CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ELFTEN BANDES ERSTE ABTEILUNG

HERAUSGEGEBEN

VON DER

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN
1927.

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND XI 1.

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ELFTEN BANDES ERSTE ABTEILUNG.

HERAUSGEGEBEN

VON DER

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

1927.

PHYSIK.

NACHTRÄGE ZUM BANDE V.

[MECHANIK, MASS UND MESSEN.]

[AMTLICHE BERICHTE.]

[I.]

BERICHT ÜBER DIE DARSTELLUNG DER HANNOVERSCHEN NORMALFUSSE.

Da ein einfacher Fuss eine gar zu kleine Länge ist, um sich zu einem Normal-Maasse zu eignen, so habe ich vorgezogen, die Länge von zwei Fuss darzustellen, wobei zugleich der Umstand, dass diese Länge nach der gesetzlichen Bestimmung genau 23 englischen Zollen gleich sein soll, eine nicht unbedeutende Erleichterung gewährte.

Das englische Maass war gegeben durch einen von Dollond in London 1828 aus geschlagenem Messing verfertigen Yard, mit 6 überzähligen Zollen, also zusammen $3\frac{1}{2}$ englische Fuss haltend. Vor der Ablieferung war dieser Maassstab durch den Capitaine Kater mit dem englischen Standard-Yard verglichen, welcher bekanntlich seitdem in dem Brande des englischen Parliamentshauses vernichtet ist, von welchem aber mehrere in grösster Schärfe verglichene Copien noch vorhanden sind. Jene Vergleichung bezog sich aber nur auf die ganze Länge des Yard auf dem Dollondschen Maassstabe, d. i. auf das Stück zwischen dem 0 Strich und dem 36 Zoll-Strich, welches Stück um $\frac{27}{100{,}000}$ des englischen Zolls kleiner gefunden wurde, als der Standard-Yard. In solchen Einhunderttausend-Theilen des englischen Zolls werde ich auch alle in gegenwärtigem Berichte vorkommenden Angaben ausdrücken.

In Beziehung auf den erwähnten Unterschied von 27 Theilen wird es nöthig sein, hier noch eine Erläuterung beizufügen. Er beträgt etwa die Dicke eines feinen Spinnefadens und bezeichnet zugleich ungefähr den Grad von Genauigkeit, womit ein geschickter Künstler vermittelst des Reisserwerks ein gegebenes Maass zu copiren vermag, während die nachherige Prüfung, oder was dasselbe ist, die Vergleichung zweier fertig vorliegender Maasse, vermittelst eines guten Comparators allerdings einer bedeutend grösseren Schärfe fähig ist, ohne jedoch jemahls Einen einzelnen Theil verbürgen zu können. Bei dem ersteren Geschäfte hingegen (der mechanischen Arbeit) kann der Künstler nur dadurch eine grössere Schärfe erreichen, dass er nicht ermüdet, die noch nicht genügend genau befundenen Endstriche so lange wieder wegzuschleifen und durch neue Versuche zu ersetzen, bis endlich ein Versuch zur Zufriedenheit gelingt: allein der grosse Zeitaufwand, welchen eben die jedesmahligen Prüfungen selbst kosten, muss natürlich hierbei eine Grenze setzen, zumahl da in Beziehung auf die gewöhnlichen Zwecke dergleichen kleine Unterschiede für Nichts zu achten sind, in Beziehung auf die allerfeinsten Bedürfnisse hingegen die genaue Kenntniss der Grösse des zurückgebliebenen Unterschiedes eben so gut ist, wie eine ganz vollkommene Gleichheit.

Wären nun die einzelnen Zölle, in welche der Dollondsche Yard eingetheilt ist, unter sich vollkommen gleich, so würde zur Darstellung des genauen Hannoverschen Doppelfusses nichts weiter erforderlich gewesen sein, als ihn um 17¼ Theile grösser zu machen, als die Länge von 23 solcher Zollabtheilungen, und mir selbst würde dann bloss die Beaufsichtigung der erwähnten Prüfungen vermittelst des Comparators obgelegen haben. Da aber jene vollkommene Gleichheit eine ganz unzulässige Voraussetzung war, so musste ich zuvor mich der langwierigen Arbeit unterziehen, die stattfindenden Ungleichheiten in den einzelnen Zollen mit möglichster Schärfe auszumitteln, deren Hauptresultate ich hierhersetze.

1. Die Entfernung zwischen dem 0 Strich und dem 4 Zoll-Strich fand sich 25,5 Theile kleiner, die Entfernung zwischen dem 32 Zoll-Strich hingegen und dem Endstrich, oder dem 36 Zoll-Strich, um 13,6 Theile grösser als der neunte Theil des ganzen Yard von 0 bis 36 Zoll.

2. Der Abstand zwischen dem 0 Strich und dem 9 Zoll-Strich fand sich 19,1 Theile kleiner, hingegen der Abstand zwischen dem 27 Zoll-Strich und dem Endstrich um 11,5 Theile grösser, als der vierte Theil des ganzen Yard.

Hieraus ergibt sich die Folge, dass

1. der Abstand zwischen dem 4 Zoll-Strich und dem 27 Zoll-Strich um 14 Theile,

2. der Abstand zwischen dem 9 Zoll-Strich und dem 32 Zoll-Strich um 5,5 Theile grösser ist, als $\frac{23}{36}$ vom ganzen Yard, oder als 23 Zoll desselben sein würden, wenn alle 36 vollkommen gleich wären.

Es muss mithin der wahre Hannoversche Doppelfuss um 3,25 Theile grösser gemacht werden, als der erstere Abstand (von 4^z—27^z) oder um 11,75 Theile grösser, als der zweite Abstand (von 9^z—32^z).

Diese beiden Arten, unter denen man die Wahl hatte, oder auch beide zugleich bei den Prüfungen benutzen konnte, sind die einfachsten unter allen den Combinationen, welche sich sonst noch hätten machen lassen.

Der Mechanikus Meyerstein unternahm hierauf die Anfertigung der Normal-Maassstäbe, zuerst aus gegossenem Messing; es mussten aber dieselben wieder cassirt werden, da sich ergab, dass sie auf ihrer Oberfläche keine so feine Arbeit verstatteten, wie hier erforderlich war. Es wurden daher andere aus geschlagenem Messing angefertigt, die, weil solches in der zu einem Maassstabe nöthigen Dicke nicht vorkommt, in stärkere Stücke aus gegossenem Messing mit einer Nuth eingefugt werden mussten; diese Einrichtung, welche durch den Augenschein deutlicher erkannt wird, als durch eine Beschreibung, ist übrigens ganz eben so bei dem Dollondschen Yard, und gewährte daher auch den Vortheil, dass die Ausdehnung durch die Wärme bei allen drei Maassstäben wie verhältnissmässig gleich betrachtet werden durfte, wenn man nur gehörig dafür sorgte, dass jene bei allen Operationen sich immer in gleicher Temperatur erhielten. Ohne diesen Umstand sorgfältigst zu berücksichtigen, würde an harmonische Resultate bei diesen delicaten Operationen gar nicht zu denken gewesen sein.

Der Mechanikus Meyerstein bemühte sich nun, obigen Bedingungen bei der Fixirung der Endstriche so genau zu entsprechen, wie es die mechanische Kunst vermag, und nach mehreren noch nicht ganz genügenden Versuchen gelang endlich bei jedem Maassstabe einer so genau, dass ich glaubte, dabei stehen bleiben zu müssen. Die nachmaligen definitiven, bei jedem der beiden

Maassstäbe auf 40—50 Vergleichungen beruhenden Prüfungen ergaben, dass der als zur Absendung nach Hannover bestimmte und deshalb schon vorher mit No. I bezeichnete um 5 Theile, der andere, zur Hinterlegung bei der Societät bestimmte und im voraus mit No. II bezeichnete um 2½ Theile zu gross gerathen ist, Unterschiede, welche nach dem, was oben bemerkt ist, als ganz verschwindend betrachtet werden dürfen. Wäre die Numerirung nicht schon im voraus gravirt gewesen, so würde ich, da zufällig der zweite noch etwas genauer gerathen ist, die Bestimmungen vertauscht haben. Es ist mir übrigens kein Beispiel bekannt, wo ein Künstler bei einer ähnlichen Arbeit eine grössere oder nur eine eben so grosse Uebereinstimmung erreicht hätte.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass auf die Halbirungen und auf die Unterabtheilung des ersten Fusses in einfache Zolle eine eben so grosse Sorgfalt von dem Mechanikus Meyerstein verwandt ist,

und dass bei dem Hannoverschen Normalmaasse eben so wie bei dem englischen die Temperatur von 62° Fahrenheit oder 13⅓° Reaumur als die Normaltemperatur zu betrachten ist, d. i., dass unter dem Hannoverschen Fuss die Hälfte derjenigen Länge verstanden wird, welche der materielle Maassstab in jener Temperatur darstellt.

Göttingen 27. Januar 1841. /: unterz. :/ C. F. Gauss.

Die Uebereinstimmung dieser Abschrift mit dem Original wird hiermit bescheinigt.

Hannover, den 13. April 1841.

gez. Bening, Kanzleirath.

[II.]

BERICHT ÜBER DIE ART, WIE DIE HANNOVERSCHEN NORMALPFUNDE DARGESTELLT SIND.

Allgemeine Vorerinnerung.

Zwei Gewichtsstücke sind nur insofern als gleich zu betrachten, als sie gleiche Quantitäten ponderabler Masse enthalten; wäre es thunlich, Abwägungen im leeren Raume auszuführen, so würden dann zwei gleiche Gewichtsstücke auf der Waage einander das Gleichgewicht halten. Bei der Wägung in der Luft, wo bekanntlich jeder Körper soviel am Gewicht verliert, als er Luft verdrängt, würde dieser Gewichtsverlust auf das Gleichgewicht keinen Einfluss haben, wenn jedes der beiden Gewichtsstücke gleichviel verlöre. Allein da dieser Gewichtsverlust von dem Raumvolumen, welches jeder Körper einnimmt, mithin bei gleichem Masseninhalt von der specifischen Schwere abhängt, so erscheinen wirklich gleiche aber an specifischer Schwere ungleiche Körper auf der Waage als ungleich; und umgekehrt, aus dem Gleichgewicht auf der Waage folgt noch nicht die Gleichheit der Gewichte, oder vielmehr, es folgt daraus die Ungleichheit der Gewichte, wenn man weiss, dass sie von verschiedener specifischer Schwere sind. Es erhellt daraus, dass alle Wägungsvergleichungen, wobei eine grosse Schärfe verlangt wird, erst einer Reduction auf den leeren Raum bedürfen, wozu die Kenntniss der specifischen Schweren der gewogenen Körper das erste Erforderniss ist; auch muss, wo es irgend genau genommen werden soll, der jedesmalige Dichtigkeitszustand der Luft, nach Barometer- und Thermometer-Stand gehörig berücksichtigt werden.

Für die Bedürfnisse des gewöhnlichen Verkehrs sind zwar diese Unterschiede als ganz unerheblich zu betrachten: allein für feinere wissenschaftliche Zwecke, oder für Darstellung von Normal-Gewichten darf von einer Ignorirung dieser Unterschiede nicht die Rede sein: sie müssen, so scharf wie es die zu Gebote stehenden Hülfsmittel verstatten, berücksichtigt werden. Zwei an Masseninhalt ganz gleiche Pfunde, eines aus Platin, das andere aus Messing, müssen auf der Waage in der Luft als ungleich erscheinen, das erstere um 40—45 Milligramme schwerer als das letztere: umgekehrt, ein Platinpfund, welches einem Messingpfunde auf der Waage genau das Gleichgewicht hält, ist der Wahrheit nach um 40—45 Milligramme leichter; ja, es ist klar, dass dasselbe Platinpfund, welches in Luft von einer bestimmten Dichtigkeit dem Messingpfunde gleich erschien, diesem ungleich erscheinen wird, wenn die Wägung in Luft von einer anderen Dichtigkeit geschieht. Die Waage für sich allein, ohne Reduction auf den leeren Raum, gibt also, wenn die gewogenen Körper von ungleicher specifischer Schwere sind, ungleiche Resultate, andere an einem höher, andere an einem tiefer liegenden Orte u.s.w., und jene Reduction auf den leeren Raum wird daher allgemein, wo auf Schärfe Anspruch gemacht wird, wie eine sich von selbst verstehende Bedingung betrachtet. Dies gilt aber natürlich nicht bloss, wenn von Gewichtsstücken aus ungleichem Metall, sondern auch, wenngleich in geringerem Maasse, wenn von solchen die Rede ist, die aus einerlei oder vielmehr aus gleichnamigem Metall bestehen. Messing z. B. variirt in der specifischen Schwere so sehr, dass zwei Messingpfunde von gleichem Gewichtsinhalt auf der Waage um 5 Milligramme verschieden erscheinen können. Bei Messing ist dies desto weniger auffallend, da es eine Mischung aus zwei Metallen ist; ähnliches zeigt aber die Erfahrung auch bei Gewichtsstücken aus Platin, vermuthlich nur in Folge der ungleichen chemischen Reinheit.

Wenn demnach zu einer genauen Copirung eines gegebenen Gewichtsstückes nach seinem wahren Masseninhalt, oder zu einer genauen Vergleichung zweier Gewichtsstücke untereinander, die Reduction der gemachten Wägungen auf den leeren Raum durch Calcül nothwendig ist, so ist klar, dass dazu eine genaue Kenntniss der specifischen Schwere unumgänglich erfordert wird; zur Gewinnung dieser Kenntniss ist das Abwägen in destillirtem Wasser das einzige Mittel, welches nur unter selten vorkommenden Bedingungen durch ein anderes Verfahren theilweise ersetzt werden kann.

Es darf nun hier nicht verschwiegen werden, dass in dieser Beziehung sowohl der französischen Commission, die das französische, als der preussischen, die das preussische Gewichts-System regulirt hat, der Vorwurf zur Last fällt, dass sie versäumt haben, von denjenigen Gewichtsstücken, die als die gesetzlichen Normal-Einheiten deponirt sind, vorher die specifische Schwere direct und scharf zu bestimmen. Hinterher ist dies nicht mehr zulässig wegen der Besorgniss, dass diese Urgewichte durch Abwägen im Wasser eine wenn auch geringe dauernde Veränderung erleiden könnten: man hätte dieses vorher thun sollen, ehe sie fertig regulirt und ihnen ein gesetzlicher Charakter beigelegt war. Als eine Entschuldigung mag angesehen werden, dass man in jener Zeit, wo das französische Maass- und Gewicht-System regulirt wurde, noch nicht ganz so hohe Anforderungen stellte, wie gegenwärtig: dass die Waagen, die man in Paris und Berlin gebrauchte, das einzelne Milligramm schwerlich mit Zuverlässigkeit ergaben, und dass man sich dabei beruhigte, Platin sei Platin, und Messing Messing. Es entstehen aber aus jenem Umstande gegenwärtig eigenthümliche Schwierigkeiten für denjenigen, der ganz dem heutigen Zustande der Hülfsmittel Genüge leisten will, Schwierigkeiten, die mir selbst erst im Fortgange des Geschäfts ganz fühlbar geworden sind, während es mir gelang, der dabei gebrauchten an sich schon vortrefflichen Repsoldschen Waage durch eigenthümliche Verbesserungen und eigenthümliche Behandlungsart eine Vollkommenheit zu geben, wobei selbst kleine Bruchtheile des Milligramms noch mit Zuverlässigkeit festgestellt werden.

In dem nachfolgenden Bericht über die Darstellung der Hannoverschen Normalpfunde habe ich zur Abkürzung, und um Verwirrung zu vermeiden, die verschiedenen darin erwähnten Gewichtsstücke mit Buchstaben bezeichnet, die ich hier in Einer Uebersicht zusammenstelle.

A. das französische gesetzliche Normalkilogramm aus Platin, welches seit 22. Junius 1799 im Reichsarchiv unter vier Schlössern aufbewahrt und nur in ganz ausserordentlichen Fällen zugänglich gemacht wird. Hiervon stammen alle andern Kilogramme als Copien, oder Copien von Copien, oder in noch mehreren gar nicht mehr nachzuweisenden Zwischenstufen, ab; mittelbarer Weise auch das preussische Pfund.

B. ein Kilogramm aus Platin von Gambey verfertigt, im Besitz des Conferenzraths Schumacher in Altona. Diess ist, wie weiter unten erwähnt werden wird, die zuverlässigste Copie, die in der ganzen Welt existirt.

C. ein Kilogramm aus Messing (in zwei Halbkilogrammenstücken), welches ich durch Repsold in Hamburg nach B habe machen lassen.

D. das preussische Urpfund, welches, wenn ich nicht irre, bei dem Ministerium des Handels und der Finanzen aufbewahrt wird.

E. eine Copie von D, welche ich 1836 durch den Oberbergrath Schaffrinsky in Berlin habe machen lassen.

F. ein preussisch-hannoversches Pfund von Repsold im Besitz des Conferenzrathes Schumacher.

G. und H. die beiden von Meyerstein angefertigten Normalpfunde, und zwar H dasjenige, welches jetzt nach Hannover abgesandt wird, G das andere, welches in Göttingen verbleiben und früherer Bestimmung zufolge bei der Societät der Wissenschaften hinterlegt werden soll.

Die Gewichte D—H sind alle von Messing und vergoldet.

Mit denselben Buchstaben sind diese Gewichte in den Kostenrechnungen, soweit sie darin vorkommen, bezeichnet.

Das preussische Urpfund D ist nach dem ausführlichen von Eytelwein in den Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften für 1825 gegebenen Berichte [*]) so angefertigt, dass man, so genau es mit den vorhandenen Hülfsmitteln möglich war, 467711 Milligramme, d. i. Milliontheile der französischen Gewichtseinheit darzustellen sich bestrebt hat. Es waren dazu zwei Kilogramme, eines aus Platin, das andere aus Messing, benutzt, zwischen denen sich (nach Reduction der Wägungen auf den leeren Raum) eine Differenz von einem Milligramm fand; der Berichterstatter erklärt selbst, dass die in Paris gemachten Vergleichungen zwischen jenen beiden Copien und dem Original ein einzelnes Milligramm verbürgende Schärfe nicht gehabt haben möchten. Jener Werth von 467711 Milligrammen für das ganze, oder von 233855½ Milligrammen für das halbe preussische Pfund (die cölnische Münzmark) ist als officiell zu betrachten.

[*) Eytelwein, *Über die Prüfung der Normal-Maasse und Gewichte für den königlich-preussischen Staat und ihre Vergleichung mit den französischen Maassen und Gewichten,* Abhandlungen der mathem. Klasse der K. Akad. d. Wissensch. zu Berlin (1825) 1828, S. 1.]

Ich hatte also die Wahl unter zwei Wegen, um das Hannoversche Normalpfund darzustellen; entweder es so genau wie möglich dem preussischen Urpfunde D an Masseninhalt gleich zu machen, oder so genau wie möglich 467711 Milliontheile der Grundeinheit A darzustellen.

Um zuvörderst den ersten Weg zu versuchen, hatte ich durch den Oberbergrath Schaffrinsky in Berlin das Pfund E anfertigen lassen, welches vor der Absendung von jenem und dem Professor Encke vermittelst wiederholter Wägungen am 21. und 23. März 1836 mit dem preussischen Urpfunde D verglichen [wurde]; das Resultat davon war, dass im Mittel E auf der Waage um ein halbes Milligramm schwerer erschien als D. Obgleich die mir in extenso mitgetheilten Protokolle auch den Barometer- und Thermometerstand während der Wägungen enthielten, so fehlten doch nun noch die wesentlichern Elemente behufs der Reduction auf den leeren Raum, nemlich die specifischen Gewichte von D und E. Das letztere konnte ich nun freilich durch Abwägen im Wasser selbst bestimmen, sobald mir die nöthigen Hülfsmittel zu Gebote standen, und es ist diess auch später zu wiederhohlten mahlen geschehen. Allein in Beziehung auf das preussische Urpfund D erfuhr ich nun erst mit Bestimmtheit, dass dessen specifische Schwere gar nicht durch Versuche ausgemittelt, also genau zu reden, dass sie unbekannt ist. Es folgt daraus, dass unter diesen Umständen unmöglich ist, von D eine Copie zu machen, bei welcher nicht eine Ungewissheit über die Gleichheit des wahren Inhalts zurückbleibt, die bis auf 5 Milligramme gehen kann. Ich musste folglich entweder auf eine grössere Schärfe Verzicht leisten, oder auf dem zweiten Wege zur ersten Quelle zurückgehen.

Bei dem französischen Kilogramm A tritt nun zwar, wie schon oben bemerkt ist, dieselbe ursprüngliche Unbestimmtheit des specifischen Gewichts ein: allein diesem Uebelstande hat der Conferenzrath Schumacher, welcher sich mehr als irgend ein anderer Gelehrte mit der schärfsten Vergleichung der verschiedenen Normalgewichte beschäftigt hat, durch eine schätzbare Arbeit abgeholfen. Sein eigenes Kilogramm B wurde in Paris, wohin zu dem Ende zweimahl eine Reise unternommen ist, mit dem Originalkilogramm auf das sorgfältigste verglichen, und zwar nicht bloss nach dem Gewichte auf der Waage, sondern zugleich nach dem Raumvolumen*) vermittelst eines künstlichen besonders

*) Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens beruht auf dem Umstande, dass die

dazu verfertigten Apparats. Durch diese zum Theil in SCHUMACHERS Jahrbuch für 1836 beschriebenen Arbeiten[*)] ist nun sowohl das bis dahin unbekannt gewesene specifische Gewicht des französischen Normalkilogramms A, als das Verhältniss von SCHUMACHERS Kilogramm B zu jenem auf das schärfste ausgemittelt.

Ich liess durch REPSOLD in Hamburg zwei Halbkilogramme C aus Messing anfertigen, welche der Conferenzrath SCHUMACHER die Gefälligkeit hatte, vor der Absendung durch eine grosse Anzahl von Wägungen mit seinem Kilogramm B zu vergleichen, und mir die Protokolle darüber in extenso mitzutheilen.

Es ist leicht zu erachten, dass die bei der Wahl des zweiten Weges zu lösende Aufgabe, nemlich]

ein Gewichtsstück so zu reguliren, dass es nach seinem wahren Inhalte $\frac{467711}{1000000}$ von einem andern gegebenen werde, viel schwieriger und zeitraubender ist, als die, wo es bloss darauf ankommt, ein Gewicht einem andern gleich zu machen. Den grössten Zeitaufwand erfordern bei der ersten Aufgabe die Vorbereitungen, insofern man erst sich selbst ein ganzes System von Hülfsgewichten bilden und diese sämmtlich, vom grössten bis zum kleinsten herab, mit einem viel grössern Grade von Schärfe bestimmen muss, als bei irgendwelchen andern Gelegenheiten nöthig ist.

Meine auf jenen Zweck bezüglichen Arbeiten, die mich während des Herbstes 1836 beschäftigt hatten, musste ich, ehe ich noch zu definitiven Resultaten gelangt war, abbrechen, um zunächst meine ganze Zeit auf diejenigen Arbeiten zu wenden, die sich auf die Darstellung der Hohlmaasse, imgleichen auf die Darstellung der Medicinal- und Juweelengewichte bezogen. Diese Umstände, nachher vielfache andere Arbeiten, endlich auch die Erwägung, dass es angemessen sei, die Bildung der Normalgewichte bis zuletzt ausstehen zu lassen, um dabei auch alle inzwischen eingesammelten Erfahrungen benutzen zu können — war die Ursache, dass jene Arbeiten erst im Sommer 1839 wieder aufgenommen werden konnten. Es ergab sich dann aber bald

Kilogramme A und B sehr nahe vollkommene Cylinder sind, und fällt ganz weg bei Gewichtsstücken, die wie das preussische Urpfund D keine so einfache Gestalt haben.

[*) *Vergleichung des Kilogramms von Platina, welches Etatsrath Schumacher aufbewahrt, mit dem gesetzlichen Kilogramm der Archive*, SCHUMACHERS Jahrbuch 1836, S. 237—250.]

das eben so unerwartete als unangenehme Resultat, dass die Halbkilogramme C (obwohl stets unter Verschluss auf das sorgfältigste aufbewahrt und auch im äussern Ansehen gar keine Veränderung zeigend) an ihrem Gewichtsinhalt Veränderungen in den 2½ Jahren erlitten hatten, die zwar in jeder sonstigen praktischen Beziehung als unerheblich gelten möchten, aber den hier in Rede stehenden delicaten Zweck insofern vereitelten, als sie mich nöthigten, die Arbeit vom Herbst 1836 ganz zu cassiren. Die Ursache jener Erscheinung kann übrigens nur in dem Umstande gesucht werden, dass jene Halbkilogramme C nicht vergoldet sind; eben deswegen aber konnte ich mich nun auch auf die völlige Unveränderlichkeit des Systems von Hülfsgewichten, welches ich 1836 gebildet hatte, nicht mehr verlassen, weil auch diese Hülfsgewichte von Messing und unvergoldet waren, und so war ich gezwungen, mir erst wieder ein neues Hülfssystem zu formiren.

Es bleibt mir nun noch übrig, die Art und Weise, wie ich durch die vom August-November 1839 ausgeführten Arbeiten die Hannoverschen Normalpfunde definitiv dargestellt habe, zu berichten. Das Kilogramm C hätte unter den erwähnten Umständen, um als Zwischenglied zu dienen, erst von neuem mit dem Kilogramm B verglichen werden müssen; anstatt dessen zog ich vor, nunmehr das Pfund F als Zwischenglied zu gebrauchen. Für den Conferenzrath SCHUMACHER war die Arbeit ziemlich dieselbe, ob er C von neuem mit B vergleichen, oder F in Bruchtheilen von C bestimmen sollte, da er im Besitz eines von ihm selbst mit grösster Sorgfalt gebildeten Systems von Hülfsgewichten ist, welches aus Platin verfertigt ist, also die möglich grösste Unveränderlichkeit verbürgt. Ich selbst gewann aber dadurch den Vortheil, dass ich das, wie eben erwähnt, neu gebildete System messingner Hülfsgewichte nur behufs meiner Abwägungen im destillirten Wasser anzuwenden nöthig hatte.

Zuerst wurde also vermittelst wiederhohlter Abwägungen in destillirtem Wasser die specifische Schwere der verschiedenen hier zur Vergleichung kommenden Gewichtsstücke bestimmt, und solche gefunden

für	E . . .	8,401109
	F . . .	8,074584
	G . . .	8,085009
	H . . .	8,057088.

Hiernächst wurden diese vier Pfundstücke durch eine sehr grosse Anzahl von Wägungen unter einander verglichen, und dann F nach Altona gesandt, wo der Conferenzrath Schumacher dessen Gewichtsinhalt in Theilen des Kilogramms B gleichfalls durch zahlreiche Wägungen auf das schärfste bestimmte. Um nun aber alle Zweifel zu heben, ob nicht der Transport den Gewichtsinhalt von F irgend wie verändern könne, wurde die Versendung mehreremale wiederholt, und neue eben so zahlreiche Wägungen sowohl in Göttingen wie in Altona angestellt; auf diese Weise hat das Pfund F die Reise zwischen beiden Orten sechsmal gemacht und ist in drei verschiedenen Zeitperioden in Göttingen mit E, G und H und eben so oft in Altona mit B verglichen.

Das Resultat aus 158 Wägungen in Göttingen war, dass (im leeren Raume)

$$\left.\begin{array}{lll} E \text{ um } 0{,}025 & \text{Milligramm} & \text{leichter} \\ G \text{ um } 1{,}483 & \text{"} & \text{leichter} \\ H \text{ um } 2{,}989 & \text{"} & \text{schwerer} \end{array}\right\} \text{ ist als F.}$$

Dagegen war das Resultat der Wägungen in Altona, nach allen Reductionen, dass das wahre Gewicht F 467706,310 Milliontheile des französischen Urkilogramms A beträgt. Die wahren Gewichte von E, G, H sind folglich

E 467706,285 Milligramme,
G 467704,827 " ,
H 467709,299 " .

Durch Hineinlegen sorgfältig abgeglichener Drahtstückchen, die respective 6,173 und 1,701 Milligramme betragen, sind endlich G und H auf den gesetzlichen Inhalt von 467711 Milligrammen gebracht, so genau also normirt, wie es heut zu Tage die Kunst vermag. Es wird natürlich vorausgesetzt, dass künftig die Köpfe nicht wieder abgeschraubt werden. Um eine anschauliche Vorstellung von der Kleinheit der letzten Correction zu geben, welche das nach Hannover geschickte Pfund H erhalten hat, habe ich meinem Bericht ein eben so grosses also 1,701 [Milligramm] schweres Drahtstückchen beigelegt.

Es wird nicht ohne Interesse sein, hier noch anzuführen, was sich über das Verhältniss der Hannoverschen beschriebenermaassen corrigirten Normalpfunde zu dem preussischen Urpfunde D sagen lässt. Das Pfund E ist zwar, nach seinem wahren Inhalt um 4,715 Milligramme leichter als G oder H (nach der Correction durch die Drahtstücke): allein wegen seiner bedeutend grössern specifischen oben angeführten Schwere verliert es beim Wägen in der

Luft weniger als jene, und zwar im Durchschnitt aus allen vorgekommenen Wägungen E um 4,027 Milligramme weniger als G und 4,397 Milligramme weniger als H; oder mit andern Worten, bei einem mittleren Zustande der Atmosphäre erscheint auf der Waage E um 0,688 Milligramm leichter als G und um 0,318 Milligramm leichter als H. Da nun E um 0,5 Milligramm schwerer auf der Waage erschien als D, so kann man, so weit man sich auf die in Berlin gemachte Abwägung verlassen und absolute Unveränderlichkeit von E seit fast 5 Jahren voraussetzen kann, schliessen, dass auf der Waage G etwa um 1,2 und H etwa 0,8 Milligramm schwerer erscheinen würde, als das Berliner Urpfund D. Also auch von dieser Seite ist die Uebereinstimmung so gross, wie sie nur gewünscht oder erwartet werden durfte.

Göttingen 27. Januar 1841. /: unterz. :/ C. F. Gauss.

Die Uebereinstimmung dieser Abschrift mit dem Original wird hiermit bescheinigt.

Hannover, den 13. April 1841.

gez. Bening, Kanzleirath.

BEMERKUNG.

Zu den beiden vorstehenden Berichten vergleiche man den Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher vom 1. März 1836 bis zum 29. November 1839, siehe *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* II, 1860, S. 439 bis III, 1861, S. 340, ferner Schumachers Abhandlung *A Comparison of the late Imperial Standard Troy Pound weight with a Platina copy of the same, and with other standards of authority*, Philosophical Transactions of the Royal Soc. of London, 1836 II, S. 457—495.

Schaefer.

BRIEFWECHSEL.

[A.]

[PRINZIPIEN DER MECHANIK.]

[1.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 27. Januar 1834.

. . . .

Meine Ansicht ist stets gewesen:

1) Dass durch das Ausgehen von d'Alemberts Grundprincip alle Dunkelheit vollkommen wegfällt.

2) Dass ohne dieses Grundprincip genügende Klarheit überall nicht zu erhalten steht.

Das Grundprincip selbst lässt sich aber wohl treffender einkleiden, als in den mechanischen Lehrbüchern gewöhnlich geschieht. Ich würde es etwa so aussprechen: »Wenn ein System von Kräften einem andern System von Kräften in Beziehung auf ein wie immer verknüpftes System von Materiellem statisch aequivalent ist, so ist es ebendemselben, in derselben Beziehung, auch mechanisch aequivalent«.

. . . .

[2.]

Gauss an Möbius.

[Berichte der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig **31**, 1879, S. 61—64.]

Hochgeschätztester Freund!

Für Ihr so schätzbares Werk über die Statik[*)], sowie für Ihr gütiges Schreiben sage ich Ihnen meinen verbindlichsten Dank. Unter den ununterbrochenen Zerstreuungen unserer Festwoche habe ich gar keine, und in den nächstfolgenden Tagen habe ich nur erst wenige Stunden frei gehabt, und Ihr Werk eigentlich nur erst ein wenig durchblättern können. Indessen genug, um Ihre gewohnte Gründlichkeit und Gediegenheit zu erkennen; mich verlangt nach der Zeit, wo ich es mit Musse werde lesen können.

Anmerkungen über Ihr Werk kann ich Ihnen demnach jetzt noch gar keine geben. Ich will jedoch, Ihnen mein Interesse an dem Gegenstande selbst zu zeigen, eine kleine Bemerkung über das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, oder wie ich lieber spreche, das Princip der virtuellen Bewegungen beifügen, welcher Sie aber das Flüchtige und Ungeordnete der Einkleidung nachsehen müssen.

Ich kann nicht leugnen, dass ich mit der Art, wie dieses Princip gewöhnlich dargestellt wird, nicht ganz zufrieden bin; selbst der Begriff der virtuellen Geschwindigkeiten oder besser der virtuellen Bewegungen, scheint mir nicht alle zu wünschende Präcision und Rundung zu haben.

Ich habe ein Paarmahl Veranlassung genommen, das herrliche Princip in derjenigen Gestalt, wie ich es wohl bei mündlichen Vorträgen darzustellen pflege, auszusprechen, z. B. im ersten Artikel meiner *Theoria generalis figurae fluidorum*[**)]. Es scheint dies aber wenig beachtet zu sein, vermuthlich, weil es nur so beiläufig vorkommt, ohne das Unterscheidende besonders hervorzuheben oder umständlich zu motiviren. Nur einmal erinnere ich, mit Herrn Prof. Dirksen aus Berlin über meine Fassung gesprochen zu haben, wobei

[*) A. F. Möbius, *Lehrbuch der Statik*, 2 Bände, Leipzig 1837, Gesammelte Werke III, 1886.]
[**) Werke V, S. 35.]

ich die Satisfaction hatte ihn zu überzeugen, was freilich durch eine mündliche Discussion leichter geschieht, als durch ein Paar in der Eile geschriebene Zeilen.

Der Name virtuelle Bewegung scheint mir etwas ungeschickt gewählt zu sein; indessen ist er einmal recipirt. Am a. O. finden Sie meine scharfe Bestimmung des Begriffs. Wäre der Name nicht einmal da, so wäre vielleicht facultative Bewegungen ein schicklicherer, und das worauf es eigentlich ankommt, bestimmter bezeichnender. Doch in verbis simus faciles.

Wichtiger aber erscheint mir, dass alle Schriftsteller, auch Lagrange, das Princip enger gefasst haben als nöthig ist. Allen Schriftstellern sieht man die Fessel anhängen, die sie in den engern Raum festbannt, wo nur von solchen Fällen die Rede ist, die Einer analytischen Formel vollständig unterworfen sind.

Dies aber ist nicht die Erschöpfung der Fälle der Natur. Diese bietet ebenso oft Fälle dar, wo die Eine analytische Formel [nicht] ausreicht. Ist es dann nicht ein grosser Gewinn, wenn man das höchste Princip der Statik so ausspricht, dass es die wirklichen Fälle der Natur in Einem Schlage unter sich hat?

Ich erkläre mich etwas deutlicher.

Unter den Bedingungen, denen die facultative Bewegung eines Systems materieller Punkte unterworfen ist, führt man z. B. wohl an, dass einer der materiellen Punkte sich nur in einer bestimmten Fläche bewegen kann, setzt dies in Gleichung u.s.w. Allein in der Natur ist dies fast nie so; vielmehr gewöhnlich so, dass die Fläche quaest. nur die Oberfläche eines materiellen Solidum ist, dessen Impenetrabilität den materiellen Punkt nur hindert, in das Solidum einzudringen, aber nicht, sich davon zu entfernen.

Ein zweites Beispiel wäre, dass zwei materielle Punkte eine unveränderliche Distanz von einander behalten müssen. Aber in der Natur ist es äusserst häufig nur so (wenn z. B. die Verbindung durch einen biegsamen Faden geschieht), dass die Distanz nicht grösser werden kann, während nichts sie hindert, dass sie kleiner werde.

Es liessen sich noch andere Beispiele aufführen, wobei ich mich aber nicht aufhalten will.

Die gewöhnliche Einkleidung schliesst nun, für sich betrachtet, alle solche

in der Natur so häufigen Fälle aus; meine Einkleidung umfasst sie auf einmal alle mit.

Ich muss mich heute auf diese wenigen Andeutungen beschränken, aber sapienti sat.

Es liessen sich noch mehrere andere Umstände, betreffend die ersten Gründe der Statik und Bewegungslehre namhaft machen, die mir bei den üblichen Behandlungen nicht tief genug aufgefasst zu sein scheinen. Allerdings muss man dabei aber immer bedenken, für welchen Zweck und für welche Leser geschrieben ist, und dass wo die Leser, für welche man schreibt, keinen Anstoss nehmen, es vielleicht gar nicht wohlgethan wäre, tiefer einzudringen, als ihnen frommt.

Aber für diejenigen, die gern Alles aus dem höchsten und allgemeinsten Gesichtspunkt betrachten, scheint mir in allen Schriften zu wenig auf die Unterscheidung des absoluten und der relativen Räume eingegangen zu werden. Man hält sich von vornherein immer nur an die Phänomene auf unserer als ruhend betrachtet werdenden kleinen Erde, ohne sich darüber zu rechtfertigen. Ich gebe übrigens gern zu, dass es nicht ganz leicht ist, gleich von vornherein Alles aus dem höheren Standpunkt eines über der materiellen Welt stehenden Geistes darzustellen, und dass die Hülfe, welche die Haarspaltereien der sogenannten Metaphysiker geben, nur eine sehr ungenügende sein möchte.

Sehen Sie alles Dieses nur so an, dass ich eine mit Mühe herausgerissene halbe Stunde habe verwenden wollen, mich mit Ihnen über einige Ideenanregungen etwas zu besprechen, wofür so wenige Menschen nur den Sinn haben.

Unser Septembertermin wird morgen oder übermorgen wie gewöhnlich abgewartet werden. Aber der nächste Novembertermin soll, da ich Herrn von Humboldt damit einen Gefallen zu thun glaube, etwas versetzt und etwas früher gehalten werden, etwa vom 13.—14. November oder 14.—15. November, um zu sehen, ob in den berichtigten Sternschnuppenzeiten bedeutende Magnetische Bewegungen vorkommen. Die genaue Bestimmung des Tages (übrigens nach gewöhnlicher Art 0^h bis 24^h Göttinger M. Z.) habe ich Herrn von Humboldt überlassen, der sie nächstens durch die Zeitungen publiciren wird. In omnem eventum wird es auch noch besonders brieflich den Cooperatoren angezeigt werden.

Erhalten Sie Ihr freundliches Andenken

Ihrem ergebensten
C. F. Gauss.

Göttingen den 29. September 1837.

[3.]

Gauss an Olbers. Göttingen, 31. Januar 1829.

[Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke II, 2, 1910, S. 517 ff.]

. . . . Ich bin dabei auf die Theorie der Capillaraction zurückgekommen, zu deren Behandlung aus einem neuen Gesichtspunkte sich mir schon vor mehrern Jahren eigenthümliche Ideen dargeboten hatten. Die Theorie scheint mir dadurch an Einfachheit bedeutend zu gewinnen und die Mangelhaftigkeit der Laplaceschen Theorie gehoben zu werden. Letztere ist uns den Beweis des Hauptsatzes, dass der Berührungswinkel der Flüssigkeit an der Wand des Gefässes constant [ist], d. i. bloss von dem Verhältnisse der Anziehungskraft, die die Theile des Gefässes auf die Flüssigkeit ausüben, zu der Anziehungskraft der ersteren gegen einander abhängt, schuldig geblieben.

Von der erwähnten Eigenschaft habe ich schon seit Jahr und Tag einen Gebrauch in der praktischen Astronomie gemacht. Sie wissen, dass ich schon seit mehreren Jahren den Nullpunkt des Meridiankreises durch Einrichten auf das Nadir bestimme, wo das Bild des Fadennetzes von einer Quecksilberfläche reflectirt gesehen wird. Ist hier das Gefäss kleiner als das Objectiv, so geht offenbar ein Theil des Lichts schon deshalb verloren, allein ein noch grösserer Theil dadurch, dass vermöge der Capillaraction das Quecksilber selbst in einer bedeutenden Entfernung vom Rande merklich von der Plangestalt abweicht (Figur 1 [auf S. 21]). Ich vermeide diess, indem ich mich eines Gefässes bediene, dessen innere Fläche oben conisch, nach oben zu sich verengend, ich habe ausdrehen lassen, ungefähr unter einem Winkel von 45°.

In diesem Gefäss ist die Oberfläche des Quecksilbers ohne die geringste merkliche Convexität. Man könnte von dieser Idee auch in manchen anderen Fällen vortheilhaften Gebrauch machen. Man kann übrigens jenen Zweck

auch ziemlich erreichen, wenn man das Quecksilber in eine sehr flache goldene Schale schüttet, oder in eine andere anquickungsfähige.

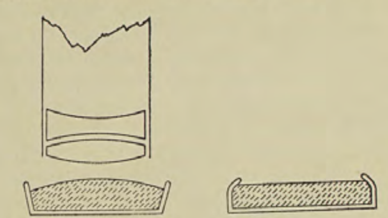


Fig. 1. Fig. 2.

Bei Gelegenheit jener Untersuchungen, die nicht wohl einen Auszug hier zulassen, bin ich neulich auf ein neues mechanisches Grundprincip gekommen, welches ich Ihnen doch anzeigen will. Bekanntlich verwandelt zwar schon das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die ganze Statik in eine mathematische Aufgabe, und durch d'Alemberts Princip für die Mechanik ist diese wieder auf die Statik zurückgeführt. Es liegt daher in der Natur der Sache, dass es kein neues Grundprincip geben kann, das nicht der Materie nach in jenen beiden enthalten und aus ihnen abzuleiten wäre. Inzwischen scheint mir doch durch diesen Umstand nicht jedes neue Grundprincip werthlos zu werden. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist allerdings unschätzbar, allein mir deucht, es hat das Eigenthümliche, dass es sich den Beifall erst bei näherer Bekanntschaft erwirbt, und dass es jedem, wenn er es zum erstenmahl kennen lernt, den Eindruck von Verwunderung macht, dass die Natur sich ein Gesetz aufgelegt hat, an dem man sein Creditiv gewiss nicht gleich erkennt. Zweitens ist es zwar allerdings dem natürlichen historischen Gange der Ausbildung der Wissenschaft selbst und der Ausbildung des Individuums (Anfängers) ganz angemessen, dass die Statik der Mechanik vorangehe, und diese auf jene begründet werde; aber aus einem höhern Standpunkte betrachtet sollte es, meine ich, doch gerade umgekehrt sein, indem die Statik nichts ist als ein ganz specieller Fall der Mechanik.

Ich finde nun, dass alles sich in ein höchst einfaches Gesetz zusammen-fassen lässt, oder wenn Sie lieber wollen in zwei, indem ich Ein triviales vorausschicke:

1) Die Bewegung eines freien materiellen Punktes in jedem unendlich kleinen Zeittheilchen ist aus den einzelnen Bewegungen, die er theils in Folge der Trägheit nach seiner im Anfang des Zeittheilchens Statt findenden Geschwindigkeit und Richtung, theils in Folge der einzelnen auf ihn einwirkenden Kräfte haben wird, zusammengesetzt.

2) Wenn die Bewegung eines Systems von materiellen Punkten nicht frei, sondern durch gegenseitige Relationen oder durch äussere Hindernisse beschränkt ist, so liegen die Plätze, wo sie nach einem unendlich kleinen Zeittheilchen wirklich sich befinden, denen, wo sie [sich] in Folge einer freien Bewegung befinden müssten, so nahe wie möglich. Dies so nahe wie möglich ist gerade eben so zu verstehen, wie bei der Darstellung von Erfahrungen, die zufällige Fehler involviren. Nemlich: Es sein m, m', m'' u.s.w. die materiellen Punkte; p, p', p'' u.s.w. die Plätze des Raums, wo sie zu Anfang eines unendlichkleinen Zeitraums sich befinden; q, q', q'' u.s.w. die Plätze, wo sie sich am Ende des Zeitraums befinden würden, falls sie sich alle frei bewegen könnten; r, r', r'' u.s.w. die Plätze, wo sie sich am Ende des Zeitraums wirklich befinden; R, R', R'' u.s.w. indefinite Plätze, wo sie sich unbeschadet der beschränkenden Bedingungen gleichzeitig befinden können (so dass p, p', p'' u.s.w. wie auch r, r', r'' u.s.w. sich unter dem allgemeinen R, R', R'' u.s.w. befinden, nicht aber q, q', q'' u.s.w.); dann ist das Aggregat

$$m(qr)^2 + m'(q'r')^2 + m''(q''r'')^2 + \text{u.s.w.}$$

ein Minimum, d. i. das kleinste aus allen

$$m(qR)^2 + m'(q'R')^2 + m''(q''R'')^2 + \text{u.s.w.}$$

Dieser vollkommene Parallelismus zwischen den Auswegen, welche einerseits die Natur und andererseits der rechnende Geometer — jedes bei seinem eigenthümlichen Geschäft — in Collisionsfällen einschlagen, hat mir viel Vergnügen gemacht. Es bedarf keiner Bemerkung, dass im Fall des Gleichgewichts

$$m(qp)^2 + m'(q'p')^2 + m''(q''p'')^2 + \text{u.s.w.}$$

selbst das Minimum ist.

. . . .

[B.]

[MAASS UND MESSEN.]

[1.]

Gauss an Olbers. [Göttingen, 8. Dezember 1817*)].

[Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke, II, 1, 1900, S. 674, 675.]

. . . .

Gleichfalls sehr interessant ist mir die Aussicht einer vielleicht allgemeinen Einführung des französischen Maasssystems. Höchst bequem finde ich dieses System und ich bediene mich desselben gern überall, und glaube, dass alles oder das Meiste, was man gegen allgemeine Einführung gesagt hat, auf Vorurtheilen beruhet. Nur bei den allerfeinsten Messungen, glaube ich, entstehen grosse Inconvenienzen aus der Einführung eines natürlichen Maasssystems, und man muss daneben immer irgend ein Maassindividuum haben. Wenn z. B. im Jahr 1900 in irgend einem Welttheile eine neue Gradmessung ausgeführt wird, so darf man den Werth des Grades nicht nach Meters angeben, weil jede Gradmessung direct oder indirect den Zweck hat, den Meter zu suchen; giebt man ihn nach Meters an, so bedeutet der Meter nicht $\frac{1}{10000000}$ Erdquadrant, sondern die Länge desjenigen Stückes Eisen, bei der und der Temperatur, welche man im Jahr NN dafür hielt, und an dem Ort NN in dieser Meinung deponirte. Es ist also ein nie aufhörendes Schwanken.

. . . .

[*) Datum des Poststempels.]

[2.]

Gauss an Bessel. Göttingen, 1. April 1827.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, Berlin 1880, S. 470.]

. . . .

Mit ungemein grossem Interesse habe ich die mir mitgetheilten Nachrichten über Ihre Pendelversuche gelesen. Wie gross ist doch die Schwierigkeit, sich der absoluten Grösse einer Constante, die die Naturphaenomene enthalten, zu versicheren! Solange wir dies nicht können, nemlich nicht mit derselben Schärfe können, scheint es mir höchst unpassend, ein Naturmaass ins Leben einführen zu wollen, und so lange müssen alle unsere Maasse von einem Irgendwo deponirten Individuum abhängig bleiben. Der französische Meter sollte ein Naturmaass seyn; allein er hörte auf, es zu seyn, sobald man festsetzte, er solle $493^{l},296$ etc. seyn; von dem Augenblick an war er ein eben so willkürliches Maass, wie jedes andere, man hat dadurch die Zahl der willkürlichen Maasse bloss um eins vermehrt, und man hätte voraussehen können, dass die Zeit kommen würde (wie in Puissant *Instruction sur l'usage des tables de projection.* 1821, pag. 47), der Erdquadrant sey nicht 10000000 Meter sondern 10000724 Meter. Um so grössere Sorgfalt sollte man aber auf die Conservation der gebrauchten Maasse bei Gradmessungen und Pendellängen wenden.

. . . .

[3.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 23. April 1836.

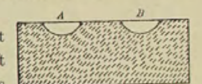
[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, III, Altona 1860, S. 51.]

. . . .

Da Sie selbst an Ihrer Waage keine Libelle angebracht haben (auch nach Ihren Mittheilungen in der That keiner bedürfen), so ist Ihnen vielleicht nicht uninteressant, wenn ich auf einen, wie mir deucht, wesentlichen Umstand, in Beziehung auf Verbindung der Libelle mit der Waage, aufmerksam

mache. Sollten Sie denselben schon früher in Erwägung genommen haben, so bitte ich das folgende zu überschlagen und zu entschuldigen.

Findet eine solche Verbindung Statt, und entspricht also einer auch nur äusserst wenig veränderten Neigung des Waagbalkens eine vergleichungsweise beträchtliche Verrückung der Blase, so entsteht dadurch eine erhebliche Veränderung des Moments; die Waage bekommt dadurch also selbst eine vergrösserte Empfindlichkeit, die leicht so sehr vergrössert werden kann, dass sie ganz umschlägt, oder gar kein stabiles Gleichgewicht mehr möglich ist. Natürlich werden Sie mir nicht entgegensetzen, dass bei dem so geringen Gewicht der Luftblase eine Veränderung ihres Moments ganz unmerklich sein müsse; denn genau betrachtet ist es nicht das Moment des Luftkörpers, sondern eines gleich grossen Spiritusvolumens, von dem hier die Rede ist.



Wenn nemlich die Blase von A nach B fortgerückt ist, so ist nicht das Product $AB \times$ Gewicht der Luft in der Blase das worauf es ankommt, sondern dieses Gewicht mag man ganz ignoriren und nur bedenken, dass durch jene Veränderung so viel Spiritus als vorher in B war, nach A gekommen ist. Eine solche Momentsveränderung ist aber wie gesagt vergleichungsweise etwas sehr beträchtliches. Es wird dadurch ceteris paribus um so leichter das Umschlagen (also völlige Unbrauchbarkeit der Waage in diesem Zustande) erfolgen,

1) je empfindlicher die Waage ohne Libelle für sich war,
2) je kleiner ihre Belastung,
3) je empfindlicher (kleinkrümmiger) die Libelle,
4) je grösser die Blase.

Es folgt hieraus, dass jenes Mittel zwar bei Waagen für grosse Belastung (z. B. à 50 ℔) herrliche Dienste thun kann. Soll aber eine Libelle bei einer Waage für geringe Belastungen angewandt werden, so darf jene nicht sehr empfindlich sein, muss eine kleine Blase haben, und die übrige Einrichtung der Waage muss so sein, dass sie vor Anbringung der Libelle nur sehr geringe Empfindlichkeit hat. Bei meiner eignen Waage, obgleich gerade ihre Empfindlichkeit zu klein ist, bringt[*)] doch das Anbringen der kleinsten und

[*) Die Handschrift hat bewirkt.]

am wenigsten empfindlichen Libellenröhre, über die ich disponiren kann, und trotz der sehr kleinen Blase, noch selbst bei Belastung mit 500 Grammen in jeder Schale die Waage zum Ueberschlagen. (Ich hatte die Libelle unter dem Waagbalken angebracht; darüber, ist natürlich das Umschlagen noch leichter.) Da nun ohnehin die Blase durch Temperaturveränderung im Lauf des Geschäfts sich ändern kann, und jede Aenderung der Blase auch den Ausschlagswerth ändern muss, so ist mir noch zweifelhaft, ob bei Waagen für mässige Belastung das Anbringen einer Libelle überhaupt zu rathen ist. Jedenfalls würde es sehr schwierig sein, die Einrichtung so zu treffen, dass man die Waage à deux mains, heute mit, morgen ohne Libelle brauchen könnte. . . . .

[4.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 14. Mai 1836.

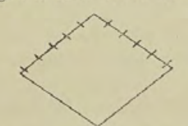
[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher III, Altona 1860, S. 57, 58.]

. . . .

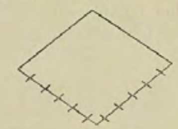
Kann ich es demnächst möglich machen, so würde es mir sehr erwünscht sein, wenn die Waage ganz hier bleiben könnte, obwohl ich in diesem Augenblick hierüber noch nichts bestimmt sagen kann. Sehr lieb würde es mir aber in diesem Fall sein, wenn die Waagebalken eine Eintheilung, wenn auch nicht in einzelne Millimeter, doch etwa von 5 zu 5, oder von 10 zu 10 Millimeter hätten. Würden solche durch die Art der Striche kenntlich gemacht, z. B. dass etwa von 50 zu 50 Millimeter in die Augen fallende Unterschiede das Zählen erleichtern, so könnten gravirte Zahlen wegbleiben, die ohnehin sich wohl nicht mehr gut anbringen lassen. Der Vortheil, eine Eintheilung zu besitzen, ist besonders, dass man von dem Besitz sehr scharfer ganz kleiner Gewichtssätze unabhängig wird. Herr Prof. Weber hat in diesen Tagen einen nur sehr rohen Versuch an einem hölzernen Waagbalken gemacht, den er auf einer Theilmaschine getheilt, an die Theilungsstellen Nadeln eingefügt hat, worüber mit Coconfäden ein etwa ¼ Gramm schweres Laufgewicht gehängt, und die Ausschläge wurden nach dem Reflexionsprincip (wie bei meinen Magnetometern) mit einem Fernrohr an dem Spiegelbilde einer verticalen Scale

aus einem Spiegel, der am Waagbalken befestigt war, beobachtet. Hier zeigte sich die Wirkung des veränderten Moments, je nachdem das Laufgewicht von einer oder von einer andern Nadel hing etc., mit äusserster Regelmässigkeit fortschreitend, so dass Veränderungen, die (bei Belastung von ½ Kilogramm in jeder Schale) nur dem Auflegen eines kleinen Bruchs eines Milligramms in der Schale äquivalirten, mit Sicherheit zu erkennen waren, obgleich das Ganze noch gar nicht einmahl gegen Luftzug durch einen Kasten geschützt war, sondern frei hing.

Ohne Herrn Repsolds Waage gesehen zu haben, kann ich freilich nicht beurtheilen, welche Schwierigkeiten der Anbringung einer Eintheilung etwa im Wege stehen können. Schwerlich wird der Waagebalken Metall für Eine einzige gerade Linie darbieten, dann würde man freilich zufrieden sein müssen



oder besser



zwei gebrochene gerade Linien zu haben, wo man dann suchen muss den stumpfen Winkel zwischen beiden Linien anderweitig auszumitteln. Ist aber Anbringung einer brauchbaren Theilung nicht praktikabel, so muss ich freilich darauf (i. e. auf die Theilung) renonciren, und sehen, wie ich mir auf andere Weise helfe, etwa durch Anbringung einer Scale auf einem polirten Glasstreifen hinter der Waage. . . . .

[5.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 1. Julius 1836.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher III, Altona 1860, S. 83, 84.]

Bei Olufsens Wägungen in Ihrem J[ahr] B[uch, 1836, S. 244 ff.] habe ich den M[ittleren] F[ehler] Einer Wägung = $0^{P},119$ = $0^{mgr.},565$ [*)]; die gegen-

[*) Bei $0^{P},119$ ist P eine Abkürzung für partes und bedeutet die Teile der Skala, auf der der Zeiger des Waagebalkens schwingt. Nach Olufsen a. a. O. S. 246 sind 3,37 Teile gleich 16 mgr., was mit der Angabe von Gauss übereinstimmt.]

wärtigen 6 würden, obgleich die Belastung nicht einmahl halb so gross ist, etwa $0^{mgr.},8$ geben! Ist nun die Pariser Waage so viel besser*), oder handelt es sich um einen mir noch entgangenen Umstand in der Behandlung? Ich brauche wohl nicht zu sagen, dass ich die Operation mit äusserster Vorsicht mache, namentlich

1) wird die Waage, oder der Tisch, worauf sie steht, gar nicht von der Sonne beschienen, oder von irgend einer unregelmässigen Wärmequelle benachbart.
2) Abheben und Aufsetzen der Gewichte geschieht sehr vorsichtig mit einer Gabel, während die Waage gestützt ist.
3) Hinauf- und Herunterschrauben der Stütze mache ich sehr langsam.
4) Thüren, sowohl der Waage als des Zimmers, natürlich auch Fenster sind verschlossen.
5) Ich beobachte in einem andern Zimmer mit Fernrohr, wozu ich mir eine ganz bequeme Einrichtung getroffen habe (Entfernung etwa 20 p[ariser] Fuss).

Bis jetzt sehe ich nun keinen andern Erklärungsgrund als folgende:

1) Die nach der Aushebung wieder gesenkte Waage kommt nicht in absoluter Schärfe wieder auf die nämliche Stelle der Agatplatte; dies kann freilich nur insofern einen Unterschied machen, als die Agatfläche kein vollkommenes Planum ist (selbst eine Inclination, wenn jene wirklich ein Planum ist, könnte keinen Unterschied machen), und vollkommen ist freilich kein Menschenwerk.
2) Mehr Wahrscheinlichkeit hat aber wohl eine zweite Ursache: die beiden Tragstücke setzen sich beim Niederlassen nicht in absoluter Schärfe wieder auf die nemlichen Stellen der beiden äussern Schneiden. Dies macht aber einen Unterschied, wenn die Schneiden nicht absolut genau gerade, mit der mittlern Schneide parallele Linien sind, und selbst eine sehr kleine Abweichung in dieser Beziehung könnte doch wohl im vorliegenden Fall merklich werden. Das Mittel, welches (wie schon gesagt, nach WEBERS Autorität) die Künstler zu diesem Zweck

*) Ich setze jedoch nicht in Abrede, dass der M. F. aus so wenigen Wägungen gar nicht mit Sicherheit bestimmt werden kann.

anwenden, ist doch wahrlich nur ein sehr rohes, und man muss sich daher fast wundern, dass demungeachtet die Waagen noch so viel leisten. Ich habe mir die Sache etwas hin und her überlegt, und möchte für das durchschlagendste Prüfungsmittel halten, wenn man die Einrichtung träfe, dass jene Drahtstücke behuf der Prüfung zuerst einen beträchtlichen Spielraum längs der Schneide hätten, indem man sie z. B. einmahl weit nach vorne, und dann auch weit nach hinten zu aufliegen lassen könnte, und so lange corrigirte, bis bei beiden Auflagen kein merklich verschiedenes Resultat käme, nachher aber, für den wirklichen Gebrauch, den Spielraum in **sehr enge** Grenzen einschlösse. Was ist Ihre Meinung darüber? . . . .

[6.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 12. Julius 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1860, S. 87.]

. . . .

Hätte ich übrigens eine neue Waage machen zu lassen, so würde ich wie eine Verbesserung betrachten, wenn die Tragstücke (woran die Schalen, oder genauer die Haken mit den Schalen hängen) in ihrem unteren Oehr eine ziemlich scharfe (dem Waagebalken parallele) Schneide hätten, während sie jetzt abgerundet sind. Dies würde bewirken, dass die beiden äussern Schneiden immer an denselben Stellen trügen. So wie die Sache jetzt ist, wird bei einiger Drehung der Schalen mit den Haken, zuweilen eine etwas mehr nach vorne, zuweilen eine etwas mehr nach hinten liegende Stelle als wahrer Tragepunkt zu betrachten sein, was insofern relevant ist, als man nicht darauf rechnen kann, dass die drei Schneiden genau parallel und senkrecht gegen den Waagebalken sind. . . . .

[7.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 24. Julius 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1860, S. 106.]

. . . .

Eine Hauptabweichung bei meiner Wägungsart von der gewöhnlichen ist, dass ich BORDAS Manier habe fahren lassen. Ich begreife in der That nicht, warum man sich an diese gehalten hat, in den Fällen, wo man die grösste Genauigkeit verlangt, also oft wiederhohlte Wägungen macht. Es ist sehr klar, dass wenn Sie gar nicht tariren, sondern die beiden zu vergleichenden Gewichte auf den Schalen umtauschen, ihre Ungleichheit einen doppelt so grossen Ausschlag gibt, wie bei BORDAS Art, und dass man also mit einer gegebenen Waage bei meiner Wägungsart mit 20 Wägungen gerade eben so weit kommt, wie mit 80 Wägungen nach BORDAS Art (eine doppelt so scharfe Operation hat nemlich bekanntlich das 4fache Gewicht). Welch enormer Gewinn! Freilich müssen noch einige Nebenumstände dabei berücksichtigt werden (die zu erwähnen hier zu weitläuftig sein würde), die aber nicht die geringste Schwierigkeit haben. Bei 32 Wägungen des 𝔄, die ich nach dieser Art gemacht habe, war der mittlere Fehler Einer Wägung nur 0,2 Milligramm, und es ist mir noch keine einzige vorgekommen, die ein halbes Milligramm vom Mittel differirt hätte. . . . .

[8.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 4. Februar 1837.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1860, S. 142, 143.]

. . . .

In Beziehung auf die Waagen von der gewöhnlichen Einrichtung mit drei Schneiden, möchte ich mir wohl noch Ihre und eventuell Herrn REPSOLDS Belehrung über einen Umstand ausbitten, den ich geneigt bin für sehr wichtig, und wie eine Hauptursache [anzusehen], warum bei sonst vortrefflichen Waagen die wiederhohlten Wägungen oft viel grössere Unterschiede geben, als man

nach den regelmässigen Schwingungen und der Schärfe, womit sich jedesmal deren Mittel bestimmen lässt, erwarten sollte.

Diese ist der Parallelismus der Schneiden. Fehlt daran etwas, so wird daraus, dass nach dem Auslösen das Tragstück*) sich nie wieder genau so wie vorher, auflegt, ein abgeändertes Moment, also ein anderes Resultat erfolgen.

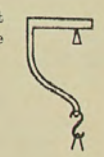
Die gewöhnlichen Mittel, womit die Mechanici solchen Parallelismus prüfen, sind aber meiner Meinung nach sehr roh. WEBER und MEIERSTEIN sagen mir, dass sie bloss längs den Schneiden nach Einem entfernten Object visiren, und daraus auf etwaige Divergenz schliessen. Ich würde dem Augenmaass keinen Vorwurf machen, wenn man bei einem so rohen Verfahren über einen Grad fehlte.

Es ist mir so, als hätten Sie mir schon voriges Jahr einmahl über diesen Umstand geschrieben und gesagt, dass REPSOLD diesen Parallelismus durch Messung der Distanzen der Schneiden prüfte. Ich habe alle Ihre aufbewahrten Briefe vom vorigen Jahre wieder durchgemustert, kann aber die betreffende Stelle nicht wieder finden. Vielleicht ist der Brief bei mir verlegt oder verloren. Jedenfalls verstehe ich die Art, wie die Messungen, und mit welchen Mitteln sie gemacht sind, so noch nicht. Ich bitte recht dringend, mir darüber vollständigen Aufschluss zu geben.

Ich bin nemlich vor 8 Tagen auf eine eigenthümliche Methode gekommen, solchen Parallelismus zu prüfen. Um sie genau auszuführen, muss ich erst einiges dazu machen lassen. Ein roher Versuch gab mir aber an REPSOLDS Waage eine Divergenz von $\frac{1}{4}$ Grad zwischen der mittleren und linken Schneide. Unter Anwendung der gehörigen Vorkehrungen glaube ich diese Grösse auf einen kleinen Bruchtheil Einer Minute bestimmen zu können.

Ich würde gern geneigt sein mein Verfahren, sobald ich etwas reifere

*) So nenne ich die Stahlplatte, die auf der Schneide schwebt. Hat dieses Stück einen bei den Künstlern recipirten Namen, so verbinden Sie mich sehr durch Anzeige desselben.



Versuche damit gemacht habe, in unsern g[elehrten] A[nzeigen] bekannt zu machen. In der Societät habe ich vor 8 Tagen, bei Gelegenheit einer Vorlesung von WEBER über Waagen von verschiedenen neuen Einrichtungen, einen Vortrag gehalten [*)]. Allein ich möchte gern vorher die Mittel, deren REPSOLD sich bedient, vollständig kennen. . . . .

[*) Siehe Göttingische Gelehrte Anzeigen vom 13. März 1837, Werke V, S. 511; der Vortrag von GAUSS im Anschluß an die Vorlesung WEBERS fand am 28. Januar 1837 statt.]

[C.]

[NACHWEIS DER ERDROTATION.]

[1.]

GERLING an GAUSS. Marburg, 31. December 1851.

. . . .

[Der zweite Gegenstand waren die Pendel-Beobachtungen hinsichtlich der FOUCAULTschen Beobachtungen [*)]. Die Thatsache an sich war hier an meinem langen Pendel natürlich gleich constatirt, und ich ärgerte mich nur, dass ich nicht schon 1842 gleich zwei Visire angebracht hatte; damals, wo ich viele präparatorische Versuche (mit BÖRSCH, der dann gleich abging) machte, liess ich das Pendel im Meridian schwingen und beobachtete im ersten Vertical. Hätte ich zugleich ein Visir im Meridian angebracht, so würde ich die fragliche Abweichung damals schon bemerkt haben (die ja auch vor 150 Jahren im Fallen schon in Italien gesehen ist, ohne dass jemand den Grund angab).

Nun habe ich mit KNOBLAUCH zusammen zwar eine Menge von Beobachtungen gemacht in meinem Verliess (während KNOBL. in einer Kirche noch ein zweites Pendel vorgerichtet, dem Publicum gezeigt und grösstentheils durch seinen Bedienten hat beobachten lassen). Ich habe aber zu dieser Art von Beobachtungen, wo man so nahe dabei ist, nie ein rechtes Zutrauen gehabt, und habe deshalb nichts dagegen, diese Art von Beobachtung aufzugeben, wozu KNOBL. Lust zu haben scheint, weil er seit Ende August nie mehr mit in den Keller gewollt, und wiederholt geklagt hat, dass das jetzt Beobachtungen geworden, mit denen sich jedermann schon abgegeben.

[*) Siehe L. FOUCAULT, *Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule,* Comptes Rendes, Acad. des Sciences **32**, Paris 1851, S. 421.]

Dagegen habe ich eine andere, meine ursprüngliche Beobachtungsweise für die bessere Jahreszeit, und für den zu hoffenden Fall, dass ich unter meinen Zuhörern einen tauglichen Helfer finde, oder dass endlich mein 10jähriges Sollicitiren um einen verpflichteten Gehülfen erhört wird, vorbereitet. — Ich habe nämlich in dem oberen Zimmer (etwa die Mitte der Länge) zwei Visire und genaue Maassstäbe an den Wänden angebracht, wodurch also Gestalt und Lage der Ellipse, sogar noch mit einer Controle für die Güte der Beobachtungen sich ergeben muss. Dass nämlich die Ellipse hier regelmässig entstehen muss, scheint mir klar schon aus meinen bisherigen Beobachtungen. Dass sie gegen den Sinn der täglichen Bewegung regelmässig gehen muss, scheint mir auch klar. Inwiefern sich aber dies letztere durch Beobachtungen nachweisen lässt, ist mir noch nicht deutlich. — Ebenso behauptet Möbius gesehen zu haben, dass die Bewegung eine andere gewesen, wenn die erste Anregung im Meridian gewesen, eine andere, wenn im ersten Vertical angeregt war. Knoblauch behauptet, immer dasselbe gesehen zu haben, also das Gegentheil von Möbius. — Möglich also, dass Nebenumstände sich dabei der Haupterscheinung beimengen, und deshalb scheinen mir fernere Beobachtungen, die aber erst zu Worte kommen, wenn die jetzigen tumultuarischen sich ausgetobt haben, allerdings noch immer nützlich. — Ich habe m[eines] W[issens] ziemlich fleissig gelesen, was darüber in den Zeitschriften vorgekommen, und hat mir noch am meisten Befriedigung gewährt, was Coombe im Philosophical magazine Juni II 1851[*)] sagt; auch Dufour[**)] scheint zu glauben, dass solide Beobachtungen noch fehlen. Von Secchis Beobachtungen habe ich seit jener Notiz in den Astron. Nachr.[***)] nichts mehr gelesen. Aber bei allem scheint mir noch immer eine klare Definition dessen zu fehlen, was bei der s[o] g[enannten] Pendel-Ebene das eigentlich bleibende ist.}

. . . .

[*) J. A. Coombe, *On the Rotation of the Earth*, Philosoph. Magazine 4. ser. 1, London 1851 (Jan.—June), S. 554.]

[**) *Sur les déviations apparentes du plan d'oscillation du pendule dans l'expérience de M. Foucault;* nouvelles expériences faites par M. le général Dufour de concert avec MM. Wartmann et Marignac, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 33, Paris 1851, S. 13.]

[***) *Auszug aus einem Schreiben des Hrn. Prof. Secchi u.s.w.*, Astronomische Nachrichten 32, 1851, Spalte 333, siehe besonders Spalte 335.]

[2.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 17. Januar 1852.

. . . .

Es würde mich sehr freuen, wenn Sie Ihre Pendelschwingungsbeobb. irgendwo ausführlich bekannt machen und dann zugleich eine historisch literarische Zusammenstellung von allem erheblichen, was bisher darüber gearbeitet ist, geben wollten. Ich habe nur hie und da einige dürftige Notizen gesehen, bin also in der Sache nur wenig bekannt, und scheue die Mühe des Zusammensuchens, oder vielmehr, es ist mir unmöglich, auf solches Zusammensuchen Zeit zu verwenden. Es wollte mir scheinen, dass jede theoretische Behandlung durchaus unbefriedigend sein müsse, wo nicht der Hergang an der Aufhängungsstelle gründlich mit berücksichtigt wird, was nicht leicht sein möchte, ausgenommen den einfachsten Fall, wo das Pendel oben mit einer conischen Spitze auf einer harten Unterlage aufsitzt. Eine solche Spitze ist aber im streng mathem[atischen] Sinn durch die Kunst nicht herzustellen. Nehmen Sie zunächst anstatt der Spitze eine prismatische Schneide, so ist kein Zweifel, dass wenn dieselbe eine gewisse Länge hat, die Schwingungen unverändert in Einer unveränderl[ichen] Azimuthalebene geschehen werden. Fragt sich nur, wenn man die Länge der Schneide immer kürzer nimmt, bei welcher Länge derselben die Rotation der Erde die Wirkung haben wird, dass diese Schneide an einem Ende sich in die Höhe hebt, so dass das Pendel eine Zeitlang bloss auf dem andern Endpunkte der Schneide ruht?*) Mir scheinen die damit zusammenhängenden Probleme nicht ganz leicht, wenigstens ihre Erledigung eines Zeitaufwandes bedürftig, welchen ich ihnen jetzt nicht widmen kann.

. . . .

*) Denn eine Azimuthaländerung der Schwingung kann nur entweder auf diese Weise oder durch eine mit Reibung verbundene Schiebung der Schneide möglich werden. Es ist daher auch die Frage zu beantworten, oder vielmehr es ist die Hauptfrage, bei welcher Schneidenlänge die zur Schiebung nöthige Ueberwindung der Reibung möglich wird.

[3.]

Gerling an Gauss. Marburg, 15. Februar 1852.

. . . .

{Wegen des Pendels schreibe ich ein andermal, so Gott will, weitläuftiger. Vor der Hand will ich nur die sichere Thatsache bemerken, dass ein gehörig eingeklemmter Metalldraht die Kugel durch seine Torsion immer so dreht, dass ihre eigenen Verticalkreise immer in ihren ursprünglichen Azimuthen bleiben. Ich habe dieses in allen Azimuthen der Schwingungs-Ebene, die sich mitunter 20, ja 30 Grad während der Versuche änderte, bewährt gefunden.} . . . .

[4.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 28. Februar 1852.

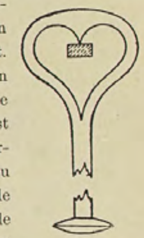
. . . .

Die mathematische Behandlung der Pendelschwingungen auf der rotirenden Erde ist, wie Sie aus den A. N. wissen werden, von der Danziger Naturf. Gesellschaft zum Gegenstande einer Preisfrage gemacht[*]. Mir will das Programm nicht recht gefallen. Erstlich ist die Frist zu kurz. Nicht jeder, der etwa befähigt wäre, ist in solchem Maasse Herr seiner Zeit, um eine in keiner Weise mechanische Arbeit so schnell zu vollenden, dass sie schon vor Ende September d. J. eingesandt sein kann. Dann sieht man nicht bestimmt genug, wieviel eigentlich gefordert wird. Wenn nur eine Behandlung, wie die Lagrangesche, bloss unter Zusatz der Wirkungen der Erdrotation gefordert wird, so lässt schon die Planasche Arbeit nichts zu wünschen übrig, und enthält so feine Mathematik, dass es leicht möglich wäre, dass ein gekrönter Bewerber, der erst hinterher die Planasche Arbeit kennen lernte, nur den bittersten Aerger fühlte. Die Planasche Abhandlung ist im 13. Bande der

[*] Die in den Astronomischen Nachrichten **34**, 1852, Spalte 33 veröffentlichte und vom 4. Februar 1852 datierte Preisaufgabe lautete: »Die Bewegung des Pendels mit Rücksicht auf die Umdrehung der Erde, im Sinne Lagranges, nämlich etwa so zu behandeln, wie der große Analytiker sie würde durchgeführt haben, wenn er sie zum Gegenstande seiner Untersuchung gemacht hätte«. Die Einsendungsfrist endete am 1. Oktober 1852.]

Turiner Denkschriften 2. Serie enthalten[*]. Ich habe Weber gebeten, Poggendorff zu einer möglichst baldigen Uebersetzung für seine Annalen zu veranlassen.

In Beziehung auf die Anstellung der Versuche habe ich auf eine andere Methode gedacht, wobei das Reflexionsprincip benutzt werden kann. Ich bin aber nach genauerer Ueberlegung davon zurückgekommen, das Pendel mit einer konischen Spitze auf einer harten Fläche S aufsitzen zu lassen.



Ich denke mir, das Pendel hängt an einem eingeklemmten Draht, der aber nur etwa 1 Zoll lang und an seinem untern Ende in eine steife Stange encastrirt ist. Diese Stange, von mässiger Stärke und Länge, trägt unten das Gewicht, eine Kugel oder vielleicht noch besser eine Linse mit horizontalem Aequator. Oben an der Stange ist ein Planspiegel, dessen Ebne im Augenblick des freien Herabhängens des Pendels vertical ist, und um die Ideen zu fixiren im Meridian gedacht werden mag, die reflektirende Fläche nach Ost gerichtet. Als eine Verbesserung würde ich noch ansehen, den Spiegel nicht unmittelbar an der Stange anzubringen, sondern an einem Arme, so dass die Mitte des Spiegels mit dem Aufhängungspunkte in Einer Höhe ist. Im Osten in schicklicher Entfernung ist ein gegen den Spiegel gerichtetes Fernrohr, worin man das Bild einer verticalen Scale sieht.

