

桑本文庫

洋書

0355

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ELFTEN BANDES ZWEITE ABTEILUNG

ABHANDLUNG 3

HERAUSGEGEBEN

VON DER

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN

1929



桑木文庫

洋書

0355

九州帝國大學理學部

8315

物理學教室

物理

08

G

2.13

九州帝國大學工學部

808699

1929年10月1日

數學物理學教室

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND XI 2.

理學部 洋書及

022232002005457



九州大學藏書



CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ELFTEN BANDES ZWEITE ABTEILUNG.



HERAUSGEGEBEN

VON DER

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

1924—1929.



BEMERKUNGEN ZUR ZWEITEN ABTEILUNG DES ELFTEN BANDES.

Der lange gehegte Plan einer wissenschaftlichen Biographie von GAUSS gewann um das Jahr 1910 feste Gestalt, indem (vergl. den 9. Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen 1911, 1. Heft) beschlossen wurde, »monographische Darstellungen der wissenschaftlichen Lebensarbeit von GAUSS auf den einzelnen Gebieten« (sogenannte Essays) abfassen zu lassen. Diese sollten »nach der auch sonst bei der Herausgabe der Werke und bei der Anordnung des Archivs gewählten Reihenfolge: Arithmetik, Analysis, Geometrie, Geodäsie, Physik, Astronomie« geordnet, vorerst (vergl. den 10. Bericht, Nachrichten usw. 1913) einzeln, jeweils nach Fertigstellung, im Buchhandel ausgegeben, dann aber in den zweiten Abteilungen der Bände X und XI der Werke gesammelt werden, so zwar, dass der Band X, 2 die auf die Reine Mathematik bezüglichen, der Band XI, 2 die auf die Anwendungsgebiete bezüglichen Essays enthält. — Es liegt in der Natur von GAUSS' wissenschaftlicher Produktion, dass eine scharfe Scheidung dessen, was zu X, 2 und was zu XI, 2 gehören sollte, nicht möglich ist; wir haben die auf Geodäsie, Physik (insbesondere Magnetismus, Elektrodynamik und Optik) und Astronomie (praktische und theoretische) bezüglichen Essays zu dem vorliegenden Bande XI, 2 vereinigt und bemerken, dass die Essays, die die Gebiete der Mechanik fester und flüssiger Körper und die Potentialtheorie einerseits, das numerische Rechnen und die Chronologie andererseits behandeln, für den Band X, 2 vorbehalten bleiben.

Die hier zusammengefassten drei Essays sind einzeln paginiert und bilden, besonders soweit sie eine Darstellung der nur im Nachlass und Briefwechsel niedergelegten Untersuchungen zu geben suchen, eine unentbehrliche Ergänzung der in den Bänden V, VII, IX, XI, 1 veröffentlichten, zum Teil sehr fragmentarischen Nachlassstücke und der zugehörigen Bemerkungen der Bearbeiter. —

Die Redaktion lag in den Händen der Unterzeichneten.

M. BRENDL. I. SCHLESINGER.



INHALT.

GAUSS WERKE BAND XII,

ABHANDLUNGEN

ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN
GEBIETEN DER GEODÄSIE, PHYSIK UND ASTRONOMIE.

Abhandlung 1: Über die geodätischen Arbeiten von GAUSS. Von A. GALLE	S. 1—165
Abhandlung 2: Über GAUSS' physikalische Arbeiten (Magnetismus, Elektrodynamik, Optik). Von CLEMENS SCHAEFER	S. 1—217
Abhandlung 3: Über die astronomischen Arbeiten von GAUSS. Von MARTIN BRENDEL	S. 1—258
Bemerkungen zu Band XI, 2	S. 259

ÜBER DIE
ASTRONOMISCHEN ARBEITEN VON GAUSS

VON

MARTIN BRENDEL



Erster Abschnitt.

Praktische und sphärische Astronomie.

Einleitung.

Aus den Gebieten der praktischen und der sphärischen Astronomie hat GAUSS keine so umfassenden Werke veröffentlicht wie auf anderen Gebieten. Er hat ausser den beiden im Jahre 1808 erschienenen Abhandlungen »*Methodus peculiaris elevationem poli determinandi*»¹⁾ und »*Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie*»²⁾ eine Reihe von Hilfstafeln herausgegeben, nämlich »*Allgemeine Tafeln für Aberration und Nutation*» (1808)³⁾, »*Tafeln für die Mittags-Verbesserung*» (1811)⁴⁾, »*Tafel für die Sonnen-Coordinationen*» (1812)⁵⁾, »*Refractionstafeln*» (1822)⁶⁾. Hierzu gesellen sich viele kleinere Aufsätze und Mitteilungen, sowie Beobachtungen und Berechnungen von Planeten, Kometen, Sternbedeckungen u. a. m.

Fertig durchgeführte Untersuchungen mit seinen Fundamentalinstrumenten, im besonderen dem REICHENBACHSchen Borda-Kreise, dem REPSOLDSchen Meridiankreise, dem REICHENBACHSchen Passageninstrument und dem REICHENBACHSchen Meridiankreise, wie er sie anfangs geplant hatte, besitzen wir nicht, wohl aber sehr eingehende Beschreibungen dieser Instrumente und Berichte über die bei ihnen angewandten Beobachtungsmethoden⁷⁾. Dass die Unter-

1) Werke VI, S. 37—49.

2) Ebendort, S. 129—140.

3) Ebendort, S. 123—128.

4) Ebendort, S. 166—171.

5) Ebendort, S. 172—180.

6) Ebendort, S. 185—190.

7) Vergl. insbesondere Werke VI, S. 404 (BORDAIScher Kreis), S. 410 (REPSOLDScher Meridiankreis), S. 422 f. (REICHENBACHSches Passageninstrument), S. 429 f. (REICHENBACHScher Meridiankreis), S. 472 (Nadirbeobachtungen).



suchungen nicht zum Abschluss gelangten, erklärt sich aus der vielseitigen und häufig zersplitterten Tätigkeit nach Übernahme der Leitung der Göttinger Sternwarte, über die GAUSS selbst so häufig klagte und die so viele seiner wissenschaftlichen Pläne nicht zur Durchführung gelangen liess.

Man wird den Wert der GAUSSschen Arbeiten besonders auf diesen Gebieten nach dem bekannten von ihm selbst aufgestellten Grundsatz »Pauca sed matura« nicht nach der absoluten Anzahl der veröffentlichten Beobachtungen einschätzen. Wie überall, so sehen wir auch hier den Schöpfer neuer Methoden, ebenso wie den tief eindringenden Kritiker, der allem die grösstmögliche Schärfe und Vollendung zu geben bestrebt ist.

Die Anzahl der tatsächlich von GAUSS angestellten Beobachtungen ist keineswegs gering; sie dienten aber in erster Linie den genannten Zwecken, neue Methoden zu schaffen und grösste Schärfe zu erreichen, und sind zum weitaus grössten Teile nicht zur Veröffentlichung gelangt. Er traf hier mit BESSEL zusammen. In jener Zeit, wo sich das Bedürfnis nach Fundamentalbeobachtungen zur genaueren Bestimmung der Konstanten der Präzession, Nutation, Aberration und anderer Grössen stark fühlbar machte, setzte man grosse Hoffnungen auf die gleichzeitigen Arbeiten von GAUSS und BESSEL. Der letztere hatte in seiner Bearbeitung der BRADLEYSchen Beobachtungen zuerst gezeigt, wie die astronomische Beobachtungskunst verfeinert und vervollkommen werden könne, und man sah besonders im Zusammentreffen beider Gelehrten eine neue Zeit für die beobachtende Astronomie herannahen. Indessen blieb es doch BESSEL fast allein vorbehalten, die Grundlagen für eine auf höherer Stufe stehende Beobachtungskunst zu schaffen. GAUSS' Teilnahme daran wurde kurz nach ihrem Beginn durch die Übernahme anderer grosser Arbeiten fast plötzlich abgebrochen und seine nicht unbeträchtlichen bis dahin geleisteten Beiträge gelangten nicht zur Weiterführung und noch weniger zur Veröffentlichung. Ein Teil dieser von GAUSS angestellten Beobachtungen ist aus dem Nachlass im Band XI, 1 der Werke abgedruckt. Andererseits liegt der Schwerpunkt von GAUSS' praktischer und Beobachtungstätigkeit nicht auf astronomischem, sondern auf verwandten Gebieten; man braucht nur an seine dioptrischen Untersuchungen, an die Erfindung des Heliotrops, an seine ausgedehnten geodätischen Messungen und seine magnetischen Untersuchungen und Beobachtungen zu denken. Es darf nicht verwundern, dass praktische Beschäftigungen dieser Art, durch

die der Wissenschaft neue Wege eröffnet wurden, mehr Anziehungskraft auf ihn ausübten als das Sammeln langer Beobachtungsreihen; auch blieb bei der gewaltigen Fruchtbarkeit an neuen Gedanken für dieses Sammeln keine Gelegenheit übrig. Dass GAUSS an sich vor langen mühsamen praktischen Arbeiten nicht zurückschreckte, wird schon dadurch bewiesen, dass er einen fast zu grossen Teil seiner Zeit auf die Ausgleichungen zur Hannoverschen Landesvermessung, auf die Prüfung der Hannoverschen Normalmasse und -gewichte und andere ähnliche Aufgaben verwandte.

Man wird nach dem Grunde fragen, warum GAUSS, dessen Hauptneigung doch zunächst den tiefsten Problemen der reinen Mathematik galt, schliesslich in seiner öffentlichen Stellung Astronom geworden ist. Die Antwort wird in Anbetracht der äusseren Umstände nicht eben schwer fallen. Er war mittellos und musste an die Zukunft denken. Dem reinen Mathematiker stand nur der Beruf eines Lehrers entweder an der Schule oder an der Universität offen, und es ist sehr bekannt, dass GAUSS von Jugend auf bis in sein hohes Alter einen Widerwillen gegen das Unterrichten empfand, den er nicht überwinden konnte, und den zu verbergen er sich niemals Mühe gegeben hat. Als er die Universität Göttingen im Herbst 1795 bezog, soll er noch unschlüssig gewesen sein, ob er Philologie oder Mathematik studieren solle. Wenn er auch als Schüler schon eine hohe Begabung beim Studium der alten Sprachen zeigte und sich sein ganzes Leben lang gern mit den lebenden Sprachen beschäftigte, so darf man doch wohl annehmen, dass der Gedanke, Philologie zu studieren, nur mit Rücksicht auf seine spätere Versorgung von ihm gefasst worden war. Sicher dachte er daran, sich eine auskömmliche Lebensstellung zu verschaffen, in der er auch seine mathematischen Untersuchungen entsprechend seinen Neigungen ausführen konnte. Nun führte ihn die Mathematik an sich zu den angewandten Gebieten, im besonderen zur Astronomie, und es mag damals die Aussicht auf ein Vorwärtkommen als Astronom, ohne gleichzeitig unterrichten zu müssen, nicht ungünstig gewesen sein.

In dem Briefwechsel mit v. ZACH¹⁾ aus GAUSS' Braunschweiger Zeit²⁾ 1799

¹⁾ FRANZ XAVER FREIHERR V. ZACH, der bekannte und einflussreiche Direktor der Seeberger Sternwarte, Herausgeber der Allgemeinen Geographischen Ephemeriden, der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde und der Correspondance astronomique. — Von dem Briefwechsel sind nur die Briefe von ZACH an GAUSS im GAUSSarchiv erhalten.

²⁾ Siehe weiter unten, im besonderen S. 15.



bis 1804 und in gleichzeitigen Briefen an **OLBERS** spiegeln sich die Überlegungen und Gedanken über die Ergreifung der astronomischen Laufbahn deutlich wieder, bis durch **GAUSS'** Berufung nach Göttingen 1807 die Entscheidung fiel. Dass er so die Leitung einer Sternwarte übernahm, bei der er doch nicht ganz frei davon war, unterrichten zu müssen, brachten die Umstände mit sich.

Es waren, besonders in **GAUSS'** späterem Alter, freilich nicht die Unterrichts-pflichten allein, die ihm die Musse zum wissenschaftlichen Arbeiten raubten, obwohl er sich über diese Pflichten ständig beklagte. Vielmehr wurde seine Zeit eben durch die oben erwähnten anderen Beschäftigungen in Anspruch genommen, die freilich wegen ihrer wissenschaftlichen Eigenart für ihn anziehender waren als das Abhalten elementarer Vorlesungen. Durch die Briefwechsel mit **OLBERS**, **BESSEL** und **SCHUMACHER** ziehen sich häufige Klagen über die Art seiner Beschäftigung und über die Last der ihm auferlegten¹ Geschäfte.

Die mehrfach an ihn herangetretenen Anerbietungen, im besonderen aus Petersburg 1802—1804, aus Hamburg 1821 und aus Berlin 1822—1825, betrachtete er wohl immer aus dem Gesichtspunkt, möglichst Freiheit für wissenschaftliche Arbeiten zu erlangen. Noch in späterer Zeit² klagt der 62-jährige über die Beschränkung seiner Zeit, die ihn fast garnicht an wissenschaftliche Arbeiten denken lässt. Es finden sich auch Andeutungen³, dass er, allerdings wohl hauptsächlich durch die Amtsentsetzung der Göttinger sieben Professoren und den bevorstehenden Fortgang **WILHELM WEBERS** veranlasst, mit dem Gedanken umging, »für den letzten Teil seines Lebens eine unabhängige Stellung zu suchen und zu dem Zweck seinen Aufenthalt in einem Lande zu nehmen, wo man dieselbe mit mässigen Vermögensmitteln behaupten kann.« Zeitungsnotizen hatten berichtet, dass **GAUSS** beabsichtige, nach Paris überzusiedeln; indessen war das Gerücht nur daraus entstanden, dass er einen vorübergehenden Aufenthalt dort plante³.

Im Rahmen dieses Aufsatzes ergeben sich mehrere Perioden von **GAUSS'**

1) Brief an **OLBERS** vom 14. Mai 1839.

2) Brief an **OLBERS** vom 16. Januar 1838.

3) Vergl. den Brief von **OLBERS** an **GAUSS** vom 8. Januar 1838 und den vorerwähnten, sowie den an **OLBERS** vom 4. März 1838.

praktisch-astronomischer Tätigkeit, die sich freilich nicht immer scharf von einander scheiden lassen.

1. Braunschweiger Periode bis zur Übersiedelung nach Göttingen (1807); einzelne Beobachtungen von Planeten, Kometen u. a.

2. Göttinger Periode bis zum Eintreffen des **REICHENBACHS**chen **BORDA**-kreises (1813); Beobachtungen am Mauerquadranten und Kreismikrometerbeobachtungen auf der alten Sternwarte.

3. Beobachtungen mit dem **BORDA**kreise bis zur Fertigstellung der neuen Sternwarte (1813—1816); Untersuchungen über die Polhöhe und über die Schiefe der Ekliptik; erste Beobachtungen mit dem Heliometer.

4. Beobachtungen auf der neuen Sternwarte, insbesondere Fortsetzung der Beobachtungen mit dem **BORDA**kreise bis zum Eintreffen des **REPSOLDS**chen Meridiankreises (1817—1818).

5. Beobachtungen am **REPSOLDS**chen Kreise bis zum Eintreffen des **REICHENBACHS**chen Passageninstruments und des **REICHENBACHS**chen Meridiankreises (1818).

6. Untersuchungen mit den **REICHENBACHS**chen Instrumenten; Beobachtungen von Fundamentalsternen u. a. (1818—1820).

7. Periode mit geringerer astronomischer Tätigkeit; Hannoversche Landesvermessung, erdmagnetische und andere physikalische Untersuchungen (seit 1820).

1. Die Braunschweiger Periode (bis 1807).

Während seiner Göttinger Studienzeit (1795—1798) begann **GAUSS** sich mit dem Studium der Astronomie zu beschäftigen, wozu er bei **SEYFFER** Vorlesungen gehört zu haben scheint; die mathematischen Vorlesungen von **KÄSTNER** zogen ihn wenig an, und wenn auch **SEYFFER** ihm hierfür keinen Ersatz bieten konnte, so trat er doch mit diesem in engere persönliche Beziehung¹). In dem Briefe an **OLBERS** vom 18. November 1802 schreibt er:

1) In dem Briefwechsel zwischen **GAUSS** und **WOLFGANG BOLYAI** aus der Zeit (1798—1799), als **GAUSS** bereits wieder in Braunschweig, **BOLYAI** aber noch in Göttingen war, kehrt der Name **SEYFFERS** öfter wieder, teils indem **BOLYAI** an **GAUSS** über ihn berichtet, teils dadurch, dass **GAUSS** Grüsse an **SEYFFER** bestellen lässt. So heisst es z. B. in einem Briefe von **GAUSS** an **BOLYAI** vom 22. April 1799 (*Briefwechsel Gauss-Bolyai*, Leipzig 1899, S. 22): »Einliegender Brief (er ist bloss astronomischen Inhalts) wirst Du die Güte haben, an Hrn. **SEYFFER** zu besorgen und mich ihm zu empfehlen«.



»Mündliche Anweisung zum Beobachten habe ich bisher gar keine gehabt, obgleich Herr SEYFFER mich einmal seinen Schüler genannt hat; alle meine bisherigen Übungen schränken sich auf einige Beobachtungen am Mauerquadranten und mit dem Spiegelsextanten ein. Mein Gesicht ist ziemlich scharf, aber sehr kurzsichtig.« Dass GAUSS in Göttingen sich an astronomischen Beobachtungen beteiligte, geht auch aus einem Brief an ZIMMERMANN vom 24. Dezember 1797, der sich nebst anderen Briefen im Braunschweiger Landeshauptarchiv befindet, hervor, in dem er sagt, dass er in Folge einer Erkrankung die Beobachtung der letzten Mondfinsternis habe versäumen müssen. Aus den Akten der Göttinger Universitäts-Bibliothek hat sich, wenigstens teilweise, feststellen lassen, welche Bücher er während seiner Studienzeit aus der Bibliothek entliehen hat. Darunter befinden sich ausser verschiedenen akademischen Schriften:

LALANDE, *Astronomie* (im November 1795);
SÉJOUR, *Traité analytique des mouvements célestes*;
Sammlung astronomischer Tafeln der Berliner Akademie;
HELL, *Ephemeriden für 1796*;
COUSIN, *Introduction à l'Astronomie physique*;
Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1788—89, 1791—94, 1799.

In den Jahren 1798—1801 unternahm der Kgl. Preuss. Oberst und Generalquartiermeister bei der Neutralitätsarmee von LECOQ eine trigonometrische Aufnahme in Westfalen, über die er in der Monatlichen Correspondenz¹⁾ berichtet. Er sagt dort (Seite 139): »Im astronomischen Teil ist mir der Dr. GAUSS von grossem Nutzen gewesen. Seine Ausrechnungen und Briefe haben zu meinem Unterrichts viel beigetragen und ich zolle ihm gern hier meinen Dank²⁾.« LECOQ hat sich auf ZACHS Rat vornehmlich des Spiegelsextanten bedient und

1) M.C. VIII (1802), Seite 136 ff. und ebendort an anderen Stellen.

2) Von den Briefen von GAUSS an LECOQ haben sich bisher vier auffinden lassen, nämlich

Brief vom 17. April 1799 (Autographensammlung DARMSTÄDTER der Staatsbibliothek in Berlin)

Brief vom 24.—27. April 1799 (Professor Dr. STEINACKER, Braunschweig)

Brief vom 4. September 1800 (Reichsamt für Landesaufnahme)

Brief vom 25. September 1800 (Reichsamt für Landesaufnahme).

Von diesen befinden sich photographische Nachbildungen im GAUSSARCHIV; der erste ist Werke X, 1, Seite 540, 541 im Auszug wiedergegeben. Die Briefe von LECOQ an GAUSS sind im GAUSSARCHIV vorhanden und scheinen vollständig zu sein.

damit ausser den Dreieckswinkeln auch die Polhöhe mehrerer Orte astronomisch bestimmt, sowie einige Mondstrecken und Sternbedeckungen zur Bestimmung von Längendifferenzen beobachtet¹⁾. Im Dezember 1798 beobachtete er in Braunschweig, »mehr um Gelegenheit zu haben, sich in diesen Berechnungen zu üben, als in der Meinung, Braunschweig besser zu bestimmen als es schon ist«, wie er an GAUSS am 3. Februar 1799 aus Minden schrieb. Bei dieser Gelegenheit wurde er wahrscheinlich durch ZIMMERMANN mit GAUSS bekannt gemacht, von dem er sich in manchen Fragen helfen und raten liess. Auch schrieb GAUSS an SEYFFER, um sich die nötigen Daten aus dem Nautical Almanach zur Berechnung der LECOQschen Beobachtungen schicken zu lassen und vermittelte so die Verbindung zwischen LECOQ und Jenem. SEYFFER beteiligte sich ebenfalls an den Berechnungen und zog seine Göttinger Beobachtungen von Sternbedeckungen zu den Längenbestimmungen hinzu. Da GAUSS versprochen hatte, LECOQ bei den weiteren Berechnungen der Beobachtungen zu helfen, so fand er hier Gelegenheit, mit der praktischen Astronomie, wenn auch nur mit elementaren Aufgaben, in Verbindung zu bleiben, ohne jedoch selbst beobachten zu können, da er keine Instrumente hatte. Er fand hierbei Gelegenheit, sich die strengen Formeln für die Mondparallaxe abzuleiten, die er in der Tagebuchnotiz Nr. 97 (vergl. Werke XI, 1, S. 539) erwähnt.

LECOQ scheint es gewesen zu sein, der GAUSS' Bekanntschaft mit ZACH vermittelte. Er schreibt an GAUSS am 13. April 1799: »sowohl für Euer Wohlgebornen als für den Herrn v. ZACH freut es mich, dass ich etwas beigetragen habe, Ihre Bekanntschaft zu befördern. Hätten Sie nur einen guten Sextanten und eine Pendeluhr, so würden Sie in Braunschweig Beobachtungen machen können, da meines Wissens ein schönes Teleskop auf dem Carolino vorhanden ist, mit dem Sie den Übergang des Merkur beobachten könnten« (vergl. unten Seite 31).

Am 29. April 1799 schreibt LECOQ sodann an GAUSS: »Ich freue mich, dass Sie den Vorsatz gefasst und dazu die Erlaubnis Ihres Landesherrn schon haben, nach Gotha zu reisen«. GAUSS hatte in dieser Zeit bei ZACH ange-

1) Vergl. v. ZACH, *Allgemeine Geographische Ephemeriden*, Band III (1799), Seite 201 f., an welcher Stelle LECOQ in einem Briefe aus Braunschweig über seine ersten Beobachtungen mit dem Sextanten an ZACH berichtet; diese betrafen die Bestimmung der Polhöhe von Minden.



fragt, ob er bei ihm sich in der praktischen Astronomie üben könne, und LECOQ scheint sich auch hierin, wie aus seinen Briefen an GAUSS hervorgeht, bei ZACH für ihn verwandt zu haben. GAUSS wartete lange auf Antwort von ZACH¹⁾; endlich am 24. September 1799 antwortete dieser:

»Recht inständigst muss ich Ew. Wohlgebohren um Vergebung bitten, dass ich auf mehrere Ihrer verehrtesten Briefe nicht geantwortet und für die mir gütigst kommunizierten Schriften meinen ergebensten Dank nicht abgestattet habe. Allein wenn Sie, bester Herr Doktor, meine Lage kennen, gewiss, Sie würden mir mehr als verzeihen, — mich recht sehr beklagen —. Meine ganz zerrüttete und zerstörte Gesundheit, die ich seit meiner letzten schweren Krankheit nicht wieder hergestellt habe, der Umstand, dass ich Ihnen eine weitläufige detaillierte Antwort auf alle Ihre Briefe schreiben wollte, waren die Ursachen, dass ich dieses von einem Tag zum anderen verschob. Notgedrungen kann ich jetzo nur in Eile die Ehre haben, Ihnen auf den vorzüglichsten Punkt Ihres Schreibens zu antworten. — Es tut mir herzlich leid, dass ich Ewr. Wohlgeboren erklären muss, dass ich aus mehr als einer Ursache, welche alle herzusetzen zu weitläufig wäre, Ihrem Gesuche, sich bei mir auf der Seeberger Sternwarte aufzuhalten, unmöglich willfahren kann. Ich kann und darf künftighin niemanden mehr zu mir auf die Sternwarte nehmen. Teils erlaubt mir meine stets kränkelnde Gesundheit diese Unbequemlichkeit nicht mehr; ich habe sie mehrere Jahre lang nur zu sehr und zu drückend gefühlt; meine Denkungsart erlaubt mir nicht, Kostgänger bei mir aufzunehmen, ich kann unmöglich einen Gasthof aus meinem Hause machen; NIEUWLAND, CALKOE, BOHNENBERGER, CAMERER, BURCKHARDT, HORNER u. a. m. haben alle gratis bei mir gewohnt und alle meine Bequemlichkeiten des Lebens unentgeltlich mit mir geteilt. Meine jetzige Lebensart und Einrichtung meines Hauswesens ist nun so, dass ich niemanden mehr bei mir aufnehmen kann. Allein diese ist nicht die einzige und bei weitem nicht

¹⁾ Zur Charakteristik dieses Mannes mag folgende Stelle aus dem Briefe von LECOQ an GAUSS vom 17. Mai 1799 angeführt werden: »Wundern Sie sich nicht über Herrn v. ZACHS Stillschweigen; dieser äusserst dienstfertige Mann, mit der Delicatesse des feinsten Gefühls versehen, ist mit Geschäften überhäuft und hat, wie Sie wissen, eine ausgebreitete Korrespondenz. Er schreibt daher nicht oft, aber dann auch desto längere Briefe. Ich schreibe ihm gewiss 3 oder 4 mal für eine Antwort von ihm, die aber dann meistens 3 Bogen stark ist und oft eine Abhandlung enthält.«

die Hauptursache dieser Verfügung. Seitdem meine zu grosse Gefälligkeit zu sehr gemissbraucht worden, einige Unglücksfälle vorgefallen, Instrumente beschädigt und erst kürzlich ein namhafter und unersetzlicher Schaden durch das Ungeschick eines Ungeübten verursacht worden, sehen es Se. Durchlaucht unser Herzog nicht gern, dass sich Anfänger Ihrer zu Ihrem eigenen Vergnügen mit grossen Kosten angeschafften Instrumente zur Übung bedienen sollen. Die hiesige astronomische Anstalt ist keine öffentliche, keine Landesanstalt, gehört zu keiner Akademie, Universität etc., sie ist bloss eine eigene Privatliebhabelei unseres Herzogs, die aus seiner Schatulle bestritten wird; Se. Durchlaucht haben es nie gern gesehen, nie erlaubt, dass Fremde mit Ihren eigenen Instrumenten Übungen machen, und diese dadurch allen Gefahren der Ungeschicklichkeit und Abnutzung ausgesetzt werden sollten. Was ich bisher tat, war nur immer per nefas getan, die Güte des Herzogs ignorierte dieses. Allein einige neuerliche Vorfälle reizten die Langmut des Herzogs, zogen mir Verdruss zu, so dass es mir glatterdings unmöglich wird, jemanden, sei es wer er wolle, auf der herzoglichen Sternwarte aufzunehmen und den Gebrauch der herzoglichen Privatinstrumente, die nur meiner Aufsicht anvertraut sind, zu gestatten. Dieses, Hochgeehrtester Herr Doktor, habe ich also die Ehre Ihnen bekannt zu machen. Ich behalte mir vor, Ihnen auf andere Punkte Ihrer Briefe ein andermal umständlicher zu antworten, insonderheit Ihnen einiges von Dr. BURCKHARDT aus Paris als Antwort über Ihre Bemerkungen ULUGH-BEIGHS Tafeln betreffend, mitzuteilen.«

In demselben Briefe, in dem GAUSS ZACH bittet, nach Gotha kommen zu dürfen, teilte er, wie aus der vorstehenden im GAUSSARCHIV erhaltenen Antwort hervorgeht, diesem einige Bemerkungen über ULUGH BEIGHS Sonnentafeln mit, die BURCKHARDT¹⁾ in den von ZACH herausgegebenen »Allgemeinen geographischen Ephemeriden« (Bd. III, 1799, Seite 179) abgedruckt und besprochen hatte. Diese Mitteilung von GAUSS ist deswegen bemerkenswert, weil er dabei die von ihm schon längere Zeit vorher gefundene Methode der kleinsten Quadrate²⁾ anwandte;

¹⁾ JOH. KARL BURCKHARDT, geboren 1753 in Leipzig, Schüler von ZACH und von diesem nach Paris empfohlen, wo er Freund und Gehilfe von LA LANDE und LA PLACE wurde und 1825 als Direktor der Sternwarte auf der Ecole militaire starb.

²⁾ Vergl. darüber auch A. GALLE, *Über die geodätischen Arbeiten von Gauss*, Abb. I dieses Bandes, Einleitung und I. Abschnitt.



man vergleiche hierzu die Werke XII, S. 64 abgedruckte Notiz: *Mittelpunkts-
gleichung nach Ulughbe in Zeitertien.*

Die Beteiligung an den Berechnungen der Lecooschen Beobachtungen dauerte bis Mai 1799; in der Folgezeit scheint Gauss keine Gelegenheit zur Beschäftigung mit der beobachtenden Astronomie gehabt zu haben. Er förderte seine rein mathematischen Untersuchungen und war später von 1801 an durch die Berechnung der Bahnen der neu entdeckten Planeten in Anspruch genommen. Im Februar 1802 scheint er aber von neuem ZACH, mit dem er anlässlich der Entdeckung der Ceres in lebhaften Briefwechsel getreten war, um Rat gebeten zu haben, wie er sich auf dem Gebiete der praktischen Astronomie betätigen könne.

ZACH antwortet hierauf am 21. Februar 1802:

»Ich komme jetzt auf den Artikel der Instrumente. Aber so ein kurzes Gesicht haben Sie, mein teuerster Herr Doktor! Das ist sehr schlimm für einen praktischen Astronomen. Meine Erfahrung, die ich bei vielen Astronomen und Liebhabern dieser Wissenschaft gemacht habe, gibt mir, dass ein so kurzes Gesicht grosse und fast unüberwindliche Schwierigkeiten in der praktischen Astronomie macht. Bei der Beschaffenheit Ihrer Augen, wie Sie mir solche beschrieben haben, können Sie des Nachts kein Instrument scharf ablesen. Welche grosse optische Parallaxe müssen Sie nicht haben! Werden Sie bei einer solchen Anstrengung Ihre Augen nicht angreifen, sie noch kurzsichtiger machen und ganz verderben, besonders wenn Sie sich vor der Hand auf den Gebrauch eines Sextanten einschränken müssen. Nehmen Sie ein Beispiel an mir, was ich für fürchterliche Augenkrankheiten mache; ich schreibe sie alle dem Spiegelsextanten und den häufigen Sonnenbeobachtungen zu, an die man bei diesem Werkzeuge beschränkt ist. Lesen Sie nur, was ich im Mai-Heft 1801, S. 500 davon gesagt habe. HERSCHEL und SCHRÖTER haben Falkenaugen. Sie sind ein vortrefflicher Analytiker, Sie haben ein so überwiegendes Talent de Calcul, dass Sie mit diesem allein wuchern müssen. Sie werden bei praktischer Astronomie eine kostbare Zeit verlieren, die Sie tausendmal besser und nützlicher anwenden können. Wie würde mich mein alter Freund LA LANDE schmälern, der nur praktische Astronomie will, wenn er wüsste, dass ich Ihnen eine solche Vorlesung halte und von praktischer Sternkunde abrate! Allein mein Prinzip ist, ein Mensch, der etwas besseres

machen kann, und was nur wenige Menschen machen können, muss nicht machen wollen, was so viele Menschen machen können. Es wäre ebenso schlimm, als wenn ich meine 30 jährigen Erfahrungen, Übungen und Gewohnheiten in der praktischen Astronomie jetzt aufgeben und nur im Kabinett, wie ein HENNERT, an Exercices de Collège arbeiten wollte. Sie haben, Hochgeehrtester Herr Doktor, ein kostbares Pfund; damit können Sie so viel nützen, dass es unverantwortlich wäre, es schwächen oder teilen zu wollen. Aber verstehen Sie mich auch recht. Es ist nicht, dass ich Ihnen das Beobachtungstalent absprechen will. Wie kann ich das; ich habe ja nicht die Ehre, Sie persönlich zu kennen, und ich kenne Ihre mechanische Dexterity gar nicht. Meine Sorge ist nur, praktische Astronomie würde Sie zu sehr zerstreuen und von Studien ableiten, von welchen es erwiesen ist, dass Sie entschiedenes Talent haben. Was für ein praktischer Astronom aus Ihnen werden wird, das wissen Sie ja selbst noch nicht und müssen es erst erfahren. Indessen, damit Sie sehen, dass es nicht an meinem guten Willen fehlt, dass ich nicht Ursache sein will, ein Pfund in Ihnen verschlummern zu lassen, das Sie wecken wollen, so mache ich Ihnen folgenden Vorschlag.

Ich will Ihnen für diesen Sommer einen Sextanten, einen künstlichen Horizont, eine Uhr und ein Fernrohr borgen. Damit können Sie nun Polhöhen und Längen bestimmen. Der Sextant dient Ihnen auch zu korrespondierenden Sonnenhöhen, damit können Sie die Uhr berichtigen; das Fernrohr soll hinreichend sein, um Sternbedeckungen zu beobachten. Ich will trachten, Ihnen diese Instrumente sobald als möglich zu schicken, damit Sie noch im künftigen Monat die Bedeckung des Jupiters, den 16. März, beobachten können; aber sicher sollen Sie jene vom 13. April, so wie die Bedeckung der Plejaden, den 5. April, damit vornehmen können. Ich erwarte täglich eine gute Auchsche Uhr aus Weimar; diese und der künstliche Horizont fehlt nur noch, sonst hätte ich alles beisammen.

Sehen Sie nun zu, wie weit Sie mit Ihren ersten Übungen kommen, ob Sie ihnen zur Erholung dienen. Sie können damit mehrere Ortsbestimmungen im Braunschweigischen machen; Helmstedt, eine Universität, verdiente es vorzüglich. Terrestrische Messungen werden Ihnen wegen des kurzen Gesichts noch mehr Schwierigkeiten machen; halten Sie sich indessen an die astronomischen. Finden Sie, dass Sie damit gut fortkommen, und dass Ihnen das



Beobachten eine angenehme Zerstreung macht, so will ich Ihnen alsdann andere Vorschläge wegen Acquisition eigener Instrumente machen. Sollte dann Ihr Herzog nichts für praktische Sternkunde in Helmstedt tun wollen? Wenn er, oder die Universität, nur alle Jahre 500 Rthl. dazu hergeben, so ist in 6 Jahren eine brave Sternwarte in Helmstedt, oder in Braunschweig. Das würde gewiss viele anziehen. Dann, auf welcher deutschen Universität wird denn praktische Sternkunde und Schiffahrtskunde gelehrt? Selbst in Holland geschieht es nicht. Die Holländer, Hamburger, Bremer, Lübecker kämen alle nach Helmstedt, wenn sie wissen, dass da praktischer Unterricht in Handhabung des Spiegelsextanten, in Beobachtungen mit demselben, in der Methode der Mondstanzungen und überhaupt in astronomischer Navigation Unterricht zu erhalten wäre. Helmstedt bekäme dadurch einen grossen Ruf und einen ungetheilten glänzenden Vorzug vor allen anderen deutschen Universitäten. Kam doch der seel. Prof. NIEUWLAND, der Navigationslehrer in Amsterdam war und über den Sextanten schon geschrieben hatte, doch hauptsächlich deswegen nach Gotha, um den Gebrauch dieses Werkzeuges recht zu lernen; er konnte damit gar nicht umgehen. So war es mit seinem Nachfolger VAN BEEK CALKOEN. Ich kann am besten aus Erfahrung darüber sprechen, wie gross der Zulauf in Helmstedt sein würde, wenn eine solche Anstalt da existierte. Denn niemand erfährt es leider zudringlicher als ich, wie sehr und wie viele diesen Unterricht bei mir wünschen; aber ich bin aus mehr als einer Ursache jetzt gezwungen, ihn überall abzuweisen. Ich habe erst kürzlich dem Kurfürsten von Bayern und dem Fürsten von Würzburg ähnliche Ansinnen refusieren müssen. Meine Geschäfte, meine Lage erlaubt dies durchaus nicht mehr. Ich kann solche Liebhaber nur abweisen; wie vortrefflich wäre es nicht, wenn ich sie künftig nach Helmstedt hinweisen könnte.

Finden Sie, dass Ihnen praktische Astronomie zu viel Zeit wegnimmt, Ihren Augen schädlich wird, Ihnen nur undankbare Mühe und wenig Vergnügen macht: nun dann schicken Sie mir meine Instrumente wieder zurück, und somit haben Sie keine unnötigen Auslagen gemacht.

Mit Rücksicht auf diese Äusserungen ZACHS schrieb GAUSS, nachdem er den Ruf nach Petersburg¹⁾ erhalten hatte, und als OLBERS versuchte, ihn für die Göttinger Professur vorzuschlagen, am 3. Dezember 1802 an OLBERS:

¹⁾ Vergleiche unten Seite 20.

»Wenn es sich künftig zeigen wird, dass sonst keine unvorhergesehenen Hindernisse*) obwalten, so würde mir der Umstand, dass das Observatorium noch nicht vollendet ist, gerade erwünscht sein, da ich dann in der Zwischenzeit mich erst recht zum praktischen Astronomen vorbereiten könnte. Sehr beunruhigend ist in dieser Hinsicht für mich die Ungewissheit, in der ich bin, wie v. ZACH darüber denkt, und ob es ganz nach seinem Herzen sein würde, die Stelle durch mich besetzt zu wissen, da mir sein Beistand dabei so sehr unentbehrlich sein würde. Von meiner grossen Neigung zu praktischen Beschäftigungen ist er schon seit lange unterrichtet. Sogleich nach der Verbesserung meiner äusseren Lage durch unseren Herzog ersuchte ich Herrn v. ZACH, mir zur Erlangung eines Sextanten von bester Güte behilflich zu sein, ich fände ungemein viel Gefallen am Beobachten und hätte den Wunsch, einen Sextanten zu besitzen, schon lange gehegt, hoffte auch, mich in der Folge mit mehreren Instrumenten versehen zu können; zugleich meldete ich ihm, dass mein Gesicht gut, obwohl sehr myopisch sei. In seiner Antwort auf diesen Brief widerriet er mir zwar die Praxis, teils weil er meinte, dass ich mich mit mehrerem Nutzen mit theoretischen Untersuchungen beschäftigen könne, teils weil zumal die Sonnenbeobachtungen meinen Augen nachteilig sein und sie vielleicht noch kurzsichtiger machen könnten, erbot sich aber zugleich auf das gefälligste, mir einen Sextanten, Pendeluhr und künstlichen Horizont zu borgen, damit ich vorerst ohne die Gefahr einer unnötigen Ausgabe mich versuchen könne. Was nun jene beiden Gründe betrifft, so habe ich in Ansehung des ersteren geglaubt, dass das Beobachten mir zu einer sehr angenehmen Abwechslung dienen und mich an theoretischen Arbeiten eben nicht hindern würde, weil ich diese viel zu lieb habe; dass es selbst für den Theoretiker oft von grosser Wichtigkeit ist, wenn er in der Ausübung auch bewandert ist; und endlich, wenn die Rede davon ist, ex officio und nicht bloss als Dilettant Praktiker zu sein (woran ich freilich damals noch eben nicht dachte), scheint es mir sehr in Betracht zu kommen, dass es in ganz Europa vielleicht kaum ein halb Dutzend besoldete reine Mathematiker gibt. In Ansehung des zweiten Punktes habe ich bisher nicht gefunden, dass meine doch oft sehr fleissigen Sonnenbeobachtungen irgend nachteilige Wirkung auf meine Augen gehabt hätten, und ein Astronom auf einer wohlbestellten Sternwarte braucht doch die Sonne viel weniger zu be-

*) Nämlich für die Berufung nach Göttingen. — BRDL.



obachten, als ein blosser Sextantenbeobachter. Auch finde ich nicht, dass die Kurzsichtigkeit das Beobachten eben erschwerte, ausser etwa, wenn am Himmel mit einem Fernrohr etwas Teleskopisches aus freier Hand aufzusuchen ist, und auch dagegen würde es wohl mancherlei Hilfsmittel geben. In den gewöhnlichen Beobachtungen mit dem Sextanten habe ich mich nun ziemlich geübt, und so hoffe ich, dass ich durch Autopsie mich auch in die Behandlung anderer Instrumente wohl finden werde.

Von dem Rufe nach Petersburg habe ich v. ZACH gleichfalls Nachricht gegeben, ihm die Gründe gemeldet, warum ich ihn auf die angebotenen Bedingungen anzunehmen Bedenken getragen habe, ihn um seinen Rat gebeten, falls man geneigt sei, die Bedingungen vorteilhafter zu machen, und zugleich die Hoffnung geäussert, dass er mir bei eintretender Notwendigkeit es nicht abschlagen würde, mich eine Zeitlang zum Schüler anzunehmen. Auf diesen Brief, der am 26. Oktober abgegangen ist, habe ich nun bis heute keine Antwort. ZACHS letzter Brief ist vom 25. Oktober. Auch von der M. C., welche er sonst immer mir selbst zuschicken die Güte hatte, habe ich das letzte Stück durch eine fremde Hand erhalten. Ob nun v. ZACH verreist oder krank ist, oder ob er mir vielleicht selbst irgend eine Proposition machen will, worüber er selbst erst Nachrichten einziehen will, darüber erwarte ich posttätlich mit Ungeduld Auskunft.

Es mag auffallend erscheinen, dass v. ZACH GAUSS so dringlich von der beobachtenden Astronomie abrät und ihm wegen seiner Kurzsichtigkeit Schwierigkeiten schildert, die man als unbegründet bezeichnen muss. Möglicherweise haben hierzu die folgenden Umstände beigetragen. In Göttingen wurde der Bau der neuen Sternwarte geplant und ZACH war mit dem Entwurf der Pläne beauftragt worden. Es schien sein Wunsch zu sein, dass die Leitung dieser Sternwarte seinem Schüler BURCKHARDT übertragen werde und daher fürchtete er vielleicht schon, dass sich diese Hoffnung durch die Berufung von GAUSS zerschlagen würde¹⁾. Man kann diese Vermutung vielleicht auch aus dem folgenden Briefe herauslesen.

In der Antwort auf die Mitteilung der ersten von GAUSS berechneten Cereselemente hatte ZACH im Brief an GAUSS am 10. November 1801 sich folgendermassen ausgesprochen:

¹⁾ Vergl. auch GAUSS an OLBERS vom 18. November 1802.

»Inzwischen werden Ewr. Wohlgeboren von selbst einschen, dass in den Bestimmungsstücken Ihrer Ellipse noch sehr viel hypothetisches liegt, und dass sich z. B. das Aphelium und die Exzentrizität noch sehr von der Wahrheit entfernen können. Dr. BURCKHARDT hätte seine Ellipse ebenso genau den Beobachtungen anpassen können, wenn er gewollt hätte; er hielt es nicht der Mühe wert, und es dürfte nicht schwer halten, eine ebenso gut stimmende Ellipse für den Fall zu finden, wo man das Perihelium auf den 11. Febr. verlegen wollte. Behutsamkeit ist daher immer zu empfehlen, und man muss, um niemanden irre zu leiten, die Möglichkeit nicht leugnen, dass man mehr als eine Ellipse durch die PIAZZISCHEN Punkte legen könne. Z. B. Ewr. Wohlgeboren finden darin einen grossen Beweis oder wenigstens ein grosses Gewicht und Vertrauen in Ihre Elemente, dass Sie den von Dr. OLBERS vermuteten enormen Observationsfehler von 20" nicht zulassen, allein Dr. PIAZZI gesteht selbst einen Fehler von 15" in seiner Beobachtung vom 11. Februar (November-Stück, p. 572¹⁾). Da Sie aber diese fehlerhaften Beobachtungen selbst bei Ihren Berechnungen zu Grunde gelegt haben, so war es natürlich, dass Sie diesen Fehler 0" fanden; Ihr Raisonement war in diesem Falle eine *Petitio Principii*. Diese Kleinigkeit ändert Ihre Ellipse nicht sehr und ist kaum der Mühe wert, davon zu reden; Ihre Arbeit bleibt immer schön und verdienstlich, erstens weil Ihre Elemente die PIAZZISCHEN Beobachtungen so schön darstellen, zweitens weil Sie eine mögliche Bahn zeigt, in welcher der neue Gast eben so gut, als in der BURCKHARDTSCHEN oder einer anderen Bahn wandeln kann, folglich dem Beobachter zum Leitfaden dienen kann, um so mehr, da alle unsere vorhergehenden Raisonements uns gewissermassen (freilich mit Unrecht) sicher gestellt haben und es vielleicht ohne Ihre Berechnung keinem Astronomen beigegeben wäre, den Himmelsraum bei seiner Untersuchung weiter nach Osten auszudehnen.«

Indessen ginge man zu weit, wenn man daraus schliessen wollte, dass ZACH etwa GAUSS nicht wohlgesinnt gewesen sei. Als OLBERS bald darauf auf Grund von GAUSS' Vorausberechnung die Ceres sogleich wieder aufgefunden hatte, schrieb er an ZACH:

»Mit Vergnügen werden Sie bemerkt haben, wie genau Dr. GAUSS' Ellipse mit den Beobachtungen der Ceres stimmt. Melden Sie doch dies diesem

¹⁾ M. C. IV (1801). — BRDL.
XI 2 Abb. 3.



würdigen Gelehrten unter Bezeugung meiner ganz besonderen Hochachtung. Ohne seine mühsamen Untersuchungen über die elliptischen Elemente dieses Planeten würden wir diesen vielleicht gar nicht wiedergefunden haben. Ich wenigstens hätte ihn nicht so weit ostwärts gesucht.« ZACHS Stimmung scheint sich hiernach mehr zu GAUSS' Gunsten gewendet zu haben; er druckte diese Briefstelle in der Monatlichen Correspondenz, Bd. V, S. 181 ab und fügte hinzu: »Wir wollen demnach die gänzliche Berichtigung dieser Ellipse dem geschickten Dr. GAUSS allein überlassen; denn es wäre sehr unartig, das mit leichter Mühe in Ordnung bringen zu wollen, was dieser verdienstvolle Gelehrte mit so vieler Mühe entworfen hat. Ihm gebührt Ehre und Dank, dass er uns bis jetzt so gut geleitet hat; wir wollen ihm daher auch noch diesen Dank schuldig bleiben, dass er uns bis ans letzte Ziel führen soll, welches, wie wir hoffen, vielleicht schon im nächsten Hefte der M. C. geschehen wird.« Nach diesem Erfolge von GAUSS, der bekanntlich überall Aufsehen erregte, erhöhte der Herzog die ihm gewährte Unterstützung, worüber GAUSS an OLBERS am 23. Februar 1802 schreibt:

»Ich hoffe, in Zukunft mich meinen Lieblingswissenschaften bald mit mehr Energie ergeben zu können. Bisher war ich in einer sehr dürftigen Lage, aller literarischen Hilfsmittel fast ganz beraubt. Unser edler Fürst, dem ich ohnehin alles, was ich bin, zu verdanken habe, hat, nachdem er die neuesten Nachrichten über unsere Ceres im Februarheft der M. C. gesehen, mir aus eigener Bewegung eine ansehnliche Verbesserung meiner Lage zugesichert, ohne meine Musse durch bestimmte Dienste zu beschränken. Ich fühle lebhaft, wieviel ich von dieser glücklichen Wendung auf Rechnung Ihrer grossmütigen Äusserungen zu setzen habe, und diese Wirkung wird Ihnen bei Ihren freundschaftlichen Gesinnungen für mich gewiss Freude machen.«

Gleichzeitig schrieb ZACH an GAUSS in dem oben schon teilweise abgedruckten Brief vom 21. Februar 1802:

»Wie sehr es mich gefreut hat, dass Ihr edler Herzog Sie nun so gesetzt hat, dass Sie sorgenfrei sich nun der erhabensten Wissenschaft ganz widmen können, brauche ich Ihnen nicht erst mit vielen Worten zu sagen. Der Herzog hat nicht nur Ihnen, sondern auch den Wissenschaften eine wahre Wohlthat erzeigt. Die mathematischen Wissenschaften werden überhaupt jetzt in Deutschland wenig encouragiert. Man sieht aber auch die Früchte davon.

Die berühmte Universität Göttingen hat seit KÄSTNERS Tode keinen Mathematiker mehr. Lassen Sie KLÜGEL in Halle, HINDENBURG in Leipzig mit Tode abgehen, so sind unsere deutschen Mathematiker sonst nirgends als im Braunschweigischen zu Hause. STAHL¹⁾ in Jena zeigt sich gut, er will aber Hungers sterben; ich habe es noch nicht mit aller Mühe dahin bringen können, ihm das zu verschaffen, was Ihr vortrefflicher Herzog aus eigener Bewegung für Sie getan hat. Unser wackerer BURCKHARDT musste expatriieren, um sein Glück zu machen, in Leipzig wäre er auf einem Dachstübchen verfault. TÖPPER²⁾ versauert in Grimma, dieser vortreffliche Kopf muss solchen Jungen catechesieren. Im jetzigen Frankreich sind die Mathematiker Sénateurs und Conseillers d'Etat. In England bekleiden sie die ersten Finanzstellen. Nur in Deutschland verhungern sie. Dies verdiente wirklich einmal öffentlich gesagt zu werden, dass der Herzog von Braunschweig die mathematischen Wissenschaften so sehr in Schutz und Protektion nimmt. Er hat uns KLÜGEL gegeben, er erhält uns PFAFF, und nun schenkt er uns GAUSS. Wüsste es der Herr, wie innigst ich ihm in meinem Herzen dafür danke. Dass er diese Wissenschaft seiner vorzüglichen Huld würdigt, das macht, weil er ein grosser Feldherr ist und einsieht, zu was diese Wissenschaften im Krieg, beim Ingenieur, beim Artilleren, beim Pionier und beim Generalstab nutz sind. Der grosse FRIEDRICH verstand nichts von Mathematik und doch sorgte er sozusagen ängstlich dafür, tüchtige Mathematiker bei seiner Akademie zu haben. Er hatte aber auch die besten Köpfe, die in dieser Art in ganz Europa existierten. Er hatte einen EULER, einen LA GRANGE, einen LAMBERT. Man findet in des grossen Königs Schriften, dass er bisweilen über Mathematik spottete! Doch nein, nicht über Mathematik spottete er, sondern über die Mathematiker; aber das wars auch nicht, nicht über Mathematiker sondern über EULER spottete er, weil er im Grunde piquiert war und es ihn verdross, dass dieser ihn verliess und nach Russland ging. Daher die ewigen Sarkasmen, dass EULER la grande Ourse du Nord wäre observieren gegangen. Wie gut behandelte der König dagegen MAUPERTUIS und LA GRANGE. Man lese nur seine Briefe an d'ALEMBERT, wie angelegentlich er um LA GRANGE handelt,

1) KONRAD DIETRICH MARTIN STAHL (1771—1833) war später Professor in Würzburg, Landeshut und München. — BRDL.

2) HEINRICH AUGUST TÖPPER (1758—1833) war Professor an der Landesschule zu Grimma. — BRDL.



wie sehr es ihm darum zu tun war, diesen grossen Geometer an seine Akademie zu fesseln. Nach dem Tode dieses grossen Königs haben Seine Excellenz der Corporal Prof. HERTZBERG¹⁾, qui voulait mener l'Académie comme un Régiment, diesen grossen Mann nach Frankreich vertrieben, wo ihn BONAPARTE, der die mathematischen und besonders astronomischen Wissenschaften auch sehr beschützt, zum Sénateur gemacht hat. LA GRANGE und LA PLACE sind jetzt des grands Seigneurs, halten Equipagen in Paris und haben Revenuen von beinahe 8000 Rthl. Die deutschen Mathematiker schätzten sich glücklich, wenn sie nur das Zehntel davon hätten. Doch genug von dieser Jeremiade! Indessen: Es lebe der Herzog von Braunschweig!^{1a}

ZACH schickte GAUSS, wie er versprochen, im März 1802 einen 10zölligen THROUGHTONschen Sextanten, einen künstlichen steinernen Horizont mit Niveau und eine AUCHSche 10 Taler-Uhr und versprach ihm eine bessere Pendeluhr, sobald er sie von AUCH erhalten haben würde. Mit diesen einfachen Mitteln übte sich GAUSS im Beobachten und führte mit dem Sextanten eine Reihe von Ortsbestimmungen in der Umgebung von Braunschweig aus, machte auch regelmässige Zeitbestimmungen.

Im September 1802 erhielt GAUSS den bereits erwähnten Ruf nach Petersburg als Astronom der Akademie der Wissenschaften und Direktor der Sternwarte. Der Staatsrat v. FUSS hatte mehrere deutsche Gelehrte darunter ZACH wegen Besetzung der Stelle um Rat gefragt; auch hier hatte ZACH nicht gleich GAUSS vorgeschlagen, sondern FUSS scheint auf diesen durch PFAFF aufmerksam gemacht worden zu sein, wie man aus den Briefen von FUSS an GAUSS schliessen kann²⁾. FUSS hatte im April oder Mai PFAFF daraufhin gebeten, GAUSS' Ansichten über eine etwaige Berufung nach Petersburg in Erfahrung zu bringen. Doch erhielt er hierauf keine Antwort, sodass er am 5. September 1802 direkt an GAUSS schreibt und ihn fragt, ob er wohl bereit wäre, einen Ruf anzunehmen. Hiervon machte GAUSS in dem Brief vom 12. Oktober 1802 OLBERS vertrauliche Mitteilung und bittet um seinen Rat; er meint, dass er seinerseits wenig Aussicht habe, in Deutschland eine ihm zusagende

1) EWALD FRIEDRICH GRAF V. HERTZBERG (1725—1795), Staatsmann und Historiker, wurde 1763 Minister und nach FRIEDRICH des Grossen Tode (1786) «Kurator» der Berliner Akademie; über seine Reorganisation der Akademie siehe A. HARNACK, *Geschichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Ausgabe in einem Bande, Berlin 1901, S. 361—381. — BRDL.

2) Diese Briefe befinden sich im GAUSSarchiv.

Stellung zu erhalten, da er zu einem Lehramt nicht die geringste Neigung habe; andererseits aber deutet er an, dass er Deutschland sehr ungern verlassen würde, besonders da die ihm von Petersburg aus gemachten Bedingungen keine sehr günstigen waren. OLBERS beschliesst sogleich sein Möglichstes zu tun, um GAUSS in Deutschland zu halten, und erbittet sich von GAUSS die Erlaubniss, an ZACH und nach Göttingen vertraulich zu schreiben. OLBERS dachte sich, dass man GAUSS vielleicht die Leitung der neuen Sternwarte in Göttingen übertragen könne, während der Professor der Astronomie SEYFFER die Professur behalten würde. In diesem Sinne schrieb er dem Göttinger Professor der Geschichte HEEREN, auch wohl an den ständigen Sekretär der Sozietät der Wissenschaften, Professor der klassischen Philologie HEYNE³⁾. In Göttingen wurde OLBERS Anregung sehr freundlich aufgenommen, sodass dieser zu erwarten schien, dass von der Regierung in Hannover bald ein Antrag an GAUSS herantreten würde. GAUSS hatte inzwischen den Petersburger Ruf abgelehnt, erwartete aber eine Erneuerung unter verbesserten Bedingungen. Hierin hatte er sich auch nicht getäuscht, denn v. ZIMMERMANN erhielt im Dezember 1802 von FUSS einen Brief⁴⁾, in dem dieser schreibt, dass man weitere Versuche machen werde, um GAUSS für Petersburg zu gewinnen. In ähnlichem Sinne schrieb auch SCHUBERT⁵⁾ an GAUSS. Die Verhältnisse in Göttingen lagen nun so, dass sich augenblicklich für GAUSS nichts Positives erreichen liess, obwohl man den Gedanken, ihn später dorthin zu berufen, offenbar verfolgte. Dies brachte GAUSS in eine unangenehme Lage des Schwankens, und er scheint nahe daran gewesen zu sein, den Petersburger Ruf anzunehmen, besonders in dem Gedanken, dass er ja von dort aus auch nach Göttingen zurückkehren könne. Aber noch ein Hindernis stand der Annahme des Petersburger Rufes entgegen: der Gedanke, seinen Herzog zu verlassen, der so viel für ihn getan hatte, und dem er sich nicht undankbar erweisen wollte. Wie zu erwarten war, wollte ihn auch der Herzog nicht gehen lassen, sondern verbesserte im Januar 1803 seine Lage nochmals wesentlich, sodass GAUSS den Petersburger Ruf jetzt endgültig ablehnte. Auf eine Anregung von GAUSS, in Braunschweig einige astronomische Instrumente

1) OLBERS an GAUSS, 25. Dezember 1802.

2) GAUSS an OLBERS, 21. Dezember 1802.

3) Die Briefe von SCHUBERT an GAUSS befinden sich im GAUSSarchiv.



anzuschaffen, verspricht ihm der Herzog auch den Bau einer kleinen Sternwarte. GAUSS schreibt darüber an OLBERS am 1. März 1803:

»Dass ich nun hier bleibe, hier in völliger Unabhängigkeit à mon aise leben werde (unser Fürst hat meine Pension auf 600 Rthl. erhöht und dabei freie Wohnung zugesichert), diese Nachricht hätte ich Ihnen zwar schon vor ein paar Wochen schreiben können; allein ich wünschte Ihnen noch mehr schreiben zu können, und dies kann ich jetzt. Unser edler Fürst hat sich nämlich geneigt gezeigt, hier etwas für die ausübende Astronomie zu tun. Ich hatte ihm vorgestellt, dass ein Vorrat von zweckmässigen Instrumenten, ein astronomischer Salon oder eine Art von kleiner Sternwarte eine Zierde der Stadt, ein Mittel, den Geschmack an Astronomie mehr zu verbreitern, ein Mittel, der Wissenschaft selbst nützlich zu sein, abgeben würde, und dieser Gedanke erhielt seinen Beifall. Unser Freund ZACH hat bereits durch einen kleinen Überschlag gezeigt, wie sich mit mässigen Kosten eine zweckmässige Sammlung machen liesse, und sich selbst erboten, auf den Sommer selbst hierher zu kommen, ein passendes Lokal aufzusuchen und uns mit seinem Rate behilflich zu sein; und eben gestern hat der Herzog in einem Billet an v. ZIMMERMANN seinen Wunsch zu erkennen gegeben, dass dieses Anerbieten zur Wirklichkeit kommen möchte. Wenn also der Himmel meinen Aussichten günstig ist und sonst keine Hindernisse eintreten, so kommt ZACH nach Johannis, wenn die Frühlingsreisen unseres Herzogs geendigt sind, zu uns; ich gehe eine Zeit lang nach Gotha, um mich in der praktischen Astronomie zu üben, und in kurzem haben wir hier eine kleine Sternwarte, wodurch alle meine Wünsche erfüllt sein werden.«

Zu gleicher Zeit schrieb GAUSS an ZACH; jedoch ist dieser Brief nicht mehr vorhanden. In seiner Antwort sagt ZACH am 27. Januar 1803: »Ich kann Ewr. Wohlgeboren nicht genugsam ausdrücken, wie sehr mich der Inhalt Ihres letzten Schreibens erfreut hat. Nun sind Sie geborgen und auch meine Wünsche sind erfüllt. Nun kann weder von St. Petersburg noch von Dorpat mehr die Rede sein. An beiden Orten wären Sie nicht independent und frei gewesen, so wenig wie in Helmstedt; überall hätten Sie nur zu kämpfen aber nicht zu wirken gehabt. Sum Passer antiquus; ich kenne die Lage solcher Dinge. Was ist denn bei den Sternwarten von Leipzig und Halle am Ende herausgekommen? Auch da waren zu viele Köche! Und eben

deswegen habe ich mich bei Helmstedt so lau bewiesen, weil auch da sich Leute einmengen wollten, die nicht dazu gehören. Wo ist etwas für Astronomie geschehen? Wo ein Mann allein wirken konnte. In Seeberg, in Palermo, in Neapel, in Lilienthal, in Slough; nun sind Sie, mein Verehrungswürdigster, auf den Punkt gebracht, wo ich Sie hinwünschte; nun schlagen Sie S. 83 meines Januar-Hefes nach¹⁾; als ich dieses niederschrieb, hatte ich Sie und Ihren edlen grossen Fürsten im Sinne. Ich hoffte damals noch nicht, dass meine Anspielung so bald in Erfüllung gehen würde, lassen Sie uns daher alle Kräfte aufbieten, auch diese Wahrheit in Braunschweig zu bestätigen. Zeigen Sie der Welt, dass Ihr Herzog und Sie das wahre Geheimnis verstanden haben, wie man Wissenschaften tätig befördern kann. In welcher glücklichen Lage versetzt Sie nicht Ihr grossmütiger Herzog? Gewiss er wird die grösste Ehre und den grössten Ruhm davon einernten. Sie werden schon dafür Sorge tragen, dass sein grosser Name auch an den Himmel geschrieben werde. Nun können Sie, mein Teuerster, ungehindert und daher zweckmässig und ruhig zum Besten der Wissenschaft wirken. Der Herzog baut Ihnen eine kleine Sternwarte in Braunschweig nach den Bedürfnissen, die der neueste Zustand dieser Wissenschaft erfordert; ganz dieser gewidmet, arbeiten Sie nach Willkür, wozu Sie Ihr Genius antreibt. Mit meinem Rate und mit meinen gesammelten Erfahrungen in der praktischen Sternkunde will ich, so weit meine Fähigkeiten reichen, treulich beistehen. Sie fordern mir im Namen Sr. Durchlaucht des Herzogs einen Plan und Kostenanschlag einer kleinen Sternwarte ab. Hier ist er. Legen Sie mich mit denselben ihm untertänigst zu Füssen.

Euer Wohlgeboren haben ganz recht, wenn Sie sagen, dass Sie keine grosse und stattliche Sternwarte bedürfen, um viel zum Gewinn der Wissenschaft beizutragen. Darin bin ich ganz mit Ihnen einverstanden; daher glaube ich auch, dass es nicht nötig sein wird, ein eigenes Gebäude dazu aufzuführen. Gewiss lässt sich in Braunschweig irgend ein Gebäude finden, vielleicht das Schloss, ein alter Turm, welches man sehr zweckmässig und mit wenigen Kosten zu einer niedlichen Sternwarte würde einrichten können, so wie ich eine auf dem Gothaischen Schlosse und eine andere im Garten I. Durchlaucht der

¹⁾ M. C. VII (18), wo von der Errichtung von Sternwarten durch Gönner der Astronomie die Rede ist. — BRDL.



Frau Herzogin allhier erbaut habe. Sollte Seine Durchlaucht der Herzog zu einem Entschlusse kommen, so würde ich mir die grösste Gnade daraus machen, diesem Herrn meine untertänigste Cour in Braunschweig selbst zu machen, das Lokal auszusuchen und den Bau zu überschlagen. Dies könnte kommendes Frühjahr geschehen, wo ich Sie alsdann zugleich abholen und mit mir nach Gotha bringen würde.

Was die Instrumente betrifft, so würde ich folgende Vorschläge machen.

- 1) Ein vierfüssiges Passageninstrument, von unserem SCHRÖDER hier in Gotha, nach dem Muster des grossen RAMSDENSCHEN auf der Seeberger Sternwarte gearbeitet und desgleichen dieser Künstler unter meiner Aufsicht für den Oberappellationsgerichtsrat v. ENDE verfertigt hat 500 Rtlr. (800)
- 2) Ein ganzer Kreis von 3 Fuss, wie der PIAZZISCHE in Palermo v. BAUMANN in Stuttgart verfertigt, dürfte etwa zu stehen kommen
1000 Rtlr. (1500)
- 3) Ein BORDASCHER Cercle-Repetiteur zu geodätischen Vermessungen
300 Rtlr. (600)
- 4) Eine astronomische Pendeluhr, nach der ARNOLDSCHEN verfertigt, mit Zink und Eisen-Pendel von AUCH 400 Rtlr. (700)
- 5) Einen Achromaten von 3 Fuss, parallaxtrisch montiert, mit Mikrometer v. SCHRÖDER 400 Rtlr. (600)
- 6) Einen Reflektor von 7 Fuss von LILIENTHAL, ganz montiert, Mahagoni
300 Rtlr. (600)
- 7) Kometensucher, Barometer, Thermometer etc. 50 Rtlr. (150)

Man kann demnach vor der Hand den ersten Kostenanschlag der Instrumente auf 3000 Rtlr. ansetzen. Die roten Zahlen¹⁾ deuten an, was diese Instrumente in England kosten würden. Ausserdem, dass solche gegen 2000 Rtlr. höher zu stehen kommen dürften, ist die Zeit nicht abzusehen, wann solche geliefert werden würden.

Mit SCHRÖDER, mit BAUMANN ist mehr Hoffnung, und diese Künstler liefern gewiss in kurzer Zeit eben so gute Werkzeuge wie die englischen. SCHRÖDER hat bereits ein 4zölliges Passageninstrument in Arbeit, das ziemlich avanciert ist. Will der Herzog dem Künstler 200 Rtlr. Vorschuss geben,

¹⁾ Hier in Klammern gesetzt. — Bndl.

welche er begehrt, und für die ich so wie für die Güte des Instruments repondiere, so ist das Instrument sogleich für Ihre Sternwarte bestimmt, und Sie können dessen Vollendung selbst in Gotha betreiben.«

Auf OLBERS Anfrage, im März 1803, ob GAUSS sich nun für immer an Braunschweig gefesselt fühle, und ob Göttingen nicht mehr auf ihn rechnen könne, antwortet GAUSS, dass es vor allem sein Fürst sei, durch den er sich an Braunschweig gebunden fühle, und der einen hohen Sinn für die Kultur der Wissenschaft habe. Er fügt jedoch hinzu »aber derer, die diesen Sinn haben, gibt es nicht viele; nicht alle sind warm für die Begünstigung solcher Wissenschaften. Verhältnisse dieser Art eignen sich mehr für eine mündliche Unterredung als für die Feder.« Es scheint, als ob manche Einflüsse in Braunschweig merkbar geworden sind, die die Fesselung GAUSS' an seine Vaterstadt und die damit der Wissenschaft gebrachten finanziellen Opfer als weniger wünschenswert ansahen¹⁾.

GAUSS' Wunsch, sich weiter im Beobachten zu üben und dies im besonderen unter ZACHS Leitung zu tun, erfüllte sich endlich im Sommer 1803. ZACH erhielt vom König von Preussen den Auftrag zu einer Gradmessung, die von der bayrischen Grenze über den Seeberg bei Gotha bis nach Westfalen gehen sollte. Anfang August 1803 ging er auf den Brocken, von wo er fast täglich Pulversignale gab, die von anderen Punkten zum Zwecke von Längenbestimmungen beobachtet wurden, und noch im gleichen Jahre begann er mit der Messung einer Basis von 10000 Toisen im Meridian der Sternwarte auf dem Seeberg. In einem Brief vom 29. Juli 1803 bittet er GAUSS, an der Basismessung teilzunehmen. GAUSS sollte gemeinsam mit dem Oberappellationsrat Freiherrn v. ENDE²⁾ von Braunschweig aus die Pulversignale beobachten, zu welchem Zweck ZACH ihm einen ARNOLDSCHEN Chronometer zuschickte; sodann sollte er ihn auf dem Brocken besuchen und mit ihm nach Gotha gehen. ZACH berichtet über die Gradmessung in der M. C. 1804 und im besonderen über die Längen- und Breitenbestimmungen in den Heften Juli bis November, über die Basismessung im Dezemberheft. Im Septemberheft Seite 201 heisst es »der Geheimrat und Vizebürgerpräsident Freiherr v. ENDE

¹⁾ Siehe im folgenden S. 29 und 31.

²⁾ Dieser hatte sich in Celle eine kleine Privatsternwarte eingerichtet, über die ZACH in der M. C. XXXIII, S. 29 ausführlich berichtet.



und Dr. GAUSS »beobachtet« in Braunschweig, Wolfenbüttel und Helmstedt. Näheres darüber findet sich im Oktoberheft 1804 der M. C. (abgedruckt Werke XI, 1, S. 261f.); auch schreibt GAUSS an OLBERS am 12. August 1803: »Meine Zeit ist besonders in den letzten acht Tagen so zersplittert gewesen, dass ich fast nie einiger zusammenhängender Stunden mächtig gewesen bin. Die Hauptursache davon sind meine jetzigen praktisch astronomischen Beschäftigungen. Von ZACH befindet sich nämlich jetzt auf dem Brocken und gibt dort fast täglich Signale zu Längenbestimmungen; er hat Herrn von ENDE und mir die hiesigen Beobachtungen übertragen und mir zu dieser Absicht einen besonderen ARNOLDSchen Chronometer geschickt. Das sehr ungünstige Wetter und der Umstand, dass ich Sonnenhöhen nicht in meiner Wohnung beobachten kann, erschweren mir die Zeitbestimmung sehr. Aus den am 9. und 10. beobachteten Signalen, die sich nachts (von 9 bis 10 Uhr, von 10^m zu 10^m) äusserst gut mit blossen Augen sehen lassen, kann ich für unsere Länge keinen Schluss ziehen; nach einer gedruckten Disposition der Signale sollten sie $9^h 0^m 0^s$, $10^m 0^s$ etc. mittlere Brockenzeit oder nach v. ZACHS Angabe $8^h 59^m 32^s$, $9^h 0^m 32^s$ u. s. w. (nach meiner Schätzung vielleicht genauer $8^h 59^m 37^s$) mittlere Braunschweiger Zeit fallen; allein ich habe sie am 9. um $9^h 0^m 12^s$ etc. und am 10. um $9^h 0^m 8^s,5$ beobachtet (von ENDE noch $1\frac{1}{2}$ später). — Am 9. habe ich auch Austritt von ϵ Arietis beobachtet

Heute Nachmittag um 9 Uhr haben wir die ersten Tagsignale, allein eben jetzt regnet es in Strömen, und ich zweifle, dass wir etwas davon sehen können. Die Nachtsignale werden in Allem 12 mal, die Tagsignale 6 mal gegeben, beide jedesmal 7 Stück, mit $\frac{1}{2}$ Pfund entzündetem Pulver. Wahrscheinlich wird auch noch v. ENDE oder wir beide nach Helmstedt gehen, um die Länge und Breite davon festzusetzen. Gegen die Zeit der Abreise ZACHS vom Brocken werde ich zu ihm und mit ihm nach Gotha reisen, um der Basismessung mit beizuwohnen.«

Auf dem Brocken machte GAUSS die persönliche Bekanntschaft ZACHS. Über seine Tätigkeit in Gotha, von wo er erst im Dezember 1803 nach Braunschweig zurückkehrte, ist kaum etwas in Erfahrung zu bringen. Er gibt darüber nur kurze Andeutungen in seinen Briefen an OLBERS und HARDING vom Dezember 1803 bis Februar 1804 und erwähnt, dass er sich mit dem

Problem der Zodiake¹⁾ der kleinen Planeten beschäftigt, sonst aber nicht zu theoretischen Arbeiten käme. Anfang Dezember reiste GAUSS in Begleitung von ZACH von Gotha zurück nach Braunschweig, wo »sein massives Gebäude, das ehemals zum Pulvermagazin gebraucht« war, als sein vortrefflicher Platz zu einer Sternwarte ausgefunden« wurde. ZACH versprach »bald einen detaillierten Plan zur Einrichtung der Sternwarte zu entwerfen«. (Brief an OLBERS vom 18. Dezember 1803.)

Inzwischen hatte man in Petersburg noch nicht alle Hoffnung aufgegeben, GAUSS doch noch zu gewinnen; er schreibt an OLBERS am 17. Juni 1804: »Von Petersburg aus habe ich übrigens wiederholt die freundschaftlichsten Anerbietungen; aber es ist mir gegenwärtig aus mehr als einem Grunde eigentlich selbst recht, dass vor der Hand noch keine Entscheidung nötig ist. Dies alles im engen Vertrauen. Ich freue mich, dass der Bau der Göttingischen Sternwarte, der unglücklichen Zeitumstände ungeachtet, doch noch allgemach fortgeht.«

Dagegen geschah nichts für die Einrichtung der geplanten kleinen Sternwarte in Braunschweig, und auch ZACH liess nichts von sich hören; endlich am 15. September 1804 schrieb dieser an GAUSS, dass er im nächsten Jahre seine Messungen wiederholen wolle und dabei auf GAUSS »Güte und Hilfeleistung rechnet«; er will ihn »reichlich mit Instrumenten, Chronometern, Sextanten, astronomischen Fernrohren u. s. w. versehen«. Vgl. jedoch S. 29 unten.

Für GAUSS blieb die Ungewissheit über seine Zukunft bestehen. Auf der einen Seite bestand für ihn die Hoffnung, in Braunschweig eine kleine Sternwarte und eine dauernde und auskömmliche Stellung zu erhalten, in der er von Verpflichtungen, insbesondere von einer Lehrtätigkeit frei war und seinen rein wissenschaftlichen Arbeiten leben konnte. Auf der anderen Seite boten sich ihm mehrere Rufe nach einer angeseheneren, aber weniger Musse lassenden auswärtigen Tätigkeit; denn auch von Petersburg wurden die Versuche, ihn zu gewinnen, fortgesetzt, und ausserdem hatte er einen Ruf nach Landshut erhalten, der allerdings kaum in Betracht kam. Die Ungewissheit über seine Zukunft, die bis in das Jahr 1807 hinein dauerte, verbunden mit dem Wunsche, vor allem der Forschung sich widmen zu können, mag ihn oft bedrückt und

¹⁾ Vergl. Werke VII, S. 213f.



beunruhigt haben, umso mehr als er sich im Oktober 1805 mit JOHANNE OSTHOFF verheiratet hatte.

Am 29. September 1804, also nur 14 Tage nach dem oben angeführten Briefe, in dem ZACH ihn zur Teilnahme an den Vermessungen aufgefordert hatte, schrieb dieser:

»Von der Braunschweiger Sternwarte kann zwischen Ihrem Herzog und mir nicht wieder die Rede sein; denn:

1. Hat mir der Herzog nie einen bestimmten und formellen Auftrag dazu gegeben; also was geschehen ist, ist per indirectum geschehen.

2. Weiss ich von sicherer Hand, dass mein Besuch in Braunschweig dem Herzog sehr unangenehm war.

Ich weiss auch noch mehrere Sachen, welche hier anzuführen unnötig sind. Soviel ist aber gewiss, dass Ihr Herzog mich ebenso wenig als ich ihn gesucht habe, und dass ich nur aus Missverständnis damals nach Braunschweig gekommen bin. Ihnen, liebster Freund, muss ich es sub rosa eröffnen, dass ich mich, rebus sic stantibus, unmöglich um Ihre Sternwarte kümmern kann, noch darf. Meine Sache ist es nicht, mich den Grossen, besonders in Dingen, die ihnen unangenehm sind, aufzudringen, mein Prinzip ist vielmehr, mich von ihnen entfernt zu halten. Anderer Leute Absichten formuliere ich aber nie. Ich glaubte, Ihnen, verehrungswürdigster Freund, dies Geständnis schuldig zu sein; ich hielt zehn Monate damit zurück und glaubte schon, wir hätten uns gegenseitig erraten und verstanden. Da Sie mir aber in Ihrem letzten Brief davon Meldung machen, so glaubte ich, Ihnen als Freund und tibi soli diese Erklärung geben zu müssen. Vielleicht befremdet Sie diese ebenso sehr als mich die Entdeckung, dass ich nach Braunschweig ungerufen und comme un chien dans un jeu de quilles kam. So was passiert nur einmal. Das zweite Mal ist man schon behutsamer!!

Hierauf schrieb GAUSS an OLBERS am 16. Oktober 1804:

»Unser Herzog hat in einer neulich mit HERRN v. ZIMMERMANN gehaltenen Unterredung ganz aus eigener Bewegung den Vorsatz und Wunsch, hier eine Sternwarte zu errichten, noch sehr bestimmt und fest geäussert und sich über das gänzliche Stillschweigen des HERRN v. ZACH sehr empfindlich bezogen und kaum der Versicherung des HERRN v. ZIMMERMANN glauben können, dass ich

den HERRN v. ZACH noch zu wiederholten Malen erinnert habe. Ich selbst befinde mich hierbei in einem wunderlichen Verhältnisse, denn Herr v. ZACH seinerseits hat mir nicht undeutlich zu verstehen gegeben, als hege er den Argwohn, ohne Veranlassung des Herzogs hierhergekommen zu sein. Ich bin fast gezwungen anzunehmen, dass ein unberufener homme double aus unlauteren Motiven diese Insinuation gemacht habe. Sie wenigstens, mein teurer Freund, werden mir bloss aufs Wort glauben, dass jene Einbildung durchaus grundlos ist, dass im Grunde ich an der ganzen Angelegenheit durchaus weiter keinen tätigen Anteil genommen habe, als die erste Idee anzuzeigen zu haben, und dass alles, was geschehen ist, lediglich vom HERRN v. ZACH selbst und vom Herzog herrührt. Mit Gewissheit kann ich nun freilich noch nicht vorhersehen, was für einen Ausgang diese verdrüssliche Sache nimmt.

Das Beste scheint mir zu sein, wenn sie sich noch so lange tranierte, bis etwas Bestimmtes von Göttingen aus angetragen werden kann, aber HERRN v. ZACH muss ich wegen seines Verdachts notwendig detrompieren, dies bin ich meiner eigenen Ehre schuldig. Ich hoffe indes doch, dass unser Herzog bei rechter Vorstellung der Sache endlich seine Einwilligung geben und mich nicht nötigen werde, einer weit opulenteren, sichereren und mit einem grösseren und nützlicheren Wirkungskreise verbundenen Lage zu entsagen, als ich möglicherweise hier haben könnte.

GAUSS schien demnach nun das Interesse an dem Bau der Sternwarte verloren zu haben und auf den Ruf nach Göttingen seine Hoffnung zu setzen. Im Juni 1804 war SEYFFER nach Landshut berufen worden; man wollte darum HARDING als ausserordentlichen Professor und als Inspektor der Sternwarte nach Göttingen berufen, was auch im Herbst 1805 geschah. Die Leitung der Sternwarte dachte man GAUSS zu übertragen; ihr Bau jedoch wurde durch die politischen Verhältnisse, wenn auch nicht ganz abgebrochen, so doch ungebührlich in die Länge gezogen.

Der Briefwechsel mit ZACH ruhte bis Ende 1805 gänzlich; ZACHS Messungen wurden zwar fortgesetzt, jedoch gab er keine Pulversignale auf dem Brocken und GAUSS nahm nicht an den Messungen teil. Ein grosser Teil seiner Zeit wurde durch die langwierigen Rechnungen zu den Störungen der Ceres in Anspruch genommen (Werke VII, S. 402 f.).



Nachdem in einem neuen Gespräch des Herzogs mit ZIMMERMANN sich in der Tat herausgestellt hatte¹⁾, dass ein Unberufener, dessen Name nicht genannt wird, sich eingemischt und ZACH mistrauisch gemacht hatte, kam die Frage des Baues der Braunschweiger Sternwarte nochmals in Fluss, wie sich aus einem Briefe ZACHS an GAUSS vom 28. Mai 1806 ergibt, in dem es heisst: »Wahrscheinlich werden nun alle meine Risse und Vorschläge zu Ihrer neuen Sternwarte in Ihren Händen sein. Ich wünsche nur, dass alles Ihren Beifall erhalten möge. Die Hauptsache scheint mir gegenwärtig diese zu sein, dass Ihr Durchlauchtiger Herzog nur vorerst den Bau bewillige und die nötigen Fonds dazu anweise. Sind die Bauanschläge nach meinen überschiedenen Rissen nun einmal gemacht und der Bau wirklich dekretiert, so kann man immer noch, selbst während des Baues, diejenigen Modifikationen anbringen, welche Sie etwa dabei vorzuschlagen hätten. Zur Einrichtung des Erdgeschosses und zur Anlegung der Treppe muss ohnehin ein eigner Riss gefertigt werden, welcher ganz von den Bequemlichkeiten abhängt, welche Sie darin angebracht wissen wollen; daher ich mich auch in dieses Detail garnicht eingelassen habe, so wie ich auch den Punkt wegen Ihrer Wohnung ganz übergangen habe, welche man Ihnen doch in der Nähe der Sternwarte entweder erbauen oder irgend ein Privathaus, das in der Nähe steht, dazu einrichten und bestimmen muss, damit der Observator seine beständige annexe Wohnung habe und nicht von der Caprice seines Mietherrn abhängt, welcher ihm diese Wohnung nach Gutdünken aufkündigen kann. Meines Erachtens müsste diese Wohnung ein fürstliches, zur Sternwarte gehöriges Eigentum sein, welches zum permanenten Quartier des Observators bestimmt sein müsste: so wie es z. B. in Berlin ist, wo Herr BERNOULLI, nachher Herr BODE ein königliches Haus der Sternwarte gegenüber bewohnen. Vielleicht hat Ihr Herzog auf dem Gänsewinkel ein Haus, das sich dazu schickt; wo nicht, so kauft oder baut dieser reiche Herzog eines. Es trägt zur Verschönerung der Stadt bei und er stiftet seines grossen Namens ewiges Gedächtnis im Himmel so wie auch auf Erden. Amen, so wird es auch sein!«

Über die wirkliche Sachlage gibt folgende Stelle aus einem Briefe an HARDING vom 30. Juli 1806, der wohl unter dem Eindruck der Aussicht auf die Göttinger Berufung geschrieben ist, Aufschluss:

¹⁾ Vergl. Brief von GAUSS an OLBERS vom 21. Dezember 1804.

»Was unsere neue Sternwarte betrifft, so haben Sie davon eine nicht richtige Vorstellung. Ihnen darüber eine vollständige Aufklärung zu geben, würde sich eher für eine mündliche Unterredung als für einen Brief eignen. Hier will ich also nur zwei Fakta berühren:

1) Was den Bau betrifft, den Sie für dekretiert und vielleicht schon angefangen halten, so ist dieses keineswegs der Fall. Es ist allerdings ein Plan gezeichnet, dieser dem Baumeister übergeben, von ihm in architektonischer Hinsicht abgeändert und die Kosten angeschlagen. Was aber ausserdem geschehen ist, ist bloss etwas negatives, nämlich die Äusserung, dass der Bau wegen vieler anderer nötiger Bauten wohl nicht vor künftigem Frühjahre würde anfangen können (ohne deswegen zu versprechen, dass er alsdann anfangen werde; diejenigen, die einen solchen Bau nicht wünschen, werden im künftigen Frühjahre leicht auch wieder andere nötige Bauten wissen).

2) Was die Instrumente betrifft, so ist allerdings Befehl gegeben, mit den Erben des Grafen HAHN¹⁾ in Unterhandlung zu treten; allein dies wird, wie ich mit höchster Wahrscheinlichkeit versichern kann, zu Nichts führen. Denn erstens sollen alle Instrumente zusammen verkauft werden und sogar alle physikalischen und chemischen mit dabei bleiben. Mit allem diesem Wesen ist aber garnichts gedient, und es sind eigentlich nur ein paar Nummern darunter, die ich haben möchte; zweitens das einzige Instrument, an dessen Besitz mir wirklich viel gelegen wäre, nämlich der 3füssige Dollond, soll garnicht mit verkauft werden; drittens hat Herr v. ZACH auch sehr dagegen geraten. — Von der Absicht, neue Instrumente in England zu bestellen, ist aber noch garnicht die Rede gewesen; ich habe zwar durch Herrn v. ZACH ein 5füssiges Achromat bestellt, aber für meine eigene Rechnung.

Überhaupt werde ich diese ganze Angelegenheit, an deren Veranlassung ich ganz und gar keinen Anteil habe, ihren Gang gehen lassen, ohne sie weder zu hindern noch zu urgieren; denn dass das Ganze das würde, was ganz meinen Wünschen entspräche, dazu habe ich wenig Hoffnung; ich meine, dass die Sternwarte mit allen zur heutigen Astronomie nötigen Instrumenten

¹⁾ Über die im Juli 1806 zum Verkauf stehende wertvolle Sammlung des Grafen FRIEDRICH HAHN siehe Monatl. Corr. 1806, S. 295. — Die Königsberger Sternwarte erhielt daraus bei BESSELS Berufung (1810) den 26-zölligen Kreis von CARY und andere Instrumente; vgl. JOH. A. REFSOLD, *Zur Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, I. Band, Leipzig 1908, S. 118. — BRDL.



von der ersten Güte versehen und dem Direktor eine anständige perennierende Wohnung unmittelbar an der Sternwarte gebaut würde, kurz, dass es so würde, wie der Plan war, es in Göttingen zu machen. Lassen Sie indes alles obige, was ich Ihnen nur im engsten Vertrauen schrieb, ganz unter uns beiden bleiben; nur HEYNE können Sie gelegentlich sub rosa einen Wink davon geben.

Der, den Sie mir als Gehülfen schon beigeordnet glaubten, ist Herr BARTELS¹⁾, ein geborener Braunschweiger, der einen Ruf nach Kasan hatte.

Im weiteren Verlaufe des Unglücksjahrs 1806 ruhten alle Verhandlungen; der Herzog erlag im Oktober 1806 seinen im Felde erhaltenen Verwundungen.

Zu Anfang des Jahres 1807 erneuerte man von Petersburg aus nochmals den Versuch, GAUSS zu gewinnen, und im April dieses Jahres erhielt er von HEYNE die Anfrage²⁾, ob er »Göttingen als einen Zufluchtsort betrachten wolle, so lange bis die schrecklichen und noch mehr Schrecklicheres drohenden Zeiten«, die eine regelrechte Berufung unmöglich machten, vorüber wären. Er stellt ihm eine Anstellung und Besoldung von etwa 600 Rtl. in Aussicht, so lange bis er entweder einen vorteilhafteren Ruf erhalten oder in Hannover die Ordnung wiederhergestellt sei, so dass das Gehalt auf 1000 Rtl. erhöht werden könne. GAUSS zog darüber OLBERS ins Vertrauen in einem Brief, der verloren ist, und OLBERS antwortet ihm in einem Briefe vom 21./22. April, dass er nicht mit einem Gehalte unter 1000 Taler annehmen dürfe. Endlich im August 1807 trat die Entscheidung ein, indem GAUSS den endgültigen Ruf nach Göttingen erhielt, den er annahm.

