[ZUR THEORIE DER UNENDLICHEN REIHE $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$.]

[I.]

[ENTWICKELUNGEN IN KETTENBRÜCHE.]

[Aus Handbuch 18, Bd, Mathematische Brouillons, October 1805.]

[1.]

[S. 52]

Es sei $\sin\frac{1}{2}\varphi = x$, so ist

$$\frac{\varphi-\sin\varphi}{\frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}\varphi^3} = 1+\frac{6}{5}xx+\frac{6.8}{5.7}x^4+\frac{6.8.10}{5.7.9}x^6+\text{etc.}$$

$$= \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{3.6}{3.5}xx}{1+\cfrac{\frac{2}{5.7}xx}{1-\cfrac{\frac{5.8}{7.9}xx}{1-\cfrac{\frac{4.1}{9.11}xx}{1-\cfrac{\frac{7.10}{11.13}xx}{1-\frac{6.3}{13.15}xx\ \text{etc.}}}}}}}$$

[S. 54]

$$P = 1+\frac{6}{5}xx+\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}x^4+\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}x^6+\cdots\left[=\frac{\varphi-\sin\varphi}{\frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}\varphi^3}\right]$$

$$\alpha = \frac{6}{5}xx$$

$$Q = 1+\frac{8}{7}xx+\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}x^4+\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}x^6+\cdots$$

$$\beta = -\frac{2}{35}xx$$

$$R = 1+\frac{2.8}{9}xx+\frac{3.8.10}{9.11}x^4+\frac{4.8.10.12}{9.11.13}x^6+\cdots$$

$$\gamma = \frac{5.8}{7.9}xx$$

$$S = 1+\frac{2.10}{11}xx+\frac{3.10.12}{11.13}x^4+\frac{4.10.12.14}{11.13.15}x^6+\cdots$$

$$\delta = \frac{4}{99}xx$$

$$T = 1+\frac{3.10}{13}xx+\frac{5.10.12}{13.15}x^4+\frac{10.10.12.14}{13.15.17}x^6+\cdots$$

$$\varepsilon = \frac{7.10}{11.13}xx$$

$$U = 1+\frac{3.12}{15}xx+\frac{6.12.14}{15.17}x^4+\frac{10.12.14.16}{15.17.19}x^6+\cdots$$

$$\begin{aligned} 1 &= P-\alpha Q\\ P &= Q-\beta R\\ Q &= R-\gamma S\\ R &= S-\delta T\\ S &= T-\varepsilon U \end{aligned}$$

etc.

$$P = \cfrac{1}{1-\alpha\frac{Q}{P}} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\alpha}{1-\frac{\beta R}{Q}}} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\alpha}{1-\cfrac{\beta}{1-\frac{\gamma S}{R}}}}\ \text{etc.}$$

[S. 55—57]

Wenn man $\sin\frac{1}{2}\varphi = s$ setzt, so wird

$$\frac{\varphi-\sin\varphi}{\frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}\varphi^3} = \cos\frac{1}{2}\varphi\times\left\{1+\frac{4}{5}ss+\frac{4.6}{5.7}s^4+\frac{4.6.8}{5.7.9}s^6\ldots\right\}$$

$$= 1+\frac{1.3}{2.5}ss+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{3}{7}s^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{3}{9}s^6\ldots[^*)].$$

[*) In der Handschrift lautet das letzte Glied $\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{5}{9}s^4$.]

[2.]

$$\frac{1+\frac{3}{1}\cdot\frac{12}{15}xx+\frac{3.4}{1.2}\cdot\frac{12.14}{15.17}x^4\ldots}{1+2\frac{12}{13}xx+3\frac{12.14}{13.15}x^4\ldots}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{9.12}{13.15}xx}{1-\cfrac{\frac{3.6}{15.17}xx}{1-\cfrac{\frac{11.14}{17.19}xx}{1-\frac{4.10}{19.21}xx \text{ etc.}}}}}$$

$$\frac{1+2\frac{12}{13}xx+3\frac{12.14}{13.15}x^4+\cdots}{1+\frac{12}{11}xx+\frac{12.14}{11.13}x^4+\cdots}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{9.12}{11.13}xx}{1-\cfrac{\frac{2.2}{13.15}xx}{1-\text{etc.}}}}$$

$$1+\frac{12}{11}xx+\frac{12.14}{11.13}x^4\ldots=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{9.12}{9.11}xx}{1+\cfrac{\frac{2}{11.13}xx}{1-\cdots}}}$$

[3.]

[S. 59]

$$[P=]\,1-\frac{1}{2}[s^2]-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}[s^4]-\frac{1.1.3}{2.4.6}[s^6]-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}[s^8+\cdots=\sqrt{(1-s^2)}]$$

$$[\alpha=]\,\frac{1.2}{1.3}[s^2]$$

$$[Q=]\,1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}[s^2]+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}[s^4]+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}[s^6]+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9}\left[s^8+\cdots=\frac{\arcsin s}{s}\right]$$

$$[\beta=]\,\frac{1.2}{3.5}[s^2]$$

$$[R=]\,1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}[s^2]+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{3}{7}[s^4]+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{3}{9}[s^6]$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{3}{11}\left[s^8+\cdots=\frac{3}{2}\,\frac{\arcsin s-s\sqrt{(1-s^2)}}{s^3}\right]$$

$$[\gamma=]\,\frac{3.4}{5.7}[s^2]$$

$$[S=]\,1+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{7}[s^2]+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{3.5}{7.9}[s^4]+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{3.5}{9.11}[s^6]+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{3.5}{11.13}[s^8+\cdots]$$

$$[\delta=]\,\frac{3.4}{7.9}[s^2]$$

$$[T=]\,1+\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{9}[s^2]+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{5.7}{9.11}[s^4]+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{5.7}{11.13}[s^6]+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{5.7}{13.15}[s^8+\cdots]$$

$$[\varepsilon=]\,\frac{5.6}{9.11}[s^2]$$

$$[U=]\,1+\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{11}[s^2]+\frac{5.7}{2.4}\cdot\frac{5.7}{11.13}[s^4]+\frac{5.7.9}{2.4.6}\cdot\frac{5.7.9}{11.13.15}[s^6]$$
$$+\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}\cdot\frac{5.7.9}{13.15.17}[s^8+\cdots]$$

u.s.w.

Also

$$\frac{\varphi}{\cos\varphi}=\cfrac{s}{1-\cfrac{\frac{2}{3}ss}{1-\cfrac{\frac{2}{15}ss}{1-\cfrac{\frac{12}{35}ss}{1-\cfrac{\frac{12}{63}ss}{1-\cfrac{\frac{30}{99}ss}{1-\text{etc.}}}}}}}$$

[4.]

[S. 60]

Theorem.

$$\frac{1+\frac{a.b}{1.c}x+\frac{a.a+1}{1.2}\cdot\frac{b.b+1}{c.c+1}xx\text{ etc.}}{1+\frac{c-a.c-b}{1.c}x+\frac{c-a.c+1-a}{1.2}\cdot\frac{c-b.c+1-b}{c.c+1}xx\text{ etc.}}=(1-x)^{-a-b+c}.$$

[S. 122]

Verwandlung.

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{\alpha.\beta}{\gamma.\gamma+1}x}{1-\cfrac{\frac{\gamma+1-\alpha.\gamma+1-\beta}{\gamma+1.\gamma+2}x}{1-\cfrac{\frac{\alpha+1.\beta+1}{\gamma+2.\gamma+3}x}{1-\cdots}}}}=\frac{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\gamma-\alpha.\gamma-\beta}+\cfrac{\frac{\alpha\beta}{\gamma-\alpha.\gamma-\beta}}{1-\cfrac{\frac{\gamma-\alpha.\gamma-\beta}{\gamma.\gamma+1}x}{1-\cfrac{\frac{\alpha+1.\beta+1}{\gamma+1.\gamma+2}x}{1-\cdots}}}$$

BEMERKUNGEN.

Die hier zusammengestellten Aufzeichnungen stehen zerstreut zwischen astronomischen Rechnungen und Entwickelungen, mit denen aber nicht immer ein unmittelbarer Zusammenhang erkennbar ist. — Die Funktion, von der der art. [1.] handelt, stimmt, von dem Faktor $\frac{4}{3}$ abgesehen, mit der im art. 90 der *Theoria motus* (1809) mit X bezeichneten Funktion überein, siehe Werke VII (1906), S. 116, wo die hier angegebenen Reihen- und Kettenbruchentwickelungen auftreten, vergl. auch in der Abhandlung *circa seriem* (1812), Werke III, S. 137. Das Verfahren, durch das hier der Kettenbruch aus der Reihe abgeleitet wird, ist das auf LAMBERT*) zurückgehende Divisionsverfahren, im wesentlichen also dasselbe, wie das im art. 12 der Abhandlung von 1812, Werke III, S. 134 im allgemeinen Falle angewandte. Die am Schluß des art. [1.] gegebene Entwicklung nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\varphi$ stimmt mit der Reihe R des art. [3.] überein; wir sehen hier wieder durch das Divisionsverfahren:

$$Q-P = \alpha R,\quad R-Q = \beta S,\quad S-R = \gamma T,\quad T-S = \delta U, \ldots$$

den Kettenbruch für $\frac{\varphi}{\cos\varphi}$ entstehen, wo man jetzt $s = \sin\varphi$ zu setzen hat. Dieser Kettenbruch steht auch in der Abhandlung von 1812, Werke III, S. 137, Gleich. [35]. Natürlich sind alle hier auftretenden Reihen besondere Fälle von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Das gleiche gilt von den Reihen des art. [2.]; in der Bezeichnung der Abhandlung von 1812, Werke III, S. 134, ist der erste Kettenbruch des art. [2.]:

$$G\left(\frac{12}{2}, 2\ \frac{13}{2}, x^2\right),\quad \text{der zweite: } G\left(\frac{12}{2}, 1, \frac{11}{2}, x^2\right),\quad \text{der dritte: } F\left(\frac{12}{2}, 1, \frac{11}{2}, x^2\right);$$

vergl. die im Astronom. Jahrbuch für 1811, Werke VII (1906), S. 301 gegebenen Entwickelungen für A, ferner Werke III, S. 209. An der Hand von EULERs Abhandlung *Specimen transformationis singularis serierum*, Nova Acta Acad. Petropol. **12** (1794) 1801, S. 58—70, fand GAUSS auch den allgemeinen Gesichtspunkt für die speziellen Entwickelungen der artt. [1.]—[3.]; aus dieser Abhandlung EULERs (§ 10, a. a. O. S. 61, 62) stammt das »Theorem« des art. [4.]. Die darauf folgende »Verwandlung«, die in den Bezeichnungen der Abhandlung *circa seriem*

$$G(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = \frac{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + \frac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\, G(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, x)$$

autet, ergibt sich aus diesem EULERschen Theorem mit Hinzunahme der Relation (siehe Werke III, S. 133, Gl. [19])

$$(*)\qquad F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}\, x \cdot F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x),$$

aus der die Kettenbruchentwickelung für den Quotienten

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$$

*) Siehe J. H. LAMBERT, *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*, Histoire de l'Académie, Berlin (1761) 1768, Mémoires, S. 265; siehe besonders S. 268. Während LAMBERT für die von ihm betrachteten besonderen Fälle eine Untersuchung der Konvergenz der Kettenbrüche vornimmt, fehlt eine solche Untersuchung bei GAUSS, vergl. dazu die Bemerkung zu der weiter unten folgenden Abhandlung [III.]. Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß GAUSS in späterer Zeit auf diese LAMBERTsche Abhandlung ausdrücklich Bezug genommen hat, siehe die Fußnote Werke X 2, S. 62.

folgt. GAUSS hat also zu der Zeit, wo er jene »Verwandlung« ausführte, die Relation (*) und damit den Schlüssel für die ganze Theorie der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ gekannt. Diese Zeit läßt sich mit ziemlicher Genauigkeit bestimmen. Auf S. 43—45 des Handbuchs 18, Bd, beginnt nämlich die Untersuchung über die Identität des Kometen von 1772 mit dem von 1805, indem dort die Beobachtungen des Kometen von 1772 neu reduziert und berechnet werden. Über diese Rechnung berichtet GAUSS an OLBERS am 3. Januar 1806, siehe *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 279. Andererseits finden sich auf S. 64 ff. des Handbuchs Reduktionen von Beobachtungen der Pallas und Juno aus dem Februar 1806. Damit sind die Aufzeichnungen der artt. [1.]—[3.] und das »Theorem« von [4.] auf den Anfang des Jahres 1806 festgelegt. Aber auch die »Verwandlung« stammt aus dem ersten Drittel dieses Jahres, da die auf S. 147 des Handbuchs stehende algebraische Aufzeichnung (abgedruckt oben S. 112, art. [3.]) nach der Aufzeichnung Nr. 128 des *Tagebuchs* aus den Monaten April—Mai 1806 herrührt.

SCHLESINGER.

[II.]

[ALLGEMEINES ÜBER DIE REIHE $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.]

[Aus Handbuch 18, Bd, Mathematische Brouillons, October 1805.]

[1.]

[S. 234]

Es sei

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.n}x+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.n.n+1}xx+\ldots=\{\alpha,\beta.n\}=P$$

1) $\{\alpha,\beta,n+1\}=\{\alpha,\beta,n\}-\frac{\alpha\beta x}{n.n+1}\{\alpha+1,\beta+1,n+2\},$

2) $\{\alpha,\beta+1,n\}=\{\alpha,\beta,n\}+\frac{\alpha x}{n}\{\alpha+1,\beta+1,n+1\},$

3) $\{\alpha,\beta+1,n+1\}=\{\alpha,\beta,n,\}+\frac{\alpha(n-\beta)x}{n.n+1}\{\alpha+1,\beta+1,n+2\}.$

Also

4) $(n-\beta)\{\alpha,\beta,n+1\}+\beta\{\alpha,\beta+1,n+1\}=n\{\alpha,\beta,n\},$

5) $\{\alpha,\beta+1,n\}=\{\alpha+1,\beta,n\}+\frac{(\alpha-\beta)x}{n}\{\alpha+1,\beta+1,n+1\},$

6) $\beta\{\alpha,\beta+1,n\}=\alpha\{\alpha+1,\beta,n\}-(\alpha-\beta)\{\alpha,\beta,n\}.$ gut.

[2.]

Wenn in der D[ifferential] G[leichung]

$$(x-xx)d^2P-(x-xx)\frac{dPd^2x}{dx}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}dPdx-\alpha\beta Pdx^2\ [=0]$$

statt [x]

$$x=\frac{t}{t-1}$$

subst[ituirt] wird, so erhält man[*])

$$(1-t)(t-t^2)ddP+(1-t)(\gamma+(\alpha+\beta-1-\gamma)t)dPdt+\alpha\beta Pdt^2=0.$$

Ferner ergibt sich für]

$$x=\frac{4t}{(1+t)^2},\quad dx=\frac{4(1-t)dt}{(1+t)^3},$$

$$ddx=[-]\frac{8(2-t)dt^2}{(1+t)^4},\quad x-xx=\frac{(1-t)^2[4t]}{(1+t)^4},$$

$$\frac{[4t](1-t)}{(1+t)^4}P''+\frac{[4t](4-2t)}{(1+t)^5}P'+\left\{\gamma-(\alpha+\beta+1)\frac{4t}{(1+t)^2}\right\}P'\frac{4}{(1+t)^3}-\alpha\beta P\frac{16(1-t)}{(1+t)^6}\ [=0.]$$

[3.]

[S. 235]

$$\frac{1+\frac{A.B+\beta}{1.C+\gamma}x+\frac{A.A+\alpha.B+\beta.B+2\beta}{1.2.C+\gamma.C+2\gamma}xx\ldots}{1+\frac{A.B}{1.C}x+\frac{A.A+\alpha.B.B+\beta}{1.2.C.C+\gamma}xx\ldots}$$

$$=\left\{\frac{A}{\alpha},\ \frac{B}{\beta},\ \frac{C}{\gamma},\ \frac{\alpha\beta x}{\gamma}\right\}[=]\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{A.\beta C-\gamma B}{C.C+\gamma}x}{1-\cfrac{\frac{B+\beta.\alpha C+\alpha\gamma-A\gamma}{C+\gamma.C+2\gamma}x}{1-\cfrac{\frac{A+\alpha.\beta C+\beta\gamma-\gamma B}{C.C+\gamma}x}{\text{etc.}}}}}$$

$C=1,\ \gamma=0$

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{A\beta x}{1-\cfrac{(B+\beta)\alpha x}{1-\cfrac{(A+\alpha)\beta x}{1-\cfrac{(B+2\beta)\alpha x}{\ddots}}}}}=\frac{1+A(B+\beta)x+\cdots}{1+ABx+\cdots}$$

$$\text{tang}\,[\varphi]=\cfrac{\varphi}{1-\cfrac{\frac{\varphi\varphi}{3}}{1-\cfrac{\frac{\varphi\varphi}{15}}{\text{etc.}}}}$$

[*] In der Handschrift ist diese Transformation nicht ganz durchgeführt; das Ergebnis ist deshalb nach Werke III, S. 218 ergänzt.]

[S. 244]

[4.]

$$\begin{aligned}
\Pi\, 0{,}2 &= x \\
\Pi\, 0{,}4 &= y \\
\Pi\, 0{,}6 &= 0{,}24\pi : y \sin 72^0 \\
\Pi\, 0{,}8 &= 0{,}16\pi : x \sin 36^0 \\
\Pi\, 9 \quad &= 10 \,.\, 189 \,.\, 192 \\
\Pi\, 9{,}2 &= x \,.\, 1066 \,.\, 1023 \,.\, 966 \,.\, 768 : 10^9 \\
\Pi\, 9{,}4 &= y \,.\, 192^3 \,.\, 329 \,.\, 561 \,.\, 777 \\
\Pi\, 9{,}6 &= \pi \,.\, 96^4 \,.\, 462 \,.\, 988 \,.\, 989 : y \sin 72^0 \\
\Pi\, 9{,}8 &= \pi \,.\, 672^3 \,.\, 528 \,.\, 493 \,.\, 494 : x \sin 36^0 \\
\Pi\, 10{,}0 &= 100 \,.\, 189 \,.\, 192.
\end{aligned}$$

[Die Logarithmen werden auf 12 Dezimalstellen gerechnet mit Benutzung der Werte:]

$$\begin{aligned}
[\log_{10}]\, x &\ldots 9{,}962922504818, \\
[\log_{10}]\, y &\ldots 9{,}948052773504,
\end{aligned}$$

[die aber (vergl. Werke III, S. 161) von der 9. Ziffer an unrichtig sind.]

Invenimus autem

$$\begin{aligned}
F(-\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5}, 10, 1) &= 1{,}0041288636 = \frac{\Pi 9 \,.\, \Pi 9{,}4}{\Pi 9{,}2 \,.\, \Pi 9{,}2} \\
F(-\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5}, 10\tfrac{1}{5}, 1) &= 1{,}0040454154 = \frac{\Pi 9{,}2 \,.\, \Pi 9{,}6}{\Pi 9{,}4 \,.\, \Pi 9{,}4} \\
F(\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, 11, 1) \quad &= 1{,}0038882487 = \left[\frac{\Pi 10 \,.\, \Pi 9{,}6}{\Pi 9{,}8 \,.\, \Pi 9{,}8}\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda z &= \log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log k + z \log k \\
&\quad - \log(z+1) - \log(z+2) - \ldots - \log(z+k) \\
\Lambda' z &= -\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} - \ldots - \frac{1}{z+k} + \log k \\
\Lambda'' z &= \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+3)^2} + \text{etc.} \\
\Lambda''' z &= -\frac{2}{(z+1)^3} - \frac{2}{(z+2)^3} - \frac{2}{(z+3)^3} - \ldots \\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda(z+\omega) = \Lambda z &+ \omega\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \text{etc.} + \tfrac{1}{z} - 0{,}[57721\ldots]\right) \\
&+ \tfrac{1}{2}\omega\omega\left(\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+3)^2} + \text{etc.}\right) \\
&- \tfrac{1}{3}\omega^3\left(\frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{(z+2)^3} + \frac{1}{(z+3)^3} + \text{etc.}\right) \\
&+ \tfrac{1}{4}\omega^4\left(\frac{1}{(z+1)^4} + \frac{1}{(z+2)^4} + \frac{1}{(z+3)^4} + \text{etc.}\right) \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

[Auf S. 245 folgt eine Tafel der Werte von $\log_{10} \Pi z$ für die Werte von z von 9,20 bis zu 10,20, fortschreitend um je 0,02; die Tafel ist auf 10 Dezimalstellen gerechnet, aber mit Benutzung der ungenauen Werte von $\log x$ und $\log y$.]

[S. 246]

[5.]

Berechnung von $\log \omega \left[= \log_{10} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\right]$

$$\begin{aligned}
[\omega =]\ & 1{,}31102877714605987 \\
[3\omega =]\ & 3{,}93308633143817961
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
983271582859544902 \\
15732345325752718 \\
983271582859545 \\
\hline
999987199768157165 \\
9999871997682 \\
2999961599305 \\
\hline
1{,}000000199601754152
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
[2 \log_{10} e = 0{,}]86858896380650365 & \\
173717792761301 & \\
\hline
86685178587889064 & \\
76001534333 & \\
1737177927 & \\
65144 & \\
869 & 866859404064 \\
\hline
86685940406423 & 1733718808 \\
\hline
8651333 & 865125685256 \\
\hline
[86685931755090] & 758 \\
\hline
 & [86513326]
\end{array}$$

339 ...	2,53019	96982	03082	16009
[225] ...	2,35218	25181	11362	48416
	4,88238	22163	14444	64425
	0	56457	91567	17660
	88238	78621	06011	82085
		866	85931	75509
$\log \varpi =$	0,11761	22245	79919	93424
eine scharfe Rechnung gab				94762

ϖ ...	0,11761	22245	79919	94586	18858	564
$\sqrt{\pi}$ ...	0,24857	49363	47066	92717	56368	
$\pi^{\frac{1}{4}}\varpi^{\frac{1}{2}}$	0,18309	35804	63493	43651	87610	
$\sqrt[4]{8}$	0,22577	24967	47985	89641	03042	
$\Pi\, 0,25$	9,95732	10837	15507	54010	84568	
$\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\varpi}\right]$	0,13096	27117	67146	98131	37517	
$\Pi - 0,25$	0,08828	37954	82654	52142	22085	
0,75	9,87506	12633	91700	04686	75501	
$\Pi\, 0,75$	9,96334	50588	74354	56828	97586	

. . . .

[Es folgt durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens die Berechnung der Logarithmen von $\Pi\, 1,75$, $\Pi\, 2,75$, ... $\Pi\, 11,75$ auf je 20 Dezimalstellen. Dann von $\Pi \frac{1}{4}$ ausgehend die Berechnung der Logarithmen von $\Pi\, 1,25$, $\Pi\, 2,25$, ... $\Pi\, 12,25$.]

[S. 247]

$$\Pi\, 7,5 = \frac{1001 \,.\, 8100}{1024} \sqrt{\pi}$$

$\frac{1001}{1024}$	9,99013	41208	39506	68853
[8100]	3,90848	50188	78649	74918
	3,89861	91397	18156	43771
$[\sqrt{\pi}]$	0,24857	49363	47066	92718
$\Pi\, 7,5$	4,14719	40760	65223	36489

[Es folgt die Berechnung der Logarithmen von $\Pi\, 8,5$, $\Pi\, 9,5$, $\Pi\, 10,5$, $\Pi\, 11,5$ dann von $\Pi\, 8,25$ bis zu $\Pi\, 13,00$, fortschreitend je um 0,25, alles auf 20 Dezimalstellen.]

BEMERKUNGEN.

Die in den artt. [1.]—[3.] wiedergegebenen Aufzeichnungen folgen in dem Handbuch 18, Bd, unmittelbar auf die Werke III, S. 446—460 abgedruckte Abhandlung, die die Seiten 221—233 des Handbuchs füllt. Nach der Nr. 140 des *Tagebuchs* ist diese Abhandlung auf Juni 1809 zu datieren; damit befindet sich auch in Übereinstimmung, daß am Ende der S. 220 des Handbuchs (vergl. die Bemerkung von SCHERING, Werke III, S. 494) die Bemerkung steht: »Geendiget den 28. April 1809.«

Unsere artt. [1.]—[3.] sind also um die Mitte des Jahres 1809 niedergeschrieben. — Die Gleichungen 1), 2), 3) des art. [1.] sind Beziehungen zwischen verwandten Reihen*), die den Gleichungen [16], [17], [19] der Abhandlung *circa seriem* Werke III, S. 133 entsprechen. Die im art. [2.] angegebene Differentialgleichung steht schon auf S. 46, 47 der 1803 begonnenen Scheda Am, wo auch die allgemeine Reihe mit α, β, γ auftritt; die beiden im art. [2.] vorgenommenen Transformationen finden sich auch Werke III, S. 217 bezw. 224 aus dem Nachlaß abgedruckt. Der Zweck der im art. [4.] eingeführten Verallgemeinerung erhellt aus dem Beispiel $C = 1$, $\gamma = 0$. Zu den numerischen Angaben der artt. [4.] und [5.], die auch aus dem Jahre 1809 stammen dürften, ist folgendes zu bemerken. Den ersten Gleichungen des art. [4.] für $\Pi\, 0,6$ und $\Pi\, 0,8$ liegt die Formel

$$\Pi z \,.\, \Pi(1-z) = \frac{z(1-z)\pi}{\sin z\pi},$$

Werke III, S. 148, zu Grunde. Die mit Λz bezeichnete Größe ist der Logarithmus der im art. 18. der Abhandlung *circa seriem*, Werke III, S. 144 Gleichung [38] erklärten Funktion $\Pi(k, z)$. Zu der Formel für $\Lambda(z+\omega)$ vergleiche man die Gleichung [60] derselben Abhandlung, a. a. O. S. 153; der Koeffizient von ω auf der rechten Seite unserer Formel ist nach Gleichung [67], Werke III, S. 154, nichts anderes als Ψz, die Zahl, deren Mantisse in der Handschrift nicht angegeben ist, soll die EULER-MASCHERONIsche Konstante sein. Im art. [5.] bedeutet ϖ die Hälfte der in den Arbeiten über lemniskatische Funktionen ebenso bezeichneten Größe, der dafür angegebene numerische Wert ist der STIRLINGsche, vergl. oben S. 145; von dem hier berechneten Wert von $\log_{10} \varpi$ weicht der Werke III, S. 414 (aus Scheda Aa, S. 3 stammend) angegebene von der 9. Dezimalstelle an ab. Bei der Berechnung von $\log_{10} \Pi \frac{1}{4}$ wird die Formel

$$\Pi \tfrac{1}{4} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{8}\pi\varpi^2},$$

bei der von $\log_{10} \Pi(-\frac{1}{4})$ die Formel

$$\Pi(-\tfrac{1}{4}) = \Pi \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\varpi}$$

benutzt, vergl. Werke III, S. 150. Die Werte von $\log_{10} \Pi \frac{1}{4}$ und $\log_{10} \Pi \frac{3}{4}$ sind auf 20 Dezimalstellen auch in der Tafel Werke III, S. 161 enthalten. Weiterhin kommt allemal die Formel

$$\Pi(z+n) = \Pi z \,.\, (z+1)(z+2)\ldots(z+n)$$

Werke III, S. 146, Gl. 45 zur Anwendung.

SCHLESINGER.

*) Diese Verdeutschung für series contiguae schlägt GAUSS selbst in der Anzeige der Abhandlung *circa seriem* vor, siehe Werke III, S. 199.

[III.]

EINIGES ÜBER DIE UNENDLICHE REIHE

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1}xx+\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1.2.3.\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3\ldots$$

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809.]

[1.]

[S. 36]

Wir bezeichnen den Werth dieser Reihe, welche stets convergirt, wenn x kleiner ist als 1, durch das Zeichen $F(\alpha, \beta, \gamma)$, so wie die davon derivirte Function oder $\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma)}{dx}$ durch $F'(\alpha, \beta, \gamma)$. Wir haben alsó sofort

$$(1) \qquad F'(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1).$$

Die Coefficienten von x^r verhalten sich bei den drei Functionen

$$F(\alpha, \beta, \gamma), \quad xF'(\alpha, \beta, \gamma), \quad F(\alpha+1, \beta, \gamma)$$

offenbar wie

$$1, \qquad r, \qquad \frac{\alpha+r}{\alpha}.$$

Wir schliessen hieraus

$$(2) \qquad F(\alpha+1, \beta, \gamma) = F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{x}{\alpha} F'(\alpha, \beta, \gamma)$$

und auf ähnliche Art

$$(3) \qquad F(\alpha, \beta+1, \gamma) = F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{x}{\beta} F'(\alpha, \beta, \gamma).$$

Hingegen werden sich die Coefficienten derselben Potenz von x in $F'(\alpha, \beta, \gamma)$ und $F'(\alpha+1, \beta, \gamma)$ noch wie

$$\frac{\alpha+r.\beta+r}{\gamma+r} \text{ und } \frac{(\alpha+r+1)(\alpha+r)(\beta+r)}{\alpha(\gamma+r)}$$

und der von $xF'(\alpha+1, \beta, \gamma)$ wie $\frac{(\alpha+r)r}{\alpha}$ verhalten. Der Coefficient in

$$(1-x)F'(\alpha+1, \beta, \gamma)$$

verhält sich also wie

$$\frac{(\alpha+r)(\alpha\beta+\beta+(\alpha+\beta-\gamma+1)r)}{\alpha(\gamma+r)},$$

folglich der in

$$(\alpha+1-\gamma)F'(\alpha, \beta, \gamma) - \alpha(1-x)F'(\alpha+1, \beta, \gamma)$$

wie $-\beta(\alpha+r)$. Wir haben also

[S. 37]

$$(4) \qquad F'(\alpha+1, \beta, \gamma) = \frac{\beta}{1-x} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{\alpha-\gamma+1+\beta x}{\alpha(1-x)} F'(\alpha, \beta, \gamma)$$

und eben so ist offenbar

$$(5) \qquad F'(\alpha, \beta+1, \gamma) = \frac{\alpha}{1-x} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{\beta-\gamma+1+\alpha x}{\beta(1-x)} F'(\alpha, \beta, \gamma).$$

Aus der Verbindung von (2) und (4) schliessen wir ferner

$$(6) \qquad F(\alpha-1, \beta, \gamma) = \frac{\alpha-\gamma+\beta x}{\alpha-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{x-xx}{\alpha-\gamma} F'(\alpha, \beta, \gamma)$$

und eben so

$$(7) \qquad F(\alpha, \beta-1, \gamma) = \frac{\beta-\gamma+\alpha x}{\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{x-xx}{\beta-\gamma} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(8) \qquad F'(\alpha-1, \beta, \gamma) = -\frac{(\alpha-1)\beta}{\alpha-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{(\alpha-1)(1-x)}{\alpha-\gamma} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(9) \qquad F'(\alpha, \beta-1, \gamma) = -\frac{(\beta-1)\alpha}{\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{(\beta-1)(1-x)}{\beta-\gamma} F'(\alpha, \beta, \gamma).$$

Hieraus ist klar, dass man aus $F(\alpha, \beta, \gamma)$ und $F'(\alpha, \beta, \gamma)$ allgemein

$$F(\alpha+k, \beta+l, \gamma) \text{ und } F'(\alpha+k, \beta+l, \gamma)$$

für jede ganze Werthe von k und l, sie mögen positiv oder negativ seyn, rational ableiten kann.

[2.]

Der Coefficient von x^r in $F(\alpha,\beta,\gamma-1)$ verhält sich wie $\frac{\gamma-1+r}{\gamma-1}$, daher wird

$$(10)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma-1) = F(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{x}{\gamma-1}F'(\alpha,\beta,\gamma).$$

Endlich sind die Coefficienten in $xF'(\alpha,\beta,\gamma-1)$ und $F'(\alpha,\beta,\gamma-1)$ proportional den Zahlen

$$\frac{r(\gamma-1+r)}{\gamma-1} \text{ und } \frac{(\alpha+r)(\beta+r)}{\gamma-1},$$

folglich der Coefficient in $(1-x)F'(\alpha,\beta,\gamma-1)$ proportional

$$\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta+1-\gamma)r}{\gamma-1},$$

also

$$(11)\qquad F'(\alpha,\beta,\gamma-1) = \frac{\alpha\beta}{(\gamma-1)(1-x)}F(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{(\alpha+\beta+1-\gamma)x}{(\gamma-1)(1-x)}F'(\alpha,\beta,\gamma).$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (10) und (11) folgt endlich

$$(12)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma+1) = -\frac{(\alpha+\beta-\gamma)\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{\gamma(1-x)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(13)\qquad F'(\alpha,\beta,\gamma+1) = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)x}F(\alpha,\beta,\gamma) - \frac{\gamma\gamma(1-x)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)x}F'(\alpha,\beta,\gamma).$$

[S. 38]

Man sieht also, dass nun aus $F(\alpha,\beta,\gamma)$ und $F'(\alpha,\beta,\gamma)$ allgemein $F(\alpha',\beta',\gamma')$ und $F'(\alpha',\beta',\gamma')$ rational abgeleitet werden kann, wenn

$$\alpha'-\alpha,\quad \beta'-\beta,\quad \gamma'-\gamma$$

ganze Zahlen sind.

Die bei der Ableitung dieser Lehrsätze gebrauchten Relationen zwischen den Coefficienten stellt folgendes Tableau dar:

In	Coefficient von	
	x^{r-1}	x^r
$F(\alpha,\beta,\gamma)$		C
$F'(\alpha,\beta,\gamma)$	Cr	$\frac{C(r+\alpha)(r+\beta)}{r+\gamma}$
$F(\alpha+1,\beta,\gamma)$		$\frac{C(r+\alpha)}{\alpha}$
$F'(\alpha+1,\beta,\gamma)$	$\frac{Cr(r+\alpha)}{\alpha}$	$\frac{C(r+\alpha)(r+\alpha+1)(r+\beta)}{\alpha(r+\gamma)}$
$F(\alpha,\beta,\gamma-1)$		$\frac{C(r+\gamma-1)}{\gamma-1}$
$F'(\alpha,\beta,\gamma-1)$	$\frac{Cr(r+\gamma-1)}{\gamma-1}$	$\frac{C(r+\alpha)(r+\beta)}{\gamma-1}$

Aus der Verbindung der vorhergehenden Formeln, oder wenn man lieber will, auf ähnliche Art wie diese gefunden sind, ergeben sich noch folgende:

$$(14)\qquad F(\alpha+1,\beta,\gamma+1) = -\frac{\gamma}{\beta-\gamma}F(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{\gamma(1-x)}{\alpha(\beta-\gamma)}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(15)\qquad F(\alpha,\beta+1,\gamma+1) = -\frac{\gamma}{\alpha-\gamma}F(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{\gamma(1-x)}{\beta(\alpha-\gamma)}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(16)\qquad F'(\alpha+1,\beta,\gamma+1) = \frac{\beta\gamma}{(\beta-\gamma)x}F(\alpha,\beta,\gamma) - \frac{\gamma(\gamma-\beta x)}{\alpha(\beta-\gamma)x}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

[S. 39]

$$(17)\qquad F'(\alpha,\beta+1,\gamma+1) = \frac{\alpha\gamma}{(\alpha-\gamma)x}F(\alpha,\beta,\gamma) - \frac{\gamma(\gamma-\alpha x)}{\beta(\alpha-\gamma)x}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(18)\qquad F(\alpha-1,\beta,\gamma-1) = \frac{\gamma-1-\beta x}{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{x-xx}{\gamma-1}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(19)\qquad F(\alpha,\beta-1,\gamma-1) = \frac{\gamma-1-\alpha x}{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{x-xx}{\gamma-1}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(20)\qquad F'(\alpha-1,\beta,\gamma-1) = \frac{(\alpha-1)\beta}{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{(\alpha-1)x}{\gamma-1}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(21)\qquad F'(\alpha,\beta-1,\gamma-1) = \frac{\alpha(\beta-1)}{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{(\beta-1)x}{\gamma-1}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(22)\qquad F(\alpha+1,\beta+1,\gamma) = \left[\frac{1}{1-x}F(\alpha,\beta,\gamma) + \frac{x(\alpha+\beta-\gamma+1)}{\alpha\beta(1-x)}F'(\alpha,\beta,\gamma)\right],$$

$$(23)\qquad F'(\alpha+1,\beta+1,\gamma) = \left[\frac{\beta+\alpha-\gamma+2}{(1-x)^2}F(\alpha,\beta,\gamma) \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha\beta(1-x)+(\alpha+\beta-\gamma+1)(\gamma+1-(\alpha+\beta+1)x)}{\alpha\beta(1-x)^2}F'(\alpha,\beta,\gamma)\right].$$

$$(24)\quad F(\alpha-1,\beta-1,\gamma) = \Big[\tfrac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)+(\alpha(\alpha-\gamma)+(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-1))x}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\,F(\alpha,\beta,\gamma)$$
$$-\tfrac{x(1-x)(\alpha+\beta-\gamma-1)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\,F'(\alpha,\beta,\gamma)\Big],$$

$$(25)\quad F'(\alpha-1,\beta-1,\gamma) = \Big[\tfrac{(\gamma-\alpha-\beta)(\alpha-1)(\beta-1)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma)+\tfrac{(\alpha-1)(\beta-1)(1-x)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\,F'(\alpha,\beta,\gamma)\Big],$$

$$(26)\quad F'(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1) = \tfrac{\gamma}{\alpha\beta}\,F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(27)\quad F'(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1) = \tfrac{\gamma}{x-xx}\,F(\alpha,\beta,\gamma)-\tfrac{\gamma(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)}{\alpha\beta(x-xx)}\,F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(28)\quad F(\alpha-1,\beta-1,\gamma-1) = \Big[\tfrac{\gamma-1-(\alpha+\beta-1)x}{\gamma-1}\,F(\alpha,\beta,\gamma)+\tfrac{x(1-x)}{\gamma-1}\,F'(\alpha,\beta,\gamma)\Big],$$

$$(29)\quad F'(\alpha-1,\beta-1,\gamma-1) = \tfrac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\gamma-1}\,F(\alpha,\beta,\gamma).^{*)}$$

[3.]

Aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (27) folgt nun leicht, wenn man die zweite derivirte Function durch $F''(\alpha,\beta,\gamma)$ bezeichnet

$$(30)\quad \alpha\beta F(\alpha,\beta,\gamma)-(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)F'(\alpha,\beta,\gamma)-(x-xx)F''(\alpha,\beta,\gamma) = 0.$$

Es sei P der Werth von $F(\alpha,\beta,\gamma)$ und Q der Werth derselben Function, wenn man für x, $1-x$ setzt. Man hat dann:

$$\alpha\beta P-(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dP}{dx}-(x-xx)\frac{d^2P}{dx^2} = 0,$$
$$\alpha\beta Q-(\alpha+\beta+1-\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dQ}{dx}-(x-xx)\frac{d^2Q}{dx^2} = 0,$$

also, für den Fall, wo $2\gamma = \alpha+\beta+1$ ist, welcher eine besondere Aufmerksamkeit verdient,

[S. 40]

$$\alpha\beta P-\gamma(1-2x)\frac{dP}{dx}-(x-xx)\frac{d^2P}{dx^2} = 0,$$
$$\alpha\beta Q-\gamma(1-2x)\frac{dQ}{dx}-(x-xx)\frac{d^2Q}{dx^2} = 0.$$

Hieraus folgt

*) *Das bisherige bekannt gemacht Comment. Recent. Soc. Gott. T. II* [, Werke III, S. 123].

$$-\frac{\gamma(1-2x)\,dx}{x-xx} = \frac{Qd^2P-Pd^2Q}{QdP-PdQ},$$

also

$$(31)\quad Q\frac{dP}{dx}-P\frac{dQ}{dx} = A(x-xx)^{-\gamma},$$

wo A eine Constante ist, deren Werth weiterhin zu

$$\frac{\alpha.\beta:\alpha+1.\beta+1.\alpha+2.\beta+2}{\gamma.\gamma.\gamma+1.\gamma+1.\gamma+2}\cdots$$

bestimmt wird. Also z. B. für $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$

$$A = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\cdots = \frac{1}{\pi}.$$

Dieselbe kann auch allgemein durch

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}\Big(1+\frac{\gamma-\alpha.\gamma-\beta}{1.\gamma+1}+\frac{\gamma-\alpha.\gamma+1-\alpha.\gamma-\beta.\gamma+1-\beta}{1.2.\gamma+1.\gamma+2}+\text{etc.}\Big)$$

vorgestellt werden.

[4.]

Eine der merkwürdigsten Relationen finden wir auf folgende Art: Man setze

$$P = P'(1-x)^{\mu},$$

so wird die Differentialgleichung

$$\Big(\alpha\beta+\frac{\mu(\gamma-(\alpha+\beta+\mu)x)}{1-x}\Big)P'-(\gamma-(\alpha+\beta+2\mu+1)x)\frac{dP'}{dx}-(x-xx)\frac{d^2P'}{dx^2} = 0.$$

Man setze $\mu = \gamma-\alpha-\beta$, so wird diese Gleichung

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)P'-(\gamma-(2\gamma-\alpha-\beta+1)x)\frac{dP'}{dx}-(x-xx)\frac{d^2P'}{dx^2} = 0,$$

woraus leicht folgt

$$P' = F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma),$$

also

$$(32)\quad F(\alpha,\beta,\gamma) = (1-x)^{-\alpha-\beta+\gamma}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma).$$

Zur Verwandlung unserer Functionen oder ihrer Verhältnisse in continuirliche Brüche sind folgende Relationen brauchbar:

$$(33)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma+1)-F(\alpha,\beta,\gamma) = -\frac{\alpha\beta x}{\gamma\cdot\gamma+1}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2),$$

$$(34)\qquad F(\alpha,\beta+1,\gamma)-F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha x}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1),$$

$$(35)\qquad F(\alpha+1,\beta,\gamma)-F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\beta x}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1),\text{[*)]}$$

[S. 41]

$$(36)\qquad F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)-F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma\cdot\gamma+1}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2),$$

$$(37)\qquad F(\alpha+1,\beta,\gamma+1)-F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\beta(\gamma-\alpha)x}{\gamma\cdot\gamma+1}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2),$$

$$(38)\qquad F(\alpha-1,\beta+1,\gamma)-F(\alpha+1,\beta-1,\gamma) = \frac{(\alpha-\beta)x}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1).$$

Aus der Verbindung von (36) und (37) folgt

$$(39)\qquad \frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}{F(\alpha,\beta,\gamma)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma\cdot\gamma+1}}{1-\cfrac{\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)x}{\gamma+1.\gamma+2}}{1-\cfrac{\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)x}{\gamma+2.\gamma+3}}{1-\cfrac{\frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)x}{\gamma+3.\gamma+4}}{1-\text{etc.}}}}}}$$

$$(40)\qquad \frac{F(\alpha+1,\beta,\gamma)}{F(\alpha,\beta,\gamma)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{\beta x}{\gamma}}{1-\cfrac{\frac{(\alpha+1)(\gamma-\beta)x}{\gamma\cdot\gamma+1}}{1-\cfrac{\frac{(\beta+1)(\gamma-\alpha)x}{\gamma+1.\gamma+2}}{1-\cfrac{\frac{(\alpha+2)(\gamma+1-\beta)x}{\gamma+2.\gamma+3}}{\text{etc.}}}}}}$$

Also für $\alpha = 0$

[*) Zwischen die Gleichungen (35) und (36) hat GAUSS später die Gleichung hingeschrieben:]

$$F(\alpha-1,\beta+1,\gamma)-F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{(\alpha-\beta-1)x}{\gamma}F(\alpha,\beta+1,\gamma+1).$$

$$(41)\qquad 1+\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\beta.\beta+1}{\gamma\cdot\gamma+1}xx+\frac{\beta.\beta+1.\beta+2}{\gamma\cdot\gamma+1.\gamma+2}x^3+\text{etc.}$$

$$= \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{\beta}{\gamma}x}{1-\cfrac{\frac{2(\gamma-\beta)}{\gamma\cdot\gamma+1}x}{1-\cfrac{\frac{(\beta+1)\gamma}{\gamma+1.\gamma+2}x}{1-\frac{3(\gamma+1-\beta)}{\gamma+2.\gamma+3}x\ \text{etc.}}}}}$$

[5.]

[S. 42]

Mit Hülfe des vorhergehenden hat man nun auch sofort das Nöthige zur Bestimmung der Coefficienten der Reihe, in welche

$$\frac{1}{\sqrt{(aa+a'a'-2aa'\cos\varphi)}}$$

entwickelt wird. Setzt man dieselbe

$$T = A^0+2A'\cos\varphi+2A''\cos 2\varphi+2A'''\cos 3\varphi \text{ u.s.w.},$$

so wird, f statt $\frac{a}{a'}$ geschrieben und r[*)] statt $\cos\varphi+i\sin\varphi$,

$$\frac{1}{a'}(1-fr)^{-\frac{1}{2}}(1-fr^{-1})^{-\frac{1}{2}} = T,$$

also

$$a'A^0 = 1+\frac{1.1}{2.2}ff+\frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}f^4+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.2.4.4.6.6}f^6\dots = F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,f^2\right),$$

$$a'A' = \frac{1}{2}f\left(1+\frac{1.3}{2.4}ff+\frac{1.3.3.5}{2.4.4.6}f^4+\frac{1.3.3.5.5.7}{2.4.4.6.6.8}f^6\dots\right) = \frac{1}{2}f.F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},2,f^2\right),$$

$$a'A'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}ff\left(1+\frac{1.5}{2.6}ff+\frac{1.5.3.7}{2.6.4.8}f^4+\frac{1.5.3.7.5.9}{2.6.4.8.6.10}f^6\dots\right)$$
$$= \frac{1.3}{2.4}ff.F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{2},3,ff\right),$$

$$a'A''' = \frac{1.3.5}{2.4.6}f^3\left(1+\frac{1.7}{2.8}ff+\frac{1.7.3.9}{2.8.4.10}f^4+\frac{1.7.3.9.5.11}{2.8.4.10.6.12}f^6\dots\right)$$
$$= \frac{1.3.5}{2.4.6}f^3.F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{7}{2},4,ff\right)$$

u.s.w.

[*) Statt r steht in der Handschrift ρ.]

Aus der Verbindung der Gleichungen (15) und (19) folgt

$$\beta(\alpha-\gamma)x\,F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)$$
$$-\gamma(\gamma-1)\,F(\alpha,\beta-1,\gamma-1)+\gamma(\gamma-1+(\beta-\alpha)x)\,F(\alpha,\beta,\gamma)=0.$$

Also für unsern Fall, wo $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\gamma-\frac{1}{2}$,

$$-(\gamma-\tfrac{1}{2})^2 x\,F(\tfrac{1}{2},\gamma+\tfrac{1}{2},\gamma+1)-\gamma(\gamma-1)\,F(\tfrac{1}{2},\gamma-\tfrac{3}{2},\gamma-1)$$
$$+\gamma(\gamma-1+(\gamma-1)x)\,F(\tfrac{1}{2},\gamma-\tfrac{1}{2},\gamma)=0.$$

Es ist folglich, weil

$$ffA^{(\gamma-2)},\qquad fA^{(\gamma-1)},\qquad A^{(\gamma)}$$

proportional sind

$$\gamma(\gamma-1)\,F(\tfrac{1}{2},\gamma-\tfrac{3}{2},\gamma-1),\ (\gamma-\tfrac{3}{2})\gamma\,F(\tfrac{1}{2},\gamma-\tfrac{1}{2},\gamma),\ (\gamma-\tfrac{3}{2})(\gamma-\tfrac{1}{2})\,F(\tfrac{1}{2},\gamma+\tfrac{1}{2},\gamma+1),$$

allgemein [*)]

$$(43)\qquad \left(\gamma-\frac{3}{2}\right)A^{(\gamma-2)}-(\gamma-1)\left(f+\frac{1}{f}\right)A^{(\gamma-1)}+\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)A^{(\gamma)}=0,$$

also

$$A^{(0)}-2\left(f+\frac{1}{f}\right)A'+3A''=0,$$
$$3A'-4\left(f+\frac{1}{f}\right)A''+5A'''=0,$$
$$5A''-6\left(f+\frac{1}{f}\right)A'''+7A^{\mathrm{IV}}=0 \text{ etc.}$$

Man setze

$$(44)\qquad \frac{2}{1}\cdot\frac{1+ff}{f}\cdot\frac{A'}{A^0}=B^0,\quad \frac{4}{3}\cdot\frac{1+ff}{f}\cdot\frac{A''}{A'}=B',\quad \frac{6}{5}\cdot\frac{1+ff}{f}\cdot\frac{A'''}{A''}=B'' \text{ etc.},$$

so wird

$$(45)\qquad B^0=\frac{1}{1-\frac{9}{8}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2 B'},\quad B'=\frac{1}{1-\frac{25}{24}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2 B''},\quad B''=\frac{1}{1-\frac{49}{48}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2 B'''}$$

etc.

[S. 43]

Nun ist aber auch

[*) In der Handschrift steht hier »und«.]

$$B^0=\frac{(1+ff)\,F(\frac{1}{2},\frac{3}{2},2,ff)}{F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,ff)},\quad B'=\frac{(1+ff)\,F(\frac{1}{2},\frac{5}{2},3,ff)}{F(\frac{1}{2},\frac{3}{2},2,ff)} \text{ etc.}$$

Man hat also auch

$$(46)\qquad B^{(n-2)}=\cfrac{1+ff}{1-\cfrac{\frac{1.1}{(2n-2)2n}ff}{1-\cfrac{\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+2)}ff}{1-\cfrac{\frac{9}{(2n+2)(2n+4)}ff}{1-\cfrac{\frac{(2n+1)^2}{(2n+4)(2n+6)}ff}{1+\text{etc.}}}}}}$$

[6.]