Versetzt man nun das Pendel in Schwingungen, und zwar so, dass die Schwingungsebene der Meridian[ebene] (allgemein der Spiegelebene) parallel ist, so dreht letztere sich nur in sich selbst und das Scalenbild bleibt völlig ruhig. Hat aber nach einiger Zeit das Azimuth der Schwingungsebene sich geändert (von SW nach NO), so steigt das Scalenbild im Fernrohr auf und nieder, oder was dasselbe ist, das Fadenkreuz scheint sich auf der Scala auf und nieder zu bewegen.

Weber hat einen, allerdings nur erst sehr rohen Versuch der Ausführung gemacht. Ich habe aber seine Einrichtung noch nicht selbst gesehen. Denn meine Mobilität zu Fuss erstreckt sich seit ½ Jahre nicht weiter als von der

[*] J. Plana, *Note sur l'expérience communiquée par Mr. L. Foucault le 3. février 1851 à l'Académie de Paris*, Memorie dell' Accademia delle Scienze di Torino, 2. ser. **13**, 1853.]

Sternwarte zum Museum und zurück. Nur Einmahl bin ich bis zum Universitätshause gegangen, wobei ich meinen Athem ganz verlor. Inzwischen, nach dem was er mir berichtet, werden bei einer solchen Einrichtung, wenn sie mit aller Sorgfalt in angemessenen Dimensionen und Localität ausgeführt wird, die Versuche eine Eleganz erhalten, wovon andere Einrichtungen weit entfernt bleiben müssen. Schon bei Webers roher Einrichtung, Fernrohr in kleiner Entfernung, nicht fester, oft durch fahrende Wagen gestörter Aufstellung, betrug die Amplitude der Bildbewegung schon nach einer Minute etwa 3 Scalentheile oder Millimeter. Es versteht sich, dass wenn die ursprüngliche Bewegung in einem etwas kleinern Azimuth (SO nach NW) geschieht, gleich Anfangs eine auf- und abgehende Bildbewegung vorhanden ist, die nach und nach schwächer wird, bis sie in die entgegengesetzte übergeht. Ich zweifle nicht, dass auf diese Art es möglich sein wird, die Erdrotation schon nach wenigen Secunden erkennbar zu machen. . . . .

[5.]

Gerling an Gauss. Marburg, 6. October 1852.

. . . .

{Mein desiderium hinsichtlich des Foucaultschen Experiments besteht aber noch fort. Ich denke mir nämlich unter dem Erdpol die Pendel-Ebene im Raume ruhend und scheinbar auf dem Horizont bis in 24^h um 360^0 sich fortdrehend, weil sich die Erde um die Verticale darunter wegdreht. — Unter der Breite φ dreht sich scheinbar die Ebene (quasi-Ebene) des Pendelschwungs um $360^0 . \sin\varphi$. — Zwischen beiden Fällen besteht aber der Unterschied, dass ich im ersten Falle mir evident elementar Rechenschaft geben kann, warum es so seyn muss (weil die Schwingungs-Ebene, oder die gerade Linie, welche den Bogen im tiefsten Punkt tangirt constant im Raume bleibt) und dagegen im zweiten, da die Schwingungsebene sich theilweise mitdreht, mir nicht beantworten kann: was bleibt hier constant, damit das scheinbare Zurückbleiben der betreffenden Berührungslinie $360^0 . \sin\varphi$ betragen könne? — Ich weiss nicht, ob ich Ihnen erzählt oder schon einmal geschrieben habe, dass die Foucaultschen Experimente mich schon im vorigen Jahre veranlassten zu fragen, ob nicht die in allen mir bekannten Fallversuchen vorkommende Abweichung nach Süden, von welcher die Theorie dieser Versuche keine Rechenschaft giebt, ihren Grund in der während der Zeit des Fallens vorgehenden Drehung des auf dem Horizont beschriebenen Orientirungs-Kreuzes haben könnte? Ich berechnete mir für die Fallzeit den Winkel dieser Drehung, und multiplicirte mit dessen Tangente die östliche Abweichung, fand aber die auf diese Weise berechnete südliche Abweichung viel kleiner (wenn ich mich recht erinnere nur $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{3}$ der beobachteten).} . . . .

[6.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 30. December 1852.

. . . .

Den Apparat für den Foucaultschen Versuch, wovon ich Ihnen früher geschrieben habe, denke ich ausführen zu lassen. Ich hoffe, dass dadurch das Phänomen in jedem Local allemahl schon nach sehr kurzer Zeit bestimmt hervortretend gemacht werden kann. Die Fallversuche nach Guglielmini[*)] u. a. sind eigentlich wenig geeignet, die Drehungsbewegungen der Erde erkennbar zu machen, da sie nach den kostspieligsten Zurüstungen doch immer nur höchst rohe Resultate geben können. Die Versuche von Hook[**)] und selbst die von Guglielmini beweisen eigentlich gar nichts, da bei letzteren das Loth erst $\frac{1}{2}$ Jahr nach den Fallversuchen angewandt wurde. Wenn Sie übrigens sagen, alle Versuche hätten eine Bewegung nach Süden ergeben, wofür die Theorie keine Rechenschaft hätte, so verstehe ich diess nicht. Benzenbergs Versuche in Hamburg gaben zwar eine solche, aber so, dass dieses Resultat gar keinen Werth hatte, wie er selbst nicht verkannte, und deshalb unternahm er ja eben die neuen Versuche in einem Schacht im Bergischen und diese gaben keine Abweichung nach Süden, sondern nur nach Norden (s. sein Buch[***)] p. 425). Bei Veranlassung Ihrer obigen

[*) G. B. Guglielmini, *De diurno terrae motu, experimentis physico-mathematicis confirmato opusculum*, Bononiae 1792.]

[**) Robert Hooke, *An attempt to prove the Motion of the Earth*, London 1674.]

[***) Joh. Friedrich Benzenberg, *Versuche über das Gesetz des Falles, über den Widerstand der Luft und über die Umdrehung der Erde*, Dortmund 1804; die von Gauss erwähnten Versuche machte Benzenberg 1802 in Hamburg auf dem Michaelisturm und 1804 in einem Kohlenschacht bei Schlebusch in der Grafschaft Mark. Vergl. auch J. F. Benzenberg, *Versuche über die Umdrehung der Erde, neu berechnet*, Düsseldorf 1845.]

Aeusserung habe ich übrigens die REICHschen Versuche[*)] wieder angesehen. Derselbe findet nach seiner Rechnung (p. 46) eine Abweichung nach Süden von 4,374 Millimeter mit einem wahrscheinlichen Fehler von $2^{mm},700$. Auch diess als richtig angenommen, würde ich doch seine folgenden Zeilen »Was die letztere betrifft . . . . nach Süden« nicht billigen können. Von einem Resultate, dessen absolute Grösse nur $1\frac{1}{2}$ mahl so gross ist als der wahrscheinliche Fehler, darf man nicht sagen, dass sie »noch nicht ausser allen Zweifel gesetzt sei«, sondern nur 1) in dem Fall, wo man gar nichts weiter davon weiss, als den Ausfall der Versuche, — dass daraus für die Realität der Grösse nur erst eine mässige Wahrscheinlichkeit resultire, hingegen 2) in dem Fall, wo andere gewichtige Gründe gegen die Realität sprechen, würde ich sagen, dass auf den Ausfall nur wenig zu geben sei, und 3) wenn wie hier seit 50 Jahren durch strenge Theorie bewiesen ist, dass eine Abweichung nach Süden gar nicht stattnehmig sei, würde man sagen müssen, dass gar nichts darauf zu geben sei. Was den letzten Theil von REICHS Phrasen betrifft, so finde ich die Sache ungefähr eben so sonderbar, wie den Umstand, dass alle 3 jetzigen Kaiser am 2. December ihren Thron bestiegen haben, und zwar FRANZ JOSEF 4 Jahr, NICOLAUS 27 Jahre früher als NAP[OLEON] III (ein Mathematiker könnte die Sonderbarkeit noch erhöhen, wenn er die Zahlen so schriebe $4 = 2^2$, $27 = 3^3$). Mit solchen Phantasiespielen belustigt man sich wohl, aber niemand legt ihnen eine ernsthafte Bedeutung bei.

Nun aber kommt noch ein Hauptpunkt. Ich finde REICHS Rechnung falsch. Wie er es angefangen hat, obige Zahlen herauszubringen, weiss ich nicht: aber eine richtige Rechnung giebt anstatt der Zahlen p. 45

28,282 2,703
5,061 2,700

folgende:

Hauptresultat für die östliche Abweichung

$28^{mm},527$, wahrscheinlicher Fehler 3,481,

Hauptresultat für die südliche Abweichung

$3^{mm},540$, [wahrscheinlicher Fehler] 3,400.

[*) FERDINAND REICH, *Fallversuche über die Umdrehung der Erde u.s.w.*, Freiberg 1832.]

Nach Correction der falschen Orientirung erhalte ich hieraus:

Abweichung nach Osten $28^{mm},605$,
Süden 2 ,874,

also die vermeintliche Abweichung nach Süden noch kleiner als der wahrscheinliche Fehler darin.

Wenn Ihrem Briefe zufolge Ihr »Desiderium wegen des FOUCAULDschen Versuches noch immer fortbesteht«, so kann ich darauf nur erwiedern, dass meiner Ueberzeugung nach der Grund der für Sie Statt findenden Dunkelheit darin liegt, dass Sie die Aufgabe für leichter ansehen, als sie ist, und erwarten, dass sie sich durch ein Aperçu (um ein Wort zu gebrauchen, was GÖTHE so oft zu seinem cheval de bataille machte) beantworten lasse, zu welcher Erwartung Sie gar kein Recht haben. Es gibt sehr viele Fälle, wo sich durch ein Aperçu in eine intricate Frage ein helles Licht bringen lässt, aber auch andere, wo dies Licht nur ein Irrlicht ist, und höchstens die Wirkung hat, dass mancher sich einbildet, nun die Sache zu verstehen, obwohl er eigentlich sich darin bloss täuscht. Ich rechne dahin den Versuch des p. SCHAUB in den A. N. Nro. 838[*)], der kein elementarer Beweis ist, sondern gar kein Beweis. Der Hergang der Sache im absoluten Raume kann so gedacht werden. Ein materieller Punkt A wird nach einem festen Punkte C zu angezogen, zugleich aber ist er genöthigt, von einem dritten Punkt B immer in einer unveränderlichen Entfernung zu bleiben: man sucht die Bewegung des Punktes A im Raum. Ist nun B gleichfalls fest und nimmt [man] die Stärke der Anziehung nach C zu wie constant an, auch überhaupt AB wie verschwindend gegen AC, so ist die Aufgabe eine sehr leichte und zusammenfallend mit der Aufgabe der Pendelschw[ingungen] auf nicht rotirender Erde. Sobald man aber B nach gegebenem Gesetz als beweglich betrachtet, so verhält es sich ganz anders, die Aufgabe ist eine gleichsam specifisch verschiedene und sehr schwer. Erleichtert wird sie allerdings sehr, wenn man die Art der Bewegung von B so annimmt, dass sie gleichförmig in einem Kreise geschieht, dessen Planum durch eine von C dagegen gezogene Normale im Centrum des Kreises getroffen wird. Das erstere ist der Fall, wo der

[*) F. SCHAUB, *Elementarer Beweis der Wirkung der Umdrehung der Erde auf die Schwingungsebene des Pendels*, Astronomische Nachrichten **35**, 1853, Spalte 353.]

Foucaultsche Versuch unter dem Pole gemacht wird, das andere unter jeder anderen Breite. Wer aus dem Umstande, dass im ersteren Falle die Auflösung so leicht ist, sich zu der Erwartung verleiten lässt, auch im zweiten (specifisch ganz verschiedenen) Fall eben so leicht oder fast eben so leicht fertig werden zu können, täuscht sich. Es gibt keinen andern Rath, als in einer oder der anderen Form die strenge Behandlung durchzumachen. Planas Abhandlung habe ich leider allen Suchens ungeachtet noch immer nicht wieder finden können. Eine andere, im ganzen ähnliche Behandlung der Aufgabe, gestützt auf meine Grundformeln in Benzenbergs Buch[*)], hat Clausen in den Bulletins der Petersburger Akademie gegeben[**)], die ich aber auch in diesem Augenblicke nicht genauer nachweisen kann. . . . .

[7.]

Gerling an Gauss. Marburg, 28. Januar 1853.

. . . .

[Sehr hat es mich erfreut zu lesen, dass Sie einen Apparat für die Foucaultschen Versuche wollen ausführen lassen. Hoffentlich wird dann auch mehr Ernst und Genauigkeit in die Versuche selbst kommen, als mir bisher dabei angewandt zu seyn scheint. Was ich für diesen Zweck früher, und wie ich mir schmeichle gut, vorbereitet hatte, hat nun schon über ein Jahr geruht, da die beiden Bedingungen der wirklichen Anwendung, ein ständiger Gehülfe, den ich zu jeder Zeit zur Assistenz herbeicitiren könnte, und die eigene, seit längerer Zeit mehr oder weniger gestörte, im letzten Jahr aber fast gänzlich absorbirte Geistesruhe, die zu soliden Arbeiten unumgänglich nöthig ist, mir fehlten.

Vielen Dank sage ich Ihnen für die ausführliche Auseinandersetzung, weshalb sich die Theorie dieser Versuche nicht in ein Aperçu bringen lässt. — Sie beantworten eigentlich meine Frage: »Was ist dabei als constant vorauszusetzen?« dahin: »Es ist nichts constant zu setzen als die Anziehung nach

[*) Siehe *Fundamentalgleichungen für die Bewegung schwerer Körper auf der rotirenden Erde*, Werke V, S. 496.]

[**) H. Clausen, *Über den Einfluss der Umdrehung der Gestalt der Erde auf die scheinbare Bewegung an der Oberfläche derselben*, Bulletin phys.-math. de l'Académie de St.-Pétersbourg **10**, 1852.]

dem Mittelpunkte der Erde und die Entfernung von dem im Kreise gleichförmig umlaufenden Aufhängepunkt«. Die Entstehung meiner Frage schreibt sich eigentlich aus einer ziemlichen Anzahl von Auseinandersetzungen her, die mehr oder weniger Aehnlichkeit mit der von Ihnen gerügten Schaubschen in No. 838 [der Astronomischen Nachrichten] darbieten. Dieselben gehen denn darauf aus, dass bewiesen werden soll, der Winkel, den die successiven Lagen der Mittagslinien durchlaufen, verhalte sich zu dem Winkel, den die correspondirenden successiven Lagen der Meridianebene machen, wie $\sin\varphi : 1$. Da dies aber ein bloss geometrischer Elementarsatz ist, so fragte ich: wie das mit dem Pendel zusammenhänge, und weil die specifische Verschiedenheit von dem Fall $\varphi = 90^0$ mir nicht klar war, so drückte ich das so aus: »Für $\varphi = 90^0$ sagt ihr, die Pendel-Ebene sey constant, was ist aber nun constant zu setzen, wenn $\varphi < 90^0$? Ehe ihr mir dies erklärt, kann ich nicht einsehen, dass jener geometrische Satz für die Aufgabe genügt«. — Auf Hansens wie ich sehe inzwischen in Danzig gekrönte Abhandlung[*)] bin ich sehr neugierig. Er hat im Herbst 1851 in Gotha mit meinem Kollegen Stegmann, wie ich höre, über den Gegenstand gestritten; und letzterer konnte mir damals, als ich ihm die obige Frage einwarf, auch keine Auskunft geben. H. wird also wohl den von Ihnen angegebenen specifischen Unterschied gehörig herausheben. — Clausens Abhandlung habe ich bis jetzt nicht gesehen, werde aber, sobald ich wieder ausgehen kann, einmal auf der Bibliothek danach suchen.

Der andere Gegenstand, über den Sie mich belehren, verpflichtet mich zu nicht minderem Dank, obwohl ich beschämt fühle, dass ich bei grösserer Aufmerksamkeit (namentlich auf die Schlebuscher Versuche) doch vielleicht noch selbst dazu gekommen seyn würde einzusehen, wie wenig Grund vorhanden sey, in die bewussten Scrupel einzustimmen. Dies ist mir besonders klar geworden, als ich in Folge Ihres Briefes die betreffenden Stellen in Benzenberg und Reich wieder nachschlug. — Ganz überraschend war aber der Umstand, dass Reichs Rechnungs-Resultat sogar falsch befunden wurde. — Ich stelle mir vor, dass es von Nutzen seyn würde, wenn Sie auch dieses gelegent-

[*) P. A. Hansen, *Theorie der Pendelbewegung mit Rücksicht auf die Gestalt und Bewegung der Erde*, Neue Schriften der Naturforschenden Gesellschaft zu Danzig 5, Heft 1, 1856; auch in Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie **92**, 1854, S. 21.]

lich veröffentlichen liessen, denn es ist gar leicht möglich, dass Viele, die mit mir auf denselben falschen Weg geraten seyn können, dadurch gewarnt werden. — Bei der Gelegenheit erlaube ich mir noch die Frage, ob es auf einem Fehler meines Gedächtnisses (das leider sehr abgenommen hat) beruht, wenn ich meine, vor ca. 8 Jahren gelesen zu haben, dass auch Baily diese Versuche wiederholt oder ihre Wiederholung veranlasst habe? — Die Wiederholung der anderen Versuche von Reich über Dichtigkeit der Erde durch Baily ist mir ganz deutlich in der Erinnerung. — Jenes aber schwebt mir nur ganz dunkel vor. . . . .]

[8.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 21. April 1853.

. . . .

Mein Apparat für die Foucauldschen Pendelschwingungen ist in den Happttheilen fertig; man wird damit in jedem Local die Einwirkungen der Axendrehung der Erde schon in wenigen Secunden erkennbar machen können. Es müssen freilich noch mehrere andere Theile hinzukommen.

. . . .

[9.]

Gauss an Alexander von Humboldt. Göttingen, 10. Mai 1853.

[Briefe zwischen A. v. Humboldt und Gauss, Leipzig 1877, S. 66.]

. . . .

In der letzten Zeit habe ich mich mit der Ausführung eines Apparates beschäftigt, um die Foucauldschen Versuche in anderer Gestalt auszuführen. Ich habe es bei diesen, so wie Foucauld selbst, Secchi u. a. sie ausgeführt haben, wie einen grossen Mangel betrachtet, dass dazu ein Local erforderlich wird, wie es an wenig Orten zu Gebote steht. Secchi hat, wenn ich nicht irre, eine Höhe von mehr als 100 Fuss, Foucauld eines von mehr als 200, Garthe[*)] 134 u.s.w. Höhe. Mein Apparat ist in jedem Local anwendbar,

[*)] Caspar Garthe, *Foucaults Versuch als directer Beweis der Axendrehung der Erde, angestellt im Dom zu Cöln* u.s.w., Cöln 1852.]

und zeigt schon jetzt die Einwirkung der Erdrotation nach kurzer Zeit auf das schlagendste, ich hoffe aber (da er jetzt noch unvollständig ist) die noch fehlenden Stücke, vielleicht successive, dahin zu bringen, dass alles in höchster Eleganz und Präcision erscheint. . . . .

BEMERKUNG.

Das in den vorstehenden Briefstellen erwähnte von Gauss angegebene Pendel zur Ausführung des Foucaultschen Versuches ist erhalten; eine genauere Beschreibung findet man in dem Aufsatze »Gauss als Physiker« in der zweiten Abteilung dieses Bandes.

Schaefer.

[D.]

[VERMISCHTES.]

[1.]

GAUSS an BESSEL. Göttingen, 27. Januar 1829.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL, Berlin 1880, S. 488.]

. . . .

Erst ganz seit Kurzem habe ich endlich einmahl wieder anfangen können, an eine wissenschaftliche Arbeit zu denken. Ich habe verschiedene schon vor langer Zeit gehabte Ideen wieder aufgenommen, die sich auf eine von der LAPLACEschen ganz verschiedene Behandlung der Theorie der Capillaraction beziehen, und es ist mir bereits gelungen, das Meiste von dem, was mir früher nur als möglich vorschwebte, zu verwirklichen. Ich hoffe auch mit dem noch fehlenden Theile schon fertig zu werden, und wenn ich nur nicht zu früh wieder anderweitige Störungen erfahre, diesen Gegenstand schriftlich auszuführen, und schmeichle mir, dass Sie die Ausbeute nicht ohne Interesse demnächst lesen werden.

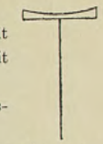
Bei dieser Veranlassung habe ich nun aber auch die beiden Abhandlungen von LAPLACE *Th. de l'act. cap.* [*)] und *Suppl. à la th. de l'act. cap.* [**)] sorgfältiger studirt, als früher von mir geschehen war. Dabei bin ich aber zu meiner Verwunderung auf etwas gestossen, worüber ich gern Ihre Ansicht erfahren möchte, wenn Sie anders diesen Gegenstand selbst auch zu einem Gegenstand Ihres Studiums gemacht haben.

[*) P. S. LAPLACE, *Théorie de l'action capillaire*, Supplément au livre dixième de la *Mécanique céleste*, Paris 1806; Oeuvres IV, 1880, S. 349.]

[**) P. S. LAPLACE, *Supplément à la théorie de l'action capillaire*, Paris 1807; Oeuvres IV, 1880, S. 419.]

Im Grunde hat LAPLACES Theorie zwei Cardinalpuncte:

1) die Wirkung eines Meniskus auf eine unendlich enge Röhre, welche er auf eine sehr schöne Art entwickelt hat, und woraus leicht die Fundamentalgleichung für die Oberfläche folgt;



2) den Satz, dass der Winkel der Oberfläche der Flüssigkeit mit der Gefäss-Wand constant ist (bei einerlei Flüssigkeit und einerlei Gefäss-Materie).

Dieser zweite Satz wird überall in der Abhandlung vorausgesetzt.

pag. 20 »inclinaison qui, comme on l'a vu, doit être la même pour tous les plans«

pag. 23 »et θ' est, comme on l'a vu, une quantité indépendante de ce demi-diamètre«

pag. 14 in der zweiten Abh[andlung] »l'angle ϖ est constant, comme je l'ai fait voir dans la théorie citée«.

Allein in der ganzen ersten Abhandlung selbst finde ich kein Wort, was dienen kann dies zu beweisen. Es kann also wol nichts gemeint sein als die Stelle in der Einleitung pag. 5, wo ich aber den Schluss, dass die »plans (en question) sont également inclinés à leur parois« keinesweges auf eine befriedigende Art begründet finde. Ich gestehe, dass mir dieser Hauptheil von LAPLACES Theorie der präcisen mathematischen Begründung des übrigen keinesweges würdig zur Seite zu stehen, sondern mehr den Charakter der vagen Aperçus, die man früher von dem ganzen Phänomene hatte, zu tragen scheint.

Freilich könnte man sagen, dass LAPLACE diese Lücke einigermaassen in der zweiten Abhandlung ausgefüllt hat. Das Rapprochement der ersten Methode die Haarröhrchen zu behandeln mit der anderen in der zweiten Abhandlung (die doch wohl im Grunde nichts weiter ist als die LALANDEsche) führt zu einer Bestimmung des Winkels quaestionis pag. 18. Allein erstlich ist dies doch wol ein unwürdiger Umweg, und zweitens folgt*) das Constantsein des Winkels daraus nur für den ganz speciellen Fall, dass die Gefässwände einen senkrechten Cylinder bilden.

Sie würden mich sehr verpflichten, wenn Sie mir Ihre Ansicht hierüber gefälligst bald mittheilen wollten. Es ist aber nicht die Rede davon, in wie

*) Auch möchte sich gegen diesen Beweis wol sonst noch allerlei erinnern lassen.

fern man dies vage Räsonnement pag. 5 der Einleitung durch tiefere Untersuchung zu der Würde eines Beweises erheben kann (denn das ist meine eigene Meinung sogar), sondern ob nach Ihrem Gefühl jenes wie es da steht die gerechten Forderungen, die der Geometer macht, befriedigt. Die Untersuchungen pag. 44 sqq. geben eigentlich für den beabsichtigten Zweck gar kein Resultat. . . . .

[2.]

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 14. Juni 1830.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II 2, 1909, S. 544.]

. . . .

Von dem HERZOG VON SUSSEX hat die Sternwarte vor einiger Zeit ein von HARDY verfertigtes verkehrtes Pendel erhalten, in einer etwa 4 mal so grossen Dimension wie das früher von demselben geschenkte (G.G.A., 1820, S. 1866[*]). Es hat eine bedeutende Empfindlichkeit, wenn gleich HARDYS Hoffnung, dass man damit die Attraction der Sonne, des Mondes und der Berge soll messen oder augenfällig machen können, theils viel zu sanguinisch, theils ohne Sinn ist. Bei einer mittleren Stellung der Kugel entspricht ein Ausschlag des Zeigers von 1 Linie einer Neigung von 24 Secunden, oder die Empfindlichkeit ist so gross, wie die eines 34 mal so langen gewöhnlichen Pendels. Was mich dabei am meisten interessirt, ist die Schärfe, mit der man die Dauer der Vibrationen bestimmen kann, und die Regelmässigkeit, mit welcher die Ungleichheit derselben der Temperatur folgt. Ich werde meine Versuche damit vervielfältigen. Hier einige, wobei das Th[ermometer] sorgfältig notirt ist:

Therm. Centes.	Dauer einer Vibration
$15^0,8$	$3^s,352$
16 ,8	3 ,364
18 ,2	3 ,378
19 ,4	3 ,395

[*) Werke VI, S. 435.]

Natürlich ist die Temperaturänderung nicht, insofern sie die Länge der Stange oder die Dichtigkeit der Luft afficirt (dieser Einfluss ist so gut wie unmerklich), sondern insofern sie die Elasticität der Feder verändert, das Agens, und ich glaube, dass man diesen, so viel ich weiss, bisher noch nie quantitativ untersuchten Umstand zur Darstellung einer ganz neuen Art äusserst empfindlicher Thermometer müsse benutzen können. . . . .

[3.]

ENCKE an GAUSS. Berlin, 24. Mai 1842.

. . . .

[Vor einigen Monaten erhielt ich von dem Chef der Artillerie eine Aufforderung mich über die Art zu äussern, wie die Versuchsresultate der Artillerie zu behandeln seyen, um sowohl einestheils Schusstafeln zu erhalten, welche auch die möglichen Abweichungen geben, anderentheils bei künftigen Versuchen eine Leitung zu haben und die Theorie zu vervollkommnen. Es war dabei ausdrücklich bemerkt, dass man wünsche, ich solle von der bisherigen ballistischen Theorie wo möglich keinen Gebrauch machen, da sie sich ungenügend erwiesen. Als ein Beispiel waren folgende Zahlen gegeben, welche, wie ich später erfuhr, zu einem 50 pf. Mörser, wo die Bombe etwa 8½ Zoll im Durchmesser hatte und das Geschoss etwa 6 Caliber lang war, gehörte.

Ladung	(in Schritten)	Elevation 1^0	5^0	10^0	15^0	20^0
2 ℔	Mittl. Schussweite	91,2	290,9	510,2	707,6	864,0
	» Längenabweichung	4,5	14,7	14,5	21,1	23,5
	» Seitenabweichung	0,5	1,0	1,9	3,7	3,9
5 ℔	Mittl. Schussweite	201,7	754,2	1303,1	1729,9	2212,0
	» Längenabweichung	14,8	22,7	34,3	26,5	41,4
	» Seitenabweichung	0,8	2,9	12,1	12,2	17,2
[*)]	Mittl. Schussweite	358,0	1026,8	1716,8	2319,7	2832,4
	» Längenabweichung	22,1	19,7	30,9	45,9	38,1
	» Seitenabweichung	0,9	5,0	11,3	17,0	31,9

[*) Die Angabe der Ladung fehlt in der Handschrift.]

Bei jeder Elevation und Ladung wurden 15 Schuss gethan. In allem 225 Schuss.

Die mittlere Längenabweichung ist so zu verstehen, dass die Differenz eines einzelnen Schusses vom Mittel aus allen ohne Rücksicht auf das Zeichen genommen ist und daraus das Mittel gebildet. Ebenso die mittlere Seitenabweichung, wo die wirkliche Richtung angenommen ist als mit der mittleren Schusslinie gleichartiger Schüsse zusammenfallend.

Diese beobachteten Fehler schienen mir verhältnissmässig gering und sie sind es auch wahrscheinlich nur dadurch geworden, dass auf die Lage des Schwerpunktes des Geschosses genau Rücksicht genommen ist. Man bestimmt jetzt die Lage des Schwerpunktes, indem man die Kugeln auf Quecksilber schwimmen lässt. Wahrscheinlich hat man bei diesen Versuchen den Schwerpunkt so gelegt, dass die Linie Schwerpunkt der äussern Figur und der Masse mit der Axe des Rohrs zusammenfällt. Bei anderen Lagen ist die Differenz der Schussweiten ungeheuer. Mir sind Versuche mitgetheilt, wo unter ähnlichen Verhältnissen die Schussweite bei Schwerpunkt unten 838,0 Schritt betrug, bei Schwerpunkt oben aber 1362,1 Schritt.

Der Versuch, die bisher bekannten ballistischen Formeln mit diesen Zahlen in Uebereinstimmung zu bringen, ist mir nicht geglückt. Wenn man die Constante des Widerstandes und die Anfangsgeschwindigkeit aus irgend zwei Werthen bestimmt, so weichen die übrigen viel zu stark ab. Ich habe auch eine andere Hypothese versucht nämlich die Annahme, welche mir in der Natur der Sache zu liegen scheint, dass bei dem Herausfahren der Kugel aus der Mündung der Widerstand geringer ist als in den entfernteren Theilen der Bahn, in so fern man annehmen kann, dass die Luft in gleichem Sinne wie die Kugel in Bewegung gesetzt wird und sonach nicht als ein ruhendes Medium zu betrachten sey. Indessen hat auch dieses nicht zu einem erwünschten Ziele geführt.

Sonach habe ich durch die gewöhnlichen Interpolationsformeln die Bahn für die zwischenliegenden Elevationsgrade ergänzt und, um von den Längenabweichungen einigermassen Rechenschaft zu geben, die Differentialquotienten in Bezug auf geänderte Elevation und Ladung numerisch aus den Interpolationsformeln bestimmt und die mittlere Aenderung dieser beiden Elemente bestimmt, welche hinreichen würde, um die Längenabweichungen wieder zu geben. In der

That findet sich dabei, dass man sehr nahe die Längenabweichungen erhält, wenn man eine mittlere Variation von etwa 3 Minuten bei der Elevation um $\frac{1}{30}$ der Ladung annimmt. Die Seitenabweichungen sind fast ganz der Schussweite proportional. Ausserdem habe ich empfohlen, sich womöglich an die ballistischen Formeln anzuschliessen, um aus ihnen eine Form zu erhalten, welche die Interpolation sicherer mache als die allgemeine Form der Taylorschen Reihe.

Dieselbe Aufforderung war auch an Bessel ergangen und sein Gutachten ist mir jetzt mitgetheilt worden. Bessel verwirft ganz alle Interpolation, so lange man nicht aus der theoretischen Behandlung der Aufgabe eine bestimmte Form erhalten hat, und spricht sich so aus, dass die grössten Fehler durch die Interpolation auf dem gewöhnlichen Wege stattfinden würden, so dass man bis zur Erhaltung der theoretischen Form jeden Versuch nur als ein einzelnes isolirtes Faktum betrachten müsse.

Obgleich ich nun glaube, dass dieser Ausspruch vielleicht etwas scharf abgefasst ist, um die Nothwendigkeit die Theorie zu verstehen eindringlich zu machen, da Bessel doch auch als die möglicherweise anzuwendende Form, wenn man sich diesen Fehlern aussetzen wolle, die gewöhnliche Interpolation anführt und entwickelt, so hat mich doch der Ausspruch befremdet, weil ich in der That nicht glaube, dass die Gefahr sehr grosser Fehler vorhanden ist, wenn man die Versuche gehörig ausdehnt, auf die Intervalle an den Grenzen des Anfangs und Endes weniger Gewicht legt und nicht ausserhalb der Versuchswerthe hinausgeht. Namentlich ist mir aufgefallen, dass er sagt, die Form der Taylorschen Reihe sei strenge nur bei unendlich kleinen Intervallen anzuwenden.

Da wahrscheinlich der Gegenstand noch mehrfach gegen mich erwähnt werden wird und da es mir in der That scheint, als wenn die Praxis hier der Theorie vorgeeilt ist und die bisherigen Formeln nicht vermögen, innerhalb der vorkommenden Fehlergrenzen die beobachteten Werthe wieder zu geben, so möchte ich fast Sie ersuchen, Hochgeehrtester Herr Hofrath, diesem Gegenstande einige Augenblicke zuzuwenden und mir gefälligst gelegentlich Ihre Ansicht darüber mitzutheilen. Es werden grosse Summen auf die Versuche gewendet und es wäre nicht unmöglich, dass, wenn eine befriedigende Theorie aufgestellt würde, die Versuche so geordnet werden könnten, dass das Gesetz des Widerstandes dadurch ein neues Licht erhielte. . . . .}

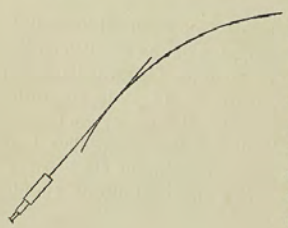
[4.]

GAUSS an ENCKE. Göttingen, 15. August 1842.

. . . .

Für Ihre Mittheilung der Artillerie Versuche bin ich Ihnen sehr dankbar. BESSELS Aburtheilung ist unstreitig zu schroff. Es giebt ohne Zweifel viele Fälle, wo man Beobachtungszahlen, auch ohne sie mit einer Theorie bemeistert zu haben, mit Nutzen einer Interpolation unterwerfen kann, in so fern man von der wirklichen Zuverlässigkeit aller jener Beobachtungszahlen eine völlige Ueberzeugung hat. Von der anderen Seite ist nicht zu leugnen, dass gerade dieser Ueberzeugung zumahl bei etwas verwickeltern Gegenständen die volle Lebendigkeit fehlen kann, wenn man nicht ihren Zusammenhang unter sich mit einer Einsicht in ihre Theorie durchdringt. Ich bekenne, dass die mir mitgetheilten Zahlen mir doch vielen Zweifel an der Zuverlässigkeit, trotz der Uebereinstimmung unter sich, zurücklassen, namentlich scheint es mir gar nicht denkbar, dass die Schussweite von 15° bis 20° Elevation mehr zunehmen sollte als von 10° bis 15°, wie bei 5 Pfund Ladung die mir mitgetheilten Zahlen ergeben: 1303,1 1729,9 2212,0.

Um sich darüber ein Urtheil zu bilden, müsste man alle Details der Versuche genau kennen. Uebrigens gestehe ich, dass mir scheint, aus Versuchen, bie dloss auf diese Art angestellt werden, könne nicht viel herauskommen.



Man sollte, meine ich, auf Mittel denken, jedem Schuss mehrere Resultate abzugewinnen, als bloss die Schussweite. Ich dächte z. B., dass es wohl thunlich wäre, mehrere Tangenten der Trajectorie mit grosser Schärfe zu erhalten, wenn hinterwerts in schicklicher Entfernung Beobachter mit Höhenmessungsinstrumenten aufgestellt wären. Vielleicht liessen sich sogar von der Seite her brauchbare Beobachtungen

machen, wenn die Aufstellung der Beobachter und Instrumente schicklich arrangirt wäre. SCHUMACHER schrieb mir vor 2 Jahren[*)], dass in der Sammlung des russischen Generalstabs in St. Petersburg 155 ERTELsche Theodolithen sind. Ich weiss nicht, ob der preussische eben so viel besitzt. Aber mit einem oder ein Paar Dutzend Theodolithen würde ich jeden Schuss verfolgen lassen, und ich dächte, dass wenn man es recht anfinge, die Trajectorie in vielen Punkten sich müsse ergreifen lassen. Ich würde nur stärkere Elevationen gebrauchen. Ist man einmahl Herr der Curven und der Bewegungsgesetze, so kann man das nöthige für kleine Elevationen besser durch Rechnung als durch Versuch finden. . . . .

[5.]

GAUSS an SCHUMACHER[**)].

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER II, Altona 1860, S. 220.]

. . . .

Vor einiger Zeit zeigten Sie in den A[stronomischen] N[achrichten][***)] an, dass Sie aus England eine Linse erhalten hätten, um die BROWNschen Versuche über das Leben der Materie zu wiederhohlen. Was ist wol das Resultat dieser Wiederhohlung gewesen. . . . .

[6.]

SCHUMACHER an GAUSS. [Altona,] 30. Dezember 1829.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER II, Altona 1860, S. 221.]

. . . .

{Die Bewegung aller Materie, d. h. der feinst möglich zerriebenen Materie habe ich allerdings gesehen, und ich will Ihnen das Microscop dazu mit nächster Post senden, da ich zu dieser nicht mit dem Einpacken fertig werden kann. . . . .}

[*) Siehe *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* III, Altona 1861, S. 402.]

[**) Das Datum fehlt, muß aber zwischen dem 7. und dem 30. Dezember 1829 liegen.]

[***) Astronom. Nachrichten 7, 1829, Spalte 103.]

[7.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 1830, Januar 5.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER II, Altona 1860, S. 221.]

{Anbei erhalten Sie, mein theuerster Freund!

1) PRITSHARDS Saphirlinse. Sie ist durch einen übergeschraubten Messingdeckel verwahrt.

2) DOLLONDS Stand dazu, dessen einfacher Mechanismus keiner Erklärung bedarf, nebst einem Planglas, um darauf ein Tröpfchen irgend einer feinst möglich zerriebenen in Wasser aufgelösten Materie zu thun.

3) Ein Test-Object, was zu den schwierigsten Proben der Microscope gehört. Es ist eine Schuppe von den Flügeln des gelben Kohlschmetterlings zwischen Glas und Marienglas. Die Seite mit Marienglas muss natürlich gegen das Microscop gewandt seyn, weil man sonst nicht wegen der Dicke des Glases nahe genug kommen kann.

Sie erscheint  aus Langstreifen zusammengesetzt, die Punkte haben.

4) In einer blechernen Büchse eine Auflösung von Gummigutt in Wasser zwischen Glas und Marienglas, und durch Oelfirniss luftdicht verschlossen, den NEHUS vor etwa 3 Monaten in London gekauft hat (bei CARY). Es soll dadurch bewiesen werden, dass durch das Verdunsten des Wassers die Bewegung der Atome nicht hervorgebracht wird, und es hält auch den Einfluss localer Bewegungen durch Temperaturveränderungen mehr ab, als wenn der Tropfen offen wäre. Obgleich man in London glaubte, diese Vorrichtung könne die Bewegung der Atome auf 14 Tage sichern, so ist sie noch jetzt an mehreren Stellen ebenso lebhaft darin, wie im Anfange. An anderen Stellen hingegen, die wahrscheinlich aufgetrocknet sind, ist alles todt. Sie werden leicht die lebendigen (oder besser beweglichen) Atome ausfinden. . . . . }

[MAGNETISMUS UND GALVANISMUS.]

[AMTLICHER BERICHT.]

An

Königliches Universitäts-Curatorium.

Vortrag des Hofraths GAUSS in Göttingen, das Bedürfniss eines besonderen Locals für magnetische Beobachtungen betreffend.

Unter den Gegenständen, welchen die Naturforscher des gegenwärtigen Jahrhunderts das lebhafteste Interesse widmen, nimmt die Lehre vom Magnetismus, wenn nicht die erste, doch eine der ersten Stellen ein, und seit den letzten zwölf Jahren ist durch die grossen Entdeckungen von OERSTED, AMPÈRE, ARAGO und FARADAY in Beziehung auf das wunderbare Band, welches jene Lehre mit der von der Electricität und dem Galvanismus verknüpft, jenes Interesse noch viel mehr gesteigert worden. Fast noch wichtiger aber, als der glänzende Zuwachs unerwarteter Thatsachen, die in diesen Gebieten entdeckt sind, ist der Umstand, dass auch hier die Versuche einer alles frühere weit überflügelnden Schärfe, und ihre einfachen Grundgesetze einer wahrhaft mathematischen Präcision fähig werden, so dass die Scheidewand zwischen eigentlich sogenannter Physik und angewandter Mathematik auch hier (wie längst in der Bewegungslehre und Optik) zu sinken, und die tiefer eingreifende Bearbeitung dem Mathematiker anheim zu fallen anfängt.

Am meisten ist das letztere in Beziehung auf die den Erdmagnetismus angehenden Beobachtungen der Fall, worüber die feinsten Beobachtungen eigentlich nur von solchen Mathematikern, die mit den feinsten Beobachtungsmitteln vertraut sind, also von den praktischen Astronomen, erwartet werden können. Immer kann jedoch der Einzelne nur durch seinen Standpunkt beschränktes liefern, und eine kräftige Förderung unserer Einsichten in diesem höchst interessanten Felde kann nur durch die vereinten Bemühungen vieler, an vielen Punkten unseres Erdkörpers, erreicht werden. Hr. von Humboldt hat hiezu bereits einen grossartigen Impuls gegeben, und eine Vereinbarung zu begründen angefangen, welcher zum Besten der Wissenschaft die ausgedehnteste Verbreitung zu wünschen ist. Er hat auf eigne Kosten in Berlin ein besonderes Gebäude für magnetische Beobachtungen errichtet, in welchem beim Bau durchaus gar kein Eisen gebraucht ist, und dasselbe mit kostbaren von Gambey in Paris verfertigten Instrumenten ausgerüstet: hier werden fortwährende Beobachtungen, besonders über die magnetische Declination und ihre höchst merkwürdige, man kann sagen räthselhafte, tägliche und stündliche Aenderung angestellt. Allein diese Beobachtungen gewinnen erst dadurch ihre grösste Wichtigkeit, dass Hr. von Humboldt seine ausgebreiteten Verbindungen benutzt hat und noch benutzt, um ähnliche correspondirend gleichzeitige Beobachtungen mit eben solchen Hilfsmitteln an einer Menge anderer Oerter an den entlegensten Punkten der Erde zu veranlassen. Gegenwärtig finden solche Statt in Freiberg in Sachsen, in Paris, an vielen Punkten des russischen Reichs, z. B. Petersburg, Moskwa, Nicolajew; selbst in Peking und Südamerika, und schon jetzt sind mehrere interessante Resultate aus dieser Vereinbarung hervorgegangen.

Vor ungefähr einem Jahre machte Hr. von Humboldt in einem Schreiben an unsern Prof. Weber hierüber einige Mittheilungen, mit der Aufforderung, auch Göttingen an diesem Plan Theil nehmen zu lassen, dessen Curatorium stets gern, was den Wissenschaften erspriesslich ist, befördert. Es waren jenem Briefe zugleich die Preise der Instrumente, wie Gambey in Paris sie liefert und wie sie an den andern genannten Oertern angewandt werden, beigefügt: diese Preise beliefen sich auf etwa 4000 Francs. Als Prof. Weber mir damals diesen Brief mittheilte, konnte ich zwar nicht verkennen, wie sehr wünschenswerth es sei, dass auch Göttingen an diesen rühmlichen Bestrebungen Theil nehme, musste jedoch für rathsam halten, einen Antrag darauf einstweilen noch zu verschieben, da ich selbst eben damals mit Versuchen beschäftigt

war, die magnetischen Apparate in ihrer ersten Grundlage wesentlich zu vervollkommnen.

Diese meine Bemühungen, bei welchen ich von dem Prof. Weber vielfältig unterstützt bin, habe ich im Laufe des Jahres 1832 zur Reife zu bringen gesucht: meine Erwartungen sind nicht bloss erfüllt, sondern weit übertroffen, und ich habe die eingerichteten Apparate bereits zu einer Arbeit über die Intensität des Erdmagnetismus angewandt, die den Gegenstand einer von mir in der königl. Societät am 15. Dec. v. J. gehaltenen Vorlesung ausmacht [*]. Einen Bericht über diese Vorlesung in den hiesigen gelehrten Anzeigen **) beehre ich mich, beizulegen, da derselbe sowohl einen allgemeinen Begriff von den neuen Apparaten und deren Leistungen zu geben dienen kann, als auch die Umstände andeutet, die in dem gegenwärtigen — wie in jedem andern Local, welches nicht besonders für ähnliche Zwecke angelegt ist — unmöglich machen, zu ganz reinen und der Schärfe der Hülfsmittel würdigen Resultaten zu gelangen.

Ich glaube nunmehro, meine Arbeiten zu derjenigen Reife gebracht zu haben, um bei dem Königl. Universitäts-Curatorium auf Errichtung eines besonderen Gebäudes für die verschiedenen auf den Erdmagnetismus sich beziehenden Beobachtungen antragen zu können. Ich würde eine Pflicht gegen die hiesige gelehrte Anstalt versäumen, wenn ich nicht jetzt auf die Gelegenheit aufmerksam machte, wo Göttingen nicht allein auf eine rühmliche Art in die Reihe anderer schon bestehender und sich immer mehr vervielfältigender ähnlicher Anlagen eintreten, sondern durch ganz neue Methoden und Hülfsmittel den andern vorleuchten kann.

In einem solchen Local würden zunächst und hauptsächlich diejenigen Beobachtungen zu machen sein, für welche die von Hrn. von Humboldt errichteten und veranlassten Etablissements dienen, also

1. die currenten jeden Tag einigemahl zu bestimmten Stunden anzustellenden Beobachtungen der Variation der magnetischen Abweichung. Diese würde in der Regel Prof. Harding gern auf sich nehmen.

[*) *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*, vorgelegt am 15. Dezember 1833, Werke V, S. 79; vergl. die Anzeige ebenda, S. 293.]

**) Wie ich soeben erfahre, hat Hr. von Humboldt dieser Anzeige die Ehre erzeigt, sie zu schnellerer Verbreitung in Frankreich selbst ins Französische zu übersetzen.

2. Ähnliche Beobachtungen an bestimmten, unter allen Beobachtern in den verschiedenen Welttheilen verabredeten Tagen (acht im Jahre) von Viertelstunde zu Viertelstunde, oder wenigstens von Stunde zu Stunde. Da diese jedesmahl zwei Tage und eine Nacht en suite befassen, so sind sie nur durch eine Vertheilung unter mehrere Personen ausführbar; ausser Prof. Harding und mir wird Prof. Weber stets gern Theil daran nehmen, auch wird dabei immer auf die Beihülfe dieses und jenes talentvollen Studirenden gerechnet werden können.

Ausserdem würde ich selbst von Zeit zu Zeit die erst jetzt möglich werdende viel delicatere Bestimmung der absoluten magnetischen Intensität vornehmen.

Endlich würde diese Einrichtung zu fast unzähligen andern magnetischen, galvano-magnetischen und elektromagnetischen Beobachtungen und Messungen dienen, und gewiss manche bisher noch dunkle Partie in diesen Lehren dadurch aufgehellet werden können.

Die von mir eingerichteten Apparate empfehlen sich übrigens auch dadurch, dass sie vergleichungsweise nur geringe Kosten verursachen. Der oben angegebene Preis der von Herrn von Humboldt und an den andern Orten gebraucht werdenden Instrumente fällt mithin hier ganz weg, und es handelt sich bloss um das Gebäude. Zwar würde eines besondern, ganz zu diesem Zweck eingerichteten Locals nur ein Apparat von beträchtlich grössern Dimensionen, als die bisher von mir gebrauchten, ganz würdig sein; allein auch Apparate von solchen beträchtlich grössern Dimensionen würden nur geringe Kosten machen, die hier gar nicht in Anschlag zu kommen brauchen, sondern füglich unter den currenten kleinen Ausgaben für die Sternwarte verrechnet werden könnten. Von den bisher schon vorhandenen beiden Apparaten könnte etwa der eine demnächst an das physikalische Cabinet abgegeben werden, während der andere für allerlei erforderliche comparative Messungen vor wie nach seine Dienste leisten würde. . . . .

Göttingen, den 29. Januar 1833.

NACHLASS.

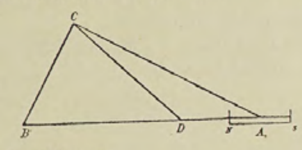
[BERECHNUNG MAGNETISCHER KRÄFTE.]

[Aus Handbuch 15, Ba, Opuscula varii argumenti. Volumen primum. Brunovici 1800.]

[1.]

[S. 174]

Zierliche Construction für die magnetische Ablenkung.



A Centrum eines Magnets
SN Richtung seiner Axe
AB deren Fortsetzung
C ein Element freien Magnetismus
CB senkrecht auf AC
$AD = \frac{1}{3}AB$

Dann wird, wenn der Magnetismus in C südlicher ist, solcher in der Richtung CD angezogen; ist er nördlicher, in der entgegengesetzten abgestossen mit einer Intensität

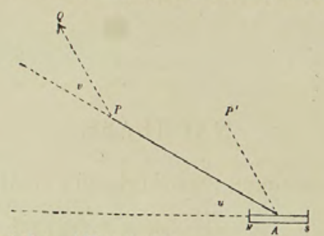
$$= \frac{DC}{AD.AC^3} \times M,$$

wo M das statische Moment des freien Magnetismus des Magnets in A ist.

[2.]

[S. 185]

Rechnung für die Wirkung eines Magnets SN in grosser Ferne $AP = r$.



u Winkel zwischen AN und AP

PQ Richtung der Kraft, welche in P auf positives magn. Fluidum wirkt

v Winkel zwischen der Fortsetzung von AP und PQ

u und v werden nach einerlei Seite (beide von der linken nach der rechten oder beide umgekehrt) gezählt

m Moment des Magnetismus des Magnets SN

SN seine magn[etische] Axe

Dann ist

$$\operatorname{tang} v = \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} u$$

Stärke der Kraft

$$\begin{aligned} & \frac{m}{r^3}\sqrt{(4\cos u^2 + \sin u^2)} \\ = & \frac{m}{r^3}\sqrt{(3\cos u^2 + 1)} \\ = & \frac{m}{r^3}\sqrt{(4 - 3\sin u^2)} \\ = & \frac{m}{r^3}\sqrt{(\tfrac{5}{2} + \tfrac{3}{2}\cos 2u)}. \end{aligned}$$

Man kann diese Kraft auf drei verschiedene Arten in zwei zerlegen.

I. $\frac{m}{r^3}$ parallel mit NS,

$\frac{3m\cos u}{r^3}$ nach Richtung AP.

[S. 186]

II. $\frac{2m}{r^3}\cos u$ nach AP,

$\frac{m}{r^3}\sin u$ nach der darauf senkrechten Richtung oder der Richtung, die mit AN den Winkel $u + 90^0$ macht.

III. $\frac{3m}{2r^3}$ nach AP', wo $NAP = PAP'$,

$\frac{m}{2r^3}$ parallel mit SN.

BEMERKUNGEN.

Die hier mitgeteilten Formeln von GAUSS sind zuerst von WEBER in der Abhandlung *Bemerkungen über die Einrichtung und den Gebrauch des Bifilar-Magnetometers* in den Resultaten aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins im Jahre 1837, S. 22ff. mitgeteilt worden; dort findet sich auch die erste der beiden Zeichnungen. GAUSS selbst ist darauf zurückgekommen im Artikel 7 seiner *Vorschriften zur Bestimmung der magnetischen Wirkung, welche ein Magnetstab in der Ferne ausübt*, Resultate des Magnetischen Vereins im Jahre 1840, S. 33; Werke V, S. 434.

SCHAEFER.

[3.]

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik. Angefangen im März 1809, S. 185.]

Die eine Bedingung zwischen Declinationen und Intensitäten kann am einfachsten analytisch so dargestellt werden.

Es sein die Coordinaten von drei Orten x, y; x', y'; x'', y''; die partiellen horizontalen magnetischen Kräfte an denselben ξ, η; ξ', η'; ξ'', η''. Dann ist

$$0 = \xi x' + \xi' x'' + \xi'' x - \xi x'' - \xi' x - \xi'' x' + \eta y' + \eta' y'' + \eta'' y - \eta y'' - \eta' y - \eta'' y'.$$

Geometrisch so:

Es sein beim Durchschreiten des Umfangsdreiecks, welches die drei Punkte 0, 1, 2 bilden, die Drei Seiten r'', r, r', deren Azimuthe A'', A, A'; die Drei Declinationen $\delta, \delta', \delta''$; die Drei horizontalen Intensitäten h, h', h'', so ist

$$0 = rh\cos(A - \delta) + r'h'\cos(A' - \delta') + r''h''\cos(A'' - \delta'').$$

NB. die Declinationen sind gegen Einen bestimmten Meridian zu nehmen.

BEMERKUNGEN.

Wird die Horizontalkomponente der magnetischen Kraft ihrer Größe und Richtung nach durch die Vektorbezeichnung $\mathfrak{H}$ charakterisiert, das Linienelement einer beliebigen auf der Erdoberfläche liegenden geschlossenen Kurve s durch ds bezeichnet, so gilt der Satz, daß das Linienintegral der magnetischen Kraft längs einer solchen Kurve verschwindet:

$$\int_0 \mathfrak{H}_s\, ds = 0.$$

Wählt man ein Dreieck mit den Punkten 0, 1, 2 als geschlossene Kurve s, und setzt für $\mathfrak{H}_s$ in den Teilintegralen über die drei Seiten jedesmal das arithmetische Mittel aus den Werten in den Endpunkten jeder Dreiecksseite, so ergibt sich die obige Formel unmittelbar durch Übergang zur Koordinatendarstellung. Dasselbe Problem wird behandelt in den Artikeln 9 und 10 der *Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus*, Resultate u.s.w. 1838, S. 11; Werke V, S. 131. Die geometrische Einkleidung fehlt dort indessen.

SCHAEFER.

[Aus Handbuch 15, Ba.]

[S. 191]

[4.]

Stärke eines Inductionsstosses.

Es sei a die Elongation, auf welche die Nadel getrieben werden würde, wenn keine Dämpfung vorhanden wäre. φ, θ in der Bedeutung der Res. 1837 [*)]. Es wird dann

$$\text{erste wirkliche Elongation}\quad +a\theta^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}}\,[^{**})],$$

$$\text{zweite}\quad -a\theta^{\frac{3}{2}-\frac{\varphi}{\pi}},$$

$$\text{dritte}\quad +a\theta^{\frac{5}{2}-\frac{\varphi}{\pi}}$$

u.s.w.

$$\text{also erster Schwingungsbogen}\quad a(1+\theta)\,\theta^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}},$$

$$\text{zweiter}\quad a(1+\theta)\,\theta^{\frac{3}{2}-\frac{\varphi}{\pi}}.$$

[S. 187]

[5.]

Ruhige Hinüberführung zu einem andern Gleichgewichtszustand.

Zwei Zeitintervalle t, t'

Schwingungsdauer T

Logarithmisches Decrement λ [***)]

R Quadrant

[*) *Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel*, Resultate u.s.w. 1837, S. 58; Werke V, S. 374.]

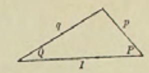
[**) In der Handschrift steht hier und in den folgenden Formeln an entsprechender Stelle noch der Faktor $\cos\varphi$.]

[***) In der Handschrift steht »Halbes logarithmisches Decrement«.]

Es sei

$$P = \frac{2Rt}{T},\quad Q = \frac{2Rt'}{T}\,[^{*})],$$

$$\log p = -\frac{\lambda}{[2R]}P,\quad \log q = +\frac{\lambda}{[2R]}Q,$$



Gleichungen:

$$p\cos P + q\cos Q = 1,$$

$$p\sin P = q\sin Q.$$

Daraus

$$\frac{1+pp-qq}{2p} = \cos P,\quad \frac{1+qq-pp}{2q} = \cos Q,$$

$$\cos(P+Q) = \frac{pp+qq-1}{2pq}\,[^{**})].$$

[S. 186]

Die auf der folgenden Seite [des Handbuchs, siehe das Vorhergehende] stehende Aufgabe wird auf folgende Gleichung mit Einer unbekannten Grösse (P) gebracht (weil $p = 10^{-\lambda P}$)

$$\frac{\log(1-2p\cos P+pp)}{\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{p\sin P}{1-p\cos P}} = \frac{\lambda}{R}.$$

BEMERKUNG.

Dieselbe Aufgabe ist behandelt in der Abhandlung *Über ein Mittel die Beobachtung von Ablenkungen zu erleichtern*, Artikel 6, Resultate u.s.w. 1839, S. 38; Werke V, S. 400.

SCHAEFER.

[Aus Handbuch 19, Bc.]

[S. 199]

[6.]

Aufgabe.

Fünf Commutationen des galvanischen Stromes so anzuordnen, dass zwei in der Kette befindliche Nadeln nachher eben so grosse Schwingungen haben, wie vorher.

Es sein $\frac{180^\circ}{n}$, $\frac{180^\circ}{n'}$ die Schwingungszeiten der beiden Nadeln,

$$T-t,\quad T-u,\quad T,\quad T+u',\quad T+t'$$

[*) In der Handschrift steht $Q = \frac{2Rt}{T}$.]

[**) In der Handschrift folgt noch ein unvollendetes Zahlenbeispiel.]

die Augenblicke der fünf Commutationen. Die vorgeschriebene Bedingung erfordert, dass

$$\begin{aligned}
&\cos n\,t - \cos n\,u + 1 - \cos n\,u' + \cos n\,t' = 0,\\
&\sin n\,t - \sin n\,u \quad + \sin n\,u' - \sin n\,t' = 0,\\
&\cos n'\,t - \cos n'\,u + 1 - \cos n'\,u' + \cos n'\,t' = 0,\\
&\sin n'\,t - \sin n'\,u \quad + \sin n'\,u' - \sin n'\,t' = 0.
\end{aligned}$$

Der zweiten und vierten Gleichung wird Genüge geleistet, indem man $u' = u$, $t' = t$ setzt. Wir haben demnach

$$\begin{aligned}
\cos n\,u - \cos n\,t &= \tfrac{1}{2},\\
\cos n'u - \cos n'\,t &= \tfrac{1}{2},
\end{aligned}$$

woraus sich t und u leicht durch Versuche bestimmen lassen. So findet sich für die Schwingungsdauern $20''6$ und $43''1$

$$t = 21''00, \quad u = 13''72.$$

Die Zeiten der Commutationen folgen also so aufeinander

$$0;\ 7''28;\ 21''00;\ 34''72;\ 42''00.$$

[S. 214]

[7.]

Inducirte gemischte Bewegung.

Schwingungsdauer des inducirenden Stabes $\frac{180^\circ}{n} = 60''4$

Schwingungsdauer des passiven Stabes $\frac{180}{N} = 20''6$

Dadurch wird die gemischte Bewegung inducirt, wenn die Verbindung zur Zeit 0 anfängt, und für die Zeit 0 der inducirende Stab mit positiver Bewegung durch die Mitte geht:

$$\begin{aligned}
&(N\cos n\theta\,\sin N\theta - n\sin n\theta\cos N\theta)\sin Nt\\
+&(N\cos n\theta\cos N\theta + n\sin n\theta\,\sin N\theta)\cos Nt\\
-&\ N\cos nt.
\end{aligned}$$

Hebt man die Verbindung zur Zeit θ' auf und schliesst sie wieder zur Zeit θ'', so ist die gemischte Bewegung hernach

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l}
\ \ N\cos n\theta\ \ \sin N\theta\ \ - n\sin n\theta\ \ \cos N\theta\\
- N\cos n\theta'\ \sin N\theta' + n\sin n\theta'\cos N\theta'\\
+ N\cos n\theta''\sin N\theta'' - n\sin n\theta''\cos N\theta''
\end{array}\right\}\sin Nt\\
+&\left\{\begin{array}{l}
\ \ N\cos n\theta\ \ \cos N\theta\ \ + n\sin n\theta\ \ \sin N\theta\\
- N\cos n\theta'\ \cos N\theta' - n\sin n\theta'\ \sin N\theta'\\
+ N\cos n\theta''\cos N\theta'' + n\sin n\theta''\sin N\theta''
\end{array}\right\}\cos Nt\\
-&\ \ N\cos nt.
\end{aligned}$$

Um die Coefficienten von $\sin Nt$ und $\cos Nt$ verschwindend zu machen, ist am einfachsten

$$\begin{aligned}
\theta\ \ &= -u,\\
\theta' &= \ \ 0,\\
\theta'' &= +u
\end{aligned}$$

zu setzen, wodurch der ersten Bedingung von selbst Genüge geschieht, und die zweite noch erfordert:

$$N(2\cos nu\,.\cos Nu - 1) + n\,.\,2\sin nu\,.\sin Nu = 0$$

oder

$$(N+n)\cos(N-n)u + (N-n)\cos(N+n)u = N.$$

Für unsere Zahlen ergiebt sich

$$\begin{aligned}
(N+n)u &= 0^{R},977\,766 \qquad & Nu &= 0^{R},729\,095\\
(N-n)u &= 0\ ,480\,425 & nu &= 0\ ,248\,671\\
& & u &= 7''5096.
\end{aligned}$$

BEMERKUNGEN ZU [6.] UND [7.].

Bezeichnet in [6.] x die Elongation einer der beiden Nadeln, n ihre Schwingungszahl in 2π Sekunden (Frequenz), und wird durch A eine der ablenkenden Kraft des Stromes proportionale Größe bezeichnet, so lautet die Differentialgleichung der Schwingung offenbar:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = A,$$

und nach einer Kommutation:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = -A.$$

Genau ebenso für die andere Nadel, wo nur anstatt n der Wert n' zu setzen ist. Man hat die Lösungen der beiden Gleichungspaare, die abwechselnd gelten, dann so aneinander zu setzen, daß zu den Zeiten der Kommutationen Elongationen und Geschwindigkeiten stetig in einander übergehen. Dann erhält man unmittelbar die Formeln in [6.].

Ein allgemeineres Problem — nämlich das der erzwungenen Schwingungen — wird in [7.] behandelt. Hier sind abwechselnd die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen aneinander zu fügen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + N^2x = 0,\qquad \text{wenn die Verbindung zur induzierenden Nadel aufgehoben ist,}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + N^2x = \cos nt,\quad \text{wenn die Verbindung mit der induzierenden Nadel hergestellt wird.}$$

Für die Bewegung der »passiven« Nadel erhält man dann leicht die angegebene Formel in [7.], in der die beiden Glieder mit $\sin Nt$ und $\cos Nt$ die »Eigenschwingung«, das Glied mit $\cos nt$ die »erzwungene« Schwingung darstellt.

Beide Aufgaben stehen offenbar in enger Beziehung zur sogenannten Multiplikations- und Zurückwerfungsmethode, die auf GAUSS und WEBER zurückgeht und in spezieller Form von WEBER*) veröffentlicht ist. Zu bemerken ist übrigens, daß in der Gleichung für die »gemischte Bewegung« in [7.] ein für GAUSS' Zweck irrelevanter (»Resonanz-«)Faktor durchweg fortgelassen ist. — Man vergleiche auch GAUSS' Abhandlung *Über ein Mittel die Beobachtung von Ablenkungen zu erleichtern* in den Resultaten u.s.w. 1839, S. 52, Werke V, S. 395.

SCHAEFER.

[S. 207]

[8.]

[Zurückwerfungsmethode.]

Der Lauf der Elongationen, bei abwechselnd angebrachten Inductionsstössen kann am übersichtlichsten so dargestellt werden:

$\log \frac{1}{\mu\mu}$ = Decrem. Logarithm.

x Wirkung eines Elongationsstosses

Elongationen (zum natürlichen Ruhestand hinzuzusetzen):

$$-\frac{\mu^3}{1+\mu^4}x + e$$
$$-\frac{\mu}{1+\mu^4}x - e\mu\mu$$
$$+\frac{\mu^3}{1+\mu^4}x + e\mu^4$$
$$+\frac{\mu}{1+\mu^4}x - e\mu^6$$
$$-\frac{\mu^3}{1+\mu^4}x + e\mu^8$$
$$-\frac{\mu}{1+\mu^4}x - e\mu^{10}$$

etc.

*) *Elektrodynamische Massbestimmungen, insbesondere Widerstandsmessungen*, Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft d. Wissensch., math.-phys. Classe 1, Leipzig 1852, S. 199; WILH. WEBERS Werke III, Abhandl. X, S. 301, insbesondere S. 438 und 441.

BEMERKUNGEN.

Der Sinn der vorstehenden Rechnung wird klar, wenn man die Grenze betrachtet, der mit wachsender Zeit die Ausschläge zustreben. Dann verschwindet offenbar in jeder Gleichung das zweite Glied, und vier aufeinanderfolgende Werte der Elongationen haben folgende Beträge:

$$+\frac{\mu}{1+\mu^4}x,$$
$$-\frac{\mu^3}{1+\mu^4}x,$$
$$-\frac{\mu}{1+\mu^4}x,$$
$$+\frac{\mu^3}{1+\mu^4}x.$$

Dadurch werden, wie man sieht, auf der Skala vier Punkte bestimmt; der Abstand der beiden äußeren werde mit a, der der beiden inneren mit b bezeichnet. a und b haben demnach folgende Werte:

$$a = \frac{2\mu x}{1+\mu^4},$$
$$b = \frac{2\mu^3 x}{1+\mu^4}.$$

Das Verhältnis $\frac{a}{b}$ wird also gleich $\frac{1}{\mu^2}$, und man erkennt, daß die hier mitgeteilten GAUSSschen Formeln die Theorie der sogenannten Zurückwerfungsmethode bilden, die GAUSS und WEBER gemeinschaftlich zugeschrieben wird, und von WEBER (a. a. O., WILH. WEBERS Werke III, S. 441) veröffentlicht worden ist. Übrigens fehlen in den GAUSSschen Formeln höhere Glieder, die in der Tat irrelevant sind, da beim Versuch der stationäre Zustand immer abgewartet wird.

SCHAEFER.

[9.]

[S. 217]

Berechnung gedämpfter Bewegungen der Magnetnadel.

T Schwingungsdauer (vergrösserte)

$a:b$ Abnahme-Verhältniss der Bogen

$t,\ t+T$ Beobachtungszeiten

$A,\ A+\Delta$ Stand

k Modulus der brigg. Log.

Dann gilt der Stand $A+\frac{a}{a+b}\Delta$ für die Zeit

$$t+\left(\frac{a}{a+b}-\frac{2\log\left(\frac{a}{b}\right)}{k\left(\pi^2+\left[\frac{1}{k^2}\right]\left(\log\frac{a}{b}\right)^2\right)}\right)$$

oder, wenn man

$$\frac{\log\frac{a}{b}}{k\pi} = \operatorname{tg}\varphi$$

setzt, wo dann $T\cos\varphi$ die ungedämpfte Schwingungsdauer wird,

$$t+\left(\frac{a}{a+b}-\frac{\sin 2\varphi}{\pi}\right)T.$$

[Hier folgen Zahlenbeispiele.]

BEMERKUNG.

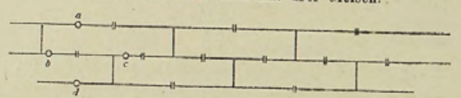
Der Zweck der obigen Betrachtung geht aus einer Vergleichung mit der Abhandlung *Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel* hervor, man vergleiche namentlich Werke V, S. 393.

SCHAEFER.

[S. 207]

[10.]

Rotationscommutatoren mit drei Gleisen.



Die rothen[*]] Linien bedeuten metallene Gleise, auf welchen gleichzeitig die Enden von vier Metalldrähten a, b, c, d sich bewegen; die schwarzen Einschnitte sind Unterbrechungen des metallischen Zusammenhanges.

[S. 209]

[11.]

Induktionsversuche.

Widerstand

1 im Multiplikator.

r im ersten Erreger, Induktionsrolle.

R im zweiten Erreger, Induktionsrad.

Erregungskraft

e durch den ersten Erreger.

E durch den zweiten Erreger.

Wirkungen

$\left.\begin{matrix}a,\ b,\ c\\ A,\ B,\ C\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\text{durch ersten}\\ \text{durch zweiten}\end{matrix}\right\}$ Erreger $\left\{\begin{matrix}\text{je nachdem der andere ausgeschlossen, oder}\\ \text{ohne oder mit Theilung in der Kette ist.}\end{matrix}\right.$

[*) In der Handschrift sind die Hauptlinien der Zeichnung rot, nur die »Enden« a, b, c, d und die hier verdoppelt eingezeichneten »Unterbrechungen« sind schwarz.]

Es ist dann

$$a=\frac{e}{1+r}\qquad A=\frac{E}{1+R}$$
$$b=\frac{e}{1+r+R}\qquad B=\frac{E}{1+r+R}$$
$$c=\frac{eR}{r+R+rR}\qquad C=\frac{Er}{r+R+Rr}.$$

Ferner

$$aB+bA-aA=h \text{ gesetzt, also } h=\frac{eE}{(1+r)(1+R)(1+r+R)}$$
$$h=bB-(a-b)(A-B)$$

$$e=\frac{abA}{h}\qquad E=\frac{ABa}{h}$$
$$r=\frac{a(A-B)}{h}\qquad R=\frac{A(a-b)}{h}$$
$$1+r=\frac{bA}{h}\qquad 1+R=\frac{aB}{h}$$
$$1+r+R=\frac{aA}{h}.$$

Bedingungsgleichungen

$$0=abA+acA-abC-acB-bcA$$
$$0=aAB+bAC-cAB-bAC-aBC$$

oder

$$ab\,(A-C)=ch$$
$$AB\,(a-c)=Ch$$

oder einfacher

$$0=\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}-\frac{A}{b}-\frac{A}{c}$$
$$0=\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}-\frac{a}{B}-\frac{a}{C}$$

oder

$$0=\frac{A}{a}-\frac{A-B}{b}-\frac{A-C}{c}$$
$$0=\frac{a}{A}-\frac{a-b}{B}-\frac{a-c}{C}.$$

Am besten

$$\frac{R}{r}=\frac{a}{A}\,\frac{A-C}{a-c}=\frac{A}{a}\,\frac{a-b}{A-B}=\frac{Bc}{Cb}.$$

[S. 210]

Die umstehenden Relationen stellen sich auch so dar.

(μ Widerstand im Multiplicator)

$$(1)=\frac{E}{\mu+R}\qquad (6)=\frac{e}{\mu+r}$$
$$(2)=\frac{E}{\mu+r+R}\qquad (7)=\frac{e}{\mu+r+R}$$
$$(3)=\frac{Er}{\mu r+\mu R+rR}\qquad (8)=\frac{eR}{\mu r+\mu R+rR}$$
$$(4)=(1)-(2)=\frac{Er}{(\mu+R)(\mu+r+R)}\qquad (9)=(6)-(7)=\frac{eR}{(\mu+r)(\mu+r+R)}$$
$$(5)=(1)-(3)=\frac{E\mu R}{(\mu+R)(\mu r+\mu R+rR)}\qquad (10)=(6)-(8)=\frac{e\mu r}{(\mu+r)(\mu r+\mu R+rR)}.$$

Bedingungsgleichungen.

$$\frac{(1).(1)}{(4).(5)} = \frac{(6).(6)}{(9).(10)} \quad \text{oder} \quad (1).(1).(9).(10) = (4).(5).(6).(6)$$

$$\frac{(1).(2)}{(3).(5)} = \frac{(6).(7)}{(8).(10)} \qquad (1).(2).(8).(10) = (3).(5).(6).(7)$$

$$\frac{(1).(3)}{(2).(4)} = \frac{(6).(8)}{(7).(9)} \qquad (1).(3).(7).(9) = (2).(4).(6).(8)$$

$$\frac{R}{r} = \frac{(1).(9)}{(6).(4)} = \frac{(5).(6)}{(10).(1)} = \frac{(2).(8)}{(7).(3)}$$

$$\frac{r}{\mu} = \frac{(4).(8)}{(5).(7)} = \frac{(3).(4).(6)}{(1).(2).(10)} = \frac{(1).(3).(9)}{(2).(5).(6)}$$

$$\frac{R}{\mu} = \frac{(3).(9)}{(2).(10)} = \frac{(1).(8).(9)}{(5).(6).(7)} = \frac{(4).(6).(8)}{(1).(7).(10)}$$

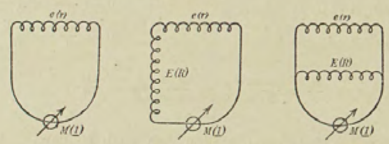
$$\frac{E}{r} = \frac{(1).(2)}{(4)} \qquad \frac{e}{R} = \frac{(6).(7)}{(9)}$$

$$\frac{E}{R} = \frac{(2).(6)}{(9)} \qquad \frac{e}{r} = \frac{(1).(7)}{(4)}$$

$$\frac{Er}{\mu R} = \frac{(1).(3)}{(5)} \qquad \frac{eR}{\mu r} = \frac{(6).(8)}{(10)} \text{[*)]}.$$

BEMERKUNGEN ZU [11.].

In moderner Ausdrucksweise bedeuten e und E die durch die beiden Erreger erzeugten elektromotorischen Kräfte, a, b, c sind die Stromstärken in den drei unterschiedenen Fällen. Die drei gemeinten Schaltungen sind in der folgenden Skizze dargestellt:



$$a = \frac{e}{1+r} \qquad b = \frac{e}{1+r+R} \qquad c = \frac{eR}{r+R+rR}$$

Ganz analog für $A, B, C,$ wo nur statt des ersten Erregers (e) der zweite (E) einzusetzen ist. Die ganze Betrachtung dient offenbar der Prüfung des Ohmschen Gesetzes.

Schaefer.

[*) In den hier von S. 210 des Handbuchs 19, Be abgedruckten Formeln ist in der Handschrift nur bei der ersten Gleichung die Ziffer (1) in Klammern gesetzt.]

[12.]

[Aus Handbuch 21, Bg. Aufsätze, Notizen und Rechnungen zur Mathematik und Astronomie gehörig. Angefangen September 1813, S. 19.]

Theorem über die Anziehung.

Ein Körper von irgend einer beliebigen Gestalt und Zusammensetzung übt in jedem Punkte des Raum's eine bestimmte Anziehung aus. Sobald man überall deren Richtung angeben kann, ist man auch im Stande ihre Intensität anzugeben, ohne die Gestalt des Körpers selbst zu kennen. Denkt man sich nemlich eine unendlich enge Röhre deren Wände eine solche Gestalt haben, dass sie überall von der Richtung der Anziehung tangiert werden, so ist die Anziehung überall der Weite proportional.

NB. Der Satz ist nicht allgemein zu verstehen; bloss die Intensitäten in derselben Röhre kann man so unter sich vergleichen, nicht aber in verschiedenen Röhren.

Die Vergleichung wird vollständig, indem man zugleich die Systeme der Flächen betrachtet, gegen welche die Richtung normal ist. [*)]

BEMERKUNG.