Im einzelnen ist über GAUSS' Beobachtungstätigkeit in Braunschweig und die von ihm benutzten Instrumente folgendes zu berichten: Am 10. August 1802 schrieb ZACH an GAUSS, dem er im März dieses Jahres einen Sextanten geliehen hatte (siehe Seite 20): »Im nächsten Heft wünschte ich einiges aus Ihren Briefen von Ihren Beobachtungen mit dem Sextanten, Vergleichung der Uhren etc. im Auszug mitzuteilen. Besonders möchte ich Ihr Uhrenre-

1) Der frühere Hilfslehrer an der von GAUSS besuchten BÜTTNERschen Schule, der GAUSS bei seinen ersten mathematischen Studien unterstützte. Vergl. HANSELMANN, K. F. *Gauss, Zwölf Kapitel aus seinem Leben*, Leipzig 1878, S. 18. L. SCHLESINGER, *Der junge Gauss*, Nachrichten der Giessener Hochschulgeseilschaft, Bd. 5, Heft 3, 1927, S. 36. — BRDL.

2) Brief von HEYNE an GAUSS vom 12. April 1807, vorhanden im GAUSSarchiv.

gister von der Auchschen Uhr mitteilen, damit andere Liebhaber auch ein drittes Urteil darüber hören und es dem braven Künstler zur Empfehlung gereichen kann. Haben Sie daher noch einige Beobachtungen von Polhöhen oder Fortsetzung des Gangs der Uhren bei der gegenwärtigen grossen Hitze zur Hand, so bitte ich gehorsamst darum«. GAUSS, der in den verlorenen Briefen an ZACH häufig über seine Beobachtungen berichtet zu haben scheint, ist jedoch diesem Wunsche nicht nachgekommen, wenigstens ist die erste Beobachtung von GAUSS, die in der *Monatl. Corresp.* veröffentlicht ist, die des Merkurdurchgangs vom 9. Nov. 1802 (astronomisch Nov. 8, Werke VI, S. 231, wo das Datum falsch abgedruckt ist). Er machte diese Beobachtungen mit »einem von BAUMANN verfertigten zweifüssigen Achromaten«; dies ist wahrscheinlich das im Briefe von LECOQ vom 13. April 1799 oben Seite 9 erwähnte Teleskop des Carolinums, da GAUSS im Dezember 1803 noch kein eigenes achromatisches Fernrohr besass¹⁾. Er schreibt an OLBERS am 8. April 1803: »Ich gewinne die ausübende Astronomie und was damit zusammenhängt immer lieber. Ich habe diese Zeit hindurch an dem Mars einige Probeversuche in kreismikrometrischen²⁾ Bestimmungen gemacht, die freilich vorerst nur mittelmässig ausgefallen sind; aber ich sehe doch ein, dass man mit einem besseren und fester stehenden Fernrohre, als das von mir gebrauchte ist, und nach hinlänglicher Übung recht gute Beobachtungen auf diese Weise machen kann. Ich vermute aber doch, dass Sie manche eigentümliche Kunstgriffe und Vorteile dabei haben müssen. Dieser Tage habe ich bei dem jetzigen heiteren Wetter verschiedentlich Winkelmessungen um Braunschweig herum mit meinem Sextanten gemacht (Freund ZACH hat mir ihn ganz überlassen), und aus hiesiger Gegend schon eine grosse Anzahl Punkte niedergelegt; ich wundere mich selbst über die grosse Genauigkeit, die dabei erlangt wird, ungeachtet ich meine Winkel in Ermangelung eines Instruments zum Höhenmessen gar nicht auf den Horizont reduziere und viele Standpunkte habe, wo kein Objekt befindlich ist, nach dem ich wieder visieren kann. Ich

1) Vergl. Brief an OLBERS vom 18. Dezember 1803 auf Seite 24.

2) Als Kreismikrometer diente in jener Zeit der Rand des Gesichtsfeldes nach der Methode von BOSCOVICH oder LACAILLE. Vergl. R. WOLF, *Geschichte der Astronomie*, S. 591, wo aber übersehen ist, dass GAUSS und noch weit mehr OLBERS reichlichen Gebrauch von dieser Methode machten; AMERSON, *Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde*, Bd. II, Seite 513; siehe auch unten S. 49. — BRDL.



habe den Plan, einst das ganze Land mit einem Dreiecksnetz zu beziehen, wozu meine jetzigen Messungen nur eine Vorübung sind. Das Braunschweigische Land ist zwar schon chedem vom seligen Major GERLACH¹⁾ vermessen, allein welcher Genauigkeit seine bisher ungestochene Karte fähig sein kann, wird man daraus schliessen können, dass er nur ein gewöhnliches Astrolabium und Kette, oder, wie einige behaupten, auch dies nicht einmal, sondern nur Messsich und Schritte gebraucht hat. Eine hinlängliche Anzahl trigonometrisch bestimmter Punkte, mit seinem Detail verbunden, müssen zu einer guten Karte dienen können. Ich wünsche sehr, mich nach und nach mit einem guten Vorrat von optischen Werkzeugen zu versehen. An einem Orte wie Bremen fällt wohl öfters Gelegenheit zu dergleichen vor, und Sie verbänden mich sehr, wenn Sie dann meiner dabei gedächten. Ich sehe gar nicht auf den Preis. Besonders wünschte ich zu acquirieren 1. ein gutes astronomisches Achromat, hinreichend, um Sternbedeckungen, Finsternisse etc. zu beobachten und kreismikrometrischen Messungen zu dienen, 2. ein gutes terrestrisches Achromat, um entlegene Gegenstände, die man im Fernrohr des Sextanten nur sehen kann, erkennen und unterscheiden zu können, 3. Kometsucher, um sich in einer Himmelsgegend leichter orientieren zu können, 4. noch einen kleinen etwa 4- oder 5-zölligen Sextanten, der sich ohne fremde Beihilfe leicht transportieren lässt.« Und am 18. Dez. 1803: »Von dem vortrefflicher Künstler SCHRÖDER in Gotha habe ich einen (nicht achromatischen) Kometsucher erhalten, der, so viel ich bei der flüchtigen Prüfung beurteilen kann, die der seit drei Wochen fast beständig bedeckte Himmel erlaubt hat, sehr gut ist. Ich bin jetzt in meiner gegenwärtigen Wohnung so eingerichtet, dass ich die meisten laufenden Beobachtungen werde mitmachen können. Nur ein eigenes achromatisches Fernrohr fehlt mir noch; ich hoffe aber vor der Hand diesem Mangel durch ein erborgtes²⁾ abhelfen zu können. In einem Observationszimmer habe ich wenigstens nach Osten und Süden eine herrliche Aussicht.«

Im Februar 1804 fand sich für GAUSS Gelegenheit, ein schönes Spiegelteleskop anzuschaffen.

1) FRIEDRICH WILHELM ANTON GERLACH (1728—1802) war zuletzt Lehrer an der österr. Ingenieur-Akademie zu Gumpendorf bei Wien. — BRDL.

2) Vermuthlich das auf S. 9 und 33 bereits erwähnte des Carolinums. — BRDL.

In Lilienthal hatte nämlich SCHRÖTER seinen Gärtner GEFKEN durch SCHRADER¹⁾, den bekannten Hersteller von Spiegeln für Reflektoren, im Schleifen dieser unterrichten lassen. HARDING machte GAUSS in einem Briefe vom 28. Januar 1804 auf einen Spiegel, den GEFKEN gerade hergestellt hatte und den zu verkaufen er bereit war, aufmerksam. Der Herzog bewilligte den Ankauf des Spiegels mit Rücksicht auf die in Braunschweig einzurichtende Sternwarte. Über ihn äusserte sich HARDING in einem Brief an GAUSS vom 9. März 1804 folgendermassen: »Sie erhalten den schönen 10-füssigen Spiegel für Ihre künftige Sternwarte! ich hatte ihn längst für mich selbst gekauft; da aber Ihr Herzog ihn für ein so schönes Institut bestimmt hat, so trete ich ihn willig dazu ab. In keinem andern Falle würde ich ihn hingeben, denn er ist wahrlich ein Meisterstück, und verdient es, in Ihrem künftigen Tempel zu paradieren. Sie würden von HERSCHEL keinen bessern erhalten können. Er hat bei einer Brennweite von nur 10 Fuss einen verhältniss sehr grossen Durchmesser von 11 Zoll und gehört mithin unter die Seltenheiten, da solche Verhältnisse nur selten gewählt werden, indem die richtige Figur dabei zu erhalten eine schwere Aufgabe ist. Sie werden gewiss tausendfältiges Vergnügen durch dieses Teleskop geniessen, wozu ich im Voraus gratuliere.«

Der Spiegel traf Ende April 1804 in Braunschweig ein, wurde aber für GAUSS eine Quelle vieler Unannehmlichkeiten. GAUSS hatte die Montierung dem Mechaniker RUDLOFF in Wolfenbüttel, die Herstellung der Okulare und des Suchers SCHRÖDER in Gotha in Auftrag gegeben. Beide verzögerten ihre Arbeit ungewöhnlich lange und der von RUDLOFF geforderte übermässige Preis versetzte ihn dem Herzog gegenüber in eine peinliche Lage.

Als der Spiegel endlich im Mai 1806 gebrauchsfähig schien, bemerkte GAUSS, dass er sehr schlechte Bilder²⁾ gab, als deren Ursache HARDING im September desselben Jahres bei einem Besuch in Braunschweig feststellte, dass der Spiegel sich verzogen hatte. HARDING nahm ihn deshalb nochmals nach Lilienthal mit, wo dieser Fehler ohne Schwierigkeit behoben wurde. Aber

1) JOHANN GOTTLIEB FRIEDRICH SCHRADER, geb. zu Salzdahlum bei Wolfenbüttel, 1762 oder 63, gest. in St. Petersburg nach 1819. Über seinen längeren Aufenthalt in Lilienthal, wo er mehrere Spiegel herstellte, vgl. JOH. A. REFSOLD, *Zur Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, Band I, S. 93.

2) Brief von GAUSS an HARDING vom 25. Mai 1806; der Briefwechsel GAUSS-HARDING befindet sich in der Urschrift im GAUSSarchiv.





ehe er von dort zurückkam, war GAUSS' Berufung nach Göttingen zu Stande gekommen und dieser hatte schliesslich noch den Verdross, dass das schöne Instrument auf einen Antrag von GELPKE¹⁾ vom 10. Oktober 1807 dem Collegium Carolinum zum Gebrauch beim Unterricht überwiesen wurde. Auf den kurzen Befehl, das Instrument abzuliefern, der ihm vom Ministerium noch am gleichen Tage zugeing, berichtete GAUSS wie folgt in einem an den Geheimrat von WOLFRADT gerichteten Brief:

»Es ist mir gestern von Seiten des Hohen Ministerii ein Reskript zugekommen, welchem zufolge ich das in meinen Händen sich befindende Spiegelteleskop an die mir von dem Konzilium des Collegii Carolini anzuzeigende Person abgeben soll. Ich bin bereit, den Befehlen des Hohen Ministerii Folge zu leisten: inzwischen würde ich glauben, meinen Pflichten sowohl gegen mein mir ewig teures Vaterland als gegen die Wissenschaften zuwider zu handeln, wenn ich unterliesse, Ewr. Exzellenz untätigst auf einige Umstände aufmerksam zu machen, die dem Hohen Ministerium nicht bekannt sein konnten, und sonst vielleicht Dessen Absichten wegen des künftigen Gebrauchs jenes Instruments modifiziert haben würden, umso mehr da ich persönlich dabei garnicht interessiert bin. Ich nehme mir daher die Freiheit, Ewr. Exzellenz kostbare Zeit auf einige Minuten wegen dieses Gegenstandes in Anspruch zu nehmen: um dabei ganz verständlich zu sein, muss ich auch einige frühere Umstände berühren.

Im Jahre 1804 erhielt ich aus Lilienthal die Nachricht, dass dort ein 10-füssiger Teleskopspiegel, dessen Vortrefflichkeit man ungemein rühmte, feil sei; des Höchstseligen Herzogs Durchlaucht, der zufälligerweise davon hörte, gab Befehl, solchen für die damals intendierte Sternwarte anzukaufen. Dies geschah, der Spiegel kam hier an, und mir wurde der Auftrag gegeben, die

¹⁾ Über diesen Mann berichtet HÄNSELMANN, *K. F. Gauss, Zwölf Kapitel aus seinem Leben*, S. 83. Am Collegium Carolinum hielt seit einiger Zeit Dr. AUGUST HEINRICH CHRISTIAN GELPKE, Subkonrektor des Martineums, astronomische Vorlesungen. Ein komischer Herr: wenn in späteren Jahren seine Zuhörer ihm unermüdelich die Neckfrage nach den drei grössten Astronomen vorlegten, nannte er KEPLER und LA PLACE, den dritten namhaft zu machen, verbot ihm seine Bescheidenheit. Dieser Mann war es, der sich am 19. Oktober 1807 an ein Mitglied der Interimistischen Landesregierung, Geheimrat v. WOLFRADT, mit der Bitte wandte, ihm zum Besten jener seiner Vorlesungen das schiffüssige NEWTONsche Teleskop zukommen zu lassen - welches der Dr. GAUSS nur als ein von Sr. Durchlaucht dem verstorbenen Herzoge geliehenes Gut besitzt, wie ich gehört habe, und der in diesen Tagen von hier nach Göttingen abreist.

Montierung desselben besorgen zu lassen. Ich habe dies theils durch den Mechaniker RUDLOFF in Wolfenbüttel, theils durch SCHRÖDER in Gotha ausführen lassen; beider Arbeit ist zu meiner Zufriedenheit ausgefallen.

Diese durch mancherlei Hindernisse verzögerte Arbeit war erst im Sommer 1806 ganz vollendet. Indess fand ich dann bei dem Instrumente die gehoffte grosse Wirkung nicht, und erst nach vielen vergeblichen mühsamen Versuchen musste ich doch zuletzt auf die Überzeugung kommen, dass der Spiegel in seiner dermaligen Beschaffenheit das nicht leiste, was er sollte, und notwendig erst noch einmal durch die Hände des Künstlers gehen müsse, wenn das Instrument brauchbar und des Namens seines berühmten Verfertigers würdig sein sollte. Allein da bald nachher die bekannten Ereignisse eintraten, so glaubte ich nicht, dass es damals der Zeitpunkt sei, diese Sache in Anregung zu bringen, indem ich theils fürchtete, dass dies noch erhebliche Kosten machen würde, theils auch die Aussicht verschwunden war, dass das Instrument bald auf den rechten Platz kommen würde. So hat also diese Sache geruht, bis vor einem Monate, wo der Professor HARDING aus Göttingen — eben der, welcher vor 3 Jahren aus Lilienthal den Spiegel uns angerühmt und geschickt hatte — mich hier besuchte und sich selbst von der damaligen Unvollkommenheit des Spiegels überzeuete. Die Ursache derselben ist auch ausgemittelt; ich würde zu weitläufig werden und Ewr. Exzellenz ermüden, wenn ich dieselbe hier entwickeln wollte; ich bemerke also nur, dass der Spiegel sich verzogen hatte, und zwar infolge einer Einrichtung, deren Schädlichkeit der Verfertiger vor 3 Jahren noch nicht in dem Grade kannte, daher derselbe auch als ganz unschuldig angesehen werden muss, so wie die Versicherung von Männern wie SCHRÖTER und HARDING keinen Zweifel lassen, dass der Spiegel anfangs so vortrefflich wirklich war, als sie rühmten. Da nun Professor HARDING gerade von hier nach Lilienthal reiste, so glaubte ich, dass nie eine erwünschtere Gelegenheit kommen könnte, damit der Künstler unter Herrn HARDINGS Augen den Fehler redressierte, und ich so in Stand gesetzt würde, bei meiner Abreise von hier ein vollkommenes Instrument abzuliefern. Ich trug also um so weniger Bedenken, in diesem Zeitpunkte den Spiegel nach Lilienthal zum Umschleifen zu schicken, da Herr Professor HARDING glaubte, der Künstler werde diese Arbeit Ehrenhalber übernehmen.

Vor ein paar Tagen habe ich nun durch einen Brief des Herrn Professor



HARDING die angenehme Nachricht erhalten, dass es dem Künstler vollkommen gelungen ist, dem Spiegel seine ursprüngliche Vollkommenheit wiederzugeben; man hat auch auf der berühmten Lilienthaler Sternwarte Proben damit angestellt, die zu beweisen scheinen, dass jetzt das Instrument von einer Vollkommenheit sein wird, dass wenige in Deutschland ihm gleichkommen. Ein solches Instrument würde die erste Sternwarte zieren. Da der Künstler nun auch die oben erwähnte fehlerhafte Einrichtung durch Schaden belehrt nicht wieder anbringen wird, so wird eine neue Krümmung des Spiegels nicht zu besorgen sein. In ein paar Wochen wird der Spiegel wieder hier sein, vielleicht auch schon in wenigen Tagen.

Ewr. Exzellenz sehen hieraus, dass ich in diesem Augenblick zur Ablieferung des Instruments noch nicht im Stande bin: ich gebe indess mein Wort, dass es vor meiner Abreise auf alle Fälle geschehen kann und soll. Meine Idee ging dahin, wenn ich den Spiegel zurückhaben und von dem Werte des Instruments selbst Proben gesehen haben würde, den Vorschlag zu tun, dass ein so prachtvolles, seltenes und für den ersten Unterricht unwissender Anfänger viel zu herrliches Instrument, dessengleichen in ganz Deutschland wohl nur in Lilienthal sein möchte, der Universität Helmstedt geschenkt werden möchte, wo es bei dem rühmlichst bekannten Hofrat PFAFF in würdige Hände kommen und bei vorfallenden Gelegenheiten auch zum Besten der Wissenschaft selbst gebraucht werden könnte. Wieviel bei einem so kostbaren Instrument auf eine schonende vorsichtige Behandlung ankomme, brauche ich nicht zu erwähnen.

Ich habe es für meine Pflicht gehalten, Ewr. Exzellenz auf den hohen Wert, den dieses Werkzeug nun hoffentlich erhalten haben wird, aufmerksam zu machen: ich würde mir Vorwürfe machen, wenn ich durch Stillschweigen gewissermassen schuld wäre, dass es nicht so gebraucht würde, wie es sollte, und wie das wissenschaftliche Publikum, das die Existenz eines solchen Instruments kennt, erwartet. Übrigens aber unterwerfe ich die ganze Angelegenheit dem weisen Ermessen eines Hohen Ministerii und werde das Instrument demjenigen gewissenhaft extradieren, der dazu sich legitimieren wird. Sollten Ewr. Exzellenz noch mündliche Verabredung darüber treffen wollen, so bin ich gern zu Befehl.

Indessen wurde dieser von GAUSS erstattete Bericht ad acta gelegt und

das Instrument anscheinend doch an das Collegium Carolinum abgeliefert, da dies vielleicht schon versprochen war. Man vergleiche noch die Briefe von GAUSS an BESSEL vom 24. Juli 1807 und an OLBERS vom 2. Juli 1805, 6. und 29. Oktober 1807; in letzterem sagt GAUSS: »Es ist leicht möglich, dass dies Instrument nach meiner Abreise hier in sehr schlechte Hände kommt.«

Ausser den bereits genannten Instrumenten erwähnt GAUSS in dem Briefe an OLBERS vom 21. September 1804 (vergl. auch Werke VI, S. 248, 251 und 270) ein von ihm als sehr gut bezeichnetes SHORTSches Spiegelteleskop, das er vom 15. dieses Monats an benutzte und über dessen Herkunft sich nichts feststellen lässt; daneben erwarb er im Jahre 1805 ein RAMSDENSches Fernrohr von etwas über $2\frac{1}{2}$ Fuss Fokallänge (vergl. Brief an OLBERS vom 10. Mai 1805). Er berichtet auch an OLBERS am 30. Juli 1806, dass er durch ZACH ein fünffüssiges Achromat in England auf seine Rechnung bestellt habe, worauf ihm OLBERS antwortete, dass er auf ZACHS Bestellung des Fernrohrs nicht zu sehr rechnen soll, er habe selbst schon vor 4 Jahren ein solches bestellt, und nichts erhalten.

Im einzelnen schreibt er an OLBERS über diese Instrumente am 16. Oktober 1804: »Ich beobachte bei Mondschein weit besser als bei ganz dunkeln Nächten. Mit dem lichtstarken SHORT sehe ich auch bei dem hellsten Mondschein Sterne 9. Grösse ohne Mühe; und wenn ich das Gesichtsfeld mit seinen Grenzen vor mir sehe, so scheint das Auge viel weniger zu ermüden, als wenn ich bloss in schwarze Finsterniss sehe. Haben Sie diese Bemerkung nicht gemacht, oder sehen Sie vielleicht mit Ihrem herrlichen DOLLOND auch in mondlosen Nächten doch den Umfang des Gesichtsfeldes?« und am 25. September 1804: »Mein Kometensucher, womit ich ihn¹⁾ jetzt wieder sehr gut sehe, da der Mond weiter weg ist (nur am 17., 18. und 21. ging es nicht), kommt mir bei Richtung des Teleskopes, dessen Sucher gänzlich unbrauchbar und dessen Gesichtsfeld nur $25'50''$ hält, vortrefflich zu statten. Ich brauche fast nicht mehr Zeit, den kleinen Stern ins Feld zu bekommen, als wenn es der Mond wäre.«

Mit den ihm zur Verfügung stehenden Instrumenten beobachtete GAUSS ausser dem bereits oben S. 9 erwähnten Merkurdurchgang im Jahre 1802 (Werke

¹⁾ Den Planeten Juno. — BRDL.



VI, S. 231) und einzelnen Sternbedeckungen (Werke VI, S. 258) vielfach die Planeten Ceres, Pallas, Juno, Vesta, sowie den Kometen 1806 I (BIELA).

Als Kreismikrometer diente zu jener Zeit nach den von LACAILLE und BOSCOVICH (um 1740) gemachten Vorschlägen¹⁾ der Rand des Gesichtsfeldes. Etwa 60 Jahre später verbesserten KÖHLER und J. G. RESOLD die Beobachtungsmethode durch einen in der Brennebene aufgespannten Messingring¹⁾. Besonders ausgebildet wurde die Methode durch die zahlreichen Beobachtungen von OLBERS²⁾, der ausser dem an vier Fäden befestigten Ringe sich auch einer durch den Kreis gehenden Barre²⁾ bediente. Das erste Mikrometer in der heute üblichen Form verfertigte¹⁾ FRAUNHOFER 1821. — GAUSS scheint jedoch bei seinen Beobachtungen bis in spätere Zeit den Rand des Gesichtsfeldes benutzt zu haben, wie die Notizen im Nachlass und an anderen Stellen bestätigen. Erst in späterer Zeit, Januar 1844 oder etwas früher, erhielt die Göttinger Sternwarte ein MERZSCHES 6-füssiges Fernrohr mit einem Ringmikrometer mit mehreren Ringen. Notizen darüber finden sich im Nachlass im Beobachtungsbuch Pf, S. 59.

Eine Kreismikrometerbeobachtung der Ceres gelang GAUSS zum erstenmale am 29. August 1804 (vergl. Brief an OLBERS vom 7. September). Ausser dieser beobachtete er im September des genannten Jahres die eben von HARDING entdeckte Juno und zwar sehr fleissig, zunächst bis zum 28. dieses Monats. Dann nahm er davon Abstand, weil ausser den OLBERSschen auch noch gute Meridianbeobachtungen, namentlich von ZACH, vorlagen. Erst als im November die Beobachtungen der Juno spärlicher wurden, beobachtete er sie am 4. Dezember und später einigemal bis zum 20. Februar, wo sie schon sehr lichtschwach war. ZACH erwähnt in der Monatl. Corresp. (Werke VI, S. 263) dass diese Beobachtung überhaupt die letzte in der Opposition war; am gleichen Tage wurde Juno aber auch von OLBERS beobachtet. Von der Vesta erhielt Gauss sofort nach der Entdeckung einige Beobachtungen, die

¹⁾ WOLF, *Handbuch der Astronomie*, Zürich 1802, Bd. II, S. 122; AMBRONN, *Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde*, Bd. II, Berlin 1899, S. 513.

²⁾ Vergl. BESSEL, *Über das Kreismikrometer*, M. C. Bd. XXIV, November 1811, S. 446, sowie die Briefe von BESSEL an GAUSS vom 10. Dezember 1807, von OLBERS an GAUSS vom 12. März und 27. Mai 1807, vom 16. Februar 1821 und besonders die Briefe von OLBERS an BESSEL vom 3. Januar 1807 und vom 9. März 1812.

er zu seiner ersten Bahnbestimmung benutzte. Seine Braunschweiger Beobachtungen der Pallas fallen in die Jahre 1806 und 1807.

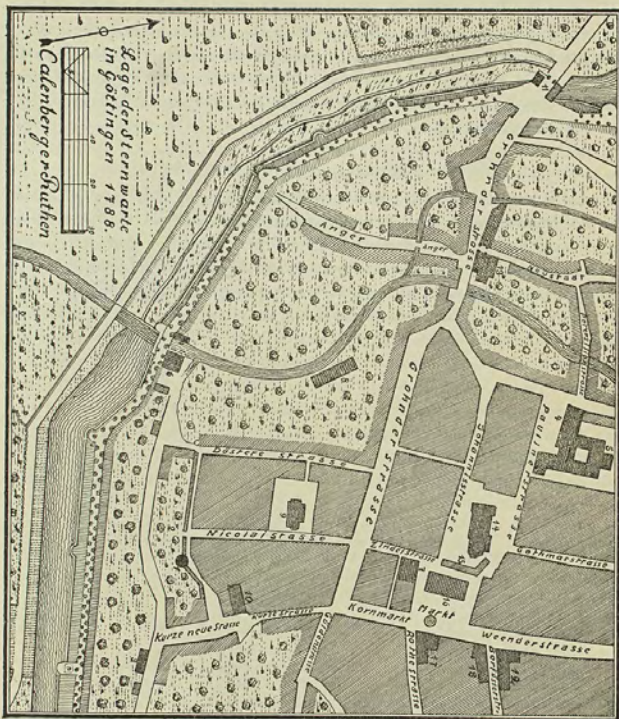
GAUSS' Tafeln für Nutation und Aberration sind im Jahre 1804 entstanden, wie er im September an OLBERS schreibt; sie sind in der Monatl. Corresp. Band XVII (Werke VI, Seite 123) im Jahre 1808 abgedruckt, jedoch für den Druck nach neuen Werten der Konstanten umgerechnet.

2. (erste Göttinger) Periode 1807—1813.

Im November 1807 siedelte GAUSS nach Göttingen über, wo zunächst die alte Sternwarte zu seiner Verfügung stand, während der im Jahre 1803 begonnene Bau der neuen Sternwarte infolge der politischen Verhältnisse ins Stocken geraten war und in den ersten Jahren nach GAUSS Übersiedelung nach Göttingen nur langsam fortschritt. Die alte Sternwarte¹⁾ war 1734 für JOH. ANDREAS v. SEGNER erbaut worden und lag an der alten Stadtmauer, von der das entsprechende Stück in der jetzigen Turmstrasse, früher »Klein Paris« genannt, nahe der Nikolaistrasse, noch erhalten ist. Von der alten Sternwarte sind keine Überreste vorhanden, doch scheint ein Stück der Stadtmauer, das erneuert ist, ihre frühere Lage zu bezeichnen; sie befand sich 6",11 nördlich und 28",43 westlich von der neuen Sternwarte (Mittelpunkt der grossen Kuppel, in der gegenwärtig das grosse Heliometer aufgestellt ist), also in $51^{\circ}31'54",3$ n. B. und $39^m 44",35$ östl. v. Greenwich. Im Jahre 1755 erhielt TOBIAS MAYER, 1762 LOWITZ und

¹⁾ Vergl. den umstehenden, aus dem 2. Teil des in der folgenden Fussnote genannten Werkes entnommenen Lageplan, sowie die nach einem auf der Göttinger Sternwarte vorhandenen Stich hergestellte Abbildung am Schluss dieses Aufsatzes; auch W. SCHUB, *Beiträge zur Geschichte der Astronomie in Hannover* (Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Berlin 1901, S. 102/104). — Die Legende zum Lageplan ist nach PÖTTER:

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 1. Das Observatorium. | 10. Die katholische Kirche. |
| 2. Der ökonomische Garten. | 11. Das Grohder Tor. |
| 3. Das chemische Laboratorium. | 12. Das Kommandantenhaus. |
| 4. Die Universitätskirche. | 13. Die Marienkirche. |
| 5. Das Konzilienhaus. | 14. Die Johanniskirche. |
| 6. Eine der beiden Stadtmöhlen. | 15. Der Fleischscharn. |
| 7. Die Universitätsapotheke. | 16. Das Rathaus. |
| 8. Eines der beiden Brauhäuser. | 17. Das Kaufhaus. |
| 9. Die Nikolaikirche. | 18. Die Ratsapotheke. |



1764 KÄSTNER »die Aufsicht darüber«¹⁾. Der letztere gab für die 1765 erschienene *Göttinger Gelehrten-geschichte* von PÜTTER folgende Beschreibung der Sternwarte und der Instrumente:

»Das Observatorium befindet sich am mittägigen Ende der Stadt, so dass ihm die Aussicht nach Mittag zu nur durch die entlegenen Berge begrenzt wird, welche etwa drei Grade vom Horizonte wegnehmen. Nordwärts hat es keine hohen Häuser in der Nähe, dass auch dahin die Aussicht so frei ist, als man zu den auf dieser Seite nötigen Beobachtungen verlangen kann. Bekanntermassen beobachtet man die himmlischen Körper ordentlich nicht, wenn sie dem Horizonte sehr nahe sind, und die Fälle, wo man dazu genötigt ist, ereignen sich sehr selten; das wird die Frage beantworten, welche zuweilen von Neugierigen, die das Observatorium besehen, geschieht: ob es auch hoch genug sei? Wegen der angeführten Lage ist das Observatorium auch von der Unbequemlichkeit anderer Sternwarten, welche auf der Nordseite der Städte liegen, frei, die zuweilen Rauch und dergleichen Hindernisse in der Gegend des Himmels finden, wo die himmlischen Begebenheiten ordentlich vorfallen.

»Zum Grunde des Observatorii hat man einen von den runden Türmen in der Stadtmauer gewählt, welche vor diesem zur Verteidigung dienten. Man hat darauf einen Saal erbaut, wo die Werkzeuge zum Observieren befindlich sind, und auch selbst observiert werden kann. Will man etwas dergleichen unter freiem Himmel verrichten, so lassen sich die Werkzeuge gleich aus dem Saale auf einen Gang schaffen, der ihn rings herum umgibt. Über dem Saale befindet sich noch ein Boden unter dem Dache, wo ein Fenster gegen Mittag noch weitere Aussicht gibt. Unter dem Saale ist ein Stübchen angebracht, welches zur Bequemlichkeit des Beobachters dienen könnte, wenn er die Zeit einer himmlischen Begebenheit abwarten muss. Zu einer ordentlichen Wohnung war der Platz nicht zugänglich.

»Das vornehmste Werkzeug ist ein Mauerquadrant, von JOHN BIRD in London gefertigt und dem zu Greenwich, wie solcher in SMITHS *complete System of optick's* beschrieben wird (B. III, ch. 7), völlig ähnlich. Er hat acht englische Fuss

1) PÜTTER, *Versuch einer akademischen Gelehrten-geschichte*, 1. Teil Göttingen 1765, S. 238. — 2. Teil Göttingen 1788. — 3. Teil von F. SAALFELD, Hannover 1820. — 4. Teil von OESTERLEY, Göttingen 1838. Die beiden letzteren unter dem Titel »Geschichte der Universität Göttingen«.



im Halbmesser und ist an einem einzigen grossen Steine so befestigt, dass sich sein Fernrohr, welches ungefähr eben die Länge hat, in der Mittagsfläche dreht; das Fernrohr ist von ausnehmender Güte. Es fasst über 1 Grad. Im gemeinschaftlichen Brennpunkte beider Gläser geht ein Faden senkrecht auf die Mittagsfläche, und auf diesem stehen fünf andere senkrecht, die also Stücke von Stundenkreisen, wie jener ein Stück eines auf die Mittagsfläche senkrechten Kreises, vorstellen. Der mittelste der fünf ist in der Mittagsfläche, die Entfernung jedes Fadens vom nächsten beträgt $7\frac{1}{4}$ Minuten. Man kann also beim Durchgange der Sonne durch die Mittagsfläche zehn Antritte, fünf von jedem Rande an jedem Faden, und zugleich die Höhe der Sonne bequem beobachten. Bei Sternen hat man fünf solche Beobachtungen nebst der Höhe. Die Zeiten gibt eine Uhr an, die gleich am Quadranten steht, dass der Beobachter die Pendelschläge sehen und hören kann. Für grosse Höhen lässt sich eine Klappe über dem Quadranten mittelst einer Stange, die der Beobachter gleich bei dem Quadranten ergreifen kann, aufstossen, dass man den Himmel gerade über sich entdeckt, und ebenso wieder zumachen. Bei geringen Höhen dient ein Fenster. Vermittelst dieses Quadranten hat der sel. Prof. MAYER ein sehr vollständiges und richtiges Verzeichnis der Fixsterne im Tierkreise verfertigt. Es befindet sich unter den noch ungedruckten Abhandlungen der königlichen Sozietät der Wissenschaften.

»Weil man den Quadranten in seiner jetzigen Stellung nur gegen Mittag zu brauchen kann, so ist am gegenüber stehenden Ende des Saales auch ein Stein in der Absicht gesetzt worden, dass man den Quadranten daran bringen könne, nördliche Höhen damit zu nehmen. Ebendasselbst steht auch noch eine Pendeluhr. Beide Uhren sind von dem geschickten Künstler, dem hiesigen Rats Herrn KAMPE, nach der Art, wie MARINONI *de Spec. Dom.*¹⁾ die seinige beschreibt, verfertigt. Sie gehen 4 Wochen lang. Eine andere etwas schlechtere Pendeluhr ist auch noch vorhanden.

»Ferner findet sich hier ein beweglicher messingener Quadrant, 1 Fuss im Halbmesser, mit einem Fernrohr von Herrn KAMPE. Im Fernrohr ist ein

1) JOH. JACOB VON MARINONI, *De astronomica specula domestica et organico apparatu domestico libri duo*, Viennae 1745. — BRDL.

Mikrometer vom sel. Prof. MAYER nach seiner Erfindung verfertigt (*Cosmogr. Nachr.* 1748¹⁾).

»Das grösste vorhandene astronomische Fernrohr ist 12 englische Fuss. Die Gläser sind nebst den Fassungen in England verfertigt. Noch eines ist von 6 Fuss, das eine blecherne, hinten erweiterte Röhre hat, das erweiterte Mikrometer nach des HEITH VON SEGNER Angaben Comm. soc. reg. scient. Goett. tom. I p. 27 zu fassen. Es ist aber gegenwärtig kein Mikrometer dabei. Ein sehr schönes DE LA HIRESches Mikrometer ist von JOHN BIRD auch mit dem Zusatze, den SMITH *System of opticks* art. 87 §. *Lehrbegriff der Optik* III B. 8, C. 138 §. BRADLEYEN zuschreibt, HERR DE LA LANDE aber bei BEVIS zu London, an einem alten HEVELSchen Mikrometer gesehen hat (*Astronomie* art. 1878²⁾). Es kann an das zwölffüssige Fernrohr gebracht werden. Auf der Erde zu gebrauchen sind zwei vortreffliche Fernrohre von GUISEPPE CAMPANI vorhanden; das längste von 30 römischen Palmen (etwa $20\frac{1}{2}$ Pariser Fuss), das kürzere von 7 Fuss; ingleichen 2 Tubi binoculi. Ausser den nötigen Gestellen zum Gebrauch der langen Fernrohre sind auch noch zwei machinae parallatae da.

»Der sel. Prof. MAYER hatte sich bekanntermassen sehr mit dem Monde beschäftigt und selbst eine Mondkugel zu verfertigen unternommen. Der Grund davon sollte ein Planisphaerium des Mondes sein, das er nach seinen Beobachtungen gezeichnet hatte, und daraus die Segmente zu Überziehung der Kugel sollten gezeichnet werden. Er hat die meisten dieser Segmente gezeichnet hinterlassen; auch sind einige schon in Kupfer gestochen. Dies alles ist von königlicher Regierung nach seinem Tode gekauft worden und wird auf dem Observatorio verwahrt. Die Zeichnungen vom Monde übertreffen an Richtigkeit und Schönheit alle bisher bekannt gemachten. Zugleich sind durch eben die gnädige Fürsorge viele Bände Manuskripte des sel. MAYER auch zum Gebrauch auf der Sternwarte beibehalten worden, die teils eigene oder zu gewisser Absicht gesammelte Beobachtungen, teils astronomische und auch andere mathematische Untersuchungen enthalten.»

Im zweiten Teil von PÜTTERS *Göttinger Gelehrtengeschichte* (1788), S. 266,

1) JOH. TOBIAS MAYER (der ältere), *Beschreibung eines neuen Mikrometers*, *Cosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748*, von JOH. TOBIAS MAYER besorgt, Nürnberg 1750. — BRDL.
2) In der 3. Ausgabe, 1792, art. 2364 (2. Band, S. 603). — BRDL.



wird mitgeteilt, dass an der Südseite der Sternwarte, und später auch an der Nordseite ein Anbau hergestellt wurde zur Aufstellung der Quadranten, die zur Beobachtung im Süden und Norden gedreht werden konnten. Über die in den Jahren 1765—1788 angeschafften Beobachtungsinstrumente lesen wir bei PÜTTER im wesentlichen:

»1) Ein GREGORIANISCHES Spiegelteleskop von JAMES SHORT, 20 Zoll lang, mit zweierlei Okularröhren; ausser dem daran befindlichen kleinen Spiegel ist noch ein zweiter zu stärkeren Vergrösserungen dabei; ein Geschenk von des verstorbenen Herzogs von YORK königlicher Hoheit.

»2) Eine Uhr mit rostförmigen Pendel, nach HARRISONS Erfindung von JOHN SHELTON zu London. Dass diese Uhr¹⁾ ihrer Absicht gemäss von Wärme und Kälte ihren Gang nicht merklich ändert, haben beständige Beobachtungen versichert. (KÄSTNER, *Über die Änderungen des Ganges der Pendeluhrn im Sommer und im Winter*, Göttingen 1778).

»3) Eine Uhr zum Zählen der Sekunden beim Observieren, wenn man von der ersten zu weit entfernt ist, um die Pendelschläge derselben zu hören; bei jeder Minute tut sie einen Schlag mit einem Glöckchen zur Erinnerung, dass man die Minute aufschreiben muss; von ebendemselben verfertigt.

»4) Ein beweglicher Quadrant von J. Sisson zu London; er hat zwei englische Fuss im Halbmesser und ist sowohl zum Höhenmessen als auch zum Messen der Winkel auf der Erde eingerichtet; er kann zu der letzten Absicht mittelst Gewinden und eines Bogens horizontal gestellt werden; dabei sind noch drei achromatische Fernrohre. Wenn er horizontal gestellt wird, muss das Fernrohr, das zum Höhenmessen dient, abgenommen, und ein anderes, das man auf seiner Regel neigen kann, daran gebracht werden. Der Rand des Quadranten ist von 10 zu 10 Minuten geteilt, der Vernier gibt 20 Sekunden, und durch die Mikrometerschraube kann man von 4 zu 4 Sekunden angeben. Der Azimuthalzirkel hält 7 Zoll im Halbmesser und ist in halbe Grade geteilt; durch den Vernier erhält man die Winkel von 3 zu 3 Minuten. (Herr DEMAINBRAY, welcher die Aufsicht über das königliche Observatorium zu Richmond hatte, veranstaltete diesen Quadranten auf Hofrat KÄSTNERS

1) Über diese Uhr vgl. die Fussnote S. 52.

Vorstellung, als in des Königs deutschen Landen die geographische Lage einiger Örter durch astronomische Beobachtungen sollte bestimmt werden. So hat sich Professor LICHTENBERG desselben bedient. Man sehe seine Nachricht davon *Novi Commentarii Societ. Reg. Scient. T. VII ad. 1776, p. 210*¹⁾).

»5) Ein Microscopium compositum, Sonnenmikroskop und Camera obscura, von G. ADAMS zu London. Diese Sammlung optischer Werkzeuge beschreibt ihr Verfertiger GEORGE ADAMS, Mathematical Instrumentmaker to his Majesty in seiner *Micrographia illustrata; or the microscope explained*, vierte Ausgabe, London 1771.

»6) Eine kostbare UHR von JUST. VULLIAMY et Son. Sie hat 4 Paar Zeiger; jedes Paar zeigt zusammengehörig Minuten und Sekunden; zu dem letzten Paar gehört noch ein dritter Zeiger, welcher Achtheile einer Sekunde angibt. Wenn alle Zeiger auf 60 gestellt werden, und die Uhr wird in Bewegung gesetzt, so werden alle Zeiger eines Namens gleichförmig gehen. Die Uhr ist alsdann anzusehen, als wären es vier Minuten- und Sekundenuhren, davon die vierte noch Achtelsekunden angibt. Man kann nun jedes dieser Paare hemmen, ohne dass die anderen im Gange gestört werden, und also dadurch die Augenblicke von vier Beobachtungen hinter einander angeben, ohne zu zählen oder die Zahlen aufzuschreiben.

»7) Ein NEWTONSCHES Spiegelteleskop von HERSCHEL verfertigt. Der grosse Spiegel hat 10 Fuss Brennweite, 9¼ Zoll Öffnung; er wiegt 18 Pfund. Ausser dem Okularrohre zum Gebrauche auf der Erde sind zum astronomischen Gebrauche 8 Okulare dabei, die stärkste Vergrösserung ist etwa 1000 mal im Diameter. Der Mechanismus des Stativs ist ganz ausserordentlich künstlich, das Instrument kann sehr leicht und genau dadurch regiert werden, welches den Gebrauch dieses grossen Instruments sehr bequem macht. Rohr und Stativ sind von Mahagoniholz. Ausser dem Gebrauche wird der grosse Spiegel aus dem Rohre herausgenommen und in einen besonderen Kasten gelegt, in welchem eine messingne Büchse befindlich, worin er so genau passt, dass die Luft durch Ventile herausgetrieben und er so auf die beste Art verwahrt wird. Der Prinzen königliche Hoheiten hatten im Juli 1786 dieses Teleskop

1) GEORG CHRISTOPH LICHTENBERG, *Observationes astronomicae per annos 1772 et 1773 institutae.* — BRDL.



mitgebracht, und Herr HERSCHEL hat bei seinem hiesigen Aufenthalte 1786 zu dessen Aufstellung und Gebrauch selbst Anweisung gegeben.

»Alle diese Stücke von Num. 2 an sind königliche Geschenke; Num. 2, 3, 4, 5, 7, von Sr. Majestät dem Könige, Num. 6 von Ihro Majestät der Königin.

»8) Eine Tertienuhr von J. A. KLINDWORTH zu Göttingen erfunden und gemacht. Sie hat drei Zeiger, einen für die Minuten, einen für Sekunden und einen, der die Tertien angibt. Man kann sie beim Anfange einer Beobachtung in Bewegung setzen und beim Ende hemmen und so die Zeit sehr genau angeben.

»9) Ein beweglicher Quadrant von dem verstorbenen Bauhern L. KAMPE zu Göttingen. Er hat drei Fuss im Halbmesser; auf dem Rande sind zweierlei Theilungen, eine in 90 Grad, die andere in 96 Teile; jeder Grad ist in 6 Teile geteilt; durch den Vernier erhält man einzelne Minuten und durch die Mikrometerschraube einzelne Sekunden. Von den 96 Theilen ist jeder in 8 Teile geteilt; 17 dieser Teile sind auf dem Vernier in 16 Teile geteilt. Der Azimutalzirkel hält 5 Zoll im Halbmesser und ist in ganze Grade geteilt; durch den Vernier erhält man einzelne Minuten.

»10) Ein achromatischer Tubus von 4 Fuss mit doppeltem Objektiv von DOLLOND, mit einem messingnen Stative.

»11) Ein vortrefflicher achromatischer Tubus von 4 Fuss mit dreifachem Objektiv, dessen Öffnung 4 Zoll, von DOLLOND. Diesen Tubus hat der sel. Geh. Sekretär SCHERNHAGEN zu Hannover besessen und das dazu gehörige Stativ dazu machen lassen. Nach dessen Tode ist dieses Instrument von königlicher Regierung für das Observatorium angekauft.

»Die Instrumente Num. 8—11 hat das Observatorium königlicher Regierung zu verdanken.»

Hieraus dürfte annähernd der Zustand zu ersehen sein, in dem GAUSS bei seiner Ankunft in Göttingen die alte Sternwarte vorfand, die ihm aus seiner Studienzeit noch wohl in Erinnerung sein mochte. Er schreibt am 5. Januar 1808 an OLBERS: »Ihren Klagen über das den Beobachtungen so ungünstige Wetter muss ich in vollem Masse beistimmen; indessen scheinen Sie in Bremen doch noch beträchtlich begünstigter zu sein als wir hier, wo z. B.

vom 23. November bis 17. Dezember auch nicht ein einziger Abend gewesen ist, wo an Beobachtungen hatte gedacht werden können. Was ich hier in Absicht auf den Kometen¹⁾ habe tun können, ist also bisher nur sehr wenig; dazu kommt noch, dass ich hier den Zustand der meisten Instrumente noch unter meiner Erwartung gefunden habe. Der an sich schöne grössere DOLLOND ist, wie Sie selbst Sich erinnern werden, ganz erbärmlich montiert, ausserdem ist kein Okular dazu, das zu Kreismikrometerbeobachtungen brauchbar wäre; bisher war nur eine sehr starke Vergrösserung übrig. HARDING hat eine schwächere dazu machen lassen, deren Gesichtsfeld aber zu gross gelassen ist; schon in der Nähe des Randes werden die Fixsterne zu langen Spiesen. Das HERSCHELsche Teleskop tut allerdings herrlichen Effekt, unser Komet hat noch viel Licht darin, aber ich traue der festen Stellung nicht; auch glaube ich eine merkliche Parallaxe zu haben, meine Beobachtung vom 17. Dezember war damit angestellt. Am 29. Dezember versuchte ich es mit einem SHORTschen Spiegelteleskop, welches beinahe so gut ist, wie das, dessen ich mich immer in Braunschweig bediente²⁾; das Gesichtsfeld ist ziemlich rein, aber die Montierung ist so äusserst wacklig, dass der leiseste Wind es schon bewegt. Endlich habe ich nun meine Zuflucht zu einem kleinern DOLLOND genommen, womit ich sowohl in Ansehung der Montierung als des rein begrenzten Gesichtsfeldes sehr zufrieden bin, nur ist es für den Kometen jetzt fast etwas zu schwach, das Gesichtsfeld ist 47', welches mir die Beobachtung sehr erleichtert, da ich in Braunschweig immer mit einem von 25' mich behelfen musste; für die Asteroiden wird dies Instrument mir künftig recht gute Dienste tun, nur schade, dass es keinen Sucher hat. Doch finde ich die Gegenstände leicht, wenn ich irgend einen Leitstern mit blossen Augen sehen kann.«

Einen, allerdings nicht vollständigen Überblick über die Beobachtungstätigkeit auf der Göttinger Sternwarte gibt neben den noch heute im Inventar der Sternwarte vorhandenen Beobachtungsbüchern (vergleiche die Bemerkungen Werke XI 1, S. 507, sowie weiter unten) das handschriftliche »Tagebuch der astronomischen Beobachtungen auf der Sternwarte in Göttingen«, das sich in zwei Bänden und einem kleinen Quartheft im Nachlass befindet und worin die

1) Komet 1807. — BRDL.

2) Vergleiche oben Seite 39.

XI: Abb. 3.



meisten Beobachtungsergebnisse in fortlaufender Zeitfolge eingetragen sind, zum grossen Teil auch mit den zugehörigen Reduktionen. Während das Heft nur die Zeit vom 1. Januar bis 31. Juli 1808 umfasst, beginnt der erste Band erst mit dem 3. November 1808; im ganzen reicht das *Tagebuch*, mit Lücken in den letzten Jahren, bis April 1822. Über seine Beobachtungen mit den in späterer Zeit angeschafften Fundamentalinstrumenten, den Meridiankreisen und dem Passageninstrument, sowie über die meisten Planeten und Kometenbeobachtungen führte GAUSS besondere Protokolle, die an anderen Stellen des Nachlasses meist auf Zetteln, ebenfalls nicht vollständig, erhalten sind.

Als regelmässiger Beobachter ist vor allem HARDING zu nennen, der bereits 1805 als ausserordentlicher Professor und Inspektor der Sternwarte nach Göttingen berufen war und neben seiner Beobachtungstätigkeit Vorlesungen über die Anfangsgründe der Astronomie, im besonderen aber über Nautik hielt.

Besonders regelmässig sind in das *Tagebuch* die Beobachtungen der Sonne und von Fixsternen mit dem Mauerquadranten eingetragen, die meist von HARDING angestellt sind. Sie dienten zur Zeitbestimmung und zur Bestimmung von Sternörtertern, die HARDING zur Herstellung seiner Himmelskarte¹⁾ und der Sternverzeichnisse benutzte. Ein Bericht HARDINGS darüber befindet sich in der *Monatl. Corr.* 1810 August; es heisst dort:

»Es war wohl nicht anders zu erwarten, als dass den Pariser Astronomen, welche den ungeheuren Schatz von Sternen in der *Histoire céleste française*²⁾ zusammenhäufeten, noch mancher Stern von nicht unbedeutender Grösse entgehen musste, und wirklich findet man ausser den von ihnen aufgezeichneten am Himmel noch eine so grosse Menge von der 6., 7., 8. und 9. Grösse, dass ein Beobachter, welcher sich entschliessen wollte, auch diese zu bestimmen, eine reiche Nachlese finden könnte, die einer neuen Ernte gleichen würde. So gern ich mich selbst dieser nützlichen Arbeit unterziehen möchte, um desto mehr muss ich es beklagen, dass die hiesige Sternwarte mit den zu diesem Unternehmen notwendigen Instrumenten nicht versehen ist. Denn wenn sie gleich einen vortrefflichen Mauerquadranten besitzt, dessen Wert durch

1) HARDING, *Atlas novus coelestis*, Göttingen 1822, neue Ausgabe durch JAHN 1856. Zuerst in Lieferungen erschienen; 2. auch die wiederholten Mitteilungen darüber in der *Monatl. Corr.* 1807—1811.

2) JOS. JÉRÔME DE LA LANDE, *Histoire céleste française, contenant les observations faites par plusieurs astronomes français*, Paris 1801. — BRDL.

die Arbeiten des unsterblichen TOBIAS MAYER hinreichend konstatiert ist, so ist er doch gerade zu diesem Unternehmen nicht ganz geeignet, indem das daran befindliche Fernrohr von nur 1½ Zoll Öffnung¹⁾ kaum Sterne von der 8. Grösse und auch diese nur bei der heitersten Luft zeigt; man weiss, wie selten die Atmosphäre in unseren Gegenden in einem solchen Zustande ist. —

»Unterdessen habe ich getan, was mir dieser Quadrant möglich macht, und diejenigen bisher noch übergangenen Sterne sechster und siebenter Grösse, die mir bei meinen Nachsuchungen am Himmel vorgekommen sind, näher zu bestimmen gesucht. Das folgende kleine Verzeichnis enthält diejenigen, welche sich auf den zur ersten Lieferung meines Himmelsatlases gehörenden vier Blättern befinden. Den Besitzern dieser Karten dürfte es vielleicht angenehm sein, die genauere Position dieser Sterne noch früher zu erfahren, als ich sie in dem Vorberichte zu diesem Atlas werde bekannt machen können, und daher erlaube ich mir die Freiheit, Sie um einen Platz in der *Mon. Cor.* für dieselben zu bitten. Genehmigen Sie es, so werde ich ein ähnliches kleines Verzeichnis solcher Sterne, welche auf den Blättern der vor kurzem herausgekommenen zweiten Lieferung sich befinden, zu gleichem Zwecke nächstens überreichen. Die Sterne dieses Verzeichnisses sind fast sämtlich vier- bis fünfmal, wenige nur einmal beobachtet²⁾.

Mehrere dieser Beobachtungen sind von GAUSS angestellt, im besonderen die in den Monaten März bis Juni 1811, in welcher Zeit HARDING in Paris war, um die Lücken seiner Sternkarten auszufüllen, da er zu diesem Zwecke vom König von Westfalen ein Geschenk von 4000 Francs erhalten hatte³⁾.

Daneben wurden am Mauerquadranten die grossen Planeten, der Mond, Vesta und vereinzelt auch Ceres beobachtet, und zwar Vesta häufig von GAUSS. Von allen diesen Beobachtungen scheinen jedoch nur die der Vesta und auch diese nicht vollständig veröffentlicht worden zu sein. Einzelne Beobachtungen

1) In dem zwischen GAUSS und HARDING im Mai und Juni 1803 gewechselten Briefen ist davon die Rede, das Fernrohr des Quadranten durch ein anderes mit einem Objektiv von 3½ Zoll zu ersetzen. Das letztere scheint auch bei DOLLOND bestellt worden zu sein (HARDING an GAUSS, 20. Juni 1803); jedoch befindet sich noch heute das alte Objektiv am Mauerquadranten. — BRDL.

2) An dieser Stelle mag erwähnt werden, dass AUWERS die Beobachtungen von TOBIAS MAYER am Mauerquadranten zur Aufstellung seines Sternverzeichnisses neu reduziert hat (AUWERS, *Tobias Mayers Sternverzeichniss nach den Beobachtungen auf der Göttinger Sternkarte in den Jahren 1756 bis 1760*, Leipzig 1894).

3) Vergl. die Briefe von GAUSS an OLBERS vom 24. Oktober 1810, von OLBERS an BESSLER vom 18. September 1810, GAUSS an BESSLER vom 21. Oktober 1810 und GAUSS an SCHUMACHER vom 10. März 1811.

führen auch von SCHUMACHER (1809), BESSEL (1810), GERLING (1810—1813), und WACHTER (1811), her; ausser den genannten mögen bei dieser Gelegenheit auch die Namen TRARKS (1808), NICOLAI, SEEBER (1811), ENCKE, HANBURY, WACHTER (1813), MÖBIUS (1814), TITTEL (1815), WESTPHAL (1816), DIRKSEN, MERIAN (1817), POSSELT (1817—1818), erwähnt werden, die sich als GAUSS' Schüler in Göttingen aufhielten.

Neben Vesta konnte Ceres nur unter ganz besonders günstigen Bedingungen und die übrigen kleinen Planeten garnicht am Mauerquadranten beobachtet werden, weil das Fernrohr zu lichtschwach war. GAUSS beklagt sich darüber noch im Briefe an OLBERS vom 20. Juni 1814 mit folgenden Worten: »Das ernstliche Beobachten der Sonnenflecken werde ich doch wohl verschieben müssen . . . Am Mauerquadranten ist nichts Würdiges zu machen. Den vorige Woche oft von mir beobachteten kleinen Flecken konnte ich mit dem elenden Fernrohr des Quadranten gar nicht sehen; auch ist die Zeit immer zu kurz, um während des Durchgangs die beiden Ränder und den Flecken mit gehöriger Genauigkeit zu beobachten. Es ist wahr, dass ich den Kreis auf mehr als eine Art zu Deklinationsbestimmungen gebrauchen könnte; allein Beobachtungen und Rechnungen rauben dabei gar zu viele Zeit, und doch kann das Resultat bei weitem nicht den Grad von Genauigkeit haben, den das Heliometer¹⁾ gibt.«

Als Hauptuhr diente die SELTHONSche Uhr; diese ist ein Geschenk von GEORG III., König von Grossbritannien und Kurfürst von Hannover, und seit dem Jahre 1770 im Gebrauch (Brief an BESSEL vom 12. Mai 1820). Sie geht noch heute und steht auf der Sternwarte im östlichen Meridiansaal²⁾. Auf der ersten Seite des zweiten Bandes des *Tagebuchs der Sternwarte* findet sich ein von GAUSS Hand geschriebenes »Register über Stand und Gang der Uhren«; es betrifft den SHELTONSchen Regulator und einen nicht näher bezeichneten Chronometer, wahrscheinlich den BERTHOUDSchen. Das Register umfasst die Zeit von August 1812 bis April 1818. Für die Korrektion der am Mauerquadranten beobachteten Durchgangszeiten wegen Azimut und Neigung des

1) Ein solches hatte GAUSS in diesem Jahre (1814) erhalten; vgl. Werke XI 1, S. 290 sowie weiter unten. — BRDL.

2) GAUSS lobt diese Uhr in den Berichten an das Kuratorium 1818 (Werke XI 1, S. 295 und 310), sowie in den Gött. Gel. Anz. vom August 1818 aus (Werke VI, S. 413), zeigt sich jedoch später in dem Briefe an OLBERS vom 23. August 1819, sowie in dem oben genannten Briefe an BESSEL, mit ihr höchst unzufrieden; vergl. auch unten: 6. Periode, REICHENBACHSche Instrumente.

Quadranten findet sich auf der ersten Seite des *Tagebuchs der Sternwarte* eine Tafel »gültig von 1808 Nov. bis 1810 Jan.« von GAUSS' Hand und eine spätere »gültig von Mai bis 1810 Sept.« von HARDING eingetragen.

Grossen Wert legte GAUSS auf die Zeitbestimmung durch korrespondierende Sonnenhöhen; nach dem *Tagebuch* liessen sich solcher Beobachtungen z. B. für die Zeit Nov. 1808 bis Jan. 1813 an nicht weniger als 212 Tagen feststellen.

Überhaupt war der Sextant ein von GAUSS gern gebrauchtes Instrument; hatte er doch schon in Braunschweig damit beobachtet und besondere Sorgfalt darauf verwandt, möglichst scharfe Beobachtungen damit zu erhalten. Den Ort des Kometen 1811 I hat er an einer Reihe von Tagen durch Abstand von zwei oder mehreren Sternen bestimmt (Werke VI, S. 335).

Manche Stunde verwandte GAUSS auch darauf, Höhe und Azimut irdischer Gegenstände »durch Abstände von der wahren und der im Quecksilberhorizont reflektierten Sonne«¹⁾ zu bestimmen. Er beabsichtigte, mit HARDING »kleine Exkursionen und Lustpartien mit dazu zu benutzen, die Gegend von Göttingen mit Dreiecken zu überziehen«¹⁾.

Hierzu sei noch folgende Eintragung von GAUSS' Hand in das *Tagebuch der Sternwarte* vom 20. September 1811 erwähnt:

»Herr Professor HARDING fuhr heute nach dem Meissner, wohin er den BERTHOUDSchen Chronometer, seinen TROUGHTONSchen Sextanten und meinen Glashorizont mitnahm. Die Absicht war, dort Pulversignale zu geben, welche ich hier, Herr v. LINDENAU auf dem Seeberg und Herr PABST auf dem Inselberg beobachten sollten. Der Abrede nach sollte Herr Professor HARDING heute Abend 5 Signale geben, um 9^h 30^m, 9^h 35^m, 9^h 40^m, 9^h 45^m, 9^h 50^m mittlerer Göttinger Zeit. Ich hatte das Vergnügen, mit blossen Augen an der SHELTONSchen Uhr sie folgendermassen zu beobachten«

1808 kaufte GAUSS einen neuen Sextanten aus dem Besitze von Dr. HEINCKEN in Bremen, wie er in dem schon genannten Briefe an OLBERS¹⁾ schreibt.

Im Oktober 1810 reiste er zu einer chronometrischen Längenbestimmung nach Gotha.

Kreismikrometerbeobachtungen der Planeten Ceres, Pallas, Juno, Vesta und einiger Kometen sind ebenfalls im *Tagebuch der Sternwarte* aufgeführt,

1) Brief von GAUSS an OLBERS vom 19. April 1808.

von denen die meisten von GAUSS herrühren; sie scheinen nicht alle veröffentlicht zu sein (vgl. Werke XI, 1). Das gleiche gilt von Sternbedeckungen und Verfinsterungen der Jupitermonde.

Als gelegentlicher Beobachter veränderlicher Sterne ist HARDING bekannt; auch seine Notizen hierzu findet man im genannten *Tagebuch*.

In dem Briefe an OLBERS vom 5. Januar 1808 (oben S. 49) beklagt sich GAUSS, dass kein zur Kreismikrometerbeobachtung taugliches Okular vorhanden sei, woraus hervorgeht, dass er zu diesen Beobachtungen den Rand des Gesichtsfeldes benutzte; vgl. oben S. 33.

Im übrigen war GAUSS' Zeit in dieser Periode (1808—1813) durch den Druck der *Theoria motus* (erschieden 1809) und durch seine umfangreichen Untersuchungen über die Störungen der Pallas in Anspruch genommen (siehe den zweiten Abschnitt dieses Aufsatzes, theoretische Astronomie); im Juli 1813 vollendete er seine Berechnung der allgemeinen Störungen der Pallas.

Doch beschäftigte er sich auch mit einer Reihe von Aufgaben der sphärischen Astronomie und es erschienen die Abhandlungen:

Methodus peculiaris elevationem poli determinandi (1808, Werke VI, S. 37).

Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie (1808, Werke VI, S. 129).

Tafeln für die Mittagsverbesserung (1811, Werke VI, S. 166).

Tafeln für die Sonnenkoordinaten (1812, Werke VI, S. 172),

sowie die schon früher von ihm berechneten

Tafeln der Nutation und Aberration (1808, Werke VI, S. 123).

Über seine Gemütsstimmung im Winter 1809—10, die in ihm keine rechte Lust zu wissenschaftlichen Arbeiten aufkommen liess, klagt GAUSS in seinen Briefen an BESSEL (7. Januar 1810) und an OLBERS (Anfang April 1810). Er hatte im Oktober 1809 seine Frau und im März 1810 seinen Sohn LOUIS verloren; im August 1810 verheiratete er sich wieder, mit MINNA WALDECK, der jüngsten Tochter des Hofrats WALDECK.

3. (zweite Göttinger) Periode, 1813—1816.

Die zweite Periode von GAUSS' Göttinger astronomischer Tätigkeit wird eingeleitet durch die Ankunft zweier bei REICHENBACH bestellter neuer Instrumente, des Repetitionskreises und des Repetitionstheodoliten. Das Repetitions-

oder Wiederholungsverfahren wurde zuerst von TOBIAS MAYER¹⁾ um 1752 vorgeschlagen, der es auch für ein nautisches Spiegelinstrument²⁾ in Vorschlag brachte; ein solches liess zuerst BORDA um 1775 von LE NOIR in Paris herstellen³⁾. Bald wurden jedoch die Spiegel fortgelassen und zwei getrennte Fernrohre angebracht⁴⁾. Mit einem solchen Instrument konnten nicht nur Zenitdistanzen, sondern, wie mit einem gewöhnlichen Sextanten, durch Schrägstellung des Kreises auch Distanzen in beliebiger Richtung gemessen und repetiert werden. Die Bezeichnung als BORDAScher Kreis wurde beibehalten, auch nachdem die Spiegel fortgefallen waren. Die LE NOIRSchen Instrumente liessen manches zu wünschen übrig, auch waren beim Gebrauch zwei Beobachter nötig. V. ZACH sagt darüber im Anschluss an SCHIEGGS Mitteilungen über seine Vermessung von Bayern (M. C., Bd. 10, S. 353, Oktober 1804):

»Längst schon hatte ich die Meinung geäußert, dass man, wenn englische Künstler sich entschliessen könnten, BORDASche Vervielfältigungs-Kreise zu verfertigen, diese Werkzeuge nicht nur auf eine solidere und genauere Art erbauen, sondern gewiss noch vieles zu ihrer Vervollkommnung hinzufügen würde. Wenn man die Arbeiten eines LE NOIR gegen die eines RAMSDEN, TROUGHTON, BERGE, CARRY vergleicht, so muss dem allerbefähigsten, so wie dem allergeübtesten Beobachter in die Augen springen, welcher grosse Unterschied in den mechanischen Arbeiten der Künstler dieser beiden Nationen noch herrscht. Immer war ich der Meinung, dass die Beobachtungen nach dem Geiste der MAYER-BORDASchen Methode viel genauer hätten kommen müssen, als ich sie mit so vieler Vorsicht, Anstrengung und Vervielfältigung bisher mit LE NOIRSchen Kreisen erhalten habe; offenbar war dieses hauptsächlich den Unvollkommenheiten des Werkzeugs zuzuschreiben, welche nur durch die ängstlichste Sorgfalt, und durch die Menge der Beobachtungen zu bekämpfen waren; ich war aber auch überzeugt, dass man, wenn dieses Werkzeug aus den Händen eines RAMSDEN gekommen wäre, mit viel weniger Mühe, mit einer viel geringern Anzahl von Beobachtungen sehr bald das genaue Resultat erhalten hätte, welches die Methode der Vervielfältigung in der Theorie so genau verheisst, und S. 355—356: »da von englischen Künstlern noch zur

¹⁾ JOH. A. REPSOLD, *Zur Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, 1. Band, S. 77 und Figur 122—124.

²⁾ Ebendort S. 78 und Fig. 125.

Zeit keine BORDASCHEN Kreise zu erhalten sind, so habe ich den Entschluss gefasst, mir von deutschen Künstlern, welche lange in England, besonders bei RAMSDEN gearbeitet haben, ein solches Werkzeug vorfertigen zu lassen. Es war hier keine Wahl zu treffen; ich bestellte daher einen solchen Kreis bei dem geschickten und rühmlichst bekannten Mechanikus BAUMANN in Stuttgart und erwarte dieses Werkzeug, welches seiner Vollendung nahe ist, nächstens. . . .

«Deutschland zählt jetzt noch einen andern geschickten Künstler, einen Schüler RAMSDENS. Aus dem Mai-Stück der M. C. 1804, S. 377 haben unsere Leser bereits erfahren, was die Kunst des Artillerie-Hauptmanns REICHENBACH in München zu leisten vermag: Alles, was daselbst von seinen Werkzeugen und in dem im vorigen Hefte abgedruckten Schreiben des Prof. SCHIEGG von seinem BORDASCHEN Kreise angeführt und belegt wird, übersteigt alles, was bisher von dem Vermögen dieser Art Werkzeuge zu unserer Kenntnis gelangt ist. Wie weit lassen die Beobachtungen des Professors SCHIEGG die mit LE NONSCHEN Kreisen angestellten hinter sich!»

Hiernach baute also auch REICHENBACH¹⁾ schon in jener Zeit derartige Kreise, GAUSS bestellte einen solchen im Jahre 1811 und erhielt ihn Ende 1812. Er ist von ihm in den G. G. A. von 1813, Mai (Werke VI, S. 365) beschrieben. Weitere Einzelheiten gibt GAUSS in LINDENAU und BOHNENBERGERS Zeitschrift für Astronomie, Band V, März-April 1818 (Werke VI, S. 404). An OLBERS schreibt er im Brief vom 8. April 1813 folgendes: »Das Interessanteste, was ich Ihnen von der Göttingischen Astronomie melden kann, ist die Acquisition von zwei REICHENBACHSchen Instrumenten, einem 12-zölligen Kreise und einem 8-zölligen Theodolithen. Sie kennen den Pariser 3-füssigen Kreis, also brauche ich Ihnen nicht zu sagen, dass dies wahre Wunderwerke sind. Der Kreis (Preis 830 Gulden) ist Ende November, der Theodolith (Preis 400 Gulden) medio Januar angekommen. Aber ausser der Messung einiger terrestrischer Winkel habe ich mit dem Kreis vor der Mitte März nicht beobachten können. Zuerst war auf dem Transport das Hauptniveau beschädigt, und REICHENBACH musste erst ein anderes schicken. Dann fand sich, dass unsere Sternwarte nirgends fest genug war für das delikate Instrument, und ich musste erst ein

¹⁾ Seite 99/100 und Figuren 141 a und b in dem auf voriger Seite genannten Werk von REPSOLD.

besonderes Fundament aufführen lassen, wo ich indessen nur den nördlichen Meridian beherrsche. Schlechtes Wetter machte dann neue Verzögerung, und dann musste HARDING sich erst einige Übung im Einstellen des Niveaus erwerben. Seit einigen Wochen habe ich nun aber einige schöne Beobachtungen gemacht. In 5 Nächten habe ich den Polarstern in der untern Kulmination beobachtet. Hier die Resultate für die Polhöhe¹⁾:

[1813] März 20.	51° 31' 54,86 = 10	Beobb.
» 22.	51° 31' 55,74 = 18	» Mittel aus 82
» 26.	51° 31' 57,40 = 18	» Beobachtungen
» 31.	51° 31' 56,25 = 18	» 51° 31' 56,25
April 3.	51° 31' 56,39 = 18	»

Hierbei war die Distanz des Polarsterns vom Nordpol 1812 = 1° 41' 41,74 vorausgesetzt. Ihre mir wie gerufen mitgeteilte Angabe ist aber

Paris	1° 41' 41,19
Greenwich	1° 41' 41,00
»	1° 41' 41,60.

Setze ich also 1° 41' 41,26, so wird die Polhöhe von Göttingen 51° 31' 55,77, davon geht noch ab 0,16 Reduktion auf das Zentrum der Sternwarte, also:

Polhöhe der Göttinger Sternwarte 51° 31' 55,61,
um 1,61 grösser als MAYERS Bestimmung.

Vorher hatte ich noch beobachtet:

Polhöhe (des Platzes, wo der Kreis steht)	
März 14.	51° 31' 56,57 aus 4 Höhen des Polarsterns ausser der Kulmination, wo die Deklination wenig Einfluss hatte,
» 15.	51° 31' 56,14 aus 4 Höhen von β Cephei in der untern Kulmination,
» 17.	51° 31' 54,77 aus 6 Höhen dito, 51° 31' 55,68 nur 0,09 kleiner als die obige Bestimmung.

Welch ein Instrument ist so ein Kreis! Der Theodolith ist ein ebenso

¹⁾ Diese stehen auch im Handbuech Bs, S. 25 und sind mit geringen Änderungen in den G. G. A. 1813, S. 747 (Werke VI, S. 366) abgedruckt. — BRDL.
XI: Abb. 3.

grosses Meisterwerk. Ich bestimme damit einzelne Sekunden. Mit Ungeduld warte ich auf die Zeit, wo der Polarstern in der obern Kulmination beobachtet werden kann. Am Tage ist es meinem Versuche zufolge nicht möglich, aber freilich konnte man dies von einem auch noch so schönen Fernrohr von 16 Linien nicht präbendieren.«

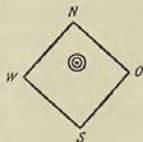
Im gleichen Sinne schrieb er darüber kurz an SCHUMACHER am 3. März 1813. Die auf beide Instrumente bezügliche Eintragung in das *Tagebuch der Sternwarte* lautet:

1812, Nov. 26. »Heute kam endlich der seit länger als einem Jahre bei REICHENBACH in München bestellte Repetitionskreis an. Die beiden Niveaus sind noch nicht in beobachtungsfertigem Zustande, da sie zu viel Luft haben; die eine Röhre hat auch am Ende einen Sprung. Es ist deshalb an REICHENBACH geschrieben.«

1813, Januar 13. »Ankunft des REICHENBACHSchen Theodoliten.«

1813, Januar 14. »Wegen der künftig mit dem Theodoliten auf der Sternwarte zu machenden Messungen wurde der Mittelpunkt des Gebäudes durch ein kleines Grübchen in der einen Steinplatte bestimmt. Es ist die Platte, deren Nordecke an das östliche Ende der Treppenöffnung stösst. Auf dieser Platte steht der Mittelpunkt des Gebäudes ab:

von der SW-Kante der Platte	335½ mm
» » NW- » » »	235½ »
» » NO- » » »	228 »
» » SO- » » »	328 »



1813, Februar 14. »Ankunft des Kistchens mit den neuen Libellen.«

Gegenwärtig (seit 1899) befindet sich der Repetitionskreis im geophysikalischen Institute auf dem Hainberge, der Theodolit noch auf der Sternwarte in Göttingen.

Die Ankunft der genannten Instrumente bewirkte, dass GAUSS nunmehr eine lebhaftere Beobachtungstätigkeit entwickelte. Sein Bestreben war auch hier weniger darauf gerichtet, ein umfangreiches Beobachtungsmaterial zu sammeln, als darauf, die einzelnen Beobachtungen auf das vollkommenste Mass

von Schärfe zu bringen. Daher richtete sich sein Augenmerk besonders auf genaue Untersuchung und Prüfung der Instrumente und Beobachtungsmethoden. Im *Tagebuch der Sternwarte* treten von dieser Zeit an die neu angeschafften Instrumente in den Vordergrund, und fast alle Eintragungen rühren von GAUSS Hand her. Der Mauerquadrant wird weniger häufig genannt; es scheint jedoch, dass die Beobachtungen von HARDING zum grössten Teil gar nicht mehr in das *Tagebuch der Sternwarte* eingetragen wurden, sodass ein Überblick über die gesamte Beobachtungstätigkeit auf der Sternwarte daraus nicht zu gewinnen ist. Zur Zeitbestimmung dienten, wie früher, auch korrespondierende Sonnenhöhen.

Die ersten Beobachtungen mit dem REICHENBACHSchen Repetitionskreise (vergl. den S. 56—58 abgedruckten Brief an OLBERS) betreffen die Bestimmung der Polhöhe aus dem Polarstern in der untern Kulmination im März und April 1813, die ausserordentlich gut übereinstimmende Ergebnisse zeigten. Die Unsicherheit, die aus einer Verbesserung der Deklination des Sterns herrühren konnte, beabsichtigte GAUSS später durch die Beobachtung der oberen Kulmination zu beseitigen, wozu er aber erst im Januar 1815 kam (Brief an OLBERS vom 7. Januar 1815 und an BESSEL vom 30. Januar 1815).

GAUSS weitere Untersuchungen mit dem REICHENBACHSchen »BORDAKreise« ebenso wie mit den später angeschafften REPSOLDSchen und REICHENBACHSchen Meridiankreisen stehen unter dem Einfluss eines beständigen ins Einzelne gehenden Briefwechsels mit BESSEL. Schon in einem Brief an GAUSS vom 18. März 1808 hatte BESSEL über seine mit unübertrefflicher Gründlichkeit durchgeführte Bearbeitung¹⁾ der BRADLEYSchen Beobachtungen am Mauerquadranten berichtet, aus denen unter anderem seine so berühmt gewordenen Untersuchungen über Refraktion, Präzession und Nutation herausgewachsen sind.

Aus den Beobachtungen von MASKELYNE (1790—1799) und von PIAZZI (1792—1803) ergaben sich auffallende Unregelmässigkeiten in den Werten der Schiefe der Ekliptik, indem die Bestimmungen aus den Sommersolstitien beständig abwichen von denen aus den Wintersolstitien²⁾. Im Mittel ergaben

¹⁾ *Fundamenta astronomiae* p. a. 1755 ex observationibus incomparabilis J. Bradley deducta, Königberg 1818.

²⁾ V. ZACH berichtet darüber M. C. XVI, 1807 September, S. 124 ff.

MASKELYNES Beobachtungen aus den Sommersolstitien einen um $4,6$ grösseren Wert als aus den Wintersolstitien, mit Ausnahme des Jahres 1798. Auch PIAZZI fand eine Differenz im gleichen Sinne, aber viel grösser, nämlich $8,3$. Indessen zeigten sich bedeutende Sprünge in den Beobachtungen, die ein bestimmtes Gesetz nicht erkennen liessen. Man suchte vergeblich nach einer Erklärung für diese merkwürdige Erscheinung. Auch kamen andere Beobachter zu einem anderen Ergebnis. PIAZZI sprach die Vermutung aus, der Grund für diese Erscheinung möchte in atmosphärischen Verhältnissen zu suchen sein (M. C. Bd. XVI, S. 129).

BESSEL schreibt darüber schon von Lilienthal¹⁾ aus in einem Brief an GAUSS vom 20. Juli 1808: »Ich bin nun der, durch die BRADLEYSCHEN Beobachtungen veranlassten, Meinung, dass die Differenzen zwischen den Schiefen der Ekliptik, die man aus den beiden Solstitien findet, nur scheinbar sind, und dass man sich der Wahrheit mehr nähert, wenn man nicht die Sommer- sonnenwende allein, sondern das Mittel aus beiden nimmt. Ich finde zum Exempel²⁾ für den 1. Januar 1755:

aus 7 Sommersolstitien $23^{\circ} 28' 15,59$
aus 8 Wintersolstitien $23^{\circ} 28' 15,27$.

Es kommen bei beiden Sonnenwenden einige vor, die sich $2''$ vom Mittel entfernen, so dass die Differenz von $0,32$ eigentlich nichts bedeutet. Der Unterschied meiner Refraktionen von den BRADLEYSCHEN ist nicht (wenigstens für diese Höhen) von Bedeutung und er kann es keineswegs erklären, dass MASKELYNE jetzt mit demselben Instrumente andere Resultate findet; mir scheint dieses einen Beweis für die Mortalität der Mauerquadranten abzugeben. Man muss freilich, um meiner Meinung Eingang zu verschaffen, annehmen, dass die Differenzen, die PIAZZI findet, zum Teil von einer unrichtigen Annahme der Polhöhe, die von französischen Astronomen gefundenen aber von der schlechten Beschaffenheit der von diesen gebrauchten Instrumente, herrühren. Es könnte z. B. möglich sein, dass die BORDASCHEN Kreise, etwa wegen einer Federung, oder wegen des toten Ganges einer Schraube, alle Zenitdistanzen

¹⁾ BESSEL war Anfang 1806 als Nachfolger von HARDING an die Lilienthaler Sternwarte des Amtmanns SCHROFFER übersiedelt.

²⁾ Aus BRADLEYS Beobachtungen. — BRDL.

um einige Sekunden zu klein angäben, und dass diese Fehler, die sich bei den Unterschieden zwischen beiden Solstitien vervierfachen, die wirkliche Auflösung des Rätsels enthielten. Ich habe Fehler bei astronomischen Instrumenten gefunden, die vielleicht noch versteckter liegen, und wovon ich Sie heute, aus Mangel an Zeit, nicht unterhalten kann. Indess verdient diese Mutmassung vielleicht, dass man darauf achte; um aber die Frage zu entscheiden, werde ich mir wahrscheinlich selbst einen Kreis bei REICHENBACH bestellen, der vortrefflich und verhältnissmässig wohlfeil arbeiten soll.« Er fand die Gelegenheit, selbst hierüber Beobachtungen anzustellen, nachdem er nach Königsberg berufen war (Mai 1810), um dort die neue Sternwarte zu bauen und zu übernehmen. Sein erster Versuch, das Wintersolstitium 1813 mit dem 25 zölligen Meridiankreise von CARY zu bestimmen, scheiterte daran, dass die Ablesungen infolge der Einwirkung der Sonnenwärme bis auf $10''$ abwichen, weshalb er sich eine Art Schirm gegen die Sonnenwirkung besorgte¹⁾.

Auch GAUSS reizte die Aufgabe, eine Erklärung für diese Unstimmigkeiten zu finden; nachdem er bereits, wie oben angegeben, die Polhöhe aus dem Polarstern ermittelt hatte, bestimmte er die Schiefe der Ekliptik aus Sonnenbeobachtungen am REICHENBACHSCHEN Repetitionskreise während des Sommer- und Wintersolstitiums 1813, wozu er in der Zwischenzeit viele sorgfältige Voruntersuchungen mit dem Kreise ausgeführt hatte. Die im *Tagebuch der Sternwarte* ausgeführten Reduktionen der ersten Sommerbeobachtungen ergaben²⁾:

1813 Juni 18.	$23^{\circ} 27' 52,09$	Juni 26.	$23^{\circ} 27' 47,56$
19.	52,23	27.	52,82
23.	52,78	29.	52,78
25.	52,18	30.	49,73.

Er schreibt hierauf am 2. Juli 1813 an OLBERS: »Die Resultate meiner ersten mit dem REICHENBACHSCHEN Kreise angestellten Beobachtungen des Polarsterns³⁾ werden Sie in No. 75 unserer Gel. Anzeigen⁴⁾ gelesen haben. In der letzten Zeit habe ich mit dem Kreise das Solstitium

¹⁾ Brief an GAUSS vom 30. Dezember 1813.

²⁾ Aus der im *Tagebuch der Sternwarte* ausgeführten Reduktion der Beobachtungen geht allerdings nicht sicher hervor, ob dies die endgültigen Werte sind.

³⁾ Siehe auch oben S. 57. — BRDL.

⁴⁾ Werke VI, S. 366. — BRDL.

beobachtet. Es ist doch sonderbar, dass auch aus diesen Beobachtungen, die aus α Ursae min. bestimmte Polhöhe zu Grunde gelegt, die Schiefe der Ekliptik ungefähr ebenso folgt, wie sie Hr. v. ZACH aus den Sommersolstitien gefunden hat, etwa $6''$ grösser, als man sie im Mittel anzunehmen pflegt. Ich werde indess auf meine Beobachtungen nicht eher Gewicht legen, als bis sie ihre Selbständigkeit erhalten haben, also bis ich wenigstens auch die obere Kulmination des Polarsterns und das Wintersolstitium observiert habe. Es ist mit dieser Erscheinung doch sonderbar. Jede Nachlässigkeit des Beobachters wirkt in diesem Sinn, wenn die Ebene des Instrumentes nicht gehörig vertikal, oder die Gesichtslinie nicht gehörig berichtigt ist, oder die Beobachtung zu weit vom Vertikalfaden entfernt gemacht wird, oder wenn man bei Reduktion der Zenithdistanzen auf die in der Kulmination die Glieder der 4. Ordnung vernachlässigt. Alles dies findet aber bei den hiesigen Beobachtungen keine Anwendung. BESSEL findet zwar aus BRADLEYS Beobachtungen Sommer- und Wintersolstitien übereinstimmend, allein Mauerquadranten können bei einer so delikaten Untersuchung wohl nichts entscheiden. Wäre das Faktum gewiss und von Refraktion unabhängig, so würde man schliessen müssen, dass der Schwerpunkt der Sonne etwa um $\frac{1}{3}$ des Sonnendurchmessers unterhalb des Sonnenmittelpunktes läge, eine sehr leicht mögliche Sache, wenn die Sonne nur einigermassen aus heterogenen Teilen besteht¹⁾. Was würde nicht ein REICHENBACHScher Kreis in der südlichen Hemisphäre für Aufschlüsse geben können!

Über seine Winterbeobachtungen berichtet er sodann an OLBERS am 20. Januar 1814: »Das Wintersolstitium hat mir eine um $14''$ kleinere grösste Deklination der Sonne gegeben als das Sommersolstitium, die Beobachtungen unter sich stimmen vortrefflich überein. Liegt dies am Instrument, so kann ich es nur auf die Sonnenwärme schieben, die ich nächsten Sommer vom Instrument ganz abzuhalten suchen werde; immer ist es sonderbar, dass der Einfluss so konstant ist. Bei ZACHS Beobachtungen, unter uns, vermute ich, liegt ein Teil der Unterschiede daran, dass er die Gesichtslinie des Fernrohrs

¹⁾ In dem Briefe an OLBERS vom 13. September 1813 scheint GAUSS diese Vermutung wieder aufzugeben, weil sonst die aus den Merkurdurchgängen folgenden Werte der Knotenlänge der Merkurbahn auch Differenzen zeigen müssten; in einem weiter unten abgedruckten Briefe an OLBERS vom Mai 1819 kommt er jedoch wieder darauf zurück. — Vergl. auch Werke VI, S. 395—396. — BREDL.

nicht mit der Ebene des Instruments parallel gemacht hat; ich schliesse dies aus Äusserungen des Herrn v. LINDENAU, denen zufolge ZACH in dem Irrtum steht, dass diese Berichtigung bei astronomischen Beobachtungen nicht nötig sei; an meinem Kreise, wie ich ihn erhielt, war die Korrektion gross, und dass v. ZACHS Kreis auch einer beträchtlichen Korrektion bedürfe, ist mir daraus wahrscheinlich, weil er die Deklination von α Bootis um $5''$ grösser gefunden hat als POND.

Worauf OLBERS am 26. Februar antwortet: »Mit den Solstitien ist es doch eine eigene Sache, ob ich gleich noch immer zu glauben geneigt bin, dass die Winter- und Sommerschiefe der Ekliptik gleich sei. Noch weniger glaube ich mit LINDENAU an eine Verschiedenheit der südlichen und nördlichen Neigungen der Planetenbahnen, unabhängig von den Perturbationen. Die verschiedene Temperatur einzelner Teile unserer Messinstrumente wird, fürchte ich, immer vorzüglich den Sonnenbeobachtungen Grenzen setzen. — In Paris konnte man mit den Sonnenbeobachtungen bei dem REICHENBACHSchen Kreise anfangs garnicht zurecht kommen, bis man alle Strahlen, die nicht aufs Objektiv fielen, möglichst abhielt. Aber lässt sich wohl alle partiikuläre Erwärmung einzelner Teile des Instruments gänzlich vermeiden?»

Bedeutet z_s und z_w die Zenitdistanzen der Sonne im Sommer- und Wintersolstitium, φ die Polhöhe und ϵ die Schiefe der Ekliptik, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} z_s &= \varphi - \epsilon \\ z_w &= \varphi + \epsilon, \end{aligned}$$

sodass die Beobachtungen der Sonne allein φ und ϵ ergeben. Setzte man aber für φ den aus Fixsternbeobachtungen, besonders des Polarsterns, gefundenen Wert, so ergab sich die erwähnte Differenz in ϵ . Daher schreibt GAUSS an BESSEL am 18. (28⁷) Mai 1814: »Die Zeit wird mir heute zu kurz, um mich noch über einiges den Repetitionskreis betreffendes mit Ihnen zu unterhalten. Auch meine Beobachtungen geben die Sommerschiefe grösser als die Winterschiefe, oder wenn Sie lieber wollen, die Sonne gibt immer (auch in den Äquinoktien) die Polhöhe kleiner als der Polarstern. Wäre das Faktum gewiss und von Refraktion unabhängig, so würde folgen, dass der Schwerpunkt der Sonne mit dem Mittelpunkt nicht zusammenfällt¹⁾; allein ich traue den

¹⁾ Siehe auch S. 62.

