \\ 100 & \text{und} & 150 \\ 150 & \text{und} & 173 \end{Bmatrix};$$

x bestimmt sich alsdann durch die Gleichung $x=t-2y$.

Sechste Methode.

Man mache wie vorher t nach und nach $=3, 4 \ldots 173$; für jeden bestimmten Werth von t bestimme man z wo möglich so, dass $69344-398z$ durch t theilbar werde und z zwischen den Grenzen

$$\begin{Bmatrix} 100-t & \text{und} & 100-\frac{1}{2}t \\ 0 & \text{und} & 100-\frac{1}{2}t \\ 0 & \text{und} & 175-t \end{Bmatrix} \text{ liege, je nachdem } t \text{ zwischen } \begin{Bmatrix} 3 & \text{und} & 100 \\ 100 & \text{und} & 150 \\ 150 & \text{und} & 173 \end{Bmatrix};$$

x u[nd] y folgen aus t u[nd] z durch die bei der dritten Methode angegebenen Gleichungen.

Diese drei letzten Methoden stimmen wieder unter sich ganz überein; a priori ist klar, dass alle sechs nothwendig ganz einerlei Resultate geben müssen; die drei letzten könnte man für **directer** halten, als die ersten, weil dabei kein Aufsuchen von Factoren nöthig ist; auch gewähren sie den Vortheil, dass man aus ihnen mit Sicherheit schliessen kann, dass die Anzahl aller Auflösungen (die die Bedingung I., II. erfüllen) gewiss nicht grösser als 171 sein kann, weil aus Principien der Höhern Arithmetik folgt, dass für ein bestimmtes t entweder nur ein x oder gar keines gefunden werden kann, das die Eigenschaften in der 4^{ten} Auflös[un]g hat. Weil es viele t gibt, wofür kein solches x gefunden werden kann, so ist die Anzahl beträchtlich kleiner. Hier sind die Auflösungen alle (Ihre Anzahl ist 100)

t	x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z
7	1	3	96	32	8	12	80	60	24	18	58	86	62	12	26	113	27	43	30
9	3	3	94	34	20	7	73	62	50	6	44	88	24	32	44	114	36	39	25
10	4	3	93	35	29	3	68	63	57	3	40	90	84	3	13	115	59	28	13
13	11	1	88	36	12	12	76	64	40	12	48	92	36	28	36	116	20	48	32
14	8	3	89	38	36	1	63	66	24	21	55	93	81	6	13	119	71	24	5
15	9	3	88	40	24	8	68	68	20	24	56	94	6	44	50	120	24	48	28
16	8	4	88	42	36	3	61	70	64	3	33	96	72	12	16	122	14	54	32
17	3	7	90	43	19	12	69	71	31	20	49	97	47	25	28	123	45	39	16
18	12	3	85	44	24	10	66	72	48	12	40	98	50	19	31	127	13	57	30
19	17	1	82	45	39	3	58	73	61	6	33	99	57	21	22	128	40	44	16
20	4	8	88	46	36	5	59	74	4	35	41	100	44	28	28	130	24	53	23
21	15	3	82	48	24	12	64	75	69	3	28	101	51	25	24	131	51	40	9
22	2	10	88	49	1	24	75	76	36	20	44	102	54	24	22	132	24	54	22
23	13	5	82	50	44	3	53	77	57	10	33	103	27	38	35	134	32	51	17
25	19	3	78	51	3	24	73	78	24	27	49	104	24	40	36	138	36	51	13
26	24	1	75	52	24	14	62	80	24	28	48	106	14	46	40	145	49	48	3
27	21	3	76	54	48	3	49	81	75	3	22	107	65	21	14	148	4	72	24
28	8	10	82	56	8	24	68	82	4	39	57	108	48	30	22	149	23	63	14
30	24	3	73	58	20	19	61	83	63	10	27	110	24	43	33	155	19	68	13
31	19	6	75	59	57	1	42	84	36	24	40	112	8	52	40	156	24	66	10

Es scheint auffallend dass die Anzahl gerade hundert ist; doch ist dies gewiss ein blosser Zufall.

Dies wäre also die vollständige Auflösung der zwei, mir von Ihnen vorgelegten Gleichungen. Von allen diesen 100[*)] Auflösungen sind aber nur diejenigen als Auflösungen der Uflakkerschen Aufgabe anzusehen, die zugleich der dritten Bedingung gemäss sind. Diese will ich also etwas näher betrachten.