In der vorstehenden Aufzeichnung [12.] hat Gauss den Begriff der Kraftröhre eingeführt, sowie das Feld durch Flächen gleichen Potentials und Kraftröhren in Zellen eingeteilt, genau so, wie es später durch Faraday und Maxwell geläufig geworden ist. Man vergl. etwa Maxwells Abhandlung *On Faraday's Lines of Force,* Transactions of the Cambridge Philos. Society **10**, 1856, S. 27, Scientific Papers I, S. 155, deutsch in Ostwalds *Klassikern* Nr. 69, 1895.

Schaefer.

[*) In der Handschrift ist die oben zwischen * * gesetzte Stelle mit anderer Tinte, die zwischen ** ** gesetzte Stelle mit Bleistift geschrieben.]

BRIEFWECHSEL.

[1.]

GAUSS an GERLING. Göttingen, 14. Februar 1832.

. . . .

Ich habe mich in der letzten Zeit etwas mit dem Magnetismus überhaupt beschäftigt, namentlich auch die Intensität des Erdmagnetismus auf eine absolute, klar verständliche Einheit zu bringen gesucht. Ich finde, dass sie immer die Form hat $\frac{\sqrt{g}}{r}$, wo g eine Gewicht und r eine Linie ist. Nach einigen Versuchen ist in Göttingen, wenn r ein Zoll ist, g nur wenige Milligramme gross. Die Zeit ist heute zu kurz, mich weiter darüber zu erklären, zumahl da meine Rechnungen noch nicht reif sind. . . . .

[2.]

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 18. Februar 1832.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 2, 1909, S. 584.]

. . . .

Ich beschäftige mich jetzt mit dem Erdmagnetismus, namentlich mit einer absoluten Bestimmung von dessen Intensität. Freund WEBER macht nach meiner Angabe die Versuche. So wie man z. B. von Geschwindigkeit nur durch Ansetzung einer Zeit und eines Raums einen klaren Begriff geben kann, so, finde ich, muss zur vollständigen Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus angegeben werden 1) ein Gewicht $= p$, 2) eine Linie $= r$, und dann kann man den Erdmagnetismus durch $\frac{\sqrt{p}}{r}$ ausdrücken, d. i. ein doppelt ge-

wordener Erdmagnetismus, würde bei gleichem r ein viermahl so grosses Gewicht, oder bei gleichem Gewicht ein halbsogrosses r herbeiführen. Es scheint, dass, wenn man für r einen Zoll nimmt, p wohl nur wenige Milligramm beträgt. Die Versuche sind aber noch nicht vollständig. Ich werde, wenn es Sie interessirt, Ihnen gern demnächst etwas Näheres mittheilen und bemerke nur, dass man dabei zwei Nadeln A und B nöthig hat (die eine ist übrigens ein Stab), dass die Wirkung des Erdmagnetismus auf B mit der Wirkung von A auf B vergleichbar ist, insofern man letztere in bestimmter nicht zu kleiner Entfernung spielen lässt, deren Cubus die letztere Wirkung umgekehrt proportional ist; die Wirkung des Erdmagnetismus auf A hingegen ist mit dem Momente eines Gewichts, Produkt des Letzteren in eine Linie, vergleichbar, was dann entweder durch die Wage, indem man ein kleines Gewicht jene Wirkung aufheben lässt, oder durch Beobachtung der Schwingungszeiten ausgemittelt werden kann.

Auch für Declination und Inclination hoffe ich, mehrere neue Verbesserungen mit WEBERS Hilfe angeben zu können. . . . .

[3.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, den 3. März 1832.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER II, S. 295.]

. . . .

Ich bin, wie Sie leicht denken können, zu wissenschaftlichen Arbeiten lange Zeit wenig aufgelegt gewesen, habe aber doch in der letzten Zeit ein ziemlich lebhaftes Interesse für einen Gegenstand gewonnen, oder vielmehr erneuert, denn von jeher habe ich denselben als einen sehr reichhaltigen betrachtet, aber erst jetzt ist mir alles, was mir früher darin dunkel war, in grosse Klarheit getreten. Dies ist der Erdmagnetismus, und ich möchte wohl Ihre Verwendung ansprechen, um einen Wunsch in Erfüllung gehen zu sehen. Der vortreffliche HANSTEEN[*)] hat uns vor einiger Zeit eine Karte der isodynamischen Linien geliefert, und hoffentlich haben wir von demselben auch bald neue

[*) CHR. HANSTEEN, *Isodynamische Linien für die ganze Magnetkraft der Erde*, POGGENDORFFS Annalen der Physik u. Chemie 9, 1827, S. 49.]

Declinations- und Inclinationskarten zu erwarten. Dadurch werden dann die magnetischen Erscheinungen vollständig dargestellt, und für die meisten Personen wird die Darstellung in dieser Form am angenehmsten sein. Allein — was Ihnen vielleicht anfangs paradox scheinen wird — für denjenigen, der versuchen will, das Ganze der Erscheinungen einer möglichst einfachen Theorie unterwürfig zu machen, ist diese Darstellung nicht die zweckmässigste, sondern eine andere wäre zu diesem Zweck von viel unmittelbarerer Brauchbarkeit. Nemlich durch drei Karten, die die drei partiellen Intensitäten vor Augen legten. Es sei m die ganze magnetische Kraft, i die Neigung, δ die Abweichung; dann werden die drei partiellen Kräfte:

$\xi = m \sin i$ in verticaler Richtung
$\eta = m \cos i \cos \delta$ [*)] in horizontaler Richtung nach Norden
$\zeta = m \cos i \sin \delta$ [*)] » » » » Westen.

Wären die drei Karten für ξ, η, ζ vorhanden, so wäre ich geneigt, einen Versuch der oben angedeuteten Art zu machen; vielleicht entschlösse sich Herr Hansteen dazu solche zu liefern, oder allenfalls auch nur Eine derselben. Meine theoretische Untersuchung zeigt sogar, dass eine vollständige Darstellung Einer partiellen Kraft an sich zureichend ist die andere a priori abzuleiten. Selbst solche Karten erst zu entwerfen, werde ich mich nicht entschliessen, da dazu eine längere innige critische Bekanntschaft mit den Quellen erforderlich ist. Die Zurückführung auf eine kleine Anzahl von Polen z. B. 4, halte ich übrigens für nicht naturgemäss; solche Pole sind nur Symptome in den Erscheinungen, die keine scharfe Bedeutung haben, und wenn wir erst im Besitz der allgemeinen alles auf einmahl umfassenden Formel sind, ergeben sich diese sogenannten Pole, wenn man sie wissen will, von selbst mit. Vielleicht wird Ihnen, was ich sagen will, durch ein analoges Beispiel deutlicher. Die Zeitgleichung bietet im Jahre mehrere Maxima und Minima dar, aber man würde Unrecht haben, diesen eine ganz besondere Bedeutung beizulegen.

Mit einer anderen und wohl an sich nicht viel weniger wichtigen Seite des Gegenstandes habe ich mich in den letzten Wochen viel und wie mir deucht nicht ohne Erfolg beschäftigt, nemlich mit einem Mittel, die Intensität

[*) In der Handschrift steht d statt δ.]

des Erdmagnetismus auf eine absolute Einheit zurückzuführen. Wenn ich nicht irre, hat Poisson [*)] zuerst ein Verfahren angegeben, und ich finde auch in Poggendorfs Annalen [**)], einen Versuch, solches zur Anwendung zu bringen. Allein ich finde dabei verschiedenes, was ich durchaus für unzulässig halten muss, und halte mich überzeugt, dass durch solche Behandlung auch nicht einmahl ein grob genähertes Resultat erhalten werden kann. Ich habe mehrere Reihen Versuche, aber unter andern Umständen, gemacht, deren schärfere Berechnung, wie ich schon jetzt erkenne, eine ziemliche Annäherung geben werden, deren Resultat aber weit von dem in Poggendorfs Annalen verschieden ist (etwa $\frac{1}{20}$ so gross***)). Allein ich bin auf ein anderes Verfahren gekommen, welches ein viel reineres Resultat geben kann, und ich halte es für möglich, selbst die Genauigkeit des Resultats, wenn man alle nöthigen Vorkehrungen macht, so weit zu treiben, dass sie derjenigen, die durch vergleichende Beobachtungen mit Einer Nadel [erzielt wird], an die Seite gestellt werden kann, oder sie vielleicht noch überbietet. Schon jetzt geben die Versuche, die hauptsächlich Freund Weber nach meinen Angaben gemacht hat, eine Genauigkeit, worin wohl schwerlich mehr, als einige Procent Ungewissheit zurückbleiben; man wird es aber viel weiter treiben können. Es ist gewiss in zwiefacher Rücksicht sehr wichtig, dass wir hierin ins Klare kommen. Ist die Möglichkeit erst da, wenn auch unter Anwendung von einigen Vorkehrungen, die absolute Grösse des Erdmagnetismus zu bestimmen, so soll man sich dies an einer Anzahl Örter über der ganzen Erde angelegen sein lassen; reisende Beobachter führen invariable Nadeln bei sich, womit sie die Verhältnisse anderer Örter unter sich bestimmen, und indem sie von Zeit zu Zeit solche Punkte berühren, wo die absolute Intensität ausgemittelt ist, versichern sie sich der bleibenden Invariabilität ihrer Nadeln, und führen ihre Resultate auf absolutes Maass. Aber noch wichtiger ist es für künftige Jahr-

[*) S. D. Poisson, *Solution d'un problème relatif au Magnétisme terreste*, Additions à la Connaissance des tems pour 1828, Paris 1825, S. 322, Auszug in den Annales de Chimie et de Physique **30**, 1825, S. 257, deutsch in Baumgartners Zeitschrift für Physik und Math. **1**, Wien 1826, S. 117.]

[**) Ludwig Moser und Peter Riess, *Über die Messung der Intensität des tellurischen Magnetismus*, Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie **18**, 1830, S. 226.]

***) Der Unterschied erscheint noch viel greller, wenn man erwägt, daß die Größe eigentlich aus ihrem Quadrate bestimmt wird, welches also dort 400mal zu gross gefunden ist.

hunderte, in denen eben so bedeutende Änderungen in der absoluten Intensität zu erwarten sind, wie wir lange bei der Declination und Neigung kennen. Ich habe immer diese ungeheuren Änderungen, wie etwas höchst merkwürdiges betrachtet. Ohne Zweifel ist die magnetische Erdkraft nicht das Resultat von ein Paar grossen Magneten in der Nähe des Erdmittelpunkts, die nach und nach viele Meilen weit sich von ihrem Platze bewegen, sondern das Resultat aller in der Erde enthaltenen polarisirten Eisentheile, und zwar mehr derjenigen, die der Oberfläche, als der, die dem Mittelpunkte näher liegen. Allein was soll man von den ungeheuren Änderungen, die seit ein Paar Jahrhunderten Statt gefunden haben, denken? Mir hat immer diese Erscheinung eine besondere Gunst für die von CORDIER[*)] besonders hervorgehobene Hypothese zu erwecken geschienen, wonach die feste Erdrinde vergleichungsweise nur dünn ist. Natürlich können dann nur in dieser die magnetischen Kräfte ihren Sitz haben, und die allmähliche Verdickung dieser Rinde durch Erstarren vorher flüssig gewesener Schichten erklärt dann die eintretende grosse Veränderung in dem Erdmagnetismus auf das ungezwungenste, die sonst ein grosses Räthsel bleibt. Auch der Umstand, dass die sogenannten magnetischen Hauptpole der Erde in die kältesten Gegenden fallen, wo vermutlich die Erdrinde am dicksten ist, scheint darauf hinzudeuten.

Doch ich breche hier ab und bitte Sie, recht bald wieder mit einigen Zeilen zu erfreuen

Ihren ganzen eigenen

C. F. G[AUSS].

. . . .

Was in der ex post roth eingeklammerten Stelle[**)] gesagt ist, bedarf vielleicht einer Berichtigung; es ist in dem fraglichen Aufsatze nicht klar ausgesprochen, was die Einheit eigentlich bedeutet, womit die magnetische Intensität gemessen werden soll; ich vermuthe aber (ich habe jetzt nicht Zeit dies gleich genauer zu untersuchen), dass, um die dortige Zahl mit der meinigen vergleichbar zu machen, meine erst noch mit √ (doppelte Fallzeit

[*) L. CORDIER, *Essai sur la Température de l'intérieur de la Terre*, Mémoires de l'Académie des Sciences **7**, Paris 1827, S. 473, insbesondere S. 538 und 540.]

[**) Gemeint sind die oben S. 75 in Klammern gesetzten Worte, »etwa $\frac{1}{25}$ so groß« und die zugehörige Fußnote.]

in Einer Secunde in der gewählten Einheit) multiplicirt werden muss; dieser Factor ist nun nahe = 99, wonach dann mein Resultat gegen 5 mahl so gross ist, wie das dortige. Eine kleine Ungewissheit wird bei der Übersetzung immer bleiben, da die Herren RIESER und MOSER[*)] ihre Nadeln nicht gewogen haben. Eine freilich auch nur flüchtige Reduction meiner Messungen gibt, die Dichtigkeit des Wassers = 1 gesetzt,

Intensität im horizontalen Sinn 1,$^{\text{millim.}}$72 aus den Schwingungsversuchen
1, 59 aus den Versuchen nach der andern Methode.

RIESER und MOSER geben 0,13017, welches aber erst noch mit √ Dichtigkeit des Stahls multiplicirt werden muss; nehme ich diese = 7,8163, so kommt

0,364.

[4.]

GAUSS an GERLING. Göttingen, 2. April 1832.

. . . .

Ich habe seit etwa einem Monat mich recht viel mit dem Magnetismus beschäftigt, und angefangen, nicht bloss diejenigen Ideen, die ich Ihnen Weihnachten mittheilte, selbst (unter vielfachem Beistande von Freund WEBER) auszuführen, sondern alles noch viel weiter auszudehnen. Ich komme fast täglich noch auf eine neue Idee, und muss nur bedauern, dass die Ausführung, wobei anfangs bald dies bald jenes erst weitläuftig herbeigeschafft werden muss, nicht so schnell damit Schritt halten kann. Aber auch wie es jetzt steht, ist meine Erwartung weit übertroffen. Die tägliche Variation kann ich schon fast von Minute zu Minute verfolgen und wenige Bogensekunden (sage z. B. 2 oder 3) sicher sichtbar machen. Ich hoffe in allen einzelnen Momenten, nemlich Intensität, Declination, Inclination und Variation dieser drei Elemente die bisherige Schärfe weit überbieten zu können. Die Schwingungsdauer bestimme ich schon jetzt mit fast unglaublicher Schärfe. . . . .

[*) So in der Handschrift; es soll heißen RIESS und MOSER, vergl. oben S. 75 die zweite Fußnote.]

[5.]

GAUSS an ENCKE. Göttingen, 12. Mai 1832.

. . . .

Seit Anfang dieses Jahres habe ich mich sehr viel mit dem Erdmagnetismus beschäftigt, sowohl von theoretischer als praktischer Seite. In letzterer Beziehung ist es mir schon jetzt gelungen, durch Anwendung neuer Einrichtungen, die sich durch Einfachheit, Sicherheit, Schärfe — und Wohlfeilheit empfehlen — meine Erwartungen nicht bloss erfüllt, sondern weit übertroffen zu sehen; die Messungen, die sich auf die absolute Declination, deren Intensität, und die täglichen und stündlichen Variationen von beiden beziehen, erhalten eine Genauigkeit, die der der astronomischen Beobachtungen fast gleich kommt. Auch die Zurückführung der Intensität auf eine absolute Einheit denke ich zu einer vergleichungsweise grossen Schärfe zu bringen und späterhin mich auch mit der Inclination zu beschäftigen, wozu aber sehr gut gearbeitete Aufhängungsaxen (aber sonst nichts) erforderlich sein werden. Bald hoffe ich diese Dinge zu einer solchen Reife zu bringen, dass ich öffentlich etwas darüber bekannt machen kann. Einstweilen habe ich am 4. u. 5. Mai viele Aufzeichnungen der täglichen Variation gemacht; in Zukunft soll diess aber vollständiger geschehen.

Aus den Zeitungen sehe ich, dass H[err] VON HUMBOLDT aus Paris zurückgerufen sei; ist dies gegründet und ist er schon in Berlin angekommen? Ich würde dann mit Vergnügen ihm einige vorläufige Mittheilungen von jenen Beschäftigungen machen. . . . .

[6.]

GAUSS an GERLING. Göttingen, 20. Junius 1832.

. . . .

Meine Zurückführung der Intensität auf absolute Einheit, wozu ich schon mehrere, obwohl erst als vorläufig anzusehende Versuche gemacht habe, gelingen ganz unvergleichlich. Aber das von MOSER und RIESER [*)] aus der Beobachtung in Berlin berechnete Resultat ist nur $\frac{1}{3}$ des meinigen, also ganz

[*) Siehe die Fußnoten auf S. 77 und 75.]

unbrauchbar (mein Resultat bestätigt sich auch durch Versuche an Nadeln von den verschiedensten Dimensionen, obwohl kleine Nadeln wenig Genauigkeit geben können). Jener enorme Fehler hat übrigens seinen Grund hauptsächlich in einer ganz unzulässigen Berechnungsweise: nach richtigen Principien finden sich, so gut es geht, Resultate, die wenigstens Annäherungen sind und sogar mein Resultat zwischen sich haben. . . . .

[7.]

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 2. August 1832.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 2, 1910, S. 587 ff.]

. . . .

Von jeher schien mir, dass die Apparate, deren man sich für die magnetischen Bestimmungen bedient, sehr unvollkommen, und in einem schreienden Misverhältnisse gegen die Schärfe unserer astronomischen und geodätischen Messungen sind. Ich habe mir seit etwa 5 Monaten angelegen sein lassen, diesem Übelstande abzuhelfen, wobei ich gleich anfangs von einigen schon seit vielen Jahren gehabten Ideen ausging, aber freilich fast jede Woche noch auf etwas Neues gekommen bin. Gegenwärtig habe ich zwei Apparate fertig (ganz gleiche), womit absolute Declination und ihre Änderungen, Schwingungsdauer etc. mit einer Schärfe gemessen werden können, die gar nichts zu wünschen übrig lässt, angenommen für mich ein angemesseneres Local, wo kein Eisen in der Nähe ist und jeder Luftzug abgehalten ist. Beides fehlt mir in der Sternwarte und in meinem Hause, obwohl man den Einfluss davon auch nicht überschätzen darf; auch so wie es jetzt ist, überbieten, meine ich, meine Messungen alles Frühere sehr weit. Es ist hier aber eine sehr grosse Erndte zu halten, und da ich, wenn der Himmel mir Leben und Kraft erhält, nicht abgeneigt wäre, diesen Gegenständen ein eigenes Werk zu widmen, so wird es damit, da ich stets alles Eilen mit Unreifem gehasst habe, wohl nicht so ganz schnell gehen. Inzwischen habe ich die Absicht doch gleich eine Anwendung, und zwar die allerwichtigste, in einer Societätsvorlesung bekannt zu machen, nämlich die Bestimmung der absoluten Intensität des Erdmagnetismus [*)]. Ich habe schon, so wie meine Apparate sich nach und nach vervollkommneten, eine beträchtliche Anzahl vorläufiger Versuche gemacht, und die letzten werden der Wahrheit, soweit es in meinem Local möglich ist, schon sehr nahe kommen; doch habe ich erst neulich wieder neue Vervollkommnungen hinzugesetzt, nämlich Vorkehrungen, um alle Distanzmessungen dabei mit mikroskopischer Schärfe auszuführen. Auch hierbei ist mir Freund Weber durch Mittheilung seiner Hülfsmittel äusserst hilfreich gewesen.

Jene Vorlesung hoffe ich binnen einigen Monaten ausarbeiten zu können, und einen kleinen Anfang habe ich bereits damit gemacht, indem ich eine Einleitung aufgeschrieben habe, die das Wesentliche der Grundideen in einer mehr populären Darstellung entwickelt. Es scheint, dass wenige Personen hiervon bisher eine klare Vorstellung haben. Da es Sie vielleicht interessirt, diese Einleitung zu lesen, so habe ich mein Brouillon abschreiben lassen (Harding hat die Gefälligkeit gehabt), und ich lege solche Abschrift [**)] hier bei. Bei der Bestimmung, welche der Aufsatz, wozu diese Einleitung gehört, haben soll, ist es unnöthig zu bemerken, dass ich diese Mittheilung als bloss für Sie bestimmt betrachten muss. Finden Sie, mein theurer Olbers, sich aufgelegt, diesem Aufsatz Ihre Aufmerksamkeit zu schenken, und wünschen über eines oder anderes darin weitere Aufklärung, so wird es mir die grösste Freude sein, jeden Wink zu befolgen. Dieses Mal noch ein paar Worte über die Schärfe meines Apparates.

Die absolute Declination wird mit grösster Leichtigkeit erhalten. Zwei Secunden sind eine bestimmt sichtbar gemachte Grösse. Luftzug kann allerdings bedeutend grössere Anomalien hineinbringen. Die tägliche Variation kann man besonders in den Vormittagsstunden, wo sie am schnellsten ist, schon nach einigen Zeitminuten sicher erkennen.

Bei Beobachtung der Schwingungsdauer einer Nadel lässt sich eine Schärfe erreichen, die ich selbst früher für unglaublich gehalten haben würde. Die Momente, wo eine Dauer zu Ende ist, haben nie einen Fehler von $\frac{1}{10}$ Secunde, sondern stets nur einige Hunderttheile. Ich beobachte nur kleine Schwingungen, d. i. ich fange ungefähr da an, wo man sonst aufhörte, und doch schwingt meine Nadel so, dass ich nach 6 oder 8 Stunden noch die

[*) *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*, 1832, Werke V, S. 79.]

[**) Die Abschrift befindet sich nicht unter den Briefen.]

Momente mit grosser Sicherheit observire; habe ich eine neue Nadel eingehängt, deren Schwingungsdauer noch unbekannt ist, so observire ich nur einige wenige Schwingungen zu Anfang und kann dann getrost auf einige Stunden in die Stadt gehen, wo nach meiner Zurückkunft von einer Ungewissheit, wie viele Schwingungen unterdessen gemacht sind, gar keine Rede sein kann. Ich habe sogar schon zuweilen bei Nacht etwas grössere Schwingungen eingeleitet, aber nicht wie Herr Quetelet von 60°, sondern z. B. von 10°, wo ich die Nadel bei Nacht ihrem Schicksal überlassen habe, und nach dem Aufstehen am andern Morgen mit Sicherheit habe angeben können, wie viele Schwingungen unterdessen gemacht sind.

Nichts desto weniger ist der modus prior (pag. 3) der Anlage dem zweiten bei weitem nachzusetzen, und zwar deswegen, weil jener eine viel längere Zeit erfordert, während welcher die Veränderlichkeit des Erdmagnetismus sich auf das Entschiedenste bemerklich macht. Ich habe zwar auch mehrere Versuche nach dem modus prior gemacht (die nahezu dieselben Resultate geben), werde aber bei denen, die gelten sollen, mich nur auf den zweiten Modus beschränken. Vielleicht interessirt es Sie, die Resultate meiner letzten Versuche, obwohl solche immer erst als vorläufige zu betrachten sind, kennen zu lernen.

Als Einheiten angenommen:

1) das Gewicht (i. e. die Masse), die man ein Milligramm nennt,
2) den Millimeter,
3) diejenige beschleunigende Kraft, die in der Zeitsekunde einen doppelten Fall von 1 Millimeter hervorbringt (wobei also die Schwere in Göttingen = 9812 ist),

ist die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus in Göttingen nach Versuchen vom 22.—26. Juli mit

Nadel 1	= 1,7762
mit Nadel A	= 1,7780
im Mittel	1,7771 *),

wovon also die beiden einzelnen Resultate nicht viel mehr als den 2000^ten Theil

*) Die Zahl bleibt dieselbe, wenn man respective das Gramm und den Meter als Einheit ansieht.

abweichen. Die Veränderung der Intensität während eines Tages ist öfter 4 mahl so gross.

Ein früherer Versuch, mit fast gleichen Attentionen gemacht, gab

1,7650

aber in einem anderen Local, wo eben die Localität sehr gut ½ p[ro]c[ent] Unterschied leicht erklärt, da überall Eisen nicht zu vermeiden war. Ich werde demnächst auch das Verhältniss der Intensität am ersteren Local zu der ganz im Freien zu bestimmen versuchen.

Noch frühere Versuche, wobei aber manche Cautelen*) noch nicht genug berücksichtigt waren, mit anderen Nadeln und in andern Localen gaben

am	21. Mai	1,788
	24. Mai	1,777
	4. Juni	1,779.

Eine Menge von Untersuchungen habe ich mir noch vorgesetzt, die aber einen grossen Aufwand von Zeit kosten werden, z. B. über den Einfluss der Temperatur auf die Nadeln, über das allmähliche Abnehmen der magnetischen Kraft in den Nadeln, wenn sie anfangs so stark wie möglich magnetisirt sind und dann theils mit, theils ohne Armatur aufbewahrt werden, über das Verhalten anderer Körper, ganz besonders des Argentans pp. Bei allen diesen Geschäften wird mir die Hülfe des trefflichen Weber äusserst schätzbar sein. — Vielleicht wird unser Gouvernement, wenn die Geldklemme nicht zu gross ist, demnächst nicht abgeneigt sein, ein eigenes magnetisches Häuschen, worin gar kein Eisen ist, zu errichten. Ich werde aber nicht eher darauf antragen, als bis alle meine Vorarbeiten gehörig reif sind.

Noch durch einen Umstand empfehlen sich meine Einrichtungen. Meine beiden ganz gleichen Apparate, die für alle Fragen, bloss die Inclination ausgenommen, zureichen und die oben bezeichnete Schärfe geben, kosten inclusive von 6 Stahlstäben, jeder fast 1 ℔ schwer, zusammen nur 81 ₰; Gambeysche Apparate für absolute Declination, tägliche Variation, Schwingungsdauer, während sie alles nur sehr unvollkommen leisten, würden vielleicht zusammen, jeder einfach, fast 20mahl so viel kosten. Ich werde zunächst

*) Z. B. auch wegen Torsion der Fäden.

noch eine Anzahl Stäbe aus Englischem Gussstahl verfertigen lassen, die, wie meine Erfahrungen zeigen, nicht bloss stärkern Magnetismus annehmen, sondern ihn auch zäher an sich halten, als Nadeln aus Cementstahl. . . . .

[8.]

Gauss an Encke. Göttingen, 18. August 1832.

. . . .

Meine Beschäftigungen mit dem Magnetismus haben seit meinem letzten Briefe fortgedauert; meine Apparate, die ich in Duplo fertigen zu lassen für nöthig gehalten habe, sind in sehr vielen Stücken weiter vervollkommnet, und es bleibt jetzt eigentlich gar nichts weiter zu wünschen übrig, als ein gegen Eisennähe und Luftzug ganz geschütztes Local. Mein Hauptaugenmerk ist noch auf die absolute Intensität gerichtet, und ich habe die Absicht, über diesen Theil der Untersuchungen zuerst etwas öffentlich zu sagen, wahrscheinlich in einer Societätsvorlesung. Binnen einigen Monaten wird sich vielleicht die Ausarbeitung, mit der ich bereits einen kleinen Anfang gemacht habe, vollenden lassen. Bestimmt kann ich aber darüber nichts sagen. Ich hasse alles übereilte Publiciren und wünsche immer nur reifes zu geben, und da trifft es sich denn nicht selten, dass wegen dieses oder jenen Umstandes, der, nachdem er erledigt ist, wenige Zeilen füllt, ein wochen- oder monatelanger Aufenthalt entsteht. In dem bisherigen Vortrag der Lehre vom Magnetismus findet sich aber so viel Vages, Nichtssagendes, Unlogisches (auch selbst bei Biot[*]), dass hier erst ganz von vorne an aufgebauet werden muss. Es gehört dahin der Begriff der Pole. Dann der schreiende Widerspruch, dass man einmahl annimmt, in jedem Theilchen einer Nadel sei eben so viel nördlicher als südlicher Magnetismus, und nachher doch immer so spricht als sei an einem Ende der Nadel bloss der Eine am andern der andere Magnetismus. Mich hat diese Verworrenheit bei Biot im vorigen Herbst, als ich anfing mich mit diesen Dingen zu beschäftigen, erst lange gequält. Ich konnte mit seinem freien Magnetismus gar keinen Sinn verbinden. Durch die Beziehung auf die Electricität hat Biot die Sache nur verwirrter gemacht. Ich bin nun freilich

[*] Gemeint ist wohl der dritte Band von J. B. Biot, *Traité de Physique expérimentale et mathématique*, 4 vol, Paris 1816.]

in diesen Dingen schon lange zu völliger Klarheit gekommen, allein es gehören dazu mehrere neue höchst interessante Lehrsätze die sehr tief liegen, deren Entwicklung die Grenzen der mir zunächst vorgesetzten Abhandlung weit, sehr weit überschreiten würden, und die ich daher in dieser nur mit wenigen Zeilen anzudeuten haben werde. Allein es ist von jeher mein gewissenhaft befolgter Grundsatz gewesen, solche Andeutungen, die aufmerksame Leser in jeder meiner Schriften in grosser Menge finden (sehen Sie z. B. meine *Disquis. Arithmet.* pag. 593 [*)]) stets dann erst zu machen, wenn ich den Gegenstand für mich selbst ganz abgemacht habe, und so werden Sie übersehen, dass der oben erwähnte Fall öfters vorkommen kann, wo um mit gutem Gewissen Eine Zeile schreiben zu können, eine Monate erfordernde Meditation erfordert wird. Diese Art zu arbeiten kann zuweilen die Folge haben, und hat sie zuweilen gehabt, dass auf Dinge, die ich schon seit vielen Jahren besessen habe, später ihrerseits auch andere kommen, und in der Bekanntmachung mir zuvorkommen; sie wird vielleicht auch die Folge haben können, dass manches einmahl mit mir ganz untergeht, und ich weiss, dass einige meiner Freunde wünschen, dass ich weniger in diesem Geiste arbeiten möchte: das wird aber nie geschehen; ich kann einmahl an lückenhaftem keine rechte Freude haben, und eine Arbeit, an der ich keine Freude habe, ist mir nur eine Qual. Möge auch jeder in dem Geiste arbeiten, der ihm am meisten zusagt. Was übrigens den gegenwärtigen speciellen Fall betrifft, so hoffe ich, dass sich bei der Ausarbeitung nicht so sehr viel finden wird, was noch lange aufhält.

Nach Vollendung dieser ersten Arbeit bin ich nicht abgeneigt, an ein ausführlicheres Werk in deutscher Sprache über alle mit meinen Apparaten anzustellenden Beobachtungen zu denken, worin denn auch diese Apparate selbst vollständig beschrieben werden würden, was in der That allein schon ein kleines Werkchen nöthig macht und von jener Abhandlung ausgeschlossen bleiben muss, zumahl da es ohne Zeichnungen gar nicht geschehen könnte. Alle Beobachtungen dieser Art gehören übrigens zu den reizendsten, die ich kenne, sie übertreffen in dieser Beziehung auch die astronomischen, denen sie an Praecision fast gleichkommen, ja in einiger Rücksicht noch übertreffen. Bei der Winkelmessung kann man 2″ entschieden sichtbar machen, und es ist

[*) Werke I, S. 412, 413; es handelt sich dort um die Teilung der Lemniskate.]

hauptsächlich nur der schwer ganz zu vermeidende Luftzug, welcher hindert, dass man von dieser Genauigkeit entfernt bleibt, was indessen durch Vervielfältigung wieder ersetzt werden kann. Bei allen Zeitansetzungen in Beziehung auf Schwingungen hingegen ist die Schärfe entschieden weit grösser, als an Beobachtungen am Pass[age] Instr[ument]. Es handelt sich immer nur von Hunderttheilen der Secunde, nie, bei einiger Einübung, von Zehntheilen. Ich würde selbst diese Schärfe für unglaublich halten, wenn ich sie nicht seit Monaten, täglich vor mir sähe. Ich glaube, Sie würden es nicht bereuen, um dies selbst zu sehen, eine Reise nach Göttingen gemacht zu haben, was man ja jetzt in 40 Stunden kann. Wie sehr Sie mich durch einen solchen Besuch erfreuen würden, brauche ich Ihnen nicht zu sagen. Mit dem Wunsche, bald wieder durch einige Zeilen von Ihnen erfreut zu werden stets

Ihr freundschaftlich ergebenster

C. F. Gauss.

[9.]

Gauss an Encke. Göttingen, 20. August 1833.

. . . .

Unsere grosse galvanische Kette (6000—7000 Fuss Draht) ist schon lange ungestört bestehend und schon oft haben wir mit bestem Erfolg ganze kleine Phrasen einander telegraphisch signalisirt. Ganz besonders merkwürdig und anfangs für mich überraschend (obwohl es nach richtiger Theorie hätte vorhergesehen werden können) war der Umstand, dass es dabei gar keiner grossen Platten oder starken Säuren bedarf; eine Kupfer- und Zinkplatte, etwa wie ein preussischer Thaler gross, und Tuchscheibe mit reinem Brunnenwasser genetzt, ja sogar destillirtes Wasser ist vollkommen hinreichend, ja sogar für die bisherigen Einrichtungen (die ursprünglich nicht diesen Zweck hatten) noch zu stark; die grösste Platte (in sofern man nur Ein Paar nimmt) und starke Säure würde nur etwa eine doppelt so grosse Wirkung geben. . . . . .

[10.]

Gauss an Encke. Göttingen, 21. März 1834.

. . . .

Gestern und heute bin ich zum ersten male in die Betrachtung der stündlichen Variationen eingetreten. Meistens ist (während der 44 Stunden) von 10 zu 10 Minuten aufgezeichnet, so jedoch dass jeder Ansatz ein Mittel aus den 5 nächsten runden Minuten ist; z. B. für $8^h 50'$ ist beobachtet bei $8^h 48' 0''$, $49' 0''$, $50' 0''$, $51' 0''$, $52' 0''$ an einer Uhr, die genau die M. Z. zeigt. Der Verlauf am ersten Tage ist eben der gewöhnliche gewesen, allein in der vorigen Nacht von 3^h bis 8^h haben grosse Anomalien Statt gefunden, auf deren Parallelismus mit anderen Beobb. ich sehr neugierig bin. Es haben unser 5 die Wachen geteilt und in diesem Augenblick, 21. März 11^h Abends, ist noch ein Beobachter an der Arbeit. Reisete Hr. Höfer einen Tag später, so würde ich ihm sogleich die Abschrift mitschicken, die nun später an H[errn] Poggendorff eingeschickt werden wird.

Eine vorläufige Intensitätsbestimmung (mehreres Zubehör dazu ist erst vor kurzem fertig geworden) in diesen Tagen hat 1,769 gegeben, fällt also zwischen die älteren Bestimmungen.

Der Gebrauch grosser Nadeln hat etwas überaus angenehmes. Die Amplitude der Schwingung nimmt so langsam ab, dass sie erst nach 2 oder $2\frac{1}{2}$ Stunden auf die Hälfte kommt.

Die Scala misst einen (ganzen) Bogen von $7\frac{1}{2}$ Grad; fängt man also mit so kleinen Schwingungen an, die noch innerhalb der Scala fallen, so sind die Schwingungen selbst nach 12 Stunden noch gross genug, um sicher beobachtet zu werden. Hänge ich eine neue Nadel auf von noch unbekannter Schwingungsdauer, so ist die Beobachtung von einem halben Dutzend Schwingungen zureichend, um nach 4 oder 5 Stunden, über die Zahl der verflossenen Schwingungen nicht ungewiss zu sein. Die gegenwärtig aufgehängte Nadel braucht $21''$, sie ist aber noch keine der stärksten, die kräftigste würde circa $19''$ gebrauchen.

Eine Hauptschwierigkeit ist sich gute Spiegel zu verschaffen. Ein von Repsold verfertigter fand sich ganz unbrauchbar. Es ist jetzt ein Spiegel 50 mm hoch, 75 breit eingesetzt, den wir durch Zerschneidung und Foliirung

eines Troughtonschen Glasdachs gewonnen haben. Dieser ist recht gut, es ist aber ausserordentlich schwer, gute Spiegel von solcher Grösse zu machen. Ein Künstler in Braunschweig beschäftigt sich jetzt mit dieser Aufgabe. Ein Paar kleinere, die er als Probe hierher gebracht hat, werde ich morgen versuchen. Der, wie gesagt ganz misrathene von Repsold hatte nur 40 mm bis 60 mm. Noch kleinere, aber für meinen Zweck viel zu kleine, haben wir früher aus München erhalten, die sehr gut sind, allein die Schwierigkeit wächst mit der Grösse. . . . .

[11.]

Gauss an Encke. Göttingen, 14. Juni 1834.

Für die gewogentliche Mittheilung der Berliner magnetischen Beobachtungen vom 21. und 22. März habe ich Ihnen, mein theuerster Freund, noch meinen verbindlichsten Dank abzustatten. Man erkennt darin, wie Sie auch selbst schon bemerkt haben, die Spur der in den Frühstunden des zweiten Tages hier wahrgenommenen Anomalien, aber auch zugleich die Notwendigkeit viel engerer Zwischenzeiten, wenn man dergleichen Anomalien und ihren Parallelismus an verschiedenen Orten vollkommen übersehen will. Die Zahlen der hiesigen Beobachtungen würden Ihnen gern zu Dienst stehen; allein ihre öffentliche Bekanntmachung würde wohl nur in dem Fall von Interesse sein können, wenn in irgend einem dritten Orte viel detaillirtere Beobachtungen gemacht sind, als in Berlin.

Am 4. und 5. Mai sind hier die Beobachtungen noch viel detaillirter gemacht als das erste mahl, nämlich durchweg von 10 zu 10 Minuten, ja wenigstens zur Hälfte noch enger, nämlich von 5 zu 5 Min. und bei besonderen Vorkommnissen anhaltend von Minute zu Minute. Beim Beobachten von 10 zu 10' würden also die Aufzeichnungen so stehen

Schema A.	$8^h\,57'\,49''$ / $58\;10$	Mittel . . . gilt für	$8^h\,58'$	Mittel aus allen als für $9^h\,0'$ gültig betrachtet.
	$58\;49$ / $59\;10$	Mittel	$8\;59$	
	$59\;49$ / $9\;\;0\;10$	Mittel	$9\;\;0$	
	$0\;49$ / $1\;10$	Mittel	$9\;\;1$	
	$1\;49$ / $2\;10$	Mittel	$9\;\;2$	
	$9\;\;2\;49$			
	etc. etc.			

Bei Aufzeichnungen von 5 zu 5 Min. ist wohl mit halben Minuten beobachtet, namentlich von H[errn] LISTING und H[errn] Prof. WEBER. Z. B.

Schema B.	$10^h\,58'\,49''$ / $59\;10$	. . . .	$10^h\,59'\;\;0''$
	$59\;19$ / $59\;40$	. . . .	$10\;\;59\;\;30$
	$59\;49$ / $11\;\;0\;10$	. . . .	$11\;\;0\;\;0$
	$0\;19$ / $0\;40$	. . . .	$11\;\;0\;\;30$
	$0\;49$ / $1\;10$	. . . .	$11\;\;1\;\;0$

Ich selbst habe gewöhnlich nur von 10 zu 10' nach A, zuweilen von 5 zu 5' theils nach A theils nach B beobachtet.

In diesen Tagen, besonders am zweiten (5. Mai), haben sich nun merkwürdige Anomalien gezeigt, von denen man bei Aufzeichnungen von Stunde zu Stunde kaum eine Idee bekommen haben würde. Ich muss es daher als etwas sehr interessantes betrachten, dass diesmahl correspondirende Beobachtungen mit beinahe eben so viel Detail da sind. H[err] SARTORIUS hat nemlich in Waltershausen unter Beistand von zwei Gehülfen an einem zwar kleineren

aber dem hiesigen ähnlichen Apparat beobachtet, und die Mittel von 10 zu 10', wie sie aus dem Schema A sich ergeben, mir mitgetheilt. Der Beobachtungsort zwischen Meinungen und Münnerstadt liegt ein paar Zeit-Minuten östlich von Göttingen.

H[err] SARTORIUS hat in den ersten Stunden versäumt, wieder nach der Marke zu sehen, welche er dann um $10^h\,40'$ zu seinem Schrecken bedeutend verstellt fand. Von da an hat er jede Stunde mehreremahle nachgesehen und nöthigenfalls nachgeholfen. Die ersten Beobachtungen sind mithin zu cassieren; ich habe sie jedoch punctirt mitgezeichnet.

Sie werden nun gewiss mit freudiger Ueberraschung die graphische Darstellung der Göttinger und Waltershauser Beobachtungen (jene schwarz, diese roth) nach gleichem Maassstabe gezeichnet in dem anliegenden Blatt[*)], untere Hälfte, betrachten. Die grossen schnell wechselnden Anomalien erkennt man alle wieder und selbst an den meisten kleinern findet man die kenntliche Spur. Ja ich halte für wahrscheinlich, dass die Harmonie noch frappanter ausfallen würde, wenn die Waltershauser Beobachtungen in den kritischen Stunden auch anstatt von 10 zu 10 Min. (wo sich kleinere Krausheiten verwischen) von 5 zu 5 Minuten gemacht wären. Ich habe H[errn] SARTORIUS aufgefordert mir noch die Resultate für jede einzelne Minute, die vorhanden sind, anstatt der extrahirten Mittel, zu schicken, und hoffe, dass sich dann auch die Spur der hier mit entschiedenster Gewissheit den 5. Mai Morgens 8^h—$8^h\,20'$ bemerkten Einsenkung finden wird. Ich bemerke nur noch, dass die Göttinger Zahlen nicht nach Mitteln aus je 5 Werthen, sondern direkt nach den einzelnen vorhandenen Minuten zuerst in eine Zeichnung mit 5 mahl grösserem Maassstabe, und danach nach dem Augenmaasse verjüngt (in die correspondirenden Quadrate) eingetragen sind.

Zur Vergleichung habe ich in der oberen Hälfte des Blattes nun auch noch die hiesigen Beobachtungen vom 21. 22. März nach demselben Maassstabe gezeichnet und darunter die mir von Ihnen mitgetheilten Berliner Zahlen, ohne jedoch letztere Punkte durch Linien zu verbinden, wobei zu viel Willkürlichkeit sich hätte einmischen müssen.

Ich glaube, dass durch die erwähnten Thatsachen sich ganz unzweifelbar

[*) Das Blatt wurde an A. VON HUMBOLDT weitergegeben, vergl. S. 90 unten.]

herausstellt, dass nicht bloss die grösseren Ausschweifungen, sondern selbst die kleineren und in kurzen Fristen wechselnden Fluctuationen nicht local, sondern durch Kräfte, welche bis in sehr grosse Entfernungen hinaus wirken, hervorgebracht sind, und das Interesse für die gleichzeitig an vielen Orten anzustellenden Beobachtungen wird mithin umsomehr gesteigert. Am 21. u. 22. Juni soll hier wieder fleissig beobachtet werden, obwohl ich dabei den Abgang des H[errn] Dr. Weber schmerzlich vermissen werde. H[err] Listing wird wahrscheinlich diesmahl noch theilnehmen können; auch ein anderer Zuhörer von mir hat sich bisher einzuüben versucht. H[err] Hofr. Harding hat solches aber noch zu sehr versäumt, um diesmahl schon auf seinen Beistand zählen zu können.

Unsre grosse galvanische Kette ist seit 6 Wochen wieder ganz in Ordnung, Schumacher hat sie noch spielen sehen. Eine daneben gehängte Glasglocke tönen zu machen, einen daneben gestellten auf etwas schmaler Basis stehenden Körper umzuwerfen, einen Wecker auszulösen u. dergl., ist ganz leicht[*)]. Der Multiplicator hat 200 Umwindungen, und die ganze Drahtlänge der Kette wird gegen 9000 pariser Fuss sein. Dennoch ist die Wirkung noch zu stark für alphabetische Telegraphie, selbst wenn man nur Ein Plattenpaar wie 1 pr[eussischer] Thaler gross und reines Brunnenwasser nimmt, was anfangs Bewunderung erregt, aber doch ganz in der Ordnung ist.

Eine recht accurate Wiederholung der Intensitätsbestimmung hoffe ich nun bald vornehmen zu können. Ich muss dann nur einmahl anhaltend 4—5 Tage ganz dabei bleiben können, und leider ist meine Zeit durch mancherlei Geschäfte sehr zersplittert.

Die Stäbe, in Uslar bestellt, sind nunmehr alle fertig, obwohl noch nicht hier und noch nicht gehärtet. Die 8 grossen (jeder à 25 ℔) sind aber hier und schon gehärtet und gestrichen. Zusammengesetzt werden sie ein schönes Streichmittel bilden.

Herrn von Humboldt bitte ich unter meiner gehorsamsten Empfehlung die graphische Darstellung mitzutheilen, wobei ich nur zu entschuldigen bitte, dass sie nicht schön ist. Ich hatte sie zunächst bloss für meinen eigenen Gebrauch gezeichnet, glaubte aber, dass es Ihnen interessant sein würde, davon

[*) Dieser Satz steht, mit roter Tinte geschrieben, am Rande des Briefes.]

Kenntniss zu nehmen, und die Zeit fehlte, um eine saubere Zeichnung anzufertigen. Finden Sie es angemessen, so können Sie auch der K. Akademie von dem Inhalt dieses Briefes, was Sie wollen, communiciren.

Schumacher zeigt mir an, dass Oerstedt die Absicht habe, im Laufe des Sommers, vielleicht in Gesellschaft von Hansteen auch hieher zu kommen. Schumacher hat hier für sich einstweilen einen Apparat wie der kleinere (mit 1 ℔diger Nadel) bestellt; ein anderer von derselben Dimension wie der hiesige grosse ist vor einigen Tagen für Leipzig fertig geworden, und bereits dahin abgeschickt. Wenn ich H[errn] Weber recht verstanden habe, ist auch einer für Dresden bestellt.

Ich muss in Beziehung auf die Zeichnungen noch bemerken, dass sie überall nur nach der nominellen Zeit (Uhrzeit) gemacht sind. In Göttingen war dies auf ein Paar Secunden genau mittlere Zeit; in Waltershausen war die Uhr etwa 1—2 Minuten voraus, was mit dem Meridianunterschied zusammen eine Verschiebung von etwa 3—4 Minuten nöthig machen würde, um die dortigen Beobachtungen den Göttinger gleichzeitig zu machen. Mir deucht, dass man dieses selbst in der Zeichnung an den hervortretenden Stellen wieder erkennt. Ich möchte behaupten, dass

> wenn in Waltershausen an einem eben so feinen Apparat beobachtet wäre, wie der hiesige ist (an dem dortigen entspricht 1 Scalentheil oder Millimeter 52″ 5, also $\frac{5}{2}$ mal so viel wie hier), und die Aufzeichnungen in den letzten 6 Stunden von Minute zu Minute gemacht wären, man daraus den Meridianunterschied bis auf einen kleinen Bruchtheil einer Minute würde ableiten können, vorausgesetzt, dass die dabei thätigen Kräfte den hiebei in Frage kommenden Raum in unmerklicher Zeit durchdringen.

Ob diese Voraussetzung wahr ist oder nicht, ist freilich noch unbekannt; allein ich lebe der Hoffnung, dass wenn vielleicht in nicht langer Zeit ähnliche Etablissements wie das hiesige in Altona, Copenhagen, Christiania, Berlin und Russland (vielleicht auch Nord-Amerika) bestehen, wir über diese transscendent-interessante Frage bald ins Reine kommen werden.

Erhalten Sie Ihr freundschaftliches Andenken

Ihrem treu ergebenen

Göttingen, 14. Juni 1834. C. F. Gauss.

P. S. Damit Sie mich nicht missverstehen, muss ich noch eine Bemerkung beifügen. Ich erwarte gar nicht, dass die Waltershauser Beobachtungen, wären sie ebenso detaillirt wie die hiesigen, genau die Copie von letzteren darbieten würden, sondern finde vielmehr sehr natürlich, wenn die Wirkungen, je entfernter vom eigentlichen Heerd (den wir doch der Wahrscheinlichkeit nach weit im Norden von Göttingen zu suchen haben) sich desto mehr verflachen. Die Zukunft wird uns darüber schon Licht geben.

[12.]

Gauss an Encke. Göttingen, 8. August 1834.

Beigehend übersende ich Ihnen, mein theuerster Freund, die am 6. und 7. d. hier gemachten Magnetischen Beobachtungen, die für sich selbst sprechen werden, und von denen Sie beliebigen Gebrauch machen können. Mir selbst hat mein leider noch fortdauerndes Uebelbefinden eine unmittelbare Theilnahme diesmahl nicht erlaubt, ich habe mich darauf beschränkt, zuweilen einen kleinen Satz genau gleichzeitig correspondirender Beobachtungen in der Sternwarte mit der 25 pfündigen Nadel zu machen, welche, so wie ähnliche an früheren Tagen, eine höchst merkwürdige Harmonie zeigen und beweisen, dass auch die kleinen Sprünge innerhalb weniger Minuten, die uns früher öfters beunruhigt haben, durchaus reell sind, obwohl erst künftig Vergleichung mit scharfen entferntern Beobachtungen ausweisen wird, ob auch diese sehr weit entlegene Ursachen haben. Jedenfalls sind die Intervalle von 5 zu 5 Minuten keinesweges zu enge, sondern, zu Zeiten starker oder sprudelnder Anomalien eher noch zu gross. Allein ohne ein sehr zahlreiches Personal würde es nicht wohl thunlich sein, 44 Stunden hindurch jede Minute aufzuzeichnen, allein wenn die scharfen Apparate erst noch mehr verbreitet sein werden, möchte es nützlich sein, zuweilen solche correspondirende Beobachtungen mit sehr engen Intervallen für eine kleine Anzahl von Stunden zu verabreden. Wir haben hier schon zuweilen solche Aufzeichnungen gleichzeitig an beiden Apparaten, 5 bis 6 Resultate in der Minute, gemacht; versuchsweise sogar einmal dadurch die Uhren verglichen, was sich hinterdrein auf 12 Sekunden richtig fand. Ich bin geneigt zu glauben, dass durch die Erscheinung am 7. August

$7\frac{3}{4}$ Uhr Abends der Längenunterschied zwischen Göttingen und anderen Orten wohl viel genauer als durch Monds oder Trabanten Finsternisse bestimmt werden könnte. Webers Aufzeichnungen für $7^h\,40'$ gaben immer für jede Schwingungsdauer (20″) zwei Scalentheile Wachsthum.

Alle hiesigen Theilnehmer erwarten nun mit Verlangen die correspondirenden Beobachtungen, besonders von Ihnen. Der Leipziger Apparat scheint am 22. Junius noch nicht hinlänglich gegen den Luftzug geschützt gewesen zu sein, hoffentlich diesmahl besser. Sartorius und Listing werden in München beobachtet haben. . . . .

[13.]

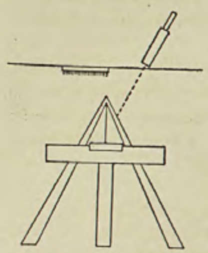
Gauss an Encke. Göttingen, 14. September 1834.

. . . .

Es sind schon mehreremale durch meinen Sohn und Dr. Goldschmidt gleichzeitige Beobachtungen in der Sternwarte und dem M[agnetischen] O[bservatorium] gemacht, die eine bewundernswürdige Uebereinstimmung geben, selbst in den Zehnteln der Scalentheile. Versuchsweise wurden dadurch einmahl die Uhren verglichen, und obwohl durchaus keine grösseren Anomalien der magn[etischen] Decl[ination] dabei Statt gefunden hatten, fand sich doch das Resultat bei hinterdrein gemachter Vergleichung durch den Chronometer auf wenige Zeitsecunden richtig. Also eine neue Methode der Längenbestimmung.

Es sind hier bereits einige Versuche mit den Beobachtungen gemacht, wo ein 4 ℔ diger Stab durch ein kleines an einem Ende aufgelegtes Gewicht horizontal gemacht wurde und nachher, nach Umkehrung der Pole, am anderen Ende. Also die Coulombsche Methode, unter Anwendung des Princips, die Horizontalstellung durch Spiegel, Scale und Fernrohr zu ermitteln.

Das Fernrohr in der oberen Etage, die Scale an der Decke. Eine vollständige Beschreibung würde für einen Brief zu weitläuftig sein, und die Entwicklung mehrerer dabei zu berücksichtigenden Momente erfordern. Aber einige Idee wird umstehende Figur geben. Dieser Versuch ist gar nicht in der Absicht gemacht, die Inclination selbst zu bestimmen, da das Local im phys. Cabinet dazu gar nicht taugt, indem Eisen und andere Magnetstäbe in der Nähe waren, daher ich auch das Resultat noch gar nicht berechnet habe,



sondern bloss zunächst zu prüfen, wie genau auf diese Weise die Einstellung beobachtet werden kann. Dieser Versuch ist sehr befriedigend ausgefallen; man wird gewiss die Entfernung der beiden Auflagestellen auf weniger als $\frac{1}{1000}$ bestimmen können. Ich bin daher überzeugt, dass durch diese Methode die Inclination genauer als mit irgend einem Inclinatorium bestimmt werden kann, und in Zukunft werden wir gewiss diese Operation im M[agnetischen] O[bservatorium] ausführen. Wenn H[err] v[on] H[umboldt] behauptet, Biot habe die Methode unbrauchbar gefunden, so vermuthe ich, dass jener solche mit einer anderen Methode verwechselt hat, denn Biot selbst urtheilt schon in seiner Physik [*)] III, p. 35, dass sie die genaueste von allen sei. Hätte aber Biot ein anderes Urtheil später ausgesprochen, so würde ich vorerst daraus weiter nichts schliessen, als dass er ein schlechter Beobachter sein müsse. . . . .

[14.]

Gauss an Encke. Göttingen, 13. Oktober 1834.

. . . .

Wenn Sie die 4 Suiten zeichnen, was auf dem carrirten Papier sehr schnell geht, werden Sie bemerken, dass der Gang an allen vier Orten derselbe ist, ohne eine erhebliche Störung. Inzwischen bemerkt man doch einige obwohl sehr kleine Störungen, die umso interessanter sind, da bei denselben die Gleichheit an allen vier Orten und mit Rücksicht auf den Meridianunterschied unverkennbar ist. Besonders die kleine Vertiefung in der Nacht, die für Göttingen etwa $2^h\,50'$, für Braunschweig $2^h\,52\frac{1}{2}'$, für Leipzig $3^h\,0'$ und Berlin $3^h\,5'$ eingetreten ist; auch das gleichzeitige steile Herabgehen am ersten Vormittage um 11^h ist frappant. Endlich hat meine Aufmerksamkeit erregt die

[*) Siehe die Fußnote oben S. 83.]

Ausschweifung an demselben Vormittag $8^h\,40'$ im M[agnetischen] O[bservatorium], wobei ich gerade correspondirend beobachtete und bewunderungswürdig genau dieselbe Figur erhielt; die Figur in Berlin ist ziemlich ähnlich, während in Leipzig sich nur eine schwache Andeutung zeigt.

Auf Einladung von Weber hat mein Sohn in mehreren verabredeten Stunden am 1. u. 2. Oktober beobachtet; hier war das Glück günstiger. Besonders am 1. Oktober Abends $8-10^h$ waren überaus grosse Anomalien, die ich in der Sternwarte ganz übereinstimmend hatte. Weber wird wahrscheinlich in diesen Tagen zurückkommen und die Leipziger Beobachtungen mitbringen, auf die ich sehr neugierig bin.

Die Beobachtungen vom 23. 24. September zeigen aufs neue wie nothwendig und wichtig es ist, in kleinen Zeitintervallen zu beobachten. Da jedoch besonders an den Orten, wo nicht zahlreiche Gehilfen sind, solche Beobachtungen 44 Stunden, und 8 mahl im Jahre zu machen, gar zu ermüdend ist, so ist es wohl am besten, künftig eine andere Terminbestimmung zu machen, und die bisherigen ganz fahren zu lassen. Ohnehin können die mit Gambeyschen Apparaten und in grossen Zeitintervallen gemachten, für unsere Zwecke als ziemlich unnütz betrachtet werden. Ich dächte 24 Stunden und 6 mahl im Jahre wäre genug, und würden gewiss, wenn auch nicht jedesmal doch oft genug, interessante Erscheinungen zu erwarten sein. Nach allen bisherigen Erfahrungen kommen grosse Anomalien mehr bei Nacht vor; um also solche nicht zu zerschneiden, würde am rathsamsten sein, von einem Mittag bis zum folgenden zu beobachten; ausserdem hat dies den Vorteil, dass das beschwerliche Beleuchtungs Arrangement nur einmahl getroffen zu werden braucht. Sobald Weber zurück ist, werden wir das Nöthige deshalb concertiren, und Ihnen anzeigen. Auch Prof. Rosenberger wünscht in Halle Theil zu nehmen, und wird in Kurzem hierher kommen, um die Beobachtungsart einzulernen.

. . . .

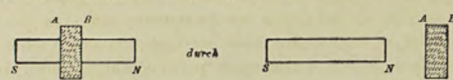
Durch einen dichten Kasten hat meine 25 pfündige Nadel noch bedeutend gewonnen. Ich werde bald scharfe Bestimmungen zur Ausmittlung des Temperatureinflusses machen. Einen Multiplicator für die grosse Nadel von 250—300 Umwindungen lasse ich jetzt anfertigen. . . . .

[15.]

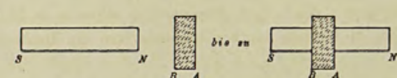
Gauss an Gerling. Göttingen, 4. December 1834.

. . . .

Einer der früheren Apparate von 1832 (einpfündige Nadel) ist jetzt im Phys. Kabinet aufgestellt, nebst dem Multiplicator von 68 Windungen, 300 Fuss Drahtlänge. Der Apparat im M[agnetischen] O[bservatorium] hat einen Multiplicator von 200 Windungen, 1100 Fuss Drahtlänge. Seit Julius habe ich in der Sternwarte eine 25pfündige Nadel aufgehängt, woran die Beobb. eine bewundernswürdige Harmonie geben; seit 6 Wochen hat auch diese Nadel ihren Multiplicator von 270 Windungen, 2700 Fuss Drahtlänge. Alle drei Apparate sind in Einer galvanischen Kette verbunden; ganze Drahtlänge die Multiplicatoren mitgerechnet 11000—12000 Fuss. Die Versuche damit öffnen ein ganz neues Feld zu Resultaten in scharfen quantitativen Verhältnissen. Die Unmessbarkeit der Zeit, in der der Strom durchlaufen wird, ist bereits oft constatirt; wir vergleichen die Uhren dadurch auf einen kleinen Bruch der Secunde genau. Die Stärke des Stroms ist an allen Stellen dieselbe, ein höchst wichtiges Resultat, dessen Zulässigkeit während Regens jedoch erst noch geprüft werden wird. Am allerinteressantesten sind mir die Inductionsversuche, wozu eine Rolle mit 1026 Drahtumwindungen da ist (die ich vielleicht voriges Jahr Ihnen schon gezeigt habe). Ein Wechsel von



dann



den man in 1″ bis 2″ machen kann, bringt einen galvanischen Strom in die mit den Enden des Rollendrahtes verbundene Kette, der, wenn er durch die ganze Kette geht, eine Bewegung von 11 Scalentheilen hervorbringt; und da mit dem Commutator (alias Gyrotrop) die entgegengesetzte Bewegung der Rolle zu gleichem Strom verwandt werden kann, so bringt man in kurzer Zeit die

ganze Scale aus dem Felde. Am Apparat der 4 pf. Nadel des M[agnetischen] O[bservatoriums] beträgt die Wirkung desselben Manövers $2\frac{1}{2}$ mahl so viel. Diese Versuche, womit ich jetzt beschäftigt bin, sind um so interessanter, da sie sehr scharfe Resultate zu geben fähig sind, was bei rein galvanischen, wegen der Veränderlichkeit der electromotorischen Kraft und des Widerstandes nur bedingungsweise der Fall ist. Doch habe ich auch in Beziehung auf letztere schon überaus interessante Resultate gefunden. Ein Commutator von einer anderen Einrichtung ist jetzt bei Meierstein in Bestellung gegeben und wird in Kürze fertig sein. Mit diesen und einigen andern Abänderungen hoffe ich binnen Einer Secunde zwei vollständige Wechsel machen und dadurch die betreffenden Zahlen mit äusserster Schärfe bestimmen zu können.

. . . .

[16.]

Gauss an Olbers. [Göttingen, Februar 1835*)].

[Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke, II, 2, S. 617.]

. . . . Ueber das, was seit Juli 1834 hier Neues hinzugekommen, werde ich vielleicht bald eine Notiz in den G. A.[**] geben. Die 25pfündige Nadel in der Sternwarte, mit ihrem Multiplicator von 270 Windungen unter 2700 Fuss Drahtlänge, in der grossen bis zum phys. Cabinet gehenden Kette, worin der Strom eine Drahtlänge von fast $\frac{1}{2}$ Meile zu durchlaufen hat, bietet zu vielen interessanten Versuchen Gelegenheit, die noch auf lange Zeit Beschäftigung geben, und noch umfassendere geben könnten, wenn die Geldmittel nicht so beschränkt wären! Ein Versuch gehört aber zu den schönsten, die in diesem Fach je gemacht sind, und wird wohl den meisten Naturforschern sehr überraschend sein, obwohl ich nicht durch Zufall, sondern durch Prämeditation darauf gekommen bin und des Erfolgs schon gewiss war, noch ehe ich ihn gemacht hatte. Es ist folgender:

Wenn die 25 ℔ Nadel in beträchtliche Schwingungen gesetzt wird, z. B. so grosse, wie der Kasten verstattet, etwa 27°, so können dabei die Nadeln im

[*) Der Brief hat weder Unterschrift noch Zeitangabe.]

[**) Göttingische Gelehrte Anzeigen vom 7. März 1835, S. 345, Werke V, S. 528.]

m[agnetischen] O[bservatorium] und im phys. C[abinet] vollkommen in Ruhe sein und bleiben darin, wenn die Kette nicht geschlossen ist oder eine der Nadeln davon abgesperrt ist. Ist oder wird aber die Kette geschlossen, so dass die Multiplicatoren im magn[etischen] Obs[ervatorium] und im Ph[ysicalischen] C[abinet] mit darin sind, so fangen diese beiden Nadeln augenblicklich an mitzuschwingen. Aber am merkwürdigsten ist die Art der Schwingungen. Die natürliche Schwingungsdauer der Nadeln ist

25 ℔	in der Sternwarte	42",3
4 ℔	im m[agnetischen] O[bservatorium] . . .	20,5
1 ℔	im ph[ysikalischen] C[abinet]	13,8

so dass z. B. für die Nadel im m[agnetischen] O[bservatorium] die Stellung auf der Scale in jedem Augenblick t durch die Formel

$$A + R\cos\left(\frac{t-T}{20'',5}\cdot 180^0\right)$$

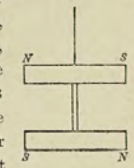
ausgedrückt wird, wenn A die Stellung der Nadel in Ruhe, R die an sich willkürliche halbe Schwingungsgrösse, T eine Epoche bedeutet, wo die Nadelstellung im Maximum war. Allein wenn die sympathetischen Schwingungen eintreten, so sind diese, allgemein zu reden, immer gemichte, nemlich eine natürliche von willkürlicher und eine inducirte von bestimmter Grösse, z. B. unter obigen Voraussetzungen die Formel

$$A + R\cos\left(\frac{t-T}{20'',5}\cdot 180^0\right) + r\cos\left(\frac{t-T'}{42'',3}\cdot 180^0\right).$$

Dieses r ist dem Schwingungsbogen der grossen Nadel proportional und, wenn dieser am grössten ist, etwa = 20 Scalentheile. Fast noch merkwürdiger ist der a priori vorausgesehene und in der Erfahrung auf das Vollkommenste bestätigte Umstand, dass die inducirten Schwingungen, welche mit den inducirenden von gleicher Dauer sind, mit diesen nicht gleichen Anfang haben, sondern eine halbe Schwingungsdauer (das Bogenargument 90°) davon abstehen. Die gezeichneten Figuren sehen allerliebst aus, und ich habe es in meiner Gewalt, das R oder die natürliche Schwingung unmerklich zu machen, wo dann die Nadel also rein eine ihr nicht natürliche Schwingung zu machen gezwungen ist; sobald die Kette geöffnet wird, nimmt die Nadel sogleich wieder ihre natürliche Schwingung allein an.

Ganz ähnliche Erscheinungen im phys. C[abinet], nur dass aus den Statt habenden Grössenverhältnissen das r kleiner wird als im m[agnetischen] O[bservatorium].

Am allermerkwürdigsten aber ist der gleichfalls genau vorausgesehene Fall, wo in der Kette eine zweite Nadel ist, deren natürliche Schwingungsdauer der der grossen gleich ist. Ich hatte dies nicht sofort realisiren können, aber jetzt ist dies auch geschehen, genau mit dem erwarteten Erfolg. Im phys. C[abinet] wurde die Nadel, wie man es nennt, astatisch gemacht, d. i. zwei Nadeln mit entgegengesetzten Polen verbunden, wovon die eine etwas weniges stärker ist als die andere. Auf diese wirkt der Erdmagnetismus schwächer, daher längere Schwingungsdauer, während der Multiplicator nicht bloss ebenso stark wie vorher, sondern noch fast 50 p[ro]c[ent] stärker einwirkt. So wurde die Schwingungsdauer dieser Doppelnadel auch genau auf 42",3 gebracht. Der Erfolg ist, dass für den Augenblick, wo die Kette geschlossen wird, indem die 25 ℔dige schon vorher schwang, die im ph[ysikalischen] C[abinet] sofort auch anfängt zu schwingen, und diese Schwingungen, anfangs mässig, nahmen beständig an Grösse zu, so dass sie nach ½ Stunde auf 300 angewachsen waren. Hier sind nun aber die Elongationen mit denen der grossen Nadel gleichzeitig, obwohl nach Lage der Umstände entweder gleichnamig (d. i. Maximum mit Maximum) oder ungleichnamig (Maximum mit Minimum). Das ganze Phänomen ist eine Art von Abspiegelung dessen, was im Sonnensystem vorgeht, nämlich der periodischen Störungen im ersten Fall, der Säcularstörungen im zweiten, nur haben sie den Vorzug, dass, während wir bei den Planetenstörungen bloss müssige Zuschauer sind, wir hier die eben so scharf oder zum Theil noch viel schärfer zu messenden Wirkungen selbst nach Gefallen hervorbringen. Ueberhaupt ist die Schärfe in allen diesen Dingen bewundernswürdig. Wir vergleichen z. B. durch derartige Manövers die Uhren in der Sternwarte, dem m[agnetischen] O[bservatorium] und ph[ysicalischen] C[abinet] jeden Augenblick auf 0",1 genau, und ich bin vollkommen überzeugt, dass wir auf dieselbe Art eben so sicher die Uhren in Göttingen und Bremen ohne Zwischenstation direkt vergleichen könnten, wenn nur jemand das Geld dazu hergeben wollte, eine ½ fingersdicke Kette von Kupferdraht von Göttingen



nach Bremen zu führen. Vielleicht kann ich in Zukunft die Gleise von Eisenbahnen zu analogen Zwecken benutzen.

Ich muss noch bemerken, dass freilich genau betrachtet, ebensogut die Schwingungen der zweiten oder dritten Nadel, Schwingungen in den beiden anderen erzeugen müssen; allein ich habe durch die Rechnung gefunden, dass solche unmerklich sind, was auch die Versuche bestätigen. Vor der Hand, d. i. so lange man sich nicht auch Nadeln von ähnlicher Kraft, wie meine 25 ℔dige, oder stärkere verschafft, wird also dieser interessante Versuch der sympathetischen Schwingungen in grosser Ferne anderwerts nicht nachgemacht werden können. Ein paar solcher 25 ℔diger Nadeln kommen übrigens nach Copenhagen. Hier bleiben vorerst noch 12 oder 14. Eine etwas beträchtliche Zahl muss man nothwendig besitzen, um in ihnen durch wiederhohlte gegenseitige Verstärkung ihre volle Kraft hervorzurufen. . . . .

[17.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 6. August 1835.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher II, S. 411.]

. . . .

Darf ich aber Ihnen vertraulich sagen, was mir selbst bei meinen Arbeiten die meiste Satisfaction giebt, so sind es viel mehr die theoretischen Eroberungen im Gebiet des Electromagnetismus, als die in dem des reinen Magnetismus. In andern äussern Verhältnissen als die meinigen sind, liessen sich wahrscheinlich auch für die Societät wichtige und in Augen des grossen Haufens glänzende praktische Anwendungen daran knüpfen. Bei einem Budget von 150 ℛ jährlich für Sternwarte und magnetisches Observatorium zusammen (dies nur im engsten Vertrauen für Sie) lassen sich freilich wahrhaft grossartige Versuche nicht anstellen. Könnte man darauf aber Tausende von Thalern wenden, so glaube ich, dass z. B. die Electromagnetische Telegraphie zu einer Vollkommenheit und zu einem Maassstabe gebracht werden könnte, vor der die Phantasie fast erschrickt. Der Kaiser von Russland könnte seine Befehle ohne Zwischenstation in derselben Minute von Petersburg nach Odessa, ja vielleicht nach Kiachta geben, wenn nur der Kupferdraht von gehöriger

(im Voraus scharf zu bestimmender) Stärke gesichert hingeführt, und an beiden Endpunkten mächtige Apparate und gut eingeübte Personen wären. Ich halte es nicht für unmöglich, eine Maschinerie anzugeben, wodurch eine Depesche fast so mechanisch abgespielt würde, wie ein Glockenspiel ein Musikstück abspielt, das einmahl auf eine Walze gesetzt ist. Aber bis eine solche Maschinerie allmählig zur Vollkommenheit gebracht würde, müssten natürlich erst viele kostspielige Versuche gemacht werden, die freilich z. B. für das K[önigreich] Hannover keinen Zweck haben. Um eine solche Kette in Einem Schlage bis zu den Antipoden zu haben, wäre für 100 Millionen Thaler Kupferdraht vollkommen zureichend, für eine halb so grosse Distanz nur $\frac{1}{4}$ so viel, und so im Verhältniss des Quadrats der Strecke. Vergleichen Sie dazu eine Andeutung, die ich in meinem Aufsatz[*)] gegeben habe.

Dass wenigstens das erste ABC leicht zu lernen ist, können Sie daraus abnehmen, dass neulich meine Tochter mehrere Buchstaben sogleich ohne allen Unterricht sicher gelesen hat.

Auf ein ganz neues Verfahren die Zeichen durch Induction zu geben, bin ich vor einigen Wochen gekommen, was sich in der Ausführung als ganz vortrefflich bewährt, wenn gleich zur höchsten Vollkommenheit erst ganz andere Apparate und gehörig eingeübte Personen erforderlich sind. Erst wenn unter solchen Umständen Versuche in grossem Maassstabe gemacht sein werden, kann man urtheilen, wie schnell sich manövriren lassen wird. Ich glaube aber, dass es möglich sein wird, in jeder Minute 5—6 Buchstaben zu signalisiren, wobei also nur die Länge der Depesche, aber gar nicht die Entfernung in Betracht kommt. . . . .

[18.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 26. August 1835.

. . . .

In Beziehung auf die magnetogalvanische Telegraphie bin ich vor einigen Wochen auf eine ganz neue Art die Induction dazu zu verwenden gekommen,

[*) Gemeint ist der weiter unten S. 103 in der ersten Fußnote angeführte Aufsatz, den Gauss am 28. Juli 1835 an Schumacher geschickt hatte. Die in Rede stehende »Andeutung« findet sich Werke V, S. 338, Zeile 14 v. u. bis S. 339, Zeile 6.]

die sich in der Anwendung ungemein zierlich macht. Es lassen sich, wie die Erfahrung gelehrt hat, in der Minute 6 bis 8 Buchstaben transmittiren. Sollte jedoch dergleichen Telegraphie für bürgerliche Zwecke im Ernst und als bestehende Staatseinrichtung benutzt werden, so würde es vortheilhafter sein, anstatt zweier Stränge (Einer Kette) ihrer mehrere z. B. 7 zwischen den beiden Orten gehen zu lassen. Freilich werden dann die Kosten für Metall in demselben Verhältniss höher, dagegen kann man dann aber die Einrichtungen leicht so machen, dass erstlich die Transmission noch viel geschwinder vor sich geht, und zweitens, was noch wichtiger sein möchte, dass die currente Handhabung durch ganz ordinäre Personen geschehen kann. Ich bin überzeugt, dass auf solche Weise die elektromagnetische Telegraphie theils vollkommen eben so schnell wie die optische, wo nicht schneller, ausgeführt werden kann, theils mit viel geringeren Kosten, da man bei jener ohne Frage Zwischenräume von 20 und mehreren Meilen nehmen kann, und drittens mit anderen Vortheilen, deren man bei der optischen entbehrt, z. B. der Unabhängigkeit von Wetter und Tageszeit, dem völligen Unbemerktbleiben, dass correspondirt wird etc. . . . .

Da übrigens bei derartigen Ausführungen die Wissenschaft eigentlich gar nicht interessirt ist, so scheint mir in der Ordnung, dass jene, obwohl bona officia zu leisten bereit, doch solche nicht aufdrängt, sondern wartet, bis solche gesucht werden. . . . .

[19.]

Gauss an Encke.

. . . .

Ich bin nicht abgeneigt, künftig eine Schrift etwa *Zum Gebrauch des Magnetometers* abzufassen, welche ohne sich in tiefe Theorie einzulassen, alle für den Liebhaber und den feinern Beobachter erforderliche Anleitung enthielte. Vielleicht wäre eine Briefform am angemessensten. Läugnen kann ich freilich nicht, dass dergleichen populäre Schriftstellerei nicht gerade meine Liebhaberei ist, dass ich sie vielmehr als ein Opfer ansehe, welches zu bringen nur die Nützlichkeit mich bewegen kann, zumal da mir soetwas, nach dem ersten Versuch dieser Art, welchen ich in Schumachers Jahrbuch gemacht

habe[*]], viel mehr Zeit kostet, als Sie ihm vielleicht ansehen. Ich werde nun zuerst erwarten, ob unser Publicum solche Opfer zu erkennen weiss.