Will man nun die Coefficienten A^0, A', A'' etc. bis incl. $A^{(n)}$ berechnen, so bestimmt man zuerst $B^{(n-1)}$ vermittelst der eben gegebnen Formel; sodann die vorhergehenden $B^{(n-2)}$, $B^{(n-3)}$ u.s.w. bis B^0 durch die Formeln (45) und endlich aus A^0, welches aus (42) oder durch specielle Methoden bestimmt seyn kann, vermittelst der Formeln (43) die übrigen A', A'' etc. Es ist hiebei bequem einen Hülfswinkel θ einzuführen, dessen Tangente $=f$. Man hat sodann

$$\frac{f}{1+ff}=\tfrac{1}{2}\sin 2\theta$$

und

$$A^0=\frac{1}{a'\text{ Medium inter 1 et }\sqrt{(1-ff)}}=\frac{\cos\theta}{a'\,M(\cos\theta,\sqrt{\cos 2\theta})}.$$

Will man ein für allemal eine Tafel berechnen, so ist es am zweckmässigsten, dieselbe nach den Winkeln θ zu ordnen, und des bequemern Interpolirens wegen nicht die Coefficienten A^0, A', A'' etc. selbst, sondern die Logarithmen von

$$a'A^0\sqrt{(1-ff)},\ \frac{a'A'\sqrt{(1-ff)}}{f},\ \frac{a'A''\sqrt{(1-ff)}}{ff},\ \frac{a'A'''\sqrt{(1-ff)}}{f^3} \text{ u.s.w.}$$

oder etwa von den doppelten Grössen einzutragen.

Setzt man also etwa

$$2a'A^0\sqrt{(1-ff)}=\varpi^0,\qquad 2a'A'\sqrt{(1-ff)}=\varpi'f,$$
$$2a'A''\sqrt{(1-ff)}=\varpi''ff,\quad 2a'A'''\sqrt{(1-ff)}=\varpi'''f^3 \text{ u.s.w.},$$

so ist die bequemste Art, die Rechnung zu führen, folgende:

Man suche das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen

$$\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}} = \xi \text{ und } \tfrac{1}{2} = \eta.$$

Dieses Mittel sei $= M$ und die successiven Werthe des arithmetischen Mittels ξ', ξ'', ξ''' u.s.w. Man setze

$$\zeta = \tfrac{1}{16}\xi\xi \operatorname{tang}\theta^2,\ \zeta' = \tfrac{\zeta\zeta}{\xi'\xi'},\ \zeta'' = \tfrac{\zeta'\zeta'}{\xi''\xi''} \text{ u.s.w.},$$

so ist

I $$\varpi^0 = \frac{1}{M}$$

II $$\varpi' = \varpi^0\left(\frac{1}{2} + \frac{\zeta'}{\zeta} + \frac{2\zeta''}{\zeta} + \frac{4\zeta'''}{\zeta} + \text{u.s.w.}\right).$$

[S. 44]

Diese zweite Formel soll eigentlich nur zur Controlle dienen, indem aus ϖ^0 die folgenden vermittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned} \varpi' &= \tfrac{1}{2}\varpi^0 B^0 \cos\theta^2, \\ \varpi'' &= \tfrac{3}{4}\varpi' B' \cos\theta^2, \\ \varpi''' &= \tfrac{5}{6}\varpi'' B'' \cos\theta^2 \text{ u.s.w.} \end{aligned}$$

abgeleitet werden.

Geht man hiebei bis ϖ^{X}, so hat man

$$B^{\mathrm{IX}} = \cfrac{1+ff}{1-\cfrac{\frac{1}{440}ff}{1-\cfrac{\frac{441}{528}ff}{1-\cfrac{\frac{9}{624}ff}{1-\cfrac{\frac{529}{728}ff}{1-\cfrac{\frac{25}{840}ff}{1-\frac{625}{960}ff \text{ etc.}}}}}}}$$

$$B^{\mathrm{X}} = \cfrac{1+ff}{1-\cfrac{\frac{1}{528}ff}{1-\cfrac{\frac{529}{624}ff}{1-\cfrac{\frac{9}{728}ff}{1-\cfrac{\frac{625}{840}ff}{1-\frac{25}{960}ff \text{ etc. [*)]}}}}}}$$

[7.]

[S. 45]

Wir kommen auf die Gleichung (30) zurück, und bemerken, dass wenn allgemein

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = P \text{ und } F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) = Q$$

gesetzt wird, die beiden Gleichungen Statt haben

$$\alpha\beta P - (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{dP}{dx} - (x-xx)\frac{d^2P}{dx^2} = 0,$$

$$\alpha\beta Q - (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{dQ}{dx} - (x-xx)\frac{d^2Q}{dx^2} = 0.$$

Hieraus folgt erstlich, dass das vollständige Integral der Gleichung

$$\alpha\beta y - (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx} - (x-xx)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

sey

$$y = \mathfrak{A}F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \mathfrak{B}F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x),$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Constanten sind.

[S. 46]

Zweitens, dass

$$-\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x-xx}dx = d\log(QdP - PdQ),$$

also

[31a] $$\frac{QdP-PdQ}{dx} = \frac{A}{x^\gamma(1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}.$$

[*) In der Handschrift folgt hier die durchgeführte Rechnung für das Beispiel $\theta = 36^\circ 20'$.]

Noch eine wichtige Verwandlung vollführt man auf folgende Art: Man setze

$$x = \frac{t}{t-1},$$

also

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(t-1)^2}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{(t-1)^3}.$$

Hiedurch verwandelt sich die Gleichung für $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = P$ in

$$\frac{\alpha\beta}{t-1}P - (\gamma + (\alpha+\beta-1-\gamma)t)\frac{dP}{dt} - (t-tt)\frac{d^2P}{dt^2} = 0.$$

Macht man also

$$P = (t-1)^\mu P',$$

so wird

$$\frac{\alpha\beta-\gamma\mu+\mu t(\gamma-\alpha-\beta+\mu)}{t-1}P' - (\gamma + (\alpha+\beta-1-\gamma-2\mu)t)\frac{dP'}{dt} - (t-tt)\frac{d^2P'}{dt^2} = 0.$$

Um den Bruch wegzuschaffen, setzt man

$$\alpha\beta - \alpha\mu - \beta\mu + \mu\mu = 0,$$

also entweder $\mu = \alpha$ oder $\mu = \beta$. Im ersten Falle wird

$$(-\alpha\beta+\alpha\gamma)P' - (\gamma-(\gamma+1+\alpha-\beta)t)\frac{dP'}{dt} - (t-tt)\frac{d^2P'}{dt^2} = 0,$$

woraus

$$P' = \mathfrak{A}'F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, t) + \mathfrak{B}'F(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, 1-t).$$

Hieraus folgert man leicht

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, -\frac{x}{1-x}\right)$$
$$= (1-x)^{-\beta}F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, -\frac{x}{1-x}\right).$$

Mit Hülfe dieser Verwandlung kann man die Werthe unserer Functionen für negative x auf die Werthe für positive reduciren.[*)]

$$F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{x}\right) = Ax^\alpha F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, x)$$
$$+ Bx^\beta F(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, x),$$

[*) Die folgenden Formeln ohne Text sind ersichtlich später hinzugefügt.]

$$A = (\cos\alpha\pi + i\sin\alpha\pi)\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\beta-1-\alpha)}{\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-1-\alpha)}$$

$$B = (\cos\beta\pi + i\sin\beta\pi)\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha-1-\beta)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\gamma-1-\beta)}.$$

[8.]

[S. 67]

Zu den oben gelieferten Untersuchungen können wir noch folgende wichtige Nachträge liefern.

I. $$(1+x)^\alpha F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \gamma, x) = F\left(\tfrac{1}{2}\alpha, \tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}, \gamma, \frac{4x}{(1+x)^2}\right),$$

II. $$(1+x)^{2\alpha}F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \gamma, xx) = F\left(\alpha, \gamma-\tfrac{1}{2}, 2\gamma-1, \frac{4x}{(1+x)^2}\right),$$

III. $$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}\cdot\frac{(\gamma+1-\alpha)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+1)(\gamma+1-\alpha-\beta)}\cdot\frac{(\gamma+2-\alpha)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+2-\alpha-\beta)} \text{ etc.}$$
$$= \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-1-\alpha-\beta)}{\Pi(\gamma-1-\alpha)\Pi(\gamma-1-\beta)},$$

wenn man durch Πz den Werth des Integrals

$$\int e^{-x}x^z dx$$

von $x = 0$ bis $x = \infty$ bezeichnet, welcher, falls z eine ganze Zahl ist, durch das Product $1.2.3.4\ldots z$ ausgedrückt wird.

IV. $$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{i^{\gamma-1}F(-i, \gamma-1, \gamma, 1)}{i^{\gamma-1-\alpha}F(-i, \gamma-1-\alpha, \gamma-\alpha, 1)}\cdot$$
$$\cdot\frac{i^{\gamma-1-\alpha-\beta}F(-i, \gamma-1-\alpha-\beta, \gamma-\alpha-\beta, 1)}{i^{\gamma-\beta-1}F(-i, \gamma-1-\beta, \gamma-\beta, 1)}F(\alpha, \beta, i+\gamma, 1),$$

V. $$F\left(\alpha, \beta, \tfrac{1}{2}, x\right) = \mathfrak{A}F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$+ \mathfrak{A}F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\tfrac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right),$$

wo

$$\mathfrak{A} = \frac{\Pi(-\frac{1}{2}).\Pi(-\frac{1}{2}-\alpha+\beta).\Pi(-\frac{1}{2}+\alpha-\beta)}{\Pi(-\frac{1}{2}-\alpha).\Pi(-\frac{1}{2}-\beta).\Pi(-\frac{1}{2}-\alpha-\beta)};$$

VI. $$F\left(\alpha, \beta, \tfrac{3}{2}, x\right) = \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{x}}F\left(2\alpha-1, 2\beta-1, \alpha+\beta-\tfrac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$- \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{x}}F\left(2\alpha-1, 2\beta-1, \alpha+\beta-\tfrac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right),$$

wo

$$\mathfrak{B} = \frac{2\alpha+2\beta-1}{(2\alpha-1)(2\beta-1)}\mathfrak{A}.$$

[9.]

Es sei ferner wie oben [art. 7.]

$$P = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad Q = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x),$$

so dass

$$Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx} = \frac{A}{x^{\gamma}(1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma}},$$

wo

$$A = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}.$$

Ferner

$$Q = B.P - \frac{A}{1-\gamma}\cdot x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$$

wo

$$B = \frac{\Pi(-\gamma)\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}.$$

[S. 68]

Hiedurch kann also die bei $x > 0,5$ langsamere Convergenz auf eine schnellere gebracht werden. Diess Verfahren ist jedoch nicht anwendbar, wenn $\gamma = 1$. Setzt man in diesem Fall

$$Q = R - AP\log x,$$

wo

$$A = \frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)},$$

so wird

$$R = A\Big(-2\Pi'0 - \frac{\Pi'(\alpha-1)}{\Pi(\alpha-1)} - \frac{\Pi'(\beta-1)}{\Pi(\beta-1)}\Big) + (1)\alpha\beta x + ((1)+(2))\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.1.2}xx$$
$$+((1)+(2)+(3))\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1.2.3.1.2.3}x^3 + \text{etc.},$$

wo

$$(1) = \frac{1-(2\alpha-1)(2\beta-1)}{2\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2,$$
$$(2) = \frac{4-2\alpha.2\beta}{4.\alpha+1.\beta+1} = \frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}-\frac{2}{2},$$
$$(3) = \frac{9-(2\alpha+1)(2\beta+1)}{6.\alpha+2.\beta+2} = \frac{1}{\alpha+2}+\frac{1}{\beta+2}-\frac{2}{3}$$

etc.

[10.]

$$\Pi(a-1)\Pi(-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad \Pi a.\Pi(-a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi},$$
$$\Pi a = \frac{1.2.3.4\ldots f.f^a}{1+a.2+a.3+a\ldots f+a} \quad \text{pro } f = \infty,$$
$$\frac{\Pi' a}{\Pi a} = -\frac{1}{1+a} - \frac{1}{2+a} - \frac{1}{3+a} - \frac{1}{4+a} - \ldots - \frac{1}{f+a} + \log f \ [\text{pro } f = \infty]$$
$$\frac{\Pi'(a-1)}{\Pi(a-1)} - \frac{\Pi'(-a)}{\Pi(-a)} = \pi \operatorname{cotang} a\pi.$$

BEMERKUNGEN.

Neben der lateinischen Bearbeitung der *Disquisitiones circa seriem*, über die SCHERING in den Bemerkungen zu dem aus dem Nachlaß herausgegebenen zweiten Teile dieser Abhandlung berichtet (Werke III, S. 230), verdient die vorstehende deutsche Bearbeitung derselben Abhandlung besondere Beachtung. Sie besteht aus zwei Teilen, die aber kurz hintereinander niedergeschrieben sein dürften; der erste umfaßt die artt. [1.]—[7.], der zweite die artt. [8.] und [9.], beide werden wohl auf das Jahr 1809 anzusetzen sein. Gegenüber den *Disquisitiones* (Werke III, S. 132) fällt zunächst auf, daß die Beziehungen zwischen verwandten Reihen (siehe die Gleichungen (2) bis (29), oben S. 339—342) hier immer in der besonderen Form gegeben werden, daß wenn $u = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, v eine verwandte Reihe, u', v' die Derivierten bedeuten,

$$v = Au + Bu', \quad v' = Cu + Du'$$

gesetzt wird, wo A, B, C, D gewisse rationale Funktionen von x sind. Es ist also diejenige Form der Transformation, durch welche die Differentialgleichung (30), der u genügt, in die (nach RIEMANN*)) zu derselben Klasse gehörige Differentialgleichung, der v Genüge leistet, übergeht.

Bei der Bestimmung der in der Gleichung (31) des art. [3.] auftretenden Konstanten A wird auf eine spätere Stelle verwiesen. Nun erscheint zwar im art. [7.] die analoge Gleichung [31 a] für beliebige Werte der α, β, γ und im art. [9.] wird die Darstellung dieser allgemeinen Konstanten mit Hilfe der Π-Funktion gegeben, aber ohne Beweis. Ein Beweis findet sich in dem nachgelassenen art. 50. der *Disquisitiones*, Werke III, S. 221. Bemerkenswert ist im art. [3.] das Beispiel $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, das dem arithmetisch-geometrischen Mittel entspricht; in diesem Falle ergibt sich $A = \frac{1}{\pi}$ und die Gleichung (31) ist nichts anderes als der Schöne Lehrsatz, oben S. 218, oder das Theorema elegantissimum, Werke VIII, S. 98. Im art. [4.] wird die EULERsche Gleichung (32), vergl. oben S. 329, ähnlich wie auch in dem nachgelassenen art. 40 der *Disquisitiones*, Werke III, S. 209, abgeleitet; »eine der merkwürdigsten Relationen« nennt sie GAUSS, ohne übrigens EULER zu erwähnen. Es folgen dann die Umwandlungen der Quotienten

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)} \text{ und } \frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma)}{F(\alpha, \beta, \gamma)}$$

in Kettenbrüche, ganz ähnlich wie im art. 12. der *Disquisitiones*, Werke III, S. 134. Die Frage der

*) B. RIEMANN, Gesammelte Werke, 2. Aufl., 1892, S. 380.

Konvergenz dieser Kettenbrüche hat GAUSS nicht erörtert, während er die Konvergenz der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ namentlich auch für den Punkt $x = 1$ in der Abhandlung von 1812 genau untersucht. Daß er aber über die formale Umformung hinaus auch die quantitative Bedeutung der Kettenbruchentwicklung erkannt hat, ergibt sich schon aus dem oben S. 237 abgedruckten Briefe an BESSEL, in dem die Brauchbarkeit der dort betrachteten besonderen Kettenbrüche für die numerische Berechnung maßgebend ist. — Wie L. W. THOMÉ *) gezeigt hat, konvergiert der Kettenbruch, der dem Quotienten

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)}$$

entspricht, in der ganzen komplexen x-Ebene mit Ausnahme der reellen Werte, die nicht kleiner sind als 1, und stellt dort den Quotienten jener Reihen bezw. den ihrer analytischen Fortsetzungen innerhalb der durch den Querschnitt $(1, +\infty)$ zerschnittenen Ebene dar.

Die artt. [5.], [6.] geben die Begründung der in dem Briefe an BESSEL, oben S. 237, auseinandergesetzten Entwicklungen, wobei wieder das agM. eine Rolle spielt, das diesmal auch ausdrücklich genannt wird. Die am Schluß von art. [7.] später hinzugeschriebenen Formeln enthalten schon die erst im art. [8.] eingeführte Π-Funktion. In den Gleichungen I., II. des art. [8.], die mit den Gln. [100], [101] Werke III, S. 225 gleichbedeutend sind, entspricht die angewandte Transformation von x^2 in $\frac{4x}{(1+x)^2}$ dem Übergang von $x = \frac{b}{a}$ zu $x_1 = \frac{b_1}{a_1}$, wo

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab};$$

vergl. auch in der Abhandlung von 1812, Werke III, S. 129 die dritte Form (»tertio fit«) der dort auftretenden Koeffizienten. In der Gleichung IV. kann i einen ganz beliebigen Wert haben. Zu V. vergleiche man Werke III, S. 227, Gleich. [106] und S. 228, Gleich. [107]. Für den am Schluß von art. [9.] behandelten Ausnahmefall $\gamma = 1$, der auch beim agM. auftritt, vergl. den nachgelassenen art. 45 der *Disquisitiones*, Werke III, S. 214, für art. [10.] die artt. [18.] und ff. der *Disquisitiones*, ebenda S. 144.

SCHLESINGER.

*) *Über die Kettenbruchentwickelung der Gaussschen Function* $F(\alpha, 1, \gamma, x)$. CRELLES Journal für Mathematik **66**, 1866, S. 322 und *Über die Kettenbruchentwickelung des Gaussschen Quotienten* $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) : F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, ebenda **67**, 1867, S. 299; siehe auch RIEMANNS aus dem Jahre 1863 stammendes Fragment *Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita*, in der Bearbeitung von H. A. SCHWARZ zuerst veröffentlicht 1876 in der 1. Auflage von RIEMANNS Gesammelten Werken, 2. Auflage, 1892, S. 424.

[IV.]

[NACHTRÄGE ZUM ART. 6. DER ABHANDLUNG VON 1812 *).]

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze u.s.w., May 1809.]

[S. 289]

[1.]

Zu den die Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1}xx \text{ u.s.w.}$$

betreffenden Relationen kann man noch beifügen:

$$0 = \gamma(\alpha-\beta)F(\alpha, \beta, \gamma) + \beta(\gamma-\alpha)F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) + \alpha(\beta-\gamma)F(\alpha+1, \beta, \gamma),$$

$$0 = \gamma(\gamma-1)F(\alpha, \beta-1, \gamma-1) + \gamma((\alpha-\beta)x-(\gamma-1))F(\alpha, \beta, \gamma) + \beta(\gamma-\alpha)xF(\alpha, \beta+1, \gamma+1).$$

[2.]

Bei Entwickelung von $(1+ff-2f\cos\varphi)^{-\theta}$ in die Reihe

$$A_0 + 2A_1\cos\varphi + 2A_2\cos 2\varphi + 2A_3\cos 3\varphi + \text{u.s.w.}$$

wird

$$A_0 = F(\theta, \theta, 1, ff),$$

$$A_1 = \theta f F(\theta, 1+\theta, 2, ff),$$

$$A_2 = \frac{\theta.1+\theta}{1.2}ff F(\theta, 2+\theta, 3, ff),$$

. . . .

$$A_n = \frac{\theta.1+\theta.2+\theta.3+\theta\ldots n-1+\theta}{1.2.3.4\ldots n}f^n F(\theta, n+\theta, n+1, ff).$$

[*) Siehe Werke III, S. 128.]

Setzt man den Factor

$$F(\theta, n+\theta, n+1, ff) = F_n,$$

so gibt die [zweite] obige Relation

$$0 = n(n+1)\{F_{n-1} - (1+ff)F_n\} + (n+\theta)(n+1-\theta)ffF_{n+1}.$$

[3.]

[Es ist]

$$F_n = (1-ff)^{-\theta} + \frac{\theta(\theta-1)}{n[+1]}(1-ff)^{-\theta-1}ff - \cdots.$$

Schon in der Formel S. 46 [des Handbuchs *)] ist enthalten

$$F_n = (1-ff)^{-\theta} F\left(\theta, 1-\theta, n+1, -\frac{ff}{1-ff}\right)$$

und [es] bleibt also nur übrig nachzuweisen, wie viel Bedeutung dieser Formel übrig bleibt, wenn sie divergirt.

[S. 290]

Die Ableitung der Gleichung

$$F(\theta, n+\theta, n+1, ff) = (1-ff)^{-\theta} F\left(\theta, 1-\theta, n+1, -\frac{ff}{1-ff}\right)$$

geschieht für diesen Zweck am passendsten, indem man die einzelnen Glieder des zweiten Theils nach Potenzen von ff entwickelt und alles, was einerlei Potenz von ff enthält, zusammenfasst, wo dann die Gleichheit mit dem betreffenden Gliede des ersten Theils leicht erkannt wird. Es ist z. B. das Glied des ersten Theils, welches f^6 enthält

$$\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}\cdot\frac{n+\theta.n+\theta+1.n+\theta+2}{n+1.n+2.n+3}f^6,$$

während aus dem zweiten Theil hervorgeht

*) [Gemeint ist die Formel, oben S. 350, $F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, -\frac{x}{1-x}\right)$]

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}\cdot f^6\\
-&\frac{\theta+1.\theta+2}{1.2}\cdot\frac{\theta.1-\theta}{1.n+1}\cdot f^6\\
+&\frac{\theta+2}{1}\cdot\frac{\theta.\theta+1}{1.2}\cdot\frac{1-\theta.2-\theta}{n+1.n+2}\cdot f^6\\
-&\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}\cdot\frac{1-\theta.2-\theta.3-\theta}{n+1.n+2.n+3}\cdot f^6\\
=&\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}\cdot f^6\cdot F(-3, 1-\theta, n+1, 1)\\
=&\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}f^6\cdot\frac{\Pi n.\Pi(n+2+\theta)}{\Pi(n+3)\Pi(n+\theta-1)} = \frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}\,\frac{n+\theta.n+\theta+1.n+\theta+2}{n+1.n+2.n+3}[\cdot f^6]
\end{aligned}$$

[4.]

[S. 291]

Setzt man

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}x + \frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1.\delta.\delta+1}xx + \text{u.s.w.} = \psi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x) = P,$$

so ist

$$\begin{aligned}
&(\alpha\beta-(\gamma-1)(\delta-1))P + ((\alpha+\beta+1)x-(\gamma+\delta-1))\frac{dP}{dx} + (xx-x)\frac{ddP}{dx^2}\\
&= \frac{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\gamma-1)(\delta-1)}{\gamma\delta} + \frac{\alpha\beta(\gamma-1)(\delta-1)((\alpha+1)(\beta+1)-(\gamma+1)(\delta+1))}{\gamma.\gamma+1.\delta.\delta+1}x\\
&= A+Bx.
\end{aligned}$$

Schreibt man

$$x = \frac{t}{t-1},$$

so wird die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha\beta-(\gamma-1)(\delta-1)}{t-1}P - ((\alpha+\beta-\gamma-\delta+2)t+\gamma+\delta-1)\frac{dP}{dt} + (tt-t)\frac{ddP}{dt^2}\\
&= \frac{-A+(A+B)t}{(t-1)^2}.
\end{aligned}$$

Diese Art führt nicht bequem zum Ziel. Wohl aber die auf S. 290 [des Handbuchs, siehe art. 3] angedeutete.

[5.]

Es kommt nur darauf an zu zeigen, dass für die Reihe[*)]

$$1-\frac{k(1-\theta)}{n+1}+\frac{k.k-1}{1.2}\,\frac{1-\theta.2-\theta}{n+1.n+2}-\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\,\frac{1-\theta.2-\theta.3-\theta}{n+1.n+2.n+3}+\text{u.s.w.},$$

[S. 292]
wo k eine ganze positive Zahl ist, eben so wie n, und deren Summe

$$=\frac{n+\theta.n+\theta+1.n+\theta+2\ldots n+\theta+k-1}{n+1.n+2.n+3\ldots n+k}=S$$

ist, bei unvollständiger Summirung bis zum $m$ten Gliede aber $=S_m$ gesetzt wird, allemahl $S-S_m$ dasselbe Zeichen hat, wie das erste weggelassene Glied. Für den Fall, wo $1-\theta$ positiv ist, wird dieser Beweis sehr leicht. Es alterniren nehmlich die Zeichen der Glieder der Reihe

$$1 \quad -a \quad +b \quad -c \quad +d\ldots\ldots g\ldots\ldots p$$

und absolut genommen nehmen sie zu bis zu einem gewissen Gliede z. B. g und von da an nehmen sie ab. Es ist dann klar, dass

$1-S$ positiv und kleiner als 1,
$1-a-S$ negativ und absolut kleiner als a,
$1-a+b-S$ positiv und kleiner als b,
$1-a+b-c-S$ negativ u.s.w.

sein wird. Die Schlussweise gilt, bis man bei der Summation zu g gelangt ist. Für die übrigen braucht man nur von hinten anzufangen, wo

das letzte Glied,
die algebraische Summe der beiden letzten,
die algebraische Summe der drei letzten, u.s.w.

eine Reihe mit alternirenden Zeichen bildet.

[S. 293]
Es scheint, dass der Beweis sich viel leichter dadurch führen lässt, dass man nachweiset, aus der Gültigkeit des Satzes bis zu einem gewissen Werth von k folge auch die Richtigkeit für den nächstfolgenden.

[*) In der Handschrift steht »dass wenn die Reihe«.]

[6.]

Nachdem dieser Satz fest steht, beachte man zunächst, dass die Entwickelung von

$$(1-ff)^{-\theta-\mu}$$

lauter Glieder von einerlei Zeichen hat, sobald $\mu+\theta$ positiv geworden ist. Dann ergibt sich aus dem Hülfssatz leicht, dass

$$F(\theta, n+\theta, n+1, ff)=A$$

gesetzt, [ferner]

$$(1-ff)^{-\theta}F\left(\theta, 1-\theta, n+1, -\frac{ff}{1-ff}\right)=B_\mu,$$

insofern von $F\left(\theta, 1+\theta, n+1, -\frac{ff}{1-ff}\right)$ die ersten μ Glieder summirt werden, während das nächstfolgende Glied $b_\mu+1$ heisst, $A-B_\mu$ dasselbe Zeichen haben wird, wie $b_\mu+1$.

Jener Hülfssatz ist übrigens ein spezieller Fall von dem Allgemeinern:

Wenn a, b, c, d u.s.w. positive Grössen sind, jede folgende grösser als die vorhergehende, so ist die Summe

$$a-kb+\frac{k.k-1}{1.2}c-\frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}d+\text{u.s.w.}$$

wo man auch abbricht, immer mit demselben Zeichen behaftet, wie das letzte zugezogene Glied.

Man wendet diess an, indem man von hinten anfängt. Der Satz bleibt auch wahr, wenn von irgend einer Stelle an die Grössen a, b, c, d u.s.w. alternirende Zeichen haben.

BEMERKUNG.

Dieser Aufzeichnung (der letzten des Handbuchs 19, Be) geht unmittelbar vorher (auf S. 288 des Handbuchs) die von SCHERING in den Bemerkungen Werke III, S. 230 erwähnte Berechnung von log Πi und Πi. Daß diese, wie SCHERING angibt, »nach dem Jahre 1847« anzusetzen ist, folgt daraus, daß sich auf S. 276 des Handbuchs die Zeitangabe »1847, Mai 13« findet. Natürlich gilt dieselbe Zeitbestimmung für die vorstehend abgedruckte Aufzeichnung. Zu dem Gegenstande vergleiche man den art. 6. der *Disquisitiones circa seriem*, Werke III, S. 128.

SCHLESINGER.

BRIEFWECHSEL.

[1.]

GAUSS an BESSEL. Göttingen 21. October 1810.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL, Leipzig 1880, S. 128—129.]

. . . . . . Durch Ihre Untersuchung über das Integral

$$\int \frac{dx}{\log x}$$

haben Sie mir eine grosse Freude gemacht. Ich hatte im Grunde denselben Weg eingeschlagen, bin aber bei weiten nicht so weit darauf vorwerts gegangen, wie Sie Ich setzte nämlich $x = e^y$, wodurch das Integral

$$\int \frac{e^y dy}{y}$$

wird. Um diess von $y = a$ bis $y = a + t$ zu integriren, verwandle ich

$$\frac{e^{a+t} dt}{a+t}$$

in

$$\begin{aligned} e^a dt \Big\{ \frac{1}{a} + \frac{t}{a} &+ \frac{tt}{2a} + \frac{t^3}{6a} + \\ -\frac{t}{aa} &- \frac{tt}{aa} - \frac{t^3}{2aa} - \\ &+ \frac{tt}{a^3} + \frac{t^3}{a^3} + \text{etc.} \Big\} \end{aligned}$$

also das Integral

$$\begin{aligned} = e^a \Big\{ &\frac{1}{a} \left(t + \frac{1}{2} tt + \frac{1}{6} t^3 + \text{etc.} \right) \\ &- \frac{1}{aa} \left(\frac{1}{2} tt + \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{6} t^4 + \text{etc.} \right) \\ &+ \frac{1}{a^3} \left(\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{10} t^5 + \text{etc.} \right) \\ &\qquad \text{etc.} \Big\} \end{aligned}$$

wo man die Coefficienten von $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$ etc. für bestimmte Werthe von t ein für allemal berechnen kann. Offenbar kann man auch t negativ setzen, und dann kommt die Operation mit der Ihrigen überein. Nur hatte ich mich beschränkt, für t rationale Werthe $\frac{1}{2}$ und 1 zu substituiren, und so die Integrale für $y = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ bestimmt . . . .

[2.]

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 17. Oktober 1811.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 1, (1900), S. 482.]

. . . .

Meine Pallasrechnungen haben nun seit 6 Wochen ganz ruhen müssen. Ich habe mich viel diese Zeit her mit den transcendenten Functionen, worauf die Integration der Gleichung

$$(\alpha + \beta x + \gamma xx) \frac{ddy}{dx^2} + (\delta + \varepsilon x) \frac{dy}{dx} + \zeta y = 0$$

führt, beschäftigt und sehr artige Sachen gefunden. Die meisten transcendenten Functionen, mit denen man sich bisher beschäftigt hat, sind darunter als specielle Fälle begriffen. — Auch mit den unexplicabeln Functionen

$$1 . 2 . 3 \ldots x \text{ und } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$$

hängt diese Untersuchung zusammen.

[3.]

Gauss an Bessel. Göttingen, 21. November 1811.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, Leipzig 1880, S. 151—154.]

. . . . Mit Vergnügen sehe ich aus Ihrem Briefe, dass Sie auch über die Facultäten gearbeitet haben. Wahrscheinlich werden sich unsre Ansichten öfters begegnen. Ich arbeite nemlich jetzt an einer Abhandlung für unsere Soc[ietät], die in etwa 6 Wochen vollendet seyn wird, und die Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1}xx+\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1.2.3.\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3+\text{etc.}$$

betrifft, und auch die Functionen, die mit Kramps Facultäten[*)] zusammenhangen, berührt. Eine solche Function ist allerdings in der Analyse einzuführen; ich finde es aber nicht zweckmässig, eine solche, wie Kramp gethan hat, $a^{b|c}$, die von drei veränderlichen Grössen abhangt aufzunehmen, da man mit einer Function Einer veränderlichen Grösse $1^{x|1}$ vollkommen eben so weit reicht. Also das Product

$$1.2.3\ldots x=\Pi x$$

ist die Function, die meiner Meinung nach in der Analyse eingeführt werden muss, und auf die so wie auf die davon derivirten Functionen

$$\frac{d\Pi x}{\Pi x.dx}\ \text{etc.}$$

unzählige Aufgaben sich zurückführen lassen. Will man sich aber nicht wie Kramp zahllosen Paralogismen und Paradoxen und Widersprüchen[**)] blossstellen, so muss $1.2.3\ldots x$ nicht als **Definition** von Πx gebraucht werden, da eine solche nur, wenn x eine ganze Zahl ist, einen bestimmten Sinn hat, sondern man muss von einer höheren **allgemein**, selbst auf imaginäre Werthe von x anwendbaren, Definition ausgehen, wovon, wie Sie mit Recht bemerken,

[*) Siehe: *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, par le citoyen Kramp, Leipzig 1799, Chapitre III, Analyse des facultés numériques, S. 46 ff.]

[**) Siehe z. B. die von Bessel, *Briefwechsel*, S. 200, erwähnten Stellen in Kramps Abhandlung: § 40, S. 56 und § 200, S. 108.]

jene als specieller Fall erscheint. Ich habe folgende gewählt[*)]:

$$\Pi x=\frac{1.2.3\ldots k.k^x}{x+1.x+2.x+3\ldots x+k},$$

wenn k unendlich wird. Ich freue mich, dass unsere Ansichten hier wie in andern Puncten zusammentreffen.

Das **Wesen** einer Function ist das **Bestimmtseyn**, und darauf gründet sich das Haupterforderniss einer guten Definition. Höchst verwerflich ist daher eine Definition aus einer ihrer Natur nach divergirenden Reihe wie Kramp's Γx[**)], welches

$$=\log\Pi\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\log x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Eine Reihe die nicht immer convergirt, wie meine obige, kann auch nur innerhalb der Schranken, wo sie convergirt, als Definition gelten, und die Frage was aus der Function werden soll***), wenn man ihr Argument jene Schranken überschreiten lässt, verträgt nur dann erst eine Antwort, wenn ein höheres

[*) In Wirklichkeit geht diese Definition der Funktion Πx auf Euler zurück, der sich in dem Briefe an Goldbach vom 13. Oktober 1729 (P. H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique* I, St Pétersbourg 1843, S. 3) und in den *Institutiones calculi differentialis* II, 1755, cap. XVII, Opera omnia ser. I, vol. 10, S. 641 zur Definition von $x!$ des unendlichen Produkts

$$\frac{1^{1-x}.2^x}{1+x}\cdot\frac{2^{1-x}.3^x}{2+x}\cdot\frac{3^{1-x}.4^x}{3+x}\cdots$$

bedient. Gauss weist (*Disquisitiones circa seriem*, art. 20, Werke III, S. 145, 146) selbst — allerdings ohne Euler zu nennen — auf die Identität seiner Definition von Πx mit der von Euler gegebenen hin.]

[**) Siehe a. a. O. § 179, S. 102, wo Γy durch die Reihe

$$\beta y+\tfrac{1}{3}\delta y^3+\tfrac{1}{5}\zeta y^5+\tfrac{1}{7}\vartheta y^7+\cdots$$

erklärt wird, in der nach § 129, 130, S. 85

$$\beta=\tfrac{1}{12},\ \delta=-\tfrac{1}{120},\ \zeta=\tfrac{1}{252},\ \vartheta=-\tfrac{1}{240},\ldots$$

also

$$\beta=\tfrac{1}{2}\mathfrak{A},\ \delta=-\tfrac{1}{4}\mathfrak{B},\ \zeta=\tfrac{1}{6}\mathfrak{C},\ \vartheta=-\tfrac{1}{8}\mathfrak{D},\ldots,$$

wo $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D},\ldots$ die Bernoullischen Zahlen sind; vergl. den art. 20. der *Disquisitiones circa seriem*, Werke III, S. 152.]

***) Man sollte überhaupt nie vergessen, dass die Functionen, wie alle mathematischen Begriffszusammensetzungen, nur unsere eignen Geschöpfe sind, und dass, wo die Definition, von der man ausging, aufhört einen Sinn zu haben, man eigentlich nicht fragen soll **was ist?** sondern was **convenirt anzunehmen?** damit ich immer consequent bleiben kann. So z. B. das Product aus $-\cdot-$.

Princip zur Definition aufgefunden ist, wie bei meiner Reihe die Differentialgleichung

$$0 = \alpha\beta P - (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{dP}{dx} - (x - xx)\frac{ddP}{dx^2}\text{*)}.$$

Auf gleiche Art fallen alle Paradoxa, die einige Mathematiker bei den Logarithmen gefunden haben, von selbst weg, wenn man nicht von der gewöhnlichen Definition basis $^{\text{logar.}}$ = Zahl ausgeht, die eigentlich nur dann recht befriedigend ist, wenn der Exponent eine ganze Zahl ist, und ganz [und gar] keinen Sinn gibt, wenn der Exponent gar imaginär werden soll — sondern jede Grösse die in der Reihe

$$1 + x + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x^3 + \text{etc.} \ldots$$

für x subst[ituirt] ihr den Werth A gibt, Logarithm von A[**)] nennt; wie ich mit Vergnügen sehe, hat der Portugiese Acunha[***)] diese Definition wirklich gewählt — in einer schlechten Rec[ension] in unseren Gel[ehrten] Anz[eigen †)] ist er deswegen getadelt — aber freilich die nöthigen Beweise, dass allgemein

$$(1 + x + \tfrac{1}{2}xx \ldots)(1 + y + \tfrac{1}{2}yy \ldots) = 1 + (x+y) + \tfrac{1}{2}(x+y)^2 + \cdots$$

nur schlecht, nemlich bloss durch Induction ausgeführt, obgleich es so sehr leicht streng zu beweisen ist.

So wie es mir immer Vergnügen macht, in Wesentlichen Dingen mit Ihnen, lieber Bessel, zusammen zu treffen, so kann ich nicht leugnen, dass ich auch mit Vergnügen bemerke, wenn wir in Kleinigkeiten, die mehr nur Sache des Geschmacks sind, uns begegnen. Noch heute las ich ihre Recension

*) Nach welcher jedem, reellen oder imaginären Werthe von x vermittelst eines stetigen Überganges von $x = 0$, ohne $x = 1$ zu berühren (was durch imaginäre Zwischenwerthe geschehen kann), ein, gewöhnlich mehrere, ja unendlich viele Werthe von P entsprechen.

[**) In der Handschrift steht x statt A.]

[***) José Anastasio da Cunha, *Principios Mathematicos*, Lisboa 1790. Gauss kannte wahrscheinlich die Übersetzung *Principes Mathématiques* de feu J.-A. da Cunha, traduits littéralement du Portugais par J. M. d'Abreu, Bordeaux 1811, siehe Livre IX, S. 117 ff., wo in dem von Gauss angegebenen Sinne von den Potenzen und Logarithmen gehandelt wird.]

[†) Göttingische Gelehrte Anzeigen 1811, 181. Stück, S. 1801, siehe besonders S. 1804—1805; diese Anzeige bezieht sich auf die französische Übersetzung des in Rede stehenden Werks.]

von Cagnoli in der Jen[aischen] A[llgemeinen] L[iteraturzeitung*)], wo es mich freute, dass Sie sich gegen das widerwärtige ∼ erklären. Auch ist mir jedesmal fatal das garnicht analogische $\sin^2\varphi$, obgleich auch Laplace es gebraucht; fürchtet man, dass $\sin\varphi^2$ zweideutig werden könne (was doch vielleicht nie oder höchst selten eintritt, wenn man von $\sin(\varphi^2)$ spräche), ei nun, so schreibe man $(\sin\varphi)^2$ aber nicht $\sin^2\varphi$, was der Analogie nach nur $\sin(\sin\varphi)$ bedeuten sollte. Noch unausstehlicher ist mir das barbarische den Franzosen nachgeäffte »Sey $a = b$«. Es sind diess freilich alles nur nichtswürdige Kleinigkeiten, aber wenn mir bei einer analytischen Ausführung Eleganz immer ein wohlthuender Genuss ist, so mag ich auch gern, dass am äusseren Kleide nichts mein Auge beleidigt. . . . .

[4.]

Gauss an Bessel. Göttingen, den 18. Dezember 1811.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel. Leipzig 1880, S. 155.]

Seit einigen Tagen habe ich endlich das Königsberger Archiv, das ich mir verschrieben hatte, empfangen. Mit grossem Interesse habe ich Ihren ersten Aufsatz[**)], theuerster Bessel, gelesen und den andern[***)] wenigstens vorerst durchblättert. Jener und die schönen Hülfsmittel, die er darbietet, das li für grosse Zahlen zu berechnen, sind mir jetzt um so angenehmer, da ich unlängst eine schöne in diesem Jahr zu Deventer erschienene Factorentafel von Chernac[†)] bis 1020000 erhalten habe, aus welcher ich nach und nach die Primzahlen von Myriade zu Myriade abzählen lassen will, um sie

[*) Jahrgang 1811, Nr. 206, 207, *Recensionen von Fr. W. Bessel*, herausgegeben von Engelmann, Leipzig 1878, S. 138; die Rezension bezieht sich auf die *Trigonométrie rectiligne et sphérique* par Antoine Cagnoli, traduite de l'Italien par N. M. Chompré, 2$^{\text{de}}$ éd., Paris 1808.]

[**) *Untersuchung der durch das Integral* $\int\frac{dx}{lx}$ *ausgedrückten transcendenten Function*, Königsberger Archiv für Naturwissenschaften und Medicin 1, 1812, S. 1, Fr. W. Bessels Abhandlungen II, Leipzig 1876, S. 330.]

[***) *Über die Theorie der Zahlenfacultäten*, Königsberger Archiv u.s.w. 1, 1812, S. 241, Fr. W. Bessels Abhandlungen II, 1876, S. 342.]

[†) *Cribrum Arithmeticum sive tabula continens numeros primos etc.*, confecit Ladislaus Chernac, Pannonius, Daventriae 1811, vergl. auch Gauss' Anzeige dieses Werks, Gött. Gel. Anzeigen 1812, S. 477, Werke II, S. 181.]

mit dem Werthe des Integrals

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$$

von $x = 0$ an gerechnet zu vergleichen[*]. Sie haben mir den Wunsch zu erkennen gegeben, dass ich diese Aufsätze in unseren Gel[ehrten] Anz[eigen] anzeigen mögte: unsere Freundschaft, lieber BESSEL, macht es mir zur Pflicht, ehe ich es thue, mich schriftlich mit Ihnen über einen oder den andern Punct zu unterhalten, wo meine Ansicht nicht ganz mit der Ihrigen übereinstimmt. Nehmen Sie also die folgenden Bemerkungen gütig auf und theilen mir Ihre Meinung darüber eben so freimüthig und offen mit, als ich die meinige. Ich meine aus einer Ihrer gelegentlichen Äusserungen schliessen zu können, dass Ein Grundsatz uns beiden gemein ist: »Es gibt in der Mathematik keine wahren Controversen« und so zweifle ich nicht, dass wir uns durch den wechselseitigen Austausch unserer Ideen schon verständigen werden.

Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Function in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloss auf reelle Grössen (reelle Werthe des Arguments der Function) angewandt wissen will, und die imaginären Werthe des Arguments gleichsam nur als ein Überbein ansieht, oder ob er meinem Grundsatze beitrete, dass man in dem Reiche der Grössen die imaginären $a + b\sqrt{-1} = a + bi$ als gleiche Rechte mit den reellen geniessend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbstständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingirten Grössen ausserordentlich an Schönheit und Ründung verlieren und alle Augenblick Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genöthigt seyn würde. Ich glaube voraussetzen zu müssen, dass Sie im Wesentlichen über diesen Punct mit mir einstimmen, da schon Ihre Erklärungen im Artikel 18.[**] zeigen, dass Sie keineswegs sich den Weg zu Untersuchungen über $\mathrm{li}\,(a+bi)$ versperren wollen. Was soll man sich nun bei $\int \varphi x . dx$ für $x = a + bi$ denken? Offenbar, wenn man von klaren Begriffen ausgehen will, muss man annehmen, dass x durch unendlich kleine Incremente (jedes von der Form $\alpha + \beta i$) von

[*] Vergl. hierzu die Werke II, S. 435 abgedruckte *Tafel der Frequenz der Primzahlen* und den Brief an ENCKE vom 24. Dezember 1849, ebenda S. 444.]

[**] Siehe FR. W. BESSELs Abhandlungen II, Leipzig 1876, S. 341, 1. Spalte.]

demjenigen Werthe, für welchen das Integral 0 seyn soll, bis zu $x = a + bi$ übergeht, und dann alle $\varphi x . dx$ summirt. So ist der Sinn vollkommen festgesetzt. Nun aber kann der Übergang auf unendlich viele Arten geschehen: so wie man sich das ganze Reich aller reellen Grössen durch eine unendliche gerade Linie [dargestellt] denken kann, so kann man das ganze Reich aller Grössen, reeller und imaginärer Grössen, sich durch eine unendliche Ebne sinnlich machen, worin jeder Punct, durch Abscisse $= a$, Ordinate $= b$ bestimmt, die Grösse $a + bi$ gleichsam repräsentirt. Der stetige Übergang von einem Werthe von x zu einem andern $a + bi$ geschieht demnach durch eine Linie und ist mithin auf unendlich viele Arten möglich.

Ich behaupte nun, dass das Integral $\int \varphi x . dx$ nach zweien verschiednen Übergängen immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi x = \infty$ wird. Diess ist ein schöner Lehrsatz*), dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde. Er hängt mit schönen andern Wahrheiten die Entwicklungen in Reihen betreffend zusammen. Der Übergang nach jedem Puncte lässt sich immer ausführen, ohne jemals eine solche Stelle, wo $\varphi x = \infty$ wird, zu berühren. Ich verlange daher, dass man solchen Puncten ausweichen soll, wo offenbar der ursprüngliche Grundbegriff von $\int \varphi x . dx$ seine Klarheit verliert und leicht auf Widersprüche führt. Übrigens ist zugleich hieraus klar, wie eine durch $\int \varphi x . dx$ erzeugte Function für einerlei Werthe von x mehrere Werthe haben kann, indem man nemlich beim Übergange dahin um einen solchen Punct, wo $\varphi x = \infty$[**] entweder gar nicht, oder einmal, oder mehreremale herumgehen kann. Definirt man z. B. $\log x$ durch

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx,$$

von $x = 1$ anzufangen, so kommt man zu $\log x$ entweder ohne den Punct $x = 0$ einzuschliessen oder durch ein- oder mehrmaliges Umgehen desselben; jedesmal kommt dann die Constante $+2\pi i$ oder $-2\pi i$ hinzu: so sind die

*) Eigentlich ist hiebei noch angenommen, dass φx selbst eine einförmige Function von x ist, oder wenigstens für deren Werth innerhalb jenes ganzen Flächenraumes nur Ein System von Werthen ohne Unterbrechung der Stetigkeit angenommen wird.

[**] In der Handschrift steht $x = \infty$.]

vielfachen Logarithmen von jeder Zahl ganz klar. Kann φx nie für einen endlichen Werth von x unendlich werden, so ist das Integral immer nur eine einförmige Function. Diess ist z. B. der Fall für

$$\varphi x = \frac{e^x - 1}{x},$$

so dass

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$$

gewiss eine einförmige Function von x ist, deren Werth durch die immer convergirende, also immer einen und nur Einen Sinn habende Reihe dargestellt wird

$$x + \frac{1}{4}xx + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{96}x^4 + \text{etc.}$$

Ich wollte, Herr Soldner hätte, da er doch einmal eine neue Function einführen wollte[*)], statt seines

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\log x}$$

lieber jene gewählt, da eine einförmige Function immer ohne Vergleich als classischer und einfacher anzusehen ist als eine vielförmige, zumal da $\log x$ selbst schon eine vielförmige Function ist. Es wäre vielleicht gut, auch für

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$$

oder wenigstens für

$$\int \frac{e^x\, dx}{x}$$

ein eignes Zeichen und Namen einzuführen, um so mehr da bei den Aufgaben aus der Physik [, die] auf $\operatorname{li} x$ führen, gemeiniglich x selbst eine Exponentialgrösse ist. Wenn man die Wahrheiten für Soldners li auf mein

$$\int \frac{e^x\, dx}{x},$$

das ich einmal Kürze halber mit $\operatorname{Ei} x$, Exponentiallogarithmen bezeichnen will,

[*) Johann Georg v. Soldner, *Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendente*, München 1809.]

übertragen will, so ist die Integration so anzunehmen, dass Ei einer reellen negativen unendlichen Grösse verschwindet.

Ich habe alles dieses vorausgeschickt, um meine Ansicht zu begründen, dass ich Eulern beitreten muss, wenn er sagt[*)], dass

$$\int \frac{dx}{\log x},$$

falls es für $x < 1$ reell angenommen werde, für Werthe > 1 nothwendig imaginäre Werthe erhalte. Ihre Differenz von den reellen, welche Mascheroni[**)], Soldner und Sie ihm beilegen, ist $= \pi i$ oder $3\pi i$ oder $5\pi i$ etc. Den Übergang durch $x = 1$ statuire ich nicht; man würde auf ganz ähnliche Art beweisen können, dass $\log -x = \log +x$ (ein Satz, den man gelten lassen kann, wenn man sich auf reelle Grössen einschränkt, der aber sogleich wegfallen muss, wenn man dem Reiche aller Grössen meinem obigen Grundsatze zufolge zwei Dimensionen beilegt.) Machen Sie $\operatorname{li} x$ reell für irgend einen Werth von x zwischen 0 und 1, gut! Aber welche Werthe wollen sie nun

$$\operatorname{li}(0{,}5 + 0{,}001\,i),\quad \operatorname{li}(0{,}6 + 0{,}001\,i),\quad \operatorname{li}(0{,}7 + 0{,}001\,i),\quad \operatorname{li}(0{,}8 + 0{,}001\,i),$$
$$\operatorname{li}(0{,}9 + 0{,}001\,i),\quad \operatorname{li}(1{,}0 + 0{,}001\,i),\quad \operatorname{li}(1{,}1 + 0{,}001\,i) \text{ etc. bis } \operatorname{li}(1{,}5 + 0{,}001\,i)$$

beilegen? Imaginäre ohne Zweifel, aber sie sollen doch dem Gesetze der Stetigkeit folgen, nirgends ein Sprung ex abrupto seyn? Gehen Sie dann von $\operatorname{li}(1{,}5 + 0{,}001\,i)$, indem Sie den imaginären Theil $0{,}001\,i$ auf 0 abnehmen lassen, [zu li 1,5] über, so kommen sie gewiss nicht auf einen reellen Werth von li 1,5, sondern auf einen, welchem $-\pi i$ anhängt Bei dem, was Sie zum Beweise gegen Euler und mich beibringen, finde ich zu erinnern 1) dass Sie sagen, soll $\operatorname{li} x$ im ganzen Umfange reell werden, so muss man etc., allein das Sollen hängt ja nicht von uns ab, wenn die Stetigkeit nicht ohne Ursache aufgehoben werden darf, und es soll ja eben bewiesen werden, dass es im ganzen Umfange reell genommen werden darf. 2) Allerdings ist

$$\int \frac{dy}{y}$$

[*) *Institutiones calculi integralis* I, 1768, § 228. L. Euleri Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 128.]