Wenn man in dem Werthe von A den von m substituirt, so wird

$$A = \frac{199xy - 744x + 28056y}{z(x+2y)};$$

setze ich $x + 2y = t$, so wird $x = 200 - t - 2z$, $y = t + z - 100$; daraus nach

[*) Die Handschrift hat hier versehentlich 98 statt 100.]

den gehörigen Substitutionen

$$A = \frac{-199tt - 597tz - 398zz + 88500t + 109144z - 6934400}{tz}.$$

Der Werth dieses Bruches muss also eine ganze Zahl sein. Diess ist nun gerade diejenige Seite der Aufgabe, wo sie mit wichtigern Untersuchungen in Verbindung steht. Es folgt sogleich daraus, dass der Zähler des Bruchs sowohl durch t als durch z theilbar sein muss; es muss also auch der Zähler, wenn man die Theile, die z enthalten, weglässt, noch durch z theilbar sein, also

$$199tt - 88500t + 6934400 = N$$

durch z theibar. Nun wird

$$199N = (199t - 44250)^2 - 578116900;$$

diess muss also durch z, und daher auch durch jeden Divisor von z theilbar sein. Hieraus lassen sich nach Principien der Höhern Arithmetik*) folgende wichtige Folgen ableiten, die mir vornehmlich gedient haben, die dem jungen Hildesheimer mitgetheilten Auflösungen zu finden:

1) Ist z gerade, so muss auch t gerade sein.

2) Ist z durch 3 theilbar, so darf t nicht durch 3 theilbar sein.

3) Wäre z durch 5 theilbar, so müsste auch t es sein; da nun aber (S. 6[te] Auflösung) $69344 - 398z$ durch t theilbar ist, so wäre es auch durch 5 theilbar, welches, wie man leicht sieht, nicht möglich ist. Daraus folgt also, dass z nicht durch 5 theilbar sein dürfe.

4) Ist z durch 7 theilbar, so muss entweder $t+2$ oder $t+3$ durch 7 theilbar sein.

5) Ist z durch 9 theilbar, so muss auch entweder $t+2$ oder $t+4$ es sein.

6) Ist z durch 4 theilbar, so muss t es auch sein.

7) Ist z durch 11 theilbar, so muss auch entweder t oder $t+6$ es sein.

8) Ist z durch 13 theilbar, so muss entweder $t+2$ oder $t+12$ es auch sein.

*) Eine nähere Entwickelung dieser Ableitung wäre hier ohne die grösste Weitläuftigkeit nicht wohl möglich, da dieser Abschnitt der Höhern Arithmetik seine eigenthümlichen Gründe hat. Ich habe ihm in meinen *Disquis[itione]s* ein eignes Kapitel [sectio quarta] gewidmet, das die quadratischen Reste der Zahlen, oder die Divisoren solcher Ausdrücke $xx - a$ betrifft. Es ist einer der interessantesten Theile dieser Wissenschaft.

Auf diese Art kann man für jeden Divisor von z (die H[öhere] A[rithmetik] lehrt, dass man nur auf solche Divisoren zu sehen braucht, die Primzahlen oder Potenzen von Primzahlen sind) die Bedingung finden, unter der

$$(199t - 44250)^2 - 578116900$$

durch z theilbar sein kann, und so diejenigen Werthe[*)] von t u[nd] z, die diesen Bedingungen nicht gemäss sind, sogleich übergehen. — So bleiben z. B. von obigen 100 Auflösungen nur folgende 39[**)] übrig, wenn man diejenigen, die einer der vorhergehenden 8 Bedingungen nicht gemäss sind, weglässt:

t	x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z
10	4	3	93	44	24	10	66	64	40	12	48	110	24	43	33
14	8	3	89	46	36	5	59	68	20	24	56	115	59	28	13
16	8	4	88	48	24	12	64	74	4	35	41	116	20	48	32
28	8	10	82	50	44	3	53	77	57	10	33	128	40	44	16
30	24	3	73	51	3	24	73	80	24	28	48	130	24	53	23
34	20	7	73	52	24	14	62	82	4	39	57	131	51	40	9
36	12	12	76	54	48	3	49	88	24	32	44	132	24	54	22
40	24	8	68	56	8	24	68	96	72	12	16	134	32	51	17
42	36	3	61	58	20	19	61	98	50	19	31	145	49	48	3
43	19	12	69	60	24	18	58	104	24	40	36				

Ich entwickele noch einige Bedingungen für solche Divisoren von z, die hier mehrere male vorkommen:

Ist z theilbar durch	so ist es auch
17	$t+9$ oder $t+11$
19	$t+16$ oder $t+18$
23	$t+3$ oder $t+8$
31	$t+5$ oder $t+25$

Ferner zeigt die H[öhere] Arithmetik, dass z durch 73 nicht theilbar sein kann; lässt man die Auflösungen weg, die hienach wegfallen, so bleiben

[*)] Die Handschrift hat »denjenigen Werthen«.]
[**)] Die Handschrift hat 40 statt 39.]

folgende 29:

t	x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z	t	x	y	z
14	8	3	89	48	24	12	64	77	57	10	33	128	40	44	16
16	8	4	88	50	44	3	53	80	24	28	48	130	24	53	23
28	8	10	82	54	48	3	49	88	24	32	44	131	51	40	9
40	24	8	68	58	20	19	61	96	72	12	16	132	24	54	22
42	36	3	61	60	24	18	58	104	24	40	36	145	49	48	3
43	19	12	69	64	40	12	48	110	24	43	33				
44	24	10	66	68	20	24	56	115	59	28	13				
46	36	5	59	74	4	35	41	116	20	48	32				