Mehr sagen meinem Geschmack zwei andere damit nahe zusammenhängende Arbeiten zu, wovon auch bereits einiges niedergeschrieben ist. Das eine, über allgemeine Theoreme die im verkehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernungen wirkende Kräfte betreffend, wo u. a. das Theorem (*Intensitas etc.* p. [7**]]) bewiesen werden würde; das zweite über die Grundgesetze der Galvanischen Ströme und der Induction und deren Zurückführung auf absolute Maasse. Beides sind aber keine Arbeiten, die man nur aus dem Aermel schütteln könnte. Ich könnte noch eine vierte Arbeit nennen, nemlich die Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus, die ich auszuführen mich anheischig machen wollte, wenn die Thatsachen reichlich genug und in der nothwendigen Form vorlägen. Diese Form muss aber eine ganz andere sein, als die gewöhnliche, wonach die drei Elemente so gefasst werden: Declination, Inclination und ganze Intensität. Diese Form ist für meinen Zweck ganz unbrauchbar. Ich würde aber die Arbeit unternehmen, wenn wir nur noch eine Intensitäts-Karte hätten, die die horizontale Intensität allein darstellte, obwohl auch dann erst noch eine Umschmelzung nöthig wäre. Hansteen hatte mir Hoffnung gemacht, mir die drei Karten in der gewünschten Form zu liefern, scheint aber sein Versprechen vergessen zu haben.

Schon vor einigen Jahren hatte ich eine besondere Methode erdacht, die Inclination zu bestimmen, wozu eine Nadel mit einer feinen Axe etwas ausserhalb des Schwerpunktes nöthig ist, und wo man bloss Schwingungsdauern beobachtet. Ein damals von mir gemachter ganz roher Versuch liess die Brauch-

[*]) *Erdmagnetismus und Magnetometer*, Jahrbuch für 1836, herausgegeben von Schumacher, Stuttgart u. Tübingen 1836, S. 1; Werke V, S. 315.]

[**]) Siehe *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*, art. 2., Werke V, S. 87. Es handelt sich um den folgenden Satz: »Wie immer auch die Verteilung des freien Magnetismus im Innern eines Körpers geartet sei, so kann sie nach einem bestimmten Gesetze durch eine andere Verteilung allein auf der Oberfläche des Körpers ersetzt werden, die in bezug auf die nach Außen hin wirkenden Kräfte jener genau gleichwertig ist, so daß jedes außerhalb des Körpers befindliche Element magnetischer Flüssigkeit von der im Innern des Körpers wirklich vorhandenen Verteilung dieselben anziehenden oder abstoßenden Kräfte erfährt, wie von der gedachten Verteilung auf der Oberfläche«. Ein Beweis dieses Satzes findet sich in der Abhandlung vom Jahre 1839 *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte*, Art. 36, Werke V, S. 241.]

barkeit dieser Methode schon erkennen, aber die Herren SARTORIUS und LISTING haben sie mit einem besser gearbeiteten Apparat in Neapel recht glücklich ausgeführt[*)], sodass ich diese Methode für die allergenaueste halten möchte. Ihr Resultat ist aber noch nicht definitiv, da sie ein Element der Nadel noch nicht scharf bestimmt haben, was sie sich vorbehalten, nach ihrer Rückkehr zu thun. Auch absolute Declination und Intensität haben sie mit vieler Sorgfalt bestimmt; der erste Versuch nach Göttingen. Den dritten wird vermuthlich SVANBERG machen, falls Sie ihm nicht zuvorkommen.

Auch hier in Göttingen ist im Laufe des verflossenen Jahres manches Neue experimentirt. Wir haben die Reibungselectricität durch die ganze Kette vom physikalischen Cabinet zur Sternwarte getrieben, ihre magnetische Wirkung gemessen, und gefunden, dass unter gewissen Vorsichtsregeln nur wenig unterwegs verloren geht. Die magnetische Telegraphie durch Inductionsstösse haben wir oft so ausgeführt, dass 7 und mehr Buchstaben in der Minute transmittirt werden. Dass anstatt des früheren Inductors von 1050 Umwindungen einer von 3537 angeschafft ist, haben Sie schon aus dem oben angeführten Aufsatz [Werke V, S. 340] ersehen. Im Sept[ember] erhielten wir zuerst damit physiologische Wirkungen, von denen Ihnen vielleicht H[err] POGGENDORF erzählt hat, da er gerade bei den allerersten Versuchen gegenwärtig war und selbst Theil daran nahm. Aber was ich erst später fand, hat wie mir deucht eine grosse Merkwürdigkeit, nemlich dass man, wenn man den Strom mit den Lippen auffängt, d. i. an einer Lippe den Strom einströmen, an der anderen ausströmen lässt, man die Richtung des Stromes jedesmahl bestimmt unterscheidet. Immer empfindet man nemlich an der Lippe, wo der negative einströmt, allein, wenn der Strom nicht zu stark ist, oder im entgegengesetzten Fall doch ganz überwiegend. Dieser Versuch, den wir viele hundertmahl gemacht, und selbst scherzweise zum Telegraphieren gebraucht haben, schlägt nie fehl.

Seit ein Paar Monaten habe ich nun aber den Inductor abermahls fast auf das doppelte verstärken lassen, sodass er gegen 7000 Umwindungen hat. Hier sind die physiologischen Wirkungen weit stärker; man kann den Strom selbst durch die nur wenig befeuchteten Hände gehend sehr fühlbar machen, was bei dem schwächern Inductor nicht anging. Das allermerkwürdigste

[*)] Vergl. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838, S. 58.]

aber scheint zu sein, dass (seit etwa 8—10 Tagen) es mir gelingt Funken hervorzubringen, und dass diese Funken, nach der Richtung des Stromes eine verschiedene Farbe haben. Ich lasse die Funken von einer feinen Nadel gegen eine feste Metallfläche (nicht Quecksilber) überschlagen, wo der positive Strom einen hellgelben Funken mit einem Stich ins Grüne giebt, der negative einen violetten oder zuweilen rothgelben Funken. Mehreremale hat der letztere die Spitze der Nadel geschmolzen. Die Entfernung muss dabei aber sehr klein sein, vermuthlich unter $\frac{1}{1000}$ Zoll, und ich bediene mich zur Stellung einer sehr feinen Schraube (etwa 80 Gewinde auf den Zoll). Mit einer anderen viel grobern Schraube hat der Versuch bisher noch nicht gelingen wollen. Die Funken erfolgen selbst, wenn der Strom durch die ganze Kette geht, jetzt fast eine Meile lang. Es werden sich hieran noch eine Menge höchst interessanter Versuche knüpfen lassen, besonders wenn ich meine Vorrichtungen erst etwas bequemer eingerichtet habe.

Herzlich wünsche ich Ihnen Glück zur Vollendung Ihrer Sternwarte. Der Besitz so reicher Hilfsmittel muss Ihnen grossen Genuss gewähren.

Stets mit unwandelbarer Freundschaft

der Ihrige

C. F. GAUSS.

Göttingen den [*)] Januar 1836.

Herrn VON HUMBOLDT, der jetzt vermuthlich nach Berlin zurückgekehrt sein wird, bitte ich angelegentlich mich bestens zu empfehlen. In den letzten Tagen haben wir auch angefangen, uns mit den Thermogalvanischen Strömen zu beschäftigen. Vermittelst einer einfachen Vorrichtung können wir solche durch die ganze 1 Meile lange Kette treiben, sodass z. B. von der Sternwarte aus sämmtliche 4 Magnetometer (worunter jetzt zwei mit 25 pf.Stäben, da WEBER sich auch einen solchen aufgehängt hat) in sehr bedeutende Bewegungen gesetzt werden können. Die Natur dieser Ströme ist durchaus nicht von der auf andere Art hervorgebrachten verschieden.

[*)] Der Tag ist in der Handschrift nicht angegeben.]

[20.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 17. Januar 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER II, S. 435.]

. . . .

Aus dem reichen Gebiet des Electromagnetismus habe ich seit Anfang dieses Jahrs noch eine schöne Provinz unsern Apparaten unterworfen, nemlich die Thermogalvanische Erregung. Vermittelst einer besondern einfachen Vorrichtung bringe ich auch diese Ströme in solcher Stärke hervor, dass von der Sternwarte aus eine 24pfündige Nadel im physikalischen Cabinett in grosse Bewegung gesetzt wird. Ich denke, dies wird ein höchst wichtiges Mittel sein, um in der physikalischen Theorie der Wärme die interessantesten und feinsten Experimente zu machen. — Einige andere damit verwandte Versuche, habe ich mir auf die nächste Zeit vorgesetzt. . . . .

[21.]

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 1. März 1836.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 2, S. 633.]

. . . .

Seit Jan[uar] habe ich auch einige Versuche über den sogenannten Thermomagnetismus, richtiger Thermogalvanismus angefangen; wir haben neue Apparate angeordnet, womit man die Wirkung ganz ausserordentlich verstärken kann. Vielleicht kann man davon für die Pyrometrie (Hochöfen, Porzellanöfen, Schmelzöfen etc.) sehr wichtige Anwendungen machen. Meine eigenen Versuche bleiben freilich bei den mesquinen, mir zu Gebote stehenden Mitteln immer nur auf einen kleinen Maassstab beschränkt. . . . .

[22.]

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 18. März 1836.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 2, S. 635.]

. . . .

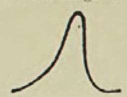
Herzlichen Dank für die Unterstützung, die Sie der Reise meines Sohnes durch Empfehlungsschreiben verschafft haben. — Mit einiger Ängstlichkeit horche ich dem Sturm, der hier diese ganze Woche ununterbrochen getobt hat.

Die weite Verbreitung solcher Stürme gewahr zu werden, geben unsre magnetischen Beobachtungen zuweilen Gelegenheit. Während des letzten Termins, 30/31. Januar, stürmte es hier sehr stark: aus allen Orten, von wo correspondirende Beobachtungen eingelaufen sind (Haag, Leipzig, Marburg, München, Mailand, Catanea) erschallen zugleich die Klagen über den heftigen störenden Sturm.

Demungeachtet ist dieser Termin der merkwürdigste von allen bisher abgewarteten gewesen. Mehrere grosse und schnelle Bewegungen sind vorgekommen; allein nicht bloss bei diesen, sondern auch bei den kleinern findet sich für alle Oerter die frappanteste Harmonie, nur auch hier wieder, je weiter nach Süden, desto kleiner die Bewegungen, und zwar die Abnahme der Grösse der Bewegungen in einem viel stärkern Verhältnisse, als die horizontale Intensität grösser wird (vgl. A. N. No. 276, S. 186 ganz unten [*])). Wir haben also, wie es scheint, die Sitze der Magnetischen Gewitter fast immer vorzugsweise im hohen Norden zu suchen. Aber um die Sitze in einzelnen Fällen auszumitteln, muss unsere Association erst viel weiter verbreitet sein, als sie bis jetzt ist, und auch dann wird die Arbeit keineswegs eine leichte sein, aus einem Grunde, den ich Ihnen, wie ich hoffe, leicht werde klar machen können. Schon jetzt weisen viele Erfahrungen darauf hin, dass in einem Tage eine fast unzählbare Menge solcher magnetischen Gewitter oder Eruptionen Statt finden, die an sehr verschiedenen Orten sein mögen. Nehmen Sie z. B. an, es sei bloss Eine Eruption bei Island, die in Göttingen etwa eine

[*) *Beobachtungen der Variationen der Magnetnadel in Copenhagen und Mailand, am 5. u. 6. Nov. 1834,* mitgetheilt von Herrn Hofrath und Ritter GAUSS, mit einer Kupfertafel, Astronomische Nachrichten 12, 1835, Spalte 185, Werke V, S. 537, siehe insbesondere S. 538 letzter Absatz.]

solche Figur für die Bewegung der Magnetnadel geben würde, und in Sicilien



eine ganz ähnliche nur viel kleinere. Es sei eine halbe Stunde nachher eine ähnliche über (oder unter*)) Arabien. Diese für sich allein wird auch eine ähnliche Figur hervorbringen, aber für Sicilien die grössere, für Göttingen die kleinere. Nach Maassgabe des Verhältnisses der Stärke der beiden Eruptionen können sich nun daraus die Formen der zusammengesetzten Erscheinungen sehr ungleich werden und, wie bei einigem Nachdenken klar ist, die Zeiten der Maxima und Minima an verschiedenen Orten auch sehr ungleich ausfallen. Schon oft sind Fälle vorgekommen, wo man ganz von selbst einen solchen Hergang anzunehmen veranlasst wird. Sehen Sie z. B. in den A[stronomischen] N[achrichten] Stück 276 in der Zeichnung die Stunde von 15^h—16^h[**]). Aber offenbar wird es sehr vieler, sehr weit auseinanderliegender und sehr zuverlässiger und scharfer Beobachtungen bedürfen, um solche gemengten Wirkungen in ihre einzelnen Bestandtheile aufzulösen, und aus diesen Gründen ist allerdings eine recht grosse Verbreitung der Apparate und der Kenntniss, sie zu behandeln, sehr wünschenwerth; vor allem aber auch eine gehörige gründliche Einsicht in das, was damit geleistet werden kann, verglichen mit den ehemals gebrauchten Apparaten, wobei, meine ich, gar nicht von solchen Problemen hätte die Rede sein können.

Uebrigens breitet sich der Verein schon immer mehr aus. MEIERSTEIN hat Apparate nach Halle, Freiberg, Wien und Bonn geliefert (wo sie freilich noch nicht in Thätigkeit sind), nach Haag und München, wo trefflich beobachtet wird, nach Upsala, wo nächstens angefangen werden soll. In Arbeit hat er Apparate für Greenwich und Dublin. Nach Breslau sind von hier Stäbe gesandt. Nach Krakau liefert BREITHAUPT in Cassel einen Apparat etc.

Bloss mit Berlin will es nicht vorwärts.

Die Beobachtungen des letzten Termins werden wohl auch noch lithographirt werden. Es entsteht jedoch die Schwierigkeit, wie für künftige regelmässige

*) Denn darüber wissen wir jetzt noch gar nichts, und wo aller Boden fehlt, hasse ich alles Hypothesiren.

[**) Die dem Aufsatze in den Astronomischen Nachrichten beigegebene Kupfertafel ist im V. Bande der Werke nicht wieder abgedruckt. Die von GAUSS bezeichnete Stunde ist wohl die von 3^h—4^h vormittags des 6. November 1834.]

Lithographirung die Kosten gedeckt werden sollen. WEBER meinte, dass diess vielleicht durch Zusammentreten der Theilnehmer und Freunde geschehen könnte, wo dann der Aufwand für einen einzelnen nicht so gar gross sein und er dafür ein halbes Dutzend Abdrücke erhalten könnte. Ich zweifle aber, dass diess ausführbar ist, denn natürlich kann H[err] Prof. W[EBER] sich nicht auf das Versenden und Einkassiren einlassen, das müsste durch Vermittlung etwa eines Kunst- oder Buchhändlers geschehen, was sich aber schwerlich hier in Göttingen einrichten lässt, zumahl da das Geschäft bei seiner Zersplitterung doch zu unbedeutend sein würde.

Ich habe dagegen H[errn] Prof. WEBER vorgeschlagen, in Göttingen ein allgemeines eigenes physikalisches Journal zu begründen[*)], welches ausser vielem anderen Nutzen auch zur Magazinirung der magnetischen Beobachtungen ein bequemes Mittel darbieten würde. Ich weiss aber noch nicht, ob seine grosse Bescheidenheit ihm erlauben wird, so etwas zu unternehmen. Ich selbst kann freilich Nichts dabei thun, als zu Zeiten einmahl einen kleinen Beitrag geben. Denn meine ganze Art zu arbeiten hat eine ganz entgegengesetzte Richtung; meine Arbeiten sind nicht zum Raumfüllen, und ein Paar Bogen erfordern jahrelange Vorarbeit. Auch ist mir die grösste Quaal, zu bestimmter Zeit eine Arbeit vollenden zu müssen. . . . .

[23.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 24. Juni 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, S. 73.]

. . . .

STEINHEIL führt jetzt (als Probeversuch für künftig weiter zu erstreckende magnetische Telegraphie) eine Drahtleitung von München nach Bogenhausen, bei welcher Gelegenheit er schon eine interessante Bemerkung gemacht hat — meinem Vermuthen nach in der atmosphärischen Electricität begründet, welche sich also an den Magnetometern ausserordentlich stark sichtbar machen lässt.

[*) Diese Zeitschrift erschien vom Juni 1837 an bis zum Jahre 1843 in 6 Bänden unter der Überschrift: »Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836, bezw. 1837, 1838, 1839, 1840, 1841. Herausgegeben von C. F. GAUSS und W. WEBER«, Göttingen 1837, 1838, Leipzig 1839, 1840, 1841, 1843.]

Für die magnetische Telegraphie zwischen Leipzig und Dresden sind dem Vernehmen nach 8000 ₰ ausgesetzt, namentlich zuerst 2000 ₰ für die Bahnstrecke von Leipzig nach Wurzen. Ich höre dies von WEBER, bin aber ungewiss, ob die Notiz schon bekannt werden darf.

Stets der Ihrige

C. F. G.

[24.]

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 23. Juli 1836.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 2, S. 642.]

. . . .

Unter meinen jetzigen magnetischen Experimenten ist das merkwürdigste eines, wo die Inductionswirkung des Erdmagnetismus auf einen 700fachen Drahtring, übersponnen und zusammen über 13000 Fuss lang, bestimmt wird. Dieser Ring oder dieses Rad wird um eine Axe gedrehet, die einen horizontalen Diameter des Rades bildet. Diese Drehungsaxe macht genau einen rechten Winkel mit dem magnetischen Meridian, und die beiden Enden des Drahts sind bis zum Multiplicator des grossen Magnetometers der Sternwarte fortgeführt, welcher Multiplicator jetzt aus 610 Umwindungen übersponnenen Drahts besteht. Die Drehung geschieht tactmässig nach der Uhr, alle 2 Secunden Eine Umdrehung, und nach jeder halben Umdrehung wechselt vermöge eines eigenthümlichen Mechanismus die Verbindung der Drahtendungen des Rades mit ihren Fortsetzungen. Die Einrichtung ist nach Vorschrift der Theorie so, dass dieser Wechsel genau Statt findet, wenn das Rad dem magnetischen Aequator parallel ist, oder einfacher gesagt, normal gegen die Richtung der Erdmagnetischen Kraft. So wirkt der durch die Induction erzeugte Strom immer in Einerlei Sinn auf das Magnetometer und bewirkt, obgleich die ganze Drahtlänge so gegen 20000 Fuss lang ist, doch noch Ausweichung von mehreren hundert Scalentheilen an der 25pfündigen Nadel. Bei einigen Versuchen wird auch noch der Draht des Inductors (SCHUMACHERS J. B. 1836, S. 41[*)]),

[*) *Erdmagnetismus und Magnetometer*, Jahrbuch für 1836, herausgeg. von SCHUMACHER, Werke V, S. 315, siehe insbesondere S. 340.]

der aber jetzt nicht mehr 3537, sondern 7000 Umwindungen hat, mit in die Kette aufgenommen, wo also der Strom gegen 27000 pariser Fuss sehr dünnen Drahts zu durchlaufen hat und dann noch immer 325 Scalentheile Ausschlag gibt. Diese Versuche machen einen Theil von denjenigen aus, die zum Zweck haben, alles was sich auf die Wechselwirkung zwischen Magnetismus und galvanischen Strömen bezieht, auf absolute Maasse zu bringen. Genäherte Zahlenbestimmungen geben schon meine früheren Versuche. Die gegenwärtigen werden aber die Genauigkeit noch sehr vergrössern. . . . .

[25.]

GAUSS an GERLING. Göttingen, 19. December 1836.

. . . .

Mein Sohn ist jetzt wieder in Stade; er hat sich 3 Wochen in Paris aufgehalten und hat von den dortigen Gelehrten viel Gefälligkeit erfahren, besonders von POISSON und LIBRI. Auch mit ARAGO ist er bekannt geworden, welcher ihm erklärt hat, er ziehe doch die GAMBEYschen Apparate den meinigen vor, weil letztere zu viel Anomalien zeigten. AIRY-CHRISTIS Bedenklichkeiten bestanden hingegen, wie Sie sich erinnern, darin, dass sie meinten, meine Apparate zeigten zu wenig Anomalien. . . . .

[26.]

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 2. September 1837.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 2, S. 619.]

. . . .

In der Sitzung der Societät im Jubiläum (19. September) werde ich eine Vorlesung halten über ein neues Mittel für die Magnetischen Beobachtungen[*)]. Es bezieht sich auf einen neuen Apparat, der für die (horizontale) Intensität

[*) Siehe den Bericht über die am 19. September 1837 gehaltene Vorlesung: *Ein neues Hülfsmittel für die Magnetischen Beobachtungen* in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom 30. Oktober 1837, Werke V, S. 352, und den Aufsatz *Über ein neues, zunächst zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderungen in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmtes Instrument* in den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837, S. 1, Werke V, S. 357.]

ganz dasselbe leistet, was das Magnetometer für die Declination, wodurch also die Aufgabe (Resultate, S. 12[*]), soweit von dem horizontalen Theile der Erdmagnetischen Kraft die Rede ist, erledigt wird. Von einer rohen Probe der Grundidee finden Sie eine Andeutung in SCHUMACHERS Jahrbuch 1836, S. 19[**)], woraus freilich nicht zu erkennen ist, in was das Mittel besteht, sondern nur ein secundärer Theil von dem, was damit geschieht. In diesem Sommer habe ich aber den Apparat ordentlich ausführen lassen, und es sind sogar die beiden letzten Termine (der Haupttermin vom 29. Juli und der Extratermin vom 31. August) vollständig damit beobachtet, während ebenso vollständig in beiden auch im M[agnetischen] O[bservatorium] der Verlauf der Declination beobachtet ist.

Der horizontale Theil des Erdmagnetismus kann also jetzt so scharf beobachtet werden, wie die Sterne am Himmel. Aber mit dem verticalen Theile wird eine ähnliche Genauigkeit niemals erreicht werden können; wer die Stelle der *Intensitas vis etc.* p. 15 »Ex hoc rem — requiratur«[***)] gehörig studirt und beherzigt hat, wird diess leicht von selbst einsehen. Wenn man aber auch nicht die gleiche Genauigkeit wie bei dem horizontalen Theil erreichen kann, so bin ich doch überzeugt, dass man viel mehr erreichen kann, als bis jetzt erreicht ist. Das ist aber etwas, worauf ich mich nicht einlassen kann. Bei den Instrumental-Hülfsmitteln für die beiden Elemente des horizontalen Theils konnten geistige Mittel ausreichen, d. i. durch eine gehörige Einrichtung konnte man Apparate zur Erreichung der höchsten Genauigkeit darstellen, die eigentlich keine übermässig feine mechanische Arbeit erfordern, und mit geringen Kosten angefertigt werden können. (Der neue Apparat kommt nicht auf 50 ₰, natürlich alles schon vorhandene, was dabei gebraucht wird, ungerechnet, namentlich Uhr, Theodolith und Magnetstab.) Dagegen sind bei allem, wobei der verticale Theil der magnetischen Kraft auf irgend eine Art mit ins Spiel kommt, sei es als Inclination oder anders, sehr fein, sehr vollkommen ausgearbeitete, also auch am Ende kostbare Instrumente unentbehrlich, unerlässlich und können durch Nichts anderes ersetzt werden. Ein Inclinationsapparat von der gewöhnlichen Einrichtung, der nur so weit befriedigen soll, als wir jetzt wirklich sind, also wobei man noch weit, sehr weit zurück ist gegen das, was man wünschen muss, kostet schon mehr, als ich in einem oder zwei Jahren für Sternwarte und Magnetische Anlagen zusammen zu verausgaben habe. . . . .

[*) *Einleitung*, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836, S. 1, Werke V, S. 345, siehe insbesondere S. 351.]

[**) *Erdmagnetismus und Magnetometer*, Werke V, S. 315, siehe insbesondere S. 326 Zeile 4 v. u. bis S. 327 Zeile 2.]

[***) Werke V, S. 91 letzter Absatz.]

[27.]

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 20. November 1838.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 2, S. 697.]

. . . .

Ich gehe jetzt damit um, den Apparat, dessen in den »Resultaten für 1837« p. 7—8[*)] erwähnt ist, auf eine eigenthümliche Art ausführen zu lassen. Die Abänderung, welche WEBER unter dem Namen Inductions-Inclinatorium gemacht hat, ist zwar im höchsten Grade sinnreich; ich glaube aber nicht, dass man auf diese Art jemals sehr scharfe Resultate erhalten kann. Ich komme auf meine alte Art zurück (wobei ein von dem Drehungsapparat ganz getrenntes Magnetometer gebraucht wird), lasse aber an jenem zwei getheilte Kreise und Vorkehrungen zum scharfen Nivelliren anbringen. Ich bin geneigt zu glauben, dass man damit ziemlich scharfe Inclinationen, wenigstens so scharfe, wie mit den gewöhnlichen Inclinatorien, erhalten kann, ja, wenn man noch anderes damit verbinden will, auch absolute Declination. Doch werde ich erst den Erfolg abwarten, ehe ich mich weiter darüber äussere.

. . . .

[28.]

GAUSS an ENCKE. Göttingen, 8. September 1839.

. . . .

Das gütige Interesse, welches Sie an meiner allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus bezeigen, ist mir sehr erfreulich gewesen. Wenn diese Ar-

[*) Siehe den oben S. 111 in der Fußnote genannten Aufsatz, insbesondere Werke V, S. 362.]

beit ein Verdienst hat, so besteht es meiner Meinung nach darin, dass man früher nicht wusste, wie man überhaupt die Sache anzufassen habe, und dass jetzt der Weg dazu offen ist. Ich habe insofern eine numerische Anwendung ungern gemacht, als ich die Ueberzeugung hatte und habe, dass die groben Data jetzt eine so grosse mechanische Arbeit, wie ich habe aufwenden müssen, kaum verdienen, und dass bei guten Datis eine nicht längere Arbeit ganz anders befriedigende Resultate hätte liefern können und müssen. Indessen war ich eben so sehr überzeugt, dass eine blosse Auseinandersetzung der Theorie gar keinen Eingang gefunden haben würde.

In Beziehung auf Ein Moment scheinen Sie übrigens sich nicht ganz in den eigentlichen Standpunkt gesetzt zu haben, nämlich dass Sie pag. 47 [*)] einen Anstoss gefunden haben. Sie scheinen dieses nur wie einen kleinen Nebenpunkt zu betrachten, wo Ihnen nicht gleich gelungen sei die Lücke zu suppliren. Es ist aber gar nicht meine Meinung gewesen, dass die Sache aus diesem Gesichtspunkt betrachtet werden soll. Vielmehr ist diess nur Ein Hauptsatz aus einer grösseren theoretischen Untersuchung, auf die ich selbst nach meinem eigenen Maassstabe, einen viel grösseren Werth lege, als auf die ganze Abhandlung, die jetzt gedruckt ist, insofern in jener Arbeit 10 mahl mehr geistige von einander unabhängige Schritte zu machen sind, als in dieser, wo eigentlich nach der einmahl gefassten Grund-Idee alles sich von selbst macht. . . . .

[29.]

Gauss an Herger.

Wohlgeborener

Hochzuehrender Herr.

Für das gütige Geschenk, welches Sie mir mit der ersten Lieferung Ihres schätzbaren auch in seinem Aeusseren so elegant ausgestatteten Werkes gemacht haben [*)], verfehle ich nicht, Ihnen meinen schuldigen verbindlichsten Dank abzustatten. Der von Ihnen dabei bewiesene ausdauernde Fleiss, sowie die Accuratesse und Nettigkeit der Ausführung gereichen Ihnen zur Ehre und verdienen alle Anerkennung. Ihre Curven sind in der That nichts anderes als die rechtwinklichten Trajectorien (denn so wird ohne Zweifel das unleserlich geschriebene Wort in Herrn von Humboldts Briefe gelesen werden müssen) zu denjenigen Curven, welche nach meiner Theorie gleiche Potentiale vorstellen. Aber die Gestaltung des einen wie des andern Curvensystems in der Nähe von künstlichen Magneten lässt sich theoretisch oder a priori nicht bestimmen, ohne die Vertheilung des Magnetismus im Innern von diesen vorher zu kennen, und so bieten, wie Hr. Pr[ofessor] Ermann richtig bemerkt, Ihre Curven ein sehr schätzbares Material dar, wonach jede vorgebrachte oder vorzubringende Hypothese über solche Vertheilung wird geprüft werden können. Dürfte ich mir erlauben, noch einen Wunsch auszusprechen, so wäre es der, dass in der Einleitung über die Versuche selbst, auf welche die gezeichneten Curven sich gründen, ein vollständigeres Detail mitgetheilt würde, ein Wunsch, den Sie vielleicht schon selbst im Fortgange der Einleitung zu erfüllen sich vorgesetzt haben, da dies in der That das am meisten geeignete Mittel ist, das Zutrauen zu Ihren Resultaten zu befestigen und zu erhöhen.

Genehmigen Sie die Bezeugung der besonderen Hochachtung womit ich beharre Ewr. Wohlgeboren

ergebenster Diener

C. F. Gauss.

Göttingen, 11. Februar 1845.

[*) Es handelt sich genauer um Seite 46 und 47 der Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins im Jahre 1838, wo im Artikel 32 der *Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus* (siehe Werke V, S. 162) das Theorem des art. 2. der *Intensitas vis magneticae terrestris* erwähnt wird, vergl. oben S. 103 die zweite Fussnote.]

[*) J. Ernst Herger, *Die Systeme der magnetischen Curven, Isogonen und Isodynamen, nebst anderweitigen empirischen Fortschritten über die magnetisch-polaren Kräfte, ausgeführt in 37 grossen graphischen Darstellungen auf 31 Tafeln und erläutert unter den Auspicien des Hofrath Dr. Schottin.* Nebst einem Vorwort von G. A. Erman. In 4 Heften, Leipzig 1845. — Der Verfasser dieses Werkes J. E. Herger (1812—1871) lebte als Rosenzüchter und Handelsgärtner zu Köstritz im Fürstentum Reuß.]

[30.]

Gauss an Bessel. Göttingen, 31. December 1831.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, Berlin 1880, S. 504.]

. . . .

Bei der Lectüre von Poissons älterer Abhandlung über die Electricität (1812) [*)] bin ich neulich auf einen meines Wissens neuen und wie mir scheint artigen Satz gekommen. Er geht [a. a. O. S. 3] davon aus, dass die freie Electricität sich unter der Oberfläche eines Isolirten Leiters sammelt, und meint, es sei nicht zureichend, dass die Resultante aller Abstossungen in jedem Punkte der inneren Oberfläche jener Electricitätsschicht auf diese senkrecht sei, sondern die physische Aufgabe fordere ausserdem noch die Bedingung, dass die Resultante in jedem Punkte des innern eingeschlossenen Raums = 0 werde, weil sich sonst neue Electricität zersetzen würde. Man mag diese Behauptung an sich zugeben, allein ich beweise, dass, unter Voraussetzung der Repulsion im verkehrten doppelten Verhältniss des Abstandes, die zweite Bedingung schon von selbst in der ersten enthalten ist. Dann wird es offenbar ein Fehler, da von neuem an die physische Natur zu appelliren, wo die Mathematik den Gegenstand schon von selbst darreicht. Mein Satz gilt eben so gut von anziehenden Kräften und heisst dann: Wenn ein wie immer gestalteter homogener oder nicht homogener Körper aus Theilen besteht, die eine Anziehungskraft im verkehrten doppelten Verhältniss des Abstandes ausüben, und dieser Körper einen hohlen Raum umschliesst, an dessen Begrenzung in keinem Punkte eine schiefe Resultante Statt hat, so ist die Resultante an jedem Punkte dieser Begrenzung sowohl als in jedem Punkte des hohlen Raums = 0. — Sobald man den Satz einmahl aufgefasst hat, ist die Beweisführung eben nicht schwer zu finden. . . . .

[*) S. D. Poisson, *Mémoire sur la distribution de l'Electricité à la surface des corps conducteurs*, Mémoires de l'Institut, année 1811, Paris 1812, S. 1.]

[DIOPTRIK.]

NACHLASS.

[I.]

NEUER ALGORITHMUS.

[Aus Handbuch 21, Bg, Aufsätze, Notizen und Rechnungen zur Mathematik und Astronomie gehörig; Angefangen September 1813, S. 27, 28.]

Die Grössen A, B, C, D etc. entstehen aus a, b, c, d etc. so, dass

$$A = a, \quad B = bA-1, \quad C = cB-A, \quad D = dC-B \text{ etc.}$$

Wir bezeichnen dann

$$A \text{ mit } (a, a), \quad B \text{ mit } (a, b), \quad C \text{ mit } (a, c), \quad D \text{ mit } (a, d) \text{ etc.,}$$

wo also bei a, b, c, d etc. die Ordnung als bestimmt betrachtet wird.

Dieser Algorithmus bietet die interessante Eigenschaft, dass man [*)] vier oder mehr aufeinander folgende Elemente immer durch drei ersetzen kann.

Man hat dann folgende schöne Lehrsätze (Ordn[un]g $a, b, c, \dots g, h, i, \dots p, q, r, \dots z$)

$$\text{I.} \qquad (a,p).(i,z)-(i,p).(a,z) = (a,g).(r,z),,$$

$$\text{II.} \quad \partial(a,z) = (b,z)\partial a+(a,a)(c,z)\partial b+(a,b)(d,z)\partial c+(a,c)(e,z)\partial d+\text{etc.}$$

[*) In der Handschrift steht hier noch das Wort »statt«.]

Diese Formeln werden noch eleganter, wenn man die Bezeichnung[*)] modificirt und

$$(a,a)=0,\ (a,b)=1,\ (a,c)=b,\ (a,d)=c\,(a,c)-(a,b),\ (a,e)=d\,(a,d)-(a,c)\ \text{etc.}$$

setzt. Alsdann hat man nemlich:

$$\text{I[a].}\qquad (a,p).(i,z)-(i,p).(a,z)=(a,i).(p,z),$$

$$\text{II[a].}\qquad \partial(a,z)=(a,b)(b,z)\,\partial b+(a,c)(c,z)\,\partial c+(a,d)(d,z)\,\partial d+\text{etc.}$$

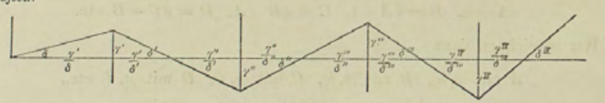
Auf Einer Axe seyn $\mu+1$ Gläser geordnet, deren Brennweiten $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f'}$, $\frac{1}{f''}$, $\frac{1}{f'''}$ etc. $\frac{1}{f^{\mu}}$, die Distanzen von einander $h, h', h'', \ldots h^{\mu-1}$ sind. Man mache, indem obigen Elementen a, b, c etc. jetzt die Grössen f, h, f', h', f'', h'' etc. entsprechen:

$$\text{[III.]}\begin{cases}\alpha\ =1,\\ \alpha'\ =(f,h),\\ \alpha''\ =(f,h'),\\ \alpha'''=(f,h''),\end{cases}\quad \text{[IV.]}\begin{cases}\beta\ =f,\\ \beta'\ =(f,f'),\\ \beta''\ =(f,f''),\\ \beta'''=(f,f'''),\end{cases}\quad \text{[V.]}\begin{cases}\gamma\ =0,\\ \gamma'\ =h,\\ \gamma''\ =(h,h'),\\ \gamma'''=(h,h''),\end{cases}\quad \text{[VI.]}\begin{cases}\delta\ =1,\\ \delta'\ =(h,f'),\\ \delta''\ =(h,f''),\\ \delta'''=(h,f''')\end{cases}$$

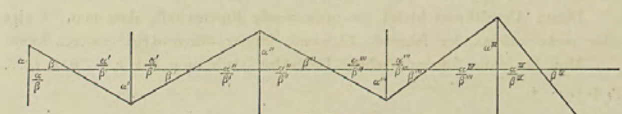
etc.

Die Bedeutung dieser Grössen versinnlicht folgende Figur:

Objectiv



[Fig. A.]



[Fig. B.]

[*) In der Handschrift steht hier noch das Wort »anders«.]

Hier wird nun:

δ^{μ} die Vergrösserung; bei geradem μ ist δ^{μ} positiv bei aufrechtem Bilde, negativ bei verkehrtem,

$\frac{g}{\beta}$, $\frac{g}{\beta'}$, $\frac{g}{\beta''}$ etc. Grösse der einzelnen Bilder, wenn g das Gesichtsfeld,

$g\gamma'$, $g\gamma''$, $g\gamma'''$ etc. Oeffnungen der Gläser wegen des Gesichtsfeldes,

$\frac{\omega}{\delta}$, $\frac{\omega}{\delta'}$, $\frac{\omega}{\delta''}$ etc. Durchmesser der Stralenkegel,

$\omega\alpha'$, $\omega\alpha''$, $\omega\alpha'''$ etc. Oeffnungen der Gläser wegen der Helligkeit.

Für weitsichtige Augen muss $\beta^{\mu}=0$ werden; für kurzsichtige, deren Augenweite $=k$, muss $\beta^{\mu}\delta^{\mu}k=-1$ seyn.

Die Breite des farbigen Saumes um das Gesichtsfeld wird

$$\text{[VII]}\qquad \tfrac{1}{2}\,\delta^{\mu}g\,(\alpha^{\mu}\,\partial\delta^{\mu}-\beta^{\mu}\,\partial\gamma^{\mu})$$

und zwar ist der Saum, wenn diese Grösse positiv wird, blau; roth, wenn sie negativ ist

$$\text{[VIIa]}\qquad =\tfrac{1}{2}\,\delta^{\mu}g\,\frac{\partial n}{n-1}\{\alpha'\gamma'f'+\alpha''\gamma''f''+\alpha'''\gamma'''f'''+\alpha^{\mathrm{IV}}\gamma^{\mathrm{IV}}f^{\mathrm{IV}}+\text{etc.}+\alpha^{\mu}\gamma^{\mu}f^{\mu}\},$$

$$\text{[VIIb]}\qquad =\tfrac{1}{2}\,\delta^{\mu}g\,\frac{\partial n}{n-1}\{\alpha'(\delta+\delta')+\alpha''(\delta'+\delta'')+\alpha'''(\delta''+\delta''')+\text{etc.}+\alpha^{\mu}(\delta^{\mu-1}+\delta^{\mu})\},$$

$$\text{[VIIc]}\qquad =\tfrac{1}{2}\,\delta^{\mu}g\,\frac{\partial n}{n-1}\{\gamma'(\beta+\beta')+\gamma''(\beta'+\beta'')+\gamma'''(\beta''+\beta''')+\text{etc.}+\gamma^{\mu}(\beta^{\mu-1}+\beta^{\mu})\}\ [\text{*})].$$

[*) In der Handschrift steht in den drei letzten Formeln δ^{m} statt δ^{μ}.]

[II.]

[ANALYSE VON FERNROHREN.]

[Aus Handbuch 20, Bf, S. 306, 308, 309.]

[A.]

Dimensionen des Baumannschen Kometensuchers.

[Linsen]	Brennweite	Durchmesser	Dicke	Distanzen
Objectiv	862	52	15	772,7 $[-x = h]$
[Okular] 1	5576 = 181,8	60,8	6,5	94,2 $[= h']$
2	2984 = 97,3	45,4	5,4	14,2 $[= h'']$
3	2065 = 67,3	38	5,0	

$$[f\ =]\ 1:862\quad [= 0{,}00116009]$$
$$[f'\ =]\ 1:181{,}8\ [= 0{,}00550055]$$
$$[f''\ =]\ 1:\ 97{,}3\ [= 0{,}01027749]$$
$$[f'''\ =]\ 1:\ 67{,}3\ [= 0{,}01485884]$$

$$\alpha\ = +1$$
$$[(f, h)\ =]\ \alpha' = -0{,}103596\,[-0{,}00116009\,x]$$
$$[(f, h')\ =]\ \alpha'' = -0{,}059363\,[+0{,}00055899\,x]$$
$$[(f, h'')\ =]\ \alpha''' = +0{,}075266\,[-0{,}00038681\,x]$$

$$[f =]\ \beta\ = +0{,}00116009$$
$$[(f, f')\ =]\ \beta' = -0{,}00172993\,[-0{,}00000638\,x]$$
$$[(f, f'')\ =]\ \beta'' = +0{,}00111983\,[+0{,}0000121263\,x]$$
$$[(f, f''')\ =]\ \beta''' = -0{,}00000146\,[-0{,}0000178676\,x]$$

$$\gamma\ = 0$$
$$\gamma' = +772{,}7\ [-1{,}0000\,x]$$
$$\gamma'' = -466{,}52\,[+0{,}48185\,x]$$
$$\gamma''' = +352{,}28\,[-0{,}333219\,x]\,[\text{*})]$$

$$\delta\ = +\ 1$$
$$\delta' = +\ 3{,}2503\ [-0{,}0055\,x]$$
$$\delta'' = -\ 8{,}0450\ [+0{,}010453\,x]$$
$$\delta''' = +13{,}27952\,[-0{,}015404\,x]$$

Für ein kurzsichtiges Auge, dessen Weite $k = 147$ mm[**), ist

$$\beta'''.\delta'''.147 = -1,$$

also nach Einsetzen der obigen Werte

$$x^2 - 864{,}18\,x = -24641,$$

was für x den Wert liefert:]

$$x = 29{,}6\ \text{mm};$$

[der zweite aus der Gleichung sich ergebende Wert von x ist aus physikalischen Gründen zu verwerfen.]

Farbiger Rand

$$[\alpha'\gamma' f'\ =]\ +4{,}2503 - 0{,}103596 = -0{,}440$$
$$[\alpha''\gamma'' f''\ =]\ -4{,}7947 - 0{,}059363 = +0{,}285$$
$$[\alpha'''\gamma''' f'''\ =]\ +5{,}0859 + 0{,}075266 = \underline{+0{,}382}$$
$$+0{,}227$$

[*) In der Handschrift befindet sich hier ein Rechenfehler (342,28 statt 352,28), der auch δ''' und den Wert von x beeinflußt hat; im Folgenden sind die richtigen Werte von δ''' und x eingesetzt worden.]

[**) In der Handschrift steht der Buchstabe t statt k.]

[Gesichtsfeld $g = 2.7500''$]

$$0{,}227.7500'' = 1702'',5\,[^{*}]$$
$$\partial n = 0{,}0108$$
$$n - 1 = 0{,}515$$
$$\frac{1702'',5\,.\,0{,}0108}{0{,}515} =]\ 35'',7.$$

[S. 308]

[B.]

Analyse meines Fraunhoferschen Zugfernrohres.

	Brennweite	Oeffnung	Distanz von 4	[Distanzen der Gläser von einander]
Objectiv	444 mm	35	$629{,}09 - x$	$452{,}28 - x$ [$= h$]
1 Ocular	30,7	17	176,8	46,2 [$= h'$]
2	38,9	15	130,0	78,0 [$= h''$]
3	44,0	21	52,6	52,6 [$= h'''$]
4	31,1	14	0	

$$\alpha = +1{,}0000 \qquad \beta = +0{,}002\,252$$
$$\alpha' = +0{,}01\,864 - 0{,}002\,252x \qquad \beta' = -0{,}001\,644 - 0{,}00\,007\,335x$$
$$\alpha'' = -0{,}09\,462 - 0{,}001\,137x \qquad \beta'' = -0{,}000\,786 + 0{,}00\,004\,414x$$
$$\alpha''' = +0{,}03\,330 + 0{,}004\,580x \qquad \beta''' = +0{,}001\,543 + 0{,}00\,005\,995x$$
$$\alpha^{IV} = +0{,}04\,797 - 0{,}001\,427x \qquad \beta^{IV} = +0{,}000\,000 - 0{,}0\,001\,584x$$

$$\gamma = 0 \qquad \delta = +1$$
$$\gamma' = +452{,}28 - 1{,}0000x \qquad \delta' = +13{,}732 - 0{,}03\,257x$$
$$\gamma'' = +182{,}14 - 0{,}5048x \qquad \delta'' = -\ 9{,}050 + 0{,}01\,960x$$
$$\gamma''' = -888{,}04 + 2{,}0335x \qquad \delta''' = -11{,}133 + 0{,}02\,662x$$
$$\gamma^{IV} = +302{,}44 - 0{,}6336x \qquad \delta^{IV} = +20{,}861 - 0{,}04\,699x$$

[*) Hier fehlt die Bestimmung der Vergrößerung, die notwendig wäre, um die Berechnung des farbigen Randes zu Ende zu führen; theoretisch soll sie gleich δ''', hier also gleich 13,28 sein. — In der Handschrift steht 1707″,5 statt 1702″5, entsprechend war auch das Ergebnis zu ändern.]

Gesichtsweite eines myopischen Auges $= k$ [*)].
Muss seyn

$$\beta^{IV}\delta^{IV}k + 1 = 0.$$

Für $k = 147$ mm,

$$x = 2{,}05\,[^{**})].$$

Vergrösserung durch einen Versuch:

$$\frac{3^{\circ}\,40'\,25''}{10'\,35''} = 20{,}83.$$

Aperturen der Oculare

wegen Gesichtsfeld	[wegen] Helligkeit
[$g\gamma' =$] 10,7	0,7 [$= \omega\alpha'$]
[$g\gamma'' =$] 4,3	3,4 [$= \omega\alpha''$]
[$g\gamma''' =$] 21,0	1,2 [$= \omega\alpha'''$]
[$g\gamma^{IV} =$] 7,2	1,7 [$= \omega\alpha^{IV}$].

Farbiger Rand

$$+0{,}2746\ [= \alpha'\,\gamma'\,f']$$
$$-0{,}4430\ [= \alpha''\,\gamma''\,f'']$$
$$-0{,}6721\ [= \alpha'''\,\gamma'''\,f''']$$
$$+0{,}4675\ [= \alpha^{IV}\gamma^{IV}f^{IV}]$$
$$[-0{,}3748]$$

Gesichtsfeld $[g] = 1^{0}\,21'\,25''$

$$[\tfrac{1}{2}g = 40'\,45'']$$

$$-0{,}3748 \times 40'\,45'' = -917''$$
$$\left[917''\cdot\frac{\partial n}{n-1} =\right] 917'' \times \frac{0{,}0108}{0{,}515} = 19''$$
$$[19''.20{,}83 = 6'\,35''\,2].$$

[*) In der Handschrift steht hier und im Folgenden statt k der Buchstabe t.]
[**) In der Handschrift befindet sich hier ein Rechenfehler.]

[S. 309]

[C.]

Analyse meines kleinen Ramsdenschen Fernrohrs.

(Einheit sind Zehntel des Fuss.)

	[Brennw.]	[Distanzen]	Oeffn[ung]
Obj.	7,866	8,097	0,96
[Ocul. 1]	0,702	0,857	0,35
[2]	0,837	1,407	0,31
[3]	0,842	1,104	0,41
[4]	0,585		0,29

Blendung 10 mm = 0,306 [Zehntelfuss]

$\alpha = +1,0000$ $\qquad \beta = +0,12713$

$\alpha' = +0,02937$ $\qquad \beta' = -0,08530$

$\alpha'' = -0,10247$ $\qquad \beta'' = -0,03712$

$\alpha''' = +0,05023$ $\qquad \beta''' = +0,09678$

$\alpha^{IV} = +0,05661$ $\qquad \beta^{IV} = 0$

$\gamma = 0$ $\qquad \delta = +1$

$\gamma' = +\ 8,097$ $\qquad \delta' = +10,534$

$\gamma'' = +\ 0,931$ $\qquad \delta'' = -\ 9,422$

$\gamma''' = -14,188$ $\qquad \delta''' = -\ 7,666$

$\gamma^{IV} = +\ 5,725$ $\qquad \delta^{IV} = +17,453.$

[Aperturen der Ocularlinsen]

	wegen Helligkeit	[wegen] Gesichtsfeld
I.	0,0282 [$= \omega\alpha'$]	0,2491 [$= g\gamma'$]
II.	0,0984 [$= \omega\alpha''$]	0,0303 [$= g\gamma''$]
III.	0,0482 [$= \omega\alpha'''$]	0,4366 [$= g\gamma'''$]
IV.	0,0543 [$= \omega\alpha^{IV}$]	0,1762 [$= g\gamma^{IV}$].

[Gesichtsfeld $g =$] $1^0\,45'\,50''$

[$\frac{1}{2}g = 3175''$].

[Farbiger Rand]

$$[\alpha'\gamma' f' =]\ +0,02937 + 11,534 = +0,3385$$
$$[\alpha''\gamma'' f'' =]\ -0,10247 + 1,112 = -0,1140$$
$$[\alpha'''\gamma''' f''' =]\ +0,05023 - 17,088 = -0,8583$$
$$[\alpha^{IV}\gamma^{IV} f^{IV} =]\ +0,05661 + 9,787 = +0,5540$$
$$= [-0,0798]$$

$$\left[-0,0798\cdot\frac{g}{2} =\right] -0,0798 . 3175'' = 254''$$

$$\left[254''\frac{\partial n}{n-1} =\right] 254'' \times \frac{0,0108}{0,515} = 5''\,[*)].$$

[*) Die Vergrößerung ist auch hier wieder nicht bestimmt; theoretisch soll sie sich gleich dem Werte von δ^{IV} ergeben, was im Falle B des FRAUNHOFERschen Fernrohrs auch wirklich durch den Versuch bestätigt wird.]

[III.]

DIOPTRIK.

[Aus Scheda An, Cereri, Palladi, Iunoni sacrum, Febr. 1805, S. 70, 71.

Drei Gläser, deren Brennweiten [in Fuss]

$$2{,}090 \left[= \frac{1}{f}\right],\quad 0{,}353 \left[= \frac{1}{f'}\right],\quad 0{,}152 \left[= \frac{1}{f''}\right]$$

[sind,] sollen für ein kurzsichtiges Auge, dessen Gesichtsweite $= 0{,}4$ ist, zu einem Fernrohre arrangirt werden in welchem der farbige Rand gehoben ist.

[I$^{\text{te}}$ Hypothese.]

$$h = 1{,}937,\quad h' = 0{,}2079$$

$$\begin{array}{llll}
\alpha &= 1 & \gamma &= 0\\
\beta &= 0{,}47847 & \delta &= 1\\
\alpha' &= -0{,}07321 & \gamma' &= 1{,}937\\
\beta' &= -0{,}68584 & \delta' &= 4{,}4867\\
\alpha'' &= -0{,}06938 & \gamma'' &= -\ 1{,}0042\\
\beta'' &= +0{,}22939 & \delta'' &= -11{,}0933.
\end{array}$$

[Berechnung des farbigen Randes:]

$$\partial\delta' \left[= \gamma' f' \frac{\partial n}{n-1}\right] = 5{,}4867 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right],$$

$$\partial\gamma'' \left[= h'\gamma' f' \frac{\partial n}{n-1} = h'(\delta+\delta')\frac{\partial n}{n-1}\right] = 1{,}1407 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right],$$

$$\partial\delta'' \left[= \{(f''h'-1)(\delta'+\delta)+(\delta''+\delta')\}\frac{\partial n}{n-1}\right] = -4{,}5887 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right],$$

$$[\alpha''\partial\delta'' =]\ +0{,}31836 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right]$$

$$[-\beta''\partial\gamma'' =]\ \ \ 0{,}26166 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right]$$

$$[\alpha''\partial\delta'' - \beta''\partial\gamma'' =]\ +0{,}0567 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right].$$

[II$^{\text{te}}$ Hypothese.]

$$h = 1{,}947,\quad h' = 0{,}2036$$

$$\begin{array}{llll}
\alpha &= 1 & \gamma &= 0\\
\beta &= 0{,}47847 & \delta &= 1\\
\alpha' &= -0{,}06842 & \gamma' &= 1{,}947\\
\beta' &= -0{,}67230 & \delta' &= 4{,}5156\\
\alpha'' &= -0{,}06846 & \gamma'' &= -\ 1{,}0276\\
\beta'' &= +0{,}22190 & \delta'' &= -11{,}2781.
\end{array}$$

[Berechnung des farbigen Randes:]

$$\partial\delta' = 5{,}5156 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right],$$

$$\partial\gamma'' = 1{,}1230 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right],$$

$$\partial\delta'' = -4{,}8899 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right],$$

$$[\alpha''\partial\delta'' =]\ +0{,}33476 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right],$$

$$[-\beta''\partial\gamma'' =]\ -0{,}24919 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right],$$

$$[\alpha''\partial\delta'' - \beta''\partial\gamma'' =]\ +0{,}0856 \cdot \left[\frac{\partial n}{n-1}\right].$$

III$^{\text{te}}$ Hypothese.

$$[h =]\ 1{,}917,\quad [h' =]\ 0{,}2165$$

$$\begin{array}{llll}
[\alpha &= 1 & \gamma &= 0\\
\beta &= 0{,}47847 & \delta &= 1\\
\alpha' &= -0{,}08277 & \gamma' &= 1{,}917\\
\beta' &= -0{,}71295 & \delta' &= 4{,}43059\\
\alpha'' &= -0{,}07158 & \gamma'' &= -\ 0{,}95778\\
\beta'' &= +0{,}24203 & \delta'' &= -10{,}73177.
\end{array}$$

Berechnung des farbigen Randes:

$$\begin{aligned}
\partial\delta' &= 5{,}4306 \cdot \frac{\partial n}{n-1},\\
\partial\gamma'' &= 1{,}1757 \cdot \frac{\partial n}{n-1},\\
\partial\delta'' &= -3{,}99698 \cdot \frac{\partial n}{n-1},\\
\alpha''\partial\delta'' &= 0{,}2861 \cdot \frac{\partial n}{n-1},\\
-\beta''\partial\gamma'' &= -0{,}2883 \cdot \frac{\partial n}{n-1},
\end{aligned}$$

farbiger Rand $\alpha''\partial\delta''-\beta''\partial\gamma'' = -0{,}0024 \cdot \frac{\partial n}{n-1}]$.

Ort des Auges 0,089

Blendung v[om] Objectiv 0,116

Gesichtsfeld $4^{0}\,18'$.

ERLÄUTERUNGEN ZU DEN ABSCHNITTEN [I.] BIS [III.]*).

Zum Abschnitt [I.], S. 117.

Der »*Neue Algorithmus*« in [I.] ist im Wesentlichen der EULERsche, den GAUSS auch in seinen *Dioptrischen Untersuchungen* (Werke V, S. 250) benutzt hat. Die Formelgruppen [III] bis [VI] ergeben sich an der Hand der Figuren A und B durch Anwendung der gewöhnlichen Linsenformel:

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=f$$

$\left(g = \text{Gegenstandsweite},\ b = \text{Bildweite},\ \frac{1}{f} = \text{Brennweite}\right)$, indem man der Reihe nach eine Linse nach der andern durchrechnet. In Figur A wird der Gang der sogenannten »Hauptstrahlen«, in Figur B derjenige der sogenannten »Öffnungsstrahlen« durch das zentrierte System hindurch verfolgt.

Aus Figur B ergibt sich zunächst, da die Strahlen parallel einfallend gedacht werden, daß $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{f}$, also mit $\alpha = 1$, daß $\beta = f$ ist, was die erste Gleichung [IV] liefert. Dann ist $\frac{\alpha'}{\beta}$ offenbar gleich $h-\frac{1}{f}$, wenn h den Abstand zwischen der ersten und zweiten Linse bezeichnet. Daraus ergibt sich $\alpha' = hf-1$, in Übereinstimmung mit der zweiten Gleichung [III]; ferner sieht man, daß die Gegenstandsweite für die zweite Linse den Wert $h-\frac{1}{f}$ hat. Nach der Linsenformel folgt daraus die Beziehung:

$$\frac{1}{h-\frac{1}{f}}+\frac{\beta'}{\alpha'}=f',$$

*) Diese Erläuterungen beruhen im Wesentlichen auf Mitteilungen von M. v. ROHR und H. BOEGEHOLD.

oder nach Einsetzen der Werte:

$$\frac{f}{fh-1}+\frac{\beta'}{fh-1}=f';$$

dies liefert für β'

$$\beta' = f'(fh-1)-f,$$

was in der Tat mit der zweiten der Gleichungen [IV] übereinstimmt, u.s.w.

Ebenso ist es mit Figur A. Da δ gleich 1 gesetzt ist, so ist

$$\frac{\gamma'}{\delta}=\gamma'=h,$$

was mit der zweiten der Gleichungen [V] übereinstimmt; betrachtet man ferner in Figur A die Strecke h als Gegenstandsweite für die zweite Linse, $\frac{\gamma'}{\delta'}$ als Bildweite, so liefert die Linsenformel wieder:

$$\frac{1}{h}+\frac{\delta'}{\gamma'}=\frac{1}{h}+\frac{\delta'}{h}=f',$$

oder:

$$\delta' = hf'-1 = (h, f'),$$

was mit der zweiten der Gleichungen [VI] übereinstimmt. In dieser Weise verifiziert man leicht die gesamten Formelgruppen [III] bis [VI]. Auch findet man leicht folgende Rekursionsformeln, die für die späteren Rechnungen nützlich sind:

$$\begin{array}{llll}
\alpha = 1, & \beta = f, & \gamma = 0, & \delta = 1,\\
\alpha' = h\,\beta-\alpha, & \beta' = f'\,\alpha'-\beta, & \gamma' = h\,\delta-\gamma, & \delta' = f'\,\gamma'-\delta,\\
\alpha'' = h'\,\beta'-\alpha', & \beta'' = f''\,\alpha''-\beta', & \gamma'' = h'\,\delta'-\gamma', & \delta'' = f''\,\gamma''-\delta',\\
\alpha''' = h''\,\beta''-\alpha'', & \beta''' = f'''\,\alpha'''-\beta'', & \gamma''' = h''\,\delta''-\gamma'', & \delta''' = f'''\,\gamma'''-\delta'',
\end{array}$$

u.s.w.

In derselben Weise ergeben sich auch die Formeln [VII] bis [VIIc] für den farbigen Rand.

Zum Abschnitt [II.], S. 120.

Im Abschnitt [II.] sind drei Fernrohre mit Hilfe der im Abschnitt [I.] angegebenen Formeln analysiert, d. h. die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus den gegebenen Stücken h und f bestimmt, daraus der farbige Rand. Um die Beziehung auf Abschnitt [I.] zu erleichtern, sind im GAUSSschen Texte vielfach in eckigen Klammern [ ] die Bezeichnungen von [I.] hinzugefügt, sodaß die Rechnung ohne Mühe verfolgt werden kann.

Auf der Göttinger Sternwarte befindet sich ein FRAUNHOFERsches Zugfernrohr, dessen Objektivdeckel von GAUSS' Hand den Vermerk trägt: »GAUSS 1815«. Die Dimensionen desselben sind denen, die GAUSS in Abschnitt [II, B] angibt, sehr ähnlich, aber doch nicht mit ihnen identisch. Eine sorgfältige Messung ergab z. B. für die Brennweite des Objektivs den Wert 437,1 mm, während GAUSS 444 mm angibt. Ferner ist beim Okular zwar der von mir gemessene Abstand von Linse 1 und 4, nämlich 177,6 mm, dem GAUSSschen Werte 176,8 mm sehr benachbart, aber die Abstände der Linsen 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4 voneinander zeigen deutliche Differenzen. Statt der GAUSSschen Werte

$$h' = 46{,}2\text{ mm},\quad h'' = 78{,}0\text{ mm},\quad h''' = 52{,}6\text{ mm}$$

finde ich

$$h' = 49{,}2\text{ mm},\quad h'' = 80{,}8\text{ mm},\quad h''' = 47{,}6\text{ mm}.$$

Es wäre allerdings nicht ausgeschlossen, daß an dem Okular nachträglich Verschiebungen der Linsen gegeneinander vorgenommen worden wären, so daß es nicht möglich ist, mit Sicherheit die Identität des vorliegenden Fernrohrs mit dem von GAUSS in dem Abschnitt [II, B] untersuchten zu behaupten oder zu verneinen, zumal da aus einem Briefe von GAUSS an ENCKE vom 2. Januar 1840 (siehe weiter unten S. 154) hervorzugehn scheint, daß GAUSS mehrere FRAUNHOFERsche Instrumente von etwa gleicher Größe zur Verfügung gehabt hat.

Zum Abschnitt [III.], S. 126.

Zur Lösung der hier gestellten Aufgabe macht GAUSS drei versuchsweise Ansätze, in der Handschrift als I^{te}, II^{te} und III^{te} Hypothese bezeichnet. Das Objektiv ist als achromatisch angenommen, die beiden Okularlinsen, wie dies auch heute noch zu geschehen pflegt, als aus demselben Glasflusse bestehend. Die drei Brennweiten sind gegeben. In den drei Hypothesen werden geeignet erscheinende Werte von h und h' angenommen, sodaß nach der Vorschrift von Abschnitt [I.] die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und aus diesen der farbige Rand bestimmt werden kann. Für die Berechnung des letzteren ist noch folgendes zu bemerken: Der farbige Rand ist nach Gleichung [VIIa] in Abschnitt [I.] proportional $\frac{\partial n}{n-1}$; da der Rand zum Verschwinden gebracht werden soll, so braucht der Proportionalitätsfaktor $\frac{\partial n}{n-1}$ gar nicht erst berechnet zu werden, und so hat GAUSS ihn einfach weggelassen. Der Deutlichkeit halber ist er jedoch beim Abdruck in Klammern wieder hinzugesetzt worden.

Ein Vergleich des zweiten Ansatzes mit dem ersten zeigt, daß durch die zweite Wahl von h und h' der farbige Rand beträchtlicher geworden ist; bei der dritten Hypothese sind daher h und h' im umgekehrten Sinne geändert worden. In der Handschrift ist die Rechnung nicht durchgeführt; sie ist beim Abdruck in Klammern hinzugesetzt worden und zeigt, daß nun der farbige Rand rund zwanzigmal kleiner ist, als bei den vorhergehenden Annahmen, sodaß die dritte Hypothese als die sehr angenäherte Lösung der gestellten Aufgabe angesehen werden kann. Gleichzeitig überzeugt man sich, daß auch die für ein kurzsichtiges Auge von der Augenweite k geltende Beziehung

$$\beta''\delta''k = -1$$

sehr angenähert erfüllt ist. — Die Angaben für den Ort des Auges, Blendung des Objektivs und Gesichtsfeld des Fernrohres rühren wieder von GAUSS her und zeigen, daß er sich wohl selbst durch Rechnung überzeugt hatte, daß dieser dritte Ansatz dem gestellten Problem genügt.

SCHAEFER.

[IV.]

AUFGABE [AUS DER DIOPTRIK].

[Aus Handbuch 19, Be, S. 90.]

Ein Lichtstral fällt auf eine Kugelfläche, deren Halbmesser $= r$, Brechungsverhältniss $n:1$ ist. Abscissen x werden vom Centrum gezählt. Vor der Brechung sind die Gleichungen der Lichtbahn

$$y = \alpha + \mu x$$
$$z = \beta + \nu x,$$

nach der Brechung hingegen

$$y = \alpha' + \mu' x$$
$$z = \beta' + \nu' x.$$

Man soll $\alpha', \beta', \mu', \nu'$ aus α, β, μ, ν bestimmen.

Ist $\mu = 0$, $\nu = 0$, so trifft der gebrochene Stral die Axe in

$$x = \frac{\sqrt{(nnrr - \alpha\alpha - \beta\beta)} + \sqrt{(rr - \alpha\alpha - \beta\beta)}}{nn - 1}$$

und man hat

$$\alpha' = \alpha \cdot \frac{\sqrt{(nnrr - \alpha\alpha - \beta\beta)} + \sqrt{(rr - \alpha\alpha - \beta\beta)}}{\sqrt{(nnrr - \alpha\alpha - \beta\beta)} + nn\sqrt{(rr - \alpha\alpha - \beta\beta)}}$$

$$\mu' = -\frac{\alpha(nn-1)}{\sqrt{(nnrr - \alpha\alpha - \beta\beta)} + nn\sqrt{(rr - \alpha\alpha - \beta\beta)}}.$$

Ist $\beta = 0$, $\nu = 0$, so hat man,

$$\sqrt{((1+\mu\mu)rr - \alpha\alpha)} = P$$
$$\sqrt{((1+\mu\mu)nnrr - \alpha\alpha)} = Q$$
$$nnP + Q + \alpha\mu(nn-1) = N$$

gesetzt,

$$\alpha' = \frac{\alpha(P+Q)}{N} = \alpha - \frac{\alpha(nn-1)(P+\alpha\mu)}{N}$$

$$\mu' = \mu - \frac{\alpha(1+\mu\mu)(nn-1)}{N}.$$

Macht man

$$\alpha = \lambda\sqrt{(1+\mu\mu)}, \qquad \alpha' = \lambda'\sqrt{(1+\mu'\mu')},$$

so wird

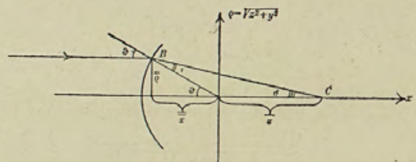
$$\lambda' = \frac{\lambda}{n}$$

$$\mu' = \mu - \frac{\lambda(1+\mu\mu)(nn-1)}{nn\sqrt{(rr-\lambda\lambda)}+\sqrt{(nnrr-\lambda\lambda)}+(nn-1)\lambda\mu}.$$

ERLÄUTERUNGEN.

Die hier gestellte Aufgabe, die $\alpha', \beta', \mu', \nu'$ aus den α, β, μ, ν zu bestimmen, ist die auch in den »*Dioptrischen Untersuchungen*« vorliegende (Werke V, S. 246 ff.); sie wird hier anders gelöst, als dort.

Der hier zuerst behandelte Spezialfall $\mu = \nu = 0$ bedeutet, daß der einfallende Strahl parallel der x-Achse (d. h. der Achse des optischen Systems) eintritt; bezieht man sich auf die folgende Figur, die in der Ebene der x und $\rho = \sqrt{y^2+z^2}$, d. h. der Ebene des einfallenden und gebrochenen Strahles, gezeichnet ist, so hat man offenbar folgendes:



Die Koordinaten des Punktes B, in dem der einfallende Strahl die Kugelfläche trifft, sind $\bar{\rho} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, gemäß der Bedingung, daß für den einfallenden Strahl $\mu = \nu = 0$ sind, und $\bar{x} = \sqrt{r^2-\alpha^2-\beta^2}$, da B gleichzeitig auf dem Kreise $x^2+\rho^2 = r^2$ liegt. Also erhält man für den Kosinus und Sinus des spitzen Winkels ϑ die Werte:

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{r^2-\alpha^2-\beta^2}}{r}, \qquad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{r}.$$

Nach dem Brechungsgesetz ist

$$\frac{\sin\vartheta}{n} = \sin\varepsilon,$$

und daher folgt für den spitzen Winkel ε:

$$\sin\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{nr}, \qquad \cos\varepsilon = \frac{\sqrt{n^2r^2-\alpha^2-\beta^2}}{nr}.$$

Endlich ist der spitze Winkel σ, den der gebrochene Strahl mit der x-Achse bildet, gleich $\vartheta-\varepsilon$, also:

$$\sin\sigma = \sin(\vartheta-\varepsilon) = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left\{\sqrt{n^2r^2-\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{r^2-\alpha^2-\beta^2}\right\}}{nr^2},$$

also nach dem Sinussatze

$$\bar{x} = r\frac{\sin\varepsilon}{\sin\sigma} = \frac{r^2}{\sqrt{n^2r^2-\alpha^2-\beta^2}-\sqrt{r^2-\alpha^2-\beta^2}},$$

oder

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{n^2r^2-\alpha^2-\beta^2}+\sqrt{r^2-\alpha^2-\beta^2}}{n^2-1},$$

was genau der von Gauss angegebene Wert ist. Die Koordinaten des Punktes C, in dem der gebrochene Strahl die Achse trifft, sind also folgende:

$$\bar{x} = \frac{\sqrt{n^2r^2-\alpha^2-\beta^2}+\sqrt{r^2-\alpha^2-\beta^2}}{n^2-1}, \qquad \bar{\rho} = 0,$$

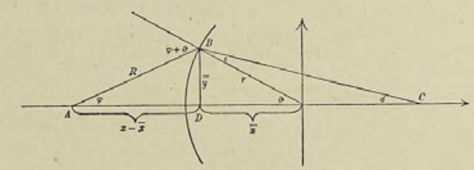
d. h. $\bar{y} = \bar{z} = 0$.

Setzt man nun an, daß die Ebene

$$y = \alpha' + \mu' x$$

durch die beiden Punkte B und C hindurchgeht, so erhält man ohne weiteres die von Gauss im Texte angegebenen Werte für α' und μ' und entsprechend für β' und γ'.

Der zweite Spezialfall ist durch $\beta = \nu = 0$ charakterisiert, d. h. die Ebene des einfallenden und gebrochenen Strahles ist mit der xy-Ebene zusammenfallend gedacht, was übrigens in keiner Weise eine Beschränkung der Allgemeinheit ist. Wir haben dann folgende Figur:



Zunächst erhält man für die Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}$ des Schnittpunktes B des einfallenden Strahls mit der Kugelfläche die Werthe

$$\bar{x} = -\frac{\alpha\mu+P}{1+\mu^2}, \qquad \bar{y} = \frac{\alpha-\mu P}{1+\mu^2},$$

wo P die von Gauss benützte Abkürzung für $\sqrt{(1+\mu^2)r^2-\alpha^2}$ ist.

Die Koordinaten x, y des Punktes A, in dem der einfallende Strahl die Abszissenachse schneidet, sind offenbar:

$$x = -\frac{\alpha}{\mu}, \qquad y = 0,$$

also folgt für die Strecke $AB = R$ der Wert

$$R = \frac{\alpha-\mu P}{\mu\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Es ergeben sich dann der Reihe nach folgende Werte für Kosinus und Sinus der Winkel $\vartheta, \varphi, \varepsilon, \sigma$, deren Beziehungen aus der Figur abzulesen sind:

$$\cos\vartheta = \frac{\alpha\mu + P}{r(1+\mu^2)}, \qquad \sin\vartheta = \frac{\alpha - \mu P}{r(1+\mu^2)},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

$$\cos\varepsilon = \frac{Q}{nr\sqrt{1+\mu^2}}, \qquad \sin\varepsilon = \frac{\alpha}{nr\sqrt{1+\mu^2}},$$

$$\cos\sigma = \frac{Q(\alpha\mu + P) + \alpha(\alpha - \mu P)}{nr^2(1+\mu^2)\sqrt{1+\mu^2}},$$

$$\sin\sigma = \frac{Q(\alpha - \mu P) - \alpha(\alpha\mu + P)}{nr^2(1+\mu^2)\sqrt{1+\mu^2}};$$

also folgt schließlich für $\operatorname{tg}\sigma$, das definitionsgemäß gleich $-\mu'$ ist,

$$-\mu' = \operatorname{tg}\sigma = \frac{Q(\alpha - \mu P) - \alpha(\alpha\mu + P)}{Q(\alpha\mu + P) + \alpha(\alpha - \mu P)},$$

worin Q wie im Texte gleich $\sqrt{(1+\mu^2)n^2r^2 - \alpha^2}$ zu nehmen ist. Setzt man darin die Werte ein, so folgt der von GAUSS angegebene Wert für μ', und aus diesem sofort derjenige von α'.

Die gestellte Aufgabe ist damit gelöst.

SCHAEFER.

[V.]

ACHROMATISCHE DOPPELOBJECTIVE, OHNE RÜCKSICHT AUF DICKE UND ABSTAND.

[Aus Handbuch 21, Bg, S. 29, 30.]

$(1+m)$: 1 Brechungsverhältniss der rothen Strahlen in der ersten Linse;
$(1+m')$: 1 » » » » » » zweiten » ;
$(1+M)$: 1 » » violetten » » » ersten » ;
$(1+M')$: 1 » » » » » » zweiten » ;
$\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\rho'}, \frac{1}{\sigma'}$ Halbmesser der Flächen, positiv, wenn convex;
p, P erste Vereinigungsweite für rothe und violette Strahlen;
ω Brennweite.

[Dann ist:]

[1] $$\rho + \sigma = \frac{1}{mp}$$

[2] $$\rho - \sigma = \frac{2m+4}{m+3}\cdot\frac{1}{p} + \frac{(m+1)\sqrt{(4m+3)}}{m(m+3)}\cdot\frac{1}{p}\sqrt{(l-1)}$$

[3] $$\rho' + \sigma' = \frac{1}{m'}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right)$$

[4] $$\rho' - \sigma' = \frac{2m'+4}{m'+3}\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{p}\right) + \frac{(m'+1)\sqrt{(4m'+3)}}{m'(m'+3)}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right)\sqrt{(l'-1)};$$

[Bedingung, dass die sphärische Aberration, die durch beide Linsen des Doppelobjektivs erzeugt wird, verschwindet:]

[5] $$0 = \frac{(m+1)(4m+3)}{mm(m+3)}\cdot\frac{l}{p^3} + \frac{(m'+1)(4m'+3)}{m'm'(m'+3)}\,l'\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right)^3 - \frac{4(m'+1)}{m'+3}\cdot\frac{1}{\omega p}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right).$$

Man setze

[6] $$a = \frac{m(m+1)(4m+3)}{(m+3)(M-m)^2}$$

[7] $$b = \frac{m'(m'+1)(4m'+3)}{(m'+3)(M'-m')^2}$$

[8] $$c = \frac{m'(m'+1)}{m'+3} \cdot \frac{4m(mM'-m'M)}{(M-m)^2(M'-m')^2}$$

[9] $$e = \frac{2m(m+2)}{m+3}$$

[10] $$f = \frac{(m+1)\sqrt{(4m+3)}}{m+3}\sqrt{\frac{a-b+c}{a}}$$

[11] $$e' = \frac{2(m'+2)}{m'+3} \cdot \frac{2mM'-m'M-mm}{m-M}$$

[12] $$f' = \frac{(m'+1)\sqrt{(4m'+3)}}{m'+3}\sqrt{\frac{a-b+c}{b}}.$$

So wird

[Ia] $$\frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} = e + f \operatorname{tang} \psi$$

[Ib] $$\frac{\rho'-\sigma'}{\rho'+\sigma'} = e' + f' \sec \psi,$$

wo ψ willkürlich angenommen werden kann, wenn bloss die rothen Strahlen genau vereinigt werden sollen.