[**) Lorenzo Mascheroni, *Adnotationes ad calculum integralem Euleri*, Ticini, 1790, Adnotatio I, wieder abgedruckt in L. Euleri Opera omnia, ser. I, vol. 11, siehe dort S. 432.]

sowohl $\log y$ als $\log -y$, aber nie beides zugleich, sondern das erstere, wenn man das Integral von $y = 1$ anfangen lässt, das zweite, wenn es von $y = -1$ anhebt; das zweite Integral ist eben so wie das erste in dem allgemeinen $\log y + C$ begriffen, wenn man das einemal $C = 0$, das zweite mal $C = \pm \pi i$ oder $\pm 3\pi i$ etc. setzt. Sehr wahr aber ists, dass EULERS Bemerkung insofern einer Berichtigung bedarf, als keineswegs C unendlich wird, wenn das Integral von $z = 0$ anheben soll[*)]. — Meiner Ansicht nach darf man also nicht setzen

$$\int \frac{dx}{\log x} = C + l(\pm lx) + \text{etc.},$$

sondern muss sich entweder zu $l(+lx)$ oder zu $l(-lx)$ erklären, aber nur zu einem bestimmt entschliessen. —

Übrigens glaube ich, dass die Ausdehnung der Untersuchungen auf imaginäre Argumente zu höchst interessanten Resultaten Anlass geben wird. Doch mögte ich aus den oben angeführten Gründen lieber die Function

$$\int \frac{e^x - 1}{x} dx$$

als

$$\int \frac{dx}{\log x}$$

wählen, weil ich vermuthe, dass erstere concinnere Resultate geben wird. So zum Beispiel, möchte ich sehr gern wissen, ob jene Function oder, was dasselbe ist, die Reihe

$$x + \frac{1}{4} xx + \frac{1}{18} x^3 + \text{etc.}$$

für gewisse endliche Werthe von x von der Form $a + bi$ wol 0 werden kann. Mit Gewissheit kann ich es noch nicht behaupten, ob wol es mir sehr wahrscheinlich ist. Gibt es solche Werthe (dann gewiss unendlich viele), so werden diess sehr merkwürdige Grössen seyn und die ganze Reihe wird sich in unendliche Factoren der Form $(1 + 2\alpha x + \beta xx)$ zerlegen lassen[**)]. —

Von ein Paar andern Kleinigkeiten kann ich diessmal nur einige Worte hinzusetzen. Ich hätte gewünscht, dass Sie etwas umständlicher (pag. 6[***)] am

[*) Siehe *Institutiones calculi integralis* I, a. a. O.]

[**) Vergl. den S. 374 folgenden Brief an BESSEL vom 5. Mai 1812.]

[***) FR. W. BESSEL, Abhandlungen II, 1876, S. 331, 1. Spalte.]

Ende der Note) gezeigt hätten, wie die **allgemeine Gültigkeit** des Gesetzes des continuirlichen Bruches nach **Ihrem angedeuteten Verfahren** folge. Die Constante 0,577... hatte ich schon vor längerer Zeit auf 23 Stellen auf doppeltem Wege aus 10 und 20 Gliedern berechnet und von der 20^{sten} an von MASCHERONI verschieden gefunden, nemlich $\overset{18}{0}60653$[*)]; ich glaube, dass meine Zahl die richtige ist, habe aber die Rechnungen selbst nicht aufgehoben. — Mit verschiedenen Ihrer Untersuchungen werden Sie in meiner nun bald vollendeten Abhandlung Berührungspuncte finden. — Die Ableitungen Artikel 17.[**)], die sich auf divergirende Reihen und divergirende unendliche Producte gründen, also auf einen immer etwas schlüpferigen Weg, möchten doch wol noch einigen Bedenklichkeiten Platz lassen. — . . . .

[5.]

GAUSS an LAPLACE.

Göttingen ce 30. Janvier 1812

Monsieur

Je vous dis mille remercimens pour les deux memoires que vous m'avés fait l'honneur de m'envoyer[***)] et que j'ai reçus dans ces jours. Les fonctions que vous y traités aussi bien que les questions de probabilités, sur lesquelles vous preparés un grand ouvrage ont un grand attrait pour moi, quoique j'aie peu travaillé moimeme sur les dernieres. Je me rappelle pourtant d'un probleme curieux, duquel je me suis occupé il y a 12 ans, mais lequel je n'ai pas reussi alors à resoudre à ma satisfaction[†)]. Peut être daignerés vous

[*) Siehe MASCHERONI, a. a. O. S. 431; die zwanzigste, einundzwanzigste und zweiundzwanzigste Stelle sind bei MASCHERONI in der Tat fehlerhaft, dagegen sind von der dreiundzwanzigsten Stelle an die Ziffern richtig, bis zur letzten (zweiunddreißigsten), die um eine Einheit erhöht werden muß. Man wird hiernach bei MASCHERONI einen Druckfehler vermuten. Die von GAUSS hier als 3 angegebene dreiundzwanzigste Stelle lautet richtig 1, vergl. auch *Disquisitiones circa seriem* art. 31, Werke III, S. 154, Text und Fußnote. Die bei MASCHERONI fehlerhaften Ziffern hat auch SOLDNER a. a. O. S. 13 richtig angegeben.]

[**) FR. W. BESSEL, Abhandlungen II, 1876, S. 340, 1. Spalte.]

[***) Es handelt sich wohl um die beiden folgenden Abhandlungen von LAPLACE: *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités*, Mémoires de l'Académie des Sciences **10** (1809), Paris 1810, S. 353 und *Mémoire sur les intégrales définies et sur leur application aux probabilités etc.*, ebenda **11** (1810), Paris 1811, S. 279.]

[†) Siehe die Tagebuchaufzeichnung Nr. 113 vom 25. Oktober 1800.]

vous en occuper quelques momens: dans ce cas je suis sur que vous trouverés une solution plus complete. Le voici. Soit M une quantité inconnue entre les limites 0 et 1, pour laquelle tou[te]s les valeurs sont ou egalement probables ou plus ou moins selon une loi donnée: qu'on la suppose convertie en une fraction continue

$$M = \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \text{etc.}}}$$

Quelle est la probabilité, qu'en s'arretant dans le developpement à un terme fini, $a^{(n)}$, la fraction suivante

$$\cfrac{1}{a^{(n+1)} + \cfrac{1}{a^{(n+2)} + \text{etc.}}}$$

soit entre les limites 0 et x? Je la designe par $P(n, x)$ et j'ai en supposant pour M toutes les valeurs egalement probables

$$P(0, x) = x;$$

$P(1, x)$ est une fonction transcendente dependante de la fonction

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$$

que EULER nome inexplicable et sur la quelle je viens de donner plusieurs recherches dans un memoire presenté à notre societé des sc[iences] qui sera bientot imprimé[*)]. Mais pour les cas ou n est plus grand, la valeur exacte de $P(n, x)$ semble intraitable. Cependant j'ai trouvé par des raisonnemens tres simples que pour n infini on a

$$P(n, x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

Mais les efforts que j'ai fait lors de mes recherches pour assigner

$$P(n, x) - \frac{\log(1+x)}{\log 2}$$

pour une valeur tres grande de n, mais pas infinie, ont été infructueux.

. . . .

[*)] *Disquisitiones circa seriem etc.*, der Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 30. Januar 1812, Werke III, S. 123; siehe insbesondere S. 154 ff.]

J'ai fait usage de la methode des moindre[s] carrés depuis l'an 1795 et je trouve dans mes papiers, que le mois de Juin 1798 est l'epoque où je l'ai rapprochée aux principes du calcul des probabilités: une note la dessus se trouve dans un journal que j'ai tenu sur mes occupations mathematiques depuis l'an 1796, et que j'ai montré dans ces jours à Mr. DE LINDENAU[*)].

Cependant mes applications frequentes de cette methode ne datent que des l'année 1802, depuis ce tems j'en fait usage pour ainsi dire tous les jours dans mes calculs astronomique[s] sur les nouvelles planetes. Comme je m'etois proposé depuis ce tems de reunir toutes les methodes dont je me suis servi dans un ouvrage etendu, (que j'ai commencé 1805 et dont le Manuscrit d'abord en allemand étoit achevé en 1806, mais lequel à la priere de Mr. PERTHES j'ai traduit depuis en latin; l'impression a commencé en 1807 et n'est finie qu'en 1809[**)]), je ne me suis pas haté d'en publier un morceau detaché, ainsi Mr. LEGENDRE m'est prevenu. Au reste j'avais deja communiqué cette meme methode, beaucoup avant la publication de l'ouvrage de M. LEGENDRE[***)], à plusieurs personnes, entre autres à Mr. OLBERS en 1803 qui certainement doit se le rappeler. Ainsi, pouvais je dans ma *theorie des mouvement[s] des planetes*, parler de la methode des moindre[s] quarrés, dont j'avais fait depuis 7 ans mille et mille applications, dont j'avais developpé la theorie, dans la section 3me du II.livre de cet ouvrage[†)], du moins en allemand, beaucoup avant d'avoir vu l'ouvrage de Mr. LEGENDRE — je dis, pouvais je parler de ce principe, que j'avais annoncé a plusieurs de mes amis deja en 1803 comme devant faire partie de l'ouvrage que je preparois, — comme d'une methode empruntée de Mr. LEGENDRE? Je n'avait pas l'idée, que

[*)] Es handelt sich hier um die Aufzeichnung des *Tagebuchs* Nr. 88 vom 17. Juni 1798; siehe auch den Brief an OLBERS vom 24. Januar 1812, Werke VIII, S. 140. Vergl. zum folgenden überhaupt die Werke VIII, S. 136—141 abgedruckten Veröffentlichungen und Briefstellen, wo übrigens S. 138 und S. 139 das Jahr 1794 — nicht wie im Text und in der *Theoria motus*, art. 186, Werke VII, S. 253, 1795 — als dasjenige angegeben ist, seitdem GAUSS die Methode der kleinsten Quadrate angewandt hatte.]

[**)] *Theoria motus corporum coelestium*, Hamburgi 1809, Werke VII (1906), S. 1.]

[***)] A. M. LEGENDRE, *Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris 1806, datiert vom 6. März 1805; ABBE hat 1871 noch auf eine zweite vor der *Theoria motus* erschienene Arbeit verwiesen, nämlich auf die des Amerikaners ADRAIN: *Research concerning the probabilities of the errors wich happen in making observations*, The Analyst or Mathem. Museum 1, 1808, S. 93, der unabhängig von LEGENDRE zur Methode der kleinsten Quadrate gelangt sein soll.]

[†)] A. a. O. artt. 175—186, Werke VII (1906), S. 240—254.]

Mr. LEGENDRE pouvait attacher tant de prix à une idée aussi simple, qu'on doit plutot s'etonner qu'on ne l'a pas eue depuis 100 ans, pour se facher que je raconte, que je m'en suis servi avant lui? En effet il serait tres facile de le prouver à tout le monde par des temoignages qu'on ne saurait refuser, si cela valait la peine. Mais j'ai cru que tous ceux qui me connaissent le croiroient meme sur ma parole, ainsi que je l'aurait cru de tout mon coeur si Mr. LEGENDRE avait avancé, qu'il avait possedé la methode deja avant 1795. J'ai dans mes papiers beaucoup de choses, donc peut etre je pourrai perdre la priorité de la publication: mais soit, j'aime mieux faire mûrir les choses.

. . . .

Continués, Monsieur, de m'honorer de votre bienveillance, que je range parmi les choses les plus essentielles à mon bonheur.

CH. FR. GAUSS.

[6.]

GAUSS an BESSEL. Göttingen, 5. Mai 1812.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL. Leipzig 1880, S. 169—174.]

. . . . Meine Abhandlung über die transscendenten Functionen[*)] habe ich, weil ihr Umfang zu gross wurde, theilen müssen. Der erste Theil wurde schon im Januar der Societät übergeben und ist jetzt auch bereits abgedruckt. Er enthält, obgleich eigentlich nur als Nebenuntersuchungen, das Hauptsächlichste was ich bis jetzt über die transsc[endente] Function

$$\Pi x = 1.2.3\ldots x$$

und

$$\Psi x = \frac{d\Pi x}{\Pi x . dx}$$

zu sagen weiss. Auch eine Tafel für beide Functionen oder vielmehr log brigg. Πx, und Ψx, von $x = 0$ bis $x = 1$ durch alle Hunderttheile. Ich würde dieser Tafel ersten Theil, da ich aus Ihrem vorletzten Briefe erfuhr, dass Sie eine Ähnliche für $\log \Pi x$ berechnet haben, beim Abdruck meiner Abhandlung weg-

[*) *Disquisitiones circa seriem etc.* 1812, Werke III, S. 123.]

geschnitten haben, wenn nicht die zweite für Ψx (welche Herr NICOLAI sorgfältig unter meiner Aufsicht berechnet hatte auf 18 Decimalen) mit ihr in so genauer Verbindung stände. Ausserdem ist meine Tafel für $\log \Pi x$ auf 20 Decimalen berechnet, wovon die letzte hin und wieder auf 1 oder 2 Einheiten ungewiss seyn kann. Man kann daraus also auch die Logarithmen aller Sinus auf ebensoviele Decimalen ableiten, wenn man ihrer bedarf. Den zweiten Theil meiner Abhandlung hoffe ich auch bald vollenden zu können.[*)]

. . . .

Ungern schreibe ich Ihnen heute über die Realität oder Nicht-Realität der Integrallogarithmen, und zwar deswegen ungern, weil ich in einem Gedränge von andern Geschäften nicht Zeit gewinnen kann, Ihnen so ausführlich diessmal zu schreiben als ich wünschte und als nöthig wäre. Indess kann ich doch auch nicht ganz davon schweigen, und füge also noch einiges darüber bei, mit dem Wunsche, dass Sie solches nicht missverstehen mögen. Sie scheinen mir, theuerster BESSEL, in Ihrem vorletzten Briefe nicht so wohl auf meine Ansichten entrirt zu seyn und darauf geantwortet zu haben, als vielmehr einige ganz neue Gründe für die Realität aufzustellen. Und doch scheint mir noch jetzt eine bestimmte Erklärung vorausgehen zu müssen, ob die Untersuchung, schlechthin und auf immer, nur auf reelle Argumente der Function

$$\int \frac{e^x dx}{x} = Fx$$

d. i. auf reelle Werthe von x eingeschränkt oder auch auf imaginäre ausgedehnt werden soll. In jedem dieser beiden Fälle würde ich mich auf eine verschiedene Weise über die Sache erklären. Im letztern Fall sehe ich die imaginären Werthe von x nicht als Hors d'Oeuvres, sondern als eben so gute Grössen an wie die reellen, und dann ist leicht zu zeigen, dass bei einem Übergange von einem negativen reellen Werthe von x zu einem positiven reellen (und zwar bei einem Übergange nicht durch Zero, denn diesen statuire ich nicht, weil man sich da gar nichts klares denken kann, sondern durch die imaginären Werthe, welcher auf 1000 verschiedne Arten geschehen kann, z. B. indem Sie

$$x = a(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

[*) Der hier folgende Teil des Briefes ist astronomischen Inhalts und bereits im VII. Band der Werke, S. 421 abgedruckt.]

setzen und φ von 180^0 bis 360^0 wachsen lassen) keine Stetigkeit Statt findet, wenn Sie nicht allgemein

$$Fx = A + \log x + x + \tfrac{1}{2}xx \text{ etc.}$$

setzen. — Im erstern Falle hingegen, wenn man x bloss auf reelle Werthe einschränkt (was Sie aber doch nicht thun zu wollen scheinen) würde ich sagen, die Definition von Fx sei nur halb bestimmt: Die Werthe derselben für positive x sind von denen für negative durch eine unübersteigliche Kluft getrennt, sie bilden zwei Systeme für sich, zwischen denen entweder nur die Willkür oder irgend ein fremdes, ein neues Princip eine Verbindung stiften kann. Desswegen würde ich es in diesem Fall als zulässig betrachten, Fx immer reell anzunehmen, und, weil diess das einfachste ist, für negative x

$$Fx = A + \log(-x) + x + \tfrac{1}{2}xx + \cdots,$$

für positive

$$Fx = A + \log(+x) + \text{etc.}$$

setzen (denn meiner Meinung nach hätte man übrigens eben so viel Recht, auch ein andres A für positive, ein andres für negative anzunehmen, obwol diess unnatürlich seyn würde). Das fremde oder neue Princip, was hier zur Completirung der Definition dient, wäre, dass $F\omega$ und $F(-\omega)$ sich der Gleichheit desto mehr nähern sollen, je kleiner ω ist. Aber zweckmässiger scheint mir doch auch in diesem Falle folgendes Princip zu seyn: »Wenn $\Phi(Fx)$ eine solche Function ist, die für ein sich dem 0 unendlich näherndes x einen endlichen Werth behält, so soll die Stetigkeit in dem Puncte $x = 0$ nicht unterbrochen werden.« Nehme ich nun z. B. die Function

$$e^{Fx} = y,$$

so wird deren Stetigkeit offenbar unterbrochen, wenn Sie nicht allgemein

$$Fx = A + \log x + \text{etc.}$$

setzen, also Fx imaginär für positive x, wenn Sie es für negative reell genommen haben. So liesse sich der Fall denken, dass bei Ihrer Art, die Integrallogarithmen zu fassen, man bei einer Aufgabe in die Nothwendigkeit käme zu sagen, die Auflösung sei:

$$y = e^{\mathrm{li}\, t}$$

so lange $t < 1$ und

$$y = -e^{\mathrm{li}\, t}$$

so bald $t > 1$. —

Das Wesentlichste, was ich auf Ihre neuen Gründe erwidern würde, besteht etwa in folgendem.

1⁰. Ihre Bemerkung, dass die Entwicklung von $f(x+\lambda)$ in eine Reihe nach Potenzen von λ nach Taylors Satze Ausnahmen leidet, scheint mir bei der Entwicklung von Fx in

$$A + \log x + x + \tfrac{1}{2}xx + \text{etc.}$$

nicht ganz anwendbar zu seyn, da ja $\log x$ keine Potenz von x ist und also eigentlich nicht Fx sondern $Fx - \log x$ in eine solche Reihe entwickelt wird, und hiebei fällt Ihr Grund für die Ausnahme weg. — Ich weiss übrigens auch nicht, dass das Taylorsche Theorem jemals eine unrichtige Reihe geben kann, so lange sie convergent bleibt [*)], und so bald sie aufhört convergent zu seyn, hat ihre Summe als Summe keinen Sinn.

2⁰. Sie schliessen aus

$$\mathrm{li}\, x - \mathrm{li}\, \frac{1}{x} = C + 2(\log x + \text{etc.})$$

indem Sie $x = 1$ setzen, $C = 0$. Allein diess halte ich nicht für verstattet, weil ich mir bei li 1 gar keine eigentliche Grösse denken kann. Sie könnten nach derselben Form des Beweises auch ableiten $\frac{1}{0} = 0$. Bezeichnet man die Function $\frac{1}{x}$ durch fx, so ist $fx + f(-x) = 0$. Also $f0 + f0 = 0$. Erlaubt man sich also $f0$ als eine bestimmte Grösse anzusehen, so folgt hieraus $2f0 = 0$ oder $f0 = 0$ [**)].

3⁰. Auf Ihre Bemerkung, dass Sie $\mathrm{li}\, x$ als die Summe aller $\frac{dx}{\log x}$ [***)] von 0 an ansehen, ist im Vorigen schon implicite geantwortet. Sie können dann ohne ein neues Princip zu Hülfe zu nehmen über $x = 1$ nicht hinaus.

[*) Bekanntlich kann sich dieser Fall im Gebiete der realen Veränderlichen wohl ereignen, wie das von Cauchy angeführte Beispiel der Entwicklung von $e^{-\frac{1}{x^2}}$ nach Potenzen von x zeigt.]

[**) Die drei letzten Sätze dieses Absatzes lauteten ursprünglich anders; in einer Nachschrift vom 10. Mai 1812 hat Gauss die ursprüngliche Fassung durch die im Text wiedergegebene ersetzt.]

[***) In der Handschrift steht $\int \frac{dx}{\log x}$.]

Ich wünsche nichts mehr, liebster Bessel, als dass Sie diese Bemerkungen gütig aufnehmen und die Eile, womit sie niedergeschrieben sind, entschuldigen mögen. Vielleicht interessirt Sie noch folgender Zusatz zu meinem letzten Briefe[*)]. Ich habe den kleinsten imaginären Werth, der $Fx - \log x$ oder

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx = x + \tfrac{1}{4} xx + \text{etc.}$$

$= 0$ macht, sorgfältig berechnet und gefunden

$$x = 3{,}183\,297 \pm 6{,}896\,441 \sqrt{-1}$$
$$= 7{,}598\,016\,(\cos 65^0\, 12'\, 20{,}''8 \pm i \sin 65^0\, 12'\, 20{,}''8).$$

Der nächste Werth ist beiläufig

$$x = 3{,}796 \pm 13{,}296\, i.$$

Ich erkenne aber in diesen Zahlen bis jetzt nichts classisches.

. . . .

[7.]

Gauss an Laplace.

Göttingen le 5 nov. 1812

Monsieur

Je vous dois encore mille remercimens pour le precieux cadeau, que vous m'avés fait l'honneur de me faire de votre *Théorie des Probabilités*[**)]: M. Olbers m'a remis le second volume et Mr. de Lindenau le premier. Il est superflu de dire, combien la lecture de cet ouvrage m'a été et est encore intéressante et instructive. Vous aurés reçu une copie d'un mémoire sur une fonction transcendante très-générale, que j'ai eu l'honneur de vous envoïer. Ce mémoire ne contient que la première partie de mes recherches sur cette matière, je n'ai pas encore eu le loisir d'achever le second mémoire, qui en contiendra la suite. En effet outre les occupations habituelles de ma place, les calculs sur les perturbations m'ont couté depuis deux ans beaucoup de tems. Souvent je serais tenté de le regretter comme pouvant [être] peut être mieux

[*) Siehe oben S. 370.]

[**) P. S. Laplace, *Théorie analytique des Probabilités*, Paris 1812.]

emploïé qu'à des calculs machinals, si la considération de l'utilité d'un tel travail ne me consolait. Peut être il faudra encore une année entière pour achever les calculs de la perturbation produite par Jupiter seulement. Récemment pour prendre un peu de relâche après des calculs fastidieux, je me suis occupé du problème célèbre des attractions d'un spheroïde elliptique[*)]. C'est vous, Monsieur, qui il y a 30 ans en avés donné le premier la solution complette[**)], dont j'ai admiré tant de fois la subtilité. Je me flatte que la manière nouvelle, dont je traite cette question meritera l'attention des geometres. J'ai composé la dessus un mémoire qui sera lu bientôt à la Societé Roïale et ensuite imprimé parmi ses »Commentationes«[***)]. J'ai l'honneur de vous offrir ici un Extrait de ce qui est essentiel au probleme cité, et je vous prie de le presenter à l'Institut, duquel plusieurs membres ont bien merité du même probleme. Vous verrés avec plaisir que deux pages m'ont suffi pour obtenir la solution complette.

Continués Monsieur de m'honorer de votre bienveillance et agréés l'assurance de la plus profonde estime, avec laquelle j'ai l'honneur d'être votre très humble serviteur

Charles-Frederic Gauss.

BEMERKUNGEN.

Die vorstehenden von Gauss zwischen dem 21. Oktober 1810 und dem 5. November 1812 geschriebenen Briefstellen gewähren einen Einblick in die verschiedenartigen Gedankenverbindungen, die Gauss um die Zeit der Abfassung der *Disquisitiones circa seriem* an die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ angeknüpft hat. Das Interesse von Gauss am Integrallogarithmus geht, wie der Werke II, S. 444 abgedruckte Brief an Encke zeigt, bis in die Göttinger Studentenzeit zurück †), dem oben abgedruckten Briefe [5.] an Laplace entnehmen wir, daß Gauss sich auch schon 1800 mit der inexplikabeln Funktion $\Psi(x)$ beschäftigt hat.

Zu der Stelle des Briefes [3.] an Bessel, wo von der Fortsetzung der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ auf Grund eines »höheren Prinzips« die Rede ist, vergleiche man die Schlußsätze des nachgelassenen art. 38. der Abhandlung *circa seriem*, Werke III, S. 209—210. Die bei Acunha (1790) auftretende Erklärung des Logarithmus durch Umkehrung der Exponentialreihe, die Gauss in demselben Briefe lobend erwähnt, findet sich

[*) Vergl. die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 142 vom 26. September und Nr. 143 vom 15. Oktober 1812.]

[**) *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes*, Histoire de l'Académie des Sciences, Année 1782, Paris 1785, Mémoires de Math. et Phys., S. 113.]

[***) *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo novo tractata.* Soc. Reg. Scient. tradita XVIII. Mart. MDCCCXIII, Werke V, S. 1.]

†) Vergl. auch den Abschnitt [I.] des folgenden Hauptstücks *Zur Lehre von den Reihen*.

auch in den beiden Preisschriften, die WOLFGANG und JOHANN BOLYAI 1837 der JABLONOWSKIschen Gesellschaft der Wissenschaften eingereicht hatten; siehe P. STÄCKEL, *Wolfgang und Johann Bolyai, Geometrische Untersuchungen*, Leipzig 1913, I, S. 129, 245 und II, S. 228. Über die Bezeichnung $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$ hat sich GAUSS in ähnlicher Weise wie hier S. 365 im Jahre 1814 auch öffentlich geäußert, siehe Werke IV, S. 361; vergl. dazu auch *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* III, S. 292.

Zu den auf die Integration im komplexen Gebiet bezüglichen Erörterungen des Briefes [4.] an BESSEL *) vergleiche man das im folgenden als Abschnitt [VI.] der *Lehre von den Reihen* abgedruckte Bruchstück *Bestimmung der Convergenz der Reihen u.s.w.*

Über die von GAUSS in dem Briefe [5.] berührte Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung vergleiche man die Bemerkung zu der Aufzeichnung Nr. 113 in dem unten folgenden Abdruck des *Tagebuchs*. Zu der in demselben Briefe erörterten Prioritätsfrage, oben S. 373—374, ist noch folgendes zu bemerken. In einem an GAUSS gerichteten Briefe **) vom 31. Mai 1809 schreibt LEGENDRE in Bezug auf die Methode der kleinsten Quadrate:

»Je ne vous dissimulerai-donc pas, Monsieur, que j'ai éprouvé quelque regret de voir qu'en citant mon mémoire pag. 221 [***)], vous dites principium nostrum quo jam inde ab anno 1795 usi sumus etc. Il n'est aucune découverte qu'on ne puisse s'attribuer en disant qu'on avoit trouvé la même chose quelques années auparavant; mais si on n'en fournit pas la preuve en citant le lieu où on l'a publiée, cette assertion devient sans objet et n'est plus qu'une chose désobligeante pour le véritable auteur de la découverte. En Mathématiques il arrive très souvent qu'on trouve les mêmes choses qui ont été trouvées par d'autres et qui sont bien connues; c'est ce qui m'est arrivé nombre de fois, mais je n'en ai point fait mention et je n'ai jamais appellé principium nostrum un pr[incipe] qu'un autre avait publié avant moi. Vous êtes assez riche de [votre] fonds, Monsieur, pour n'avoir rien à envier à personne; et [je suis] bien persuadé au reste que j'ai à me plaindre de l'expression seulement et nullement de l'intention . . . .«

Daß GAUSS in seinem Briefe auf diese Prioritätsfrage einging, war durch einen an ihn gerichteten Brief von LAPLACE vom 15. November 1811 verursacht, in dem es in bezug auf die Methode der kleinsten Quadrate heißt:

»Monsieur GAUSS dit dans son ouvrage sur le mouvement elliptique qu'il la possedait avant que M. LE GENDRE l'ait publiée; je desirerois bien sçavoir si avant cette publication on avait imprimé quelque chose en allemagne sur cette méthode et je prie Monsieur GAUSS de vouloir bien m'en instruire.«

In bezug auf den Auszug aus der Abhandlung über die Anziehung der elliptischen Sphäroide, den GAUSS dem Briefe [7.] beigelegt hatte (siehe oben S. 379) vergleiche man die Briefe an SCHUMACHER vom 31. Dezember 1812, *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* I, 1860, S. 95, und an OLBERS vom 8. April 1813, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 515. In seinem Antwortschreiben vom 20. November 1812 schreibt LAPLACE darüber das folgende:

»A votre lettre était jointe une demonstration très simple du theorème sur les attractions des spheroides elliptiques. j'ai commencé par le lire et j'ai été ravi de sa simplicité. elle a produit le même effet sur ceux des membres de l'institut qui se sont occupés de cet objet et aux quels je l'ai communiquée suivant vos intentions. cette demonstration a quelque analogie avec une demonstration fort simple du même

*) Dieser Teil des Briefes ist auch schon Werke VIII, S. 90—92 abgedruckt.

**) Der Brief befindet sich im GAUSSarchiv; die in der folgenden Wiedergabe eingeklammerten Worte sind aus der Handschrift beim Öffnen des Briefes weggeschnitten worden.

***) Werke VII, 1906, S. 253.

theorème, donnée par M. JVORI, geometre anglais, dans la seconde partie des transactions philosophiques de 1809 [*)]. peut être, vous ne la connaissés pas; je vous engage à la voir. . . . .«

Diese Mitteilung von LAPLACE erwähnt GAUSS in dem *Additamentum* zu seiner Abhandlung, Werke V, S. 21 und in seiner *Anzeige* vom 5. April 1813 in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen, Werke V, S. 279, siehe insbesondere S. 285.

Die vorstehend wiedergegebenen Auszüge aus Briefen von LAPLACE sind ebenso wie die Briefstellen [1.], [3.], [4.], [6.] an BESSEL nach den im GAUSSarchiv befindlichen Handschriften, die an LAPLACE nach den ebenda befindlichen Abschriften abgedruckt. Es sind Abschriften von 8 Briefen von GAUSS an LAPLACE vorhanden, deren Urschriften sich in Paris im Privatbesitz befinden, die Abschriften sind 1877 angefertigt und von J. BERTRAND, dem damaligen vorsitzenden Sekretär der Pariser Akademie der Wissenschaften, beglaubigt.

SCHLESINGER.

*) JAMES IVORY, *On the Attractions of homogeneous Ellipsoids* Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1809, S. 345.

[ZUR LEHRE VON DEN REIHEN.]

[I.]

NEUE METHODE DIE SUMME DER DIVERGIRENDEN REIHE
$1-1+2-6+24-\text{etc.}\ [=]\ 0{,}5963\ldots$
ZU FINDEN.

[Ein Blatt in Fa, Kapsel 46 a.]

1.

Es sei

[1] $$x-x^2+2x^3-6x^4+\text{etc.}=\xi$$

und man wird finden

[2] $$\xi+xx\xi'-x=0.$$

Diese Different[ial] Gl[eichung] muss so integrirt werden, dass für $x=0$, $\xi=0$ werde; der Werth von ξ, für $x=1$, den wir c nennen[*)], ist die gesuchte Summe.

2.

Wir bekommen durch fortgesetzte Differentiation folgende Gleich[ungen]:

$$\begin{gathered}
\xi+xx\xi'-x=0\\
(1+2x)\xi'+xx\xi''-1=0\\
2\xi'+(1+4x)\xi''+xx\xi'''=0\\
6\xi''+(1+6x)\xi'''+xx\xi^{\mathrm{IV}}=0\\
12\xi'''+(1+8x)\xi^{\mathrm{IV}}+xx\xi^{\mathrm{V}}=0\\
\text{etc.}
\end{gathered}$$

[*) In der Handschrift wird dieser Wert mit e bezeichnet.]

3.

Hieraus folgt, dass für $x=1$

$$\begin{aligned}
\xi &= c\\
\xi' &= -c+1\\
\xi'' &= +3c-2\\
\xi''' &= -13c+8\\
\xi^{\mathrm{IV}} &= +73c-44\\
\xi^{\mathrm{V}} &= -501c+300\\
\xi^{\mathrm{VI}} &= +4051c-2420\\
\xi^{\mathrm{VII}} &= -37633c+22460.
\end{aligned}$$

4.

Mithin der Werth von ξ für $x=1-\omega$

[3] $$\left\{\begin{aligned}
&c\left(1+\omega+\tfrac{3}{2}\omega^2+\tfrac{13}{6}\omega^3+\tfrac{73}{24}\omega^4+\tfrac{501}{120}\omega^5+\text{etc.}\right)\\
&-\left(\omega+\omega^2+\tfrac{8}{6}\omega^3+\tfrac{44}{24}\omega^4+\tfrac{300}{120}\omega^5+\tfrac{2420}{720}\omega^6+\text{etc.}\right)
\end{aligned}\right.$$

Diese Reihen convergiren, wenn $\omega<1$.

5.

Endlich ist

[4] $$c=\frac{\omega+\omega\omega+\frac{8}{6}\omega^3+\text{etc.}}{1+\omega+\frac{3}{2}\omega^2+\text{etc.}}$$

[5] $$=1-\frac{1}{6}\omega^2-\frac{1}{6}\omega^3-\frac{1}{8}\omega^4-\frac{7}{90}\omega^5-\frac{37}{1008}\omega^6-\frac{17}{3360}\omega^7\ldots$$

für $\omega=1$; also

$$\begin{aligned}
[1-]c = 0{,}1667&\\
1666&\\
125\,.&\\
778&\\
367&\\
\hline
5728&\\
51&
\end{aligned}$$

[6.]

[6] $$(A+ax)y+(B+bx)y'+(C+cx)y''\ldots=0$$

[7] $$Pe^{px}+Qe^{qx}+\ldots$$

$$\left.\begin{array}{r} A.P+BPp\ldots \\ +A.Q+BQq\ldots \end{array}\right\}=0$$

[8] $$\frac{1}{x}y+xy'=1$$

[9] $$-\frac{1}{xx}y+\left(1+\frac{1}{x}\right)y'+xy''=0\,[^*)]$$

[10] $$y=e^{\alpha x}+e^{\beta x}$$

[11] $$\frac{\int e^{-1:x}dx:x}{e^{-1:x}}.$$

[7.]

[Eintragungen im Leiste.]

[S. 58]

$$1-x+\frac{xx}{4}-\frac{x^3}{36}+\text{etc.}=\varphi$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}-\text{etc.}=\psi$$

$$\varphi'=-\psi:x,\qquad \psi'=\varphi.$$

[S. 65]

$$z=1-x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{4.9}+\ldots[=\varphi]$$

$$x\frac{dz}{dx}=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4.3}+\frac{x^4}{4.9.4}\text{ etc. }[=-\psi]$$

[12] $$x\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}+z=0.$$

[13] $$z=yx^m,\quad \frac{dz}{dx}=mx^{m-1}y+x^m\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2m+1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{mm}{xx}+\frac{1}{x}\right)y\,[=0]$$

[*) In der Handschrift steht irrtümlich: $\frac{1}{x}y+\left(1-\frac{1}{xx}\right)y'+xy''=0.$]

[14] $$m=-\tfrac{1}{2}$$

[15] $$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)y\,[=0].$$

[8.]

[Aus dem *Tagebuch*, Nr. 82.]

Seriei

[16] $$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{144}x^4\ldots[=\psi]$$

summam consideravimus invenimusque eam $=0$, si

[17] $$2\sqrt{x}+\frac{3}{16}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{21}{1024}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\cdots=\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi\,[^*)]$$

Brunsv[igae,] Oct. 16. [1797]

BEMERKUNGEN.

Mit der Aufgabe, die »Summe« der divergenten Reihe

(α) $$1-1+2!-3!+4!-5!+\cdots$$

zu finden, hat sich Euler in seiner Abhandlung *De seriebus divergentibus* **) beschäftigt. Die Reihe ist, wie Euler (a. a. O. S. 213, § 13) bemerkt, »a Wallisio hypergeometrica dicta, signis alternantibus instructa« ***). Im art. 1. des vorstehenden Bruchstücks schließt sich Gauss ganz an Euler an. Euler bildet (a. a. O. § 19, S. 220) die Reihe [1], zeigt, daß sie formal der Differentialgleichung [2] genügt, stellt dann die allgemeine Lösung von [1] in der Form [11] dar und erklärt die »Summe« von (α) durch die Gleichung

(β) $$c=1-1+2-6+\cdots=e\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x}.$$

Durch Verwandlung der Reihe [1] in einen Kettenbruch (a. a. O. § 21, S. 224) findet Euler dann für c den Wert 0,5963473621237 †). Im Sinne von H. Poincaré kann man die Beziehung der divergenten

[*) In der Handschrift steht links vom Gleichheitszeichen im dritten Gliede $\sqrt{.3x}$ statt $\sqrt{x^3}$; vergl. in den Bemerkungen S. 389 die Bestätigung der obigen Formel.]

**) Novi Commentarii Acad. Petropol. 5 (1754/5) 1760, S. 205

***) Hypergeometrisch heißt nach J. Wallis (*Arithmetica infinitorum*, 1655, Propositio 190.) eine Reihe, deren n-tes Glied das Produkt der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe ist. Auch Gauss bedient sich im art. 29 der Abhandlung *circa seriem*, Werke III, S. 159 dieses Kunstausdrucks.

†) In den *Institutiones calculi differentialis*, 1755, Pars posterior, Cap. I, § 10, III (L. Euleri Opera

Potenzreihe [1] zu der Differentialgleichung [2], der sie formal genügt, so aussprechen, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{x^n}(\xi_0 - x + 1!\,x^2 - 2!\,x^3 + \cdots + (-1)^n (n-1)!\,x^n),$$

wo

$$(\gamma)\qquad \xi_0 = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x}$$

ist, für jeden positiven ganzzahligen Wert von n sich dem Grenzwerte Null nähert, wenn x als reale positive Größe in den Punkt $x = 0$ einrückt*); man sagt die Reihe [1] stelle die Lösung (γ) der Differentialgleichung [2] für kleine positive Werte von x asymptotisch dar.

Gauss schlägt zur Bestimmung der durch die Gleichung (β) definierten Konstanten c in den artt. 2.—5. der vorstehenden Aufzeichnung den folgenden Weg ein. Er entwickelt die allgemeine Lösung der Differentialgleichung [2] nach Potenzen von $\omega = 1-x$; diese in der Umgebung der regulären Stelle $x = 1$, d. h. also für $|\omega| < 1$ konvergente Entwicklung [3] hängt linear von dem Werte c ab, den die Lösung für $x = 1$ annimmt, und zwar ist in [3] die mit c multiplizierte Reihe die Entwicklung von $e^{\frac{1}{x}-1}$, die in der zweiten Zeile in der Klammer stehende Reihe die Entwicklung von

$$-e^{\frac{1}{x}} \int_1^x e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x}$$

nach Potenzen von ω. In [4] stellt also der Quotient rechts vom Gleichheitszeichen die Funktion

$$(\delta)\qquad -e \int_1^x e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x} = e \int_0^\omega e^{-\frac{1}{1-\omega}} \frac{d\omega}{1-\omega}$$

---

omnia, ser. I, vol. 10, S. 225) betrachtet Euler die divergente Reihe

$$(\alpha')\qquad 1 - 2! + 3! - 4! + \cdots$$

und gibt ihre »Summe« mit 0,4036524077 an, was in den vier letzten Stellen von dem Werte $1-c$ abweicht. Daß die letzten Stellen des von Euler im *Calculus differentialis* angegebenen Wertes der »Summe« von (α') unrichtig sind, bemerkt Mascheroni in seinen oben S. 369, Fußnote, angeführten *Adnotationes* siehe a. a. O. S. 426), wo er zwischen der »Summe« c der Reihe (α) und der Euler-Mascheronischen Konstanten $A = 0{,}57721\ldots$ die Beziehung

$$c + e\left(A - 1 + \frac{1}{2.2!} - \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{4.4!} - \cdots\right) = 0$$

herleitet. Die Lösung [11] der Differentialgleichung [2] verwandelt sich durch die Transformation $x = -\frac{1}{\log z}$, wenn man noch 0 als untere Grenze des Integrals nimmt, in $-\frac{1}{z}\,\mathrm{li}\,z$, die Reihe [1] geht durch dieselbe Transformation in die von Mascheroni a. a. O. S. 426 in der Gleichung (3) angegebene divergente Entwicklung des Integrallogarithmus über.

*) Vergl. J. Horn, *Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle*, Crelles Journal für Mathematik **120**, 1899, S. 1, wo S. 17 gerade die Differentialgleichung [2] als Beispiel behandelt wird.

dar und in [5] steht rechts vom Gleichheitszeichen die Entwicklung dieser Funktion in der Umgebung von $x = 1$ oder $\omega = 0$, nach Unterdrückung des Faktors ω.

Die Funktion (δ) nähert sich dem Grenzwerte c, wenn x mit einem zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Argument in den Punkt 0 einrückt, also jedenfalls wenn die Annäherung zwischen zwei von $x = 0$ auslaufenden Sehnen des Konvergenzkreises der in [5] auftretenden Reihe erfolgt. Die Angabe von Gauss, daß diese Reihe für $\omega = 1$ oder $x = 0$ die durch die Gleichung (β) definierte Konstante c darstellt, wird also*) bestätigt sein, wenn es gelingt, die Konvergenz jener Reihe für $\omega = 1$ zu erweisen. Gauss hat in der hier vorliegenden Aufzeichnung diesen Konvergenzbeweis nicht geliefert, er läßt sich aber in folgender Weise erbringen.

Wie L. Fejér gezeigt hat**) gilt für die Koeffizienten der Entwicklung

$$\frac{e \cdot e^{-\frac{1}{1-\omega}}}{1-\omega} = \gamma_0 + \gamma_1 \omega + \gamma_2 \omega^2 + \cdots$$

die asymptotische Darstellung

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{e}{\pi}}\, \frac{\sin\left(2\sqrt{n} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\lambda(n)}{n^{\frac{1}{4}}}}{n^{\frac{1}{4}}}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo $\lambda(n)$ dem absoluten Betrage nach für jedes n kleiner ist als eine angebbare Konstante. Hieraus ergeben sich für die Entwicklung der Funktion (δ)

$$e \int_0^\omega e^{-\frac{1}{1-\omega}} \frac{d\omega}{1-\omega} = g_1 \omega + g_2 \omega^2 + g_3 \omega^3 + \cdots$$

zwei Folgerungen, die wir einer brieflichen Mitteilung von L. Fejér entnehmen. »Erstens ist

$$|g_n| = \left|\frac{\gamma_{n-1}}{n}\right| < \frac{\text{const.}}{n^{\frac{5}{4}}},$$

was die unbedingte Konvergenz der Reihe

$$g_1 + g_2 + g_3 + \cdots,$$

d. h. also der Reihe [5] für $\omega = 1$ erkennen läßt. Zweitens zeigt die asymptotische Darstellung von γ_n, daß die g_n in unendlich viele Gruppen zerfallen, in denen abwechselnd das positive bezw. negative Vorzeichen herrscht«. —

Der letztere Umstand erklärt es, weshalb Gauss bei der von ihm (am Ende des art. 5, S. 383) vorgenommenen Summation erster Glieder eine schlechte Annäherung an den wahren Wert der Konstanten c erhielt.

---

*) Nach einem bekannten Satze von Abel, siehe Oeuvres, nouv. édit. I, Christiania 1881, S. 223, Théorème IV, vergl. A. Pringsheim, Münchener Sitzungsberichte **27**, 1897, S. 347.

) Siehe Comptes Rendus **147, Paris 1908, S. 1040; der Beweis, der sich auf ein von Riemann in seiner Habilitationsschrift über trigonometrische Reihen (§ 13, Riemanns Werke, 2. Aufl., S. 260 ff.) gegebenes Verfahren gründet, ist ausgeführt im Mathem. und naturw. Anzeiger (Értesitö) der ungar. Akademie der Wissensch. **27**, 1909, S. 1, einen andern Beweis der Fejérschen Formel findet man bei O. Perron, Archiv der Mathem. und Physik, 3. Reihe, **22**, 1914, S. 329.

Im art. [6.] hat nun GAUSS versucht, die Beziehung der divergenten Reihe [1] zu der Differentialgleichung [2] in der Weise klar zu stellen, daß er einen Zusammenhang mit den Untersuchungen von LAPLACE über die homogene lineare Differentialgleichung mit linearen Koeffizienten (siehe die Gleichung [6]) herstellte *). Die Formel [7] weist deutlich auf die asymptotischen Reihenansätze von LAPLACE hin. GAUSS geht durch Differentiation von der Differentialgleichung [2] oder [8] zu der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung [9] über, die, wenn man $\frac{1}{x}$ als neue unabhängige Veränderliche einführt, die Form

$$[9]' \qquad x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y = 0$$

annimmt. Diese Gleichung [9]′ ist in der Tat ein besonderer Fall der LAPLACEschen Differentialgleichung [6]; sie ist zwar in dem GAUSSschen Texte nicht ausdrücklich angegeben, aber der Ansatz [10], der ebenso wie [7] zu der asymptotischen Darstellung in der Nähe von $x = \infty$ gehört, bezieht sich nicht auf [9] sondern auf [9]′.

Dem die artt. 1.—[6.] umfassenden Bruchstück haben wir in den artt. [7.] und [8.] zwei andere Aufzeichnungen hinzugefügt, die namentlich mit den Betrachtungen des art. [6.] eng zusammenhängen. Die in [7.] eingeführten Reihen φ und ψ sind sogenannte BESSELsche oder Zylinderfunktionen, und zwar haben wir in der jetzt üblichen Bezeichnungsweise

$$\varphi = J_0(2\sqrt{x}),\quad \psi = -x\varphi' = -\sqrt{x}\,J_0'(2\sqrt{x}) = \sqrt{x}\,J_1(2\sqrt{x}),$$

wo

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n},$$

$$J_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1}$$

ist **). Die Differentialgleichung [12], der φ genügt, ist ein besonderer Fall der LAPLACEschen Gleichung [6] des art. [6.]. Daß GAUSS die für große Werte von x geltenden asymptotischen Darstellungen der ganzen transzendenten Funktionen φ und ψ betrachtet hat, zeigt die im art. [8.] wiedergegebene Aufzeichnung Nr. 82 des *Tagebuchs*, wo in der Gleichung [17] eine asymptotische Bestimmung für die Nullstellen der Funktion ψ gegeben wird ***) J. HORN bestätigt die Gleichung [17] durch die folgende Rechnung.

*) Siehe DE LA PLACE, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres*, Histoire de l'Académie des Sciences, année 1782, Paris 1785, Mémoires, S. 1 ff.; siehe insbesondere S. 47 ff.

) Die Funktion $J_0(t)$ findet sich wohl zuerst bei DANIEL BERNOULLI, *Theoremata de oscillationibus corporum etc.* Commentarii Acad. Petrop. **6 (1732/33) 1738, S. 116, 118, die Differentialgleichung, der sie Genüge leistet, ebenda **7** (1734/35) 1740, S. 171. Die allgemeine BESSELsche Funktion $J_\nu(t)$ kommt in der Abhandlung von EULER *De motu vibratorio tympanorum*, Novi Commentarii Acad. Petropol. **10**, (1764) 1766, S. 243, auf S. 256 vor; diese Abhandlung hat GAUSS jedenfalls gekannt.

***) Die asymptotische Darstellung von $J_0(t)$ findet sich zuerst veröffentlicht bei S. D. POISSON, *Sur la distribution de la chaleur dans les corps solides*, Journal de l'École Polytechnique, cah. 19, 1823, S. 249, auf S. 350; die analoge Darstellung für $J_1(t)$ gibt wohl zum ersten Male P. A. HANSEN, *Ermittelung der absoluten Störungen u.s.w.* I. Theil, Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha, 1843, S. 115, § 51, der auch in einer Fußnote auf S. 116 die asymptotische Formel

»Für die BESSELsche Funktion $J_1(x)$ gilt *) die asymptotische Darstellung

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+Q\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)\right\},$$

wo

$$P = 1+\frac{15}{128x^2}-\cdots,\quad Q = \frac{3}{8x}-\frac{105}{1024x^3}+\cdots$$

ist. Die Gleichung $J_1(x) = 0$ schreibt sich also

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) = \operatorname{tg}\left(x-\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi\right) = -\frac{Q}{P} = -\frac{3}{8x}+\frac{75}{512x^3}\cdots,$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet; hieraus folgt

$$\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi-x = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{8x}-\frac{75}{512x^3}\cdots\right) = \frac{3}{8x}-\frac{21}{128x^3}\cdots,$$

also

$$x+\frac{3}{8x}-\frac{21}{128x^3}\cdots = \left(k+\frac{1}{4}\right)\pi.$$

Aus der Gleichung $\psi = 0$ oder $J_1(2\sqrt{x}) = 0$ folgt demnach

$$2\sqrt{x}+\frac{3}{16\sqrt{x}}-\frac{21}{1024x\sqrt{x}}\cdots = \left(k+\frac{1}{4}\right)\pi,$$

was mit der Formel [17] übereinstimmt«.