Es ist nicht der Mühe werth, noch andre Bedingungen, wie vorher, aufzusuchen, sondern am bequemsten, diese 29 Auflösungen der Reihe nach zu prüfen, ob sie ein ganzes A geben. Lässt man alsdann diejenigen weg, wo A ein Bruch wird, so bleiben folgende 11 Auflösungen, deren Bedeutung durch das erste Schema dargestellt wird:

z	A	88	8	68	90	69	124	48	131	56	198
y	$m+199$	4	1946	8	858	12	775	12	586	24	493
x	m	8	1747	24	659	19	576	40	387	20	294

36	346	33	384	13	716	23	576	9	1264	3	4088
40	330	43	312	28	359	53	264	40	303	48	271
24	131	24	113	59	160	24	65	51	104	49	72

Welche von diesen elf Auflösungen, die das ganze Problem erschöpfen, bei den zehn, welche ich H[errn] HILDESHEIMER gegeben habe, fehlt, weiss ich nicht, da ich keine Abschrift zurückbehalten habe.

Übrigens war ich, als ich das Problem zum ersten male auflösete, einen etwas verschiedenen Weg gegangen. Ich hatte damit angefangen, eine weit grössere Anzahl solcher Bedingungen zu entwickeln, wie ich oben einige angegeben habe; dann legte ich dem z nach und nach alle Werthe bei von 1—98, diejenigen ausgeschlossen, die einer der Bedingungen nicht gemäss waren (z. B. die durch 5 theilbaren Zahlen, die Zahl 73 und noch einige andere); für jedes dieser z untersuchte ich auf der Stelle (nach der dritten

Methode oben), ob es ein t gebe, was sowohl den bei jener Methode angegebenen Bedingungen, als den speciellen Bedingungen, die aus den Prim-Divisoren von z folgten, gemäss sei; bei denen es der Fall war, berechnete ich A, welches dann in den meisten Fällen schon von selbst eine ganze Zahl wurde. Dass ich damals nur 10 Auflösungen fand, muss von einem Versehen hergerührt haben.

Schwerlich wird also eine nähere Erwähnung meiner Verfahrungsart in Ihren Plan passen. Vielleicht wäre es am zweckmässigsten, eine der erstern drei Methoden zu erklären; die daraus entspringenden 100 Auflösungen entweder selbst aufzuführen (freilich in einer andern Ordnung, wie die gewählte Methode sie gäbe), oder nur ihre Anzahl mit einem Worte anzuzeigen und dann hinzuzusetzen, dass sich aus der Zusammenhaltung derselben mit der dritten Bedingung ergebe, dass von jenen 100 nur die 11, welche selbst hinzuzufügen vielleicht nicht unpassend wäre, vollständige Auflösungen der Aufgabe sei[e]n.

Verzeihen Sie gütigst, dass diese Blätter so schlecht und mit vielen Änderungen geschrieben sind; ich habe alles, der grossen Eile wegen, gleich hinschreiben müssen, ohne vorher einen Brouillon machen zu können. Ich verharre mit vollkommenster Verehrung

Ihr
ganz gehorsamster Fr[eund] u[nd] Diener
C. F. Gauss.

Br[aunschweig] 28 Jul. 1800.

BEMERKUNG.

Die Handschrift des vorstehend abgedruckten Briefes ist im Besitz der Treptow-Sternwarte zu Berlin und besteht aus 9 eng beschriebenen Quartseiten. Auf dem Umschlag lautet die Anschrift: »Sr. Wohlgeboren Hrn. Professor Hellwig, gehorsamst«. Eine mit freundlicher Genehmigung der Direktion der Treptow-Sternwarte angefertigte photographische Nachbildung der Handschrift befindet sich im Gauss-archiv; sie liegt dem vorstehenden Abdruck zu Grunde. In dem von Hellwig verfassten, aber anonym erschienenen Werke

Allgemeine und besondere Auflösungen der in Uflakkers algebraischem Exempelbuche vorkommenden Aufgaben, denen noch andere beygefügt worden. Braunschweig bey Carl Reichard 1801.

liest man auf S. 183 in Bezug auf die hier behandelte Aufgabe aus Uflakker das folgende:

»[Aufgabe] 250.

Es sey die Anzahl der kleinern Sorte $= x$; ein Stück koste m Pfennige, also alle mx.
die Anzahl der mittlern[*]] Sorte $= y$; ein Stück koste $m + 199$ Pf., also alle $(m + 199)y$.
die Anzahl der grössern Sorte $= z$; alle kosten $(m + 199)y - 744$ Pf.

Daher ein Stück $\dfrac{(m+199)y-744}{z}$.

Nach der Aufgabe ist ferner $x + y + z = 100$ I.
und $mx + (my + 199y) + (my + 199y - 744) = 28800$ II.

. . . .