Beobachtungen nicht, solange die Teile des Instruments von der Sonnenwärme stets affiziert werden. Geben Sie mir doch eine kleine Beschreibung Ihres Schirmes. Sonderbar ist es immer, dass die Wirkung so gleichförmig in einem Sinne sein soll; aber von meinen Beobachtungen wenigstens kann ich versichern, dass andere Quellen von Fehlern, die auch immer in diesem Sinne wirkten (z. B. Nichtparallelismus der Gesichtslinie mit der Ebene, biquadratischer Teil der Reduktion auf die Kulmination), ausgeschlossen sind. Doch ein andermal mehr davon.«

Die Aufklärung dieses Umstandes beschäftigte GAUSS (und andere) mehrere Jahre hindurch und gab ihm Veranlassung, sich auch mit der Theorie der Refraktion zu beschäftigen, um so mehr, als auch die Polhöhenbestimmungen aus Fixsternen Differenzen zeigten; so schreibt er an OLBERS am 23. April 1814: »Es ist sonderbar, dass unser Kreis auch durch Fixsterne auf der Südseite des Zenits, wenn ich deren Deklinationen nach POND annehme, einige Sekunden weniger für die Polhöhe gibt als der Polarstern. α Orionis, α Canis min. und α Leonis gaben gut übereinstimmend $51^{\circ} 31' 52,5$, der Polarstern $51^{\circ} 31' 55,5$ (Sonne im Sommer etwa $49'$, im Winter $51'$). Ich werde bald anfangen eine Reihe von Beobachtungen zu machen, um die Refraktion unabhängig von fremden Bestimmungen abzuleiten. Es scheint hier immer noch eine Nachlese zu halten zu sein. Dass BESSEL sich nur an das MARIOTTESCHE Gesetz hält, ohne auf die Wärmeabnahme Rücksicht zu nehmen, die doch ein unbezweifeltes Faktum ist, will mir nicht ganz gefallen.«

In dem Briefe an OLBERS vom 31. Dezember 1814 sagt GAUSS, er habe jetzt einen sehr zweckmässigen Schirm¹⁾ angebracht, wodurch alles Licht ausser dem aufs Objektiv fallenden völlig abgehalten wird.« Allein der Erfolg blieb ganz der alte und bestätigte sich weiter nach einem weiteren Brief an OLBERS vom 7. Januar 1815.

REICHENBACH²⁾ meinte, dass die Biegung des Fernrohrs einen merklichen Einfluss auf die Beobachtungen haben könne; GAUSS machte entsprechende Untersuchungen durch Anbringung eines Gewichtes³⁾; doch konnte hierdurch auch höchstens ein Teil des Unterschiedes erklärt werden (vergl. die Briefe

1) Ebenso in dem Briefe an BESSEL vom 30. Januar 1815, sowie Werke VI, S. 283—284.

2) Brief von GAUSS an OLBERS vom 27. November 1815.

3) Vergl. Werke VI, S. 400.

an OLBERS vom 15. Februar und 28. April, sowie an BESSEL vom 5. September, abgedruckt S. 67, und den Brief von BESSEL an OLBERS vom 25. Juni 1817.)

Dagegen meint BESSEL¹⁾ in seinem Brief an GAUSS vom 16. Februar 1815, dass nach seinen scharfen Reduktionen, besonders für Refraktion, aus den Beobachtungen von BRADLEY, MASKELYNE, PIAZZI, POND und ihm selbst übereinstimmende Werte der Schiefe aus Sommer- und Wintersolstitium hervorgehen und fügt hinzu: »Dagegen steht nur das Zeugnis der Wiederholungskreise und wie ich glaube nur das der kleineren.« In dem Brief vom 17. Juli 1815 gibt BESSEL das Mittel für die mittlere Schiefe aus 15 Beobachtungen des Sommersolstitiums mit $23^{\circ} 27' 46,95$ an und fügt hinzu: »Im vorigen Jahre fand ich

zur Zeit des Sommersolstitiums $23^{\circ} 27' 47,65$

» » » Wintersolstitiums $23^{\circ} 27' 47,35$.

Ich gestehe Ihnen, dass mir eine Übereinstimmung bis auf einen Teil der Sekunde nicht unerwartet war.« Auch BESSELS spätere Beobachtungen zeigten Übereinstimmung. Er schreibt noch am 1. März 1818 an GAUSS: »Auffallend ist doch die Beständigkeit meines Kreises²⁾; der grösste Unterschied einer der acht beobachteten Sonnenwenden vom Mittel aus allen ist noch nicht $0,4$.«

Bis in das Frühjahr 1818 zog sich die Diskussion zwischen GAUSS und BESSEL über diese Frage hin; die Beobachtungen beider zeigten beständig die gleichen widersprechenden Ergebnisse, ohne dass es gelang, das Rätsel zu lösen. An OLBERS berichtet GAUSS noch häufig darüber, während der Briefwechsel mit BESSEL etwas sparsamer wird. BESSELS Beobachtungen gaben auch späterhin das gleiche Ergebnis.

Wir nehmen hier die spätere Entwicklung dieser Angelegenheit vorweg. Nachdem GAUSS' Beobachtungen mit dem Repetitionskreise auf der neuen Sternwarte wieder zu dem früheren Ergebnis geführt hatten, schrieb er am 2. August 1817 an OLBERS: »Ganz bin ich mit Ihrem Urteil einstimmig über die absolute Genauigkeit der Beobachtungen von POND. Mir deutet, dass Ihre Bemerkung auch auf unseres BESSELS Beobachtungen zum Teil Anwendung findet, und es scheint mir wenigstens sehr gewagt, wenn er seine Polhöhe auf $0,25$

1) Vergl. auch *Auszüge aus mehreren Briefen des H. Prof. Bessel* Zeitschrift für Astronomie, 1. Bd., S. 161 (BESSELS Werke III, S. 297) und 2. Bd., S. 130 (nicht abgedruckt in den Werken).

2) Des CARYSCHEN. — BRDL.

zuverlässig hält. Wenn wir, anstatt zu sagen, ich weiss keinen bestimmten Fehler an meinem Instrumente nachzuweisen, sagen wollen, das Instrument hat durchaus keinen Fehler, so haben wir, wenn nun auch die Beobachter mit REICHENBACHSchen Repetitionskreisen in demselben Tone sprechen, schneidende Gegensätze und ein astronomisches Schisma. In der That gibt mein Kreis fortwährend und entschieden die Polhöhe aus Sonnenbeobachtungen 4"–5" kleiner als aus Beobachtungen des Nordsterns, und ich bin jetzt durchaus ausser Stande, am Instrumente eine konstant wirkende Ursache zu entdecken, die Verminderung der Zenithdistanzen bewirkte. (Meine mit dem angeschraubten neuen Gewicht¹⁾ gemachten Beobachtungen geben aus dem Polarsterne, 158 Beobachtungen, Polhöhe $51^{\circ} 31' 49,3$; genau ebenso viel gibt die Übertragung von der alten Sternwarte, obgleich dort mit dem angesteckten Gewicht beobachtet war; über 200 Sonnenbeobachtungen in Solstitiis geben mit CARLINIS Schiefe 4", mit BESSELS Schiefe $5\frac{1}{2}$ " weniger.) Aus den Ofener Beobachtungen folgt in demselben Sinn etwa halb soviel, aus den Königsberger nichts; eines von den drei Instrumenten kann einmal nicht recht haben, ohne dass zwei Unrecht haben. Bei Abwägung der Wahrscheinlichkeit werden immer subjektive Rücksichten influieren, und in der That sehr natürlich, weil man sein eigenes Instrument am besten kennt, und die Unmöglichkeit, die Unterschiede aus dieser oder jener Ursache zu erklären, am eigenen Instrumente lebendiger anschaut, als am fremden. Es wäre wohl der Mühe wert, dass ein geübter Beobachter mit REICHENBACHSchen Kreisen ein Jahr auf dem Kap fleissig Sonne und südliche Zirkumpolarsterne beobachtete. Dies würde uns vielleicht manchen Aufschluss geben. Überhaupt tun zwar die Regierungen jetzt viel für Astronomie durch Erbauung von Sternwarten; aber die Ausrüstung astronomischer Reisen ist seit geraumer Zeit ganz aus der Mode gekommen, worauf OLBERS am 16. August antwortet: »Dass auch unseres BESSELS Beobachtungen, ihrer schönen Übereinstimmung untereinander unerachtet, in Ansehung ihrer absoluten Genauigkeit doch zweifelhaft bleiben, darin stimme ich Ihnen vollkommen bei. Wahrscheinlich werden Sie schon wissen, dass LITROW aus BESSELS Beobachtungen die Deklination von 23 Sternen abgeleitet hat, und sie alle etwa 3" südlicher findet, als das Mittel aus PIAZZI, ORIANI und POND, die nahe miteinander übereinstimmen. Entweder

¹⁾ Siche S. 64 und sonst.

gaben also die Instrumente dieser Astronomen alle Zenithdistanzen zu klein, oder BESSELS Kreis alle zu gross. Sollten diese Unterschiede allein in Fehlern der Messinstrumente liegen? Oder kann auch etwas auf die meteorologischen Werkzeuge, die Art ihrer Aufstellung und Benutzung bei der Refraktionsverbesserung ankommen? Sollte es gar möglich sein, dass Lokalitäten der Sternwarten und ihrer Umgebungen Einfluss auf die Konstante der Refraktion hätten?»

Im Herbst 1817, nachdem GAUSS in der Zeitschrift für Astronomie einen längeren Aufsatz über diesen Gegenstand veröffentlicht hatte (Werke VI, S. 393), sprachen sich GAUSS und BESSEL über diesen Gegenstand noch folgendermassen aus. GAUSS schreibt am 5. September 1817: » so beschränkt sich all mein Beobachten auf den 12-zölligen Repetitionskreis. Ich habe damit das Sommersolstitium ganz nach Wunsch beobachtet; früher hatte ich schon eine schöne Reihe Beobachtungen der untern Kulmination des Polarsterns. Bei allen Beobachtungen war das Gewicht am Fernrohr abgenommen und statt dessen ein anderes an den Alhidadenkreis geschraubt; allein in den Resultaten hat dies gar keine Änderung hervorgebracht. Eine merkliche Biegung des Fernrohres findet also nicht statt, und die Aussicht, dadurch den vielbesprochenen Unterschied der Zirkumpolar- und Sonnenbeobachtungen zu erklären, fällt also weg. Ich bin durchaus ausser Stande, an dem Instrumente eine Ursache anzugeben, die stets Verminderung der Zenithdistanzen hervorbringen müsste. Die Hauptmomente meiner Beobachtungen sind folgende; eine etwas detailliertere Angabe werden Sie nächstens in der Zeitschrift finden. . . . »

GAUSS hatte in dem Briefe an OLBERS vom 2. August 1817 bemerkt, dass es ihm sehr gewagt schiene, wenn BESSEL seine Polhöhe auf $0,25$ für zuverlässig hielte (oben S. 65). OLBERS glaubte, vom Inhalt dieses Briefes BESSEL vertraulich Mitteilung machen zu müssen; er tat dies am 2. November und fügte hinzu: »Sie werden sich, lieber BESSEL, von dieser Mitteilung, da ich keine Erlaubnis dazu habe, nichts merken lassen; ich habe sie aber hauptsächlich deswegen gegeben, weil sie Ihnen vielleicht einen Wink gibt, woher ein, mir bisher ganz unbekanntes Stillschweigen von GAUSS über Ihre letzten Arbeiten rühren mag, worüber Sie sich beklagen. Es wäre mir sehr leid, wenn zwischen zwei Männern, die ich am meisten liebe und ehre und ohne

Bedenken für die grössten deutschen Astronomen und Mathematiker halte, irgend eine dauernde Kälte stattfinden sollte.»

Hierauf schrieb BESSEL am 18. November desselben Jahres an GAUSS: »Ihr Brief urteilt recht und billig über den streitigen Punkt. Das subjektive Urteil leugne auch ich nicht, in sofern es nämlich nicht auf der Voraussetzung beruht, dass andere, die etwas anderes finden, dieses verschuldet haben. Diese Voraussetzung ist, wie ich Ihnen, teuerster Freund, wohl nicht zu versichern brauche, nie die meinige gewesen, wenn es darauf ankam, die Beobachtungen von Ihnen, POND und anderen unter einander oder mit den meinigen zusammenzuhalten. Von dieser Sünde kann ich mich frei erklären, wenn ich gleich die Überzeugung habe, dass nicht alle Beobachter im Stande sind, die gehörige Vorsicht anzuwenden. — Wenn ich anfangs, als ich die starken Unterschiede meiner Beobachtungen von andern noch nicht kannte, ohne eine weitere Bemerkung äusserte, meine Polhöhe schein bis auf 0,25 richtig zu sein, so, beruhte dies nur auf der vollkommenen Harmonie, aller aus meinen Beobachtungen gezogenen Folgerungen unter sich, wie ich auch angegeben zu haben glaube. In dieser Harmonie unter sich stehen auch meine Beobachtungen nicht allein, sondern sie stehen den BRADLEYSchen zur Seite, und ich glaube, es war nicht ganz ohne Grund, wenn ich, in einem Briefe, den LINDENAU, wenn ich nicht irre, hat abdrucken¹⁾ lassen, sagte, dass ich der Übereinstimmung lieber traue als der Abweichung, und deshalb die Abstände beider Wendekreise vom Äquator als gleich annähme. — Jetzt aber haben sich so starke Unterschiede gezeigt, dass wir sehr Unrecht haben würden, wenn wir uns beruhigen wollten. Es ist nicht sowohl ein Streit der Beobachter als ein Streit der Instrumente; dass diese allein Schuld an dem Unterschiede sind, ist klar, wenn man sieht, dass alle kleinen Repetitionskreise, alle grossen und BRADLEYS Quadrant und mein Kreis besondere Klassen bilden. Ihr Urteil, dass die kleinen Kreise nicht den grösseren nachzusetzen sind, weil sie kleiner sind, ist unbestreitbar; wenn ich sie nachsetzte, so war es nur, weil jene der Übereinstimmung näher kamen. Allein ich weiss auch wohl, dass die Übereinstimmung zweier Instrumente, noch weniger also wohl eines Instruments mit einer angenommenen Hypothese, nicht entscheidend ist. — Die Zeit muss und wird die Rätsel, die man nicht leugnen kann, gewiss aufklären.

¹⁾ Siehe Fussnote 1) auf Seite 65. — BRDL.

Dass Ihre Hoffnung wegen des Gegengewichts getäuscht ist, ist zu bedauern, da die Sache dadurch noch verwickelter wird. Sollte BOHNENBERGER Recht haben, wie es gerade nicht unwahrscheinlich sein würde, wenn wirklich eine kleine Beweglichkeit der Achse stattfände, so müsste sich dieses, falls ich übrigens seine Äusserung recht verstanden habe, sehr leicht ausmachen lassen, wenn man die Nonien vor jeder Beobachtung ablöse oder — doch Sie besitzen selbst einen Kreis und ich keinen!

»Wir gewinnen offenbar, wenn wir die Instrumente in gewissen Beziehungen immer schärfer prüfen; wir werden dadurch von den möglichen Fehlerquellen immer mehrere ausschliessen. Aus diesem Grunde habe ich die Verwendung einiger Wochen nicht gescheut, um die Teilungen meines Kreises aufs Neue zu untersuchen.«

Die Anspielung auf BOHNENBERGER in diesem Briefe bezieht sich auf dessen Vermutung, dass eine durch die Schwerkirkung verursachte Exzentrizität der Repetitionskreise den Unterschied hervorbringen könnte¹⁾. Hierdurch schienen sich in der Tat die Differenzen zu erklären, wenigstens wurde dadurch zunächst eine Fehlerquelle festgestellt, die als deren Ursache gelten mochte. Nach weiteren sorgfältigen Untersuchungen schreibt GAUSS an BESSEL am 25. März 1818: »Für die Beobachtungen der letzten Wintersonnenwende habe ich die Klemme am Kreise an der Objektivseite anbringen lassen²⁾; die Beobachtungen sind zwar nicht zahlreich, scheinen aber doch anzuzeigen, dass der von BOHNENBERGER relevierte Umstand nicht ohne Grund ist. Ich gebe Ihnen meine Beobachtungen zu eigener Reduktion nach beliebigen Elementen und füge nur das Resultat bei, welches ich selbst nach CARLINIS Refraktions- und Sonnentafeln erhalten habe . . . folgen die Beobachtungen . . . « Nach CARLINIS Schiefe der Ekliptik und unter Voraussetzung, dass die Zenithdistanzen bei der alten Lage der Klemme der Korrektion $Q \sin z$, bei der neuen $-Q \sin z$ bedürfen, stehen meine Resultate so:

Polhöhe Nordstern (nach Ihren Tafeln)	51° 31' 49,30 — 0,644 Q
Sommerssolstitium von 1817	45,21 + 0,472 Q + dε
Wintersolstitium von 1817	48,26 — 0,966 Q — dε.

¹⁾ BOHNENBERGER, Zusatz zu dem Schreiben des Herrn Hofrat Gauss, Zeitschrift für Astronomie, Bd. 4, Juli-August 1817, S. 141. — Vergl. auch Auszug aus einem Schreiben des Hrn. Prof. Bessel, ebendort Bd. 5 (1818), S. 267 (BESSELS Werke II, S. 8).

²⁾ Zur Prüfung von BOHNENBERGERS Hypothese. — BRDL.

Mein Wintersonstium von 1814 haben Sie selbst, aber wie ich glaube nach andern Refraktionstafeln berechnet. Dürfte man annehmen, dass Q damals denselben Wert hatte wie 1817 (der Kreis ist aber mittlerweile auseinander genommen gewesen), so scheint die Vergleichung beider Wintersonstium ungefähr $Q = 2,5$ zu geben (ich werde aber diese Rechnung erst genau machen müssen). Dann würde der Nordstern noch etwa $1\frac{1}{2}$ Sekunden mehr geben als die Sonne. Dies kommt nahe mit dem überein, was ORIANI und LITROW mit dreifüssigen Kreisen gefunden haben.¹⁾

Die interessante Diskussion zwischen beiden über diesen Gegenstand schliesst mit diesem Briefe; nur am 1. April 1819 stellt BESSEL in einem Briefe an GAUSS nochmals seine übereinstimmenden Ergebnisse von 1814 bis 1818 zusammen. In dem Briefe an OLBERS vom 31. März 1818 stellt GAUSS fest, dass seine Beobachtungen des letzten Wintersonstiums der BOHNENBERGERSCHEN Hypothese günstig sind, dass diese aber nur einen Teil des beobachteten Unterschiedes der Polhöhe aus Stern- und Sonnenhöhen erklärt.

Die nun erschienene BESSELSche Bearbeitung der BRADLEYSCHEN Beobachtungen²⁾ und GAUSS' Beschäftigung mit dem inzwischen (April 1818) in Göttingen eingetroffenen REPSOLDSCHEN Meridiankreise gaben jetzt einen neuen wichtigen Stoff zur Unterhaltung und auch im Briefwechsel mit OLBERS tritt die so lange behandelte Frage der Solstitien in den Hintergrund. GAUSS scheint nun auch seine Beobachtungen mit dem Bordakreise aufgeben zu haben. Es begegnete ihm wohl hier zum erstenmale, dass eine von ihm begonnene Untersuchung fehlschlug, während sie von anderer Seite mit Erfolg durchgeführt wurde. Der Grund lag in der Mangelhaftigkeit seiner instrumentellen Hilfsmittel und er mag es schwer empfunden haben, dass seine Sternwarte noch weit davon entfernt war, so ausgerüstet zu sein, dass er auch auf dem Gebiet der beobachtenden Astronomie die Hoffnungen erfüllen konnte, die die wissenschaftliche Welt auf ihn zu setzen gewohnt war. Schliesslich musste doch die BOHNENBERGERSCHEN Hypothese als der wahre Grund der Unstimmigkeiten³⁾ angesehen werden. GAUSS selbst spricht sich in den G. G. A., Juni 1820 (Werke VI,

¹⁾ Siehe Fussnote 1) auf Seite 59.

²⁾ Vergl. zu dieser Frage auch noch die Briefe von OLBERS an BESSEL vom 20. April 1820, 2. Dezember 1823 und von BESSEL an OLBERS vom 25. April 1822.

S. 431) dahin aus und ebenso BESSEL in einem Aufsatz¹⁾ in BODES Astronomischem Jahrbuch für 1825, S. 208.

Etwa zur gleichen Zeit²⁾, in der die beiden REICHENBACHSCHEN Repetitionsinstrumente eintrafen, erhielt GAUSS auch ein vor mehr als einem Jahr bestelltes Heliometer³⁾ von FRAUNHOFER. Er schreibt darüber an BESSEL am 18. (28.?) Mai 1814: »An kleinern Sachen, die schon auf der alten Sternwarte benutzt werden können, habe ich indes seit $1\frac{1}{2}$ Jahren verschiedene schätzbare, in ihrer Art meisterhafte Stücke acquirirt . . . vor einigen Tagen auch aus demselben Institut ein herrliches achromatisches Heliometer, 43 Pariser Zoll Brennweite, 34 Linien Öffnung. Der geniale Künstler hat an diesem Instrument mehreres eigentümliche angebracht; besonders wichtig ist die Einrichtung, dass die Messungen damit durch Repetition vervielfacht und dadurch von den Lokal-Unvollkommenheiten der Schraube unabhängig gemacht werden können. Die Präzision des Fernrohrs ist ungemein gross. Ich habe nur erst ein Paar Probeobservationen an terrestrischen Objekten, der Sonne, dem Jupiter und Mond gemacht. Wenn ich von der Repetition abstrahierte und nach gewöhnlicher Art den Error Indicis bestimmte, gingen die grössten Unterschiede unter sich nur auf $\frac{1}{4}$ Sekunde. Ich freue mich besonders auf die Beobachtungen von Kometen und Asteroiden, wenn sie in den Bereich von gut bestimmten Sternen kommen. Erlauben Sie mir hier eine Frage. Ihr Heliometer ruht, meine ich, auf einem Äquatoreal; aber Sie bestimmten die Position des Kometen von 1811 nur durch Abstände von zwei Sternen, oder den bewegten Kometen durch verschiedene Abstände von einem Stern. Finden Sie es denn nicht tunlich, den Positionswinkel unmittelbar am Instrument zu beobachten? Vorausgesetzt, dass die Teilung an dem Rotationszirkel mit hinlänglicher Genauigkeit, kann man, obgleich kein Nonius da ist, und die Teilung nur in ganzen Graden, beim Ablesen nicht leicht über 3' fehlen, und dies kann bei einer Distanz von 19' erst einen Irrtum von 1" hervorbringen.

¹⁾ Über die Abweichung der Fixsterne, unterm 29. August 1822 eingeschandt.

²⁾ In Tagebuch der Sternwarte ist als Tag der Ankunft des Heliometers unzuweideutig der 23. Mai 1814 angegeben, während es nach dem folgenden Brief an BESSEL schon vor dem 18. Mai eingetroffen sein müsste. Vielleicht ist das Datum dieses Briefes verschrieben und soll 28. Mai heissen.

³⁾ Vergl. auch Werke VI, S. 377. Es ist das erste von FRAUNHOFER hergestellte Heliometer; es besass ein einziges geteiltes Objektiv, während DOLLOND vor das eigentliche Objektiv eine zerschnittene Linse gesetzt hatte. Vergl. auch Brief an BESSEL vom 13. November 1814.

Mir deucht, dass man auf diese Weise auch den Positionswinkel bei einem Doppelstern mit vieler Genauigkeit müsse bestimmen können, nur dürfte man zu diesem Behuf die beiden Bilder nicht sowohl zur Deckung, sondern bei vergrößerter Distanz der Objektivhälften die vier Bilder auf eine gerade Linie bringen. Ich denke für unser Heliometer auch ein parallatisches Stativ machen zu lassen, auch in der Absicht, das Auffinden kleinerer Sterne, oder grösserer am Tage, zu erleichtern und möglich zu machen.« Ein älteres Heliometer war bereits auf der Sternwarte vorhanden. Im Briefe an OLBERS vom 15. Juni 1814 kündigt GAUSS auch diesem die Ankunft des Heliometers an und bemerkt dazu: »Ein DOLLONDSches Heliometer habe ich nie gesehen; ich meine aber, dass diese meistens so eingerichtet sind, dass vor ein vollständiges achromatisches Fernrohr zwei (nichtachromatische) Objektivhälften von bedeutender Brennweite vorgesetzt werden, deren Zentrumsdistanz durch Skale und Vernier gemessen wird; wenigstens ist das Seeberger Heliometer so nach NICOLAIS Beschreibung; denn dieser (welcher es nur obenhin betrachtet hatte) erzählte mir gestern, dass es nur Plangläser schienen; ebenso wird wahrscheinlich das Königsberger sein, da es als Akzessorium zu einem vollständigen Äquatoreal gehört. Ein solches Heliometer kann also, als optisches Werkzeug betrachtet, nicht mehr leisten, als ein gemeines Fernrohr von grosser Brennweite. Bei dem unsrigen ist nur Ein zerschnittenes achromatisches Objektiv von 43 Par. Zoll Brennweite, 34 Lin. Öffnung, 4 Vergrößerungen von 50, 70, 100, 150. Dies Fernrohr, wenn beide Objektivhälften zusammengebracht werden, ist von ungemeiner Vollkommenheit; ich habe weder Mond noch Sonne je schöner gesehen. Am Monde drängt sich mir unwillkürlich die Körperlichkeit der Gebirgsgegenden auf; auf der Sonne zeigen sich jetzt ausser einem kleinen Flecken nebst drei oder vier sehr kleinen andern dabei überall Ungleichheiten, namentlich habe ich heute nordöstlich eine Stelle sehr auffallend bemerkt, die gerade so aussieht, wie bald nach Sonnenuntergang im orangefarbenen Abendhimmel ein weissliches Wölkchen, gewiss werden Sie es nach Empfang dieses Briefes auch noch mit Ihrem schönen DOLLOND wahrnehmen können. Saturn habe ich noch nicht gesehen. — Die Entfernung der Centrorum der Objektivhälften wird durch Umläufe und Teile ($\frac{1}{17} \frac{1}{17}$) leicht abzulesen) einer trefflich gearbeiteten Schraube gemessen, ein Umgang beträgt 56". Verschiedene Bestimmungen des Error Indicis aus grossen und kleinen Objekten, himmlischen und irdischen,

geschlossen, differieren selten $\frac{1}{4}$ Sekunde. Doch soll vom Error Indicis eigentlich gar keine Rede sein, denn das Instrument ist zum Repetieren eingerichtet, so dass die etwaigen lokalen Ungleichheiten der Schraube ganz eliminiert werden. Heute Nachmittag 4 $\frac{1}{2}$ Uhr war der Abstand des grössten Fleckens vom nächsten Rande 5' 52,3. Ich habe mit NICOLAIS Beobachtungen der Sonnenflecken verabredet; er soll die Rektaszensionen am Passageninstrument beobachten, ich will die Abstände vom Rande messen und zur Ergänzung die Deklinationen, so gut es gehen will, am Mauerquadranten. Dies ist freilich ein schlechter Notbehelf, das Beste wäre ein Fadenmikrometer auf einer parallatischen Maschine. Indessen habe ich ein parallatisches Stativ für unser Heliometer in München bestellt und hoffe dann, wenn ich es erst besitze, sogleich die Positionswinkel unmittelbar mit ziemlicher Schärfe messen zu können, so dass die Zeit gar nicht mehr beim Messen zu helfen braucht. Vorerst liegt das Heliometer nur auf einem elenden Stativ. Was für schöne Kometenbeobachtungen werde ich dann künftig machen können. Entdecken Sie uns nur bald einen.«

Als OLBERS darauf fragte, was aus dem früher auf der Göttinger Sternwarte befindlichen DOLLONDSchen Heliometer geworden sei, antwortet GAUSS am 7. Juli 1814: »Dass ich bei meiner Äusserung, ich habe noch kein DOLLONDSches Heliometer gesehen, dasjenige ignorierte, dessen Sie erwähnen und das allerdings nebst andern meistens unbrauchbaren Sachen nach KAESTNERS Tode für die Sternwarte angekauft ist, hat seinen Grund darin, weil dasselbe weder von DOLLOND ist (sondern von BAUMANN), noch auch die DOLLONDSche Einrichtung hat (sondern die BOUGUERSche). Sie können aus der Probe, die KAESTNER davon gibt, sehen, dass dieser damit auf 11" falsch gemessen hat, dass also dies unbehülfliche Ding kaum so viel leistet, wie ein guter Spiegelsextant. Jene Äusserung von mir bezog sich nur darauf, dass ich nicht wüsste, wie DOLLOND nach Erfindung der achromatischen Gläser seine Heliometer eingerichtet hat. In den Aufsätzen, die dieser Künstler zuerst vor Erfindung der achromatischen Gläser über seine Erfindung in den Philosophical Transactions gab, spricht er von einer dreifachen Einrichtung, 1. ein zerschnittenes Objektiv allein, 2. ein solches von langer Brennweite vor einem ganzen dito von kürzerer, 3. ein solches vor einem Spiegelteleskop. Die FRAUNHOFERSche Einrichtung, ein zerschnittenes achromatisches Objektiv allein anzuwenden, scheint

DOLLOND nicht ausgeführt zu haben; immer scheint er vor das vollständige Objektiv ein zerschnittenes von langer Brennweite zu setzen. Nun wusste ich nicht, ob dieses wieder achromatisch oder einfach sei. Allein NICOLAI schreibt mir heute, dass auf der Seeberger Sternwarte zwei DOLLONDSche Heliometer vorhanden sind, wovon das eine wirklich achromatisch sei (übrigens sonderbar genug von negativer Brennweite oder konkav; aus seinen Angaben schliesse ich auf -30 Fuss). Auf diese Art gewinnt allerdings DOLLOND eine achtmal so grosse Skale, als das meinige hat; das Ablesen kann also mit dem Nonius geschehen, trotzdem glaube ich, dass an dem meinigen die äusserst trefflichen Schrauben eher noch grössere Genauigkeit geben, selbst ohne zu repetieren. Einen wichtigen Vorzug hat aber die DOLLONDSche Einrichtung unstreitig in der grössern Schnelligkeit bei Messungen grosser Winkel; bei der Sonne ist es immer lästig, 70 Drehungen zu machen, und so möchte auch wohl bei einem sehr häufigen Gebrauch die DOLLONDSche Einrichtung den Vorzug grösserer Dauerhaftigkeit haben. Dagegen muss man bei derselben in Ansehung des Sehens sehr verlieren, an Helligkeit enorm, auch wohl an Deutlichkeit. Wenigstens vermute ich, dass das zerschnittene Objektiv auf der Seeberger Sternwarte nicht recht vollkommen ist, da NICOLAI bemerkt, dass bei weiterm Ausziehen der Okularröhre Bilder, die sich vorher berührten, sich trennen, wie dies (obwohl bei konvexen Objektiven in entgegengesetztem Sinn) bei den gemeinen Gläsern längst bemerkt wurde, worüber auch KAESTNER, der LALANDES richtige Vorschriften ganz falsch beurteilte, ein Langes und Breites hat. Bei unserm Heliometer findet dies Phänomen nicht statt. Doch ich sehe, dass ich selbst lang und breit werde und Sie nur ermüden muss.

GAUSS beklagte sich jedoch bald über die schlechte Montierung des Heliometers; er hatte kein brauchbares Stativ dazu und beantragte die Anschaffung eines solchen in einer Eingabe an das Ministerium vom Mai 1814 in der er sich folgendermassen ausspricht:

»Ewr. Exzellenzen habe ich untertänigst Anzeige zu machen, dass vor einigen Tagen aus München ein bereits vor anderthalb Jahren bei dem kgl. bayrischen Salinenrat von REICHENBACH — welcher bekanntlich dort in Verbindung mit dem Geheimrat von UTZSCHNEIDER und dem Optikus FRAUNHOFER ein durch bewundernswürdige Arbeiten berühmt gewordenes Institut für Verfertigung astronomischer und optischer Instrumente errichtet hat — für die

hiesige Sternwarte bestelltes Heliometer angelangt ist. Mit dieser Bestellung hat es folgende Bewandnis.

»Im Jahr 1810, wo für die hiesigen Universitätsinstitute ein besonderer Fonds gestiftet war, wurden davon der Sternwarte jährlich 1750 Franken bestimmt. Die kurrenten Ausgaben, auch mit Einschluss meiner darauf angewiesenen Logisentschädigung, absorbierten davon ungefähr die Hälfte. Die zweckmässigste Verwendung des Überschusses schien mir zu sein, wenn ich damit die künftige Ausrüstung der neuen Sternwarte mit solchen Instrumenten, wie sie der heutige Zustand der praktischen Astronomie erheischt, vorbereitete. Freilich konnten von jenem Überschusse nur solche Stücke angeschafft werden, deren Preis mit der beschränkten Grösse desselben im Verhältnis standen, zumal da mein Wunsch, jene Überschüsse von mehreren Jahren zuweilen für Ein Instrument sammeln zu können, obgleich von dem damaligen Studiendirektorium gutgeheissen, doch nachher in der Ausführung Hindernisse fand. Indes blieb dabei mein Grundsatz, dass alles Anzuschaffende in seiner Art von der ersten Vollkommenheit sein müsste, um auch der neuen Sternwarte ganz würdig zu sein; ausserdem hielt ich es für notwendig, meine Wahl auf solche Instrumente zu richten, deren Einrichtung schon einen nützlichen Gebrauch in dem Lokale der alten Sternwarte zulies. Auf diese Weise wurden (verschiedner Kleinigkeiten nicht zu erwähnen) im Jahre 1812 ein zwölfzölliger Repetitionskreis, im Jahr 1813 ein achtzölliger Theodolit, beide von REICHENBACH, angeschafft; beide Instrumente haben schon mannigfaltigen Gebrauch gewährt und sind in ihrer Art wahre Zierden der Sternwarte. Für das Jahr 1814 war schon gegen Ende des Jahres 1812 das jetzt fertig gewordene 43-zöllige Heliometer bestellt, dessen Preis zufolge eines Schreibens des Geheimrats von UTZSCHNEIDER 420 Gulden nach 24 fl. Fuss, oder 233 $\frac{1}{2}$ Taler nach Konventionsgeld ist. Ich zweifle um so weniger, dass Eure Exzellenzen die Annahme dieses Instruments genehmigen werden, da

1) ein Heliometer ein wesentliches Bedürfnis einer gehörig ausgerüsteten Sternwarte ausmacht und auch schon auf der alten Sternwarte ebenso gut wie künftig auf der neuen gebraucht werden kann, und

2) das jetzt in Frage stehende H ausgefallen ist, dass es als ein Meisterwerk betrachtet werden kann, wie es sich freilich von dem grossen Künstler erwarten liess.

»Was übrigens die Bezahlung betrifft, die nicht füglich durch bare Übersendung des Geldes geschehen kann, so bemerke ich nur, dass dieselbe für die beiden früher angeschafften Instrumente durch Wechsel auf Augsburg geleistet wurde, welche, da die hiesigen Geldnegocianten auf Augsburg keine Geschäfte machen, damals durch den damaligen Rentanten der Universitätskasse KIENZT aus Kassel herbeigeschafft wurden.

»Noch muss ich bemerken, dass dieses Heliometer noch kein besonderes Stativ hat. Es ist von München noch keines mitgeschickt, weil keines ausdrücklich bestellt war und der Künstler nicht wusste, ob ein mehr oder weniger künstliches Stativ gewünscht werde. Ich habe das Heliometer daher einstweilen auf das Stativ eines von den Fernrohren gesetzt, die sich auf der Sternwarte befinden, welches freilich für den Augenblick als Nothbehelf dienen kann, aber der Vortrefflichkeit des Instruments selbst durchaus unwürdig ist. Dieses kann nur dann erst alles leisten, wozu es tüchtig ist, wenn es ein besonderes, angemessenes Stativ hat. Man hat die Wahl zwischen einem ordinären Fernrohrstativ und einem sogenannten parallatischen Stativ; ersteres wäre etwas wohlfeiler, allein letzteres gewährt so mannigfaltige und wichtige Vorteile, dass ich nur für dieses stimmen kann, zumal da dessen Preis immer kein sehr grosses Objekt sein kann. Ich bitte demnach Ewr. Exzellenzen um die Erlaubnis, für das Instrument ein besonderes parallatisches Stativ in München bestellen zu dürfen. Bekannt ist es übrigens schon und die drei hierher gelieferten Instrumente geben davon jedem Kenner auffallende Beweise, dass das dortige mathematisch-optische Institut seine Preise ungemein billig setzt; in Beziehung auf dieses Stativ kann ich, wenn es gewünscht wird, auch vorher erst anfragen.«

Aus dem genannten Grund und wegen der beschwerlichen Benutzung beschränkte sich GAUSS zunächst darauf, einige Voruntersuchungen mit diesem Instrument zu machen; so bestimmte er die Vergrösserungen (Eintragung in das *Tagebuch der Sternwarte* vom 8. Juni 1814) und stellte mit Hilfe des REICHENBACHSchen Theodoliten eine Zeichnung des Umrisses des Jakobikirchturms her (Eintragung in das *Tagebuch* vom 20. August), um diesen zur Bestimmung des Skalenwertes benutzen zu können; vereinzelt mass er die Durchmesser der Sonne und des Jupiter, auch des Saturnringes und des Uranus.

Im April 1815 erhielt er endlich das neue Stativ, aber auch hiernach

erlebte er nicht viel Freude an dem Instrument. Es bahnte sich auch hierüber ein Meinungs-austausch mit BESSEL an. Dieser besass anfangs ein altes DOLLONDSches Heliometer und erhielt später (1829) ein grosses FRAUNHOFERSches¹⁾ von 5 Zoll Öffnung. GAUSS versuchte nach der neuen Montierung nach Ausweis des *Tagebuchs der Sternwarte* einige Messungen des Venus²⁾- und des Marsdurchmessers, sowie des Saturnringes (1815 Mai—Oktober). Auch beobachtete er den Kometen 1815 II; nur die letztere dieser Beobachtungen hat er selbst veröffentlicht³⁾. Seinen Plan, Sonnenflecken gemeinsam mit NICOLAI zu messen, über den er an OLBERS am 15. Juni 1814 (siehe oben Seite 73) berichtet, gab er schliesslich ganz auf und schrieb darüber an OLBERS im Juni 1815: »Zur Beobachtung von Sonnenflecken habe ich alle Lust verloren. Ich hatte vor 10 Tagen einen ausgezeichnet schönen Flecken scharf beobachtet; ein paar Tage nachher hatte sich die Gruppe so verändert, dass ich garnicht mehr wusste, was ich beobachten sollte. Isolierte Flecke hatte ich schon im vorigen Jahre mehreremale zu beobachten angefangen, die bald nachher mitten auf der Sonne ganz verschwunden waren. Das Aufstellen des Heliometers, das Beobachten selbst etc. kostet zu viel Mühe, als dass ich sie an ein so betrügerisch-undankbares Geschäft verschwenden sollte. Erst wenn ich einmal dem Heliometer einen bleibenden Platz geben kann, werde ich solche Beobachtungen wieder anfangen.« Ähnlich klagt er in einem im astronomischen Jahrbuch für 1818 abgedruckten Briefe an BODE (Werke VI, S. 388—389), in dem er sagt, dass er gute Kreismikrometerbeobachtungen vorzöge.

Im Mai 1817 schickte er nach einem schon im Juni 1816 gefassten Entschluss⁴⁾ das Heliometer an FRAUNHOFER zurück zur Vornahme einiger Verbesserungen und erhielt es auch im November 1817 wieder mit einem neuen Objektiv⁵⁾. Er kam aber auch auf der neuen Sternwarte nicht dazu, davon einen wirklichen Gebrauch zu machen, wie er an BESSEL am 25. März 1818 schreibt: »Gegenwärtig kann ich des Lokals wegen noch gar keinen Gebrauch davon machen; die Zimmer, wo es in Zukunft seinen Platz haben wird, werden

1) WOLFF, *Handbuch der Astronomie*, II. Band, S. 140. — Vergl. auch Briefe von BESSEL an OLBERS vom 13. Januar 1820 und vom 4. Juni 1829.

2) Brief an OLBERS vom 29. Mai 1815, Werke XI, 1, S. 293.

3) Werke VI, S. 388.

4) Brief an OLBERS vom 4. Juni 1816.

5) Brief an BESSEL vom 5. September 1817 und an OLBERS vom 2. Dezember 1817.

erst in diesem Sommer fertig. Die zwei bis jetzt fertigen Zimmer können es nicht aufnehmen, da sie jetzt mit Spiegelteleskopen etc. wie ein Warenlager vollgepfropft sind.«

In seinem Briefe vom 5. Februar 1818 fragte BESSEL, ob GAUSS »nicht eine Anweisung zum richtigen Gebrauche des Heliometers« — über das damals noch keine rechte Theorie vorhanden war — »bekannt machen wolle«, worauf GAUSS am 25. März antwortet: »Ich bin zwar nicht abgeneigt, in Zukunft einmal etwas über den Gebrauch des Heliometers zu schreiben; ich werde aber damit warten müssen, bis ich erst selbst hinlängliche Erfahrungen eingesammelt habe.« Es kam aber nicht dazu, da seine Zeit durch andere Beschäftigungen in Anspruch genommen wurde.

Späterhin gab HANSEN 1827 eine Theorie des Heliometers¹⁾, und BESSEL veröffentlichte 1841 die Ergebnisse seiner Untersuchungen²⁾. BESSEL war hierbei auch auf die dazu nötigen dioptrischen Untersuchungen gekommen, gerade in derselben Zeit wie GAUSS, der seine Abhandlung *Dioptrische Untersuchungen* im Dezember 1840³⁾ der Göttinger Sozietät vorlegte. BESSEL schreibt daher am 20. Januar 1841 an GAUSS: »Die gütige schnelle Übersendung Ihrer Abhandlung über Dioptrik erkenne ich mit dem lebhaftesten Danke an. Ich habe sie gestern erhalten und — ziemlich vertraut mit ihrem Gegenstande — schnell durchlesen können. Ihre meisterhafte Behandlung darf ich nicht hervorheben; sie ist in der Ordnung, denn Niemand hat bis jetzt entscheiden können, ob der wesentliche Inhalt, oder die Form, in welcher er erscheint, in Ihren Arbeiten am meisten hervortreten. — Diese Abhandlung erregt mein Interesse noch von einer dritten Seite; denn es hat sich getroffen, dass ich selbst das Unglück gehabt habe, vor drei Wochen einen Aufsatz über dieselbe Aufgabe an SCHUMACHER⁴⁾ zu senden. — Schon vor vielen Jahren hatte ich die Ordnung bemerkt, welche die Ausbeutung der einfachen Eigenschaften der Kettenbrüche in diese Materie bringt. Eine damalige Ausarbeitung darüber wartete auf eine Gelegenheit zur Bekanntmachung, welche von der Notwendigkeit, Anwendungen von der Dioptrik zu machen, herbeigeführt werden

1) Ausführliche Methode, mit dem Fraunhofer'schen Heliometer Beobachtungen anzustellen. Gotha 1827.

2) Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte, Astronom. Untersuchungen, Seite 55 ff.

3) Werke V, S. 243.

4) Über die Grundformeln der Dioptrik, A. N. Bd. 18, S. 97 (1841). — BREDL.

sollte. In der Zwischenzeit nahm MÖBIUS¹⁾ dieselbe Materie auf und dadurch meinem Aufsatz sein hauptsächlichstes Interesse; denn obgleich er den Vorgängern in der Vernachlässigung der einzelnen Konstruktionselemente des Linsensystems unnötigerweise folgte, so schien mir dieses doch so offenbar unnötig zu sein, dass ich glaubte, ihm die Freude an seiner Arbeit durch einen wohlfeilen Zusatz nicht verkümmern zu dürfen. Ich machte dagegen ihn selbst auf diesen Zusatz aufmerksam; allein er hat meiner Mitteilung keine Folge gegeben, vielleicht um mir das, was mir noch an Sache übrig geblieben war, nicht zu nehmen. Vor einigen Monaten gelangte ich indessen zu der Ausarbeitung einer besonderen Theorie meines Heliometers, welche nun notwendig geworden ist, da ich im Begriffe bin, eine Reihe von Resultaten, welche auf Beobachtungen mit diesem Instrumente beruhen, zu redigieren. Dort mussten dioptrische Sätze angewandt werden, und nun nahm ich die ihnen von mir gegebene Form wieder auf. Als ich die meine Darstellung derselben enthaltenden Paragraphen JACOBI zeigte, meinte er, ich könne sie, ohne Übelstand, abgesondert bekannt machen, was übereinstimmend mit dieser Meinung ihre Abschrift für die Astronomischen Nachrichten veranlasste. Vielleicht haben Sie meinen Aufsatz schon eher gelesen, als dieses Blatt zu Ihnen gelangt. Es ist nicht gut, mit Ihnen zusammentreffen!²⁾

Zu Anfang des Jahres 1816 oder Ende 1815 erhielt die Göttinger Sternwarte eine Reihe astronomischer Instrumente aus Lilienthal, über die SAALFELD in der *Geschichte der Universität Göttingen*³⁾ Folgendes berichtet: »Seit dem Jahre 1815 besitzt auch die Sternwarte die von GEORG III. im April 1799 für dieselbe erkaufte Instrumentensammlung des sel. Justizrates SCHROETER zu Lilienthal, zu welcher ein Teleskop von 4, 13 und 15 Fuss, zwei von 7 Fuss, ein Achromat von 3, und ein 10 schuhiges von P. DOLLOND von 3,9 Zoll Öffnung, sowie noch verschiedene Uhren, Mikrometer und andere Maschinen gehören. Auch sind noch zwei grosse Metallspiegel von 10 englischen Zoll Durchmesser nebst dem Maschinenwerke zu einem 27 schuhigen Teleskope

1) Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern, CRELLES Journal, Bd. 5 (1830), S. 113 ff.; MOEBIUS Werke, Bd. IV, S. 477 ff. — Beitrag zur Lehre von den Kettenbrüchen nebst einem dioptrischen Anhang, CRELLES Journal, Bd. 6 (1830), S. 215 ff.; MOEBIUS Werke, Bd. IV, S. 503 ff. — BREDL.

2) Geschichte der Universität Göttingen 1788—1820 (Hannover 1820), S. 487, vergl. Fussnote S. 43.

vorhanden, welches dereinst an der Seite der Sternwarte aufgerichtet werden wird.«

Der Ankauf dieser Instrumente¹⁾ war mit der Massgabe geschehen, dass SCHROETER sie bis an sein Lebensende benutzen dürfe. Nach der Einverleibung Lilienthals in das Königreich Westfalen scheint jedoch SCHROETER diesen Kauf als hinfällig angesehen zu haben. GAUSS schreibt darüber an OLBERS am 10. März 1812: »Wissen Sie etwas Näheres über SCHROETERS Demarche, den Kontrakt, wodurch die Instrumente Eigentum unserer Universität geworden sind, zu brechen, und sie nach Frankreich zu verkaufen? LAPLACE hat mir Einiges darüber geschrieben, was ich mir nicht ganz erklären kann, woraus aber doch hervorzugehen scheint, dass die Franzosen zwar einige dieser Instrumente gern haben möchten, aber doch eine zweite Disposition darüber als unrechtmässig betrachten. Wie ich darüber denke, glaube ich Ihnen bei Ihrer Anwesenheit hier mündlich gesagt zu haben.«

In dem von GAUSS erwähnten Briefe von LAPLACE vom 25. November 1811²⁾ heisst es; »Si Monsieur GAUSS a l'occasion de voir ou d'écrire à M. SCHROETER, je le prie de lui dire que je ne perds point de vue son affaire, que j'en ai parlé plusieurs [fois] à M. de FERMENT, intendant général du domaine extraordinaire, qui est plein de bonne volonté et qui n'est arrêté que par la considération, que le contrat d'achat des instruments de M. SCHROETER, par le roi d'Angleterre, portant pour charge, qu'ils seraient à sa mort donnés à l'université de Gottingue, ces instruments sont une propriété du roi de Westphalie qui doit par conséquent remplir les conditions du contrat. Mais les choses ayant changé depuis que M. SCHROETER est devenu français, j'espère que tout cela pourra s'arranger à son avantage et j'y ferai mon possible.«

Indessen scheint in dieser Sache vorläufig nichts geschehen zu sein. Am 12. Dezember 1812 wurde Lilienthal von den Franzosen überfallen und gebrandschatzt; SCHROETER selbst musste flüchten³⁾ und konnte sich niemals wieder ganz von diesem Schlage erholen. Die Instrumente indessen scheinen gerettet worden zu sein. Nach der Wiederherstellung des Königreichs Hannover veranlasste SCHROETER noch vor seinem Tode die Überführung der Instrumente nach Göttingen.

1) Schreiben von OLBERS im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1820, S. 242.

2) Handschrift im GAUSSARCHIV. 3) Vergl. Brief von OLBERS an GAUSS vom 6. Juli 1815.

BESSEL, der diese Instrumente von seiner Lilienthaler Zeit her kannte, gibt auf eine Anfrage von GAUSS in seinem Briefe vom 14. Februar 1816 nähere Auskunft über sie.

Die Eintragungen in das *Tagebuch der Sternwarte* aus der Periode 1813 bis 1816 rühren fast ausschliesslich von GAUSS' Hand her. Sie betreffen, ausser den Beobachtungen mit dem BORDA-Kreise und dem Heliometer, solche am Mauerquadranten, an dem die Sonne zur Zeitbestimmung, sowie der Mond, Jupiter, Vesta und der Komet 1813 II¹⁾ beobachtet wurde. Sehr zahlreich sind auch hier die korrespondierenden Sonnenhöhen vertreten und Messungen von terrestrischen Punkten. Daneben findet man eine Reihe von Kreismikrometerbeobachtungen der Planeten Pallas, Juno, Vesta und von Kometen und Beobachtungen von Finsternissen²⁾. Nur selten kommen im *Tagebuch* Fixsternbeobachtungen am Mauerquadranten von HARDING vor, der die Beobachtungsreihe für seine Sternkarten dem Abschluss nahe gebracht hatte. Von Januar bis Juli 1816 ist das *Tagebuch* gänzlich unterbrochen.

4. (dritte Göttinger) Periode, 1817—1818.

Im Oktober 1816 bezog GAUSS endlich die neue Sternwarte, deren Bau sich über so viele Jahre hingezogen hatte. Der Bau war bereits 1802 vom Könige von Hannover bewilligt worden, wie aus einem Briefe v. ZACHS an GAUSS vom 27. April 1802³⁾ hervorgeht, in dem dieser sagt, er sei beauftragt, den Plan dafür zu entwerfen; auch war im März 1803 HARDING nach Göttingen gerufen⁴⁾ worden, um den Meridian für die neue Sternwarte festzulegen. In der bereits Seite 79 genannten *Geschichte der Universität Göttingen* 1788 bis 1820, S. 481, von F. SAALFELD ist das Schicksal des Baues der Sternwarte folgendermassen geschildert:

»Da die bald nach der Stiftung der Universität errichtete Sternwarte (Teil 2, § 189. 190, S. 266 f.), welche auf einem alten Festungsturm der

1) Teils von GAUSS, teils von HARDING; veröffentlicht ist nur die Beobachtung der Vesta (Werke VI, S. 377).

2) Die Kreismikrometerbeobachtungen von Planeten und Kometen sind meist veröffentlicht/ und Werke VI abgedruckt.

3) Handschrift im GAUSSARCHIV.

4) Vergl. Brief von GAUSS an OLBERS vom 23. März 1803.

Stadtmauer angelegt worden war, sich nicht dazu eignete, irgend eines von den vollkommeneren Werkzeugen aufzunehmen, wodurch in den letzten 30 Jahren die astronomischen Beobachtungen so sehr verfeinert worden sind, so ward das Bedürfnis einer neuen Sternwarte immer fühlbarer und notwendiger, wenn Göttingens Verdienste um die Astronomie nicht ganz aufhören und angehende Astronomen hinfort Gelegenheit finden sollten, sich hier auszubilden. Schon in dem letzten Dezennium des vorigen Jahrhunderts beschloss daher die königl. Regierung eine neue, ganz nach den Bedürfnissen für den gegenwärtigen Zustand dieser Wissenschaft eingerichtete Sternwarte zu errichten. Es wurden zu dem Ende von den berühmtesten praktischen Astronomen Vorschläge zur vollkommensten Einrichtung und Gutachten über ein passliches Lokal eingeholt, und nach diesen Vorbereitungen um die königl. Genehmigung zur Ausführung dieses Baues nachgesucht. GEORG III., als erhabener Selbstkenner der Astronomie und liberaler Beschützer und Beförderer der Wissenschaften überhaupt, geruhte nicht nur den Plan in seiner ganzen Ausdehnung zu genehmigen, sondern auch den möglichst baldigen Beginn des Baues zu befehlen und dazu fürs erste die Summe von 23 500 Rthl. zu bewilligen.

Unter mehreren in Vorschlag gebrachten Plätzen für das neue Gebäude entschied das Urteil der Kunstverständigen für einen südöstlich von der Stadt ausserhalb des Geismartores befindlichen, welcher bei einer mässigen Entfernung von der Stadt eine in diesem Leinetale ziemlich freie Aussicht und — das Haupterfordernis einer Sternwarte — einen sehr festen Grund hat. Schon im Frühjahr 1802 ward der zu dieser neuen Anlage erforderliche Grund und Boden angekauft, mit der Herbeischaffung der Baumaterialien der Anfang gemacht, und die Gründung des Hauptgebäudes im April 1803 wirklich vollzogen. Es war der Plan, den ganzen Bau innerhalb 4 bis 5 Jahren zu vollenden; allein die gleich darauf erfolgte französische Invasion veranlasste, dass der eben angefangene Bau wieder eingestellt werden musste, als die Grundmauern kaum 3 Fuss hoch aufgeführt waren. Zwar gab die 1806 erfolgte preussische Besitznahme von dem hannoverschen Lande einige Hoffnung, dass der Bau in kurzem fortgesetzt werden könne; allein die noch im Herbst desselben Jahres erfolgte Katastrophe, welche abermals eine neue heillose Umwandlung herbeiführte, schlug alle Hoffnungen in Hinsicht dieses Gebäudes auf einige Jahre wieder gänzlich nieder. Erst im Jahre 1810 ward von der

westfälischen Regierung die Fortsetzung dieses Baues genehmigt und dazu eine Summe von 200 000 Fr. bestimmt. Damit fing man im Frühling 1811 den Bau wirklich wieder an, allein die Mauern des Hauptgebäudes waren kaum halb vollendet, als am Ende des Jahres 1813 die Auflösung des westfälischen Staates und die Wiederherstellung der früheren Ordnung der Dinge erfolgte. Schon im nächsten Frühjahr ward daher auf Befehl der königl. hannoverschen Regierung dieser so oft unterbrochene Bau wieder begonnen und mit solchem Nachdrucke fortgesetzt, dass das prächtige Gebäude bereits im Herbst 1816 beinahe ganz vollendet war und die astronomischen Beobachtungen darin angefangen werden konnten.¹⁾

Der Plan der neuen Sternwarte¹⁾ war so angelegt, dass der Mittelbau aus einer Rotunde bestand, über der eine Drehkuppel errichtet wurde, und an die auf jeder Seite sich ein Beobachtungsraum mit Meridianausschnitt anschloss. Die beiden weiterhin angebauten Seitenflügel dienten zu Arbeits- und Wohnräumen. Zu ihrer Ausrüstung mit Beobachtungsinstrumenten plante GAUSS anfangs ausser der Anschaffung der nötigen Uhren die eines grossen und eines kleinen Passageninstruments, eines grossen Meridiankreises und eines Äquatorials²⁾. Betreffs des Meridiankreises schwankte er zunächst, ob ein solcher von REFSOLD, REICHENBACH oder TROUGHTON gewählt werden sollte, welche drei er als die vortrefflichsten Hersteller bezeichnet; er setzt sie ihrer Güte nach in die umgekehrte Reihenfolge, weil ihm der von TROUGHTON für Greenwich angefertigte Kreis als der vollkommenste erscheint. Schliesslich schlägt er vor, um die Kosten für die anzuschaffenden Instrumente auf mehrere Jahre zu verteilen, zunächst ein Passageninstrument zu bestellen und sogleich einen REFSOLD'schen Meridiankreis³⁾ von dessen in Auflösung begriffener Sternwarte anzukaufen. Da er aber die Hoffnung hegt, dass es durch die Freigebigkeit des Prinzregenten, Königs von England, möglich sein möchte, einen TROUGHTON'schen Kreis zu erhalten, so soll der anzukaufende REFSOLD'sche Kreis an die Stelle des kleinen Passageninstruments treten, da für die Aufstellung mehrerer Instrumente immerhin kein Platz auf der Sternwarte

1) Siehe die Abbildung am Schluss dieses Aufsatzes.

2) Siehe GAUSS' Bericht vom 9. Februar 1815, Werke XI, 1, S. 294 ff.

3) Vergl. den Brief von SCHUMACHER an GAUSS vom 30. Dezember 1809, in welchem Briefe sich eine Abbildung des Kreises befand, mit dem SCHUMACHER häufig beobachtete.

vorgesehen sei. REPSOLD hatte eine kleine Sternwarte auf dem Teile des Hamburger Walles errichtet, der später die Elbhöhe genannt wurde. Schon zu Anfang des Jahres 1810 ging er mit dem Gedanken um, diese eingehen zu lassen und die Instrumente zu verkaufen¹⁾.

Am 10. Juni 1812 schreibt SCHUMACHER an GAUSS, als dieser angefragt hatte, ob SCHUMACHER ihm »nicht auch dieses Jahr mit Herrn REPSOLDS trefflichem Kreise einige gute Beobachtungen der neuen Planeten liefern« wolle: »Die Probe mit der Pallas würde REPSOLDS Kreis wohl bestanden haben, wenn er noch stände, aber die Sternwarte ist jetzt locus ubi Troia fuit. Man fing dieses Frühjahr an, erst die Befriedigung zu stehlen, dann Stühle und Tische, so dass REPSOLD eiligst die Instrumente wegnahm, um nicht auch die zu verlieren. Der Kreis steht hinter dem Ofen auf REPSOLDS Stube. Jetzt will man ihm eine Sauvegarde geben, wenn er nur wieder alles in Stand setzt. Es sind aber gute Gründe da, es nicht zu tun.« SCHUMACHER schlug GAUSS in einem Brief vom 20. März 1811 vor, den Kreis zu kaufen, worauf GAUSS am 25. April antwortete: »Ihre Idee, künftig den REPSOLDSchen Kreis für die neue Sternwarte (woran jetzt wieder gebauet wird) zu kaufen, ist sehr gut; noch ist es aber zu früh, darauf anzutragen, man muss den Bau erst weiter vorrücken lassen; denn in Kassel meint man, die SCHROETERSchen Instrumente²⁾ seien schon eine vollständige Ausrüstung und hat noch keine Idee von dem, was nötig sein wird; ist man nur erst in den Bau tief genug eingegangen, so soll man auch schon Instrumente kaufen«, und am 13. September 1814: »Ich wünschte wohl, REPSOLDS Kreis für unsere neue Sternwarte zu acquirieren. Dem Plane nach sollten zwei Passageninstrumente angebracht werden, ich finde das zweite sehr überflüssig und sehr gut könnte der dazu bestimmte Platz den Kreis tragen. Wenn nur erst wieder mehr Geld da wäre. Das Gouvernement hat den besten Willen, aber es fehlt an allen Ecken. Für den Bau sind in diesem Jahre mehr nicht als 1500 bewilligt! Für die Institute ist seit Anfang des Jahres noch nichts ausgezahlt. Besoldungen seit einem halben Jahre.«

Der REPSOLDSche Kreis wurde auch erworben. Er sollte im Januar 1816 abgeliefert werden, traf aber erst im April 1818 ein, da REPSOLD lange Zeit

¹⁾ Vergl. die Briefe GAUSS an SCHUMACHER vom 10. Februar 1810, SCHUMACHER an GAUSS vom 16. Februar 1810.

²⁾ Siehe oben S. 80. — BRENDL.

brauchte, um ihn in Stand zu setzen. GAUSS schreibt an BESSEL am 23. Dezember 1816: »Leider ist der Zeitpunkt einer angemessenen praktischen Tätigkeit noch aufs neue weiter hinaus gerückt. In der Hoffnung, nun wenigstens in diesem Herbst den REPSOLDSchen Kreis zu erhalten, hatte ich mich dazu bequem, die neue Wohnung zu beziehen, trotzdem dass sie zum Teil noch unvollendet war, und trotz der tausendfachen Unbequemlichkeiten, die das Bewohnen eines solchen Hauses im Winter, abgeschnitten von der Stadt, mit einer starken Familie hat. Allein vor kurzem erklärte endlich REPSOLD, dass es nun wenigstens noch vier Monate bis zur Vollendung des Instruments dauern würde. So habe ich also jenes Opfer umsonst gebracht. Die Sternwarte selbst ist auch erst halb vollendet, doch könnten in zwei Zimmern Beobachtungen gemacht werden. Die meisten Instrumente sind von der alten Sternwarte herausgeschafft, und ich denke wenigstens noch eine Anzahl Beobachtungen mit dem Repetitionskreise zu machen. Gestern und heute habe ich damit die Sonne beobachtet; allein die Beobachtungen werden kaum zu gebrauchen sein, weil sie alle ziemlich entfernt auf einer Seite des Mittags liegen, und es an einer guten Zeitbestimmung fehlte. Welch eine Sklaverei, zur Zeitbestimmung immer nur einzelne Sonnenhöhen berechnen zu müssen! Sie werden es mir nicht verargen, dass ich unter solchen Umständen mich lieber mit andern Dingen beschäftige.«

Die Hoffnung, einen TROUGHTONschen Kreis vom König von England zu erhalten, erfüllte sich ebensowenig; auch hat sich keine Notiz darüber auffinden lassen, dass überhaupt ein dahingehender Versuch gemacht worden sei. GAUSS beabsichtigte vielmehr, einen zweiten Meridiankreis bei REICHENBACH zu bestellen und fasste hierzu den Plan seiner Reise nach München in den Osterferien 1816. Einen hierauf bezüglichen Antrag stellte er an das Kuratorium am 24. März dieses Jahres¹⁾, dem auch stattgegeben wurde. GAUSS trat seine Reise am 18. April an und war im ganzen 5 Wochen von Göttingen abwesend, wovon 12 Tage auf den Aufenthalt in München und Benediktbeuren, wo die optischen Arbeiten unter FRAUNHOFERS Leitung ausgeführt wurden, entfielen.

Einen ausführlichen Bericht über seine Reise erstattete er im Juni 1816 an das Kuratorium¹⁾; er beantragt, den Meridiankreis und das Passageninstru-

¹⁾ Abgedruckt Werke XI, 1, S. 302 und 305.

ment bei REICHENBACH, eine der beiden noch nötigen Pendeluhrn bei LIEBHERR, der sich geschäftlich mit REICHENBACH und UTZSCHNEIDER vereinigt hatte, zu bestellen, dagegen das Äquatoral oder parallatisch montierte Fernrohr, sowie die zweite Uhr, noch zurückzustellen. An OLBERS schreibt er am 4. Juni 1816: »Dass ich auf dieser fünfwöchentlichen Reise den mannigfaltigsten Genuss gehabt habe, werden Sie mir leicht glauben. . . . REICHENBACH hat mich konfidentell von seiner Teilungsmethode unterrichtet. Es liegt dabei eine sehr glückliche, genialische Idee zum Grunde. Eigentlich ist nur die Methode, wie er seine Teilmaschine geteilt hat, das Geheimnis, nicht aber das Teilen der Instrumente auf der Maschine. Grössere Instrumente als die Teilmaschine liessen sich auch ohne diese unmittelbar nach der Methode teilen; REICHENBACH ist aber nicht dafür, über eine gewisse Dimension hinauszugehen, und zwar hauptsächlich wegen der Flexibilität der Metalle. Über letztere haben wir gemeinschaftlich mehrere interessante Versuche gemacht; es ist zum Erstaunen, mit welchem Grade von Genauigkeit sich dieselben anstellen lassen; REICHENBACH wird sie in einem besondern Aufsätze in der A. Z.¹⁾ mit bekannt machen.

»Ebenso merkwürdig ist die Genauigkeit, mit welcher man in Benediktbeuren den Oberflächen der Gläser die Kugelform gibt. FRAUNHOFER versichert, dass bei Prüfung derselben $\frac{1}{10000000}$ eines Zolles noch merklich gemacht werden könne. Zu einem Achromat von 160 Zoll Brennweite, 9 Zoll Öffnung, waren die Gläser fertig, nur waren sie vorerst in eine schlechte Röhre eingesetzt, so dass die Wirkung an einem trüben Tage nur auf der Erde gesehen werden konnte. Ein etwas kleinerer Achromat von 9 Par. Fuss Brennweite, 7 $\frac{1}{2}$ Zoll Bayr. Öffnung, bis 700 malige Vergrösserung, ist mit nach Neapel gekommen und kostete 4500 Gulden. Was von noch grössern Öffnungen erzählt wird, sind Fabeln für jetzt; es wird erst unendliche Mühe kosten, bis man von 9 Zoll zu 10 Zoll übergehen kann.«

Das REICHENBACHSche Passageninstrument erhielt GAUSS im November 1818, den Meridiankreis im August 1819; zu der Anschaffung des Äquatorals ist es indessen niemals gekommen. Vielmehr wurde in der später umgebauten Drehkuppel 1886 das grosse Heliometer aufgestellt, das noch heute im Gebrauch ist.

¹⁾ Zeitschrift für Astronomie. — Bd. I.

In den ersten 1 $\frac{1}{2}$ Jahren nach dem Bezuge der neuen Sternwarte hatte GAUSS daher zu seinem Leidwesen kein grösseres brauchbares Instrument zur Verfügung, worüber er häufig klagte. Die Ungewissheit, wann der Bau der Sternwarte fertig werden würde, hatte ihn veranlasst, die Bestellung der Instrumente hinauszuschieben; an BESSEL hatte er darüber am 18. (28.?) Mai 1814 geschrieben: »Das Hauptgebäude ist bis auf den innern Ausbau beinahe fertig, die Seitenflügel sind noch gar nicht angefangen. Es wird also immer noch ein Weilchen dauern, bis ich in dieser Rücksicht so glücklich bin wie Sie. Ihnen war es so vorteilhaft, dass die Instrumentalrüstung schon im voraus da war, mir hingegen ist es nachteilig, dass überall das Vorurteil sitzt, als sei hier ein ähnlicher Fall. An die Bestellung derjenigen Instrumente, wodurch die Sternwarte erst Wert erhalten wird, ist noch gar nicht gedacht. Ich habe absichtlich darüber noch keine speziellen Schritte getan, teils um durch die zu grosse Summe nicht abzuschrecken (für den Bau allein werden von jetzt an noch etwa 25000 Taler nötig sein), teils weil ich bei der Ungewissheit, wie lange die Vollendung des Baues sich noch verzögern könne, mich nicht in den Fall setzen wollte, die Hauptinstrumente vielleicht viele Jahre in der Kiste stehen zu haben, zumal in einem Zeitpunkt, wo die astronomischen Instrumente von Jahr zu Jahr so mannigfache Verbesserungen erhalten.«

Die letzte auf der alten Sternwarte eingetragene Notiz im *Tagebuch der Sternwarte* ist vom 13. Juni und die erste auf der neuen Sternwarte vom 13. Oktober 1816. Nachdem schon seit dem 27. Februar 1814 das *Tagebuch* keine regelmässigen Fixsternbeobachtungen am Quadranten von HARDING mehr aufweist, weil dessen Beobachtungen für seine Sternkarten vermutlich zum Abschluss gekommen waren, und für die Zeitbestimmungen fast nur Sonnenbeobachtungen am Quadranten, sowie korrespondierende und Zirkummeridianhöhen der Sonne von GAUSS' Hand enthält, rühren auch die Eintragungen auf der neuen Sternwarte fast ausschliesslich von GAUSS' Hand her. Ausser den eben genannten laufenden Beobachtungen, den bis 1818 fortgesetzten und bereits oben besprochenen Untersuchungen über die Polhöhe und die Schiefe der Ekliptik mit dem REICHENBACHSchen BORDAKTEISE und den Messungen mit dem Heliometer betreffen sie nur vereinzelte Beobachtungen von Kometen, Planeten und anderen Himmelserscheinungen, da-

neben aber eine lange Reihe von Bestimmungen terrestrischer Punkte mit dem REICHENBACHSchen Theodoliten und dem Sextanten, darunter auch solche zur Vorbereitung der Aufstellung des nördlichen Meridianzeichens. In das *Tagebuch* hat sodann GAUSS noch seine »Messungen auf dem Michaelisturm in Lüneburg zur Anknüpfung eines Lüneburger Turms an die Dänischen Dreiecke« 1818 Oktober 3.—9. eingetragen, womit die Eintragungen zunächst aufhören; nur vom 30. Oktober 1820 bis 15. April 1822 finden sich darin ausser Beobachtungen der Kometen 1818 II und 1821 wieder terrestrische Messungen im Anschluss an die Sternwarte. Mit diesen schliesst es gänzlich.

Für seine Beobachtungen mit den Meridianinstrumenten von REPSOLD und REICHENBACH hat GAUSS besondere Beobachtungsbücher angelegt.

5. Periode. Der REPSOLDSche Meridiankreis (1818 und später).

Nach dem Eintreffen des REPSOLDSchen Meridiankreises im April 1818 widmete GAUSS einen grossen Teil seiner Zeit diesem Instrument. Er war, wie immer, bestrebt, auch hier seinen Untersuchungen das höchste Mass von Zuverlässigkeit zu geben und nicht auf Kosten grösserer Sorgfalt eine grosse Anzahl von Beobachtungen zusammenzutragen. Dass er trotzdem viel beobachtet hat und von ihm auch mit diesem Instrument längere Beobachtungsreihen angestellt, aber nicht veröffentlicht sind, geht aus dem Folgenden hervor. Über das Eintreffen des Kreises in Göttingen findet sich in dem oft erwähnten *Tagebuch der Sternwarte* folgende Notiz: »1818 April 10. (Freitag), Ankunft des REPSOLDSchen Kreises. Am 11. April kam der Künstler selbst an und blieb bis zum 19ten Abends bei mir. In dieser Zeit wurde der Kreis aufgestellt, auch die SHELTONSche Uhr gereinigt. Letztere hatte dadurch eine Acceleration von ca. 25^s täglich erhalten. Am 20. wurde sie schärfer reguliert; ihr Stand im Mittage des 20. war, wie sich aus den späteren Beobachtungen am Kreise ergab, — 2^h51 und ihr täglicher Gang + 1^h01.«

Seine Beobachtungen an diesem Kreise hat GAUSS in ein besonderes, am 1. Mai 1818 begonnenes, Buch eingetragen, das er *Tagebuch der Beobachtungen am Repsoldschen Meridiankreise* betitelt hat und über das er in seinem S. 91 abgedruckten Brief an BESSEL vom 10. Mai berichtet. Dieses *Tagebuch* befindet sich auf der Göttinger Sternwarte, wurde dort aber erst nach Vollendung des

Bandes XI, 1 der Werke aufgefunden (siehe die Bemerkung Werke XI, 1, S. 507). Es enthält die sauber eingetragenen Beobachtungsprotokolle nebst den ersten Reduktionen; die unmittelbar am Instrument gemachten Aufzeichnungen sind mit wenigen Ausnahmen nicht mehr vorhanden. Einige Beobachtungsergebnisse hat GAUSS in den *Handbüchern* Ba (15) und Bc (17) zwischen anderen Notizen eingetragen. Ausserdem befindet sich im Nachlass eine grosse Anzahl loser Zettel, die ausser den wenigen noch vorhandenen Beobachtungsprotokollen meist Vorbereitungsrechnungen zu den Beobachtungen enthalten, insbesondere Reduktionen von Sternörter, Hilfstafeln für die Fadendistanzen und andere Reduktionen, Instrumentalfehler, Uhrvergleichen. Das Fernrohr des Meridiankreises hatte anfangs¹⁾ drei Vertikalfäden, deren Abstände auf der ersten Seite des *Tagebuchs*, auf der sich auch Notizen über die Reduktionsformeln finden, zu 16^h397 und 16^h085 (einstweilen anzunehmen) angegeben sind. Vom 1. bis 31. Mai¹⁾ hat GAUSS an 21 Tagen beobachtet, an den meisten einige Hauptsterne, an einigen die Sonne. Über diese seine ersten Beobachtungen und Untersuchungen am Instrument geben am besten die beiden folgenden Briefstellen Aufschluss.

GAUSS schreibt an OLBERS am 4. Mai 1818: »Ich sehne mich um so mehr nach besserem Wetter, da ich seit vierzehn Tagen im Besitze des REPSOLDSchen Kreises bin, mit dem ich aber noch wenig habe machen können. Die ersten Tage gingen über die ersten Berichtigungen hin und seitdem ist es nur ausnahmsweise etwas heiter gewesen. Noch habe ich keine einzige vollständige Beobachtung des Polarsterns erhalten können, obgleich ich allemal auf dem Platze war. Einiges kann ich Ihnen indessen schon davon schreiben. Die Ablesungen geschehen durch die mikroskopischen Mikrometer mit ausserordentlicher Schärfe. Der Kreis ist unmittelbar von 5'—5' geteilt; jeder Strich erscheint im Brennpunkte des zusammengesetzten Mikroskops sehr vergrössert; die mikrometrische Schraube führt darüber ein rundes Loch, etwa 20^u im Durchmesser (jeder Strich mag etwa 7^u halten), dessen Bisektion man sehr genau beurteilt; bei Tage lese ich auf eine Sekunde, bei Licht auf $\frac{1}{2}$ Sekunde ganz zuverlässig ab. Da drei Ablesungen unter rechten Winkeln von einander angebracht sind (eine vierte verstattete der Bau des Instruments nicht wohl), so habe ich deren Korrespondenz schon einmal von 15 zu 15 Grad

¹⁾ Am 1. Juni wurden 3 neue Fäden eingesetzt; siehe S. 92.
XI 2 Abb. 3.

geprüft, wo sich ergab, dass eine kleine Exzentrizität von 0,8 da ist, und übrigens alles sich erklären liess, ohne einen zufälligen Teilungsfehler über 1" anzunehmen. Eine absolute Bestimmung der Teilungsfehler lässt sich natürlich auf diesem Wege nicht erhalten; ich bekomme zu diesem Behuf noch ein bewegliches Prüfungsmikroskop¹⁾. Ganz unverrückbar scheinen die Mikroskope nicht zu sein (sie sitzen übrigens nicht am Stein unmittelbar, sondern am beweglichen Teil des Lagers fest); folgendes sind die Resultate der Libelle, welche einen zwei Speichen des Kreises verbindenden Zylinder bis auf 1" (zuverlässig genau) nivellierte seit der Zeit, wo ich die Mikroskope selbst berichtigt habe²⁾:

	A	B	C
April 30.	3' 22,9	3' 31,6	3' 14,0
Mai 1. Vorm.	3 21,3	3 31,0	3 13,1
» 1. Nachm.	3 22,1	3 31,7	3 15,5
» 3. Vorm.	3 18,9	3 29,6	3 11,1
» 3. Nachm.	3 20,4	3 30,0	3 12,0.

»Beim Pointieren auf Sterne, die zwischen zwei horizontale Fäden gefasst werden, glaube ich bei ruhiger Luft nicht über 1" fehlen zu können. Die Beobachtungen mit dem Instrument als Kreis sind noch gar zu wenig zahlreich, um Resultate geben zu können; die Durchgangszeiten von Fundamentalsternen nach BESSELS Katalog gaben am 1. Mai folgende Übereinstimmung³⁾:

Capella	— 0,49	Stand der Uhr gegen Sternzeit; der Gang ist noch unbekannt, da vorher die Linse etwas gestellt, und seitdem noch keine Beobachtung möglich war.
Sirius	— 0,70	
Castor	— 0,48	
Procyon	— 0,65	
Pollux	— 0,53	
α Hydrae	— 0,77	
Regulus	— 0,55	

1) Siehe darüber S. 103. — BRDL.
 2) Diese Angaben entsprechen den Eintragungen im *Handbuch* Ba, S. 71, 73, 76. — BRDL.
 3) Diese Angaben entsprechen den Eintragungen im *Handbuch* Ba, S. 63, wo aber die Zahlen nachträglich etwas geändert sind; die entsprechenden Beobachtungen sind im *Tagebuch* des REPSOLDSCHEN Kreises vermerkt. Auf Seite 65 des *Handbuchs* Ba findet sich die Überschrift »Erste Beobachtungen mit REPSOLDS Kreises«; diese beginnen mit dem 20. April, liegen also zum Teil vor dem Anfang des *Tagebuchs*. — BRDL.

»Die Achse lässt sich vermittelst einer äusserst schönen Libelle auf 1" genau nivellieren. Eine kleine Unvollkommenheit hat noch die Beleuchtung, welcher aber REPSOLD nach seiner Zurückkunft (er ist von hier nach München und Zürich gereist) abhelfen wird. Soeben habe ich abermals den Kreis nivelliert und gefunden:

Mai 4. 3' 18,7 3' 28,2 3' 10,4.

»Es wird mir daher sehr wahrscheinlich, dass die gegenseitige Stellung der Mikroskope weit unveränderlicher ist, als ich anfangs dachte; denn sonst würde doch schwerlich das Mikroskop C sich ebenso viel gesenkt, wie das B gehoben und A südlich geschoben haben. Vielleicht liegen die kleinen Unterschiede mehr daran, dass ich den zu nivellierenden Zylinder nicht jedesmal sorgfältig abgewischt habe; ein paar kleine Stäubchen können schon einigen Ausschlag geben. Ein Instrument wie dieses will in allen Teilen äusserst delikate behandelt sein, und ein längerer Gebrauch muss erst alle Vorsichtsregeln lehren.

»Das Ablesen mit Mikroskopen gefällt auch mir (wie BESSEL) mehr wie das mit Nonien; ich zweifle, ob bei diesem Radius letztere eine solche Schärfe geben können. Ein Vorteil bei jenen besteht auch darin, dass man ganz unbefangen abliest, da man, wenn der mittlere Unterschied der Verniers einmal bekannt oder äusserst klein ist, unwillkürlich bei den folgenden Verniers immer schon durch die gelesenen etwas präokkupiert ist.«

Weiterhin schreibt GAUSS am 10. Mai 1818 an BESSEL: »Seit dem ersten Mai habe ich mein *Tagebuch* angefangen, aber erst zwei Seiten voll Beobachtungen erhalten¹⁾. Die wenigen frühern Beobachtungen lasse ich weg, da sie nur zu den vorläufigen Berichtigungen der Uhr, der Aufstellung, der Gesichtslinie und der Mikroskope dienen. Soviel ich bis jetzt urteilen kann, wird sich viel mit diesem Instrumente leisten lassen. Schlimm ist es, dass der zu der Sternwarte gewählte Platz mir schwerlich verstatten wird, eine Meridianmarke ganz so wie ich wünschte, zu errichten. Im Norden läuft die Meridianlinie durch zahllose Gärten, die mit Obstbäumen mir ein paar Grad abschneiden, und im Süden begrenzt meinen Horizont ein Berg, der dicht mit Waldung bewachsen ist. Vielleicht kann ich es dahin bringen, dass diese

1) Notizen hierüber stehen im *Handbuch* Ba, S. 74—78. — BRDL.

durchgehauen wird; vorläufig werde ich also mein Zeichen am Fuss dieses Berges errichten müssen, wo es nie so gut zu sehen sein kann, als wenn es im Norden sich gegen den Himmel projizierte. Indessen verspreche ich mir eine gute Wirkung von der Einrichtung, die ich zu wählen denke; ich denke nämlich zwei Zeichen ein Paar Fuss von einander zu setzen, so dass mein Feld, wenn das Instrument eingestellt ist, so aussieht:



Die Bisektion lässt sich mit grosser Schärfe machen. Ein Meridianzeichen ist mir desto notwendiger, da das Klima hier so äusserst ungünstig ist. In der untern Kulmination habe ich den Polarstern schon 5 oder 6 Mal vollständig beobachtet, in der obern ihn erst 2 Mal sehen können, aber nur in einzelnen Augenblicken so, dass ich zwar die Zenitdistanzen erhielt, aber keinen einzigen Fadenappuls. Eine Rektaszension habe ich also noch garnicht beobachtet. Bei allen Beobachtungen fühle ich den hohen Wert Ihrer Tafeln für die Rektaszensionen der Fundamentalsterne und wünschte nur ähnliche auch für die Deklinationen zu haben."

Eine Beschreibung des REPSOLD'schen Meridiankreises gibt GAUSS nebst Mitteilungen über Beobachtungen des Polarsterns auch in den Göttinger Gelehrten Anzeigen (Werke VI, S. 410) und in einem in den Astronomischen Nachrichten abgedruckten Brief an BODE (Werke VI, S. 415). REPSOLD spricht davon in seiner *Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, S. 112—113 und weist dort auf einen Brief von GAUSS an ZACH hin, der in ZACHS Correspondance astronomique, géographique etc., Band II, Seite 55 abgedruckt und eine französische Übersetzung des vorerwähnten Briefes an BODE ist.

Über seine ersten Beobachtungen nach dem Einziehen der neuen Fäden berichtet GAUSS an OLBERS am 24. Juni 1818: »Ich habe inzwischen mit meinem REPSOLD'schen Kreise schon ziemlich viel observiert. In den ersten Tagen dieses Monats kam REPSOLD von seiner Reise hierher zurück und zog mir neue Spinnfäden ein, 5 vertikale statt der vorigen 3, und 2 horizontale 12,7 von einander entfernte statt der vorigen 21,1 von einander abstehenden¹⁾. . .

¹⁾ Die entsprechende Eintragung steht im *Tagebuch*, S. 8. — BRDL.

Seitdem haben die Beobachtungen an Genauigkeit noch sehr gewonnen. Besonders erfüllt und übertrifft das Instrument als Mittagsfernrohr schon jetzt alle meine Wünsche. Die Übereinstimmung meiner Nordstern-Rektaszensionen unter sich ist in der Tat so gross und so viel grösser als bei andern Astronomen, dass sie meine eigene Bewunderung erregt; sie beweist zugleich die grosse Solidität der Aufstellung. Sehen Sie hier meine bisherigen Resultate¹⁾ seit Einziehung der neuen Fäden (Juni 3,25 bedeutet 6^h nach der untern Kulmination)

	Beob. AR	Unterschied v. BESSELS Tafeln
Juni 3,25	0 ^h 55 ^m 58,65	+ 2,93
4,25	58,18	+ 2,50
5,25	58,56	+ 2,45
6,25	58,91	+ 2,22
8,5	56 1,14	+ 2,97
10,25	2,58	+ 3,20
11,25	2,68	+ 2,59
12,5	3,31	+ 2,36
16,75	6,11	+ 2,13
18,25	7,31	+ 2,26
19,25	8,29	+ 2,51
21,25	10,31	+ 3,08

»Bei BESSELS Tafeln, *Jahrbuch* 1817, ist schon auf die Verbesserung *Jahrbuch* 1818 Rücksicht genommen. Die untere Kulmination vom 3. Juni war bloss an zwei Fäden etwas unsicher beobachtet, sie weicht am meisten von den übrigen ab; die andern stimmen aber beinahe so gut überein, wie man sonst von Sternen im Äquator gewohnt ist. Der beträchtliche Unterschied von BESSELS Tafel ist auffallend, ein Teil davon wird durch LINDENAU'S Nutationsverminderung weggeschafft werden. Ich bediene mich immer der 96-maligen Vergrösserung.

»Die Deklinationen geben zwar meistens eine nicht minder befriedigende Übereinstimmung, wie folgende Probe vom Regulus zeigt:

¹⁾ Die entsprechenden Beobachtungen stehen im *Tagebuch*, fol. 8—14. — BRDL.

		auf 1818 Anfang reduziert	
Kr. im Osten	Juni 4.	12° 51' 12,5	12° 51' 10,1
	» 6.	14,1	11,7
	» 7.	15,5 — δ	13,0 — δ
Kr. im Westen	» 8.	14,7 — δ	12,2 — δ
	» 9.	12,0	9,5
	» 10.	15,0	12,4
	» 12.	15,1	12,4
	» 13.	13,7	11,0
Kr. im Osten	» 18.	17,1	14,2
	» 21.	18,0 — δ	12,0 — δ .

Die Vergleichung geschah immer mit dem Polarstern, von dessen Deklination das Resultat unabhängig ist, wenn die vorhergehende obere und folgende untere Kulmination beobachtet werden konnte; an drei Tagen fehlte letztere, daher hier noch die Korrektion δ von BESSELS Tafeln vorkommt, die im Mittel nach meinen Beobachtungen gegen $+1''$ ist. Das Mittel aus diesen Resultaten stimmt nahe mit POND, ORIANI, PIAZZI überein und weicht beträchtlich von demjenigen ab, welches Hr. LITROW aus BESSELS Beobachtungen gezogen hat. Sie sehen, dass auch die Lage des Kreises im Osten und Westen gar keinen Unterschied machte, obgleich dann an ganz verschiedenen Stellen abgelesen wird; es sind dies gewissermassen Beobachtungen mit zwei verschiedenen Instrumenten. Ein Beweis für die Vortrefflichkeit der Teilung. Sie sehen, dass ich den Kreis hierbei nach PONDscher Manier¹⁾ gebraucht habe. Allein obgleich dies in den meisten Fällen gut geht, so sind mir doch schon ein paar Mal Ausnahmen vorgekommen, die beweisen, dass man sich nicht unbedingt auch nur 12 Stunden auf Unverrücktheit verlassen kann. Die Deklination des Nordsterns selbst habe ich ein paar Mal auf diese Art 4" grösser als aus BESSELS Tafel gefunden, welches, wenn diese sie auch 1" zu klein geben, eine Verrückung von 6" in 12 Stunden voraussetzt (am Pointieren und Ablesen lag es gewiss nicht, auch wurde eigentlich bei jeder Kulmination die Zenitdistanz dreimal beobachtet); auch stimmten die Mikroskope unter sich gut; es sind also nur drei Möglichkeiten:

¹⁾ Siehe oben S. 95—96. — BRDL.