Es steht hiernach fest, daß GAUSS die asymptotische Darstellung der Funktion ψ, mindestens so weit, als sie in der vorstehenden Rechnung benutzt wird, am 16 Oktober 1797, wo er die Tagebuchnotiz Nr. 82 schrieb, gekannt hat. Aus derselben Zeit dürften auch die Leisteaufzeichnung art. [7.] und der die artt. 1.—[6.] enthaltende Zettel stammen. Untersuchungen zum KEPLERschen Problem, die GAUSS einige Jahre später angestellt hat, und die mit den hier besprochenen Ansätzen zusammenhängen, sind weiter unten im Abschnitt [VII.] abgedruckt; vergl. die Bemerkungen zum Abschnitt [VII.] und zu dem auf diesen Abschnitt folgenden Briefwechsel.

SCHLESINGER.

$$\lambda = \frac{1}{2}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{32\lambda}+\frac{21}{2048\lambda^3}-\frac{1899}{327680\lambda^5}\pm \text{etc.}$$

für die Wurzeln der Gleichung $J_1(t) = 0$ aufstellt. Wie man sieht, stimmt diese Formel mit der GAUSSschen Gleichung [17] überein.

*) Siehe HANSEN a. a. O.

[II.]

GRUNDBEGRIFFE DER LEHRE VON DEN REIHEN.

[Handschrift von 6 Seiten in Fa, Kapsel 46 a.]

1.

Der Inbegriff einer jeden Anzahl beliebiger Grössen kann im weitern Sinne des Worts *eine Reihe* genannt werden; indess würde diese Ausdehnung des Begriffs wenig Nutzen haben und man beschränkt daher in der höhern Mathematik den Ausdruck *Reihe* auf den Inbegriff solcher Grössen, die, insofern man jeder derselben ihre eigene *Stelle* anweiset, d. i. die erste, zweite, dritte Grösse u. s. f. unterscheidet, alle *nach einem Princip* bestimmt werden. Der wesentliche Charakter einer Reihe ist also, dass für jeden Ort in derselben die entsprechende Grösse (das *Glied* der Reihe) sofort völlig bestimmt ist, und es daher als möglich angesehen wird, sobald man das Princip nach welchem die Reihe gebildet wird (ihr *Gesetz*) kennt, sie soweit man will fortzusetzen. Den Ort eines jeden Gliedes bezeichnet man durch eine Zahl, die *der Index* desselben heisst, so dass 1 der Index des ersten Gliedes ist, 2 der des zweiten u. s. f.

2.

Der hier gegebene Begriff einer Reihe ist von weiterem Umfange als der gewöhnliche, da man sie durch den Inbegriff der Werthe einer Function Einer veränderlichen Grösse erklärt, welche dieselbe erhält, indem man diese veränderliche Grösse nach und nach $= 1, 2, 3$ u s. f. setzt, wenn man anders nicht auch den Ausdruck Function in einer ausgedehnteren Bedeutung nehmen

will, als bisher geschehen ist. Denn nach dieser Erklärung wäre z. B. die Reihe der Primzahlen 1, 2, 3, 5, 7 u. s. f. oder jede daraus abgeleitete wie

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{121} \text{ u. s. f.}$$

nicht unter den Reihen enthalten, welches dem Sprachgebrauche weniger gemäss ist. Zum Unterschiede kann man solche Reihen, wo jedes Glied durch eine analytische Function des Index dargestellt wird, *analytische Reihen* nennen, so wie man die Function selbst, allgemein vorgestellt, *das allgemeine Glied* der Reihe zu nennen pflegt.

3.

Ist eine Reihe a', a'', a''' u. s. f. ... $[R]$, in welcher für jeden endlichen Index das entsprechende Glied einen endlichen reellen Werth erhält, so beschaffen, dass in ihr, so weit man sie auch fortsetzt, kein Glied vorkommt, das grösser*) als eine gegebene Grösse λ wäre, so kann man λ eine obere Grenze für die Reihe nennen (limes supra seriem, une limite en plus); ist hingegen keine Grösse gross genug, um nach diesem Begriffe eine obere Grenze genannt werden zu können, oder mit andern Worten, kann man in der Reihe zu so grossen Grössen als man will oder zu grössern gelangen, wenn man sie nur weit genug fortsetzt, so sagt man die Reihe habe keine obere Grenze. Es ist klar, dass wenn λ eine obere Grenze der Reihe $[R]$ ist, jede Grösse, welche grösser als λ ist, gleichfalls eine obere Grenze der Reihe sein werde, und im Fall nicht schon λ selbst die kleinste obere Grenze ist, wird es noch kleinere als λ geben; nun ist es aber von selbst klar, dass es kleinere Grössen als λ gebe, die nicht mehr obere Grenzen der Reihe genannt werden können; lässt man demnach λ durch alle Zwischengrössen stetig abnehmen, so muss man nothwendig auf eine kleinste obere Grenze L' kommen, die also die

*) Die Wörter grösser und kleiner werden hier allemal, wo nicht das Gegentheil erinnert wird, *mit* Rücksicht auf die Zeichen verstanden, so dass 0 und jede positive Grösse grösser als jede negative, und von zwei negativen Grössen diejenige die grössere genannt wird, die ohne Rücksicht auf das Zeichen die kleinere wäre. Eben so sind die Ausdrücke zunehmen und abnehmen zu verstehen.

Eigenschaft haben wird, dass kein Glied der Reihe [R] grösser als L' ist, wohl aber in dieser Reihe, wenn sie nur weit genug fortgesetzt wird, Glieder vorkommen können, die grösser sind, als jede andere Grösse, die kleiner als L' ist.

Ganz auf ähnliche Weise kann μ eine untere Grenze (une limite en moins) der Reihe [R] heissen, wenn in derselben kein Glied vorkommen kann, das kleiner als μ wäre, woraus von selbst erhellet, was Reihen sind, die keine untere Grenze haben. Bei jeder Reihe, die untere Grenzen hat, wird es eine grösste untere Grenze M' geben, so dass jede grössere Grösse als M' nicht mehr untere Grenze der Reihe heissen kann. — Da wir diese kleinsten obern und grössten untern Grenzen allein brauchen, so wollen wir dieselben in der folge schlechthin die obere, und die untere Grenze nennen und also den vorigen allgemeinern Begriff einer obern oder untern Grenze, welchen wir bloss zur Ableitung des gegenwärtigen gebraucht haben, ganz bei Seite setzen.

Übrigens sieht man leicht ein, dass es zwei verschiedene Arten gebe, wie eine Grösse L' die obere Grenze einer Reihe sein könne: entweder nemlich, wenn es in der Reihe wirklich ein Glied (oder mehrere) gibt, dass [es] der L' gleich ist, die übrigen aber alle kleiner sind, oder, wenn zwar kein der Grösse L' gleiches Glied in der Reihe vorkommen kann, aber doch, wenn [R] weit genug fortgesetzt wird, Glieder, die so wenig als man will von L' abweichen. Ganz auf dieselbe Art verhält es sich mit den untern Grenzen.

Auf diese Weise gibt es vier verschiedene Arten von Reihen:

I. Reihen, die weder eine obere noch eine untere Grenze haben, z. B. $1, -2, +3, -4, +5$ u. s. f.

II. Reihen, die keine obere aber eine untere Grenzen haben, wie $1, 2, 3, 4$ u. s. f., wovon die untere Grenze 1.

III. Reihen, die keine untere aber eine obere Grenze haben, wie $-1, -2, -3$ u. s. f.

IV. Reihen, die so wohl eine obere als eine untere Grenze haben. Diese beiden Grenzen werden immer ungleich sein, wenn nicht alle Glieder der Reihe einander gleich sind. Z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ u. s. f., wo die obere Grenze 1, die untere $\frac{1}{2}$.

Die letztere Art von Reihen ist hier für uns die wichtigste.

4.

Wenn die Reihe a', a'', a''' u. s. f. die obere Grenze L' hat, so sieht man leicht, dass dieselbe auch mit Weglassung des ersten Gliedes, oder die Reihe a'', a''' u. s. f. eine obere Grenze L'' haben müsse, und zwar wird L'' kleiner als L' sein, wenn $a' = L'$ und die folgenden Glieder alle wenigstens um eine bestimmte Grösse kleiner sind; sonst wird sein $L'' = L'$, in keinem Falle aber $L'' > L'$. Auf gleiche Art wird die Reihe a''', a^{IV} u. s. f. die obere Grenze L''' haben, die Reihe $a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{V}}$ u. s. f. die obere Grenze L^{IV} u. s. f., und so werden alle diese obern Grenzen eine neue Reihe bilden $L', L'', L''', L^{\mathrm{IV}}$ u. s. f., in welcher kein Glied grösser[*)] als das vorhergehende sein kann. So leitet man aus der ursprünglichen Reihe $-1, -2, -3$ u. s. f. die Reihe $-1, -2, -3$ u. s. f. als obere Grenzen Reihe ab, die mit jener selbst überein kommt; aus der Reihe

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \text{ u. s. f.}$$

diese 1, 1, 1 u. s. f. wo alle Glieder 1 sind; aus der Reihe

[1] $$1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{5}{32}, \frac{7}{64}, -\frac{3}{128} \text{ u. s. f.,}$$

welche aus Entwickelung des Bruches

[2] $$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xx}$$

entsteht**), diese

$$1, \frac{1}{2}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32}, \frac{5}{32}, \frac{7}{64}, \frac{23}{1024} \text{ u. s. f.}$$

Auf gleiche Art werden, wenn die Reihe $a', a'', a''', a^{\mathrm{IV}}$ u. s. f. eine untere Grenze M' hat, auch die Reihen a'', a''' u. s. f., a''', a^{IV} u. s. f., $a^{\mathrm{IV}}, a^{\mathrm{V}}$ u. s. f. u. s. f. untere Grenzen $M'', M''', M^{\mathrm{IV}}$ u. s. f. haben, und diese werden eine neue Reihe $M', M'', M''', M^{\mathrm{IV}}$ u. s. f. bilden, in welcher kein Glied kleiner sein kann als das vorhergehende.

[*) Die Handschrift hat: kleiner.]

**) Die Gründe, worauf die Formation dieser Reihen beruhet, werden anders wo vorgetragen werden.

Wenn beide Umstände sich vereinigen, dass die ursprüngliche Reihe sowohl eine obere als eine untere Grenze hat, oder zur IV ten Gattung gehört, so kann in [der] Reihe L', L'', L''' u. s. f. kein Glied vorkommen, das kleiner als irgend ein Glied der Reihe M', M'', M''' u. s. f. wäre. Denn gesetzt es wäre $L' < M^{(m)}$, so würde wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet, die kleiner als 1 und m (oder auch der kleinsten von beiden gleich) ist, sein $L^{(n)} \leqq L'$, $M^{(n)} \geqq M^{(m)}$ und folglich $L^{(n)} < M^{(n)}$, welches widersprechend ist, da $L^{(n)}$ die obere, $M^{(n)}$ die untere Grenze von Einer und derselben Reihe $a^{(n)}, a^{(n+1)}, a^{(n+2)}$ etc. bedeuten. — Hieraus folgt nun leicht, dass die Reihe L', L'', L''' u. s. f. eine untere, die Reihe M', M'', M''' u. s. f. aber eine obere Grenze haben werde; jene wollen wir durch L, diese [durch] M bezeichnen*), und man begreift leicht, dass L nicht kleiner als M sein könne, sondern entweder $L > M$ oder $L = M$ sein müsse. L nennen wir die letzte obere Grenze der ursprünglichen Reihe [R], M die letzte untere derselben. Zugleich erhellet, dass L, M auch die letzten beiderseitigen Grenzen der Reihen $a'', a''', a^{\mathrm{IV}}$ u. s. f.; a''', a^{IV} u. s. f. u. s. f. sein werden, oder dass man bei Bestimmung der letzten Grenzen einer Reihe von ihren Anfangsgliedern so viele weglassen kann, als man will.

5.

Erklärung. Wenn in einer Reihe der vierten Art die letzte obere Grenze und die letzte untere einander gleich sind, so nennt man sie die absolute Grenze der Reihe.

6.

Lehrsatz. Wenn a, a', a'' etc. eine Reihe ist, die die absolute Grenze A hat; b, b', b'', b''' etc. eine Reihe, deren absolute Grenze B, so hat die Reihe $a+b, a'+b', a''+b''$ etc. die absolute Grenze $A+B$.

*) Die erstere Reihe wird auch eine obere Grenze L', die zweite eine untere M' haben, auf die aber nicht weiter Rücksicht genommen zu werden braucht.

BEMERKUNGEN.

Die Begriffe und Sätze, die GAUSS in dem vorstehenden Bruchstück entwickelt, sind lange vor der ersten Veröffentlichung dieser Aufzeichnung (1912 im Heft III der *Materialien zu einer wissenschaftlichen Biographie von Gauss*, S. 136) von andern Mathematikern aufgestellt und bekannt gemacht worden. Was GAUSS kleinste obere bezw. größte untere Grenze nennt, wird gewöhnlich auf B. BOLZANO zurückgeführt*); nach M. PASCH**) sagt man dafür obere bezw. untere Schranke. Was GAUSS als letzte obere bezw. letzte untere Grenze bezeichnet, findet sich bei CAUCHY als la plus grande bezw. la plus petite des limites***); P. DU BOIS REYMOND†) sagt dafür obere und untere Unbestimmtheitsgrenze. Der Begriff der obern Schranke findet sich übrigens schon im art. 6. Absatz 4. von GAUSS' *Demonstratio nova* (1799), Werke III, S. 10. Während letzte obere und untere Grenzen stets vorhanden sind, bildet das Vorhandensein einer absoluten Grenze (art. 5.), d. h. des Grenzwertes oder Limes für eine Reihe einen besondern Fall.

Die Reihen, die GAUSS hier betrachtet und auf die er sich absichtlich beschränkt, würden mit einem neuern Kunstausdruck als abzählbare Mengen zu bezeichnen sein, die überdies in einer bestimmten Anordnung vorgelegt sind. Von einer Ausdehnung der Untersuchung auf den »Inbegriff einer jeden Anzahl beliebiger Größen«, d. h. also auf allgemeine lineare Punktmengen, versprach GAUSS sich »wenig Nutzen« (siehe die einleitenden Worte, S. 390).

Zum art. 4., S. 393 ist noch zu bemerken, daß die Glieder der Reihe [1] die Koeffizienten sind in der Entwicklung der rationalen Funktion [2] nach positiven ganzen Potenzen von x. Mit den aus der Entwicklung rationaler Funktionen entspringenden sogenannten rekurrierenden Reihen, besonders mit den zugehörigen Relationsskalen und ihren Verallgemeinerungen hat sich GAUSS in jungen Jahren vielfach beschäftigt, siehe die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 8 vom 26. Mai, Nr. 10 vom 3. Juni und Nr. 20 vom 16. Juli 1796.

Die letzte Seite der Handschrift enthält Rechnungen zur Osterformel und zwar mit Beispielen für das achtzehnte Jahrhundert; mit Rücksicht auf die Tagebuchnotiz Nr. 107 vom 16. Mai 1800 wird man daher die Abfassungszeit dieses Bruchstücks auf die Wende des XVIII. zum XIX. Jahrhundert ansetzen können.

SCHLESINGER.

*) *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prag 1817, S. 41, vergl. O. STOLZ Mathematische Annalen **18**, 1881, S. 257.

) Mathematische Annalen **30, 1887, S. 132.

***) *Analyse algébrique*, 1821, S. 132, 151 bezw. 390, 399; Oeuvres, 2. série, t. III, S. 121, 136 bezw. 322, 329.

†) Antritts-Programm der Universität Freiburg, 1871, S. 3, vergl. *Allgemeine Functionentheorie* I, 1882, S. 266.

[III.]

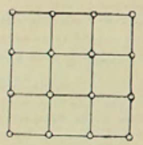
FRAGEN ZUR METAPHYSIK DER MATHEMATIK.

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809, S. 136, 137.]

1.

Welches ist die wesentliche Bedingung, dass eine Verknüpfung von Begriffen als sich auf eine Grösse beziehend gedacht werden könne?

2.



Alles wird viel einfacher, wenn man zuerst von der Unendlichkeit der Theilbarkeit abstrahirt und bloss Discrete Grössen betrachtet. Z. B. wie bei den biquadratischen Resten die Punkte als Gegenstände, die Übergänge, also Verhältnisse, als Grössen, wo die Bedeutung von $a+bi-c-di$ sogleich klar ist.

[3.]

Die Mathematik ist so im allgemeinsten Sinn die Wissenschaft der Verhältnisse, indem man von allem Inhalt der Verhältnisse abstrahirt.

Verhältniss setzt zwei Dinge voraus und heisst dann einfaches Verhältniss etc.

[4.]

Die allgemeine Vorstellung von Dingen, wo jedes nur zu zweien ein Verhältniss der Ungleichheit hat, sind Punkte in einer Linie.

Kann ein Punkt zu mehr als zweien ein Verhältniss haben, so ist das Bild davon die Lage von Punkten in einer Fläche, die durch Linien verbunden sind. Soll hier aber eine Untersuchung möglich seyn, so kann sie nur die Punkte betreffen, die zu dreien in einem Wechselverhältniss stehen, und wo es zwischen den Verhältnissen ein Verhältniss gibt.

[5.]

Ganz vorzüglich wichtig wird seyn, die Theorie des Gegensatzes zur Klarheit zu bringen ohne Grösse. So kommen z. B. beim Nivelliren einer Ebne folgende Gegensätze vor. Die Stellung der Blase in der Glasröhre ist bei der Ruhe bestimmt durch [die] Geometrische Axe der Röhre [und eine] Linie durch die Ebne der Füsse.

BEMERKUNG.

Die vorstehende Aufzeichnung folgt unmittelbar auf die in den Werken VIII, S. 444 abgedruckte Bemerkung, die »1825, Dec. 4« datiert ist. Man vergleiche zu dem Gegenstande die *Anzeige* der zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste vom Jahre 1831, Werke II, S. 169, besonders S. 174 ff., ferner den weiter unten im *Briefwechsel* abgedruckten Brief [6.] von GAUSS an GRASSMANN vom 14. Dezember 1844. Zu dem im art. [5.] als Beispiel herangezogenen Nivellieren einer Ebene vergleiche man die Notiz Werke VIII, S. 197.

SCHLESINGER.

[IV.]
[DARSTELLUNG VON DISKONTINUIERLICHEN FUNKTIONEN.]

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809, S. 277.]

Die discontinuirliche Function von t, welche für t von 0 bis 180° mit $\sin t$ übereinstimmt, von 180° bis 360° aber verschwindet, ist

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{1.3.\pi}\cos 2t - \frac{2}{3.5.\pi}\cos 4t - \frac{2}{5.7.\pi}\cos 6t - \text{u.s.w.}$$

oder, was dasselbe ist, wenn der Werth von 90° bis 270° verschwinden, von 0 bis 90° und von 270° bis 360° aber mit $\cos t$ übereinstimmen soll, ist die Formel

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{2}{1.3.\pi}\cos 2t - \frac{2}{3.5.\pi}\cos 4t + \frac{2}{5.7.\pi}\cos 6t - \cdots.$$

Man kann dies auch so ausdrücken:

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}\cos u - \frac{4}{15\pi}\cos 2u - \frac{4}{35\pi}\cos 3u - \text{u.s.w.}$$

gibt immer den positiven Werth von $\sin\frac{1}{2}u$.

Die Function von u, welche von $u = -A$ bis $u = +A$ constant $= 1$ sein, für alle übrigen Werthe aber verschwinden soll, ist

$$\frac{A}{\pi} + \frac{2\sin A}{\pi}\cdot\cos u + \frac{2\sin 2A}{2\pi}\cdot\cos 2u + \frac{2\sin 3A}{3\pi}\cdot\cos 3u + \text{u.s.w.}$$

Die Function soll von $u = 0$ bis $u = A$ durch $A - u$, von $u = -A$ bis $u = 0$ durch $A + u$ dargestellt werden, ausserhalb dieser Grenzen aber verschwinden:

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}AA + 2(1-\cos A)\cos u + \frac{2}{4}(1-\cos 2A)\cos 2u + \frac{2}{9}(1-\cos 3A)\cos 3u + \text{u.s.w.}\right)$$

Die Function soll constant sein $= B - A$ für $u = -A$ bis $u = +A$, ferner von $u = A$ bis $u = B$ gleichförmig abnehmen, bis sie für $u = B$ verschwindet; eben so soll sie wie u von $-A$ zu $-B$ übergeht gleichförmig von $B - A$ zu 0 übergehen und ausserhalb der Grenzen $-B$ und $+B$, d. i. von -180^0 bis $-B$ und von $+B$ bis $+180^0$ verschwinden:

$$\frac{1}{\pi}\Big\{\frac{1}{2}(BB - AA) + 2(\cos A - \cos B)\cos u + \frac{2}{4}(\cos 2A - \cos 2B)\cos 2u$$
$$+ \frac{2}{9}(\cos 3A - \cos 3B)\cos 3u + \text{etc.}\Big\}.$$

BEMERKUNG.

Auf der vorhergehenden Seite 276 des Handbuchs endet die S. 273 beginnende Abhandlung über den Lehrsatz von LAGRANGE, die Werke VIII, S. 80—83 abgedruckt ist, mit der Datierung »1847, Mai 13.«

SCHLESINGER.

[V.]

CONVERGENZ DER REIHEN, IN WELCHE DIE PERIODISCHEN FUNCTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN GRÖSSE ENTWICKELT WERDEN.

[Handschrift von 13 mit A 1 bis A 13 bezeichneten Blättern in Fa, Kapsel 46 a.]

Ehe ich zu der Untersuchung selbst, welcher diese Denkschrift gewidmet ist, übergehe, verweile ich etwas bei einigen Begriffsbestimmungen, die anderwerts entweder noch gar nicht vorkommen, oder nicht überall auf die gleiche Weise angewandt werden.

1.

Convergenz der unendlichen Reihen im Allgemeinen.

Ich werde unter Convergenz, einer unendlichen Reihe schlechthin beigelegt, nichts anderes verstehen, als die beim unendlichen Fortschreiten der Reihe eintretende unendliche Annäherung ihrer Glieder an die 0. Die Convergenz einer Reihe an sich ist also wohl zu unterscheiden von der Convergenz ihrer Summirung zu einem endlichen Grenzwerthe; letztere schliesst zwar die erstere ein, aber nicht umgekehrt.

Divergent heisst eine unendliche Reihe, in welcher bei hinlänglich weiter Fortsetzung Glieder erscheinen, die jede (vorher) gegebene Grösse überschreiten.

Reihen, die weder schlechthin convergent, noch divergent sind, werden entweder in ihrem unendlichen Fortschreiten eine unendliche Annäherung an einen von 0 verschiedenen Grenzwerth darbieten, in welchem Fall man sie convergent zu diesem Werthe nennen kann, oder so beschaffen sein, dass sie

nie aufhören in einem endlichen Zwischenraum hin und her zu schwanken. Für unsern Zweck ist es jedoch nicht nothwendig, diese Unterscheidung noch weiter ins Einzelne zu verfolgen.

Wir haben demnach drei Arten oder Ordnungen von unendlichen Reihen, oder da zwei dieser Arten wieder in je zwei zerfallen, fünf Ordnungen, nemlich:

I. Divergente Reihen.

II. Zwischen gewissen Grenzen stets schwankend bleibende Reihen.

Endlich die zu einem bestimmten Grenzwerthe convergirende[n] Reihen, nemlich

III. Reihen, die zu einem von 0 verschiedenen Grenzwerthe convergiren.

IV. und V. Die zu 0 convergirenden Reihen, welche ich ohne weitern Zusatz convergirende Reihen nenne. In die V. Classe setze ich diejenigen, bei denen die successive Summation eine unendliche Annäherung an eine endliche bestimmte Grenze darbietet, in die IV. die, wo dies nicht Statt findet.

Durch Addition zweier Reihen zu einander (indem man das erste Glied der einen Reihe zum ersten der andern addirt, das zweite zum zweiten u.s.w.) entsteht eine neue Reihe, über deren Classe sich folgendes sagen lässt. Die Addition zweier Reihen der fünften Classe gibt eine der fünften; die Addition einer der fünften zu einer der vierten, gibt eine der vierten, und allgemein bleibt die Ordnung ungeändert dieselbe, wenn eine Reihe der fünften oder überhaupt eine von höherer Ordnung hinzuaddiert wird. Man schliesst daraus leicht allgemein, dass durch Addition beliebig vieler Reihen eine Reihe entsteht, deren Ordnung mit der niedrigsten Ordnung übereinstimmt, wenigstens allemahl, wenn von dieser niedrigsten Ordnung nur eine unter den addierten ist: die Addition zweier oder mehrerer von gleicher Ordnung kann allerdings in speciellen Fällen eine von höherer hervorbringen. Hiemit hängt auch die Classification derjenigen Reihen zusammen, deren Glieder complexe Grössen sind. Man betrachtet die Reihe der reellen Theile, und die der imaginären jede für sich: gehören sie zu gleicher Ordnung, so setzt man auch die ganze Reihe in eben dieselbe, im entgegengesetzten Falle richtet sich letztere nach der niedrigern Stufe.

Wenn man die Glieder einer unendlichen Reihe

$$R = A, A', A'', A''' \text{ u.s.w.}$$

mit den Gliedern einer geometrischen Reihe

$$1,\ h,\ hh,\ h^3 \text{ u.s.w.}$$

multiplicirt, so wird die neue Reihe

$$S = A,\ hA',\ hhA'',\ h^3A''' \text{ u.s.w.}$$

in dem Falle, wo h kleiner ist als 1, nicht bloss convergent sein, sondern auch eine convergente Summation darbieten, also zur 5ten Ordnung gehören, allemahl wo R nicht divergent ist, also zur 2., 3., 4. oder 5. Ordnung gehört. In der That, da in jeder nicht divergirenden Reihe keines der Glieder eine gewisse Grösse g [*)] überschreiten kann, so wird in der Reihe S das Glied mit dem Index n jedenfalls nicht grösser sein als gh^n, und jedes der folgenden noch kleiner, und eben so wird die Summation der auf dies Glied folgenden, wie weit man sie auch fortsetzt, nicht grösser sein als

$$\frac{gh^n}{1-h},$$

welche Grösse einen so kleinen nicht verschwindenden Werth c als man nur wünscht, erlangen kann, wenn man nur n gross genug annimmt.

Ist h grösser als 1, oder werden die Glieder der Reihe R mit den Gliedern einer steigenden geometrischen Progression multiplicirt, so sind drei Fälle denkbar:

I. Indem man h als veränderlich betrachtet und von dem Werthe [Eins] an allmählig wachsen lässt, hört S sofort auf convergent zu sein, wie wenig auch h den Werth 1 überschreitet.

II. S bleibt convergent bis zu einem bestimmten Werte von h, nemlich $h = \frac{1}{e}$, wo e ein ächter Bruch ist. Dies bis kann einschliesslich oder ausschliesslich zu verstehn sein, nemlich entweder ist $\frac{1}{e}$ der letzte Werth des wachsenden h, für welchen S convergent ist, oder der erste für welchen S nicht convergent ist.

III. S bleibt stets convergent, wie gross man auch h annehmen möge, wie z. B. in dem Falle, wo R eine Exponentialgrösse oder den Sinus oder Cosinus eines Bogens ausdrückt.

[*) In der Handschrift steht an dieser Stelle noch das Wort »nicht«.]

Im Falle I. convergirt also die Reihe R langsamer, im Falle III. schneller als jede fallende geometrische Progression; so wie im Falle II. jene Reihe langsamer convergirt als jede fallende geometrische Progression mit einem kleinern Exponenten als e, aber schneller als jede mit irgend einem grössern Exponenten als e. In so fern steht also unter allen fallenden geometrischen Progressionen, diejenige deren Exponent $= e$ ist, in Beziehung auf Convergenz der Reihe R am nächsten, und es wird daher nicht unschicklich sein, e den Exponenten der Convergenz der Reihe R zu nennen. Bei alledem ist klar, dass je nachdem S selbst, für $h = \frac{1}{e}$, noch convergent oder schon divergent wird, jene Progression noch weniger oder mehr convergent ist als R, und wir werden weiter unten zeigen, wie eine noch nähere Anschmiegung erreicht werden kann [*)].

2.

Die zur Analysis gehörigen Begriffsbestimmungen, ihre Unterscheidungen und gegliederten Classificirungen, die in den Lehrbüchern aufgestellt zu werden pflegen, lassen zum Theil noch erkennen, dass man bei ihrer Einführung sich auf einem niedern Standpunkte mit beschränkterm Gesichtspunkte befand. Man schuf eine Begriffsbildung, um diesem oder jenem praktischen Bedürfnisse entgegenzukommen, und dachte bei jener an keine weitern Grenzen als dieses Bedürfniss erforderte. Über diese Grenzen hinaus hatte die Begriffsbestimmung keinen klaren Sinn mehr. Kein Wunder also, dass wenn man sich auf Fragen einliess, wo die selben Begriffe ausserhalb des Gebiets, in welchem allein sie ihre Berechtigung hatten, in Anspruch genommen wurden, Widersprüche und Verwirrung die Folge waren. Es gehören dahin z. B. die lange streitigen Fragen über die Logarithmen der negativen Grössen, die immer nur ein Streit de lana caprina bleiben mussten, so lange nicht der Begriff von Logarithm aus Einem Guss auf eine für das ganze Gebiet der Grössen gültige, vollkommen klare Art festgestellt war. Zu den Ursachen, welchen man eine solche im 17. und 18. Jahrhundert so oft vorkommende und auch zum Theil noch in das gegenwärtige hineinreichende Unzulänglichkeit bei den mathematischen Begriffsbestimmungen vorzüglich zuzuschreiben hat, und auf deren

[*) Siehe den unten folgenden Anhang.]

specielle Erörterung ich hier mich nicht einlassen will, gehört auch der verkehrte Gesichtspunkt, aus welchem man die jetzt sogenannten imaginären Grössen so lange betrachtet hat. Wir sehen dieselben zuerst unter dem Namen von unmöglichen Grössen auftreten bei denjenigen quadratischen Gleichungen, wo die Auflösung die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer negativen Grösse erfordert. In so weit enthielt der Ausdruck, dass die Wurzeln der Gleichung unmöglich seien, eigentlich nichts weiter als eine Verneinung der Existenz von Wurzeln. Späterhin machte man die Bemerkung, dass auch bei algebraischen Gleichungen von höhern Graden in solchen Fällen, wo sie entweder gar nicht auflösbar waren oder wenigstens nicht eine ihrem Grade gemässe Anzahl von Wurzeln darboten, die Unauflösbarkeit oder Unvollzähligkeit der Auflösungen immer nur von der Unmöglichkeit, aus einer negativen Grösse eine Quadratwurzel zu erhalten, abhing, und d'Alembert und Euler generalisirten diese Bemerkung (dem Wesen nach, wenn auch nicht in dieser klaren Ausdrucksweise) dahin, dass es nur der Zulassung einer fingirten Grösse $\sqrt{-1}$ bedürfe, um jeder entwickelten algebraischen Gleichung die ihrer Ordnungszahl gleiche Menge von Wurzeln zu verschaffen. Ein genügender strenger Beweis dies[es] wichtigsten Lehrsatzes in der Theorie der algebraischen Gleichungen ist zwar erst viel später gelungen; aber schon von jener Zeit an wurde es immer mehr üblich, die unschicklichen Benennungen von unmöglichen Grössen fahren zu lassen, und die jene fingirte $\sqrt{-1}$ involvirenden Grössen imaginäre zu nennen, im Gegensatz der reellen, unter denen man die Totalität aller positiven und negativen begriff. Seit der Zeit sind die imaginären Grössen, wie eine besondere Gattung von Grössen, in den analytischen Calcul aufgenommen, und man hat sich wohl dabei gestanden, indem ihre Beihülfe sehr häufig auf eine überraschend leichte Art zu einem Ziele führt, welches ohne sie nur viel mühsamer sich erreichen lassen würde, oder indem ihre Zuziehung mancher mathematischen Lehre, die, wenn sie bloss auf das Gebiet der reellen Grössen beschränkt werden müsste, nur ungelenk und lückenhaft erscheinen würde, die schönste Abrundung gibt.

Bei allem dem sind die imaginären Grössen, so lange ihre Grundlage immer nur in einer Fiction bestand, in der Mathematik nicht sowohl wie eingebürgert, als viel mehr nur wie geduldet betrachtet, und weit davon entfernt geblieben, mit den reellen Grössen auf gleiche Linie gestellt zu werden.

Zu einer solchen Zurücksetzung ist aber jetzt kein Grund mehr, nachdem die Metaphysik der imaginären Grössen in ihr wahres Licht gesetzt und nachgewiesen ist, dass diese, eben so gut wie die negativen, ihre reale gegenständliche Bedeutung haben*). Die vollständige Erkenntniss der Natur einer analytischen Function muss auch die Einsicht in ihr Verhalten bei den imaginären Werthen des Arguments in sich schliessen, und oft ist sogar letztere unentbehrlich zu einer richtigen Beurtheilung der Gebarung der Function im Gebiete der reellen Argumente. Unerlässlich ist es daher auch, dass die ursprüngliche Festsetzung des Begriffs der Function sich mit gleicher Bündigkeit über das ganze Grössengebiet erstrecke, welches die reellen und die imaginären Grössen unter dem gemeinschaftlichen Namen der complexen Grössen in sich begreift[**)].

[Anhang.]

[Ein Blatt in Fa, Kapsel 46 a.]

Maasstab für Convergenz der Reihen.

Allgemeines Glied der Reihe R_n, der Summenreihe S_n.

Es sei $\rho_n R_n$ das allgemeine Glied einer neuen Reihe, die weder convergent noch divergent ist. Man wird dann die Convergenzen der Reihen (R) und $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ als gleich zu betrachten haben.

Es wird ρ_n in die Form zu bringen sein

$$\rho_n = e^{\alpha n} n^{\beta} (\log n)^{\gamma} . (\log\log n)^{\delta} . (\log^3 n)^{\epsilon} \text{ u.s.w.},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ positive, negative Zahlen oder 0 sein können, aber die erste, die nicht verschwindet, jedenfalls positiv.

Die Bedeutung lässt sich so aussprechen:

---

*) Göttingische gelehrte Anzeigen, 1831, St. 64. [Werke II, S. 169.]

[**) In der Handschrift folgen noch zwei Artikel, die hier nicht mit abgedruckt wurden.]

Die Reihe

$e^{\alpha' n} R_n$	conver-	α'	kleiner	α
$e^{\alpha n} n^{\beta'} R_n$	girt oder	β'	oder	β
$e^{\alpha n} n^{\beta} (\log n)^{\gamma'} R_n$	diver-	γ'	grösser	γ
$e^{\alpha n} n^{\beta} (\log n)^{\gamma} (\log\log n)^{\delta'} [R_n]$	girt je nach	δ'	[ist]	δ
$e^{\alpha n} n^{\beta} (\log n)^{\gamma} (\log^2 n)^{\delta} (\log^3 n)^{\varepsilon'} [R_n]$	dem	ε'	als	ε

Wenn eine der Reihen

$$e^{\alpha n} R_n, \ e^{\alpha n} n^{\beta} R_n, \ e^{\alpha n} n^{\beta} (\log n)^{\gamma} [R_n] \text{ u.s.w.}$$

weder divergirt noch convergirt, so ist der Ausdruck damit zu Ende. Trifft d[ies] z. B. bei der dritten zu, so ist $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, etc.

Die Summenreihe S_n, unter [der] Voraussetzung, dass alle Glieder von (R) wenn nicht gleich, doch von irgend einer Stelle an gleiche Zeichen haben, wird unendlich, wenn die erste der Grössen

$$\alpha - 1, \ \beta - 1, \ \gamma - 1, \text{ u.s.w.},$$

die nicht $= 0$ wird, negativ ist oder wenn alle $= 0$ [sind].

[VI.]

BESTIMMUNG DER CONVERGENZ DER REIHEN, IN WELCHE DIE PERIODISCHEN FUNCTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN GRÖSSE ENTWICKELT WERDEN.

[Handschrift von 16 mit B1 bis B16 bezeichneten Seiten in Fa, Kapsel 46 a.]

1.

Die Überschrift bezeichnet zwar den Hauptgegenstand dieser Denkschrift, der jedoch nur einen Theil ihres Inhalts ausmacht. Die Lösung der Aufgabe gehört recht eigentlich in das Gebiet der Lehre von den complexen (imaginären) Grössen, auf welche man in frühern Zeiten die Geschäfte der Analysis nur ausnahmsweise auszudehnen sich erlaubte. Die vollkommene Befugniss, der Analysis gleichmässig das g a n z e Gebiet der complexen Grössen zu unterwerfen, habe ich im Jahre 1831 nachgewiesen: allein die Wege in diesem Gebiete sind noch nicht überall gebahnt, und die in der Analysis bisher gangbaren Begriffsabgrenzungen sind ursprünglich fast immer nur unter der stillschweigenden Voraussetzung gemacht, dass man über das Gebiet der reellen Grössen nicht hinausgehe, und ermangeln selbst unter dieser Beschränkung nicht selten einer befriedigenden Schärfe. Es werden daher mit dem Hauptgegenstande einige Nebenuntersuchungen und Erörterungen verbunden werden müssen, ohne jedoch bei denselben eine grössere Ausführlichkeit zu beabsichtigen, als für unsere Zwecke nöthig ist.

2.

Zuvörderst ist die bekannte Versinnlichung der complexen Grössen in Erinnerung zu bringen, wo jede complexe Grösse $x + iy$ (die imaginäre Einheit

$\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet) durch denjenigen Punkt einer unbegrenzten Ebene repräsentirt wird, dessen rechtwinkelige Coordinaten in Beziehung auf ein beliebig gewähltes System, x und y sind. Es wird damit, wie schon an einem anderen Orte[*)] bemerkt ist, nur bezweckt, die Bewegung in dem an sich vom Räumlichen unabhängigen Felde der abstracten complexen Grössen zu erleichtern und eine Sprache für dasselbe zu vermitteln.

Auf diese Weise versinnlicht sich durch eine Linie in der Ebene eine durch unendlich kleine Differenzen nach der Stetigkeit fortschreitende Reihe complexer Grössen, die ich einen **Zug** nennen werde, so wie jede der einem bestimmten Zuge angehörenden Grössen eine **Stelle** in diesem Zuge. Ist die letzte der einen Zug bildenden complexen Grössen der ersten gleich, während alle dazwischen liegenden unter sich ungleich sind, so wird dieser **geschlossene** Zug vertreten durch eine geschlossene Linie, und der von dieser Linie eingeschlossene Flächenraum vertritt wieder alle diejenigen nach der Stetigkeit mit einander zusammenhängenden complexen Grössen, die in jenem Zuge ihre Limite finden, und die ich eine **Schicht** complexer Grössen nennen werde. Dieser Begriff lässt sich noch allgemeiner auffassen als der Inbegriff aller nach der Stetigkeit unter sich zusammenhängender complexer Grössen, die von den übrigen nicht dazu zu rechnenden durch einen **oder mehrere** geschlossene Züge geschieden sind. In letzterem Falle bildet einer dieser Züge, der äusserste, die Scheidung von dem übrigen unendlichen Gebiete (welches dann auch als eine unendliche Schicht bezeichnet werden mag), die anderen dienen dazu, im Innern eine oder mehrere Schichten — in der räumlichen Vorstellungsart: Inseln oder Enclaven — abzusondern.

3.

Zu einem Zuge complexer Grössen steht eine dadurch begrenzte Schicht in einer gewissen Beziehung analog derjenigen, wonach von einem Flächenstück ausgesagt wird, dass es der Begrenzungslinie zur Rechten oder zur Linken liege**). Bestimmt ist diese Unterscheidung nur, insofern man in der

[*) Siehe den art. 5. der Jubiläumsschrift von 1849 *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen*, Werke III, S. 79.]

**) Da hier nicht der Ort ist in die Metaphysik des Räumlichen weiter einzudringen, so übergehe ich den Umstand, dass die Wechselbeziehung zwischen vorwärts-

Linie eine bestimmte Richtung als eine vorwärts gehende annimmt: wählt man dafür die entgegengesetzte, so wird, was vorher rechts war, zu links und umgekehrt. Auf gleiche Weise muss in einem eine Schicht complexer Grössen S begrenzenden, oder, was dasselbe ist, zwei solcher Schichten S und S' scheidenden Grössenzuge eine bestimmte Folgeordnung angenommen werden und das Charakteristische im Verhältniss einer Schicht zu dem Grenzzuge kann dann am einfachsten auf folgende Art ausgesprochen werden: Es seien t, $t+\alpha$ zwei unendlich wenig verschiedene complexe Grössen in dem Zuge, die erste vorangehend, die andere folgend; $t+\beta$ eine andere gleichfalls unendlich wenig von t verschiede[ne] complexe Grösse und

$$\frac{\beta}{\alpha} = k + il.$$

Es wird dann, (wenn wir den singulären Fall ausschliessen, wo die Grösse t in räumlicher Darstellung des Zuges eine Spitze darbietet) $l = 0$ oder unendlich klein sein, wenn $t+\beta$ dem Zuge selbst angehört; hingegen wird für einen positiven endlichen Werth von l die Grösse $t+\beta$ einer der Schichten S und S', und für einen negativen der andern angehören; und dies Verhältniss wird für den ganzen Zug dasselbe bleiben, eben so wie der, welcher einen See hart am Ufer so zu umschreiten anfängt, dass jener ihm zur Rechten liegt, denselben fortwährend zur Rechten behält, wenn er nur sich selbst nicht umwendet.

Man kann dies dadurch ausdrücken, dass man sagt, diejenige Schicht, welcher die positiven Werthe von l entsprechen, habe ein positives Verhältniss zu dem Grenzzuge, die andere ein negatives. Offenbar vertauschen sich diese Benennungen, sobald man in dem Grenzzuge die entgegengesetzte Folgeordnung wählt. Man erkennt hieraus die Bedeutung eines Ausdrucks, dessen ich mich in der Folge zuweilen bedienen werde. Es seien F, F' die beiden denkbaren Folgeordnungen in einem Zuge Z, der die Schicht S begrenzt; ebenso

rückwärts und rechts-links erst durch die Hinzufügung des dritten Gegensatzes oben-unten zwischen den Raumtheilen, welche die Fläche scheidet, Haltung bekommt, so wie den, dass dieses Verhältniss nicht durch eine Definition a priori gegeben, sondern nur durch Zusammenhalten mit einem **wirklich Vorhandenen**, drei Dimensionen darbietenden erkannt werden kann, insofern in diesem die Namen bereits feststehen. Man vergl. Göttingische gelehrte Anzeigen 1831, S. 637 [Werke II, S. 177]. Die abstracte allgemeine Lehre von den complexen Grössen hat mit beiden nichts zu schaffen.

f, f' die beiden Folgeordnungen in einem Zuge z, welcher die Schicht s begrenzt. Ist nun das Verhältniss von S zu Z, unter Voraussetzung der Folgeordnung F dasselbe wie das Verhältniss von s zu z unter Voraussetzung der Folgeordnung f, d. i. sind beide positiv oder beide negativ, so drücke ich dies dadurch aus, dass ich die Folgeordnungen F in Beziehung auf S und f in Beziehung auf s wie gleich betrachte, wo denn offenbar auch F' und f' gleich sein werden. Es ist hieraus von selbst klar, was in dem am Schluss des zweiten Artikels [S. 408] erwähnten Falle, wo eine Schicht complexer Grössen durch mehrere von einander verschiedene Züge begränzt wird, unter gleicher Folgeordnung in diesen Zügen zu verstehen ist. Es verhält sich damit ebenso, als wenn die sämmtlichen Uferlinien eines[*]) eine oder mehrere Inseln einschliessenden Sees in einem solchen Sinn durchlaufen werden, dass man allemahl den See an derselben Seite, d. i. entweder allemahl rechts oder allemahl links hat.

4.

Um dies durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, seien A, a, a', A' reelle Grössen, jede folgende algebraisch grösser als die vorhergehende, d. i. $a-A$, $a'-a$, $A'-a'$ alle positiv; und auf ähnliche Weise verhalten sich die reellen Grössen B, b, b', B'. Ich bezeichne die acht complexen Grössen

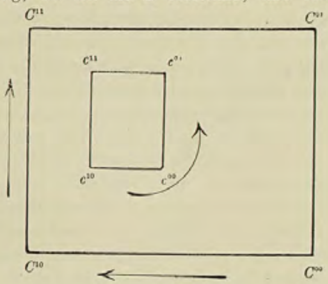
$$A+Bi, \quad A'+Bi, \quad A+B'i, \quad A'+B'i, \quad a+bi, \quad a'+bi, \quad a+b'i, \quad a'+b'i$$

der Reihe nach mit $C^{0,0}$, $C^{1,0}$, $C^{0,1}$, $C^{1,1}$, $c^{0,0}$, $c^{1,0}$, $c^{0,1}$, $c^{1,1}$. Ferner die Schicht complexer Grössen $x+yi$, wo x zwischen A und A', hingegen y zwischen B und B' liegt, mit S. Eben so diejenige Schicht, wo x zwischen a und a', hingegen y zwischen b und b' liegt, mit s. Endlich bemerke man, dass S begrenzt wird durch den geschlossenen Zug Z, zusammengesetzt aus vier partiellen Zügen von C^{00} nach C^{10}, von C^{10} nach C^{11}, von C^{11} nach C^{01} und von C^{01} nach C^{00}, und zwar so, dass im ersten und dritten Stück der imaginäre Theil constant bleibt, im zweiten und vierten hingegen der reelle. Auf ähnliche Weise sei z der geschlossene Zug, welcher die Schicht s begrenzt, und dessen vier Bestandtheile man hat, wenn man in denen von Z nur überall C gegen c vertauscht. Man erkennt leicht, dass auf diese Weise sowohl die Schicht S

[*) Hier stehen in der Handschrift noch die Worte: Sees, welcher]

zu dem Zuge Z, als die Schicht s zu dem Zuge z, wenn in den beiden Zügen die angegebene Folgeordnung vorausgesetzt wird, ein positives Verhältniss haben, oder dass diese Folgeordnungen für Z in Beziehung auf S und für z in Beziehung auf s gleiche sind.

Sondern wir nun aber aus den complexen Grössen S diejenigen aus, welche die Schicht s und zugleich diejenigen, welche den Zug z bilden, so bleibt Eine zusammenhängende Schicht übrig, die ich mit Σ bezeichne, und von welcher die zwei Züge Z, z die vollständige Begrenzung bilden. In Beziehung auf diese Schicht Σ sind nun die obigen Folgeordnungen in den Zügen nicht gleiche sondern entgegengesetzte: der Folgeordnung $C^{00}\ C^{10}\ C^{11}\ C^{01}\ C^{00}$ gleich würde diese sein: $c^{00}\ c^{01}\ c^{11}\ c^{10}\ c^{00}$. Man vergl. die räumliche Darstellung, wo durch die Pfeile die gleichen Folgeordnungen angedeutet sind.



5.

Es muss hier noch hervorgehoben werden der Satz, dass eine Schicht Σ, die durch zwei oder mehrere geschlossene Züge begrenzt ist, sich in eben so viele partielle Schichten zerlegen lässt, die jede nur von Einem Zuge begrenzt werden. Es wird zum Beweise dieses Satzes nur nöthig sein, zu zeigen, dass allemahl Σ sich in zwei andere Schichten Σ' und Σ'' zerlegen lasse, so dass Σ' nur durch Einen Zug begrenzt werde, und die Anzahl der Züge, durch welche Σ'' begrenzt ist, um eine Einheit kleiner sei, als die Zahl der Grenzzüge von Σ. Es seien Z und z zwei geschiedene Grenzzüge von Σ, $\zeta = Cc$, $\zeta' = C'c'$ zwei andere Züge, so beschaffen, dass ihre Anfänge C und C' zu Z, und die Enden c und c' zu z gehören, dass sie selbst keine Stelle gemein haben, und dass die Schicht, welche durch den geschlossenen Zug $CC'c'cC$ begrenzt wird (wo CC', cc' beziehungsweise Theile von Z, z sind) ganz der Schicht Σ angehört, also einen Theil derselben ausmacht. Von der Möglichkeit, diesen Bedingungen Genüge zu leisten, überzeugt man sich leicht, indem man erwägt, dass, in Folge des stetigen Zusammenhangs der Schicht Σ, die zwei Züge Z, z sich durch einen ganz dieser Schicht angehörenden Zug Cc verbinden lassen, und dass man nöthigenfalls den zweiten Zug $C'c'$ dem ersten so nahe wie man will nehmen darf. Wir haben also in der durch den Zug $CC'c'cC$ begrenzten Schicht das geforderte Σ'; nennt man das, was nach Absonderung derselben von Σ übrig bleibt, Σ'', so werden dazu als Begrenzung gehören: erstlich diejenigen Züge, welche etwa noch ausser Z und z die Begrenzung von Σ bildeten, zweitens anstatt dieser beiden Züge Z, z der einfache gleichfalls geschlossene Zug $Ccc''c'C'C''C$, wo c'' eine beliebige Stelle in dem nicht geschlossenen Zuge bedeutet, welcher von z übrig bleibt, wenn man cc' davon absondert, und eben so C'' eine beliebige Stelle von Z ausserhalb CC'.