Bey allen Hülfsmitteln, deren man sich in Anwendung dieser Methode auf die vorliegende Aufgabe bedienen kann, schien dem Herausgeber dieser Auflösungen doch der Weg, den er hiernach gehn sollte, zu lästig. Er legte sie daher dem Herrn D[octor] Gauss vor, dem die feinsten Kunstgriffe der Analysis so sehr zu Gebote stehn, wovon er, in einem bald erscheinenden Werke, der Welt die schönsten Beweise vorlegen wird. Er hatte die Gütigkeit, mir sechs Methoden mitzutheilen. Die bereits angegebene war von der zweyten und dritten Methode nicht wesentlich verschieden; die vierte, fünfte und sechste Methode stimmen wiederum im wesentlichen überein. Da sie aber die Gründe der höhern Arithmetik voraussetzen, so wird man von selbst einsehen, dass hier nicht der Ort sey, sie beyzubringen. . . . . [Es folgen die oben, S. 215 von Gauss angegebenen 11 Auflösungen], von welchen nur die Resultate aus [der] VII. in Uflakkers *Algebraischem Exempelbuche* angegeben worden.«

Schlesinger.

[*) In dem Buche steht hier noch einmal »kleinern«.]

42. Preisaufgaben.

A. Für die Philosophische Fakultät.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER, Bd. IV, S. 53, 67; Bd. VI, S. 17.]

[1.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen 25. Januar 1842.

. . . .

Die Veranlassung, die mich auf die Aufgabe den geom[etrischen] Ort betreffend[*)] führte, war der Umstand, dass bald an mir die Reihe sein wird, Preisfragen für unsere Studirenden abseiten der philos. Facultät vorzuschlagen; jetzt zum 3$^{\text{ten}}$ mahle. Ich liebe nicht, historische Aufgaben zu stellen, sondern mag lieber die eigne Thätigkeit beschäftigen. Aus diesem Gesichtspunkte waren meine Aufgaben von 1829 u[nd] 1834[**)] gestellt, die resp. GOLDSCHMIDT u[nd] DEAHNA gewonnen haben. Ich dachte an die in Rede stehende Aufgabe, nicht wissend, ob sie schon sonst behandelt sei; allein, da ich hinterdrein fand, dass es möglich ist, sie auf Einer, oder ein Paar Seiten erschöpfend abzumachen, so qualificirt sie sich nicht zu jenem Zweck. Können Sie mir einige geeignete Fragen vorschlagen, so werden Sie mich verpflichten; es wird gerade keine Verwerflichkeit sein, wenn dieselben schon einmahl in Kopenhagen aufgegeben wären, da solche Schriften doch nicht ins Publicum kommen. . . . .

[*) Siehe die Briefe GAUSS an SCHUMACHER vom 29. Dezember 1841, SCHUMACHER an GAUSS vom 3. Januar 1842, GAUSS an SCHUMACHER vom 6. Januar 1842, Werke VIII, S. 292—294.]

[**) Vergl. weiter unten. Dass GAUSS, der am 9. Juli 1807 zum Professor der Astronomie ernannt worden war, in den ersten 20 Jahren seiner Tätigkeit keinen Anteil an den Geschäften der Fakultät nehmen, also auch keine Preisaufgaben stellen konnte (vergl. in dem Brief an BESSEL vom 10. Februar 1811, *Briefwechsel*, S. 136 »Ich selbst bin nicht in der Fakultät, habe also keine Stimme . .«) lag daran, dass er erst am 3. November 1828 zum wirklichen Mitglied der Fakultät ernannt worden ist.]

[2.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 8. April 1842.

. . . . Bei den Preisfragen für unsre Studenten ist es fast ausschliesslich Sitte, historische Aufgaben zu stellen; ich glaube, die beiden 1829 u[nd] 1834 von mir gestellten, wo es umgekehrt nur galt, einige Selbstthätigkeit zu zeigen, sind vielleicht die einzigen Ausnahmen gewesen. Die letztere Art hat allerdings die Inconvenienz, dass man nicht immer sicher ist, ob die Aufgabe nicht irgendwo gedruckt schon gelöset ist, oder während der Zeit öffentlich gelöset wird. Eine ganz artige Aufgabe ist mir noch eingefallen, ich bitte aber, falls Sie sie etwa Hrn. CLAUSEN mittheilen, zugleich aus obigem Grunde ihn zu ersuchen, sie, falls sie hier als Preisaufgabe gestellt würde, nicht öffentlich zu behandeln. Man soll ein sphärisches rechtwinkliges ungleichschenkliches [Dreieck] angeben, dessen übrige 5 Stücke alle rationale Sinus und Cosinus haben, nach einer Methode, die auch fähig ist, unendlich viele solche $\Delta\Delta$ zu liefern. Eine ganz allgemeine, alle möglichen Beantwortungen direct liefernde Methode wird schwerlich zu erreichen sein[*)].