1. entweder der Stein hat sich etwas gedreht (um eine horizontale Achse von Osten nach Westen, d. i. die eine Seite hat sich im Süden oder Norden etwas gesenkt);

2. oder das Lager, welches die Mikroskope trägt, hat sich etwas gedreht;

3. oder die Verbindung des Kreises oder Fernrohres mit der Achse ist in der Nacht etwas geändert.

»Wäre 1. oder 2. der Fall gewesen, so hätte sich dies auch an der Libelle zeigen müssen; ich bin hierdurch auf die Notwendigkeit geführt, unmittelbar nach jeder Polarstern- und Sonnenbeobachtung oder jeder sehr wichtigen Beobachtung zu nivellieren, welches freilich etwas lästig ist, zumal jetzt, wo die Libelle noch keine Skale hat (die mir REFSOLD schicken wird); allein dies ist nicht zu ändern, und ich möchte darin eine Bestätigung finden von dem, was ich immer geglaubt habe, dass das Nichtverschensein mit Libelle oder Lot bei PONDs Kreise ein grosser Fehler ist; freilich muss es eine Libelle sein wie die REFSOLDsche, mit der man keine halbe Sekunde fehlen kann. Wäre aber No. 3 der Fall gewesen (was ich aber um so weniger glauben kann, da ich selbst in den betreffenden Nächten gar nicht observiert habe und HARDING auch das Instrument damals nicht berührt zu haben versichert), so könnte dies durch die Libelle, wie sie jetzt angebracht ist, nicht erkannt werden, wohl aber mit einer neuen Libelle, die REFSOLD mir auf meinen Wunsch noch liefern wird, und die unmittelbar auf das Fernrohr gestellt wird. Diese neue Libelle und ihre Vergleichung mit der alten, die zwischen zwei Kreisspeichen aufgehängt wird, wird sehr wesentlich sein, um über diesen Umstand Aufschluss zu geben; denn in der Tat ist die Verbindung des Kreises mit der Achse vielleicht, wenn das Instrument einmal unsanft behandelt wird, wohl einer kleinen Veränderlichkeit unterworfen, da jene Verbindung nur von einem kleinen Radius abhängt; jedoch kann hierüber die Erfahrung allein entscheiden. Übrigens sind alle Verbindungen durch Messingschrauben gemacht und am ganzen Instrument ist beinahe gar kein Stahl (bloss die Mikroskopschrauben ausgenommen und die Stellschraube des Kreises für die Höhe — aber nicht die Stellschraube für die beiden Lager).

Die in diesem Briefe erwähnte PONDsche Manier bestand darin, dass man die Deklinationen nicht aus den Zenitdistanzen in Verbindung mit der Polhöhe, sondern aus dem Ort des Pols (wie GAUSS es nennt) bestimmte, den

man aus beiden Kulminationen des Polarsterns feststellte¹⁾. POND benutzte dabei weder ein Niveau noch konnte er seinen Kreis umlegen. Man vergleiche auch die auf den folgenden Seiten abgedruckten Briefe an GERLING und BESSEL, wonach GAUSS von dieser Methode abging, weil man sich nicht auf die Unveränderlichkeit des Kreises während der drei Beobachtungen verlassen konnte.

Ähnlich berichtet GAUSS in dem Briefe an GERLING vom 25. August 1818:

»Über den REPSOLD'schen Kreis habe ich vor einigen Wochen einen kleinen Aufsatz in die hiesigen Göttinger Gelehrten Anzeigen gegeben, den Sie vermutlich gelesen und daraus die Vortrefflichkeit dieses Instruments mit mehrern ersehen haben werden. Die Mikroskope sind nicht unmittelbar an dem Stein, sondern an den (schiebbaren Teilen der) Lager befestigt, durch Arme, die sich auf zwei konischen Spitzen drehen, so dass die Mikroskope eine kleine Bewegung senkrecht auf die Fläche des Instruments haben. Dies ist deswegen nötig, weil der Kreis keine absolut vollkommene Ebene ist, und mit Hilfe eines Röllchens an den Mikroskopen, welches auf der Kreisfläche läuft, behalten jene immer genau gleichen Abstand von dieser. Die Mikroskope werden nicht nach der Libelle eingestellt, sondern bleiben, wo sie einmal sind; täglich mehreremal, oder vielmehr nahe bei jeder wichtigen Beobachtung, wird aber nivelliert und dabei die Mikroskope abgelesen (jedes zweimal, weil allemal die Libelle auch umgehängt wird). Meine Erfahrung hat mich von der Notwendigkeit dieses Verfahrens überzeugt; anfangs hatte ich seltener nivelliert und mehr auf die POND'sche Art observiert, indem ich die Sterne auf die nächste Nordstern-Kulmination bezog; allein in 12 Stunden ändern sich die Mikroskope oft um 3 bis 4 Sekunden, und zwar immer gemeinschaftlich, welches auf ein Wanken des Steins, als Drehung um eine horizontale Achse von Ost nach West, zu deuten scheint. Ich halte es für einen Fehler des POND'schen Kreises, dass ihm ein solches Versicherungsmittel, wie meine herrliche Libelle ist, fehlt.

»Ein definitives Resultat für die Polhöhe werde ich erst nach Jahr und Tag geben können, wenn mehrere Zirkumpolarsterne in beiden Kulminationen oft genug beobachtet sind. Vermutlich liegt sie zwischen $51^{\circ} 31' 49''$ und $50''$. Ich teile Ihnen einige bis jetzt reduzierte Zenitdistanzen auf den Anfang von

¹⁾ Vergl. POND (1811—1835 Direktor der Sternwarte Greenwich), Philosophical Transactions 1866.

1818 mit, denen ich POND's Polardistanzen und die daraus folgende Polhöhe beisetze. Natürlich ist dies Verfahren des REPSOLD'schen Kreises unwürdig, und umgekehrt, wenn erst aus Zirkumpolarsternen die Polhöhe abgeleitet ist, werden daraus die Deklinationen geschlossen werden müssen. Indessen lässt sich vorläufig hieraus abnehmen, dass meine Deklinationen von den POND'schen wohl nur sehr wenig abweichen werden. Bei α Librae würde die Übereinstimmung mit den übrigen noch grösser sein, wenn ich dieselbe Refraktion wie POND gebraucht hätte (ich habe BESSEL'S Tafel angewandt). Die Beobachtungen von mehrern andern Sternen habe ich noch nicht reduziert. Die Zahl der Beobachtungen ist nach der Formel $\frac{4ab}{a+b}$ berechnet, wo a die Zahl der Beobachtungen bedeutet, wo der Kreis im Osten war, b die, wo er im Westen war (gemäss meiner Wahrscheinlichkeitstheorie).

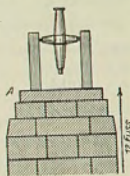
Lauter Tag-Beobachtungen:

	Beobb.	Z.-D.	POND'S Poldistanz	Polhöhe
Nordstern U. C.	16,5	— 40° 7' 53,60	1° 39' 44,35	51° 31' 50,75
β Ursae min. O. C.	13,7	— 23 22 7,18	15 6 2,50	50,32
Capella O. C.	8,9	+ 5 43 46,87	44 11 57,65	49,22
Arcturus	18,5	+ 31 23 43,25	69 51 53,95	49,30
β Leonis	14	+ 35 56 26,01	74 24 37,50	48,51
α Orionis	8,9	+ 44 9 57,13	82 38 8,85	48,28
α^2 Librae	13,7	+ 66 48 30,11	105 16 38,70	51,41

An BESSEL schreibt GAUSS über den gleichen Gegenstand am 5. Dezember 1818: »Meine ersten Beobachtungen am REPSOLD'schen Kreise, die Polarstern-geraden Aufsteigungen und die Uranusopposition, . . . werden Sie wahrscheinlich in unsern Gelehrten Anzeigen¹⁾ gefunden haben. Das Instrument hat sich auch seitdem als ein äusserst vollkommenes Mittagsfernrohr bewährt, hingegen bei den Deklinationen (die ich immer nach POND'S Manier durch Vergleichung mit der nächsten oder zweitnächsten Nordsternkulmination bestimmte) zeigten sich öfters Unterschiede grösser als ich erwartet hatte. Ich

¹⁾ Werke VI. S. 410 f. — BNDL.
XI 2 Abb. 3.

habe mich endlich überzeugt, dass diese Manier, bei meinem Instrumente wenigstens, verwerflich ist. Ich habe die Erfahrung gemacht, dass die Mikroskope sich in wenigen Stunden merklich, in 12 Stunden oft 4", 5" auch 6" verstellen, doch nach 24 Stunden immer ziemlich wieder auf den vorigen Punkt zurückkommen. Höchst merkwürdig ist 1) dass diese Verstellung für alle 3 Mikroskope sehr nahe dieselbe ist, 2) dass sie von Mittag bis spät in die Nacht ohne Ausnahme in einem Sinn geht, 3) dass dieser Sinn in Beziehung auf die Teilung entgegengesetzt ist, nachdem der Kreis von der östlichen Lage in die westliche gebracht ist, übrigens aber ungefähr dieselbe Grösse hat. Das Phänomen ist also ganz so, als ob die beiden Pfeiler eine gemeinschaftliche oszillierende Bewegung haben, so dass sie ein paar Stunden nach Mittag am weitesten nach Norden oben übergeneigt sind, und spät in der Nacht am weitesten nach Süden. Recht klar kann ich mir die Ursache noch nicht machen. Temperatur der Steine oder vielleicht des Steines (A), auf dem beide Pfeiler gemeinschaftlich ruhen, mag im Spiele sein, aber gewöhnlich schreitet die Änderung mit der Temperaturänderung im Zimmer so fort, dass ich auf 1° Reaumur fast 2" Oszillation rechnen muss, welches doch etwas viel scheint.



Am Instrument ist übrigens alles von Messing und durchaus aller Stahl vermieden, lediglich die Mikrometerschrauben ausgenommen, deren verschiedene Ausdehnung aber nur einen sehr kleinen Teil des Phänomens erklären könnte, und auch nur in der einen Lage des Instruments, während sie bei der anderen Lage damit in Widerspruch sind. Seitdem beziehe ich alles auf das Zenit, bin aber freilich gezwungen, viel öfter zu nivellieren als vorher, welches sehr lästig ist. Meine ältern Beobachtungen habe ich daher grösstenteils verwerfen müssen. Hier einige auf den Anfang von 1818 reduzierte Zenitdistanzen¹⁾. Viele andere sind noch nicht berechnet:

		Gewicht
α Ursae minoris U. Culm.	- 40° 7' 53,62	18,2
β " " O. Culm.	- 23 22 7,17	16,0
Capella	+ 5 43 46,87	8,9

¹⁾ Vergl. auch den Brief an GERLING auf der vorigen Seite. — BRDL.

		Gewicht
Arcturus	31° 23' 43,10	19,8
Aldebaran	35 23 43,50	6,9
β Leonis	35 56 26,01	14,0
α Orionis	44 9 57,13	8,9
α Serpentis	44 31 25,55	10,7
α Librae	66 48 30,11	13,7
Sirius	68 0 14,39	6,0

»Die Beobachtungen sind lauter Tagebeobachtungen und mit Ihrer Refraktion reduziert. Die Anzahl der Nordstern-oberen Kulminationen, seitdem ich immer gleich vorher oder nachher nivelliere, ist noch sehr klein. Meine Polhöhe werde ich also erst nach Jahresfrist kennen. Auch muss ich erst den Apparat zur Bestimmung der Teilungsfehler erwarten¹⁾.«

Über GAUSS' eigentliche Beobachtungstätigkeit mit dem REPSOLDschen Kreise geben in erster Linie die folgenden Briefstellen Aufschluss:

GAUSS an OLBERS, 24. September 1818. — »Den REPSOLDschen Kreis habe ich bisher hauptsächlich für Deklinationen von Hauptfixsternen²⁾ angewandt; es können jedoch, da ich, durch Erfahrung belehrt, durchaus die Beobachtungen auf das Zenit und nicht nach PONDS Manier auf den Pol beziehe, erst nach Jahresfrist Resultate daraus hervorgehen, die auch dann erst definitiv werden können, wenn ich den Apparat zur Bestimmung der Teilungsfehler³⁾ erhalten habe.«

GAUSS an BESSEL, 27. Januar 1819. — »Die grosse Stabilität des REPSOLDschen Kreises im Azimut und in der Horizontalität schreibe ich vorzüglich der Vorsicht mit zu, dass beide Pfeiler auf einer grossen Unterlage stehen. Ist dies auch bei dem Ihrigen? — Meine Deklinationsbeobachtungen sind eigentlich erst seit der Zeit zuverlässig, wo ich sie auf das Zenit beziehe und alle Stunde oder zwei Stunden nivelliere³⁾. Aus Hamburg habe ich eine neue

¹⁾ Vergl. S. 103. — BRDL.

²⁾ Die entsprechenden Beobachtungen sind im Tagebuch des REPSOLDschen Kreises eingetragen. In einem Brief an BODE vom 7. September 1818, der im Berliner Astronomischen Jahrbuch (Werke VI, S. 414) abgedruckt ist, sagt GAUSS: »Von meinen zahlreichen Fixsternbeobachtungen ist erst ein Teil reduziert und ich behalte mir die Mitteilung der Resultate auf die Zukunft vor.« — BRDL.

³⁾ Vergl. S. 95—96 und S. 97—98 (PONDSche Manier). — BRDL.

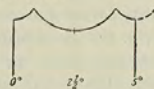
Libelle mitgebracht, die REPSOLD auf meinen Wunsch verfertigt hat, und die die erste fast noch übertrifft (unter uns, ich finde, dass REPSOLDS Libellen die REICHENBACHSCHEN übertreffen). Diese Libelle wird unmittelbar auf den Würfel gestellt, an den die zwei Teile des Fernrohrs geschraubt sind. Meine bisherige Erfahrung zeigt indessen die Differenz zwischen dieser und der alten zwischen den Speichen des Kreises aufgehängten Libelle fast ganz konstant; letztere habe ich noch einmal an REPSOLD zurückgeschickt, um eine Skale anzubringen, die ihr anfangs fehlte, und erst kürzlich habe ich sie zurück-erhalten. Beide Libellen sind fast von gleicher Empfindlichkeit, 2½ Millimeter auf die Sekunde einfacher Ausschlag. Seit Ende Oktober¹⁾, wo ich die neue Libelle gebrauche, habe ich die Beobachtung von 80 bis 100 ausgewählten Zirkumpolarsternen zu meinem Hauptgeschäft gemacht. Ich denke jeden wo möglich 12 Mal in jeder Kulmination zu beobachten, 6 Mal nämlich in der einen, 6 Mal in der andern Lage des Kreises. Bisher habe ich etwa 500 bis 600 Beobachtungen, worunter aber manche wegfallen, weil das schlechte Wetter oft hinderte, die einseitig beobachteten Sterne noch hinreichend oft, ehe der Tag mich übereilte, in der andern Lage zu beobachten. Der Kollimationsfehler²⁾ scheint zwar fast absolut konstant (der Zeit nach), ist aber nicht für alle Höhen derselbe. Höchst merkwürdig ist mir aber, dass dieser nach den Höhen veränderliche Kollimationsfehler, welcher, wenn er nach den Zenitdistanzen selbst geordnet wird, gar keine Regelmässigkeit zeigt, eine ganz auffallende Regelmässigkeit zeigt, wenn er nach den Differenzen der Höhen von den nächsten 5° geordnet wird, so dass ich mich überzeugt halte, dass er in der Art der Teilung seinen Grund hat. REPSOLD hat nämlich den Kreis zuerst in 72 Teile von 5° zu 5° geteilt, nachher die Unterabteilungen mit einer Mikrometerschraube gemacht. Er glaubte, dass der Theorie nach aus dieser Methode kein Fehler von ¼ Sekunde entstehen könnte, aber ich glaube, er hat sich geirrt. Unglücklicherweise habe ich jenen so merkwürdigen Umstand nicht bemerkt, ehe ich nach Hamburg reiste, welches ich sehr bedauere, da ich sonst mündlich die hierauf Bezug habenden Details hätte erfahren können. Ich werde nun suchen, schriftlich von ihm, was möglich ist, auszumitteln, die Dimension seines Apparats etc. Soviel hatte er mir früher

1) Seit dem 25. Oktober nach Ausweis des Tagebuchs. — BRDL.

2) So nennt GAUSS den Fehler des Zenitpunktes. — BRDL.

schon mündlich gesagt, dass er diejenigen 72 Striche, die er zuerst geteilt habe, nicht mehr nachweisen könne. Um Ihnen eine anschauliche Vorstellung von dieser Sache zu geben, setze ich die Kollimationsfehler aus den bisher reduzierten Sternen in doppelter Ordnung her. Mich dünkt, dies Tableau beweist die Vortrefflichkeit der ersten Teilung in 5° auf das schönste . . .¹⁾.

»Das Vorherrschen der grössern Kollimationsfehler in dem ersten Drittel dieses zweiten Tableaus ist so auffallend, dass man sich nicht enthalten kann, es für reell zu halten. Ist die oben angedeutete Quelle die wahre, so sind wahrscheinlich die 72 Striche der ersten Teilung ungefähr in $(n \times 5^\circ) + (0^\circ 40')$ oder in $(n \times 5^\circ) - (0^\circ 40')$ gewesen. Sie finden leicht, dass der Kollimationsfehler dann eine solche Kurve bildet



»Dass ein paar Sterne, besonders 34 Cephei, etwas abweichen, mag an den Beobachtungsfehlern (oder zum Teil an örtlichen Teilungsfehlern) liegen, denn unter einer grossen Menge Beobachtungen werden immer auch zuweilen einige vorkommen, wo in den Mitteln eine weniger vollkommene Kompensation stattgefunden hat. Mit Verlangen erwarte ich den Apparat zur Prüfung der Teilung, woran REPSOLD jetzt noch arbeitet²⁾.

»Resultate aus den Beobachtungen gebe ich Ihnen jetzt noch nicht, ich muss warten, bis erst die entgegengesetzten Kulminationen beobachtet werden können. Bald werde ich damit anfangen. Leider fühle auch ich schon zuweilen die Leiden der praktischen Astronomen. Eben jetzt bin ich mit inflammationierten Augen geplagt gewesen und noch jetzt darf ich nicht wohl mehr als 2 Stunden täglich beobachten.»

Auf diesen Brief antwortet BESSEL am 1. April 1819 unter anderem: »Wie vielen Dank bin ich Ihnen für Ihren so sehr lehrreichen Brief vom 27. Januar schuldig! Was ist nicht alles zu bemerken, ehe unsere Beobachtungen wirklich bis auf kleine Teile sicher werden. Ihre Bemerkungen über den Rer-

1) Hier folgt eine Tabelle der Werte des Zenitpunktes, wie sie sich aus den Beobachtungen von 35 Sternen ergeben. — BRDL.

2) Siehe S. 102. — BRDL.

soldschen Kreis sind in dieser Hinsicht das feinste, was wir haben, und recht geeignet, die Astronomen aufmerksam zu machen, dass nicht jeder, der einen Kreis umdrehen kann, im Stande ist, eine einzelne Sekunde zu beobachten. Schreiten wir auf diesem Wege fort, so werden wir bald genug erfahren, was es mit den Rätseln in der praktischen Astronomie für eine Bewandnis hat. Aber wie viele Astronomen sind denn vorhanden, die einer ähnlichen Aufmerksamkeit fähig wären? — Ich habe schon oft gedacht, dass nicht alles Gold ist, was glänzt.»

Endlich möge noch folgende Stelle aus einem Briefe von GAUSS an OLBERS vom Mai 1819 hier Platz finden: »Ich habe dieser Tage einige neue Beobachtungen am REPSOLDSCHEN Meridiankreis diskutiert, um den wahrscheinlichen Fehler der beobachteten Antritte an die einzelnen Fäden zu bestimmen. LITTKOWS Verfahren (Zeitschrift V, S. 12) ist unrichtig; nach Verbesserung seiner Fehler findet sich aus den dortigen Datis der wahrscheinliche Fehler eines von BESSEL beobachteten Antritts nicht = 0,10, sondern = 0,130. Aus meinen Beobachtungen, die ich diskutiert habe, folgt:

0,087	aus Arcturus-Beobachtungen,	Gewicht	35
0,114	aus α Persei-	»	55
0,137	aus α Cassiopeiæ-	»	29
0,115	aus α Draconis-	»	44.

Mein wahrscheinlicher Fehler scheint also etwas geringer als bei BESSEL. Ich weiss nicht recht, wie dies zugeht. BESSEL hat längere Übung als ich; seine Uhr schlägt vermutlich noch etwas schärfer ab als die meinige. Meine stärkere Vergrößerung kann auch die Ursache hiervon nicht sein. Die Vergleichung meiner Sterne unter sich zeigt, dass die Deklination nur schwach dabei mitwirkt, und der wahrscheinliche Fehler hat nicht die Form $a \sec \delta$ (wie BOHNENBERGER zu glauben scheint), sondern die Form $\sqrt{a^2 \sec^2 \delta + \beta^2}$, wo a vom Fehler des Sehens, β vom Fehler des Ohrs abhängt und wo, wie die Vergleichung meiner Sterne zeigt, a viel kleiner sein muss als β . Um a zu bestimmen, muss man denselben Versuch bei Sternen machen, die dem Pol sehr nahe stehen, welches ich aber noch nicht besonders genau untersucht habe; doch dürfte mein a vielleicht nur halb so gross sein als bei BESSEL, was durch die stärkere Vergrößerung und feinem Fäden sehr erklärlich ist.

Allein dass mein β auch noch etwas kleiner ist als bei BESSEL, nimmt mich, wie gesagt, etwas Wunder. Es wäre interessant, diese Grössen für viele Beobachter und Instrumente zu diskutieren. Da ich erwarten kann, dass bei REICHENBACHS Mittagsfernrohr für mich α und β wenigstens nicht grösser ausfallen werden, als bei REPSOLDS Instrument, und jenes 7 Fäden hat, so wird, wenn jenes Instrument dieselbe Stabilität hat wie dieses, ein einjähriger Kursus gewiss ebenso zuverlässige Resultate hervorbringen, als ein dreijähriger von Königsberger Beobachtungen. Ich habe keinen Zweifel, dass BESSEL seine Meinung von seinen Instrumenten etwas herabstimmen wird, wenn er erst im Besitz des REICHENBACHSCHEN Meridiankreises sein wird.

»Bald werde ich nun auch den Apparat in Tätigkeit setzen, um die Teilungsfehler des REPSOLDSCHEN Kreises zu bestimmen. Ich habe darüber bereits mehrere höchst merkwürdige Erfahrungen¹⁾. Sonnen-Beobachtungen habe ich noch nicht sehr viele gemacht, aber alle konkurrieren, dasselbe Resultat zu geben, was die Repetitionskreise²⁾ gegeben haben. Die Polhöhe aus Sonnen-Beobachtungen ist etwa 5" kleiner als aus Zirkumpolarsternen; ebenso stimmen meine Deklinationen südlicher Sterne nicht mit den BESSELSCHEN, sondern sehr nahe mit den PONDSCHEM überein und fallen eher noch jenseits. Inzwischen beweist dieses alles noch garnichts entschieden. Über die Konstantenfehler der Höhenmessungs-Instrumente sind noch von Niemand Untersuchungen angestellt, auch von BESSEL nicht. Meine Meinung ist, dass jedes Instrument hierbei ein Individuum ist, und dass wir das Wahre noch garnicht kennen. Jedes Instrument wird seinem Bau nach, sowie wegen der Biegungen der Teile Fehler der gemessenen Zenitdistanzen von der Form $a \sin z + \beta \cos z$ haben; der zweite Teil fällt weg bei Instrumenten, die umgewandt werden können, also nicht bei PONDSCHEM Kreise, aller Wahrscheinlichkeit nach ist er aber unmerklich. Allein der erste Teil kann meiner Meinung nach durch alles Äquilibrieren nicht mit Gewissheit weggeschafft werden, und ich sehe durchaus kein Mittel, ihn zu erforschen, als durch den Quecksilberhorizont. Leider sind diese Beobachtungen sehr mühsam, und ich habe bisher nur erst ein paar gemacht, die zeigen, dass α bei REPSOLDS Kreise nur sehr klein sein kann. Wäre BESSELS Kreis fehlerfrei, so müsste nach den Resul-

1) Hierüber finden sich Notizen im *Handbuch* Bd (15), S. 100—107. — BREDL.

2) Vergl. die oben besprochenen Beobachtungen mit dem BORDAKREISE. — BREDL.

taten zu schliessen, α bei POND'S Kreise etwa $= -3,3$ und bei REFSOLDS Kreise $= -4,8$ sein, was anzunehmen mir schwer wird; eher möchte ich zugeben, dass POND'S Kreis fehlerfrei sei, und $\alpha = -1,5$ bei mir und $= +3,3$ bei BESSEL. Immer bleibt mir einiger Unterschied zwischen Mittelpunkt der Sonnenfigur und Schwerpunkt sehr wahrscheinlich¹⁾. Leider kommt die Ungewissheit der Refraktion dazu; die Sonnenbeobachtungen darf man ohne *Petitio principii* nicht mit zuziehen und bei den Zirkumpolarsternen wird wohl immer 1 Prozent Ungewissheit bleiben. Meine eigenen Beobachtungen würden sogar sehr entschieden zeigen, dass die BESSEL'SCHE Refraktion etwas vermindert werden müsse, wenn nicht die Teilungsfehler erst noch untersucht werden müssten. Bis dahin muss ich mein Urteil noch suspendieren.»

Wir ersehen aus dem Briefwechsel und dem noch vorhandenen Material, dass GAUSS einen umfangreichen Beobachtungsplan aufgestellt hatte, von dem er auch einen grossen Teil ausgeführt hat, ohne ihn jedoch zum Abschluss zu bringen und ohne die Ergebnisse, mit Ausnahme der gelegentlich im Meridian angestellten Planetenbeobachtungen, zu veröffentlichen. Im Inventar der Göttinger Sternwarte befindet sich ausser dem oft genannten *Tagebuch* des REFSOLDSCHEN Kreises und den beiden *Tagebüchern* der REICHENBACHSCHEN Meridianinstrumente noch ein Buch mit dem Titel *Rechnungen und Notizen, die Beobachtungen an den Meridiankreisen betreffend*. Dies Buch enthält auf den ersten Seiten unter der Überschrift »Verzeichnis zu beobachtender Sterne« eine, übrigens nicht vollständig ausgefüllte Liste von 316 Sternen, in der die Zirkumpolarsterne vorherrschen und übrigens doppelt aufgeführt und gezählt sind, entsprechend der Beobachtung in beiden Kulminationen. Das Buch enthält weiterhin einige wenige Notizen und einzelne Reduktionen der Beobachtungen am REFSOLDSCHEN Kreise und eine Zusammenstellung der Ergebnisse bis Ende 1818 unter der Überschrift »Resultate der beobachteten Zenitdistanzen bis Ende 1818«. Dabei ist die daraus folgende Polhöhe angegeben unter der Annahme der Deklinationen nach BESSEL, PIAZZI, POND und ORIANI. Weiterhin finden sich in dem Buche noch einige Notizen über das REICHENBACH'SCHE Passageninstrument und eine Zusammenstellung von Reduktionsformeln.

Nach dem *Tagebuch* hat GAUSS in der Zeit vom 3. Juni 1818, nach Ein-

1) Vergl. oben S. 62 und 63. — BRDL.

ziehung der neuen Fäden, bis zum 27. September an 83 Tagen verschiedene Hauptsterne, an einigen Tagen nur die Sonne oder den Polarstern beobachtet. Die Beobachtungen fallen fast ausnahmslos in die Zeit von Mittag oder frühem Nachmittag bis in die späten Abendstunden und betreffen täglich meist 10 bis 15 Sterne. In der Zeit von Ende September bis Ende Oktober befand sich GAUSS in Lüneburg, um die auf Seite 88 erwähnten Messungen auf dem Michaelisturm auszuführen. Nach seiner Rückkehr wandte er sich fast ausschliesslich der Beobachtung von Zirkumpolarsternen zu (vergl. den oben Seite 100 abgedruckten Brief an BESSEL). Das *Tagebuch* weist vom 23. Oktober 1818 bis 21. August 1819 im ganzen 141 Beobachtungstage auf, an denen ausser den Zirkumpolarsternen nur vereinzelt Südsterne und die Sonne, im Juli und August Jupiter und der Komet 1819 II, beobachtet wurden. Auch diese Beobachtungen, die in der Zeit von April bis Mai besonders zahlreich sind und täglich bis zu 30 Sterne umfassen, fallen stets in die Stunden vom frühen Nachmittag bis zum späten Abend.

Am 23. August 1819 wurde der Kreis abgenommen, worüber sich im *Tagebuch* folgende Notiz findet: »Der Kreis wurde am 23. August abgenommen, um die Pfeiler zur Aufnahme des Apparats zur Prüfung der Teilungen vorzurichten, und andere Einrichtungen in dem Zimmer zu treffen. Anfang Oktober wurde der Kreis wieder aufgestellt. Da die Fädenbeleuchtung besonders für kleine Sterne bisher immer schwierig gewesen war, so wurde der Beleuchtungsspiegel von neuem plan geschliffen und matt versilbert. Da auch dies noch nicht zureichend befunden war, die äusserst feinen Fäden immer gut zu beleuchten, so nahm ich diese heraus und zog dafür stärkere ein, und zwar nunmehr 7 vertikale.«

In derselben Zeit begannen auch die ernstlichen Beobachtungen am REICHENBACHSCHEN Passageninstrument, das schon im September 1818 aufgestellt war (vergl. weiter unten), und GAUSS wandte nun sein Hauptaugenmerk auf dieses Instrument. Nach der Wiederaufstellung des Kreises liefen zunächst die Beobachtungen an beiden Instrumenten neben einander her. Mit dem Kreise beobachtete GAUSS im Oktober noch häufig verschiedene Hauptsterne, im November werden die Beobachtungen spärlicher und mit dem 20. Januar 1820 schliesst das *Tagebuch* gänzlich; in dieser Zeit lassen sich nur 24 Beobachtungstage feststellen. Die Veranlassung dazu, dass GAUSS seine Beobach-

tungen mit dem REPSOLDschen Kreise einschränkte und schliesslich gänzlich einstellte, gab das Eintreffen des REICHENBACHSchen Meridiankreises, der im Oktober 1819 aufgestellt wurde.

Er schreibt am 1. Mai 1820 an OLBERS: »Allein für jetzt habe ich wenig Lust, mit dem letztern¹⁾ viel zu beobachten, da die Beobachtungen bei weitem schlechter unter sich harmonieren als beim REICHENBACHSchen, so dass ich mit jenem immer erst eine viel grössere Anzahl Beobachtungen machen muss. Nach den Erfahrungen, die ich nun gemacht habe, schreibe ich dies hauptsächlich der Hemmungsart zu, und ich werde daher künftig auch am REPSOLDschen Kreise eine veränderte Hemmung anbringen lassen, bei der der Kreis selbst ganz frei bleibt.«

Einen Teil der Beobachtungen am Kreise hat GAUSS, wie schon erwähnt (siehe die Fussnoten oben Seite 90, 91 und 103) im *Handbuch* Ba (15) auf den Seiten 44—50, 63—85, 93—107 reduziert. Die Reduktion der Beobachtungen der Zirkumpolarsterne aus der Zeit vom 27. Oktober 1818 bis zum 27. Juni 1819 hat er im *Handbuch* Be (17), Seite 147—182 ausgeführt. Übereinstimmend mit dem *Tagebuch* und dem Briefe an BESSEL vom 27. Januar 1819 (abgedruckt oben Seite 100) umfassen diese Aufzeichnungen bis zum letztgenannten Datum etwa 400 bis 500, und in der ganzen Zeit etwa 1000 Beobachtungen der im Briefe an BESSEL genannten und einiger anderen Sterne, gegen 50 an Zahl.

Auffallen wird, dass GAUSS die Beobachtungen am REPSOLDschen Kreise, wie auch schon die mit dem BORDASchen und die späteren an den REICHENBACHSchen Instrumenten ausschliesslich selbst machte; nur bei den gleichzeitigen Beobachtungen des Jupiter und des Kometen 1819 II (Werke VI, S. 424) am REPSOLDschen Kreise und am Passageninstrument beobachtete HARDING am ersteren, sowie einige Male am letzteren; ebenso beobachtete ausnahmsweise ENCKE im Oktober 1819 und STAUVE im August 1820 einige Durchgänge am Passageninstrument zusammen mit GAUSS. Nirgends sonst, mit Ausnahme der späteren Jahre, in denen GAUSS nicht mehr regelmässig beobachtete, findet sich ein Anzeichen dafür, dass GAUSS diese Instrumente einem Anderen zum Beobachten überliess. OLBERS macht im Briefe vom 2. Juni 1818 eine dahingehende Anspielung; er schreibt: »Sie hatten die Güte, mich neulich aufzufordern,

¹⁾ Dem REPSOLDschen Kreise. — BRDL.

Ihnen ausser den gewöhnlichen noch einige Beobachtungsgegenstände vorzuschlagen. Besonderes wüsste ich jetzt gerade nichts. Aber könnte eine so reich mit Instrumenten dotierte Sternwarte, wobei es Ihnen ausser Herrn Professor HARDING selten auch an andern geschickten und eifrigen Gehülfen fehlen wird, ausser den laufenden gewöhnlichen Beobachtungen nicht auch gleich eine grosse Arbeit anfangen, die zwar erst in mehreren Jahren zu vollenden ist, aber einen bleibenden Nutzen gewähren wird und noch viele Entdeckungen verspricht? Ich meine eine Revision und Komplettierung der französischen *Histoire Céleste* von LALANDE. Sie sehen, dass ich dabei nur auf Ihre Gehülfen reche. Denn es wäre unverantwortlich, wenn Sie selbst Ihre für die Wissenschaft so kostbare Zeit mit Beobachtungen der Appulse kleiner Sterne an die Fäden des Fernrohrs zubringen wollten.« GAUSS antwortet am 24. Juni: »Eine Revision der *Histoire Céleste* halte ich mit Ihnen für ein nützlich Unternehmung. Viele glänzende Ausbeute ist aber wohl nicht davon zu erwarten, da das meiste der Art schon durch HARDINGS Revision hat oder hätte gefunden sein können. Übrigens habe ich jetzt auch gar keine jungen Leute hier, die ich zu einem solchen Geschäft brauchen könnte. Mir deutet, [am leichtesten würde es gehen, wenn viele Astronomen sich darin teilten, und zur Revision von einem oder ein paar Tausend Sternen würde ich mich dann gern erbieten.« WOLF sagt in seiner *Geschichte der Astronomie*, Seite 522: »als z. B. der REICHENBACHSche Multiplikationskreis¹⁾ 1812 in Göttingen aufgestellt war, durften zwar ENCKE und NICOLAI, wenn GAUSS observierte, leuchten und Beobachtungen niederschreiben, doch anfassen durfte ausser GAUSS Niemand das Instrument, und einmal schreibt ENCKE²⁾: »Der Kreis von REICHENBACH³⁾ ist wunderschön, und noch jetzt zieht GAUSS Handschuhe an, wenn er ihn anfasst.«

Auch gelegentlich der Hannoverschen Landesvermessung beklagt BESSEL, dass GAUSS einen grossen Teil seiner Zeit mit der Ausführung untergeordneter Arbeiten verliere; er schreibt in einem undatierten Brief Anfang 1823, nachdem er von den Vorteilen der Landesvermessung gesprochen hat: »Dieses ist nun die gute, sehr gute Seite Ihres Unternehmens, aber die schlechte habe ich lange vorher gefühlt, ehe Sie darüber klagten; solcher Zeitverlust ist nicht

¹⁾ Gemeint ist der BORDAKreis. — BRDL.

²⁾ C. BRUNNS, *Joh. Franz Encke*, Leipzig 1869.

für Sie, und Sie sollten sich demselben nur in so fern unterziehen, als zur Vollendung der Theorie des Gegenstandes notwendig ist. Diese kann im Zimmer nie so gut ausgeführt werden, als bei der Ausübung, indem die Bedürfnisse sich erst bei der Ausübung darbieten; aber ein Dreieck oder zwei wären genug, um alles kennen zu lernen, was etwa entgangen wäre, und das übrige müsste N. N. machen und nicht GAUSS.« Dagegen muss berücksichtigt werden, dass GAUSS nicht wagte, die feineren Beobachtungen HARDING anzuvertrauen und keinen anderen Gehilfen besass. Über die hieraus und aus der Stellung HARDINGS erwachsenden Schwierigkeiten finden sich mehrfach Äusserungen im Briefwechsel, im besonderen in dem Briefe von GAUSS an SCHUMACHER vom 4. März 1821 und von OLBERS an BESSEL vom 26. April 1816.

6. Periode, REICHENBACHSche Instrumente 1818—1820.

Nach dem Eintreffen der REICHENBACHSchen Instrumente, des Passageninstruments und des Meridiankreises, ging GAUSS mit seiner gewohnten Sorgfalt an die Benutzung beider, aber auch hier dauerte seine eingehende Beschäftigung mit ihnen nur verhältnismässig kurze Zeit, da im Jahre 1820 bereits die Vorbereitungen für die Hannoversche Landesvermessung begannen.

Eine Beschreibung des Passageninstruments¹⁾ gibt GAUSS in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom Oktober 1819 (Werke VI, S. 422) und im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1822 (Werke VI, S. 425); er rühmt dabei die vorzügliche Optik des Instruments, in der es dem REFSOLDSchen Meridiankreise überlegen sei. Den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtung eines Fadenantritts nahe im Äquator findet er aus fast 300 beobachteten Sternen zu 0,095. Auch die Vorrichtung zum Umlegen hebt er hervor, das sich nach einer vom Mechaniker RUMPF in Göttingen getroffenen Einrichtung in etwa 5 Minuten bewerkstelligen liess, während es beim REICHENBACHSchen Kreise etwa 8 Minuten und beim REFSOLDSchen über eine halbe Stunde in Anspruch nahm.

An OLBERS schreibt er am 24. September 1818: »Das REICHENBACHSche Mittagsfernrohr habe ich nun auch aufgestellt, es fehlt aber noch allerlei, so

¹⁾ Vergl. auch JOH. A. REFSOLD, *Zur Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, Bd. I, S. 102 und Figur 144.

dass meine Beobachtungen eigentlich noch keinen Wert haben und nur als vorläufige anzusehen sind. Ich beobachte daher jetzt eigentlich nur den Nordstern bei Tage, um die Fadenintervalle zu erhalten. Diese sind nur 10;3 im Äquator und die Anzahl der Fäden 7. Die Fäden selbst sind zwar auch von meinen Antagonisten, den Spinnen, aber viel gröber als die REFSOLDSchen, ausserdem ist die Beleuchtung gleichförmiger und die optische Kraft des Fernrohrs bedeutend grösser. Es hat daher eben keine Schwierigkeit die Pallas zu observieren, sowie die Nebulosa Aquarii (was im REFSOLDSchen Instrument nicht geht, wenigstens meinen Augen mehrere Male misslang). Ich habe mehrere Abende den 4/6 Saturntrabanten am Passageninstrument bei guter Beleuchtung mit observiert, die optische Wirkung dieses Instruments ist wahrhaft prachtvoll. β Ursae minoris zeigt sich bei Tage ungefähr wie \odot dem blossen Auge in der Abenddämmerung, α Librae beobachte ich noch jetzt bei Tage, womit ich an REFSOLDS Kreise schon seit vier Wochen aufhörte, α Herculis zeigt sich noch immer sehr schön als Doppelstern etc. Zum Stellen ist dieselbe Einrichtung wie am Greenwicher Passageninstrument, nämlich am Fernrohr ein Kreis mit einer Libelle; bis jetzt finde ich jedoch diese Einrichtung zeitraubender als die gewöhnliche, wo man nur Eine Operation hat, so wie hier zwei. Kleine Sterne bei Tage mit der stärksten Vergrösserung, die nur 9' Feld hat, verfehle ich noch öfters. Übung wird hier wohl helfen — und im Mai 1819:

»Mein herrliches REICHENBACHSches Mittagsfernrohr habe ich bisher eigentlich noch gar nicht im Ernst brauchen können, weil die Maschine zum Umlegen noch fehlte. Diese ist jetzt durch den hiesigen Mechaniker RUMPF vollendet und wird in den nächsten Tagen angeschlagen werden. Leider fehlt mir nur noch eine zweite Uhr, die mit der SHELTONSchen zu vergleichen wäre — und endlich am 16. September 1819:

»Noch besser werden Sie die Harmonie der Beobachtungen aus den Vergleichen von γ und β Aquilae mit α Aquilae erkennen; es ist die Korrektion der aus BESSELS Tafeln entlehnten relativen Stellungen gegen α , welche ich in folgendem Tableau darstelle:

	γ	β		γ	β
Juli 27.	-0,09	+0,03	August 23.	-0,04	-0,01
» 28.	-0,08	-0,03	» 25.	-0,01	+0,17
» 29.	-0,19	+0,01	» 26.	+0,02	-0,05
» 30.	-0,17	-0,11	» 27.	-0,06	-0,08
August 1.	-0,03	0	» 28.	-0,17	-0,13
» 3.	+0,05	-0,05	September 4.	-0,01	-0,22
» 4.	-0,06	+0,12	» 5.	-0,06	-0,13
» 5.	-0,06	+0,01	» 7.	0	+0,01
» 11.	—	+0,02	» 8.	—	-0,09
» 12.	-0,14	—	» 9.	-0,13	-0,11
» 13.	-0,16	—	» 10.	-0,03	-0,08
» 18.	+0,01	+0,02	» 11.	-0,08	-0,13
» 19.	—	-0,04	» 12.	-0,04	-0,07
» 21.	+0,09	-0,08			

Im Mittel 24 Beobachtungen von γ -0,061

25 Beobachtungen von β -0,041

BESSELS neuer Katalog gibt für γ -0,076

für β -0,032.

»Meine Wahrscheinlichkeitstheorie gibt hieraus den wahrscheinlichen Fehler einer Vergleichung

$$\begin{array}{r} \text{aus } \gamma \quad 0,048 \\ \text{aus } \beta \quad 0,055 \\ \hline \text{im Mittel} \quad 0,052. \end{array}$$

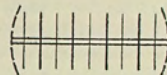
»Da dieser Fehler aus den Fehlern bei zwei beobachteten Sternen zusammengesetzt ist, so wird der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung eines Sterns

$$= 0,037.$$

»Dies stimmt sehr nahe überein mit meinem Resultat für den wahrscheinlichen Fehler eines Appulses, den ich = 0,095 gefunden habe.«

Nicht uninteressant ist, was er an OLBERS über das Fadenkreuz schreibt, nämlich am 24. Juli 1818: »Den Nebelfleck im Wassermann werde ich nächstens

zu beobachten¹⁾ versuchen. Ich fürchte nur, dass bei lichtschwachen Gegenständen meine Fäden zu fein sind. Bei derjenigen Beleuchtung, die Sterne 8. und 9. Grösse vertragen, sieht das Auge diese Fäden schon nicht ohne Anstrengung. Und doch möchte ich diese feinen Fäden ungern missen, da die Beobachtungen selbst, namentlich die bei Tage, sehr dadurch an Genauigkeit gewinnen. Finde ich, dass die Beobachtungen der Pallas z. B. nicht gut gehen wollen, so ziehe ich wohl selbst noch zwischen mein Netz neue stärkere Fäden ein, etwa nach folgender Figur:



»Die horizontalen Fäden sind an sich schon etwas dicker und werden schon bei schwächerer Beleuchtung gut erkennbar.«

Ferner am 16. Oktober 1819, wo er ebenfalls über den REPSOLDschen Kreis spricht: »Auch habe ich, da die so äusserst feinen Fäden¹⁾ nicht gut so zu beleuchten waren, um auch kleine Sterne beobachten zu können, zuerst den Spiegel herausgenommen, ganz eben schleifen und matt versilbern lassen. Da jedoch auch dies noch nicht helfen wollte, so habe ich die Fäden herausgerissen und andere, dickere eingezogen. Die Einrichtung des REICHENBACHschen Mittagsfernrohrs ist mir so angenehm geworden, dass ich sie hierbei nachgeahmt und statt der vorigen 5 Fäden jetzt 7 mit engeren Intervallen (zwischen 10^h und 11^h für den Äquator) eingezogen habe. Leider hatte ich in dieser Jahreszeit nicht viel Auswahl mehr unter Spinnenfäden, doch ist es mir zu meiner Zufriedenheit gelungen. Ich denke, dass es nun keine Schwierigkeiten haben wird, auch die kleinen Planeten mit diesem schönen Instrumente zu beobachten.« Im Briefe an OLBERS vom 1. Mai 1820 äussert sich GAUSS sehr eingehend über das Einziehen der Fäden, das er, wie wir im vorigen gesehen haben, selbst ausführte.

Das auf der Göttinger Sternwarte noch vorhandene *Tagebuch der Beobachtungen am Reichenbachschen Mittagsfernrohr* beginnt mit dem 26. August 1819. Die vor dieser Zeit liegenden Beobachtungen sind in dem *Beobachtungsbuch* Pg (31 b), S. 14—28 eingetragen; die letzteren umfassen die Zeit vom 27. Juli bis

¹⁾ Am REPSOLDschen Kreise. — BREDL.



29. August: Die Eintragungen vom 26. bis 29. August finden sich in beiden Büchern gleichlautend. Die unmittelbar am Instrument gemachten Aufzeichnungen dürften auch hier nicht aufzufinden sein. Die erwähnten ersten Beobachtungen betreffen etwa 30 Hauptsterne; daneben wurde die Sonne, der Mond, Jupiter, Venus, Uranus und der Komet 1819 II beobachtet. Vom 26. August bis zum 27. Dezember 1819 weist das *Tagebuch* 53 Beobachtungstage auf. Sodann wurde es zur Verbesserung der Beleuchtung nach einer Notiz des *Tagebuchs* abgenommen und am 31. Dezember wieder aufgestellt. Vom 1. Januar 1820 bis zum 16. Mai 1821 lassen sich 151 Beobachtungstage nachweisen. Im Sommer 1821 trat eine lange Pause ein, weil GAUSS bereits mit der Triangulation für die Landesaufnahme beschäftigt war. Nach der Wiederaufnahme der Beobachtungen am 23. Oktober werden die Beobachtungen allmählich spärlicher. Nach dem März 1822 findet man im *Tagebuch* nur noch vereinzelt Beobachtungen im November und Dezember 1822, eine einzelne Mondbeobachtung im Dezember 1823, und endlich nach langer Unterbrechung vereinzelt Beobachtungen im Februar und März 1851!

Unter dem Datum des 10. September 1827 findet sich im *Tagebuch* eine Eintragung über die Messung der Fadenintervalle des Mittagsfernrohrs mit dem Heliometer. Im *Handbuch* Ba (15), S. 153 sind die vom 26. August bis 25. September 1819 beobachteten Sterne unter der Überschrift »Fundamentalsterne am Mittagsfernrohr« zusammengestellt mit Angaben, die anscheinend den Stand der Uhr betreffen.

Die zwischendurch angestellten Beobachtungen des Saturn und der Vesta vom September 1819 und der Pallas und des Mars vom Januar 1820 sind veröffentlicht (Werke VI, S. 428). Dagegen scheinen die ebenfalls aus dem *Tagebuch* nachzuweisenden Beobachtungen des Merkur, der Venus und der Ceres (vergl. Werke VI, S. 429) nicht reduziert worden zu sein.

Die Beobachtungszeiten fallen auch hier, wie beim REPSOLDschen Kreise in die Nachmittags- und späten Abendstunden, nur einige wenige in die Morgenstunden.

Unter dem Datum des 8. Mai 1821 verweist GAUSS im *Tagebuch* gelegentlich einer Notiz über die LIEBHERRsche Uhr auf ein »Umlegebuch«, wonach zu vermuten ist, dass er noch andere Notizbücher bei seinen Beobachtungen benutzt hat, über deren Verbleib nichts bekannt geworden ist. Auch die vier

nachträglich auf der Göttinger Sternwarte aufgefundenen *Tagebücher* sind nicht dem GAUSSarchiv einverleibt und daher bei der Bearbeitung des Bandes XI. 1 übersehen worden.

In den Jahren 1819—1822 wurden auch auf GAUSS' Vorschlag von ihm selbst, von NICOLAI in Mannheim, SOLDNER in München und ENCKE in Seeberg die Rektaszensionen des Mondes und einiger Mondsterne zur Bestimmung der Längenunterschiede¹⁾ beobachtet, und auch BESSEL und STRUVE nahmen später daran teil. Die Beobachtungen wurden durch längere Jahre fortgesetzt, jedoch beteiligte sich GAUSS nur bis zum Juli 1820²⁾ daran.

BESSEL schreibt aus diesem Anlass an GAUSS am 10. Januar 1820: »Ihr Vorschlag zu gemeinschaftlichen Mondbeobachtungen ist vortrefflich in jeder Beziehung: erstens wird er uns die Bestimmung der Meridiandifferenzen liefern; zweitens wird er am deutlichsten zeigen, wie genau man die Örter beobachten kann; drittens wird er eine Verbindung zwischen die Astronomen und Sternwarten bringen, die manches, was jetzt nicht taugt und was mir, der ich gern ein recht tätiges und kräftiges Zusammenwirken erleben möchte, höchst zuwider ist, aufheben kann. Bringen Sie mehr dergleichen auf die Bahn, so wird bald eine innige Verbindung eintreten, statt des jetzigen törichten Egoismus; die Zeit wird wiederkehren, wo der Eine Freude hat an der Arbeit des Andern. — Schade, dass ich nicht an diesen Beobachtungen habe teilnehmen können; allein treffen Sie doch nochmals eine solche Verabredung und zwar für die Sommermonate, wo das Wetter sicherer ist«, worauf GAUSS am 5. März erwidert: »Von den Sternen zur Vergleichung mit dem Monde habe ich auch an STRUVE das Verzeichnis geschickt. Da diese Beobachtungen vorerst ununterbrochen fortgesetzt werden, so kann die Verknüpfung der Teilnehmer vielleicht auch sonst weiter führen. Sie klagen in Ihrem letzten Briefe den törichtigen Egoismus der jetzigen Astronomen an; ich verstehe dies, sowie einiges andere in demselben, nicht ganz. Allein ich glaube, dass wenigstens die meisten deutschen Astronomen einen solchen Vorwurf nicht verdienen; wenigstens scheinen mir die, mit denen ich in Verbindung stehe, alle nichts mehr zu wünschen, als mit vereinten Bemühungen für das Beste der Wissen-

¹⁾ Vergl. den Aufsatz von NICOLAI, Astron. Nachr. 1, S. 7 und 2, S. 17 (auch GAUSS' Werke VI, S. 443).

²⁾ Vergl. den Brief von GAUSS an BESSEL vom 17. August 1820.
XI 2 Abh. 3.



schaft zu wirken, sowie alle das Absterben der Zeitschrift¹⁾, die durch das in Genua herauskommende Journal natürlich nicht ersetzt wird, schmerzhaft fühlen. Ob auch ausländische Astronomen ebenso geneigt sein möchten, ihre Arbeiten an die der deutschen Astronomen anzuschliessen, mag ich zwar nicht bestimmen, allein viel anders als jetzt ist es doch wohl in dieser Rücksicht auch sonst nicht gewesen.«

Besonders schwer empfand GAUSS den Mangel einer guten Uhr. Schon im Briefe an OLBERS vom Mai 1819 bemerkt er (oben S. 109), dass ihm seine zweite Uhr« fehlt, »die mit der SHELTONSchen zu vergleichen wäre. Von der letzteren, die seit 1770 im Gebrauch war²⁾, sagt er noch in seinem Bericht an das Kuratorium vom 9. Februar 1815³⁾, dass sie noch gut sei, dass aber noch zwei weitere für die neue Sternwarte nötig seien, die jedoch nicht zu den dringendsten Bedürfnissen gehörten. Die beiden älteren Pendeluhr von KAMPE⁴⁾ kamen schon längst nicht mehr in Betracht.

Am 23. August 1819 schreibt er an OLBERS: »Leider will es nur mit der SHELTONSchen Uhr gar nicht mehr gehen; gestern habe ich sie reinigen lassen, aber wenigstens die ersten 18 Stunden nachher ist sie ebenso ungleichförmig gegangen wie vorher. Ich werde es noch einige Wochen ansehen und dann versuchen, ob ein Nachschleifen der Zähne des Ankers, die, wie sich jetzt zeigte, doch bedeutend (in 48 Jahren) angegriffen sind, helfen will. Die Vortrefflichkeit des REICHENBACHSchen Passageninstruments geht grösstenteils verloren, wenn die Uhr seiner nicht würdig ist.«

Aus diesem Grunde entlich GAUSS zunächst von REPSOLD eine von dessen Uhren. Anfang Mai erhielt er eine LIEBHERRSche Uhr, wie aus einem Briefe an BESSEL vom 12. Mai 1820 hervorgeht. Die betreffenden Briefstellen mögen ihres Interesses wegen hier Platz finden.

1) Die von LINDENAU und BOHNENBERGER 1816 als Fortsetzung der eingegangenen »Monatlichen Korrespondenz« begründete »Zeitschrift für Astronomie« erschien nur bis 1818, in welchem Jahre v. ZACH in Genua unter dem Titel »Correspondance astronomique« eine neue Zeitschrift begründete. — BRDL.

2) Vergl. oben S. 82.

3) Werke XI, 1, S. 295.

4) Oben S. 44.

BESSEL schrieb an GAUSS am 30. April 1820: »Meine Uhr¹⁾ ist bei REPSOLD gewesen, der sie sehr gut verbessert hat. Der Anker war ausgeschliffen, weshalb REPSOLD einen neuen von orientalischen Granaten gemacht hat, welches bekanntlich sehr harte Steine sind. Auch hat er auf meine Bitte das ganze Werk in einen fest schliessenden Kasten von Messing eingeschlossen, so dass nur unten eine Öffnung ist, durch welche wohl kaum Staub in die Uhr kommen wird, da das Gehäuse fest verleimt ist und ausser seiner Tür noch einen mit Seidenzeug bezogenen Rahmen hat. Diesen Verbesserungen zufolge ging die Uhr vollkommen gut, so dass ich sie fast zwei Monate lang bis auf weniger als 1^s mit der Sternzeit zusammenstimmen sah; mit dem April aber fing sie an vorzueilen, so dass sie endlich fast eine halbe Sekunde täglich gewann. Der Grund zeigte sich bald in einer sehr hörbaren Reibung am Anker, die mich endlich zwang, die Uhr abzunehmen. Durch eine Lupe betrachtet scheint der eine der Steine schon wieder ein wenig angegriffen zu sein; ich weiss dieses ewige Schleifen und Reiben garnicht zu erklären, habe aber noch ein Mittel versucht, was vielleicht dem Übel abhilft. Es rührt nämlich offenbar von einem Mangel an Öl her, und doch fand ich, als ich die Uhr abnahm, das REPSOLD etwas an den Anker gebracht hatte; ich glaube nun, dass man nur suchen muss, das Öl am Anker zu erhalten, und dass dieses geschehen wird, wenn man nur äusserst wenig davon nimmt und dieses so anbringt, dass es den Zahn nicht verlassen kann; — demzufolge habe ich alles alte Öl weggenommen und statt dessen ein sehr kleines Tröpfchen auf die Mitte der Zähne des Ankers gebracht, so dass es sich weder unter die Fassung der Steine noch seitwärts ziehen kann. Wenn das Steigrad es nicht nach und nach verteilt, so muss dieses Mittel helfen. Sie würden mir einen grossen Dienst erweisen, wenn Sie mir eine sichere Abhilfe dieses Übels vorschlagen könnten; ich riskiere dabei die Uhr, die doch eine der schönsten ist, welche ich kenne, und die, wenn ihr guter Gang dauerhaft gemacht werden könnte, gar nichts zu wünschen übrig lassen würde. Jetzt, nachdem diese Uhr ohne am Pendel zu ändern, wieder aufgestellt ist, folgt sie genau der Sternzeit, so wie nach ihrer Regulierung im Winter.«

GAUSS antwortete darauf am 12. Mai 1820: »Was Ihre Uhr betrifft, so scheint

1) Die REPSOLDSche. — BRDL.



es mir doch fast, als ob Sie jetzt etwas zu viel von ihr verlangen. Wenn meine Uhr künftig keine grösseren Anomalien zeigt, als dass sie, nachdem sie 2 Monat in einer Sekunde geblieben, ihren täglichen Gang allmählich $\frac{1}{2}$ Sekunde ändert, so werde ich sehr zufrieden sein. Die REPSOLDSche Uhr, die ich bisher (als Nothbehelf, da die SHELTONSche jetzt zu feinen Beobachtungen ganz unbrauchbar ist) gebraucht habe, zeigt weit grössere Unregelmässigkeiten, ebenso wie früher ja auch die Ihrige. An jener mag das vorläufige hölzerne Pendel die Hauptursache sein, das ich, wenn die Uhr hier bleibt (REPSOLD hatte sie mir vorläufig nur aus Gefälligkeit geliehen), mit einem Kompensationspendel vertauschen lassen werde. Seit zehn Tagen habe ich nun auch die neue LIEBHERRSche Uhr aufgestellt, das Wetter ist aber, seitdem ihr Gang unter eine Sekunde abgeglichen ist, ungünstig gewesen, so dass nicht viele Beobachtungen gemacht werden konnten. Die wenigen, die ich gemacht habe, deuten freilich auf einige Unregelmässigkeiten hin, allein ich kann hieraus noch gar nichts schliessen, zumal da diese Uhr noch kein besonderes Gehäuse hat. Für jetzt ist nur ein anderes vorgeschoben, wo ich oft genötigt gewesen bin, um den Schlag bei Tage unter Geräusch zu hören, die obere Thür zu öffnen, so dass häufiger Temperaturwechsel und vielleicht anderweitige Störung mitwirkt. Doch geht sie auch so, wie es scheint, beträchtlich gleichförmiger wie die REPSOLDSche in ihrem bisherigen Zustande.

Die SHELTONSche zeigte, als ich auf sie beschränkt war, gewisse Unregelmässigkeiten, die ich mir nicht ganz erklären kann, sie teilte nämlich den Tag ungleich; der Stand der Uhr gegen Sternzeit war während aller Beobachtungen eines Tages oft bis auf 0;1 bis 0;2 konstant und nach den Beobachtungen des andern Morgens hatte sie dann während der Nacht 1^s, auch wohl 2^s verloren; wäre es immer 2^s (oder eine gerade Zahl) gewesen, so dächte ich, sie hätte einmal (oder einigemal) nicht ausgelöst, allein wie gesagt, zuweilen nur 1^s, übrigens nie Gewinn. Dieser Fehler, möge die Ursache sein, welche sie wolle, und der auch blieb, nachdem die Uhr gereinigt war, machte sie ganz unbrauchbar; übrigens zeigten sich bei der Reinigung die Zähne des Ankers beträchtlich angegriffen, was wohl, nachdem sie 50 Jahre ununterbrochen gegangen, nicht zu verwundern ist. Ich werde diese Zähne jetzt abschleifen und neu polieren lassen.

Auch folgende Stellen aus dem Briefwechsel mit BESSEL mögen angeführt werden:

BESSEL an GAUSS am 1. Juni 1820: »Meine Uhr geht fortwährend vortrefflich und ich zweifle nicht, dass es auch so lange so bleiben wird, bis wieder eine hörbare Reibung sich einstellt. Hier haben Sie das Register seit der letzten Versorgung des Ankers mit Öl:

April 25.	18 ^h 32 ^m	— 4,07	Mai 11.	14 ^h 55 ^m	— 4,30
26.	10 49	— 4,04	12.	5 9	— 4,31
28.	10 4	— 3,96	13.	8 24	— 4,30
29.	9 34	— 3,92	14.	9 24	— 4,14
30.	6 59	— 3,88	15.	14 48	— 4,21
Mai 2.	7 16	— 3,64	16.	4 5	— 4,28
3.	13 15	— 3,72	17.	6 39	— 4,52
4.	12 2	— 4,10	18.	10 9	— 4,76
8.	14 47	— 4,37	19.	11 7	— 5,04
9.	9 47	— 4,55			

»Da die genaue Regulierung des Ganges in die kalte Jahreszeit (Februar) fiel und dieser sich damals eine lange Zeit hindurch bewährte, so ist die Gleichheit dieses Ganges bei der grossen Hitze im Mai eine sehr auffallende Bestätigung der Richtigkeit der Kompensation. — Lassen Sie daher REPSOLDS Uhr nicht wieder aus Ihren Händen! denn es lässt sich von REPSOLD voraussetzen, dass er alles Folgende noch vollkommener macht als das Vorangegangene. — Interessant war es mir, den Fehler Ihres alten SHELTON kennen zu lernen; der Satz, den ich hundertmal aufgestellt und befolgt habe, wird immer mehr bestätigt: eine Grundbestimmung taugt nur dann, wenn sie aus wenigstens ein Jahr umfassenden Beobachtungen hergeleitet ist; Nacht und Tag und Sommer und Winter bringen oft etwas hervor, woran wir nicht denken, auch vieles, was wir gar nicht erkennen.

GAUSS an BESSEL am 11. März 1821: »Leider hat der Astronom nur immer seine Not mit den Uhren. Meine LIEBHERRSche Uhr ist die erste Zeit vortrefflich gegangen, aber jetzt eilt sie auf eine mir unerklärliche Art gewaltig vor, wohl schon fünf oder sechs Mal hatte ihr täglicher Gang über 2 Sekunden gewonnen; wenn das Pendel etwas herunter geschraubt war, ging sie



anfangs langsamer, accelerierte aber bald wieder stufenweise immer mehr. Jetzt will ich sie nun einmal gehen lassen, zu sehen, wie weit sie es treibt. Die Temperatur im Kasten ist übrigens in der ganzen Zeit keinen bedeutenden Änderungen ausgesetzt gewesen, auch ist die Grösse der Schwingungen nur kaum merklich kleiner geworden. Leider ist mein Mechanikus RUMPF bereits seit vier Monaten abwesend; sobald er zurückkommt, will ich sehen, ob Reinigung etc. hilft.»

Ebenso schreibt GAUSS an OLBERS im April 1821: »Sehr in Not bin ich auf meiner Sternwarte mit den Uhren. Ich habe eigentlich keine einzige, die was wert ist. Die neue LIEBHERRSche ging ein halbes Jahr vortrefflich, aber seitdem immer schlechter und ist jetzt ganz unbrauchbar. Sie geht immer geschwinder, so dass ihr täglicher Gang während des März 15^s zunahm; nachher hat RUMPF sie etwas gereinigt und eine kleine Abänderung gemacht, worauf sie eine kurze Zeit wieder besser ging, allein bald fing sie das alte Spiel wieder an, und jetzt geht sie wieder täglich 14^s vor. Den Grund kann ich nicht erraten, die Schwingungen sind nur wenig kleiner geworden. Wie ich höre, ist es mit SOLDNERS Uhr nicht besser gegangen, und er hat das neue Echappement, wovon man sich anfangs so viel versprach, weggeworfen und einen gewöhnlichen Anker machen lassen. Wie es nachher damit gegangen, weiss ich nicht, aber es ist wahrscheinlich, dass sie auf alle Fälle nicht exquisit gehen wird, da die Arbeit nur mittelmässig ist und nur das an sich sinnreiche aber künstliche Echappement die mittelmässige Arbeit unschädlich machen sollte. Die 50jährige SHELTONSche Uhr ist seit 2 Jahren auch herzlich schlecht. Es wird am Ende wohl kein Rat sein, als eine Uhr aus England kommen zu lassen. Da Sie viel mit YOUNG korrespondieren, so hätten Sie vielleicht die Güte, einmal bei ihm anzufragen, welcher Künstler jetzt am besten arbeitet, welches etwa der Preis ist, und wie lange man etwa nach der Bestellung warten muss?«

Auch noch im Februar 1826 beklagt sich GAUSS im Briefe an OLBERS vom 19. Februar: »Die unbeschreibliche Schlechtigkeit meiner Uhren verleidet mir hier jetzt alles Observieren; allein ich habe Nachricht, dass ein Regulator von HARDY, welchen S. K. H. der Herzog von SUSSEX der Sternwarte zum Geschenk machen will, nächstens abgesandt werden soll. Mit dem grössten

Widerwillen wende ich sonst meine Zeit auf Arbeiten, aus denen bei aller angewandten Mühe doch nichts Rechtliches herauskommen kann.«

Über die HARDYSche Pendeluhr, die er bald darauf erhielt, berichtet er in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom Juni 1826 (Werke VI, S. 453).

Am 10. oder 11. August 1819 traf der REICHENBACHSche Meridiankreis in Göttingen ein, an demselben Tage, an dem OLBERS nach einem 4½ tägigen Besuch bei GAUSS eben abgereist war¹⁾. Eine Bemerkung über Ankunft des Kreises findet sich in GAUSS' Aufzeichnungen über seine Beobachtungen mit dem Passageninstrument im Heft Pg (31b), S. 19. Die Aufstellung verzögerte sich indessen bis gegen Anfang Oktober. Aus der Zeit vom 3. Oktober bis zum 27. Dezember weist das genannte Heft, S. 33—42, Notizen über die vorbereitenden Untersuchungen, Nivellement der Achse, Bestimmung der Fadenstrecken und der Ungleichheit der Zapfen, Berichtigung des Azimuts und des Zenitpunktes auf. GAUSS schreibt am 9. Dezember 1819 an BESSEL: »Jetzt ist nun zwar der Kreis seit einigen Wochen aufgestellt, allein das Wetter war so ungünstig, dass ich nur erst wenige Beobachtungen habe machen und auch an die Berichtigungen noch nicht die letzte Hand legen können. Bei solchen Gelegenheiten, wie diese, fällt mir, wenn das Wetter so ungünstig ist, der Mangel eines Meridianzeichens sehr schmerzhaft, welches ich bei anhaltendem günstigen Wetter wenig oder garnicht vermisse, da alle meine Pfeiler in Rücksicht der Azimutalstellung eine fast absolute Unveränderlichkeit zeigen. Ich bin noch immer unschlüssig, was ich in dieser Beziehung tue, und der alte SCHRÖTER hätte in dieser Rücksicht den Platz der Sternwarte nicht leicht schlechter wählen können. Die Mittagslinie geht gegen Norden und Süden durch Gärten, die mit Bäumen dicht verwachsen sind. Im Süden ist zwar nur ein Garten, der HARDINGS Schwiegervater angehört, welcher Umstand aber eher nachteilig ist, da dieser weder gern die Bäume missen noch Geldentschädigung annehmen will. Bei einem ganz fremden würde das Dutzend Bäume gegen etwa hundert Taler Entschädigung längst haben weggeschafft sein können. Inzwischen ist auch die Frage, ob viel gewonnen wird. Der

1) GAUSS an OLBERS 23. August 1819, an BESSEL 9. December 1819.



Horizont wird da durch einen Berg mit dichter (Privat-)Waldung begrenzt; ein Meridianzeichen würde sich daher nicht gegen den Himmel projizieren, und da ohnehin in dieser hügligen Gegend, wo gewöhnlich die Luft in den Gründen voller Dünste ist, nach Süden das Sehen fast immer schlechter geht, so würden oft Wochen, wo nicht Monate hingehen, wo das Zeichen auch nicht ein Mal gebraucht werden könnte. Nach Norden würde ich, wenn eine Allee durchgehauen würde, ein sehr schönes Terrain finden, wo in der Entfernung von einer Stunde ein Zeichen auf einem nackten Hügel sich gegen den Himmel projizierte. Aber nach dem Massstabe im Süden, wo ein Garten in die Quere geschnitten gegen hundert Taler Kosten machen wird, würde die Entschädigung der Garteneigentümer im Norden gewiss wenigstens einige tausend Taler betragen, und dann die Unterhandlung mit so vielen einzelnen, zumal da bei der milden Verfahrensart unseres Gouvernements durchaus alles im Wege der Güte geschehen müsste. Bei dieser Lage der Dinge habe ich für die REICHENBACHSchen Instrumente noch eine andere Idee, womit ich nächstens Versuche machen und Ihnen künftig den Erfolg anzeigen will.

«Es wird mich sehr freuen, wenn Sie mir in Zukunft Ihre Erfahrungen den Meridiankreis betreffend unumwunden mitteilen wollen, so wie ich Ihnen mit Vergnügen die meinigen anzeigen werde. Bisher sind ihrer noch zu wenig, als dass viel daraus geschlossen werden könnte, und der Abänderungen wegen, von denen REICHENBACH Sie auch unterrichtet haben wird, muss ich nun von neuem den Gebrauch des Instruments auf einige Zeit entbehren. Inzwischen kann ich doch nicht unterlassen, mich noch etwas mit Ihnen darüber zu unterhalten.

«Das Fernrohr ist sehr schön und scheint dem des Mittagsfernrohrs nur wenig nachzustehen. Nur gefällt mir nicht die Einrichtung, die Gesichtslinie zu korrigieren. Die Berichtigung in der Ebene¹⁾ des Meridians hätten wir REICHENBACH gern geschenkt, ich werde sie nie brauchen; hätte REICHENBACH sie weggelassen, so wäre die andere Berichtigung senkrecht zur Ebene²⁾ des Meridians einfacher und für sich bestehender geworden. Freilich, wenigstens nach meiner Beobachtungsart, ist dies hauptsächlich nur für das erste Mal; weder am REFSOLDSchen Kreise noch am Mittagsfernrohr habe ich diese

¹⁾ Indexfehler des Zenitpunktes, von GAUSS sonst als Kollimationsfehler bezeichnet. — BRDL.
²⁾ Korrektion im Azimut. — BRDL.

Schrauben seit der ersten Berichtigung wieder angerührt, da ich ihre Veränderung, die ohnehin höchst unbedeutend ist, lieber in Rechnung bringe. Schmerzlich empfinde ich den grossen Unterschied des Ablesens der Verniers¹⁾ und der Mikroskope. Jene geben (falls nicht längere Erfahrung mich künftig anders urteilen lässt) bei grösserer Anstrengung und grösserem Zeitaufwand doch viel geringere Genauigkeit. Freilich wäre bei einem Meridiankreise von dieser Einrichtung, den man doch nicht alle Tage umlegen kann, die Anwendung der Mikroskope bedenklicher gewesen, weil man auf ihre unveränderte Relation zur Alhidade während einiger Wochen hätte müssen rechnen können. Doch dünke ich, könnten die Mikroskope mehr vergrössern. Am Ende gilt dies doch auch von der Libelle, und vielleicht wäre bei diesem Kreise das Lot vorzuziehen gewesen.²⁾

BESSEL hatte nach Erbauung der Königsberger Sternwarte zunächst mit einem 25zölligen CARYSchen Transit Circle beobachtet; im Oktober 1819 erhielt er fast zur gleichen Zeit wie GAUSS einen REICHENBACHSchen Meridiankreis; er schreibt am 5. März 1820 an GAUSS, dass dieses Instrument sich nun in beobachtungsfähigem Zustande befinde³⁾.

Beide beginnen nun ihre Erfahrungen, wie auch bei früheren Gelegenheiten, in einem lebhaften Briefwechsel auszutauschen, aus dem das Wesentlichste Werke XI, 1, S. 317—342 abgedruckt ist.

Einen ausführlichen Bericht über den Göttinger Kreis⁴⁾ gibt GAUSS in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom Juni 1820 (Werke VI, S. 429). BESSEL beschreibt den seinigen in den *Königsberger Beobachtungen*, 6. Abteilung, S. III (BESSELS Werke II, S. 34), in denen auch seine Beobachtungsergebnisse niedergelegt sind.

Das auf der Göttinger Sternwarte nachträglich aufgefundene *Tagebuch der Beobachtungen am Reichenbachschen Meridiankreise* enthält zunächst die sauber eingetragenen Protokolle einer Beobachtungsreihe vom 8. Dezember 1819 bis 4. Januar 1820 und dann die folgende Notiz: «Da die anfängliche Hemmung

¹⁾ Vergl. oben S. 91. Im Jahre 1889 wurden die Nonien am REICHENBACHSchen Kreise durch Ablesemikroskope ersetzt. Vergl. Fussnote 3). — BRDL.

²⁾ 1842 erhielt BESSEL einen Kreis von REFSOLD.

³⁾ Vergl. auch REFSOLD, *Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, S. 104. Über die in den Jahren 1887—1889 angebrachten Änderungen am REICHENBACHSchen Kreise vergl. E. GROSSMANN, *Beobachtungen des Mondkraters Misting*, Astron. Nachr., Bd. 137, S. 113 f.

XI: 2 Abb. 3.



sowohl des Kreises als der Alhidade zu mehreren Bedenklichkeiten Veranlassung gab, so wurde nötig gefunden, eine abgeänderte Hemmung vorzurichten. Zu diesem Behuf hatte Herr von REICHENBACH die beiden Stellschrauben nötig, die ich daher nebst den sonst noch nötigen Abmessungen unter dem 31. Dezember 1819 nach München abschickte. Von Anfang an war auch der eine Horizontalfaden nicht ganz straff gewesen, und die Schläfheit nahm immer mehr zu. Ich nahm daher, um neue Fäden einzuziehen, am 2. Februar das Netz heraus. Ich wünschte diese Gelegenheit zu benutzen, um auch die Zahl der vertikalen Fäden zu vergrößern; allein durch die Berührung des Wachses, womit die alten Fäden befestigt waren, wurden auch diese zum Teil schlaff, und ich war daher genötigt, das ganze Netz zu erneuern.

»Das neue Netz, aus sieben vertikalen und zwei horizontalen Fäden bestehend, war am 9. Februar vollendet; die horizontalen sind beträchtlich näher bei einander, als zuvor.

»Die neuen Hemmungsarme kamen am 14. Februar an und wurden am 17. Februar durch Herrn RUMPF angelegt. Am 18. wurde in das Gegengewicht der Alhidade Blei nachgegossen und das Instrument aufgestellt. Einige andere von REICHENBACH vergessene und hier erst vorzurichtende Kleinigkeiten verzögerten die Gebrauchsfertigkeit bis zum 21.»

Es folgt sodann im *Tagebuch* eine Beobachtungsreihe vom 21. Februar bis zum 9. September 1820. Sie betrifft, ausser der Bestimmung der Polhöhe, die Deklinationen von 34 Zirkumpolarsternen, die in beiden Kulminationen beobachtet wurden, und von 35 südlicheren Fundamentalsternen. Die Rektaszensionen der letztgenannten hatte GAUSS fast alle im Vorjahre am Passageninstrument bestimmt (vgl. oben S. 112); ein Teil der Zirkumpolarsterne war von ihm am REPSOLD'schen Meridiankreise beobachtet (vgl. oben S. 105).

Daneben beobachtete er gleichzeitig, wie auch BESSEL im August 1820, 20 Zenitsterne, die SCHUMACHER im Vorjahre in Lauenburg zur Bestimmung der Polhöhe im Anschluss an die dänische Gradmessung beobachtet hatte¹⁾. In einem Briefe an BODE vom 3. September 1820 (abgedruckt im *Berliner Astron. Jahrbuch* für 1823, Werke VI. S. 433) gibt GAUSS an, dass die Zahl seiner Beobachtungen seit dem 21. Februar rund 1200 beträgt.

¹⁾ Briefe von GAUSS an BESSEL vom 17. August und 7. Dezember 1820, von BESSEL an GAUSS vom 11. September und 20. November 1820.

Über die Beobachtungen der Zirkumpolarsterne bis zum 19. März 1820 berichtet GAUSS in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom Juni 1820 (Werke VI, S. 431), jedoch ohne Angabe der Deklinationen; die Deklinationen der SCHUMACHER'schen Sterne, der Sonne und des Mars aus dieser Zeit findet man im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1823 (Werke VI, S. 432 und 434). Sonst hat er hiervon nichts veröffentlicht. Seine Ergebnisse konnten jedoch zum grössten Teil aus dem Nachlass und aus dem Briefwechsel mit BESSEL entnommen und für Band XI, 1 bearbeitet werden. Es sind nämlich im Buche Pe (27) unter dem Titel *Resultate der Beobachtungen am Reichenbach'schen Kreise für die einzelnen Sterne* die Ergebnisse für die Deklinationen der Fundamentalsterne (Werke XI, 1, S. 346—347) und von Zirkumpolarsternen (Werke XI, 1, S. 343—345), im Buche Pf (28) unter dem Titel *Resultate aus den Beobachtungen am Reichenbach'schen Meridiankreise und am Mittagsfernrohr die Scheinbaren Zenitdistanzen des Äquators aus beobachteten Zirkumpolarsternen* erhalten. Daneben finden sich an den genannten Stellen und im Heft Pg (31 b) Notizen über Nivellement, Teilungsfehler und anderes.

Das Umlegen des Meridiankreises geschah während dieser Beobachtungsreihe sechsmal und GAUSS teilte diese hiernach in sieben Perioden ein, nämlich¹⁾:

I. Periode 1820	Februar 21 bis März	19,
II. »	März 20 » April	12,
III. »	April 12 » Mai	27,
IV. »	Mai 27 » Juli	18,
V. »	Juli 18 » August	10,
VI. »	August 11 » August	18,
VII. »	August 19 » September	9.

Von seinen Beobachtungen nach dem September 1820, von denen weiter unten die Rede sein wird, hat GAUSS nur wenige reduziert. Er sagt schon in dem Briefe an BESSEL vom 7. Dezember 1820, dass er längere Zeit nicht zur Reduktion der Beobachtungen aus den drei letzten hierunter erwähnten Perioden kommen konnte; vergl. die Bemerkungen Werke XI, 1, S. 357.

¹⁾ Vergl. auch die Briefe an BESSEL vom 12. Mai 1820 (Werke XI, 1, S. 320) und vom 7. Dezember 1820 (ebendort S. 329).



GAUSS und BESSEL tauschten zunächst ihre Ergebnisse für die Deklinationen einiger von den 36 Sternen des 1805 erschienenen Kataloges von MASKELYNE aus, vergl. den Brief von GAUSS an BESSEL vom 1. Juni 1820 (Werke XI, 1, S. 323). Im weiteren Briefwechsel stellte sich heraus, dass die Bestimmungen beider bis auf einige Zehntelsekunden übereinstimmten, vergl. den Brief von GAUSS an BESSEL vom 11. März 1821 (Werke XI, 1, S. 332), in dem jener die Deklinationen von 35 Fundamentalsternen gibt. Auch die von beiden angestellten Beobachtungen der Zenitsterne, die SCHUMACHER in Lauenburg beobachtet hatte, wurden nach einigen Schwierigkeiten zur Übereinstimmung gebracht und GAUSS schreibt hierüber an BESSEL am 7. Dezember 1820: »Über die Unterschiede unserer Deklinationen wage ich noch kein Urteil zu äussern, wir müssen erst viel mehr Erfahrungen vergleichen. Wie glücklich würde man sich vor wenigen Jahren schon bei einer solchen Übereinstimmung gehalten haben, zumal bei einem Instrument von so kleinen Dimensionen, was nicht repetiert und wo die Ablesung im Grunde noch der schwache Teil ist.«

Indessen erwies sich späterhin diese Übereinstimmung als illusorisch. Als BESSEL im Jahre 1822 in der 7. Abteilung der *Königsberger Beobachtungen* seine Sternörter veröffentlichte¹⁾, setzte er diese auf Grund einer Neureduktion merklich südlicher an als in seinen früheren brieflichen Mitteilungen an GAUSS und glaubte nun aus den ihm früher von GAUSS mitgeteilten Göttinger Beobachtungen auf eine Verminderung der Göttinger Polhöhe, die GAUSS zu 48,7 annahm²⁾, um 14" schliessen zu müssen. GAUSS entging dies zunächst, da er in der folgenden Zeit mit der Vorbereitung zur Hannoverschen Gradmessung beschäftigt und der Briefwechsel mit BESSEL spärlicher geworden war, und weil er sich auch bei der früher gefundenen Übereinstimmung mit BESSEL beruhigt hatte. Allerdings war er noch nicht dazu gekommen, die Biegung seines Instruments gründlich zu untersuchen; er beabsichtigte dies nachzuholen.

Als er endlich von OLBERS im Januar 1824 (Werke XI, 1, S. 333) darauf aufmerksam gemacht wurde, dass BESSEL meinte, GAUSS habe die Göttinger Polhöhe um 14" zu gross angenommen, stellt er fest, dass BESSELS neue Deklinationen von den seinigen im genannten Sinne abweichen. Er untersucht infolgedessen die Biegung seines Instruments durch Vergleichung seiner Dekli-

1) Auch *Berliner Astron. Jahrbuch* für 1825 (BESSELS Werke II, S. 248).

2) Brief von GAUSS an BESSEL vom 17. August 1820 (Werke XI, 1, S. 328).

nationen mit den neuen BESSELSCHEN (Werke XI, 1, S. 338 und 348). Unter Anwendung der hieraus folgenden Biegung erzielt er wieder Übereinstimmung; sein Wert der Polhöhe bestätigt sich und erhält nur eine Verminderung von wenigen Zehntelsekunden³⁾ und damit übrigens eine fast vollkommene Übereinstimmung mit neueren Bestimmungen.

Die Schwierigkeiten, die sich für GAUSS wie für BESSEL bei der Berücksichtigung der Refraktion und der Biegung der Instrumente boten, führten zu manchen Zweifeln bei den Reduktionen. Die Unsicherheit der ersteren wurde durch BESSELS neue Refraktionstafeln⁴⁾ fast gänzlich behoben. Um den Einfluss der Biegung zu bestimmen, war BESSEL auf den Gedanken gekommen, ausser dem direkten Sternbilde das von einem künstlichen Horizont reflektierte Bild zu beobachten, (vergl. Brief an GAUSS vom 20. März und Briefe an OLBERS vom 11. Mai und vom 3. August 1820, Werke XI, 1, S. 318f.) und GAUSS hatte fast gleichzeitig ebenfalls das Bild des Polarsterns im Wasserhorizont beobachtet (vergl. Brief an BESSEL vom 12. Mai 1820, Werke XI, 1, S. 323 und VI, S. 432). Indessen sagt GAUSS schon im Briefe an OLBERS vom Mai 1819 (vergl. oben S. 103), dass »jedes Instrument seinem Bau nach, sowie wegen der Biegungen der Teile Fehler der gemessenen Zenitdistanzen von der Form $a \sin z + \beta \cos z$ haben wird, und dass er »durchaus kein Mittel« sieht, um den Koeffizienten a »zu erforschen, als durch den Quecksilberhorizont«⁵⁾ (auch Werke VI, S. 427). Den Vorschlag, der Unsicherheit in der Bestimmung des Zenitpunktes durch Beobachtung des reflektierten Bildes zu entgehen, hatte BESSEL schon 1809 im *Berliner Astronomischen Jahrbuch* für 1812 gemacht⁶⁾.

GAUSS' Beobachtungen des direkten und des reflektierten Bildes des Polarsterns zur Bestimmung der Polhöhe mit Berücksichtigung der Biegung aus den Jahren 1820 und 1824 sind in der Abhandlung *Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten Altona und Göttingen* (Werke IX, S. 40

1) Brief an BESSEL vom 14. März 1824 (Werke XI, 1, S. 338).

2) In den *Fundamenta Astronomiae* (vergl. oben S. 56); von GAUSS in etwas bequemere Form gebracht (H. C. SCHUMACHER, *Sammlung von Halfstafeln* 1822) und von BESSEL verbessert im *Berliner Astron. Jahrbuch* für 1826 (vergl. den Brief von BESSEL an GAUSS vom 7. November 1822).

3) Das *Tagebuch* des REFSOLDschen Kreises weist zuerst am 28. Januar 1819 eine Beobachtung des Polarsterns im Quecksilberhorizont auf.

4) BESSELS Werke II, S. 3 und 4.



bis 47) niedergelegt; sie führten schliesslich zu dem Wert $51^{\circ} 31' 47,85$ für die Göttinger Polhöhe (Platz des REICHENBACHSchen Meridiankreises).

Während der im vorigen besprochenen ersten Beobachtungsreihe mit dem REICHENBACHSchen Meridiankreis vom Februar bis September 1820 begannen die ersten Vorbereitungen für die Hannoversche Gradmessung; im Mai 1820 bewilligte der König die Mittel zur Fortsetzung der dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover und, nachdem die Nachricht von dieser Bewilligung schon allgemein bekannt war, forderte ein Ministerialerlass vom 30. Juni 1820 GAUSS auf, »über die Art und Weise und über die Zeit, zu welcher diese Arbeit unternommen werden kann, wie über die etwa erforderlichen Kosten und sonst zu treffenden Vorkehrungen« Bericht¹⁾ zu erstatten; vergl. Brief an OLBERS vom 8. Juli 1820.