Es liesse sich übrigen[s] auch nachweisen, dass auf diese Weise Σ'' wirklich Eine nach der Stetigkeit zusammenhängende Schicht bildet, was ich aber hier unterlasse, theils weil dazu noch einige anderweitige Erörterungen erforderlich sein würden, theils weil für gegenwärtigen Zweck zureicht, dass Σ'', möge es Eine einzige zusammenhängende [Schicht] oder mehrere getrennte vorstellen, gewiss zusammen eine um eine Einheit geringere Anzahl von geschlossenen Grenzzügen darbietet als Σ.

Man bemerke noch, dass in der Gesammtheit der Grenzzüge von Σ' und Σ'' wieder erscheinen: erstlich die Grenzzüge von Σ, und dann noch dazu die Züge ζ und ζ' und zwar jeder zweimahl. Man sieht aber leicht, dass in ζ als Grenzzug von Σ', und in ζ als Grenzzug von Σ'' entgegengesetzte Folgeordnungen gelten müssen, wenn diese Schichten gleiches Verhältniss dazu haben sollen, und dasselbe gilt von ζ'. In denjenigen Anwendungen also, in welchen zwei an sich gleiche aber in entgegengesetzten Folgeordnungen vorkommende Züge wie einander destruirend betrachtet werden können, kann man die Totalität der Grenzzüge von Σ der Totalität der Grenzzüge von Σ' und Σ'' gleich setzen, und demnach auch der Totalität der einfachen Grenzzüge sämmtlicher aus weiterer Zerlegung hervorgehender Schichten.

6.

Die Begriffbestimmung eines Integrals $\int ft\,dt$ lässt sich auf zwei verschiedenen Arten feststellen.

Einmahl erklärt man das Integral als eine solche Function von t, aus deren Differentiation $ft.dt$ hervorgeht.

Die zweite Art geht zunächst von einer Integration zwischen bestimmten Grenzen t_0 und T aus. Man theilt die Differenz $T-t_0$ in eine beliebige Anzahl, z. B. n gleicher oder ungleicher Theile

$$t_1-t_0,\ t_2-t_1,\ t_3-t_2,\ \ldots,\ T-t_{n-1},$$

und bestimmt das Aggregat

$$(t_1-t_0)ft_0+(t_2-t_1)ft_1+(t_3-t_2)ft_2+\cdots+(T-t_{n-1})ft_{n-1}.$$

Dieses Aggregat wird je nach der Art und Menge der Abtheilungen verschieden sein, aber sich einer bestimmten Grenze S unendlich annähern, wenn man die Grösse der Theile unendlich abnehmen, mithin ihre Anzahl unendlich zunehmen lässt. Mit dem Ausdruck Integral $\int ft.dt$ von $t=t_0$ bis $t=T$ genommen, oder symbolisch mit

$$\int_{t_0}^{T} ft.dt$$

bezeichnet man nun eben diesen Grenzwerth S, welcher in der abgekürzten Sprache als Summe unendlich vieler unendlich kleiner Elemente $ft.dt$ zwischen den Werthen $t=t_0$ und $t=T$ auftritt, oder in geometrischer Einkleidung als Quadratur. Da dieses S abhängig ist von der Wahl der Grenzwerthe t_0 und T und bei gleich bleibendem t_0 sich mit T zugleich verändert, so kann man es wie eine Function von T betrachten, und indem man diese Function mit FT bezeichnet, wird, wie sich leicht nachweisen lässt,

$$dFT=fT.dT$$

werden, oder indem man t anstatt T schreibt,

$$dFt=ft.dt.$$

Es ist hieraus klar, dass beide Begriffsbestimmungen zusammenfallen.

7.

Bei der zweiten, der summatorischen, Begründungsart liegt stillschweigend die Voraussetzung in Beziehung auf die Function ft zum Grunde, dass ihr

Werth zwischen den Grenzen $t = t_0$ und $t = T$ überall ein bestimmter und zwar ein endlicher sei. Ich füge darüber einige Erläuterungen bei.

Die Forderung, dass der Werth von ft ein bestimmter sei, ist schon von selbst erfüllt, wenn diese Function in die Classe derjenigen gehört, welche EULER, nicht eben glücklich, mit dem Namen einförmige*) belegt hat, und die man treffender einwerthige nennen könnte, da eben ihr Charakter darin besteht, dass jedem Werthe der Veränderlichen nur Ein Werth der Function entspricht.

Ist hingegen ft eine vielwerthige Function, so ist erforderlich, dass nach einem Principe bestimmt sei, welcher aus den verschiedenen Werthen der Function für jeden Wert von t zwischen den Grenzen t_0 und T gelten soll. Das Princip, dass die Werthe der Function nach der Stetigkeit zusammenhängen sollen, wird, sobald ft für einen der Werthe von t gegeben ist, zur Bestimmung des Zuges ausreichen, so lange man nicht auf einen Werth von t kommt, für welchen der betreffende Werth von ft mit einem andern zusammenfällt, (also zwei Züge einander kreuzen), in welchem Falle über das fernere Fortschreiten eine anderweitige Bestimmung getroffen werden muss. Übrigens verstehe ich das Fortschreiten nach der Stetigkeit nur so, dass unendlich kleinen Veränderungen von t unendlich kleine Änderungen von ft entsprechen, und sehe einen Übergang von reellen Werthen zu imaginären nicht als eine Unterbrechung der Stetigkeit an.

Die zweite Bedingung, dass der Werth von ft, so lange t die Grenzen t_0 und T nicht überschreitet, überall endlich sei, ist übrigens keine absolut nothwendige. Man nehme an, dass ft unendlich werde für $t = t'$, aber für alle zwischen t_0 und t' liegende Werthe endlich bleibe. Ist $t' - \omega$ ein solcher Werth, so hat $\int_{t_0}^{t'-\omega} ft.dt$ einen bestimmten endlichen Werth, und wenn derselbe bei unendlich abnehmendem ω nicht über alle Grenzen wächst, sondern sich nur einer endlichen Grenze G unendlich nähert, so wird es erlaubt

*) Angemessener würde es sein, einförmige oder einformige Functionen diejenigen zu nennen, die für alle Werthe von x nach einem einzigen Gesetze gebildet werden; zweiförmige, vielförmige hingegen wären dann die, wo für die Werthe zwischen gewissen Grenzen ein Gesetz gilt, zwischen andern ein anderes gilt, kurz was man sonst functiones discontinuae nannte. In neuester Zeit hat [man] aber die Benennung continuirliche und discontinuirliche Function in einer andern Bedeutung zu nehmen angefangen.

sein, unter $\int_{t_0}^{t'}$ eben diese Grenze zu verstehen. Bleibt dann ferner ft endlich für alle Werthe von t, welche zwischen t' und T fallen, letztern eingeschlossen, und ist $t' + \omega$ ein solcher Werth, so wird $\int_{t'+\omega}^{T} ft.dt$ einen bestimmten endlichen Werth haben, und wenn dieser bei unendlich abnehmendem ω sich nur einer endlichen Grenze unendlich nähert, so wird diese Grenze G' als Werth von $\int_{t'}^{T} ft.dt$ betrachtet werden dürfen, und mit gleichem Rechte die Summe $G + G'$ als Werth von $\int_{t_0}^{T} ft.dt$[*)].

Wenn hingegen diese Bedingungen nicht beide zutreffen, d. i. wenn indem ft' unendlich wird,

$$\int_{t_0}^{t'-\omega} ft.dt \text{ und } \int_{t'+\omega}^{T} ft.dt,$$

bei unendlich abnehmendem ω, nicht beide endliche Grenzwerthe haben, so bildet in der zweiten Begründungsart der Wert $t = t'$ eine unübersteigliche Scheidewand, so lange man (wie man bisher immer gethan hat) sich dabei ausschliesslich auf reelle Werthe von t beschränkt. Es findet sich also hier eine Lücke in der Integralrechnung: denn in allen den unzähligen Fällen, wo $ft.dt$ nicht als das Differential einer analytischen[**)] Function Ft dargestellt werden kann, d. i. einer solchen, die eine allgemein gültige Werth-Bestimmung für jeden Werth von t durch algebraische oder ganz eingebürgerte transscendente Operationen darbietet, und wo man also die Bedeutung von $\int ft.dt$ nur in unserer zweiten Art auffassen kann, bleiben, unter den vorhin bezeichneten Umständen die beiden Parthien der Functionalwerthe, diesseits und jenseits der Scheidewand, ohne Verknüpfung. Folgeweise hat man dann in solchen Fällen öfters unberechtigte Willkür eintreten lassen, während die strenge Wissenschaft für jede analytische Function, die sie in ihren Bereich zieht, eine allgemeingültige Genesis aus einem einheitlichen Princip verlangt. Allerdings ist gegen diese Forderung in der neuern Mathematik fort und fort vielfach gefehlt.

[*) In der Handschrift lautet die untere Grenze des Integrals t'; im Vorhergehenden schrieb GAUSS für die untere Grenze abwechselnd bald t_0, bald t^0.]

[**) Früher hieß es »entwickelten«, was GAUSS durchgestrichen hat.]

8.

Die gründliche Abhülfe dieses Mangels ist nur dadurch zu gewinnen, dass man den imaginären Grössen völlig gleiche Rechte einräumt, also die Analysis gleichmässig über das ganze Gebiet der complexen Grössen erstreckt. In diesem Gebiete kann man von einem Werthe der veränderlichen Grösse t zu einem andern auf unendlich vielen verschiedenen Wegen nach der Stetigkeit gelangen, und so bei der Integration $\int ft.dt$ solche Werthe von t, für welche ft unendlich gross wird, umgehen. Eine vollständige Abhandlung der aus diesem Gesichtspunkte aufgefassten Theorie des Integrirens würde einen viel grössern Raum erfordern als hier zulässig ist: Es werden jedoch einige für unsere Hauptuntersuchung nothwendige Sätze hier entwickelt werden müssen.

$_*$I. Wenn sich eine analytische Function Ft angeben lässt, aus deren Differentiation $ft.dt$ hervorgeht, und diese Function eine einwerthige ist, so wird auch ft eine einwerthige Function sein.* [*)]

9.

. . . .

[Ein Zettel in Fa, Kapsel 46a.]

Die Function ft habe für alle Werthe von $t = x + iy$, deren imaginärer Theil iy unterhalb bestimmter Grenzen liegt, nemlich y nicht grösser als h, bestimmte endliche Wahlwerthe, die nach der Stetigkeit zusammenhangen, und die mit dem Intervall 2π nach x periodisch sind, so dass

$$f(t+2\pi) = ft.$$

Für jeden bestimmten Werth von y, der nicht grösser ist als h, wird sich ft durch die convergente Reihe[**)]

$$\begin{aligned} ft = P + 2P_1 \cos x + 2P_2 \cos 2x + 2P_3 \cos 3x + \text{u.s.w.} \\ + 2Q_1 \sin x + 2Q_2 \sin 2x + 2Q_3 \sin 3x + \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

[*) Die zwischen $_*$ * gesetzte Stelle ist in der Handschrift durchstrichen.]

[**) Man vergl. den auf der ungerechtfertigten Vertauschung zweier Grenzübergänge beruhenden Beweisversuch für die Konvergenz der FOURIERreihe einer stetigen Funktion, Werke VII, 1906, S. 470.]

ausdrücken lassen, wo

$$2\pi P_n = \int_0^{2\pi} \cos nx . f(x+iy) . dx$$

$$2\pi Q_n = \int_0^{2\pi} \sin nx . f(x+iy) . dx,$$

mithin bestimmte Functionen von y sein werden. Für $y = 0$ gehe

$$\begin{aligned} &P_n \text{ über in } A_n \\ &Q_n \quad ,, \quad ,, \quad B_n. \end{aligned}$$

Man hat, indem man $dft = f't.dt$ setzt

$$2\pi \frac{dP_n}{dy} = i \int_0^{2\pi} \cos nx f'(x+iy)\, dx$$

$$2\pi \frac{dQ_n}{dy} = i \int_0^{2\pi} \sin nx f'(x+iy)\, dx,$$

wobei nicht schwer ist sich zu überzeugen, dass diese Resultate auch dann gültig bleiben würden, wenn innerhalb der festgesetzten Grenzen $f'(x+iy)$ auch ein oder einigemahl unendlich würde*), obwohl jener Fall auch schon mit unserer Voraussetzung, dass die Wahlfunction nur Einen Werth hat, unvereinbar ist.

*) Die Hauptmomente des Beweises sind folgende. Fx, fx Functionen von x, die von $x = A$ bis $x = A + D$ endliche, nach der Stetigkeit fortschreitende Wahlwerthe haben, D positiv. Man kann beweisen, dass $\frac{dFx}{dx} = fx$, für jeden Wert von x, der in jenem Zwischenraume liegt, so jedoch, dass der Beweis nicht anwendbar ist auf den Fall $x = A$. Ich behaupte, dass auch für diesen Werth selbst jene Relation stattfinden wird.

Es sei a eine unendlich kleine Grösse,

$$FA = G, \quad fA = g, \quad F(A+ab) = G + ac,$$

wo erlaubt ist anzunehmen, dass auch b und c unendlich klein sind. Es sei ferner

$$f(A+ab) = g + d$$

$$\int_{A+ab}^{A+a} fx.dx = (a - ab)(g + d + e),$$

wo d, e unendlich klein sein werden. Also

Es ist aber, y als constant betrachtet,

$$\frac{d\cos nxf(x+iy)}{dx} = -n\sin nxf(x+iy)+\cos nxf'(x+iy)$$
$$\frac{d\sin nxf(x+iy)}{dx} = n\cos nxf(x+iy)+\sin nxf'(x+iy).$$

Also

$$-n\int_0^{2\pi}\sin nxf(x+iy)\,dx+\int_0^{2\pi}\cos nxf'(x+iy)\,dx = 0$$
$$n\int_0^{2\pi}\cos nxf(x+iy)\,dx+\int_0^{2\pi}\sin nxf'(x+iy)\,dx = 0,$$

weil $\cos nxf(x+iy)$ vermöge der Voraussetzung für die Grenzwerthe der Integration $x=0$ und $x=2\pi$ gleiche Werthe erhält, und $\sin nxf(x+iy)$ für beide $=0$ ist. Es ist folglich

$$-2n\pi Q_n - 2\pi i\frac{dP_n}{dy} = 0$$
$$2n\pi P_n - 2\pi i\frac{dQ_n}{dy} = 0$$

d. i.

$$\frac{dP_n}{dy} = inQ_n,\quad \frac{dQ_n}{dy} = -inP_n$$

und folglich

$$\frac{ddP_n}{dy^2} = nnP_n,$$

von welcher Gleichung das vollständige Integral ist

$$P_n = \alpha_n e^{ny}+\beta_n e^{-ny}$$

in dem α_n, β_n zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Hiemit wird dann ferner

$$Q_n = -\alpha_n ie^{ny}+\beta_n ie^{-ny}.$$

Diese Constanten bestimmen sich dadurch, dass für $y=0$

$$F(A+a) = G+ac+(a-ab)(g+d+e)$$

und

$$\frac{F(A+a)-FA}{a} = (g+d+e)(1-b)+e,$$

also von g um eine unendlich kleine Grösse verschieden.

$$P_n = A_n,\quad Q_n = B_n$$

werden muss, also

$$\alpha_n = \tfrac{1}{2}(A_n+iB_n),\quad \beta_n = \tfrac{1}{2}(A_n-iB_n).$$

Wir haben demnach

$$P_0 = A_0,\quad P_1 = \tfrac{1}{2}A_1(e^y+e^{-y})+\tfrac{1}{2}iB(e^y-e^{-y})$$

und allgemein

$$P_n = \tfrac{1}{2}A_n(e^{ny}+e^{-ny})+\tfrac{1}{2}iB_n(e^{ny}-e^{-ny}),$$

und ebenso

$$Q_n = \tfrac{1}{2}B_n(e^{ny}+e^{-ny})-\tfrac{1}{2}iA_n(e^{ny}-e^{-ny}).$$

[VII.]

[ÜBER DIE KONVERGENZ DER ENTWICKLUNG DER MITTELPUNKTSGLEICHUNG.]

[Vier Zettel, Astr. d 1, Kapsel 90.]

[1.]

[Erster Zettel]

[Es sei für]

$$[1] \qquad t = \cos u + i \sin u$$

$$[2] \qquad \frac{1}{(1-\alpha t)(1-\alpha t^{-1})} = T,$$

so haben [wir]

$$[3] \qquad (1-\alpha\alpha)\,T = 1 + 2\alpha\cos u + 2\alpha\alpha\cos 2u + 2\alpha^3\cos 3u + \text{u.s.w.},$$

$$(1-\alpha\alpha)^3\,TT = 1 + \alpha\alpha + 4\alpha\cos u + (6\alpha\alpha - 2\alpha^4)\cos 2u$$
$$+ (8\alpha^3 - 4\alpha^5)\cos 3u + (10\alpha^4 - 6\alpha^6)\cos 4u + \text{etc.}$$

[Für] $\alpha = \operatorname{tang}\theta$ [ist]

$$[4] \qquad T = \frac{1}{1+\alpha\alpha-2\alpha\cos u} = \frac{\cos\theta^2}{1-\sin 2\theta\,.\cos u},$$

$$[5] \qquad (1-\alpha\alpha)\,T = \frac{\cos 2\theta}{1-\sin 2\theta\,.\cos u}.$$

[Es bedeute*) v die wahre, E die exzentrische, M die mittlere Anomalie und $\varepsilon = \sin\varphi$ die Exzentrizität, so ist]

[*) Die Bezeichnungen entsprechen denen der *Theoria motus*, 1809, siehe Werke VII (1906), S. 17, 19.]

$$[6] \qquad \frac{dv}{dM} = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}{(1-\varepsilon\cos E)^2} = \frac{\cos\varphi}{(1-\sin\varphi\,.\cos E)^2}.$$

[Ferner ist]

$$[7] \qquad 1 - \varepsilon\cos E = 0$$

für

$$[8] \qquad \begin{cases} \cos E = \frac{1}{\varepsilon} \\ \sin E = i\,\frac{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}{\varepsilon} \\ \quad E = i\log\frac{1+\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}{\varepsilon} \end{cases}$$

$$[9] \qquad M [= E - \varepsilon\sin E] = i\left\{\log\frac{1+\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}{\varepsilon} - \sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}\right\}$$

$$[10] \qquad \begin{cases} \cos M + i\sin M = \left\{\frac{1-\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}{\varepsilon}\right\} e^{+\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}} \\ \qquad\qquad = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,e^{+\cos\varphi}. \end{cases}$$

Beispiel:

$\varepsilon = 0{,}254236$	0,4685742	2,3666507
$\varphi = 14^0\,43'\,41'',950$	5,0172181	2,3428710
$\cos\varphi$ 9,9854903	4,2115277	1,8118966
$\varkappa[=\log_{10}e]$ 9,6377843	0,9371484	2,8114452
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ 9,1114013	3,5474520	1,2707953
$+\,0{,}4200245$	1,4057226	3,2800194
	2,9412684	0,7396514
$[\log_{10}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\,.\,e^{\cos\varphi} =]$ 9,5314258	1,8742968	3,7485936

[Zweiter Zettel]

Knotenpunkte bei Keplers Problem.

[2.]

Die Excentricität $= f$; sonst die gewöhnlichen Bezeichnungen [wie im art. 1.].

[11] $$\left\{\begin{aligned} \cos E &= \frac{1}{\sin\varphi} \\ \sin E &= i \operatorname{cotang}\varphi \\ e^{iE} &= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi \\ E &= i\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi \end{aligned}\right.$$

[12] $$\left\{\begin{aligned} M &= i(\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi - \cos\varphi) \\ e^{iM} &= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,e^{\cos\varphi} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta \\ \cos M &= \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{g} \\ \sin M &= i\operatorname{cotg}\theta. \end{aligned}\right.$$

Geht hier

$$E \text{ in } E+\varepsilon$$

und damit

$$M \text{ in } M+\mu$$

über, so ist

[13] $$\mu = \tfrac{1}{2}f\sin E\,.\,\varepsilon\varepsilon + \tfrac{1}{6}f\cos E\,.\,\varepsilon^3 - \tfrac{1}{24}f\sin E\,.\,\varepsilon^4 \text{ u.s.w.}$$

und es werden die Werthe von $1-f\cos E$

[14] $$= f\sin E\,.\,\varepsilon + \tfrac{1}{2}f\cos E\,.\,\varepsilon\varepsilon - \tfrac{1}{6}f\sin E\,.\,\varepsilon^3 \text{ u.s.w.}$$

[und von] $1-g\cos M$

[15] $$= g\sin M\,.\,\mu + \tfrac{1}{2}g\cos M\,.\,\mu\mu - \tfrac{1}{6}g\sin M\,.\,\mu^3 \text{ u.s.w.}$$

Man hat also

[16] $$\frac{\cos\varphi}{(1-f\cos E)^2} = \frac{g\sin M\,.\,\cos\varphi}{2f\sin E\,.\,(1-g\cos M)}\,\Omega,$$

wo

[17] $$\Omega = \frac{1+\frac{1}{3}\operatorname{cotg}E\,.\,\varepsilon}{1+\operatorname{cotg}E\,.\,\varepsilon}$$

[18] $$= 1-\tfrac{2}{3}\operatorname{cotg}E\,.\,\varepsilon,$$

oder

[19] $$\frac{\cos\varphi}{(1-f\cos E)^2} = \frac{\cos\theta}{2(1-g\cos M)}\left(1-\tfrac{2}{3}\operatorname{cotg}E\,.\,\varepsilon\right).$$

Oder, da

[20] $$\varepsilon\varepsilon = \frac{2\mu}{f\sin E} = \frac{2(1-g\cos M)}{fg\sin E\,.\,\sin M} = \frac{2(1-g\cos M)}{-\cos\varphi\,.\,\cos\theta},$$

also

[21] $$\varepsilon = -i\sqrt{\frac{2(1-g\cos M)}{\cos\varphi\,.\,\cos\theta}}$$

[ist, so folgt]

[22] $$1-\tfrac{2}{3}\operatorname{cotg}E\,.\,\varepsilon = 1+\frac{\sqrt{8}}{3\cos\varphi^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1-g\cos M}{\cos\theta}},$$

[23] $$\frac{\cos\varphi}{(1-f\cos E)^2} = \frac{\cos\theta}{2(1-g\cos M)} + \frac{\sqrt{2}}{3\cos\varphi^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}}.$$

[3.]

Es ist, wenn man $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \gamma$ setzt [vergl. die Gleichungen [1] bis [5] des art. 1.],

[24] $$\left\{\begin{aligned} \frac{\cos\theta}{1-g\cos M} &= \frac{1-\gamma\gamma}{(1-\gamma e^{iM})(1-\gamma e^{-iM})} \\ &= 1+2\gamma\cos M+2\gamma\gamma\cos 2M+\text{etc.}, \end{aligned}\right.$$

[25] $$\sqrt{\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}} = \sqrt{(1-\gamma\gamma)}\left\{\begin{aligned} &1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\gamma\gamma+\tfrac{1.1.3.3}{2.2.4.4}\gamma^4+\cdots \\ &+2\cdot\tfrac{1}{2}\gamma\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\gamma\gamma+\tfrac{1.3.3.5}{2.4.4.6}\gamma^4\ldots\right)\cos M \\ &+2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\gamma\gamma\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{6}\gamma\gamma+\cdots\right)\cos 2M \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Also der Coeffic[ient] von $\cos nM$

[26] $$= 2\sqrt{(1-\gamma\gamma)}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\gamma^n\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\gamma\gamma+\text{etc.}\right)$$

oder proxime

[27] $$= 2\gamma^n\frac{\Pi 2n}{2^{2n}\Pi n^2} = \frac{2\gamma^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Es ist also in der Entwickl[ung] von $\frac{dv}{dM}$ [siehe die Gleichung [6] des art. 1.] der Coefficient von $\cos nM$

[28] $$= \gamma^n\left\{1+\frac{\sqrt{8}}{3\cos\varphi^{\frac{3}{2}}\,.\,\sqrt{n\pi}}\right\}.$$

Berechnung von $\frac{\cos\varphi}{rr} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{1-g\cos M} - \sqrt{\frac{2\cos\theta}{9\cos\varphi^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-g\cos M)}}$.

0	**7.30**	**15**	**22.30**	**30**
9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827
9,0755074	9,1775110	9,3721414	9,5531812	9,7012866
9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038
1,5860936	1,4650937	1,2282173	0,9996419	0,8056631
9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866
0,7930468	0,7325468½	0,6141086½	0,4998209½	0,4028315½
6,3500223	5,0207860	3,2073126	2,1139830	1,5031284
4,3621180	3,3013954	1,9134674	1,1304353	0,7232142
2,1199858	1,8443070	1,4040911	1,0792140	0,8632133
— 0,1320815	— 0,1249173	— 0,1102459	— 0,0956663	— 0,0832991
37.30	**45**	**52.30**	**60**	**67.30**
9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827
9,8210018	9,9189472	0,0003148	0,0688354	0,1271730
9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038
0,6435474	0,5069145	0,3903762	0,2899006	0,2025649
9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866
0,3217737	0,2534572½	0,1951881	0,1449548	0,1012824½
1,1409876	0,9106165	0,7550363	0,6448331	0,5637800
0,4979105	0,3635116	0,2779585	0,2205532	0,1803718
0,7162428	0,6119894	0,5351490	0,4766959	0,4310911
0,0731657	0,0648845	0,0580712	0,0524160	0,0476829
75	**82.30**	**90**	**97.30**	**105**
9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827
0,1772582	0,2205162	0,2580194	0,2905886	0,3188614
9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038
0,1261601	0,0590558	0	0,0519782	0,0976412
9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866
0,0630800½	0,0295279	0	0,0259891	0,0488206
0,5023709	0,4547435	0,4171224	0,3869850	0,3625946
0,1512739	0,1296163	0,1131365	0,1003750	0,0903572
0,3947905	0,3654387	0,3414181	0,3215863	0,3051167
0,0436935	0,0403115	0,0374322	0,0349763	0,0328793
112.30	**120**	**127.30**	**135**	**142.30**
9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827
0,3433384	0,3644158	0,3824100	0,3975726	0,4101036
9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038
0,1375940	0,1723203	0,2022082	0,2275697	0,2486541
9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866
0,0687970	0,0861601½	0,1011041	0,1137848½	0,1243270½
0,3427239	0,3264877	0,3132368	0,3024894	0,2938861
0,0824157	0,0760823	0,0710224	0,0669937	0,0638190
0,2914001	0,2799796	0,2705095	0,2627252	0,2564245
0,0310919	0,0295742	0,0282951	0,0272295	0,0263574
150	**157.30**	**165**	**172.30**	**180**
9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827
0,4201606	0,4278648	0,4333064	0,4365470	0,4376232
9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038
0,2656582	0,2787348	0,2879972	0,2935240	0,2953612
9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866
0,1328291	0,1393674	0,1439986	0,1467620	0,1476806
0,2871588	0,2821096	0,2785969	0,2765259	0,2758415
0,0613685	0,0595482	0,0582917	0,0575546	0,0573116
0,2514534	0,2476962	0,2450688	0,2435144	0,2429998
0,0256631	0,0251348	0,0247636	0,0245431	0,0244699

Der constante Theil von

$$\frac{\sqrt{2}}{3\cos\varphi^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}}$$

ist gleich

$$\sqrt{\frac{\cos\theta}{9\cos\varphi^3}}\cdot\frac{1}{\mathrm{Med}\,(\sin(45^\circ-\frac{1}{2}\theta),\ \sin(45^\circ+\frac{1}{2}\theta))},$$

in Zahlen 0,5508570, auch

[29] $$\frac{\sqrt{2}}{3\cos\varphi^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\mathrm{M[ed]}\left(1,\ \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\right)}.$$

[4.]

[Dritter Zettel]

Nro. 2 als weiterer Zusatz.

Indem man

[30] $$\cos\varphi = p,\ \cos\theta = q,\ [x = 1-g\cos M,\ y = 1-f\cos E]$$

setzt, wird [*)]

[31] $$\left\{\begin{aligned} \frac{px}{yy} = \frac{1}{2}q &\left(\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}\cdot i\varepsilon - \frac{1}{12}\varepsilon\varepsilon &+ \frac{1}{60}\frac{1}{p}\,i\varepsilon^3\ldots \\ + \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{q}\varepsilon\varepsilon &- \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{q}\,i\varepsilon^3\ldots \end{aligned}\right) \\ \times &\left(\begin{aligned} 1 + \frac{1}{p}\cdot i\varepsilon \quad + \frac{1}{3}\varepsilon\varepsilon &+ \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon^3\ldots \\ - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{pp}\varepsilon\varepsilon &- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^3}i\varepsilon^3\ldots \end{aligned}\right) \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{q}\cdot\frac{px}{yy} =\right] 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon &+ \frac{13}{30}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon^3\ldots \\ + \frac{1}{4}\cdot\frac{p}{q}\varepsilon\varepsilon &- \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{q}i\varepsilon^3\ldots \\ - \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{pp}\varepsilon\varepsilon &- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^3}i\varepsilon^3\ldots \\ &- \frac{7}{36}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon^3\ldots \\ &+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{q}i\varepsilon^3\ldots \\ &+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^3}i\varepsilon^3\ldots \end{aligned}$$

[*) Die in der Handschrift an dieser Stelle folgende Gleichung ist unvollständig, die vollständige Gleichung findet sich auf der zweiten Seite des Blättchens; wir haben gleich diese hierher gesetzt und die unvollständige unterdrückt.]

[32] $$\left[\frac{2}{q}\cdot\frac{px}{yy}\right] = 1 + \frac{2}{3}\,\frac{1}{p}\,i\varepsilon + \frac{1}{12ppq}(3ppq+3p^3-5q)\varepsilon\varepsilon$$
$$+\frac{1}{180p^3q}(43ppq+15p^3-45q)\,i\varepsilon^3\ldots$$

[33] $$\varepsilon = -i\sqrt{\frac{2x}{pq}} - \frac{1}{3}\,i\,\frac{x}{ppq} - \frac{1}{36}\,i\sqrt{\frac{2x^3}{pq}}\left\{\frac{5}{p^3q} - \frac{3}{pq} + \frac{9}{qq}\right\}\ldots$$

$$\left[\frac{2}{q}\cdot\frac{px}{yy} =\right] 1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x}{p^3q}} + \frac{2}{9}\cdot\frac{x}{p^3q} \qquad + \frac{1}{54}\sqrt{\frac{2x^3}{p^9q^5}}(5q-3ppq+9p^3)$$
$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{p^3qq}(3ppq+3p^3-5q) - \frac{1}{18}\sqrt{\frac{2x^3}{p^9q^5}}(3ppq+3p^3-5q)$$
$$-\frac{1}{90}\sqrt{\frac{2x^3}{p^9q^5}}(43ppq+15p^3-45q)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

[34] $$= 1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x}{p^3q}} + \frac{1}{18}\cdot\frac{x}{p^3qq}(19q-9ppq-9p^3)$$
$$+\frac{1}{270}\sqrt{\frac{2x^3}{p^9q^5}}(235q-189ppq-45p^3)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Logarithm von

[35] $$\frac{1}{540}\sqrt{\frac{2}{p^9q^5}}(235q-189ppq-45p^3)$$

ist 9,9046115. Die Multiplication mit $\sqrt{(1-g\cos M)}$ auf der dritten Seite [*)].

Näherungsweise wird (n) dargestellt durch

$$\frac{G(\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta)^n}{(n+2,6)^{\frac{3}{2}}},\quad \log G = 7{,}18800$$

oder auch

$$\frac{G(\text{tang}\,\frac{1}{2}\theta)^n}{(n+2,54)^{\frac{3}{2}}},\quad [\log]\,G\,[=]\,7{,}18234.$$

[*) Die dritte und vierte Seite unseres Blättchens enthalten fast nur Zahlenreihen, die nicht mit abgedruckt sind.]

[Vierter Zettel]

[5.]

Bestimmung des Zuges complexer Werthe von

$$E = p + qi;$$

[36] $$q = \log \text{tg}\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\theta),$$

[für reelle Werte von $M = E - f\sin E$,]

[37] $$p - \frac{f\sin p}{\cos\theta} = M, \text{[*)]}$$

[38] $$\frac{\log\text{tg}\,(45^0+\frac{1}{2}\theta)}{kf.\,\text{tg}\,\theta} = \cos p,$$

k [der] Modul [**)] d[er] Brigg[schen] Log[arithmen.]

Für $M = 0$; $p = 0$; $\theta = 68.\ 27.\ 39{,}75$

$\log\text{tg}\left(45^0+\frac{\theta}{2}\right)\ldots 9{,}8577971\ 5$ Zahl $= 0{,}7207708$

$\text{tg}\,\theta\ldots 0{,}4037371\ 5$

$kf\ldots 9{,}4540600.$

θ	p	M
71^0	$-20^0\ 0'\ 0''$	$+\ 19.\ 25.\ 42$
76	$-37.\ 2.\ 0$	$+\ 56.\ 24.\ 12$[***)]
81	$-52.\ 4.\ 22$	$+137.\ 10.\ 24$

[*) Gauss hat hier und im Folgenden die Exzentrizität mit e bezeichnet; wir haben in Übereinstimmung mit dem art. [2.] dafür f gesetzt.]

[**) Die Handschrift hat hier Basis.]

[***) In der Handschrift sind hier und in der Tabelle auf der folgenden Seite für $\theta = 76^0$ die unrichtigen Werte $p = -35^0\,13'\,33''$, $M-p = 89^0\,29'\,3''$, $M = 54^0\,15'\,30''$ angegeben und errechnet. Nun ist der Logarithmus von $\cos 35^0\,13'\,33''$ gleich 9,91216, während der richtige Wert von $\log_{10}\cos p$, wie er sich durch Subtraktion der Zahlen 9,35622 und 9,45406 (siehe auf der folgenden Seite) ergibt, 9,90216 lautet. Gauss hat also bei dieser Subtraktion ein Versehen begangen. Im Text sind überall die richtigen Zahlen eingesetzt.]

	$\theta = 76^0$	$\theta = 81^0$
$\log \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\theta}{2}\right)$	9,95945	0,04298
$\operatorname{tg}\theta$	0,60323	0,80029
	9,35622	9,24269
kf	9,45406	9,45406
[$\cos p$	9,90216	9,78863]
p	$-37.\ 2.\ 0$ [*)]	[$-52.\ 4.\ 22$]
$\sin p$	9,77980	9,89696
f in Sec.	5,13070	5,13070
	4,91050	5,02766
$\cos\theta$	9,38368	9,19433
[$M-p$ in Sec. =]	336372	681286
	93. 26. 12 [*)]	189. 14. 46

[*) Siehe die Fußnote ***) auf der vorigen Seite.]

BRIEFWECHSEL.

[1.]

Gauss an C. F. Hindenburg.

Braunschweig d. 8[ten] Oct. 1799.

Wohlgeborener

Hoch zu verehrender Herr Professor.

Ich nehme mir die Freiheit, Ew. Wohlgeboren hiemit ein Exemplar einer vor Kurzem von mir fertig gewordenen kleinen Schrift [*)] zukommen zu lassen, und bitte dasselbe als ein geringes Zeichen meiner Verehrung von Dero grossen Verdiensten gütigst anzunehmen. Vielleicht haben Dieselben auf eine oder die andere Art Gelegenheit zum allgemeinen Bekanntwerden dieser Schrift etwas beizutragen; mir aber wird es die grösste Freude sein, wenn Ew. Wohlgeboren derselben den schätzbarsten Beifall gönnen wollen. Erlauben Dieselben mir nur die eine Bemerkung, dass die Kürze, Gedrungenheit, womit sie geschrieben ist, in mehr als Einer sehr wichtigen Ursache ihren Grund hat; zwar hat das die Folge, dass nicht jeder gleich beim ersten flüchtigen Durchlesen sich des Ganzen bemächtigt; allein diess hat bei einem Aufsatze, der eigentlich nur für die Geübtere bestimmt sein kann, Nichts auf sich, und ich habe schon mehrere überzeugende Belege, dass man bei aufmerksamer nicht übereilter Lectüre keine Dunkelheit darin gefunden hat.

Es sind schon drittehalb Jahre, dass ich mir einmal die Freiheit nahm Ew. Wohlgeboren zu schreiben und Denenselben einen kleinen Aufsatz über

[*) *Demonstratio nova etc.* Helmstadii 1799, Werke III, S. 1.]

das wichtige Theorem von Lagrange zu communiciren[*)], wovon Hr. H[of] R[ath] Kästner in Göttingen damals die Besorgung gütigst übernehmen wollen. Da ich nicht gefunden, dass Ew. Wohlgeboren davon in Dero Archiv Gebrauch gemacht und ich auch von Denenselben auf mein Schreiben keine Antwort erhalten habe, so muss ich fast daraus schliessen, dass dasselbe Ihnen nicht zu Händen gekommen sei. Dem sei indess wie ihm wolle, so ist es mir gegenwärtig aus mehreren Ursachen lieb, dass mein Beweis jenes Lehrsatzes nicht gedruckt ist, theils weil ich das Laplacesche Verfahren[**)], welches mir damals noch unbekannt war, weit vorziehe und für eleganter und subtiler halte, theils weil ich nach der Hand zu dem Theorem selbst erhebliche Erweiterungen gefunden habe[***)], welche ich bekannt machen werde, sobald andere Arbeiten mir Musse dazu lassen. Indessen würde es mir lieb sein wenn Ew. Wohlgeboren mich zu unterrichten die Güte haben wollten, ob Dieselben gedachten Aufsatz erhalten haben oder nicht, und im ersten Fall mir denselben wieder zurückschicken, zumal da Dieselben nach der ausführlichen Bearbeitung dieser Gegenstände von meinem verehrungswürdigsten Freunde, Herrn Prof. Pfaff[†)] ohnehin keinen Gedanken mehr haben könnten, Gebrauch davon zu machen.

Von meinen in voriger Messe angekündigten *Disquiss. Arithmett.* ist, leider, der Druck durch verschiedene verdriessliche Umstände sehr verzögert; das Werk wird etwa zwischen 30 und 40 Bogen stark werden, wovon kaum die Hälfte abgedruckt ist; indessen hoffe ich den Druck, welcher seit einigen Monaten ganz unterbrochen gewesen ist, bald wieder in raschen Gang zu bringen und das Ganze dann bald zu vollenden.

[*)] Dieser Aufsatz ist nach einer im Nachlaß (Fb, Kapsel 46 a) befindlichen Handschrift abgedruckt Werke VIII, S. 76; vergl. auch die Tagebuchaufzeichnung Nr. 49 vom 27. Dezember 1796.]

[**)] Siehe den VII. Abschnitt der Abhandlung von Laplace *Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théorie des suites*, Histoire de l'Acad. des Sciences, Année 1777, Paris 1780, Mémoires etc. S. 113; vergl. *Mécanique céleste* I, Paris, an VII (1798—99), livre II, Nr. 22.]

[***)] Siehe die Tagebuchaufzeichnung Nr. 86 vom Mai 1798.]

[†)] Außer der Arbeit von J. Fr. Pfaff, die Gauss in dem Hindenburg eingereichten Aufsatze anführt, (siehe Werke VIII, S. 76 letzte Zeile) *Analysis einer wichtigen Aufgabe des Herrn de la Grange*, Archiv der r. u. a. Mathematik **1**, Heft 1, S. 81, kommen noch in Betracht die Aufsätze *Allgemeine Summation einer Reihe, worin höhere Differenziale vorkommen*, ebenda **1**, Heft 3, 1795, S. 337 und **2**, Heft 5, 1796, S. 67, ferner *Auszug aus einem Briefe von Herrn Prof. Pfaff an den Herausgeber*, ebenda **2**, Heft 7, 1797, S. 347 und *Disquisitiones analyticae*, Helmstadii 1797, 3. Abhandlung: *Investigatio serierum transcendenter summabilium*, S. 65—132.]

Mit der vollkommensten Verehrung habe ich die Ehre zu beharren Ew. Wohlgeboren

ganz ergebenster Diener
Doctor Gauss.

[2.]

Gauss an Schumacher.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher VI, Altona 1865, S. 51.]

. . . . Über . . . die Convergenz der Reihe für die Mittelpunktsgleichung, kann ich für jetzt mich nicht weiter auslassen. Da ich, lange vor 1817 (wo ich Carlinis Abh[andlung] in den Effem. für 1818[*)] erhielt) die Aufgabe selbst auf eine ohne allen Vergleich kürzere Art aufgelöset hatte, so habe ich damals diese Abhandl[ung] ebenso wie jetzt Jacobis Aufsatz[**)] nur ganz flüchtig angesehen, und nachdem ich in jener die Übereinstimmung des Hauptresultats mit dem meinigen bemerkt hatte, nicht weiter gelesen; daher war das von Jacobi jetzt gerügte Versehen von mir nicht bemerkt.

Stets der Ihrige
C. F. Gauss.

Göttingen, 4. Dec[ember] 1849.

[3.]

Gauss an Schumacher.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher VI, Altona 1865, S. 53.]

Ich kann nicht unterlassen, eine Unrichtigkeit, die sich in den Schluss meines letzten Briefes eingeschlichen hat, sogleich zu berichtigen. Ich schrieb diesen Schluss bloss nach dem, was ich von Jacobis Aufsatz (seit März 1849,

[*)] *Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero*, Memoria di Francesco Carlini, Milano 1817; auch als Appendice zu den Effemeridi di Milano 1818.]

[**)] *Über die annähernde Bestimmung sehr entfernter Glieder in der Entwickelung der elliptischen Coordinaten, nebst einer Ausdehnung der Laplaceschen Methode zur Bestimmung der Functionen grosser Zahlen*, Astronomische Nachrichten **28**, Nr. 665, März 1849, S. 257, Jacobis Werke VII, S. 175.]

nach damals nur flüchtiger Ansicht) im Gedächtniss hatte oder zu haben glaubte, indem ich denselben gar nicht selbst wieder nachsah.

Ich glaubte nemlich in Jacobis Aufsatz stehe, dass Carlini die Convergenz für die Mittelpunktsgleichung richtig, aber für den Radius Vector falsch angegeben habe; auch die Formel selbst hatte ich nur ihrer Form nach im Gedächtniss und meinte, dass sie mit meiner vor 40 oder mehreren Jahren [gefundenen] übereinstimmend gewesen sei. Das Wahre ist, dass meine Convergenzformel [*)] mit der von Jacobi [**)] übereinstimmt, nemlich wenn ε die Excentricität, e die Basis der hyp[erbolischen] Log[arithmen] bedeutet, so convergiren die Coefficienten jener Reihe langsamer als jede fallende geometrische Progression, deren Exponent kleiner ist als

$$\frac{\varepsilon e^{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}}{1+\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}$$

oder als

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \,.\, e^{\cos\varphi}, \quad (\text{wenn } \varepsilon = \sin\varphi)$$

aber etwas schneller als die geometr[ische] Progr[ession], deren Exponent dieser Grösse gleich ist.

Geirrt habe ich also mich gestern ohne Zweifel ***), indem ich sagte, dass ich 1817 Carlinis Abhandl[ung] nur bis dahin angesehen habe, wo die Übereinstimmung in der Hauptsache (s. oben) hervorgetreten sei. Ohne Zweifel habe ich sie damals gar nicht näher angesehen, weil ich keine Lust hatte, eine 48 Seiten lange Abhandlung durchzulesen, die durch höchst verwickelte Rechnung eine Aufgabe auflösen sollte, die ich selbst (so weit es nöthig) schon lange vorher auf einer halben Octavseite aufgelöset hatte.

Ich glaube mich übrigens bestimmt zu erinnern, dass ich damals, als ich meine Auflösung gefunden hatte (ich meine, in einem der ersten Jahre dieses Jahrhunderts [†)], ich sogar die Richtigkeit jener Convergenzbestimmung durch

[*) Siehe oben Abschnitt [VII.], art. [2.], Gleichung [28], S. 423.]

[**) Siehe Jacobi, a. a. O., Jacobis Werke VII, S. 178 und 188, vergl. ferner die bald nach Abfassung dieses Briefes erschienene Bearbeitung der Carlinischen Abhandlung von Jacobi: *Untersuchungen über die Convergenz der Reihe, durch welche das Keplersche Problem gelöst wird*, Astronomische Nachrichten **30**, Nr. 709—712, 1850, S. 197, Jacobis Werke VII, S. 189, insbesondere S. 237.]

***) Ohne Zweifel sage ich, weil ich in diesem Augenblick Carlinis Abhandlung nicht selbst nachgesehen habe, sondern bloss flüchtig den Jacobischen Bericht.

[†) Vergl. die Angabe in dem folgenden Briefe vom 5. Februar 1850.]

einen Fall in Concreto bei einer grossen Excentricität constatirt habe, worüber sich vielleicht noch ein Papier wird auffinden lassen.

So viel heute in Eile, weil es mir unangenehm war, Ihnen gestern etwas unrichtiges aus dem Gedächtniss geschrieben zu haben.

Der Ihrige

Göttingen den 6. December 1849. C. F. Gauss.

[4.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 5. Februar 1850.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher VI, Altona 1865, S. 58.]

Von meiner Methode, den Grad der Convergenz der nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden, eine beliebige periodische Function ausdrückenden Reihe zu bestimmen, habe ich noch eine numerische Rechnung, welche sich auf ein Beispiel der Mittelpunktsgleichung bezieht, aufgefunden, welches Blatt wohl 50 ± Jahre alt sein mag [*)]. Die Methode leistet aber viel mehr, als bloss einen genäherten Ausdruck für ein sehr weit vom Anfange entferntes Glied zu finden; sie ist auch geeignet, alle Glieder bis zum Anfang selbst hin, numerisch zu berechnen, und zwar mit aller zu wünschenden Schärfe. In dem Maasse ist jenes Beispiel damals nicht durchgeführt, was jetzt zu ergänzen mir die Zeit fehlt. Bei weitem mehr Zeit wird aber erfordert werden, um die ganze Theorie in einer mir selbst genügenden Gestalt **) auszuführen. Ich bin nicht abgeneigt, eine mir zu Theil werdende Musse dazu zu verwenden, möglicherweise wird aber die Arbeit dann einen grössern Umfang erhalten, als sich für Aufnahme in die A[stronomischen] N[achrichten] eignet. . . . .

[*) Siehe den Abschnitt VII, S. 420, insbesondere die Zahlentafel des art. 3., S. 424.]

**) Sie sind ganz im Irrthum, wenn Sie glauben, dass ich darunter nur die letzte Politur in Beziehung auf Sprache und Eleganz der Darstellung verstehe. Diese kosten vergleichungsweise nur unbedeutenden Zeitaufwand; was ich meine, ist die innere Vollkommenheit. In manchen meiner Arbeiten sind solche Incidenzpunkte, die mich jahrelanges Nachdenken gekostet haben, und deren in kleinen Raum concentrirter Darstellung nachher niemand die Schwierigkeit anmerkt, die erst überwunden werden musste.

[5.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 1. September 1850.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER VI, Altona 1865, S. 107.]

. . . . Indem ich eben im Begriff war, diesen Brief zu schliessen, erhielt ich die von Ihnen übersandte PREHNsche Abhandlung[*)], von der ich doch erst flüchtig Einsicht nehmen wollte. Darf ich mich offen gegen Sie aussprechen, so glaube ich nicht, dass eine Reise des H[errn] Verfassers zu seiner Zufriedenheit ausfallen würde. Meine Anforderungen an mathematische Argumentation in Beziehung auf Strenge und Klarheit liegen in der That von denen des Verfassers soweit entfernt, dass ich an einer gegenseitigen Verständigung zweifle; wir stehen auf ganz verschiedenem Boden, wie Conservativer und Radicaler. Solche Gleichnisse hinken allerdings: in diesem Falle wäre ich der Radicale, der kein historisches Recht anerkennt, sondern nichts ohne strengen Beweis des Rechtstitel[s] gelten lässt. Der Unterschied ist aber, dass im Leben Conservativer und Radicaler ihre Ansprüche à tout prix realisiren, in der Wissenschaft aber die strengsten Forderungen nur zu unserer eigenen Befriedigung gemacht werden, und man den andern, der sich mit laxen oder unklaren Beweisen begnügen mag, gern gewähren lässt. Der eigentliche Kern der Sache ist wie mir deucht folgender.

Es ist der Character der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden. An Reichthum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mechanisch angewandt, obgleich die Befugniss dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen implicirt. Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben, und alle Producte des Mechanismus niemals über die klare Befugniss hinaus als Eigenthum betrachten. Der gewöhnliche Gang ist aber der, dass man für die Analysis einen Character der Allgemeinheit in Anspruch nimmt, und dem Andern, der so herausgebrachte Resultate noch nicht für bewiesen anerkennt, zumuthet, er solle das Gegentheil nachweisen. Diese Zumuthung darf man aber nur an den stellen, der seinerseits behauptet ein Resultat sei falsch, nicht aber dem, der ein Resultat nicht für bewiesen anerkennt, welches auf einem Mechanismus beruhet, dessen ursprüngliche, wesentliche Bedingungen in dem vorliegenden Fall gar nicht zutreffen. So ist es sehr oft mit divergirenden Reihen. Reihen haben eine klare Bedeutung, wenn sie convergiren; diese Klarheit der Bedeutung fällt weg mit dieser Bedingung, und es ändert im Wesentlichen Nichts, ob man sich des Worts Summe oder Werth bedient. Der Raum eines Briefes ist aber viel zu klein, um alles weiter auszuführen. — Nehmen Sie meinetwegen statt obigen Gleichnisses einer Maschine das von Papiergeld. Es kann dies zu grossen Arbeiten vortheilhaftest benutzt werden, aber solide ist der Gebrauch nur, wenn ich gewiss bin, es jeden Augenblick in klingende Münze umsetzen zu können.