Übrigens muss der Proponent immer mehrere Aufgaben vorschlagen, in der Regel wenigstens 3, aus denen die übrigen Mitglieder der Facultät eine auswählen. . . .

[3.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 17. April 1849.

. . . .

P. S. Können Sie mir nicht ein oder einige Sujets vorschlagen, die sich zu Preisfragen für Studenten eignen? Es ist wieder die Reihe an mir, nächstens solche vorzulegen und diejenigen, welche mir bisher eingefallen sind, lassen wenig Aussicht, dass sie eine genügende Beantwortung finden würden. Die letzte von mir aufgegebene Frage war die das Pentagon betreffende, für deren Beantwortung WICHMANN den Preis erhielt[**)].

[*) Vergl. weiter unten 1842, Mai 23, 1).]

[**) Vergl. weiter unten 1842, Mai 23, 2).]

[4.]

Von Gauss vorgeschlagene Preisaufgaben.

[Ein Zettel in R Personalia.]

1830, Mai 6.

1. Eruatur criterium generale resolubilitatis trinomii differentialis

$$p\,dx^2 + 2q\,dx\,dy + r\,dy^2$$

in duos factores quorum uterque sit differentiale completum.

2. Gewählt.

[Determinetur inter lineas duo puncta data iungentes ea, quae circa axem datam revoluta gignat superficiem minimam*).]

3. Exponatur indoles curvae, in qua radius curvaturae ubique reciproce proportionalis sit longitudini curvae.

4. Describantur progressus atque status hodiernus cognitionum nostrarum circa stellas periodice variabiles, adiectis earum, quae forte recentioribus temporibus neglectae sunt, observationibus propriis, quatenus nudis oculis institui possunt.

5. Demonstretur per methodos rigorosas atque concinnas aequalitas quae intercedit inter seriem infinitam

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 xx + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 x^3 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^3 x^4 + \text{etc.}$$

atque quadratum seriei infinitae

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 x + \left(\frac{1.5}{4.8}\right)^2 xx + \left(\frac{1.5.9}{4.8.12}\right)^2 x^3 + \left(\frac{1.5.9.13}{4.8.12.16}\right)^2 x^4 + \text{etc.}\,[^{**})].$$

1834, Mai 21.

1. Gewählt.

[Eruantur singulorum quinque corporum regularium momenta inertiae respectu axis cuiuslibet per centrum transeuntis***).]

[*) Nach Vol. 113, 1830, der Akten der Philosophischen Fakultät zu Göttingen, vergl. Göttingische Gelehrte Anzeigen 1830, 106. Stück, 8. Juli, S. 1051. Den Preis erhielt C. W. B. Goldschmidt; die Preisschrift *Determinatio superficiei minimae* etc. ist 1831 in Göttingen gedruckt.]

[**) Vergl. Werke X, 1, S. 273, Fussnote; im art. 9. einer aus der Scheda Ae (1799) abgedruckten Abhandlung, Werke X, 1, S. 191—193, gibt Gauss zwei verschiedene Beweise für die in Rede stehende Reihenidentität.]

[***) Nach Vol. 117, 1833/34 der Fakultätsakten, vergl. Gött. Gel. Anz. 1834, 106. St., 3. Juli, S. 1054. Den Preis erhielt H. W. F. Deahna; die Preisarbeit *Momenta inertiae* etc. wurde 1835 in Göttingen gedruckt.]

2. Enarrentur variae methodi, problema Kepleri solvendi, imprimis per series infinitas, revoceturque gradus convergentiae, quam hae offerunt, ad mensuram accuratam[*)].

3. Dieselbe wie oben [1830,] 3.

1842, Mai 23.

1. Doceantur methodi ad inveniendum quot libuerit triangula sphaerica rectangula talia, quorum latera et anguli habeant sinus et cosinus rationales.

2 Evolvantur proprietates maxime insignes quas sistit tum pentagonum sphaericum cuius singulae quinque diagonales quadranti sunt aequales, tum eiusdem proiectio centralis in planum[**)].

3. (Gleich mit 1830, 4, jetzt so ausgesprochen:)

Delineentur e fontibus progressus atque status hodiernus cognitionum nostrarum circa stellas periodice variabiles.

1849, Mai 6.

1. Evolvantur radices aequationum algebraicarum e ternis terminis constantium, puta quae sunt formae

$$x^{m+n} + ax^m + b = 0,$$

in series infinitas, ita quidem, ut methodus ad omnes radices talium aequationum inveniendas pateat, series semper sint convergentes, et secundum legem perspicuam procedant[***)].

2. wie 1, 1830.

3. Exponatur indoles methodorum praecipuarum ad determinandas orbitas stellarum duplicium circa centrum gravitatis commune hactenus propositarum, adiecto recensu succinto elementorum quae hucusque inde redundaverunt.

[*) Vergl. Werke X 1, S. 445 Fussnote †).]