Am 28. Juni 1820 schreibt GAUSS an BESSEL: »Überhaupt, so sehr ich die Astronomie liebe, fühle ich doch das beschwerliche des Lebens eines praktischen Astronomen ohne Hilfe oft nur zu sehr, am peinlichsten aber darin, dass ich darüber fast gar nicht zu irgend einer zusammenhängenden grössern theoretischen Arbeit kommen kann. Meine Abhandlung über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Naturwissenschaften, die eine neue Begründung der Methode der kleinsten Quadrate und sehr viel anderes neues enthalten wird, liegt schon seit länger als Jahresfrist halbvollendet. Ich weiss daher kaum, ob ich mich darüber zu freuen habe, dass der König die Fortsetzung der dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover genehmigt hat, in Rücksicht auf welche übrigens über das Wann und Wie der Ausführung bis jetzt noch nichts bestimmtes verfügt ist.« Auch im Briefe an OLBERS vom 13. Februar 1821 klagt er über die Zersplitterung seiner Zeit; er schreibt: »Bis Ende Januar war hier fast ununterbrochen bedeckter Himmel, so dass in meinem Tagebuche eine grosse Lücke ist. Aber auch nachher habe ich mich nur auf die Kometenbeobachtungen und die Durchgänge von ein paar Sternen beschränkt, indem ich die zufällige Unterbrechung einer meiner Vorlesungen benutzt habe, wieder eine theoretische Arbeit vorzunehmen, die ich schon 1818 angefangen, aber bei meiner zerstückelten Zeit und so mannigfaltigen zum Teil widerwärtigen und nicht immer die zu solchen Arbeiten

1) Vergl. den Aufsatz von GALLE, Abhandlung 1 dieses Bandes.

nötige freie Heiterkeit des Geistes lassenden Beschäftigungen oft auf lange Zeit wieder weggelegt hatte. Es ist die neue Begründung der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate oder vielmehr eine ziemlich ausgedehnte allgemeinere Untersuchung, wovon diese nur Ein Teil ist. Jetzt ist die erste Hälfte ganz vollendet, die ich in Kurzem der Sozietät zu übergeben denke; die zweite, welche auch bis auf einiges noch überzuarbeitende fertig ist, wird vermutlich auch noch vor Ostern mit gedruckt werden können. Sie werden manche artige Sachen darin finden. Mit Betrübnis fühle ich, wie wenig ich in meiner Lage mit allen ihren Missverhältnissen von dem leisten kann, was ich vielleicht unter glücklicheren Umständen hätte leisten können, und dass wohl selbst der grössere Teil meiner frühern Lukubrationen mit mir untergehen wird. — Verzeihen Sie, teuerster OLBERS, den Ausbruch eines Gefühls, welches gerade jetzt beim Empfang eines mit jugendlichem Feuer geschriebenen Briefes von einem 18 jährigen Florentiner, Namens LIBRI, der mir eine kleine vielversprechende Abhandlung über höhere Arithmetik zuschickte, wieder recht lebendig bei mir geworden ist.«

Seine besprochene Beobachtungsreihe am REICHENBACHSchen Meridiankreis schliesst am 9. September 1820; am 12. September reiste er bereits nach Altona, um mit SCHUMACHER über die Auswahl der Basis für die Messungen und über die sonstigen Veranstaltungen zu beraten. Am 29. Oktober nahm er seine Beobachtungen wieder auf; sie wurden aber in der Folgezeit häufig unterbrochen und nur zum Teil reduziert.

Wenn er sich bisher an der Gradmessung nur insoweit beteiligt hatte, als er im August 1818 seine Denkschrift¹⁾ über die Fortsetzung durch Hannover an den Geh. Kammerrat v. ARNSWALDT, Kurator der Göttinger Universität eingesandt, im Oktober desselben Jahres an SCHUMACHERS Messungen bei Lüneburg teilgenommen, im Juni 1819 nochmals nach Lauenburg gelegentlich der dortigen Aufstellung des RAMSDENSchen Zenitsektors gereist und im September die eben erwähnte Reise nach Altona unternommen, sowie am REICHENBACHSchen Kreise im August 1820 gleichzeitig mit SCHUMACHER dessen Zenitsterne zur Vergleichung beobachtet hatte, so musste er nun zu diesem Zwecke den Hauptteil seiner Zeit hergeben.

1) Diese Denkschrift ist anscheinend nirgends veröffentlicht worden, vergl. auch den Brief an SCHUMACHER vom 12. August 1818 und den Aufsatz von GALLE, S. 55.



7. Periode. Geringere astronomische Tätigkeit.

In den Jahren 1821—1825 sehen wir GAUSS in den Sommer- und Herbstmonaten zum grossen Teil, mit Rekognoszierungen und Messungen für die Gradmessung und die anschliessenden Dreiecke beschäftigt, unterwegs. Daneben gehen seine Verarbeitung der Messungen und seine theoretischen Untersuchungen, aus denen im Dezember 1822 die Preisschrift *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird* und später, im Oktober 1827 die *Disquisitiones generales circa superficies curvas* hervorgingen. In den ersten Teil dieser Periode fällt auch die Abfassung der *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*.

Wenn GAUSS schon früher über die Zersplitterung seiner Zeit geklagt hatte, so mag jetzt besonders oft in ihm der Wunsch rege geworden sein, Göttingen mit einem anderen Ort zu vertauschen, wo er mehr Herr seiner Zeit sein konnte. Als BESSEL in seinem Brief vom 11. Dezember 1823 seine Freude darüber ausdrückte, dass »nun der grösste Teil des Zeitverlustes« (die Triangulierung für die eigentliche Gradmessung) »überwunden ist«, und in demselben Briefe sich über GAUSS' Berufung nach Berlin¹⁾ ausspricht, antwortet GAUSS am 14. März 1824: »Glauben Sie nun aber ja nicht, dass ich Ihrem Briefe nicht Gewicht genug beilege, wenn ich Ihnen jetzt melde, dass ich wahrscheinlich jetzt mich in neue Messungsoperationen einlasse, die nicht unter einigen Jahren werden zu vollenden sein. In der Tat werde ich dadurch nicht einen Augenblick gebunden sein, wenn eine Verwirklichung der Berliner Pläne oder angemessene andere Aufforderungen eintreten sollten. Allein, teuerster BESSEL, dies ist noch nicht genug: Sie haben sich in mehreren Briefen so stark über den geringen Wert, welchen Sie auf die Resultate der Messungen legen, erklärt, mir gewissermassen einen Vorwurf daraus gemacht, dass ich meine Zeit damit verliere, mir Glück gewünscht, dass der Zeitverlust vorbei sei. Grosser Gott, wie falsch beurteilen Sie mich. Aber es ist mir zu viel daran gelegen, von Ihnen nicht falsch beurteilt zu werden, als dass

¹⁾ Die Verhandlungen über GAUSS' Berufung nach Berlin, die erstmalig 1809 angeregt und 1821 und 1824 wieder aufgenommen werden, zogen sich bis zum Jahre 1826 hin. Im Jahre 1821 machte auch SCHUMACHER einen Versuch, GAUSS nach Hamburg zu ziehen. — BRDL.

ich nicht wünschen sollte, mich bei Ihnen zu rechtfertigen. Wahrlich, über die Sache selbst denke ich eben so. Alle Messungen in der Welt wiegen nicht ein Theorem auf, wodurch die Wissenschaft der ewigen Wahrheiten wahrhaft weiter gebracht wird. Aber Sie sollen nicht über den absoluten, sondern über den relativen Wert urteilen. Einen solchen haben ohne Zweifel die Messungen, wodurch mein Dreieckssystem mit dem KRAYENHOFFSchen und dadurch mit den französischen und englischen verbunden werden soll. Und wie gering Sie auch diesen Wert anschlagen, in meinen Augen ist er doch höher als diejenigen Geschäfte, die dadurch unterbrochen werden. Ich bin ja hier so weit davon entfernt, Herr meiner Zeit zu sein. Ich muss sie teilen zwischen Collegia lesen (wogegen ich von jeher einen Widerwillen gehabt habe, der, wenn auch nicht entstanden, doch vergrössert ist durch das Gefühl, welches mich immer dabei begleitet, meine Zeit wegzuerwerfen) und praktisch astronomischen Arbeiten. So viel Freude ich nun auch daran immer gehabt habe, so werden Sie mir doch zugeben, dass, wenn man bei den unzähligen kleinen und kleinlichen Geschäften dabei aller reellen Hilfe entbehrt, das Gefühl, seine Zeit zu verlieren, nur dadurch beseitigt werden kann, wenn man sich bewusst ist, einen grossen wichtigen Zweck dabei zu verfolgen. Das haben Sie uns ändern nun aber schwer gemacht, da Sie uns zuvor gekommen sind und den meisten Desideraten bereits auf eine so musterhafte Art abgeholfen haben. Uns ändern bleibt nun wenig mehr übrig, als hin und wieder eine Nachlese zu halten.

»Was bleibt mir also für solche Arbeiten, auf die ich selbst einen höhern Wert legen könnte, als flüchtige Nebenstunden? Ein anderer Charakter als der meinige, weniger empfindlich für unangenehme Eindrücke, oder ich selbst, wenn manches andere anders wäre als es ist, würde vielleicht auch solchen Nebenstunden noch mehr abgewinnen können, als ich es im allgemeinen kann. Wie die Sachen einmal liegen, darf ich eine Unternehmung nicht abweisen, die, obwohl mit tausend Beschwerden verbunden und vielleicht aufreibend auf meine Kräfte wirkend, doch reell nützlich ist, die freilich auch von Andern ausgeführt werden könnte, während ich selbst unter günstigeren Verhältnissen etwas besseres täte, allein, die bestimmt, wenn ich sie nicht auf mich nehme, gar nicht zur Ausführung kommen würde; endlich, auch das darf ich Ihnen nicht verhehlen, eine Sache, die in etwas das Missverhältnis



ausgleicht, welches zwischen meiner Dienstannahme — derselben anno 1824, wie sie 1810 unter Jérôme festgesetzt wurde — und den Bedürfnissen einer zahlreichen Familie stattfindet. Doch nun kein Wort mehr zu dieser vertraulichen Mitteilung, zu der ich genötigt war, weil es mir weh tat, von Ihnen falsch beurteilt zu werden.»

In diesem Briefe spricht sich GAUSS deutlich dahin aus, dass die beobachtende Astronomie bei BESSEL in den besten Händen sei und seine eigene Arbeitstätigkeit auf andern Gebieten ihm daher wichtiger schein.

Das *Tagebuch* des REICHENBACHSchen Meridiankreises weist in der Folgezeit folgende Anzahl von Beobachtungstagen mit den dazwischen liegenden Unterbrechungen auf:

vom 29. Oktober	1820 bis 29. Mai	1821:	55	Beobachtungstage
» 2. Januar	1822 » 6. Februar	1822	4	»
» 19. Dezember	1822 » 8. Januar	1823	7	»
» 7. April	1823 » 12. April	1823	6	»
» 6. August	1823 » 24. August	1823	6	»
» 17. Oktober	1823 » 9. Dezember	1823	15	»
» 5. Januar	1824 » 9. Mai	1824	42	»
» 5. Januar	1825 » 10. April	1825	26	»
» 1. Oktober	1825 » 8. November	1825	10	»
» 2. Januar	1826 » 26. November	1826	91	»
» 22. Januar	1827 » 16. Mai	1827	19	»
» 13. Juli	1827 » 17. Dezember	1827	54	»

Hierauf werden die Beobachtungen spärlicher. Im Mai und Juni 1828, sowie im März 1829 und im April und Mai 1830 finden sich noch einige längere Beobachtungsreihen, 1828 im ganzen 34, 1829 im ganzen 29, 1830 im ganzen 31 Beobachtungstage; sodann sind nur mehr vereinzelt Beobachtungen eingetragen: die Jahre 1831 mit 17, 1832 mit 8, 1833 mit 7, 1834 mit 18, 1835 mit 5 Beobachtungstagen. Hierauf folgt eine lange Unterbrechung; erst 1843 findet sich eine vereinzelt Beobachtung, 1844 im ganzen 3 und 1846 im ganzen 21 Beobachtungstage.

Diese Beobachtungen stehen zum grossen Teil in Beziehung zur Gradmessung.

So schlägt GAUSS in dem Briefe vom 20. Dezember 1823 SCHUMACHER die

gleichzeitige Beobachtung von Zenitsternen in Altona und Göttingen vor, um die Polhöhen beider Orte unmittelbar zu vergleichen, vorläufig durch Beobachtung von 11 Sternen an den Meridiankreisen und später in ausgedehnter Masse am Zenitsektor; SCHUMACHER hatte nämlich zwischen der direkt bestimmten astronomischen Polhöhe von Altona und der aus der Göttinger Polhöhe von GAUSS geodätisch übertragenen eine Differenz von 5" gefunden, in der GAUSS sogleich »einen entscheidenden Beweis des unregelmässigen Fortschreitens der Richtung der Schwere« sieht¹⁾. Mit den Beobachtungen wurde sofort im Januar 1824 an beiden Orten mit den Meridiankreisen begonnen, woraus sich die grössere Zahl von Beobachtungstagen in dieser Zeit (siehe vorige Seite) erklärt; über sie berichtet GAUSS an OLBERS am 28. Februar 1824: »Eine Reihe von Beobachtungen von Zenitalsternen, hier und in Altona angestellt (Januar und Februar d. J.) an den Meridiankreisen geben die Amplitudo des Bogens unabhängig von allen absoluten Polhöhen = 2° 0' 58,77 also 4" kleiner als die geodätische Messung mit WALBECKS Erddimensionen. Fast genau denselben Unterschied finden wir bei Lauenburg, wo die Zenitalsterne, daselbst mit dem Zenitsektor und in Göttingen mit dem Meridiankreise beobachtet, die Amplitude 1° 50' 29,98 und die geodätische Messung 1° 50' 33,93 geben. Ich zweifle jetzt garnicht mehr an dem unregelmässigen Fortschreiten der Richtung der Schwere und sehe die Übereinstimmung von Lauenburg und Altona wie etwas Zufälliges an. In der That, von Göttingen zum Brocken ist die Abweichung im entgegengesetzten Sinn und mehr als zweimal grösser; die geodätische Messung gibt die Amplitude 0° 26' 13,99, während die Vergleichung der astronomisch bestimmten Polhöhen (51° 31' 48,00 und 51° 58' 11,65) 0° 26' 23,65 gibt, oder eigentlich noch etwas mehr, da ZACHS Beobachtungsplatz merklich südlich (leicht 1") vom Dreieckspunkt war. Zwischen dem Brocken und Lauenburg wird also die Differenz fast 15" betragen, und so viel kann man dem, wenn auch schlechten LENOIRSchen Instrumente unmöglich Fehler zutrauen.« GAUSS wies darauf hin, wie wichtig es sei, diese Beobachtungen an denselben Plätzen mit anderen Instrumenten (dem Zenitsektor) zu wiederholen. Die von ihm angeregten Beobachtungen mit dem Sektor wurden oft hinausgeschoben und endlich im

1) In dem Briefe an SCHUMACHER vom 7. November 1823.



Jahre 1827 (im April in Göttingen und im Juni in Altona) von ihm selbst ausgeführt und die Ergebnisse in der *Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten Göttingen und Altona* (Werke IX, S. 5 ff.) bekannt gemacht. Die Zenitdistanzen¹⁾ der 43 hierzu benutzten Sterne bestimmte GAUSS ausserdem, ebenso wie ihre Rektaszensionen in der Zeit von April bis August 1827 am REICHENBACHSchen Meridiankreise²⁾. Zeitweise beteiligte sich Leutnant NEBUS an diesen Beobachtungen.

Als GAUSS 1823 in seinem Aufsatz *Neue Methode die gegenseitigen Abstände der Fäden in Meridianfernrohren zu bestimmen* (Astronomische Nachrichten 43, Werke VI, S. 445) zeigte, dass das Fadenkreuz eines Fernrohrs durch ein zweites gegenübergestelltes Fernrohr beobachtet werden kann, hatte auch BESSEL 1824 die Methode der Kollimatoren benutzt, um die Biegung im Horizont zu bestimmen (Astr. Nachr. 3, S. 209, BESSELS Werke II, S. 43). Er schreibt darüber an GAUSS am 23. Oktober 1824: »Dass auch Sie dieselbe Idee gehabt haben, wodurch ich die horizontale Biegung des Fernrohrs der Meridiankreise bestimmt habe, habe ich durch SCHUMACHER gehört; es ist zwar nicht sehr aufmunternd, dass ich von so vielem, was ich vornehme, später die Überzeugung erhalte, dass es auch ohne mich geschehen sein würde; allein ich bin darüber mit mir längst einig, auch nicht im Stande, deshalb das zu unterlassen, was mir nützlich zu sein scheint«, worauf GAUSS am 20. November antwortet: »Wenn bei dem Zusammentreffen unserer Ideen über die Ausmittelung der Flexion der Fernrohre einer von uns beiden etwas verloren hat, so wäre nach gewöhnlichen Ansichten ich wohl der. Allein mir genügt vollkommen, dass das Verfahren nun Eigentum der Astronomen ist, und ich freue mich aufrichtig, dass Sie es sind, der mir in der Bekanntmachung zugekommen ist. Eine ernstliche Anwendung habe ich selbst noch nicht gemacht, denn die beiden Fernrohre, die zur Hilfe angewandt werden, sollen meiner Meinung nach dem zu prüfenden nicht gar zu weit nachstehen und ich besitze keine zwei solche, wenigstens könnte ich bei der Lokalität meiner Sternwarte das eine nicht gehörig anbringen, ohne erst komplizierte Vorrichtungen anfertigen zu lassen.«

Über die Teilungsfehler des REICHENBACHSchen Meridiankreises machte GAUSS eingehende Untersuchungen im Juli 1826, über die er im Briefe an

¹⁾ Werke IX, S. 39.

²⁾ Ebenda, S. 8. — Vergl. auch den Aufsatz von A. GALLE, Abhandlung 1 dieses Bandes, S. 126.

BESSEL vom 20. November 1826 und in der *Bestimmung des Breitenunterschiedes* (Werke IX, S. 46) berichtet (vergl. auch den undatierten Brief an SCHUMACHER vom August 1826, sowie die Briefe von SCHUMACHER an GAUSS vom 8. September 1826 und von GAUSS an OLBERS vom 14. Januar 1827). Im Nachlass befinden sich die entsprechenden Rechnungen im Buche Pc (27), S. 28—37.

Im Jahre 1826 machte BOHNENBERGER in seinem Aufsatz *Neue Methode den Indexfehler eines Höhenkreises zu bestimmen und die Horizontalaxe eines Mittagsfernrohrs zu berichtigen, ohne Lot und ohne Libelle* (Astron. Nachr., Bd. 4, S. 327) seinen bekannten Vorschlag, den Nadirpunkt durch den Quecksilberhorizont zu bestimmen. Diese Methode benutzte GAUSS sogleich, und um eine möglichst ebene Quecksilberfläche zu erhalten, liess er das Gefäss schräg nach oben sich verjüngend abdrehen¹⁾; auch verbesserte er später die Beleuchtung durch Entfernung der zweiten Okularlinse, so dass sich zwischen dem unter 45° geneigten Spiegel und dem Fadensystem kein Glas befindet (Werke VI, S. 472, vergl. auch Werke IX, S. 47). An BESSEL schreibt er am 12. März 1826: »Ich hatte dieselbe Idee zur Bestimmung des Kollimationsfehlers, die so nahe liegt, auch gleich anfangs gehabt, aber sah nicht wohl ab, wie sie ausführbar wäre. BOHNENBERGER hat sie nun praktisch bewährt, aber ich hätte gewünscht, dass er über das Detail der Einrichtungen ausführlicher gewesen wäre. In der Tat sehe ich bis diese Stunde noch immer die Ausführbarkeit nicht recht ein bei grössern Instrumenten. Bei starken Vergrößerungen sehe ich keinen Platz zur Anbringung des Illuminators, und ohne starke Vergrößerungen zu gebrauchen erhält man doch keine angemessene Genauigkeit. Versuchsweise habe ich in die schwächste Vergrößerung des Fernrohrs des Meridiankreises einen Glasspiegel einsetzen und an der Seite eine Öffnung anbringen lassen, aber bei den ersten gestern angestellten Versuchen hat es mir auch hier nicht gelingen wollen, eine brauchbare Beleuchtung des Netzes zu erhalten. Nicht weniger schwierig scheint mir zu sein, sich die Mittel zur feinen Bewegung zu verschaffen«, und am 20. November 1826: »Da ich nun überdies den Kollimationsfehler durch Beobachtung des Nadirpunktes im Quecksilberspiegel täglich bestimme (eine Methode, die eine unvergleichliche Genauigkeit gibt, und die ich für einen der wichtigsten Fort-

¹⁾ Vergl. den undatierten Brief an SCHUMACHER vom Juli 1827 (Werke XI, 1, S. 342) und den an OLBERS vom 31. Januar 1829 (Werke XI, 1, S. 20).



schritte der praktischen Astronomie halte), so erhalten die Beobachtungen eine Übereinstimmung, die alle frühere bedeutend übertrifft.« GAUSS scheint sich in der Tat über die Methode den Nadir zu bestimmen, schon in einem nicht mehr vorhandenen Briefe an REICHENBACH vom 11. Januar 1813 geäußert zu haben, auf den dieser am 23. Januar antwortete¹⁾: »Die Anwendung des künstlichen Horizonts zur vertikalen Stellung des Kreises und Rektifizierung der kleinen Querlibelle ist eine sehr gute und anwendbare Idee.« GAUSS hatte zu jener Zeit gerade seine Beobachtungen mit dem BORDAKREISE begonnen, auf dessen Libelle sich REICHENBACHS Bemerkung zweifellos bezieht, und war jedenfalls dabei auf diesen Gedanken gekommen.

Während der Periode der Beobachtungen am REICHENBACHSCHEN Meridiankreise unternahm GAUSS auch einige Untersuchungen über die Eigenbewegung des Sonnensystems, von denen er ebenfalls nichts veröffentlicht hat. Seine ersten Versuche hierüber fallen in das Jahr 1819, in dem auf seine Veranlassung dieses Problem als Preisfrage von der Göttinger Sozietät gestellt wurde²⁾. Von diesen Versuchen ist jedoch nichts erhalten, wie GAUSS selbst in dem Briefe an OLBERS vom 18. Dezember 1821³⁾ sagt. Er scheint sich dabei auf einige vorläufige Untersuchungen nach dem allgemeinen Grundsatz beschränkt zu haben, nach dem man durch die angenommene Richtung der Sonnenbewegung »so viel als möglich von den eigenen beobachteten Bewegungen der Sterne weg erklären kann«⁴⁾.

Seine Untersuchungen im Winter 1821—22 wurden durch den Brief von OLBERS vom 25. November 1821 angeregt, in dem OLBERS über seine eigenen Versuche berichtet. Bereits HERSCHEL⁵⁾ hatte aus den von MASKELYNE festgestellten Eigenbewegungen für den Apex einen Punkt im Sternbild des Herkules gefunden. Auch BESSEL hatte einige derartige Versuche angestellt bei Gelegenheit seiner Bestimmung der Eigenbewegung von Sternen⁶⁾. Er

1) REFSOLD, *Geschichte der astronomischen Messwerkzeuge*, I, S. 119.

2) Werke XI, 1, S. 405.

3) Ebenda, S. 408.

4) Ebenda, S. 409.

5) Drei Abhandlungen in den *Philosoph. Transactions*, London, 1783, 1805, 1806; siehe das genaue Zitat Werke XI, 1, S. 449 Fusenote.

6) *Fundamenta Astronomiae*, 1818, S. 308 f. — BESSEL hatte bei Gelegenheit der Untersuchung der Eigenbewegungen die Pole der Eigenbewegung für die 71 am stärksten bewegten Sterne berechnet, um einen Parallelismus in diesen Bewegungen festzustellen. HERSCHEL'S Ergebnis fand er dabei nicht bestätigt.

schreibt darüber an GAUSS in dem undatierten Briefe vom Dezember (?) 1822¹⁾: »Es ist zwar nicht schwer, denjenigen Punkt zu finden, welcher das Maximum der Projektionen der Bewegungen auf die nach den Sternen gezogenen grössten Kreise gibt; aber ohne ihn näher aufgesucht zu haben, glaube ich, nach der Auftragung der in den *Fundamentis* gegebenen Bestimmung der Pole auf einen Globus, doch nicht, dass das Maximum vom Minimum so sehr verschieden sein würde, dass die Bewegung nach einer Richtung mit grosser Wahrscheinlichkeit daraus folgte.«

Projiziert man die jährliche Eigenbewegung eines Sterns auf den durch den Stern und den Apex gelegten Grosskreis, konstruiert man also das Dreieck mit den Ecken Anfangsort P , Endort P' des Sterns, Fusspunkt Q des Lotes, so soll nach GAUSS erster Definition im Briefe an OLBERS vom 18. Dezember 1821 $\Sigma P'Q^2$ ein Minimum sein. Er fügt aber hinzu, dass diese Definition, bei der Grösse und Richtung der Eigenbewegung berücksichtigt werden und bei der daher die Sterne mit grosser Eigenbewegung zu grosses Gewicht erhalten, »wenn sie überhaupt die richtige ist, es doch nur bei dem gegenwärtigen Zustande unserer Kenntnisse ist, wo wir nur von einer kleinern Anzahl eigner beobachteter Bewegungen auf der Himmelskugel die Richtung etwas genau kennen.« Er verbessert sie sogleich im folgenden Briefe vom 15. Januar 1822 in eine andere, bei der nur die Richtungen der Eigenbewegungen berücksichtigt werden. Er projiziert nämlich das Stück des Grosskreises zwischen dem gegenwärtigen Ort des Sterns und dem Antiapex P auf den Grosskreis der Eigenbewegung. Ist T der Fusspunkt des Lotes, so soll jetzt $\Sigma \sin^2 PT$ ein Minimum sein. Es ist das dieselbe Bedingung, die später KOBOLD und HARZER ihren Untersuchungen zugrunde gelegt haben.

GAUSS schliesst jedoch bei den beiden genannten Definitionen die »ungünstigen« Sterne, d. h. diejenigen, die sich vom Antiapex entfernen, aus. Er rechnet nach der letzteren Formel und findet so aus den Eigenbewegungen von 70 BESSEL'SCHEN STERNE²⁾ für den Apex den Wert: $259^{\circ}40'$, $-3^{\circ}49'$,

1) Werke XI, 1, S. 427.

2) Von den auf der vorigen Seite erwähnten 71 BESSEL'SCHEN STERNE lässt GAUSS den Stern 42 Comae, der die geringste Eigenbewegung hat, fort, weil er die Sterne nach ihrer Eigenbewegung in Gruppen zu je zehn einteilt, vermutlich, weil diesen Gruppen verschiedenes Gewicht zukommen dürfte; vergl. die Gruppeneinteilung unten S. 139, sowie Werke XI, 1, S. 453—454 und die Anmerkung 12), ebendort S. 457.



sowie den um 180° abstehenden, da die Gleichung eine solche Doppellösung bedingt. Er entscheidet sich für den ersteren Wert, weil von den 30 Sternen mit den grössten Eigenbewegungen sich 19 diesem Punkte nähern. Dieses Ergebnis erscheint ihm jedoch verdächtig, weil von den 71 BESSER'SCHEN Sternen sich 48 nach Süden und nur 23 nach Norden bewegen und daher der Apex nicht wohl so weit südlich liegen kann.

Er versucht daher eine andere Methode¹⁾ nach dem Grundsatz, dass möglichst wenige Sterne »ungünstig« sein sollen, indem er die Punkte Q wählt, die auf dem Grosskreis der Eigenbewegung um 90° vom jetzigen Ort des Sterns im Sinne der Eigenbewegung abstehen. Für alle Sterne, die sich dem Antiapex nähern, ist der Abstand der Punkte Q von diesem kleiner, für alle ungünstigen grösser als 90° . Bestimmt man dann einen Grosskreis so, dass in der einen Halbkugel möglichst viele, in der andern möglichst wenige Punkte Q sich befinden, so bilden Apex und Antiapex die Pole dieses Grosskreises. Er vereinfacht die Rechnung, indem er »nur den gemeinschaftlichen Schwerpunkt aller Q 's (im Innern der Kugel) sucht; »der dadurch gezogene Radius, fortgesetzt, wird, wo nicht genau, doch sehr nahe das vorteilhafteste P auf der Kugel geben«. Er findet so nach Verbesserung eines kleinen Rechenfehlers für den Apex den Ort: $266^\circ 18', +34^\circ 48'$. Das scheinbare Paradoxon, dass seine Rechnung nach der früheren Formel einen so erheblich verschiedenen Wert ergibt, erklärt er damit, dass bei den sukzessiven Annäherungen immer mehr Sterne als scheinbar ungünstig ausgeschlossen werden. Er beginnt daher die Rechnung von neuem, indem er als ungünstig nur diejenigen 12 Sterne ansieht, die nach der Schwerpunktsrechnung sich als solche ergeben hatten, während deren Zahl bei der ersten Rechnung 23 war. Die entsprechende Bedingung fasst er in die Gleichung $\sum \sin^2 PT + n = \text{Minimum}$, wo n die Anzahl der ungünstigen Sterne bedeutet. Im nächsten Briefe an OLBERS vom 29. Januar 1822²⁾ verbessert er diese Formel in

$$\sum \sin^2 TP + \sum \sin^2 SP,$$

wo das erste Glied für die günstigen Sterne gilt und dieselbe Bedeutung hat wie früher, während im zweiten, das für die ungünstigen Sterne gilt, SP die

1) In dem Briefe an OLBERS vom 22. Januar 1822, Werke XI, 1, S. 419.

2) Werke XI, 1, S. 423 f.

Entfernung des Sterns vom Antiapex bedeutet. Die Quadratsumme der Sinusabstände der ungünstigen Sterne vom Antiapex soll also möglichst klein sein, offenbar weil bei einem dem Antiapex näher stehenden Sterne die ungünstige Eigenbewegung wahrscheinlicher ist.

Eine Hauptschwierigkeit bei dem Problem blieb die Frage, welche Sterne als günstig und welche als ungünstig anzusehen sind. Um hier eine möglichst gute Entscheidung zu treffen, hat GAUSS nach Ausweis seines Briefes an OLBERS vom 29. Januar 1822 und einer im Nachlass vorhandenen Zeichnung¹⁾ eine graphische Methode benutzt. Er sucht denjenigen Punkt auf der Himmelskugel, von dem sich möglichst wenige Sterne entfernen, zunächst graphisch angenähert zu ermitteln. Das Gebiet, in dem dieser Punkt liegt, ermittelt er auf folgende Weise:

Wenn man durch den Ort eines Sterns einen Grosskreis senkrecht zu seiner Eigenbewegung legt, so teilt dieser Kreis die Kugel in zwei Halbkugeln, von denen diejenige für die Lage des Antiapex günstig ist, in die der Stern durch seine Eigenbewegung hinübertritt. Zieht man nun auf einem Globus die genannten Kreise für alle benutzten Sterne, so teilen diese die ganze Kugel in Dreiecke, Vierecke und andere Polygone. Die Seiten dieser Polygone teilen die Himmelskugel so, dass das Innere jedes Polygons in Beziehung auf jeden Stern entweder zur günstigen oder zur ungünstigen Halbkugel gehört. Sucht man dann dasjenige Polygon auf, dessen Inneres am wenigsten ungünstig ist, d. h. von dessen Innerem sich am wenigsten Sterne entfernen, so bildet dieses den wahrscheinlichsten Bereich für den Antiapex. Die Zeichnung für den ganzen Globus auszuführen, ist schon bei einer nicht sehr grossen Anzahl von Sternen unmöglich²⁾. GAUSS hat sie auf einem Blatt Papier für die Gegend des Himmels ausgeführt, in der nach seinen früheren Rechnungen der Antiapex genähert liegen musste. Er findet so als wahrscheinlichstes Gebiet für den Antiapex das Viereck mit den Ecken:

$78^\circ 40' - 30^\circ 40'$.
$78 \ 42 - 30 \ 57$	
$79 \ 13 - 31 \ 9$	
$80 \ 4 - 30 \ 32.$	

1) Werke XI, 1, S. 451 und 452.

2) Vergl. den Brief an ARGELANDER vom 16. Februar 1825, Werke XI, 1, S. 435.



Von den innerhalb dieses Vierecks gelegenen Punkten entfernen sich nur 11 Sterne, während die übrigen 60 sich ihnen nähern.

GAUSS hätte nun auf Grund dieser Feststellung nach seiner letztgenannten Formel rechnen können. Er unterlässt dies aber, obwohl er in einer anscheinend aus dem Jahre 1838 stammenden Notiz¹⁾ jene Formel als die »beste Method« bezeichnet. Er beabsichtigt nun vielmehr nach einer anderen Methode zu rechnen, die den später von BRAVAIS und AIRY angewandten entspricht. Sie beruht darauf, dass die Quadratsumme der Pekuliarbewegungen der Sterne zu einem Minimum gemacht wird. Die entsprechende Formel gibt er in dem schon erwähnten Briefe an OLBERS vom 29. Januar 1822²⁾, wo er diese Methode als eine Vervollkommnung seiner Methode des letzten Briefes bezeichnet und sagt, dass sie dadurch »wohl am Ende die echte und am ungezwungensten mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verknüpfende sein wird.« Über die Ableitung der Formeln findet sich keine Notiz im Nachlass; sie lassen sich indes auf demselben Wege ableiten, den AIRY benutzt hat. Auch hat GAUSS zunächst nicht nach diesen Formeln gerechnet, weil er sich erst genauere Werte für die Eigenbewegungen verschaffen wollte. Er sagt in seinem Briefe an BESSEL vom 15. November 1822³⁾: »Künftig werde ich daher diese Arbeit wieder vornehmen, allein erst, wenn ich mehr Zeit habe, und dann wünsche ich auch alle beobachteten eigenen Bewegungen erst neu zu bestimmen, wozu ich erst wieder in anhaltendes Beobachten kommen muss, was vor 1824 schwerlich geschehen kann. Sehr vieles findet sich freilich schon in meinen Beobachtungen von 1820⁴⁾, was aber grösstenteils noch nicht berechnet ist.«

Er kam jedoch nicht wieder auf diesen Gegenstand zurück, als bis er die Abhandlung von ARGELANDER *Über die eigene Bewegung des Sonnensystems*⁵⁾ zugeschickt erhielt. ARGELANDER hatte in den Jahren 1827 bis 1830 auf der Åboer Sternwarte an dem dort 1827 aufgestellten REICHENBACHSchen Meridiankreise vorzugsweise die Sterne mit grösserer Eigenbewegung beobachtet und daraufhin seinen Katalog⁶⁾ von 560 Sternen veröffentlicht. Seinen Unter-

1) Werke XI, 1, S. 428.

2) Ebenda, S. 424.

3) Ebenda, S. 426.

4) Ebenda, S. 343 und 346. — BRDL.

5) Mémoires présentés à l'Académie de St. Pétersbourg, 1827, S. 561 ff.

6) 560 stellarum fixarum positiones mediae incunte anno 1830, Helsingfors 1835.

suchungen über die eigene Bewegung der Sonne legte er diejenigen Sterne zugrunde, deren jährliche Eigenbewegung er aus der Vergleichung seines Kataloges mit den von BESSEL¹⁾ nach BRADLEYS Beobachtungen abgeleiteten Sternörter grösser als $0,1$ fand. Es ergaben sich so 390 Sterne.

Nach Empfang der Abhandlung von ARGELANDER schrieb GAUSS an diesen am 16. Februar 1838²⁾ und schilderte ihm seine graphische Methode, durch die er das Polygon (Viereck) aufgesucht hatte, von dessen Innerem sich am wenigsten Sterne entfernen. Er bemerkt, dass seine Bestimmung aus 71 Sternen nahe mit dem ARGELANDERSchen Ergebnis übereinstimmt und fügt hinzu, dass es naturgemässer wäre, nicht die Anzahl der ungünstigen Sterne, sondern die Quadratsumme der Sinus ihrer Apexdistanzen zu einem Minimum zu machen, ein Grundsatz, den er schon in dem Briefe an OLBERS vom 29. Januar 1822 ausgesprochen hatte.

Seine zuletzt in dem eben erwähnten Briefe an OLBERS vom 29. Januar 1822³⁾ angegebene Methode erwähnt GAUSS in dem Briefe an ARGELANDER nicht; jedoch rechnet er nunmehr nach dieser Methode unter Benutzung der auch von ARGELANDER benutzten 390 Sterne, bestimmt aber selbst deren Eigenbewegungen durch Vergleichung des ARGELANDERSchen Kataloges mit dem BESSEL-BRADLEYSchen, weil er bei ARGELANDER mehrere Rechenfehler⁴⁾ entdeckt hatte. Er ordnet die Sterne nach der Grösse ihrer Eigenbewegungen und stellt eine Rangliste⁵⁾ von je 10 Sternen auf. Hierauf berechnet er zunächst aus je 10, dann aus je 30, 60 und mehr Sternen den Apex und zuletzt aus allen das Gesamtergebnis⁶⁾. Er findet z. B. aus den Gruppen von je 60, die letzte Gruppe zu 90 Sternen, die folgenden Werte⁷⁾ für den Apex (Aequinoctium 1792,5):

1) *Fundamenta*, S. 137 f.

2) Werke XI, 1, S. 433.

3) Ebenda, S. 424.

4) GAUSS äussert sich über die ARGELANDERSche Abhandlung ausser in den Werke XI, 1 abgedruckten Briefstellen an OLBERS auch in dem Briefe an SCHUMACHER vom 30. März 1838, Werke XII, S. 273, der erst nach Erscheinen des Bandes XI, 1 bekannt geworden ist.

5) Werke XI, 1, S. 462—465.

6) Vergl. die Bearbeitung der entsprechenden Nachlassnotizen durch O. BRICK, Werke XI, 1.

7) In dem Briefe an OLBERS vom 5. April 1838, Werke XI, 1, S. 443 und 444.

Gruppe	α	δ
I.	251 ^o 58'	+ 37 ^o 50'
II.	260 10	+ 33 45
III.	256 53	+ 41 46
IV.	273 47	+ 16 56
V.	248 54	+ 16 17
VI.	270 46	+ 11 45

und als Endergebnis¹⁾: 261^o 51', + 27^o 6'.

Er wiederholt die Rechnung, indem er jetzt die Sterne nach den Sinus ihrer Apexdistanzen in 5 Klassen ordnet und erhält damit folgende Werte²⁾ (Aequinoctium 1792,5):

Klasse	α	δ
I.	272 ^o 36'	+ 33 ^o 11'
II.	261 17	+ 36 26
III.	249 19	+ 21 18
IV.	258 2	+ 24 17
V.	272 38	+ 23 11.

Das hieraus folgende Gesamtergebnis 261^o 31', + 27^o 20' weicht etwas von dem vorigen ab, vermutlich infolge kleinerer Rechenfehler. In seinem Briefe an OLBERS vom 5. April 1838³⁾ bemerkt er zu der auffallenden Tatsache, dass bei der Einteilung in Gruppen die letzten Gruppen der weniger stark bewegten Sterne einen erheblich südlicher gelegenen Apex ergeben: »Dies ist freilich wenig von ARGELANDERS Endresultat verschieden. Indessen ist die Vereinigung der drei letzten Gruppen in Eine nicht recht zulässig, erstlich weil an sich die kleinen Bewegungen geringere Zuverlässigkeit geben und daher den folgenden Gruppen ungleiches Gewicht beigelegt werden müsste, dessen richtige Taxierung aber eigentümliche Schwierigkeiten hat. Zweitens aber, was unendlich wichtiger ist, weil (cf. die obigen 6 Gruppen) die letztern Gruppen so unverkennbar einen südlichem Punkt indizieren, was den gegründeten Verdacht erregt, dass eine konstante Ursache im Spiel ist. Eine solche kon-

1) Werke XI, 1, S. 444.

2) Ebenda, S. 479.

3) Ebenda, S. 441.

stante Ursache wäre, wenn durchschnittlich BRADLEYS Deklinationen zu südlich, oder ARGELANDERS zu nördlich wären, oder beides zugleich stattfände. Offenbar werden dadurch die Resultate verfälscht (im Sinn der Deklination) und desto mehr, je kleiner die beobachtete eigene Bewegung ist. Nach einem freilich sehr rohen und sehr prekären Überschlage schätze ich, dass diese Diskordanz wegzuschaffen, man annehmen müsste, die beobachtete 75 jährige Deklinationsbewegung sei etwa durchschnittlich 4" zu gross (zu nördlich). Ich möchte die Möglichkeit von -2,5 bei BRADLEY und +1,5 konstanten Durchschnittsfehler bei ARGELANDER nicht unbedingt leugnen. Auch könnte vielleicht eine strengere Rechnung, die aber fast unüberwindliche Arbeit erfordern würde, etwas weniger als 4" geben. Wäre die Erklärung die richtige, so dürfte die wahre Deklination wohl 40^o erreichen.«

Im Winter 1825/26 nach der Rückkehr von seiner letzten, zum Zwecke seiner geodätischen Messungen unternommenen, Reise schreibt GAUSS am 12. Februar 1826 an SCHUMACHER¹⁾: »Ich habe kaum während einer Periode meines Lebens so angestrengt gearbeitet und doch vergleichungsweise so wenig reinen Ertrag produziert wie in diesem Winter. So geht es aber oft bei mathematischen Anstrengungen, wo nicht das Arbeiten, wie das Verfertigen eines Schubes über einen gegebenen Leisten vollendet werden kann. Ich habe mich zuweilen in diesem Winter Wochen lang, Monate lang mit einer Aufgabe beschäftigt, ohne sie zu meiner Zufriedenheit lösen zu können. Ich war etwas verwundert über Ihre Äusserung, als ob mein Fehler darin bestehe, die Materie zu sehr der vollendeten Form hintanzusetzen. Ich habe während meines ganzen wissenschaftlichen Lebens immer das Gefühl gerade vom Gegenteil gehabt, d. i. ich fühle, dass oft die Form vollendeter hätte sein können und dass darin Nachlässigkeiten zurückgeblieben sind. Denn so werden Sie es doch nicht verstehen, als ob ich mehr für die Wissenschaft leisten würde, wenn ich mich mehr damit begnüge, einzelne Mauersteine, Ziegel etc. zu liefern, anstatt eines Gebäudes, sei es nun ein Tempel oder eine Hütte, da gewissermassen doch das Gebäude auch nur Form der Backsteine ist. Aber ungern stelle ich ein Gebäude auf, worin Hauptteile fehlen, wenn gleich ich wenig auf den äussern Aufputz gebe. Auf keinen Fall aber, wenn Sie sonst mit Ihrem

1) Ähnlich spricht er sich in dem Briefe an OLBERS vom 19. Februar 1826 aus.



Vorwurf auch recht hätten, passt er auf meine Klagen über die gegenwärtigen Arbeiten, wo es nur das gilt, was ich Materie nenne; und ebenso kann ich Ihnen bestimmt versichern, dass, wenn ich gern auch eine gefällige Form gebe, diese vergleichungsweise nur sehr wenig Zeit und Kraft in Anspruch nimmt oder bei frühern Arbeiten genommen hat. Höchst drückend aber fühle ich bei schleunigen Arbeiten meine äussern Verhältnisse, und das Kollegienlesen ist z. B. in diesem Winter unbeschreiblich angreifend für mich gewesen, und Dinge, die an sich leicht sind, werden mir dabei oft sehr schwer. Ob ich meine Messungsarbeiten als vollendet ansehen soll oder nicht, weiss ich selbst noch nicht.«

Gauss beschäftigte sich in der nun folgenden Zeit auch wieder mit zahlen-theoretischen Untersuchungen und war damit zu einer Beschäftigung zurückgekehrt, die er mehrere Jahre hindurch entbehren oder wenigstens stark einschränken musste. Es stehen nun bis zum Jahre 1832 mathematische und mathematisch-physikalische Untersuchungen im Vordergrund. 1828 erschienen ausser den *Disquisitiones generales circa superficies curvas*¹⁾ seine Abhandlungen *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio I*²⁾, und das *Supplementum Theoriae combinationis observationum*³⁾, die er schon 1825 und 1826 der Göttinger Sozietät vorgelegt hatte; endlich 1829 die *Principia generalia theoriae figurarum fluidorum in statu aequilibrii*⁴⁾ und 1832 die *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio II*⁵⁾.

Daneben laufen noch dauernd seine Rechnungen zur Landesvermessung, die sich im wesentlichen bis in das Jahr 1838 hinauszogen, wenn er auch selbst an den praktischen Messungen nicht mehr teilnahm; auch wurde er 1829 zum Mitgliede der Kommission für die Hannoversche Mass- und Gewichtsregulierung ernannt.

Astronomische Arbeiten treten damit ganz in den Hintergrund und die grossen Instrumente der Göttinger Sternwarte wurden wenig von ihm benutzt. Die oben auf Seite 130 angegebenen Beobachtungsreihen nach dem Jahre 1827, seit

1) Werke IV, S. 217.

2) Werke II, S. 65.

3) Werke IV, S. 55.

4) Werke V, S. 29.

5) Werke II, S. 93.

der Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona, sollten vielleicht zur schärferen Bestimmung der Eigenbewegung einiger Sterne dienen, da er in dem Briefe an BESSEL vom 15. November 1822 äusserte, er wolle seine Untersuchungen über die Bewegung der Sonne erst wieder vornehmen, wenn er selbst alle beobachteten Eigenbewegungen neu bestimmt haben würde¹⁾. Aber auch dieser Plan ist nicht zur Durchführung gekommen. Der Briefwechsel mit BESSEL ruhte monatelang, zuweilen über ein Jahr gänzlich. Doch liegen auch aus dieser Zeit Beobachtungen von Planeten und Kometen vor, die GAUSS gelegentlich ausführte, und die teils von ihm selbst veröffentlicht und Werke VI abgedruckt, teils erst Werke XI, 1 aus dem Nachlass oder dem Briefwechsel bekannt gemacht sind. Häufig beobachtete er Ceres, Pallas und die meisten Kometen.

Wenn diese Zeit auch im ganzen eine sehr reiche Ausbeute an wichtigen Untersuchungen hervorbrachte, so drückt sich in den Briefen an SCHUMACHER und OLBERS doch immer wieder, wie schon früher, seine Unzufriedenheit aus, wohl dadurch hervorgerufen, dass infolge der Zersplitterung kein ruhiges ungestörtes Arbeiten möglich war und so vieles liegen bleiben musste. Ausserdem drückte auf seine Stimmung die Krankheit seiner zweiten Frau, die schon im Jahre 1823 kränklich und seit 1826 schwer leidend war; sie starb im September 1831.

Im März 1832 schreibt GAUSS an SCHUMACHER, dass er sich mit der Theorie des Erdmagnetismus beschäftige, und dieses Gebiet ist es nun, das ihn in Gemeinschaft mit WILHELM WEBER in den nächsten Jahren in Anspruch nimmt. Es ist daher aus dieser Zeit noch weniger über GAUSS' astronomische Tätigkeit zu berichten. 1836/37 raubte ihm die Hannoversche Mass- und Gewichtsregulierung einen grossen Teil seiner Zeit. Der Briefwechsel, im besonderen mit OLBERS, handelt nun vorzugsweise von persönlichen Angelegenheiten, umsonst als auch OLBERS, der 1840 starb, seines vorgerückten Alters wegen nicht mehr beobachtete.

Am 31. August 1834 starb GAUSS' langjähriger Gehilfe HARDING; sein Nachfolger wurde Dr. GOLDSCHMIDT, der sich bereits an den magnetischen Beobachtungen beteiligt hatte und späterhin auf der Sternwarte auch eine Reihe von Planeten- und Kometenbeobachtungen ausführte.

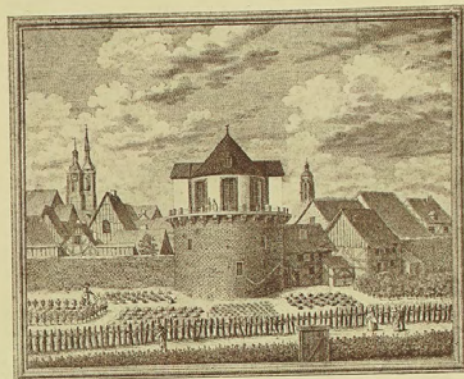
1) Vergl. oben S. 135.

In seinem hohen Alter kehrte GAUSS nochmals zur Benutzung des REICHENBACHSchen Meridiankreises zurück. Das *Tagebuch* des REICHENBACHSchen Kreises weist vom 6. März bis zum 28. Juni 1846 noch 21 Beobachtungstage auf, an denen GAUSS eine neue Untersuchung der Instrumentalfehler des Kreises¹⁾ vornahm und sehr häufig den Polarstern zu einer Neubestimmung der Fadenabstände, sowie einige wenige Hauptsterne beobachtete. Mit dem letzteren Datum schliesst das *Tagebuch*. Jedoch beobachtete er nach Ausweis des *Beobachtungsbuches* P_c (24) vom 4. Juli 1846 bis zum 27. Juni 1851, zuletzt 74 Jahre alt, nochmals die meisten der früher beobachteten Fundamentalsterne — mehrere davon 10 bis 20 mal — und einige andere Sterne. Ausserdem schloss er die Planeten Venus und Merkur an und beobachtete die neuentdeckten Planeten Metis (GRAHAM'S Planet), Parthenope, Victoria, Iris, Flora und den Neptun. Die letzteren Beobachtungen hat er auch veröffentlicht; sie sind Werke VI abgedruckt.

Auch die Sonnenfinsternisse vom 8. Oktober 1848 und vom 28. August 1851 beobachtete er noch; die letztere²⁾ ist wohl seine letzte Beobachtung gewesen.

1) Vergl. Werke XI, 1, S. 331 f.

2) Ebenda, S. 479.



Die alte Sternwarte in Göttingen im Jahre 1773.
Nach einem Stich von J. P. KALTENHOFFER.



Die neue Sternwarte in Göttingen, vollendet 1816.
Nach einem Stich von E. WAGNER (Zeichnung von E. HORSFEMANN).



Zweiter Abschnitt.
Theoretische Astronomie¹⁾.

Einleitendes.

GAUSS' Bestreben, »seinen Untersuchungen die Form vollendeter Kunstwerke zu geben« und »nie eine Arbeit zu veröffentlichen, bevor diese eine durchaus vollendete Form erhalten hatte«²⁾ ist auch die Ursache, dass er von den zahlreichen von ihm geplanten, grundlegenden und den Gegenstand erschöpfenden astronomischen Werken nur eines, die *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, Hamburg 1809, seinen Zeitgenossen geschenkt hat. In ihm behandelt er, soweit es die Bestimmung einer Bahn aus den Beobachtungen betrifft, ausschliesslich die elliptische und die hyperbolische Bewegung. Vielleicht mag er mit Rücksicht darauf, dass OLBERS³⁾ die Aufgabe der parabolischen Bahnbestimmung mit Erfolg gelöst hatte, die weitere Durchführung seiner Untersuchungen über diesen Gegenstand einstweilen zurückgestellt haben. Jedenfalls hat er hierüber nur die Abhandlung *Observationes cometae secundi A. 1813 in observatorio Göttingensi factae, adiectis nonnullis adnotationibus circa calculum orbitarum parabolicarum*, Göttingen 1813⁴⁾ veröffentlicht, in der er sich ausdrücklich auf das OLBERSsche Werk bezieht. Und doch beabsichtigte er, auch hier ein grosses grundlegendes Werk zu schaffen, wie unter anderem aus der von LINDENAU im November 1815 verfassten Einleitung zu der »Zeitschrift für Astronomie, herausgegeben von LIN-

1) Durchgesehener Abdruck aus Heft VII der *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss*, 1918.

2) SAETORIUS V. WALTERSHAUSEN, *Gauss zum Gedächtnis*, Leipzig 1856, S. 82.

3) *Über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen*, Weimar 1797 (WILHELM OLBERS, *Sein Leben und seine Werke*, Band I, herausgegeben von C. SCHILLING, Berlin 1894).

4) Werke VI, S. 26.

DENAU und BOHNENBERGER, Erster Band, hervorgeht, wo es (S. 46) heisst: »GAUSS hat neuerlich beinahe die ganze Kometentheorie umgearbeitet, neue Tafeln entworfen, und wir haben ein eigentümliches Werk darüber von ihm zu erwarten, was wohl nichts zu wünschen übrig lassen wird.« Die Vorarbeiten für dieses Werk, die sich im Nachlass vorgefunden haben, sind Werke VII, 1906, S. 323—373, zusammengestellt.

Ebenso hat die gewaltige Arbeit, die GAUSS bei der Berechnung der Störungen der Pallas geleistet hat, erst bei der Veröffentlichung des VII. Bandes seiner Werke im Jahre 1906 der astronomischen Welt zugänglich gemacht werden können. Trotz sorgfältiger Durchsicht und Bearbeitung des Nachlasses wird natürlich nicht erwartet werden können, dass die ganze Fülle von Gedanken und Kunstgriffen, die GAUSS hier zur Anwendung brachte, damit ans Tageslicht gezogen ist, umsomehr als ausser dem Text der im VII. Band, S. 439 f. abgedruckten *Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires* der gesamte auf Pallas bezügliche Nachlass fast nur aus einer nahezu unüberschbaren Zahl von Blättern mit Rechnungen, ohne jeden erläuternden Text besteht. Die eigentliche Berechnung der Störungen, die bis auf einen kleinen Rest der Marsstörungen von GAUSS ganz durchgeführt worden ist, hat sich zwar vollständig aufklären und veröffentlichen lassen, aber über die tiefer liegenden Überlegungen von GAUSS und über die Gründe, warum er seine Entwicklungen überall gerade in der vorliegenden Art und Weise gemacht hat, sowie über andere Einzelheiten lassen sich mit Sicherheit keine Schlüsse ziehen. Daher kann man, wie auf vielen auf anderen Gebieten, so auch hier, nur an der Hand des Nachlasses, nicht aber aus den gedruckten Abhandlungen allein ein Bild von der Entwicklung der GAUSSschen Arbeiten gewinnen. Was man darüber vermuten kann, wird weiter unten bei der eingehenden Besprechung dieser Arbeiten gesagt werden.

Der Beginn der Periode von GAUSS' eingehendster Beschäftigung mit astronomischen Untersuchungen wird durch die Entdeckung des Planeten Ceres im Jahre 1801 eingeleitet. Doch hatte er sich schon vorher vielfach mit kleineren oder grösseren astronomischen Problemen beschäftigt; über seine frühzeitig angestellten astronomischen Beobachtungen ist im ersten Abschnitt dieses Aufsatzes *Praktische und sphärische Astronomie* berichtet worden.

In der *Scheda Aa* vom Jahre 1798, die mit der *Scheda prima de curva lemniscata* beginnt, steht auf S. 16 die Überschrift *Scheda secunda de motu cometarum*. Darauf folgen aber die Differentialgleichungen des Zweikörperproblems mit Bezeichnungen, die sich auf die Erde beziehen und aus denen GAUSS das Flächenintegral und einige weitere Beziehungen ableitet, ohne auf die Theorie der Kometenbahnen einzugehen. Da er aber in der *Tagebuchnotiz* Nr. 94 vom Juli 1798¹⁾ sagt »Cometarum theoriam perfectionem reddidi«, so mag er in dieser Zeit einige weitergehende Entwicklungen über die parabolische Bewegung gemacht haben, die er dann nicht weiter ausgebaut hat und über die keine Aufzeichnungen erhalten sind. In der *Scheda Ac* sehen wir ihn Ende 1799 oder Anfang 1800 mit dem Studium der oben genannten OLBERSSCHEN Abhandlung über die Bahnbestimmung der Kometen beschäftigt, und in der *Scheda Ae* vom Sommer 1800 findet man mehrere ganz vereinzelte Notizen, die darauf hinweisen, dass er sich schon zu jener Zeit mit dem Studium einzelner Werke der theoretischen Astronomie, im besonderen auch der Mechanik des Himmels beschäftigt hatte. Während seiner Studienzeit in Göttingen 1795—1798 hatte er nach Ausweis der Verzeichnisse der Göttinger Universitätsbibliothek von dieser ausser den bereits oben S. 8 angegebenen, noch folgende astronomische Werke entliehen: CLAIRAUT, *Théorie de la Lune*; LAGRANGE, *Mécanique analytique*; NEWTON, *Opera omnia*²⁾.

1. Theorie des Mondes.

Die erste grössere Arbeit auf astronomischem Gebiete, die GAUSS unternommen hat, ist die Bearbeitung der Theorie des Mondes, die sich im Nachlass auf zusammengehefteten Blättern befindet, in den Werken Band VII, 1906, S. 613 f. abgedruckt ist und nach der *Tagebuchnotiz* Nr. 120³⁾ (»Theoriam motus Lunae aggressi sumus«) aus dem August 1801 stammt.

Bis zum Jahre 1788 waren zur Berechnung der Ephemeriden des *Nautical Almanac* die MAYERSCHEN Mondtafeln⁴⁾ im Gebrauch. Indessen war MASON

1) Werke X, 1, S. 536.

2) Die *Principia* NEWTONS hatte GAUSS schon 1794 erworben.

3) Werke X, 1, S. 562.

4) *Tabulae motuum Solis et Lunae novae et correctae*, London 1770. — T. MAYER hatte zuerst seine *Novae tabulae motuum Solis et Lunae* in den *Comm. Soc. scient. Gott.*, Göttingen, 1752 veröffentlicht, diese

vom Board of Longitude beauftragt worden, sie weiter zu verbessern, und seit 1789 traten daher die MASONschen Tafeln¹⁾ an die Stelle der ursprünglichen MAYERSchen. Da sich bald das Bedürfnis einer weiteren Verbesserung der Tafeln fühlbar machte, so stellte die Pariser Akademie im Jahre 1798 die Preisaufgabe²⁾:

»Aus einer grossen Anzahl der besten, zuverlässigsten alten und neuen Mondbeobachtungen, wenigstens 500 an der Zahl, die Epochen der mittleren Länge des Apogäums und des aufsteigenden Knotens der Mondbahn zu bestimmen.«

BÜRG bearbeitete³⁾ diese Aufgabe, indem er mehr als 3000 Beobachtungen benutzte, die er mit den MAYERSchen Mondtafeln verglich, und indem er auch sonst über den Rahmen der gestellten Preisaufgabe hinausging. Er erhielt, ebenso wie BOUVARD, der auch eine Abhandlung eingereicht hatte, den Preis im Jahre 1800. BÜRG setzte seine Untersuchungen über die Mondbewegung fort, und auch LAPLACE begann um diese Zeit, seine Mondtheorie zu schaffen. Im Jahre 1800 setzte das Pariser Bureau des Longitudes einen neuen Preis⁴⁾ aus für die Erfüllung folgender Bedingungen:

»1) Aus der Vergleichung einer grossen Anzahl guter Beobachtungen den Wert der Koeffizienten der Mondgleichheiten auf das genaueste zu bestimmen und für die Länge, für die Breite und für die Parallaxe dieses Gestirns genauere und vollständigere Formeln zu geben als diejenigen sind, auf welchen die bisher gebrauchten Mondtafeln beruhen.

2) Aus diesen Formeln Mondtafeln mit einer hinlänglichen Bequemlichkeit und Sicherheit für die Berechnung zu entwerfen.«

Die Erteilung des Preises war an keinen Zeitpunkt gebunden.

sodann weiter verbessert und die verbesserten Tafeln 1755 zum Wettbewerb um den für die Längenbestimmung vom Board of Longitude ausgesetzten Preis nach London geschickt. Die Entscheidung über den Preis zog sich in die Länge; T. MAYER starb 1762 und seine Witwe sandte seine Handschriften, die eine weitere Verbesserung der Tafeln enthielten, ebenfalls nach London. Dort wurde seine *Theoria Lunae iuxta systema Newtonianum* 1767, und die eigentlichen Tafeln *Tabulae motuum Solis et Lunae novae et correctae* 1770 gedruckt. Die Witwe erhielt einen Teil des Preises. — Vergl. R. WOLF, *Geschichte der Astronomie*, München 1877, S. 497.

1) CHARLES MASON, *Tob. Mayers Lunar tables improved*, London 1787. — Vergl. auch LALANDE, *Astronomie II*, 3. Ausgabe, Paris 1792, S. 173.

2) *Monatl. Corr.* 1800, Mai, S. 541.

3) Ebenda, August, S. 165.

Vielleicht ist hierin der Anlass zu suchen, dass GAUSS die Bearbeitung der Mondtheorie in Angriff nahm. Er leitete als Fundamentalgleichungen die Differentialgleichungen des reziproken kurtierten Radiusvektors, der mittleren Länge (oder der Zeit) und der Tangente der Breite ab und benutzte die wahre Länge als unabhängige Veränderliche. Seine Fundamentalgleichungen sind also ähnlich denen von CLAIRAUT¹⁾, d'ALEMBERT²⁾ und den später von LAPLACE³⁾, PLANA⁴⁾ u. a. aufgestellten, nicht aber den EULERSchen⁵⁾.

Die Integration wird durch Annäherungen ausgeführt, bei denen die Entwicklungen nach Potenzen der Exzentrizität und der Tangente der Neigung fortschreiten. Die Integrationsdivisoren entwickelt GAUSS nach Potenzen des Verhältnisses der mittleren Bewegungen von Mond und Erde. Die Form, die die Resultate dadurch erhalten, stimmt also im wesentlichen mit denen der späteren PLANAschen Theorie⁴⁾ überein. Das Ergebnis der ersten Annäherung vergleicht GAUSS mit den Werten von TOBIAS MAYER. Indessen hat er die ganze Arbeit bald wieder aufgegeben und nur die Berechnung der Breitenstörungen durchgeführt; sie ist offenbar plötzlich abgebrochen worden, wofür sich die Erklärung aus der Einleitung zur *Theoria motus* und aus einem Briefe an SCHUMACHER vom 23. Januar 1842 ergibt, in dem es heisst: »Eben im Sommer 1801 hatte ich mir vorgesetzt, ähnliche Arbeit über den Mond auszuführen; aber kaum hatte ich die theoretischen Vorarbeiten angefangen (denn diese sind es, auf welche in der Vorrede meiner *Theoria motus Corporum Coelestium* angespielt wird), als das Bekanntwerden von PIAZZIS Ceresbeobachtungen mich in eine ganz andere Richtung zog.« Die in diesem Briefe erwähnte Stelle aus der Vorrede zur *Theoria motus* sehe man im Abdruck des *Tagebuchs* bei der Nr. 119, Werke X, 1, S. 561.

Über den Fortschritt der Untersuchungen von LAPLACE und BÜRG finden sich ausführliche Berichte in der *Monatl. Corr.* 1800—1802 und dies mag dazu beigetragen haben, dass GAUSS auch späterhin seine Arbeit anscheinend

1) CLAIRAUT, *Théorie de la Lune*, St. Petersburg 1762, 1765.

2) D'ALEMBERT, *Recherches sur différents points importants du système du monde*, Paris, I.—III. Band, 1754—1756.

3) LAPLACE, *Mécanique céleste*, Tome III, Livre VII, Paris 1802.

4) PLANA, *Théorie du mouvement de la Lune*, Turin 1832.

5) EULER, *Opuscula varii argumenti*, Berlin 1746; *Theoria motus Lunae exhibens omnes eius inaequalitates*, Petersburg 1753 und *Theoria motuum Lunae nova methodo pertractata*, Petersburg 1772.

nicht wieder zur Hand genommen hat. LAPLACES Ergebnisse erschienen 1802 im dritten Bande der *Mécanique céleste*; BÜRG erhielt 1803 den neuen Preis, während der Druck seiner Mondtafeln¹⁾ sich bis zum Jahre 1806 hinzog. Im Jahre 1803 hat GAUSS in der *Scheda* Am die Ergebnisse von LAPLACES Untersuchungen aus der *Mécanique céleste* (Band III) herausgeschrieben und einige Notizen dazu gemacht, die sich auf die Tafeln von MASON und auf die bis dahin bekannt gewordenen Ergebnisse von BÜRG'S Untersuchungen zu beziehen scheinen.

II. Bahnbestimmung aus drei oder vier Beobachtungen (im besonderen Theoria motus).

1. Die Entdeckung der Ceres.

Die von PIAZZI in Palermo am 1. Januar 1801 gemachte Entdeckung der Ceres wurde erst im Mai durch die deutschen Zeitungen bekannt und die ersten genaueren Nachrichten darüber gab das Juni-Heft der *Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde*, die v. ZACH, Oberstleutnant und Direktor der Sternwarte Seeberg bei Gotha, seit dem Jahre 1799 herausgab und die als Sammelpunkt wichtiger neuer geographischer und astronomischer Nachrichten diente. PIAZZI hatte am 24. Januar 1801 einen Brief an Professor BODE, Direktor der Berliner Sternwarte, und zu gleicher Zeit an ORIANI in Mailand und auch an LALANDE in Paris gerichtet, in dem er mitteilt, dass er einen sehr kleinen Kometen ohne Nebel und Schweif im Sternbilde des Stiers entdeckt habe²⁾. Im Februar berichtete LALANDE darüber zwar an v. ZACH, ohne aber den näheren Ort am Himmel anzugeben, sodass v. ZACH auf weitere Nachricht wartete. Die Briefe von PIAZZI an ORIANI und BODE gelangten erst im April an ihre Bestimmungsorte — der an BODE war 71 Tage unterwegs —, während PIAZZI das Objekt nur bis zum 11. Februar hatte verfolgen können. In seinen Briefen gab PIAZZI nur zwei beobachtete Örter vom 1. und 23. Januar an, roh auf ganze Minuten abgerundet, und bemerkte nur noch, dass vom 10. auf den 11. Januar die rückläufige Bewegung in die rechtläufige übergegangen sei; im übrigen fügte er in seinem Briefe an

¹⁾ J. T. BÜRG, *Tables de la Lune in den Tables astronomiques publiées par le Bureau des Longitudes de France*, Première Partie, à Paris, chez Courcier, 1806.

²⁾ Monatl. Corr. 1801, Juni, S. 604.

ORIANI hinzu, er habe die Vermutung, dass es sich um einen Planeten handle, während er in den Briefen an BODE und LALANDE nur von einem Kometen spricht.

Beide, BODE sowohl wie ORIANI, gaben die Nachricht sogleich an v. ZACH weiter, der dann in dem erwähnten Hefte der Monatlichen Correspondenz einen ausführlichen Artikel *Über einen zwischen Mars und Jupiter längst vermuteten, nun wahrscheinlich entdeckten neuen Hauptplaneten unseres Sonnensystems* brachte, während BODE die Entdeckung der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften mitteilte und für die Bekanntmachung in einigen Zeitungen sorgte.

v. ZACH hatte gerade im September 1800 bei Gelegenheit einer kleinen astronomischen Reise nach Celle, Bremen und Lilienthal, über die er in den Heften der Monatlichen Correspondenz der Jahre 1800 bis 1801 ein ausführliches *Tagebuch* veröffentlichte, mit fünf anderen Astronomen (SCHRÖDER, HARDING, OLBERS und wahrscheinlich v. ENDE und GILDEMEISTER), die sich in Lilienthal trafen, beschlossen, eine geschlossene Gesellschaft von 24 praktischen, in ganz Europa verbreiteten Astronomen zu gründen¹⁾, die sich das Aufsuchen des zwischen Mars und Jupiter vermuteten Planeten durch gleichzeitige Verbesserung der Sternverzeichnisse angelegen sein lassen sollten. Auch PIAZZI befand sich unter den 24 ausgewählten Astronomen, hatte aber die Einladung, an der Gesellschaft teilzunehmen, noch nicht erhalten²⁾. BODE sowohl wie ORIANI hielten daher gleich an der Auffassung fest, dass das neue Objekt ein Planet sei, der sich zwischen Mars und Jupiter bewegt, und auch v. ZACH trat natürlich dieser Auffassung bei, umso mehr als die oberflächliche Berechnung einer Kreisbahn darauf hindeutete. v. ZACH versuchte eine etwas schärfere Berechnung einer Kreisbahn, die ihm eine merkwürdige Ähnlichkeit mit der Bahn des Kometen von 1770 zu zeigen schien³⁾, so dass er sich fragte, ob beide Objekte nicht vielleicht identisch seien; gewisse Zweifel an der Natur des neuen Planeten bestanden also immer noch: PIAZZI spricht in einem späteren Briefe von ihm als von einem Kometen und auch die Pariser Astronomen scheinen der gleichen Ansicht gewesen zu sein und daher weniger Wert auf die Entdeckung gelegt zu haben⁴⁾.

¹⁾ Monatl. Corr. 1801, Juni, S. 602.

²⁾ Ebenda, S. 603.

³⁾ Ebenda, S. 614; es handelt sich um den Kometen 1770 I (Nr. 102 des GALLESchen Verzeichnisses); die halbe grosse Axe ist aber das einzige Element, das bei beiden Bahnen Ähnlichkeit zeigt.

⁴⁾ Monatl. Corr. 1801, Juli, S. 56—57.

BODE hatte inzwischen an PIAZZI mit der Bitte um genaue Mitteilung seiner Beobachtungen geschrieben, erhielt aber zunächst keine befriedigende Antwort. Es entspann sich ein eingehender Briefwechsel über PIAZZI'S Entdeckung zwischen BODE, v. ZACH, OLBERS, der die Nachricht aus der Zeitung erfahren hatte, und BURCKHARDT in Paris, wohin PIAZZI endlich in einem weiteren Brief an LALANDE, der in Paris am 31. Mai eintraf, seine Beobachtungen genauer mitgeteilt hatte, aber mit der Bitte, sie vorläufig nicht zu veröffentlichen; den deutschen Astronomen teilte sie BURCKHARDT unter der gleichen Bedingung mit. Auf Grund der genaueren Beobachtungen berechnete BURCKHARDT auch schon eine Ellipse; seine Versuche, die Beobachtungen durch eine Parabel darzustellen, scheiterten. Die entsprechenden Elemente sind im Juliheft der Monatlichen Correspondenz mitgeteilt, in der v. ZACH in allen Monatsheften *Fortgesetzte Nachrichten über einen . . . neuen Hauptplaneten* gab.

Die vollständigen Beobachtungen von PIAZZI vom 1. Januar bis 11. Februar 1801 wurden endlich im Septemberhefte der Monatl. Correspondenz veröffentlicht, nachdem sie PIAZZI mit einigen Verbesserungen an BODE, LALANDE und ORIANI geschickt hatte, und gelangten so auch in die Hände von GAUSS.

Im Oktoberheft der Monatl. Corr. sagt v. ZACH, dass gegen Mitte August bis Ende September 1801 nun von fast allen Astronomen Versuche gemacht wurden, den aus den Strahlen der Sonne wieder austretenden Planeten aufzufinden, aber ohne Erfolg; es herrschte auch allgemein in dieser Zeit schlechte Witterung. Die von BURCKHARDT berechnete elliptische Bahn war unsicher, nicht so sehr deswegen, weil das beobachtete Bahnstück ziemlich klein war, was damals von den Astronomen als die Hauptschwierigkeit¹⁾ empfunden wurde, sondern deswegen, weil er von einer willkürlichen Annahme über die Lage des Perihels ausging. Die Aufgabe, eine noch völlig unbekannte Planetenbahn aus den Beobachtungen zu bestimmen, war bisher nur beim Uranus aufgetreten, und hier konnte man zunächst eine Kreisbahn rechnen und sodann mit Hilfe entfernt liegender früherer Beobachtungen von FLAMSTEED 1690 und TOBIAS MAYER 1756, die BODE auffand, die Bahn genauer bestimmen. OLBERS, der ebenfalls mit wenig Aussicht auf Erfolg die Berechnung einer

¹⁾ Vergl. *Theoria motus*, Einleitung, Werke VII, S. 7.

elliptischen Bahn begonnen hatte, empfiehlt, der Vorausberechnung eine Kreisbahn zugrunde zu legen, deren Elemente er auch angibt; denn: »War der neue Planet vor dem 1. Januar durch sein Aphelium gegangen, so vermehrt sich seine heliozentrische Geschwindigkeit immer, und auch seine geozentrischen Längen müssen im August und September grösser sein, als nach der Kreis-Hypothese. Ist er aber im Februar durch sein Perihelium gegangen, so hat sich nachmals die heliozentrische Geschwindigkeit vermindert und seine geozentrischen Längen müssen im August und September kleiner sein, als nach der Kreis-Hypothese. Weil man nun nicht wissen kann, welcher von beiden Fällen eintritt, so ist es zur künftigen Aufsuchung des Gestirns sicherer, die aus der Kreis-Hypothese gefolgerten Örter zugrunde zu legen, die von den wahren nicht sehr abweichen können, und die unter beiden möglichen Fällen das Mittel halten«²⁾. OLBERS, wie auch BURCKHARDT nahmen fälschlich an, dass der Planet zur Zeit seiner Entdeckung nicht weit entweder vom Perihel oder vom Aphel gestanden, während GAUSS später zeigte, dass er sich nahezu zwischen beiden befunden habe³⁾.

PIAZZI verfasste eine kleine Schrift⁴⁾, in der er über die erste Entdeckung und die weiteren Beobachtungen eingehende Mitteilungen machte und auch, ausser einer von ihm selbst berechneten Kreisbahn, die ihm durch ORIANI zugesandt, von den anderen Astronomen berechneten Bahnen angibt. Der Schrift ist auch ein nochmals verbessertes Verzeichnis seiner Beobachtungen beigelegt. Im Novemberheft der Monatl. Corr. gibt v. ZACH einen ausführlichen Auszug aus dieser Schrift, »welche wahrscheinlich nicht so leicht und nicht so bald in den deutschen Buchhandel kommen dürfte«, und druckt auch die verbesserten Beobachtungen ab, die ausser kleineren Änderungen eine Verbesserung der Rektaszension des 11. Februar um 15" gegenüber den im Septemberheft abgedruckten Beobachtungen enthalten⁵⁾.

Mit Rücksicht auf OLBERS' erwähnten Vorschlag, die Vorausberechnung zur Wiederauffindung des Planeten auf eine Kreisbahn zu gründen, berechnete

¹⁾ Monatl. Corr. 1801, Oktober, S. 367.

²⁾ A. a. O., 1801, Dezember, S. 639, Werke VI, S. 201.

³⁾ *Risultati delle Osservazioni della nuova Stella scoperta il dì 1 Gennaio all' Osservatorio Reale di Palermo*, Palermo 1801.

⁴⁾ Vergl. oben S. 17.
XI 2 Abb. 3.

v. ZACH eine Ephemeride¹⁾ für November und Dezember, um »dadurch allen Astronomen und Liebhabern der Sternkunde, die sich mit der Aufsuchung des Gestirns beschäftigen wollen, einen kleinen Dienst zu erweisen.«

Inzwischen hatte sich GAUSS, der die *Monatl. Corr.* in Braunschweig erhielt²⁾, im Stillen an die Arbeit gemacht; das Interesse für den neuen Planeten veranlasste ihn, seine Mondtheorie und seine rein mathematischen Untersuchungen liegen zu lassen³⁾. In seinem *Tagebuch* finden sich aus dem Jahre 1801 die Notizen Nr. 119: »Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi; — Brunsv[igae, 1801]«, Sept. m[edio] und Nr. 121: »Formulas permultas novas in Astronomia Theorica utilisimas eruiimus. — 1801 Mense Octobr.«

Die ältesten im Nachlass (*Schedae* Ag, Ah, *Handbuch* Bb) vorhandenen Zeichnungen über die Ceres stammen erst aus dem Anfang des November und über GAUSS' Untersuchungen in den ersten Wochen lässt sich daher keine volle Klarheit gewinnen. Einen Niederschlag der in der *Tagebuchnotiz* Nr. 121 genannten »Formulae permultae« mag das Werke XI, 1, S. 221 ff. abgedruckte Stück aus dem *Handbuch* Bb (November 1801) geben.

Man sieht aber soviel, dass GAUSS sofort den Plan fasste, wirklich neue brauchbare Methoden zur Bahnbestimmung zu schaffen, und dass er dabei von dem Gedanken ausging, sich nicht auf Versuche nach der einen oder anderen Richtung und auf irgend welche hypothetischen Voraussetzungen zu beschränken, sondern systematisch eine Bahn zu finden, die sich so gut wie möglich an die Beobachtungen anschliesst: wenn die PIAZZISCHEN Beobachtungen auch nur 41 Tage umfassen, so muss es doch eine Ellipse geben, die sie am besten darstellt und die geeignet ist, die zur Wiederauffindung vorausberechneten Örter möglichst nahe anzugeben. Es galt also, eine Ellipse zu finden, die von allen willkürlichen Voraussetzungen frei war, und auf den ersten Seiten des oben genannten *Handbuchs* Bb vom November 1801 finden wir diese Aufgabe bereits vollständig gelöst, wenn auch in einer weniger vollkommenen Form, als in der *Theoria motus*.

1) *Monatl. Corr.* 1991, November, S. 578—581.

2) GAUSS' Exemplare der *Monatl. Corr.* aus den Jahren 1800—1813 befinden sich in der GAUSS-Bibliothek auf der Göttinger Sternwarte und enthalten manche handschriftliche Eintragungen von seiner Hand.

3) Vergl. den Abdruck des *Tagebuchs*, Werke X, 1, S. 561—563 und oben S. 149.

In einer kleinen Handschrift *Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Planeten angewandten Methoden* hat GAUSS seine ältesten Methoden zusammengestellt, und diese Handschrift hat er am 6. August 1802 an OLBERS geschickt¹⁾, von dem er sie im November 1805 zurückerhielt. Kurz nach dem Erscheinen der *Theoria motus* bekam sie v. LINDENAU, vermutlich bei einem Besuch bei GAUSS, zu Gesicht und veröffentlichte sie mit GAUSS' Zustimmung in der *Monatl. Corr.* im September 1809²⁾.

2. Einleitendes über GAUSS' Methoden der Bahnbestimmung.

Obwohl die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei gegebenen Beobachtungen eine fest umschriebene Aufgabe ist, so ist doch bekanntlich eine explizite Lösung nicht durchführbar, weil die beobachteten Örter und die zu bestimmenden Elemente der Bahn in sehr verwickelten Beziehungen zu einander stehen. Man ist auf die Lösung der Aufgabe durch Annäherungen angewiesen und daher ist die Aufstellung einer fast unbegrenzten Anzahl von Methoden möglich, die durch mehr oder minder durchgreifende Unterschiede gekennzeichnet sind.

Man wird erwarten, dass GAUSS das Gebiet, auf dem sich diese Methoden bewegen können, nach allen Richtungen hin durchforscht hat; man wird aber auch verstehen, dass er dies nicht sofort bei seinen ersten Bahnrechnungen hat durchführen können, da hier die numerische Bearbeitung des Einzelfalls drängte, damit die Bahn des neuen Planeten so bald als möglich mit ausreichender Genauigkeit zum Zweck der Wiederauffindung am Himmel bekannt wurde. So erklärt es sich, dass GAUSS' erste Bahnrechnungen zwar auf einem wichtigen neuen Grundgedanken beruhen, dem die Willkürlichkeit älterer Methoden nicht mehr anhaftet, dass sie aber in der einzelnen Durchführung noch nicht die Vervollkommnung und Verfeinerung zeigen, wie die Methoden der *Theoria motus*.

Dieser erste grundlegende Gedanke besteht in der Aufstellung einer Gleichung zwischen den Abständen des Planeten von der Sonne und von der Erde in der mittleren Beobachtung; es ist dies die im Folgenden mit 3) bezeich-

1) Vergl. die Briefe vom 6., 18. August, 11., 14., 21. September, 10. Oktober 1802, 29. Oktober, 2. November 1805 aus dem Briefwechsel zwischen GAUSS und OLBERS.

2) Werke VI, S. 148.

nete Gleichung. Sie steht auf den Werke XI, 1, S. 222, abgedruckten ersten Seiten des *Handbuchs Bb* als Gleichung I und findet sich wieder als Gleichung (7) des Artikels 6 in der soeben erwähnten *Summarischen Übersicht*¹⁾. GAUSS sagt dort von ihr: »Diese Formel . . . ist der wichtigste Teil der ganzen Methode und ihre erste Grundlage« und schreibt in dem die Sendung an OLBERS begleitenden Briefe vom 6. August 1802: »Der wesentlichste Punkt ist die Formel (7) im 6. Artikel, auf die ich vor beinahe einem Jahr auf einem ganz anderen Wege kam. Sie ist gewissermassen das Pendant zu der Ihrigen²⁾ und man könnte sagen, dass beide ein zweites Differential brauchen; die Ihrige braucht die Veränderung der geozentrischen Geschwindigkeit, um das Verhältnis der Abstände, die meinige braucht die Veränderung der Richtung, um die Abstände selbst zu finden. Dass es ausser der Ihrigen Formel noch eine ähnliche geben müsse, hatte ich vor fünf Jahren geahnt, da ich zum erstenmal Ihre Bestimmung der Kometenbahn las; ich äusserte damals etwas darüber gegen den sel. LICHTENBERG, der mich sehr aufmunterte, mich in die Untersuchung einzulassen, allein meine damaligen sehr eifrigen Beschäftigungen mit der höhern Arithmetik, sowie mit Untersuchungen aus einem andern Fache der Analyse³⁾, worüber ich Ihnen in Zukunft einmal schreibe, brachten mir den Gegenstand bald wieder aus dem Sinne. Als ich im vorigen Jahre ganz unvermutet auf die Formel geriet, sah ich sogleich, von welchem Werte sie zur Abkürzung der ersten Annäherungsversuche bei einer von Hypothesen unabhängig sein sollen⁴⁾ Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers sein müsse. Glücklicherweise erhielt ich um die Zeit gerade die PIAZZISCHEN Beobachtungen im Septemberheft der *Monatl. Corr.*, an denen ich mich sogleich eine Probe der Methode zu machen entschloss. Die Verschiedenheit meiner Resultate von den vorhergegangenen bestimmte mich, sie bekannt zu machen, und die

1) Werke VI, S. 158—159.

2) Nämlich der bekannten OLBERSSCHEN Beziehung zwischen den Abständen von der Erde im ersten und dritten Ort, Gleichung 6) auf S. 160. — BRDL.

3) Gemeint sind wohl die aus dem Jahre 1797 stammenden Untersuchungen über lemniskatische Funktionen; vergl. überhaupt die Nummern 50—82 des *Tagebuchs* Werke X, 1, S. 509—529, in denen über GAUSS' mathematische Untersuchungen während des Jahres 1797 berichtet wird. — BRDL.

4) Diese Worte bestätigen die oben ausgesprochene Vermutung, dass GAUSS sogleich daran dachte, eine von willkürlichen Voraussetzungen freie Methode der Bahnbestimmung zu finden. — BRDL.

fernere Rechnungen, worin ich dadurch verwickelt wurde, veranlassten die fernere Ausbildung der Methode.«

In dem Briefe an OLBERS vom 25. Mai 1802 sagt GAUSS, dass er auf seine Fundamentalformel auf bizarrem Wege gekommen sei. Vielleicht darf man hiernach vermuten, dass er zuerst die streng geltenden Gleichungen aufgestellt hat, die sich im *Handbuch Bb*¹⁾ neben den genähert geltenden finden.

Man wird wohl nicht fehlgehen in der Annahme, dass die Auffindung dieser Gleichung den Anlass zur *Tagebuchnotiz*²⁾ Nr. 119 »Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi, Brunsvigiae, 1801] Sept. m[edio]« gab, mit der auch die Zeitangabe im vorstehenden Briefe übereinstimmt.

OLBERS richtete, nachdem er die *Summarische Übersicht* gelesen, einige darauf bezügliche Fragen an GAUSS und bemerkt im Briefe vom 11. September 1802: »Übrigens wird Ihnen die grosse Analogie Ihrer Hauptgleichung (7) mit der LA PLACESCHEN (*Mechanik des Himmels*, übersetzt von BURCKHARDT, I. Teil, S. 279 oder *Mém. de l'Acad. Roy. de Paris* 1780, S. 31) bekannt sein«³⁾. GAUSS antwortet am 14. September: »Die LA PLACESCHE Formel, die ich vor vielen Jahren in seiner *Théorie du Mouvement Elliptique* gesehen hatte, war mir ganz aus dem Gedächtnisse gekommen, bis ich ganz vor kurzem die *Mécanique Céleste* erhielt. Mich dünkt, sie muss sich sehr leicht aus (7) herleiten lassen.«

In der *Theoria motus* finden wir die GAUSSSCHE Hauptgleichung nicht mehr in der gleichen Form; er ist hier noch einen Schritt weiter gegangen, indem er die von ihm mit P und Q bezeichneten Grössen einführt, von denen weiter unten gesprochen werden soll.

Auch sind die gesamten mehr auf Interpolation beruhenden ersten GAUSSSCHEN Rechnungsmethoden in der *Theoria motus* durch systematisch vorgehende ersetzt, die er erst in den Jahren 1805—1807 schuf; auf sie beziehen sich die *Tagebuchnotizen*⁴⁾ Nr. 125, 126, 127, 129. Darüber sagt GAUSS im Briefe an OLBERS vom 3. Februar 1806: »Ich habe in diesem Jahre fleissig an meiner Methode, die Planetenbahnen zu bestimmen, gearbeitet; obgleich bisher nicht

1) Werke XI, 1, S. 222.

2) Werke X, 1, S. 561.

3) LA PLACE, *Mécanique céleste*, Première Partie, Livre I, No. 31 (Band I, S. 207 der Originalausgabe von 1799).

4) Werke X, 1, S. 564—565.

so sehr an der Ausarbeitung, als an der grössern Vervollkommnung einzelner Teile derselben. Manches, glaube ich, ist mir gut gelungen und hat wenigstens eine von der vorigen ganz verschiedene Gestalt bekommen, und in der Vorrede zur *Theoria motus* selbst: »Methodi enim ab initio adhibitae identidem tot tantasque mutationes passae sunt, ut inter modum, quo olim orbita Cereris calculata est, institutionemque in hoc opere traditam vix ullum similitudinis vestigium remanserit¹⁾».

Indessen hat GAUSS gelegentlich den einen oder anderen Teil seiner älteren Methoden auch in der *Theoria motus* erwähnt²⁾.

Wie GAUSS auch in art. 2 der *Summarischen Übersicht* hervorhebt, stützt sich die erste Berechnung der völlig unbekanntes Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen auf die Lösung zweier verschiedener Aufgaben:

Erstens: auf irgend eine Weise eine genäherte Bahn zu finden.

Zweitens: diese Bahn so zu »verbessern«, dass sie den Beobachtungen so gut als möglich Genüge leistet.

Ist die Bahn schon auf irgend eine Weise genähert bekannt, so entfällt die erste Aufgabe.