Es scheint mir übrigens aus einigen Indicien hervorzugehen, dass der Verfasser mit meinen Arbeiten nicht bekannt ist. Er meint die Gültigkeit des Gebrauchs der divergenten Reihen sei allgemein unbedenklich anerkannt noch in den ersten Decennien des gegenwärtigen Jahrhunderts. Ich habe sie nie anerkannt; zwar niemals ex professo dagegen geschrieben, aber überall, wo eine Veranlassung war, die Zulässigkeit der Reihen nur unter der Bedingung der Convergenz als sich von selbst verstehend entschieden ausgesprochen. In diesem Augenblick würde ich nur [hinweisen] z. B. auf meine Schrift von 1799, p. 12[*)]. Meine Schrift von 1812 über die Reihe $1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x$ etc.[**)]. Die Anzeige meiner Schrift über die Anziehung der ellipt[ischen] Sphäroide in den Göttinger gelehrten Anzeigen 1813, p. 547, auch abgedruckt Monatliche Correspondenz 27. Bd. p. 424[***)]. Auch die Art wie H. PR[EHN] über die

[*) JEPPE PREHN, *Über die Bedeutung der divergenten unendlichen Reihen, die Bestimmung ihrer Werthe, und über die Zulässlichkeit ihrer Anwendung bei analytischen Rechnungen*, CRELLEs Journal für Mathematik **41** (1850), S. 1, vergl. *Berichtigungen*, ebenda S. 364, die letzteren sind nach dem am 28. November 1850 erfolgten Tode des Verfassers erschienen.]

[*) Werke III, S. 9—10, Absatz 3.]
[**) Werke III, S. 123 ff.]
[***) Werke V, S. 281 oben.]

imaginären Grössen spricht, zeigt, dass er sich noch ganz auf dem Standpunkte befindet, auf dem man sich vor 1831 befand, und die gänzlich veränderte Gestalt dieser Lehre, die ich ihr gegeben habe, nur auf ein Paar Seiten, aber den Kern der Sache erschöpfend, gar nicht kennt. . . . . .

[6.]

GAUSS an H. G. GRASSMANN.

Euer Wohlgeboren

geehrtes Schreiben würde ich schon früher mit meinem gehorsamsten Danke für Ihr gütigst übersandtes Werk [*)] erwiedert haben, wenn ich nicht gewünscht hätte, über letzteres erst eine Ansicht fassen zu können. Zunächst bin ich lange vom Buchbinder aufgehalten; hernach, in einem Gedränge von andern heterogenen Arbeiten Ihr Buch durchlaufend glaube ich zu bemerken, dass die Tendenzen desselben theilweise denjenigen Wegen begegnen, auf denen ich selbst nun seit fast einem halben Jahrhundert gewandelt bin, und wovon freilich nur ein kleiner Theil 1831 in den Comment. der Göttingischen Societät [**)] und noch mehr in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen (1831, Stück 64) [***)] gleichsam im Vorbeigehen erwähnt ist; nemlich die concentrirte Metaphysik der complexen Grössen, während von der unendlichen Fruchtbarkeit dieses Princips für Untersuchungen räumliche Verhältnisse betreffend zwar vielfältig in meinen Vorlesungen gehandelt [†)], aber Proben davon nur hin und wieder, und, als solche nur dem aufmerksamern Auge erkennbar, bei andern Veranlassungen mitgetheilt sind [††)]. Indessen scheint

[*)] *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre* von HERMANN GRASSMANN, I. Theil, *Die lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig 1844; Gesammelte mathem. und physikal. Werke I, 1, Leipzig 1894.]

[**)] *Theoria Residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda*, Werke II, S. 93, siehe besonders S. 102 ff.]

[***)] Werke II, S. 169, siehe besonders S. 175 ff.]

[†)] Vergl. die Auszüge aus einer Dezember 1839 bis Ostern 1840 gehaltenen Vorlesung über die *Theorie der imaginären Grössen*: Werke VIII, S. 331—334 und 346—347.]

[††)] Vergl. die bereits erwähnte Stelle, Werke II, S. 175, wo mit ähnlichen Worten auf die Inauguraldissertation von 1799 (Werke III, S. 1) und auf die Preisschrift von 1822 (Werke IV, S. 189) hingewiesen wird.]

dies nur eine partielle und entferntere Ähnlichkeit in der Tendenz zu sein; und ich sehe wohl, dass um den eigentlichen Kern Ihres Werks herauszufinden, es nöthig sein wird, sich erst mit Ihren eigenthümlichen Terminologien zu familiarisiren. Da aber dazu, bei mir, nothwendig eine von andern Beschäftigungen freiere Zeit erforderlich sein wird, so darf ich jetzt nicht länger anstehen, Ihnen meinen ergebensten Dank für die gefällige Übersendung Ihres Werks auszusprechen, dem ich die Versicherung der besonderen Hochachtung beifüge, mit welcher ich beharre

Euer Wohlgeboren
ergebenster Diener

Göttingen, 14. December 1844. C. F. GAUSS.

BEMERKUNGEN ZU DEN ABSCHNITTEN V, VI, VII UND ZUM BRIEFWECHSEL.

Die Abschnitte [V.] und [VI.], S. 400—419.

Im Nachlaß von GAUSS finden sich fünf verschiedene Fassungen für den Anfang einer Abhandlung »*Convergenz der Reihen, in welche die periodischen Functionen einer veränderlichen Grösse entwickelt werden*«.

Die vier ältern Fassungen haben das gemeinsam, daß sie mit der Erörterung des Begriffs der »Konvergenz einer Reihe« beginnen und über diese Erörterung auch nicht wesentlich hinauskommen *). Wir haben im Abschnitt [V.] die beiden ersten Artikel des vierten und ausführlichsten dieser ältern Entwürfe wiedergegeben; in der Handschrift folgen noch zwei Artikel, die Erörterungen über die Einteilung der Funktionen in explizite und implizite enthalten. Der Abdruck dieser beiden Artikel 3. und 4. erschien zwecklos. Dagegen haben wir die am Schluß des art. 1., oben S. 403, erwähnte Erweiterung, die sich auf einem einzelnen Blatte gefunden hat, als Anhang abgedruckt. Man wird in den Erörterungen dieses art. 1. und des Anhangs die Anfänge der Betrachtungen wiedererkennen, die PAUL DU BOIS-REYMOND als Infinitärkalkül bezeichnet hat **). Bei der Einführung der iterierten Logarithmen neben der Potenz, wodurch eine »nähere Anschmiegung erreicht werden kann« (oben S. 403), im Anhang, hätte GAUSS auf ABEL ***) verweisen können, falls er auch diese Untersuchungen nach 1831 angestellt haben sollte, was für die artt. 1. und 2. durch die Erwähnung der Anzeige von 1831 im art. 2., oben S. 405, feststeht. Während bei GAUSS nur die einfache Exponentialgröße $e^{\alpha n}$ auftritt, hat P. DU BOIS-REYMOND a. a. O. seine Skalen noch durch iterierte Exponentialfunktionen erweitert. Wir bemerken auch, daß P. DU BOIS-REYMOND ausdrücklich auf die Wichtigkeit des Infinitärkalküls für die Theorie der FOURIERschen Reihen hinweist; es

*) Der erste Entwurf enthält 3 Quartseiten, der zweite 3 Oktavseiten, der dritte 6 Quartseiten, der vierte 13 Quartseiten.

) Siehe Annali di Matematica, 2. Serie **4, 1870, S. 339; CRELLEs Journal für Mathematik **74**, 1872, S. 294; Mathem. Annalen **8**, 1875, S. 363; **11**, 1877, S. 149; vergl. auch A. PRINGSHEIM, Mathem. Annalen **35**, 1890, S. 302 und *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre* I, 1, 1916, S. 224 ff.

***) CRELLEs Journal für Mathematik **3**, 1828, S. 79, Oeuvres de N. H. ABEL, nouvelle édition, I, 1881, S. 399.

zeigt dies, daß die Untersuchungen des art. 1. und des Anhangs in naher Beziehung zu dem in dem Titel der Abhandlung bezeichneten Gegenstande stehen.

Die Erörterungen des art. 2. des Abschnitts [V.] werden in der fünften Fassung, die wir in den artt. 1.—8. des Abschnitts [VI.] unverkürzt wiedergeben, weiter ausgebaut. Im Eingang zum art. 1. dieses Abschnitts wird von der in der Überschrift bezeichneten Aufgabe gesagt, daß sie »recht eigentlich« in die Analysis der komplexen Größen gehöre; es wird dann in den artt. 2.—5. in Auseinandersetzungen eingetreten, für die die Worte gelten, mit denen GAUSS den art. 5. seiner *Jubiläumsschrift* (Werke III, S. 79) abschließt, nämlich, daß ihr »Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größenkombinationen sind«, die zwar »einem höhern von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstrakten Größenlehre« angehören, »in welchem man sich ... [aber] nicht bewegen kann, ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache«. Die in den artt. 6.—8. enthaltenen Untersuchungen über Integrale zeigen, daß GAUSS beabsichtigt hat, die Untersuchungen der artt. 2.—5. auf die Lehre von der Integration im komplexen Gebiete anzuwenden *). Leider hat sich im Nachlaß keine Aufzeichnung vorgefunden, die sich auf diese Anwendung bezieht, und auch keine, in der von der weitern Anwendung der Analysis der komplexen Größen auf den in der Überschrift bezeichneten Gegenstand die Rede wäre. Die Aufzeichnung, die wir dem Abschnitt [VI.] als art. 9. hinzugefügt haben, bezieht sich zwar auf einen hierher gehörigen Gegenstand, sie läßt aber auch kaum erkennen, was GAUSS beabsichtigt haben mag. Dagegen werden wir nachher an der Hand der Stücke [2.]—[4.] des *Briefwechsels* zeigen, daß die Wurzel der geplanten Abhandlung, von der uns in den Abschnitten [V.] und [VI.] nur einige einleitende Kapitel überkommen sind, in den im Abschnitt [VII.] zusammengestellten Aufzeichnungen enthalten ist, zu deren Deutung und Erklärung wir uns jetzt wenden.

Erläuterungen zum Abschnitt [VII.], S. 420—428.

Um das Verständnis der im Abschnitt [VII.] zusammengestellten, recht lückenhaften und nicht einheitlich entworfenen Aufzeichnungen zu erleichtern, geben wir hier zunächst eine zusammenfassende Darstellung ihres Inhalts, bei der auch auf die Erläuterung der Einzelheiten des Textes eingegangen werden soll.

Es bedeute wie in der *Theoria motus*, artt. 5., 6. (Werke, VII, 1906, S. 17, 19) v die wahre, E die exzentrische, M die mittlere Anomalie und wie im art. [2.] unseres Textes $f = \sin\varphi$ die Exzentrizität **); dann gelten die Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad M = E - f\sin E \qquad \text{(\textit{Theoria motus}, Gl. XII, S. 21)}$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{tang}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-f}{1+f}}\operatorname{tang}\frac{v}{2} \qquad \text{(\textit{Theoria motus}, Gl. VII, S. 20),}$$

also, siehe die Gl. [6], oben S. 421,

$$[6]' \qquad \frac{dv}{dM} = \frac{dv}{dE}\cdot\frac{dE}{dM} = \frac{\sqrt{1-f^2}}{(1-f\cos E)^2} = \frac{\cos\varphi}{(1-\sin\varphi\,.\,\cos E)^2}.$$

*) R. DEDEKIND berichtet in seiner Lebensbeschreibung RIEMANNS (siehe RIEMANNS Werke, 2. Auflage, 1891, S. 545), daß GAUSS, als RIEMANN ihn 1851 vor der mündlichen Doktorprüfung besuchte, geäußert habe, er bereite seit Jahren eine Schrift vor, die denselben Gegenstand behandele, wie RIEMANNS Inauguraldissertation, sich aber freilich nicht darauf beschränke. Offenbar hat GAUSS dabei an die hier in Rede stehende Abhandlung »*Bestimmung der Convergenz der Reihen u.s.w.*« gedacht.

**) Im art [1.] wird die Exzentrizität mit ϵ, in der *Theoria motus* mit e bezeichnet.

Es sei nun

$$\text{(III)} \qquad \frac{dv}{dM} = 1 + C_1\cos M + C_2\cos 2M + C_3\cos 3M + \cdots,$$

woraus sich durch Integration für die sogenannte Mittelpunktsgleichung $v-M$ die Entwicklung

$$\text{(IV)} \qquad v - M = C_1\sin M + \frac{C_2}{2}\sin 2M + \frac{C_3}{3}\sin 3M + \cdots$$

ergibt. Die $C_1, C_2, C_3, \ldots$ sind Funktionen der Exzentrizität f; es handelt sich um eine asymptotische Darstellung von $\frac{1}{n}C_n$ für große Werte von n.

Die Lösung der Gleichung [7], oben S. 421,

$$[7]' \qquad 1 - \sin\varphi\cos E = 0$$

ist (siehe die Gln. [8], [11], wo diese Lösung mit E bezeichnet wird)

$$\mathfrak{E} = i\log\operatorname{cotang}\frac{\varphi}{2}.$$

Setzt man

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{E} - f\sin\mathfrak{E},$$

so ist (siehe die Gln. [9], [10], [12], wo diese Größe mit M bezeichnet wird)

$$\mathfrak{M} = i\log\operatorname{cotang}\frac{\theta}{2},$$

für

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\,e^{\cos\varphi},$$

und also $\mathfrak{M}$ die Lösung der Gleichung

$$1 - g\cos M = 0,$$

wo

$$g = \sin\theta$$

ist. Setzt man nun *)

$$(\ast) \qquad E = \mathfrak{E} + \epsilon, \quad M = \mathfrak{M} + \mu,$$

so ist also

$$\mu = \epsilon - f\left\{\sin(\mathfrak{E}+\epsilon) - \sin\mathfrak{E}\right\}$$

und, da $\cos\mathfrak{E} = \frac{1}{f}$ ist (siehe die Gl. [11], oben S. 422),

$$[13]' \qquad \mu = \frac{1}{2}f\sin\mathfrak{E}\,.\,\epsilon^2 + \frac{1}{6}\epsilon^3 - \frac{1}{24}f\sin\mathfrak{E}\,.\,\epsilon^4 - \cdots,$$

woraus (siehe die Gl. [14], oben S. 422)

$$[14]' \qquad \frac{d\mu}{d\epsilon} = 1 - f\cos E = f\sin\mathfrak{E}\,.\,\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{6}f\sin\mathfrak{E}\,.\,\epsilon^3 - \cdots$$

folgt. Analog ist dann (siehe die Gl. [15], oben S. 422)

$$[15]' \qquad 1 - g\cos M = g\sin\mathfrak{M}\,.\,\mu + \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{6}g\sin\mathfrak{M}\,.\,\mu^3 + \cdots.$$

Wir setzen nun (nach Gl. [30], oben S. 425 **))

*) Über die Bedeutung dieser Substitution siehe weiter unten S. 445.

**) Die Formeln des art. [2.] von Gl. [16] an sind nichts anderes, als erste Annäherungen der Entwicklungen des art. [4.]; wir verfahren also hier zunächst im Anschluß an diesen art. [4.].

$$\cos\varphi = p,\quad \cos\theta = q,\quad x = 1-g\cos M,\quad y = 1-f\cos E,$$

dann folgt nach [14]′

$$[14]''\qquad \frac{1}{y^2} = \frac{-1}{p^3}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\Big\{1+\frac{1}{p}i\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2+\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon^3+\cdots$$
$$-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2}\varepsilon^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^3}i\varepsilon^3-\cdots\Big\},$$

und nach [15]′, indem man für μ die Reihenentwicklung [13]′ einsetzt,

$$[15]''\qquad x = \frac{-pq\varepsilon^2}{2}\Big\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon-\frac{1}{12}\varepsilon^2+\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon^3+\cdots$$
$$+\frac{1}{4}\frac{p}{q}\varepsilon^2-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{q}i\varepsilon^3+\cdots\Big\}.$$

Multipliziert man diese beiden Ausdrücke miteinander und mit p, so erhält man zunächst die Gleichung [31], oben S. 425, aus der dann die Gleichung [32] oder

$$[32]'\qquad \frac{\cos\varphi}{(1-f\cos E)^2} = \frac{\cos\theta}{2(1-g\cos M)}\Big\{1-\frac{2}{3}\operatorname{cotang}\mathfrak{E}\,.\,\varepsilon+\cdots\Big\}.$$

folgt. Zieht man in [15]″ beiderseits die Quadratwurzel aus und berechnet aus der so entstehenden Gleichung ε durch Reihenumkehrung, so erhält man die Gleichung [33], oben S. 426, oder

$$[33]'\qquad \varepsilon = -i\sqrt{\frac{2(1-g\cos M)}{\cos\varphi\,.\,\cos\theta}}-\frac{1}{3}i\frac{1-g\cos M}{\cos^2\varphi\,.\,\cos\theta}-\cdots.$$

Setzt man diesen Wert von ε in [32] ein, so ergibt sich [34] oder

$$[34]'\qquad \frac{\cos\varphi}{(1-\sin\varphi\cos E)^2} = \frac{\cos\theta}{2(1-\sin\theta\cos M)}+\frac{\sqrt{2}}{3\cos^{\frac{3}{2}}\varphi}\sqrt{\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta\cos M}}+\cdots.$$

Soweit ist alles ganz streng, und die auftretenden Reihenentwicklungen konvergieren für hinreichend kleine Werte von ε und μ, das heißt also, wenn E hinreichend nahe an $\mathfrak{E}$, und M hinreichend nahe an $\mathfrak{M}$ liegt. Bei der weiteren Rechnung ersetzt nun Gauss die auf den rechten Seiten der Gleichungen [32], [33], [34] auftretenden Reihen durch ihre ersten Glieder; in der Tat sind die Gleichungen [19], [21], [23] des art. [2.], oben S. 422, 423, nichts anderes als die in der angegebenen Weise reduzierten Gleichungen [32]′, [33]′, [34]′. Die Gleichung [23], das heißt [34]′ mit Vernachlässigung der nicht hingeschriebenen Glieder, bildet also jetzt den Ausgangspunkt für alles folgende.

Setzt man, wie im art. [3.], oben S. 423, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \gamma$, so ergeben die Gleichungen [1]—[5] des art. [1.], oben S. 420 *), die Gleichungen [24] und [25], oben S. 423, das heißt die Entwicklungen von

$$\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}\quad\text{und}\quad\sqrt{\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}}$$

nach den Kosinus der Vielfachen von M. In der Entwicklung der Quadratwurzel lautet der Koeffizient von $\cos nM$

$$2(1-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\gamma^n\Big(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\gamma^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+4}\gamma^4+\cdots\Big).$$

*) Um Übereinstimmung zwischen den Bezeichnungen der artt. [1.] und [3.] zu erzielen, hat man in den Gleichungen [3] und [5] zu nehmen $\alpha = \gamma = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$, also das dortige θ gleich der Hälfte des hier mit θ bezeichneten Winkels, und $u = M$ zu setzen. Man vergl. übrigens den art. [5.] des Abschnitts [III.] über $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, oben S. 345.

Da nun

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\gamma^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+4}\gamma^4+\cdots\Big) = (1-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ist, so ergibt sich dieser Koeffizient für große Werte von n gleich:

$$2\gamma^n\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} = 2\gamma^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

und hieraus folgt mit Benutzung der Stirlingschen Näherungsformel

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

der von Gauss in der Gleichung [27], S. 423, angegebene Näherungswert $2\gamma^n\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Nunmehr findet man mit Benutzung der Gleichung [23] für den Koeffizienten C_n der Entwicklung (III) S. 439 den in der Gl. [28], oben S. 423, angegebenen Wert, also für den Koeffizienten von $\sin nM$ in der Entwicklung (IV) der Mittelpunktsgleichung den angenäherten Wert

$$[28]'\qquad \frac{C_n}{n} = \frac{1}{n}\Big(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}e^{\cos\varphi}\Big)^n\Big(1+\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{2n\pi\cos^3\varphi}}\Big).$$

In der Tabelle am Schluß des art. [3.], oben S. 424, hat Gauss für einen bestimmten Wert der Exzentrizität den Fehler berechnet, den man begeht, wenn man sich auf die durch die Gleichung [23], oben S. 423, dargestellte Annäherung beschränkt. Die 25 Zahlengruppen beziehen sich auf die 25 allemal um 7° 30′ wachsenden Werte der mittleren Anomalie M von 0° bis 180°; die in einer Gruppe untereinander stehenden Zahlen bedeuten der Reihe nach:

den Wert von M (fett gedruckt)
$\log_{10}\cos\varphi$
$\log_{10}(1-f\cos E)^2$
$\log_{10}\frac{1}{2}\cos\theta$
$\pm\log_{10}(1-g\cos M)^{-1}$, jenachdem $M \lesseqgtr 90°$,
$\log_{10}\sqrt{\frac{2\cos\theta}{9\cos^3\varphi}}$
$\pm\log_{10}(1-g\cos M)^{-\frac{1}{2}}$, jenachdem $M \lesseqgtr 90°$,
$\frac{\cos\varphi}{(1-f\cos E)^2}$
$\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}$
$\sqrt{\frac{2\cos\theta}{9\cos^3\varphi}}\frac{1}{\sqrt{1-g\cos M}}$
$\frac{\cos\varphi}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}-\sqrt{\frac{2\cos\theta}{9\cos^3\varphi}}\frac{1}{\sqrt{1-g\cos M}}$,

wo $r = 1-f\cos E$ ist, so daß also die letzte Zahl den begangenen Fehler angibt. Der dieser Tabelle zugrunde liegende Wert der Exzentrizität ist hiernach

$$f = \sin\varphi = 0{,}6\,550\,518$$

entsprechend dem Werte

$$(*)\qquad \log_{10}f = 9{,}8\,162\,757-10.$$

Für diesen Wert der Exzentrizität ist auch der am Schluß von art. [3.], oben S. 425, angegebene Zahlenwert 0,5508570 des Ausdrucks [29] berechnet*). Da der konstante Teil von

$$\frac{\cos\theta}{2(1-g\cos M)}$$

gleich $\frac{1}{2}$ ist, so ergibt also die Näherungsformel [23] für den konstanten Teil von $\frac{dv}{dM}$ den Wert 1,0508570 statt 1. — Auch der Wert 9,9046115 für den Logarithmus des Ausdrucks [35], oben S. 426, und die Zahlenbeispiele des art. [5.], oben S. 427, sind für eben denselben Wert der Exzentrizität berechnet. Für die Beispiele des art. [5.] zeigt dies schon der dort angegebene Wert

$$\log_{10} kf = 9{,}4540600,$$

den man in der Tat erhält, wenn man dem in (✱) gegebenen Werte von $\log_{10} f$ den Wert

$$\log_{10} k = \log_{10}\log_{10} e = 9{,}6377843$$

hinzuzählt. In bezug auf den art. [5.] wäre noch zu bemerken, daß θ hier einfach einen durch die Gleichung [36] erklärten Hilfswinkel bedeutet, also mit dem in den artt. [2.]—[4.] durch θ bezeichneten Winkel nichts zu tun hat. Die Ausdrücke [37], [38] ergeben sich, wenn man in $M = E - f\sin E$ einsetzt

$$E = p + i\log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}\theta)$$

und dann ausdrückt, daß M reell sein soll. Die Bezeichnung »Zug komplexer Werte«, die Gauss hier anwendet, ist im Abschnitt [VI.] art. 2., oben S. 408, erklärt. Wir kommen so auf den Zusammenhang, der zwischen den Abschnitten [V.], [VI.] und [VII.] besteht, und damit auch zu den hier in Betracht kommenden geschichtlichen Feststellungen.

Erläuterungen zum Briefwechsel, S. 429—437.
Geschichtliches zu den Abschnitten [V.], [VI.], [VII.].

In den Briefstellen [3.] und [4.] schreibt Gauss, daß er in den ersten Jahren des XIX. Jahrhunderts, beziehungsweise etwas mehr oder weniger als 50 Jahre vor dem 5. Februar 1850 eine Methode gefunden habe, um den »Grad der Konvergenz« trigonometrischer Reihen, insbesondere der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung, zu bestimmen. Auch habe er damals die Richtigkeit dieser Konvergenzuntersuchung durch numerische Rechnung an einem Beispiel der Mittelpunktsgleichung für einen großen Wert der Exzentrizität bestätigt; seine »Konvergenzformel« für die Koeffizienten der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung stimme mit der von Jacobi (siehe das Zitat oben S. 432 Fußnote **)) gegebenen überein.

Dazu ist zuvörderst zu bemerken, daß der Ausdruck »Grad der Konvergenz« hier im Sinne des art. 1. von Abschnitt [V.], oben S. 400, den Grad der Annäherung der Reihenkoeffizienten an die Null bedeutet, wie denn auch die in der Briefstelle [3.] aus der »Konvergenzformel« gezogene Folgerung, nämlich die Vergleichung der Konvergenz der Reihenkoeffizienten mit der einer geometrischen Progression, ganz im Sinne dieses art. [1.] gehalten ist.

Die Feststellung vom 5. Februar 1850 macht Gauss auf Grund einer von ihm damals aufgefundenen Aufzeichnung, die jene numerische Rechnung enthielt. Nun finden wir auf dem zweiten Zettel, der in den artt. [2.] und [3.] des Abschnitts [VII.] abgedruckt ist, einmal die mit der Jacobischen völlig übereinstimmende

*) Es ist: $\log_{10}\cos\varphi = 9{,}8782827-10$; $\log_{10}(\frac{1}{2}\cos\theta) = 9{,}0536038-10$, also $\theta = 76^\circ 55' 20''$.

asymptotische Formel für die Entwicklungskoeffizienten der Mittelpunktsgleichung*); ferner ist die Tabelle des art. [3.], wie wir oben S. 441 gesehen haben, für den Wert 0,6550518 der Exzentrizität gerechnet, und dieser Wert ist in der Tat als groß zu bezeichnen (siehe oben S. 433, erste Zeile), da er die Exzentrizitäten der großen Planeten erheblich übertrifft und schon nahe an der Laplaceschen Grenze 0,6627430..**) liegt. Auch die Angabe in der Briefstelle [3.], daß die Herleitung der Formel eine halbe Oktavseite einnehme, trifft für unsern Zettel wenn auch nicht buchstäblich, so doch dem Sinne nach zu, da die Entwicklung, die zu dem Ergebnis führt, in der Tat sehr kurz ist. Die Bemerkung der Briefstelle [4.], daß die Methode auch geeignet sei, alle Glieder numerisch zu berechnen, nicht nur die entfernten, und zwar mit jeder Genauigkeit, findet auf dem dritten Zettel ihre Bestätigung (siehe unsern art. [4.]); die auf diesem Zettel befindlichen nicht mit abgedruckten Zahlenrechnungen beziehen sich auch auf das im art. [3.] behandelte Beispiel, sind aber nicht zu Ende geführt, was mit der Briefstelle [4.] im Einklang steht.

Es ist also unzweifelhaft, daß wir in den beiden Zetteln, die in den artt. [2.], [3.], [4.] abgedruckt sind, die von Gauss 1850 wiedergefundenen Aufzeichnungen vor uns haben. Was ihre Entstehungszeit anlangt, so können wir das »50 ±« des Briefes [4.] in Übereinstimmung mit der Angabe des Briefes [3.] genauer zu »50 −« bestimmen, d. h. also die Abfassung dieser Aufzeichnungen in die ersten Jahre des XIX. Jahrhunderts setzen. Denn erstens bedient sich Gauss darin stets der Bezeichnung i für $\sqrt{-1}$, was er im XVIII. Jahrhundert noch nicht getan hat, zweitens tritt am Schluß des art. [3.] die Darstellung des konstanten Teils von $(1-g\cos M)^{-\frac{1}{2}}$ durch das arithmetisch-geometrische Mittel auf, und diese Darstellung hat Gauss erst um den 23. Dezember 1799 gefunden (siehe oben S. 183, 185 und die zugehörigen Bemerkungen S. 273—274). In dem Beispiel des ersten Zettels, oben S. 421, ist der Wert der Exzentrizität $\varepsilon = 0{,}254236$ den V. Elementen des kleinen Planeten Juno entnommen, die in der Monatlichen Correspondenz **11**, S. 476, Mai 1805 (Werke VI, S. 264) veröffentlicht sind, und die Gauss gestützt auf seine Beobachtung vom 20. Februar 1805 berechnet hatte. Die VI. Elemente der Juno, die Gauss am 25. August 1806 an die Monatliche Correspondenz gesandt hat (siehe Monatl. Corr. **14**, S. 378, Werke VI, S. 280, vergl. auch S. 279), geben die Exzentrizität 0,254944. Der erste Zettel ist also jedenfalls zwischen dem 20. Februar 1805 und dem 25. August 1806 geschrieben. Wahrscheinlich stammt auch der vierte Zettel aus dieser Zeit; Gauss würde also den Kunstausdruck »Zug komplexer Werte«, den er im Abschnitt [VI.] art. 2., oben S. 408, erklärt, schon zu Anfang des XIX. Jahrhunderts angewandt haben, was immerhin Rückschlüsse auf seine damalige Bewandertheit in der Analysis der komplexen Veränderlichen gestattet.

Es sind aber noch andere, bis ins XVIII. Jahrhundert zurückreichende Spuren vorhanden, die auf Gaussens Beschäftigung mit diesem Gegenstande hinweisen und die auch darüber hinaus einen Einblick in den ganzen Gedankenkreis gewähren, der für Gauss in diesem Zusammenhang in Betracht kam.

Den Ausgangspunkt bildete für Gauss die noch in die Göttinger Studentenjahre fallende Beschäftigung mit dem Lagrangeschen Lehrsatz, die in der Aufzeichnung Nr. 49 des *Tagebuchs* vom 27. Dezember 1796 angezeigt ist, und für die der Brief [1.] an Hindenburg***), sowie die Werke VIII, S. 76 abgedruckte

*) Um den Jacobischen Ausdruck (siehe Jacobis Werke VII, S. 188 und 237)

$$\left\{\frac{e i^{\sqrt{1-ee}}}{1+\sqrt{1-ee}}\right\}^p \left(\frac{1}{p} + \frac{4}{3\sqrt{2p^3\pi}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{(1-ee)^3}}\right)$$

mit dem Gaussschen in Übereinstimmung zu bringen, hat man zu setzen $f = \sin\varphi$ für e, e für i und n für p; dann ergibt sich unmittelbar unsere Formel [28]', oben S. 441.

**) Laplace, *Mécanique céleste*, t. V, 1825, Suppl. *Sur le développement des coord. éllipt.* S. 11.

***) Die Urschrift dieses Briefes befindet sich im Privatbesitz; dem Abdruck liegt eine im Gaussarchiv befindliche, von C. H. Müller angefertigte Abschrift zugrunde.

Abhandlung mit der zugehörigen Bemerkung von R. FRICKE zu vergleichen ist*). GAUSS wird wohl die Abhandlung von LAGRANGE *Sur le problème de Képler*, die im 25. Bande (1769), 1771, S. 204 der Memoiren der Berliner Akademie**) steht, auch schon um diese Zeit gekannt haben, da er die auf die Umkehrungsformel bezügliche, die im 24. Bande derselben Sammlung steht, in der Abhandlung Werke VIII, S. 78 selbst zitiert***). In jener Abhandlung *Sur le problème de Képler* gewinnt LAGRANGE die Entwicklungen der drei Größen E, r, v (in der Bezeichnung von GAUSS) nach den Sinus bezw. Kosinus der Vielfachen der mittleren Anomalie M, indem er aus den Gleichungen (I), (II), oben S. 438, und aus der Polargleichung der Ellipse durch Anwendung seiner Umkehrungsformel zuerst nach Potenzen der Größe $f \sin M$ entwickelt, dann die Potenzen von $\sin M$ durch die trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von M ausdrückt und nach diesen ordnet; er setzt:

$$E = M + \sum A_n \sin nM,$$
$$r = 1 + \frac{f^2}{2} - \sum B_n \cos nM,$$
$$v = M + \sum K_n \sin nM$$

und drückt die A_n, B_n durch einfache, die K_n durch kompliziertere Reihen aus, die nach Potenzen der Exzentrizität f fortschreiten. Die Bestimmung des infinitären Verhaltens der Koeffizienten A_n, B_n kommt auf die Untersuchung der BESSELschen Funktion $J_n(nf)$ und ihrer Derivierten für große Werte von n hinaus. Die oben S. 385 abgedruckte Notiz Nr. 82 des *Tagebuchs* vom 16. Oktober 1797 zeigt, wie wir S. 389 nachgewiesen haben, daß GAUSS sich etwa 10 Monate nach den Studien zur LAGRANGEschen Reihe mit der asymptotischen Darstellung der BESSELschen Funktion $J_1(x)$ beschäftigt hat.

Weitere Spuren finden wir in den Tagebuchnotizen Nr. 83 vom April 1798 (eine asymptotische Formel), Nr. 86 vom Mai 1798 (die LAGRANGEsche Reihe), Nr. 87 vom Juni 1798 (die allgemeinen trigonometrischen Reihen), Nr. 88 vom 17. Juni 1798 (Beschäftigung mit LAPLACE), Nr. 104 vom 27. April 1800 (einen Satz über die Konvergenz trigonometrischer Reihen), Nr. 113 vom 25. Oktober 1800 (Hinweis auf frühere Beschäftigung mit einer asymptotischen Formel, vergl. eine Aufzeichnung in dem als Scheda Ab bezeichneten Hefte des Nachlasses, die vom 5. Februar 1799 datiert ist, und den Brief an LAPLACE vom 30. Januar 1812, oben S. 371); zu allen diesen Notizen vergleiche man die Bemerkungen in dem unten folgenden Abdruck des *Tagebuchs*. Endlich ist hier noch die briefliche Mitteilung zu erwähnen, die GAUSS im Frühjahr 1799 an v. ZACH in bezug auf die Zeitgleichungstafel von ULUGH-BEIGH†) hat gelangen lassen und die GAUSS in seinen Briefen an OLBERS vom 27. Januar 1812, Werke VIII, S. 140, und an SCHUMACHER vom 3. Dezember 1831, ebenda, S. 138 erwähnt. Eine Aufzeichnung mit der Überschrift »Mittelpunkts-

*) An der von FRICKE zitierten Stelle: SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN, *Gauss zum Gedächtniss*, 1856, S. 22, wird gesagt, PFAFF habe damals (also im April 1797) den Aufsatz von GAUSS an HINDENBURG befördert; wie der Brief [1.] zeigt, war es aber nicht PFAFF, sondern KAESTNER. Auch die Angabe SARTORIUS v. WALTERSHAUSENs, HINDENBURG sei bald nach Empfang des GAUSSschen Manuskripts gestorben, trifft nicht zu, denn C. FR. HINDENBURG starb in Leipzig am 17. März 1808.

**) Oeuvres de LAGRANGE III, S. 113.

***) Unter den im Nachlaß befindlichen Auszügen aus Zeitschriften u.s.w. (Ca 4) sind Bemerkungen zu den in den Bänden **1—25** der Berliner Mémoires enthaltenen mathematischen Abhandlungen vorhanden.

†) Ein Auszug aus dieser Tafel war in den Allgemeinen Geographischen Ephemeriden **3**, 1799, 2. Stück, Februar S. 182, 183 in einem Berichte von BURCKHARDT über die Tafeln des ULUGH-BEIGH erschienen; S. 181 a. a. O. heißt es: »Die 8. Tafel enthält die Mittelpunkts Gleichung; sie ist für jede 6 Minuten der Anomalie bis auf Tertien berechnet«.

gleichung nach ULUGH BEY in Zeittertien«, in der GAUSS die erwähnte Zeitgleichungstafel benutzt, findet sich im Nachlaß (Astr. d. 7, Kapsel 90)*).

JACOBI sagt (a. a. O., JACOBIs Werke VII, S. 175), es hätte vor CARLINI (1817) kein anderer Mathematiker oder Astronom die Aufgabe behandelt, den Koeffizienten des Sinus eines sehr großen Vielfachen der mittleren Anomalie in der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung annähernd zu bestimmen, eine Aufgabe, die zu den schwierigsten ihrer Art gehöre. Natürlich konnte JACOBI nicht wissen, daß GAUSS schon lange vor CARLINI diese Aufgabe richtig gelöst hatte (während ja CARLINIs Lösung fehlerhaft war) und so zu einem Ergebnis gelangt war, das mit dem übereinstimmt, das JACOBI selbst etwa 50 Jahre später auf dem von CARLINI vorgezeichneten Wege von neuem abgeleitet hat. —

In der Briefstelle [4.] spricht GAUSS von seiner Geneigtheit, seine Methode in einer ihm »selbst genügenden Gestalt auszuführen«, und bemerkt, daß die Arbeit »einen größeren Umfang erhalten« würde; auch SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN berichtet**), daß GAUSS nach seinem Doktorjubiläum (16. Juli 1849) »mit der Theorie der Konvergenz der Reihen« beschäftigt gewesen sei. Wir werden also die Entwürfe [V.] und [VI.] als Vorarbeiten zu der Abhandlung anzusehen haben, deren Plan GAUSS in der Briefstelle [4.] erwähnt. Diese Entwürfe sind also nach dem 5. Februar 1850 entstanden***), und wir können nunmehr über das, was jene geplante Abhandlung enthalten sollte, die folgenden zusammenfassenden Angaben machen. Auf eine Theorie der komplexen Größen sollte die Entwicklung der Lehre von dem Zusammenhang der Flächen (Analysis situs) folgen, die bestimmt war, der Lehre von der Integration im komplexen Gebiete als Grundlage zu dienen. Wahrscheinlich würde sich GAUSS aber auch hier — ähnlich wie in dem Briefe an BESSEL vom 18. Dezember 1811 (siehe oben S. 365, besonders S. 367 Fußnote) — auf die Integrale einförmiger Funktionen beschränkt haben, wenngleich die von DEDEKIND berichtete Äußerung (oben S. 438, Fußnote) auch der gegenteiligen Möglichkeit Raum gibt. Eine Erörterung der Eigenschaften allgemeiner (auch komplexer) Zahlenfolgen würde zu dem eigentlichen Gegenstande der Abhandlung übergeleitet haben, zur Bestimmung des infinitären Verhaltens der Koeffizienten einer allgemeinen trigonometrischen Reihe und der Untersuchung ihrer Konvergenz. Die Anwendung auf die Entwicklung der Mittelpunktsgleichung hätte den Abschluß gebildet†).

Wie GAUSS die allgemeinen trigonometrischen Reihen zu behandeln gedachte, dafür gibt der Nachlaß kaum einen Fingerzeig; daß bei der Mittelpunktsgleichung die imaginäre Substitution (siehe oben die Gleichungen (✱) auf S. 439)

$$(✱✱) \qquad E = i \log \operatorname{cotang} \frac{\varphi}{2} + \varepsilon$$

*) In dem erwähnten Briefe an OLBERS vom 27. Januar 1812, Werke VIII, S. 140, schreibt GAUSS, daß die Papiere, worin er 1799 die Methode der kleinsten Quadrate auf ULUGH-BEIGHs Zeitgleichungstafel angewandt hatte, verloren gegangen seien; allem Anschein nach hat GAUSS sie 1850, zugleich mit den auf die Mittelpunktsgleichung bezüglichen Aufzeichnungen, wiedergefunden.

**) *Gauss zum Gedächtniss*, 1856, S. 69.

***) Im art. 2. des Abschnitts [VI.], oben S. 408, wird auf die *Jubiläumsschrift* von 1849 Bezug genommen.

†) Nach den Akten der Philosophischen Fakultät zu Göttingen (vol. 117, S. 84) hat GAUSS im Jahre 1833 drei Preisaufgaben vorgeschlagen, von denen die eine den Wortlaut hatte: »Enarrentur variae methodi problema KEPLERI solvendi, imprimis per series infinitas revoceturque gradus convergentiae, quam hae offerunt, ad mensuram accuratam«. Die Fakultät hat aber eine andere der vorgeschlagenen Aufgaben (nämlich, die Trägheitsmomente der regelmäßigen Körper zu bestimmen) gewählt und gestellt.

sofort auf Integrale im komplexen Gebiet führt, wenn man die Koeffizienten der Entwicklung in Integralform darstellt, ist einleuchtend. Die Bedeutung dieser Substitution erläutert J. Horn in einer brieflichen Mitteilung wie folgt:

»Für die Entwicklung (III), oben S. 439, ist

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dv}{dM} e^{inM} dM = \frac{\cos\varphi}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{inM} \frac{dE}{1-f\cos E},$$

oder, indem man *) $z = e^{iE}$ einführt,

$$C_n = -\frac{i\cos\varphi}{\pi}\int F(z)\,(\Phi(z))^n\,dz,$$

wobei

$$F(z) = \frac{1}{z-\frac{f}{2}(z^2+1)},\quad \Phi(z) = z\,e^{-\frac{f}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

gesetzt ist und über den Kreis $|z| = 1$ integriert wird. Die Funktion $F(z)$ hat die reellen singulären Stellen

$$z_0 = \frac{1-\sqrt{1-f^2}}{f} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = e^{i\mathfrak{E}} < 1,$$

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{1-f^2}}{f} = \operatorname{cotang}\frac{\varphi}{2} = e^{-i\mathfrak{E}} > 1,$$

die zugleich Nullstellen von $\Phi'(z)$ sind. Der Integrationsweg $|z| = 1$ kann durch den Integrationsweg $|z| = z_0$ ersetzt werden, der nur der singulären Stelle z_0 ausweichen muß. Demgemäß hat man zu setzen

$$z = z_0 e^{i\varepsilon}$$

oder, was dasselbe ist,

$$E = \mathfrak{E} + \varepsilon = i\log\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} + \varepsilon,$$

und dies ist eben die von Gauss angewandte Substitution. Nimmt man als Integrationsweg den Kreis $|z| = z_1$ mit Umgehung der singulären Stelle z_1, so hat man

$$z = z_1 e^{\vartheta i} \text{ oder } E = \vartheta - i\log\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2},$$

eine Substitution, die in einer Abhandlung von W. Scheibner **) benutzt wird.«

Soweit die Mitteilung von Horn ***).

*) Vergl. für das folgende H. Burkhardt, *Über Funktionen grosser Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung*, Sitzungsberichte der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissensch. 1914, S. 1.

) W. Scheibner, *Über die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwicklungen*, zuerst erschienen in den Berichten der Kgl. Sächsischen Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig, Mathem.-phys. Classe 8, 1856, S. 40, dann gekürzt in den Mathematischen Annalen **17, 1880, S. 545, siehe hier S. 551.

***) Man vergl. auch die in der erwähnten Abhandlung von Burkhardt angeführte Literatur, der noch hinzuzufügen wäre A. L. Cauchy, *Mémoire sur divers points d'Analyse*, Mémoires de l'Académie des Sciences 8, Paris 1829, S. 101, Oeuvres 1. série, II, S. 33.

In dem auf S. 382 beginnenden Hauptstück haben wir das im Nachlaß befindliche Material gesammelt, das mit dieser unvollendet gebliebenen Abhandlung von Gauss im Zusammenhang steht. Der Brief [5.] gehört hierher, weil Gauss sich darin über seine Auffassung der Reihenkonvergenz ausspricht, der Brief [6.], weil darin von der »Metaphysik der komplexen Größen« gehandelt wird *). Der Vollständigkeit wegen wäre noch eine Stelle in dem Briefe von Gauss an Wolfgang Bolyai vom 20. April 1848 **) zu nennen, wo von einem allgemeinen Kriterium für die Konvergenz der Reihensummen die Rede ist.

Schlesinger.

*) Die Urschrift des an Grassmann gerichteten Briefes befindet sich im Besitz der Familie Grassmanns; der Brief ist bereits abgedruckt bei V. Schlegel, *H. Grassmann, sein Leben und seine Werke*, Leipzig 1878, S. 22—23 und in H. Grassmanns Gesammelten Werken I, 2, Leipzig 1896, S. 397. Der oben stehende Abdruck ist mit der Urschrift verglichen worden.

**) *Briefwechsel zwischen C. Fr. Gauss und W. Bolyai*, herausg. von F. Schmidt und P. Stäckel, Leipzig 1899, S. 133, 5); vergl. Bolyais Bemerkung, ebenda, S. 139 und die zu S. 133—134 gehörige Anmerkung Stäckels, ebenda, S. 195, 196.

GEOMETRIE.

NACHTRAGE ZU DEN BÄNDEN IV UND VIII.

NACHLASS.

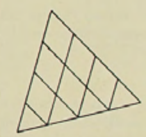
[ANSÄTZE ZUR TRANSZENDENTEN TRIGONOMETRIE.]

[Aus Scheda Af, Mémoires de Mathématique, Bronsuic 1801.]

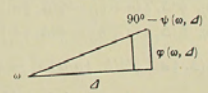
[I.]

[S. 68]

$$\omega\partial\psi\Delta = 2i\psi(\omega\varphi\Delta)$$
$$\partial\Delta = i\varphi(\omega\varphi\Delta)$$
$$\varphi(\omega\varphi\Delta)\omega\partial\psi\Delta = 2\partial\Delta . \psi(\omega\varphi\Delta)$$
$$\psi'\Delta = \frac{2\psi(\omega\varphi\Delta)}{\omega\varphi(\omega\varphi\Delta)}$$
$$\chi'\Delta = \varphi\Delta$$
$$\psi'\Delta = \frac{2\psi\{\omega\chi'\Delta\}}{\omega\chi'\{\omega\chi'\Delta\}}$$
$$\psi'\Delta . \alpha\omega\omega\chi'\Delta = 2\beta\omega\omega\chi'\Delta^2$$
$$\alpha\psi'\Delta = 2[\beta]\chi'\Delta.$$



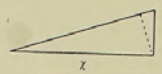
[II.]



$$\frac{\partial\varphi(\omega, \Delta)}{\partial\Delta} = \psi(\omega, \Delta).$$

[S. 69]

[III.]

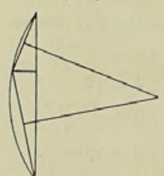


$$\varphi(\omega, \Delta)$$
$$\psi\{\omega, \chi(\omega, \Delta)\}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \chi\{\omega, \chi(\omega, \Delta)\} + \varphi\{\psi(\omega, \chi(\omega, \Delta)), \varphi(\omega, \Delta)\} \\
\psi(\omega, \Delta) &= \psi\{\psi(\omega, \chi(\omega, \Delta)), \varphi(\omega, \Delta)\} \\
\varphi\{\omega, \chi(\omega, \Delta)\} &= \chi\{\psi(\omega, \chi(\omega, \Delta)), \varphi(\omega, \Delta)\} \\
\varphi(\omega, \Delta) &= \omega f\Delta + \omega\omega f'\Delta \\
\chi(\omega, \Delta) &= \Delta + \omega g\Delta + \omega\omega g'\Delta \\
\psi(\omega, \Delta) &= \omega + \omega\omega h'\Delta.
\end{aligned}$$

[S. 70]

[IV.]



$$\begin{aligned}
&\varphi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}a),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a)\} \\
&= \varphi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}b),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b)\}
\end{aligned}$$

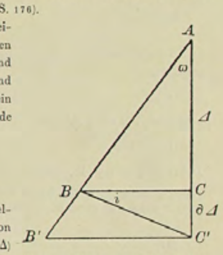
$$\begin{matrix}\psi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}a),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a)\} \\ +\,\psi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}b),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b)\}\end{matrix} = \begin{matrix}\psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a) \\ +\,\psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b)\end{matrix}$$

$$\varphi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}a),\ \psi^{0,1}(\Delta, \tfrac{1}{2}a)\partial\tfrac{1}{2}a\} = \varphi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}\partial a),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a)\}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\Delta, a) &= \Delta f a + \Delta^3 f' a \\
\psi(\Delta, a) &= a + \Delta\Delta g a.
\end{aligned}$$

BEMERKUNGEN.

Das als Scheda Af bezeichnete Heft enthält Aufzeichnungen der verschiedensten Art, die, wie widerholte Datierungen zeigen, aus den Jahren 1801 bis 1803 stammen. Da die hier abgedruckten Notizen fast am Ende des Heftes stehen, ist anzunehmen, daß ihre Abfassung in das Jahr 1803 fällt. Neben der Aufzeichnung Nr. 99 des *Tagebuchs*: In principiis geometriae egregios progressus fecimus, Br[unovici 1799] Sept., und den Äußerungen in dem Briefe an WOLFGANG BOLYAI vom 16. Dez. 1799, (Werke VIII, S. 159) bilden die vorstehenden Notizen das älteste Zeugnis für GAUSSens Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie; sie sind um so wertvoller, als es sich in ihnen um Versuche handelt, einen Zugang zu der transzendenten Trigonometrie zu gewinnen, von der GAUSS seinem Schüler WACHTER bei dessen Besuch im April 1816 erzählt hat (Werke VIII, S. 176).