[**) Wurde gewählt, Vol. 125 für 1841/42 der Fakultätsakten, vergl. Gött. Gel. Anz. 1843, 113. St., 17. Juli, S. 1123; im gedruckten Text heisst es: Ut evolverentur proprietates maxime insignes pentagoni sphaerici, cuius singulae diagonales quadranti aequales sunt, eiusque projectionum in planum tum centralis, tum stereographicae. Den Preis erhielt M. L. G. Wichmann; die Preisarbeit *Proprietates maxime insignes* etc. ist 1843 in Göttingen gedruckt. Zu dem Thema vergl. Werke III, S. 481—490 und VIII, S. 106.]

[***) Gewählt, Vol. 132, 1848/49 der Fakultätsakten, vergl. Nachrichten von der Georg-August-Universität etc. 1849, Nr. 5, Mai 28, S. 67. Den Preis erhielt J. G. Westphal; die Preisarbeit *Evolutio radicum* etc. wurde 1850 in Göttingen gedruckt.]

B. Für die Gesellschaft der Wissenschaften.

[Mehrere Zettel in R Personalia.]

[1.]

Vorschläge von 1819 Oct[ober] 7.

1) Unsre Kenntniss der Lage des Sonnenaequators und der Rotationsperiode der Sonne hat seit geraumer Zeit keine neue Berichtigung erhalten. Obgleich der Umstand, dass manche Sonnenflecken ihren wirklichen Platz auf der Sonnenoberfläche und ihre Gestalt ändern, der Genauigkeit solcher Bestimmungen gewisse Grenzen setzt, so scheint es doch, dass jetzt, bei der Vervollkommnung der Werkzeuge und der Rechnungsmethoden, zuverlässigere Resultate, oder wenigstens bestimmtere Aufklärungen über jene Veränderungen zu erreichen sind. Die königl. Societät setzt daher zur Preisfrage:

> Eine auf neue, hinlänglich genaue und zahlreiche Beobachtungen von Sonnenflecken gegründete und dem gegenwärtigen Zustande des mathematischen Calcüls angemessene Bestimmung der Lage des Aequators und der Rotationszeit der Sonne.

2) Die mathematische Theorie der Abweichung des Loths von der senkrechten Lage, wenn das Gewicht nur zum Theil in eine in ein Gefäss eingeschlossene Flüssigkeit eingetaucht ist.

3) Eine Hauptbedingung bei Entwerfung der Charten ist, dass das Bild *in den kleinsten Theilen* der abgebildeten Fläche ähnlich sei. Bei der Darstellung von Theilen der Kugelfläche auf einer Ebene thun bekanntlich die stereographische und die Mercatorsche Projection dieser Bedingung Genüge, auch ist *für diesen Fall* die allgemeine Auflösung, welche diese beiden Projectionsarten mit unter sich begreift, längst bekannt. Die königl. Societät wünscht diese Aufgabe zur höchsten Allgemeinheit gebracht zu sehen, indem sie verlangt:

> die allgemeine Auflösung der Aufgabe, eine gegebene Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich sei, so dass jede Art, dieser Bedingung Genüge zu leisten, unter der Auflösung begriffen sei[*)].

4) Gewählt. [Siehe Werke XI 1, S. 405.]

[2.]

Gauss an Olbers. Göttingen, 31. Januar 1829.

[W. Olbers, *Sein Leben und seine Werke*, Bd. II, 2, S. 516—520.]

. . . .

[**)] Die im November v[origen] J[ahres] von hiesiger Societät aufgegebene Preisfrage[***)] ist von Harding. Allerdings war an ihm die Reihe; allein so wie er seit seiner Aufnahme in die Societät sich nie als Mitglied gerirt hat, so war er auch, so oft sonst die Reihe, Preisfragen vorzuschlagen, an ihm gewesen wäre, von der Zumuthung frei geblieben. Allein diesmahl bestand Blumenbach darauf, und da H[arding] sich dadurch in grosse Verlegenheit gesetzt fand, u[nd] mich dringend bat, ihm Fragen anzugeben, so habe ich ihm bloss solche an die Hand geben können, die von seinen eignen Beschäftigungen nicht zu entfernt zu liegen schienen. Auch hat er das Verdienst der Einkleidung ganz allein. Es ist mir jetzt lieb, dass es so gekommen ist; wäre es mir wieder zugeschoben, so hätte ich unter andern gerade die Fragen der Capillaraction betreffend mit vorgeschlagen, zu deren eigner Bearbeitung ich nun freie Hände behalten habe. Die Reihe des Aufgebens wird nun erst 1831 an mich kommen, wenn ich nicht früher dahin abberufen werde, wo höhere Fragen gelöset werden.

. . . .

[*) Vergl. den Brief von Gauss an Schumacher vom 5. Juli 1816, Werke VIII, S. 370 (auch IX, S. 345). Die Bemerkung von Gauss] »Bei der hiesigen [Societät] kommt die Reihe des Aufgebens [von Preisfragen] nur alle 12 Jahre an mich« [bestätigt sich; er hat 1819, 1831, 1843 und 1854 Aufgaben gestellt. Eine Lösung der Aufgabe 3) enthält die Kopenhagener Preisschrift von Gauss, Werke IV, S. 189—216.]