Im besonderen gelangt man zur Lösung der ersten Aufgabe, indem man anstatt der beiden Angaben, die der mittlere beobachtete geozentrische Ort liefert, zwei andere benutzt³⁾; als solche stellt man sich am einfachsten die Abstände des Planeten von der Erde im ersten und dritten Ort vor. Das wichtigste ist also zunächst die Auffindung genäherter Werte dieser beiden Grössen und dies ist auf zwei wesentlich verschiedenen Wegen möglich, entweder durch eine reine Versuchsmethode, die im ersten Grunde auf Erraten beruht, oder durch systematisches Vorgehen.

Die reine Versuchsmethode besteht in irgend einer willkürlichen Annahme über die beiden Stücke, auf Grund deren man die Bahn berechnet und die Abweichung von den Beobachtungen feststellt; durch weitere Versuche kann man zu brauchbaren Näherungswerten der beiden Stücke und damit der Bahnelemente gelangen. Da aber die anzunehmende Hypothese sich auf zwei Stücke erstreckt, so werden die Versuche sich in der Regel als

1) Werke VII, 1906, S. 8–9.

2) Vergl. die Einleitung, Werke VII, 1906, S. 9.

3) Vergl. *Theoria motus*, art. 119.

praktisch undurchführbar erweisen; daher bemüht man sich, eine genäherte Beziehung zwischen beiden Stücken aufzufinden, die sich durch bekannte Grössen ausdrückt, so dass man nur eines willkürlich zu wählen braucht.

So leitet OLBERS in seiner Methode der Kometenbahnstimmung die genäherte Gleichung¹⁾

$$1) \quad \delta'' = M \delta$$

ab, wo

$$2) \quad M = \frac{\operatorname{tg} \beta' \sin(\alpha - L') - \operatorname{tg} \beta \sin(\alpha' - L')}{\operatorname{tg} \beta'' \sin(\alpha'' - L') - \operatorname{tg} \beta' \sin(\alpha' - L')} \cdot \frac{r' - r''}{r'' - r}$$

aus den Beobachtungen bekannt ist. Diese Formel beruht auf der genähert gültigen Voraussetzung, dass die Sehnen zwischen den beiden Orten des beobachteten Körpers und ebenso die zwischen den beiden Orten der Erde von den Radienvektoren der mittleren Beobachtung im Verhältnis der Zwischenzeiten geschnitten werden, und OLBERS leitet sie aus dieser Voraussetzung ab²⁾.

3. Übersicht über GAUSS' Methoden zur genäherten Bestimmung der Abstände von der Erde (δ und δ'') im ersten und dritten Ort.

Die OLBERSsche Gleichung finden wir auch in der mehrfach erwähnten Notiz des *Handbuchs Bb*; sie ist dort von GAUSS mit II bezeichnet³⁾.

Ebenso finden wir sie in der *Summarischen Übersicht* im 5. Artikel⁴⁾, wo sie aber nur beiläufig abgeleitet und nicht benutzt wird. Auch im *Handbuch Bb* benutzt GAUSS diese Gleichung nicht wie OLBERS, der einen willkürlichen Wert von δ annimmt, daraus δ'' berechnet und dann auf Grund dieser beiden hypothetischen Werte die Bahn bestimmt. GAUSS geht vielmehr bereits bei seinen ersten Bahnbestimmungen auf dem zweiten erwähnten systematischen Wege vor, indem er direkt aus den Beobachtungen genäherte Werte für δ

1) Es bedeuten: δ, δ'' die kurtierten Abstände von der Erde im ersten und dritten Ort.

$\alpha, \alpha', \alpha''$ die drei beobachteten geozentrischen Längen,

β, β', β'' die drei beobachteten geozentrischen Breiten,

t, t', t'' die drei Beobachtungszeiten,

L' die heliozentrische Länge der Erde im mittleren Ort.

2) WILHELM OLBERS, *Sein Leben und seine Werke*, herausgegeben von C. SCHILLING, I. Band, Berlin 1894, S. 30.

3) Werke XI, 1, S. 212.

4) Werke VI, S. 157.



und δ'' zu finden versucht, auf die er dann die Bahnbestimmung aufbaut. Und zwar findet er genäherte Werte für diese beiden Größen, indem er zunächst einen solchen für den kurtierten Abstand des Planeten δ' in der mittleren Beobachtung sucht.

Zu diesem Zwecke benutzt er eben seine genähert geltende Hauptgleichung¹⁾

$$3) \quad \frac{R'}{r'} \left(1 - \frac{R'^2}{r'^2}\right) = \frac{\text{tg } \beta \sin(\alpha'' - \alpha') - \text{tg } \beta' \sin(\alpha'' - \alpha) + \text{tg } \beta'' \sin(\alpha' - \alpha)}{\text{tg } \beta \sin(L' - \alpha'') - \text{tg } \beta' \sin(L' - \alpha)} \cdot \frac{2}{(M' - M)(M'' - M')}$$

Im *Handbuch Bb* stellt GAUSS neben diese die Beziehung zwischen δ' und r' , die sich unmittelbar aus dem Dreieck Sonne-Erde-Planet ergibt, nämlich

$$4) \quad \frac{r'}{\delta'} = \sqrt{1 + \text{tg}^2 \beta' + \frac{R'^2}{\delta'^2} - 2 \frac{R'}{\delta'} \cos(L' - \alpha')}$$

Aus beiden Gleichungen bestimmt er durch Versuche, die sehr schnell zum Ziele führen, δ' , während r' nicht weiter in Betracht kommt. Um hieraus genäherte Werte für δ und δ'' zu finden, geht er im *Handbuch Bb* von der Annahme aus, dass die Logarithmen der drei Abstände von der Erde sich proportional den Zwischenzeiten ändern, also von der Beziehung

$$\frac{\log \delta'' - \log \delta'}{t'' - t'} = \frac{\log \delta' - \log \delta}{t' - t},$$

aus der folgt

$$5) \quad \begin{aligned} \log \delta &= \log \delta' - \frac{t'' - t}{t'' - t'} \log \frac{\delta''}{\delta'} \\ \log \delta'' &= \log \delta' + \frac{t'' - t'}{t'' - t} \log \frac{\delta''}{\delta'} \end{aligned}$$

Da der Quotient $\frac{\delta''}{\delta'}$ aus der OLBERSschen Gleichung:

$$6) \quad \frac{\delta''}{\delta'} = \frac{\text{tg } \beta' \sin(L' - \alpha) - \text{tg } \beta \sin(L' - \alpha')}{\text{tg } \beta'' \sin(L' - \alpha'') - \text{tg } \beta' \sin(L' - \alpha')} \cdot \frac{t'' - t'}{t' - t}$$

bekannt ist, so lassen sich die Werte von δ und δ'' berechnen.

Dies ist das älteste GAUSSsche Verfahren, wie es uns in der Nachlassnotiz aus dem *Handbuch Bb* entgegentritt. In der *Summarischen Übersicht* hat er diese Methode bereits verfeinert, indem er anstelle der vorigen Gleichung

1) Es bedeuten: R' den Abstand der Erde von der Sonne in der mittleren Beobachtung, r' den Abstand des Planeten von der Sonne in der mittleren Beobachtung, M, M', M'' die mittleren Längen der Erde in den drei Beobachtungen.

Über die Ableitung der Gleichung siehe S. 162 f.

die beiden Gleichungen¹⁾

$$7) \quad \begin{aligned} \delta &= -\frac{f'}{f} \cdot \frac{\text{tg } \beta' \sin(L' - \alpha'') - \text{tg } \beta'' \sin(L' - \alpha')}{\text{tg } \beta \sin(L' - \alpha'') - \text{tg } \beta' \sin(L' - \alpha)} \delta' \\ \delta'' &= -\frac{f''}{f'} \cdot \frac{\text{tg } \beta \sin(L' - \alpha') - \text{tg } \beta' \sin(L' - \alpha)}{\text{tg } \beta \sin(L' - \alpha'') - \text{tg } \beta' \sin(L' - \alpha)} \delta' \end{aligned}$$

anwendet²⁾.

Er schreibt hier aber $\frac{g}{f} \cdot \frac{f'}{g'}$ für $-\frac{f'}{f}$ und $\frac{g''}{f''} \cdot \frac{f''}{g''}$ für $-\frac{f''}{f'}$ und nimmt $\frac{f}{g}, \frac{f'}{g'}, \frac{f''}{g''}$ gleich Eins, solange er keinen besseren Näherungswert für diese Verhältnisse hat. Auf eine Anfrage von OLBERS, warum er hier nicht gleich

$$f : f' : f'' = (t'' - t') : (t' - t) : (t' - t)$$

setzt, antwortet er im Briefe an diesen vom 21. September 1802:

„Den Koeffizienten $-\frac{f'}{f}$ würde ich unter die Form

$$-\frac{f'}{f+f'} \cdot \frac{f+f''}{f} = \frac{1}{1 - \frac{f'+f''}{f}} \cdot \frac{f+f''}{f}$$

setzen. Der erste Faktor lässt sich sehr nahe bestimmen³⁾ und den zweiten kann man für den Fall, wo die Zwischenzeiten gleich sind, ohne Bedenken $= \frac{t'' - t}{t' - t}$ setzen. Mir scheint, dass man so in diesem Fall der Wahrheit um eine Dimension näher komme, als wenn man gleich $-\frac{f'}{f} = \frac{t'' - t}{t' - t}$ setzte. Ich gestehe indess, dass ich bisher mich jener Korrektion noch nicht bedient, und mich auch ohne dieselbe ebenso gut befunden habe.“

Der Quotient der beiden Gleichungen ergibt übrigens die OLBERSsche Gleichung, wie GAUSS auch in der *Summarischen Übersicht* erwähnt.

In der *Theoria motus* finden wir, wie oben bereits gesagt, die Fundamentalgleichung 3) nicht mehr in der gleichen Form vor. GAUSS stellt hier nicht mehr die Anfangswerte der kurtierten Abstände δ und δ'' an die Spitze, sondern er führt als solche die von ihm mit P und Q bezeichneten Größen ein, für die er mit einer Hypothese über das Verhältnis vom Sektor zum

1) Werke VI, S. 156, Gleichungen (5) und (6).

2) Es bedeuten: f, f', f'' die Dreiecksflächen zwischen den Radienvektoren der zweiten und dritten, der ersten und dritten, der ersten und zweiten Beobachtung, g, g', g'' die entsprechenden Sektoren.

3) Es ist nämlich näherungsweise $\frac{f+f'+f''}{f'} = -\frac{1}{2t'^2} (M' - M)(M'' - M')$. — BRDL.

Dreieck, die mit der bei Aufstellung der Gleichungen 7) gebrauchten inhaltsgleich ist, die Näherungswerte

$$P = \frac{\theta''}{\theta}, \quad Q = \theta\theta''$$

ansetzt, deren Erklärung im folgenden (S. 163, Fussnote) gegeben wird. Aus P und Q findet GAUSS dann die beiden Grössen δ und δ'' , sodass man allerdings die Sache auch so auffassen kann, als ob er diese letzteren Werte seiner Bahnbestimmung zugrunde legt.

4. Ableitung von GAUSS' Hauptgleichung zur genäherten Bestimmung von δ' und Zusammenhang mit der *Theoria motus*.

Es treten uns hier also im ganzen drei Methoden der Bahnbestimmung, insbesondere der Bestimmung von δ und δ'' entgegen, die des *Handbuchs Bb*, die der *Summarischen Übersicht* und die vervollkommnete der *Theoria motus*.

Um den Zusammenhang der älteren Methoden mit denen der *Theoria motus* zu zeigen, mögen die Fundamentalgleichungen zur Bestimmung des Abstandes δ' von der Erde, auf denen einerseits die beiden älteren Methoden unmittelbar, andererseits die der *Theoria motus* mittelbar beruht, neben einander entwickelt werden. Wir benutzen dabei hier die Bezeichnungen der *Theoria motus* und schliessen uns auch in der Entwicklung an die letztere an; die Ableitung, die GAUSS in der *Summarischen Übersicht* gibt, erscheint verwickelter.

In der *Theoria motus*, art. 112, leitet GAUSS die bekannten Gleichungen¹⁾:

$$\begin{aligned} 8) \quad & 0 = nx - n'x' + n''x'' \\ & 0 = ny - n'y' + n''y'' \\ & 0 = nz - n'z' + n''z'' \end{aligned}$$

ab; ihre Ableitung finden wir auch in der *Summarischen Übersicht*, art. 4, je-

1) Es bedeuten: x, y, z usw. die heliozentrischen Koordinaten des Planeten in den drei Örtern, n, n', n'' die doppelten Dreiecksflächen zwischen den Radienvektoren des zweiten und dritten, des ersten und dritten, des ersten und zweiten Ortes,

X, Y, Z usw., N, N', N'' die entsprechenden Grössen für die Erde,

D, D', D'' die kurtierten Abstände der Erde vor der Sonne,

L, L', L'' die heliozentrischen Längen der Erde,

B, B', B'' die heliozentrischen Breiten der Erde.

doch an dieser Stelle auch die entsprechenden Gleichungen für die Erde:

$$\begin{aligned} 9) \quad & 0 = NX - N'X' + N''X'' \\ & 0 = NY - N'Y' + N''Y'' \\ & 0 = NZ - N'Z' + N''Z'', \end{aligned}$$

die in der *Theoria motus* nicht angewendet werden; hierin liegt der wesentliche Unterschied beider Methoden.

Setzt man in den Gleichungen 8) die Werte

$$\begin{aligned} 10) \quad & x = \delta \cos \alpha + D \cos L \\ & y = \delta \sin \alpha + D \sin L \\ & z = \delta \operatorname{tg} \beta + D \operatorname{tg} B \end{aligned}$$

und entsprechend die von $x', y', z', x'', y'', z''$ ein, so folgen die Gleichungen (1)–(3) des art. 112 der *Theoria motus*:

$$\begin{aligned} 11) \quad & 0 = n(\delta \cos \alpha + D \cos L) - n'(\delta' \cos \alpha' + D' \cos L') + n''(\delta'' \cos \alpha'' + D'' \cos L'') \\ & 0 = n(\delta \sin \alpha + D \sin L) - n'(\delta' \sin \alpha' + D' \sin L') + n''(\delta'' \sin \alpha'' + D'' \sin L'') \\ & 0 = n(\delta \operatorname{tg} \beta + D \operatorname{tg} B) - n'(\delta' \operatorname{tg} \beta' + D' \operatorname{tg} B') + n''(\delta'' \operatorname{tg} \beta'' + D'' \operatorname{tg} B''). \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen δ und δ'' , indem man der Reihe nach mit

$$-\operatorname{tg} \beta \sin \alpha'' + \operatorname{tg} \beta'' \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \beta \cos \alpha'' - \operatorname{tg} \beta'' \cos \alpha, \quad \sin(\alpha'' - \alpha)$$

multipliziert und addiert, so wird:

$$12) \quad a\delta' = b + \frac{n}{n'}c + \frac{n''}{n'}d,$$

wo

$$\begin{aligned} 13) \quad & a = \operatorname{tg} \beta \sin(\alpha'' - \alpha) + \operatorname{tg} \beta' \sin(\alpha - \alpha'') + \operatorname{tg} \beta'' \sin(\alpha' - \alpha) \\ & b = D' \{ \operatorname{tg} \beta \sin(L' - \alpha'') - \operatorname{tg} \beta'' \sin(L' - \alpha) + \operatorname{tg} B' \sin(\alpha'' - \alpha) \} \\ & c = -D \{ \operatorname{tg} \beta \sin(L - \alpha'') - \operatorname{tg} \beta'' \sin(L - \alpha) + \operatorname{tg} B \sin(\alpha'' - \alpha) \} \\ & d = -D'' \{ \operatorname{tg} \beta \sin(L'' - \alpha'') - \operatorname{tg} \beta'' \sin(L'' - \alpha) + \operatorname{tg} B'' \sin(\alpha'' - \alpha) \} \end{aligned}$$

bekannt sind.

Diese in art. 132 der *Theoria motus* abgeleitete Gleichung 12) ist die strenge Bestimmungsgleichung für δ' , in der die noch unbekannt Grössen n, n', n'' zur ersten Bestimmung durch genäherte Werte ersetzt werden. GAUSS zeigt¹⁾, dass man bis auf Grössen 4. Ordnung richtig schreiben kann²⁾

1) *Theoria motus*, art. 132–133.

2) Es bedeuten $\theta, \theta', \theta''$ die Zwischenzeiten zwischen der zweiten und dritten, der ersten und dritten, der ersten und zweiten Beobachtung, multipliziert mit der GAUSS'schen Konstante k .

$$14) \quad a\delta' = b + \frac{c\theta + d\theta''}{\theta'} \left(1 + \frac{\theta\theta''}{2r^2}\right),$$

weil die Beziehungen

$$\frac{cn + dn''}{n + n''} = \frac{c\theta + d\theta''}{\theta'}, \quad \frac{n + n''}{n'} = 1 + \frac{\theta\theta''}{2r^2}$$

bis auf Grössen 4. Ordnung richtig sind. Aus der Gleichung 14) lässt sich nun durch Heranziehung der ähnlichen Gleichung für die Erdbewegung die Fundamentalgleichung der *Summarischen Übersicht* und der Nachlassnotiz aus *Handbuch Bb* ableiten. Die Gleichungen 9) werden nämlich

$$15) \quad \begin{aligned} ND \cos L - N'D' \cos L' + N''D'' \cos L'' &= 0 \\ ND \sin L - N'D' \sin L' + N''D'' \sin L'' &= 0 \\ ND \operatorname{tg} B - N'D' \operatorname{tg} B' + N''D'' \operatorname{tg} B'' &= 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese mit denselben Grössen wie oben die Gleichungen 11) und addiert man, so erhält man ähnlich der Gleichung 12):

$$16) \quad b = -\frac{N}{N'}c - \frac{N''}{N'''}d.$$

Auch hier kann man genähert setzen

$$b = -\frac{c\theta + d\theta''}{\theta'} \left(1 + \frac{\theta\theta''}{2R^2}\right)$$

oder mit der gleichen Genauigkeit

$$\frac{c\theta + d\theta''}{\theta'} = -b \left(1 - \frac{\theta\theta''}{2R^2}\right),$$

und dieser Wert in 14) eingesetzt, gibt wieder bis zur 4. Ordnung genau

$$17) \quad a\delta' = -b \frac{\theta\theta''}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)$$

oder

$$\frac{R}{\theta'} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{2R^2}{\theta\theta''};$$

diese Gleichung endlich geht in die Fundamentalgleichung 3) über, wenn man die Breite der Erde vernachlässigt, also

$$B' = 0, \quad R' = D'$$

setzt und bedenkt, dass

$$M' - M = \frac{k}{R'^3} (t' - t) = \frac{\theta''}{R'^3}$$

$$M'' - M' = \frac{k}{R''^3} (t'' - t') = \frac{\theta}{R''^3}$$

genommen werden kann.

5. Methode der *Theoria motus* zur genäherten Bestimmung des Abstandes δ' im mittleren Ort.

Wie schon erwähnt, stellt GAUSS in seinen älteren Methoden neben die Hauptgleichung 3) die Beziehung 4) und bestimmt δ' aus beiden durch Versuche oder wie er es nennt, durch die indirekte Methode. Er sagt in art. 6 der *Summarischen Übersicht* »Die indirekte Methode ist hier bei weitem die bequemste; man kommt nach wenigen Versuchen, wofür sich leicht zweckmässige Vorschriften geben lassen, sehr schnell zum Ziele.«

In der *Theoria motus* hat er aber diese indirekte Methode verlassen. Dort handeln die art. 139–141 von der Bestimmung von δ' , oder vielmehr von der von r' , da hier die Abstände von der Sonne anstelle derer von der Erde benutzt werden, und zwar finden wir hier eine geometrische Lösung der Aufgabe, bei der der Zusammenhang mit der ursprünglichen Hauptgleichung 3) und selbst der mit der in der *Theoria motus* auftretenden entsprechenden Gleichung 14) nicht mehr zu erkennen ist. Darum haben bereits ENCKE¹⁾ und KLINKERFUES²⁾ eine von der GAUSS'schen abweichende Ableitung gegeben.

Wir wollen, um den Zusammenhang zu zeigen, die Gleichungen der *Theoria motus* art. 141 möglichst kurz aus der Hauptgleichung und zwar in ihrer strengen Form 12) ableiten. Diese erstere lautet mit den GAUSS'schen Bezeichnungen P und Q ³⁾

$$18) \quad a\delta' = b + \frac{c + dP}{1 + P} \left(1 + \frac{Q}{2r^2}\right),$$

wo

$$19) \quad P = \frac{n''}{n}, \quad Q = 2 \left(\frac{n + n''}{n'} - 1\right) r^3.$$

1) *Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen*, art. 9–10. Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1854.

2) KLINKERFUES, *Theoretische Astronomie*, 48. Vorlesung, Braunschweig 1871, zweite Auflage, herausgegeben von H. BUCHHOLZ, Braunschweig 1899.

3) *Theoria motus*, art. 134.

Nennt man im Dreieck Sonne-Erde-Planet, dessen drei Seiten R' , r' , Δ' sind, den Winkel am Planeten z und den aus der Beobachtung bekannten Winkel an der Erde $180^\circ - \lambda$, so ist

$$\Delta' = \delta' \cos \beta' = \frac{R' \sin(\lambda - z)}{\sin z}, \quad r' = \frac{R' \sin \lambda}{\sin z}.$$

Es wird also die Hauptgleichung

$$\frac{aR'}{\cos \beta'} \sin(\lambda - z) = \left(b + \frac{c + dP}{1 + P}\right) \sin z + \frac{c + dP}{1 + P} \frac{Q \sin^4 z}{2R'^2 \sin^2 \lambda}$$

oder

$$\frac{aR'}{\cos \beta'} \sin \lambda \cos z - \left(b + \frac{aR'}{\cos \beta'} \cos \lambda\right) \sin z = \frac{c + dP}{1 + P} \left(\sin z + \frac{Q \sin^4 z}{2R'^2 \sin^2 \lambda}\right).$$

Setzt man

$$-\frac{aR'}{\cos \beta'} \sin \lambda = g \sin \sigma, \quad -\left(b + \frac{aR'}{\cos \beta'} \cos \lambda\right) = g \cos \sigma,$$

so wird

$$g \cdot \frac{1 + P}{c + dP} \sin(z - \sigma) = \sin z + \frac{Q \sin^4 z}{2R'^2 \sin^2 \lambda},$$

welche Gleichung mit der des art. 141 der *Theoria motus*

$$\sin z + \frac{Q \sin^4 z}{2R'^2 \sin^2 \lambda} = b \frac{P+1}{P+a} \sin(z - \sigma)$$

identisch ist, wo aber die mit a, b bezeichneten Grössen nicht gleich den oben und im art. 132 der *Theoria motus* ebenso bezeichneten sind. Gauss hat die vorstehende Gleichung im Jahre 1806 aufgestellt; sie findet sich nämlich im *Handbuch* Bd. S. 92. Durch Einführung des Winkels σ verschwinden die beiden Grössen δ' und r' aus der Hauptgleichung und die Aufgabe reduziert sich auf die Bestimmung dieses Winkels, zu welchem Zweck Gauss im art. 141 der Gleichung noch die bequemere Form

$$20) \quad cQ \sin \omega \sin^4 z = \sin(z - \omega - \sigma)$$

gibt, wo

$$c = \frac{1}{2R'^2 \sin^2 \lambda \sin \sigma} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \sigma}{b \frac{P+1}{P+a} - \cos \sigma}$$

gesetzt ist. In der Gleichung 20) ist z allein unbekannt, wenn man von den im Verlauf der Annäherungen zu bestimmenden Grössen P und Q absieht, von denen die erstere im Winkel ω vorkommt und für die Gauss in der

ersten Annäherung setzt:

$$P = \frac{\theta''}{\theta'}, \quad Q = \theta\theta''.$$

Es ergibt sich sodann r' aus der Gleichung

$$21) \quad r' = \frac{R' \sin \lambda}{\sin z}.$$

6. Bestimmung von δ und δ'' aus δ' bezw. von r und r'' aus r' .

Nachdem r' bezw. δ' gefunden sind, hat man jetzt r und r'' bezw. δ und δ'' zu berechnen. In der ältesten Nachlassnotiz bedient sich Gauss der Beziehungen 5) und der OLBERSSCHEN Gleichung 6), um δ und δ'' aus δ' zu finden, in der *Summarischen Übersicht* der schon verfeinerten Gleichungen 7). In der *Theoria motus*, wo die r statt der δ angewandt sind, erscheint das weiter verbesserte Verfahren verwickelter: Gauss berechnet hier zunächst die Ausdrücke (art. 143—144)

$$22) \quad \frac{n'r'}{n} = \frac{(P+a)R' \sin z'}{b \sin(z-\sigma)}, \quad \frac{n'r''}{n''} = \frac{1}{P} \frac{n'r'}{n},$$

$$r \sin \zeta = \frac{n'r'}{n} \frac{\sin \epsilon}{\sin \epsilon'} \sin(z + A'D - \delta') = p$$

$$r \cos \zeta = x(\lambda p - 1) = q$$

$$23) \quad r'' \sin \zeta'' = \frac{n'r''}{n''} \frac{\sin \epsilon''}{\sin \epsilon'''} \sin(z + A'D'' - \delta'') = p''$$

$$r'' \cos \zeta'' = x''(\lambda'' p'' - 1) = q'',$$

wobei die Grössen $\epsilon, \epsilon', \epsilon'', A'D, A'D'', \delta'$ aus der vorhergehenden Rechnung¹⁾ bekannt sind und auch $x, x'', \lambda, \lambda''$ sich durch bekannte Grössen ausdrücken.

Er findet so neben r und r'' noch die beiden Winkel ζ und ζ'' , die mit Hilfe der Beziehungen²⁾

1) *Theoria motus*, art. 136—137.

2) Es bedeutet hier $f' = \frac{\theta'' - \theta}{2}$ die halbe Differenz der Anomalien (oder Längen in der Bahn) im ersten und dritten Ort.

Die Winkel ζ, ζ'', u, u'' sind Hilfswinkel, deren geometrische Bedeutung aus der Figur 4 und dem art. 149 der *Theoria motus* hervorgeht.

$$\begin{aligned}
 \sin f' \sin \frac{u'+u''}{2} &= \sin \frac{f'}{2} \sin \frac{\zeta'+\zeta''}{2} \\
 \sin f' \cos \frac{u'+u''}{2} &= \cos \frac{f'}{2} \sin \frac{\zeta'-\zeta''}{2} \\
 24) \quad \cos f' \sin \frac{u'-u''}{2} &= \sin \frac{f'}{2} \cos \frac{\zeta'+\zeta''}{2} \\
 \cos f' \cos \frac{u'-u''}{2} &= \cos \frac{f'}{2} \cos \frac{\zeta'-\zeta''}{2}
 \end{aligned}$$

auch gleich f' und die Winkel u, u'' liefern; f' dient zur Verbesserung der Werte von P und Q , während u und u'' erst später bei genauerer Bestimmung der Bahn gebraucht werden. Vorarbeiten hierzu finden sich im *Handbuch* Bd, S. 92.

7. Bestimmung einer genäherten Bahn aus hypothetischen Werten von δ und δ'' oder von i und Ω , nach den älteren Methoden.

Sind einmal ausser den beobachteten Örtern zwei Stücke, und zwar insbesondere zwei Abstände des Planeten von der Erde (oder der Sonne) genähert bekannt, so kann man daraus eine genäherte Bahn berechnen und die Lösung der zweiten Aufgabe, nämlich diese Bahn zu »verbessern«, entweder daran anschliessen oder auch unmittelbar damit vereinigen. Auch hier kann man zwei grundsätzlich verschiedene Wege einschlagen, indem man entweder eine reine Versuchsmethode gebraucht oder systematisch vorgeht.

Den ersteren Weg benutzt GAUSS stets bei seinen ersten Bahnbestimmungen, und zwar so, dass er eine genäherte Bahn nicht nur aus den gefundenen hypothetischen Werten der Abstände, sondern auch aus zwei weiteren benachbarten Wertepaaren berechnet und sodann diejenigen Werte interpoliert, die die Beobachtungen darstellen. Er geht also von drei angenommenen Wertepaaren, etwa: 1. δ, δ'' ; 2. $\delta + \epsilon, \delta''$; 3. $\delta, \delta'' + \epsilon''$ aus und berechnet aus allen dreien je eine Bahn. Die Vergleichung dieser Bahn mit den Beobachtungen gibt die Mittel an die Hand, um auf die richtigen Bahnelemente zu schliessen¹⁾. Die Einzelheiten des Verfahrens können dabei sehr verschieden gewählt werden und an verschiedenen Stellen gibt GAUSS hierfür verschiedene Methoden an.

1) Vergl. *Theoria motus*, art. 120—122.

Im *Handbuch* Bb, sowie in der *Summarischen Übersicht*, art. 9, unter I., erwähnt GAUSS zunächst seine »erste Verbesserungsmethode«, die eben darin besteht, dass man aus den drei Hypothesen für δ und δ'' drei Bahnen berechnet, die die beiden äusseren Beobachtungsorter scharf darstellen; sodann berechnet man aus den drei Elementensystemen die mittlere Beobachtung und schliesst aus den Abweichungen dieser durch Interpolation auf diejenigen Werte der Abstände, oder auf diejenigen Werte der Elemente, die auch diesen mittleren Ort so scharf wie möglich darstellen; im Bedarfsfalle wiederholt man das gleiche Verfahren, bis die erwünschte Genauigkeit erreicht ist.

Zur Bestimmung der Bahn aus den verschiedenen Hypothesen dienen die *Vorschriften zur Berechnung der Elemente, aus zweien geozentrischen Örtern, der Zwischenzeit, und den zugehörigen Abständen* in der Nachlassnotiz aus dem *Handbuch* Bb¹⁾. Wie in dieser ganzen Nachlassnotiz, so gibt GAUSS auch sonst eine Fülle von Formeln zur Lösung der vorgesetzten Aufgabe, aus denen der Rechner sich die herausuchen kann, die ihm am bequemsten scheinen. Wie oben schon gesagt, dürfte hiermit die *Tagebuchnotiz* Nr. 121 vom Oktober 1801 in Verbindung stehen. Leider ist aus jener Zeit im Nachlass nichts erhalten, was uns Aufschluss über die Entstehung dieser Formeln geben könnte; auch unter den vielen in den *Schedae* Ag und Ah vorhandenen numerischen Rechnungen findet sich keine, die von hypothetischen Werten der Abstände δ und δ'' ausgeht. Nur in der späteren *Scheda* Ai (1802) ist auf S. 14 und anscheinend auch S. 20f. ein Bruchstück einer solchen Rechnung für Ceres erhalten. Ebenso beruhen mehrere der Bahnbestimmungen für Pallas, von denen aber die allerersten im Nachlass ebenfalls nicht erhalten sind, auf dieser Methode (*Schedae* Ak zu Anfang und besonders Al).

Dagegen gehen die ältesten erhaltenen Rechnungen, die sich auf Ceres beziehen, und einige auf Pallas bezügliche, von hypothetischen Werten für die Neigung i und die Knotenlänge Ω aus²⁾. Vielleicht ist GAUSS hier noch von den alten früher bei den grossen Planeten üblichen Methoden beeinflusst, die bis auf KEPLER zurückgehen³⁾, und bei denen allerdings die Umlaufzeit

1) Werke XI, 1, S. 225.

2) Vergl. Ebenda, S. 232f. und 241f.

3) Vergl. F. TH. SCHUBERT, *Theoretische Astronomie*, St. Petersburg 1798, II. Teil, § 101; auch KEPLER, *De stella Martis*, Cap. XII.

bekannt war. Wenn nämlich die Beobachtungen während der Oppositionszeit nahe am Knoten liegen, so konnte man zunächst einen Näherungswert für die Knotenlänge finden, und hieraus nicht nur die Neigung, sondern auch die heliozentrischen Koordinaten und die Koordinaten in der Bahn. Die PLAZZISCHEN Beobachtungen der Ceres geben nun die geozentrische Breite am 1. Januar zu $-3^{\circ}7'$ und am 11. Februar zu $-0^{\circ}36'$, so dass in der That der Planet sich kurz vor seinem Durchgang durch den aufsteigenden Knoten befand, und die genannte Methode mit einer Hypothese über die Umlaufszeit sehr wohl zum Ziele führen konnte. Eine solche war sogleich gegeben, weil man in Ceres den zwischen Mars und Jupiter längst vermuteten Planeten sah. Andererseits liefert eine Beobachtung des Planeten in der Ekliptik ($\beta = 0$) zwei einfache Gleichungen für δ , r und die Länge. Es ist möglich, dass GAUSS diese beiden Wege vorgeschwebt haben, die er sehr bald durch seine »formulae permutatae« verfeinerte. Auch die GAUSSISCHE klassische Methode beginnt mit Näherungswerten der Grössen P und Q , aus denen i , Ω und die heliozentrischen Örter gefunden werden. In seinen numerischen Rechnungen löst GAUSS nun meist die Aufgabe so, dass er hypothetische Werte von i und Ω an die Spitze stellt, daraus als erstes Geschäft die Radienvektoren und die Längen in der Bahn für alle drei Beobachtungen berechnet, sodann die Bahn aus den beiden äusseren Örtern in der Bahn bestimmt und schliesslich aus den gefundenen Bahnelementen den mittleren Ort (ebenfalls in der Bahn) berechnet und seine Abweichung von der Beobachtung feststellt. Indem er dies für drei Hypothesen, etwa: 1. i , Ω ; 2. $i + \epsilon_1$, Ω ; 3. i , $\Omega + \epsilon_2$, ausführt, erhält er aus den genannten Abweichungen die nötigen Daten, um verbesserte Werte von i und Ω zu interpolieren, mit denen er dieselbe Rechnung wiederholt¹⁾.

Die von hypothetischen Werten von i und Ω ausgehende Methode nennt GAUSS sowohl in der Nachlassnotiz wie in der *Summarischen Übersicht* seine »Zweite Verbesserungsmethode«. Bei ihr ist die Aufgabe zu lösen: Aus zwei geozentrischen Örtern, der Neigung und der Länge des Knotens die Bahn zu berechnen, und zwar zerfällt diese Aufgabe in zwei Einzelaufgaben, Erstens: Aus einem geozentrischen Orte, der Neigung und

¹⁾ Siehe Werke XI, 1, S. 241 f.; vergl. auch ebendort S. 229.

der Länge des Knotens, die heliozentrische Länge in der Bahn und den Abstand von der Sonne zu finden, welche Aufgabe für jede der beiden äusseren Beobachtungen zu lösen ist, und Zweitens: Aus zwei heliozentrischen Längen in der Bahn und den zugehörigen Abständen von der Sonne die Bahnelemente zu finden.

Die Lösung der ersten Einzelaufgabe finden wir in der einfachsten Form im *Handbuch Bb*¹⁾. GAUSS hat sich aber mit ihr anscheinend vielfach beschäftigt. In der *Scheda Ag*, S. 5²⁾, ist sie mit Beispielen in derselben Weise gelöst wie an der eben erwähnten Stelle; weiter finden wir aber in der *Scheda Ag*, S. 56, und im *Handbuch Bb*, S. 15, eine weitere Ausführung derselben Aufgabe zum Zwecke, ihre Auflösung für logarithmisches Rechnen geschmeidiger zu gestalten, und endlich hat GAUSS diese letztere Lösung in der *Monat. Corr.*, Juni 1802³⁾ veröffentlicht.

Die zweite Einzelaufgabe bietet reizvollere Einzelheiten. Die Lösung kann auch nicht explizit erfolgen. Wenn die Bahnelemente noch völlig unbekannt sind, so geht GAUSS von einem Näherungswert des Parameters der Bahn p aus und der Kunstgriff, durch den er sich diesen Näherungswert verschafft, verdient besonders hervorgehoben zu werden. Er findet sich angedeutet im *Handbuch Bb*, ausführlicher dargestellt in der *Summarischen Übersicht*⁴⁾ und besteht im Grunde aus einer mechanischen Quadratur:

Der Sektor g' zwischen den beiden äusseren Beobachtungen ist, wenn man die Masse des Planeten vernachlässigt,

$$g' = \frac{k}{2} \sqrt{p} (t' - t),$$

wo k die GAUSSISCHE Konstante bedeutet. Nimmt man den Erdbahnhalmmesser als Einheit, also die mittlere Bewegung der Erde gleich k , so ist

$$g' = \frac{\sqrt{p}}{2} (U'' - U),$$

wenn U , U'' die mittleren Längen der Sonne sind; also wird

¹⁾ Werke XI, 1, S. 228.

²⁾ Ebenda, S. 232 f.

³⁾ Werke VI, S. 87.

⁴⁾ Ebenda, S. 161.

$$\sqrt{p} = \frac{2g'}{U'' - U'}.$$

Es ist aber, wenn v und v'' die wahren Längen im ersten und dritten Ort und w eine Integrationsvariable bedeutet,

$$2g' = \int_v^{v''} r^2 dw = \int_v^{v''} \varphi(w) dw,$$

wofür man nach der Formel von COTES genähert setzen kann

$$2g' = \frac{1}{2}(\varphi(v) + \varphi(v''))(v'' - v)$$

oder genauer

$$2g' = \left(\frac{1}{6}\varphi(v) + \frac{2}{3}\varphi\left(\frac{v+v''}{2}\right) + \frac{1}{6}\varphi(v'')\right)(v'' - v).$$

Es wird also für die erste rohe Annäherung

$$2g' = \frac{1}{2}(r^2 + r''^2)(v'' - v)$$

und damit

$$25) \quad \sqrt{p} = \frac{r^2 + r''^2}{2} \cdot \frac{v'' - v}{U'' - U'}$$

und genauer

$$2g' = \frac{r^2 + r''^2 + 4\Re}{6}(v'' - v),$$

wenn \Re der zur Länge $\frac{v+v''}{2}$ gehörende Radiusvektor des Planeten ist, also

$$26) \quad \sqrt{p} = \frac{r^2 + r''^2 + 4\Re}{6} \cdot \frac{v'' - v}{U'' - U'}.$$

Für \Re leitet man aus den Gleichungen

$$\frac{p}{r} - 1 = e \cos(v - \pi)$$

$$\frac{p}{r''} - 1 = e \cos(v'' - \pi)$$

$$\frac{p}{\Re} - 1 = e \cos\left(\frac{v+v''}{2} - \pi\right)$$

durch Elimination von e und π den Wert

$$27) \quad \frac{1}{\Re} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r''}\right)}{\cos\frac{v''-v}{2}} - \frac{2\sin^2\frac{v''-v}{4}}{p \cos\frac{v''-v}{2}}$$

ab. Nachdem man aus der Formel 25) p genähert gefunden, ergibt sich \Re und damit aus 26) auch ein genauere Wert von p .

Diese Bestimmungsmethode von p wendet GAUSS in einer Werke XI, 1, S. 243 abgedruckten numerischen Bahnbestimmung der Ceres an. Aus dem vorausgesetzten Werte von p ergibt sich dann leicht die ganze Bahn.

Auch in der *Theoria motus*, art. 86, erwähnt er diese Methode, ohne dass sie dort praktische Verwendung findet. Im Briefe an OLBERS vom 21. September 1802 schreibt GAUSS den Wert für den Parameter in einer noch bequemeren Form, die sich auch im Nachlass in der *Scheda Ag*, S. 3, vorfindet.

Anstatt die Bahnbestimmung mit einem vorausgesetzten Wert von p vorzunehmen, kann man auch von genäherten Werten der Exzentrizität oder der Perihellänge ausgehen, wie GAUSS im *Handbuch Bb*¹⁾ und in der *Summarischen Übersicht* zeigt²⁾; indessen ist dies nur zugänglich, wenn man diese Grössen schon genähert kennt.

Im *Handbuch Bb* gibt GAUSS noch eine *Dritte Verbesserungsmethode* an, die von hypothetischen Werten von i und Ω ausgeht, nebst einem Beispiel³⁾.

8. Verbesserung der Bahn nach den älteren Methoden.

Hat man jetzt durch Lösung beider Einzelaufgaben die genäherten Bahnen gefunden, die unter den für i und Ω oder δ und δ'' gemachten Hypothesen die beiden äusseren Beobachtungen scharf darstellen, so berechnet man, wie bereits erwähnt, aus den Bahnelementen den mittleren Ort und stellt seine Abweichung vom beobachteten fest. Hier benutzt nun GAUSS bei seinen im Nachlass erhaltenen Rechnungen zur Bahnbestimmung den mittleren heliozentrischen Ort, während er im *Handbuch Bb* den geozentrischen dafür empfiehlt; das erstere ist das bequemere.

Nachdem für die drei Hypothesen von i und Ω die entsprechenden Fehler des mittleren Orts gefunden sind, bestimmt GAUSS die wahren Werte dieser Grössen durch Interpolation; die numerische Ausführung erhellet aus einem Werke XI, 1, S. 248 abgedruckten Beispiel. Im Nachlass finden sich dar-

1) Werke XI, 1, S. 226.

2) Vergl. auch art. 80—81 der *Theoria motus*.

3) Werke XI, 1, S. 229.

über keine weiteren Aufzeichnungen; in der *Theoria motus* handeln die art. 120—122 davon.

Im art. 8 der *Summarischen Übersicht* führt GAUSS noch eine andere Verbesserungsmethode an, auf die er »erst bei Veranlassung der Pallas verfiel« und die er dort »mit dem glücklichsten Erfolge anwandte¹⁾. Sie besteht darin, dass man eine gefundene Bahn, die die äusseren Beobachtungen genau und die mittlere mit gewissen Fehlern darstellt, dadurch verbessert, dass man die ganze Rechnung von der Bestimmung von δ und δ'' an von neuem macht und dazu die äusseren Beobachtungen nach ihrem wahren Wert ansetzt, die mittlere jedoch so, dass man an ihr die gefundenen Fehler mit entgegengesetzten Vorzeichen anbringt.

9. Geschichtliches über GAUSS' Bahnbestimmungen.

Die älteren Rechnungen zur Bestimmung der Bahn der Ceres befinden sich, soweit sie erhalten sind, in den *Schedae* Ag und Ah und stammen aus dem November 1801; die allerersten aus dem Oktober und vielleicht schon aus dem September sind nicht erhalten. GAUSS hat die Elementensysteme, die er bei weiterer Verbesserung der Bahn fand, numeriert. Die Elementensysteme I—III sind nach den PIAZZISCHEN im Septemberheft 1801 der Monatl. Corr. veröffentlichten Beobachtungen berechnet; die Berechnung der als I bezeichneten Elemente²⁾ geschah nach der »Dritten Verbesserungsmethode«, von der er später in der *Theoria motus*, art. 82 (vergl. auch art. 126) sagt, dass sie »orbitae dimensiones eruendi magnam praecisionem nunquam admittit, nisi tria loca heliocentrica intervallis considerabilibus ab invicem distent«.

Dabei ist bemerkenswert, dass auch hier von einer Hypothese über i und Ω ausgegangen wird, ohne dass aus dem Nachlass ersichtlich ist, wie die Ausgangswerte ($\Omega = 81^{\circ} 27' 4,62$; $\log \operatorname{tg} i = 9,2621790$) erlangt worden sind³⁾. Auch ist auffallend, dass GAUSS keine runden Anfangswerte für sie annimmt, sondern z. B. in Ω die Sekunden zu $4,62$ ansetzt. Dass er sie bis auf Hundertel Sekunden überhaupt ansetzt, darf weniger verwundern, weil

1) Werke VI, S. 163.

2) Vergl. Werke XI, 1, S. 232 f.

3) Vergl. oben S. 169.

er ja eine möglichst scharfe Darstellung der PIAZZISCHEN Beobachtungen beabsichtigte, wenn auch diese Genauigkeit bei der ersten Bahnbestimmung und mit Rücksicht darauf überflüssig sein mag, dass die Beobachtungen selbst nicht entsprechend genau sind. Aber GAUSS liebte es bekanntlich, mit einer übertriebenen Anzahl von Stellen zu rechnen, auch da, wo nicht, wie hier, eine gewisse Begründung dafür gefunden werden kann⁴⁾. Wahrscheinlich aber ist die Ableitung der Elemente I nicht die erste Bahnbestimmung der Ceres, die GAUSS ausgeführt hat; jedenfalls sind die Rechnungen, die vor der *Scheda* Ag liegen, verloren gegangen⁵⁾, wie es ja auch gewiss mit der Entwicklung der Formeln aus dem September und dem Oktober der Fall ist, die wir in den Stücken Bb, Ag und an anderen Stellen des Nachlasses fertig zusammengestellt finden.

Der erhaltene Teil der Rechnung der Elemente I⁶⁾ bezieht sich nur auf die Bahnbestimmung aus der ersten Hypothese über i und Ω und schliesst mit der Berechnung der Zwischenzeiten zwischen den drei Beobachtungen; es findet sich dann nur noch die Bemerkung: »Durch Interpolation fand man sodann folgende Elemente, welche die beiden äusseren Beobachtungen genau, die mittlere mit $+1,84$ Fehler in der Länge und $-2,36$ in der Breite⁷⁾ darstellen«, worauf die ungeordnet angegebenen Werte der Elemente I folgen, ohne dass angegeben ist, wie diese Interpolation ausgeführt wurde.

Es scheint übrigens, dass die *Scheda* Ag ursprünglich aus losen Blättern bestand, die erst nach ihrer Benutzung geheftet wurden, so dass das Auftreten von Lücken erklärlich ist. Von der Berechnung der Elemente II ist kaum etwas erhalten.

Nachdem GAUSS auch diese abgeleitet und gesehen hatte, dass beide Elementensysteme I und II die PIAZZISCHEN Beobachtungen gut darstellten, sandte er beide an v. ZACH, wie aus einem im GAUSSARCHIV vorhandenen Brief v. ZACHS hervorgeht. Da dieser inzwischen die kleine Abhandlung von PIAZZI mit den verbesserten Beobachtungen erhalten hatte, so teilte er die letzteren sofort GAUSS mit, der aber schon mit der Berechnung seiner Elemente III fast fertig war. Diese, sowie die auf Grund der verbesserten PIAZZISCHEN Beobachtungen

1) Vergl. PH. MAENGENEN, *Gauss als Zahlenrechner*, Werke X, 2, Abh. 6.

2) GAUSS sagt in der Einleitung zur *Theoria motus* (Werke VII, 1906, S. 8), dass er die erste Bahnbestimmung der Ceres im Oktober 1801 gemacht habe.

3) Werke XI, 1, S. 232 f.

4) Werke VI, S. 200. — BREDL.

berechneten Elemente IV, teilte er nun auch v. ZACH mit und fügte eine Ephemeride bei, die vom 25. November bis 31. Dezember reichte. v. ZACH veröffentlichte die gesamten bisherigen Resultate von GAUSS im Dezemberheft 1801 der Monatl. Corr.¹⁾ Nachdem v. ZACH und viele andere die Ceres auch nach der GAUSSschen Ephemeride im Dezember bei meist ungünstigem Wetter vergebens gesucht hatten, konnte v. ZACH endlich im Februarheft 1802 von der glücklichen Wiederauffindung des Planeten berichten. Brieflich hatte er sie GAUSS am 17. Januar 1802 mitgeteilt. In der Nacht vom 31. Dezember auf den 1. Januar konnte v. ZACH nämlich feststellen, dass ein am 7. Dezember von ihm beobachteter verdächtiger Stern die Ceres war. Am 1. Januar fand auch OLBERS den Planeten auf; sein Ort stimmte sehr genau mit der GAUSSschen Ephemeride überein. GAUSS scheint von der Wiederauffindung der Ceres durch OLBERS zuerst aus den Zeitungen gehört zu haben und er richtete an diesen am 18. Januar einen Brief, um OLBERS' Beobachtungen zu erhalten; mit diesem Brief beginnt der Briefwechsel zwischen beiden Männern, aus dem man, ebenso wie aus den fortgesetzten Mitteilungen v. ZACHS über die Beobachtungen und Berechnungen der Ceres in der Monatl. Corr.²⁾ entnehmen kann, wie die darauf folgende Zeit nun für GAUSS fast gänzlich mit neuen Verbesserungen der Ceresbahn ausgefüllt war.

Nach der Wiederauffindung der Ceres, bis zu der GAUSS noch ein Elementensystem V berechnet hatte, machte er sich sogleich daran, die neuen ZACHschen Beobachtungen damit zu vergleichen und v. ZACH sagt in der Monatl. Corr. vom März 1802³⁾: »Als ich dem Dr. GAUSS die Nachricht von der glücklichen Auffindung der so sehlichst erwarteten Ceres, und meine drei ersten Beobachtungen derselben mitgeteilt hatte, so war das erste, was er nach Empfang derselben tat, dass er sie sogleich nach seinen oben angezeigten Elementen V berechnete. Er fand den Fehler bei der ersten Beobachtung vom 7. Dezember in AR $+24' 8''$; bei der zweiten vom 11. Januar $+30' 53''$; bei der dritten vom 16. Januar $+31' 53''$. Nach seinen (verbesserten) Elementen IV weichen sie nach einem Überschlage in folgender Ordnung ab: $+14\frac{1}{2}$ Minuten, $+19\frac{1}{2}$ Minuten, $+20\frac{1}{2}$ Minuten. Dass diese

1) Werke VI, S. 199.

2) Ebenda, von S. 199 an.

3) Ebenda, S. 206.

Elemente IV der Wahrheit etwas näher kommen, als die V, hält Dr. GAUSS für Zufall; vielleicht ist es aber auch zum Teil Folge der Einwirkung der Planetenstörungen bei den PIAZZischen Beobachtungen, besonders auf die Breiten.«

In der Folgezeit ist ein grosser Teil von GAUSS' Zeit durch Bahnverbesserung und Berechnungen, auch der inzwischen entdeckten Pallas (April 1802), der Juno (September 1804) und der Vesta (März 1807) in Anspruch genommen. Die erste Bahn für Vesta berechnete GAUSS in nur 10 Stunden¹⁾. Da er sich ausserdem wohl Sorgen um seine Zukunft machte, da ferner die Berufungen nach Petersburg (von 1802 an) und nach Landshut (1802), sowie die Aussicht auf die Berufung nach Göttingen in jene Zeit fielen, und da er sich auch längere Zeit auf der Sternwarte Seeberg (1803) aufhielt, so dauerte nicht nur die Unterbrechung seiner mathematischen Untersuchungen an, sondern auch die weitere Ausfeilung seiner Methoden zur Bahnbestimmung und die Vorbereitung der *Theoria motus* unterblieb, bis er diese endlich im Jahre 1806 wieder vornahm. Im Jahre 1805 hatte er begonnen, die Störungen der Ceres zu entwickeln; aber auch hier gab es viel zu rechnen, und dass er schliesslich selbst das Unbehagliche dieser dauernden mechanischen Beschäftigung empfand, zeigt ein Brief an OLBERS vom 10. Mai 1805 in dem er sagt: »Die Methode, nach der ich die Ceresstörungen zu berechnen angefangen hatte, habe ich doch wieder aufgegeben. Das gar zu viele mechanische tote Rechnen, was ich dabei vor mir sah, hat mich abgeschreckt.« Auch die Nr. 122 des *Tagebuchs*²⁾ gibt dem Ausdruck. In den Jahren 1806—1807 entstanden dann endlich die verfeinerten Methoden der *Theoria motus*.

10. Übersicht über die verschiedenen Methoden der Bahnbestimmung aus hypothetischen Werten von δ und δ'' oder von i und Ω .

Eine ausführlichere Schilderung der verschiedenen in Betracht kommenden Methoden der Bahnbestimmung gibt GAUSS in der *Theoria motus*, art. 124—129. Er bespricht dort zehn verschiedene Methoden, von denen die fünf ersten von hypothetischen Werten von δ , δ'' oder, was auf dasselbe hinaus-

1) Vergl. Werke VI, S. 285—286.

2) Werke XI, 1, S. 563.

kommt, von r, r'' und die fünf letzten in ähnlicher Weise von hypothetischen Werten für i und Ω ausgehen.

Bei der ersten Methode berechnet man aus δ und δ'' Radiusvektor, heliozentrische Länge und Breite im ersten und dritten Ort und hieraus i, Ω und die Längen in der Bahn v und v'' , wie in der Werke XI, 1, S. 223 abgedruckten Notiz [3.] aus dem *Handbuch Bb*; hieraus findet man die Elemente wie in der Notiz [4.] a. a. O., S. 224 und hieraus den mittleren geozentrischen Ort, wie in den Notizen [5.] und [6.] ebendort, S. 227 und 228. Die Vergleichung mit dem beobachteten mittleren Ort ergibt die beiden Daten (Fehler in Länge und Breite) für die Interpolation der verbesserten Ausgangswerte¹⁾.

Bei der zweiten Methode rechnet man bis zu den Elementen wie in der vorigen; sodann leitet man aber jetzt den heliozentrischen Ort für die mittlere Beobachtung ab; den letzteren rechnet man ausserdem aus dem beobachteten geozentrischen Ort und den für i und Ω gefundenen Werten. Die Vergleichung beider heliozentrischer Werte liefert die beiden Daten (Fehler in r und v) für die Interpolation.

Bei der dritten Methode rechnet man bis zur Bestimmung von i, Ω, v, v'' , wie bei der ersten, sodann aus i, Ω und dem mittleren beobachteten geozentrischen Ort die Grössen r' und v' ; hierauf aus den drei heliozentrischen Örtern, also aus r, r', r'', v, v', v'' die Elemente und aus den Elementen die beiden Zwischenzeiten zwischen dem ersten und zweiten und zwischen dem zweiten und dritten Ort; die Vergleichung zwischen diesen errechneten Zwischenzeiten und den wahren gibt hier die Daten zur Interpolation.

Die vierte Methode stimmt bis zur Auffindung von r, r', r'', v, v', v'' mit der dritten überein; hierauf rechnet man aber die Elemente einmal aus r, r', v, v' und zweitens aus r', r'', v', v'' . Für jedes Element erhält man so eine Differenz zwischen beiden Systemen. Als Daten für die Interpolation wählt man zwei dieser Elemente aus.

Die fünfte Methode endlich verfährt wie die vierte; jedoch führt man die Rechnung nicht bis zur Bestimmung der Elemente durch, sondern nur bis zu den Grössen η und η'' , die das Verhältnis zwischen Sektor und Dreieck ausdrücken²⁾ und benutzt deren Differenz zur Interpolation.

1) Siehe Werke XI, 1, S. 248.

2) Vergl. unten S. 180.

Die fünf übrigen Methoden unterscheiden sich von den vorigen nur dadurch, dass man von hypothetischen Werten von i und Ω ausgeht; bei der sechsten und siebenten Methode berechnet man aus i, Ω und den beiden äusseren beobachteten Örtern die Grössen r, r', v, v'' und verfährt dann weiter, wie bei der ersten und zweiten Methode.

Bei der achten bis zehnten Methode leitet man aus i, Ω und allen drei beobachteten Örtern die Grössen r, r', r'', v, v', v'' ab und verfährt dann weiter wie bei der dritten bis fünften. Für die siebente Methode gelten die Vorschriften der Notiz [7.] aus dem *Handbuch Bb* und für die achte die der Notiz [8.] ebendort³⁾.

11. Vervollkommnete Methode der *Theoria motus*.

Bei der Schilderung dieser Methoden hält GAUSS den Gesichtspunkt fest, dass man die ganze Rechnung für drei vorausgesetzte Wertepaare durchführt, und es finden sich Beispiele für die siebente Methode in der Notiz [III.] aus der *Scheda Ah*⁴⁾ und für die achte in der Notiz [II.] aus *Ag*⁵⁾. Es handelt sich hierbei um das oben (S. 158) als »reine Versuchsmethode« bezeichnete Verfahren.

Das Festhalten an dieser mag hier auffallen, da doch die vollkommene in der *Theoria motus* wirklich durchgeführte Methode anstelle der Interpolation aus drei Wertepaaren die Methode der sukzessiven Annäherung setzt⁶⁾, die so gleich besprochen werden soll.

Oben ist geschildert, wie GAUSS in der *Theoria motus* mit einem gewissen Anklang an seine ältesten Methoden sich einen Näherungswert für den Abstand r' des Himmelskörpers im mittleren Beobachtungsort verschafft⁷⁾. Dabei bilden hier die beiden Grössen P und Q den Ausgangspunkt der Annäherungen, ähnlich wie es früher δ und δ'' oder i und Ω gewesen waren, und in der ersten Annäherung ist

$$28) \quad P = \frac{\theta''}{\theta}, \quad Q = \theta\theta''.$$

1) Werke XI, 1, S. 228—229.

2) Werke XI, 1, S. 241.

3) Ebenda, S. 232.

4) Vergl. *Theoria motus*, art. 135.

5) Vergl. die Gleichungen 20) und 21).

Wenn man in voller Analogie mit den älteren Methoden der Rechnung hypothetische Werte von P und Q zugrunde legen würde, so würde man so vorgehen, dass man mit drei Hypothesen, etwa:

$$1. P_0 = \frac{\theta''}{\theta}, \quad Q_0 = \theta\theta''; \quad 2. P_1 = P_0 + \epsilon_1, \quad Q_1 = Q_0; \\ 3. P_2 = P_0, \quad Q_2 = Q_0 + \epsilon_2,$$

drei Bahnen berechnet, die die beiden äusseren Beobachtungen genau darstellen, und dann aus den Abweichungen der mittleren Beobachtung verbesserte Werte von P und Q interpoliert. Man sieht, dass der Nachteil der älteren Methoden darin liegt, dass man in allen drei Hypothesen die Rechnung bis zur Bestimmung der Elemente durchführen muss.

Die neue Methode der *Theoria motus* verlässt den Weg der versuchsweisen interpolatorischen Verbesserung der Ausgangswerte, indem sie erstens nur mit einer Hypothese P_0 und Q_0 rechnet und mit der hieraus gefundenen Bahn diese hypothetischen Werte unmittelbar verbessert, und indem sie zweitens auch bei der Berechnung dieser ersten genäherten Bahn nicht bis zur Bestimmung der Elemente durchgeführt zu werden braucht.

Die strengen Werte von P und Q (Gleichung 19) lassen sich schreiben¹⁾

$$29) \quad P = \frac{\theta'' \cdot \eta}{\theta \cdot \eta''}, \quad Q = \frac{r^3}{rr' \eta \eta'' \cos f \cos f' \cos f''} \theta \theta''$$

und das Näherungsverfahren besteht darin, auf möglichst kurzem Wege aus den genäherten Werten von P und Q die Grössen η , η'' , r , r' , r'' , f , f' , f'' zu finden, um die ersteren damit zu verbessern, bis alles stimmt. Erst wenn die schliesslichen Werte dieser Grössen gefunden sind, werden die Elemente berechnet. Aus den Gleichungen 24) und den vorhergehenden ist ersichtlich, wie r , r' , r'' und f'' gefunden werden; hier können auch gleich die Grössen θ und θ'' wegen Aberration verbessert werden. Es folgt dann die Bestimmung von f und f'' aus den Gleichungen des art. 144:

$$30) \quad \sin 2f' = r \sin 2f'' \frac{n}{n' r'} \\ \sin 2f'' = r'' \sin 2f' \frac{n''}{n' r''},$$

und es sind jetzt η und η'' zu bestimmen.

1) Es bedeuten: η und η'' das Verhältnis des Sektors zum Dreieck zwischen je zwei Orten, f , f'' die halbe Differenz der wahren Anomalien: $f = \frac{1}{2}(v'' - v')$, $f'' = \frac{1}{2}(v' - v)$.

Von der Bestimmung dieser Grössen handeln die art. 88—94 der *Theoria motus*. Den Gang der äusserlich recht verwickelten Rechnung kann man durch die folgenden Formeln deutlich machen¹⁾:

$$31) \quad m = \frac{\theta}{\sqrt{8 \cos^2 f \cdot (rr')^{\frac{3}{2}}}}, \quad 2l = \frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2 \cos f} - 1, \quad x = \sin^2 \frac{g}{2}$$

$$32) \quad \sqrt{l+x} + (l+x)^{\frac{3}{2}} \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} = m$$

$$33) \quad \eta = \frac{m}{\sqrt{l+x}}$$

Aus der Gleichung 32) ist g oder x zu bestimmen. GAUSS entwickelt hierzu die Grösse $X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$ in eine Potenzreihe nach x und verwandelt diese in einen Kettenbruch. Er setzt sodann

$$X = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}(x - \xi)}$$

und erhält auf elementarem Wege den ersten der beiden²⁾ für ξ angegebenen Kettenbrüche; vom zweiten sagt er, dass er seine Ableitung an anderer Stelle geben werde, da sie auf weniger elementaren Grundsätzen beruht. Dies ist in den *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \dots$, art. 14³⁾ geschehen, wo er die Beziehungen zwischen den functiones contiguae, und im besonderen die allgemeine Formel für die Kettenbruchentwicklung von

$$\frac{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$$

benutzt. Die Vorarbeiten hierzu finden sich, wie diejenigen zu diesem Kapitel der *Theoria motus* überhaupt, im *Handbuch* Bd (Oktober 1805) und sind teilweise Werke X, 1, S. 326 abgedruckt⁴⁾. GAUSS entwirft eine Hilfstafel, die ξ als Funktion von x gibt und durch deren Benutzung die Bestimmung von x und hieraus die von η sich sehr einfach gestaltet.

In derselben Weise wird g'' bzw. x'' und daraus η'' bestimmt und somit findet man nach 29) genauere Werte für P und Q , mit denen die Rechnung

1) $g = \frac{1}{2}(E'' - E')$ bedeutet die halbe Differenz der exzentrischen Anomalien im zweiten und dritten Ort; ebenso wird $g'' = \frac{1}{2}(E' - E'')$ gesetzt.

2) Werke VII, 1906, S. 117.

3) Werke III, S. 137.

4) Man vergleiche auch die Bemerkungen von SCHLESINGER ebendort S. 330.

(zweite Hypothese) wiederholt wird, bis man definitive Werte für η und η'' und für g und g'' hat; aus diesen ergeben sich (*Theoria motus*, art. 95, 96) die Elemente in einfacher Weise.

Im *Handbuch* Bb, S. 24–34 finden sich Vorarbeiten zu den art. 88–96, die nach der *Tagebuchnotiz*¹⁾ Nr. 125 »Methodum ex duobus locis heliocentricis corporis circa solem moventis eiusdem elementa determinandi novam perfectissimam deteximus« aus dem Januar 1806 zu stammen scheinen; ebenso im *Handbuch* Bd, S. 37–47, worauf sich vermutlich die *Tagebuchnotiz*¹⁾ Nr. 126: »Methodum e tribus planetae locis geocentricis eius orbitam determinandi ad summum perfectionis gradum eveximus«, vom Mai 1806, bezieht.

12. Besondere Fälle der Bahnbestimmung.

Die Bahnbestimmung eines Planeten aus den ersten nach der Entdeckung gemachten Beobachtungen kennzeichnet sich dadurch, dass der vom Planeten zurückgelegte Teil seiner Bahn und also die Winkel $2f$, $2f'$, $2f''$ zwischen den Radienvektoren klein sind.

Wenn einerseits naturgemäss eine Bahnbestimmung aus einem kleinen Bogen mit grösserer Unsicherheit behaftet ist, so führt andererseits in diesem Falle die GAUSSsche Methode sehr schnell zum Ziel, sodass in der Regel schon die zweite Hypothese über P und Q zu hinreichend genauen Elementen führt²⁾; sie ist aber auch brauchbar, wenn die Beobachtungen weiter auseinander liegen; nur wird man, falls die Konvergenz der Hypothesen zu wünschen übrig lässt, sobald man mit der dritten Hypothese für P und Q die Rechnung bis zur Bestimmung des vierten Wertepaares dieser Grössen durchgeführt hat, nicht mit diesem vierten Wertepaare weiterrechnen, sondern durch Interpolation aus den drei ersten Hypothesen einen besseren Näherungswert ansetzen³⁾, ähnlich wie bei den älteren Methoden. GAUSS hat von Anfang an Wert darauf gelegt, seinen Methoden allgemeine Gültigkeit zu geben und die *Theoria motus* enthält Beispiele, die die verschiedenen vorkommenden Fälle erleuchten. Er schreibt in einem in der *Monatl. Corr.*⁴⁾ abgedruckten

1) Werke X, 1, S. 564.

2) Vergl. die Rechenbeispiele, art. 156–157 der *Theoria motus*.

3) Vergl. das Beispiel art. 158–161 der *Theoria motus*.

4) Werke VI, S. 275.

Briefe an v. ZACH vom 8. Juli 1806: »Es ist mir übrigens überaus lieb, dass ich nicht schon 1802 meine Methode, wie ich die Ceres- und Pallasbahn berechnet hatte, bekannt gemacht habe, so viele Aufforderungen auch deshalb an mich gelangten. Denn seitdem habe ich noch immer an der Vervollkommnung der Methode selbst gearbeitet, besonders in dem vorigen Winter, und ihre jetzige Gestalt sieht ihrer ersten fast gar nicht mehr ähnlich. Um hiervon eine Probe zu geben, will ich nur eines Umstandes erwähnen. Da das Problem so sehr verwickelt ist, so ist es der Natur der Sache nach nicht anders möglich, als dass bei der allerersten Annäherung einige Voraussetzungen gemacht werden müssen, die nur näherungsweise richtig sind (wie z. B. bei Dr. OLBERS' Methode die ist, dass die Chorden bei der Erde und dem Kometen durch die mittleren radii vectores im Verhältnisse der Zwischenzeiten geschnitten werden). Voraussetzungen von dieser Art liegen also auch nach meiner Methode bei der ersten Annäherung zugrunde, und zwar solche, die desto weniger von der Wahrheit abweichen, je kleiner die Zwischenzeiten sind. Man darf also die Beobachtungen, auf die man die erste Annäherung gründet, nicht gar zu weit von einander entfernt annehmen, weil man sonst vermöge der näherungsweise wahren Voraussetzung bei der ersten Rechnung gar zu weit von der Wahrheit zurückbleiben, und daher zu viele und beschwerliche Wiederholungen der Verbesserungsmethoden machen müsste. Doch konnte ich, wie meine Methode 1802 war, bei der Pallas sogleich Beobachtungen anwenden, die 27 Tage auseinander waren; viel weiter hätte ich indes doch nicht gehen mögen. Dagegen ist jetzt meine Methode so beschaffen, dass ich neulich, als ich die mir von Ihnen gütigst mitgeteilten Beobachtungen ORIANIS von 1805 zu einem, für mein Werk bestimmten Exempel benutzen wollte, und also dieselben so behandeln musste, als wenn ich von der Pallasbahn noch gar nichts wüsste, sogleich und zwar mit dem allerglücklichsten Erfolge die äussersten, 71 Tage von einander entfernten Beobachtungen zugrunde legen konnte¹⁾, und es leidet gar keinen Zweifel, dass ich darin noch beträchtlich weiter hätte gehen können.«

Im art. 159 der *Theoria motus* gibt GAUSS ein Beispiel für die Bahnbestimmung der Ceres, bei dem die Beobachtungen 260 Tage auseinanderliegen.

Doch ist hierzu folgendes zu bemerken: In der Gleichung 12) sind $\frac{b}{a}$,

1) Vergl. *Theoria motus*, art. 156. — BRDL.

$\frac{c}{a}, \frac{d}{a}$ bei ersten Bahnbestimmungen mit kurzen Zwischenzeiten grosse Zahlen zweiter Ordnung, und zwar ist b positiv, c und d negativ. Andererseits setzt GAUSS die Grössen $\frac{\delta}{r^{3/2}}, \frac{\delta'}{r^{3/2}}$, deren Summe $\frac{\delta''}{r^{3/2}}$ und e als kleine Grössen erster Ordnung voraus.

Im Juno-Beispiel ist rund

$$\frac{b}{a} = 78,0, \quad \frac{c}{a} = -38,4, \quad \frac{d}{a} = -108,5, \quad e = 0,25.$$

Beim Ceres-Beispiel finden dagegen andere Verhältnisse statt; hier ist:

$$\frac{b}{a} = 1,10, \quad \frac{c}{a} = +3,11, \quad \frac{d}{a} = -2,04, \quad e = 0,08$$

und

$$\frac{\delta}{r^{3/2}} = 0,52, \quad \frac{\delta'}{r^{3/2}} = 0,55, \quad \frac{\delta''}{r^{3/2}} = 1,07.$$

Nimmt man die letzteren als klein von erster Ordnung an, so wird

$$\frac{\delta''}{r^{3/2}} - \frac{\delta}{r^{3/2}} = 0,03$$

klein mindestens von zweiter Ordnung.

δ' erscheint also nicht als Unterschied zweier grosser Zahlen zweiter Ordnung, wie beim Juno-Beispiel und ähnlichen, bei denen Fehler in $\frac{n}{w}$ und $\frac{n''}{w'}$ von grossem Einfluss sind; obwohl diese Fehler hier an sich wegen der grossen Zwischenzeiten grösser sind, so werden sie doch durch die kleineren Faktoren $\frac{c}{a}$ und $\frac{d}{a}$ nicht merklich vergrössert¹⁾.

Sind die Zwischenzeiten aussergewöhnlich gross, so wird auch immer aus den ersten Beobachtungen eine genäherte Bahn bereits bekannt sein und man wird dann nicht von den Näherungswerten 28) für P und Q ausgehen, sondern gleich genauere Werte für die erste Hypothese nach 29) anwenden (art. 163).

Es gibt bekanntlich eine Reihe von Fällen, in denen die Methode der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen versagt. In den art. 160—162 bespricht GAUSS die Fälle, in denen die drei geozentrischen Örter so ausgewählt sind, dass sich die Bahn entweder garnicht oder nur sehr ungenau bestimmen lässt,

¹⁾ Diese Bemerkung zum Ceres-Beispiel verdanke ich einer Mitteilung von JOH. FRISCHAUF.

nämlich 1. wenn die drei Himmelskörper Sonne, Erde, Planet bei einer der Beobachtungen ganz oder nahezu in einer geraden Linie sich befinden, oder 2. wenn der erste und dritte geozentrische Ort ganz oder nahezu zusammenfallen, oder endlich 3. wenn die drei geozentrischen Örter des Planeten und der heliozentrische Erdort in der mittleren Beobachtung ganz oder nahezu in einem grössten Kreise liegen. Diese Fälle müssen durch eine andere Auswahl der benutzten Beobachtungen vermieden werden.

Den Fall, in dem zwei ganz verschiedene Bahnen den drei Beobachtungen genügen, bespricht GAUSS im art. 142; die Entscheidung, in welcher von beiden der Himmelskörper sich bewegt, kann nur durch eine vierte entferntere Beobachtung erbracht werden.

Dem Falle endlich, in dem die Neigung der Bahn gleich Null oder sehr klein ist, passt sich die Methode der Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen¹⁾ an, die im wesentlichen auf den gleichen Grundsätzen beruht, wie die aus dreien. GAUSS beabsichtigte anfangs, hier eine Bahnbestimmung des Uranus als Beispiel zu geben, konnte aber die dazu nötigen Beobachtungen nicht zusammenbekommen²⁾; er benutzte dann zu diesem Zweck die unmittelbar darauf entdeckte Vesta.

13. Rechnung für parabelnahe Ellipsen und Hyperbeln. Hyperbolische, parabolische und Kreisbahn-Bestimmung.

Im *Tagebuch* finden wir im April 1806 die Notiz³⁾ Nr. 127: »Methodus nova ellipsis et hyperbolam ad parabolam reducendi«. Diese bezieht sich auf die art. 30—46 der *Theoria motus*, in denen die Berechnung der wahren Anomalie aus der Zeit, und umgekehrt, für parabelnahe Ellipsen und Hyperbeln behandelt wird; entsprechende Vorarbeiten dazu stehen im *Handbuch* Bd. S. 52 f. und 91. Bemerkenswert sind dabei die scharfen Untersuchungen der art. 30—32 über die Genauigkeit, mit der sich die wahre Anomalie aus der mittleren ergibt; da diese Genauigkeit zu wünschen übrig lässt, wenn e nahe gleich Eins ist, so entstanden die Entwicklungen zur Reduktion parabelnaher Ellipsen und

¹⁾ *Theoria motus*, art. 164—171.

²⁾ Vergl. den Briefwechsel zwischen GAUSS und OLBERS vom 27. und 31. Januar, 12. März 1807.

³⁾ Werke X, 1, S. 565.

Hyperbeln auf die Parabel. Nach art. 30 scheint es, als ob GAUSS an anderer Stelle sich weiter über die Genauigkeit logarithmischer Rechnungen überhaupt verbreiten wollte.

Zur Bestimmung einer hyperbolischen Bahn wendet GAUSS ähnliche Methoden an, wie zu der einer elliptischen Bahn. In der *Theoria motus* gibt er jedoch ein Zahlenbeispiel nur für die Berechnung der Elemente aus zwei Radienvektoren, dem eingeschlossenen Winkel und der Zwischenzeit (art. 105).

Dass GAUSS in der *Theoria motus* nicht auf die Bestimmung einer parabolischen Bahn eingeht, mag, wie schon oben gesagt, seinen Grund darin haben, dass diese Aufgabe schon von OLBERS in brauchbarer Form gelöst war. Er begann erst später sich damit zu beschäftigen, als er selbst die Bahnen einiger Kometen berechnete. In einem Briefe an OLBERS vom 3. Januar 1806 präzisiert er den von OLBERS im § 37 seiner Abhandlung noch nicht klar herausgeschälten Fall näher, in dem die OLBERS'schen Methode nicht anwendbar ist. Dies veranlasste wahrscheinlich OLBERS zu seiner Mitteilung vom Juni 1806 im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1809¹⁾.

Im Jahre 1813 bei Gelegenheit der Beschäftigung mit dem Kometen 1813 II fand GAUSS eine erhebliche Verbesserung der OLBERS'schen Methode. Bei dieser lässt sich nämlich in häufig vorkommenden Fällen die Berechnung der Radienvektoren der beiden äusseren Beobachtungen und der Sehne aus dem hypothetischen Abstand von der Erde im mittleren Ort nicht scharf genug ausführen. GAUSS gibt hierfür andere Formeln, die den Hauptinhalt der Abhandlung *Observationes Cometæ secundi a. 1813 . . .*²⁾ bilden und sich auch in seinem Briefe an OLBERS vom 25. Juli 1813 finden.

Im Jahre 1815 endlich beschäftigte er sich eingehender mit der parabolischen Bahnbestimmung; er gibt nicht nur der LAMBERT'schen Gleichung eine andere Gestalt, sondern entwickelt auch eine Reihe anderer wichtiger Beziehungen. Er begann den Entwurf einer Notiz *Allgemeine Theorie der Berechnung der Kometenbahnen*, dem er ein im Briefe an OLBERS vom 13. Januar 1815 erwähntes Musterbeispiel beifügt. Die entsprechenden Bruchstücke aus dem Nachlass sind Werke VII, 1906, S. 323—374 abgedruckt; dazu ge-

1) W. OLBERS, *Sein Leben und seine Werke*, Bd. I, S. 76.

2) Werke VI, S. 23.

hört auch eine Tafel zur Berechnung der wahren Anomalie, die vollständiger ist als die BARKERS'sche. Er schreibt darüber an OLBERS am 29. Mai 1815: »Meine theoretischen Untersuchungen über die Berechnung der Kometenbahnen im allgemeinen hätte ich wohl einige Neigung, in Zukunft einmal in einem eigenen Werke bekannt zu machen, als Supplement zu meiner *Th. M. C. C.* Es könnte vielleicht 6—8 Bogen stark werden, und ich würde dann noch eine Tafel für die parabolische Bewegung von einer neuen Einrichtung beifügen, deren Gebrauch noch etwas bequemer ist als der der BARKERS'schen. Diese möchte auch noch 3 Bogen betragen. Der Grund dazu ist schon gelegt, wobei mir Herr ENCKE noch geholfen hat« und an SCHUMACHER am 5. Januar 1845: »Das Zusatzkapitel, welches ich einmal zu der *Th. M. C. C.* zu machen im Sinn hatte, würde die Berechnung der rein parabolischen Bahn betroffen haben. Eigentlich ausgearbeitet ist darüber niemals etwas gewesen; einzelnes ist aber so aufgeschrieben, dass ich es später danach wohl wiederherstellen könnte. Allein meine nächsten Arbeiten werden sich jedenfalls auf die Fortsetzung meiner geodätischen (theoretischen) Untersuchungen beziehen.«

Das Problem der Kreisbahn mag GAUSS übergangen haben, weil sich nur in besonderen Fällen, z. B. wenn die Beobachtungen zur Bestimmung einer Ellipse nicht ausreichen, die Berechnung einer solchen empfiehlt und diese »Arbeit sich durch eine sehr leichte und einfache Rechnung erledigen lässt«¹⁾; bei der Ceres hatte sich die Unzweckmässigkeit der Berechnung einer Kreisbahn in vollem Masse gezeigt. Jedoch findet sich in dem bekannten Lehrbuch von KLINKERFUES²⁾ eine Methode der Kreisbahnbestimmung, die von GAUSS herrührt und Werke XI, 1, S. 253 abgedruckt ist.

III. Bahnverbesserung aus einer grösseren Reihe von Beobachtungen.

1. Einleitendes.

Die GAUSS'schen Methoden zur Verbesserung einer Planetenbahn aus einer grösseren Reihe von Beobachtungen treten uns an vielen zertreten Stellen seiner Veröffentlichungen und seines Nachlasses entgegen und daher dürfte eine Zusammenstellung erwünscht sein. Im dritten Abschnitt der *Theoria*

1) Einleitung zur *Theoria motus*, Werke VII, 1906, S. 6.

2) S. Fussnote, S. 145.

motus finden wir in erster Linie die Begründung der zur Anwendung kommenden Methode der kleinsten Quadrate, in der *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis* dagegen die eigentlichen astronomischen Formeln.

Über die Bildung der Normalörter spricht GAUSS in den art. 173—174 der *Theoria motus*; in seinen praktischen Rechnungen legt er die Normalörter meist in den Augenblick der Opposition in Länge, wodurch die Rechnung möglichst vereinfacht wird. Die Zeit der Opposition ergibt sich aus der Gleichheit der heliozentrischen Länge der Erde und der aus den Beobachtungen folgenden geozentrischen Länge des Planeten; beiden ist dann auch die heliozentrische Länge des Planeten gleich, die neben der aus den Beobachtungen folgenden geozentrischen Breite die Grundlage für die Bahnverbesserung bietet. Diese Methode ist natürlich nur dann anwendbar, wenn in der Nähe der Opposition Beobachtungen in genügender Zahl vorliegen¹⁾.

2. Bahnverbesserung aus vier Oppositionen.

In der *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis* benutzt GAUSS zur Bahnverbesserung zwei verschiedene Verfahren; das erstere (art. 5—8), das in ähnlicher Weise auch bei seinen Störungsrechnungen zur Anwendung kommt (vergl. S. 192), soll hier so geschildert werden, wie es in der *Disquisitio* benutzt wird, indem nämlich nur vier Oppositionen benutzt werden; wegen des zweiten sehe man Seite 193. Beim ersteren findet die Methode der kleinsten Quadrate nur teilweise Anwendung; es kann folgendermassen geschildert werden:

Da Neigung und Knotenlänge bereits ziemlich genau bekannt zu sein pflegen, so ist es auch die Reduktion auf die Ekliptik und daher lassen sich die Längen in der Bahn, nur mit einem sehr kleinen Fehler behaftet, berechnen²⁾. Man gewinnt hierdurch den Vorteil, dass man die Verbesserung

1) Man vergleiche hierzu auch die Notizen Werke VII, 1906, S. 310.
2) Man kann hierzu die direkte Formel

$$\operatorname{tg}(v - \Omega) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \Omega)}{\cos i}$$

benutzen; schärfer rechnet man nach der Formel (vergl. *Theoria motus*, art. 50)

$$\sin(v - \varphi) = 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin(v - \Omega) \cos(\alpha - \Omega)$$

indem man für $v - \Omega$ den aus der ersteren berechneten Wert benutzt, wodurch man gleichzeitig eine Kontrolle erhält.

Es bedeuten: v die wahre Länge in der Bahn,
 α die heliozentrische Länge.

der Elemente getrennt, einerseits für die Länge des Perihels, die Exzentrizität, die mittlere tägliche Bewegung und die Länge in der Epoche, und andererseits für die Neigung und die Länge des Knotens ausführen kann; dadurch hat man nur mit vier Unbekannten zu operieren, von denen sich noch eine, die Verbesserung der Länge in der Epoche, sofort eliminieren lässt.

Aus den Längen in der Bahn v berechnet GAUSS mit den genäherten Werten von π und φ die mittlere Anomalie M und ihre Ableitungen¹⁾

$$34) \quad \frac{\partial M}{\partial \pi} = -\frac{\cos^2 \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = m$$

und

$$35) \quad \frac{\partial M}{\partial \varphi} = m \frac{(2 + e \cos \varphi) \sin \varphi}{\cos \varphi} = n$$

und erhält so für jeden Normalort eine Beziehung von der Form¹⁾

$$36) \quad M = (M) + m \Delta \pi + n \Delta \varphi,$$

also bei vier Oppositionen vier solche Gleichungen für M, M', M'', M''' . Da

$$M = \varepsilon - \pi + \mu t$$

$$M' = \varepsilon - \pi + \mu t'$$

usw.

so ergeben sich durch Elimination von $\varepsilon - \pi$ drei Gleichungen

$$37) \quad \begin{aligned} \mu(t' - t) &= (M') - (M) + (m' - m) \Delta \pi + (n' - n) \Delta \varphi \\ \mu(t'' - t) &= (M'') - (M) + (m'' - m) \Delta \pi + (n'' - n) \Delta \varphi \\ \mu(t''' - t) &= (M''') - (M) + (m''' - m) \Delta \pi + (n''' - n) \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Aus diesen lässt sich auch μ sofort eliminieren und daher $\Delta \pi$ und $\Delta \varphi$ durch eine kurze Rechnung bestimmen, worauf auch sogleich μ und ε gefunden werden.

Die auf diese Weise gefundenen Werte von μ, ε, π und φ sind noch mit dem Fehler der vorausgesetzten Werte von i und Ω behaftet, aber nur soweit dieser durch die Reduktion auf die Ekliptik eingeht, also mit einem sehr geringen Betrage. Man berechnet aus ihnen die Radienvektoren in den

1) M = mittlere Anomalie,
 (M) = berechneter genäherter Wert der mittleren Anomalie
 μ = mittlere Bewegung,
 ε = mittlere Länge in der Epoche,
 $t, t' \dots$ = seit dem Periheldurchgang verlossene Zeit,
 $\pi = v - \pi$ = wahre Anomalie,
 φ = Exzentrizitätswinkel; $e = \sin \varphi$.

vier Beobachtungen und erhält daraus die heliozentrischen Breiten γ nach der Formel¹⁾:

$$38) \quad \sin(\delta - \gamma) = \frac{R \sin \epsilon}{r}.$$

Um auf den Einfluss der Fehler in i und Ω Rücksicht zu nehmen, setzt GAUSS

$$39) \quad \gamma = (\bar{\gamma}) + \left(\frac{d\gamma}{d\Omega}\right) \Delta\Omega + \left(\frac{d\gamma}{di}\right) \Delta i = (\bar{\gamma}) + a \Delta\Omega + b \Delta i,$$

wo $(\bar{\gamma})$ der berechnete Wert für die heliozentrische Breite ist. Über die Differentialquotienten $\left(\frac{d\gamma}{d\Omega}\right)$ und $\left(\frac{d\gamma}{di}\right)$ sagt GAUSS, dass er sie nicht auf analytischem Wege, sondern auf numerischem bestimmen wolle. Der Grund hierfür ist vielleicht der, dass die erstere Bestimmungsart, wenn sie streng ausgeführt wird, etwas verwickelt ist; denn $\left(\frac{d\gamma}{d\Omega}\right)$ und $\left(\frac{d\gamma}{di}\right)$ sind nicht gleich den partiellen Ableitungen von γ im gewöhnlichen Sinne, weil γ nicht aus den Elementen allein, sondern aus dem beobachteten δ abgeleitet ist und die Fehler Δi und $\Delta\Omega$ hier nur bei der Reduktion auf die Ekliptik und damit implizite in die Elemente π und φ , sowie auch in r eingehen. GAUSS bestimmt $\left(\frac{d\gamma}{d\Omega}\right)$ und $\left(\frac{d\gamma}{di}\right)$, indem er die ganze vorausgehende Rechnung wiederholt unter Voraussetzung von etwas veränderten Ausgangswerten von i und Ω , sodass er im ganzen drei Bestimmungen erhält; so wird bei ihm z. B. für die Opposition der Pallas²⁾ von 1805

Hypothese	Ω	i	$(\bar{\gamma})$
I	172° 28' 46",8	34° 37' 31",5	- 33° 39' 48",15
II	172 29 46,8	34 37 31,5	- 33 39 51,10
III	172 28 46,8	34 38 31,5	- 33 39 35,63

und hieraus

$$\gamma = -33^{\circ} 39' 48",15 - 0,0492 \Delta\Omega + 0,2087 \Delta i$$

Er wendet also das Verfahren an, dass wir schon bei seinen ersten Bahnbe-

1) ϵ = geozentrische Breite,
 γ = heliozentrische Breite,
 r = Radiusvektor,
 R = Radiusvektor der Erde.

2) Werke VI, S. 12-13.

stimmungen kennen gelernt haben und das wir heute als numerische Differentiation bezeichnen, wobei allerdings hier nur die ersten Differenzen berücksichtigt werden.

Drei weitere ähnliche Gleichungen ergeben sich für die übrigen Oppositionen.