Die Notiz [I.] enthält einen Ansatz, um für ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem der eine spitze Winkel ω so klein ist, daß man in den Reihenentwicklungen nach Potenzen von ω von den Gliedern dritter und höherer Ordnung absehen darf, Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln zu finden. Es sei also im Dreieck ABC der Winkel bei C ein Rechter und der Winkel ω bei A sehr klein; die Kathete AC werde mit Δ bezeichnet. Dann ist in erster Näherung:

$$BC = \omega\varphi(\Delta), \tag{1}$$
$$\sphericalangle ABC = 90^\circ - \omega - \omega\psi(\Delta), \tag{2}$$

wo $\varphi(\Delta)$, $\psi(\Delta)$ noch zu bestimmende Funktionen bedeuten. Die Winkelsumme im Dreieck ABC ist $180^\circ - \omega\psi(\Delta)$, also, wenn die Funktion $\psi(\Delta)$ positiv ist, kleiner als 180°. Um die unbekannten Funktionen $\varphi(\Delta)$ und $\psi(\Delta)$ zu bestimmen, verlängere man AC um $CC' = \partial\Delta$, errichte in C' auf AC' das Lot $C'B'$, das die Verlängerung von AB in B' treffe, und ziehe BC'; der Winkel CBC' werde mit i bezeichnet. Dann ergibt die Anwendung der Formel (1) auf das Dreieck BCC':

$$\partial\Delta = i\varphi(\omega\varphi(\Delta)). \tag{3}$$

Das quergestreifte Dreieck in der Notiz [I.], S. 451 soll auf den Inhalt des Dreiecks hinweisen. Dieser ist in der antieuklidischen Geometrie der Abweichung der Winkelsumme von 180° proportional. Mithin wird der Inhalt des Dreiecks ABC proportional $\omega\psi(\Delta)$ und daher ist der Inhalt des Vierecks $BCC'B'$ proportional $\omega\partial\psi(\Delta)$. Nun ist das Viereck $BCC'B'$, bis auf Größen höherer Ordnung, doppelt so groß wie das Dreieck BCC', dessen Inhalt proportional $i\psi(\omega\varphi(\Delta))$ ist, folglich gilt die Gleichung

$$\omega\partial\psi(\Delta) = 2i\psi(\omega\varphi(\Delta)). \tag{4}$$

Durch Verbindung von (3) und (4) gelangt man zu der Funktionalgleichung

$$\psi'(\Delta) = \frac{2\psi(\omega\varphi(\Delta))}{\omega\varphi(\omega\varphi(\Delta))}. \tag{5}$$

Um sie zu lösen, setzt GAUSS

$$\varphi(\Delta) = \chi'(\Delta) \tag{6}$$

und denkt sich $\chi'(\Delta)$ nach Potenzen von Δ entwickelt:

$$\chi'(\Delta) = \alpha\Delta + \cdots; \tag{7}$$

das konstante Glied fehlt, weil $\varphi(0) = 0$ ist. Jetzt wird nach (5):

$$\psi'(\Delta)\left\{\alpha\omega^2\chi'(\Delta)+\cdots\right\} = 2\psi(\omega\chi'(\Delta)), \tag{8}$$

mithin muß die Entwicklung von $\psi(\Delta)$ nach Potenzen von Δ mit einem Gliede $\beta\Delta^2$ anfangen, und man hat, nach Potenzen von ω entwickelnd:

$$\psi'(\Delta).\,\alpha\omega^2\chi'(\Delta)+\cdots = 2\beta\omega^2(\chi'(\Delta))^2+\cdots, \tag{9}$$

woraus durch Vergleichung der Koeffizienten von ω^2 die Schlußformel von Gauss hervorgeht:

$$\alpha\psi'(\Delta) = 2\beta\chi'(\Delta). \tag{10}$$

Um die Rechnung zu Ende zu führen, integriere man die Gleichung (10) und substituiere

$$\psi(\Delta) = \frac{2\beta}{\alpha}\chi(\Delta) \tag{11}$$

in der Funktionalgleichung (5). Indem noch $\omega\chi'(\Delta) = \xi$ gesetzt wird, geht diese über in die Differentialgleichung

$$\xi\chi'(\xi) = 2\chi(\xi), \tag{12}$$

mithin ist $\chi(\xi) = \frac{1}{2}\alpha\xi^2$ und

$$\varphi(\xi) = \alpha\xi, \quad \psi(\xi) = \beta\xi^2. \tag{13}$$

Dabei ist $\xi = \omega\chi'(\Delta)$. Indem man beachtet, daß von vornherein bei den Entwicklungen nach Potenzen von ω von den Gliedern dritter und höherer Ordnung abgesehen wurde, ergibt sich schließlich, daß der Ansatz unter den gemachten Voraussetzungen zu den Gleichungen führt:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\Delta) &= \alpha\Delta + * + \alpha_3\Delta^3+\cdots,\\ \psi(\Delta) &= * + \beta\Delta^2+\beta_3\Delta^3+\cdots, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

wobei die Koeffizienten $\alpha, \alpha_3, \ldots; \beta, \beta_3, \ldots$ unbestimmt bleiben.

Gauss hat neben die letzten Formeln der Notiz [I.] geschrieben:

$$\varphi(\Delta) = \sin\Delta.$$

In der Tat wird die Funktionalgleichung (5) durch diese Annahme für $\varphi(\Delta)$ in Verbindung mit

$$\psi(\Delta) = -(1-\cos\Delta)$$

erfüllt, wenn, den Voraussetzungen entsprechend, $\sin(\omega\sin\Delta)$ durch $\omega\sin\Delta$ und $\cos(\omega\sin\Delta)$ durch $1-\frac{1}{2}\omega^2\sin^2\Delta$ ersetzt werden darf, und man wird so auf die in der sphärischen Trigonometrie geltenden Gleichungen geführt.

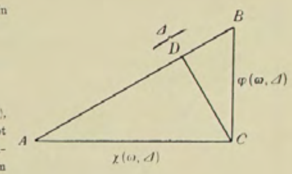
Im Unterschied gegen die Notiz [I.] wird in der Notiz [III.] ein Ansatz versucht, bei dem ω einen beliebigen spitzen Winkel bezeichnet. Einen Übergang hierzu bildet die kurze Notiz [II.], in der bereits $\omega\varphi(\Delta)$ und $\omega\psi(\Delta)$ durch $\varphi(\omega,\Delta)$ und $\psi(\omega,\Delta)$ ersetzt werden. Jedoch gilt die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi(\omega,\Delta)}{\partial\Delta} = \psi(\omega,\Delta),$$

wie man sich leicht überzeugt, nur für kleine Winkel ω im Sinne der Notiz [I.].

In der Aufzeichnung [III.] handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck mit dem spitzen Winkel ω, bei dem die Hypotenuse mit Δ bezeichnet wird; die Katheten heißen $\varphi(\omega,\Delta)$ und $\chi(\omega,\Delta)$, der andere spitze

Winkel wird gleich $90^0-\psi(\omega,\Delta)$ gesetzt. Es ist also in der Figur:



$$\left\{\begin{aligned} BC &= \varphi(\omega,\Delta),\\ AC &= \chi(\omega,\Delta),\\ \sphericalangle ABC &= 90^0-\psi(\omega,\Delta). \end{aligned}\right. \tag{I}$$

Um Beziehungen zwischen den Funktionen $\varphi(\omega,\Delta)$, $\chi(\omega,\Delta)$ und $\psi(\omega,\Delta)$ zu gewinnen, fälle man von C das Lot CD auf die Hypotenuse AB und betrachte die rechtwinkligen Teildreiecke ACD und BCD. Zunächst wird im Dreieck ACD:

$$\left\{\begin{aligned} CD &= \varphi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\\ AD &= \chi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\\ \sphericalangle ACD &= 90^0-\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)). \end{aligned}\right. \tag{II}$$

Mithin ist im Dreieck BCD der Winkel BCD gleich $\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta))$ und daher:

$$\left\{\begin{aligned} DB &= \varphi\left\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\right\},\\ CD &= \chi\left\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\right\},\\ \sphericalangle CBD &= 90^0-\psi\left\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\right\}. \end{aligned}\right. \tag{III}$$

Nun ist $AD+DB = AB$, $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABC$ und es müssen die beiden für CD gefundenen Werte übereinstimmen. Hieraus folgen die Funktionalgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \Delta &= \chi(\omega,\chi(\omega,\Delta))+\varphi\left\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\right\},\\ \psi(\omega,\Delta) &= \psi\left\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\right\},\\ \varphi(\omega,\chi(\omega,\Delta)) &= \chi\left\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\right\}. \end{aligned}\right. \tag{IV}$$

Um aus ihnen die Funktionen φ, χ, ψ zu bestimmen, entwickelt Gauss nach Potenzen von ω und setzt:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\omega,\Delta) &= \omega f(\Delta)+\omega^2 f'(\Delta)+\omega^3 f''(\Delta)+\cdots,\\ \chi(\omega,\Delta) &= \Delta+\omega g(\Delta)+\omega^2 g'(\Delta)+\omega^3 g''(\Delta)+\cdots,\\ \psi(\omega,\Delta) &= \omega+\omega^2 h'(\Delta)+\omega^3 h''(\Delta)+\cdots; \end{aligned}\right. \tag{V}$$

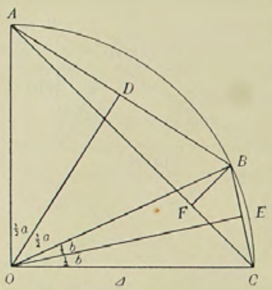
die Striche bedeuten hier nicht wie in der Notiz [I.] Ableitungen nach Δ, sondern sind als Indizes aufzufassen. Warum als Anfangsglieder der Entwicklungen $\omega f(\Delta)$, Δ und ω angenommen sind, ergibt die Figur, indem man zur Grenze für $\omega = 0$ übergeht; vergl. auch die Gleichung (2) zur Notiz [I.].

In der Scheda Af folgen noch einige flüchtig hingeworfene Zeilen, die zeigen, daß Gauss die Entwicklungen (V) in die Gleichungen (IV) eingesetzt hat, aber nicht zur Bestimmung der Koeffizienten vorgedrungen ist; ihr Abdruck erschien nicht erforderlich. Dagegen verdient erwähnt zu werden, daß Gauss dazwischen die Formel

$$\text{Arctang}(\cos\omega.\tan\!g\,\Delta) = \cos\omega.\,\text{t[ang}\,\Delta] - \tfrac{1}{3}\cos\omega^3.\,\text{t[ang}\,\Delta^3+\ldots]$$

vermerkt hat, deren linke Seite in der sphärischen Trigonometrie der Ausdruck für die Funktion $\chi(\omega,\Delta)$ ist.

Die Notiz [IV.] enthält einen anderen Ansatz, bei dem nur zwei zu bestimmende Funktionen auftreten. Um den Punkt O werde der Kreis mit dem Halbmesser Δ beschrieben. Es seien AB und BC



zwei Sehnen mit den Zentriwinkeln a und b. Von O fälle man auf AB das Lot OD, auf AC das Lot BF. Wenn dann die Funktionen $\varphi(\omega, \Delta)$ und $\psi(\omega, \Delta)$ dieselbe Bedeutung haben, wie in der Notiz [III.], so ist

$$\begin{aligned} AB &= 2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}a), \quad BC = 2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}b), \\ \sphericalangle OAD &= \sphericalangle OBD = 90^\circ - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a), \\ \sphericalangle OBE &= \sphericalangle OCE = 90^\circ - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b), \\ \sphericalangle OAF &= \sphericalangle OCF = 90^\circ - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAF &= \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a), \\ \sphericalangle BCF &= \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b). \end{aligned}$$

Mithin wird im Dreieck BAF:

$$BF = \varphi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}a), \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a)\}$$

und im Dreieck BCF:

$$BF = \varphi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}b), \psi(\Delta, \tfrac{1}{2})) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b)\}.$$

Dies ist die erste Funktionalgleichung des Textes. Die zweite erhält man aus der doppelten Zerlegung des Winkels ABC:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABF + \sphericalangle CBF = \sphericalangle OBD + \sphericalangle OBE.$$

Die weiteren Rechnungen brechen sogleich wieder ab. Gauss hat noch für $\varphi(\Delta, a)$ und $\psi(\Delta, a)$ die Ausdrücke hingeschrieben, die in der sphärischen Trigonometrie gelten, nämlich

$$\begin{aligned} \varphi(\Delta, a) &= \Delta \sin a - \tfrac{1}{6}\Delta^3 \sin a \,.\, \cos a^2 + \cdots, \\ \psi(\Delta, a) &= a - \tfrac{1}{2}\Delta\Delta \sin a \,.\, \cos a + \cdots. \end{aligned}$$

Auf weitere Untersuchungen über die transzendente Trigonometrie deuten einige Figuren auf S. 71 der Scheda, von denen eine hier wiedergegeben sei. Was damit beabsichtigt ist, hat sich nicht feststellen lassen. Es ist bemerkenswert, daß die Werke VIII, S. 255—257 abgedruckte Notiz, in der Gauss eine Herleitung der transzendenten Trigonometrie gibt, ebenfalls auf geometrischen Konstruktionen und daraus folgenden Relationen für zwei unbekannte Funktionen beruht. Man vergleiche auch den in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatz »Gauss als Geometer«.

Stäckel.

[ZUR SPHÄRISCHEN TRIGONOMETRIE.]

[Die Fundamentalgleichung

$$\cos c \cos A = \sin c \cot b - \sin A \cot B$$

kann, mit Vertauschung der Buchstaben, noch auf folgende 5 Arten geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \cos a \cos C &= \sin a \cot b - \sin C \cot B \\ \cos c \cos B &= \sin c \cot a - \sin B \cot A \\ \cos b \cos C &= \sin b \cot a - \sin C \cot A \\ \cos b \cos A &= \sin b \cot c - \sin A \cot C \\ \cos a \cos B &= \sin a \cot c - \sin B \cot C. \end{aligned}$$

Die Form, in welcher diese Gleichungen hier geschrieben sind, eignet sich am besten dazu, um sie im Gedächtniss zu behalten. Denn da die vier Bestandtheile, welche hier in Betracht kommen, im Umfange des Dreiecks unmittelbar auf einander folgen, so kann man immer zwei derselben wie mittlere, und die beiden andern wie äussere ansehen. Alsdann sagt die Gleichung in Worten: Das Product der Cosinus der beiden mittleren Bestandteile ist gleich dem Producte aus dem Sinus der mittleren Seite mit dem Cotangens der äusseren Seite, vermindert um das Product aus dem Sinus des mittleren Winkels mit dem Cotangens des äusseren Winkels. Man beachte dabei die Ähnlichkeit, welche das Vorkommen von cos, sin und cot mit den Napierschen Regeln hat.

Dieses mnemonische Hülfsmittel pflegte Gauss seinen Zuhörern mitzuteilen.]

BEMERKUNG.

In dem *Lehrbuch der Elementar-Mathematik* von TH. WITTSTEIN, 2. Band, 2. Abteilung: *Stereometrie*, Hannover 1862, finden sich, wie im Vorwort, S. VIII, hervorgehoben wird, drei auf GAUSS zurückgehende Stellen. Die auf inhaltsgleiche sphärische Dreiecke bezügliche Stelle, S. 119, deckt sich mit dem Werke VIII, S. 293 abgedruckten Briefe von GAUSS an SCHUMACHER vom 6. Jan. 1842. Die in der zweiten, S. 161, gegebene Herleitung der sogenannten MOLLWEIDEschen Gleichungen findet sich schon in dem Werke VIII, S. 289 abgedruckten Briefe von GAUSS an GERLING vom 18. Februar 1815. Dagegen verdient die S. 146 des WITTSTEINschen Buches mitgeteilte Gedächtnisregel für die Fundamentalgleichung hier nachgetragen zu werden.

STÄCKEL.

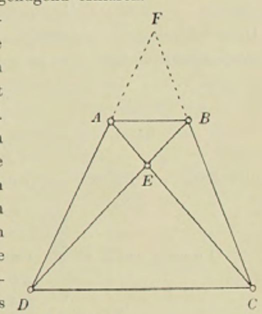
BRIEFWECHSEL.

[1.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 19. März 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 7—8.]

|. . . . Mir ist neulich ein Paradox vorgekommen, das ich so frei bin Ihnen vorzulegen. Ich kann es noch nicht genügend erklären.



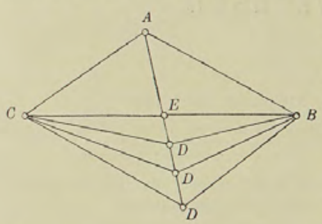
Bekanntlich ist, wenn man bei einem Vierecke $ABCD$ einen Punct sucht, von dem die Summe der an die Winkelpuncte gezogenen Linien ein Minimum sey, der gesuchte Punct der Durchschnittspunct der Diagonalen E. Lässt man nun die Puncte A, B in den Linien DA, BC immer mehr hinaufrücken, bis sie am Ende in F zusammenfallen, so fällt auch E zugleich in F, das Viereck verwandelt sich in das Dreieck DFC, und man hätte den Punct F als denjenigen, von dem die Summe der an die Winkelpuncte F, C, D des Dreiecks gezogenen Linien ein Minimum sey. Das ist aber bekanntlich nur wahr, wenn der Winkel $F \geqq 120^0$.

Noch mehr, man kann dieselbe Construction bei jedem der andern beiden Winkelpuncte des Dreiecks machen, und würde, wenn die Seiten des Dreiecks a, b, c sind, so 3 Gleichungen erhalten:

$$a+b = \text{Minimum}$$
$$b+c = \text{Minimum}$$
$$a+c = \text{Minimum},$$

also $a+b = b+c = a+c$, welches absurd ist. Es folgt daraus $a = b = c$.

Ebenso wenn man das Viereck $ABCD$ betrachtet, so ist der gesuchte Punct wiederum E. Lässt man nun D auf AD immer gegen E rücken, bis dieser Punct in CB fällt, so verwandelt sich das Viereck in das Dreieck ABC



und der gesuchte Punct muss, da der Schnitt aufhört, irgendwo in der Linie CB liegen. Offenbar erfüllt jeder Punct in dieser Linie (der zwischen C und B liegt*)) die Bedingung für die Puncte C, B; soll er sie auch für den Punct A erfüllen, so muss es das Perpendikel von A auf CB seyn. Ebenso kann man bei jeder der andern beiden Seiten des Dreiecks raisonniren. Wenn also die Seiten s, s', s'', die darauf gefällten Perpendikel p, p', p'' sind, so hat man:

$$s+p = \text{Min.}$$
$$s'+p' = \text{Min.}$$
$$s''+p'' = \text{Min.},$$

also $s+p = s'+p' = s''+p''$, welches wiederum absurd ist, da bekanntlich:

$$sp = s'p' = s''p''.\}$$

*) auch C und B selbst. Dann ist

$$BC+BA = \text{Minimum}$$
$$CA+BC = \text{Minimum},$$

also $CA = BA$, quod absurdum.

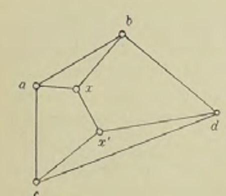
[2.]

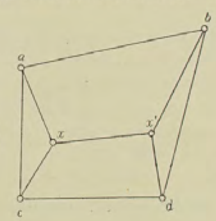
GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 21. März 1836.

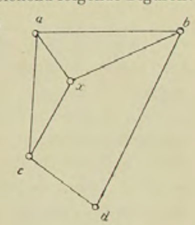
[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 13—14.]

. . . . Was Ihr Viereck betrifft, so heisst doch die Aufgabe so: Vier Pkte a, b, c, d sind gegeben, man soll einen 5ten x finden, so dass $ax+bx+cx+dx$ ein Minimum wird, und das ist von den 3 Durchschnittspunkten ab mit cd, ac mit bd, ad mit bc der eine, wo man für die Auswahl die Bedingung entweder leicht auf Anschauung reduciren, oder analytisch einkleiden könnte. Lassen Sie nun a, b, c fest sein und d dem c immer näher rücken, so bleibt diese Auflösung noch immer so lange richtig, als Sie nicht c mit d zusammenfallen lassen. Fällt aber c mit d zusammen, so erfordert Geist und Buchstabe der mathematischen Aufgabe, als solcher, dass Sie dann c zweimahl zählen, also in dem Dreieck abc $ax+bx+2cx$ zu einem Minimum machen, wo sich die allgemeine Auflösung noch immer als richtig ausweiset.

Ist bei einem 4 Eck nicht von der stricten mathematischen Aufgabe, wie sie oben ausgesprochen ist, sondern von dem kürzesten Verbindungssystem die Rede, so werden mehrere einzelne Fälle von einander unterschieden werden müssen, und es bildet sich so eine recht interessante mathematische Aufgabe, die mir nicht fremd ist, vielmehr habe ich bei Gelegenheit einer Eisenbahnverbindung zwischen Harburg, Bremen, Hannover, Braunschweig sie in Erwägung genommen und bin selbst auf den Gedanken gekommen, dass sie eine ganz schickliche Preisfrage für unsre Studenten bei Gelegenheit abgeben könnte. Die Möglichkeit verschiedener Fälle erläutern wohl hinreichend folgende Figuren:







wo in der dritten Figur die Verbindung von c nach d direct gehen muss (was wirklich bei obigem Beispiel der Fall wird). Doch die Zeit drängt, also heute hiervon nicht mehr . . . . . .

[3.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 2. April 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 24—25.]

|. . . . . . Bei Ihrem Problem der vortheilhaftesten Verbindung von 4 Städten, kann es auch vorkommen, dass eine Verbindung zwischen zweyen derselben ein grösseres Gewicht bekommt, weil diese Verbindung dem, der die Kosten der Eisenbahn hergiebt, wichtiger ist als die anderen. In diesem Falle würde die gebrochene Linie zwischen beiden Städten mehr der graden, die durch beide geht, genähert werden müssen. Ist es in dieser Rücksicht, dass die Verbindung von Braunschweig nach Hannover nach der graden Linie geht, also das höchste Gewicht hat, oder ist es von dem von mir erwähnten Gewicht abgesehen, eine Folge ihrer gegenseitigen Lage?|

[4.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 7. April 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 26—28.]

|Ich muss Sie, mein theuerster Freund, noch einmal mit einer Kleinigkeit beschweren, nemlich mit der Auflösung der Aufgabe: wenn 4 Puncte gegeben sind, einen 5ten zu finden, von dem die an die gegebenen 4 gezogenen Linien ein Minimum sind. Ich kann nicht die in Ihrem Briefe angedeutete Auflösung, nemlich dass es einer von den Durchschnittspuncten der durch 2 dieser Puncte gezogenen Linien ist, finden. Um sie in den Stand zu setzen, besser darüber zu urtheilen, worin mein Fehler liegt, will ich Ihnen kurz darlegen, wie ich die Sache angegriffen habe.

Zuerst nahm ich die Aufgabe sur le haut ton, und fing mit einer beliebigen Anzahl von Puncten an, deren rechtwinklichte Coordinaten (a, b), (a', b'), (a'', b'') . . . u.s.w. sind. Wenn ich die Coordinaten des unbekannten Punctes (x, y) setze, so ergeben sich gleich die Gleichungen

$$0 = \frac{x-a}{\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}}} + \frac{x-a'}{\sqrt{\{(x-a')^2+(y-b')^2\}}} + \frac{x-a''}{\sqrt{\{(x-a'')^2+(y-b'')^2\}}} + \cdots \text{ u.s.w.}$$

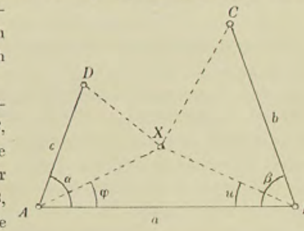
$$0 = \frac{y-b}{\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}}} + \frac{y-b'}{\sqrt{\{(x-a')^2+(y-b')^2\}}} + \frac{y-b''}{\sqrt{\{(x-a'')^2+(y-b'')^2\}}} + \cdots \text{ u.s.w.}$$

Daraus fand ich dann, da $\frac{y-b}{x-a}$ die Tangente des Winkels ist, den die durch die Puncte (x, y), (a, b) gezogene Linie mit der Abscissenaxe*) macht (diese Winkel mit w, w', w'' u.s.w. bezeichnet), für das Minimum die beiden Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \cos w + \cos w' + \cos w'' + \cdots \\ 0 &= \sin w + \sin w' + \sin w'' + \cdots, \end{aligned} \right.$$

und da die Lage der Abscissenaxe beliebig ist, da die gegebenen Abscissen, welche sich auf die angenommene Lage der Abscissenaxe bezogen, ganz aus diesen Ausdrücken verschwunden sind, so kann man die Winkel w, w', w'' . . . von jeder beliebigen durch (x, y) gezogenen Linie rechnen. Den Gleichungen (A) geschieht Genüge, wenn die von (x, y) an (a, b), (a', b') u.s.w. gezogenen Linien lauter gleiche Winkel bilden, und für ein Viereck, dessen innere Winkel alle $< 180^0$ sind, durch den Durchschnittspunct der Diagonalen. Mehr kann ich aber nicht aus den Grundgleichungen herausbringen. Will ich x und y direct suchen, so komme ich auf mir unübersehbare Complication.

Ich versuchte es noch für das Viereck auf eine andere Art. Sind A, B, C, D die gegebenen, X der gesuchte Punct, so nahm ich als Gegebene der Aufgabe a, b, c und die Winkel α, β, als Unbekannte die Winkel φ, u. Die



*) oder einer durch (x, y) gezogenen Parallele mit der Abscissenaxe.

Function

$$U = a\frac{\sin u}{\sin(\varphi+u)} + a\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+u)} + \sqrt{\left(\frac{aa\sin\varphi^2}{\sin(\varphi+u)^2} + bb - 2ba\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+u)}\cos(\beta-u)\right)}$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{aa\sin u^2}{\sin(\varphi+u)^2} + cc - 2ca\frac{\sin u}{\sin(\varphi+u)}\cos(\alpha-\varphi)\right)}$$

soll dann ein Minimum seyn. Die Gleichungen $\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$ und $\frac{\partial U}{\partial u} = 0$ sind aber auch für mich zu complicirt.

Möchten Sie wohl, mein theuerster Freund, wenn Sie einen freien Augenblick haben, mir Ihre Methode mittheilen? Man könnte es wohl, wenn man sich gleiche Gewichte an 4 von einem Punct ausgehenden Fäden hängend vorstellte, die über Rollen in den Puncten A, B, C, D gingen, machen; wo dann das Gleichgewicht zu suchen wäre, bei dem die Gewichte den Verbindungspunct der Fäden in den gesuchten ziehen würden. Will man dann einigen Puncten eine grössere verhältnissmässige Wichtigkeit beilegen, so lässt sich das leicht durch grösseres an diesen Puncten angebrachtes Gewicht ausdrücken. Ich vermuthe aber, Sie haben einen rein analytischen oder geometrischen Weg gewählt . . . . .]

[5.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 13. April 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 30—32.]

Wegen der geometrischen Aufgabe bin ich sehr gern erbötig, mich Ihnen näher zu expliciren, sobald Sie, mein theuerster Freund, mir erst näher bezeichnen, was denn eigentlich Ihnen dabei einer nähern Explication bedürftig scheint. Obgleich ich Ihren Brief wiederholt gelesen habe, ist es mir doch nicht möglich gewesen, dieses daraus abzunehmen. Da nun aber der Gegenstand viele Seiten hat, und eine complete Auseinandersetzung von Allem ein kleines Buch füllen könnte, so würde ich, wenn ich auf gut Glück Eine Seite hervorhöbe, und alles was ich darüber sagen könnte, entwickelte, riskiren, mich ganz vergeblich abgequält zu haben, wenn sich nachher fände, dass das gar nicht der Ihnen dunkele Punkt gewesen sei. Sie leiten aus Ihrem

Calcul zwei Gleichungen ab:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} 0 = \cos w + \cos w' + \cos w'' + \cos w''' \ldots \\ 0 = \sin w + \sin w' + \sin w'' + \sin w''' \ldots, \end{cases}$$

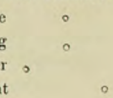
Sie sagen ferner: diesen Gleichungen geschehe Genüge, wenn die von (x, y) nach (a, b), (a', b'), $(a'', b'')\ldots$ gezogenen Linien lauter gleiche Winkel bilden und für ein Viereck, dessen innere Winkel alle < 180 sind, durch den Durchschnitt der Diagonalen. (Ich verstehe dies so, dass Sie zwei Fälle als von selbst einleuchtend vorfinden 1) allgemein wenn $w' - w = w'' - w' = w''' - w'' = \text{etc.} = w - w''$, 2) wenn bei 4 Pkten $w'' = w + 180^0$, $w''' = w' + 180^0$). Mehr (fahren Sie fort) kann ich aber nicht aus den Grundgleichungen herausbringen.

Ich weiss nun eigentlich nicht, was Sie denn mehr gewünscht haben. Ich kann also nur rathen. Z. B.

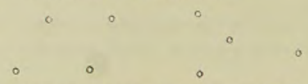
1) wollen Sie sich nicht mit der Aufgabe, wo nur von 4 Pkten die Rede ist (von welcher allein in unsern frühern Briefen die Rede gewesen ist), beschäftigen, sondern auch mit einer grössern Zahl? Eine solche allgemein betrachtet wird immer auf höhere Gleichungen führen müssen,

2) oder wenn Sie, wie der Anfang Ihres Briefes vermuthen lässt, sich nur mit 4 Pkten beschäftigen, was wünschen Sie in diesem Fall mehr? Ist es Ihnen vielleicht nicht einleuchtend, dass dann aus den Gleichungen (A) Ihr Schluss mit Nothwendigkeit folgt? Dies würde sich (sobald ich weiss, dass dies Ihr Bedenken ist) leicht erledigen können, oder

3) finden Sie Anstoss daran, dass das Resultat (Schnitt von 2 Diagonalen) nur für Vierecke gilt, deren Winkel alle $< 180^0$, und dass bei vier Punkten wie [die Figur sie zeigt], die ein Dreieck, mit dem vierten Pkte inwendig, bilden, nothwendig dieser vierte Pkt die Auflösung gibt? Dann würde sich die Metaphysik davon und warum hier die blinde Rechnung aus den Gleichungen (A) nicht zureicht, leicht aufhellen lassen Oder verlangen Sie



4) dass die Unterscheidung in beiden Fällen



auf eine analytische Bedingung reducirt werde, so würde sich das auch thun lassen, obwohl ich die Entwicklung in diesem Augenblick nicht gegenwärtig habe . . . . .

[6.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 19. April 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 39—40.]

{Ich sehe aus Ihrer Antwort, mein theuerster Freund, mit Beschämung, dass ich mich sehr undeutlich ausgedrückt haben muss. Vor allem bitte ich Sie überzeugt zu seyn, dass es nie meine Absicht gewesen ist, dass Sie sich abquälen sollten, ein Missverständniss, das ich kaum möglich gehalten hätte, wenn ich auch vergessen habe hinzuzufügen, dass meine Bitten nur unter der Voraussetzung gemacht waren, dass Sie sie in einigen müssigen Augenblicken erfüllen konnten.

Es kann jetzt nicht von dem, was ich wünschte, mehr die Rede seyn; es sei mir nur erlaubt historisch zu bemerken, dass ich in Bezug auf Ihren Brief vom 21. März (in dem Sie den Punct, der dem gesuchten Minimum bei einem Viereck *abcd* entspricht, in einen der 3 Durchschnittspuncte der Linien *ab*, *cd*; *ac*, *bd*; *ad*, *bc* legen) diese 3 Puncte aus den Gleichungen zwischen den Cosinussen und Sinussen von w abzuleiten suchte, aber nur, wenn alle inneren Winkel $< 180^0$, den Durchschnittspunct der Diagonalen finden konnte, und daher zu wissen wünschte, wie man diese 3 Puncte durch Rechnung aus den bekannten Gleichungen finden könnte.

Ich wünschte ferner zu wissen, ob sich die gesuchten Coordinaten x, y aus den Gleichungen zwischen den Coordinaten finden lassen, wobei ich schon für das Viereck auf unübersehbare Complication stiess.

Dass aus den Gleichungen für sin und cos der Winkel w mein Schluss mit Nothwendigkeit folge, hatte ich freilich nicht bewiesen, ich vermuthe aber der Beweis wird sich aus dem Umstande, dass die Lage der Linie, von welcher die Winkel w gezählt werden, beliebig ist, herleiten lassen.

Nachdem ich so das, was ich sagen wollte, erklärt habe, bitte ich Sie herzlich, meinen Wunsch als nicht gemacht anzusehen und weiter nicht zu beachten . . . . .}

[7.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 21. April 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 44—45.]

Es scheint, mein theuerster Freund, dass Sie den von mir ungeschickter Weise gebrauchten Ausdruck abquälen härter auslegen als er gemeint war. Ich übernehme gern (wie ich glaube öfters bewiesen zu haben) selbst weitläuftige Auseinandersetzungen, wenn ich weiss, Ihnen damit eine Gefälligkeit zu erweisen. Ich wollte nur sagen, dass ich vorher gewiss zu sein wünschte, welches der dunkle Punkt sei, um nicht zu riskiren, das zu thun, was die Römer hircum mulcere nannten.

In der That bin ich es bei dem fraglichen Gegenstande noch immer nicht. Es lässt sich

1) aus Ihren Gleichungen beweisen, dass **nur** der Durchschnittspunkt zweier Seitenpaare ihnen Genüge leistet.

Es scheint aber nach Ihrem Briefe, dass Sie auf die Entwicklung dieses Beweises, der die Nothwendigkeit zeigt, keinen Werth legen, und in dieser Ungewissheit enthalte ich mich jetzt der Entwickelung.

Dann aber hat auch die analytische Auflösung, den Punkt zu finden, wo zwei durch zwei Paare gegebener Punkte gezogene Linien einander schneiden, gar keine Schwierigkeit. In der That, wenn es die beiden Paare a, b mit a', b' und a'', b'' mit a''', b''' sind, so hat man die beiden Gleichungen

$$x(b'-b)+y(a-a')+a'b-ab'=0$$
$$x(b'''-b'')+y(a''-a''')+a'''b''-a''b'''=0,$$

woraus x und y durch Elimination folgen.

Und ebenso erhält man die beiden andern Durchschnittspunkte . . . . .

BEMERKUNG.

Daß bei einem ebenen Viereck, dessen Winkel kleiner als 180° sind, der Schnittpunkt der Diagonalen den Punkt kleinster Entfernungssumme liefert, hatte bereits J. Fr. A. Fagnano bewiesen: *Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia*, Nova acta eruditorum anni 1775, Lipsiae 1779, S. 281. Die Verallgemeinerung auf n Punkte haben Tédenat und L'Huilier behandelt, Annales de mathématiques pures et appliquées publiées par Gergonne **1**, 1810—11, S. 285 und 291; bei ihnen findet sich auch schon die von Schumacher in dem Briefe [4.] hergeleitete Gleichung (A).

Die Worte: hircum mulcere, deren sich Gauss im ersten Absatz der Briefstelle [7.] bedient, sind eine Anspielung auf den Vers in Vergils *Bucolica*, Ecloga III, 91:

Atque idem iungat vulpes et mulgeat hircos.

Die beiden im dritten Bande des Briefwechsels zwischen Gauss und Schumacher als Nr. 528 und Nr. 529 abgedruckten Briefe (unter [7.] ist der erste Teil von Nr. 528 wiedergegeben), bilden in Wirklichkeit einen einzigen Brief, dem das Datum des 21. April 1836 zukommt; dies geht mit voller Deutlichkeit daraus hervor, daß Schumacher in dem Briefe Nr. 531 den Gaussschen Brief vom 21. April »Ihren vorletzten Brief« nennt (a. a. O. S. 53 und 54), so daß also zwischen Nr. 529 und Nr. 530 kein Brief von Gauss an Schumacher liegt, während Gauss auf Schumachers Brief Nr. 527 vom 19. April nicht vor dem 21. April antworten konnte.

Die hier abgedruckten Briefstellen sind nach den im Gaussarchiv befindlichen Handschriften ohne jede Anderung wiedergegeben.

Stäckel.

[MANNIGFALTIGKEITEN VON n DIMENSIONEN.]

[I.]

ÜBER DIE ERMITTELUNG DES KLEINSTEN WERTHES FÜR DAS MAASS DES ZWANGES.

[A. Ritter, *Ueber das Princip des kleinsten Zwanges*, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1853, S. 20—23.]

[Die Regel, welche die Mathematik für das Aufsuchen der grössten und kleinsten Werthe einer »stetigen« Funktion angiebt, ist bekanntlich die: man variire die Funktion und setze die Coefficienten der von einander unabhängigen Variationen gleich Null; die Auflösung der hierdurch erhaltenen Gleichungen ergiebt die gesuchten Werthe der unabhängigen Veränderlichen. Die Gleichung $dZ = 0$ würde daher unsere Aufgabe sofort zum Abschluss bringen unter der Voraussetzung, dass Z eine stetige Funktion ist; sie ist der Ausdruck für das Lagrangesche Princip, also identisch mit derjenigen, welche aus der Verbindung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten mit dem Dalembertschen Princip sich ergiebt. Sie enthält in der That die allgemeinen Gesetze der Bewegung eines Systems materieller Punkte für alle die Fälle, wo die Bedingungen, denen die Bewegung unterworfen ist, sich durch »Gleichungen« ausdrücken lassen.

Anders verhält es sich indessen, wenn unter den gegebenen äusseren Beschränkungen auch solche vorkommen, welche nur durch »Ungleichungen«, z. B. von der Form

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots) \geqq 0$$

auszudrücken sind. In diesem Falle wird die Funktion Z unstetig, und der Anwendung jener Regel muss dann eine Untersuchung desjenigen Theils ihrer

Werthen-Reihe vorangehen, welcher bei der vorliegenden Frage in Betracht kommt.

Mit Hülfe jeder gegebenen Bedingungs-Gleichung lässt sich Eine der veränderlichen Grössen in der Funktion Z eliminiren. Nennen wir den Inbegriff aller Werthe einer von N veränderlichen Grössen abhängigen Funktion für alle Combinationen dieser Grössen von $-\infty$ bis $+\infty$ einen analytischen Raum von N Dimensionen*), so wird die Berücksichtigung jeder »Gleichung«, die Wirkung haben, dass sie die Anzahl der Dimensionen des analytischen Raumes der Funktion Z um Eine vermindert. Jede »Ungleichung« dagegen beschränkt das Gebiet der Veränderlichkeit, ohne eine Dimension hinwegzunehmen, sie theilt den ganzen analytischen Raum der Funktion in zwei Theile, deren Einer als »möglich«, während der andere als »unmöglich« betrachtet werden soll.

Unsere Aufgabe schreibt nun vor: es soll unter allen »möglichen« Werthen-Combinationen diejenige gesucht werden, welche die Funktion Z zu einem Minimum macht. Unsere nächste Sorge wird daher die sein: die Ausdehnung des »möglichen« Gebietes in dem analytischen Raum jener Funktion kennen zu lernen. Es sei nun durch Berücksichtigung sämmtlicher »Gleichungen« die Anzahl seiner Dimensionen bis auf n vermindert, und die Anzahl der noch zu berücksichtigenden »Ungleichungen« sei $= \mu$; dann wird, wenn wir den ganzen analytischen Raum von n Dimensionen mit $\mathfrak{R}_n$ bezeichnen, die Wirkung der Ungleichungen die sein: dass sie das mögliche Gebiet auf ein begrenztes Stück des Raumes $\mathfrak{R}_n$ einschränkt, und zwar wird dieses Stück, welches wir $\mathfrak{r}_n$ nennen, immer noch einen Raum von n Dimensionen bilden.

Es sind nun zwei Fälle möglich: entweder liegt der Punkt, welcher die gesuchte Werthen-Combination repräsentirt, »innerhalb« des Raumes $\mathfrak{r}_n$, oder er liegt in der Begrenzung desselben. Um uns hierüber Aufschluss zu verschaffen, suchen wir zunächst denjenigen Punkt des Raumes $\mathfrak{R}_n$ auf, welcher das absolute Minimum der Funktion Z repräsentirt, d. h. wir suchen nach der bekannten Regel ihr Minimum, ohne die Ungleichungen zu berücksichtigen. Findet sich dann, dass die Substitution der gefundenen Werthe alle Unglei-

*) Die hierdurch wesentlich erleichterte Ausdrucksweise möge diese Einkleidung entschuldigen.

chungen positiv macht, so ist die Aufgabe gelöst, und es ist so gut, als wären gar keine Ungleichungen vorhanden gewesen.

Im entgegengesetzten Falle ist der Punkt in der Begrenzung des Stückes $\mathfrak{r}_n$ zu suchen, und die anzuwendende Methode wird im Allgemeinen folgende sein. Vorausgesetzt: dass die Ungleichungen von einander unabhängig sind, d. h. dass keine von ihnen in einer oder mehreren der anderen enthalten ist, werden die Grenzen des Stücks $\mathfrak{r}_n$ durch μ Räume von $n-1$ Dimensionen gebildet, und je n von diesen Grenz-Räumen schneiden sich in Einem Punkte; oder — wenn $n > \mu$ — alle Grenz-Räume haben Einen Raum von $n-\mu$ Dimensionen gemeinschaftlich. Der erste Schritt ist nun der: dass wir Einen der Durchschnittspunkte (im ersten Falle) oder Einen Punkt des Durchschnitts-Raums (im letzteren) aufsuchen; dieser Punkt bildet den Ausgangspunkt für unsere Untersuchung. Wir finden ihn, indem wir irgend ein Werthen-System aufsuchen, welches n von den Ungleichungen $=$ Null und die übrigen positiv, oder — wenn $n > \mu$ — welches alle μ Ungleichungen $=$ Null werden lässt. Von diesem Punkte ausgehend untersuchen wir weiter: in welcher Richtung wir von ihm fortschreiten müssen, um den Werth der Funktion Z am schnellsten abnehmen zu lassen, oder auf welche Weise eine gegebene Aenderung von Z durch möglich kleinste Aenderung des Werthen-Systems zu erreichen ist, wobei als Maass der letzteren die Summe der Quadrate der einzelnen Aenderungen betrachtet werden kann. In der gefundenen Richtung lassen wir dann den Punkt sich ändern, bis entweder derjenige Punkt, in welchem die Funktion ein Minimum wird, erreicht ist, oder bis eine der vorher positiven Ungleichungen aufhört erfüllt zu sein, d. h. Null wird. Im ersteren Falle ist die Aufgabe gelöst, im letzteren bildet der gefundene Punkt den Ausgangspunkt für eine ähnliche Untersuchung, welche ihrerseits dann wieder zu einem anderen Punkte führt, der entweder selbst das Minimum repräsentirt, oder wieder als Ausgangspunkt für einen dritten Schritt dient — kurz die ganze Operation wird so lange fortgesetzt, bis man zu einem Werthen-Systeme gelangt, welches die Eigenschaft besitzt, dass jede »mögliche« Aenderung desselben mit einem Grösserwerden der Funktion Z verbunden ist. Die Grenz-Räume, in deren gemeinschaftlichem Durchschnittsraum der endlich gefundene Punkt liegt, repräsentiren die »wirksamen« Ungleichungen, d. h. diejenigen, welche als Gleichungen erfüllt werden.

Die Aufgabe würde daher vollkommen die nämliche gewesen sein, wenn diese wirkenden Ungleichungen von vornherein als Gleichungen, die übrigen Ungleichungen aber gar nicht gegeben wären. Die mögliche Veränderlichkeit der Funktion Z wäre dann schon durch die Natur der Aufgabe auf die richtige Anzahl der »unabhängigen« Veränderlichen beschränkt und innerhalb dieser Beschränkung eine stetige gewesen; und in diesem Falle würde also der Anwendung des LAGRANGEschen Princips oder der hiernach modificirten Gleichung $dZ = 0$ Nichts entgegengestanden haben; während sonst, in der Ungewissheit über die wirkenden Ungleichheiten, oder über die wirklich unabhängigen Veränderlichen, jenes Princip, um allgemein gültig zu sein, nur in der Form $dZ \geqq 0$ ausgesprochen werden dürfte, also in Form einer Ungleichung, eines indirecten Urtheils. Dem Sinne nach würde es in dieser Fassung mit dem GAUSSschen Princip übereinstimmen, ohne jedoch die Eleganz der Form und die unmittelbare Evidenz des letzteren zu erreichen.]

[II.]

BESTIMMUNG DES KLEINSTEN WERTHES DER SUMME

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = R^2$$

FÜR m GEGEBENE UNGLEICHUNGEN $u \geqq 0$.

[Aus der Vorlesung *Über die Methode der kleinsten Quadrate*, Wintersemester 1850/51, nachgeschrieben von AUGUST RITTER.]

[1.]

Die gegebenen Ungleichungen seien linear und ihre Anzahl grösser als die der Variabeln. Für diesen Fall ist das Verfahren folgendes. Wir setzen n von den Ungleichungen gleich 0 und zwar eine solche Combination von n Ungleichungen, bei welcher die übrigen $m-n$ positiv werden, d. h. wir suchen für die Grössen

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

ein System von Werthen

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n,$$

welche n von den Ungleichungen zu 0, die übrigen $m-n$ positiv werden lassen. Von diesem bestimmten Werthen-System gehen wir nun aus und untersuchen zunächst, wie man dasselbe ändern muss, damit die Summe ihrer Quadrate am schnellsten abnehme, oder, was dasselbe bedeutet, wie man eine vorgeschriebene Abnahme jener Summe durch eine möglichst geringe Aenderung des Werthen-Systems erreichen kann. Als Maass der letzteren betrachten wir die Wurzel aus der Summe der Quadrate der einzelnen Aenderungen. Unter allen Combinationen $\delta x_1,\ \delta x_2,\ \ldots,\ \delta x_n$, welche eine vorgeschriebene

Aenderung $-2\lambda_1$ unserer Funktion bewirken, suchen wir also diejenige heraus, bei welcher die Grösse

$$\sqrt{\delta x_1^2+\cdots+\delta x_n^2}$$

den kleinsten Werth annimmt. Um dies analytisch auszudrücken, haben wir die Variation der Grösse R^2 gleich $-2\lambda_1$ zu setzen, nachdem wir darin die Werthe $k_1, \ldots, k_n$ für die Grössen $x_1, \ldots, x_n$ substituirt haben, und dann zu untersuchen, wie unter dieser Bedingung und unter den aus der Variation von

$$u_1=0,\quad u_2=0,\quad \ldots,\quad u_n=0$$

hervorgehenden Bedingungen

$$\delta u_1 \geqq 0,\quad \delta u_2 \geqq 0,\quad \ldots,\quad \delta u_n \geqq 0$$

die Grösse

$$\delta x_1^2+\delta x_2^2+\cdots+\delta x_n^2=R_1^2$$

ein Minimum wird. Wir haben also jetzt in Bezug auf die Grössen $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ genau dieselbe Aufgabe zu lösen, wie vorher in Bezug auf $x_1, \ldots, x_n$, nur dass wir statt wie vorhin n jetzt nur $n-1$ Variabeln haben (denn Eine kann mittelst der Gleichung

$$\delta(R^2)=-2\lambda_1$$

eliminirt werden) und statt der m früheren Ungleichungen nur n. Wenden wir daher dasselbe Verfahren auf diese neue Aufgabe an. —

Wir suchen wieder zuerst eine Combination von Werthen für $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$, welche $n-1$ von den Ungleichungen zu 0 und die letzte positiv macht und die Gleichung

$$\delta(R^2)+2\lambda_1=0$$

[befriedigt]; seien diese Werthe

$$l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n.$$

Von dieser Combination von Werthen ausgehend suchen wir dann die kleinste Aenderung dieses Werthen-Systems, welche eine vorgeschriebene Abnahme der Funktion R_1^2 um $2\lambda_2$ hervorbringt. Die Aenderungen $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ der einzelnen Werthe müssen dabei also folgenden Bedingungen genügen:

$$\delta^2(R^2)=0,\quad \delta(R_1^2)=-2\lambda_2;\quad \delta^2 u_1 \geqq 0,\ \delta^2 u_2 \geqq 0,\ \ldots,\ \delta^2 u_{n-1} \geqq 0,$$

und wie schon bemerkt soll die Summe ihrer Quadrate $\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2=R_2^2$ ein Minimum dabei sein. Dies ist wiederum eine der ursprünglichen völlig analoge Aufgabe; wir haben aber statt der n Variablen jetzt nur $n-2$ (weil zwei von ihnen aus den beiden Gleichungen $[\delta R^2+2\lambda_1=0,\ \delta R_1^2+2\lambda_2=0]$ eliminirt werden können) und statt der m Ungleichungen nur $n-1$.

Die Auflösung dieser dritten Aufgabe führt wieder auf eine ähnliche vierte, diese auf eine fünfte etc., wobei jedesmal die folgende Eine Veränderliche und Eine Ungleichung weniger enthält als die ihr vorhergehende Aufgabe.

Im weiteren Verlauf dieses Verfahrens können nun zwei verschiedene Fälle eintreten: entweder es lässt sich bis zum letzten Schritte, wo man es nur noch mit Einer Veränderlichen und 2 Ungleichungen zu thun hat, ohne Hinderniss verfolgen; oder aber es tritt schon vorher ein solches ein, welches der Fortsetzung des Verfahrens in der bisherigen Weise ein Ende macht.

Bei jeder neuen Aufgabe tritt nämlich, wie wir gesehen haben, die Frage auf: wie man durch eine möglichst geringe Aenderung des vorliegenden Werthen-Systems eine gewisse Abnahme der Function R^2 um 2λ erreichen könne. Es kann nun der Fall eintreten — und darin besteht eben das erwähnte mögliche Hinderniss —, dass eine solche Abnahme der Grösse R^2 überhaupt durch keine Aenderung des Werthen-Systems erreicht werden kann, eben weil sie durch Substitution der betreffenden Werthe schon ihren kleinsten Werth erhalten hat.