[**) Die der nachfolgend wiedergegebenen Stelle unmittelbar vorangehenden Teile dieses Briefes sind Werke XI, 1, S. 20—22 abgedruckt.]

[***) Siehe Göttingische Gelehrte Anzeigen 189. Stück vom 24. November 1828, S. 1886—7; der dort befindliche Text der »Preisfrage für den November 1829 von der mathematischen Classe« stimmt wörtlich mit dem Werke XI, 1, S. 168 abgedruckten Wortlaut der für November 1831 gestellten Aufgabe überein.]

[3.]

[Der Text der Aufgabe, auf deren Beantwortung für den November 1831 der »Hauptpreis« gesetzt war, und das Urteil über die eingegangenen beiden Bewerbungsschriften ist abgedruckt Werke XI, 1, S. 168—170.]

[4.]

Gauss an W. v. Struve (Pulkowa). Göttingen, 14. August 1843.

Hochverehrter Freund,

. . . .

Der Umstand, dass Sie von einer Anzahl junger rüstiger unterrichteter und geschickter Astronomen umgeben sind, veranlasst mich, noch einen Gegenstand vertraulich gegen Sie zu berühren. Die Preisfragen, welche die gelehrten Gesellschaften aufgeben, besonders aus den exacten Wissenschaften, finden nicht oft eine genügende Beantwortung, häufig gar keine. Auch bei unserer Societät ist dies oft der Fall gewesen[*)]. Die Preise sind in der That nicht erheblich genug, als dass sie zur Unternehmung einer viel Arbeit kostenden Untersuchung sonderlich anreizen könnten, zu der man nicht schon vorher, ehe sie zur Preisfrage gestellt war, sich hingezogen fühlte. Wo aber eine solche specielle Hinneigung zu einer bestimmten Untersuchung sich schon vorher vorfindet, kann wohl eine Preisaufgabe den Ausschlag geben.

Es würde mir sehr angenehm sein, wenn auf diese Weise die von der mathem[atischen] Classe der hiesigen Societät in Kurzem zu stellende Preisfrage irgend eine der Astronomie wichtige Arbeit befördern könnte. Sollten Sie mir also einen oder einige passende Gegenstände vorschlagen können, von denen Sie Ursache hätten anzunehmen, dass einer Ihrer jüngern Astronomen sie mit Liebe zu bearbeiten geneigt wäre, so würde ich solche bei den der Societät demnächst zu machenden Vorschlägen mit Vergnügen berücksichtigen. Es versteht sich von selbst, dass Sie mir bloss die Sujets, nicht aber die Astronomen nennen, von denen Sie praesumiren, dass sie sich einlassen würden. Doch möchte ich wünschen, Ihre etwaigen Winke bald zu erhalten. . . . .

[*) In der Handschrift steht »gegeben«.]

Genehmigen Sie die Bezeugung der unwandelbaren freundschaftlichen Ergebenheit

Göttingen, 14. August 1843. Ihres C. F. Gauss.

[5.]

November 1843.

1) Die Lehre von dem Gleichgewicht und den schwingenden Bewegungen schwimmender Körper sind zwar von Geometern ersten Ranges so ausgebildet, dass in mathematischer Beziehung wenig zu wünschen übrig bleibt: aber die feinern theoretischen Untersuchungen sind bisher für die Ausübung wenig fruchtbar gewesen. Zur Vermittlung einer engern Verbindung zwischen Theorie und Praxis würden zunächst Methoden wünschenswerth sein, nach welchen für die einfachen Oscillationen schwimmender Körper von kleinen und grossen Dimensionen die Dauer und die Weite der Schwingungen durch Versuche mit einer ähnlichen Schärfe bestimmt werden könnten, wie für andere Arten von Schwingungen erreichbar ist. Die königl. Societät stellt daher als Gegenstand einer Preisfrage, die Angabe dazu dienlicher Methoden, die Bewährung ihrer Brauchbarkeit durch angemessen sorgfältige und zahlreiche Versuche, namentlich auch an Schiffen in stillem Wasser, verbunden mit der Entwicklung der Art, wie solche Versuche zur genauern Bestimmung derjenigen Umstände benutzt werden können, von welchen die Stabilität schwimmender Körper abhängt.

2) Unter den Methoden, den genäherten Werth eines einfachen Integrals zwischen gegebenen Grenzwerthen der Veränderlichen zu bestimmen, oder was dasselbe ist, eine krummlinige Figur zu quadriren, zeichnen sich durch Bequemlichkeit und Schärfe besonders zwei aus: die vermittelst der sogenannten Cotesischen Quadraturcoefficienten, und die ihr verwandte, im dritten Bande der Commentationes recentiores der königl. Societät entwickelte[*)]. Es wird verlangt, für die genäherte Bestimmung doppelter Integrale, oder für die Cubatur, Methoden anzugeben, welche jenen analog sind[**)].