Während die eben gefundenen Werte der heliozentrischen Breiten aus den beobachteten geozentrischen Breiten folgen, berechnet GAUSS andererseits die heliozentrischen Breiten mit den (in Hypothese I) vorausgesetzten Werten von i und Ω aus den beobachteten Längen nach der Formel¹⁾

$$40) \quad \tan \delta = \tan i \cdot \sin(\alpha - \Omega),$$

und es wird

$$41) \quad \delta = (\bar{\delta}) + \frac{\partial \delta}{\partial \Omega} \Delta\Omega + \frac{\partial \delta}{\partial i} \Delta i = c \Delta\Omega + f \Delta i,$$

wo

$$c = -\frac{1}{2} \sin 2\bar{\delta} \cdot \cotang(\alpha - \Omega)$$

$$42) \quad f = \frac{\sin 2\bar{\delta}}{\sin 2i}.$$

Für die Opposition von 1805 findet GAUSS z. B.

$$\bar{\delta} = -33^{\circ} 40' 50",63 + 0,1252 \Delta\Omega - 0,9870 \Delta i.$$

Da $\bar{\delta} = \gamma$ sein muss, so liefert die Opposition von 1805 die Gleichung

$$43) \quad 62,48 - 0,1744 \Delta\Omega + 1,1957 \Delta i = 0.$$

Daneben ergeben die drei übrigen Oppositionen drei weitere ähnliche Gleichungen und da hiermit Δi und $\Delta\Omega$ überbestimmt sind, so leitet GAUSS ihre Werte nach der Methode der kleinsten Quadrate ab.

Um nun endlich auch die vier übrigen oben gefundenen Elemente durch Beseitigung des Einflusses von Δi und $\Delta\Omega$ weiter zu verbessern, kann man entweder ihre genauen Werte durch Interpolation aus den drei Hypothesen für i und Ω bestimmen, oder, was zuverlässiger ist, die Bestimmung mit den scharfen Werten von i und Ω wiederholen²⁾.

1) Hier bezeichnen:

$(\bar{\delta})$ die heliozentrische Breite, gerechnet nach der Formel 40),
 δ den wahren Wert der heliozentrischen Breite
 α die heliozentrische Länge.

2) Vergl. *Disquisitio de elementis Pallas*, art. 8, Werke VI, S. 14-15.

3. Bahnverbesserung aus mehreren Oppositionen und mit Berücksichtigung der Störungen.

Legt man der Elementenverbesserung mehr als vier Oppositionen zugrunde, so erhält man mehr als vier Gleichungen der Form 37) und kann diese, wie die Gleichungen 43), nach der Methode der kleinsten Quadrate auflösen. Nimmt man auch auf die Störungen Rücksicht, so ist die Rechnung wesentlich die gleiche, nur muss man die gestörten Werte der Elemente benutzen. Das Verfahren, dass GAUSS hier gewöhnlich anwandte, schliesst sich an das vorerwähnte an. Es soll hier ebenfalls auseinandergesetzt werden¹⁾:

Es seien i_0 , Ω_0 , π_0 , φ_0 usw. die wahren und (i_0) , (Ω_0) , (π_0) , (φ_0) usw. genäherte Werte der mittleren oder Normal-Elemente, wie GAUSS sie nennt.

Indem man zu (i_0) , (Ω_0) , (π_0) , (φ_0) die Störungen hinzufügt, erhält man die Näherungswerte für die gestörten (oskulierenden) Elemente, die mit (i) , (Ω) , (π) , (φ) bezeichnet werden mögen. Mit den letzteren berechnet man wie im vorstehenden (Gleichung 36) die mittlere Anomalie (M) und hieraus die mittlere Länge $(L) = (M) + (\pi)$, so dass entsprechend der Gleichung 36) der wahre Wert der gestörten mittleren Länge ist

$$44) \quad L = (L) + (m+1)\Delta\pi + n\Delta\varphi.$$

Für die mittlere Länge gilt hier der Ausdruck

$$45) \quad L = \varepsilon + \int \mu dt.$$

Fasst man die Störungen dieser Grösse als Störungen der mittleren Länge zusammen, indem man setzt²⁾

$$\delta L = \delta\varepsilon + \delta \int \mu dt,$$

so hat man

$$46) \quad L = \varepsilon_0 + \mu_0 t + \delta L = \varepsilon_0 + (\mu_0) t + \delta L + t \cdot \Delta\mu.$$

Zieht man also von (L) die Störungen δL und die aus dem Näherungswerte von μ folgende mittlere Bewegung seit der Epoche $t = 0$ ab, wobei man setzen kann

$$47) \quad (\varepsilon_0) = (L) - \delta L - (\mu_0) t,$$

¹⁾ Man vergleiche dazu Werke VII, 1906, S. 479—482, 480—488, 561—564.
²⁾ Nach Werke VII, 1906, Seite 489.

so erhält man für jede Opposition eine Gleichung von der Form

$$48) \quad \varepsilon_0 = (\varepsilon_0) + (m+1)\Delta\pi + n\Delta\varphi - t\Delta\mu.$$

GAUSS eliminiert aus diesen Gleichungen, deren Anzahl s sein mag, zunächst die Epoche ε_0 , indem er das Mittel:

$$49) \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{s} \{ \Sigma(\varepsilon_0) + \Delta\pi \cdot \Sigma(m+1) + \Delta\varphi \cdot \Sigma n - \Delta\mu \cdot \Sigma t \}$$

nimmt und dieses von jeder der s Gleichungen abzieht; die entstehenden s Gleichungen für $\Delta\pi$, $\Delta\varphi$ und $\Delta\mu$ löst er dann nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Der weitere Verlauf der Rechnung zur Verbesserung der Werte von i und Ω ist derselbe wie im vorstehenden (S. 190); die Koeffizienten a und b können dabei in der Regel ihrer Kleinheit wegen fortgelassen werden, wodurch die Rechnung sich erheblich vereinfacht¹⁾.

Im Gegensatz zu dem soeben besprochenen Verfahren, das GAUSS bei seinen Störungsrechnungen anwendet, steht das zweite direkte Verfahren zur Bahnverbesserung aus einer grösseren Reihe von Oppositionen, das sich in der *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis*, art. 10—14, findet. GAUSS stellt hier die allgemein gültigen Gleichungen für die Differentialänderungen der heliozentrischen Länge und der geozentrischen Breite auf; nämlich²⁾

$$50) \quad l = (l) + \frac{a^2 \cos \varphi \cos i}{r^2 \cos^2 b} \Delta L + \frac{t a^2 \cos \varphi \cos i}{r^2 \cos^2 b} \Delta n + \left(\frac{\cos i}{\cos^2 b} - \frac{a^2 \cos \varphi \cos i}{r^2 \cos^2 b} \right) \Delta \pi \\ + \frac{a^2 \cos i}{r^2 \cos^2 b} (2 - e \cos E - e^2) \sin E \Delta \varphi \\ + \left(1 - \frac{\cos i}{\cos^2 b} \right) \Delta \Omega - \operatorname{tg} b \cos (l - \Omega) \Delta i,$$

$$51) \quad \beta = (\beta) - \frac{a \sin \beta \sin (\beta - b) \operatorname{tg} \varphi \sin \omega}{r \sin b} \Delta L \\ + \left\{ \frac{2 \sin \beta \sin (\beta - b)}{3 \mu \sin b} - \frac{a t \sin \beta \sin (\beta - b) \operatorname{tg} \varphi \sin \omega}{r \sin b} \right\} \Delta \mu \\ + \frac{a \sin \beta \sin (\beta - b) \operatorname{tg} \varphi \sin \omega}{r \sin b} \Delta \pi + \frac{a \sin \beta \sin (\beta - b) \cos \varphi \cos \omega}{r \sin b} \Delta \varphi \\ + \frac{2 \sin \beta \cos (\beta - b) \cos b}{\sin 2 i} \Delta i - \sin \beta \cos (\beta - b) \cos b \operatorname{ctg} (l - \Omega) \Delta \Omega.$$

¹⁾ Vergl. Werke VII, 1906, S. 482.

²⁾ l = heliozentrische Länge,

β = geozentrische Breite,

(β) und (β) genäherte Werte der vorgenannten Grössen,

b = heliozentrische Breite.

Da es sich um Oppositionen handelt, so kann man statt l überall die geozentrische Länge nehmen und daher die Gleichungen mit sechs Unbekannten direkt nach der Methode der kleinsten Quadrate lösen. GAUSS bedient sich in der *Disquisitio* der Eliminationsmethode, die er dort ausführlich beschreibt.

Eine bequemere Form für die vorstehenden Gleichungen findet sich im *Handbuch* Be, S. 49; diese ist Werke VII, 1906, S. 311–312 abgedruckt.

4. Allgemeine Formeln zur Bahnverbesserung.

Allgemeine Formeln zur Bahnverbesserung, bei denen nicht vorausgesetzt wird, dass die Beobachtungen sich auf Oppositionen beziehen, hat GAUSS wohl nur bei seinen ersten Bahnbestimmungen angewandt; hier stellt sich die Rechnung weniger einfach. GAUSS schildert zwei verschiedene hierfür in Betracht kommende Methoden in grossen Zügen in der *Theoria motus*, art. 187–189, und mit Berücksichtigung der Störungen ebendort, art. 190–192. Die entsprechenden Differentialformeln gibt er in den art. 76–77 der *Theoria motus* und im *Handbuch* Be, Seite 56–57¹⁾; GAUSS scheint jedoch von ihnen kaum Gebrauch gemacht zu haben.

Über die ausführliche Begründung der Methode der kleinsten Quadrate, die GAUSS in der *Theoria motus* art. 175–186 gibt, ist an anderer Stelle berichtet worden²⁾.

IV. Allgemeines über Gauss' störungstheoretische Arbeiten.

1. Einleitendes.

Für die Planeten Ceres und Pallas hat GAUSS Störungen berechnet, die Werke VII, 1906, in grösserem Umfange veröffentlicht worden sind. Während er die Pallas-Störungen nach einer mehr und mehr vollkommeneren Methode fast ganz durchgeführt hat, müssen die Berechnungen der Ceres-Störungen als Vorversuche bezeichnet werden; denn die hier angewandten Methoden waren noch wenig entwickelt, so dass — namentlich bei der Pallas — eine eingehendere Bestimmung der Störungen fast unüberwindlich lange Rech-

¹⁾ Werke VII, 1906, S. 296–297.

²⁾ A. GALLE, *Über die geodätischen Arbeiten von Gauss*, Werke XI, 2, Abb. 1, S. 4–15.

nungen erfordert hätte. Während GAUSS bei der Ceres Koordinatenstörungen anwendet, ist er nach längerem Schwanken, wofür er sich entscheiden sollte, zuletzt bei der Pallas ganz zu Elementenstörungen übergegangen.

Er fand bei diesen Arbeiten Gelegenheit, seine mathematischen Untersuchungen anzuwenden, und zwar einerseits die über das arithmetisch-geometrische Mittel und die hypergeometrische Reihe, andererseits seine Interpolationstheorie. Er wird hiernach auf zwei grundsätzlich verschiedene Methoden geführt. Die erste beruht auf der analytischen Entwicklung der Störungsfunktion, wie sie auch schon von LAPLACE angewandt worden war: sie gibt die allgemeinen analytischen Ausdrücke für die Störungen als Funktionen der Elemente, sodass die Formeln für alle Planeten anwendbar sind, wenn die entsprechenden Zahlenwerte eingesetzt werden; GAUSS benutzte dieses Verfahren bei der ersten Berechnung der Ceres-Störungen, bei der er sich auf die ersten Potenzen der Exzentrizität beschränkt und Koordinatenstörungen rechnet. Bei der Weiterführung der Rechnungen erwies sich diese Methode als nicht durchführbar. Die zweite Methode beruht auf der interpolatorischen Entwicklung der Störungsfunktion nach der *Theoria Interpolationis*¹⁾; sie ist die einzige, die in schwierigeren Fällen, wie sie z. B. Pallas bietet, durchführbar ist. Man erhält dabei nicht die allgemeinen analytischen Ausdrücke, die für jeden Planeten gelten, sondern die Entwicklung wird mit Zahlenwerten, entsprechend den Elementen eines bestimmten Planeten, ausgeführt und gilt nur für diesen. GAUSS hat diese Methode bei der Pallas benutzt. Für die zweite Berechnung der Ceres-Störungen²⁾ bedient sich GAUSS eines gemischten Verfahrens, indem er die Entwicklungen teils analytisch, teils interpolatorisch ausführt. Er hatte damals wohl die Vorzüge des interpolatorischen Verfahrens erkannt, zögerte aber vielleicht, das analytische Verfahren ganz zu verlassen, weil er einen gewissen Wert auf die Anwendung seiner Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel legte, die beim rein interpolatorischen Verfahren ganz fortfällt.

2. Geschichtliches über Gauss' Störungsrechnungen.

GAUSS spricht sich OLBERS gegenüber in einem Briefe vom 25. Juni 1802 dahin aus, dass er zwar die Störungen der beiden entdeckten Planeten be-

¹⁾ Werke III, S. 265.

²⁾ Werke VII, 1906, S. 401 f.

rechnen wolle, dass er es aber für voreilig halte, die Störungen der im März 1802 entdeckten Pallas schon jetzt vorzunehmen, ehe sie eine längere Zeit hindurch beobachtet sei; er schreibt in diesem Briefe: »Auf die Störungen eher Rücksicht zu nehmen, ehe die Pallas einen weit grössern Bogen beschrieben hat, scheint mir übrigens ziemlich überflüssig. Eine ohne Rücksicht auf dieselben den Beobachtungen genau angepasste Ellipse schliesst diese schon mit ein und muss sie eine geraume Zeit einschliessen. Es scheint mir daher nicht bloss eine unnötige, sondern selbst eine missliche Arbeit, von Grössen, deren kleine Unterschiede, und noch kleinere Unterschiede der Unterschiede, die Quelle unserer Kenntnis sein müssen, sehr grosse Quantitäten (wie die Störungsgleichungen gewiss bei Pallas sein müssen), die sich noch dazu bei dem jetzigen Zustande der Perturbationstheorie keineswegs sehr genau bestimmen lassen, erst abzuziehen, um sie nachher wieder hinzusetzen zu müssen. Wenn ich den Einfluss des Jupiter in diesem Jahre zu untersuchen Lust und Musse bekommen sollte, so würde ich einen andern Weg einschlagen und die Elemente selbst als veränderlich ansehen; ich vermute sogar, dass dies bei der Pallas überhaupt auch künftig vorzuziehen sein wird; denn wenn man, wie sonst gewöhnlich, den nach mittlern Elementen berechneten Ort durch Gleichungen wird verbessern wollen, so denke ich, werden diese so gross und zahlreich sein, dass wenigstens meine Geduld schwerlich zureichen würde, eine grosse Anzahl Örter auf diesem Wege zu berechnen. Ich denke fast, es wird immer leichter sein, einen Ort aus Elementen ohne Tafeln zu berechnen, als mit Tafeln vielleicht 30 oder 40 Gleichungen für Länge, Breite und Radiusvektor zu berechnen, und es scheint mir daher, dass es wohl vielleicht das Beste sein wird, dass man in den Tafeln wenigstens vor der Hand etwa von 3 Monat zu 3 Monat die veränderlichen oskulierenden rein elliptischen Elemente angibt. Vielleicht wäre dies selbst bei der Ceres nicht ohne Nutzen. — Übrigens glaube ich auch, dass die Pallas nach einigen Umläufen das beste Mittel sein wird, die Masse des Jupiter zu bestimmen.«

Schon in diesem Briefe deutet GAUSS an, dass die Berechnung der Elementenstörungen vermutlich den Vorzug vor der der Koordinatenstörungen verdiene; doch scheint er in dieser Frage später unschlüssig gewesen zu sein¹⁾, was darin seine Erklärung findet, dass es wesentlich von der angewandten Me-

¹⁾ Vergl. den folgenden Brief und S. 203.

thode abhängt, welche Berechnungsart vorzuziehen ist. Bei seiner zuletzt bei der Pallas angewandten rein interpolatorischen Methode erwies sich in der Tat die Form der Elementenstörungen als die vorteilhaftere.

Am 12. Oktober 1802 schreibt er an OLBERS: »Sollten Sie aber die ϕ noch in der *Hist. Cél.* auffinden, so werde ich schwerlich der Begierde widerstehen können, davon noch Gebrauch zu machen. Doch bin ich selbst auf diesen Fall noch unschlüssig, ob ich die Elemente als veränderlich ansehen, oder die an die rein elliptisch berechneten Örter anzubringenden Störungen durch Quadraturen berechnen würde. Herr BURCKHARDT hat, wie ich aus der *Monatl. Corr.* sehe, die Perturbationen bloss nach den ersten Potenzen der Exzentrizität und Neigung berechnet; dies Verfahren, welches bei der ρ vor der Hand mehrere Jahre hindurch völlig hinreichend sein wird, scheint mir bei der ϕ wenig mehr zu helfen, als wenn man von den Störungen ganz abstrahiert. Überhaupt wird die Berechnung der Störungen der ϕ künftig noch eine wahre Qual für die Analysten sein. Sich durch Quadraturen von einem Jahre zum andern hinzuhelfen, hat freilich alle zu verlangende Schärfe, allein man wird doch auch wünschen, und die Würde der Wissenschaft fordert, dass man künftig, wenn man erst hinlänglich Beobachtungen hat, den Ort für jede entferntere Zeit bestimme. Allein wenn man die Störungen auf die gewöhnliche Art durch Reihen ausdrücken will, so werden diese äusserst langsam konvergieren, und ich glaube, dass man, wenn man den Ort jedesmal auf 1" genau berechnen will, vielleicht mehrere hundert Gleichungen für Länge, Breite und Radiusvektor nötig haben wird.« Er sagt weiter in diesem Briefe, dass er für Ceres nach den Elementen VII die Störungen berechnet, »aber bloss erst die erste Potenz der Exzentrizität in Betracht gezogen« habe.

Die letzten Worte beziehen sich auf die Werke VII, 1906, S. 377 f. abgedruckte erste Berechnung der Ceresstörungen, die er sehr schnell durchführte und deren Ergebnisse bereits im Dezember 1802 veröffentlicht wurden¹⁾. Sie beruht im wesentlichen auf denselben Entwicklungen wie die LAPLACESCHEN Untersuchungen. Die gewonnenen Ergebnisse brachte er in einer zur Anwendung sehr bequemen Form in Tafeln, welche ebenfalls (Bd. VI, S. 235) veröffent-

¹⁾ *Monatl. Corr.*, Bd. VI; Werke VI, S. 227.

licht sind. Die Rechnung sowie die Tafeln sind im folgenden (Seite 214 ff.) näher besprochen.

GAUSS begnügte sich einstweilen mit diesen Ergebnissen. Er entwickelte sich nur, wie er im April 1803 an OLBERS schreibt, die Differentialgleichungen für die Elementstörungen, die er später anzuwenden gedachte; entsprechende Formeln finden sich in der *Scheda* A1, Seite 5.

Im Juni 1804 stellte die Pariser Akademie eine Preisaufgabe zur Berechnung der Störungen der kleinen Planeten, die sie in der »Gazette nationale ou le Moniteur universel« Nr. 281, Samedi 11 messidor an 12 de la Republique (30. Juni 1804), S. 1276 mit folgenden Worten bekannt machte:

Sujet du prix de Mathématiques.

«Donner la théorie des perturbations de la planète Pallas, découverte par M. OLBERS.

Les géomètres ont donné la théorie des perturbations avec une étendue et une exactitude suffisantes pour toutes les planètes anciennes connues, et pour toutes celles qu'on pourra découvrir encore, tant qu'elles seront renfermées dans le même zodiaque, et qu'elles n'aient qu'une excentricité peu considérable. Mercure était jusqu'à nos jours la plus excentrique de toutes les planètes, et en même temps celle qui avait l'inclination la plus forte; mais son peu de masse et sa position à l'une des limites du système planétaire la rendent peu propre à causer des altérations bien sensibles dans les mouvements des autres planètes. Uranus, découvert il y a vingt-trois ans par M. HERSCHELL, se trouve placé à l'autre limite du système. Avec peu de masse et une excentricité médiocre, il a encore la plus petite de toutes les inclinations connues; en sorte que les formules qui avaient servi pour Jupiter et Saturne ont été plus que suffisantes pour cette planète moderne. Cérés, découverte il y a quatre ans par M. PIAZZI, ayant avec une excentricité assez considérable, une inclination de $10^{\circ} 38'$, doit être sujette à de fortes et de nombreuses inégalités. Il paraît cependant que tous les astronomes qui ont travaillé à les déterminer se sont contentés des formules connues, dont le développement ne passe pas le produit de trois dimensions des inclinations et des excentricités. Ceux de cinq dimensions ont été employés dans la *Mécanique céleste* pour un cas particulier, d'après une formule de M. BURCK-

HARDT. Le même astronome a présenté depuis à l'Institut national le développement général et complet des troisième, quatrième et cinquième ordres; mais ce degré de précision ne suffirait certainement pas pour la planète Pallas, dont l'excentricité est plus forte même que celle de Mercure, et l'inclination de $34^{\circ} 37'$, c'est à dire cinq fois plus grande que celle d'aucune autre planète connue. Il est même difficile de conjecturer quelles seront les puissances et quelles seront les dimensions des produits qu'il sera permis de négliger, et les calculs pourraient être d'une longueur, et les formules d'une complication telles qu'elles pourraient effrayer les astronomes les plus en état d'exécuter un pareil travail. Cette considération a déterminé la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut national de France à proposer ce sujet pour le prix qu'elle doit distribuer dans sa séance publique du premier lundi de messidor an 14. En conséquence, elle invite les géomètres et les astronomes à discuter complètement toutes les inégalités de cette théorie, et à n'en omettre aucune qui ne soit reconnue entièrement négligeable; et comme ces inégalités pourraient varier assez sensiblement si les éléments elliptiques n'étaient pas encore assez exactement connus, il est indispensable que les concurrents ne se bornent pas à donner les coefficients numériques des équations, ils doivent aussi donner les coefficients analytiques, afin que l'on puisse y mettre les valeurs les plus exactes de la distance moyenne, de l'excentricité, de l'aphélie et de l'inclination, lorsque ces éléments seront mieux connus. Il résultera de ces coefficients analytiques un autre avantage; ce que les planètes Cérés et Pallas, étant à des distances du Soleil si peu différentes, qu'il est même aujourd'hui très-difficile de dire laquelle des deux est la plus voisine ou la plus éloignée, la formule donnée pour Pallas pourra, sans beaucoup de changements, servir aussi pour Cérés, ainsi que pour toute autre planète qu'on pourrait découvrir par la suite, et dont on aurait de cette manière une théorie plus complète et plus certaine. La classe espère que la question paraîtra assez intéressante aux astronomes, pour qu'ils y donnent des soins proportionnés à la difficulté du sujet. Le prix sera une médaille d'or, d'un kilogramme.

Les ouvrages envoyés au concours devront être inscrits en français ou en latin, et ne seront reçus que jusqu'au 1^{er} germinal an 14. Ce terme est de rigueur.

GAUSS schreibt darüber an OLBERS am 24. Juli 1804: »Dass das Nationalinstitut in Paris auf die Theorie der φ -Störungen einen Preis gesetzt hat, weiss ich bloss vom Hörensagen, da ich Zeitungen nur unordentlich zu lesen pflege. Steht vielleicht im Moniteur oder sonstwo das Programm in extenso, so bitte ich um Nachweisung der Nummer. Mir deutet eine solche weitläufige Arbeit fast noch zu voreilig. Wenn indes in diesem Jahre recht gute Meridianbeobachtungen gemacht und vom vorigen noch welche bekannt werden (ohne welche man die Neigung der Bahn und mehreres nur erst beiläufig bestimmen kann) — vielleicht werden sich in der Conn. des tems XIV., die ich noch nicht gesehen, noch welche von BOUVARD, oder von dem Observat. de l'école militaire, von BURCKHARDT oder LE FRANÇOIS finden —, so bin ich unter gewissen Umständen wohl geneigt, mich auf die Arbeit einzulassen« und am 7. September desselben Jahres: »Das Programm im Moniteur wegen des Preises habe ich neulich gelesen. Einer solchen Art, die Störungen der Pallas zu behandeln, wie sie da verlangt wird, nämlich mit Hilfe analytischer Formeln, in denen man bloss die andern Elemente eines andern Planeten, z. B. der ϱ , schlechtweg substituieren darf, um dessen Störungen zu finden, fühle ich meine Geduld nicht gewachsen; aber vornehmen werde ich nach meiner Manier die Pallasstörungen gewiss, obwohl wahrscheinlich die ϱ -Störungen früher. Denn auch bei der ϱ scheint durch dasjenige, was ich bisher von den Störungen mitgenommen habe, noch wenig gewonnen zu sein. Etwas sonderbar scheint es mir, dass das Nationalinstitut selbst gesteht, dass die analytischen Formeln, wodurch es nun einmal das Problem gelöst wissen will, wohl so verwickelt sein möchten, dass sie auch den allgewichtigsten Astronomen abschrecken müssen.«

Im Januar 1805 bemerkte GAUSS, dass seine Ceres-Störungen, namentlich die Sekularveränderung der Neigung und des Knotens, schlecht mit den Beobachtungen stimmten. Es war dies wohl die Folge eines Rechenfehlers; GAUSS scheint sich nicht die Mühe genommen zu haben, diesen aufzusuchen. Er begann vielmehr, jetzt auch die Entwicklungen für die zweiten Potenzen der Exzentrizität nach der gleichen Methode auszuführen; diese seine Untersuchungen finden sich im *Handbuch* Bc, S. 50—54, und brechen auf der letzteren Seite gänzlich ab, da die Entwicklungen zu umständlich wurden; er schreibt am 10. Mai 1805 an OLBERS: »Die Methode, nach der ich die ϱ -Störungen zu

berechnen angefangen hatte, habe ich doch wieder aufgegeben. Das gar zu viele mechanische tote Rechnen, was ich dabei vor mir sah, hat mich abgeschreckt; auch selbst wenn alle Rechnungen, die ich Fremden hätte übertragen können, von HERRN BESSEL und HERRN v. LINDENAU (der sich gleichfalls mich bei dergleichen Arbeiten zu unterstützen gefälligst erboten hat) übernommen wären, würde für mich noch mehr übrig geblieben sein, als meine Geduld hätte bestreiten können.

»Ich habe indessen bereits eine andere Methode ausgedacht, die ebenso weit führen kann, als jene, aber bei weitem weniger — obwohl künstlichere — Arbeit erfordert. Ich habe schon stark angefangen, sie auf die Ceres anzuwenden, wiewohl vorerst nur nach einem eingeschränktern Plane, indem ich nur bis an die 5. Potenzen der Exzentrizitäten von φ und ϱ gehe. Diese Methode hat um so mehr Reiz für mich, da ich dabei von vielen, schon vor längerer Zeit angestellten, ziemlich tiefen Untersuchungen über eigene Arten von transzendenten Funktionen einen glücklichen Gebrauch machen kann. Ich werde in der Folge Ihnen eine Idee davon zu geben suchen. Auch hoffe ich, dass ich im Stande sein werde, alles so einzurichten, dass ich durch eine fremde Unterstützung eine ansehnliche Erleichterung erhalte, zwar nicht bei meiner diesmaligen Rechnung für die ϱ (denn gerade in dem Teile, wo Hilfe zu brauchen wäre, bin ich schon selbst zu weit vorgerückt), aber doch wenn ich dieselbe wiederhole, welches nötig sein wird, da ohne Zweifel die erweiterten Störungsgleichungen noch mit ansehnlichen Änderungen in den Elementen selbst verbunden sein werden — oder auch wenn ich einst diese Arbeit bei der φ und \ddagger vornehme, wo sie beträchtlich weitläufiger sein wird.«

Die von GAUSS hier erwähnte »andere Methode«, die er »ausgedacht«, beruht einerseits auf seinen Untersuchungen über Interpolationstheorie, über die er an OLBERS am 3. Januar 1806 schreibt, andererseits auf den Entwicklungen, die er im Briefe an BESSEL vom 3. September 1805¹⁾ auseinandersetzt. Es ist die oben (S. 195) erwähnte gemischte Methode, nach der die zweite Berechnung der Ceresbahn ausgeführt worden und die unten S. 227f. besprochen ist. GAUSS hat nach ihr nur die Breitenstörungen berechnet, die am leichtesten durchzuführen waren, und gerade nach der ersten Rechnung

¹⁾ Werke X, 1, S. 227.
XI² Abb. 3.



nicht gestimmt hatten. Im weiteren erwies sich auch diese Methode ihrer Weillängigkeit wegen als nicht durchführbar. Er schreibt an OLBERS am 2. Juli 1805: „Mit meiner Rechnung der Störungen der φ bin ich leider noch nicht fertig. Theils habe ich nicht immer anhaltend daran gearbeitet, theils habe ich auch daran bei weitem mehr Mühe gehabt, als ich vorher glaubte, hie und da auch wohl mehr, als notwendig gewesen wäre. Aber die zweckmässigste Ausübung einer Methode lernt man erst bei ihrer Anwendung. Mit den Störungen der Breite hatte ich angefangen. Ich hatte bei meiner ersten Rechnung alles, was von den Exzentrizitäten abhing, übergangen; ORIANI hatte nur ein Glied mitgenommen. Nunmehr habe ich alle Gleichungen, die ich über 1" fand, mitgenommen, worunter auch ein paar sind, die von dem Produkte der Exzentrizitäten abhängen, also (da ohnehin in alle Breiten-gleichungen die Neigung entriert) von der Ordnung 3 sind. Von dieser Arbeit habe ich nun gewissermassen auch schon Früchte geerntet. Sie erinnern sich, dass ich mich schon seit 1803 beklagt habe, dass sich die Breiten in der φ von 1803 mit denen von 1801 nach der aus der Theorie gefundenen Bewegung des Ω nicht mehr vereinigen liessen, und dass ich gezwungen war, den φ 1803 um 3' weiter zu rücken. Ebenso stimmte in der φ 1804 die Breite nicht mit der von 1802; die Neigung musste weit mehr verringert werden, als die Theorie angab.

„Bei meinen neuesten Elementen musste ich dem Ω eine tägliche tropische Bewegung von $0^{\circ}241$, und der Neigung eine tägliche Abnahme von $0^{\circ}0243$ geben, um die Beobachtungen zu vereinigen, so dass

Ω	1801 Jan. 1.	$80^{\circ}54'46''$	Neigung	1802 φ	$10^{\circ}38'1''$
	1803 φ	$80^{\circ}55'28''$		1804 φ	$10^{\circ}37'35''$.

„Zu meiner grossen Freude ist dieses nun nicht mehr nötig, und die Beobachtungen stimmen jetzt mit den neuen Breitengleichungen und Sekularbewegungen recht gut.“

Die Fehler in den Breitenstörungen waren damit allerdings behoben. GAUSS scheint nun aber nach allen Richtungen hin Versuche gemacht zu haben, die Methoden der Störungsrechnungen zu verbessern, und vor allem die ermüdenden langwierigen Entwicklungen und Rechnungen abzukürzen, nachdem er sich davon überzeugt hatte, dass die LAPLACESCHE Methode der

Koordinatenstörungen, ebenso wie die von ihm selbst zunächst bei der Ceres angewandte, bei den kleinen Planeten nicht durchführbar ist. Zunächst versuchte er die Rechnung durch Entwerfen von Tafeln abzukürzen, die gleichzeitig auch für die anderen Planeten anwendbar waren.

Diese Tafeln beruhen auf der Entwicklung des Ausdrucks

$$(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}},$$

bei der ihn BESSEL wesentlich unterstützte (vergl. unten S. 231); sodann aber ruhten seine Arbeiten über Störungstheorie fast vollständig bis zum August 1810. Er beklagt sich bei OLBERS über das viele mechanische tote Rechnen und es mögen ihn in der Tat die langwierigen Rechnungen, die die von ihm benutzte Methode noch immer erforderte, von der Fortsetzung dieser Arbeiten abgeschreckt haben. Dazu kamen noch andere Gründe: seine im November 1807 erfolgte Übersiedlung nach Göttingen¹⁾, der Tod seiner Frau und seines Sohnes, die Drucklegung der *Theoria motus* und vielleicht auch die traurigen politischen Verhältnisse; auch hat er sich in dieser Zeit vielfach nicht wohl gefühlt und klagt gegenüber OLBERS (im Briefe vom April 1810) besonders über den unglücklichen Winter 1809/10²⁾. Die Weiterführung der Ceres-Störungen ist gänzlich unterblieben. Im Jahre 1810 beginnt er indessen, einen grossen Teil seiner Zeit den Störungen der Pallas zu widmen.

Entsprechend seinen Äusserungen OLBERS gegenüber (oben S. 196), dass die Berechnung der Störungen erst dann sich lohnen würde, wenn Pallas durch eine längere Reihe von Oppositionen hindurch beobachtet sei, untersucht er zunächst in der ersten Hälfte des Jahres 1810, wahrscheinlich im Frühsommer, ob sich bereits eine Einwirkung der Störungen nachweisen lässt; die entsprechenden Untersuchungen hat er in der *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis . . . oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809*³⁾ veröffentlicht. Die Ergebnisse zeigen die starke Einwirkung der Störungen; die Differenzen in der Länge betragen bis zu $3\frac{1}{2}'$ und die in der Breite fast $1\frac{1}{2}'$.

Inzwischen hatte die Pariser Académie des Sciences den schon im Jahre 1804 ausgesetzten Preis auf die Berechnung der Störungen der Planeten immer

1) Vergl. oben S. 41.

2) Vergl. oben S. 34.

3) Werke VI, S. 1.



von neuem aufgeschoben; GAUSS schreibt an OLBERS am 24. Oktober 1810: »Wüsste ich, dass das Institut die Preisfrage noch einmal prorogierte, so wäre ich nicht abgeneigt, die Pallas dazu zu wählen, sonst muss billig die Ceres den Vortritt haben, wo auch, weil bald die achte β beobachtet wird, eine grössere Satisfaktion zu erwarten ist. Bei der α würde ich doch wohl zuerst anfangen, die Elemente als variabel anzusehen und ihre Störungen während 7 Jahren durch Quadraturen zu bestimmen, wozu ich mir Formeln entworfen habe, die mir etwas bequemer scheinen als die LAPLACESCHEN. Falls es dann gelingt (wie es nicht anders zu erwarten ist), die 6 bisher beobachteten Oppositionen, die sich gar nicht mehr in eine Ellipse fügen wollen, gut zu vereinigen, so würde ich nach meiner schon vor 4 oder 5 Jahren entworfenen Methode die Störungen in der sonst üblichen Form, als periodische Störungen der Länge, der Breite und des Radiusvektor, oder noch besser seines Logarithmen berechnen.«

Danach beabsichtigte er zur Vorbereitung zuerst spezielle Störungen zu rechnen und zwar für die Elemente und sodann allgemeine Störungen für die Koordinaten. Auch hier zeigt sich, dass er zum Teil noch immer an den letzteren festhielt, obwohl er schliesslich ganz zu Elementenstörungen überging; denn er hat später auch bei den allgemeinen Störungen der Pallas Elementenstörungen benutzt.

Am 26. November 1810 berichtet er OLBERS über seine Berechnung der speziellen Störungen und wiederholt, dass er vielleicht auch die allgemeine Theorie der Störungen unternehmen wolle. Er fragt, ob OLBERS »durch seinen Wink in Paris eine nochmalige Verlängerung der Preisfrage veranlassen« könne. Die hier erwähnte Berechnung der speziellen Störungen bezieht sich auf die Werke VII, 1906, S. 473—482 abgedruckte erste Rechnung¹⁾.

Am 13. Dezember 1810 schreibt GAUSS an OLBERS, dass er die Rechnung vollendet und eine seine »kühnste Erwartung übertreffende Übereinstimmung herausgebracht« habe. Abgesehen von der schlecht beobachteten Breite der 5. Opposition (1808), die um $16''$ abweicht, ist die grösste Abweichung $6''$. Andererseits zeigte sich, dass die letzte von GAUSS auf Grund rein elliptischer Elemente abgeleitete und in der Monatl. Corr. veröffentlichte Ephemeride

¹⁾ Vergl. unten S. 233, 234.

schon über 1° falsch war. Er erwähnt in diesem Brief auch, dass er angefangen habe, die Rechnung der speziellen Störungen nochmals schärfer (die erste Rechnung berücksichtigte nur die Störungen erster Ordnung) auszuführen; im Dezember wurde er hiermit fertig.

Diese zweite Rechnung ist Werke VII, 1906, S. 483f. abgedruckt; sie ergab im wesentlichen eine ebenso gute Darstellung der Oppositionen, wie die erste. Da schon die Ergebnisse der ersten Rechnung so befriedigend waren, konnte eine noch bessere Übereinstimmung kaum erwartet werden und die übrigbleibenden sehr kleinen Fehler sind auf die Einwirkung der übrigen Planeten zu setzen. GAUSS berichtet über diese seine Rechnungen in der Monatl. Corr., Dezember 1810 und Januar 1811¹⁾ und sagt dort, dass er die Rechnung auch deswegen wiederholt habe, »weil bei dieser weitläufigen Arbeit hier und da Fehler sich eingeschlichen haben konnten.« Kleinere Fehler lassen sich in der Tat nachweisen und auch hieraus geht hervor, dass GAUSS in der Regel auf eine genaue Prüfung seiner einzelnen Rechnungen verzichtete und es vorzog, selbst eine längere Rechnung ganz von neuem zu wiederholen.

Im Juli oder August 1811 begann GAUSS die Berechnung der allgemeinen Störungen der Pallas. Er äussert sich jetzt über die Vorteile, die die Elementenstörungen bieten, in einem Briefe an OLBERS vom 12. August 1811, nachdem er die Rechnung für die Neigung und die Knotenlänge vollendet hatte: »Die 80 Gleichungen für Inklination und Ω liessen sich in 40 für die Breite zusammenziehen, ich glaube aber nicht, dass etwas gewonnen wird, denn wenn man die Elemente selbst stören lässt, so kann man ohne Bedenken einerlei gestörte Elemente als mehrere Monate gültig ansehen, und braucht also alle Jahre nur einmal für 6 Elemente die Störungen zu berechnen (vielleicht zusammen etwa 300—400 Gleichungen); dahingegen, wenn man bei den Elementen bloss Sekularänderungen anbringt und die periodischen bei Breite, Länge und Radiusvektor (zusammen vielleicht gegen 200), diese in einem Jahre doch wohl wenigstens für 6 verschiedene Örter berechnet werden müssten, um interpolieren zu können. Doch kann man dies in der Folge machen, wie man will, wenn nur erst alle Störungen in irgend einer Form da sind.«

¹⁾ Werke VI, S. 320—324.

Auch für die allgemeinen Störungen liegen zwei vollständige Rechnungen vor, die beide gänzlich auf der interpolatorischen Methode beruhen.

Die erste Rechnung¹⁾, bei der die 5. Potenzen der Exzentrizitäten und die 23. Potenzen des Verhältnisses der halben grossen Axen $a = \frac{a}{a'}$ berücksichtigt sind, dürfte im März 1812 vollendet worden sein. GAUSS verglich die Ergebnisse mit den Beobachtungen (den Oppositionen) und bestimmte die mittleren Elemente. Bei dieser Bestimmung scheint er die merkwürdige Entdeckung gemacht zu haben, dass die mittleren Bewegungen von Jupiter und Pallas sich wie 7 : 18 verhalten. Er schreibt darüber an BESSEL am 5. Mai 1812: „... habe ich mich hauptsächlich mit den Pallasstörungen durch Jupiter beschäftigt. Sie werden darüber in Nr. 67 unserer Gelehrten Anzeigen einiges gelesen haben. Ihnen teile ich das merkwürdige, daselbst in einer Chiffre niedergelegte Resultat gern mit, doch mit der Bitte, dass es vorerst ganz unter uns beiden bleibe. Es besteht darin, dass die mittlern Bewegungen von \mathcal{J} und \mathcal{P} in dem rationalen Verhältnis 7 : 18 stehen, was sich durch die Einwirkung Jupiters immer genau wieder herstellt, wie die Rotationszeit unsers Mondes. Ich habe mit einer zweiten Berechnung der periodischen Störungen bereits einen Anfang gemacht ...“

Die gleiche Mitteilung hat er in einem kürzlich aufgefundenen Briefe an OLBERS²⁾ gemacht; beide bittet er, über diese Entdeckung vorläufig zu schweigen; er legt sie indessen in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom 25. April 1812³⁾ in der Chiffre

1111000100101001

nieder, zu der er »zu seiner Zeit den Schlüssel geben« wollte. Das Letztere ist nun unterblieben und bei der Art und Weise, wie solche Chiffren gewählt zu werden pflegten, darf man auch nicht hoffen, die Lösung zu finden. Da man indessen aus dem Briefwechsel weiss, was sie bedeutet, so ist das auch gegenstandslos⁴⁾.

1) Vergl. unten S. 235 ff.

2) Werke XII, S. 243. Siehe auch die Antwort von OLBERS, Werke VII, 1906, S. 421.

3) Werke VI, S. 850.

4) Im dyadischen System gibt 111 die Zahl 7 und 10010 die Zahl 18.

Im Nachlass haben sich nur vereinzelte ganz spärliche Notizen über diese Entdeckung auffinden lassen; sie sind Werke VII, 1906, S. 557—559 mit den nötigen Ergänzungen abgedruckt¹⁾.

Von vornherein besteht kein Zweifel, dass GAUSS hier die Erscheinung meint, die LAPLACE bereits bei den Jupitersmonden entdeckt hatte²⁾ und die auch in der Theorie der kleinen Planeten eine Rolle spielt. Die Analogie mit der Rotation des Mondes, auf die GAUSS hinweist, ist allerdings nur eine äusserliche; sie hat aber wohl schon LAPLACE veranlasst, den Ausdruck Libration dafür zu gebrauchen.

GAUSS schreckte nicht davor zurück, die ganze gewaltig umfangreiche Rechnung der allgemeinen Störungen zu wiederholen³⁾ und dabei schärfer zu rechnen, indem er die 11. Potenzen der Exzentrizität berücksichtigte. Er begann diese Arbeit sofort im April (oder schon Ende März) 1812.

Über den ersten Teil dieser Rechnung hat GAUSS ein ausführliches *Tagebuch* geführt, das vom 5. April bis zum 25. November 1812 reicht und angibt, welche Rechnungen er an einzelnen Tagen vollendet, wieviel Ziffern er gerechnet hatte, wieviel noch zu rechnen übrig waren, und wann diese voraussichtlich fertig sein würden. Dies *Tagebuch* ist Werke VII, 1906, S. 605—607 abgedruckt; mit *Präparation der Jupiter- und der Pallasörter* bezeichnet GAUSS die Berechnung der Koordinaten dieser Planeten, aus denen weiter die Komponenten T , V , W der Störungsfunktion folgen.

Bei der Berechnung der Koordinaten, die im *Handbuch* Be, S. 97—99 steht, finden sich auch Notizen, nach denen GAUSS in der Tat die Ziffern gezählt hat, die er beim Rechnen hat schreiben müssen. Eine Nachzählung der Ziffern würde schon an sich eine gewaltige Arbeit sein.

Fast das ganze *Tagebuch* handelt, bis 9. Juli, nur von der Berechnung und Interpolation der Grössen T , V , W .

Nach dem *Tagebuch* erforderte diese das Schreiben von 338 400 Ziffern, dagegen die Berechnung der Störungen der halben grosse Achse 51 040, und die für Knoten, Neigung und Exzentrizität zusammen circa 140 000. Die ganze Arbeit wird man daher wohl auf 7—800 000 Ziffern schätzen können.

1) Vergl. unten S. 245.

2) *Mécanique céleste*, t. IV, 1805, S. 16 und 64 f.

3) Vergl. unten S. 237.

GAUSS' tägliche Leistung bewegt sich zwischen 2600 und 4400 Ziffern und beträgt im Durchschnitt 3500. Man darf wohl annehmen, dass GAUSS' Zeit zwischen dem 5. April und 25. November 1812 fast ausschliesslich mit diesen Rechnungen ausgefüllt war. Dabei umfassen die schliesslichen Störungsdrucke einschliesslich der sekularen Störungen:

im Knoten	105	Störungsglieder
in der Neigung	105	»
in der Perihellänge	184	»
im Exzentrizitätswinkel	124	»
im Logarithmus der halben grossen Achse	145	»
in der mittleren Länge in der Epoche	161	»

Die zweite Rechnung der allgemeinen Jupiterstörungen der Pallas hatte GAUSS im Juli 1813 vollendet; aber erst im Herbst 1816 begann er, deren Ergebnisse in Tafeln zu bringen, durch die die Berechnung der Störungsbeträge, die sonst einzeln aus den Störungsgleichungen berechnet werden müssen, ausserordentlich erleichtert wird; diese Tafeln sind vollkommen erhalten und Werke VII, 1906, S. 572—577 abgedruckt. Ihre Berechnung wurde zum grossen Teil von ENCKE ausgeführt und sie wurden im Spätherbst 1817 fertig.

Die Störungen der Pallas durch Saturn und Mars sind nicht bedeutend; schon im Frühjahr 1813 dachte GAUSS daran, auch sie zu berücksichtigen. Die ersteren zu berechnen übernahm in jener Zeit NICOLAI, und zwar nach einer Methode, die sich nur in unwesentlichen Punkten von der von GAUSS bei den Jupiterstörungen benutzten unterscheidet. Sie wurden im Juli 1815 vollendet. In GAUSS' Nachlass finden sich die Briefe von NICOLAI an GAUSS nebst den Rechnungsergebnissen von NICOLAI; die Rechnungen selbst werden auf der Heidelberger Sternwarte aufbewahrt. Von GAUSS' Hand findet sich darüber nirgends etwas vor.

Wie GAUSS verschiedentlich an OLBERS berichtet¹⁾, verschlechterte die Berücksichtigung der Saturnstörungen erheblich die sonst gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen, und es hat sich nicht aufklären lassen, ob sich bei den NICOLAISCHEN Rechnungen ein Fehler eingeschlichen hat oder ob der

1) Briefe an OLBERS vom 15. Juni 1814, 2. Dezember 1817.

Grund wo anders zu suchen ist. Es wäre auch heute noch von Interesse, diese Rechnungen nochmals durchzusehen und womöglich zu veröffentlichen. Im Briefe an OLBERS vom 15. Juni 1814 sagt GAUSS, dass die Übereinstimmung besser wird, wenn er allen Störungen der Epoche das entgegengesetzte Vorzeichen gibt. Da nach Werke VII, 1906, S. 587 bei den Störungen durch Mars die gleichen Formeln mit entgegengesetztem Vorzeichen benutzt sind, so liegt der Verdacht eines Fehlers im Vorzeichen allerdings nahe.

Die Berechnung der Störungen der Pallas durch Mars sollte nach einem Briefe von GAUSS an OLBERS vom 8. April 1813¹⁾ anscheinend ENCKE übernehmen; indessen sehen wir, dass GAUSS selbst 1814 mit dieser Berechnung beginnt und dabei teilweise eine neue besondere Methode anwendet, die man wieder, wie die zweite Rechnung der Ceresstörungen, als eine gemischt analytische und interpolatorische bezeichnen kann, und bei der er das Verhalten der Funktion $r^2 + r'^2 - 2rr' \cos w$ im komplexen Gebiet untersucht²⁾.

Schon im Sommer 1802 äussert sich GAUSS in Briefen an OLBERS dahin, dass die neuen Planeten und insbesondere Pallas ein vorzügliches Mittel bieten werden, um die Jupitermasse zu bestimmen und im April 1814 machte er den ersten Versuch hierzu, indem er auch diese Masse in die Gleichungen zur Verbesserung der Elemente einführte; die entsprechende Rechnung ist Werke VII, 1906, S. 562 f. abgedruckt. Er fand hier den Wert $\frac{1}{1042,86}$. Nach einer späteren Rechnung, über die er im Briefe an OLBERS vom 24. Juli 1816 berichtet und bei der die Saturn- und Marsstörungen berücksichtigt sind, fand er die Jupitermasse gleich $\frac{1}{1050}$, also einen sehr genauen Wert, da sie nach den besten Bestimmungen von NEWCOMB $\frac{1}{1047,4}$ beträgt.

Die Rechnung der Marsstörungen ist der einzige Teil von GAUSS gewaltigem Unternehmen über die Pallas, der nicht vollendet ist und hier war die noch zu leistende Arbeit sehr gering.

Die Pariser Preisfrage war inzwischen auf das äusserste bis zum Jahre 1816 hinausgeschoben worden. OLBERS schreibt an GAUSS am 25. Januar 1815: »Ich hoffe doch . . . Sie werden Ihre Methode dem Pariser Institut mitteilen. Nur Ihretwegen hat man den Preis so lange offen gelassen.« GAUSS kam aber nicht dazu, die Arbeit fertigzustellen und einzusenden; er schreibt an OLBERS

1) Werke VII, 1906, S. 422.

2) Vergl. unten, S. 249 ff.

am 8. Januar 1816: »Sollte der Preis nunmehr ausgegeben oder zurückgenommen sein, so würde ich meine Theorie nunmehr entweder stückweise in den Kommentaren oder auch in einer besondern Schrift herauszugeben denken«. Es scheint, dass man GAUSS nochmals Gelegenheit geben wollte, sich um den Preis zu bewerben; denn OLBERS schreibt ihm am 7. März 1816: »... Jetzt eile ich nur, Ihnen wegen der Preisaufgabe zu Paris, wenn sie es etwa noch nicht erfahren haben sollten, das Nähere zu melden. Der Ausspruch über den Preis wegen der Perturbationen der Planeten, namentlich der Pallas, ist wieder bis zum Jahr 1817 vertagt worden. Doch müssen die Schriften vor dem 1. Oktober 1816 eingesandt sein. Die Preisfrage war: »Die Theorie der Planeten, deren Exzentrizität und Neigung zu gross sind, als dass wir im Stande wären, ihre Störungen nach den schon bekannten Methoden genau zu berechnen«. Die Klasse verlangt keine numerische Anwendung, sondern nur analytische Formeln, aber so eingerichtet, dass ein geschickter Rechner fähig sei, sie mit Sicherheit entweder auf den Planeten Pallas, oder auf einen andern der neu entdeckten oder noch zu entdeckenden Planeten anzuwenden. — Es waren nur zwei Abhandlungen eingelaufen, deren Verfasser aber die ausgesprochene Absicht der Klasse in der Preisankündigung nicht genug berücksichtigt haben. Beide (besonders der eine) haben noch zu mancherlei analytische Entwicklungen vorbeigelassen, die die Mathematiker noch erst machen müssten, um sie in den Stand zu setzen, die Auflösung des Problems, die sie gegeben haben, verstehen und beurteilen zu können. Sie haben es zu sehr versäumt, sich bis zu dem Standpunkte des Kalkulators herabzulassen, der nun wünschen sollte, Tafeln für die Pallas oder irgend einen andern Planeten zu bilden. Die Nachträge, die sie zu verschiedenen Zeiten eingeschickt haben, sind weit entfernt, alle diese Schwierigkeiten zu heben. Da die Klasse aus diesen Nachträgen und aus den eingeschickten Notizen der anonymen Verfasser ersehen hat, dass sie nicht Zeit hatten, sich in alle die notwendigen Entwicklungen einzulassen, und zugleich in Erwägung zieht, dass auch vielleicht andere Mathematiker, die die Fähigkeit und Geschicklichkeit besitzen, diesen schwierigen Gegenstand zu behandeln, aus derselben Ursache abgehalten worden sind, als Preisbewerber aufzutreten, so hat sie die Preisverteilung noch bis Januar 1817 ausgesetzt. — Der Preis ist doppelt, eine goldene Medaille, 6000 Francs wert ...«

Im oben erwähnten Brief an OLBERS vom 8. Januar 1816 sagt GAUSS, dass er seine Theorie jetzt ausarbeiten wolle; wahrscheinlich war zu dieser Zeit die Werke VII, 1906, S. 439—472 abgedruckte Handschrift, von der zwei Entwürfe im Nachlass vorhanden sind, zum Teil schon entstanden; man wird jedenfalls den zweiten Entwurf in das Jahr 1816 setzen müssen, während der erste auch schon vor diesem Briefe, also 1815, abgefasst sein könnte.

Da das Manuskript in französischer Sprache geschrieben ist, so war es wohl für die Einsendung nach Paris bestimmt; aber auch bis zu dem letzten von der Pariser Akademie gesetzten Termin, dem 1. Oktober 1816, wurde GAUSS nicht fertig. Im Briefwechsel mit OLBERS finden sich keine weiteren Anspielungen auf diese Angelegenheit; GAUSS war in dieser Zeit sehr stark mit der Einrichtung der neuen Sternwarte beschäftigt und reiste im April zur Besprechung mit REICHENBACH und FRAUNHOFER über instrumentelle Einrichtungen nach München¹⁾; vom Juli 1816 bis Februar 1817 ruhte der Briefwechsel mit OLBERS ganz. Jedoch setzte GAUSS daneben zunächst noch seine Arbeiten über Pallas fort. In das Jahr 1817 fällt, wie oben erwähnt, die Entwerfung der Tafeln für die Jupiterstörungen. Im März 1818 hatte er die zwölf Oppositionen aus den Jahren 1803—1817 verglichen und daraus neue mittlere Elemente bestimmt; er teilt dies ENCKE in einem Brief vom 25. März 1818 mit und bittet ihn, nun auch »die scharfe Vergleichung der sämtlichen Meridianbeobachtungen der Pallas vom April und Mai 1802 mit den oskulierenden Elementen zu übernehmen«.

Diese Rechnung hat ENCKE auch ausgeführt.

In der Folgezeit kam GAUSS nicht wieder dazu, sich mit der Pallas oder überhaupt mit Fragen der theoretischen Astronomie eingehend zu beschäftigen. Neben den Untersuchungen und den Beobachtungen mit den neuen für die Sternwarte erworbenen Instrumenten war es vor allem seit dem Jahre 1820 die Hannoversche Landesvermessung, die ihn in Anspruch nahm. Er schreibt am 17. März 1822 an SCHUMACHER: »... Was die Pallastafeln betrifft und die letzten Elemente, so sind alle darauf Bezug habenden Papiere so vereinzelt, dass es mir jetzt platterdings unmöglich ist, mich gleich wieder so hineinzustudieren, dass ich zur zuverlässigen Berechnung Anleitung geben könnte. Falls nicht noch etwas dazwischen kommt, was dieses Jahr die Fortsetzung meiner

¹⁾ Vergl. oben S. 85.

Messungen suspendiert oder verhindert, so müssen die Astronomen sich diesmal helfen so gut sie können . . . » und am 8. Februar 1834 an GERLING »Ich habe dieser Tage (nach mehrjähriger Unterbrechung) die der Opposition nahe Pallas zu beobachten angefangen, wo ENCKES Ephemeride etwa 5' fehlt. Es ist mir dabei ein schmerzlicher Gedanke, dass meine vor mehr als 20 Jahren gemachte Arbeit über die Pallasstörungen ohne Fortsetzung, Entwicklung und Bekanntmachung bisher hat bleiben müssen, auch wahrscheinlich wie vieles Andere einst mit mir untergehen wird. Sie glauben nicht, wie schwer es mir durch so vielfache Zersplitterung der Zeit so wie unter dem Druck so mancher Verhältnisse¹⁾ wird, eine wissenschaftliche Arbeit durchzuführen . . . » und endlich in einem Briefe an BESSEL vom 21. März 1843: »Die erste Abhandlung²⁾ über die Jupitermasse hat bei mir eine Erinnerung geweckt, die mir immer schmerzhaft ist, nämlich an meine alte Arbeit über die Pallasstörungen. Sie ist seit fast einem Vierteljahrhundert mir so fremd geworden, dass es mir schwer wird, mich selbst in den vorhandenen Papieren zu orientieren . . . »; er fügt hinzu, dass »das letzte, was sich« unter seinen Papieren »vorfindet, die Berechnung und Vergleichung der 14. Opposition vom 6. Januar 1820« ist.

Bekanntlich fand HANSEN bei der Bearbeitung der Störungen des ENCKESCHEN Kometen ein ähnliches Verfahren zur Berechnung der Störungen wie das von GAUSS angewandte, das er 1843 veröffentlichte; er schrieb darüber an GAUSS und schickte ihm seine Abhandlung *Darlegung eines Verfahrens, um die absoluten Störungen der Himmelskörper, welche sich in Bahnen von beliebiger Neigung und elliptischer Excentricität bewegen, zu berechnen*³⁾. GAUSS antwortet ihm am 11. März 1843⁴⁾: »Von einer Woche zur andern ist mein Dank für die gefällige Übersendung des Berliner Monatsberichts (der um dieselbe Zeit auch auf gewöhnlichem Wege mir zu Gesicht kam) verschoben, weil ich hoffte einige Zeit zu gewinnen, in den Gegenstand etwas weiter in meiner Antwort eingehen zu können. Leider ist diese Hoffnung getäuscht, und selbst in den bevorstehenden Ferien, für welche sich schon im voraus so viele Rückstände

1) Vergl. oben S. 141—143. — BRDL.

2) Gemeint ist BESSELS *Bestimmung der Masse des Jupiter*, *Astronomische Untersuchungen II*, S. 1. — BESSELS Werke III, S. 248. — BRDL.

3) Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1843.

4) Werke VII, 1906, S. 436.

und neue Abhaltungen gesammelt haben, darf ich mir kaum Hoffnung für einige freie Musse machen.

Ich beschränke mich daher darauf, meine Freude darüber auszusprechen, dass Sie bei den Perturbationsrechnungen auf ähnliche Art verfahren, wie ich schon vor mehr als 30 Jahren bei meinen weitumfassenden Rechnungen über die Pallasstörungen zu Werke gegangen bin, in so fern Sie den Gebrauch von Reihen nach den Excentricitäten und Neigungen ganz kassieren. Freilich haben Sie für die Kometenstörungen auch ganz besondere, noch andere Untersuchungen nötig gehabt, zu denen für die Pallas keine Veranlassung sich fand, und überhaupt in vielen andern Beziehungen abweichende Wege eingeschlagen. Bei den Störungen der Pallas durch Jupiter brauchte ich die Methode der variablen Elemente und zwar mit Vorbedacht, denn obgleich man so 6 Elemente zu behandeln hat, während bei dem andern Verfahren nur halb so viele sind, so habe ich doch für den praktischen Gebrauch jenes vorgezogen; man braucht die Rechnung für jedes Jahr nur einmal (für einen Tag) zu machen, wozu ich eine besondere Hilfstafel konstruierte, vermittelt welcher in vergleichungsweise sehr kurzer Zeit die Rechnung absolviert werden kann, obgleich zusammen 801 Gleichungen (1602, wenn die Sinus- und Cosinus-Glieder desselben Arguments getrennt gezählt werden; es sind vollständig alle, deren Koeffizient über 0,1 geht) berücksichtigt worden¹⁾. Durch sehr einfache Mittel kann man dann das Resultat für die ganze Beobachtungs-Saison ausreichend machen, ohne der Schärfe etwas zu vergeben. Auch die Störung durch Saturn wurde berechnet und die durch Mars nach einer wesentlich verschiedenen Methode angefangen, aber nicht vollendet. Andere immer weiter sich verzweigende Geschäfte haben mir später gar nicht erlaubt, auf jene Arbeiten wieder zurückzukommen, und es steht dahin, ob in meinem Alter ich Musse und Lust haben werde, mich wieder in die Sachen hineinzuarbeiten, da noch so viele andere Dinge sind, die ich eben so ungern untergehen lassen möchte. Sie sind sehr glücklich, dass Sie in einer äussern Lage sind, wo Sie Ihre Zeit nicht zu versplittern brauchen, und es wird mir jedenfalls zur Be-

1) Es ist wohl unnötig zu bemerken, dass die Arbeit, von der ich jetzt spreche, ganz verschieden ist von der gleichfalls von mir für den ganzen Zeitraum von 1802 bis etwa 1818 oder 1820 fortgeführten Rechnung durch Quadratur; diese nenne ich spezielle, jene generelle Rechnung und letztere hat in jener eine bei so ausgedehnten Rechnungen höchst notwendige Kontrolle gefunden.

ruhigung gereichen, dass dieser Zweig der Astronomie bei Ihnen in den besten Händen ist. Ob ich bei den Marsstörungen etwas mit Ihrer mir angezeigten Integrationsart zusammenhängendes gebraucht habe, kann ich jetzt, wo mir die Sachen seit fast 25 Jahren entfremdet sind, nicht bestimmt ermitteln, möchte es aber fast bezweifeln . . .

V. Störungen der Ceres.

1. Erste Methode.

Im Oktober (oder schon im September) 1802 machte sich GAUSS an die erste Berechnung der Störungen der Ceres¹⁾, die er in der Form der Koordinatenstörungen ausführte, wesentlich nach den von LAPLACE und SCHUBERT gegebenen Methoden, nach denen auch ORIANI die Hauptstörungen der Ceres und BURCKHARDT die der Pallas berechnet hatte. Er entwickelte sich aber seine Formeln selbst; die Entwicklungen finden sich im Nachlass ausserordentlich zerstreut in den *Schedae* und den *Handbüchern* vor.

Das ihm Eigne ist in erster Linie die Entwicklung der Störungsfunktion, bei der er seine Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel ausnutzen konnte.

Die Gleichungen für die Störungen²⁾ nehmen bei ihm die folgende Form an³⁾:

$$52) \quad \begin{aligned} \delta r &= \frac{\mu a}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \{ \cos V \int r Q \sin V. n dt - \sin V \int r Q \cos V. n dt \} \\ \delta v &= \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ \frac{2r \delta \rho + \rho \delta r}{a^2 n dt} + 3 \mu a \int \int \partial R. n dt + 2 \mu a \int r \left(\frac{dR}{dr} \right) n dt \right\} \\ \theta &= \frac{\mu a}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ \cos V \int r \left(\frac{dR}{dz} \right) \sin V. n dt - \sin V \int r \left(\frac{dR}{dz} \right) \cos V. n dt \right\} \end{aligned}$$

1) Werke VII, 1906, S. 377 ff.

2) Ebenda, S. 381.

3) r, r' Radiusvektoren von Ceres und Jupiter,

δr Störungen des Radiusvektor,

δv Störungen der Länge in der Bahn,

θ Breite über der als fest angenommenen ungestörten Bahnebene,

μ Jupitermasse,

a, ε, n Bahnelemente der Ceres,

V wahre Anomalie, wofür auch die wahre Länge v gesetzt werden kann,

$\rho = \delta r$.

wo⁴⁾

$$53) \quad \begin{aligned} R &= \frac{r \cos w}{r^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}} \\ \mathfrak{R} &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos w} \\ Q &= 2 \int \partial R + r \left(\frac{dR}{dr} \right) \\ \left(\frac{dR}{dz} \right) &= z' \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \right). \end{aligned}$$

Es kommt darauf an, alle unter den Integralzeichen vorkommenden Grössen nach Vielfachen von nt oder der mittleren Längen und Anomalien von Ceres und Jupiter zu entwickeln, damit die Integrationen direkt ausgeführt werden können. Dies erfordert zunächst die Entwicklung von $r, r', w, \sin V, \cos V$ und sodann die von R und Q nach Vielfachen der mittleren Anomalien M und M' und damit auch nach Potenzen der Exzentrizitäten; diese Entwicklung führt GAUSS direkt aus, indem er nur die ersten Potenzen der Exzentrizitäten berücksichtigt.

Ist nämlich etwa

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = f(r, r', w) \quad f_0 = f(a, a', D) = (a^2 + a'^2 - 2 a a' \cos D)^{-1/2},$$

wo $D = M - M' + \text{constans}$, und setzt man

$$\begin{aligned} r &= a(1 + \Delta r) & \Delta r &= e \cos M \\ r' &= a'(1 + \Delta r') & \Delta r' &= e' \cos M' \\ w &= D + \Delta w & \Delta w &= -2e \sin M + 2e' \sin M', \end{aligned}$$

wo $\Delta r, \Delta r', \Delta w$ die Exzentrizitäten enthalten, so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial a} a \Delta r + \frac{\partial f_0}{\partial a'} a' \Delta r' + \frac{\partial f_0}{\partial D} \Delta w.$$

Sodann sind aber f_0 und seine Ableitungen nach Vielfachen von D zu entwickeln.

1) $z = r\theta$ Abstand der Ceres von der ungestörten Bahnebene,

z' Abstand des Jupiter von der ungestörten Bahnebene,

\mathfrak{R} Abstand zwischen Jupiter und Ceres,

w Winkel zwischen den Radiusvektoren von Ceres und Jupiter,

$\left(\frac{dR}{dr} \right)$ und $\left(\frac{dR}{dz} \right)$ partielle Ableitungen von R ,

∂R Ergebnis der Differentiation von R , wenn nur die Koordinaten der Ceres variiert werden.

Zur Entwicklung von f_0 braucht man die der Grösse

$$54) \quad (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos D)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} P^0 + P' \cos D + P'' \cos 2D + \dots$$

und zur Entwicklung von $\frac{\partial f_0}{\partial a}, \frac{\partial f_0}{\partial a'}, \frac{\partial f_0}{\partial D}$ die der Grösse

$$55) \quad (a^2 + a'^2 - 2aa' \cos D)^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} Q^0 + Q' \cos D + \dots$$

Ausserdem braucht man auch die Entwicklung von

$$(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos D)^{-\frac{5}{2}}$$

um die Ausdrücke für ∂R und $\left(\frac{dR}{dr}\right)$ herzustellen.

Schon LAPLACE¹⁾ und vor ihm EULER²⁾ zeigten, dass sämtliche Koeffizienten dieser Reihen sich durch Rekursion berechnen lassen, sobald man P^0 und P' kennt, und auch GAUSS leitet sich solche Rekursionsformeln ab. Sie sind hauptsächlich im *Handbuch* Bb, S. 16, entwickelt und finden sich auch an anderen Stellen des Nachlasses; abgedruckt sind sie Werke VII, 1906, S. 384. Zur Berechnung von P^0 und P' ist LAPLACE über gezwungen, die bei nicht sehr kleinem α schwach konvergenten Reihen

$$56) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} a' P^0 &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 \alpha^4 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \alpha^6 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \alpha^8 + \dots \\ -\frac{a'^2}{a} P' &= 1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \alpha^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} \alpha^4 - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \alpha^6 + \dots \end{aligned}$$

zu benutzen, wo $\alpha = \frac{a}{a'}$.

GAUSS war infolge seiner Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel im Stande, zur Berechnung dieser Koeffizienten ein sehr stark konvergentes Verfahren einzuschlagen, da P^0 nichts anderes ist, als das reziproke arithmetisch-geometrische Mittel aus $\frac{1}{2}(a+a')$ und $\frac{1}{2}(a-a')$, und auf ähnliche Weise auch P' gefunden werden kann. Ihm waren zu jener Zeit (1802) sicherlich die Integraldarstellungen

$$P^{(n)} = \frac{2}{\alpha^n} \alpha^{n+1} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}}$$

geläufig und ebenso die Beziehungen dieser Integrale für $n = 0$ und 1 zum

1) *Mécanique céleste*, t. I., S. 227 ff.

2) *Institutiones calculi integralis* I § 279. LEONHARDI EULERI, Opera omnia, series I, vol. 11, S. 165 ff.

arithmetisch-geometrischen Mittel. In der unvollendeten Handschrift *De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithm.-geometricorum*¹⁾, in der er sich ausdrücklich auf die Anwendung seiner Untersuchungen zur Entwicklung der Störungsfunktion bezieht, befolgt er zur Berechnung von P^0 den folgenden Gedankengang²⁾:

Es sei

$$57) \quad \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 \cos^2 \varphi}} = P + 2Q \cos 2\varphi + 2R \cos 4\varphi + 2S \cos 6\varphi + \dots$$

Indem man auf beiden Seiten zwischen den Grenzen 0 und π integriert, erhält man

$$58) \quad \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - u^2 \cos^2 \varphi}} = \pi P.$$

Andererseits ist aber

$$59) \quad \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - u^2 \cos^2 \varphi}} = \int_0^\pi \left\{ 1 + \frac{1}{2} u^2 \cos^2 \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} u^4 \cos^4 \varphi + \dots \right\} d\varphi \\ = \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 u^4 + \dots \right\} \pi.$$

Es ist also

$$60) \quad P = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 u^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 u^4 + \dots$$

In der *Handschrift* wird nun bewiesen, dass die Entwicklung des reziproken arithmetisch-geometrischen Mittels aus $1+u$ und $1-u$ nach Potenzen von u ebenfalls die vorstehende Reihe ergibt; es ist also

$$61) \quad P = \frac{1}{M(1+u, 1-u)} = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-u^2})}.$$

Der Ausdruck $(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos D)^{-\frac{1}{2}}$ lässt sich auf die Form $\frac{1}{c\sqrt{1 - u^2 \cos^2 \varphi}}$ bringen, wenn man setzt

$$62) \quad u^2 = \frac{4aa'}{(a+a')^2}, \quad c = a+a', \quad \varphi = \frac{D}{2}.$$

1) Werke III, S. 341.

2) Vergl. auch SCHLESINGER, *Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie*, Materialien, Heft III, S. 33f. XI 2 Abb. 3.

Es ist also

$$63) \quad P^0 = \frac{2}{c} P = \frac{1}{M\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2} \sqrt{1-u^2}\right)} = \frac{1}{M\left(\frac{a'+a}{2}, \frac{a'-a}{2}\right)}.$$

Zur Bestimmung von Q und damit auch von $P' = \frac{2}{c} Q$ bietet der zweite Teil der *Handschrift* nur die Entwicklung von $dM(x, y)$. Da GAUSS hier ein Zahlenbeispiel vom Planeten Ceres entnimmt, so ist wohl anzunehmen, dass hier auch die Beziehungen zur Bestimmung von Q abgeleitet werden sollten. Indes bricht die *Handschrift* hier ab. Dagegen finden sich an anderen Stellen des Nachlasses Entwicklungen zur Berechnung von P und Q . In der *Scheda* A c entwickelt¹⁾ GAUSS den Ausdruck

$$(\mu^2 - \cos^2 \varphi)^{-1} = A + 2B \cos 2\varphi + \dots$$

und erhält, indem er $A = F(\mu)$, $B = G(\mu)$ setzt, die Funktionalgleichungen

$$F\left(\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)\right) = 2\mu F(\mu^2)$$

$$G\left(\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)\right) = \frac{1}{\mu} G(\mu^2) + \frac{1}{\mu} F(\mu^2).$$

Für den Quotienten $\frac{G}{F} = \frac{A}{B}$ gibt er dann die dort angegebene Reihe²⁾, die der unten unter 74) abgeleiteten entspricht.

In derselben *Scheda* entwickelt er an anderer Stelle³⁾ den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2 \sin^2 \varphi}} = A - 2A' \cos 2\varphi + \dots$$

und gibt die expliziten Reihen für A und A' , womit man die unten abgeleiteten Reihen 64) und 65) vergleichen kann⁴⁾.

Zur Ergänzung der in der genannten *Handschrift* gegebenen Entwicklungen kann der folgende Gedankengang dienen: Man hat

$$\frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{1-u^2 \cos^2 \varphi}} = Q + (P+R) \cos 2\varphi + (Q+S) \cos 4\varphi + \dots$$

1) Werke X, 1, S. 188.

2) Ebenda, Gleichung [28].

3) Ebenda, S. 198, [6].

4) Vergl. hierzu H. GEPPERT, *Nachlass zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion von C. F. Gauss*, OSTWALDS Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 225, 1927, §§ 8-10, insbesondere S. 46-47.

und hieraus

$$\int_0^\pi \frac{\cos 2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-u^2 \cos^2 \varphi}} = \pi Q,$$

also

$$64) \quad \int_0^\pi \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-u^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} (P+Q).$$

Entwickelt man diesen Ausdruck ähnlich wie den Ausdruck 59), so erhält man

$$65) \quad \frac{1}{2} (P+Q) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} u^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{5}{6} u^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{7}{8} u^6 + \dots;$$

hieraus und aus 60) folgt

$$66) \quad \frac{1}{2} (P-Q) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} u^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{1}{6} u^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{1}{8} u^6 + \dots$$

Aus den beiden letzten Entwicklungen kann man auch die für Q herstellen, worauf wir jedoch hier verzichten.

Differenziert man 60) nach u^2 , so wird

$$67) \quad \frac{dP}{du^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 2u^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 3u^4 + \dots$$

und hieraus findet man

$$68) \quad (1-u^2) \frac{dP}{du^2} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{8} u^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{1}{12} u^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{1}{16} u^6 + \dots,$$

also nach 66)

$$(1-u^2) \frac{dP}{du^2} = \frac{1}{4} (P-Q)^2$$

und

$$69) \quad \frac{Q}{P} = 1 - 2 \frac{1-u^2}{u} \frac{1}{P} \frac{dP}{du}.$$

Nach 61) ist aber

$$70) \quad \frac{1}{P} \frac{dP}{du} = - \frac{1}{M(1, \sqrt{1-u^2})} \frac{dM(1, \sqrt{1-u^2})}{du}.$$

Am Schlusse der genannten *Handschrift*²⁾ gibt GAUSS die Formel

$$71) \quad dM(x, y) = \frac{M(x, y)}{2x} \left\{ \frac{dx}{x} (z + 2z' + 4z'' + \dots) + \frac{dy}{y} (z - 2z' - 4z'' \dots) \right\}$$

1) Man vergleiche hierzu die Bemerkungen von SCHLESINGER, Werke X, 1, S. 285.

2) Werke III, S. 373.

wo

$$72) \quad \begin{aligned} z &= x^2 - y^2 \\ z' &= x'^2 - y'^2 \\ z'' &= x''^2 - y''^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

und

$$x' = \frac{x+y}{2}, \quad y' = \sqrt{xy}, \quad x'' = \frac{x'+y'}{2}, \quad y'' = \sqrt{x'y'},$$

die nach dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels gebildeten Grössen sind. Hieraus hat man

$$73) \quad \frac{1}{M(1, \sqrt{1-u^2})} \frac{dM(1, \sqrt{1-u^2})}{du} = -\frac{1}{2z} \frac{u}{1-u^2} (z - 2z' - 4z'' - \dots)$$

und daher nach 69) und 70)

$$74) \quad \frac{Q}{P} = \frac{2}{z} (z' + 2z'' + 4z''' + \dots);$$

die Grössen $z, z', z'' \dots$ sind nach 72) zu bilden, und zwar, da sie mit einem Proportionalitätsfaktor multipliziert werden können, mit den Werten

$$x = C, \quad y = C\sqrt{1-u^2}.$$

Wenden wir die Formel 74) auf die Entwicklung 54) an, so wird in Übereinstimmung mit der Gleichung¹⁾ für P'

$$75) \quad \frac{P'}{P^2} = \frac{2}{z} (z' + 2z'' + 3z''' + \dots)$$

wo nach 62)

$$x = C, \quad y = \frac{a'-a}{a'+a}.$$

Wählt man

$$C = \frac{a'+a}{2},$$

so erhält man auch für z, z', z'', \dots die gleichen Werte wie in Werke VII.

In dem Werke X, 1, Seite 237 abgedruckten Briefe an BESSEL gibt GAUSS eine später von ihm aufgefundenen Entwicklungsmethode, über die man unten Seite 231 ff. vergleiche. Eine Kettenbruchentwicklung für den Quotienten $\frac{P'}{P^2}$ findet sich jedoch schon aus dem Jahre 1800 in der *Scheda* Ac²⁾.

1) Werke VII, 1906, S. 355.

2) Abgedruckt Werke X, 1, S. 155; man vergleiche die Bemerkungen von SCHLESINGER, ebenda, S. 288.

Die Integrationen bieten, sobald die Entwicklungen ausgeführt sind, nichts besonderes, da nur die Divisoren anzubringen sind; die sekularen Glieder verwandelt GAUSS in Störungen der Exzentrizität und der Aphellänge bezw. der Neigung und der Knotenlänge.

GAUSS stützte seine Rechnung auf die Cereselemente VII; mit Hilfe der so gefundenen Störungen verbesserte er diese Elemente und berechnete die Störungen aufs neue, um daraus schliesslich die Elemente VIII abzuleiten. Mitte Oktober 1802 hatte er diese Arbeit vollendet, wie er OLBERS in einem Briefe vom 12. Oktober dieses Jahres mitteilt; die Störungsgleichungen sind in der *Monatl. Corresp.*, Bd. VI, Seite 492–498¹⁾ veröffentlicht.

2. Tafeln der Ceresstörungen.

Zur Vergleichung der Beobachtungen mit der Rechnung und zu der darauf beruhenden Verbesserung der Elemente ist der Betrag der Störungen nach den erhaltenen Störungsgleichungen zu berechnen. Diese langwierige Arbeit kann durch Entwerfen von Tafeln abgekürzt werden.

GAUSS sagt darüber²⁾: »In der Zeit, dass ich nach den Störungsformeln den numerischen Wert berechne, könnte ich mehr wie eine Bahnbestimmung machen« und entwirft nach folgenden Grundsätzen eine Tafel der Ceresstörungen:

Die von den Exzentrizitäten unabhängigen Störungsglieder hängen nur vom Argument $\varphi - \mathcal{A}$ ³⁾ und seinen Vielfachen ab, können also für dies Argument tabuliert werden. Diesen Teil der Störungen nennt GAUSS den ersten Teil und tabuliert ihn⁴⁾ in Tafel I (Länge) und Tafel III (Radiusvektor). Die Störungsglieder, die die erste Potenz der Exzentrizitäten enthalten, sind von der Form

$$\alpha \frac{\sin(iD - \varphi - c)}{\cos},$$

wo α , und c , numerisch gegebene Konstanten sind, $D = \varphi - \mathcal{A}$ ist und i eine

1) Werke VI, S. 227–230.

2) Brief an OLBERS vom 12. Oktober 1802.

3) \mathcal{Z} mittlere Länge der Ceres, \mathcal{J} mittlere Länge des Jupiter.

4) Werke VI, S. 237, vergl. auch Werke VII, 1906, S. 396 f.

ganze positive oder negative Zahl oder Null bedeutet. Die Summe aller dieser Glieder mit verschiedenem i lässt sich auf die Form bringen¹⁾

$$A \sin(\varphi - \varrho),$$

wo A und φ nur von D abhängen und für dieses Argument tabuliert werden können. Hierbei gebraucht GAUSS einen besonderen Kunstgriff; man kann nämlich allgemein statt φ auch eine Grösse $B + nD$ einführen, wo dann B gleichfalls als Funktion von D tabuliert werden kann und die obige Summe die Form

$$A \sin(B + nD - \varrho)$$

annimmt. Der Vorteil der Einführung von B liegt darin, dass man n so wählen kann, dass B sich möglichst langsam mit der Zeit, also mit D , ändert, wodurch die Entnahme aus der Tafel wesentlich erleichtert wird. GAUSS wählt für Ceres $n = 2$, offenbar weil das Hauptstörungsglied das Argument $2D - \varrho - e_2$ hat.

Auffallend ist, dass GAUSS auch die kleinsten Störungsglieder berücksichtigt und nur beiläufig²⁾ von der Fortlassung der kleineren, »die einzeln unter 2" betragen«, spricht, und dass er die Tafelwerte bis auf Zehntel Sekunden angibt, obwohl er doch bereits die von den zweiten Potenzen der Exzentrizitäten abhängenden Glieder nicht berücksichtigt hat.

Auch hier zeigt sich, wie bei vielen anderen Gelegenheiten, GAUSS' Neigung, die Rechnung mit weit mehr Stellen auszuführen, als der Genauigkeit der zugrundeliegenden Zahlen entspricht.

3. GAUSS' zweite Methode zur Berechnung der Störungen der Ceres. (*Theoria interpolationis.*)

Da GAUSS von den Ergebnissen seiner ersten Methode nicht befriedigt war, schlug er einen neuen Weg zur Entwicklung der Störungsfunktion und der davon abhängenden Grössen ein.

Ganz neue Gesichtspunkte boten sich ihm hier durch seine Untersuchungen über Interpolationstheorie, wie sie in seiner nachgelassenen Handschrift *Theoria*

1) Vergl. Werke VI, S. 236.

2) Ebenda, S. 235.

interpolationis methodo nova tractata niedergelegt sind¹⁾. Es scheint, dass dies Manuskript zum Teil unter der Einwirkung des Gedankens der Anwendung auf die Berechnung der Störungen entstanden ist; insbesondere kommen die Untersuchungen der art. 10 f. in Betracht.

Es tritt hier an die Stelle der analytischen Entwicklung einer periodischen Funktion in eine Reihe, bei der die Herstellung der allgemeinen Ausdrücke für die Koeffizienten allzu verwickelt wird, die interpolatorische, rein numerische Entwicklung²⁾. Der numerische Wert der zu entwickelnden Funktion wird für eine Reihe von Werten des Argumentes berechnet, die auf den ganzen Umkreis von 2π , also auf die Periode, regelmässig verteilt sind, und daraus ergeben sich durch eine einfache Rechnung die numerischen Werte der Koeffizienten. Je mehr dieser Koeffizienten man berechnen will, für desto mehr Werte des Argumentes ist die Berechnung der Funktion auszuführen, in desto mehr Teile ist also der Umkreis zu teilen.

Ein ähnliches Verfahren wird bekanntlich heutzutage vielfach zur Entwicklung von beobachteten Grössen benutzt, so in der Astronomie zur Entwicklung der Ausdrücke für die Teilungsfehler oder der durch die mechanische Konstruktion entstehenden Fehler eines geteilten Kreises und in der Meteorologie unter der Bezeichnung harmonische Analyse zur Darstellung irgend welcher als periodisch vorausgesetzter Erscheinungen durch eine trigonometrische Reihe, sowie zu vielen anderen Zwecken. Zur besseren Übersicht mögen die Grundlagen des Verfahrens, wie es bei GAUSS auftritt, hier auseinandergesetzt werden:

Es sei S eine periodische Funktion von x mit der Periode 2π , die sich durch die Reihe

$$76) \quad S = \sum \alpha_m \cos mx + \sum \beta_m \sin mx$$

darstellen lässt, und es seien die Zahlenwerte von S für eine Reihe gleichmässig auf die Periode verteilter Werte von x , nämlich $x = 0, \omega, 2\omega \dots (r-1)\omega$ bekannt. Diese Zahlenwerte seien $S_0, S_1, S_2 \dots S_{r-1}$; aus ihnen können die α_m und β_m berechnet werden. Setzt man nämlich³⁾

1) Werke III, S. 265.

2) Diese Methode hat bekanntlich auch HANSEN angewandt. Vergl. den Briefwechsel zwischen GAUSS und diesem, Werke VII, 1906, S. 433—437.

3) Vergl. art. 29 der *Theoria interpolationis*; Werke III, S. 235.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{r} \sum_0^{r-1} S_i \\
 a_1 &= \frac{2}{r} \sum_0^{r-1} S_i \cos i\omega & \beta_1 &= \frac{2}{r} \sum_0^{r-1} S_i \sin i\omega \\
 a_2 &= \frac{2}{r} \sum_0^{r-1} S_i \cos 2i\omega & \beta_2 &= \frac{2}{r} \sum_0^{r-1} S_i \sin 2i\omega \\
 &\dots & & \dots \\
 a_m &= \frac{2}{r} \sum_0^{r-1} S_i \cos mi\omega & \beta_m &= \frac{2}{r} \sum_0^{r-1} S_i \sin mi\omega \\
 &\dots & & \dots
 \end{aligned}
 \tag{77}$$

so ist folgendes zu bemerken, wofür GAUSS die Beweise erbringt:
 Bricht die Reihe 76) mit einem bestimmten Gliede $m = \mu$ ab, so ist die Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten gleich $2\mu + 1$; ist die Anzahl r der gegebenen Werte von S , ebenfalls gleich $2\mu + 1$, so sind die Koeffizienten nicht nur eindeutig bestimmt, sondern die Darstellung von S durch 76—77) ist auch streng richtig; ist $r = 2\mu$, also eine gerade Zahl, so sind durch die obigen Formeln alle Koeffizienten α und β , mit Ausnahme der letzten, α_μ und β_μ , streng bestimmt; die beiden letzteren bleiben unbestimmt. Es besteht aber eine Beziehung zwischen ihnen¹⁾.

Ist jedoch die Anzahl der Koeffizienten grösser als die Anzahl der gegebenen Werte S_i , ist die Reihe also im besonderen eine unendliche, so werden zwar, wenn $r = 2\mu + 1$ ist, die Koeffizienten bis α_μ, β_μ , und wenn $r = 2\mu$ ist, bis $\alpha_{\mu-1}, \beta_{\mu-1}$ eindeutig bestimmt; die Darstellung der Funktion S ist aber nur eine genäherte und zwar werden die Koeffizienten α, β mit einer Annäherung gefunden, die durch die Vernachlässigung der auf α_μ, β_μ bzw. $\alpha_{\mu-1}, \beta_{\mu-1}$ folgenden Koeffizienten gegeben ist.

Hieraus ergibt sich für die praktische Anwendung folgender Schluss: Schreiten die Koeffizienten α, β nach Potenzen einer Grösse ϵ fort, ist also etwa $\alpha_i = \alpha_i \epsilon^i, \beta_i = \beta_i \epsilon^i$ und ist die Reihe unendlich, so gilt die Darstellung 76) genähert bis auf Grössen der Ordnung ϵ^r einschliesslich, wenn $r = 2\mu + 1$, und ausschliesslich, wenn $r = 2\mu$. Die Formeln 77) sind Werke VII, 1906,

¹⁾ Ist die Einteilung des Kreisumfangs so gewählt, dass die gegebenen Werte von S die Werte für $x = 0$ und $x = \pi$ enthalten, so ist α_μ bestimmt, β_μ unbestimmt. Liegen die gegebenen Werte symmetrisch zu $x = 0$ und $x = \pi$, ohne diese selbst zu enthalten, so ist α_μ unbestimmt, β_μ bestimmt. Der erstere Fall tritt gewöhnlich bei der numerischen Anwendung ein.

S. 496f. für die Werte $\mu = 48, 24, 12$ für die praktische Rechnung in vereinfachte Form gebracht, und durch aus dem Nachlass abgedruckte Beispiele erläutert worden.

GAUSS benutzt diese Methode auch, um die Richtigkeit seiner Konvergenzuntersuchung der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung zu prüfen¹⁾.