Will man bloss die violetten Strahlen vereinigen, so setze man

[IIa] $$\frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} = E + F \operatorname{tang} \Psi,$$

[IIb] $$\frac{\rho'-\sigma'}{\rho'+\sigma'} = E' + F' \sec \Psi,$$

wo die Formeln für E, F, E', F' aus denen für e, f, e', f' entstehen, wenn bloss alle kleinen Buchstaben mit den grossen vertauscht werden. Bestimmt man ψ und Ψ so, dass allen vier Gleichungen zugleich Genüge geschieht, so werden alle Strahlen vereinigt;

$$\frac{\rho'+\sigma'}{\rho+\sigma} = -\frac{M-m}{M'-m'}.$$

Noch einfacher wird folgendes Verfahren seyn

$$\frac{M-m}{M'-m'} = \theta, \qquad p = \omega\left(1 - \frac{m'}{m}\theta\right)$$

$$a = \frac{m(m+1)(4m+3)}{m+3}$$

$$b = \frac{m'(m'+1)(4m'+3)\theta^2}{m'+3}$$

$$c = \frac{m'(m'+1)}{m'+3} \cdot 4mm\theta\left(1 - \frac{m'\theta}{m}\right)$$

$$e = \frac{2m(m+2)}{m+3}$$

$$f = \frac{(m+1)\sqrt{(4m+3)}}{m+3}\sqrt{\frac{a-b+c}{a}}$$

$$e' = -\frac{2(m'+2)}{m'+3} \cdot \frac{2m-m'\theta}{\theta}$$

$$f' = \frac{(m'+1)\sqrt{(4m'+3)}}{m'+3}\sqrt{\frac{a-b+c}{b}}$$

$$\frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} = \frac{2m(m+2)}{m+3} + \frac{(m+1)\sqrt{(4m+3)}}{m+3}\sqrt{\frac{a-b+c}{a}} \cdot \operatorname{tg}\psi$$

$$\frac{\rho'+\sigma'}{\rho+\sigma} = -\theta$$

$$\frac{\rho'-\sigma'}{\rho+\sigma} = +\frac{2(m'+2)}{m'+3} \cdot m\left(2 - \frac{m'}{m}\theta\right) + \frac{(m'+1)\sqrt{(4m'+3)}}{m'+3} \cdot \sqrt{\frac{a-b+c}{b}} \cdot \theta \sec\psi$$

$$1 - \frac{M'\theta}{M} = \frac{m}{M}\left(1 - \frac{m'}{m}\theta\right).$$

[Numerische Berechnung.]

$m = 0{,}504\,348$	$M-m$ ..... $8{,}3350164$
$M = 0{,}525\,976$	$M'-m'$ ..... $8{,}6011905$
$m' = 0{,}581\,810$	θ .... $9{,}7338259$
$M' = 0{,}621\,730$	m' .... $9{,}7647812$

$$\theta m' = 0{,}31521514$$

$$m - \theta m' = 0{,}18913286$$

$$[\log(m-\theta m') =]\ 9{,}2767670$$

[Hier folgen Berechnungen der Konstanten $a, b, c, \ldots A, B, C, \ldots$, die schliesslich folgendes Resultat ergeben:]

Also

$$\frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} = 0{,}7208547 + 0{,}8859269 \operatorname{tg}\psi$$
$$= 0{,}7536083 + 0{,}8974447 \operatorname{tg}\Psi\,[^*)]$$

$$\frac{\rho'-\sigma'}{\rho+\sigma} = 0{,}9974386 + 1{,}1353112 \sec\psi$$
$$= 1{,}0353119 + 1{,}1407444 \sec\Psi\,[^*)].$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn man setzt

[*) In der Handschrift steht hier irrtümlich statt Ψ der Buchstabe ψ', der im Vorhergehenden nicht eingeführt ist.]

$$\frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} = +1{,}8334367$$
$$\psi = 321^0\,28'\,13'',40$$
$$\Psi = 320^0\,16'\;\;8'',79$$
$$\frac{\rho'-\sigma'}{\rho+\sigma} = +2{,}8200047.$$

ERLAUTERUNGEN.

Die GAUSSsche Handschrift enthält einen Teil der Rechnungen für das von ihm angegebene Doppelobjektiv (vergl. Werke V, S. 504 ff.). GAUSS stützt sich hierbei ganz auf EULERS *Dioptricae pars prima continens librum primum, de explicatione principiorum ex quibus constructio tam telescopiorum quam microscopiorum est petenda,* Petropoli 1769; wir zitieren dieses Werk im folgenden nach der neuen Ausgabe: LEONHARDI EULERI Opera omnia, series III, vol. 3, 1911.

GAUSS knüpft an die drei letzten Formeln auf S. 34 der Dioptrik EULERS an, die folgendes Problem lösen: Bei gegebenem Objektabstand a und gegebenem Bildabstand α gibt es unendlich viele, als unendlich dünn betrachtete Einzellinsen, die dann das Objekt in dem Bildpunkt abbilden; allerdings ist die sphärische Aberration (EULERS »spatium diffusionis«) je nach Wahl der Linse verschieden groß, und einer bestimmten Linse entspricht das Minimum derselben. In GAUSSscher Schreibweise lauten die genannten EULERschen Formeln für die Radien dieser Linsen folgendermaßen:

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{a\alpha}{r\alpha + sa \pm \tau(a+\alpha)\sqrt{l-1}}, \\[2ex] \dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{a\alpha}{ra + s\alpha \mp \tau(a+\alpha)\sqrt{l-1}}, \end{cases}$$

und die sphärische Aberration wird gleich

$$(\beta)\qquad P\alpha^2x^2 = \mu\alpha^2x^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)\left[l\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{\nu}{a\alpha}\right];$$

x ist dabei die Apertur der (ersten) Linse und r, s, τ, μ, ν haben die folgende Bedeutung, wenn $(m+1)$ der Brechungsexponent der (ersten) Linse für rotes Licht ist:

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} \mu = \dfrac{(m+1)(4m-3)}{8m^2(m+3)}, \\[2ex] \nu = \dfrac{4m^2}{4m+3}, \\[2ex] r = \dfrac{1}{2m} + \dfrac{1}{m+3} - 1, \\[2ex] s = 1 + \dfrac{1}{2m} - \dfrac{1}{m+3}, \\[2ex] \tau = \dfrac{(m+1)\sqrt{4m+3}}{2m(m+3)}. \end{cases}$$

Ferner ist l ein Parameter $\geqq 1$; setzt man ihn gleich 1, so erhält man diejenige Linse, für die die sphärische Aberration ein Minimum wird. Denkt man sich eine zweite Linse, die das Bild der ersten zum Objekte hat (Objektabstand b) und dieses im Bildabstande β abbildet, so lauten dafür die entsprechenden

Formeln:

$$(\delta)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho'} = \dfrac{b\beta}{r'\beta + s'b \pm \tau'(b+\beta)\sqrt{l'-1}}, \\[2ex] \dfrac{1}{\sigma'} = \dfrac{b\beta}{r'b + s'\beta \mp \tau'(b+\beta)\sqrt{l'-1}}, \\[2ex] \text{Aberration} = Q\beta^2x'^2 = \mu'\beta^2x'^2\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{\beta}\right)\left[l'\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{\beta}\right)^2 + \dfrac{\nu'}{b\beta}\right]. \end{cases}$$

Die gestrichelten Größen $\mu', \nu', r', s', \tau'$ sind nach (γ) mit $(m'+1)$, dem Brechungsexponenten der zweiten Linse für rotes Licht zu bilden; x' ist die Apertur der zweiten Linse.

Steht die zweite Linse unmittelbar hinter der ersten, so ist offenbar:

$$(\varepsilon)\qquad b = -\alpha,$$

und die Gesamtaberration beider Linsen ist nach EULER (*Dioptrica,* S. 65 und 75):

$$\text{Gesamtaberration} = P + Q,$$

wo P und Q die aus (β) und der letzten Gleichung (δ) ersichtlichen Abkürzungen sind.

Wir führen nun die speziellen Bedingungen und Bezeichnungen der GAUSSschen Handschrift ein. Nach GAUSS ist:

$$a = \infty,\quad \beta = \omega,\quad b = -\alpha = p;$$

setzt man diese Werte in die beiden Gleichungen (α) ein, so folgt für ρ und σ:

$$(\zeta)\qquad \begin{cases} \rho = \dfrac{s}{p} \mp \dfrac{\tau\sqrt{l-1}}{p}, \\[2ex] \sigma = \dfrac{r}{p} \mp \dfrac{\tau\sqrt{l-1}}{p}, \end{cases}$$

also:

$$\rho + \sigma = \frac{s+r}{p},$$

oder nach Benutzung von (γ):

$$(\eta)\qquad \rho + \sigma = \frac{1}{mp},$$

was mit der GAUSSschen Gleichung [1] übereinstimmt.

Ebenso folgt aus (ζ) und (γ) die GAUSSsche Gleichung [2]:

$$(\vartheta)\qquad \rho - \sigma = \frac{s-r}{p} \pm \frac{2\tau\sqrt{l-1}}{p} = \frac{2m+4}{(m+3)p} \pm \frac{(m+1)\sqrt{4m+3}\sqrt{l-1}}{m(m+3)p};$$

GAUSS benutzt im Folgenden nur das obere Zeichen.

In derselben Weise folgen aus (δ) und den in den gestrichelten Größen geschriebenen Gleichungen (γ) die Formeln:

$$\rho' + \sigma' = \frac{1}{m'}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right),$$
$$\rho' - \sigma' = \frac{2m'+4}{m'+3}\left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{p}\right) + \frac{(m'+1)\sqrt{4m'+3}}{m'(m'+3)}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right)\sqrt{l'-1},$$

d. h. die GAUSSschen Gleichungen [3] und [4], S. 135.

Die Forderung, daß die gesamte sphärische Aberration, die durch die Linsenkombination hervorgebracht ist, verschwinde, ist nach dem Vorhergehenden offenbar $P + Q = 0$, d. h., da für unsere Bedingungen

$$P = \frac{\mu}{p^3}\, l,$$

$$Q = \mu' \left\{\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right\} \left\{l' \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right)^2 - \frac{\nu'}{p\,\omega}\right\}$$

ist, so folgt die Gleichung:

$$(\iota) \qquad \frac{\mu l}{p^3} + \mu' \left\{\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right\} \left\{l' \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right)^2 - \frac{\nu'}{p\,\omega}\right\} = 0,$$

die durch Einsetzen der Werte μ, μ', ν, ν' u.s.w. nach Gleichung (γ) übergeht in die GAUSSsche Gleichung [5]:

$$(\varkappa) \qquad \frac{(m+1)(4m+3)}{m^2(m+3)}\, \frac{l}{p^3} + \frac{(m'+1)(4m'+3)\, l'}{m'^2(m'+3)} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right)^3 - \frac{4(m'+1)}{m'+3}\, \frac{1}{\omega p} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right) = 0.$$

Nun ist nach der gewöhnlichen Linsenformel die reziproke Brennweite einer Linse gleich $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$, und man hat weiter

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} = (n-1)(\rho + \sigma),$$

wenn man für einen Augenblick den Brechungsexponenten für eine beliebige Farbe mit n bezeichnet. Da nach GAUSS die Brennweite (GAUSS schreibt »erste Vereinigungsweite«) der ersten Linse für rotes Licht p, für violettes P genannt wird, und in seiner Bezeichnungsweise die entsprechenden Brechungsexponenten $m+1$) bezw. $(M+1)$ sind, so folgt durch zweimalige Anwendung der letzten Formel:

$$\frac{1}{p} = m(\rho + \sigma),$$

$$\frac{1}{P} = M(\rho + \sigma),$$

also:

$$(\lambda) \qquad \frac{1}{mp} = \frac{1}{MP}.$$

Für die zweite Linse gilt ebenso, wenn wir zunächst die alten Bezeichnungen b und β wiederaufnehmen:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} = (n'-1)(\rho' + \sigma'),$$

wobei n' der Brechungsexponent für eine beliebige Farbe sei. Für rotes Licht ist nach dem Früheren $b = -p$, für violettes dagegen $b = -P$ zu nehmen. Da ferner die GAUSSschen Brechungsexponenten bezw. $(m'+1)$ und $(M'+1)$ sind, so ergibt die zweimalige Anwendung dieser Gleichung:

$$-\frac{1}{p} + \frac{1}{\beta_{\text{rot}}} = m'(\rho' + \sigma'),$$

$$-\frac{1}{P} + \frac{1}{\beta_{\text{viol.}}} = M'(\rho' + \sigma').$$

Jetzt verlangt die Forderung, daß die Linsenkombination **achromatisch** sein soll (wenigstens für die sog. Nullstrahlen), daß $\beta_{\text{rot}} = \beta_{\text{viol.}}$, welchen gemeinsamen Wert wir nach GAUSS jetzt mit ω bezeichnen. Dann gehen die beiden letzten Gleichungen über in die »Bedingung der Achromasie«:

$$\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{P}\right) = \frac{M'}{m'}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right)$$

die vermöge (λ) in einer der folgenden 4 Formen geschrieben werden kann:

$$(\mu) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\omega} &= \frac{M'}{m'}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{p}\right) + \frac{M}{mp}, \\ \left(\frac{M}{m} - \frac{M'}{m'}\right)\frac{1}{p} &= \left(1 - \frac{M'}{m'}\right)\frac{1}{\omega}, \\ \frac{p}{\omega} &= \frac{M'm - Mm'}{m(M'-m')}, \\ 1 - \frac{p}{\omega} &= \frac{m'(M-m)}{m(M'-m')}. \end{aligned}\right.$$

Bei vorgeschriebener Brennweite des Doppelobjektivs bestimmen die letzten Formeln p, und dieses nach dem Vorhergehenden $(\rho + \sigma)$ und $(\rho' + \sigma')$, so daß man sich die Linsen durch $(\rho + \sigma)$ und $(\rho' + \sigma')$ gegeben denken kann. Nach Division von [1] in [2], sowie von [3] in [4] erhält man dann unter Benutzung der GAUSSschen Abkürzungen e und e' nach den Gleichungen [9] und [11], S. 136:

$$(\nu) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} &= \frac{2m(m+2)}{m+3} + \frac{(m+1)\sqrt{4m+3}}{m+3}\sqrt{l-1} = e + \frac{(m+1)\sqrt{4m+3}}{m+3}\sqrt{l-1}, \\ \frac{\rho'-\sigma'}{\rho'+\sigma'} &= e' + \frac{(m'+1)\sqrt{4m'+3}}{m'+3}\sqrt{l'-1}. \end{aligned}\right.$$

Führt man ferner $\frac{p}{\omega}$ aus Gleichung (μ) in die Bedingung der sphärischen Korrektion, d. h. in die GAUSSsche Gleichung [5] ein, so nimmt diese die Gestalt an:

$$\frac{(m+1)(4m+3)}{m^2(m+3)}\, l - \frac{(m'+1)(4m'+3)}{m'^2(m'+3)} \left(\frac{m'}{m}\right)^3 \left(\frac{M-m}{M'-m'}\right)^3 l'$$

$$+ \frac{4(m'+1)}{m'+3} \cdot \frac{M'm - Mm'}{m(M'-m')} \cdot \frac{m'(M-m)}{m(M'-m')} = 0,$$

oder:

$$(\xi) \qquad \frac{m(m+1)(4m+3)}{(m+3)(M-m)^3}\, l - \frac{m'(m'+1)(4m'+3)}{(m'+3)(M'-m')^3}\, l' + \frac{4mm'(M'm - Mm')}{(M'-m')^2(M-m)^2} = 0,$$

oder endlich, unter Verwendung der GAUSSschen Abkürzungen in den Gleichungen [6], [7] und [8] eine der drei folgenden Formen

$$(\pi) \qquad \left\{\begin{aligned} al - bl' + c &= 0, \\ a(l-1) - b(l'-1) + (a-b+c) &= 0, \\ \frac{a}{a-b+c}(l-1) - \frac{b}{a-b+c}(l'-1) + 1 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Man zeigt nun leicht, daß, wenn das erste Glas Kron, das zweite Flint ist, a, b, c größer als Null sind, sowie daß $a > b$. Da $l > 1$ ist, so ist also der Ausdruck $\frac{a}{a-b+c}(l-1)$ größer als Null, und man kann setzen:

$$\frac{a}{a-b+c}(l-1) = \operatorname{tang}^2 \psi.$$

Damit schreibt sich die letzte Gleichung (π), d. h. die Bedingung für sphärische Korrektur:

$$\frac{b}{a-b+c}(l'-1) = \sec^2 \psi.$$

Einsetzen in die Gleichungen (ν) unter Benutzung der GAUSSschen Abkürzungen f und f' liefert die

Gleichungen:

$$(\rho)\qquad \begin{cases} \dfrac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma} = c + f \operatorname{tang}\psi, \\[2mm] \dfrac{\rho'-\sigma'}{\rho'+\sigma'} = c' + f' \sec\psi, \end{cases}$$

d. h. die GAUSSschen Gleichungen [Ia] und [Ib], S. 136. Beliebige Wahl des Parameters ψ liefert also alle Doppelobjektive, die in der Achse chromatisch und für rotes Licht sphärisch korrigiert sind.

Vertauscht man m mit M, m' mit M', so erhält man die zweiteiligen Linsen, die in der Achse chromatisch und für violettes Licht sphärisch korrigiert sind. Das liefert die GAUSSschen Gleichungen [IIa] und [IIb], S. 136.

Die Behandlung der zweiten Lösungsform von GAUSS ist ganz analog. — Es ist zu bemerken, daß man, wenn nun die Brennweite vorgeschrieben wird, nicht zu dem Doppelobjektiv gelangt, das GAUSS a. a. O. angegeben hat. Denn hier sind Dicke der Linsen und ihr Abstand vernachlässigt. Indessen dient diese Rechnung, wie GAUSS selbst hervorhebt, als Ausgangspunkt, und die hier erhaltenen Näherungswerte werden für die genauere Rechnung benutzt. Diese findet sich in der Handschrift nicht.

Die erste öffentliche Erwähnung der GAUSSschen Formeln I. und II. findet sich übrigens in einem Briefe von GAUSS an SCHUMACHER vom 25. Juni 1810, *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* I, Altona 1860, S. 45 (siehe weiter unten S. 146), in dem GAUSS diese Form der Behandlung als ihm eigentümlich bezeichnet. Mittels dieser Formeln hatte er damals ein Doppelobjektiv für REPSOLD in Hamburg berechnet, über dessen Ausfall die folgenden Briefe des Briefwechsels GAUSS-SCHUMACHER Auskunft geben.

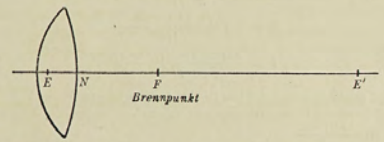
Der Inhalt dieser Erläuterung beruht im Wesentlichen auf einer schriftlichen Mitteilung von H. BOEGEHOLD in Jena.

SCHAEFER.

[VI.]

REFLEXION VON DER HINTERN FLÄCHE EINER LINSE.

[Aus Handbuch 19, Be, S. 230.]



r Halbmesser der Vorderfläche, welche die Axe in N trifft,
r^* Halbmesser der Hinterfläche, an welcher die Reflexion geschieht,

$$\frac{r}{n-1} = f,\ \frac{r^*}{n} = f^*,$$

Dicke $= ne$.

In Beziehung auf das System von zwei Brechungen und Eine Reflexion,
F Brennpunkt, E erster, E' zweiter Hauptpunkt,
$E' - E = 2F =$ doppelte Brennweite.

Die Coordinaten werden als wachsend betrachtet in dem Sinn der Bewegung der rückkehrenden Lichtstrahlen.

Formeln.

I. $$E = N - \frac{ef}{f-e}$$

II. $$E' = N + \frac{(f^*-e)f}{f^*+f-e}$$

III. $$E' - E = 2F = \frac{fff^*}{(f-e)(f+f^*-e)}.$$

ERLAUTERUNGEN.

Die gestellte Aufgabe ist ein Beispiel zur Theorie der Hauptpunkte eines Linsensystems, das etwas allgemeiner ist als das von GAUSS im Art. 11 seiner *Dioptrischen Untersuchungen* (Werke V, S. 261 ff.) behandelte.

Man erhält die GAUSSschen Formeln I, II, III, indem man in der Bezeichnung der *Dioptrischen Untersuchungen* setzt:

$$n^0 = 1, \quad n' = n, \quad n'' = -n, \quad n^* = -1.$$

Dann ergeben sich die dort (S. 250) definierten Größen u und t:

$$u^0 = \frac{1}{f}, \quad u' = \frac{2}{f^*}, \quad u'' = +\frac{1}{f},$$
$$t' = -e, \quad t'' = -e,$$

und daraus folgen dann die GAUSSschen Koeffizienten g, k, l (Werke V, S. 250, Gl. 5):

$$g = \frac{ff^* - 2ef - 2ef^* + 2e^2}{ff^*},$$
$$k = -2\,\frac{(f-e)^2 + f^*(f-e)}{fff^*},$$
$$l = \frac{2ef^* - 2e^2 - ff^* + 2ef}{ff^*},$$

aus denen sich weiter gemäß Tabelle I der *Dioptrischen Untersuchungen* (Werke V, S. 255) die angegebenen Werte für E und E' berechnen lassen. Die genannte Tabelle enthält übrigens einen Druckfehler, indem es heißen muß: $E = N^0 - \frac{n^0(1-e)}{k}$.

SCHAEFER.

Inhaltsverzeichnis:

Inhaltsverzeichnis:

I. Kapitel. Vorbereitungen.

1. Der Zahlbegriff. — Das System der reellen Zahlen. — Die Zahlensysteme.
2. Der Funktionsbegriff. — Beispiele. — Begriffliche Formulierung. — Graphische Darstellung. — Umkehrfunktionen.
3. Nähere Betrachtung der elementaren Funktionen. — Die rationalen Funktionen. — Algebraische Funktionen. — Die trigonometrischen Funktionen. — Exponentialfunktion und Logarithmus.
4. Funktionen einer ganzzahligen Veränderlichen.
5. Der Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge. Beispiele: $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{2m} = \frac{1}{m}$, $a_{2m-1} = \frac{1}{2m}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$, $a_n = \sqrt[n]{p}$, $a_n = a^n$. Zur geometrischen Veranschaulichung der Grenzwerte von α^n und $\sqrt[n]{a}$. — Die geometrische Reihe. — $a_n = \sqrt[n]{n}$, $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $a_n = \frac{n}{2^n}$.
6. Genauere Erörterung des Grenzwertbegriffes: Allgemeines. — Rechnen mit Grenzwerten. — Die Zahl e. — Die Zahl π als Grenzwert. — Das arithmetisch-geometrische Mittel.
7. Der Begriff des Grenzwertes bei stetigen Veränderlichen.
8. Der Begriff der Stetigkeit: Definitionen. — Unstetigkeitspunkte. — Sätze über stetige Funktionen.

Anhang zum I. Kapitel.

Vorbemerkungen.

1. Das Häufungsstellen-Prinzip und seine Anwendungen: Das Häufungsstellen-Prinzip. — Grenzwerte von Zahlenfolgen. Beweis des Cauchy'schen Konvergenzkriteriums. — Obere und untere Grenze, oberer und unterer Häufungspunkt einer Zahlenmenge.
2. Sätze über stetige Funktionen: Größter und kleinster Wert stetiger Funktionen. — Die Gleichmäßigkeit der Stetigkeit. — Der Zwischenwertsatz. — Umkehrung einer stetigen monotonen Funktion. — Weitere Sätze über stetige Funktionen.
3. Bemerkungen über die elementaren Funktionen.
4. Polarkoordinaten.
5. Bemerkungen über komplexe Zahlen.

II. Kapitel. Grundbegriffe der Integral- und Differentialrechnung.

1. Das bestimmte Integral: Das Integral als Flächeninhalt. — Die analytische Definition des Integrales. — Ergänzungen, Bezeichnungen und Grundregeln für das bestimmte Integral.
2. Beispiele: Erstes Beispiel. — Zweites Beispiel. — Integration von x^α bei beliebigem positivem ganzzahligem α. — Integration von x^α für beliebiges rationales α. — Integration von $\sin x$ und $\cos x$.
3. Die Ableitung oder der Differentialquotient: Differentialquotient und Kurventangente. — Der Differentialquotient als Geschwindigkeit. — Beispiele. — Einige Grundregeln für die Differentiation. — Differenzierbarkeit und Stetigkeit der Funktionen. — Höhere Ableitungen und ihre Bedeutung. — Differentialquotienten und Differenzenquotienten, Bezeichnungen von Leibniz. — Der Mittelwertsatz. — Angenäherte Darstellung beliebiger Funktionen durch lineare. — Differentiale. — Bemerkungen über die Anwendungen unserer Begriffe in der Naturwissenschaft.
4. Das unbestimmte Integral, die primitive Funktion und die Fundamentalsätze der Differential- und Integralrechnung
Integrals. —
Die Verwend
5. Ein
6. We
Massenverteil
7. Inte
rechnung. —

Anha

1. Die
2. Zus

III. K

1. Die
tion der ratio
2. Die
Funktionen.
3. Die
Umkehrfunkt
4. Die
dungen. —
5. Ma
rentialquotie
6. Lo
Additionsthe
Logarithmus
Exponentialf

Bücherzettel

An die Buchhandlung

7. Einige Anwendungen der Exponentialfunktion: Charakterisierung der Exponentialfunktion durch eine Differentialgleichung. — Stetige Verzinsung. Radioaktiver Zerfall. — Abkühlung oder Erwärmung eines Körpers in einem umgebenden Medium. — Abhängigkeit des Luftdruckes von der Höhe über dem Erdboden. — Verlauf chemischer Reaktionen. — Ein- und Ausschalten eines elektrischen Stromes.
8. Die Hyperbelfunktionen: Analytische Definition. — Additionstheorem und Differentiationsformeln. — Die Umkehrfunktionen. — Weitere Analogien.
9. Die Größenordnung von Funktionen: Begriff der Größenordnung. Einfachste Fälle. — Die Größenordnung der Exponentialfunktion und des Logarithmus. — Allgemeine Bemerkungen. — Die Größenordnung einer Funktion in der Umgebung eines beliebigen Punktes. — Größenordnung des Verschwindens einer Funktion.

Anhang.

1. Betrachtung einiger spezieller Funktionen: Die Funktion $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$, Die Funktion $y = e^{-\frac{1}{x}}$, Die Funktion $y = \mathfrak{Tg}\,\frac{1}{x}$, Die Funktion $y = x\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{x}$, Die Funktion $y = x \sin\frac{1}{x}$, $y(o) = 0$.
2. Bemerkungen über die Differenzierbarkeit von Funktionen.
3. Verschiedene Einzelheiten: Beweis des binomischen Satzes. — Fortgesetzte Differentiation. — Weitere Beispiele für Anwendungen der Kettenregel. — Verallgemeinerter Mittelwertsatz.

IV. Kapitel. Weiterer Ausbau der Integralrechnung.

1. Zusammenstellung der elementaren Integrale.
2. Die Substitutionsregel: Die Substitutionsformel. — Neuer Beweis der Substitutionsformel. — Beispiele. Integrationsformeln.
3. Weitere Beispiele zur Substitutionsmethode.
4. Die Produktintegration: Allgemeines. — Beispiele. — Rekursionsformeln. — Die Wallissche Produktzerlegung von π.
5. Integration der rationalen Funktionen. — Aufstellung der Grundtypen. — Integration der Grundtypen. — Die Partialbruchzerlegung. — Beispiel. Chemische Reaktionen. — Weitere Beispiele für Partialbruchzerlegung. (Methode der unbestimmten Koeffizienten.)
6. Integration einiger anderer Funktionenklassen: Vorbemerkungen über die rationale Darstellung der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen. — Integration von $R(\cos x, \sin x)$. — Integration von $R(\mathfrak{Cof}\,x, \mathfrak{Sin}\,x)$. Integration von $R(x, \sqrt{1-x^2})$. — Integration von $R(x, \sqrt{x^2-1})$. — Integration von $R(x, \sqrt{x^2+1})$. — Integration von $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$. — Weitere Beispiele für Zurückführung auf Integrale rationaler Funktionen. — Bemerkungen zu den Beispielen.
7. Bemerkungen über Funktionen, die sich nicht mittels der elementaren Funktionen integrieren lassen: Definition von Funktionen durch Integrale. Elliptische Integrale. — Grundsätzliches über Differentiation und Integration.
8. Erweiterung des Integralbegriffes. Uneigentliche Integrale: Funktionen mit Sprungstellen. — Funktionen mit Unendlichkeitsstellen. — Unendliches Integrationsintervall.

V. Kapitel. Anwendungen.

1. Darstellung von Kurven: Die Parameterdarstellung. — Die zu einer Kurve gehörigen Differentialquotienten bei Parameterdarstellung. — Übergang zu neuen Koordinatensystemen bei Parameterdarstellung. — Allgemeine Bemerkungen.
2. Anwendung auf die Theorie der ebenen Kurven: Der Flächeninhalt in rechtwinkligen Koordinaten. — Flächeninhalt in Polarkoordinaten. — Länge einer Kurve. — Die Krümmung einer Kurve. — Schwerpunkt und statisches Moment einer Kurve. — Flächeninhalt und Volumen einer Rotationsfläche. — Trägheitsmoment.
3. Beispiele: Die gemeine Zykloide. — Kettenlinie. — Ellipse und Lemniskate.
4. Die einfachsten Probleme der Mechanik: Grundvoraussetzungen aus der Mechanik. — Freier Fall. Reibung. — Die einfachste elastische Schwingung. — Die allgemeine Bewegung auf einer vorgegebenen Kurve.
5. Weitere Anwendungen: Fall eines Massenpunktes auf eine Kurve. — Allgemeines. — Diskussion der Bewegung. — Das gewöhnliche Pendel. — Das Zykloidenpendel.
6. Arbeit und Energie: Allgemeines. — Erstes Beispiel. Massenanziehung. — Zweites Beispiel. Spannen einer Feder. — Drittes Beispiel. Aufladen eines Kondensators.

Anhang. Eigenschaften der Evolute.

VI. Kapitel.
Die Taylorsche Formel und die Annäherung von Funktionen durch ganze rationale.

1. Der Logarithmus und der Arcustangens: Der Logarithmus. — Arcustangens.
2. Die allgemeine Taylorsche Formel: Die Taylorsche Formel für ganze rationale Funktionen. — Die Taylorsche Formel für eine beliebige Funktion. — Abschätzung des Restgliedes.
3. Anwendungen. Entwicklung der elementaren Funktionen: Die Exponentialfunktion. — $\sin x$, $\cos x$, $\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Cof}\,x$. — Die binomische Reihe.
4. Geometrische Anwendungen: Berührung von Kurven. — Der Krümmungskreis als Oskulationskreis. — Zur Theorie der Maxima und Minima.

Anhang.

1. Beispiel einer Funktion, die sich nicht in eine Taylorsche Reihe entwickeln läßt.
2. Beweis der Irrationalität von e.
3. Nullstellen, Unendlichkeitsstellen von Funktionen und sogenannte unbestimmte Ausdrücke.

4. Das Problem der Interpolation und sein Zusammenhang mit der Taylorschen Formel. — Problemstellung und Vorbemerkungen. — Konstruktion der Lösung. Die Steigungen einer Funktion. Die Newtonsche Interpolationsformel. — Zusammenhang zwischen Steigungen und Ableitungen. Restabschätzungen. — Die Interpolationsformel von Lagrange.

VII. Kapitel. Exkurs über numerische Methoden.

Vorbemerkungen.

1. Numerische Integration: Rechtecksregel. — Trapezformel und Tangentenformel. — Die Simpsonsche Regel. — Beispiele. — Fehlerabschätzung.

2. Anwendungen des Mittelwertsatzes und des Taylorschen Satzes: Die „Fehlerrechnung". — Berechnung von π. — Berechnung der Logarithmen.

3. Numerische Auflösung von Gleichungen: Das Verfahren von Newton. — Regula falsi. — Beispiel.

Anhang.

Die Stirlingsche Formel.

VIII. Kapitel. Unendliche Reihen und andere Grenzprozesse.

Vorbemerkungen.

1. Konvergenz und Divergenz: Grundbegriffe. — Absolute und bedingte Konvergenz. — Umordnung der Reihenglieder. — Das Rechnen mit unendlichen Reihen.

2. Untersuchung der Konvergenz und Divergenz: Das Prinzip der Reihenvergleichung. — Vergleichung mit der geometrischen Reihe. — Vergleich mit einem Integral.

3. Grenzübergänge und Reihen von Funktionen einer Veränderlichen: Grenzübergänge mit Funktionen und Kurven.

4. Gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz: Allgemeines und Beispiele. — Kriterium der gleichmäßigen Konvergenz. — Stetigkeit gleichmäßig konvergenter Reihen stetiger Funktionen. — Die Integration gleichmäßig konvergenter Reihen. — Differentiation unendlicher Reihen.

5. Potenzreihen: Das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe. — Die Integration und Differentiation von Potenzreihen. — Das Rechnen mit Potenzreihen. — Eindeutigkeitssatz für die Potenzreihen.

6. Entwicklung gegebener Funktionen in Potenzreihen. Methode der unbestimmten Koeffizienten. — Beispiele. — Die Exponentialfunktion. — Die binomische Reihe. — Die Reihe für $\operatorname{arc}\sin x$. — Die Potenzreihenentwicklung von $\operatorname{Ar}\operatorname{Sin} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$. — Beispiel für Reihenmultiplikation. — Beispiel für gliedweises Integrieren. — Elliptisches Integral.

7. Potenzreihen mit komplexen Gliedern: Einführung komplexer Glieder in Potenzreihen. — Ausblick auf die allgemeine Funktionentheorie.

Anhang.

1. Multiplikation, Division und Umkehrung von Reihen: Multiplikation absolut konvergenter Reihen. — Multiplikation und Division von Potenzreihen.

2. Grenzübergänge, die mit der Exponentialfunktion zusammenhängen: Die Gleichmäßigkeit des Grenzüberganges $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$. — Bemerkung über Integration und Differentiation der Exponentialfunktion. — Beweis der Formel $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

3. Unendliche Reihen und uneigentliche Integrale.

4. Unendliche Produkte.

5. Weitere Beispiele für unendliche Reihen: Verschiedene Entwicklungen. — Reihen, in denen die Bernoullischen Zahlen auftreten.

IX. Kapitel. Fouriersche Reihen.

1. Die periodischen Funktionen: Allgemeines. — Zusammensetzung von reinen Schwingungen. — Obertöne. — Schwebungen.

2. Die Verwendung der komplexen Schreibweise: Allgemeine Bemerkungen. — Anwendung in der Lehre vom Wechselstrom. — Komplexe Darstellungen der Superposition von reinen Schwingungen.

3. Trigonometrische Interpolation: Lösung des Interpolationsproblems. — Grenzübergang zur Fourierschen Reihe.

4. Beispiele für die Fouriersche Reihe: Vorbemerkungen. — Entwicklung der Funktion $\psi(x) = x$ und $\varphi(x) = x^2$. — Entwicklung der Funktion $x\cos x$. — $f(x) = |x|$. — Beispiel. — $f(x) = |\sin x|$. — Entwicklung der Funktion $f(x) = \cos\mu x$. Partialbruchzerlegung des Cotangens. Produktzerlegung des Sinus. — Weitere Beispiele.

5. Strenge Begründung der Fourierschen Reihenentwicklung: Funktionen mit gleichmäßig konvergenter Fourierscher Reihe. — Beweis der Darstellbarkeit. — Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Fourierschen Reihe.

6. Die mittlere Approximation durch trigonometrische Polynome.

Anhang.

Beispiele zur trigonometrischen Interpolation: Vorbemerkungen. — Einzelne Beispiele.

X. Kapitel. Die Differentialgleichungen der einfachsten Schwingungsvorgänge.

1. Schwingungsprobleme der Mechanik und Physik: Einfachste mechanische Schwingungen. — Elektrische Schwingungen.

2. Lösung der homogenen Gleichung. Freie Bewegungen: Formale Auflösung. — Physikalische Deutung der Lösung. — Anpassung an gegebene Anfangsbedingungen. Eindeutigkeit der Lösung.

3. Unhomogene Gleichung. Erzwungene Bewegungen: Allgemeine Bemerkungen. — Lösung der unhomogenen Gleichung. — Die Resonanzkurve. — Nähere Diskussion des Schwingungsablaufes. — Bemerkungen über den Bau von Registrierinstrumenten.

587. 7. 27. 450.

BRIEFWECHSEL.

[1.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 10. Junius 1810.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER I, S. 13.]

|Schon wieder, werthester Freund! werden Sie mit einem Briefe heimgesucht! und sogar mit einem Briefe, der eine Bitte enthält. REPSOLD hat seine Schüsseln schon aus dem groben gedreht, und was selten bey ihm kommt, grade Zeit, die Arbeit zu beginnen. Er ist zu blöde, selbst zu bitten, glaubt aber, Sie würden vielleicht, wenn Sie seine Noth wüssten, ihm zu Hülfe kommen. Ich würde ihm gerne nach der KLÜGELschen Theorie in GILBERTS Annal. Jahrg. 1810 Stück 3[*)], sein 8füssiges Objectiv berechnen, indessen traue ich den Formeln K.s nicht, der schon früher nach dem vollkommensten, noch das allervollkommenste (sic) Objectiv angab. Ich habe keine Zeit, die Formeln zu prüfen und ganz die Dioptrik zu treiben. Sie sehen also, in welcher Noth wir sind, wenn Sie uns nicht zu Hülfe kommen. Ich glaube Ihnen schon in einem vorigen Briefe gemeldet zu haben, dass das Objectiv 8 Fuss Brennweite haben soll. Bey dem Glase dazu ist

mittler.	Brech.	Verh.	des	Kronglases	1,5157,	Zerstreuung	0,0051
»	»	»	»	Flintglases	1,6109,	»	0,0090

. . . .|

[*] *Angabe eines möglichst vollkommenen achromatischen Doppel-Objectivs u.s.w.* von dem Professor KLÜGEL in Halle, Annalen der Physik 34, Leipzig 1810, S. 265.]

[2.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 25. Junius 1810.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER I, S. 45 f.]

. . . .

REPSOLDS Wunsch, dass zwei von den vier Flächen einerlei Halbmesser bekommen, lässt sich nicht erfüllen, wenn die Bedingung Statt finden soll, dass die dritte Fläche einen kleinern Halbmesser habe, als die zweite. Sie können sich davon leicht selbst überzeugen, wenn Sie folgende 4 Formeln näher prüfen, wodurch nach REPSOLDS Angaben über die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse die 4 Halbmesser f, g, f', g' dargestellt werden, wenn die Brennweite 96 Zoll werden und die Abweichung, wegen Gestalt der Gläser und wegen der Farben gehoben werden sollen. Diese Form ist mir eigenthümlich[*)] und wie ich glaube, die zierlichste, die man finden kann:

$$\frac{1}{f} = +0{,}0556255 - 0{,}0276427 \operatorname{tang} \varphi$$

$$\frac{1}{g} = +0{,}0083843 + 0{,}0276427 \operatorname{tang} \varphi$$

$$\frac{1}{f'} = +0{,}0129083 - 0{,}0339803 \operatorname{secans} \varphi$$

$$\frac{1}{g'} = -0{,}0498917 + 0{,}0339803 \operatorname{secans} \varphi.$$

Der Winkel φ kann nach Gefallen angenommen werden, negative Halbmesser zeigen hohle Flächen an.

Bei diesen Formeln ist die Dicke der Gläser nicht in Betrachtung gezogen. Mit Rücksicht auf diese werden einige Abänderungen nöthig; ich habe ein System von Werthen auf das schärfste berechnet, wodurch die äussern Farben bei den sehr nahe an der Axe [verlaufenden Strahlen] und zugleich die mittlern [Strahlen], die in einem Abstande von 2 Zoll von der Axe [verlaufen,] genau in einen Punkt zusammengebracht werden, und mir dabei die Bedingung vorgeschrieben, dass die 2^te und die 3^te Fläche nicht viel verschieden seyn sollen; je ungleicher man sie nimmt, desto kleiner wird der Halbmesser der ersten Fläche, und man wünscht kleine Halbmesser so viel [wie] möglich zu vermeiden.

[*) Vergl. *Achromatische Doppelobjective, ohne Rücksicht auf Dicke und Abstand,* S. 135 dieses Bandes.]

Maassen für ein Doppelobjectiv von 96 Zoll Brennweite,
5 Zoll Öffnung:

		Dicke in der Axe
Halbmesser der Flächen des Convexglases	26^Zoll,202	0,21
	42 ,972	
des Concavglases	39 ,985	0,11
	100 ,845	

Ich bin überzeugt, dass, wenn die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse genau so sind, wie REPSOLD sie gefunden hat, und die Flächen genau kugelförmig werden, dieses Glas eine sehr gute Wirkung thun muss. . . . .

[3.]

SCHUMACHER an GAUSS[*)].

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER I, S. 52.]

. . . .

[REPSOLD hat jetzt nach vieler Mühe zwey Objective nach Ihrer Formel gefertigt. Das eine ist schlecht, das andere besser. Ganz lässt sich noch nicht darüber entscheiden, da es noch nicht sicher genug gefasst ist. Der Hauptgrund des Mislingens liegt wohl in der Dünne der Gläser, die so beym Poliren durchbiegen und ihre Gestalt verlieren. Die Brennweite trifft bis auf 0,005 eines Fusses mit der berechneten überein. Er wird Ihnen noch das Minimum der Dicke der Gläser melden, über das sie nicht hinausgehen dürfen, ohne durchzubiegen, und dann um Modification Ihrer Formeln danach bitten.

d. 6^ten Sept. [1810].

. . . .

REPSOLD hat jetzt die Fassung fertig, mit ½ Zoll Blendung thut es jetzt eben so viel, als das 6füssige, das Sie auf der hiesigen Sternwarte gesehen haben, aber auch nicht mehr, wie es doch wohl seyn sollte. Es ist immer ein vortreffliches Fernrohr, aber würde gewiss, wenn die Gläser nicht durch-

[*) Das Datum fehlt; dasselbe muß nach dem 5. August und vor dem 6. September 1810 liegen, wahrscheinlich wenige Tage vor dem letzteren.]

gebogen wären, noch mehr thun. REPSOLD wünscht für die Decimaleintheilung des Fusses und der Öffnung die er machen kann, $= 0^F,38$, die Formeln so eingerichtet, dass das Convexglas in der Axe

$0^F,025$ dick seyn kann,

und das Concavglas ebenda

$0^F,018$ seyn kann;

statt dass z. B. bey diesem letzten Sie bey der Berechnung nur $0^F,009$ angenommen haben.

Das jetzt vollendete Fernrohr hat in der Axe

bey dem convexen $0^F,021$,

bey dem concaven $0^F,012$,

die Brennweite $= 8^F,06$. Ein wenig färbt es noch bey Fixsternen. . . . . . .}

[4.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 6. Oktober 1810.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER I, S. 54.]

. . . .

Dass das Objectiv, welches REPSOLD geschliffen, nicht ganz nach seiner Erwartung ausgefallen ist, thut mir leid. Ich will die Rechnung noch einmal für eine etwas grössere Dicke der Gläser wiederholen, wozu ich bisher noch nicht habe kommen können, da ich die auf meine erste Rechnung sich beziehenden Papiere verlegt und bisher nicht Zeit gehabt habe, mich ganz von neuem wieder hineinzusetzen. Ich glaube aber, dass eine etwas vergrösserte Dicke die Dimensionen nur wenig verändern wird. . . . .

[5.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 10. November 1810.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER I, S. 58.]

{REPSOLD hat jetzt nach Ihren Formeln, werthester Freund, ein zweytes Objectiv vollendet, das ohnerachtet das Glas Streifen hat, vortreffliche Wirkung thut. Es sitzt schon im Passageninstrumente und zeigt bey hellem Tage Mizar als Doppelstern. Beyde Sterne sind keine 20″ von einander entfernt. Alle Sterne der vierten Grösse kann man jetzt bey Tage beobachten. Er ist voll Dank gegen Sie, muss aber bald, da er französisches Flintglas von CRUYNES und LAUÇON erhält, unterthänigst bey Ihnen einkommen und um neue Maasse, nach dem neuen Brechungs- und Zerstreuungsverhältniss, bitten? Wollen Sie nicht Ihre Formeln bekannt machen? . . . .}

[6.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 6. Januar 1811.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER I, S. 61.]

. . . .

Dass REPSOLDS Glas so gut ausgefallen ist, freuet mich sehr. Wenn er französisches Flintglas erhalten und dessen Zerstreuungskraft durch Versuche geprüft hat, so will ich gern die Krümmungen der Linsen daraus berechnen, allein ich muss dann bitten, mir zugleich die Dimensionen des nach meinen Zahlen geschliffenen Glases wieder mitzutheilen, da ich sie alles Suchens ungeachtet nicht habe wieder auffinden können, und sonst wenn ich ganz von vorn anfangen müsste, eine viel längere Arbeit haben würde. . . . .

[7.]

OLBERS an GAUSS. Bremen, 10. Juli 1813.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II 1, S. 521.]

{. . . . .

Bei dieser Gelegenheit bitte ich Sie um eine Belehrung. Es scheint mir, dass wir die Aperturen unserer nicht achromatischen Cometensucher viel zu gross machen, wodurch die Bestimmtheit und Schärfe des Bildes leidet, ohne dass wir an Licht gewinnen. Dass die Lichtstärke eines Fernrohrs bei gleicher Durchsichtigkeit der Gläser wie das Quadrat des Durchmessers des Objectiv-Glases sich verhält, ist nur so lange wahr, als der Strahlenbüschel, der aus dem letzten Augenglase kömmt, im Durchmesser kleiner, als der Durchmesser der Pupille unseres Auges ist. Dieser Durchmesser unserer Pupille wird auch des Nachts nicht viel über $2\frac{1}{2}$ Pariser Linien betragen. Vergrössert nun ein Cometensucher $m$mal, und ist der Durchmesser unserer Pupille $= d$, so ist md die einzig nützliche Apertur des Cometensuchers. Also für 8 malige Vergrösserung und $d = 2\frac{1}{2}$ Linien gesetzt, würde $md = 20$ Linien seyn. Ist die Apertur grösser, so gewinnt man nichts an Licht, nur der Durchmesser des Strahlenbüschels wird grösser, als ihn die Apertur unserer Pupille fassen kann. Es scheint mir also, dass wir die Objective unserer Cometensucher nie breiter als 2 Zoll, oder wenn wir 10 mal vergrössern wollen, höchstens $2\frac{1}{2}$ Zoll machen sollten. Die von Ramsden sind viel breiter. . . . . . .}

[8.]

Gauss an Olbers. Göttingen, 13. September 1813.

[Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke II 1, S. 530.]

. . . .

Ihre Bemerkung wegen der Objective schwach vergrössernder Fernrohre ist sehr gegründet. Von zwei übrigens gleichen Cometensuchern, wo bei einem das Objectiv nur eben äqual dem Product ist aus der Vergrösserung in die grösste Öffnung der Pupille, bei dem andern aber grösser, hat das erstere den entschiedenen Vorzug grösserer Leichtigkeit und Wohlfeilheit, ohne dass das andere mehr leistete, wenn anders das Auge genau an seinem Platze steht. Sobald aber diese Bedingung aufhört, hat man bei letzterem zwar etwas weniger Schärfe, aber keinen Verlust an Helligkeit, was bei ersterem sich umgekehrt verhält. Ich glaube daher, dass es doch wol gut ist, die Öffnung des Objectivs etwas grösser zu machen, als jenes Product, aber doch nicht so gross, wie bei den meisten Kometensuchern, die ich unter Händen gehabt habe. . . . . . .

[9.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 7. Juni 1836.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher III, S. 62.]

. . . .

Ich habe mich in der letzten Woche viel mit optischen, namentlich mit den sehr interessanten Beugungsversuchen beschäftigt. Schwerdt hat in diesem Felde recht viel geleistet [*)], um diese höchst mannigfaltigen Erscheinungen, wozu Fraunhofer zuerst den Weg öffnete, aus Einem Princip abzuleiten. Inzwischen bleibt doch noch sehr viel übrig, bis die Theorie als vollständig und erschöpfend angesehen werden kann.

[10.]

Gauss an Encke. Göttingen, 3. Juni 1836.

. . . .

In den letzten Wochen habe ich angefangen, mich mit einigen optischen Untersuchungen, namentlich auch mit den Diffractionsversuchen, etwas zu beschäftigen, welche reiche Gegenstände mich fast ebenso sehr zu interessiren anfangen, wie die magnetischen und elektromagnetischen. Beschäftigung mit den letzteren hat inzwischen dabei ihren Fortgang und wir werden in kurzem die interessanten Versuche über die Induction durch den blossen Erdmagnetismus, welche wir schon im März 1835 mit schwächern und im März 1836 mit stärkeren [Apparaten] angestellt hatten, mit noch viel stärkeren zu wiederholen [haben,] um alles auf genaue Zahlenbestimmungen zurückbringen zu können. Bei diesen Versuchen und den damit zusammenhängenden wird, in meinem Inductor, meinem neuen Multiplicator und in einem grossen Inductionsrade zusammen, eine Meile übersponnenen Drahts gebraucht werden.

. . . .

[*) F. M. Schwerd, *Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt u.s.w.*, Mannheim 1835.]

[11.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 19. Januar 1840.

. . . .

In einem Punkte thun Sie meines Erachtens H[errn] März Unrecht, ich meine wegen der Blendgläser. Bei voller Öffnung und hochstehender Sonne springt jedes Glas; auch mir zersprang ein Blendglas am P[assage-]I[nstrument] gleich in der ersten Zeit; ich überzeugte mich aber bald, dass dies gar nicht anders sein kann, und machte mir daher gleich selbst Blendkappen von feinem Papier für P. I. und M[ittags-]Kr[eis]. Ich finde die Theorie jenes Vorgangs nirgends berührt, und es scheint, dass manche Physiker davon ganz falsche Vorstellungen haben, da wenn ich nicht irre Munke (oder war es Littrow?) [es] vor einigen Jahren als etwas Miraculöses betrachtete, dass die Spinnfäden im Brennpunkt eines P. I. nicht verbrennen. Das ist aber ganz natürlich. In der That, ist m die Vergrösserung eines Fernrohrs, die Brennweite k mal grösser als der Durchmesser des Objectivs, und setzt man den Sinus des ⊙ Durchmessers $= \frac{1}{110}$, so wird, abstrahirt von dem Lichtverlust beim Durchgang durch die Gläser, die Intensität des Sonnenlichtes auf einem Flächenelement sein:

1) $= mm$ vor dem Ocular oder am Platze des Blendglases,

2) $= \left(\frac{110}{k}\right)^2$ im Brennpunkte oder am Platze der Fäden,

(nemlich die Intensität für einfache Beleuchtung durch die ⊙ gleich 1 gesetzt).

An Ihrem Fernrohr ist Brennweite 720 Linien, Öffnung, wenn voll, $= 43$ Linien, also $k = 16\frac{3}{4}$ und $\frac{110}{k} = 6{,}6$. Brauchen Sie also eine 180mahlige Vergrösserung, so ist die erstere Intensität etwa 740mahl grösser als die zweite; für ein gewöhnliches Brennglas ist etwa $k = 3$ und auch dann ist die Intensität 1) fast 25mahl stärker. Sie werden, wenn Sie kein Blendglas vorschrauben, und statt dessen ein Stück Zunder vorhalten, diess gleich in Brand geraten sehen.

Übrigens giebt es gar kein Mittel, jene Intensität zu verändern, wenn man die Vergrösserung beibehält. Aber indem Sie eine Blendkapsel vorstecken, wird der Lichtcylinder vor dem Ocular so viel enger und es wird also von dem Blendglase nur eine sehr kleine Stelle getroffen, in welcher aber die Dichtigkeit des Lichtes noch eben so gross ist, wie vorher. . . . . .

[12.]

Gauss an Encke. Göttingen, 2. Januar 1840.

. . . .

Ebenso würden Sie mich verpflichten, wenn Sie mir etwas ausführlichere Auskunft über Plössls Arbeiten, namentlich sogen[annte] dialytische F[ern-]Röhre geben könnten. Irre ich nicht, so habe ich vor einigen Jahren irgendwo bei einer Prüfung der letztern eine Bezugnahme auf Sie gelesen. Ich würde mich also über eine Belehrung freuen (besonders wenn bezüglich auf grössere Fernröhre, als in seinem Preiscatalog aufgeführt sind) über die wesentlichsten Umstände, die derjenige wissen müsste, der ähnliches zu acquiriren wünscht: 1) Leistung, etwa durch einige Specialia erläutert, 2) Dimensionen, 3) Zubehör (Stativ eventuell Mikrometer, eingetheilte Kreise), 4) Preis, 5) Zeit, wie lange warten? Können Sie mir derartige Aufschlüsse geben, entweder über Plössl oder auch über März, so werde ich Ihnen dankbar sein; im entgegengesetzten Fall sehen Sie die Frage als gar nicht geschehen an. Ich möchte gern ein anständiges Sehwerkzeug acquiriren; bei der Armseligkeit oder Nullität der für hiesige Sternwarte bereiten Mittel allenfalls aus meiner Tasche. Natürlich ist von einem solchen grossen Fernrohr wie das Ihrige gar keine Rede. Auch eine parallatische Aufstellung hat ohne Neuen Bau hier keinen Werth, aber Azimuthalkreis und Höhenkreis würde ich dabei wünschen (die übrigens nur die Minute sicher und bequem geben dürfen), da man dann (vermöge einer von mir berechneten Hülfstafel [*]) fast eben so schnell und bequem, wie mit einer parallatischen Aufstellung, jeden Gegenstand finden kann. Können Sie mir also dabei rathen, indem der Maasstab etwa der sein müsste, dass die Kosten höchstens 1000 ₰ oder wenigstens nicht viel darüber betrügen? Ich bin etwas mistrauisch gegen öffentliche Anpreisungen geworden; Sartorius hat ein Plösslsches Fernrohr

[*] Von dieser Hilfstafel ist auch in Gauss' Briefen an Schumacher vom 7. und 12. September 1844 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* IV, S. 286 und 292 ff.) die Rede. Vergl. die *Tafel, um für eine bestimmte Polhöhe aus dem Stundenwinkel und der Declination, Azimuth, Höhe und parallactischen Winkel zu berechnen* in der *Sammlung von Hülfstafeln*, herausgegeben 1822 von H. C. Schumacher, neu herausgegeben und vermehrt von G. H. L. Warnstorff, Altona 1845, S. 135; diese Tafel gilt für die Polhöhe von Altona und ist nach Gauss' Angaben berechnet. Die in den Briefen an Schumacher beschriebene, von Gauss selbst schon im Jahre 1824 berechnete Tafel bezog sich auf die Polhöhe von Göttingen; siehe auch weiter unten unter *Astronomie*.]

erhalten, wovon er nicht viel rühmen will, ich weiss aber keine nähern Umstände. Ebenso hatte Meyerstein ein Objectiv von März erhalten, was ich gerne als Ablesefernrohr beim Magnetometer hätte gebrauchen mögen, da es stärkere Öffnungen und Vergrösserungen hat, als die jetzt von mir gebrauchten (die Vergrösserung war 60 mahl, die sonstigen Dimensionen weiss ich nicht genau mehr). Allein mit der Wirkung dieses Objectives war ich durchaus nicht zufrieden. Dagegen habe ich einige (freilich nur kleinere terrestrische Zug-)Fernröhre von einem gewissen Vogtländer in Wien kürzlich in Händen gehabt, die ich in ihrer Art vortrefflich fand, und ganz entschieden besser, als Frauenhofersche von derselben Grösse, die ich selbst besitze. . . . .

[13.]

Encke an Gauss. Berlin, 12. Januar 1840.

{. . . . .

Von Plössls Arbeiten kenne ich nur ein kleines zweifüssiges Fernrohr, was zu den ersten dialytischen gehört, die er gemacht hat, und was er als eines der besseren den Naturforschern in Wien präsentirte. Es ist nemlich eines der vier mit einem Sternchen bezeichneten. Herr v. Buch kaufte es damals für 140 fl. und hat es hier auf die Sternwarte gegeben. Dieses Fernrohr ist in der That vorzüglich. Seine Vergrösserung geht bis 80 mal und entzückte auch Hansen als er hier war so sehr, dass er sogleich den Entschluss fasste, sich auch eines kommen zu lassen. Frauenhofersche habe ich nicht damit vergleichen können, aber ich ziehe es den hiesigen guten englischen dreifüssigen bei weitem bei gleicher Vergrösserung vor. — Grössere Plössl habe ich nicht gesehen. Es sind mehrere für die Navigationsschulen angeschafft worden, aber direct dahin abgegangen. . . . . . .}

[14.]

Gauss an Encke. Göttingen, 17. September 1840.

Hochgeschätztester Freund!

Mein heutiges Schreiben bezieht sich zunächst noch einmahl auf die Plssölschen sogenannten dialytischen Fernröhre. Ich würde mich scheuen,

Sie noch einmahl deshalb zu behelligen, beruhigte mich nicht theils Ihre oft erprobte unermüdliche Gefälligkeit, theils der Umstand, dass meine nachträglichen Fragen sich auf ganz bestimmte Momente richten.

Der Hauptgrund weshalb ich über jene Fernröhre zuverlässige Nachrichten wünschte, ist der, dass ich mit dem Gedanken umgehe, ein bewegliches Fernrohr von etwas grösseren Dimensionen zu acquiriren, allenfalls auf meine eigenen Kosten, und zweifelhaft bin, ob ich ein gewöhnliches Münchener oder ein dialytisches vorziehen soll, da von letzteren so viel gerühmt wird. Leider haben meine Bemühungen über letztere etwas Zuverlässiges zu erfahren, noch keinen bestimmten Erfolg gehabt. Alles was ich davon weiss, beruht auf vier Quellen:

1) Ihre gefällige Mittheilung in Beziehung auf ein kleines dialytisches Fernrohr, worüber Sie jedoch nichts näheres, sondern nur im allgemeinen anführen, dass es sehr vorzüglich, und Hansen so entzückt davon gewesen ist, dass er sich entschlossen habe, ein ähnliches zu acquiriren.

2) Eine ähnliche Privatmittheilung von Schumacher, die insofern etwas bestimmter ist, als er anführt, dass er sonst schwer zu erkennende Doppelsterne als solche sehr schön gesehen habe.

3) Ein Aufsatz von Jaquin in Baumgartners Zeitschrift, Bd. 3, S. 57[*)], der im Grunde sehr oberflächlich ist, und wegen der Wirkungen sich nur auf Ihr, Hansens und Schumachers Zeugniss und namentlich auf die Wirkung bei Doppelsternen bezieht. Das einzige was ich daraus erfahren habe, ist der Umstand, dass Plössl nicht zwei, sondern drei Linsen zu gebrauchen scheint; eine grosse Kronglaslinse, eine halb so breite Flintglas, und noch eine, wie es scheint, auch so grosse Kronglaslinse. Vermuthlich stehen die beiden letzten dicht zusammen und etwa in der Mitte des Fernrohres; ich habe aber bedauern müssen, dass klare Angaben darüber in jenem Aufsatze fehlen.

4) Eine briefliche Mittheilung von Sartorius, der ein dialytisches Fernrohr für 340 Gulden (20 fl.-Fuss) aus Wien nach Sicilien hat kommen lassen, mit dem er sehr wenig zufrieden ist. Er sagt, dass es wo nicht schlechter, doch gewiss nicht besser sei, wie ein Münchner von demselben Preise, und

[*) *Notizen über dialytische Fernröhre* vom Freiherrn von Jacquin, Zeitschrift für Physik und verwandte Wissenschaften 3, Wien 1835, S. 57.]

klagt namentlich über das ausserordentlich kleine Gesichtsfeld und dass z. B. die Planeten nicht farbenfrei seien.

Gegenwärtig interessirt mich nun der Gegenstand noch mehr, als in der oben angegebenen Beziehung in einer andern rein theoretischen; ich bin nemlich mit einer dioptrischen Untersuchung beschäftigt, die ich nächstens drucken zu lassen denke[*)] und die mich zu dem Schlusse geführt hat, dass die ganze Einrichtung der dialytischen Fernröhre verwerflich sein möchte. Ich betrachte selbst diesen Schluss mit einigem Mistrauen, theils weil ich nie ein solches Fernrohr gesehen habe und meine Rechnungen sich nur auf ungewisse hypothetische Voraussetzungen stützen können, theils weil Sie und Schumacher so rühmlich über Ihre Instrumente urtheilen.

Indessen wird dadurch die Möglichkeit noch nicht ganz ausgeschlossen, dass Sie das Instrument in Einer Beziehung so vortrefflich gefunden haben, vortrefflicher als irgend ein anderes von ähnlicher Grösse, dass Sie dadurch vielleicht abgehalten sein könnten, die Prüfung auf andere Requisitionen auszudehnen. Es wäre denkbar, dass es in dieser Einen Beziehung ungewöhnliches vielleicht nur zufällig d. i. nicht als dialytisches, leistete, und doch wesentlich als dialytisches an andern Mängeln leiden müsste.

Am klarsten glaube ich mich auf folgende Art Ihnen verständlich machen zu können.

Zum vollkommenen Achromatismus gehören **Zwei** Bedingungen.

1) Dass das rothe und das blaue Bild (so will ich mich der Kürze wegen ausdrücken) in Eine normal gegen die Fernrohraxe liegende Ebene fallen.

2) Dass sie gleiche Grösse haben.

Ist die erste Bedingung allein erfüllt, so werden Doppelsterne in der Mitte des Gesichtsfeldes äusserst scharf erscheinen können, wenn auch an der zweiten Bedingung beträchtlich viel fehlte, z. B. das rothe und blaue Bild im Verhältniss der Ungleichheit $\frac{4}{4}\frac{1}{2}$ oder so stünden; in diesem Fall werden aber die Doppelsterne nicht mehr recht rein erscheinen, wenn man sie in einer beträchtlichen Entfernung von Centrum des Gesichtsfeldes betrachtet. Grössere Gegenstände werden nicht durchaus zufrieden stellen; das Gesichtsfeld wird um diesen vitalen Fehler zu cachiren sehr verengt werden müssen.

[*) *Dioptrische Untersuchungen*, der Königl. Gesellschaft der Wissensch. übergeben 10. Dezember 1840, Werke V, S. 243.]

Diess alles scheint bei Sartorius' Fernrohr der Fall zu sein.

Ich finde in allen optischen Büchern die zweite Bedingung nirgends nur einmahl erwähnt. Der Grund mag sein, dass bei der gewöhnlichen Einrichtung der achromatischen Objective sie mit der ersten von selbst, wo nicht genau doch sehr nahe erfüllt wird, so dass man, was davon fehlt, nicht bemerkt. Aber meine theoretische Untersuchung ergibt, dass bei einer grossen Trennung der Kronglas und der Flintglaslinse die Erfüllung der zweiten Bedingung unmöglich wird. Nur wenn man drei Linsen anwendet, und auch die dritte wieder in angemessene beträchtliche Entfernung von der zweiten stellt, würde die Erfüllung der Bedingung möglich werden; ich zweifle aber, dass bei den dialytischen Fernröhren hierin principmässig verfahren ist.

Meine Bitte geht also dahin

1) mich zu unterrichten, ob Ihr Fernrohr ein angemessen grosses Gesichtsfeld hat, wie es Münchner bei ähnlicher Vergrösserung verstatten.

2) Ob Doppelsterne, die beide hell sind, also z. B. Castor in beträchtlicher Entfernung vom Centrum noch ganz rein erscheinen, im gleichen ob Planeten entfernt vom Centrum, farblos sind.

Sollten Sie mir über die dialytischen Fernröhre noch andere litterarische Quellen als die bemerkten nachweisen können, werde ich sehr dankbar dafür sein.

In meinen theoretischen Schlüssen weiss ich keinen Fehler zu finden; aber ich bescheide mich, dass man a priori zumahl beim Mangel aller numerischen Data nicht wohl urtheilen kann, in welchem Masse theoretische indicirte Fehler bei der Praxis fühlbar werden. Übrigens bitte ich, was ich von jenen theoretischen Untersuchungen bemerkt habe, vorerst nur wie eine confidentielle Mittheilung zu betrachten. Eine baldige Antwort, insofern das Wetter Ihnen eine Prüfung verstattet, würde mir sehr willkommen sein. . . .

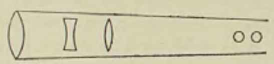
[15.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 9. October 1840.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 406, 407.]

. . . .

Da ich eine Gelegenheit habe, ein dialytisches Fernrohr zu acquiriren, wenn ich, ohne es vorher gesehen zu haben (es ist noch in Wien), es übernehmen will, da der Besteller es jetzt nicht braucht, so würde mir angenehm sein, wenn Sie mir vorher von dem Ihrigen noch eine nähere Mittheilung machen wollen. Ich hatte bisher geglaubt, dass es nur zwei (von einander getrennte Linsen) habe, und theoretische Betrachtungen ergeben, dass dann das ganze Princip, nichts taugen würde, d. i. dass gar kein reiner Achromatismus dann möglich ist. Allein nach Einsicht eines übrigens höchst oberflächlichen Aufsatzes von JAQUIER in BAUMGARTNERS Zeitschrift [*)] scheint es, dass immer 3 Objectivlinsen da sind. Dann ist allerdings Achromatismus möglich, wenn sie alle drei getrennt sind.



Objectiv-Linsen Ocular.

Aber nach der Beschreibung scheint es, dass die zweite und dritte Linse nahe bei einander stehen, und dann muss ich wieder den vollkommenen Achromatismus bezweifeln. Gründlich a priori urtheilen kann ich freilich nicht, ohne genaue quantitative Data über die drei Brennweiten der drei Linsen und die beiden Distanzen, und so erlaube ich mir kein Urtheil darüber, in wie fern die Unvollkommenheit, welche die Theorie andeutet, in der Ausübung noch fühlbar ist. Unbeschadet dieser Unvollkommenheit könnte ein solches Fernrohr Doppelsterne im Centrum des Gesichtsfeldes ganz vortrefflich zeigen, und doch den andern Bedingungen, welche man an ein Fernrohr macht, nicht genügen. Betrachten Sie also doch gefälligst einmahl z. B. Castor weit vom Centrum des Gesichtsfeldes, ob der Zwischenraum noch ganz rein erscheint?, oder ob ein Planet weit vom Centrum ganz

[*) Gemeint ist offenbar der oben S. 155 genannte Aufsatz von JACQUIN.]

farbenfrei erscheint. SARTORIUS hat ein dialytisches Fernrohr von PLÖSSL, ich glaube für 570 fl. erhalten, womit er gar nicht zufrieden ist. Die Venus zeigte stark Farben und das Gesichtsfeld sei ganz ungebührlich klein, verhältnissmässig zu den vorhandenen Vergrösserungen. Beides würde mit den Mängeln, welche die Theorie andeutet (so weit es wie gesagt, ohne genaue quantitative Data möglich ist) übereinstimmen. . . . .

[16.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 12. October 1840.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 409.]

[. . . . .

Mit den dialytischen Fernröhren ist es mir so gegangen. Ein kleines von etwa 57 Millimeter Öffnung, welches ich von PLÖSSL erhielt, ist vortrefflich, und thut vielleicht etwas mehr als die FRAUNHOFERschen von $2\frac{1}{2}$ Fuss Brennweite*). Nachher verschrieb ich mir ein grösseres von 34 oder 37 Linien Öffnung (nach dem Preise wohl dasselbe, das SARTORIUS hat), das gar nicht gut ausfiel. 3 oder 4 kleinere, die ich für Freunde verschrieb, waren sehr mittelmässig, ebenso ein paar von derselben Grösse (57 Millimeter), die ich in Petersburg gesehen habe. Jetzt habe ich wieder eines derselben Gattung bekommen, das seit ein paar Jahren bestellt ist, aber für wen, weiss ich nicht mehr, und das in optischer Hinsicht besser als mein Fernrohr ist, obgleich die Metall-Arbeit daran schlechter ist. Ich habe gleich PLÖSSL gefragt, für wen es sei, da ich in der langen Zeit die Bestellung vergessen habe. Seit 4 oder 5 Monaten warte ich vergebens auf Antwort, und glaube also es Jedem, der es wünscht, abgeben zu können. Wollen Sie durchaus ein dialytisches Fernrohr, so würde ich sehr zu diesem rathen. Der Preis ist 140 fl. Conventions-Münze (20 fl.-Fuss) und etwa 7 Mark für den Transport. Die beiden mittleren Linsen sind in allen PLÖSSLschen Fernröhren fest verbunden, und sogar durch eine Mastix ähnliche Substanz an einander gekittet**). STEINHEIL

*) Es zeigt ε Bootis scharf getrennt.

**) Nach JACQUINS mündlicher Äußerung.

hatte hier ein Fernrohr, bei dem die Entfernung der mittleren Linsen sowohl unter sich, als von der Objectivlinse verändert werden konnte, und meinte, wenn ich recht erinnere, durch Bewegung der einen mittleren Linse die Aberration wegen der Kugelgestalt, durch Bewegung der andern mittleren Linse den Achromatismus corrigiren zu können. Die von Ihnen angegebene Probe habe ich wegen des ungünstigen Wetters noch nicht machen können, werde aber sogleich, wenn sie gemacht ist, darüber berichten.

Ein sehr kleines Gesichtsfeld haben alle dialytischen Fernrohre, die ich gesehen habe, wahrscheinlich um die Verzerrung des Bildes an den Gränzen nicht so merkbar zu machen. Alle haben eine einfache Objectivlinse, und in der Mitte zwei fest verbundene Linsen, an denen in allen Fällen nichts unter sich zu verändern ist. Bei einem einzigen Fernrohre war ihre Lage gegen die Objectivlinse durch 3 Schrauben, natürlich in engen Gränzen, zu ändern. . . . .}

[17.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 24. October 1840.

. . . .

Theoretische Untersuchungen über die dialytischen Fernröhre scheinen mir zu ergeben, dass diese ganze Einrichtung nicht viel taugt. Es ist unmöglich, vollkommenen Achromatismus damit zu erreichen. Nur im Centrum des Gesichtsfeldes können die Bilder farbenfrei sein, nicht aber in beträchtlicher Entfernung vom Centrum. Daher scheint auch die Klage ihren Grund zu haben, dass diese Fernröhre ein ganz ungebührlich kleines Gesichtsfeld haben. In der That, bei grossen Gesichtsfeldern würde dieser der Theorie nach unvermeidliche Fehler gar zu merklich hervortreten. Ich selbst habe nie eins gesehen, vielleicht erhalte ich aber bald ein solches. . . . .

[18.]

Encke an Gauss. Berlin, 30. October 1840.

{. . . . .

Über das dialytische Princip kenne ich nur eine Abhandlung von Rogers in den Memoirs der Astronomical Society of London, Vol. III, pag. 229: *On the construction of large achromatic telescopes*, by Alexander Rogers; Read Apr. 11. 1828. — Es ist diese Abhandlung, welche eine Prioritätsfrage zwischen Rogers und Plössl hervorgerufen hat, welche wie ich glaube zu Gunsten des ersteren entschieden werden muss. Früher hatte ich gesucht, mich etwas mit der Theorie bekannt zu machen, und finde als Notiz bei Rogers Vorschlag beigeschrieben, dass entweder die Winkel, unter welchen die verschiedenfarbigen Strahlen zusammen kommen, oder die Punkte, in welchen sie die Axe schneiden, weiter von einander verschieden sind, als dass man ein gutes Resultat erwarten könnte. Plössl schiene mir durch mechanische Nachhilfe und Probiren der besten Entfernung, in welcher jedes Okular von der zusammengesetzten Linse zu stellen seyn mögte, diese Nachtheile praktisch so viel als möglich ausgeglichen zu haben. Es hat mich ungemein gefreut, dass Ihre Untersuchung ebenfalls Nachtheile der Construktion nachgewiesen hat. . . . .}

[19.]

Gauss an Encke. Göttingen, 23. Dezember 1840.

Indem ich Ihnen, hochgeschätztester Freund, hieneben das dialytische Fernrohr mit dem verpflichtetsten Danke zurückschicke, muss ich zugleich um Verzeihung bitten, dass ich es so lange behalten. Schuld hat der Umstand, dass fast gleichzeitig mit dem Empfange ich von Schumacher die Nachricht erhielt, dass er ein ganz ähnliches (neues, schon vor 4 Jahren bestellt gewesenes aber nun disponibel gewordenes) an mich abgeschickt habe. Da sich dadurch die angenehme Gelegenheit eröffnete, zwei Instrumente neben einander zu vergleichen, und ich das Instrument täglich erwarten durfte, so ging in vergeblichem Warten ein Tag nach dem anderen hin. Hinterdrein hat sich nun gefunden, dass es erst lange bei dem Spediteur in Hamburg liegen geblieben ist und auf dem Transport durch Fracht fast 3 Wochen zugebracht hat; erst vor 8 Tagen ist es angekommen, und anfangs war es wegen mehrfach mangelhafter mechanischer Arbeit gar nicht zu gebrauchen. Letzteres ist nun redressirt, und so habe ich einige Vergleichungen, freilich nur auf der Erde, angestellt. Die Wirkung der terrestrischen Oculare zeigt sich an beiden Instrumenten so gleich, dass ich keinen Unterschied angeben kann. Die stärksten astronomischen Oculare hingegen zeigen einen, obwohl nicht grossen Unterschied zum Vortheil Ihres Instruments. Allein die stärksten Vergrösserungen sind nicht bei beiden Instrumenten dieselben; an dem Ihrigen hatte ich sie früher = 99 gemessen (die schwächere 62); an dem andern habe ich sie noch nicht bestimmt, allein sie ist augenscheinlich kleiner, vielleicht so wie in Plössls Catalog angegeben wird, 85. Da die Gewinde der Oculareinsätze bei beiden Instrumenten beinahe gleich sind, so liess sich das Ocular des Ihrigen bequem in das andere Instrument einschrauben, und dann war nach meinem Schätzen die Wirkung ganz dieselbe, wie an dem Ihrigen. Ich habe die Absicht, jenes Instrument zu behalten, und ich denke dann künftig noch ein neues Ocular dazu machen zu lassen, da, so viel ich bis jetzt nach der Theorie beurtheilen kann, die Plösslschen nicht dieser gemäss combinirt sind. Ich meine, dass wenigstens für die schwächere Vergrösserung durch eine andere Ocularanordnung ohne sonstigen Nachtheil ein grösseres Gesichtsfeld sich erzielen lassen wird.

Was ich Ihnen früher geschrieben habe, nemlich dass das [durch] dialytisch angeordnete Objectivlinsen hervorgebrachte Bild farbenrein nicht sein kann, bleibt unumstösslich wahr; allein eine tiefer eindringende Theorie hat mich überzeugt, dass dieses durch die Ocularlgläser wieder aufgehoben werden [kann] und, worauf es doch am Ende allein ankommt, im Auge ein vollkommen farbenreines Bild möglich ist, während diess bei einem Objectiv der gewöhnlichen Einrichtung theoretisch unmöglich ist, wenigstens nicht möglich für mehr als Einen Ocularеinsatz. Ich habe einige Bemerkungen darüber einer Abhandlung beigefügt, die der Societät übergeben und jetzt bereits unter der Presse ist[*)]; schon 2 Bogen [sind] gedruckt. Der Inhalt dieser Abhandlung bezieht sich auf eine mir seit 40—45 Jahren eigenthümliche Weise, die Elemente der Dioptrik zu behandeln, und wovon etwas zu publiciren ich bisher nur darum Abstand genommen hatte, weil mir der Gegenstand gar zu elementarisch schien. Indessen dürfte sie doch wohl nicht überflüssig sein, da die gewöhnliche Behandlungsweise dioptrischer Rechnungen einen Charakter von Ungenauigkeit, ich möchte sagen Rohheit hat, der den mathematischen Sinn sehr beleidigt. Bessel ist, deucht mir, der erste, der in dioptrische Versuche

[*) *Dioptrische Untersuchungen*, Werke V, S. 243, insbesondere S. 274, 275.]