[*) *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, Werke IV, S. 163—196.]
[**) Anscheinend wurde keine von diesen beiden Aufgaben gewählt.]

[6.]

[Für November 1855.]

[1)] Obgleich wir über den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität fester Körper einige auf Schallschwingungen beruhende Versuche besitzen, so bleibt hier doch ein weites Feld für die Forschungen übrig. Die königl. Societät wünscht daher, dass dieser Gegenstand auch auf andern Wegen sorgfältig bearbeitet werde, namentlich bei festen Körpern im Zustande der Biegung und der Torsion durch Methoden, welche die Veränderungen der Elasticitätscoefficienten bei veränderten Temperaturen mit grosser Schärfe erkennen lassen. Die Versuche sollen nicht über den Zust[and] der vollk[ommenen] Elastic[ität] hinausgehen, allein sie müssen zahlreich und mannigfaltig genug sein, dass über das gleichmässige Fortschreiten der Werthe des Elasticitätscoefficienten mit der Temperatur, und über den Grad der Zuverlässigkeit der Resultate mit Bestimmtheit geurtheilt werden könne. Endlich wird gewünscht, dass ausser den einer vollkommenen Elasticität fähigen Metallen auch das Glas den geeigneten Versuchen unterworfen werde.

[2)] Die königl. Soc[ietät] wünscht neue Versuche über die Menge des von ebenen, gut polirten Flächen fester Körper und von der Oberfläche flüssiger, zurückgeworfenen Lichts, im gleichen über die Menge des durch durchsichtige Körper durchgehenden Lichts. Die Versuche haben sich auf unpolarisirtes Licht zu beschränken; es wird aber erwartet, dass sie mit derjenigen Sorgfalt, und in so grosser Mannigfaltigkeit (rücksichtlich der verschiedenen anzuwendenden Körper) und zahlreicher Wiederholung angestellt werden, wie gegenwärtig von allen Versuchen über quantitative, zu einem Abschluss zu bringende Verhältnisse gefordert werden.

BEMERKUNGEN.

Von den beiden vorstehenden Aufgaben, die GAUSS für 1855 vorgeschlagen hatte, wurde die erste gewählt; siehe Nachrichten von der Georg-August-Universität und der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1854, Nr. 14, S. 207, wo der deutsche Text der Aufgabe, von dem obigen etwas abweichend, wie folgt lautet:

Für die nächsten Jahre sind von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften folgende Preisfragen bestimmt:

Für den November 1855 von der mathematischen Classe:

Obgleich wir über den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität fester Körper einige auf Schallschwingungen beruhende Versuche besitzen, so bleibt hier doch noch ein weites Feld für die Forschung übrig. Die Königliche Societät wünscht daher, dass dieser Gegenstand auch auf andern Wegen sorgfältig bearbeitet werde, namentlich bei festen Körpern im Zustande der Biegung und der Torsion, durch Anwendung von Methoden, welche die Veränderungen der Elasticität bei veränderten Temperaturen mit grosser Schärfe erkennen lassen. Die Versuche dürfen nicht über die Grenzen der Elasticität hinausgehen, müssen aber zahlreich und mannigfaltig genug sein, um über das gleichmässige Fortschreiten der Werthe des Elasticitätscoefficienten mit der Temperatur, und über den Grad der in den Resultaten erreichten Zuverlässigkeit ein bestimmtes Urtheil zu begründen. Es wird gewünscht, dass ausser den einer vollkommenen Elasticität fähigen Metallen auch das Glas den geeigneten Versuchen unterzogen werde. . . . .

Die Preisaufgabe wurde gelöst von A. TH. KUPFFER, dessen mit dem Preise gekrönte Arbeit unter dem Titel: *Über den Einfluss der Wärme auf die elastische Kraft der festen Körper und insbesondere der Metalle* (lu le 3 déc. 1852) in den Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg, Sciences math. et phys. 6. Sér. t. VI, 1857, S. 399—494 erschienen ist. KUPFFER hatte schon früher über diesen Gegenstand gearbeitet. So befindet sich eine Note *Recherches expérimentales relatives à l'élasticité des métaux* par A. T. KUPFFER (lu le 1 déc. 1848) aus dem t. VII, No. 19 des Bulletin de la Classe physico-mathém. der Petersburger Akademie im Nachlass von GAUSS und dieser Note sind beigelegt 13 von GAUSS' Hand geschriebene Kleinoktavseiten »Notate zu der Preisschrift«; auf der 14. Seite heisst es:

»KUPF[F]ERS Endresultat: Die Nachwirkung nimmt immer mit der Temperaturerhöhung zu; nach vorübergehender Erhitzung findet sich gewöhnlich die Nachwirkung vermindert, wenn die Glühhitze nicht erreicht ist; sonst bei wenigen Metallen vermehrt«.

Man vergl. auch den Werke XI, 1, S. 48 abgedruckten Brief von GAUSS an OLBERS.

SCHLESINGER.