Bei den Störungsrechnungen handelt es sich um die Entwicklung einer Funktion nach zwei Veränderlichen, den mittleren Längen des störenden und des gestörten Körpers; auf diesen Fall kommt GAUSS in der *Theoria interpolationis* nicht zu sprechen und es finden sich darüber auch nirgends Aufzeichnungen im Nachlass, ausser den Zahlenrechnungen für die Störungen der Ceres und der Pallas. Es bietet indes keine Schwierigkeiten, das Verfahren auch hierfür zu entwickeln:

Es sei S eine periodische Funktion mit der Periode 2π von zwei Variablen x und y , die sich in der Form:

$$S = \sum \sum \alpha_{m,n} \cos(mx + ny) + \sum \sum \beta_{m,n} \sin(mx + ny)
 \tag{78}$$

darstellen lässt.

Ferner seien die Zahlenwerte von S bekannt für alle Wertepaare x, y , die man erhält, wenn die Periode für x in r Teile und die für y in s Teile geteilt wird; das Intervall der Teilung für x sei $\omega = \frac{2\pi}{r}$, das für y sei $\omega' = \frac{2\pi}{s}$ und die zahlenmässig bekannten Werte von S , deren Anzahl rs ist, seien

$S_{0,0}$ für $x = 0, y = 0$	$S_{1,0}$ für $x = \omega, y = 0$
$S_{0,1}$ für $x = 0, y = \omega'$	$S_{1,1}$ für $x = \omega, y = \omega'$
$S_{0,2}$ für $x = 0, y = 2\omega'$	$S_{1,2}$ für $x = \omega, y = 2\omega'$
$S_{0,s-1}$ für $x = 0, y = (s-1)\omega'$	$S_{1,s-1}$ für $x = \omega, y = (s-1)\omega'$
	usw.

Ferner seien

$$S_0, S_1 \dots S_{r-1} \text{ die Werte von } S \text{ für } x = 0, \omega, 2\omega \dots (r-1)\omega;$$

dann sind diese Werte periodische Funktionen von y und man kann die Ent-

¹⁾ Werke X, 1, S. 424 (vergl. auch ebenda S. 432—433 und die *Erläuterungen* S. 442). XI 2 Abh. 3. 29

wicklungen ansetzen:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= p_{0,0} + p_{0,1} \cos y + p_{0,2} \cos 2y + \dots \\
 &\quad + q_{0,1} \sin y + q_{0,2} \sin 2y + \dots \\
 S_1 &= p_{1,0} + p_{1,1} \cos y + p_{1,2} \cos 2y + \dots \\
 &\quad + q_{1,1} \sin y + q_{1,2} \sin 2y + \dots \\
 &\dots \\
 S_{r-1} &= p_{r-1,0} + p_{r-1,1} \cos y + p_{r-1,2} \cos 2y + \dots \\
 &\quad + q_{r-1,1} \sin y + q_{r-1,2} \sin 2y + \dots
 \end{aligned}
 \tag{79}$$

und nach der im vorhergehenden beschriebenen Interpolationsmethode die Koeffizienten p und q in diesen Reihen zahlenmässig berechnen und zwar

$$\begin{aligned}
 p_{0,0}, p_{0,1} \dots; q_{0,1}, q_{0,2} \dots &\text{ aus } S_{0,0}, S_{0,1} \dots S_{0,r-1}; \\
 p_{1,0}, p_{1,1} \dots; q_{1,1}, q_{1,2} \dots &\text{ aus } S_{1,0}, S_{1,1} \dots S_{1,r-1} \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

Setzt man weiter

$$\begin{aligned}
 S &= p_0 + p_1 \cos y + p_2 \cos 2y + \dots \\
 &\quad + q_1 \sin y + q_2 \sin 2y + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{80}$$

so sind die Koeffizienten p und q in diesem Ausdruck periodische Funktionen von x und zwar sind $p_{0,0}, p_{1,0} \dots p_{r-1,0}$ die Zahlenwerte von p_0 für $x = 0, \omega, \dots (r-1)\omega$; $p_{1,0}, p_{1,1}, \dots p_{r-1,1}$ die Zahlenwerte von p_1 für dieselben x -Werte usw. Es lassen sich daher in den Reihen

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \gamma_{0,0} + \gamma_{0,1} \cos x + \gamma_{0,2} \cos 2x + \dots \\
 &\quad + \delta_{0,1} \sin x + \delta_{0,2} \sin 2x + \dots \\
 p_1 &= \gamma_{1,0} + \gamma_{1,1} \cos x + \gamma_{1,2} \cos 2x + \dots \\
 &\quad + \delta_{1,1} \sin x + \delta_{1,2} \sin 2x + \dots \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{81}$$

die Koeffizienten γ und δ wieder zahlenmässig berechnen.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die gefundenen Reihen 81) für $p_0, p_1 \dots$ in 80) einzusetzen und die Produkte der Cosinus und Sinus auszumultiplizieren, damit man die Entwicklung in der Form 78) erhält.

Bei der Besprechung der Pallasstörungen werden wir noch weitere Kunstgriffe kennen lernen, die GAUSS bei diesen seinen Entwicklungen benutzt hat.

Da die Entwicklung der in der Störungsfunktion auftretenden Funktionen in trigonometrische Reihen nach den Vielfachen der mittleren Längen oder

Anomalien gleichzeitig nach Potenzen der Exzentrizitäten (und Neigungen) fortschreitet, ohne aber eine eigentliche Potenzreihe zu sein, so bedeutet die Einteilung der Periode in eine bestimmte Anzahl von Teilen auch die Vernachlässigung einer bestimmten Potenz der Exzentrizitäten.

Nach einer Äusserung von GAUSS in einem Brief an OLBERS vom 25. März 1805 plante er die Entwicklung bis zu den 11. Potenzen der Exzentrizitäten, beschränkte sich dann aber nach einem weiteren Briefe vom 10. Mai desselben Jahres auf die 5. Potenzen.

Er begann seine Rechnungen mit den Breitenstörungen der Ceres; diese sind Werke VII, 1906, S. 401f. abgedruckt. Die hier angewandte Methode zeigt aber bei weitem noch nicht die Vollkommenheit, wie die bei den Störungen der Pallas angewandte. Ein Grund hierfür mag darin liegen, dass GAUSS zunächst Koordinatenstörungen rechnete, bei denen die Störungen nicht, wie bei den Elementenstörungen, durch einfache Quadrate gefunden werden.

Die Gleichung für die Breitenstörungen ist dieselbe wie oben, nämlich:

$$\theta = \frac{\mu a}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \cos V \int r \left(\frac{dR}{dz} \right) \sin V. n dt - \sin V \int r \left(\frac{dR}{dz} \right) \cos V. n dt \right\}^2.
 \tag{82}$$

Hier lässt sich die rechte Seite nicht direkt nach der *Theoria interpolationis* entwickeln, sondern es müssen erst die Grössen unter den Integralzeichen entwickelt, dann die Integrationen ausgeführt und dann die Multiplikationen mit den ebenfalls zu entwickelnden Grössen $\cos V$ und $\sin V$ ausgeführt werden.

Die Grössen unter den Integralzeichen werden durch trigonometrische Reihen dargestellt, die nach zwei Argumenten, den mittleren Längen des störenden und des gestörten Körpers, fortschreiten.

Um das etwas verwickelte von GAUSS hier angewandte Verfahren klar zu machen, wollen wir das Glied unter dem ersten Integralzeichen, nämlich

$$X = r \left(\frac{dR}{dz} \right) \sin V$$

betrachten. Es ist, wie oben Gleichung 53)¹⁾,

$$\left(\frac{dR}{dz} \right) = z' \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{3R^3} \right)$$

¹⁾ Vergl. auch Werke VII, 1906, S. 402.

und¹⁾

$$z' = r' \sin J \sin (v' - \Omega) = r' \sin J \sin (\mathcal{A} + \varepsilon' - \Omega).$$

Hiemit wird:

$$\begin{aligned} X &= X_1 X_2 \\ X_1 &= r r' \sin J \sin V \sin (\mathcal{A} + \varepsilon' - \Omega) \\ X_2 &= \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Die Grösse $\sin J$ wird als konstant angesehen, da die vom Quadrat der störenden Masse abhängenden Glieder nicht berücksichtigt werden; die Grössen r und $\sin V$ können nach Vielfachen der mittleren Anomalie M entwickelt werden in der Form

$$\sum a_n \frac{\cos}{\sin} n M, \quad (84)$$

wo die a_n von der Form

$$a_n = e^n \sum b_i e^i \quad (85)$$

sind. Die Reihe nach den Vielfachen von M schreitet also nach Potenzen der Exzentrizität e fort, aber in der Weise, dass a_n nicht gleich dem Produkt aus e^n in einen konstanten Faktor, sondern selbst gleich einer Potenzreihe nach e ist, die mit dem Gliede in e^n beginnt. Da die analytische Entwicklung einerseits zu ziemlich unübersichtlichen Ausdrücken führt (man kann sie am besten durch Anwendung der BESSELSCHEN Funktionen ausführen), andererseits bei nicht allzu grossem e die Glieder hinreichend stark abnehmen, so empfiehlt sich hier die interpolatorische Methode. Das gleiche gilt von der Entwicklung der Grösse r' und von der der Grösse $\sin (\mathcal{A} + \varepsilon' - \Omega)$, die nach Vielfachen der mittleren Anomalie Jupiters M' und gleichzeitig nach Potenzen von dessen Exzentrizität e' fortschreiten.

GAUSS entwickelt daher grundsätzlich X_1 nach der interpolatorischen Methode und teilt den Umkreis in 10 Teile, wobei er die Rechnung also für die Werte M und M' gleich $18^\circ, 54^\circ, 90^\circ, \dots, 342^\circ$ ausführt. Hierdurch vereinfacht sie sich. Die Formeln 77) bedürfen dazu einer Umformung, die

1) J Neigung beider Bahnen gegeneinander,
 v' wahre Länge Jupiters,
 Ω Knotenlänge,
 e' Mittelpunktsgleichung Jupiters.

Werke VII, 1906, S. 404 angegeben ist. Die Einteilung des Umkreises in 10 Teile entspricht nach obigem der Vernachlässigung der 5. Potenzen der Exzentrizitäten.

Anders liegt die Sache bei der Grösse $\frac{1}{\mathfrak{R}^2}$; es ist

$$\mathfrak{R} = (r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos w)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man der Kürze halber²⁾ $x = \mathcal{A} - \varrho + \varepsilon' - a$, so ist $\cos w = \cos b \cos x$ und man kann setzen³⁾

$$\mathfrak{R}^2 = \frac{r r' \cos b}{\beta} (1 + \beta^2 - 2 \beta \cos x), \quad (86)$$

wo

$$\beta = \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2 r r' \cos b} - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos b}}{\sqrt{r^2 + r'^2 + 2 r r' \cos b} + \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos b}}. \quad (87)$$

GAUSS entwickelt

$$\frac{2}{\mathfrak{R}^2} = \frac{1}{2} Q + Q' \cos x + Q'' \cos 2x + \dots \quad (88)$$

und erhält hiermit

$$-2 X_2 = \frac{2}{\mathfrak{R}^2} - \frac{2}{r'^2} = \frac{1}{2} Q^{(0)} + Q' \cos x + \dots, \quad (89)$$

wo $Q^{(0)} = Q - \frac{4}{r'^2}$, und wo die Q ausser von dem Faktor $\frac{r r' \cos b}{\beta}$ nur noch von β abhängen. Da $\cos b$ nahe gleich Eins ist, so ist β nahe gleich $\frac{r'}{r}$, da wir $r' > r$ voraussetzen. Ist nun das Verhältnis $\frac{r'}{r}$ nicht erheblich von Eins verschieden, so nehmen die Glieder der Reihe weniger stark ab; denn sie schreiten im wesentlichen nach Potenzen von β fort. Es ist wünschenswert bei der Entwicklung ziemlich weit zu gehen. Hierin wird der Grund zu suchen sein, warum GAUSS den Faktor X_2 analytisch entwickelt. Wahrscheinlich hat er schon hier die im Briefe an BESSEL³⁾ beschriebene Methode zur Berechnung der Q , wenigstens teilweise, benutzt.

Die Ausführung der ganzen etwas unübersichtlichen Rechnung gestaltet sich etwa so:

Ist zunächst die Entwicklung 89) von X_2 nach der analytischen Methode für jede Wertekombination $r, r', \cos b$, also für jedes Wertepaar M, M' , das

1) α Mittelpunktsgleichung der Ceres minus Reduktion auf die Jupiterbahn,

b heliozentrische Breite der Ceres.

2) Werke VII, 1906, S. 404.

3) Werke X, 1, S. 238; vergl. hier unten S. 231.

für die interpolatorische Methode gebraucht wird, durchgeführt, so sind damit die Zahlenwerte der Q für jedes dieser Wertepaare, 100 an der Zahl, bekannt¹⁾. Bei der ersten Methode der Ceresstörungen (oben Gleichung 55 u. f.) war diese Entwicklung nur einmal für die konstanten Grössen a und a' auszuführen. GAUSS hat hier die Q bis zum Gliede $Q^{(10)}$ berechnet, also dabei noch die 10. Potenz von $\frac{r}{r'}$ berücksichtigt; denn es ist $r'^2 Q^{(6)}$ von der Grössenordnung $\left(\frac{r}{r'}\right)^n$.

Setzt man die Reihe 89) für X_2 in den Ausdruck 83) für X ein, so erhält man z. B. für den mit Q^r multiplizierten Teil von X^2):

$$90) \text{ pars } X = \frac{rr'}{4} \sin J \sin V \cdot Q^r \left\{ \sin(D - \varphi + \varepsilon' - 2\alpha + \Omega) - \sin(3D + \varphi + 3\varepsilon' - 2\alpha - \Omega) \right\}.$$

Die Zahlenwerte dieser Glieder werden wieder für jedes Wertepaar M, M' berechnet und damit durch die Interpolation nach den Formeln 77)–81) die Entwicklung dieses Teils von X gefunden.

Die Einzelheiten der GAUSSschen Rechnungsart, die hier nur in grossen Umrissen geschildert ist, sind Werke VII, 1906, S. 403–406 an dem zweiten Gliede des vorstehenden Ausdrucks 90) als Beispiel auseinandergesetzt.

Ist die Grösse X nach Vielfachen von M und M' entwickelt, so ist nach 82) die Integration durch Anbringung der Divisoren auszuführen und sodann mit der gleichfalls auf interpolatorischem Wege gewonnenen Entwicklung von $\cos V$ und dem konstanten Faktor $\frac{\beta a}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ zu multiplizieren.

Wie bereits erwähnt, hat GAUSS nach der eben besprochenen Methode nur die Breitenstörungen gerechnet, die er in einem Briefe an OLBERS vom 2. Juli 1805 mitteilt²⁾. Diese Störungen enthalten im ganzen 27, nach Zusammenziehen der Glieder gleicher Periode, 16 Glieder.

Die Rechnung wird vereinfacht durch verschiedene auftretende Symmetrien, insbesondere auch durch die der beiden Glieder in Gleichung 82), von denen wir oben nur das erste betrachtet haben. Sie ist aber dennoch äusserst unständig. Die Berechnung der Breitenstörungen dehnt sich trotz der raum-

¹⁾ Vergl. die Werte von $\log Q^r$ in der Tabelle Werke VII, 1906, S. 403.

²⁾ Vergl. auch Werke VII, 1906, S. 403, Gleichung 2).

³⁾ Ebenda, S. 408–409.

sparenden Schreibweise von GAUSS, bei der durchschnittlich 2000–3000 Ziffern auf einer Quartseite des *Handbuchs* Bc stehen, über 11 Seiten aus.

Aus seinen Untersuchungen über Ceres schliesst GAUSS im genannten Briefe vom 2. Juli 1805, dass »die sämtlichen bei der Pallas merklichen Gleichungen der Länge, Breite und des Radiusvektor leicht auf 500 steigen können« und »dass man vielleicht mehrere Tage nötig hat, um einen einzigen Ort zu berechnen« und fährt fort: »Durch ähnliche, aber freilich viel zahlreichere Tafeln, wie meine älteren¹⁾ für die Ceresstörungen, wird indes die Arbeit sehr erleichtert werden können, aber die Berechnung solcher Tafeln wird auch Monate kosten, nachdem die Formeln entwickelt sind«.

VI. Tafeln zur Entwicklung von $(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos x)^{-\frac{1}{2}}$.

GAUSS hatte wohl zunächst die Absicht, nach der im vorigen geschilderten Methode oder nach einer ganz ähnlichen die Störungen der Ceres zu vollenden und auch die der anderen Planeten (der Pallas und der im März 1805 entdeckten Juno) zu berechnen. Die Berechnung der Breitenstörungen der Ceres hatte gute Ergebnisse geliefert, war aber recht umfangreich. GAUSS suchte daher die Arbeit durch Entwerfen von Tafeln abzukürzen und es lag am nächsten, solche Tafeln für die Entwicklung des Ausdruckes 88), also für die Koeffizienten Q herzustellen.

BESSEL hatte ihm seine Hilfe bei der Ausführung von Zahlenrechnungen angeboten und auch schon bei einer anderen Gelegenheit gewährt.

Nach den obigen Gleichungen 83) und 86) galt es, den Ausdruck

$$(1 + \beta^2 - 2\beta \cos x)^{-\frac{1}{2}}$$

für verschiedene Werte von β zu entwickeln. Waren dann die Koeffizienten Q für eine Reihe von solchen Werten tabuliert, so konnten diese Tafeln auch für andere Planeten angewandt werden. In dem Briefe an BESSEL vom 3. September 1805²⁾ bittet GAUSS diesen, ihn bei der Berechnung der Tafel zu unterstützen und setzt ihm die Berechnungsweise eingehend auseinander.

Die Vorschriften, die er BESSEL gibt, beziehen sich allerdings auf die

¹⁾ Vergl. oben S. 221. — BRDL.

²⁾ Werke X, 1, S. 237.

Entwicklung von

$$(1 + \beta^2 - 2\beta \cos x)^{-\frac{1}{2}}$$

bezw.

$$(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} A^{(0)} + A' \cos x + A'' \cos 2x + \dots$$

Es ist wohl anzunehmen, dass GAUSS diesen Ausdruck gewählt hat, weil er ihn auch sonst brauchte und die Entwicklung, die zu den Exponenten $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ usw. gehört, sich leicht aus der zu $-\frac{1}{2}$ gehörenden herstellen lässt.

Die Entwicklungsmethode, die GAUSS im Briefe an BESSEL schildert, ist bei weitem vollkommener als die bei der ersten Berechnung der Ceresstörungen (S. 215 f.) angewandte. Es ist wohl anzunehmen, dass GAUSS gerade im Anschluss an diese Untersuchungen begonnen hat, sich mit der Theorie der allgemeinen hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ zu beschäftigen; die ältesten uns erhaltenen Aufzeichnungen zu dieser Theorie stammen nämlich aus den ersten Monaten des Jahres 1806, sie sind Werke X, 1, S. 326 abgedruckt¹⁾. Man findet in diesen Aufzeichnungen den Kettenbruch, der den Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen darstellt²⁾, und der den in dem Briefe an BESSEL gegebenen Kettenbruch für den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Q als besonderen Fall enthält. Den hierauf gegründeten Beweis für die BESSEL mitgeteilten Entwicklungen gibt GAUSS in einer im Jahre 1809 verfassten Aufzeichnung *Einiges über die unendliche Reihe* usw.³⁾. Im Nachlass und in Veröffentlichungen finden sich noch viele Stellen, auch aus späterer Zeit, die von der Entwicklung des obigen Ausdrucks handeln; so in den *Disquisitiones circa seriem infinitam* etc. (1812⁴⁾). Die fertig gerechnete Tafel befindet sich im Nachlass; sie gibt die Grössen $\pi^{(0)} = \left(\frac{a}{a'}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{a'^2 - a^2} A^{(0)}$ mit dem Argument $\theta = \arctan \frac{a}{a'}$ und geht bis $\pi^{(9)}$. Sie scheint aber niemals zur Anwendung gelangt zu sein, da GAUSS, als er nach langer Unterbrechung die Störungen der Pallas im Jahre 1810 vornahm, das rein interpolatorische Verfahren anwandte.

1) Vergl. die Bemerkungen von SCHLESINGER, a. a. O., S. 331.

2) Siehe a. a. O., S. 329, Verwandlung.

3) Werke X, 1, S. 338. — Siehe insbesondere a. a. O., S. 345—349 und die zugehörigen Bemerkungen von SCHLESINGER, S. 354.

4) Werke III, S. 128, ferner Werke VIII, S. 84; vergl. auch den Aufsatz von SCHLESINGER über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie, Materialien Heft III, S. 84, 90—91.

VII. Störungen der Pallas und Vorbereitungen dazu.

1. *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis.*

Diese Abhandlung ist im wesentlichen als eine Vorarbeit zu den Störungsrechnungen anzusehen.

Die zur Anwendung kommenden Methoden sind bereits oben S. 188 f. besprochen; nach ihnen bestimmt GAUSS zunächst rein elliptische Elemente der Pallas aus den drei folgenden Gruppen von Oppositionen: 1803, 04, 05, 07; 1804, 05, 07, 08; 1805, 07, 08, 09.

Es zeigt sich einerseits aus der Vergleichung mit den Beobachtungen, dass für den Zeitraum von vier Oppositionen rein elliptische Elemente die Bahn hinreichend genau darstellen, um den Planeten für die nächste Folgezeit so vorauszurechnen, dass ein Wiederauffinden mit dem Fernrohr keine Schwierigkeit macht; andererseits aber weichen die drei Elementensysteme doch so von einander ab, dass die Berücksichtigung der Störungen als eine Forderung der Wissenschaft bezeichnet werden muss¹⁾.

Es handelte sich nun um die Frage, welches Elementensystem der Störungsrechnung zugrunde gelegt werden sollte, und GAUSS wählte dasjenige²⁾, das sich allen beobachteten Oppositionen am besten anschliesst. Von der Bestimmung eines solchen handeln bereits die art. 172—189 der *Theoria motus*, in denen GAUSS die Methode der kleinsten Quadrate ausführlich begründet.

Die hier benutzten Gleichungen zur Bestimmung der Verbesserungen der Elemente erhalten, wenigstens mit bezug auf die Längen, eine besondere Form, weil es sich um Oppositionen handelt, also die heliozentrische Länge statt der geozentrischen gebraucht wird; sie sind oben S. 193 abgedruckt.

Am Schluss der *Disquisitiones* gibt GAUSS an, wie das gefundene Elementensystem die sechs Normalorte darstellt; es zeigen sich in der Länge Differenzen bis zu 3½ Minute und in der Breite bis fast 1½ Minute.

2. Spezielle Störungen der Pallas.

Die Rechnung der speziellen Störungen betrachtet GAUSS als Vorbereitung zur Berechnung der allgemeinen Störungen; die von ihm angewandte Methode

1) *Disqu.* art. 9—10.

2) *Disqu.* art. 11f.

ist heute wenigstens in ihren Grundzügen jedem theoretischen Astronomen geläufig.

GAUSS berechnet die Störungen der Elemente: Neigung, Knotenlänge, mittlere tägliche Bewegung, Exzentrizitätswinkel, Perihellänge und mittlere Länge in der Epoche; die Differentialgleichungen¹⁾ unterscheiden sich nicht wesentlich von den in der nachgelassenen Abhandlung *Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires*²⁾ gegebenen.

Die von ihm gebrauchten Formeln für die mechanische Quadratur leitet GAUSS ebenfalls in der genannten *Exposition*³⁾ ab. Weitere Nachlassnotizen darüber sind nicht vorhanden und auch die numerischen Rechnungen sind nur ganz lückenhaft erhalten. Die mechanische Quadratur hängt bekanntlich mit der Interpolationsrechnung zusammen. Über die erstere hat GAUSS eine Abhandlung *Methodus nova integralium valores* usw. 1814 veröffentlicht⁴⁾, die aber in keiner näheren Beziehung zu seinen Störungsrechnungen steht; seine Arbeiten über die letztere sind erst aus der von SCHERING aus dem Nachlass abgedruckten⁵⁾ Abhandlung *Theoria interpolationis methodo nova tractata* bekannt geworden; in dieser geht GAUSS nicht auf mechanische Quadratur ein, sondern entwickelt nur die Grundlage für seine Rechnung der allgemeinen Störungen. Dagegen hat ENCKE nach Vorlesungen von GAUSS im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1830 in einem Aufsatz *Über Interpolation*⁶⁾ einiges gegeben, das in anderer Form in der *Theoria interpolationis* zu finden ist, und in einem zweiten Aufsatz *Über mechanische Quadratur* im Jahrbuch für 1837 die Methode auseinandergesetzt, die ihm GAUSS bei Übertragung der Berechnung der speziellen Störungen der Pallas im Jahre 1812 mitgeteilt habe⁷⁾. Hiernach scheint es, dass ENCKE die Fortsetzung der GAUSSschen

1) Werke VII, 1906, S. 474.

2) Ebenda, S. 457.

3) Ebenda, S. 462.

4) Werke III, S. 163.

5) Ebenda, S. 265.

6) ENCKE leitet den Aufsatz mit der Bemerkung ein: »Der folgende Aufsatz ist aus den Vorlesungen entlehnt, die ich im Jahre 1812 bei dem Herrn Hofrat GAUSS zu hören das Glück hatte. In dem ganzen Gange der Entwicklung bin ich, so viel die Erinnerung gestattete, dem Vortrage meines geehrten Herrn Lehrers gefolgt, da er die grösste Gründlichkeit mit der grössten Einfachheit und Eleganz verbindet.« — Vergl. auch Werke XII, S. 29.

7) ENCKE bemerkt am Anfange dieses Aufsatzes: »Bei meinem Aufenthalt in Göttingen im Jahre 1812

Rechnung der speziellen Störungen von 1811 übernommen hatte; denn die Werke VII, 1906, abgedruckten, bis 1811 reichenden Störungsrechnungen sind im Jahre 1810 von GAUSS selbst ausgeführt. Von der ENCKESchen Berechnung ist anscheinend nichts erhalten.

Die erste Rechnung der speziellen Störungen der Pallas beruhte während des ganzen sich von Juni 1803 bis September 1811 erstreckenden Zeitraums auf einem konstanten Elementensystem, nämlich dem in der *Disquisitio de elementis Palladis* abgeleiteten; daher sind dabei nur die Störungen von der ersten Ordnung berücksichtigt; die Verbesserungen der Elemente sind nach der oben S. 192 f. besprochenen Methode ermittelt.

Um noch schärfer zu rechnen und die Störungen zweiter Ordnung zu berücksichtigen, wiederholt GAUSS die Rechnung mit veränderlichen Elementen, indem er »den ganzen Zeitraum 1803—1811 in acht Perioden« teilt¹⁾ und jeder besondere aus der ersten Rechnung abgeleitete Elemente zugrunde legt²⁾. Weiteres siehe oben S. 205.

3. Erste Rechnung der allgemeinen Störungen der Pallas.

Hier berechnet GAUSS, wie bei den speziellen Störungen, die Störungen der Elemente. Die Differentialgleichungen³⁾ zeigen einige nicht sehr wesentliche Unterschiede gegen die früher bei Ermittlung der speziellen Störungen gebrauchten; doch führt GAUSS anstelle des Exzentrizitätswinkels den Logarithmus des Parameters und anstelle der mittleren täglichen Bewegung ihren

übertrag mir Herr Hofrat GAUSS die Berechnung der speziellen Störungen der Pallas, und leitete mir zu diesem Behufe seine Methoden und Formeln ab, deren er seit längerer Zeit sich bedient hatte. Er hatte damals die Absicht, selbst etwas über diesen Gegenstand bekannt zu machen und behielt sich diese Erläuterung vor. Jetzt, wo leider die Aussicht auf ein eigenes Werk von GAUSS, wegen seiner vielfachen andern wichtigen Untersuchungen, so gut wie verschwunden scheint, hat er es mir gestattet, das, was ich aus seinen Vorträgen für die nachherige häufige Anwendung auf Kometen und kleine Planeten benützt habe, hier zu publizieren; wobei ich nur noch hinzufügen mir erlaube, dass der Weg zum Beweise der Formeln nicht genau der ist, welchen GAUSS bei mir genommen, weil es mir nicht ratsam schien, allzuvielen verwandte Betrachtungen einzumischen. Diese Bemerkung soll, wie sich von selbst versteht, nur bevorzugen, dass, wenn vielleicht in der Beweisführung Einiges nicht bestimmt genug erscheinen möchte, der Fehler ganz allein mir Schuld gegeben werden muss.« — Vergl. auch Werke XII, S. 31.

1) Vergl. den Brief an OLBERS vom 13. Dezember 1810 und Werke VII, 1906, S. 464.

2) Werke VII, 1906, S. 483.

3) Ebenda, S. 490.

hyperbolischen Logarithmus bezw. den gemeinen Logarithmus der halben grossen Achse ein.

Die Ausdrücke für die Ableitungen der Elemente, die, nachdem sie durch trigonometrische Reihen dargestellt sind, direkt integriert werden können, sind periodische Funktionen der beiden Argumente M und M' , d. i. der mittleren Anomalien von Pallas und Jupiter, wenn man ein konstantes elliptisches Elementensystem zugrunde legt, also die Störungen zweiter Ordnung vernachlässigt; im strengen Sinne treten noch die Apsiden- und Knotenbewegungen als Argumente hinzu.

GAUSS beschränkt sich durchweg auf die Ermittlung der Störungen erster Ordnung; dagegen bemüht er sich, möglichst hohe Potenzen der Exzentrizitäten und des Verhältnisses der mittleren Entfernungen zu berücksichtigen. Er wandte daher die oben S. 225f. besprochene rein interpolatorische Methode an. Vielleicht hat er auch die in den artt. 25–28 der *Theoria interpolationis* entwickelte Methode benutzt, bei der die Periode in eine Anzahl primärer Teile, und diese wieder weiter sekundär eingeteilt werden, wodurch das Schema der Rechnung vereinfacht wird.

Da jedoch im Nachlass nur die numerischen Rechnungen für Pallas ohne jedes erklärende Wort vorhanden sind, so wurden Werke VII, 1906, Seite 491–500 alle Formeln hergestellt, die GAUSS nach Ausweis seiner numerischen Rechnungen benutzt hat.

Über die Anordnung der GAUSSschen Rechnung und über seine Kunstgriffe ist folgendes zu sagen:

Die Ausdrücke der Ableitungen der Elemente sind zwar periodische Funktionen der beiden Argumente M und M' und können nach den Formeln auf S. 225–226 entwickelt werden; ihre gesamte Entwicklung nach diesen Argumenten setzt sich aber aus drei Einzelentwicklungen zusammen: die Koordinaten der Pallas sind periodische Funktionen von M und die des Jupiter ebensolche von M' , die gegenseitige Entfernung beider Planeten aber ist eine periodische Funktion von $M' - M$. Die Glieder in den Entwicklungen der Pallaskoordinaten nehmen ab wie die Potenzen der Pallasexzentrizität und die der Jupiterkoordinaten wie die der Jupiterexzentrizität; da die erstere gross und die letztere klein ist, so folgt zunächst, dass man bei der letzteren nicht so weit in der Entwicklung zu gehen braucht, wie bei der ersteren, also für

das Argument M den Umkreis in eine grössere Anzahl von Abschnitten teilen wird, als für M' ; die Entwicklung nach diesem letztern Argument tritt überhaupt in den Hintergrund.

Die Entwicklung des gegenseitigen Abstandes beider Planeten nach Vielfachen von $M' - M$ enthält ebenfalls die Potenzen beider Exzentrizitäten, aber ausserdem nehmen ihre Glieder nach Potenzen der Grösse a ab, wo $a = \frac{a}{a'}$ das Verhältnis der beiden halben grossen Achsen ist, und diese letztere Entwicklung ist also ebenfalls viel weiter fortzusetzen, als die nach M' . Mit ihr hat sich GAUSS schon bei seinen früheren Untersuchungen im Anschluss an seine Arbeiten über das arithmetisch-geometrische Mittel besonders beschäftigt, wie oben besprochen worden ist. Er hat sie bei den Ceresstörungen im wesentlichen noch nach der analytischen Methode ausgeführt. Es sind also die Entwicklungen nach M und $M' - M$ die wichtigen und aus diesem Grund hat er wahrscheinlich diese beiden Argumente gewählt; denn bei dieser Anordnung gehen die grössten Glieder den kleineren voraus. GAUSS hat in seiner ersten Rechnung der allgemeinen Störungen der Pallas den Umkreis für M in 12 und für $M' - M$ in 48 Teile geteilt, wodurch also im grossen und ganzen die 5. Potenzen der Exzentrizität und die 23. Potenzen von a berücksichtigt werden. Zur Übersicht über die Einzelheiten der Rechnung, im besonderen über das Zusammenziehen der Cosinus- und Sinusglieder in ein einziges Glied wird ein Hinweis auf Werke VII genügen; die Ergebnisse für die Störungen findet man ebenfalls dort, ebenso wie die Vergleichung mit den Oppositionen und die Verbesserung der Elemente; die letztere allerdings unvollständig, da sich im Nachlass nur wenig darüber vorfand.

4. Zweite Rechnung der allgemeinen Störungen der Pallas.

Die zweite Rechnung der allgemeinen Störungen ist noch umfangreicher als die erste, da GAUSS hier für M den Umkreis in 24 Teile teilt, also noch die 11. Potenzen von e berücksichtigt. Die Differentialgleichungen für die Elemente sind nicht wesentlich geändert. Die schliesslichen Störungsausdrücke unterscheiden sich in der Form von denen der ersten Rechnung dadurch, dass GAUSS hier überall in den Argumenten die mittleren Längen statt der mittleren Anomalien eingeführt und die Konstanten in den Argumenten so gewählt hat,

dass alle Glieder positives Vorzeichen erhalten. Die Unterschiede der numerischen Ergebnisse in beiden Rechnungen sind klein und es wird hier ein Hinweis auf Werke VII und auf S. 207—208 oben genügen.

5. Die grössten Gleichungen in den Störungen der Pallas. Libration.

Ist E irgend eines der oskulierenden Bahnelemente des gestörten Planeten, so finden sich nach der Entwicklung der Störungsfunktion und der von ihr abhängenden Grössen bekanntlich Gleichungen der Form:

$$91) \quad \frac{dE}{dt} = \sum_m \sum_{m'} \alpha_{m,m'} \sin(m'L' - mL + A_{m,m'}),$$

wo bei Vernachlässigung der Störungen höherer Ordnung $\alpha_{m,m'}$ und $A_{m,m'}$ Konstanten sind und¹⁾

$$92) \quad \begin{aligned} L' &= n't + \varepsilon', \\ L &= \int n dt + \varepsilon \end{aligned}$$

ist. Durch Integration findet man, wenn man n als konstant ansieht, was der Vernachlässigung der Störungen von höherer Ordnung entspricht:

$$93) \quad \begin{aligned} E &= E_0 + \delta E, \\ \delta E &= \alpha_{0,0} t - \sum \frac{\alpha_{m,m'}}{m'n' - mn} \cos(m'L' - mL + A_{m,m'}). \end{aligned}$$

E_0 bedeutet den mittleren Wert des Elementes und δE seine Störungen; $\alpha_{0,0} t$ ist das sekulare Störungsglied. Die Grösse der periodischen Störungsglieder hängt vom Divisor $m'n' - mn$ ab und zwar hat das grösste auftretende Störungsglied im Falle der Pallas das Argument $5L' - 2L$; die fünfmalige mittlere Bewegung Jupiters minus der doppelten der Pallas = $5n' - 2n$ beträgt nur etwa $42''$.

GAUSS bezeichnet die entsprechenden Glieder unter Hinzuziehung der vom doppelten und dreifachen Argument ($10L' - 4L$ und $15L' - 6L$) abhängenden

1) L' = Mittlere Länge Jupiters,
 L = Mittlere Länge der Pallas,
 n' = konstante mittlere tägliche Bewegung Jupiters,
 n = oskulierende mittlere tägliche Bewegung der Pallas.
 $\varepsilon, \varepsilon'$ = Werte von L' und L für $t = 0$.

in der Länge als die grosse Gleichung¹⁾. Obwohl er bei Ermittlung der Störungen selbst nur die erste Potenz der störenden Masse berücksichtigt, berechnet er zur Bestimmung der Störungsbeträge für die einzelnen Epochen die mittlere Länge der Pallas mit Einschluss dieser grossen Gleichung, nimmt also hier auf die höheren Potenzen der Störungen Rücksicht; auch zur Berechnung der mittleren Länge Jupiters benutzt er die dortige grosse Gleichung nach den Tafeln von BOUVARD²⁾.

Besonderes Aufsehen erregte aber die GAUSSsche Mitteilung seiner Entdeckung, dass die mittleren Bewegungen von Jupiter und Pallas im rationalen Verhältnis 7:18 ständen, »was sich durch die Einwirkung Jupiters immer genau wieder herstellt, wie die Rotationszeit unseres Mondes«. So schreibt er an BESSEL³⁾ am 5. Mai 1812, als er gerade seine zweite Rechnung der allgemeinen Störungen begonnen hatte⁴⁾.

Aufzeichnungen darüber, wie GAUSS die Entdeckung ursprünglich gemacht, sind nicht vorhanden; wohl aber haben sich im Nachlass nach langem Suchen zwei kleine Zettel gefunden, die aus der Zeit der Vollendung der zweiten Rechnung der allgemeinen Störungen stammen und auf denen einige numerische Rechnungen über das Librationsglied stehen, die Werke VII, S. 558—559 mit den nötigen Ergänzungen abgedruckt sind. Im Artikel [24] der *Exposition*⁵⁾, der ebenfalls später entstanden ist, spricht GAUSS von dem Fall des rationalen Verhältnisses der mittleren Bewegungen; er sagt, dass in diesem Fall in $\int n dt$ (also in der mittleren Länge) ein dem Quadrat der Zeit proportionales Glied entsteht, das aber periodische Form erhält, wenn man die höheren Potenzen der störenden Masse berücksichtigt und er fügt hinzu, dass dieser Fall bei Pallas wirklich eintritt. Der Inhalt der erwähnten Zettel und die Einzelausführung der zweiten Rechnung der allgemeinen Störungen geben hierfür die Erklärung. Es ist darüber folgendes zu bemerken:

GAUSS kannte, als er jene Briefe an BESSEL und OLBERS schrieb, noch nicht die Zahlenwerte der Konstanten des Librationsgliedes, auf die sich die Rechnung

1) Werke VII, 1906, S. 559.

2) Ebenda, S. 559—560.

3) Ebenda, S. 421. — Vergl. auch den Brief an OLBERS vom 20. März 1812, Werke XII, S. 236.

4) Vergl. oben S. 206.

5) Werke VII, S. 468.

auf den Zetteln stützt; er fand diese vielmehr erst aus der erweiterten Entwicklung der Störungsfunktion bei der zweiten Rechnung im Hochsommer 1812¹⁾. Man muss daher vermuten, dass er zunächst nur die Integrationsdivisoren $m'n' - mn$ zahlenmässig untersucht hat.

Bezeichnen n_0 und e_0 Mittelwerte von n und e , so ist

$$L = n_0 t + e_0 + \int \delta n dt + \delta e.$$

Das Integral $\int \delta n dt$ enthält kein der Zeit proportionales Glied; um aber den sekularen Teil von δe nach den Ergebnissen der ersten Störungsrechnung festzustellen, hat man²⁾

$$\begin{aligned} \text{sekularer Teil von } \delta e - (1 - \cos i) \delta \Omega - (1 - \cos \varphi) \{ \delta \bar{\omega} - (1 - \cos i) \delta \Omega \} &= -0,04183 \\ \text{„ „ „ } \delta \Omega &= -0,09645 \\ \text{„ „ „ } \delta \bar{\omega} - (1 - \cos i) \delta \Omega &= -0,01310 \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich

$$\text{sekularer Teil von } \delta e = -0,0593.$$

Da $n_0 = 769,2443$ ³⁾ gefunden war, so wird der sekulare Teil von L gleich $(769,2443 - 0,0593)t$, also die augenblickliche mittlere Bewegung gleich $769,1850$; die tropische mittlere Bewegung Jupiters hatte GAUSS⁴⁾ nach LAPLACE zu $299,2650$ angenommen und mit dem ebenfalls von GAUSS gebrauchten Werte der täglichen Präzession von $0,13717$ folgt hieraus die siderische mittlere Bewegung Jupiters zu $299,1278$. Um die kleinsten Divisoren aufzufinden, kann man das Verhältnis der mittleren Bewegungen $\frac{n'}{n} = \frac{299,1278}{769,1850}$ in einen Kettenbruch verwandeln und erhält diesen gleich

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7913 + \dots}}}}}$$

Die Näherungswerte sind

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{7} \text{ usw.}$$

1) Zwischen dem 20. Juli und 10. August, vergl. Werke VII, 1906, S. 508.

2) Werke VII, 1906, S. 526, 519, 521.

3) Ebenda, S. 527.

4) Ebenda, S. 508.

Hier tritt ausser dem Näherungsbruch $\frac{1}{7}$, der die sogenannte grosse Gleichung veranlasst, ganz besonders der nächste im Betrage von $\frac{1}{78}$ hervor; dieser stellt den Bruch fast genau dar, da das darauf folgende Glied des Kettenbruchs ungewöhnlich gross ist; es ist in der Tat:

$$\frac{18}{7}\text{-mal Bewegung des Jupiter} = 769,1857$$

$$\text{Bewegung der Pallas} = 769,1850.$$

Der Divisor $18n' - 7n$ ergab sich also verschwindend klein, und die analytische Untersuchung dieses Falles dürfte GAUSS in ähnlicher Weise gemacht haben, wie LAPLACE bei Betrachtung der Libration der Jupitermonde.

Nach Werke VII, 1906, S. 542 ist mit den dortigen Bezeichnungen

$$\frac{dn}{dt} = 3n^2 ac T \sin(v - \pi) + \frac{3n^2 b^2}{r^3} V.$$

Die Entwicklung des Ausdruckes rechter Hand in der Form 91) möge das kritische Glied

$$94) \quad n^2 a \sin(m'L' - mL + A_{m,n'})$$

enthalten, wo in unserem Falle $m' = 18$, $m = 7$. Setzt man

$$95) \quad u = m'L' - mL + A_{m,n'}$$

und bedenkt, dass

$$\frac{dL}{dt} = n + \frac{d\epsilon}{dt}, \quad \frac{dL'}{dt} = n',$$

so wird

$$96) \quad \frac{du}{dt} = m'n' - mn - m \frac{d\epsilon}{dt}$$

und

$$96) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = -mn^2 a \sin u + P,$$

wo P nur weniger wichtige periodische Glieder enthält. Vernachlässigt man P , und nimmt man den Faktor n^2 als konstant an, so kann die letztere Gleichung genau wie die Pendelgleichung diskutiert werden und zwar bei Annahme einer anziehenden oder abstossenden Schwerkraft, je nachdem a positiv oder negativ ist; man erhält

$$98) \quad \left(\frac{du}{n dt} \right)^2 = C + 2ma \cos u.$$

Die einzelnen Fälle der Bewegung von u mögen hier aufgeführt werden,

da eine wirklich vollständige Darstellung in der Literatur kaum aufzufinden sein dürfte. Ist

$$1. C < -2m|a|,$$

so findet keine reelle Bewegung statt. Ist

$$2. -2m|a| < C < 0,$$

so schwankt u periodisch mit der Amplitude $\pm \arccos \frac{C}{2m|a|}$ und zwar um die stabile Ruhelage $u = 0$ oder π , je nachdem a positiv oder negativ ist; die Amplitude ist absolut genommen kleiner als $\frac{\pi}{2}$. Ist

$$3. 0 < C < 2m|a|,$$

so schwankt u in gleicher Weise mit der Amplitude

$$\pm \arccos \left(-\frac{C}{2m|a|} \right),$$

die absolut genommen grösser als $\frac{\pi}{2}$ ist. Ist endlich

$$4. C > 2m|a|,$$

so kann $\frac{du}{dt}$ niemals verschwinden; es tritt der Fall des ganz herumschwingenden Pendels ein, und zwar in der einen oder anderen Richtung, je nach dem Vorzeichen des Anfangswertes von $\frac{du}{dt}$.

Daneben gelten die Spezialfälle:

$$a. C = -2m|a|;$$

stabile Ruhelage bei $u = 0$ oder π , je nachdem a positiv oder negativ.

$$b. C = 0;$$

periodische Schwankung von u mit der Amplitude $\pm \frac{\pi}{2}$.

$$c. C = 2m|a|;$$

in diesem Falle ist

$$\text{bei positivem } a: \quad \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{u}{4} \right) = e^{\pm \sqrt{ma} \cdot n(t-t_0)},$$

$$\text{bei negativem } a: \quad \operatorname{tg} \frac{u}{4} = e^{\pm \sqrt{m|a|} \cdot n(t-t_0)}.$$

Die Bewegung ist hier doppelt asymptotisch; u nähert sich der labilen Ruhelage ($u = \pi$, wenn a positiv, $u = 0$, wenn a negativ) für $t = \pm \infty$, also ohne

sie in endlicher Zeit zu erreichen. Doch tritt hier für $\lim e^{\pm t_0} = 0$ der noch engere Spezialfall ein, dass u dauernd in der labilen Ruhelage bleibt.

Da sehr genähert

$$\frac{du}{dt} = m'n' - mn,$$

so kann aus der obigen Kettenbruchentwicklung geschlossen werden, dass $\frac{du}{dt}$ hier in der Tat verschwindet, u periodisch ist, und das rationale Verhältnis $\frac{n'}{n} = \frac{m}{m'}$ sich immer wieder herstellt.

In den Fällen 2. und 3. schwankt $m' \frac{n'}{n} - m$ zwischen den Grenzen $\pm \sqrt{C + 2m|a|}$; im Falle 4. dagegen entweder zwischen $+\sqrt{C \pm 2m|a|}$ oder zwischen $-\sqrt{C \pm 2m|a|}$. Da a äusserst klein ist, so sind auch die Änderungen von n sehr klein.

Die Diskussion der Gleichung 98) stützt sich auf verschiedene Vernachlässigungen und ist daher nicht streng. Der Veränderlichkeit von n^2 ist, immer unter Beiseitlassung von P , unschwer Rechnung zu tragen. Man hat dann die Gleichungen

$$\frac{du}{dt} = m'n' - mn, \quad \frac{dn}{dt} = n^2 \alpha \sin u,$$

zu diskutieren. Setzt man

$$n = \frac{n_0}{1-v} \quad \text{und} \quad mn_0 = m'n',$$

so wird

$$\frac{du}{dt} = -m'n' \frac{v}{1-v}, \quad \frac{dv}{dt} = n_0 \alpha \sin u.$$

Diese Gleichungen haben die kanonische Form:

$$99) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial v} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial u} \end{aligned} \quad H = n_0 \alpha \cos u + m'n' (v + \log(1-v)).$$

Ein Integral dieser Gleichungen ist

$$100) \quad H = c.$$

Die Grösse $\frac{du}{dt}$ verschwindet nur für $v = 0$, d. h. nach 100) für $n_0 \alpha \cos u = c$, oder für

$$u = \pm \arccos \frac{c}{n_0 \alpha}.$$

Ist $c > n_0 |a|$, so verschwindet $\frac{du}{dt}$ niemals, entsprechend dem obigen Fall 4. Ist $|c| < n_0 |a|$, so schwankt u periodisch, wie in den Fällen 2. und 3., vorausgesetzt, dass nicht gleichzeitig $\frac{dv}{dt}$ verschwindet. $\frac{du}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ können nur dann gleichzeitig verschwinden, wenn $c = \pm n_0 |a|$. Für diesen Sonderwert von c treten die Sonderfälle a. und c. ein: ist $u = 0$ oder π , so bleibt es beständig konstant (Fall a.); ist u nicht gleich einem dieser Werte, so tritt der doppelt asymptotische Fall unter c. ein.

Diese Untersuchung lässt sich insofern weiter ausdehnen, als sich ohne Schwierigkeit in 97) die Glieder von P berücksichtigen lassen, deren Argumente Vielfache von u sind. Man würde dann Gleichungen von der Form 99) erhalten, bei denen

$$H = n_0 \sum \frac{\alpha_i}{i} \cos iu + m' n' (v + \log(1-v)) = c$$

wäre. Die Untersuchung käme dann auf die Feststellung der reellen Wurzeln der Gleichung

$$n_0 \sum \frac{\alpha_i}{i} \cos iu - c = 0$$

heraus. Konvergieren die α_i stark genug, so wird diese Gleichung nur die Wurzeln $u = 0$ und π haben und die Ergebnisse werden den obigen wesentlich gleich sein. Dass dieser Fall eintritt, ist bei Pallas zu erwarten, wo m und m' verhältnismässig grosse Zahlen sind. Anders kann der Fall liegen, wenn diese Zahlen klein sind, die mittleren Bewegungen sich etwa wie $\frac{m}{m'} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ verhalten.

Wollte man noch auf weitere Glieder in P und darauf Rücksicht nehmen, dass die Grössen $\alpha_{m, m'}$ und $A_{m, m'}$ in den Ausdrücken 91) streng genommen nicht konstant sind, so werden die Untersuchungen schwieriger¹⁾.

Nachdem GAUSS durch seine zweite Rechnung der allgemeinen Störungen die Zahlenwerte der Koeffizienten α und A gefunden hatte, konnte er die Grenzen, zwischen denen n schwankt, sowie die Länge der Periode, wenn auch nur sehr unsicher, berechnen. Auf dem ersten der oben erwähnten Zettel stehen ausser der Zahlenrechnung für die Grössen $18L' - 7L$ und C die Gleichungen:

¹⁾ Wir verweisen auf CHARLIER, *Mechanik des Himmels*, Leipzig, II. Band, 1907, 11. Abschnitt, § 4-6, zweite durchgesehene Auflage 1927.

$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{dt^2} = 0,02955 \sin(18\hat{\phi} - 7\hat{\phi} + 198^{\circ}39'8''),$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = 0,02955 \sin u [= \alpha \sin u],$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -0,20685 \sin u [= -7\alpha \sin u],$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = C + 0,4137 \cos u [= C + 14\alpha \cos u],$$

$$dt = \frac{du}{\sqrt{(-0,00000159 + 0,00000200 \cos u) \alpha}}.$$

Auf dem zweiten Zettel lauten die Notizen (ausser den auf der folgenden Seite erwähnten Zahlenrechnungen):

$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{dt^2} = \alpha \sin(18\hat{\phi} - 7\hat{\phi} + A),$$

$$101) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = -7\alpha \sin u, \quad \frac{18d\hat{\phi}}{dt} = 7 + \mu,$$

$$102) \quad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = C + 14\alpha \cos u = (14\alpha + C) \cos^2 \hat{\phi},$$

$$103) \quad C = \mu^2 - 14\alpha \cos U,$$

$$\cos u = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} u,$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = C + 14\alpha - 28\alpha \sin^2 \frac{1}{2} u = (C + 14\alpha) \left(1 - \frac{28\alpha}{C + 14\alpha} \sin^2 \frac{1}{2} u\right),$$

$$\sqrt{\frac{28\alpha}{C + 14\alpha}} \cdot \sin \frac{1}{2} u = \sin \hat{\phi},$$

$$\sqrt{\frac{7\alpha}{C + 14\alpha}} \cdot \cos \frac{1}{2} u \cdot du = \cos \hat{\phi} \cdot d\hat{\phi},$$

$$\frac{du}{dt} = \cos \hat{\phi} \cdot \sqrt{C + 14\alpha},$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \sqrt{7\alpha} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{C + 14\alpha}{28\alpha} \sin^2 \hat{\phi}\right)},$$

$$104) \quad \frac{d\hat{\phi}}{\sqrt{\left(7\alpha - \frac{C + 14\alpha}{4} \sin^2 \hat{\phi}\right)}} = \frac{1}{M(\sqrt{7\alpha}, \sqrt{7\alpha \cos^2 \frac{1}{2} U - 1 \mu^2})},$$

$$105) \quad \text{Maximum von } \frac{du}{dt} = \sqrt{(28\alpha \sin^2 \frac{1}{2} U + \mu^2) \alpha}.$$

Die Gleichungen 101) und 102) entsprechen den Gleichungen 97) und 98); GAUSS schreibt stets kurz dt für ndt . Nach Gleichung 103) berechnet er C auf dem ersten Zettel; μ und U bedeuten die aus den Beobachtungen festzustellenden Anfangswerte von $\frac{du}{ndt} = 18 \frac{n'}{n} - 7$ und $u = 18L' - 7L + A$.

Aus den Werten

$$\begin{aligned} n' &= 299^{\circ}12'817, \\ n &= 769^{\circ}16'512, \end{aligned}$$

die GAUSS seiner zweiten Rechnung zugrunde legte¹⁾, ergibt sich

$$\log \mu = 6,2936 - 10,$$

wo die letzte Stelle schon um einige Einheiten unsicher ist. Der von GAUSS angegebene Wert (6,29314) enthält noch eine Stelle mehr und entspräche genau dem Wert $7n = 5384^{\circ}15'600$ oder $n = 769^{\circ}16'5143$.

Bei der Berechnung von U hat GAUSS anscheinend ein Versehen begangen. Es folgt nämlich nach Werke VII, 1906, S. 557 das kritische Glied

$$\frac{du}{n^3 dt} = +0,012 \cos(18M' - 7M) - 0,027 \sin(18M' - 7M)$$

oder, indem man beide Teile zusammenzieht:

$$\frac{du}{n^3 dt} = 0,02955 \sin(18M' - 7M + 156^{\circ}2'14").$$

Der Koeffizient $a = 0,02955$ stimmt genau mit dem obigen GAUSSschen Werte überein. Setzt man aber, ebenfalls mit den Werten Werke VII, 1906, S. 529,

$$\begin{aligned} M' &= L' - \pi' = L' - 11^{\circ}17'5,4 & 18\pi' - 7\pi &= 75^{\circ}5'16", \\ M &= L - \pi = L - 121^{\circ}8'54,5 \end{aligned}$$

so erhält man

$$\frac{du}{n^3 dt} = 0,02955 \sin(18L' - 7L + 80^{\circ}56'58"),$$

übrigens in voller Übereinstimmung mit dem von GAUSS berechneten Wert, Werke VII, 1906, S. 557 (Glieder in $\int n dt$). Es ist also $A = 80^{\circ}56'58"$, während GAUSS auf den Zetteln mit dem Wert $A = 198^{\circ}39'8"$ gerechnet hat. Zur Berechnung von U setzt er $18L' - 7L = 125^{\circ}36'49"$, ein Wert, der sehr unsicher ist, aber annähernd mit den für verschiedene Epochen nachgerechneten Werten übereinstimmt. Hiermit findet er²⁾

$$U = 324^{\circ}15'57", \quad \log C = 4,20126n - 10,$$

während man mit dem richtigen Werte von A erhält:

$$U = 206^{\circ}33'46", \quad \log C = 4,26300 - 10.$$

1) Werke VII, 1906, S. 529.

2) Werke VII, 1906, S. 608, steht versehentlich $\log C = 4,26300$ statt $4,20126n$.

Es ist also jedenfalls $C < 14a$ und die Änderung von u periodisch. Die Gleichung 104) gibt die Periode der Libration und die Gleichung 105) gibt die Grenzen, zwischen denen n schwankt. Die Berechnung beider Grössen steht auf dem zweiten Zettel neben den Formeln. Man findet die Periode zu 1894 Pallasumläufen = 737 Jupiterumläufen, während GAUSS nach seinen Zahlen angibt: 1026,17 Pallasumläufe = 399,07 Jupiterumläufe.

Bei der Berechnung des Ausdruckes 105) ist auf dem Zettel versehentlich $\frac{1}{7}\mu^2$ statt μ^2 gesetzt, womit GAUSS die Grenzen von n zu

$$\frac{18}{7}n' \pm 0,06838$$

fand³⁾. Die richtige Rechnung ergibt:

$$\text{für } n: \frac{18}{7}n' \pm 0,2153, \quad \text{für } u: \pm 156^{\circ}$$

und mit den GAUSSschen Zahlen:

$$\text{für } n: \frac{18}{7}n' \pm 0,0722, \quad \text{für } u: \pm 37^{\circ}35'.$$

GAUSS mag die Rechnung auf den Zetteln nur flüchtig gemacht und darauf weniger Wert gelegt haben, da die Grundlagen recht unsicher sind; daher erklärt es sich wohl auch, dass er seine Zahlen nicht geprüft hat. Die Untersuchung gab ihm nun die Unterlagen für seine in der Handschrift *Exposition d'une nouvelle méthode* etc.²⁾ aufgestellte Behauptung, dass die bei einem rationalen Verhältnis von n und n' auftretenden sekularen Glieder in n bei Berücksichtigung der höheren Potenzen der störenden Masse die periodische Form annehmen. Für die praktische Rechnung empfiehlt er die Beibehaltung des sekularen Gliedes in n , d. h. die Entwicklung des Librationsgliedes nach Potenzen von t , und verfährt hiernach auch selbst³⁾.

6. Tafeln für die Jupiterstörungen der Pallas.

Die gesamte Anzahl der Störungsglieder beläuft sich nach S. 208 auf 824 und bei der Berechnung eines einzelnen Pallasortes müssten nach den Ausdrücken Werke VII, 1906, S. 543—556, alle diese Glieder berechnet

1) Vergl. Werke VII, 1906, S. 559 und 608.

2) Ebenda, S. 468.

3) Ebenda, S. 557.

werden, wobei schon die Bildung der Argumente die Geduld eines Einzelnen leicht übersteigen würde. GAUSS entwarf daher die Werke VII, 1906, S. 572 bis 577 abgedruckten Tafeln, die sich mit den zugehörigen Rechnungen vollständig im Nachlass vorfinden. Er teilt die periodischen Glieder nach ihren Argumenten in 13 Gruppen und stellt jede Gruppe als Funktion der Differenz $L' - L$ der mittleren Längen von Pallas und Jupiter dar. Mit dieser Grösse als Argument können die Zahlen zur Berechnung der Summe einer ganzen solchen Gruppe direkt aus den Tafeln entnommen werden. Die Berechnung der Tafeln, an der sich neben ENCKE noch WESTPHAL hervorragend beteiligte, wurde in etwas mehr als einem Jahr fertiggestellt.

7. Störungen der Pallas durch Mars.

Von den Marsstörungen hat GAUSS nur die Störungen der halben grossen Achse, die des ersten Teils $\delta fndt$ der Epoche und die der Exzentrizität fertig gerechnet und hierbei im wesentlichen wieder dieselbe Methode gebraucht, wie bei den Jupiter- und Saturnstörungen. Die nicht erhebliche Arbeit der Berechnung der übrigen Elemente ist liegen geblieben.

Andererseits finden sich aber Aufzeichnungen im Nachlass, nach denen GAUSS versuchte, eine andere neuartige Methode zur Entwicklung der Komponenten der störenden Kräfte anzuwenden, die sich etwa in folgender Weise beschreiben lässt. Es sind die Ausdrücke $\frac{x'-x}{\rho^3}$, $\frac{y'-y}{\rho^3}$, $\frac{z'-z}{\rho^3}$ nach Vielfachen der mittleren Anomalien M (Pallas) und M' (Mars) zu entwickeln. Da nicht nur die Exzentrizität der Pallas, sondern auch die des Mars beträchtlich ist, und auch das Verhältnis der beiden halben grossen Axen $\frac{a'}{a}$ nicht klein ist, so konvergieren die trigonometrischen Reihen nach allen drei Vielfachen von M , M' , $M - M'$ und nach allen drei Parametern (e , e' und $\frac{a'}{a}$) ziemlich schwach und man muss hier auf den Vorteil verzichten, die Entwicklung nach e' an die letzte Stelle zu setzen, wie oben S. 236–237 bei Gelegenheit der Jupiterstörungen auseinandergesetzt worden ist; vielmehr müsste die Entwicklung nach den Vielfachen aller drei Argumente M , M' und $M - M'$ mit gleichem Recht behandelt werden und dazu reicht die bei den Jupiterstörungen benutzte rein interpolatorische Methode nicht aus, da sie nur die Berücksichtigung zweier Argumente gestattet.

Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, scheint GAUSS ein gemischtes, teils interpolatorisches, teils analytisches Entwicklungsverfahren angewandt oder wenigstens versucht zu haben. Er teilt den Umkreis für das Argument M in 24 Teile und führt daher die Entwicklung nach dem Argument M' für die Einzelwerte $M = 0, 15^\circ, 30^\circ, \dots, 345^\circ$ aus; bei dieser Entwicklung stellt er folgende Betrachtungen an.

Für den Abstand der Pallas vom Mars lässt sich die Formel¹⁾

$$\rho^2 = A + B \cos(E' - C) + D \cos^2 E'$$

ableiten, wo E' die exzentrische Anomalie des Mars und A, B, C, D Funktionen der exzentrischen, wie auch der mittleren Anomalie der Pallas sind, also für jeden M -Wert bestimmte Zahlenwerte haben; der Ausdruck für ρ^2 lässt sich in Faktoren zerlegen:

$$\frac{\rho^2}{D} = \{M - \cos(E' - \varphi)\} \{N - \cos(E' + \varphi)\},$$

wo M, N, φ aus A, B, C, D zu berechnen sind²⁾. Hiermit wird:

$$\frac{x'-x}{\rho^3} = \frac{x'-x}{D^{\frac{3}{2}} [M - \cos(E' - \varphi)]^{\frac{3}{2}} [N - \cos(E' + \varphi)]^{\frac{3}{2}}}.$$

GAUSS betrachtet nun die Wurzeln der Gleichung $\rho^2 = 0$, im besonderen

$$M - \cos(E' - \varphi) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung da, da $M > 1$ ist,

$$E' = \varphi + k\pi + ix,$$

wo k eine ganze positive oder negative Zahl oder Null bedeutet und wo

$$e^x = M \pm \sqrt{M^2 - 1}$$

ist.

Der entsprechende Wert von M' ergibt sich aus der KEPLERSCHEN Gleichung

$$M' = E' - e' \sin E' = E' - e' \sin \varphi \cos(E' - \varphi) - e' \cos \varphi \sin(E' - \varphi)$$

oder, wenn man

$$\cos(E' - \varphi) = M = \frac{1}{\sin \zeta},$$

und damit

$$\sin(E' - \varphi) = i \operatorname{ctg} \zeta$$

1) Die ähnliche Formel $\rho^2 = (A - a \cos E')^2 + (B - b \sin E')^2 + C^2$ benutzt GAUSS in der *Determinatio attractionis* etc., Werke III, S. 334.

2) Siehe Werke VII, 1906, S. 592.

setzt:

$$M' = E' - \frac{e' \sin \varphi}{\sin \zeta} - i e' \cos \varphi \cdot \operatorname{ctg} \zeta.$$

Setzt man nun

$$\varphi' = \varphi - \frac{e' \sin \varphi}{\sin \zeta}$$

und der Kürze halber

$$y = e' \cos \varphi \cdot \operatorname{ctg} \zeta,$$

so wird

$$M' - \varphi' = E' - \varphi - i y,$$

also

$$\begin{aligned} \cos(M' - \varphi) &= \frac{1}{2} e^y \{ \cos(E' - \varphi) + i \sin(E' - \varphi) \} \\ &+ \frac{1}{2} e^{-y} \{ \cos(E' - \varphi) - i \sin(E' - \varphi) \} \\ &= \frac{1}{2} e^y \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta + \frac{1}{2} e^{-y} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \zeta. \end{aligned}$$

Setzt man noch

$$e^y \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \zeta',$$

so wird schliesslich

$$\cos(M' - \varphi') = \frac{1}{\sin \zeta'}.$$

Die beiden Gleichungen

$$\cos(E' - \varphi) - M = \cos(E' - \varphi) - \frac{1}{\sin \zeta} = 0$$

und

$$\cos(M' - \varphi') - \frac{1}{\sin \zeta'} = 0$$

werden also durch die gleichen Werte von M' befriedigt. Daher hat man

$$M - \cos(E' - \varphi) = c \left\{ \frac{1}{\sin \zeta'} - \cos(M' - \varphi') \right\},$$

und, wenn man

$$\lambda = \left\{ \frac{1}{\sin \zeta'} - \cos(M' - \varphi') \right\}^{\frac{1}{2}}$$

setzt,

$$\frac{x' - x}{\rho^{\frac{1}{2}}} = \frac{x' - x}{e^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} (N - \cos(E' + \varphi))^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{(x' - x) \lambda}{\rho^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

Diese Grösse ist also in zwei Faktoren zerlegt und aus dem ersten Faktor $\frac{(x' - x) \lambda}{\rho^{\frac{1}{2}}}$ ist die ungünstige Konvergenz verschwunden, die durch die Grösse $(M - \cos(E' - \varphi))^{-\frac{1}{2}}$ veranlasst wird. Dieser erste Faktor wird sich also nach der interpolatorischen Methode nach Vielfachen von M' entwickeln lassen, ohne dass man sehr viele Glieder zu berechnen, und ohne dass man den Umkreis in allzuvielen Teilen zu teilen braucht. Dafür wird zwar der zweite Faktor $\frac{1}{\lambda}$

mit Berücksichtigung einer grösseren Anzahl Glieder entwickelt werden müssen; jedoch lässt dieser sich leicht beliebig weit entwickeln, da es sich hier um nichts anderes als um die von GAUSS so vielfach betrachtete Entwicklung des Ausdrucks

$$(a - \beta \cos \psi)^{-\frac{1}{2}}$$

handelt.

Man könnte wohl auch den zweiten Faktor $(N - \cos(E' + \varphi))^{-\frac{1}{2}}$ in gleicher Weise heraussetzen; doch hat GAUSS dieses zweite Verfahren überhaupt nicht weiter verfolgt, weil die Ersparnis an Rechenarbeit doch nicht sehr gross zu sein scheint. Vermutlich hat er den Faktor $(M - \cos(E' - \varphi))^{-\frac{1}{2}}$ gewählt, weil die Funktion $M - \cos(E' - \varphi)$ die der reellen Achse am nächsten gelegene Nullstelle in der komplexen M' -Ebene hat. Die entsprechende Wurzel M' hat den kleinsten imaginären Teil; ihr reeller Teil ist φ' und man kann annehmen, dass die Entwicklung nach $M' - \varphi'$ diejenige auf der reellen Achse ist, die am schwächsten konvergiert.

Der GAUSSsche Kunstgriff besteht also darin, dass man eine Funktion, deren Entwicklung schwach konvergiert, mit einem Faktor multipliziert, der die Konvergenz verstärkt. Das Produkt entwickelt man sodann nach der interpolatorischen Methode. Die Entwicklung des reziproken Faktors, mit der nachher wieder zu multiplizieren ist, wird zwar schwach konvergieren; man kann den Faktor aber so wählen, dass seine Entwicklung sich leicht weit genug fortsetzen lässt.

Man kann sich das Verfahren an dem analogen Fall einer Potenzreihenentwicklung vergegenwärtigen:

Es sei die Funktion

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

gegeben, wo $f(x)$ eine ganze rationale Funktion sein mag und die Gleichung

$$f(x) = 0$$

keine reelle Wurzel hat. Ihre Wurzeln seien $a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2$ usw., so dass

$$f(x) = ((x - a_1)^2 + b_1^2) ((x - a_2)^2 + b_2^2) \dots$$

Es wird verlangt, y in einem beliebigen Punkte der reellen Achse so in eine Potenzreihe zu entwickeln, dass diese Reihe möglichst leicht hergestellt werden

kann. Wenn b die kleinste der Grössen b_1, b_2, \dots ist, so wird die Konvergenz der Entwicklung von y , wenigstens im entsprechenden Punkte a und seiner Umgebung, durch die Nullstelle $a + ib$ begrenzt. Nimmt man den Faktor

$$\lambda = (x - a)^2 + b^2$$

heraus, so konvergiert die Entwicklung von λy stärker als die von y . Es kann also vorteilhaft sein, die Grössen λy und $\frac{1}{\lambda}$, jede für sich, zu entwickeln und durch Multiplikation beider Entwicklungen die von y herzustellen. Man wird nämlich bei der Entwicklung von λy weniger hohe Potenzen von x zu berücksichtigen brauchen, wie bei der von y und bei der von $\frac{1}{\lambda}$. Nun ist aber die Entwicklung von

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{b^2} \sum_0^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-a}{b}\right)^{2n}$$

formell leichter herzustellen, als die von y und λy , es wird also durch die Zerlegung ein Vorteil gewonnen.

Solche Erwägungen mögen es gewesen sein, die GAUSS hier verfolgt hat. In einer Notiz des *Handbuchs* 19, Be (S. 76-77)¹⁾, gibt GAUSS eine andere Methode zur Aufsuchung des Faktors λ :

Er bringt die Gleichung $\rho^2 = 0$ auf die Form:

$$a + b \cos 2E' - \cos(E' + D) = 0$$

und bestimmt ihre Wurzeln E' in der Form $E' = x + y$, wo x reell und y rein imaginär sein soll; die Formeln zur Berechnung von x und $\cos y$ gibt er an; letztere Grösse ist reell und grösser als Eins. Der entsprechende Wert von M' sei $\xi_0 + i\eta_0$.

Ist λ wieder der zur Entwicklung des Ausdrucks $\frac{1}{\rho^2}$ aus diesem herauszunehmende Faktor, so ist also $\frac{1}{\lambda}$ in eine Reihe nach Vielfachen von $M' - \xi_0$ zu entwickeln; man wird also λ die Form geben:

$$\lambda = (C - \cos(M' - \xi_0))^2.$$

Die Konstante C ist so zu bestimmen, dass λ gleichzeitig mit ρ verschwindet, also

$$C = \cos i\eta_0.$$

Dabei stellt GAUSS noch die folgende Betrachtung an:

1) Werke VII, 1906, S. 599-600.

Sind

$$u = a \cos(nM' + A) \quad \text{und} \quad u' = a' \cos((n+1)M' + A')$$

zwei aufeinanderfolgende Glieder einer konvergenten Reihe, und zwar im besonderen der Entwicklung von $\frac{1}{\lambda}$, so ist:

$$\frac{u'}{u} = \frac{a'}{a} \frac{e^{iM' - i(A-A')} + e^{-i(2n+1)M' - i(A+A')}}{1 + e^{-2inM' - 2iA}}.$$

Setzt man

$$M' = \xi + i\eta,$$

so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u'}{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'}{a} e^{-\eta} \{ \cos(\xi - A + A') + i \sin(\xi - A + A') \}.$$

Macht man die von GAUSS nicht ausdrücklich hervorgehobene Voraussetzung, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u'}{u}$ einen bestimmten Wert hat, so ist dieser höchstens gleich Eins, da die Reihe als konvergent vorausgesetzt ist. Lässt man M' in $M'_0 = \xi_0 + i\eta_0$ übergehen und konvergiert die Reihe für alle Werte von M' bis M_0 ausschliesslich, so muss $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u'}{u}$ im Punkt M'_0 sich beliebig der Eins nähern; es ist daher:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'}{a} = e^{\eta_0}, \quad \lim(A - A') = \xi_0.$$

8. Sekuläre Störungen.

Seine Untersuchungen über die sekulären Störungen hat GAUSS in der *Determinatio attractionis* etc.¹⁾ veröffentlicht; aus gewissen Äusserlichkeiten kann man vermuten, dass diese Untersuchungen etwa um dieselbe Zeit (1814) ausgeführt worden sind, wie die Berechnung der Marsstörungen der Pallas. Im *Handbuch* Be, S. 82, wo sich Vorarbeiten zur *Determinatio* finden, fällt nämlich nicht bloss die Ähnlichkeit der Gleichung für ρ^2 mit der bei der Pallas benutzten auf, sondern dort ist auch ein Zahlenbeispiel von der Pallas entnommen. In der *Anzeige der Determinatio attractionis*²⁾ vom Jahre 1818 sagt GAUSS, dass er »diese Resultate schon vor vielen Jahren gefunden habe«.

Ebendort³⁾ heisst es: »Vermöge eines, vielleicht bis jetzt noch von nie-

1) Werke III, S. 321. Deutsch von H. GEFFERT, OSTWALDS Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 228.

2) Werke III, S. 360.

3) Ebenda, S. 357.

mand ausdrücklich ausgesprochenen, aber aus der physischen Astronomie leicht zu beweisenden Lehrsatzes, sind die Sekularveränderungen einer Planetenbahn durch die Störung eines andern Planeten dieselben, der störende Planet mag eine elliptische Bahn nach KEPLERS Gesetzen wirklich beschreiben, oder seine Masse mag auf den Umfang der Ellipse in dem Masse verteilt angenommen werden, dass auf Stücke der Ellipse, die sonst in gleich grossen Zeiten beschrieben werden, gleich grosse Anteile an der ganzen Masse kommen: vorausgesetzt, dass die Umlaufzeiten des gestörten und des störenden Planeten nicht in rationalem Verhältnis zu einander stehen¹⁾. Man muss hier die Einschränkung machen, dass die GAUSSsche Methode nur die ersten Potenzen der störenden Masse berücksichtigt oder dass man nur diese als sekulare Störungen bezeichnet, wie es wohl in der älteren Störungstheorie üblich war. Jedoch wird dadurch z. B. im Falle des Mondes keine genügende Annäherung erreicht; ähnliches tritt ein, wenn die Umlaufzeiten beider Planeten nahezu in einem niedrigzahligen rationalen Verhältnis stehen; in diesem Falle werden die von den dritten Potenzen der störenden Masse abhängenden²⁾ Glieder, die die Sekularbeschleunigung hauptsächlich bedingen, merklich.

9. Schlussbemerkung.

Mit den Jahren 1816—17 schliessen GAUSS' Arbeiten aus dem Gebiete der theoretischen Astronomie gänzlich ab. Seine späteren astronomischen Untersuchungen gehören in das Gebiet der beobachtenden und sphärischen Astronomie, während sich der Schwerpunkt seiner Arbeiten überhaupt auf verwandte Gebiete verschob; in den nächstfolgenden Jahren steht besonders die Geodäsie im Vordergrund seiner Tätigkeit. Näheres über GAUSS' astronomische Beschäftigungen in dieser Zeit sehe man im ersten Abschnitt dieser Abhandlung.

¹⁾ Vergl. BESSELS Rezension, *Jensers Allgemeine Literaturzeitung*, 1821, Nr. 58. F. W. BESSEL, *Rechenionen*, Leipzig 1878, S. 193.

²⁾ Vergl. M. BRENDL, *Theorie der kleinen Planeten*, 2. Teil, S. 49—51 u. sonst (Abhandlungen der K. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, Neue Folge, Bd. VI, Nr. 4, Berlin 1909).

Inhaltsverzeichnis.

ERSTER ABSCHNITT. — PRAKTISCHE UND SPHÄRISCHE ASTRONOMIE.	
Einleitung	Seite 3
1. Die Braunschweiger Periode, bis 1807.	
Studienzeit	7
Bekantschaft mit LECOQ und Briefwechsel mit V. ZACH	9
ULVOH BEIGHS Sonnentafeln, Methode der kleinsten Quadrate	11
Beobachtungen mit dem Sextanten	13, 20, 33
Ruf nach St. Petersburg	16, 20, 27, 32
Bahnbestimmung der Ceres	17
Unterstützung durch Herzog KARL WILHELM FERDINAND	18, 21, 22
Ruf nach Göttingen	21, 29, 32
Plan einer Sternwarte in Braunschweig	22, 27—32
Pulversignale auf dem Brocken zur Längenbestimmung	25
Persönliche Bekantschaft mit V. ZACH, Aufenthalt auf der Sternwarte Seeberg	26
HARDINGS Berufung nach Göttingen	29
Tod des Herzogs	32
Instrumente und Beobachtungen in Braunschweig	33, 39
GEFFKENSches Spiegelteleskop	35—39
2. Zweite (erste Göttinger) Periode, 1807—1813.	
Übersiedelung nach Göttingen	41
Beschreibung der alten Göttinger Sternwarte	41
Instrumente der alten Göttinger Sternwarte	43
Tagebuch der astronomischen Beobachtungen auf der Sternwarte in Göttingen	49
HARDINGS Sternkarten	50
HARDINGS Reise nach Paris	51
Schüler von GAUSS	52
SHELTONSche Uhr	52
Veröffentlichungen	54
3. Dritte (zweite Göttinger) Periode, 1813—1816.	
BORDAScher Repetitionskreis von REICHENBACH	55
Bestimmung der Göttinger Polhöhe	57
Briefwechsel mit BESSEL	59

Schiefe der Ekliptik und Polhöhe	Seite 59
BESSELS Berufung nach Königsberg	61
Theorie der Refraktion	64
Widersprechende Ergebnisse für die Schiefe der Ekliptik	65
Heliometer von FRAUNHOFER	71
Dioptrische Untersuchungen	78
Instrumente aus Lilienthal	79
HARDINGS Sternkarten vollendet	81, 87
4. Vierte (dritte Göttinger) Periode, 1817—1818.	
Vollendung der neuen Göttinger Sternwarte	81, 83, 87
Beschreibung der neuen Sternwarte	82
Ankunft des REPSOLDschen Meridiankreises	84
GAUSS Reise nach München und Benediktbeuren	85
Ankunft des REICHENBACHSchen Passageninstrumentes und des Meridiankreises	86
Letzte Eintragungen in das Tagebuch der Sternwarte	87
5. Fünfte Periode. — Der REPSOLDsche Meridiankreis (1818 und später).	
Beobachtungen am REPSOLDschen Kreise	88
Meridianzeichen	92
Stabilität des Kreises	93
Polhöhe	96
Zenitdistanzen	98
Briefwechsel mit BESSEL und OLBEES	99
Kollimationsfehler (Äquatortpunkt)	100
Wahrscheinlicher Beobachtungsfehler	102
Apparat zur Bestimmung der Teilungsfehler	103
Biegung, Queckillberhorizont	103
Anzahl der Beobachtungstage	105
6. Sechste Periode. — REICHENBACHSche Instrumente.	
Erste Beobachtungen mit dem Passageninstrument	109
Fadenkreuz	111
Tagebuch der Beobachtungen am Passageninstrument	112
Bestimmung von Längenunterschieden durch Mondbeobachtungen	113
Uhren	114
Der REICHENBACHSche Meridiankreis	119
Meridianzeichen	119
Zirkumpolar- und Fundamentalsterne	122
SCUMACHERSche Zenitsterne; dänische Gradmessung	122
Beobachtungsperioden, Umlagen des Kreises	123
Übereinstimmung mit BESSELS Beobachtungen	124
Biegung	125
BESSELS Refraktionstabellen	125
Queckillberhorizont	125
Vorbereitung der Hannoverschen Gradmessung	126

7. Siebente Periode. — Geringere astronomische Tätigkeit.	
GAUSS Klagen über die Zerspaltung seiner Zeit	Seite 128, 141
Hannoversche Landesvermessung	128
Übersicht über die Beobachtungen am REICHENBACHSchen Kreise	130
Lotabweichung	131
Beobachtungen am Zenitsektor, Breitenunterschied zwischen Göttingen und Altona	131
Bestimmung der Fadenabstände durch einen Kollimator	132
Teilungsfehler	132
Nadirbeobachtungen	133
Eigenbewegung der Sonne	134
Hannoversche Mass- und Gewichtsregulierung	142
Tod von HARDING	143
Letzte Beobachtungen	144

Tafel. Abbildung der alten und der neuen Göttinger Sternwarte.

ZWEITER ABSCHNITT. — THEORETISCHE ASTRONOMIE.

Einleitendes	145
I. Theorie des Mondes	147
II. Bahnbestimmung aus drei oder vier Beobachtungen (im besonderen <i>Theoria motus</i>).	
1. Die Entdeckung der Ceres	150
2. Einleitendes über GAUSS' Methoden der Bahnbestimmung	155
3. Übersicht über GAUSS' Methoden zur genäherten Bestimmung der Abstände von der Erde im ersten und dritten Ort	159
4. Ableitung von GAUSS' Hauptgleichung zur genäherten Bestimmung von δ' und Zusammenhang mit der <i>Theoria motus</i>	162
5. Methode der <i>Theoria motus</i> zur genäherten Bestimmung des Abstandes δ' im mittleren Ort	165
6. Bestimmung von δ und δ'' aus δ' bezw. von r und r'' aus r'	167
7. Bestimmung einer genäherten Bahn aus hypothetischen Werten von δ und δ'' oder von i und Ω , nach den älteren Methoden	168
8. Verbesserung der Bahn nach den älteren Methoden	173
9. Geschichtliches über GAUSS' Bahnbestimmungen	174
10. Übersicht über die verschiedenen Methoden der Bahnbestimmung aus hypothetischen Werten von δ und δ'' oder von i und Ω	177
11. Vervollkommnete Methode der <i>Theoria motus</i>	179
12. Besondere Fälle der Bahnbestimmung	182
13. Rechnung für parabelnahe Ellipsen und Hyperbeln; hyperbolische und Kreisbahn-Bestimmung	185
III. Bahnverbesserung aus einer grösseren Reihe von Beobachtungen.	
1. Einleitendes	187
2. Bahnverbesserung aus vier Oppositionen	188
3. Bahnverbesserung aus mehreren Oppositionen und mit Berücksichtigung der Störungen	192
4. Allgemeine Formeln zur Bahnverbesserung	194



IV. Allgemeines über GAUSS' störungstheoretische Arbeiten.	
1. Einleitendes	Seite 194
2. Geschichtliches über GAUSS' Störungsrechnungen	195
V. Störungen der Ceres.	
1. Erste Methode	214
2. Tafeln der Ceresstörungen	221
3. GAUSS' zweite Methode zur Berechnung der Störungen der Ceres. <i>Theoria interpolationis</i>	222
VI. Tafeln zur Entwicklung von $(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos x)^{-\frac{1}{2}}$	
VII. Störungen der Pallas und Vorbereitungen dazu.	
1. <i>Disquisitio de elementis ellipticis Palladis</i>	233
2. Spezielle Störungen der Pallas	233
3. Erste Rechnung der allgemeinen Störungen der Pallas	235
4. Zweite Rechnung der allgemeinen Störungen der Pallas	237
5. Die grössten Gleichungen in den Störungen der Pallas. Libration	238
6. Tafeln für die Jupiterstörungen der Pallas	247
7. Störungen der Pallas durch Mars. Verstärkung der Konvergenz	248
8. Sekulare Störungen	253
9. Schlussbemerkung	254



CARL FRIEDRICH GAUSS
WERKE

HERAUSGEGEBEN VON DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

- Band
- I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck. 478 Seiten. 1870. Kart. RM 48.—
- II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 528 Seiten. 1876. Kart. RM 55.—
NACHTRAG zum ersten Abdruck des zweiten Bandes. Seite 493—528. 1876. Kart. RM 3.50
- III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 409 Seiten. 1876. Kart. RM 50.—
- IV. WAHRSCHEINLICKEITSRECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 497 Seiten.
1886. Kart. RM 50.—
- V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 648 Seiten. 1877. Kart. RM 64.—
- VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN UND AUFSÄTZE. 264 Seiten. 1874. Kart. RM 60.—
- VII. THEORIA MOTUS UND THEORETISCH-ASTRONOMISCHER NACHLASS. (Parabolische
Bewegung, Störungen der Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes). 850 S. 1906. Kart. RM 65.—
- VIII. ARITHMETIK, ANALYSIS, WAHRSCHEINLICKEITSRECHNUNG, GEOMETRIE. (Nach-
träge zu Band I—IV.) 458 Seiten. 1900. Kart. RM 46.—
- IX. GEODÄSIE. (Fortsetzung von Band IV.) 528 Seiten. 1903. Kart. RM 52.—
- X. Abteilung 1. NACHLASS UND BRIEFWECHSEL ZUR REINEN MATHEMATIK. (Nach-
träge zu Band I—IV und VIII.) TAGEBUCH. 586 Seiten. 1917. Kart. RM 59.—
NACHBILDUNG DES TAGEBUCHS (Notizenjournale) 1798—1814. RM 1.20
- XI. Abteilung 1. NACHTRÄGE ZUR PHYSIK, CHRONOLOGIE UND ASTRONOMIE. (Nach-
träge zu Band V—VII.) 518 Seiten. 1927. Brosch. RM 47.—, Kart. RM 48.—
- XII. VARIA UND ATLAS DES ERDMAGNETISMUS. 415 Seiten, 5 Zahlentafeln und 19 Karten.
1929. Brosch. RM 49.—, Kart. RM 60.—
- X. Abteilung 2. ABHANDLUNGEN ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF
DEN GEBIETEN DER REINEN MATHEMATIK.
Abhandlung 1 und 6: ÜBER GAUSS' ZAHLENTHEORETISCHE ARBEITEN. Von PAUL
BACHMANN. — GAUSS UND DIE VARIATIONSRECHNUNG. Von OSCAR BOLZA. 75 +
95 Seiten. 1922. Brosch. RM 17.—
Abhandlung 4: GAUSS ALS GEOMETER. Von PAUL STAECKEL. 123 Seiten. 1923.
Brosch. RM 12.50
Abhandlung 6: GAUSS ALS ZAHLENRECHNER. Von PHILIPP MAERNCHEN. Etwa 60 Seiten.
Unter der Presse.
Abhandlungen 2, 3 und 7 in Vorbereitung.
- XI. Abteilung 2. ABHANDLUNGEN ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF
DEN GEBIETEN DER GEODÄSIE, PHYSIK UND ASTRONOMIE. 642 Seiten. 1929.
- Hieraus einzeln:
Abhandlung 1: ÜBER DIE GEODÄTISCHEN ARBEITEN VON GAUSS. Von A. GALLE.
165 Seiten. 1924. Brosch. RM 17.—
Abhandlung 2: ÜBER GAUSS' PHYSIKALISCHE ARBEITEN. Von CLEMENS SCHAEFFER.
217 Seiten. 1929. Brosch. RM 24.—
Abhandlung 3: ÜBER DIE ASTRONOMISCHEN ARBEITEN VON GAUSS. Von MARTIN
BRENNEL. 280 Seiten. 1929.
- Die Bände X, 2 und XI, 2 bestehen aus einzelnen Abhandlungen (Essays), die besonders
paginiert sind und in der Reihenfolge ihrer Fertigstellung auch gesondert ausgegeben werden.
Mit der letzten Abhandlung eines jeden Bandes wird Titelblatt und Inhaltsverzeichnis geliefert.
- Supplementband. REGISTER, BESCHREIBUNG DES NACHLASSES. BIOGRAPHISCHES. In
Vorbereitung.