über schon fertige Linsengläser eine anständige Präcision zu bringen gesucht hat[*)]; nur muss man sich wundern, wie er in den Irrthum gerathen ist, als seien die Erscheinungen bei einem Objectiv von endlicher Dicke genau dieselben, wie sie bei einer im optischen Mittelpunkte des erstern befindlichen Linse von unendlich kleiner Dicke, von derselben Brennweite sein würden. In folge dieses Irrthums hat er eine ganz falsche Brennweite herausgebracht und ich würde mich nicht wundern, wenn der Fehler anstatt (nach seiner Schätzung) $\frac{1}{75000}$ zu sein, $\frac{1}{1500}$ betrüge. Ich muss Sie übrigens bitten, diese Mittheilung nur wie eine bloss Ihnen vertraulich gemachte zu betrachten.

. . . .

[20.]

Encke an Gauss. Berlin, 31. Dezember 1840.

{. . . . .

Ihrer neuen Abhandlung über das dialytische Fernrohr sehe ich mit umso grösserem Verlangen entgegen, als Sie schon 1812 Ihre Unzufriedenheit mit der Behandlung solcher Aufgaben mir geäussert haben und ich so hoffen darf, dass auch auf diesem Felde wie auf jedem, welches Sie betreten, der neue und wahre Weg gezeigt werden wird. . . . .}

[21.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 12. Mai 1841.

. . . .

Ich habe vorigen Winter ein kleines dialytisches Fernrohr angeschafft (Kosten cca. 100 ₰) dessen leichte Handhabung und in seiner Art schon reines Bild mir bei ☾ Betrachtungen viel Genuss macht. . . . .

[*) F. W. Bessel, *Ueber ein Mittel zur Bestimmung der Brennweite des Objectivglases eines Fernrohrs*, Astronomische Nachrichten **17**, 1840, Spalte 289 und *Grundformeln der Dioptrik*, ebenda **18**, 1841, Spalte 97; Abhandlungen herausg. von Engelmann II, S. 107 und III, S. 282.

[22.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 27. Junius 1846.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER V, Altona 1863, S. 170.]

. . . .

Ich will jedoch eine Bemerkung mittheilen, die sich mir bei Gelegenheit meines diesmahligen Vortrags dargeboten hat; ich habe zwar jetzt nicht Zeit gehabt in dem PIPERschen Manuscript[*)] die betreffende Stelle aufzusuchen, erinnere mich aber, dass Sie in einem früheren Briefe des Gegenstandes, als in dem Manuscript vorkommend, erwähnt haben.

Es ist der Satz, dass beim Gebrauch der Fernröhre der Kurzsichtige gegen den Weitsichtigen im Vortheil sei, weil er eine stärkere Vergrösserung geniesse. Sie bemerkten sehr richtig, dass die GALILEIschen Fernröhre auszunehmen seien, wo das Gegentheil gelte, welche Fernröhre ich auch von meinem Vortrage von vorne herein ganz ausgeschlossen hatte. Aber die nähere Prüfung, die ich diesmahl angestellt habe, zeigt, dass jener Satz auch bei astronomischen Fernröhren unrichtig, oder wenn Sie lieber wollen, dass er nur bedingungsweise richtig ist. Die Sache ist wirklich etwas captiös, und Ihnen daher vielleicht interessant, wenn ich etwas dabei verweile. Es ist ganz richtig, dass beim Betrachten eines Objects durch eine Loupe der Kurzsichtige im Vortheil vor dem Weitsichtigen ist, indem er mit der Loupe näher kommen kann und dadurch sich eine stärkere Vergrösserung verschafft. Bei dem astronomischen Fernrohr ist das Ocularglas eine Loupe, wodurch man das vom Objective dargestellte Bild betrachtet, und der Kurzsichtige bringt die Loupe dem Object (diesem Bilde) bekanntermaassen näher. Scheint daher meine frühere Behauptung nicht absolut richtig zu sein?

Sie ist es dennoch nicht.

Es sei CD das Objectiv, AB das Bild eines Gegenstandes, E das Ocular.

[*) Kollegienheft nach einer Vorlesung von GAUSS.]

Ich sage nun, es ist nicht einerlei, ob AB ein wirkliches Object ist, oder ein durch CD effectuirtes Bild. Im ersten Fall schickt jeder Punkt von AB z. B. nach allen Seiten Strahlen aus, im zweiten bloss innerhalb des kegelförmigen Raumes 1, der dieselbe Öffnung hat, wie der kegelförmige Raum $BCD = 2$. Jene Strahlen füllen nach dem Durchgange durch E einen beschränkten Raum 3 cylindrisch für weitsichtige Augen, conisch (eventuell herkommend von einer Spitze, für mich z. B. 5 Zoll entfernt) [für kurzsichtige], und da wo die Axe dieses Cylinders oder Kegels die Axe des Fernrohrs trifft, soll das Auge stehen, um alle Strahlen am besten aufzufangen. Man nennt das den Ort des Auges. Dieser Ort des Auges liegt nun (wie eine genauere Untersuchung zeigt) etwas weniges entfernter von dem Ocular bei der Stellung für ein kurzsichtiges Auge, als bei der für ein weitsichtiges, und durch diesen Umstand wird die grössere Annäherung des Oculars gegen das vom Object formirte Bild, die der Kurzsichtige anwendet, mehr als compensirt, so dass der Kurzsichtige, falls er sein Auge wirklich genau an den für sein Auge gültigen Ort bringt, allerdings eine etwas schwächere Vergrösserung hat, als der Fernsichtige. . . . .

[23.]

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 25. Januar 1832.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 2, 1900, S. 581.]

. . . .

Sie haben vielleicht vor einiger Zeit in den G. G. A.[*)] gesehen, dass der Preis auf verbesserte Photometer nicht hat zuerkannt werden können, wenn gleich zwei Abhandlungen eingegangen waren. Die zweite, deren Verfasser sich übrigens fast mit Gewissheit errathen liess, enthält manches Eigenthümliche, auch einen Vorschlag, der auf einer an sich sehr sinnreichen Idee beruht, die ich aber bei näherer Prüfung nicht stichhaltig gefunden habe. Übrigens kann ich nicht leugnen, dass mir scheint, alle Methoden, die sich darauf gründen, dass man das Licht so lange schwächt, bis es einem gegebnen Auge verschwindet, könnten nur sehr rohe Resultate geben; jedenfalls sollte

[*) Göttingische Gelehrte Anzeigen, 1831, 196. Stück, S. 1947, siehe den unten folgenden *Anhang*.]

man damit anfangen zu prüfen, welche Übereinstimmung unter sich sie geben, und zwar nicht an 3 oder 6 Messungen, sondern an einigen Hunderten. Ich bin geneigt zu glauben, dass allemahl, wo das kleinste sichtbare Licht die Einheit abgeben soll, Ungewissheiten von 30 oder mehreren p[ro] c[ent] nicht zu vermeiden sein werden.

Ich habe mir eine Methode ausgesonnen, die auf ein anderes Princip sich stützt, wo nemlich das Auge über nichts als über Gleichheit oder Ungleichheit zweier Gegenstände, die es immer nebeneinander im Gesichtsfelde des Fernrohres sieht, zu urtheilen hat, und Freund Gerling die Hauptideen mitgetheilt. Ich hoffe, er wird sein grosses practisches Talent dazu anwenden, diese Idee auszuführen. Übrigens wissen Sie, dass (auf meine Veranlassung) die Aufgabe noch einmahl wiederholt ist. . . . .

Ich komme noch einmahl auf das Photometrische zurück. Ich vermuthe, dass das Urtheil über gleiche? oder ungleiche? Helligkeit einer ziemlich grossen Schärfe fähig sein wird, wenigstens einer grösseren, als irgend ein anderes Verfahren, sobald die Gegenstände nicht sehr ungleiche Färbung haben. Im entgegengesetzten Fall, z. B. wenn roth mit grün verglichen werden soll, wird dies freilich wegfallen. Ich habe indess eigentlich keinen recht deutlichen Begriff, was eigentlich gleiche Helligkeit hier bedeuten soll. Bei gleichen Farben schaut man das unmittelbar an; aber ungleiche können als Empfindungen in Rücksicht auf Gleichheit der Helligkeit im Grunde kaum verglichen werden. Am Ende bleibt da wohl gar nichts anderes übrig, als dass ein rother Stern und ein grüner Stern für gleich hell gelten, wenn einerlei aliquoter Theil die Grenze des Empfindbaren ist. Etwas ähnliches gilt dann von der specifischen Helligkeit ungleich gefärbter Flächen, wo das Princip auch schon von Newton gebraucht ist. Bei der astronomischen Anwendung möchte indessen daran nicht so sehr viel liegen, da doch die sehr abweichend gefärbten Sterne nur seltenere Ausnahmen sind. Aber darin mag wol viel subjectives liegen. Vielleicht wären Augen möglich, wenn auch nicht menschliche, für die das violette Licht (nach jenem Begriff) viel heller wäre als das gelbe. Doch verzeihen Sie, lieber Olbers, meine unreifen Zweifel, da Sie selbst aus diesen Gegenständen viel mehr Studium gemacht haben als ich. . . . .

[24.]

Gauss an Olbers. Göttingen, 18. Februar 1832.

[Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke II, 2, 1900, S. 584.]

. . . .

Vielleicht macht es Ihnen eine kleine Zerstreung, wenn ich Ihnen meine Grundidee zu einem Photometer, wie ich sie Gerling angegeben habe, anzeige. Denken Sie sich einen Spiegelsextanten mit der Modification, dass der kleine Spiegel gar nicht belegt ist, sondern bloss von seinen Glasflächen reflectirt, beide Spiegel aber reichlich so gross wie das Objectiv des Fernrohres, der grosse auch so breit, wie es für die äussersten Fälle der Winkeldistanz zwischen zwei zu vergleichenden Sternen nöthig ist, damit jeder Punkt des Objectivs Licht bekomme. Man stellt den Sextanten so, als wollte man jene Distanz messen, so dass beide Bilder nahe beieinander erscheinen. Die ursprünglichen Lichtintensitäten der Sterne A, B seien a und b, die Intensität des Lichtes der Bilder αa, βb, wo α und β von der Öffnung des Objectivs, der unvollkommenen Durchsichtigkeit der Gläser abhängen, β ausserdem auch noch von der Angulardistanz der Sterne. Jenseits des kleinen Spiegels ist aber noch eine Vorrichtung angebracht, vermöge der man das direct gesehene Licht auf einen beliebigen Bruch $= \mu$ reduciren kann, indem man statt des vollen Objectivs nur einen Sektor $= \mu \times 360^0$ Licht verstattet. Diess μ bestimmt man so, dass beide Bilder gleich hell erscheinen; man hat also

$$\mu \alpha a = \beta b.$$

Jetzt macht man einen zweiten Versuch, indem man den Sextanten umkehrt und also den vorher direct gesehenen Stern reflectirt sieht. In diesem zweiten Versuch trete μ' an die Stelle von μ. Man hat also

$$\mu' \alpha b = \beta a.$$

War ursprünglich $a = b$, so wird man nothwendig $\mu' = \mu$ finden und vice versa; sind aber a, b ungleich, so hat man

$$a : b = \beta : \mu \alpha = \mu' \alpha : \beta = \sqrt{\mu'} : \sqrt{\mu}.$$

Zugleich wird immer $\mu\mu' = \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha}$ eine bloss von der Angulardistanz abhängige

Grösse sein, über die man aus vielen Versuchen das Gesetz ausfindig machen kann; nachdem dies gefunden ist, werden auch einseitige Messungen ein Resultat geben. Dies ist die eigentlich mathematische Grundidee; es versteht sich, dass an die Stelle eines grossen Sextanten mit kleinem Fernrohr hier ein grosses Fernrohr mit kleinem Sextanten (nur um die Sterne bequem zugleich ins Gesichtsfeld bringen zu können) treten muss. . . . .

Anhang zu [23.].
[Preisaufgabe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften.]

Göttingische Gelehrte Anzeigen 1831, 196. Stück, S. 1947—1949.

Für den November d. J. [1831] war von der mathematischen Classe der Hauptpreis auf die Beantwortung der Aufgabe gesetzt:

. . . .

In der praktischen Astronomie mangelt es noch immer an einem Mittel zur sichern Bestimmung der Lichtstärke der Himmelskörper, und die früher zu diesem Zwecke in Vorschlag gebrachten Vorrichtungen haben sich in der Anwendung wenig brauchbar gezeigt.

Da es jedoch von vielfachem und grossem Nutzen seyn würde, die verschiedenen Abstufungen des Sternenlichtes und die darin statt findenden Veränderungen mit Sicherheit und Leichtigkeit beurtheilen zu können:

> so wünscht die Königliche Societät neue, durch vollständige Beschreibungen erläuterte Vorschläge zu solchen auf photometrischen Grundsätzen beruhenden Vorrichtungen zu erhalten, mittelst welcher die verschiedenen Grade des Lichts der Fixsterne mit Sicherheit, Gleichförmigkeit und Leichtigkeit beurtheilt und festgestellt werden können, und deren Leistungen aus einer ausführlichen Darlegung der Resultate, die aus ihrer Anwendung auf Sterne von den verschiedensten Grössen erhalten worden sind, sich erkennen und beurtheilen lassen.

Es waren darauf zwey Concurrenzschriften mit den Denksprüchen

No. 1. Errare humanum est;

No. 2. Per aspera ad astra

bezeichnet eingegangen.

Der Verfasser der ersten Abhandlung legt zuerst das Prinzip dar, nach welchem allein, seiner Meinung zufolge, dass Verhältniss der Lichtstärke der Himmelskörper bestimmt werden könne, gibt hierauf eine ausführliche, durch Abbildungen erläuterte Beschreibung einer Vorrichtung, mittelst welcher jenes Verhältniss sich werde festsetzen lassen, und zählt zuletzt die mancherley wichtigen Vortheile auf, welche die Astronomie und Physik von einer sichern und wichtigen Photometrie zu erwarten haben. — Die in Vorschlag gebrachte Vorrichtung kommt im Wesentlichen mit dem seit vielen Jahren bereits bekannten Köhlerschen Photometer ganz überein, dessen unmittelbare Anwendung nicht sehr brauchbar befunden worden ist, und unterscheidet sich von diesem nur durch einen künstlichern Mechanismus. Ob der Verfasser aber eine solche Vorrichtung wirklich ausgeführt, und ihre Leistungen bey den verschiedenen Lichtabstufungen der Sterne untersucht habe, geht aus der Abhandlung nicht hervor, indem darin überall keine Erfahrungen und Beobachtungen angeführt worden sind, aus welchen sich solche erkennen liessen. Da also diese Abhandlung die beiden Hauptbedingungen der Aufgabe unberücksichtiget gelassen hat, so konnte ihr der Preis nicht zuerkannt werden.

Der Verfasser der zweyten Concurrenzschrift hat dagegen beide Forderungen zu erfüllen gestrebt, indem er nicht nur das Lichtverhältniss auf eine neue, noch nicht versuchte, sinnreiche Art mittelst einer ganz einfachen, im Modell beygefügten, Vorrichtung zu bestimmen vorschlägt, sondern auch ihre Anwendbarkeit auf Sterne von ganz verschiedener Grösse durch das aus einer Reihe wirklich angestellter Beobachtungen erhaltene Resultat darzulegen sucht. Da aber theils diese Versuche zu wenig zahlreich und mannigfaltig sind, als dass dadurch schon eine Bürgschaft für die Richtigkeit der Resultate gewonnen wäre, auch eine eigentliche Theorie dieses Apparats, welche hier wesentlich und nothwendig ist, gänzlich vermisst wird: so konnte die Königl. Societät dieser Abhandlung in ihrer gegenwärtigen Gestalt den Preis nicht zuerkennen. In der Überzeugung jedoch, dass der Verfasser dieser Abhandlung, welcher Originalität, practischen Sinn und viele mechanische Anstelligkeit an den Tag legt, seinen Ideen mehr Vollendung gegeben, und die Anwendbarkeit des sinnreich gewählten Apparats durch zahlreichere Versuche mehr begründet haben würde, wenn die von ihm angeführten Hindernisse seine Musse zu diesen Untersuchungen weniger beschränkt hätten, findet die Kön. Societät sich um so mehr bewogen, die Gelegenheit zur weitern Ausbildung derselben durch eine wiederholte Aufstellung dieser Preisfrage darzubieten, da sie die Hoffnung hegen darf, dass dadurch noch mehrere Mitbewerber veranlasst werden könnten, dieser der Wissenschaft so vielfachen Nutzen versprechenden Aufgabe ihre Untersuchungen zu widmen. Sie stellet daher diese Frage: »Über die Bestimmung der Lichtstärke der Himmelskörper« noch einmal für den November 1834 auf[*)]. . . . .

[*) Der Bericht über das Ergebnis dieser zweiten Preisausschreibung findet sich in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1835, S. 329 ff., Werke VI, S. 649. Danach erhielt STEINHEIL den Preis, während das Accessit einer andern Arbeit zuerkannt wurde, als deren Verfasser sich (siehe Göttingische Gelehrte Anzeigen 1835, S. 1329) GERLING bekannt hat.]

VERMISCHTES ZUR PHYSIK.

[ZUR AKUSTIK.]

BRIEFWECHSEL.

GAUSS an W. WEBER.

Wohlgeborner Herr

Hochzuverehrender Herr Professor

Ihr gütiges Schreiben nebst Ihren schätzbaren akustischen Abhandlungen erhielt ich zu einer Zeit, wo die Überhäufung mit Geschäften mich nöthigte, letztere einstweilen bei Seite zu legen, und mir ihre Lectüre auf eine etwas freiere Zeit vorzubehalten. Gegenwärtig sind wenigstens die Ferien — oder in Beziehung auf mich richtiger, ist die Zeit der Ferien — eingetreten. Ich habe Ihre Aufsätze zur Hand genommen; allein wie lebhaft mich auch die Originalität Ihrer Arbeiten interessirt hat, bin ich doch bald gewahr geworden, dass sie zu einer gründlichen Beurtheilung des reichhaltigen Inhalts durchaus eine nachhaltigere Beschäftigung erfordern und verdienen, als mir gegenwärtig vergönnt ist, ihnen widmen zu können. Ich darf es aber nicht länger verschieben, Ihnen für die gewogentliche Mittheilung meinen ergebensten Dank und zugleich meine Freude zu bezeugen, dass Sie sich dieser interessanten Untersuchungen mit so viel Eifer als Erfolg widmen.

Ich bin immer der Meinung gewesen, dass die Akustik zu denjenigen Theilen der mathematischen Physik gehört, wo noch die allerglänzendsten

Fortschritte zu machen sind. In der That handelt es sich dabei bloss um räumliche und Zeit-Relationen und der Gegenstand sollte also ganz der Mathematik unterwürfig gemacht werden können; und doch wie wenig, wie äusserst wenig wissen wir noch! Bei den dem Anscheine nach gemeinsten Dingen wissen wir noch gar nicht einmahl, wie wir sie angreifen sollen. Alle unsere bisherigen Untersuchungen beschränken sich 1) auf die Geschwindigkeit der Fortpflanzung und 2) auf die Dicke der Schallwellen; von dem Verhältniss dieser beiden Grössen hängt die Höhe der Töne ab. Aber das Unterscheidende, Eigenthümliche der Töne, was in einigen Fällen durch das Wort timbre bezeichnet wird, aber am wunderbarsten in den sogenannten articulirten Tönen sich äussert, dies ist, insofern mathematisch klare Einsicht gefordert wird, bis jetzt eine völlige terra incognita. Es scheint, dass dies nur von der Gestalt der Schallwellen abhängen kann. Welch ein unermessliches Feld liegt hier noch vor uns. Ich bin überzeugt, dass der menschliche Geist es einst öffnen, und hier dieselbe Klarheit schaffen wird, die den optischen Wissenschaften gegeben ist. Man sollte selbst glauben, dass für den, welcher lebendigen Eifer, mathematische Kraft, Anstelligkeit zu Versuchen und hinreichende Musse vereinigte, es so gar schwer nicht werden könnte, in diese Dunkelheit das erste Licht zu bringen. Es handelt sich nur darum, zu lehren, welches die specifischen Unterschiede für verschiedene Töne sind, nicht im schallgebenden Körper und nicht im Ohr, sondern in dem elastischen Medium zwischen beiden. In Beziehung auf den schallgebenden Körper ist für diesen Gegenstand durch von Kempelens genialisches Werk[*] schon so sehr viel vorgearbeitet, dass man sich wundern muss, dass wir seitdem (seit 40 Jahren) noch nichts weiter gekommen sind. Herzlich wünsche ich, dass es Ihnen vorbehalten sein möge, hierin eine neue Bahn zu brechen.

Unter Versicherung meiner aufrichtigsten Hochachtung empfehle ich mich Ihrem freundschaftlichen Andenken

Göttingen den 2. April 1830.

ganz ergebenst
C. F. Gauss.

[*] Wolfgang von Kempelen, *Mechanismus der menschlichen Sprache*, Wien 1791.]

[ELEKTRIZITÄT UND MAGNETISMUS.]

BRIEFWECHSEL.

[1.]
Gauss an W. Weber.

Wollen Sie, lieber Weber, einmahl versuchen, ob Sie eine telegraphische Probe, die ich 5 Minuten nach dem Uhrzeichen anfangen will, lesen können? Hier der Schlüssel:

	−3	−2	−1	+1	+2	+3
−3	*y*	=	*w*	*f*	=	=
−2	—	*h*	*a*	*s*	*b*	—
−1	*k*	*d*	*e*	*i*	*g*	*p*
+1	*v*	*o*	*n*	*r*	*l*	*q*
+2	—	*c*	*t*	*u*	*m*	—
+3	—	—	*x*	*z*	—	—

Die offenen Stellen können für die Ziffern und etwa den Schlusspunkt reservirt bleiben. Es ist also z. B. $x = +3 - 1$, d. i. drei positive und nach einer kleinen Pause von etwa 4 Secunden Ein negativer Stoss. Positiv und negativ verstehe ich nach dem Magnetometer der Sternwarte; ob der Ihrige damit conform ist, oder ob Sie sämtliche Zeichen entgegengesetzt rechnen müssen, erkennen Sie an dem heutigen Uhrzeichen, welches in der Sprache der Sternwarte + sein soll.

[Göttingen] 16. Jul. 1835.

Von Herzen
Ihr G[auss.]

Wenn Sie die Phrase nicht bis zu Ende gut lesen können, so wird glaube ich die Schuld nur an der kurzen Schwingungsdauer Ihrer Nadel liegen, die deshalb bald in bedeutende Bewegung kommen muss, wenn ich auch die Stösse so kurz, wie es die Einrichtung hier bis jetzt nur verstattet, gebe. Braucht man erst sehr schwere Nadeln, deren Schwingungsdauer etwa 1 Minute beträgt, so wird, hoffe ich, diese Methode nichts zu wünschen übrig lassen, und [es werden] in Einer Minute füglich 4 Buchstaben übermacht werden können.

[2.]

Gauss an W. Weber.

. . . .

Vor einigen Tagen habe ich noch einmahl versucht, Kohle in die galvanische Kette zu bringen. Meine alten (20 Jahre alten) Kohlen leiteten gar nicht, während frisch ausgeglühete Kohlen einen vergleichungsweise gegen die 13000 Fuss lange Drahtkette (Multiplicator u. Indicator 6000 + 7000) nur kleinen Widerstand darboten. Was mir aber besonders merkwürdig war, ist, dass pulverisirte Kohlen (frische) in einer breiten und dünnen Schicht zwischen zwei Metallplatten gar nicht leiten wollten. Ich weiss nicht, ob diess auch schon von andern bemerkt ist.

Erfreuen Sie, geliebter Weber, mich bald mit einem Briefe, am liebsten, mit der Nachricht Ihrer baldigen Rückkehr.

G[öttingen] den 10. Julius 1838. Ihr treuer C. F. G.

[3.]

Gauss an W. Weber.

Die beiden für das Leipziger magnetische Observatorium und für Sie, mein theuerster Freund, bestimmten Exemplare der *Observations etc.* sind mir nebst vielen andern zu vertheilenden, auf dem nicht ganz geraden Wege über Hamburg—Berlin—Leipzig von Sabine schon vor mehreren Wochen zugesandt: ich hatte bisher immer auf eine Gelegenheit zur Beförderung nach Leipzig gehofft, die sich aber nicht hat finden wollen.

Ihr Versuch, wodurch Sie die electrische Ungleichheit des Zinks und Kupfers direct erkennbar und messbar machen, hat mich sehr interessirt, und ich bin geneigt zu glauben, dass er der Anfangspunkt zu höchst wichtigen Fortschritten in dieser Lehre werden könnte. Ich fühle dabei aufs neue schmerzlichst, wie schön es gewesen sein würde, wenn ich mit Ihnen zusammen in diesem Felde hätte arbeiten können.

Rechnungen über die Vertheilung der Elektricität auf Ihrer zwei-metalligen Kugel lassen sich noch gar nicht machen, da es noch am Besten fehlt, nemlich an dem präcisen physikalischen Princip, wovon die Rechnungen ausgehen müssen. Diesem Princip vor allem müsste man auf die Spur zu kommen suchen; ist es einmahl gefunden und befestigt, so wird es auf einmahl in der Lehre Tag werden und neue Entdeckungen wie scheffelweise die Aepfel von einem schwerbelasteten Fruchtbaum uns von selbst in den Schooss fallen.

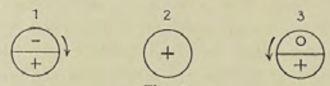
Wie die Elektricität auf einem leitenden (elektrisch homogenen) Körper sich vertheilt, dazu hat bekanntlich Poisson vor 30 Jahren die Grundgleichungen gegeben[*], und die Folgen für mehrere interessante obwohl immer höchst einfache Fälle entwickelt. Nach Voltas Meinung, an die ich vor Ihrem Versuche niemals recht habe glauben können, vertheilt sich die Elektricität auf einem zusammengesetzten Körper anders als auf einem homogenen, so zwar, dass z. B. Zink mehr positive Elektricität enthält, wenn es mit Kupfer verbunden ist, als es haben würde, wenn es mit eben so geformtem Zink verbunden wäre. Aber es ist dies nicht viel mehr als Nichts wissen, so lange wir nicht das Quantitative dieses Mehr im Ganzen wie im Einzelnen klar überschauen können und dazu fehlt es zur Zeit noch an Allem. Aber Versuche werden schon auf die Spur führen können, wenn sie in grössester Mannichfaltigkeit und in möglichster Schärfe ausgeführt werden. Ich will zunächst nur ein Paar unreife Gedanken hersetzen:

1) Wenn Sie anstatt Ihrer Kugel aus Zink und Kupfer eine andere aus Metall, z. B. Zink, und Glas nehmen, so würde, deucht mir, jedenfalls ein ähnlicher Erfolg Statt finden, aber mit dem wesentlichen Unterschiede, dass letztere sich in Einerlei Sinn drehen würde, Sie mögen eine positive oder eine

[*] S. D. Poisson, *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs* [1812] Mémoires de l'Institut, Paris 1811, S. 1—92, Second Mémoire [1813], ebenda (pte. 2), S. 163—274.]

negative elektrisirte Kugel annähern, während nach Ihrer Mittheilung (von der mir gerade dies wie der wichtigste Punkt erschienen ist) bei Ihrer Kugel die Drehungen nach Maassgabe der Art der angenäherten Elektricität entgegengesetzt sind.

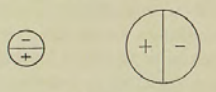
Ist diese Ansicht die richtige, so kann, deucht mir, eine solche Kugel dazu dienen, die Stärke der Elektrisirung der wirkenden Kugel zu messen. Diese Stärke der Elektrisirung wird wohl ziemlich schnell abnehmen, und in jedem Augenblicke ein Maass dafür zu haben, würde also ein wichtiges Bedürfniss befriedigen. Das Ganze sähe dann z. B. so aus:



Figur 1.

1 die Zink-Kupferkugel, 2 die elektrisirte Kugel, 3 die Zink-Glaskugel. 1 und 3 sind zweckmässig bifilar aufgehängt und tragen Spiegel. Die Ablenkung von 3 wird dem Quadrate der Elektricitätsmenge von 2 proportional sein; wie wird sich aber die Ablenkung von 1 verhalten? Das eben sollen mannigfaltige Versuche lehren.

2) Mit sehr empfindlichen Beobachtungsmitteln würde sich vielleicht schon eine Ablenkung zeigen, wenn anstatt der elektrisirten 2 eine nicht elektrisirte Zink-Kupferkugel gebraucht wird, so



Figur 2.

Denn wenn es wahr ist, dass in der Berührung von Zink und Kupfer allezeit das erstere einen Überfluss positiver Elektricität gegen das letztere hat, so müssten sich doch zwei solcher Kugeln gleichsam wie polarisirte Magnete verhalten.

3) Sollte nicht anstatt einer aus Zink und Kupfer zusammengesetzten Kugel auch bloss ein metallisch verbundenes Paar Platten [sich] gebrauchen lassen? so aufgehängt:

Aufriß. Grundriß.
Figur 3.

Mit Ihrer elektrisirten Kugel müssten Sie dächte ich diesem bifilar aufgehängten Scheibenpaar eben so gut eine Ablenkung ertheilen können wie Ihrer aus zwei Halbkugeln bestehenden Kugel, vermuthlich sogar eine stärkere, und solche Scheibenpaare lassen sich mit viel geringeren Kosten herstellen.

Ich habe oben Poissons Arbeit von 1814 [*)] erwähnt. Die mathematische Kunst darin verdient alle Anerkennung, aber ich habe noch einige Zweifel, ob die physikalische Grundlage ganz richtig ist. Ich meine, ob diejenige Wirkung der Elektricitätselemente auf einander, welche dem Quadrat verkehrt proportional, hier allein im Spiel ist, oder ob nicht zugleich eine Art Molecularaction in Betracht gezogen werden muss, die viel mehr dabei wirkt, etwa so wie bei liquiden Flüssigkeiten die gegenseitige Gravitation der Theile $\left(:: \frac{1}{dd}\right)$ nur die zweite Rolle spielt neben nur in unmessbar kleinen Entfernungen wirkenden Kräften. Es ist dies in diesem Augenblick nur ein flüchtiger Gedanke, da das Gewicht der von Poisson beigebrachten Versuche mir jetzt nicht gegenwärtig genug ist. Bei einer blossen Wirkung $:: \frac{1}{dd}$ kann ich mir von der Ursache des Voltaischen Fundamentalsatzes gar keine Vorstellung machen: bei einer Mitwirkung von Molecularkräften liesse sich schon eher etwas dem Kalkül zugängliches denken.

Doch es ist Zeit, diese unreifen Gedanken — die nur durch das Zutreten von Erfahrungen zur Reife kommen (oder als nichtig sich ausweisen) können — abzubrechen.

Mit den herzlichsten Empfehlungen an Ihre Herren Brüder, ingleichen an Herrn Professor Möbius

Göttingen 27. Januar 1844. stets ganz der Ihrige

C. F. Gauss.

. . . .

[*) Gemeint ist die S. 175 in der Fußnote genannte Arbeit.]

NACHLASS.

ZURÜCKFÜHRUNG
DER WECHSELWIRKUNGEN ZWISCHEN GALVANISCHEN STRÖMEN UND MAGNETISMUS AUF ABSOLUTE MAASSE.

[**Erster Abschnitt.**]

1.

Alle rein magnetischen Phänomene lassen sich durch die Annahme zweier magnetischen Fluida erklären, die nach einfachen der allgemeinen Schwere analogen Gesetzen auf einander wirken. Auch die Wechselwirkungen zwischen Magnetismus und Galvanismus nöthigen uns nicht, von jener Vorstellungsart abzugehen: allein wir müssen den früher bekannt gewesenen Naturgesetzen, nach welchen allein wir jene Phänomene noch nicht erklären können, andere beifügen, die man vor der Hand wenigstens wie neue physische Thatsachen zu betrachten hat, ohne die Hoffnung aufzugeben, dass es in Zukunft gelingen werde, sie auf noch einfachere Grundgesetze zurückzuführen.

2.

Wie es bei jeder schwierigen und verwickelten Naturwirkung nothwendig ist, mit den einfacheren Fällen anzufangen, so werden wir uns in der gegenwärtigen Untersuchung auf die Betrachtung der galvanischen Ströme in solchen Leitern beschränken, deren Querschnitte sehr klein sind, so dass wir diese Querschnitte wie physische Punkte ansehen, oder die Ungleichheit der Entfernungen der einzelnen Punkte eines Querschnittes von einem äusseren Punkte, auf welchen der Strom wirkt, bei Seite setzen dürfen. Der Stromträger kann

daher wie eine mathematische Linie betrachtet werden, deren Länge, von einem willkürlichen Anfangspunkte bis zu jedem unbestimmten Punkte in dem Sinn des positiven Stroms gemessen, wir durch s bezeichnen: die positive Richtung ist die bei hydrogalvanischer Erregung vom Zink durch das Wasser nach dem Kupfer gehende.

3.

Das Mittel zur Abmessung der Stärke eines galvanischen Stroms finden wir in dessen Wirkung auf die magnetischen Fluida. Das Grundgesetz dafür, welches bald nach OERSTEDS Entdeckung durch vielfache Versuche gefunden und bestätigt wurde, ist folgendes: Das Strom-Element in dem Theile des Leiters $AB = ds$ übt auf ein magnetisches Element μ in dem Punkte C eine bewegende Kraft in einer Richtung aus, welche nicht in der geraden Linie AC liegt, sondern gegen die durch ABC gelegte Ebene normal ist, und zwar steht diese bewegende Kraft im zusammengesetzten geraden Verhältniss der Länge ds, der Intensität des Stromes in A, welche wir durch g bezeichnen wollen, der Menge des freien magnetischen Fluidums in μ, und des Sinus des Winkels $BAC = u$, endlich daneben im verkehrten doppelten Verhältniss der Entfernung $AC = r$, und kann also durch die Formel

$$\frac{\mu g \sin u \,.\, ds}{rr}$$

ausgedrückt werden. Dabei ist folgendes zu bemerken:

I. Läge C in der durch AB gehenden geraden Linie selbst, so bliebe zwar die Ebene ABC unbestimmt, allein in diesem Falle findet wegen $\sin u = 0$ gar keine Kraft Statt.

II. In allen übrigen Fällen gehen von C zwei Normallinien gegen das Planum ABC aus, CD und CD', wovon die eine der Richtung der Kraft entspricht, welche das Stromelement auf ein Element positiven magnetischen Fluidums ausübt, während ein negatives magnetisches Molecül in der entgegengesetzten sollicitirt wird. Die Unterscheidung ist eine völlig bestimmte, wie die von der Ordnung unter je dreien von einem Punkte ausgehenden und nicht in Einer Ebene liegenden geraden Linien, welche jedoch nicht durch Begriffe a priori, sondern nur durch Hinweisung auf eine in der wirklichen Welt bestehende in der Anschauung gegeben werden kann. Der Erfahrung zufolge verhalten sich in dieser Beziehung die drei Richtungen von A nach B, von A nach C und von C nach D (oder was dasselbe ist von A parallel mit CD) wie diejenige, die wir durch die Benennung Richtung nach vorn, Richtung nach der rechten Seite, und Richtung nach unten unterscheiden, wenn D sich auf positiven Magnetismus bezieht, während in derselben Ordnung die Richtung nach oben der auf den negativen Magnetismus wirkenden Kraft entspricht.

III. Da die Formel $\frac{\mu g \sin u \,.\, ds}{rr}$ eine bewegende Kraft ausdrückt, eben so wie $\frac{\mu\mu}{rr}$, welches die bewegende Kraft ist, welche ein dem μ gleiches magnetisches Element auf μ ausübt, so folgt, dass $g ds$ mit μ homogen ist, oder die Intensität g homogen mit einer beliebigen Menge magnetischen Fluidums dividirt durch eine Linie.

Genau genommen sind alle diese Grössen Zahlen, welche ihr Verhältniss zu beliebigen Grössen derselben Art, welche man als Einheiten wählt, ausdrücken. Für die Intensität g liegt dann als Einheit die Intensität eines solchen Stromes zum Grunde, welcher einen Kreis bildet, dessen Halbmesser die Längeneinheit ist, und von welchem ein dem Halbmesser gleicher Bogen in seinem Mittelpunkt auf magnetische Fluida eben so stark wirkt, wie die als Einheit angenommene Menge des magnetischen Fluidums in derselben Entfernung wirken würde. Es wird nicht überflüssig sein, hier diejenigen Formeln zusammenzustellen, welche die Homogeneität der verschiedenen bei diesen und ähnlichen Untersuchungen vorkommenden Grössen darstellen. Es sei R eine Lineargrösse, t eine Zeitgrösse, p eine Masse, μ ein Quantum magnetischen Fluidums, T die Kraft des Erdmagnetismus oder eine damit homogene Kraft. Es ist sodann homogen

$$\mu \text{ mit } \sqrt{\frac{pR^3}{tt}}$$

$$T \text{ mit } \sqrt{\frac{p}{Rtt}}$$

$$g \text{ mit } \frac{\mu}{R} \text{ oder mit } \sqrt{\frac{pR}{tt}} \text{ oder mit } RT.$$

Homogene Grössen werden immer durch Zahlen ausgedrückt, deren Verhältniss von der Wahl der Fundamentaleinheiten für Raum, Zeit und Masse unabhängig ist.

IV. Nach allen Erfahrungen ist die Intensität eines galvanischen Stroms

an allen Stellen dieselbe, insofern keine Theilung Statt findet. Bei einer Theilung in zwei oder mehrere Äste ist die Summe der Intensitäten in den einzelnen Ästen der Intensität vor der Theilung gleich; etwas ähnliches findet Statt bei der Vereinigung mehrerer Äste zu Einem Strome, dessen Intensität der Summe der Intensitäten in den einzelnen vereinigten Armen gleich wird.

V. Zwei Ströme von gleicher Intensität, die eine und dieselbe Linie in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, bringen in jedem Punkte des Raumes gleiche aber entgegengesetzte bewegende Kräfte hervor, mithin gar keine, wenn jene als coexistirend gedacht werden.

VI. Gegenseitigkeit oder Rückwirkung auf das Element des Stromträgers [*)].

4.

Nach dem im vorigen Artikel aufgestellten Grundgesetz wird nun die Bestimmung der Kraft, welche ein Strom in jedem Punkte des Raumes auf die magnetischen Fluida ausübt, zu einer rein mathematischen Aufgabe. Ehe wir jedoch dafür allgemeine Formeln entwickeln, wollen wir einige der einfachsten Fälle besonders betrachten. Wir werden dabei den Factor $g\mu$ weglassen oder die Wirkung des Stroms, dessen Intensität $= 1$ ist, auf die in Einem Punkte vereinigt gedachte Einheit des positiven magnetischen Fluidums zum Grunde legen.

Wir betrachten zuerst einen geradlinichten Strom, der auf einen Punkt P wirkt; es sei $PA = a$ senkrecht gegen die gerade Linie und x ein unbestimmtes Stück der letzteren, von A an in dem Sinne der Richtung des Stromes gezählt. Der Winkel, den jedes Stromelement dx mit der von seinem Anfangspunkt nach P gezogenen geraden Linie r macht, sei u, also

$$\frac{\sin u \,.\, dx}{rr}$$

die Wirkung des Stromelements dx auf P, welche dem vorhergehenden zufolge senkrecht gegen die Ebene durch P und die gerade Linie, und zwar nach unten zu gerichtet ist, wenn man sich diese Ebene horizontal denkt und P rechts von der geraden Linie liegt, die Richtung des Stromes in dieser als vorwärtsgehend betrachtet.

[*)] Diese Zeile steht am Rande der Handschrift; die weitere Ausführung fehlt.]

Da

$$x = -a \operatorname{cotg} u, \quad r = +\frac{a}{\sin u},$$

so wird

$$\int \frac{\sin u\, dx}{rr} = \int \frac{\sin u\, du}{a} = \text{Const.} - \frac{\cos u}{a}.$$

Sind also die Werthe von x, u, r in dem Anfangs- und Endpunkte des Stromes resp. x^0, u^0, r^0; x', u', r', so wird die ganze in P wirkende Kraft

$$= \frac{\cos u^0 - \cos u'}{a} = \frac{x'}{ar'} - \frac{x^0}{ar^0}.$$

Erstreckt sich die gerade Linie auf einer oder beiden Seiten ins unendliche, so bleibt demungeachtet die Kraft endlich; es wird dieselbe nemlich

$= \frac{1 - \cos u'}{a} = \frac{r' + x'}{ar'}$ [*)], wenn der Strom ohne Anfang,

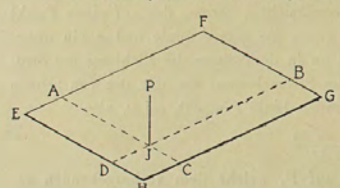
$= \frac{1 + \cos u^0}{a} = \frac{r^0 - x^0}{ar^0}$ [*)], wenn er ohne Ende,

$= \frac{2}{a}$, wenn er ohne Anfang und Ende ist,

und es erhellet hieraus, dass alle über eine gewisse Entfernung hinaus liegenden Theile eines Stromes in einem Leitungsdraht keine merkliche Wirkung mehr ausüben.

5.

Wir wollen jetzt die Wirkung eines Stromes, der die vier Seiten eines Rechtecks $EFGH$ durchläuft, auf einen Punkt P bestimmen. Es sei $PJ = k$ das Perpendikel aus P auf die Ebene des Rechtecks und AC und DB[*)] mit den Seitenpaaren des Rechtecks parallel. Wir bezeichnen AP, BP, CP, DP mit a, b, c, d; AJ, BJ, CJ, DJ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für den Fall der Figur als positiv betrachtet; endlich EP, FP, GP, HP mit e, f, g, h, so dass



Figur 4.

$$aa = \alpha\alpha + kk, \quad bb = \beta\beta + kk, \quad cc = \gamma\gamma + kk, \quad dd = \delta\delta + kk,$$

$$ee = \alpha\alpha + \delta\delta + kk = aa + \delta\delta = dd + \alpha\alpha \text{ u. s. w.}$$

[*) In der Handschrift befinden sich an dieser Stelle Schreibfehler.]

Fiele J ausserhalb des Rechtecks, so würde nur eine oder einige der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ negativ zu setzen sein.

Dem vorigen Artikel zufolge ist die Wirkung von EF auf P

$$= \frac{\beta}{af} + \frac{\delta}{ae}.$$

Die Richtung dieser Kraft ist normal gegen AP, und insofern der Strom in der Richtung $EFGH$ geht und das Rechteck horizontal gedacht wird, nach unten zu gerichtet; sie zerlegt sich in Eine senkrecht gegen die Ebene des Rechtecks

$$= \frac{\alpha\beta}{aaf} + \frac{\delta\alpha}{aae}$$

und eine parallel mit AC

$$= \frac{k\beta}{aaf} + \frac{k\delta}{aae}.$$

Behandelt man ebenso die drei anderen Seiten, so findet man, dass die ganze auf P wirkende Kraft sich in folgende drei zerlegt:

I. Normal gegen das Planum, nach unten zu

$$\begin{aligned} &\frac{\delta\alpha}{dde} + \frac{\delta\alpha}{aae} \\ +&\frac{\alpha\beta}{aaf} + \frac{\alpha\beta}{bbf} \\ +&\frac{\beta\gamma}{bbg} + \frac{\beta\gamma}{ccg} \\ +&\frac{\gamma\delta}{cch} + \frac{\gamma\delta}{ddh} \end{aligned}$$

Man bemerkt leicht, dass diese acht Theile die Wirkung der acht Stücke des Stroms DE, EA, AF, FB, BG, GC, CH, HD ausdrücken.

II. Parallel mit AC

$$\frac{k\beta}{aaf} + \frac{k\delta}{aae} - \frac{k\delta}{cch} - \frac{k\beta}{ccg}.$$

III. Parallel mit BD

$$\frac{k\alpha}{bbf} + \frac{k\gamma}{bbg} - \frac{k\gamma}{ddh} - \frac{k\alpha}{dde}.$$

Die Formeln werden einfacher, wenn J in der Mitte von AC oder BD[*)] liegt. Im ersten Falle wird

$$a = c, \quad e = h$$
$$\alpha = \gamma, \quad f = g,$$

[*) Hier Schreibfehler der Handschrift.]

Also die Kraft I

$$= 2\left(\frac{\alpha\delta}{aae} + \frac{\alpha\delta}{dde} + \frac{\alpha\beta}{aaf} + \frac{\alpha\beta}{bbf}\right),$$

die Kraft II $= 0$,
die Kraft III

$$= 2\left(\frac{k\alpha}{bbf} - \frac{k\alpha}{dde}\right).$$

Liegt J in der Mitte des Rechtecks, so dass zugleich $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, folglich $a = c$, $b = d$, $e = f = g = h$, so wird die Kraft I

$$= 4\left(\frac{\alpha\beta}{aae} + \frac{\alpha\beta}{bbe}\right)$$

und sowohl die Kraft II als III $= 0$.

6.

Haben wir anstatt eines Recktecks, eine grosse Anzahl gleicher und in gleichen Distanzen auf der Oberfläche eines rechtwinklichten Prisma liegender Vierecke, die alle von gleichen Strömen in übereinstimmender Richtung durchlaufen werden, so lässt sich die Summe aller Kräfte hinreichend genau durch Integration finden. Für alle diese Rechtecke haben nemlich α, β, γ, δ gleiche Werthe, während k ungleiche in arithmetischer Progression haben wird; ist n die Anzahl der Rechtecke und λ die Entfernung zweier auf einander folgender, und die äussersten Werthe von k diese $k^0 + \frac{1}{2}\lambda$, $k' - \frac{1}{2}\lambda$, so dass $k' = k^0 + n\lambda$, so wird man die Summe aller Werthe jeder der drei Kräfte hinlänglich genau finden, wenn man ihren Ausdruck, k als veränderlich betrachtend, mit dk multiplicirt, von $k = k^0$ bis $k = k'$ integrirt und das gefundene Integral mit λ dividirt.

Betrachten wir zuerst dieses Integral in Beziehung auf die beiden ersten Theile der ersten Kraft, $\frac{\alpha\delta}{aae} + \frac{\alpha\delta}{dde}$. Hier wird solches

$$= \int \frac{\alpha\delta}{\sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta + kk)}}\left(\frac{1}{\alpha\alpha + kk} + \frac{1}{\delta\delta + kk}\right) dk.$$

Dies Integral wird von $k = 0$ anfangend

$$= \text{Arc sin}\,\frac{\delta k}{\sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta)(\alpha\alpha + kk)}} + \text{Arc sin}\,\frac{\alpha k}{\sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta)(\delta\delta + kk)}}$$

$$= \text{Arc tg}\,\frac{\delta k}{\alpha\sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta + kk)}} + \text{Arc tg}\,\frac{\alpha k}{\delta\sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta + kk)}}$$

$$= \text{Arc tg}\,\frac{k\sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta + kk)}}{\alpha\delta}$$

$$= \text{Arc cos}\,\frac{\alpha\delta}{\sqrt{(kk + \alpha\alpha)(kk + \delta\delta)}}.$$

Also innerhalb der Grenzen der Integration

$$= \text{Arc tg}\,\frac{k'\sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta + k'k')}}{\alpha\delta} - \text{Arc tg}\,\frac{k^0\sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta + k^0k^0)}}{\alpha\delta}.$$

Wenn man nach der Analogie $\alpha\alpha + \delta\delta + k^0k^0 = e^0e^0$ setzt u. s. w., so wird die ganze Kraft I

$$= \frac{1}{\lambda}\Big\{\text{Arc tg}\,\frac{k'e'}{\alpha\delta} + \text{Arc tg}\,\frac{k'f'}{\alpha\beta} + \text{Arc tg}\,\frac{k'g'}{\beta\gamma} + \text{Arc tg}\,\frac{k'h'}{\gamma\delta}$$
$$- \text{Arc tg}\,\frac{k^0e^0}{\alpha\delta} - \text{Arc tg}\,\frac{k^0f^0}{\alpha\beta} - \text{Arc tg}\,\frac{k^0g^0}{\beta\gamma} - \text{Arc tg}\,\frac{k^0h^0}{\gamma\delta}\Big\}.$$

Ebenso entsteht aus einem Theile der Kraft II das Integral

$$\int \frac{\delta k . dk}{(\alpha\alpha + kk)\sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta + kk)}} = -\log\left(\frac{\delta + \sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta + kk)}}{\sqrt{(\alpha\alpha + kk)}}\right) + \text{Const.},$$

also innerhalb der Grenzen der Integration

$$\log \frac{\delta + \sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta + k'k')}}{\delta + \sqrt{(\alpha\alpha + \delta\delta + k^0k^0)}} \left[= \log \frac{\delta + e'}{\delta + e^0}\right].$$

Ähnliche Ausdrücke geben die andern drei Theile und die vier Theile von III. Es wird folglich die ganze Kraft II

$$= \frac{1}{\lambda} \log \left\{\frac{\delta + e'}{\delta + e^0} \cdot \frac{\beta + f'}{\beta + f^0} \cdot \frac{\beta + g^0}{\beta + g'} \cdot \frac{\delta + h^0}{\delta + h'}\right\}.$$

Und auf gleiche Weise die ganze Kraft III

$$= \frac{1}{\lambda} \log \left\{\frac{\alpha + e^0}{\alpha + e'} \cdot \frac{\alpha + f'}{\alpha + f^0} \cdot \frac{\gamma + g'}{\gamma + g^0} \cdot \frac{\gamma + h^0}{\gamma + h'}\right\}.$$

Es ist überflüssig zu bemerken, dass in diesen Formeln die Logarithmen hyperbolische und dass die Bögen in Theilen des Halbmessers auszudrücken sind.

7.

Dieselben Formeln werden auch noch hinlängliche Genauigkeit geben, wenn wir Statt der getrennten Ströme in n Rechtecken einen zusammenhängenden annehmen, der sich gleichsam Schraubenförmig so um das Prisma schlingt, dass die erste Umwindung zwischen dem ersten und zweiten Rechteck, die zweite zwischen dem zweiten und dritten Rechteck liegt u. s. w. Die Anzahl dieser Umwindungen wird nun $n-1$ und die Integration schlechthin zwischen den äussersten Werthen von k auszuführen sein, deren Differenz $\lambda(n-1)$ sein wird. Eine grössere Genauigkeit in diese Berechnung zu legen würde ohne Nutzen, obwohl ohne weitere Schwierigkeit als grössere Weitläuftigkeit des Calcüls sein.

Auf diese Weise lässt sich also die Kraft, mit welcher ein einen Multiplicator durchlaufender galvanischer Strom auf das magnetische Fluidum in jedem Punkte des Raumes wirkt, berechnen. Wir wollen diese Berechnung an einigen Beispielen erläutern.

8.

Der Multiplicator, welcher die grosse Nadel im magnetischen Observatorium umgibt, besteht aus zwei ganz gleichen Hälften. Jede Hälfte enthält 135 Umwindungen, die in drei durch Seidenband von einander getrennten Schichten einen rechtwinklichten hölzernen Rahmen umgeben. Jede Schicht enthält daher 45 Umwindungen, die schraubenförmig zwischen zwei Grenzrechtecken laufen, die 67 Millimeter von einander abstehen. Es ist daher $k'-k^0 = 67^{\mathrm{mm}}$ und $\lambda = 1^{\mathrm{mm}},4889$. Es ist zureichend die Rechnung für die mittelste Schicht zu führen, für welche die Länge des Rechtecks $= 1341^{\mathrm{mm}}$, die Breite oder vielmehr Höhe, da die Rechtecke vertical stehen, $= 206^{\mathrm{mm}}$. Die beiden Rahmen stehen symmetrisch gegen den magnetischen Meridian auf der Nordseite dicht zusammen, während sie auf der Südseite etwas von einander abstehen, um die Spiegel am Südpol der Nadel frei zu lassen; jeder Rahmen macht mit dem magnetischen Meridian einen Winkel von $2^0\,9'\,19'' = \theta$. Die Länge der Nadel beträgt $1222^{\mathrm{mm}},4$; der[*)] Mittelpunkt und die Axen des östlichen und westlichen Rahmens treffen in dem Mittelpunkte der Nadel zusammen; der Abstand dieses Mittelpunktes von dem nächsten Rechtecke auf jeder Seite beträgt $32^{\mathrm{mm}},5$.

Für diesen Mittelpunkt ist daher in Beziehung auf die mittlere Schicht jeder Multiplicatorhälfte in Millimetern

$$\alpha = \gamma = 670{,}5; \quad \beta = \delta = 103; \quad k^0 = 32{,}5; \quad k' = 99{,}5.$$

[*)] In der Handschrift steht nach mehreren Durchstreichungen statt der das Wort »ihr«.]

Die ganze Kraft normal gegen den Multiplicator, d. i. gegen die Ebene der Grenzrechtecke, wird

$$= \frac{4}{\lambda}\left(\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{k'e'}{\alpha\beta} - \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{k^0 e^0}{\alpha\beta}\right),$$

während die mit den Seiten der Rechtecke parallelen verschwinden. Jene Formel gibt $\frac{4}{\lambda}(44^0\,38'\,55'' - 17^0\,43'\,25'')$, oder für alle drei Schichten $\frac{12}{\lambda}(26^0\,55'\,30'')$ oder wenn man den Bogen in Theilen des Halbmessers ausdrückt und für λ seinen Werth setzt, 3,8731. Dieser Werth gilt für jede Multiplicatorhälfte; allein für die eine Hälfte ist die Kraft dem Rahmen zugekehrt, für die andere davon abgekehrt, und zwar werden, wenn der positive Strom oben von Süden nach Norden den Multiplicatordraht durchläuft, beide Richtungen (in Beziehung auf das positive magnetische Fluidum) von Ost nach West gehen, aber für die westliche Hälfte mit einer Abweichung von $2^0\,9'\,19'' = \theta$ südlich, für die östliche Hälfte mit einer eben so grossen Abweichung nördlich (alles wie sich von selbst versteht in Beziehung auf den magnetischen Meridian). Die ganze Kraft ist daher rein westlich, und ihr Werth wird gefunden, wenn man die obige Zahl mit $2\cos\theta$ multiplicirt, $= 7{,}5697$.

Für denjenigen Punkt der durch das Centrum der Nadel gehenden magnetischen Axe, welcher am nördlichen Ende der Nadel liegt, haben wir

$$\alpha = 59{,}75; \quad \gamma = 1281{,}25; \quad \beta = \delta = 103; \quad k^0 = 9{,}5; \quad k' = 76{,}5,$$

und es gehen aus der Wirkung der mittleren Schicht jeder Multiplicatorhälfte zwei Kräfte hervor, eine senkrecht gegen den Rahmen, die andere parallel mit dessen horizontalen Seiten. Die erste Kraft

$$= \frac{2}{\lambda}\left(\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{k'e'}{\alpha\beta} + \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{k'g'}{\beta\gamma} - \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{k^0 e^0}{\alpha\beta} - \mathrm{Arc\,tg}\,\frac{k^0 g^0}{\beta\gamma}\right)$$
$$= \frac{2}{\lambda}(60^0\,23'\,8'' + 36^0\,44'\,20'' - 10^0\,26'\,51'' - 5^0\,17'\,12'') = \frac{2}{\lambda}\cdot 81^0\,23'\,25''.$$

Von der Richtung dieser Kraft gilt dasselbe, was vorher von dem Mittelpunkte bemerkt wurde, so dass aus allen drei Schichten beider Multiplicatorhälften die rein westlich wirkende Kraft $= \frac{12\,.\,81^0\,23'\,25''}{\lambda}\cos\theta$ hervorgeht, also nachdem der Bogen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt ist $= 11{,}4408$. Die zweite Kraft wird für die mittelste Schicht jeder Multiplicatorhälfte ihrer Grösse nach [durch]

$$\frac{2}{\lambda}\log\frac{\beta+e'}{\beta+e^0}\cdot\frac{\beta+g^0}{\beta+g'}$$

ausgedrückt. Obige Zahlen geben die briggischen Logarithmen von

$$\begin{array}{ll} \beta+e^0 & 2,34724 \\ \beta+e' & 2,38834 \\ \beta+g^0 & 3,14252 \\ \beta+g' & 3,14322. \end{array}$$

Also Werth der Formel $= \frac{2}{\lambda} . 0,04040 . 2,3025$, oder für alle drei Schichten

$$= \frac{6}{\lambda} . 0,04040 . 2,3025 = 0,3748.$$

Die Richtung dieser Kraft ist aber (bei der oben angenommenen Richtung des Stromes) für den westlichen Theil des Multiplicators von Nord nach Süd, für den östlichen von Süd nach Nord, für beide mit der westlichen Abweichung $= \theta$. Man sieht daraus leicht, dass wenn man jede dieser Kräfte in zwei andere zerlegt, die eine parallel mit dem magnetischen Meridian, die andere senkrecht dagegen, die ersteren sich aufheben, so dass die Gesammtwirkung rein nach West gerichtet ist; ihre Grösse wird gefunden, wenn man den vorigen Werth mit $2 \sin \theta$ multiplicirt, und ergibt sich $= 0,0282$.

Die ganze Wirkung des Multiplicators in dem nördlichsten Punkte der Centrallinie der Nadel besteht also in einer Kraft nach Westen $= 11,4690$.

Wir haben eine ähnliche Rechnung noch für 19 andere Punkte in derselben Linie, bis zum südlichen Endpunkte hin, geführt. Hier ist die Übersicht der Resultate, wobei mit 0 der nördliche, mit 20 der südliche Endpunkt bezeichnet ist, und die Zwischenpunkte je $61^{mm},12$ von einander entfernt liegen.

0	11,4690	7	8,0232	14	7,0562
1	9,9611	8	7,8652	15	6,9561
2	9,2551	9	7,7143	16	6,8793
3	8,8605	10	7,5695	17	6,8388
4	8,5906	11	7,4305	18	6,8507
5	8,3763	12	7,2974	19	6,8771
6	8,1917	13	7,1723	20	6,3527

9.

Die Rechnungen des vorhergehenden Artikels sind hauptsächlich nur als Beispiele zur Erläuterung der Methode zu betrachten. Sie zeigen, dass der Multiplicator auf die einzelnen Punkte innerhalb desselben ziemlich ungleich wirkt, und es erhellet daraus, dass eine genaue Berechnung der ganzen auf die Nadel wirkenden Kraft die Kenntniss der Vertheilung des Magnetismus in der Nadel voraussetzen würde. Ist dm ein Element dieses Magnetismus, x sein Abstand von einer durch den Aufhängungspunkt der Nadel senkrecht gegen deren magnetische Axe gelegten Vertical-Ebene (welche wir auf der Nordseite als positiv betrachten); v die Multiplicatorkraft in jenem Punkte in der Richtung von Ost nach West senkrecht gegen den magnetischen Meridian, wie sie in den Beispielen des vorigen Art[ikels] berechnet ist; g die Intensität des galvanischen Stromes, welcher den Multiplicator durchläuft, so wird

$$g\int vx\,dm$$

das Moment der Drehung um eine durch den Aufhängungspunkt gehende Verticallinie. Wäre v in dem ganzen Raume, welchen die Nadel einnimmt, constant, so würde jenes Integral $gv\int x\,dm$ sein, wo offenbar $\int x\,dm$ das Moment des Magnetismus der Nadel ausdrückt, welches wir mit M bezeichnen wollen. Setzen wir den horizontalen Theil der Erdmagnetischen Kraft $= T$, so wird die aus dieser und der Elektromagnetischen Kraft des Stromes im Multiplicator zusammengesetzte $= \sqrt{(TT+ggvv)}$, und $\frac{gv}{T}$ die Tangente ihrer Neigung gegen den magnetischen Meridian, und in dieser Richtung wird die Nadel im Gleichgewicht sein, insofern v auch innerhalb des Raumes, welchen die Nadel in dieser Lage einnimmt, denselben Werth hat. Alle diese Voraussetzungen bleiben hinreichend genau gültig, wenn sich in der Mitte des Multiplicators eine sehr kleine Nadel befindet. Allein dieses ist nicht mehr der Fall bei der Nadel, wovon hier die Rede ist. Setzt man für diese

$$\frac{\int vx\,dm}{\int x\,dm} \text{ oder } \frac{\int vx\,dm}{M} = v^0,$$

so wird v^0 als eine Art von Mittelwerth von v angesehen werden können, der von der Vertheilung des Magnetismus in der Nadel abhängig ist, und ohne vollständige Kenntniss von dieser nicht a priori berechnet werden kann: wir werden aber weiter unten eine Methode entwickeln, durch die er aus Combination von Versuchen für unsere Nadel $= 8,7196$ gefunden ist.

Das Drehungsmoment der Kraft des galvanischen Stromes zur Drehung der Nadel um die verticale Aufhängungsaxe, welches, wenn die Nadel sich im magnetischen Meridian befindet, $= gv^0 M$ ist, wird nun allerdings bei anderer Stellung der Nadel einen anderen Werth haben, dessen Bestimmung eine rein mathematische Aufgabe wird, sobald die Vertheilung des Magnetismus in der Nadel bekannt ist. In Ermangelung dieser Kenntniss können wir jedoch wenigstens übersehen, dass bei einer mässigen Neigung der magnetischen Axe der Nadel gegen den Meridian $= \varphi$, jener Werth durch eine Reihe ausgedrückt werden kann, welche die Form hat

$$gM(v^0 + v'\varphi\varphi + v''\varphi^4 + \text{etc.}),$$

wenn man, was ohne Zweifel erlaubt ist, den Magnetismus in der Nadel in Beziehung auf ihre Breite symmetrisch vertheilt voraussetzt. Das Drehungsmoment der Nadel durch den Erdmagnetismus wird hingegen, φ von der Rechten nach der Linken gezählt,

$$= -MT \sin\varphi = -MT(\varphi - \tfrac{1}{6}\varphi^3 + \text{etc.})$$

sein. Für die Gleichgewichtslage haben wir daher

$$0 = gv^0 - T\varphi + gv'\varphi\varphi - \tfrac{1}{6}T\varphi^3 + \text{etc.}$$

Es wird mithin der Werth von φ für den Ruhestand der Nadel durch die Reihe

$$\varphi = \frac{gv^0}{T} - \frac{g^3 v^0 v^0 v'}{T^3} \text{ etc.}$$

ausgedrückt werden, wo man sich jedoch, in sofern es sich nur um solche electromagnetische Kräfte handelt, die nur eine mässige Abweichung hervorbringen können, auf das erste Glied beschränken, oder

$$\varphi = \frac{gv^0}{T},$$

oder, was eben so genau ist,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{gv^0}{T}$$

setzen kann. Es würde übrigens, wenn man es der Mühe werth hielte, nicht an Mitteln fehlen, auch folgende Coefficienten wenigstens näherungsweise durch Combination solcher Beobachtung auszumitteln, wo man die Nadel unter dem Einfluss des galvanischen Stromes grössere und kleinere Schwingungen machen lässt und das Mittel der Ausweichungen vergleicht. Indessen [er]geben die Versuche, dass man innerhalb des Messungsvermögens unserer Apparate, die auf

Werthe des Winkels φ von wenig Geraden beschränkt sind, die folgenden Glieder füglich bei Seite setzen kann.

10.

Es erhellt daraus, dass der Multiplicator, sobald man den Werth von v^0, welcher ihm in Beziehung auf die in ihm befindliche Nadel entspricht, kennt, ein Galvanometer im eigentlichen Sinne wird, und die Intensität des ihn durchlaufenden Stroms auf das absolute Maass

$$g = \frac{T \operatorname{tang}\varphi}{v^0}$$

zurückführt. Man erinnere sich dabei, dass $\frac{1}{v^0}$ mit einer Linie homogen ist, z. B. für den oben erwähnten Multiplicator

$$\frac{1}{v^0} = \frac{1 \text{ Millimeter}}{8{,}7196} = 0^{\text{mm}}\,1147.$$

Dieses ist in Übereinstimmung mit der Bemerkung Art. 3, III [oben S. 180], wonach g mit RT homogen sein muss.

Ein Paar Versuche mit einem hydrogalvanisch erregten Strome mögen eine Idee von der Stärke eines solchen Stromes geben.

I. Ein Paar quadratische Platten von Kupfer und Zink von 5 Zoll Seite durch eine mit Brunnenwasser getränkte Tuchscheibe geschieden, gaben einen Strom, wobei $\varphi = 3^0\,27'\,3''$. Hieraus wird

$$g = 0{,}006\,915\,T,$$

oder wenn wir $T = 1{,}78$ setzen

$$g = 0{,}012\,309.$$

Hiebei bestand der Leitungsdraht nur aus dem Multiplicatordraht und den kurzen und starken Zuführungsdrähten; dieser Leitungsdraht aequivalirt einem 6070,8 Meter langen Kupferdraht von 1^{mm} Dicke.

II. Indem derselbe Strom zugleich noch die ganze Drahtkette zwischen der Sternwarte, dem magnetischen Observatorium und dem physikalischen Kabinet und die an den beiden letzten Plätzen befindlichen Multiplicatoren durchlief, wobei der ganze Leitungsdraht einem Kupferdraht von 20 216 Meter Länge und 1^{mm} Dicke aequivalirt, war $\varphi = 1^0\,32'\,45''$, also

$$g = 0{,}003\,095\,T = 0{,}005\,509.$$

Nach dem, was weiter unten entwickelt werden wird, schliesst man hieraus, dass der Widerstand beim Übergang vom Zink durch die Flüssigkeit zum Kupfer so gross war, wie der in einer Kupferdrahtlänge von 5389,2 Meter bei 1^{mm} Dicke, und dass die Stromstärke bei einem kurzen Leitungsdraht von unmerklichem Widerstand

$$= 0{,}014\,705\,T = 0{,}026\,175$$

gewesen sein würde.

Bei dem Werthe $T = 1{,}78$ liegen auf die [in] der *Intensitas etc.*[*)] entwickelte Art als Längeneinheit das Millimeter, als Zeiteinheit die Secunde m. Z. und als Masseneinheit das Milligramm zum Grunde. Will man die drei Einheiten unbestimmt lassen und setzt man in ihnen resp. ausgedrückt

$$\begin{aligned} &\text{das Millimeter} &&= r \\ &\text{die Secunde} &&= t \\ &\text{das Milligramm} &&= p, \end{aligned}$$

so ist allgemein

$$T = 1{,}78\sqrt{\frac{p}{rtt}},$$

sowie

$$v^0 = \frac{8{,}7198}{r}.$$

III. Ein Versuch mit ebenso grossen Platten und demselben Leitungsdraht wie in II, aber unter Anwendung von Tuchscheiben mit gesäuertem Wasser gab

$$\varphi = 1^0\,47'\,40''; \quad g = 0{,}003\,593\,rT = 0{,}0\,063\,951\sqrt{\frac{pr}{tt}}.$$

IV. Zwei gleiche Plattenpaare als Säule combinirt, unter ähnlichen Umständen wie in III gaben

$$\varphi = 3^0\,22'\,59''; \quad g = 0{,}0\,067\,795\,rT = 0{,}0\,120\,675\sqrt{\frac{pr}{tt}}.$$

Aus Combination dieser beiden Beobachtungen folgt

der Übergangswiderstand $= 1287{,}8$ Meter,

die Stromstärke bei kurzem Leitungsdraht $= 0{,}059\,993\,rT = 0{,}106\,788\sqrt{\frac{pr}{tt}}$.

[*) *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*, 1832, Werke V, S. 79.]

V. Indem der Conductor und das Reibzeug einer Elektrisirmaschine in die Kette gebracht war, wurde die Maschine fortwährend gedreht, 1 Umdrehung auf 1 Secunde. Dabei war die Wirkung $\varphi = 1'\,57''\,6$; und der Durchgang der Elektricität aequivalirte einem Strom für welchen

$$g = 0{,}0\,005\,701\,rT = 0{,}001\,015\sqrt{\frac{pr}{tt}}.$$

Zweiter Abschnitt.

Allgemeine Ausdrücke für die Kraft, mit welcher ein wie immer geformter Leiter eines galvanischen Stroms auf ein magnetisches Element in jedem Punkte des Raumes wirkt.

11.

Wir bezeichnen die Länge des Stromleiters, von einem beliebigen Anfangspunkte in demselben bis zu einem unbestimmten Punkte desselben Q, in der Richtung des positiven Stromes gezählt, durch s; die Coordinaten in Beziehung auf drei beliebige sich rechtwinklicht schneidende Axen für Q durch x, y, z; die bewegende Kraft, welche das Stromelement $QQ' = ds$ in einem Punkte des Raumes P, dessen Coordinaten a, b, c, ausübt, durch ω, indem wir die Intensität des Stromes und das magnetische Element, auf welches gewirkt wird, $= 1$ setzen; die drei partiellen mit den Coordinatenaxen parallelen Kräfte, in welche sich ω zerlegt, durch ξ, η, ζ, so dass $\frac{\xi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}, \frac{\zeta}{\omega}$ die Cosinus der Winkel sind, welche die Richtung der Kraft ω mit den Coordinatenaxen machen; endlich PQ durch r, und PS drücke die Richtung der Kraft aus.

Die hier erforderlichen Entwicklungen werden sich am leichtesten übersehen lassen, wenn wir alle hier vorkommenden Richtungen durch Punkte auf einer willkürlichen Kugelfläche bezeichnen (vergl. *Disquiss. genn. circa superficies curvas*, art. 1[*)]). Es bezeichnen also (1), (2), (3) die Richtungen der drei Coordinatenaxen; (4) die Richtung der geraden Linie von P nach Q; (5) die Richtung des Elements QQ'; (6) die Richtung der Kraft ω, mit welcher das positive magnetische Fluidum 1 in P durch das Stromelement QQ' sollicitirt wird.

[*) Werke IV, S. 219.]

Nach dem, was oben gesagt ist, wird also $\omega = \frac{\sin(4)(5)}{rr} ds$ sein, ferner (6) ein Pol des grössten Kreises durch (4) und (5), und zwar derjenige, welcher von diesem Kreisbogen links liegt, wenn er in dem Sinne von (4) nach (5) durchlaufen wird, das Innere der Kugel als unten betrachtet. Die drei Axen der Coordinaten x, y, z nehmen wir in solcher Ordnung liegend an, wie drei Richtungen nach vorne, nach der rechten und nach oben, unter welcher Voraussetzung also (1), (2), (3) diejenigen Pole der grössten Kreisbögen (3)(2), (1)(3), (2)(1) sein werden, welche gegen dieselben ebenso liegen wie (6) gegen (4)(5).

Aus dem allgemeinen Lehrsatz V (*Disqu. Gen.* art. 2 [*)]) folgt nun, dass

$$\cos(3)(4).\cos(2)(5) - \cos(2)(4).\cos(3)(5) = \sin(3)(2).\sin(4)(5).\cos(1)(6),$$

oder da $\sin(3)(2) = 1$,

$$\cos(3)(4).\cos(2)(5) - \cos(2)(4).\cos(3)(5) = \frac{rr\omega}{ds}\cdot\cos(1)(6),$$

oder da

$$\cos(3)(4) = \frac{z-c}{r}, \quad \cos(2)(5) = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos(2)(4) = \frac{y-b}{r}, \quad \cos(4)(5) = \frac{dz}{ds}$$

[folgt weiter:]

$$\omega.\cos(1)(6) = \xi,$$

I. $$\xi = \frac{(z-c)\,dy - (y-b)\,dz}{r^3}$$

und ebenso erhält man

II. $$\eta = \frac{(x-a)\,dz - (z-c)\,dx}{r^3}$$

III. $$\zeta = \frac{(y-b)\,dx - (x-a)\,dy}{r^3}.$$

Man würde für ξ, η, ζ dieselben Ausdrücke mit entgegengesetzten Zeichen erhalten, wenn man für die drei Coordinatenaxen die entgegengesetzte Ordnung gewählt hätte.

[*) Werke IV, S. 220.]

BEMERKUNG.

Die im Vorstehenden abgedruckte Handschrift bildet in inhaltlicher und methodischer Hinsicht eine unmittelbare Fortsetzung und Verallgemeinerung der Zurückführung der Intensität des Erdmagnetismus auf absolutes Maß *). Mit den im V. Bande der Werke abgedruckten Stücken zur Elektrodynamik hängt sie nur lose zusammen, höchstens insofern, als einige der dort angegebenen Rechnungen gewissermaßen als Material für die vorliegende Handschrift betrachtet werden könne.

Die Absicht, eine Abhandlung über »die Grundgesetze der Galvanischen Ströme und der Induktion und deren Zurückführung auf absolute Maße« zu schreiben, hat GAUSS in einem Briefe an ENCKE vom Januar 1836 (S. 103 dieses Bandes) ausgesprochen. Er deutet dort auch an, daß »bereits einiges niedergeschrieben« sei. Als Abfassungszeit der vorliegenden Handschrift ist also etwa das Jahr 1835 zu betrachten. Diese Vermutung läßt sich durch folgende Tatsachen stützen: Im Artikel 8. der Handschrift (S. 186) wird von dem Multiplikator im Magnetischen Observatorium gesagt, daß er 2.135 = 270 Windungen Draht besitze. Diese Angabe stimmt mit der Beschreibung des Multiplikators überein, die GAUSS in einem vom 4. Dezember 1834 datierten Briefe an GERLING (S. 96 dieses Bandes) gegeben hat. Anderseits schreibt GAUSS an OLBERS am 23. Juli 1836 (S. 110 dieses Bandes), daß »der Multiplikator j e t z t aus 610 Umwindungen übersponnenen Drahtes besteht«. Innerhalb dieser 1½ Jahre ist also die Abfassung wohl mit Sicherheit zu setzen. Genauer läßt sich der Abfassungstermin folgendermaßen bestimmen: Im Artikel 10. der Handschrift (S. 193) wird der Versuch beschrieben, die magnetische Wirkung der Reibungselektrizität am Multiplikator zu messen. In dem schon genannten Briefe an ENCKE vom Januar 1836 gibt nun GAUSS an, daß er die magnetische Wirkung der Reibungselektrizität »im Laufe des verflossenen Jahres« gemessen habe. Danach ist als die wahrscheinlichste Abfassungszeit das Ende des Jahres 1835 anzusehen.

SCHAEFER.

*) *Intensitas vis magneticae etc.*, Werke V, S. 79.

CHRONOLOGIE.

NACHTRÄGE ZU BAND VI.

VERÖFFENTLICHUNGEN.

[I.]

EINE LEICHTE METHODE, DEN OSTERSONNTAG ZU FINDEN.

Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1814, Berlin 1811, S. 273.

Im Julianischen Calender sey allemal $m = 15$ und $n = 6$.
Im Gregorian[ischen] von 1700 bis 1799 $m = 23$ $n = 3$.
1800 1899 $m = 23$ $n = 4$.

Man theile das vorgegebene Jahr	durch 19	und nenne den Rest	a,
» » » »	» » 4	» » » »	b,
» » » »	» » 7	» » » »	c,
Ferner [theile man]			
die Anzahl $(19a+m)$	durch 30	» » » »	d,
» » $(2b+4c+6d+n)$	» 7	» » » »	e.

So ist der Ostersonntag in beiden Calendern der $22+d+e$ März*).

Z. B. für 1812.

$$19)\ \frac{1812}{\text{rest.}}\ 7 = a \qquad 4)\ \frac{1812}{\text{rest.}}\ 0 = b \qquad 7)\ \frac{1812}{\text{rest.}}\ 6 = c.$$

Für den Jul[ianischen] Calender.

$$(19.7)+15 = 148 \qquad (2.0)+(4.6)+(6.28)+6 = 198$$

$$30)\ \overline{\text{rest.}}\ 28 = d \qquad 7)\ \overline{\text{rest.}}\ 2 = e$$

$22+28+2$ März $= 52$ März $= 21$ April der Ostersonntag.

*) Wenn im gregor[ianischen] Calender die Rechnung Ostern am 26st. April giebt, setzt man allemal den 19t. und wenn sie den 25st. bringt, den 18t.

Für den Gregor[ianischen] Calender.

$$(19.7)+23 = 156 \qquad 30)\ \overline{\text{rest.}}\ 6 = d$$

$$(2.0)+(4.6)+(6.6)+4 = 64 \qquad 7)\ \overline{\text{rest.}}\ 1 = e$$

$$22+6+1 \text{ März} = 29 \text{ März der Ostersonntag.}$$

BEMERKUNG.

Bei den Angaben dieser Notiz hat GAUSS nicht berücksichtigt, daß in den Jahren 1700 bis 1899 Ostern im gregorianischen Kalender zweimal auf den 25. April fällt, nämlich 1734 und 1886. Für diese zwei Jahre ergibt die Rechnung den 25. April, und Ostern ist auch tatsächlich an diesem Tage zu begehen, da die Zahl $11m+11$ durch 30 dividiert, einen Rest liefert, der größer als 19 ist; nur sofern $11m+11$, durch 30 dividiert, einen Rest gibt, der kleiner als 19 ist, wird Ostern, wenn aus der Rechnung der 25. April folgt, nicht an diesem Tage, sondern am 18. April begangen, wie GAUSS in seiner ersten Veröffentlichung *) richtig angibt. In ihr führt er sogar 1734 und 1886 als Jahre mit dem absolut spätesten Osterdatum an (Werke VI, S. 74, vorletzte und letzte Zeile). Daß Ostern unter Umständen am 25. April zu feiern ist, hat übrigens auch der Freiherr v. ZACH **) bei seiner ersten Wiedergabe der GAUSSschen Osterformel nicht beachtet. Trotzdem er sich an GAUSS' erste Publikation in der Bezeichnung anschließt, ist nach seinen Angaben Ostern stets am 18. April zu begehen, wenn sich durch die Rechnung der 25. April ergibt. Auch DELAMBRE hat in seinem *Abrégé d'Astronomie*, Paris 1813, S. 647 sowie in seiner *Astronomie théorique et pratique* III, Paris 1814, S. 712 die unrichtige Angabe, daß Ostern im gregorianischen Kalender nie auf den 25. April fallen kann. Seine irrigen Angaben hat DELAMBRE später ***) verbessert. Auch v. ZACH hat †) bei einer erneuten Wiedergabe der GAUSSschen Osterformel richtige Angaben über den 25. April als Osterdatum im gregorianischen Kalender gemacht.

LOEWY.

*) GAUSS, *Berechnung des Osterfestes*, Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgeg. vom Freiherrn v. ZACH 2, August 1800, S. 121, Werke VI, S. 73 ff., vgl. S. 79 unter II; die für die Jahre 1700 bis 1899 giltige Zahl $m = 23$ gehört auch nicht zu den a. a. O. S. 79, Z. 8 v. u. verzeichneten acht Ausnahmewerten. Auch GAUSS' Angabe in seiner zweiten Veröffentlichung, *Noch etwas über die Bestimmung des Osterfestes*, Braunschweigisches Magazin 1807 September 12, Werke VI, S. 85, Z. 15 v. u., nach der für die Verlegung des Osterfestes vom 25. auf den 18. April erforderlich ist, daß der Rest der Division der Jahreszahl durch 19 mindestens gleich 11 wird, ist völlig korrekt; diese Bedingung trifft offenbar für die Jahre 1734 und 1886 nicht zu.

**) *Tables abrégées et portatives de la lune* par le Baron DE ZACH, Florence 1809. Die Osterformel findet man a. a. O. S. 67, auf S. XIII wird GAUSS als ihr Urheber genannt.

***) DELAMBRE, *Formules pour calculer la Lettre Dominicale, le Nombre d'Or, l'Epacte et la fête de Pâques, pour une année Grégorienne ou Julienne quelconque*, Connaissance des tems pour l'an 1817, Paris 1815, S. 307 ff., insbesondere S. 315; vergl. auch DELAMBRE, *Histoire de l'Astronomie moderne* I, Paris 1821, S. 24.

†) Baron DE ZACH, *Notes*, Correspondance astronomique I, Genua 1818, S. 568.

[II.]

BERICHTIGUNG ZU DEM AUFSATZE: BERECHNUNG DES OSTERFESTES MON. CORR. 1800 AUG. S. 121 [*)].

Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgeg. von v. LINDENAU u. BOHNENBERGER, 1, 1816 Jan. u. Febr., S. 158.

Die Hülfsgrösse M wird durch die S. 129 [Werke VI, S. 78] gegebene Regel vom Jahre 4200 bis 4300, von 4500 bis 4600, von 4800 bis 4900 u. s. f. um eine Einheit zu klein gefunden, und in spätern Jahrhundert[en] kann der Unterschied zwischen dem Resultate jener Regel und dem, was die Einrichtung des gregorianischen Kalenders erfordert, immer grösser werden. Ich verdanke diese Bemerkung dem Hrn. Dr. TITTEL aus Erlau, welcher sich gegenwärtig in Göttingen aufhält, und mit ausgezeichnetem Eifer dem Studium der astronomischen Wissenschaften widmet.

Der Grund dieses Unterschieds liegt in dem von mir bey Aufstellung jener Regel nicht beachteten Umstande, dass die Urheber des gregorianischen Kalenders die sogenannte Mondsgleichung, die bis 3900 incl. aller 300 Jahre angebracht wird, von 4200 auf 4300 verlegen, weil ihrer Meinung nach diese Gleichung eigentlich aller $312\frac{1}{2}$ Jahr einmal angebracht werden muss. Ohne mich hier auf die Frage einzulassen, ob durch diese Anordnung der beabsichtigte Zweck erreicht wird, bemerke ich nur, dass meine Regel mit der Einrichtung des gregorianischen Kalenders, wie er ist, leicht in völlige Übereinstimmung gebracht werden kann, wenn nur für die Zahl p nicht wie a. a. O. vorgeschrieben ist, der Quotient bey Division der Zahl k mit 3, sondern der Quotient bey Division der Zahl $13+8k$ mit 25 angenommen wird.

[*) Werke VI, S. 73.]

BEMERKUNGEN.

Daß GAUSS' ursprüngliche Vorschrift (Monatliche Correspondenz der Erd- und Himmels-Kunde **2**, August 1800, S. 128, Werke VI, S. 78) über die Bestimmung der Zahl p vom Jahre 4200 an ihre Gültigkeit verliert, hat vor GAUSS als erster FRANÇAIS *) öffentlich festgestellt und gleichzeitig die Zahl p durch die Formel $p = Q\left(\frac{k - Q\left(\frac{k-17}{25}\right)}{3}\right)$ bestimmt, die unbeschränkte Gültigkeit hat; hierbei soll allgemein $Q\left(\frac{a}{b}\right)$ den ganzzahligen Quotienten bedeuten, der sich bei Division der ganzen Zahl a durch die ganze Zahl b ergibt. Für die Rechnung ist FRANÇAIS' Formel etwas bequemer als die GAUSSsche Festsetzung $p = Q\left(\frac{8k+13}{25}\right)$, die GAUSS auch handschriftlich in sein Exemplar der Monatlichen Correspondenz **2**, S. 128 eingetragen hat (Vergl. Werke VI, S. 79, Z. 5 v. u.). Weiter ist vor GAUSS' Veröffentlichung DELAMBRE in der oben S. 200, dritte Fußnote genannten Abhandlung (vergl. besonders a. a. O. S. 316), anscheinend ohne FRANÇAIS' Aufsatz zu kennen, auf die gleiche Verbesserung wie dieser gekommen. Vergl. ferner DELAMBRE, *Histoire de l'Astronomie moderne*, t. I, Paris 1821, S. 25. Auch L. CICCOLINI **) hat nach seinen Angaben seit 1813 erkannt, daß die GAUSSsche Osterformel vom Jahre 4200 an eine Änderung erfordert; er hat daher die von p abhängige GAUSSsche Zahl M (Werke VI, S. 78) in einer von GAUSS abweichenden Weise bestimmt. Schließlich hat P. TITTEL, der die vorstehende *Berichtigung* veranlaßt hat, in seiner Arbeit *Methodus technica, brevis, perfacilis ac perpetua construendi calendarium ecclesiasticum stylo tam novo quam vetere*, Goettingae 1816, § 11, Solutio I, S. 10 ***) bei der sogenannten Mondgleichung den Wert $Q\left(\frac{8k+13}{25}\right)$.

Infolge der für die Zahl p notwendig werdenden Korrektur sind auch GAUSS' Angaben in seinem Aufsatz *Noch etwas über die Bestimmung des Osterfestes*, Braunschweigisches Magazin 1807 September 12 (Werke VI, S. 86), über diejenigen Jahrhunderte, für die Ostern im julianischen und im gregorianischen Kalender auf das gleiche Datum fällt, unzutreffend. Für den richtigen Wert $p = Q\left(\frac{8k+13}{25}\right)$ ergibt sich, daß bereits im 68. Jahrhundert, d. i. vom Jahre 6700 bis 6799, also weit früher als GAUSS findet, Ostern in beiden Kalendern auf einerlei Datum fallen würde, wenn dieselben solange ungeändert im Gebrauch bleiben sollten. Einerlei Datum würde aber alsdann in den beiden Kalendern immer um 7 volle Wochen auseinander sein. Mit dem Jahre 6800 hört diese Übereinstimmung wieder auf und tritt von 20700 bis 20799 von neuem ein, wo aber der Unterschied 22 Wochen betragen würde. In diesem Sinne (vgl. FRANZ GOLDSCHEIDER, *Über die Gausssche Osterformel*, II. Teil, Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Luisenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin, Ostern 1899, S. 6 und 7) ist der Inhalt des vorletzten Abschnitts der angeführten GAUSSschen Arbeit zu berichtigen.

LOEWY.

---

*) J. F. FRANÇAIS, *Solution directe des principaux problèmes du calendrier*, Annales de Mathématiques pures et appliquées, **4**, 1813, S. 273.

) L. CICCOLINI, *Formole analitiche pel calcolo della Pasqua e correzione di quelle di Gauss con critiche osservazioni su quanto ha scritto del calendario il Delambre*, Roma 1817, vergl. Vorrede S. VII, sowie S. 76. Nachtrag hierzu: *Al signor Francesco Carlini astronomo di Brera*, Biblioteca italiana **13, 1819, S. 350; vergl. auch die S. 346 voraufgehende Besprechung des CICCOLINIschen Buches, als deren Verfasser CARLINI anzusehen ist.

***) Diese Stelle gehört nicht zu denjenigen, die TITTEL in der Einleitung seiner Schrift als von GAUSS stammend bezeichnet; vergl. den folgenden Abschnitt [III.].

[III.]

[DE CALENDARIO ECCLESIASTICO.]

P. TITTEL, Methodus technica, brevis, perfacilis ac perpetua construendi Calendarium ecclesiasticum stylo tam novo quam vetere, Goettingae 1816, pag. 7, 11, 13.

[§ 8.

Problema.

Determinare numerum festivalem Stylo veteri pro quocunque anno dato.

Solutio III.

Indice anni dati successive per numeros 19, 4, 7 diviso, oriatur ex divisione

1) indicis dati . . . per 19, residuum a
2) indicis dati . . . per 4, residuum b
3) indicis dati . . . per 7, residuum c
4) numeri $19a+15$ . . . per 30, residuum d
5) numeri $2b+4c+6d+6$ . . . per 7, residuum e.

Erit absque ulla exceptione numerus festivalis quaesitus, aequalis summae: $d+e+1$.

§ 12.

Problema.

Calculare aequationem lunaesolarem pro quocunque anno assignato.

Solutio.

Subtrahatur aequatio lunaris anni assignati per (§ 11.) calculata ab aequatione solari eiusdem anni, per (§ 10.) definita; differentia dividatur per 30, neglectoque quotiente notetur solummodo residuum, istud ipsum erit aequatio lunaesolaris quaesita. Si itaque aequationem solarem anni assignati $\odot$, lunarem $\leftmoon$, lunaesolarem $\odot\leftmoon$ vocemus; erit $\odot\leftmoon =$ residuo numeri $(\odot - \leftmoon)$, per 30 divisi.

Exempla.

1) Aequatio lunaesolaris anni 1815 est: 6. Erat enim pro hoc anno in (§ 10.) $\odot = 14$, in (§ 11.) $\leftmoon = 8$, adeoque $\odot\leftmoon = 6$.

2) Aequatio lunaesolaris anni 1783 erat: aeque 6. Erat enim pro anno hocce in (§ 10.) $\odot = 13$, in (§ 11.) $\leftmoon = 7$, unde $\odot\leftmoon = 6$ sequitur.

3) Aequatio lunaesolaris anni 28066 erit 28. Nam pro hoc anno obtinuimus in (§ 10.) $\odot = 210$, in (§ 11.) $\leftmoon = 92$, hinc $\odot - \leftmoon = 118$, adeoque $\odot\leftmoon = 28$.

§ 14.

Problema.

Determinare numerum festivalem cuiuscunque anni dati stylo novo.

Solutio II.

A. Oriatur ex divisione:

1) indicis anni dati per 19, residuum a
2) indicis anni dati per 4, residuum b
3) indicis anni dati per 7, residuum c
4) numeri $19a + 17 + \odot\leftmoon$ per 30, residuum d
5) numeri $2b + 4c + 6d + 4 + \odot$ per 7, residuum e.

B. Numerus festivalis quaesitus erit aequalis numero: $(d + e + 1)$, exceptis duobus casibus:

1) Si $d + e + 1 = 36$ inveniatur. Aut
2) Si fuerit $d + e + 1 = 35$, simulque

$d = 28$, $e = 6$, et aequatio lunaesolaris aliquem ex sequentibus valoribus obtinuerit: 4, 7, 12, 15, 18, 23, 26, 29.

His enim duobus casibus numerus festivalis, lege ordinaria obtentus 7 unitatibus mulctandus est, adeoque fiet numerus festivalis casu primo $36 - 7 = 29$; casu vero secundo $28 = 35 - 7$.}

BEMERKUNGEN.

Die vorstehend abgedruckten Stellen aus TITTELs Werk werden durch die Worte der Einleitung: »Solutiones elegantissimas: in 8. § tertiam, in 12. § primam, in 14. § secundam in acceptis referendas habeo Viro celeberrimo CAROLO FRIDERICO GAUSS« als von GAUSS herrührend gekennzeichnet.

Da März 21 + Festzahl das Osterdatum ergibt, so stimmt für den julianischen Kalender die Solutio III des § 8. mit der GAUSSschen Vorschrift in den Werken VI, S. 78 völlig überein.

Nach TITTEL (*Methodus technica* § 11., S. 10) lautet die Mondgleichung

$$\leftmoon = Q\left(\frac{13 + 8k}{25}\right) + 2$$

und (ebenda § 10., S. 9) die Sonnengleichung

$$\odot = k - Q\left(\frac{k}{4}\right)^{*)},$$

also ist (siehe oben § 12.)

$$\odot\leftmoon = R\left(\frac{k - Q\left(\frac{k}{4}\right) - Q\left(\frac{13+8k}{25}\right) - 2}{30}\right);$$

mithin ergibt sich für die von GAUSS (Werke VI, S. 78) mit M bezeichnete Größe, wenn man gemäß der *Berichtigung* (oben S. 201) $p = Q\left(\frac{13+8k}{25}\right)$ nimmt, die Kongruenz $M \equiv \odot\leftmoon + 17 \pmod{30}$, und weiter wird $N \equiv \odot + 4 \pmod{7}$. Infolgedessen tritt für TITTELs Größe 4) der Ausdruck $19a + M$ und für seine Größe 5) der Ausdruck $2b + 4c + 6d + N$. Dies stimmt mit der von GAUSS für den gregorianischen Kalender gegebenen Vorschrift überein (Werke VI, S. 78), wenn man bedenkt, daß Ostern an dem durch März 21 + Festzahl bestimmten Tage gefeiert wird.

LOEWY.

---

*) k bedeute die Säkularzahl des Jahres A, also $k = Q\left(\frac{A}{100}\right)$; Q und R haben die Bedeutung von Quotient und Rest.

NACHLASS.

[I.]

[DEN WOCHENTAG DES 1. JANUAR EINES JAHRES ZU FINDEN. GÜLDENE ZAHL. EPAKTE. OSTERGRENZE.]

[Handschriftliche Eintragung in: Sammlung astronomischer Tafeln, unter Aufsicht der Kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften, I. Band, Berlin 1776. — 1798 von GAUSS erworben.]

Bezeichnet man den kleinsten positiven Rest einer Grösse A nach dem Modulus m durch $R:A$ (mod. m), so lassen sich alle Vorschriften des Gregori[ani]schen Kalenders auf folgende geschmeidige Art darstellen:

1.

Wenn man die Tage vom 1ten Januar 1701 an zählt, d. i. diesen mit 1, den 2ten mit 2, den 31ten Dec. 1700 mit 0, den 30ten mit -1 etc. bezeichnet, so ist der 1te Januar in irgend einem Jahre A

$$\begin{aligned}= 1+(A-1701)\,365+\tfrac{1}{4}\,((A-1701)-R:(A-1701)\ \text{mod. } 4)\\ -\tfrac{1}{100}((A-1701)-R:(A-1701)\ \text{mod. } 100)\\ +\tfrac{1}{400}((A-1601)-R:(A-1601)\ \text{mod. } 400).\end{aligned}$$

2.

Die Wochentage Sonntag, Montag etc. mit 0, 1 etc. bezeichnet, ist der 1te Januar irgend eines Jahres, qua Wochentag,

$$\left.\begin{aligned}\equiv 6+A+(2A+5R:(A-1)\ \text{mod. } 4)\\ +(3A+4R:(A-1)\ \text{mod. } 100)\\ +(A+2+6R:(A-1)\ \text{mod. } 400)\end{aligned}\right\}\ \text{mod. } 7.$$

Also von 1601 bis 2000

$$\equiv 6+6A+5R:(A-1)\ \text{mod. } 4+4R:(A-1)\ \text{mod. } 100.$$

Allgemein

$$\equiv 1+5R:(A-1)\ \text{mod. } 4+4R:(A-1)\ \text{mod. } 100+6R:(A-1)\ \text{mod. } 400.$$

3.

Güldene Zahl $= 1+R:A$ (mod. 19).

Epakte von 1700 bis 1900 $\equiv 11\,(R:A$ mod. 19) mod. 30.

Ostergrenze

$$\begin{aligned}18\ \text{April}-R:(5+11R:A\ \text{mod. } 19)\ \text{mod. } 30\\ = 21\ \text{Merz}+R:(23+19\,[^*)]\,R:A\ \text{mod. } 19)\ \text{mod. } 30.\end{aligned}$$

BEMERKUNGEN ZU 1 UND 2.

Wählt man den 31. Dezember 1700 als Ausgangstermin, zählt diesen, wie es GAUSS verlangt, mit 0, den ihm folgenden 1. Januar 1701 mit 1 u.s.w., so sind bis zum 1. Januar des Jahres A ($A \geqq 1701$), diesen Tag mitgerechnet, entsprechend den 365 regulären Tagen eines Jahres $1+(A-1701).365$ Tage vergangen. Hierzu kämen, wenn jedes vierte Jahr ein Schaltjahr wäre, noch die Schalttage in der Anzahl

$$Q\left(\frac{A-1701}{4}\right)^{**)}.$$

[*) In der Handschrift steht hier irrtümlich 11 statt 19.]

**) Sind a und b irgend welche ganze Zahlen ($b>0$), so soll $R\left(\frac{a}{b}\right)$ den kleinsten nicht negativen Rest der Division von a durch b und $Q\left(\frac{a}{b}\right)$ den zugehörigen Quotienten bedeuten. (Für $R\left(\frac{a}{b}\right)$ schreibt GAUSS $R:a$ (mod. b); der oben S. 206, erste Textzeile von GAUSS gegebenen Definition des Symbols $R:a$ (mod. b) muß also noch hinzugefügt werden, daß man ihm den Wert Null beizulegen hat, wenn a durch b teilbar ist.) Z. B. ist für $A = 1696$:

$$Q\left(\frac{1696-1701}{4}\right)=-2,\quad R\left(-\frac{5}{4}\right)=3,\quad Q\left(\frac{1696-1701}{100}\right)=-1,\quad R\left(-\frac{5}{100}\right)=95.$$

Bei dieser Festsetzung gibt (vergl. den Artikel 1, oben S. 206) für $A<1701$ die negative Zahl

$$1+(A-1701).365+Q\left(\frac{A-1701}{4}\right)-Q\left(\frac{A-1701}{100}\right)+Q\left(\frac{A-1601}{400}\right)$$

an, wieviel Tage der 1. Januar des Jahres A vor dem 31. Dezember 1700 liegt. Mithin wird auch der

Nun sind aber die durch 400 nicht teilbaren Säkularjahre keine Schaltjahre, folglich ist dem Ausdruck

$$1+(A-1701).365+Q\left(\frac{A-1701}{4}\right)$$

noch die Zahl

$$-Q\left(\frac{A-1701}{100}\right)+Q\left(\frac{A-1601}{400}\right)$$

beizufügen; die zu subtrahierende Größe gibt nämlich die Anzahl der Schalttage, die ausfallen würden, wenn **kein** Säkularjahr ein Schaltjahr wäre, die zu addierende Größe bestimmt die Anzahl der Schalttage, die hinzutreten, da die durch 400 teilbaren Säkularjahre Schaltjahre sind.

Bedeuten λ und a ganze positive Zahlen, so hat man

$$A-a=\lambda Q\left(\frac{A-a}{\lambda}\right)+R\left(\frac{A-a}{\lambda}\right)$$

oder

$$(1)\qquad Q\left(\frac{A-a}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}\left\{A-a-R\left(\frac{A-a}{\lambda}\right)\right\}.$$

Wendet man die Gleichung (1) der Reihe nach an erstens für $a=1701$ und $\lambda=4$, zweitens für $a=1701$ und $\lambda=100$, drittens für $a=1601$ und $\lambda=400$, so wird

$$\begin{aligned}1+(A-1701).365+Q\left(\frac{A-1701}{4}\right)-Q\left(\frac{A-1701}{100}\right)+Q\left(\frac{A-1601}{400}\right)\\ =1+(A-1701).365+\frac{1}{4}\left[(A-1701)-R\left(\frac{A-1701}{4}\right)\right]\\ -\frac{1}{100}\left[(A-1701)-R\left(\frac{A-1701}{100}\right)\right]\\ +\frac{1}{400}\left[(A-1601)-R\left(\frac{A-1601}{400}\right)\right],\end{aligned}$$

wie GAUSS im Artikel 1 angibt.

Der 1. Januar 1701 war ein Samstag; zählt man nach GAUSS die Wochentage in der Reihenfolge Sonntag, Montag u.s.w. mit 0, 1 u.s.w., so erhält Samstag die Nummer 6. Die Zahl, die dem Wochentag des 1. Januar des Jahres A entspricht, ist daher kongruent

$$\begin{aligned}(2)\qquad 6+(A-1701).365+Q\left(\frac{A-1701}{4}\right)-Q\left(\frac{A-1701}{100}\right)+Q\left(\frac{A-1601}{400}\right)\\ \equiv 6+A+\left[Q\left(\frac{A-1}{4}\right)-425\right]-\left[Q\left(\frac{A-1}{100}\right)-17\right]+\left[Q\left(\frac{A-1}{400}\right)-4\right]\ (\text{mod. }7).\end{aligned}$$

Multipliziert man die Identität

$$A-1=4Q\left(\frac{A-1}{4}\right)+R\left(\frac{A-1}{4}\right)$$

mit 2, so wird

$$2A-2=8Q\left(\frac{A-1}{4}\right)+2R\left(\frac{A-1}{4}\right)$$

und folglich

$$(3)\qquad Q\left(\frac{A-1}{4}\right)\equiv 2A-2-2R\left(\frac{A-1}{4}\right)\ (\text{mod. }7).$$

Wochentag des 1. Januar eines Jahres $A<1701$ durch unsere Formel (2) (siehe oben im Text) bestimmt, so daß der von GAUSS im Artikel 2 gegebenen Regel allgemeine Gültigkeit seit der Einführung des gregorianischen Kalenders, auch für $A<1701$, zukommt.

Multipliziert man die Identität

$$A-1=100Q\left(\frac{A-1}{100}\right)+R\left(\frac{A-1}{100}\right)$$

mit 3, so wird

$$3A-3=300Q\left(\frac{A-1}{100}\right)+3R\left(\frac{A-1}{100}\right)$$

und folglich

$$3A-3\equiv 6Q\left(\frac{A-1}{100}\right)+3R\left(\frac{A-1}{100}\right)\ (\text{mod. }7)$$

oder

$$(4)\qquad -Q\left(\frac{A-1}{100}\right)\equiv 3A-3+4R\left(\frac{A-1}{100}\right)\ (\text{mod. }7).$$

Weiter ist

$$A-1=400Q\left(\frac{A-1}{400}\right)+R\left(\frac{A-1}{400}\right)$$

und folglich

$$(5)\qquad Q\left(\frac{A-1}{400}\right)\equiv A-1+6R\left(\frac{A-1}{400}\right)\ (\text{mod. }7).$$

Setzt man für $Q\left(\frac{A-1}{4}\right)$, $-Q\left(\frac{A-1}{100}\right)$ und $Q\left(\frac{A-1}{400}\right)$ ihre Werte aus (3), (4) und (5) in (2) ein, so geht (2) über in

$$\begin{aligned}6+A+\left[2A-2-2R\left(\frac{A-1}{4}\right)-425\right]+\left[3A-3+4R\left(\frac{A-1}{100}\right)+17\right]+\left[A-1+6R\left(\frac{A-1}{400}\right)-4\right]\\ \equiv 6+A+\left[2A+5R\left(\frac{A-1}{4}\right)\right]+\left[3A+4R\left(\frac{A-1}{100}\right)\right]+\left[A+2+6R\left(\frac{A-1}{400}\right)\right]\ (\text{mod. }7)\\ \equiv 1+5R\left(\frac{A-1}{4}\right)+4R\left(\frac{A-1}{100}\right)+6R\left(\frac{A-1}{400}\right)\ (\text{mod. }7).\end{aligned}$$

Dies ist das Resultat von GAUSS. Seine Angaben über die Jahre von 1601 bis 2000 ergeben sich aus der Tatsache, daß in diesem Zeitraum die Säkularjahre keine Schaltjahre sind und infolgedessen in der Formel (2) das Glied $Q\left(\frac{A-1601}{400}\right)$, also in der vorletzten Formel das Glied $A+2+6R\left(\frac{A-1}{400}\right)$ fortgelassen werden kann.

BEMERKUNGEN ZU 3.

Die goldene Zahl, die Ordnungszahl des Jahres A im 19jährigen Mondzyklus ist, wie GAUSS angibt, $1+R\left(\frac{A}{19}\right)$ (vergl. auch Werke VI, S. 75).

Die gregorianische Epakte hat für das Jahr A den Wert

$$E=R\left(\frac{53+11R\left(\frac{A}{19}\right)-M}{30}\right),$$

wobei

$$M=R\left(\frac{15+k-Q\left(\frac{8k+13}{25}\right)-Q\left(\frac{k}{4}\right)}{30}\right),\quad k=Q\left(\frac{A}{100}\right)$$

zu nehmen ist. Die gregorianische Ostergrenze (d. h. der Ostervollmond) fällt auf

$$\text{März }21+R\left(\frac{M+19R\left(\frac{A}{19}\right)}{30}\right);$$

wenn jedoch der 19. April herauskommt, so ist allemal der 18. zu nehmen, und wenn sich der 18. April ergibt und zugleich $R\left(\frac{A}{19}\right) > 10$ ist, der 17. April. Der erste Ausnahmefall

$$R\left(\frac{M + 19R\left(\frac{A}{19}\right)}{30}\right) = 29$$

ist nur möglich, wenn M einen der von Gauss, Werke VI, S. 79 angegebenen 19 Werte

0, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29

besitzt; der zweite Ausnahmefall

$$R\left(\frac{M + 19R\left(\frac{A}{19}\right)}{30}\right) = 28, \quad R\left(\frac{A}{19}\right) > 10$$

kann nur eintreten, wenn M einen der von Gauss ebenda angegebenen 8 Werte

2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29

hat. Setzt man also

$$R\left(\frac{M + 19R\left(\frac{A}{19}\right)}{30}\right) = d, \quad R\left(\frac{A}{19}\right) = a,$$

so wird die gregorianische Ostergrenze ausnahmslos bestimmt durch die Formel

$$\text{März } 21 + d - Q\left(\frac{d + Q\left(\frac{a}{11}\right)}{29}\right).$$

Für die Jahre 1700 bis 1899 hat M den Wert 23; für diesen Zeitraum ergibt sich also in Übereinstimmung mit der Angabe von Gauss (oben S. 207, Artikel 3)

$$E = R\left(\frac{11R\left(\frac{A}{19}\right)}{30}\right).$$

Da der Wert $M = 23$ bei den beiden besprochenen Ausnahmefällen nicht auftritt, wird die Ostergrenze für die Jahre 1700 bis 1899, wie Gauss a. a. O. und auch in seiner ersten Veröffentlichung Werke VI, S. 75 angibt, durch die Formel

$$\text{März } 21 + R\left(\frac{23 + 19R\left(\frac{A}{19}\right)}{30}\right) = \text{April } 18 - R\left(\frac{5 + 11R\left(\frac{A}{19}\right)}{30}\right)$$

bestimmt, ohne daß hier eine Korrektur erforderlich wäre.

Loewy.

[II.]

PRAECEPTA UNIVERSALIA AD COMPUTANDUM DIEM PASCHATIS ANNI CUIUSLIBET DATI SECUNDUM CALENDARIUM TUM GREGORIANUM TUM IULIANUM.

[Handschriftliche Eintragung in Christian Wolf, Elementa matheseos universae, tomus IV. — Von Gauss 1800 erworben.]

Prodeat ex divisione	per	residuum (minimum positivum)
Numeri anni	19	a
Numeri anni	4	b
Numeri anni	7	c
$19a+M$	30	d
$2b+4c+6d+N$	7	e
Eritque dies Paschatis $22+d+e$ Mart. sive $d+e-9$ April.		

Ex[emplum] pro 1715.

a	5
b	3
c	0
$19a+M$	118
d	28
$2b+4c+6d+N$	177
e	2

Pascha 21 Apr.

In Calendario Iuliano semper est $M = 15$, $N = 6$.

In Gregoriano vero hi numeri per centenos saltem annos valores invariabiles habent; et quidem est

	M	N		M	N
Ab Introd. C. G. usque ad 1699	22	2	2300—2399	26	1
1700—1799	23	3	2400—2499	25	1
1800—1899	23	4	2500—2599	26	2
1900—1999	24	5	2600—2699	27	3
2000—2099	24	5	2700—2799	27	4
2100—2199	24	6	2800—2899	27	4
2200—2299	25	0	2900—2999	28	5

etc.

Generaliter in Calendario Greg[oriano] inveniuntur valores ipsorum M, N per centenis annis a $100k$ usque ad $100k+99$ sequenti modo:

Dividatur k per $\left|\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right|$ et oriatur inde quotiens abiecto residuo $\left|\begin{matrix}p\\q\end{matrix}\right|$ eritque

$$M \equiv 15+k-p-q \text{ (M[od.] 30)}$$
$$N \equiv 4+k-q \text{ (M[od.] 7)}.$$

Duae ab his regulis dantur Exceptiones in Calend. Greg.

1) Quoties calculus producit 26^{tum} April. pro die Paschatis, sumi debet ipsius loco 19^{mus} Apr. —

Hic casus occurrere nequit, nisi in saeculis, ubi $11(M+1)$ per 30 divisus praebet residuum minus quam 19, puta ubi $M \equiv 0, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29$.

2) Quoties evadit $d = 28$, $e = 6$ atque insuper $11(M+1)$ per 30 divisus producit residuum minus quam 8, Pascha celebratur non 25^{to} April., sed 18^{vo} April. Ad hunc finem esse debet $M = 2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29$.

BEMERKUNGEN.

Die vorliegende Eintragung scheint GAUSS erst nach seiner Veröffentlichung *Berechnung des Osterfestes* in der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde 2, August 1800, S. 121, Werke VI, S. 73, gemacht zu haben. In der hier vorliegenden Aufzeichnung wird bei dem zweiten Ausnahmefalle bemerkt, daß für die in Frage kommenden 8 Werte des M der Ausdruck $11(M+1)$ durch 30 dividiert einen Rest gibt, der sogar kleiner als 8 ist, nicht nur, wie es in GAUSS' Veröffentlichung heißt,

kleiner als 19 (siehe Werke VI, S. 79, Z. 12 v. u.); ferner werden hier die Werte von M und N bis für das Jahr 2999 statt wie dort bis 2499 angegeben.

In KÄSTNERS *Anfangsgründen der angewandten Mathematik* (Der mathematischen Anfangsgründe zweyter Theil), Zweyte Abtheilung, von GAUSS 1791 erworben, hat GAUSS auch eine Eintragung über die Bestimmung des Osterfestes gemacht, die aus der Zeit vor der ersten Veröffentlichung zu stammen scheint, wie aus der noch nicht ganz klaren Angabe über die zwei Ausnahmefälle im Gregorianischen Kalender hervorgeht. Hingegen ist dort eine andere Bestimmung von M und N angegeben. In seiner ersten Veröffentlichung (Werke VI, S. 78) gibt GAUSS, ebenso wie oben S. 212, zur Bestimmung von M und N folgende Vorschrift:

$$\left\{\begin{matrix}M\\N\end{matrix}\right\} \text{ der Rest, den man erhält, wenn man } \left\{\begin{matrix}15+k-p-q\\4+k-q\end{matrix}\right\} \text{ mit } \left\{\begin{matrix}30\\7\end{matrix}\right\} \text{ dividiert,}$$

dabei ist

$$p = Q\left(\frac{k}{3}\right), \quad q = Q\left(\frac{k}{4}\right)$$

zu nehmen. In der erwähnten Eintragung bei KÄSTNER heißt es:

»Allgemein von $100k$ bis $100k+99$

$$k \equiv p \text{ (Mod. 3)}$$
$$\equiv q \text{ (Mod. 4)}$$
$$\equiv r \text{ (Mod. 7)}$$
$$M \equiv 15+\tfrac{5}{12}k+\tfrac{1}{3}p+\tfrac{1}{4}q \text{ (Mod. 30)}$$
$$N \equiv 4+2q+6r \text{ (Mod. 7)}«.$$

Bedeuten Q und R Quotient bezw. Rest und bedient man sich der Identitäten

$$k = 3Q\left(\frac{k}{3}\right)+R\left(\frac{k}{3}\right), \tag{1}$$
$$k = 4Q\left(\frac{k}{4}\right)+R\left(\frac{k}{4}\right), \tag{2}$$
$$k = 7Q\left(\frac{k}{7}\right)+R\left(\frac{k}{7}\right), \tag{3}$$

so ist erstens nach (1) und (2)

$$15+k-Q\left(\frac{k}{3}\right)-Q\left(\frac{k}{4}\right) = 15+k-\frac{k-R\left(\frac{k}{3}\right)}{3}-\frac{k-R\left(\frac{k}{4}\right)}{4} = 15+\frac{5}{12}k+\frac{1}{3}R\left(\frac{k}{3}\right)+\frac{1}{4}R\left(\frac{k}{4}\right);$$

multipliziert man ferner (2) mit 2 und (3) mit 6 und addiert, so hat man

$$8k = 8Q\left(\frac{k}{4}\right)+2R\left(\frac{k}{4}\right)+42Q\left(\frac{k}{7}\right)+6R\left(\frac{k}{7}\right)$$

oder

$$k \equiv Q\left(\frac{k}{4}\right)+2R\left(\frac{k}{4}\right)+6R\left(\frac{k}{7}\right) \text{ (mod. 7)}.$$

Folglich ist zweitens

$$4+k-Q\left(\frac{k}{4}\right) \equiv 4+2R\left(\frac{k}{4}\right)+6R\left(\frac{k}{7}\right) \text{ (mod. 7)}.$$

Hiermit sind beide Aussagen von Gauss als gleichwertig erwiesen; beide haben nur bis zum Jahre 4200 Gültigkeit (vergl. S. 201 oben).

Zu Gauss' erster Veröffentlichung über das Osterfest (Werke VI, S. 73) ist noch zu bemerken, daß er auf S. 128—129 seines Exemplars der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde 2, zwischen dem Text seinem Aufsatze handschriftliche Bemerkungen beigefügt hat. Von diesen hat Schering bei dem Abdruck des Gaussschen Aufsatzes in die Werke VI, S. 79, Z. 11 die folgende übernommen »(Z. B. 1609, 1989)«. Bei der letzten Zahl hat sich Gauss verschrieben; die fragliche Jahreszahl ist 1981, wie man Werke VI, S. 85, Z. 15 v. u. richtig angegeben findet. Auch in der erwähnten Eintragung in Kästners *Anfangsgründen* heißt es in korrekter Weise bei den Ausnahmefällen:

Dies geschieht zum ersten Male $\frac{1954}{1981}$, wo Ostern den $\frac{18}{19}$ten April fällt.

Ferner hat Gauss in sein Exemplar der Monatlichen Correspondenz bei der Ausnahme II (Werke VI, S. 79, Z. 18) eingetragen:

oder ist $a > 10$.

Dieses einfachere Kriterium statt des Restcharakters von $11M+11$ (vergl. oben S. 212) findet sich auch in der Gaussschen Veröffentlichung *Noch etwas über die Bestimmung des Osterfestes* (Werke VI, S. 85, Z. 12 v. u.). Die weiteren Gaussschen Eintragungen am besprochenen Orte hat Schering unter der Überschrift »[Handschriftliche Bemerkung]« in die Werke VI, S. 79 unten übernommen; vergl. zu der dort gegebenen Bestimmung von p die *Berichtigung*, oben S. 201, zu den auf die Zeiträume zwischen Ostern und Michaelis bezüglichen Zählungen Franz Goldscheider, *Über die Gausssche Osterformel* II, Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Luisenstädtischen Realgymnasiums zu Berlin, Ostern 1899, S. 29.

Loewy.

[III.]

BERECHNUNG DES NEUMONDS TISRI FÜR JEDES JÜDISCHE JAHR A.

[Handschriftliche Eintragung in Christian Wolf, Elementa matheseos universae, tomus IV. — Von Gauss 1800 erworben.]

[1.]

Den Tag von Molad Tohu oder den 7. Oct. des Jahres 953 der Julian. Periode bezeichnen wir mit 2, den folgenden mit 3 etc. in inf. Man fragt, auf welchen Tag x der Neumond Tisri des Jahres A fallen werde.

Auflös[ung]. Es entstehe aus der Division der Zahl $7A+13$ mit 19 der Rest a, so ist

$$x = \frac{5604}{25920} + \frac{1}{19}(235A - 234 - a) \times \left(29\,\frac{13753}{25920}\right)$$
$$= A \times 365\,\frac{24311}{98496} - 1\,\frac{272953}{492480}\,a - 363\,\frac{234606}{492480}.$$

[2.]

Auf welchen Tag des Julianischen Kalenders fällt der Neumond Tisri des Jahres A?

Jahr Christi $= A - 3761$.

$A - 1$ mit 4 dividirt, gebe den Rest b, so ist der gesuchte Tag

$$A - 3761 \text{ Jahr,} \qquad \tfrac{1}{4}b - \frac{313}{98496}A - 1\,\frac{272953}{492480}\,a + 8\,\frac{380994}{492480} \text{ Octob.}$$

BEMERKUNGEN.

Dieser Ansatz unterscheidet sich in zweifacher Weise von GAUSS' *Bestimmung des jüdischen Osterfestes* (Werke VI, S. 80, vergl. auch X 1, S. 560). Erstens wird statt des bei der Osterberechnung auftretenden Restes von $12A+17$ durch 19 der für die Rechnung bequemere von $7A+13$ durch 19, wofür man den gleichwertigen von $7A-6$ durch 19 setzen kann, verwendet. Zweitens bildet, was bedeutsamer ist, statt des jüdischen Osterfestes — das GAUSS in seiner erwähnten Veröffentlichung wohl nur in Analogie zu seiner früher gegebenen Formel für das christliche Osterfest behandelt hat — hier der Neumond Tišri*), der das wirkliche Fundament der jüdischen Chronologie ist, den Ausgangspunkt. Es soll hier eine Bestätigung der beiden von GAUSS aufgestellten Ausdrücke gegeben werden; im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **26**, 1917, S. 304 zeige ich, wie man von dem GAUSSschen Ansatze aus zu einer formelmäßigen Bestimmung des jüdischen Neujahrsfestes und des jüdischen Osterfestes gelangen kann.

Der jüdische Kalender hat in einem Zyklus von 19 Jahren immer je 7 Schaltjahre von 13 Monaten, nämlich die Jahre 3, 6, 8, 11, 14, 17 und 19 des Zyklus, während die andern Jahre aus 12 Monaten bestehen. Geht man von dem Beginn des 9. Jahres irgend eines Zyklus, also von dem Beginn des Jahres $19Z+9$, wobei Z irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, immer um 8 volle Jahre zurück, so sind, wie man sich überzeugt, in jedem solchen achtjährigen Intervall stets 3 Schaltjahre enthalten. Nun läßt sich jede ganze positive Zahl A in einer und auch nur in einer einzigen Weise in die Form

$$(1)\qquad A = 19Z+9-8a$$

bringen, wobei a und Z ganzzahlig sind und a der Ungleichung $0 \leqq a < 19$ genügt. Setzt man die mit 7 multiplizierte Gleichung (1) in die Form

$$(1^*)\qquad 7A = 19(7Z-3a+3)+a+6,$$

so findet man sofort ihre Lösungen

$$(2)\qquad a = R\left(\frac{7A-6}{19}\right)$$

und

$$(3)\qquad Z = \frac{Q\left(\frac{7A-6}{19}\right)+3R\left(\frac{7A-6}{19}\right)-3}{7},$$

wo Q, R den ganzzahligen nicht negativen Quotienten bezw. Rest bedeuten. Aus der Darstellung der ganzen positiven Zahl A in der Form (1) ergibt sich unmittelbar die Anzahl der Schaltjahre, die von Beginn der jüdischen Zeitrechnung, dem Beginn des jüdischen Jahres 1, bis zum Anfang des jüdischen Jahres A vergangen ist. Von Beginn der jüdischen Zeitrechnung bis zu Beginn des Jahres $19Z+9$ sind $7Z+3$ Schaltjahre verflossen, nämlich $7Z$ Schaltjahre in den völlig abgelaufenen Z Zyklen und die Schaltjahre 3, 6, 8 der acht verflossenen Jahre des $(Z+1)^{\text{ten}}$ Zyklus. Geht man vom Beginn des Jahres $19Z+9$ bis zum Anfang des Jahres $19Z+9-8a$ zurück, so liegen in diesen a achtjährigen Intervallen, die wir zurückgingen, nach der oben gemachten Bemerkung $3a$ Schaltjahre. Mithin beträgt die seit Beginn der jüdischen Zeitrechnung bis zum Anfang des jüdischen Jahres $A = 19Z+9-8a$ verflossene Anzahl von Schaltjahren $7Z+3-3a$; diese Zahl ist nach (3) und (2) gleich $Q\left(\frac{7A-6}{19}\right)$. Die bis zum Beginn des jüdischen Jahres

*) Tišri ist der siebente Monat des jüdischen Jahres; gemäß Leviticus Kap. 23, Vers 24 wird (abgesehen von gewissen genau festgelegten Ausnahmen) an seinem Neumond der »Feiertag des Blasens«, das jüdische Neujahrsfest, begangen, mit dessen Eintritt die Zählung des neuen Jahres beginnt.

A vergangene Anzahl von Schaltjahren ist daher gleich der größten in $\frac{7A-6}{19}$ enthaltenen ganzen Zahl $Q\left(\frac{7A-6}{19}\right)$.

Die bis zu Beginn des Jahres A vergangenen $A-1$ Jahre enthalten $12(A-1)+Q\left(\frac{7A-6}{19}\right)$ Monate, nämlich erstens $12(A-1)$ reguläre Monate und zweitens $Q\left(\frac{7A-6}{19}\right)$ Schaltmonate.

Nach den Gleichungen (3) und (2) ist

$$(4)\qquad 12(A-1)+Q\left(\frac{7A-6}{19}\right) = 12(A-1)+7Z+3-3a.$$

Nun ist nach der Gleichung (1*)

$$7Z+3-3a = \frac{7A-a-6}{19};$$

folglich geht der Ausdruck (4) über in

$$12(A-1)+\frac{7A-a-6}{19} = \frac{1}{19}[12 \,.\, 19(A-1)+7A-a-6] = \frac{1}{19}(235A-234-a).$$

Nach jüdischer Annahme fiel der Neumond Tišri des Jahres 1, der Molad Tohu*), auf einen Montag und zwar traf er $5\frac{204}{1080}$ Stunden $= \frac{5604}{25920}$ Tage nach Beginn des fraglichen Montags ein; als Tagesanfang gilt hierbei nach jüdischer Zählung die Zeit 6 Uhr abends, also eine um 6 Stunden frühere Zeit als nach christlicher Rechnung. Da der jüdische Monat $29\frac{13753}{25920}$ Tage besitzt, sind seit Beginn jenes Tages, an dem der Molad Tohu stattfand, wie GAUSS angibt,

$$(5)\qquad \frac{5604}{25920}+\frac{1}{19}(235A-234-a).\left(29\frac{13753}{25920}\right) = 365\frac{24311}{98496}A-1\frac{272953}{492480}a-363\frac{234606}{492480}$$

Tage verflossen. Dabei gilt als Tagesbeginn des Molad Tohu, der auf den 7. Oktober 3761 v. Chr.**) fiel, nach jüdischer Rechnung der voraufgehende Sonntag abends 6 Uhr.

Man setze den Ausdruck (5) gleich $x+\xi$, wobei x den ganzzahligen Bestandteil bezeichnet und ξ der positive echte Bruch ist. Numeriert man alsdann Samstag den 5. Oktober 3761 v. Chr. mit 0, den folgenden Sonntag mit 1, Montag, den Tag von Molad Tohu, mit 2, den folgenden Dienstag mit 3 u.s.w., so erhält der Neumond Tišri des Jahres A die Nummer $x+2$. Die GAUSSsche Angabe über die Numerierung ist also dementsprechend abzuändern.

Um das Datum zu bestimmen, auf das der Neumond Tišri des jüdischen Jahres A fällt, verfahren wir folgendermaßen: Wie wir gesehen haben, fällt dieser Neumond auf den $(x+2)^{\text{ten}}$ Tag nach dem 5. Oktober 3761 v. Chr., d. h. auf den $(x+7)^{\text{ten}}$ Tag nach dem 0. Oktober 3761 v. Chr.; er möge nun $A-1$ julianische Jahre und t Tage nach dem 0. Oktober 3761 v. Chr. fallen, t bedeute hierbei im Falle, daß der Neumond Tišri vor dem 0. Oktober eintrifft, eine negative Zahl. Die $A-1$ julianischen Jahre besitzen $Q\left(\frac{A-1}{4}\right)$ Schalttage; denn das julianische Jahr 3761 v. Chr., von dessen 0. Oktober gezählt werden soll, ist als

*) Im Hebräischen bedeutet Molad soviel wie Geburt, hier insbesondere das Erscheinen des Mondlichts, also Neumond, und Tohu soviel wie wüst mit Bezug auf die Schöpfung, vergl. Genesis Kap. 1, Vers 2. Molad Tohu ist der Neumond der Schöpfung, der Ausgangspunkt der jüdischen Zeitrechnung.

**) Das Jahr 1 der sogenannten julianischen Periode ist das 4713. v. Chr., so daß die von GAUSS oben S. 215 gegebene Bestimmung »des Jahres 953 der Julian. Periode« auf das Jahr 4714—953 = 3761 v. Chr. hinaus kommt.

Schaltjahr anzusehen, dessen Schalttag bereits vorüber ist, und auf dieses Jahr folgen die Schaltjahre immer in vierjährigen Intervallen, so daß das erste derselben nach Ablauf von $A-1=4$ julianischen Jahren zu berücksichtigen ist. Die fraglichen $A-1$ julianischen Jahre enthalten daher

$$365(A-1)+Q\left(\frac{A-1}{4}\right)=365\tfrac{1}{4}(A-1)-\tfrac{1}{4}R\left(\frac{A-1}{4}\right)$$

Tage; denn es ist

$$A-1=4Q\left(\frac{A-1}{4}\right)+R\left(\frac{A-1}{4}\right).$$

Mithin fällt der Neumond Tišri des Jahres A genau

$$t+365\tfrac{1}{4}(A-1)-\tfrac{1}{4}R\left(\frac{A-1}{4}\right)$$

Tage nach dem 0. Oktober 3761 v. Chr. Da er aber, wie oben gezeigt, $x+7$ Tage nach dem genannten Termin fällt, so hat man die Gleichung

$$t+365\tfrac{1}{4}(A-1)-\tfrac{1}{4}R\left(\frac{A-1}{4}\right)=x+7$$

oder

$$(6)\qquad t=x+7-365\tfrac{1}{4}(A-1)+\tfrac{1}{4}R\left(\frac{A-1}{4}\right).$$

Addiert man bei (6) rechts und links ξ und ersetzt rechter Hand $x+\xi$ durch seinen Wert nach (5), so wird

$$(7)\qquad t+\xi=365\frac{24311}{98496}A-1\frac{272953}{492480}a-363\frac{234606}{492480}+7-365\tfrac{1}{4}(A-1)+\tfrac{1}{4}R\left(\frac{A-1}{4}\right)$$

oder

$$(7^*)\qquad t+\xi=\tfrac{1}{4}R\left(\frac{A-1}{4}\right)-\frac{313}{98496}A-1\frac{272953}{492480}a+8\frac{380994}{492480}\;{}^{*)}.$$

Es ist mithin t der ganzzahlige Bestandteil, ξ der positive echte Bruch des Ausdrucks, der auf der rechten Seite von (7^*) steht. Dieses Resultat, wonach also der Neumond Tišri des jüdischen Jahres A auf den t^{ten} julianischen Oktober des Jahres $A-3761$ n. Chr. fällt, stimmt mit der Angabe von Gauss überein. Ist t gleich Null oder negativ so ist der t^{te} julianische Oktober mit dem $(30+t)^{\text{ten}}$ julianischen September gleichbedeutend.

LOEWY.

*) Erweitert man rechts vom Gleichheitszeichen Zähler und Nenner des Koeffizienten von A mit 5, so sieht man, daß $t+\xi$ auf den Nenner $492480=19.24.1080$ gebracht werden kann. Es ist aber für die Ausführung und Nachprüfung der Rechnung von Bedeutung, daß sich ξ stets als echter Bruch mit dem Nenner $25920=24.1080$ schreiben läßt. ξ kann nämlich auch als der echte Bruch des in (5) links vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucks erklärt werden, bei dem $\frac{235A-234-a}{19}$ als Anzahl der bis zum Beginn des Jahres A verflossenen Monate eine ganze Zahl ist.

THEORETISCHE ASTRONOMIE.

NACHTRÄGE ZU DEN BÄNDEN VI UND VII.

ELLIPTISCHE BAHNBESTIMMUNG.

NACHLASS.

[I.]

[S. 1]

BESTIMMUNG DER BAHNEN DER HIMMELSKÖRPER.

[Aus Handbuch 16, Bb, Den astronomischen Wissenschaften gewidmet, November 1801, S. 1—8.]

[1.]

Bedeutung der hier vorkommenden Zeichen.

α ... Geocentrische Länge des Weltkörpers	t ... Zeit der Beobachtung
ϐ ... Geocentrische Breite	v ... Länge in der Bahn
θ ... Tangente der Breite	M ... Wahre Anomalie [*)]
Δ ... Kurtirter Abstand von der Erde	E ... Eccentrische Anomalie [*)]
λ ... Heliocentrische Länge	N ... Mittlere Anomalie [*)]
β ... Heliocentrische Breite	u ... Mittlere Länge
ϑ ... Tangente dieser Breite	R ... Abstand der Sonne von der Erde
ρ ... Kurtirter Abstand von der Sonne	V ... Wahre Länge der Sonne
r ... Wahrer Abstand von der Sonne	U ... Mittlere Länge der Sonne.

[*) Vom Aphelium gezählt.]

Dieselben Zeichen mit Linien haben ähnliche Bedeutungen für andere Beobachtungen.

☊ ... Länge des aufsteigenden Knoten
i ... Neigung der Bahn
g ... Tangente derselben
ω ... Ort der Sonnenferne
e ... Eccentricität
φ ... Bogen dessen Sinus $= e$
a ... Halbe grosse Axe
b ... Halbe kleine Axe
p ... Halber Parameter

Anm. Die Längen sind sämmtlich siderisch, oder von einem festen, übrigens willkürlichen Punkte des Himmels an gezählt.

[S. 2]

[2.]

Formeln zur ersten Annäherung aus dreien Beobachtungen.

$$\text{I.}\qquad \frac{R'}{\Delta'}\left(1-\frac{R'^3}{r'^3}\right)=\frac{\theta\sin(\alpha''-\alpha')-\theta'\sin(\alpha''-\alpha)+\theta''\sin(\alpha'-\alpha)}{\frac{1}{2}(U'-U)(U''-U')\{\theta''\sin(V'-\alpha)-\theta\sin(V'-\alpha'')\}}\,[^*)],$$

$$\text{[a.]}\quad \text{genau}\ \left[\frac{1}{\Delta'R'R'}\left(1-\frac{R'^3}{r'^3}\right)\right]=\frac{d\alpha'\,dd\theta'-d\theta'\,dd\alpha'+\theta'd\alpha'^3}{dU^2\{\theta'\cos(V'-\alpha')\,d\alpha'+\sin(V'-\alpha')\,d\theta'\}}.$$

Hat man nach dieser Formel $\frac{R'}{\Delta'}\left(1-\frac{R'^3}{r'^3}\right)$ bestimmt, so findet man darnach leicht durch Verbindung mit der Gleichung

$$\frac{r'}{\Delta'}=\sqrt{\left(1+\theta'\theta'+\frac{R'R'}{\Delta'\Delta'}-2\frac{R'}{\Delta'}\cos(V'-\alpha')\right)}$$

vermittelst weniger Versuche einen nahen Werth von Δ'.

$$\text{II.}\quad \frac{\Delta''}{\Delta}=\frac{\theta'\sin(V'-\alpha)-\theta\sin(V'-\alpha')}{\theta''\sin(V'-\alpha')-\theta'\sin(V'-\alpha'')}\cdot\frac{t''-t'}{t'-t}=\frac{\dfrac{\sin(V'-\alpha)}{\sin(V'-\alpha')}-\dfrac{\theta}{\theta'}}{\dfrac{\theta''}{\theta'}-\dfrac{\sin(V'-\alpha'')}{\sin(V'-\alpha')}}\cdot\frac{t''-t'}{t'-t}\,[^{**})].$$

Völlig genau ist

$$\text{[b.]}\qquad \frac{2d\Delta'}{\Delta'}=-\frac{\theta'dd\alpha'\cos(V'-\alpha')+(\theta'd\alpha'^2+dd\theta')\sin(V'-\alpha')}{\theta'd\alpha'\cos(V'-\alpha')+d\theta'.\sin(V'-\alpha')}.$$

In Ansehung der ersten Formel ist noch zu bemerken, dass $U'-U$, $U''-U'$ in Theilen des Radius ausgedrückt werden müssen; auf die Weise ist log (mot. med. ⊙ diurn.) = 8,235 5820.792[*)].

Nachdem man nun Δ' und $\frac{\Delta''}{\Delta}$ bestimmt hat, kann man, hinreichend genau zur ersten Näherung

$$\log\Delta=\log\Delta'-\frac{t'-t}{t''-t}\log\frac{\Delta''}{\Delta},\qquad \log\Delta''=\log\Delta'+\frac{t''-t'}{t''-t}\log\frac{\Delta''}{\Delta}$$

setzen.

Ist die Neigung der Bahn sehr gering, so sind obige Gleichungen unbrauchbar; die beobachtete Länge, ihre Veränderung und deren Zu- oder Abnahme gibt sodann bloss folgende Gleichung:

$$\text{[c.]}\qquad 0=2\frac{d\Delta}{dU}\,\frac{d\alpha}{dU}+\Delta\frac{d^2\alpha}{dU^2}+R\left(\frac{A^3}{R^3}-\frac{A^3}{r^3}\right)\sin(V-\alpha).$$

[Im übrigen ist:]

$$\text{[d.]}\quad 0=\theta.\Delta\cdot\frac{d\alpha^2}{dU^2}+2\frac{d\Delta}{dU}\,\frac{d\theta}{dU}+\Delta\frac{d^2\theta}{dU^2}-R\theta\left(\frac{A^3}{R^3}-\frac{A^3}{r^3}\right)\cos(V-\alpha).$$

[S. 3]

[3.]

Vorschriften zur Berechnung der Elemente, aus zweien geocentrischen Örtern, der Zwischenzeit, und den zugehörigen Abständen [**)].

$$\rho=\sqrt{\{RR+\Delta\Delta-2R\Delta\cos(V-\alpha)\}}.$$

Ganz allgemein

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta\sin\alpha-R\sin V=\rho\sin\lambda\\ \Delta\cos\alpha-R\cos V=\rho\cos\lambda\end{array}\right\};$$

folglich

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{l}\Delta\sin(V-\alpha)=\rho\sin(V-\lambda)\\ \Delta\cos(V-\alpha)-R=\rho\cos(V-\lambda)\end{array}\right\},\qquad \text{II.}\left\{\begin{array}{l}R\sin(V-\alpha)=\rho\sin(\alpha-\lambda)\\ R\cos(V-\alpha)-\Delta=-\rho\cos(\alpha-\lambda)\end{array}\right\},$$

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{l}(\Delta+R)\sin\frac{1}{2}(V-\alpha)=\rho\sin\{\frac{1}{2}(V+\alpha)-\lambda\}\\ (\Delta-R)\cos\frac{1}{2}(V-\alpha)=\rho\cos\{\frac{1}{2}(V+\alpha)-\lambda\}\end{array}\right\}$$

[*) Vgl. Werke VI, S. 159.]
[**) Vgl. Werke VI, S. 157.]

[*)] Wenn man auf die Erdmasse mit Rücksicht nimmt, muss man log mot. diurni Planetae in distantia media setzen: $8{,}235\,5814.21\cdot[A^{\frac{3}{2}}:a^{\frac{3}{2}}$, wo wie auch im Folgenden A die halbe große Achse der Erdbahn bedeutet].
[**) Vgl. Theoria motus, art. 124, Werke VII, 1906, S. 165.]

$$r = \rho \sec\beta, \qquad \vartheta = \operatorname{tang}\beta = \frac{\Delta}{\rho}\operatorname{tang}\delta = \frac{\Delta\theta}{\rho}.$$

Allgemein [$\vartheta = g \sin(\lambda - \Omega)$, also]

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta'\sin\lambda - \vartheta\sin\lambda' = g\sin(\lambda'-\lambda)\sin\Omega\\ \vartheta'\cos\lambda - \vartheta\cos\lambda' = g\sin(\lambda'-\lambda)\cos\Omega\end{array}\right\} g\sin(\lambda'-\lambda) = \sqrt{(\vartheta\vartheta + \vartheta'\vartheta' - 2\vartheta\vartheta'\cos(\lambda'-\lambda)},$$

folglich

$$\text{I.}\ \left\{\begin{array}{r}\vartheta\sin(\lambda'-\lambda) = g\sin(\lambda'-\lambda)\sin(\lambda-\Omega)\\ \vartheta' - \vartheta\cos(\lambda'-\lambda) = g\sin(\lambda'-\lambda)\cos(\lambda-\Omega)\end{array}\right\},$$

$$\text{II.}\ \left\{\begin{array}{l}\vartheta'\sin(\lambda'-\lambda) \qquad\quad = g\sin(\lambda'-\lambda)\sin(\lambda'-\Omega)\\ \vartheta'\cos(\lambda'-\lambda) - \vartheta = g\sin(\lambda'-\lambda)\cos(\lambda'-\Omega)\end{array}\right\},$$

$$\text{III.}\ \begin{array}{l}(\vartheta'+\vartheta) : 2\cos\tfrac{1}{2}(\lambda'-\lambda) = g\sin(\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda') - \Omega),\\ (\vartheta'-\vartheta) : 2\sin\tfrac{1}{2}(\lambda'-\lambda) = g\cos(\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda') - \Omega),\end{array}$$

$$\operatorname{tang}(v-\Omega) = \frac{\operatorname{tang}(\lambda-\Omega)}{\cos i}, \quad \cos(v-\Omega) = \cos(\lambda-\Omega)\cos\beta, \quad \sin(v-\Omega) = \frac{\sin\beta}{\sin i},$$

$$\operatorname{tang}(v'-v) = \sec i \cdot \frac{\sin(\lambda'-\lambda)}{\cos(\lambda'-\lambda) + \vartheta\vartheta'}.$$

Hiedurch hat man also die beiden Örter in der Bahn und zugleich die wahren Abstände von der Sonne [sowie die Länge des aufsteigenden Knotens und die Neigung der Bahn].

[S. 4] [4.]

Um aus diesen Datis die Bahn zu bestimmen, bedient man sich der Regula falsi, indem man einen so nahen Werth als möglich für den h[alben] Parameter, die Excentricität oder das Aphelium voraussetzt, daraus die [übrigen] Elemente der Bahn, und sodann die Zeit von der ersten zur zweiten Beobachtung ableitet, und mit der gegebnen Zwischenzeit vergleicht. Um aber bei der ersten Hypothese sich nicht zu sehr von der Wahrheit zu entfernen, bemerken wir, dass ziemlich genau $\sqrt{p} = \frac{1}{2}(rr + r'r')\frac{v'-v}{U'-U}$ sei. Noch genauer erhält man p, wenn man aus dem ersten angenäherten Werthe die Grösse $\mathfrak{R}$ vermittelst der Formel

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)}{\cos\frac{1}{2}(v'-v)} - \frac{2\sin\frac{1}{4}(v'-v)^2}{p\cos\frac{1}{2}(v'-v)}$$

oder

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right) + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right) - \frac{1}{p}\right)\frac{2\sin\frac{1}{4}(v'-v)^2}{\cos\frac{1}{2}(v'-v)}$$

bestimmt u[nd] sich dann der Formel $\sqrt{p} = \frac{1}{6}(rr + r'r' + 4\mathfrak{R}\mathfrak{R})\frac{v'-v}{U'-U}$ bedient[*)], welche Operation man auch leicht mehreremal wiederholen kann. Auf diese Art bekommt man gewöhnlich, wenn die Zwischenzeit nicht zu gross ist, einen so genauen Werth von p, dass die folgende Rechnung mehr zur Bestätigung, als zur Verbesserung desselben dienen wird[**)].

I. Bestimmung der Bahn, wenn p als bekannt vorausgesetzt wird[***)].

$$\left.\begin{array}{l}\cos v\,.\left(1-\frac{p}{r'}\right) - \cos v'.\left(1-\frac{p}{r}\right) = e\sin(v'-v)\,.\sin\omega\\ \sin v'.\left(1-\frac{p}{r}\right) - \sin v\,.\left(1-\frac{p}{r'}\right) = e\sin(v'-v)\,.\cos\omega\end{array}\right\},$$

$$e\sin(v'-v) = \sqrt{\left\{\left(1-\frac{p}{r}\right)^2 + \left(1-\frac{p}{r'}\right)^2 - 2\left(1-\frac{p}{r}\right)\left(1-\frac{p}{r'}\right)\cos(v'-v)\right\}},$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(1-\frac{p}{r}\right)\cos(v'-v) - \left(1-\frac{p}{r'}\right) = e\sin(v'-v)\,.\sin(v-\omega)\\ \left(1-\frac{p}{r}\right)\sin(v'-v) \qquad\qquad\qquad = e\sin(v'-v)\,.\cos(v-\omega)\end{array}\right\},$$

[*) Vgl. Werke VI, S. 161—162, ferner Theoria motus, art. 86, Werke VII, 1906, S. 109 und die Schlußworte des art. 84, a. a. O. S. 108.]

[**) S. 8] Es sei $\frac{r'}{r} = \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi)$, so dass

$$\frac{1}{rr} + \frac{1}{r'r'} = \frac{2}{rr'\cos 2\varphi}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{2\cos\varphi}{\sqrt{(rr'\cos 2\varphi)}}; \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{(rr'\cos 2\varphi)}},$$
$$v' - v = \delta,$$

so ist

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\cos\varphi\left(1 - \frac{2\sin\frac{1}{4}\delta^2}{p\cos\varphi}\sqrt{(rr'\cos 2\varphi)}\right)}{\cos\frac{1}{2}\delta\sqrt{(rr'\cos 2\varphi)}}$$

und

$$\text{mot. m.}\odot.\sqrt{p} = \frac{1}{6}\delta(rr + r'r' + 4\mathfrak{R}\mathfrak{R}) = \frac{\delta rr'}{\cos 2\varphi}\left\{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\delta\cos 2\varphi}{\cos\varphi\left(1 - \frac{2\sin\frac{1}{4}\delta^2}{p\cos\varphi}\sqrt{(rr'\cos 2\varphi)}\right)}\right)^2\right\}$$

oder näherungsweise [m = mot. m. $\odot$ gesetzt]

$$p = \left(\frac{rr'\delta}{m}\right)^2\sqrt[3]{\left\{\cos 2\varphi^2\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\varphi\left(1 - \frac{2\sin\frac{1}{4}\delta^2}{p\cos\varphi}\sqrt{(rr'\cos 2\varphi)}\right)}\right)^8\right\}}.$$

[***) Vgl. Werke VI, S. 161 und Theoria motus, art. 79, Werke VII, 1906, S. 102.]

$$\left.\begin{aligned}\left(1-\frac{p}{r}\right)-\left(1-\frac{p}{r'}\right)\cos(v'-v) &= e\sin(v'-v)\,.\,\sin(v'-\omega)\\ \left(1-\frac{p}{r'}\right)\sin(v'-v) &= e\sin(v'-v)\,.\,\cos(v'-\omega)\end{aligned}\right\},$$

$$\frac{\frac{p}{r'}-\frac{p}{r}}{2\sin\frac{1}{2}(v'-v)} = e\sin\left(\tfrac{1}{2}(v'+v)-\omega\right),$$

$$\frac{2-\frac{p}{r}-\frac{p}{r'}}{2\cos\frac{1}{2}(v'-v)} = e\cos\left(\tfrac{1}{2}(v'+v)-\omega\right).$$

II. Bestimmung der Bahn, wenn man e [oder ω] als bekannt voraussetzt[*)].

Allgemein. Man mache

$$\begin{aligned} e(r'\sin v'-r\sin v) &= k\sin\zeta,\\ e(r'\cos v'-r\cos v) &= k\cos\zeta,\end{aligned}\quad \text{so ist}\quad r'-r = k\cos(\omega-\zeta)\,[^{**})],$$

folglich, wenn man macht

$$\begin{aligned} e(r'+r)\sin\tfrac{1}{2}(v'-v) &= k\sin\zeta,\\ e(r'-r)\cos\tfrac{1}{2}(v'-v) &= k\cos\zeta,\end{aligned}\quad \text{so wird}\quad r'-r = k\cos\left(\omega-\zeta-\tfrac{1}{2}(v'+v)\right).$$

Also

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{r'+r}{r'-r}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(v'-v),$$

$$\cos\left(\omega-\zeta-\tfrac{1}{2}(v'+v)\right) = \frac{\cos\zeta}{e\cos\frac{1}{2}(v'-v)}.$$

[S. 5]

Eben diese Formel findet gleichfalls ihre Anwendung, wenn man ω als bekannt voraussetzt. Ferner ist sodann

$$p = -\frac{2e\operatorname{tang}\zeta\cos\frac{1}{2}(v'-v)\sin\left(\frac{1}{2}(v'+v)-\omega\right)}{\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}}\,[^{***})].$$

[*) Vgl. Werke VI, S. 160—161 und Theoria motus, art. 80—81, Werke VII, 1906, S. 103.]

[**) ζ hat hier eine andere Bedeutung, als in den folgenden Zeilen.]

[***)] Denomin. $= \frac{2\cos\psi}{\sqrt{(rr'\cos 2\psi)}}$ ponendo $\frac{r}{r'} = \operatorname{tg}(45^\circ\pm\psi)$.

III. Bestimmung der mittlern Anomalie aus der wahren, und der Zeit.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M\,.\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}\varphi+45^0\right),\qquad \begin{aligned}\sin E &= \frac{r}{b}\sin M,\\ \cos E &= \frac{r}{a}\cos M-e = \frac{\cos M-e}{1-e\cos M},\end{aligned}$$

$$\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}(E-M) = \frac{\operatorname{cotang}\frac{1}{2}\varphi}{\sin M}-\operatorname{cotang}M,$$

$$\sin(E-M) = \frac{er}{p}\sin M\,.\left(1-\cos M\,.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi\right),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(E-M) = \sin M\,.\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{r}{p}} = \sin E\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{a}{r}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(E+M) = \sin M\,.\cos\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{r}{p}}.$$

$$\sin(E'-E) = \frac{rr'}{ab}\sin(M'-M)-e\sin E'+e\sin E,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(E'-E)^2 = \frac{rr'}{bb}\sin\tfrac{1}{2}(M'-M)^2,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(E'-E)\cos\tfrac{1}{2}(M'-M)+\frac{\sin\frac{1}{2}(E'-E)\sin\frac{1}{2}(M'-M)}{\sqrt{(1-ee)}} = \frac{\sqrt{\frac{r'}{r}}+\sqrt{\frac{r}{r'}}}{2},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(E'+E)}{\sin\frac{1}{2}(E'-E)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(M'+M)}{\sin\frac{1}{2}(M'-M)}.$$

$$N = E+e\sin E;\qquad N-M = 2\operatorname{Arc}\sin\left\{\sin M\sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\frac{r}{p}}\right\}+\sin\varphi\sin M\cdot\frac{r}{b}.$$

Zeit von der ersten zur zweiten Beobachtung $= \frac{a^{\frac{3}{2}}(N'-N)}{\text{mot. diurn. }\odot\text{ med.}}$, wobei die mittl[ere] tägliche siderische Bewegung der Sonne $= 3548'',19223$ und der Logar[ithmus] $= 3,5500071$. — Stimmt diese berechnete Zeit $= T$ mit der beobachteten $t'-t$ nicht überein, so wiederholt man die Rechnung, indem man als neuen Werth des h[alben] Parameters $\frac{TT}{(t'-t)^2}\cdot p$ zum Grunde legt.

[5.]

Mit den solchergestalt gefundenen Elementen, die den beiden äussern Beobachtungen genau Genüge leisten, berechnet man nun den geocentrischen Ort für die Zeit der mittlern Beobachtung. Stimmt derselbe ganz mit dem beobachteten, so hat man die ganze Bahn schon richtig; wo nicht, so muss man die Elemente durch neue Hypothesen verbessern. — Übrigens [wird] man zur Berechnung des geocentrischen Orts aus dem heliocentrischen in der Bahn folgende Formeln sehr brauchbar finden.

$$r\cos(v-\Omega) \qquad + R\cos(V-\Omega) = \Delta\cos(\alpha-\Omega),$$
$$r\sin(v-\Omega).\cos i + R\sin(V-\Omega) = \Delta\sin(\alpha-\Omega),$$
$$r\sin(v-\Omega).\sin i \qquad = \Delta.\theta,$$

$$\Delta\sqrt{(1+\theta\theta)} =$$
$$\sqrt{\{rr+RR+2rR(\cos(v-\Omega)\cos(V-\Omega)+\sin(v-\Omega)\sin(V-\Omega)\cos i)\}} =$$
$$\sqrt{\{(r+R)^2(\cos\tfrac{1}{2}i^2\cos\tfrac{1}{2}(V-v)^2+\sin\tfrac{1}{2}i^2\cos(\tfrac{1}{2}(V+v)-\Omega)^2)}$$
$$+(r-R)^2(\cos\tfrac{1}{2}i^2.\sin\tfrac{1}{2}(V-v)^2+\sin\tfrac{1}{2}i^2\sin(\tfrac{1}{2}(V+v)-\Omega)^2)\}.$$

[6.]

[S. 6]

Erste Verbesserungsmethode.

Man mache zwei neue Hypothesen, indem man die curtirten Abstände von der Erde für die äussern Beobachtungen etwas verändert; berechne daraus die Elemente der Bahn, und hieraus die mittlere Beobachtung. Durch Vergleichung der für diese nach den drei Hypothesen gefundenen Fehler wird man sodann die Abstände viel genauer ableiten und daraus der Wahrheit viel nähere Elemente finden. Da diese Rechnungen den vorhin beschriebenen ganz ähnlich sind, so ist darüber nichts weiter hinzuzusetzen.

[7.]

Zweite Verbesserungsmethode.

Man verändere die aus der ersten Hypothese abgeleitete Neigung der Bahn und den Ort des Knoten etwas; berechne damit die zwei heliocentrischen Örter in der Bahn und Abstände von der Sonne; aus den beiden äussern und der Zwischenzeit berechne man die Elemente und den heliocentrischen Ort und Abstand der mittlern Beobachtung. Dasselbe berechne man nach den drei Hypothesen aus dem beobachteten geocentrischen Orte, und leite aus der Vergleichung der Fehler die nähern Werthe für Neigung und Knoten ab. Hier müssen wir also auflösen folgende

Aufgabe.

Aus dem geocentrischen Orte, Neigung der Bahn und Länge des Knoten, den heliocentrischen Ort in der Bahn und die Abstände von der Sonne und Erde zu finden*)

$$\frac{R}{\Delta} = \frac{\sin(\alpha-\Omega)-\frac{\theta}{g}}{\sin(V-\Omega)}, \qquad \frac{r}{\Delta} = \sqrt{\left(1+\theta\theta+\frac{RR}{\Delta\Delta}-2\frac{R}{\Delta}\cos(V-\alpha)\right)},$$
$$\sin(v-\Omega) = \frac{\theta}{\frac{r}{\Delta}\sin i},$$
$$\cos(v-\Omega) = \frac{\Delta}{r}\cos(\alpha-\Omega)-\frac{R}{r}\cos(V-\Omega) = \frac{\Delta}{r}\left(\frac{\sin(V-\alpha)}{\sin(V-\Omega)}+\frac{\theta}{g}\operatorname{cotg}(V-\Omega)\right),$$
$$\operatorname{cotg}(v-\Omega) = \frac{\sin i}{\theta}\,\frac{\sin(V-\alpha)}{\sin(V-\Omega)}+\cos i\operatorname{cotg}(V-\Omega)$$
$$= \frac{\cos i.g}{\theta\sin(V-\Omega)}\left(\sin(V-\alpha)+\frac{\theta}{g}\cos(V-\Omega)\right).$$

[8.]

[S. 7]

Dritte Verbesserungsmethode.

Nach drei Hypothesen für Knoten und Neigung berechne man die heliocentrischen Örter für alle drei Beobachtungen und aus diesen den Kegelschnitt. Hiezu wird man folgende Vorschriften vorzüglich brauchbar finden[**)]

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\frac{\sin\frac{1}{2}(v''-v')\sin\frac{1}{2}(v''+v')}{r}+\frac{\sin\frac{1}{2}(v'-v)\sin\frac{1}{2}(v'+v)}{r''}-\frac{\sin\frac{1}{2}(v''-v)\sin\frac{1}{2}(v''+v)}{r'}}{\frac{\sin\frac{1}{2}(v''-v')\cos\frac{1}{2}(v''+v')}{r}+\frac{\sin\frac{1}{2}(v'-v)\cos\frac{1}{2}(v'+v)}{r''}-\frac{\sin\frac{1}{2}(v''-v)\cos\frac{1}{2}(v''+v)}{r'}}.$$

Der Zähler in diesem Ausdruck ist

$$= 2\frac{e}{p}\sin\tfrac{1}{2}(v''-v')\sin\tfrac{1}{2}(v'-v)\sin\tfrac{1}{2}(v''-v)\sin\omega,$$

der Nenner

$$= 2\frac{e}{p}\sin\tfrac{1}{2}(v''-v')\sin\tfrac{1}{2}(v'-v)\sin\tfrac{1}{2}(v''-v)\cos\omega.$$

---

*) Der letztere ist eigentlich bloss zur genauen Bestimmung der Aberration nöthig.

[**) Vgl. Theoria motus, art. 82—83, Werke VII, 1906, S. 105.]

Man findet also auf diese Weise zu gleicher Zeit ω und $\frac{e}{p}$. — Bequemer als obige allgemeine Formel ist folgende, die man leicht aus jener ableitet:

$$\frac{e}{p}\sin\left(\omega-\tfrac{1}{2}(v+v'')\right)=\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r''}}{2\sin\frac{1}{2}(v''-v)},$$

$$\frac{e}{p}\cos\left(\omega-\tfrac{1}{2}(v+v'')\right)=\frac{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(v'-v)-\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(v''-v')}{2\sin\frac{1}{2}(v''-v)}.$$

Durch Vertauschung des Winkels v' mit v oder v'' erhält man aus dieser Formel noch zwei ganz ähnliche. Endlich dient zur Berechnung von p folgende Formel:

$$\frac{1}{p}=\frac{\frac{1}{r}\sin(v''-v')+\frac{1}{r''}\sin(v'-v)-\frac{1}{r'}\sin(v''-v)}{4\sin\frac{1}{2}(v''-v')\sin\frac{1}{2}(v'-v)\sin\frac{1}{2}(v''-v)},$$

woraus p unmittelbar folgt, oder eine von diesen:

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{r}+\frac{e}{p}\cos(v-\omega)=\frac{1}{r'}+\frac{e}{p}\cos(v'-w)=\frac{1}{r''}+\frac{e}{p}\cos(v''-\omega).$$

[9.]

[S. 8]

Wir fügen diesem Traktat noch einige andere Formeln bei, die bei diesen Rechnungen sehr brauchbar sind:

$$\begin{aligned}\sin(v-\lambda)&=\frac{\sin\frac{1}{2}i^2\sin 2(v-\Omega)}{\cos\beta}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}i\sin\beta\cos(\lambda-\Omega)\\&=2\sin\tfrac{1}{2}i^2\sin(v-\Omega)\cos(\lambda-\Omega)\\&=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i\operatorname{tg}\beta\cos(v-\Omega)=\cos\beta\sin 2(\lambda-\Omega)\cdot\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}i\,.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Für die grösste Mittelpunktsgleichung ist $\cos E=-\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{1+\sqrt{\cos\varphi}}$ und die

$$\text{M. G.}=2\,\text{Arc}\,[\sin]\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi\sin E}{\sqrt[4]{\cos\varphi}}+\sin\varphi\sin E.$$

Als äusserst scharfe Annäherung ist folgende Formel völlig hinreichend:

$$\text{Aequ. C. max.}=\varphi+e+\tfrac{3}{8}(\varphi-e).$$

Differentialformeln:

m ..... mittl. Anomalie zur Zeit der Epoche,
U ..... mittl. Bewegung der Sonne von der Epoche bis zur Beobachtung.

I. $$dv=d\omega+\frac{aa\cos\varphi}{rr}dm-\frac{3U\cos\varphi}{2rr\sqrt{a}}da-\frac{a}{r}(2-e\cos M)\sin E\,d\varphi,$$

Pars ultima $=-\frac{aa}{rr}(1+\cos\varphi^2+e\cos E)\sin E\,d\varphi$,

II. $$dr=\left(\frac{r}{a}+\frac{3}{2}\,\frac{U\operatorname{tg}\varphi\sin M)}{a^{\frac{3}{2}}}\right)da-a\operatorname{tg}\varphi\sin M\,dm+a\cos\varphi\cos M\,d\varphi,$$

III. $$d\lambda=d\Omega+\frac{\cos i}{\cos\beta^2}d(v-\Omega)-\cos(\lambda-\Omega)\operatorname{tg}\beta\,di,$$

IV. $$d\vartheta=\frac{\cos(\lambda-\Omega)\sin i}{\cos\beta^2}d(v-\Omega)+\frac{\sin(\lambda-\Omega)}{\cos\beta^2}di,$$

V. $$d\rho=\cos\beta\,dr-\tfrac{1}{2}\rho\sin 2\beta\,d\vartheta.$$

[II.]

[WEITERES ZUR BAHNBESTIMMUNG.]

[Aus Scheda Ag. Cereri Ferdinandeae Sacrum; November 1801, S. 5—17.]

[1.]

[S. 5] **Vorschriften,**

um aus

geocent[rischer] Länge eines Weltkörpers . . . . α

Breite . . . . β

Neigung seiner Bahn i

Ort des aufsteigenden Knoten . . . . Ω

Länge der Sonne V

Abstand der Sonne von der Erde . . . . R

abzuleiten:

heliocentrische Länge des Weltkörpers v

Abstand desselben von der Sonne . . . . r

Curtirter Abstand von der Erde . . . . Δ.

I. $$\operatorname{cotang}(v-\Omega) = \frac{\cos i \cos(V-\Omega)\operatorname{tang}\beta - \sin i \sin(\alpha - V)}{\sin(V-\Omega)\operatorname{tang}\beta},$$

II. $$\Delta = R\frac{\operatorname{tg} i \sin(V-\Omega)}{\operatorname{tg} i \sin(\alpha-\Omega) - \operatorname{tg}\beta},$$

III. $$r = \Delta\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin(v-\Omega)\sin i},$$

[Zur Kontrolle:]

$$\operatorname{tang}(v-\Omega) = \frac{1}{\cos i}\cdot\frac{\Delta\sin(\alpha-\Omega) - R\sin(V-\Omega)}{\Delta\cos(\alpha-\Omega) - R\cos(V-\Omega)},$$

$$r = \sqrt{(\Delta\Delta\sec\beta^2 + RR - 2R\Delta\cos(\alpha - V))}.$$

[S. 6] **Beispiele[*)].**

I. [erste Beobachtung.]

$V = 282^0\ 2'\ 28''60$ $\qquad \log R = 9{,}9926317$

$\alpha = 53\ 19\ 42''35$ $\qquad \log \operatorname{tg}\beta = 8{,}7250840\,n$

$\Omega = 81\ 27\ 4''62$ $\qquad \log \operatorname{tg} i = 9{,}2621790$

$V - \Omega = 200^0\ 35'\ 23''98$

$\alpha - \Omega = 331\ 52\ 37''73$

$\alpha - V = 131\ 17\ 13''75$

$\log\cos i = 9{,}9928560$

$\log\cot(V-\Omega) = 0{,}4251865$

$ 0{,}4180426$

$\log\sin i = 9{,}2550351$

$\log\sin(\alpha - V) = 9{,}8758782$

Compl. l[og] $\sin(V-\Omega) = 0{,}4538546\,n$

Compl. l[og] $\operatorname{tang}\beta = 1{,}2749160\,n$

$\phantom{\text{Compl.}} 0{,}8596839$

[$\cos i . \operatorname{cotang}(V-\Omega) =$] $\quad 2{,}6184398$

[$\frac{\sin i . \sin(\alpha - V)}{\sin(V-\Omega) . \operatorname{tang}\beta} =$] $\quad 7{,}2390833$ [**)]

[$\operatorname{cotang}(v-\Omega) = -$]$4{,}6206435$

[log =] $\quad 0{,}6647025$ [n]

$v - \Omega = -12^0\ 12'\ 41''85$

[$\Omega =$] $\quad 81\ 27\ 4\ 62$

$v = \quad 69\ 14\ 22\ 77$

$\sin(\alpha - \Omega) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 0{,}47136368$

$\log\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg} i} = 9{,}4629050\,n \ldots - 0{,}29033867$ [***)] $\log\sin(V-\Omega) = 9{,}5461454\,n$

[Differenz =] $-0{,}18102501 \ldots\ldots\ldots\ldots \log = 9{,}2577386\,n$

$0{,}2884068$

[$\log R =$]$9{,}9926317$

$\log\Delta = 0{,}2810385$

[*) Diese Beispiele beziehen sich auf Piazzis Beobachtungen der Ceres, vergl. S. 239.]

[**) Der richtige Wert ist bei Anwendung 7-stelliger Tafeln 7,2390883.]

[***) Der genaue Wert ist bei Anwendung 7-stelliger Tafeln 0,29033873.]

$$\log \Delta = 0{,}281\,0385$$
$$\log \operatorname{tg} \beta = 8{,}725\,0840\,n$$
$$\mathrm{C}.\log \sin i = 0{,}744\,9649$$
$$\mathrm{C}.\log \sin (v - \Omega) = 0{,}674\,6422\,n$$
$$\log r = 0{,}425\,7296$$

[S. 7]

II. [zweite Beobachtung].

$V = 322^\circ\,35'\;\;5''89$	$\log R = 9{,}994\,5823$
$\alpha = \;\;56\;\;26\;\;43''70$	$\log \operatorname{tg} \beta = 8{,}020\,1510\,n$
$\Omega = \;\;81\;\;27\;\;\;4''62$	$\log \operatorname{tg} i = 9{,}262\,1790$

[Die Rechnung ergab]

$$[v =]\,78^\circ\,26'\,32''49$$
$$\log \Delta = 0{,}374\,1524$$
$$\log r = 0{,}419\,1792.$$

[S. 8]

III. [dritte Beobachtung].

$V = 302^\circ\,21'\,29''24$	$\log R = 9{,}993\,1886$
$\alpha = \;\;53\;\;39\;\;\;2''62$	$\log \operatorname{tg} \beta = 8{,}474\,2601$
$\Omega = \;\;81\;\;27\;\;\;4''62$	$\log \operatorname{tg} i = 9{,}262\,1790.$

[Die Rechnung ergab]

$$[v =]\,73^\circ\,48'\,36''17\,[^*)]$$
$$\log \Delta = 0{,}327\,2519$$
$$[\log r =]\,0{,}422\,7241\,[^{**})].$$

[*) Später verbessert in] $35''77$.
[**) Die letzten drei Dezimalen später verbessert in] 177.

[2.]

[S. 9]

Vorschriften,
um aus
dreien Längen in der Bahn v, v', v'' und
den correspondirenden Abständen r, r', r''
abzuleiten:
die Bestimmungsstücke des Kegelschnitts, nemlich
h[alben] Parameter p, Eccentricität e,
halbe grosse Axe a, Länge des Aphelium ω,
h[albe] kleine Axe b.

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\dfrac{\sin \frac{1}{2}(v''-v') \sin \frac{1}{2}(v''+v')}{r} + \dfrac{\sin \frac{1}{2}(v'-v) \sin \frac{1}{2}(v'+v)}{r''} - \dfrac{\sin \frac{1}{2}(v''-v) \sin \frac{1}{2}(v''+v)}{r'}}{\dfrac{\sin \frac{1}{2}(v''-v') \cos \frac{1}{2}(v''+v')}{r} + \dfrac{\sin \frac{1}{2}(v'-v) \cos \frac{1}{2}(v'+v)}{r''} - \dfrac{\sin \frac{1}{2}(v''-v) \cos \frac{1}{2}(v''+v)}{r'}}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks wird

$$= 2\frac{e}{p} \sin \tfrac{1}{2}(v''-v') \sin \tfrac{1}{2}(v'-v) \sin \tfrac{1}{2}(v''-v) . \sin \omega,$$

der Nenner

$$= 2\frac{e}{p} \sin \tfrac{1}{2}(v''-v') \sin \tfrac{1}{2}(v'-v) \sin \tfrac{1}{2}(v''-v) . \cos \omega.$$

Auch leitet man, durch eine leichte Betrachtung, hieraus folgende zur Rechnung bequemere Formeln ab

$$2\frac{er'}{p} \sin \{\omega - \tfrac{1}{2}(v+v'')\} \sin \tfrac{1}{2}(v''-v) = \frac{r'}{r} - \frac{r'}{r''} = A,$$
$$2\frac{er'}{p} \cos \{\omega - \tfrac{1}{2}(v+v'')\} \sin \tfrac{1}{2}(v''-v)$$
$$= \left(\frac{r'}{r} - 1\right) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(v'-v) - \left(1 - \frac{r'}{r''}\right) \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(v''-v') = B,$$

woraus man also zugleich ω und $\frac{e}{p}$ ableitet. Man kann aus dieser Formel auch zwei andre ähnliche ableiten, indem man v' und r' mit v'' und r'', oder mit v und r vertauscht.

[S. 10] Endlich findet man p entweder durch eine von folgenden Formeln

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{r}+\frac{e}{p}\cos(v-\omega)=\frac{1}{r'}+\frac{e}{p}\cos(v'-\omega)=\frac{1}{r''}+\frac{e}{p}\cos(v''-\omega)$$

oder unmittelbar durch diese

$$\frac{1}{p}=\frac{\frac{1}{r}\sin(v''-v')+\frac{1}{r''}\sin(v'-v)-\frac{1}{r'}\sin(v''-v)}{4\sin\frac{1}{2}(v'-v)\sin\frac{1}{2}\sin(v''-v')\sin\frac{1}{2}(v''-v)}.$$

Setzt man $e=\sin\varphi$, so ist $b=\frac{p}{\cos\varphi}$ $a=\frac{p}{\cos\varphi^2}$ [*)].

Beispiel.

$v\ \ =69^0\,14'\,22''77$	$\log\frac{1}{r}=9{,}574\,2704$	$\frac{r'}{r}=0{,}993\,144\,633$ [**)]
$v'\ =73\ \ 48\ \ 36''17$	$\log\frac{1}{r'}=9{,}577\,2579$[**)]	$\frac{r'}{r''}=1{,}008\,237\,624$ [**)]
$v''=78\ \ 26\ \ 32''49$	$\log\frac{1}{r''}=9{,}580\,8208$	

$\log\left(\frac{r'}{r}-1\right)=7{,}836\,0307\,n$	$\log\left(1-\frac{r'}{r''}\right)=7{,}915\,8020\,n$
$\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(v'-v)=1{,}398\,9691$	$\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(v''-v')=1{,}393\,1182$
$9{,}234\,9998\,n$	$9{,}308\,9202\,n$
$-0{,}171\,79075$	
$-0{,}203\,66677$	
$B=+0{,}031\,87602$	
$\log B=8{,}503\,4641$	$\log\frac{1}{2}B=8{,}202\,4341$
$\log A=8{,}178\,7753\,n$	$\log\cos(\omega-\frac{1}{2}(v+v''))=9{,}956\,0750$
[$\log\operatorname{cotg}(\omega-\frac{1}{2}(v'+v''))=$] $9{,}675\,3112\,n$	$8{,}246\,3591$
	$\log\sin\frac{1}{2}(v''-v)=8{,}904\,2957$
$\omega-\frac{1}{2}(v+v'')=-25^0\,20'\,13''58$	$9{,}342\,0634$
[$\frac{1}{2}(v+v'')=$] $73\ \ 50\ \ 27''63$	$\log r'=0{,}422\,7421$
$\omega=\ \ 48^0\,30'\,14''05$	$\log\frac{e}{p}=8{,}919\,3213$

[*) In diesen Formeln wurde ein Schreibfehler verbessert.]

[**) Nach S. 234 ist $\log\frac{1}{r'}=9{,}577\,2759$; auch die Werte von $\frac{r'}{r}$ und $\frac{r'}{r''}$ zeigen Unstimmigkeiten.]

[S. 11]

$\log\frac{e}{p}=$	$8{,}919\,3213$	$8{,}919\,3213$	$8{,}919\,3213$	
$\log\cos M=$	$9{,}970\,9153$	$9{,}956\,1861$	$9{,}937\,7996$	[$M=v-\omega$]
	$8{,}890\,2366$	$8{,}875\,5074$	$8{,}857\,1209$	
[$\log\frac{1}{r}=$]	$9{,}574\,2704$	$9{,}577\,2579$	$9{,}580\,8208$	
[$\log\left(r\cdot\frac{e}{p}\cos M\right)=$]	$9{,}315\,9662$	$9{,}298\,2495$	$9{,}276\,3001$	
[Numerus =]	$0{,}206\,9980$	$0{,}198\,7236$	$0{,}188\,9297$	
[$\log\frac{r}{p}=$]	$0{,}081\,7066$	$0{,}078\,7190$	$0{,}075\,1562$	
$\log\frac{1}{p}=$	$9{,}655\,9770$	$9{,}655\,9769$	$9{,}655\,9770$	
$\log\frac{e}{p}=$	$8{,}919\,3213$			
$\log e=$	$9{,}263\,3443$	$\varphi=10^0\,33'\,59''43$	$\log\cos\varphi=9{,}992\,5724$	

$p\ \ldots\ldots\ 0{,}344\,0230$
$b\ \ldots\ldots\ 0{,}351\,4506$
$a\ \ldots\ldots\ 0{,}358\,8782.$

[3.]

Vorschriften,

um aus

Eccentricität $=e=\sin\varphi$, und wahrer Anomalie $=M$

abzuleiten

eccentrische Anomalie $=E$, und mittlere Anomalie $=N$

I. $$\operatorname{tang}\frac{1}{2}E=\operatorname{tang}\frac{1}{2}M\operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi),$$

II. $$N=E+\sin E\sin\varphi.$$

Ist zugleich der Abstand r bekannt und a, b, p, so bedient man sich öfters mit Vortheil folgender Formeln:

$$\sin E=\sin M\cdot\frac{r}{b},$$

$$\cos E=\frac{r}{a}\cos M-e=\frac{r}{p}(\cos M-e)=\frac{\cos M-e}{1-e\cos M}.$$

[S. 12] Auch folgende Formeln sind sehr brauchbar:

I. $$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(E-M)=\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi}{\sin M}-\operatorname{cotg}M,$$

$$\text{II.}\qquad \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(E'-E) = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(M'-M)}{\cos\varphi} - \frac{\operatorname{tang}\varphi\cos\frac{1}{2}(M'+M)}{\sin\frac{1}{2}(M'-M)},$$

$$\text{III.}\qquad \sin(E'-E) = \frac{rr'}{ab}\sin(M'-M)\cdot\{-N'+N+E'-E\}.$$

Beispiele.

I.

$v = 69^0\,14'\,22''77$	$\varphi = 10^0\,33'\,59''43$	
$\omega = 48\;\;30\;\;14''05$	$45^0 + \frac{1}{2}\varphi = 50\;\;16\;\;59''715$	
$M = 20^0\,44'\;\;8''72$		Contrôle
$\frac{1}{2}M = 10\;\;22\;\;\;4''36$	$\log\sin E = 9{,}623\,3539$	$\log\sin M = 9{,}549\,0749$
$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}M = 9{,}262\,3440$	$\log\sin\varphi = 9{,}263\,3443$	$\log r = 0{,}425\,7296$
$\log\operatorname{tg}(45^0+\frac{1}{2}\varphi) = 0{,}080\,5506$	$8{,}886\,6982$	$\mathrm{C.}\log b = 9{,}648\,5494$
$[\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}E] = 9{,}342\,8946$	$\log 1'' = 4{,}685\,5749$	$[\log\sin E =]\,9{,}623\,3539$
$\frac{1}{2}E = 12^0\,25'\,13''763$	$4{,}201\,1233$	
$E = 24\;\;50\;\;27''526$	$15\,899''978 = 4^0\,24'\,59''978$ [*)]	
$+\;\;4\;\;24\;\;59''978$		
$N = 29^0\,15'\,27''50$		

II.

$v = 73^0\,48'\,36''17$	[die Rechnung ergab]	$E = 30^0\,14'\,45''012$
$\omega = 48\;\;30\;\;14''05$		$N = 35^0\,32'\,17''47$
$M = 25^0\,18'\,22''12$		

[S. 13]

III.

$v = 78^0\,26'\,32''49$	[die Rechnung ergab]	$E = 35^0\,40'\,56''998$
$\omega = 48\;\;30\;\;14''05$		$N = 41^0\,48'\,39''71$
$M = 29^0\,56'\,18''44.$		

[4.]

Vorschrift

zur Bestimmung der Zeit, in welcher eine gegebne mittlere Bewegung geschieht.

Diese erhält man in Tagen, wenn man die mittlere Bewegung mit $a^{3/2}$ multiplicirt, und das Product mit der tägl[ichen] mittlern Bewegung der Sonne dividirt. Diese ist $3548''19223$, $\log = 3{,}550\,0071$.

[*) Dieser Wert beruht auf einem Versehen; er sollte lauten: $15\,889''978 = 4^0\,24'\,49''978$. Er wurde nicht verbessert, weil damit das Beispiel in der folgenden Nr. [4.] gerechnet worden ist.]

Beispiele.

$N\;\, = 29^0\,15'\,27''50$		$\log a = 0{,}358\,8782$
$N' = 35\;\;32\;\;17''47$	$N' - N = 6^0\,16'\,49''97 = 22\,609''97$	$[\frac{3}{2}\log a = 0{,}538\,3173]$
$N'' = 41\;\;48\;\;39''71$	$N'' - N' = 6\;\;16\;\;22''24 = 22\,582''24$	$[\mathrm{C.}\log 3548''\ldots =]\,6{,}449\,9929$
		$6{,}988\,3102$

$\log(N'-N) = 4{,}354\,3000$	$\log(N''-N') = 4{,}353\,7670$
$6{,}988\,3102$	$6{,}988\,3102$
$1{,}342\,6102$	$1{,}342\,0772$
$22^{\mathrm{d}}\,009\,5025$	$21^{\mathrm{d}}\,982\,505$

[5.]

[S. 14]

Hätte man in obigen Beispielen $\log\operatorname{tg} i = 9{,}267\,1790$ vorausgesetzt, so würde man folgende Resultate erhalten haben:

$$\begin{aligned} v - \Omega &= 12^0\;\;0'\,17''22 \\ v &= 69\;\;26\;\;47''40 \\ \log\Delta &= 0{,}273\,1377 \\ \log r &= 0{,}420\,3009 \end{aligned}$$

[Hier bricht die Aufzeichnung ab.]

[6.]

[S. 16]

Sämmtliche vorstehende Beispiele beziehen sich auf den neuen von Piazzi im Anfang dieses Jahrs zu Palermo entdeckten Planeten, und zwar auf folgende drei Beobachtungen

Jan.	2,360 4699	Länge	$53^0\,19'\,44''3$	Breite	$3^0\;\;2'\,24''9$ südlich
	22,305 8067		$53\;\;39\;\;\;1''8$		$1\;\;42\;\;28''1$
	42,258 3125		$56\;\;26\;\;40''0$		$0\;\;36\;\;\;2''9.$

Die kleinen Abweichungen in obigen Annahmen [von den Piazzischen Zahlen] rühren von den wegen Aberration und Präcession der Nachtgleichen angebrachten Verbesserungen her. Zur Berechnung der Aberration sind folgende scheinbare tägliche Bewegungen gebraucht worden:

1te Beobachtung	B[ewegung] in der Länge $-179''85$	in d[er] Breite	$-256''1$
2te	$+279''2$		$-216''95$
3te	$+687''5667$		$-177''0667.$

[7.]

Durch Interpolation [aus den mit drei verschiedenen Hypothesen über i und ☊ gefundenen Resultaten] fand man sodann folgende Elemente, welche die beiden äussern Beob[achtungen] genau, die mittl[ere] mit $+1''84$ Fehler in d[er] Länge u[nd] $-2''36$ in d[er] Breite darstellen [*)].

[S. 17]

Neigung der Bahn	$10^\circ 32' 19''$	Grösste Aequ. C[entri] $= 9^\circ 32' 57''$
☊	81 8 50	$\log a = 0{,}4381058$
ω	330 14 33	temp. rev. $= 4^a 54107$
$e =$	0,08328356	mot. diurnus $= 781''355$
		long. med. Jan. 2,3604699 ... $78^\circ 25' 13''$.

[*) Vgl. Werke VI, S. 200.]

[III.]

[ZUR BAHNBESTIMMUNG DER CERES.]

[Aus Scheda Ah, S. 1—8, 10—13.]

[S. 1]

Berechnung der Bahn des neuen von PIAZZI entdeckten Planeten aus folgenden drei, von den Wirkungen der Aberration, Präcession der Nachtgleichen und den wahrscheinlichsten Beobachtungsfehlern bereits befreieten Beobachtungen.

[Ableitung der III. Elemente nach der zweiten Verbesserungsmethode.]

	[Mittlere Sonnenzeit]	[Geocentrische Länge]	[Geocentrische Breite, südlich]	[Länge d. Sonne + 20″ Aberration]	[Log. Abstand der Sonne von d. Erde]
Januar	1,3634005	$53^\circ 22' 59''9$	$3^\circ\ 6' 40''8$	$281^\circ\ 1' 30''90$	9,9926156
	21,3083647	53 34 21″9	1 46 7″0	301 20 37″55	9,9931434
	42,2583125	56 26 37″9	0 35 56″5	322 35 5″76	9,9945823.

Erste Hypothese. Ort des $\Omega = 81^\circ 2' 35''$; $i = 10^\circ 36' 30''$ [*)].

Berechnung der ersten Beobachtung.

[Formeln: $\frac{R}{\Delta} = \frac{\sin(\alpha - \Omega) - \frac{\theta}{g}}{\sin(V - \Omega)}$,

$$\frac{r}{\Delta} = \sqrt{\left(1 + \theta\theta + \frac{RR}{\Delta\Delta} - 2\frac{R}{\Delta}\cos(V - \alpha)\right)},$$

$$\operatorname{tang}(v - \Omega) = \frac{\frac{\theta}{\sin i}\operatorname{tang}(V - \Omega)}{\frac{\theta}{g} - \frac{\sin(\alpha - V)}{\cos(V - \Omega)}},$$

Zur Probe:

$$\sin(v - \Omega) = \frac{\Delta}{r}\cdot\frac{\theta}{\sin i}],$$

[*) Diese Werte entsprechen den II. Elementen; vgl. Werke VI, S. 200.]

$$V-\alpha = 227^0\,38'\,31''00$$
$$V-\Omega = 199\;\;58\;\;55''90$$
$$\alpha-\Omega = -27\;\;39\;\;35''10,$$

$\log\theta = 8{,}7352511\,[n]$ $\quad\sin(\alpha-\Omega) = [-]0{,}46421995$ $\quad\left[\log\left(\sin(\alpha-\Omega)-\frac{\theta}{g}\right)=\right] 9{,}2405548\,[n]$

$\log g = 9{,}2725272$ $\quad\left[\frac{\theta}{g} = -\right]0{,}29021772$ $\quad[\log\sin(V-\Omega) =]\ 9{,}5336807\,[n]$

$\left[\log\frac{\theta}{g} =\right] 9{,}4627239\,[n]$ $\quad[\text{Differenz} = -]0{,}17400223$ $\quad\left[\log\frac{R}{\Delta} =\right] 9{,}7068741$

$[\log R =]\ 9{,}9926156$

$[\log\Delta =]\ 0{,}2857415$

$\left[\log 2\frac{R}{\Delta} =\right] 0{,}0079041$ $\quad[1+\theta\theta =]\ 1{,}00295462$

$[\log\cos(\alpha-V) =]\ 9{,}8285063\,[n]$ $\quad\left[\frac{RR}{\Delta\Delta} =\right] 0{,}25926756$

$[\text{Summe} =]\ 9{,}8364104\,[n]$ $\quad\left[-2\frac{R}{\Delta}\cos(\alpha-V) =\right] 0{,}68613635$

$\left[\frac{rr}{\Delta\Delta} =\right] 1{,}94835853$

$\left[\log\frac{rr}{\Delta\Delta} =\right] 0{,}2896688$

$\left[\log\frac{r}{\Delta} =\right] 0{,}1448344$

$[\log\Delta =]\ 0{,}2857415$

$\log r = 0{,}4305759$

$\sin(\alpha-V)\ \ldots\ 9{,}8686143$ $\quad\operatorname{tang}(V-\Omega)\ \ldots\ 9{,}5606458$

$\cos(V-\Omega)\ \ldots\ 9{,}9730349\,[n]$ $\quad\left[\text{C.}\log\left(\frac{\theta}{g}-\frac{\sin(\alpha-V)}{\cos(V-\Omega)}\right)=\right] 0{,}3044603$

$\left[-\frac{\sin(\alpha-V)}{\cos(V-\Omega)}\ \ldots\right] 9{,}8955794$ $\quad\left[\frac{\theta}{\sin i}\ \ldots\right] 9{,}4702108\,[n]$

$[\text{Numerus} =]\ 0{,}78628393$ $\quad[\operatorname{tg}(v-\Omega)\ \ldots]\ 9{,}3353169\,[n]$

$\left[\frac{\theta}{g} = -\right] 0{,}29021772$ $\quad[\cos(v-\Omega)\ \ldots]\ 9{,}9900595$

$\left[\frac{\theta}{g}-\frac{\sin(\alpha-V)}{\cos(V-\Omega)} =\right] 0{,}49606621$ $\quad[\sin(v-\Omega)\ \ldots]\ 9{,}3253764\,[n]$

$[v-\Omega = -]\ 12^0\,12'\,43''76$

$[\Omega =]\ \ 81\;\;2\;\;35''00$

$v = \ \ 68\;\;49\;\;51''24.$

[Zur Probe:] $\quad\left[\frac{\theta}{\sin i}\ \ldots\right] 9{,}4702108\,[n]$

$\left[\frac{r}{\Delta}\ \ldots\right] 0{,}1448344$

$[\sin(v-\Omega)\ \ldots]\ 9{,}3253764\,[n].$

Zweite Beobachtung.

$V-\alpha = 247^0\,46'\,15''65$ $\quad[\log\Delta =]\ 0{,}3319954$

$V-\Omega = 220\;\;18\;\;2''55$ $\quad$ [Die Rechnung ergab:] $\quad[v =]\ 73^0\,19'\,11''47$

$\alpha-\Omega = -27\;\;28\;\;13''10$ $\quad\log r = 0{,}4282441.$

[S. 2] Dritte Beobachtung.

$V-\alpha = 266^0\;\;8'\,27''86$ $\quad[\log\Delta =]\ 0{,}3818140$

$V-\Omega = 241\;\;32\;\;30''76$ $\quad$ [Die Rechnung ergab:] $\quad[v =]\ 78^0\,5'\,59''16$

$\Omega-\alpha = 24\;\;35\;\;57''10$ $\quad\log r = 0{,}4255949.$

[S. 2 u. 10] Berechnung der Bahn aus den beiden äussern Beobachtungen.

	[Mittlere Sonnenzeit]	[v]	[$\log r$]	[$2\log r$]	[rr]
[Januar]	1,3634005	$68^0\,49'\,51''24$	0,4305759	0,8611518	7,263598333
	42,2583125	$78\;\;5\;\;59''16$[*)]	0,4255949	0,8511898	7,098880645
[$t''-t =$]	40,8949120	[$v''-v =$] $9^0\,16'\;\;7''92$			[$\frac{1}{2}(rr+r''r'' =$] 7,181239489

$[=]\ 33367''92$

$[\tfrac{1}{2}(v''-v) =]\ 4^0\,38'\,3''96$

$[\tfrac{1}{4}(v''-v) =]\ 2\;\;19\;\;1''98.$

[Formeln:

$$\sqrt{p} = \tfrac{1}{2}(rr+r''r'')\frac{v''-v}{U''-U},$$

$$p \text{ genauer} = \left(\tfrac{1}{2}(rr+r''r'')\frac{v''-v}{U''-U}\right)^2\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2\mathfrak{R}\mathfrak{R}}{rr+r''r''}\right)^4},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r''}\right)+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r''}\right)-\frac{1}{p}\right)\frac{2\sin\frac{1}{4}(v''-v)^2}{\cos\frac{1}{2}(v''-v)},$$

[*) In der Handschrift steht infolge eines Schreibfehlers: $78^0\,5'\,19''16$; Gauss hat zunächst die Rechnung mit diesem irrtümlichen Wert durchgeführt; die richtige Rechnung steht auf S. 10 ff. der Scheda. Nach der letztern wurden alle Zahlen verbessert.]

$$\frac{e}{p}\sin\left(\tfrac{1}{2}(v''+v)-\omega\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r}\right)}{\sin\frac{1}{2}(v''-v)},\qquad \frac{e}{p}\cos\left(\tfrac{1}{2}(v''+v)-\omega\right)=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r}\right)}{\cos\frac{1}{2}(v''-v)},$$

$$b=\frac{p}{\cos\varphi},\qquad a=\frac{p}{\cos\varphi^2},$$

$$\text{mot. diurn. med.}=\frac{\text{mot. diurn.}\odot\text{med.}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

$$M=v-\omega,\qquad M''=v''-\omega,$$

$$\tfrac{1}{2}(E-M)=\arcsin\left\{\sin M\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\sqrt{\tfrac{r}{p}}\right\}\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}M\ \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\varphi+45^0),$$

zur Probe

$$\tfrac{1}{2}(E''-M'')=\arcsin\left\{\sin M''\sin\tfrac{1}{2}\varphi\cdot\sqrt{\tfrac{r''}{p}}\right\}\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E''=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}M''\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\varphi+45^0),$$

$$N-E=\sin\varphi\sin M\cdot\frac{r}{b},\quad N''-E''=\sin\varphi\sin M''\cdot\frac{r''}{b},\quad t''-t=\frac{N''-N}{\text{mot. diurn. med.}}.]$$

$[t''-t\ldots]\ 1{,}611\,6693$ $\qquad$ $[\tfrac{1}{2}(rr+r''r'')\ldots]\ 0{,}856\,1994$

$[\text{mot. med.}\odot\text{diurn.}]\ \underline{3{,}550\,0071}$ $\qquad$ $\left[\frac{U''-U}{v''-v}\ldots\right]\ \underline{0{,}638\,3472}$

$[U''-U\ldots]\ 5{,}161\,6764$ $\qquad$ $[(\sqrt{p})\ldots]\ 0{,}217\,8522$

$[v''-v\ldots]\ \underline{4{,}523\,3292}$ $\qquad$ $[(p)\ldots]\ 0{,}435\,7044$

$\left[\frac{U''-U}{v''-v}\ldots\right]\ 0{,}638\,3472$ $\qquad$ $\left[\sqrt[3]{\left(\frac{2\mathfrak{R}\mathfrak{R}}{rr+r''r''}\right)^4}\ldots\right]\ \underline{\quad-1223}$ [*)]

Parameter $[p\ldots]\ 0{,}435\,5821$

$\left[\frac{1}{r}\ldots\right]9{,}569\,4241\,[=]\,0{,}371\,042\,906$ $\qquad$ $[2\sin\tfrac{1}{4}(v''-v)^2\ldots]\ 7{,}514\,4812$ $\qquad$ $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r''}\right)-\frac{1}{p}\ldots\right]\ 7{,}805\,6761$

$\left[\frac{1}{r''}\ldots\right]9{,}574\,4051\,[=]\,\underline{0{,}375\,322\,931}$ $\qquad$ $[\cos\tfrac{1}{2}(v''-v)\ldots]\ \underline{9{,}998\,5777}$ $\qquad$ $\left[\frac{2\sin\frac{1}{4}(v''-v)^2}{\cos\frac{1}{2}(v''-v)}\ldots\right]\ \underline{7{,}515\,9035}$

$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r''}\right)=\right]0{,}373\,182\,9185$ $\qquad$ [Diff.] $7{,}515\,9035$ $\qquad$ [Summe $\ast$] $5{,}321\,58$

$\left[\frac{1}{p}=\right]0{,}366\,790\,339$

$[\mathfrak{R}\ldots]\ 0{,}428\,05386$

$[\mathfrak{R}\mathfrak{R}\ldots]\ 0{,}856\,1077$

$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r''}\right)=\right]\ 0{,}373\,182\,918$ $\qquad$ $[\tfrac{1}{2}(rr+r''r'')\ldots\ 0{,}856\,1]994$

$[\ast=]\ \underline{\qquad 20\,969}$ $\qquad$ $\left[\frac{1}{2}\frac{rr+r''r''}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}}\ldots\ 0{,}000\,0\right]917$

$\left[\frac{1}{\mathfrak{R}}=\right]\ 0{,}373\,203\,887$ $\qquad$ $\left[\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\frac{rr+r''r''}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}}\right)}\ldots\ \underline{0{,}000\,0}\right]\underline{306}$

$\left[\frac{1}{\mathfrak{R}}\ldots\right]\ 9{,}571\,946\,14$ $\qquad$ $\left[\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\frac{rr+r''r''}{\mathfrak{R}\mathfrak{R}}\right)^4}\ldots\ 0{,}000\,1223\right]$

[*) Dieser Wert folgt aus der untenstehenden letzten Annäherung zur Bestimmung von p; auch in der Handschrift ist nur diese, nicht auch die vorhergehenden Annäherungen, aufgezeichnet; der zuerst gefundene Näherungswert von p ist mit (p) bezeichnet.]

$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r''}-\frac{1}{r}\right)=\right]\ 0{,}002\,140\,0125$

$[\ldots]\ 7{,}330\,4163$

$[\sin\tfrac{1}{2}(v''-v)\ldots]\ \underline{8{,}907\,4003}$

$\left[\frac{e}{p}\sin(\tfrac{1}{2}(v''+v)-\omega)\ldots\right]\ 8{,}423\,0160$

$[\sin(\tfrac{1}{2}(v''+v)-\omega)\ldots]\ \underline{9{,}987\,6267}$

$\left[\frac{e}{p}\ldots\right]\ 8{,}435\,3893$

$[p\ldots\ 0{,}]\underline{435\,5821}$

$[e=\sin\varphi\ldots]\ 8{,}870\,9714$

$[\tfrac{1}{2}\sin\varphi\ldots]\ 8{,}569\,9414$

$[\cos\tfrac{1}{2}\varphi\ldots]\ \underline{9{,}999\,6997}$

$\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi=8{,}570\,2417$ [*)]

$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r''}+\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{p}=0{,}00\right]6\,392\,5795$

$[\ldots]\ 7{,}805\,6761$

$[\cos\tfrac{1}{2}(v''-v)\ldots]\ \underline{9{,}998\,5777}$

$\frac{e}{p}\cos(\tfrac{1}{2}(v''+v)-\omega)\ldots\ 7{,}807\,0984\,[n]$

$\frac{e}{p}\sin(\tfrac{1}{2}(v''+v)-\omega)\ldots\ \underline{8{,}423\,0160}$

$[\operatorname{cotang}(\tfrac{1}{2}(v''+v)-\omega)\ldots]\ 9{,}384\,0824\,[n]$

$\varphi=4^0\,15'\,39''00$

$\tfrac{1}{2}\varphi=2\quad 7\ 49''50$

$[\tfrac{1}{2}(v''+v)-\omega)=]\ 103^0\,36'\,43''53$

$[\tfrac{1}{2}(v''+v)=]\ \underline{\ 73\ \ 27\ \ 55''20}$

$[\omega=]\ 329\ \ 51\ \ 11''67$

$[\tfrac{1}{2}(v''+v)-\omega=]\ 103^0\,36'\,43''53$

$[\tfrac{1}{2}(v''-v)=]\ \underline{\ \ 4\ \ 38\ \ \ 3''96}$

$[M=v-\omega]\ \ 98\ \ 58\ \ 39''57$

$[M''=v''-\omega]\ 108\ \ 14\ \ 47''49$

$p\ldots\ 0{,}435\,5821$

$b\ldots\ 0{,}436\,7841$

$a\ldots\ 0{,}437\,9861$

$[\sqrt{a}\ldots]\ 0{,}218\,9930$

$[a^{3/2}\ldots]\ 0{,}656\,9791$

$[\text{mot. diurn.}\odot\text{med. } 3{,}]\underline{550\,0071}$

$[\text{mot. diurn. med.}]\ 2{,}893\,0279$

[Zur Probe von E und E'']

[S. 3 u. 10] $[\sin M\ldots]\ 9{,}994\,6467$

$[\sin\tfrac{1}{2}\varphi\ldots]\ \underline{8{,}570\,2417}$

[Summe] $8{,}564\,8884$

$\left[\sqrt{\frac{r}{p}}\ldots\right]\underline{-\quad 2\,5031}$

$[\sin\tfrac{1}{2}(E-M)=]\ 8{,}562\,3853$

$[\tfrac{1}{2}(E-M)=2^0\,5'\,31''94$

$[\sin M''\ldots]\ 9{,}977\,5947$

$[\sin\tfrac{1}{2}\varphi\ldots]\ \underline{8{,}570\,2417}$

[Summe] $8{,}547\,8364$

$\left[\sqrt{\frac{r''}{p}}\ldots\right]\underline{-\quad 4\,9936}$

$[\sin\tfrac{1}{2}(E''-M'')]\ldots\ 8{,}542\,8428$

$[\tfrac{1}{2}(E''-M'')=]\ 2^0\,0'\,0''39$

$[\tfrac{1}{2}M=]\ 49^0\,29'\,19''785$

$[\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\varphi+45^0)\ldots]\ 0{,}032\,3264$

$[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M\ldots]\ \underline{0{,}068\,3297}$

$[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E\ldots]\ 0{,}100\,6561$

$[\tfrac{1}{2}M''=]\ 54^0\,7'\,23''745$

$[\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\varphi+45^0)\ldots]\ 0{,}032\,3264$

$[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M''\ldots]\ \underline{0{,}140\,7051}$

$[\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}E''\ldots]\ 0{,}173\,0315$

[*) Anscheinend nach der Formel $\sin\frac{1}{2}\varphi=\frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$ gerechnet.]

[sin M...] 9,994 6467	[sin M''] 9,977 5947	[E =] 103° 9′ 43″45
[r...] 0,430 5759	[r''] 0,425 5949	[$N-E$ =] 4 8 42″27
[r sin M...] 0,425 2226	[r'' sin M''...] 0,403 1896	[N =] 107 18 25″72
[b...] 0,436 7841	[b...] 0,436 7841	
[Diff.] 9,988 4385	[Diff....] 9,966 4055	[E'' =] 112° 14′ 48″27
[sin φ (in Sek.)...] 4,185 3965	... 4,185 3965	[$N''-E''$ =] 3 56 24″11
[$N-E$...] 4,173 8350	[$N''-E''$...] 4,151 8020	[N'' =] 116 11 12″38
= 14 922″27	= 14 184″11	[N =] 107 18 25″72
		[$N''-N$ =] 8 52 46″66
		= 31 966″66

[$N''-N$...] 4,504 6973
[mot. diurn. med. ...] 2,893 0280
[$T = t''-t$...] 1,611 6693.

[Die berechnete Zwischenzeit T stimmt mit der beobachteten überein; die Rechnung braucht also nicht mit einem verbesserten Werte von p wiederholt zu werden und die gefundenen Elemente genügen den beiden äussern Beobachtungen genau.]

Berechnung der mittlern Beobachtung.

[S. 3 u. 11] [$\frac{1}{2}(t''+t)$ = Januar] 21,810 8565	[$\frac{1}{2}(N''+N)$ =] 111° 44′ 49″05
[t' =] 21,308 3647	− 6 32″79
[$\frac{1}{2}(t''+t)-t'$ =] 0,502 4918	[N' =] 111 38 16″26
[...] 9,701 1290	
[mot. diurn. med. ...] 2,893 0280	
[$\frac{1}{2}(N''+N)-N'$...] 2,594 1570	
= 392″79.	

[Nach den Formeln:

$$E' = N' - e\sin E',$$
$$r' = a(1+e\cos E'),$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(E'-M') = \sin E' \sin\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{\tfrac{a}{r'}},$$
$$v' = M' + \omega$$

ergibt sich sodann:]

log r' = 0,428 1295 v' = 73° 19′ 29″52
Fehler = − 1146 Fehler = + 18″05.

[S. 4] **Zweite Hypothese** Ω = 80° 55′ 18″ i = 10° 39′ 26″.

Erste Beobachtung.

$V-\alpha$ = 227° 38′ 31″0		[log Δ =] 0,289 5514
$V-\Omega$ = 200 6 12″9	[Die Rechnung ergab:]	v = 68° 43′ 56″42
$\alpha-\Omega$ = −27 32 18″1		[log r =] 0,433 2122.

Zweite Beobachtung.

$V-\alpha$ = 247° 46′ 15″65		[log Δ =] 0,334 7027
$V-\Omega$ = 220 25 19″55	[Die Rechnung ergab:]	v = 73° 13′ 18″71
$\alpha-\Omega$ = −27 20 56″10		[log] r = 0,430 2870.

Dritte Beobachtung.

$V-\alpha$ = 266° 8′ 27″86		[log Δ =] 0,384 3225
$V-\Omega$ = 241 39 47″76	[Die Rechnung ergab:]	[v =] 77° 59′ 20″55
$\alpha-\Omega$ = −24 28 40″10		[log r =] 0,427 7033.

[S. 5] Berechnung der Bahn aus den äussern Beobachtungen.

[$\frac{1}{2}(rr+r''r'')$...] 0,860 9506	[$\frac{e}{p}\cos(\frac{1}{2}(v''+v)-\omega)$...] 8,054 6093	[M =] 106° 36′ 49″48
[$\frac{U''-U}{v''-v}$...] 0,638 9176	[$\frac{e}{p}\sin(\frac{1}{2}(v''+v)-\omega)$...] 8,464 9725	[M'' =] 115 52 13″61
[($\sqrt{p}$)...] 0,222 0330	[cotang ($\frac{1}{2}(v''+v)-\omega$)...] 9,589 6368 [$n$]	[E =] 111 20 12″13
[(p)...] 0,444 0660	[$\frac{1}{2}(v''+v)-\omega$ =] 111° 14′ 31″545	[E'' =] 120 16 37″27
[$\sqrt[3]{\left(\frac{2\mathfrak{R}\mathfrak{R}}{rr+r''r''}\right)^4}$...] − 1855	[ω =] 322 7 6″94	[N =] 115 58 42″98
[p...] 0,443 8805	[$\frac{e}{p}$...] 8,495 5296	[N'' =] 124 34 50″67
[$\mathfrak{R}$...] 0,429 3744	[$e = \sin\varphi$...] 8,939 4101	[$N''-N$ =] 8° 36′ 7″69
	b... 0,445 5295	[... 4,]490 9088
	a... 0,447 1785	[mot. diurn. med. ... 2,]879 2394
	[mot. diurn. med. ... 2,]879 2394	[$T = t''-t$... 1,]611 6694.

[Die Zwischenzeit T stimmt auch hier mit der beobachteten überein.]

[S. 6] **Berechnung der mittlern Beobachtung.**

[Die Rechnung ergab] $\log r' = 0{,}430\,4911$ $[v =]\ 73^{0}\,13'\,3''335$

Fehler $=$ $+2041$ Fehler $=$ $-15''375.$

Dritte Hypothese $\Omega = 80^{0}\,55'\,18''$ $i = 10^{0}\,36'\,30''.$

[Die Rechnung ergab:]

	Erste Beobachtung	[Zweite Beobachtung]	[Dritte Beobachtung]
[$\log \Delta$]	0,292 9753	0,335 8423	0,384 6397
[v]	$68^{0}\,38'\,45''31$	$73^{0}\,10'\,53''70$	$77^{0}\,58'\,31''\,18$
[$\log r$]	0,435 5885	0,431 1483	0,427 9709.

[S. 7] [Die] Berechnung der Bahn aus den äussern Beobachtungen [und die Berechnung der mittleren Beobachtung ergab

Fehler in $\log r' = +6639$ Fehler in $v' = -99''45.$]

[S. 8. u. 11] **Fehler der drei Hypothesen.**

			[Δr]	[Δv]
III	Ω	i	$+6639$	$-99''45$
I	$\Omega+437''$	i	-1146	$-18''05$
II	Ω	$i+176''$	$+2041$	$-15''375.$

[Aus den Fehlern der Hypothesen III und I schliesst man:

$$\frac{\partial \Delta r}{\partial \Omega} = -\frac{7785}{437} \text{ und } \frac{\partial \Delta v}{\partial \Omega} = \frac{11750}{437}$$

und aus denen der Hypothesen III und II:

$$\frac{\partial \Delta r}{\partial i} = -\frac{4598}{176} \text{ und } \frac{\partial \Delta v}{\partial i} = \frac{8407{,}5}{176}.$$

Bestimmt man sodann die an die Hypothese III anzubringenden Correctionen Δi und $\Delta \Omega$ aus der Gleichung

$$\Delta r = -\frac{\partial \Delta r}{\partial \Omega}\Delta\Omega - \frac{\partial \Delta r}{\partial i}\Delta i,$$

$$\Delta v = -\frac{\partial \Delta v}{\partial \Omega}\Delta\Omega - \frac{\partial \Delta v}{\partial i}\Delta i,$$

so wird diese Gleichung*)]

$$6639 = 7785x + 4598y,$$

$$9945 = 11750x + 8407{,}5y,$$

[wo $x = \frac{\Delta\Omega}{437''}$ und $y = \frac{\Delta i}{176''}$ gesetzt ist.

Die Auflösung ergibt]

$\log x = 9{,}9\,460\,893$ [$\log y = 8{,}7\,125n$],

[also

$\Delta\Omega =]\ 385''99$ [$\Delta i = -9''08$].

[Es ergibt sich]

$80^{0}\,55'\,18''$	$10^{0}\,36'\,30''$
$6\ \ 26$	$-9''08$
[$\Omega =$] 81 1 44	[$i =$] 10 36 20''92.

[S. 12 u. 13] [Mit diesen Werten als] Vierte Hypothese [wurde die] Berechnung der Bahn [von neuem ausgeführt und die III. Elemente gefunden**).]

BEMERKUNGEN.

Die ältesten im Nachlaß erhaltenen GAUSSschen Rechnungen und Notizen zur Bahnbestimmung, insbesondere für Ceres, finden sich in den Schedae Ag und Ah, sowie im Handbuch Bb, und zwar in den ersten beiden vorzugsweise die numerischen Rechnungen, im letzteren dagegen nur Formelentwicklungen; sie stammen aus dem November 1801, sodaß also die allerersten Untersuchungen aus dem September und Oktober (vergl. das *Tagebuch* No. 119 u. 121, Werke X 1, S. 561, 563) verloren gegangen sind. Man wird aber in der Notiz [I.], oben S. 221 ff., die auf den ersten Seiten des Handbuchs Bb unter der Überschrift »Erste Abhandlung« steht, einen Niederschlag der in der Tagebuchnotiz No. 121 erwähnten »permultae formulae« erblicken dürfen.

Die Notiz [II.], oben S. 232 ff., steht in der Scheda Ag. Die Zahlenbeispiele bilden die fortlaufende Rechnung zur Ableitung der I. Elemente der Ceres, die GAUSS an v. ZACH schickte (Werke VI, S. 200 f.). Die vorausgesetzten Werte von i und Ω sind vielleicht einer noch früheren, verloren gegangenen Originalrechnung***) entnommen; bemerkenswert ist, daß GAUSS von der hier angewandten »Dritten Verbesserungsmethode« (siehe S. 229) später in der *Theoria motus*, art. 82 (vergl. auch art. 126) sagt, daß sie »orbitae dimensiones eruendi magnam praecisionen nunquam admittet, nisi tria loca heliocentrica intervallis considerabilibus ab invicem distent«.

[*) Vgl. *Theoria motus*, art. 120—122.]

[**) Vgl. Werke VI, S. 201.]

***) GAUSS sagt in der Einleitung zur *Theoria motus* (Werke VII, 1906, S. 8), daß er die erste Bahnbestimmung der Ceres im Oktober 1801 gemacht habe.

Die Notiz [III.], oben S. 241 ff., steht in der Scheda Ah; es ist dies das Original der Berechnung der Ceres-Elemente III. durch Verbesserung der Elemente II. Die numerischen Rechnungen sind beim Abdruck gekürzt worden, insbesondere wurden die bei drei Beobachtungen gleichlautenden Rechnungen nur bei der ersten Beobachtung ausführlich abgedruckt.

Wie GAUSS nicht nur in der Einleitung zur *Theoria motus* und in einem Briefe an OLBERS vom 6. August 1802 sagt, sondern wie auch aus der Anmerkung hervorgeht, mit der VON LINDENAU die Herausgabe des ihm von GAUSS übergebenen Manuskripts *Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden* (Monatl. Corresp., Sept. 1809 und Werke, Bd. VI, S. 148) begleitet hat, unterscheiden sich die Methoden der *Theoria motus* sehr wesentlich von den ältesten GAUSSschen Rechnungsweisen; die ersteren sind nach den Tagebuchnotizen No. 125—129 (Werke X 1, S. 564, 565) auch erst in den Jahren 1805/06 entstanden. Doch erwähnt GAUSS auch einige der letzteren gelegentlich in der *Theoria motus;* auf die betreffenden Parallelstellen ist oben durch Fußnoten hingewiesen. Die erwähnte *Summarische Übersicht* hatte GAUSS schon im Jahre 1802 zusammengestellt und am 6. August an OLBERS gesandt (siehe WILHELM OLBERS, *Sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 65).

In den Artikeln 124—129 der *Theoria motus* bespricht GAUSS zehn verschiedene Methoden der Bahnbestimmung; man wird bemerken, daß die unter [I.] abgedruckten Notizen [3]—[6] sich an die erste dieser Methoden, die Notiz [7] an die siebente (*Theoria motus*, art. 129, No. II) und die Notiz [8] an die achte (*Theoria motus*, art. 129, No. III) anschließt; doch fehlt bei der Notiz [8] der Hinweis, daß die Interpolation auf die verbesserten Werte durch Vergleichung der berechneten Zwischenzeiten mit den beobachteten erfolgen soll. Die Notiz [II.] schließt sich ebenfalls an die achte Methode und die Notiz [III.] an die siebente an.

Über die Ableitung der Formeln findet man das nötige teils in der *Summarischen Übersicht* teils in der *Theoria motus* an den in den Fußnoten angegebenen Stellen; nur für die Formeln a—d auf S. 222—228, die streng gelten, scheint es nicht überflüssig hier eine kurze Ableitung zu geben:

Sind x, y, z die heliozentrischen Koordinaten des Planeten, X, Y, Z die Koordinaten der Sonne in Bezug auf die Erde, U, wie bei GAUSS, die mittlere Länge der Sonne und A die halbe große Achse der Erdbahn, so hat man:

$$\frac{d^2x}{dU^2}+\frac{A^3x}{r^3}=0,\qquad \frac{d^2X}{dU^2}+\frac{A^3X}{R^3}=0; \tag{1}$$

da aber

$$x=\Delta\cos\alpha-R\cos V,\qquad X=R\cos V,\qquad x+X=\Delta\cos\alpha, \tag{2}$$

so ergibt die Summe der Gleichungen (1)

$$\frac{d^2(\Delta\cos\alpha)}{dU^2}=-A^3\left(\frac{x}{r^3}+\frac{X}{R^3}\right)=-\frac{A^3\Delta\cos\alpha}{r^3}-A^3R\cos V\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right) \tag{3}$$

und ebenso erhält man aus den den Gleichungen (1) entsprechenden Gleichungen in y, Y und z, Z, sowie aus den den Gleichungen (2) entsprechenden:

$$\begin{aligned} y&=\Delta\sin\alpha-R\sin V, & Y&=R\sin V, & y+Y&=\Delta\sin\alpha,\\ z&=\Delta.\theta, & Z&=0,\end{aligned}$$

die folgenden Parallelgleichungen zu (3):

$$\frac{d^2(\Delta\sin\alpha)}{dU^2}=-\frac{A^3\Delta\sin\alpha}{r^3}-A^3R\sin V\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right), \tag{4}$$

$$\frac{d^2(\Delta.\theta)}{dU^2}=-\frac{A^3\Delta.\theta}{r^3}. \tag{5}$$

Führt man die Differentiation auf den linken Seiten der Gleichungen (3)—(5) aus, multipliziert sie zur Elimination von $\frac{d^2\Delta}{dU^2}$ und $\frac{d\Delta}{dU}$ der Reihe nach mit

$$\theta\frac{d\alpha}{dU}\cos\alpha-\frac{d\theta}{dU}\sin\alpha,\quad \theta\frac{d\alpha}{dU}\sin\alpha+\frac{d\theta}{dU}\cos\alpha,\quad -\frac{d\alpha}{dU}$$

und addiert, so wird

$$\Delta\frac{d^2\alpha}{dU^2}\frac{d\theta}{dU}-\Delta\frac{d\alpha}{dU}\frac{d^2\theta}{dU^2}-\Delta.\theta\left(\frac{d\alpha}{dU}\right)^3=-A^3R\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)\left(\theta\frac{d\alpha}{dU}\cos(V-\alpha)+\frac{d\theta}{dU}\sin(V-\alpha)\right) \tag{6}$$

und dies ist die Gleichung (a) der Nachlaßnotiz, wo nur $A=1$ gesetzt ist. Man vergleiche hierzu den Brief von OLBERS an GAUSS vom 11. September 1802 und LAPLACE, *Mécanique céleste*, Première Partie, Livre II, No. 31 (Band I, S. 207 der Originalausgabe von 1799).

Um die Gleichung (b) abzuleiten, multipliziert man in ähnlicher Weise die Gleichungen (3)—(5) zur Elimination von $\frac{d^2\Delta}{dU^2}$ und R der Reihe nach mit $-\theta\sin V$, $\theta\cos V$, $\sin(V-\alpha)$ und addiert.

Die Gleichungen (a) und (b) lassen sich auch aus I und II durch den Grenzübergang $\lim\Delta U=0$ ableiten, wobei noch zu beweisen ist, daß die in I und II vernachlässigten Glieder beim Grenzübergang verschwinden.

Die Gleichung (c) erhält man durch Multiplikation der Gleichung (3) bezw. (4) mit $-\sin\alpha$ bezw. $\cos\alpha$ und Addition und endlich die Gleichung (d) durch Multiplikation der Gleichungen (3)—(5) mit $-\theta\cos\alpha$, $-\theta\sin\alpha$, $+1$ und Addition.

Die Gleichungen für $\log\Delta$ und $\log\Delta''$, S. 223, beruhen auf der Voraussetzung, daß die Logarithmen der Abstände von der Erde sich proportional den Zwischenzeiten ändern, daß also

$$\frac{\log\Delta''-\log\Delta'}{t''-t'}=\frac{\log\Delta'-\log\Delta}{t'-t}.$$

Mit der auf S. 229 bei Gelegenheit der »zweiten Verbesserungsmethode« erwähnten »Aufgabe« hat sich GAUSS öfters beschäftigt; es finden sich darüber Notizen im Handbuch Bb, S. 15 und in der Scheda Ah, S. 5 (mit Beispielen) und GAUSS hat diesen Teil seiner Untersuchungen in der Monatl. Corresp. Juni 1802 (Bd. VI, S. 87) veröffentlicht; vergl. auch *Theoria motus*, art. 74.

Vielleicht ist es erwünscht, die Ableitung der Formel für p in der Fußnote S. 225 aus der vorhergehenden Gleichung hier zu geben, da sie nicht sofort zu übersehen ist. Die Größen δ und φ sind klein, ihr Cosinus nahe gleich Eins; setzt man also

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\varphi\left(1-\frac{2\sin\frac{1}{4}\delta^2}{p\cos\varphi}\sqrt{(rr'\cos2\varphi)}\right)}=1+\xi,\qquad \cos2\varphi=1+x,$$

so hat man unter Vernachlässigung der Quadrate von x und ξ näherungsweise:

$$\begin{aligned} m\sqrt{p}&=\frac{\delta rr'}{3}\left(1-x+2(1+x)(1+2\xi)\right)=\delta rr'\left(1+\tfrac{1}{3}x+\tfrac{4}{3}\xi\right)\\ &=\delta rr'\sqrt[3]{(1+x+4\xi)}=\delta rr'\sqrt[3]{(\cos2\varphi.(1+\xi)^4)}.\end{aligned}$$

Der auf S. 230 (letzte Zeile) von GAUSS angegebene Wert für die größte Mittelpunktsgleichung ist eine Näherungsformel ähnlicher Art, wie die vorstehende; GAUSS bediente sich häufig solcher Näherungsausdrücke: man vergleiche Werke VII, 1906, S. 330, 332 u. a., im besonderen S. 335. Entwickelt man nach Potenzen von e, so ergibt die Näherungsformel die Reihe:

$$2e+\frac{11}{48}e^3+\frac{528}{5120}e^5+\cdots,$$

während der genaue Wert ist:

$$2e + \frac{11}{48}e^3 + \frac{599}{5120}e^5 + \cdots.$$

Außer den oben beim Text angegebenen wurden noch einige weitere kleinere Schreibfehler beim Abdruck verbessert.

Es schien angebracht, im vorstehenden die ältesten Urkunden der Arbeiten von Gauss auf diesem Gebiete zum Abdruck zu bringen, wenn auch viele Einzelheiten aus der *Summarischen Übersicht* und der *Theoria motus* entnommen werden können.

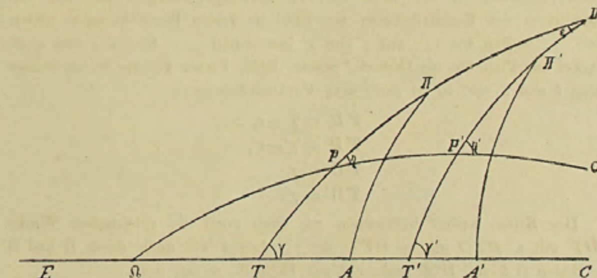
Brendel.

DIE GAUSS'SCHE METHODE ZUR BERECHNUNG EINER KREISBAHN *).

[Aus W. Klinkerfues, Theoretische Astronomie, 1. Aufl., Braunschweig 1871, S. 63, 3. Aufl., herausgegeben von H. Buchholz, Braunschweig 1912, S. 237.]

Das Verfahren von Gauss, an zwei vollständige Beobachtungen eines Planeten eine Kreisbahn anzuschliessen, gewährt für die Ekliptik eine sehr bequeme Rechnung.

Wir beginnen damit, uns die Lage der Bahnebene gegen die Ekliptik, sowie die Bedingungen der Aufgabe . . . . . in [der beigefügten] Figur zu versinnlichen.



*) Der Verfasser [Klinkerfues] verdankt diese Methode den mündlichen Mitteilungen von Gauss, bei Gelegenheit eines Auftrages zur Untersuchung der Bahn der Eunomia.

Es sei EC der die Ekliptik vorstellende grösste Kreis der Himmelskugel, T und T' seien die Örter der Erde auf derselben, d. h. diejenigen Punkte der Sphäre, auf welche die Radienvectoren der Erde in den beiden Beobachtungen gerichtet sind. Durch jede vollständige Beobachtung wird die Richtung oder eine Gerade, auf welcher der Planet sich zur Zeit der Beobachtung befinden muss, völlig bekannt, demnach auch die Lage der Ebene, welche durch diese Gerade und den Radiusvector der Erde in derselben Beobachtung gelegt werden kann. Diese Ebenen für die erste und die zweite Beobachtung werden in der Figur durch die grössten Kreise TD und $T'D$, welche sich in D schneiden, vorgestellt. $\Omega PP'O$ sei die Bahnebene des Planeten, worin Ω der aufsteigende Knoten in der Ekliptik, P und P' die heliocentrischen Örter des Planeten in beiden Beobachtungen. Die geocentrischen Örter, in der Figur mit Π und Π' bezeichnet, fallen offenbar ebenfalls in die grössten Kreise TD und $T'D$. Man kann ferner noch leicht bemerken, dass der Bogen TP nichts Anderes ist, als der Winkel, welchen der Radiusvector des Planeten mit dem Radiusvector der Erde in der ersten Beobachtung bildet, $T'P'$ dasselbe für die zweite Beobachtung. Diese beiden Bogen sind nicht von vornherein gegeben, dagegen die Bogen $T\Pi$ und $T'\Pi'$, d. h. die Winkel, welche an der Erde die Beobachtungsrichtungen mit den Verlängerungen der Radienvectoren der Erde in beiden Beobachtungen bilden; diese ... wollen wir ... mit χ und χ' bezeichnen ... Stellen z und z' die Winkel am Planeten im Dreieck: Sonne, Erde, Planet für die Beobachtungszeiten t und t' vor, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$TP = \chi - z,$$
$$T'P' = \chi' - z',$$
$$T\Pi = \chi,$$
$$T'\Pi' = \chi'.$$

Der Kürze halber bezeichnen wir auch noch die sphärischen Winkel TDT' mit ε, DTC mit γ, $DT'C$ mit γ'. Legen wir noch durch Π und Π' die Bögen ΠA und $\Pi' A'$ senkrecht zur Ekliptik, so ist, wenn:

λ, λ' die geocentrischen Längen des Planeten,
β, β' » » Breiten » »
L, L' die Längen der Erde bedeuten,

$$TA = \lambda - L,$$
$$T'A' = \lambda' - L',$$
$$\Pi A = \beta,$$
$$\Pi' A' = \beta',$$

also nach den Formeln rechtwinkliger sphärischer Dreiecke

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(\lambda - L)},$$
$$(2) \qquad \sin \chi = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Die Formel für χ:

$$\cos \chi = \cos \beta \cos(\lambda - L)$$

kann zur Controle der Rechnung dienen. Für einen eben entdeckten noch in der Nähe seiner Opposition befindlichen Planeten, pflegt der Winkel χ nicht gross zu sein, weshalb seine Bestimmung durch (1) und (2) der anderen vorzuziehen ist.

Bei der zweiten Beobachtung hat man analog:

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \gamma' = \frac{\operatorname{tg} \beta'}{\sin(\lambda' - L')},$$
$$(4) \qquad \sin \chi' = \frac{\sin \beta'}{\sin \gamma'}.$$

Nach der Berechnung von γ und γ' kann man nun sofort zur Auflösung des Dreiecks TDT', d. h. zur Bestimmung der beiden Seiten TD, $T'D$ und des Winkels TDT' oder ε, aus den Winkeln γ, $(180^0 - \gamma')$ und der dazwischen liegenden Seite TT' oder $L' - L$ schreiten. Die Gauss'schen Dreiecksformeln liefern hier die Gleichungen:

$$(5) \qquad \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(TD + T'D) = \sin \tfrac{1}{2}(L' - L) \sin \tfrac{1}{2}(\gamma' + \gamma),$$
$$(6) \qquad \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(TD + T'D) = \cos \tfrac{1}{2}(L' - L) \sin \tfrac{1}{2}(\gamma' - \gamma),$$
$$(7) \qquad \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(TD - T'D) = \sin \tfrac{1}{2}(L' - L) \cos \tfrac{1}{2}(\gamma' + \gamma),$$
$$(8) \qquad \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(TD - T'D) = \cos \tfrac{1}{2}(L' - L) \cos \tfrac{1}{2}(\gamma' - \gamma).$$

Hat man diese Vorbereitungsrechnungen beendigt, so erhält man für jede Hypothese über den Werth von r oder den Abstand des Planeten von der Sonne sofort die Bogen DP und DP', aus denen man dann in Verbindung mit dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ε die Seite PP' des Dreiecks PDP', d. h. den heliocentrischen Bogen PP', welcher, wenn die Hypothese richtig ist, gleich $\frac{k(t'-t)}{r^{\frac{3}{2}}}$ sein soll, bestimmen kann. Denn ein Blick auf die Figur zeigt, dass:

$$DP = DT - PT = DT - (\chi - z), \tag{9}$$
$$DP' = DT' - P'T' = DT' - (\chi - z'), \tag{10}$$

während

$$\sin z = \frac{R \sin \chi}{r}, \quad \sin z' = \frac{R' \sin \chi'}{r};$$

wobei R und R' die Radienvectoren der Erde vorstellen.

Setzen wir der Kürze halber:

$$\text{Winkel } DPO = \eta, \quad \text{Winkel } DP'O = \eta',$$

so haben wir wieder nach den Gaussschen trigonometrischen Formeln:

$$\sin \tfrac{1}{2} PP' \sin \tfrac{1}{2}(\eta' + \eta) = \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin \tfrac{1}{2}(DP + DP'), \tag{11}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} PP' \sin \tfrac{1}{2}(\eta' - \eta) = \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \tfrac{1}{2}(DP + DP'), \tag{12}$$
$$\sin \tfrac{1}{2} PP' \cos \tfrac{1}{2}(\eta' + \eta) = \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin \tfrac{1}{2}(DP - DP'), \tag{13}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} PP' \cos \tfrac{1}{2}(\eta' - \eta) = \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos \tfrac{1}{2}(DP - DP'), \tag{14}$$

aus denen PP', η' und η sich ergeben. Die beiden letzteren Grössen η und η' gewinnen erst Interesse, wenn man den definitiven Werth von r gefunden hat, weshalb es vortheilhaft ist, dieselben aus den Versuchen zu eliminiren. Man addire zu dem Zwecke die Gleichungen (11) und (13), nachdem man auf beiden Seiten in das Quadrat erhoben hat, wodurch sich ergibt:

$$\sin \tfrac{1}{2} PP'^2 = \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin \tfrac{1}{2}(DP + DP')^2 + \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin \tfrac{1}{2}(DP - DP')^2, \tag{15}$$

(während kaum nöthig scheint, zu bemerken, dass sich der Exponent 2 nicht auf die in Klammern stehenden Bogen, sondern auf das Quadriren des Sinus bezieht).

Hat man die definitive Lösung gefunden, so rechnet man nach den Formeln (9) und (12), so dass auch η und η' bekannt werden. Wieder ein Blick auf [die] Figur zeigt uns, wie die drei Elemente Ω, i und der Abstand vom Knoten bei der ersten Beobachtung oder das Argument der Breite u

durch Auflösung des Dreiecks $P\Omega T$ zu finden sind. In diesem ist offenbar:

$$\text{Winkel } P\Omega T = i = \text{Neigung der Bahnebene zur Ekliptik},$$
$$\Omega P = u,$$
$$\Omega T = L - \Omega,$$

und da auch Winkel $\Omega PT = \eta$, $PT\Omega = 180^0 - \gamma$, $PT = \chi - z$, so ist nach den Dreiecksformeln:

$$\sin \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2}[u + (L - \Omega)] = \sin \tfrac{1}{2}(\chi - z) \sin \tfrac{1}{2}(\gamma + \eta), \tag{16}$$
$$\sin \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}[u + (L - \Omega)] = \cos \tfrac{1}{2}(\chi - z) \sin \tfrac{1}{2}(\gamma - \eta), \tag{17}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2}[u - (L - \Omega)] = \sin \tfrac{1}{2}(\chi - z) \cos \tfrac{1}{2}(\gamma + \eta), \tag{18}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}[u - (L - \Omega)] = \cos \tfrac{1}{2}(\chi - z) \cos \tfrac{1}{2}(\gamma - \eta). \tag{19}$$

Zur Controle der Rechnung dient die Übereinstimmung des i oder der Neigung, wie sie aus (16) und (17) und aus $\sin \frac{1}{2} i$ folgt, mit der aus (18) und (19) und aus $\cos \frac{1}{2} i$.

Zu weiterer Sicherung der Richtigkeit kann man noch das Dreieck $\Omega P'T'$ zur Bestimmung der Elemente verwenden.

Man hat darnach auch:

$$\sin \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2}[u' + (L' - \Omega)] = \sin \tfrac{1}{2}(\chi' - z') \sin \tfrac{1}{2}(\gamma' + \eta'), \tag{20}$$
$$\sin \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}[u' + (L' - \Omega)] = \cos \tfrac{1}{2}(\chi' - z') \sin \tfrac{1}{2}(\gamma' - \eta'), \tag{21}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} i \sin \tfrac{1}{2}[u' - (L' - \Omega)] = \sin \tfrac{1}{2}(\chi' - z') \cos \tfrac{1}{2}(\gamma' + \eta'), \tag{22}$$
$$\cos \tfrac{1}{2} i \cos \tfrac{1}{2}[u' - (L' - \Omega)] = \cos \tfrac{1}{2}(\chi' - z') \cos \tfrac{1}{2}(\gamma' - \eta'). \tag{23}$$

Das Argument der Breite in der zweiten Beobachtung, u', muss noch der Bedingung genügen, dass $u' - u = PP' = \frac{k(t'-t)}{r^{\frac{3}{2}}}$ wird, wie es immer der Fall sein wird, wenn die Rechnung vorher in allen Theilen scharf geführt worden ist.