In beiden Fällen ist man zu gewissen End-Werthen gelangt, welche der letzten Partial-Aufgabe genügen, und es fragt sich nun, wie man diese Werthe zur Auflösung der Haupt-Aufgabe weiter benutzen kann. Zuvor ist jedoch noch zu bemerken, dass in dem ersten Falle, wo die Natur der Aufgabe es mit sich bringt, dass man das angegebene Verfahren bis zu dem letzten Schritte verfolgen muss, eben in Bezug auf diesen letzten Schritt das Verfahren — wenn auch an sich dasselbe bleibend — doch in seiner Darstellung etwas anders aussehen wird. Bevor man nämlich zur Lösung der letzten Aufgabe schreitet, wo man also $n-1$ Gleichungen und 2 Ungleichungen hat für die Grössen, deren Minimalwerthe man sucht, hat man zu erwägen, dass nunmehr die Aenderung des Werthen-Systems nur noch in einer einzigen Weise geschehen kann, da durch die Aenderung Eines Werthes die aller übrigen schon bedingt ist. Die Frage nach der Art und Weise der Aenderung des Werthen-Systems, wie sie bei allen vorhergehenden Schritten auftrat, ist hier also überflüssig, und es handelt sich hier nur um die Grösse dieser Aenderung, und diese ergiebt sich daraus, dass das zugehörige letzte λ, welches eine Funktion derselben ist, Null werden muss, wenn nicht schon vorher die Aenderung den Punkt erreicht, wo die letzte übriggebliebene Ungleichung aufhört erfüllt zu werden. In beiden Fällen erhält λ einen bestimmten Werth, und die Werthe, welche die vorhergehende Minimal-Gleichung erfüllen, sind demnach gefunden.

Die Benutzung dieser Werthe zur Lösung der Haupt-Aufgabe geschieht nun in folgender Weise. Das Erfülltsein der letzten Minimal-Gleichung hat für die ihr vorhergehende die Bedeutung: dass sie die Art und Weise angiebt, wie man die in der vorhergehenden substituirten bestimmten Werthe verändern muss, um sie am schnellsten abnehmen zu lassen. Um sie nun zu einem wirklichen Minimum zu machen, brauchen wir nur die Werthe wirklich in der angegebenen Weise so weit zu ändern, bis entweder die entsprechende Grösse λ zu 0 wird oder die überzählige positiv gelassene Ungleichheit aufhört erfüllt zu sein. Die hierdurch erhaltenen Werthe geben dann an, in welcher Weise das in der vorhergehenden Minimal-Gleichung substituirte Werthen-System geändert werden muss, um sie am schnellsten abnehmen zu lassen, wodurch man in den Stand gesetzt wird, auch sie zu einem wirklichen Minimum zu machen; und so kann man rückwärtsgehend Eine Minimal-Gleichung nach der andern zu einem wirklichen oder relativen Minimum machen, bis man endlich auch die Haupt-Gleichung

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

zu einem solchen gemacht hat.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn bei zunehmender Aenderung der Werthe $x_1, \ldots, x_n$ die Variation von R^2 Null wird; sie ist dagegen noch nicht erledigt, wenn die Aenderung des Werthen-Systems durch das Nullwerden Einer oder mehrerer der vorhin positiv gelassenen $m-n$ Ungleichungen aufgehalten wird. In diesem Falle ist das ganze bis dahin beschriebene Verfahren noch einmal in Bezug auf die jetzt Null gewordenen Ungleichungen zu wiederholen.

Man sucht wieder die Richtung, in der man das neue Werthen-System ändern muss, um R^2 am schnellsten abnehmen zu lassen, ändert dasselbe dann demgemäss, soweit es die Ungleichungen zulassen, etc. und wiederholt das Verfahren so oft, bis endlich

$$\delta(R^2) \geqq 0$$

wird, in welchem Falle die wirklichen Minimalwerthe der Grössen $x_1, \ldots, x_n$ gefunden sind.

[2.]

Sind n Veränderliche vorhanden, so können nicht mehr als n Bedingungsungleichheiten wirksam sein, und dieselben als Gleichungen betrachtet geben unmittelbar die Minimalwerthe, wenn sie alle wirksam sind.

Nennen wir den analytischen Ort für den Werth der Funktion von n Variabeln: einen Punkt, wenn alle n einen bestimmten Werth haben, eine Linie für $n-1$, eine Fläche für $n-2$, einen Raum für $n-3$ etc., so ist in unserer Aufgabe der Punkt zu suchen, welcher einer bestimmten Combination der n Variabeln entspricht. Der Punkt ist also g e f u n d e n, wenn n Ungleichheiten wirksam sind, er ist auf einer Linie zu suchen, wenn $n-1$ wirksam sind, auf einer Fläche, wenn $n-2$ etc.

Die Funktion, welche ein Minimum werden soll, ist die Summe der Quadrate sämmtlicher Coordinaten oder das Quadrat der Entfernung des gesuchten Punktes vom Ursprung, das Quadrat des radius vector im weiteren Sinn genommen. Sind gar keine Ungleichheiten gegeben, so ist der Ursprung selbst der gesuchte Punkt. Ist Eine wirksame Ungleichheit gegeben, so liegt der Punkt in einem Mannigfaltigen von $n-1$ Dimensionen, und zwar so, dass er dem Ursprung möglichst nahe liegt; für 2 Wirksame in einer Mannigfaltigkeit von $n-2$ Dimensionen etc. Jede hinzukommende wirksame Ungleichheit entfernt den Punkt vom Ursprung und beschränkt seinen Spielraum zugleich um Eine Dimension. Die ganze Schwierigkeit liegt im Aufsuchen der wirksamen Ungleichungen.

[Es soll]

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = \text{Min[imum]}$$

[sein, und] es seien [die Ungleichungen] gegeben:

$$\begin{array}{ll} a_1' \ x_1 + a_2' \ x_2 + \cdots + b' \ = u'; & u' \geqq 0, \\ a_1'' \ x_1 + a_2'' \ x_2 + \cdots + b'' \ = u''; & u'' \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_1^{(m)} x_1 + a_2^{(m)} x_2 + \cdots + b^{(m)} = u^{(m)}; & u^{(m)} \geqq 0, \end{array}$$

wobei wir voraussetzen, dass alle linearen Gleichungen $u', u'', \ldots$ auf die Form gebracht sind, dass die Summe der Quadrate ihrer Coefficienten $= 1$ ist. Dann ist das Verfahren folgendes:

Man sucht zuerst ein System von Werthen der $x_1, x_2, \ldots$, welches n von den Ungleichungen zu 0 macht und die übrigen $m-n$ positiv. Dann bekommt man $x_1, x_2, \ldots$ als Funktionen von $u', \ldots, u^{(n)}$ und zwar, worin letztere $= 0$ gesetzt sind. Substituirt man diese Funktionen in $u^{(n+1)}, \ldots, u^{(m)}$, so hat man

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^{(n+1)} = A_1' \quad u' + A_2' \quad u'' + \cdots + A_n' \quad u^{(n)} + C', \\ u^{(n+2)} = A_1'' \quad u' + A_2'' \quad u'' + \cdots + A_n'' \quad u^{(n)} + C'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^{(m)} \quad = A_1^{(m-n)} u' + A_2^{(m-n)} u'' + \cdots + A_n^{(m-n)} u^{(n)} + C^{(m-n)}, \end{array} \right.$$

worin also, nachdem die Werthe $u', \ldots, u^{(n)}$ gleich 0 gesetzt sind, nur die Constanten $C', \ldots, C^{(m-n)}$ bleiben, welche dann nach der obigen Voraussetzung positive Grössen sein sollen. Diesem Werthen-System entspricht dann ein Punkt, welcher in dem von sämmtlichen Ungleichungen abgegrenzten Spielraume liegt, und zwar in der Begrenzung desselben. Den Ungleichungen genügt er demnach, aber im Allgemeinen noch nicht der Bedingung: dass das Quadrat seines Abstandes vom Ursprung der Coordinaten ein Minimum sei. Es kann vielmehr andere Punkte der Begrenzung geben, welche ebenfalls n von den Ungleichungen gleich 0 und die übrigen positiv machen, dabei aber dem Ursprung näher liegen. Solchen Punkten entsprechen aber Systeme von Werthen der Grössen $x_1, \ldots, x_n$, welche nicht mehr sämmtliche $u', \ldots u^{(n)}$ zu 0 machen; es werden vielmehr einige von ihnen unwirksam d. h. positiv, und an ihrer Stelle ebensoviele der $u^{(n+1)}, \ldots, u^{(m)}$ zu 0 werden.

Um nun von unserem durch die n Gleichungen $[u' = 0, \ldots, u^{(n)} = 0]$ fixirten Ausgangspunkte, den wir als Durchschnittspunkt von n Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen vorstellen, zu solchen näher liegenden Punkten zu gelangen, müssen wir dem Punkte $[x_1, \ldots, x_n]$ eine gewisse Beweglichkeit einräumen, d. h. den Grössen $u', \ldots, u^{(n)}$, deren Funktion seine Lage ist, eine

gewisse Veränderlichkeit von ihrem augenblicklichen Werthe 0 aus nach der positiven Seite hin. Um aber gleich die wirksamste Ortsveränderung mit ihm vorzunehmen, d. h. diejenige, mittelst welcher er sich innerhalb der ihm auferlegten Beschränkungen am schnellsten dem Ursprung der Coordinaten nähert, bilden wir zunächst aus den Formeln $u', u'', \ldots, u^{(n)}$ einen Ausdruck für den radius vector unseres Punktes oder für die Summe

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

und erhalten daraus

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = k_1 + \alpha_1' u' + \alpha_1'' u'' + \cdots + \alpha_1^{(n)} u^{(n)}, \\ x_2 = k_2 + \alpha_2' u' + \alpha_2'' u'' + \cdots + \alpha_2^{(n)} u^{(n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = k_n + \alpha_n' u' + \alpha_n'' u'' + \cdots + \alpha_n^{(n)} u^{(n)}. \end{array} \right.$$

Wir untersuchen jetzt, wie die Summe der Quadrate dieser Ausdrücke:

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

am schnellsten zu verkleinern ist, d. h. welche von den Grössen $u', \ldots, u^{(n)}$ wir veränderlich annehmen müssen, um der Variation

$$\delta(R^2)$$

den grössten negativen Werth zu ertheilen. Stellen wir also in der vollständigen Variation die mit $\delta u', \delta u'', \ldots$ multiplicirten Glieder resp. zusammen, so haben wir nur nach den Factoren derselben zu sehen:

$$\delta(R^2) = A \delta u' + B \delta u'' + \ldots + L \delta u^{(n)}.$$

Hat zum Beispiel der Factor L den grössten negativen Werth, so wissen wir, dass eine Aenderung von $u^{(n)}$ den Punkt am schnellsten dem Coordinaten-Ursprung nähert. Wir geben also der Grösse $u^{(n)}$ einen von 0 verschiedenen Werth und lassen denselben so lange zunehmen, bis in Einer der Gleichungen (1) das Glied $A_n u^{(n)}$ einen ebenso grossen negativen Werth erhält, als das positive Glied C; oder wenn dies nicht der Fall ist, bis der Factor L durch diese Aenderung aufhört, negativ zu sein, in welchem letzterm Falle der gesuchte Punkt gefunden ist. Im ersteren Fall setzt man diejenige der Gleichungen (1), welche 0 wird, an die Stelle von $u^{(n)}$, welche letztere nunmehr als unwirksam wegzustreichen ist. Mit den übrigen $m-1$ Ungleichungen setzt man nun das Verfahren in derselben Weise fort, und zwar so lange, bis in dem Ausdruck $\delta(R^2)$ sämmtliche Coefficienten positiv.

Mittelst der übrig bleibenden Gleichungen kann man dann ebenso viele $x, \ldots$ aus der Minimal-Gleichung eliminiren und dann nach den gewöhnlichen Regeln verfahren. Man sucht ein Werthen-System, welches n von den Ungleichheiten zu 0, die übrigen $m-n$ positiv macht — wir nennen diese Werthe $k_1, k_2, \ldots, k_n$ —, und bestimmt dann durch Variation der Grösse R^2 diejenige Aenderung des Werthen-Systems, welche R^2 am schnellsten vermindert, d. h. die kleinste Aenderung des Werthen-Systems, welche eine bestimmte Abnahme der Grösse R^2 um λ bewirkt. Als Maass der Aenderung des Werthen-Systems nehmen wir dabei

$$\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \cdots}.$$

Wir haben also in dem Ausdruck

$$2\{x_1 \delta x_1 + x_2 \delta x_2 + \cdots\}$$

für $x_1, x_2, \ldots$ die Werthe $k_1, k_2, \ldots$ zu setzen und ihn dann $= -[2]\lambda_1$ zu setzen:

$$(3) \qquad k_1 \delta x_1 + k_2 \delta x_2 + \cdots = -\lambda_1.$$

Ferner soll sein

$$\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \cdots = \text{Min[imum]}.$$

Um die Aenderung des Werthen-Systems $\delta x_1, \delta x_2, \ldots$ zu finden, welche diese Quadratsumme am schnellsten vermindert, oder die kleinste Aenderung derselben, welche eine bestimmte Verminderung λ_2 bewirkt, haben wir wieder

$$\delta x_1 \delta^2 x_1 + \delta x_2 \delta^2 x_2 + \cdots = -\lambda_2$$

und

$$\delta^2 x_1^2 + \delta^2 x_2^2 + \cdots = \text{Min[imum]}.$$

Ferner haben wir durch Variation der Gleichung (3):

$$k_1 \delta^2 x_1 + k_2 \delta^2 x_2 + \cdots = 0.$$

Wenn wir dann in der Gleichung (3) für $\delta x_1, \ldots$ ihre Werthe in $\delta u_1, \ldots$

ausgedrückt setzen:

$$-\lambda_1 = K_1 \delta u_1 + K_2 \delta u_2 + \cdots + K_n \delta u_n,$$

so wird der grösste positive Coefficient K_n entscheiden, welche Grösse u_n durch ihre Aenderung zur Verminderung der ursprünglichen Function am meisten beiträgt. Wir ändern deshalb diese, d. h. wir setzen $u_n > 0$ statt $u_n = 0$, und behalten also noch $n-1$ Gleichungen $u = 0$ übrig, mithin auch

$$\delta u_1 \geqq 0, \quad \delta u_2 \geqq 0, \quad \ldots, \quad \delta u_{n-1} \geqq 0.$$

Bezeichnen wir $\delta^2 x = \delta(\delta x)$ mit ξ, so soll:

$$\xi_1 \delta x_1 + \xi_2 \delta x_2 + \cdots = -\lambda_2;$$
$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots = \text{Min[imum]}$$

[sein].

BEMERKUNG.

Daß GAUSS sich mit »Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen« beschäftigt hat, zeigt eine Andeutung am Schluss der Selbstanzeige der *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda* vom 23. April 1831, Werke II, S. 178, und bestätigt ein Bericht von SARTORIUS V. WALTERSHAUSEN über ein Gespräch mit GAUSS, das zwischen 1847 und 1855 stattgefunden hat. »Wir können uns, sagte er, etwa in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewußt sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken, und er habe, fuhr er scherzend fort, gewisse Probleme hier zur Seite gelegt, die er in einem höhern Zustand später geometrisch zu behandeln gedächte« (GAUSS zum Gedächtnis, Leipzig 1856, S. 81). Daß diese Gedanken auf eine frühe Zeit zurückgehen, wird durch einen Brief WACHTERs an GAUSS vom 12. Dezember 1816 wahrscheinlich gemacht, der eine zwischen beiden Männern im April 1816 stattgehabte Unterhaltung wiederspiegelt. WACHTER schreibt*):

»Vor kurzem suchte ich die Construction des Fundamentalkörpers, (das, was der Würfel für den Raum von 3 Dimensionen) allgemein für einen Raum von beliebig vielen Dimensionen. Ich fand, daß dieses, wofern eine gewisse Schlußart richtig ist, mit der Zahl der rechten Winkel um einen Punkt in der Ebene zusammenhänge, daß nämlich der Raum n Dimensionen haben würde, wenn die Summe der rechten Winkel um einen Punkt herum $= 2^{n-1}$, und daß dann die Zahl der Ecken des Fundamentalkörpers in diesem Raum von n Dimens[ionen] durch 2^n, die Zahl der Begränzungen der ersten Art von der Dimension $(n-1)$ für jede Ecke durch n, und die Zahl derselben, der Gränzkörper von der Dim[ension] $(n-1)$, für den ganzen Körper durch $2n$, die Zahl der Begränzungen[**)] der zweiten Art von der Dim[ension] $(n-2)$ durch $4n$, sein körperlicher Inhalt, wenn die Seite L, durch L^n, und seine Diagonale durch $L\sqrt{n}$ gegeben werde. —

*) Siehe P. STÄCKEL, *F. L. Wachter*, Mathematische Annalen **54**, 1901, S. 49, wo S. 61—69 der ganze Brief veröffentlicht ist. Werke VIII, S. 175 sind nur die auf die anti-Euklidische Geometrie bezüglichen Stellen abgedruckt.

[**) In der Handschrift steht Berührungen.]

Von einer andern Seite läßt sich zeigen: daß **wenn es möglich, daß eine gerade Linie Zweige habe**, sie derselben unendlich viele, und **auch der Raum unendlich viele Dimensionen** haben würde. Auf **gewisse Weise** könnte man sagen, daß auch in Ihrer, der anti-euklideischen Geometrie, der Raum unendlich viele Dimensionen habe, die aber alle wieder im unendlichen liegen. Nämlich es sei BAC ein rechter Winkel, AD die Constante für das rechtwinklichte asymptotische Dreieck, dessen anderer Winkel $= 45^0$; der rechte Winkel BAC werde durch AD halbiert, dann ließe sich dieselbe Construction durch DE, EF u.s.w. an den Punkten D, E, F u.s.w. wiederholen, ohne daß die Linie AC jemals erreicht würde, — und dieses auf analoge Art räumlich gedacht gäbe innerhalb des von drei rechtwinklichten Ebenen begränzten Raumes körperliche Ecken, welche zuerst durch 3 Ebenen von 45^0 Oeffnung begränzt, der Reihe nach durch eben so viel Körper von der Dimension 3, 4, 5 u.s.w. bis ∞, begränzt gedacht werden könnten.«

Auch der Brief von GAUSS an GRASSMANN vom 14. Dezember 1844 (siehe oben S. 436) ist in diesem Zusammenhang zu erwähnen; sagt doch GAUSS darin, dass GRASSMANNS Tendenzen teilweise denjenigen Wegen begegneten, auf denen er selbst nun seit fast einem halben Jahrhundert gewandelt sei, und bezeichnet er als ein Zeugnis für diese Bestrebungen die oben erwähnte Selbstanzeige vom Jahre 1831. Man vgl. hierzu auch noch die Andeutungen im art. 5. der *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* vom Jahre 1849, Werke III, S. 79*).

Eine weitere, ausgiebigere Quelle ist A. RITTER (1826—1908), der von Michaelis 1850 bis 1853 in Göttingen studiert hat und 1853 unter GAUSS mit einer Abhandlung *Ueber das Princip des kleinsten Zwanges* promoviert worden ist. Daß die unter [I.] abgedruckten, den siebenten Abschnitt der Dissertation bildenden Ausführungen auf Anregungen von GAUSS zurückgehen, würde nur den Wert einer Vermutung haben, wenn nicht der auf der Bibliothek der Technischen Hochschule zu Aachen aufbewahrte handschriftliche Nachlaß RITTERS die Ausarbeitung einer Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate enthielte, die dieser im Wintersemester 1850/51 bei GAUSS gehört hat. Den Schluß der Handschrift bildet nämlich die unter [II.] abgedruckte Notiz, die, wie es scheint, den Inhalt der beiden letzten Vortragsstunden wiedergibt.

Ob RITTER die Gedanken von GAUSS überall richtig aufgefasst hat, muß dahingestellt bleiben; immerhin macht gerade die Stelle, die sich auf Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen bezieht, einen Vertrauen erweckenden Eindruck. Die Behandlung des Minimumsproblems ist in verschiedener Beziehung unvollständig. Es genüge hier zu bemerken, daß man nicht immer Punkte finden kann, für die n der Ausdrücke $u_1, \ldots, u_m$ verschwinden, während gleichzeitig die andern $m-n$ positiv ausfallen. Zum Beispiel verschwinden für $n = 3$ und $m = 8$, wenn es sich um das Innere eines von acht Dreiecken begrenzten Achtflächers handelt, in jeder der sechs Ecken vier der Ausdrücke $u_1, \ldots, u_8$. Im übrigen vergleiche man den in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatz »GAUSS als Geometer«.

STÄCKEL.

*) Die von GAUSS begehrte Lehre von den »nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größencombinationen« hat RIEMANN in dem Habilitationsvortrag vom 10. Juni 1854 begründet, RIEMANNS Werke, 2. Aufl., S. 272. Bei der Entwicklung des Begriffs mehrfach ausgedehnter Größen verweist RIEMANN (a. a. O. S. 273 ausdrücklich auf die oben im Text genannten Veröffentlichungen von GAUSS.

NACHBILDUNG DES TAGEBUCHS (NOTIZENJOURNALS)

VON

C. F. GAUSS

1796 MART. 30 — 1814 JUL. 9

Von einer andern
habe, sie dersel
würde. Auf gew
Raum unendlich
ein rechter Winke
$= 45°$; der recht
DE, EF u.s.w. a
— und dieses au
gränzten Raumes
nach durch eben

Auch der
Zusammenhang
Wegen begegnete
er als ein Zeugn
hierzu auch noch
Jahre 1849, Werk

Eine weite
Göttingen studier
Zwanges promovi
bildenden Ausfüh
haben, wenn nich
liche Nachlaß Rit
die dieser im Wi
die unter [II.] a
wiedergibt.

Ob Ritte
immerhin macht
trauen erweckend
unvollständig. E
Ausdrücke $u_1, \ldots,$
verschwinden für
Achtflächers hand
den in der zweite

*) Die von
nationen« hat Rie
S. 272. Bei der E
ausdrücklich auf

1796.

* Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes &c. Mart. 30. Brunsv.

* Numerorum primorum non omnes numeros infra ipsos residua quadratica esse posse demonstratione munitum.

Apr. 8. Ibid.

Formula pro cosinibus angulorum peripheriae submultiplorum expressionem generaliorem non admittent nisi in duab. periodos

Apr. 12. Ibid

Amplificatio normae residuorum ad residua et mensuras non indivisibiles.

Apr. 29 Gotting.

Numeri cuiusvis divisibilitas varia in binos primos

Mai. 14. Gott

Coefficientes aequationum per radicum potestatum summas facile dantur Mai. 23 Gott.

Transformatio seriei $1-2+8-64\ldots$ in fractionem continuam
$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{32}{1+\cfrac{56}{1+128}}}}}}}$$

Mai. 24 G.

$$1-1+1.3-1.3.7+1.3.7.15 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{12}{1+28}}}}}$$

et alia

Von ei
habe,
würde.
Raum
ein rech
= 45°;
DE, E.
— und
gränzte
nach d
Zusamm
Wegen
er als
hierzu
Jahre
Götting
Zwange
bildend
haben,
liche N
die dies
die unt
wiederg
immerhi
trauen
unvollst
Ausdrü
verschw
Achtfläc
den in
nationen
S. 272.
ausdrüc

Scalam simplicem in ~~fractionibus~~ seriebus recurrentibus esse functionem similem secundi ordinis scalarum componentium. 26 Mai.

Comparationes infinitorum in numeris primis & factoribus. ~~pro~~ cont. 31 M. G.

Scala ubi seriei termini sunt producta vel adeo functiones quaecunque terminorum quotcunque seriei. 3 Jun. G.

Formula pro summa factorum numeri cuiusvis compositi f. gen. $\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ 5 Jun. G.

Periodorum minima omnibus ~~infra~~ modulum numeris pro elevatis sumtis fact. gen. $(n+a)(n-a)^{a-1}$. 5 Jun. G

Leges distributionis — 19 Jun. G

Factorum summa in infinitum = $\frac{\pi\pi}{6}$ sum. Num. 20 Jun. G.

Coepi de multiplicatoribus (in formis divisorum formarum qu.) connexis cogitare — 22 Jun. G

* Nova theorematis aurei demonstratio a priori toto coelo diversa eaque nanquam elegans 27 Jun.

Quaeque partitio numeri a in treis dat formam in trin. π separabilitatem. 3 Jul.

* ~~[illegible]~~

** ΕΥΡΗΚΑ num. = Δ + Δ + Δ. 10 Jul. Gött.

Determinatio Eulerianae formarum in quibus numeri compositi plus una vice continentur

Principia componendi scalas serierum variatim recurrentium 16 Jul. Gött.

Methodus Euleriana pro demonstranda relatione inter ~~producta~~ rectangula sub segmentis rectarum sese secantium in sectionibus conicis ad omnes curvas applicata 31 Jul. G.

* $a^{2^n+1}(p) \equiv 1$ semper solvere in potestati Aug 3 Gött

Rationem theorematis aurei quomodo ~~altius~~ profundius perscrutari oporteat perspexi et ad hoc accingor supra ~~primas~~ quadraticas aequationes egredi conatus. Inventio formularum quae semper per ~~pr~~ primos: $\sqrt[n]{1}$ (numerice) dividi possunt. Aug. 13 Brl.

Obiter $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ evolutum — 14

Rei summa iamiam intellecta. Restat ut singula muniantur — 16. G.

$(a^p) \equiv (a)$ mod. p., a radix aequationis cuiuscunque quomodocunque irrationalis. 18.

Si P, Q functiones alg. quantitatis indeterminatae fuerint inc. datur $tP + uQ = 1$ ~~tam~~ in algebra tum speciata tum numerica. 19 G

Exprimuntur potestates radicum aequationis propositae aggregatae per coefficientes aequationis lege perquam simplici. (cum aliis quibusdam geometr. in Exerc.) 21. G

Summatio Seriei infinitae $1 + \frac{x^n}{1\ldots n} + \frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}$ &c eod.

* Minutiis quibusdam exceptis feliciter scopum attigi scil. si $p^n \equiv 1 \pmod{\pi}$ fore $x^n - 1$ compositum e factoribus gradum n non excedentibus ~~unde~~ & proin aequationem conditionalem fore solubilem. Sept. 2 G; unde duas theor. aurei demonstr. deduxi.

Numerus fractionum inaequalium quarum denominatores certum limitem non superat ad numerum fractionum omnium quarum num. aut denom. sint diversi infra eundem limitem in infinitum $6 : \pi\pi$ Sept. 6.

Von ei
habe,
würde.
Raum
ein rech
= 45°;
DE, E
— und
gränzter
nach du

Zusamn
Wegen
er als
hierzu
Jahre

Götting
Zwange
bildend
haben,
liche N
die dies
die unt
wiederg

immerhi
trauen
unvollst
Ausdrüc
verschw
Achtfläc
den in

nationen
S. 272.
ausdrück

Si $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$ fuit $\Pi : x = z$ ... $x = \Phi : z$ erit

$\Phi : z = z - \frac{1}{8} z^4 + \frac{1}{112} z^7 - \frac{1}{1792} z^{10} + \frac{3\ z^{13}}{1792 \cdot 52} - \frac{3 \cdot 185\ z^{16}}{1792 \cdot 52 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}$ Sept. 9

Si $\phi \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = x$ erit:

$\phi : z = z - \frac{1\ z^n}{2 \cdot n+1} A + \frac{n-1\ z^n}{4 \cdot 2n+1} B - \frac{nn-n-1}{2 \cdot n+1 \cdot 3n+1} C \ldots$

Methodus facilis inveniendi aeq: in y ex aeq. in x si ponatur $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots = y$ Sept. 14

fractiones quarum denominator continet quantitates irrationales (quomodocunque?) in alias transmutare ... ab hoc incommodo liberatas ... Sept. 16

Coefficientes aeq: auxiliariae eliminationi inservientis ex radicibus aeq: datae determinati eod.

Nova methodus qua resolutionem aequationum universalem inaestigare forsitanque invenire licebit Sept. 17.

Scil. transm: aeq. in aliam cuius radices $\alpha\varrho' + \beta\varrho'' + \gamma\varrho''' + \ldots$ ubi $\sqrt[n]{1} = \alpha, \beta \ldots$ & n gradum aequationis designans

In mentem mihi venit radices aeq. $x^n - 1$ ex aeq., communes radices habentibus eliceret et ideo pleramque tantum aequationes coefficientibus rationalibus gaudentes ~~...~~ resolvi oportet Sept. 29 Brunsv.

Aequatio tertii gradus est haec: $x^3 + xx - nx + \frac{nn-3n-1-mp}{3} = 0$ ubi $3n+1 = p$ & m numerus resid. cubicorum fui ... excipientes. unde sequitur si $n = 3k$ fore $m+1 = 3l$ si $n = 3k \pm 1$ fore $m = 3l$. Octob. 1 Brunsv.

sive $z^3 - 3pz + (pp - 8p - 9pm) = 0$

Hoc m penitus determinatum $m+1$ semper $\square + 3\square$

Aequationis $x^p - 1 = 0$ radices per integros multiplicati aggregati cifram producere non possunt! ☉ Oct: 9. Brunsv.

Quaedam sese obtulerunt de multiplicatoribus aequationum ut certi termini eiiciantur, quae praeclara pollicentur ☉ Oct 16. Brunsv.

Lex detecta, quando ea demonstrata erit systema ad perfectionem evexerimus Oct 18 Brunsv.

* Vicimus GEGAN Oct. 21. Brunsv.

formula interpolationis elegans Nov. 25 G

Incepi Expressionem $1 - \frac{1}{2^\omega} + \frac{1}{3^\omega} \ldots$ in seriem transmutare secundum potestates ipsius ω progredientem. Nov. 26. G

Formulae trigonometricae per series expressae ... per Dec.

Differentiationes generalissimae Dec. 23.

Curvam parabolicam quadrare suscepi, cuius puncta quotcunque dantur Dec. 26

Demonstrationem genuinam theorematis Lagrangiani detexi Dec. 27

$$\left.\begin{array}{l}\int \sqrt{\sin x} \cdot dx = 2\int \frac{yy\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}} \\ \int \sqrt{\tan x}\, dx = 2\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}} \\ \int \sqrt{\frac{1}{\sin x}}\, dx = 2\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\end{array}\right\} yy = \frac{\sin}{\cos} x$$ 1797 Jan. 7.

Von ei
habe,
würde.
Raum
ein rech
$= 45°$
DE, E
— und
gränzte
nach d
Zusamr
Wegen
er als
hierzu
Jahre
Götting
Zwange
bildend
haben,
liche N
die die
die unt
wiederg
immerhi
trauen
unvollst
Ausdrü
verschw
Achtflä
den in
nationen
S. 272.
ausdrüc

Curvam ~~elasticam~~ lemniscatam a $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$) pendentem perscrutari coepi Jan. 8

Criterii Euleriani rationem sponte detexi Jan. 10.

Integrale complet. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)}}$ ad circ. quadr. reducere commentus sum. Jan. 12.

Methodus facilis $\int \frac{x^m dx}{1+x^n}$ determinandi

Supplementum eximium ad polygonorum descriptionem invenimus. Sc. si a, b, c, d sint factores primi numeri p−1 tunc ad polygoni p laterum nihil aliud requiri quam ut 1° arcus indefinitus in a, b, c, d.. partes secetur 2° ut polygona a, b, c, d.. laterum describantur. Gotting. Januar. 19

Theoremata de Resid. $-1, \pm 2$ simili methodo ~~pertractanda~~ demonstrata et cetera ..... Gott. Febr. 4.

Forma $aa+bb+cc-bc-ac-ab$ quoad divisores attinet convenit cum hac $aa+3bb$ Febr. 6

Amplificatio prop. penult. p. 1. scilicet

$$1 - a + a^3 - a^6 + a^{10} \ldots = \cfrac{1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a^2-a}{1+\cfrac{a^3}{1+\cfrac{a^4-a^2}{1+\cfrac{a^5}{1+ \&c.}}}}}} \quad \text{Febr. 16}$$

Unde facile omnes series, ubi exp. sec. ser. ordinis constituunt transformantur

Formularum integralium formae $\int e^{-t^a}dt$ et $\int \frac{du}{\sqrt[c]{1+u^\gamma}}$) inter se comparationem institui. Mrz 2.

Cur ~~[illegible]~~ ad aequationem perveniatur gradus nn dividendo curvam lemniscatam in n partes .... Mrt. 19

, A potestatibus integr. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ $(0-1)$ pendet $\Sigma \left(\frac{mm+6mn+nn}{(mm+nn)^4}\right)^k$

Lemniscata geometrice in quinque partes dividitur Mrt. 21.

Inter multa alia Curvam Lemniscatam spectantia observavi Numeratorem sinus decompositi, arcus duplicis esse = 2 Num. Denom. sinus × Num. Den. Cos. arcus simpl. Denominatorem vero = Num. sin.^{4} + Denom. sin.^{4}. Iam si Denominator hic pro arcu π' ponatur θ erit Denom. sin. arcus $k\pi'$, $= \theta^{kk}$ Iam $\theta = 4{,}810480$ cuius numeri logarithmus hyperbolicus est $=$ $1{,}570796$ i.e. $= \frac{1}{2}\pi$ quod maxime est memorabile cuiusque proprietatis demonstratio gravissima analyseos incrementa ~~pr~~ pollicetur. Mart. 29.

Von e
habe,
würde.
Raum
ein rec
$= 45°$
DE, E
— und
gränzte
nach d

Zusam
Wegen
er als
hierzu
Jahre

Götting
Zwang
bildend
haben,
liche N
die die
die un
wieder

immerh
trauen
unvolls
Ausdrü
verschw
Achtflä
den in

natione
S. 272.
ausdrüc

Demonstrationes elegantiores pro nexu divisorum formae $\square - A$, $+1$ cum -1, ± 2 inveni. Iun 17 Gotting.

Deductionem secundam theoriae polygonorum excolui. Iul. 17 Gotting.

Per utramque methodum monstrari potest puras tantum aequationes solvi oportere.

Quod Oct. 1. pro ind. invenimus demonstratione munivimus. Iul. 20.

Casum singularem solutionis congruentiae $x^n - 1 \equiv 0$ (scilicet quando ~~et~~ congr. aux: radices aequales habet) qui tam diu nos vexavit felicissimo successu vicimus, ex congruentiarum solutione si modulus est numeri primi potestas. Iul. 21.

Si $x^{m+n} + ax^{m+n-1} + bx^{m+n-2} \dots + n$ (A) per $x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \dots + m$ (B) dividitur atque omnes coefficientes in (A) a, b, c &c sint numeri integri

~~[illegible] esse [illegible]~~
~~[illegible] si omnes [illegible] esse~~

coefficientes vero omnes in B rationales etiam hi omnes erunt integri ultimusque m ultimi n divisor. Iul. 23.

Forsan omnia producta

ex $(a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 \dots)$ etc.

designante ρ omnes radices prim. ~~aeq.~~ $x^n = 1$

ad formam $(x - \rho y)(x - \rho^2 y) \dots$

reduci potest. Est enim

$$(a + b\rho + c\rho^2) \times (a + b\rho^2 + c\rho) = (a-b)^2 + (a-b)(a-c) + (c-a)^2$$

$$(a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3) \times (a + b\rho^3 + c\rho^2 + d\rho)$$

$$= (a-c)^2 + (b-d)^2$$

$$(a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 + e\rho^4 + f\rho^5) \times \dots = (a+b-d-e)^2$$
$$- (a+b-d-e)(a-c-d-f)$$
$$+ (a-c-d-f)^2$$

Vide Febr. 4.

$$= (a+b-d-e)^2$$
$$+ (a+b-d-e)(b+c-e-f)$$
$$+ (b+c-e-f)^2$$

Falsum est
hinc enim sequeretur omnes numeros e forma $\Pi(x - \rho y)$ conflatos productum in eadem forma esse quod facile refutatur

* Radicum aeq. $x^n = 1$ periodi plures eandem summam habere non posse demonstratum. Iul. 27, 97

Von
habe
würde.
Raum
ein rec
= 45°
DE, F
— und
gränzte
nach d

Zusam
Wegen
er als
hierzu
Jahre

Götting
Zwang
bildend
haben,
liche N
die die
die un
wiederg

immerh
trauen
unvolls
Ausdrü
verschw
Achtflä
den in

natione
S. 272.
ausdrüc

Plani possibilitatem demonstravi. Jul. 28 Gotting.

Quod Jul. 27 inscripsi. errorem involuit: sed eo felicius nunc rem exhausimus, quoniam probare possumus nullum periodum esse posse numerum ~~[illegible]~~ rationalem. Aug. 1

Quomodo periodorum numerum duplicando signa adornare oporteat

Functionum primarum multitudinem per analysin simplicissimam erui. Aug. 26

Theorema. Si $a + bx + cxx + \text{etc.} \ldots + mx^n$ est functio secundum modulum p. prima erit

$\frac{p}{a} - b + cx + a$

$d + x + x^p + x^{pp} + \text{etc.}\; x^{p^{n-1}}$ per hanc functionem secundum hunc modulum divisibilis Aug. 30

etc. etc.

Demonstratum, usque ad multo maiora perductum, Modulorum multiplicium strata Aug. 31.

Aug. 1. generalius ad quosvis modulos adaptatum Sept. 4.

Principium detexi, ad quod congruentiarum secundum modulos multiplices resolutio ad congruentias secundum modulum linearem reducitur Sept. 9

Aequationes habere radices imaginarias methodo genuina demonstratum. Bruns. Oct.

Prom. in dissert. pecul. Mense Aug. 1799.

Nova theorematis Pythagorici dem. Bruns. Oct. 16

Seriei $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 \ldots$ summam consideravimus invenimusque eam $= 0$ si

$2\sqrt{x} + \frac{3}{16}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{21}{1024}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ $= (K+\frac{1}{4})\pi$

Brunsv. Oct. 16.

Positis $x\,l(1+x) = \varphi' x$; $l(1+\varphi' x) = \varphi'' x$; $l(1+\varphi'' x) = \varphi''' x$ etc. erit $\varphi^i x = \sqrt{\frac{2}{i}} +$ Brunsv. Nov.

Classes dari in quavis ordine. hincque numerorum in ternos quadratos discerptibilitas ad theoriam solidam reducta Brunsv. Apr.

Demonstrationem genuinam compositionis virium eruimus Götting. Mai.

Theorema la Grange de transformatione functionum ad functiones quotcunque variabilium extendi. Gotting. Mai.

Series $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 + \&c. = \frac{4}{\pi}$ hinc ~~[illegible]~~ simul cum theoria generali serierum involventium ~~angulos~~ sinus et cosinus angulorum arithmetice crescentium

Calculus probabilitatis contra La Place defensus Gott. Iun. 17.

Von
habe
würde
Raum
ein re
= 45
DE, I
— un
gränzt
nach

Zusam
Weger
er als
hierzu
Jahre

Götting
Zwang
bildenc
haben,
liche N
die die
die ur
wieder

immerh
trauen
unvolls
Ausdrü
verschv
Achtflä
den in

nation
S. 272.
ausdrü

Problema eliminationis ita solutum ut nihil amplius desiderari possit. Gott. Iun.

Varia elegantiuscula circa attractionem sphaerae

$$1 + \frac{1}{9}\,\frac{1.3}{4.4} + \frac{1}{81}\,\frac{1.3.5.7}{4.4.8.8} + \frac{1}{729}\,\frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12} \dots =$$

$$1,02220\ldots = \frac{1,3110\ldots}{3,1415\ldots}\sqrt{5}$$

Iul

$$\sin.\ \text{lemnisc.} = 0,9550068\ \sin. - 0,0430495\ \sin 3 + 0,0018605\ \sin 5 - 0,0000803\ \sin 7$$

$$\sin^2 \text{lemn.} = 0.4569472 = \frac{\pi}{\varpi\varpi}\ \cos.$$

$$\text{Arc. sin. lemn. } \sin\varphi = \frac{\varpi}{\pi}\varphi + \left(\frac{\varpi}{\pi} - \frac{2}{\varpi}\right)\sin 2\varphi + \frac{n}{2}\frac{\varpi}{\pi} - \frac{n}{\varpi}\ \sin 4\varphi$$

$$\sin^2 = 0,4775031\ldots \sin - + 0,03$$

De lemniscata, elegantissima omnia expectationes superantia acquisivimus et quidem per methodos quae campum prorsus novum nobis aperiunt. Gott. Iul.

* Solutio problematis ballistici Gott. Iul.

\# Cometarum theoriam perfectiorem reddidi Gott. Iul.

Novus in analysi campus se nobis aperuit, scilicet investigatio functionum etc.

\# Formas superiores considerare coepimus Br. Febr. 14.

Formulas novas exactas pro parallaxi eruimus ——— Br. Apr. 8

\# Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $= \frac{\pi}{\varpi}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur Br. Mai 30.

\# In principiis Geometriae egregios progressus fecimus Br. Sept.

\# Circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus. Br. Novemb.

Von
habe
würde
Raum
ein re
= 45
DE, I
— un
gränzt
nach

Zusam
Weger
er als
hierzu
Jahre

Göttin
Zwang
bilden
haben,
liche N
die di
die ur
wieder

immerh
trauen
unvoll
Ausdr
versch
Achtfl
den in

nation
S. 272.
ausdrü

\# ~~Ae~~ Medium arithmetico-geometricum tamquam
quotientem duarum functionum transcendentium
repraesentabilem esse iam pridem inveneramus
nunc alteram harum functionum ad quantitates
integrales reducibilem esse deteximus. Helmst.
Dec. 14

\# Medium Arithmetico-Geometricum ipsum est quanti-
tas integralis ~~Dem~~ Dec. 23

\# In theoria formarum ternariarum formas reductas
assignare contigit 1800. Febr. 13

Seriem $a\cos A + a'\cos(A+\varphi) + a''\cos(A+2\varphi) + \text{etc.}$
ad limitem convergit, si a, a', a'' etc. constituant pro-
gressionem sine mutatione signi ad 0 continuo con-
vergentem. Demonstratum Brunov. Apr. 27.

\# Theoriam quantitatum transcendentium

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha xx)(1-\beta xx)}}$$

ad summam universalitatem perduximus
Brunov. Mai. 6.

\# Incrementum ingens huius theoriae Brunov. Maj. 22
invenire contigit, per quod simul omnia praecedentia
nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcher-
rime nectuntur infinitesque augentur.

Iisdem diebus circa (Mai. 16) problema chronologicum
de festo paschali ~~in~~ eleganter resolvimus.
Promulg. in Monatl. Corresp. 1800 Aug.

\# Numeratorem et denominatorem sinus lemni-
scatici (universalissime accepti) ad quantitates integra-
les reducere contigit; simul omnium functionum
lemniscaticarum quae excogitari possunt evolutiones
in series infinitas ex principiis genuinis hausimus.
inventum pulcherrimum idque nullique praecedentium inferius

Praeterea iisdem diebus principia deteximus secundum
quae series arithmetico-geometricae interpolari debeat, ita
ut ~~omnes~~ terminos in progressione data ad ~~term~~ indicem quem-
cunque rationalem pertinentes per aequationes algebraicas
exhibere iam in potestate sit. Mai ult. Jun 2. 3.

\# Inter duos numeros datos ~~duo~~ semper dantur
infiniti multi termini medii tum arithmetico geometrici tum
harmonico geometrici, quorum nexum mutuum ex asse
perspiciendi felicitas nobis est facta. Junio 3. Brunov.

\# Theoriam nostram iam ad transcendentes
Ellipticas immediate applicavimus Junio 5

\# Rectificatio Ellipseos tribus Modis di Jun. 10
versis absoluta.

\# Calculum Numerico Exponentialem omnino no-
vum invenimus - - - - Jun 12

Problema e calculo probabilitatis circa fractiones continuas olim
frustra tentatum solvimus Oct. 25

Von
habe
würde
Raum
ein re
= 4
DE.
— un
gränzt
nach

Zusan
Wege
er als
hierzu
Jahre

Göttin
Zwan
bilden
haben
liche I
die di
die u
wieder

immer
trauen
unvoll
Ausdr
versch
Achtfl
den in

nation
S. 272.
ausdrü

Nov. 30, Felix fuit dies quo multitudinem classium formarum binar. per triplicem methodum assignare largitum est nobis puta 1) per prod. infin. 2) per aggregatum infinitum 3) per aggregatum finitum cotangentium seu logarithmor. sinuum. Brun.

\# Dec. 3. Methodum quartam et omnium simplicissimam deteximus pro dett. negativis ex sola multitud. numer. ξ, ξ' etc. petitam si $Ax+\xi, Ax+\xi'$ etc. sunt formae lineares divisor. ips. $\square+D$. Ibid.

\# Impossibile esse, ut sectio circuli ad aequationes inferiores quam theoria nostra suggerit reducatur demonstratum. Brunsv. Apr. 6

Iisdem diebus Pascha Iudaeorum per methodum novam determinare docuimus (Apr. 1).

* Methodus quinta theorema fundamentale demonstrandi se obtulit adiumento theorematis elegantissimi theoriae sectionis circuli puta

$$\Sigma \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big|\frac{nn}{a}P = \begin{matrix}+\sqrt{a}\\ +\sqrt{a}\end{matrix}\Big|\begin{matrix}0\\ +\sqrt{a}\end{matrix}\Big|\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\Big|\begin{matrix}+\sqrt{a}\\ 0\end{matrix}$$

prout $a \equiv 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \pmod 4$ | substituendo pro n omnes numeros a 0 usque ad $a-1$

Brunsv. Mai. medio

\# Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi. Brunsv. Sept. m.

\# Theoriam motus Lunae aggressi sumus Aug.

Formulas permultas novas in Astronomia theorica utilissimas eruimus 1801 Mense Octobr

Annis insequentibus 1802. 1803. 1804 occupationes astronomicae maximam otii partem abstulerunt, calculi imprimis circa planetarum novorum theoriam instituti. Unde evenit, quod hisce annis catalogus hicce neglectus est. ~~Multa dies Curam~~ Dies itaque, quibus aliquid ad matheseos incrementa conferre datum est memoriae exciderunt. —

\# Demonstratio theorematis venustissimi supra 1801 Mai. commemorati quam per 4 annos et ultra omni contentione quaesiveramus tandem perfecimus. Comment. rec. I 1805. Aug 30.

Theoriam interpolationis ulterius excoluimus 1805 Novbr.

\# Methodum, ex duobus locis heliocentricis corporis circa solem moventis eiusdem ~~orbitam~~ elementa determinandi novam perfectissimam deteximus 1806. Januar.

\# Methodum e tribus planetae locis geocentricis eius orbitam determinandi ad summum perfectionis gradum evveximus 1806. Mai.

\# Methodus nova ellipsin et hyperbolam ad parabolam reducendi 1806 April.

\# Eodem circiter tempore resolutionem functionis $\frac{x^l-1}{x-1}$ in factores quatuor absolvimus.

\# Methodus nova e quatuor planetae locis geocentricis, quorum duo extremi sunt incompleti eius orbitam determinandi 1807 Jan. 21.

\# Theoria Residuorum cubicorum et biquadraticorum incepta 1807 Febr. 15 ulterius exculta et completa reddita Febr. 17. Demonstratione adhuc eget:

* Demonstratio huius theoriae per methodum elegantissimam inventa ita ut penitus perfecta sit nihilque amplius desideretur. 1807 Febr 22
Huic simul residua et non residua quadratica egregie illustrantur.

Theoremata, quae theoriae praecedenti incrementa maximi pretii adiungunt, demonstratione eleganti munita {scilicet pro quibusnam radicibus primitivis statuere oporteat ipsum b positivum per quamcunque aequationum, $aa + 27bb = 4p$; $aa + 4bb = p$} febr 24.

* ~~Demonstratio~~ omnino nova theorematis fundamentalis principiis omnino elementaribus innixam deteximus Maii 6.

Theoria divisionis in periodos tres (art. 358) ad principia longe simpliciora reducta 1808. May 10

Aequationem $X - 1 = 0$, quae continet omnes radices primitivas aequationis $x^n - 1 = 0$, in factores cum coëfficientibus rationalibus discerpi non posse, demonstr. pro valoribus compositis ipsius n 1808 Jun. 12

* Theoriam formarum cubicarum, solutionem aequ $x^3 + ny^3 + nnz^3 - 3nxyz = 1$ aggressi sumus Dec. 23

* Theorema de residuis cubicis 3 per methodum specialem eleganter demonstratum ~~per~~ per considerationem valorum $\frac{x+1}{x}$ ubi semper habent $a, a\varepsilon, a\varepsilon\varepsilon$ exceptis duobus quidem $\varepsilon, \varepsilon\varepsilon$ hi vero sunt $\frac{1}{\varepsilon-1} = \frac{2\varepsilon+1}{3}$, $\frac{1}{\varepsilon\varepsilon-1} = \frac{\varepsilon-1}{3}$ adeoque productum $\equiv \frac{1}{3}$ 1809 Jan 6

Series ad Media arithmetico-geometrica pertinentes fusius evolutae 1809 Jun 20

* Quinquesectionem pro mediis arithm: Geom. absol. 1809 Jun 29

Catalogum praecedentem per fata iniqua iterum interruptum initio anni 1812 resumimus. In mense Nov. 1811 contigerat demonstrationem theorematis fundamentalis in doctrina aequationum pure analyticam completam reddere; sed quum nihil chartis servatum fuerit, pars quaedam essentialis e memoria penitus exciderat. Hanc per satis longum temporis intervallum frustra quaesitam tandem feliciter redinvenimus 1812 febr. 29

Theoriam Attractionis Sphaeroidis Elliptici in puncta extra solidum sita prorsus novam invenimus Seeberg. 1812. Sept. 26

Etiam partes reliquas eiusdem theoriae per methodum novam mirae simplicitatis absolvimus 1812 Oct. 15 Gott.

Fundamentum theoriae residuorum biquadraticorum ~~per~~ generalis, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quaesitum tandem feliciter deteximus eodem die quo filius nobis natus est. 1813 Oct. 23 Gott.

Subtilissimum hoc est omnium eorum quae unquam perfecimus. Vix itaque operae pretium est, his intermiscere mentionem quarundam simplificationum ad calculum orbitarum parabolicarum pertinentium.

Observatio per inductionem facta gravissima theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens. Puta si $a + bi$ est numerus primus $a - 1 + bi$ per $2 + 2i$ divisibilis, multitudo omnium solutionum congruentiae $1 \equiv xx + yy + xxyy \pmod{a + bi}$, inclusis $x = \infty, y = \pm i$, $x = \pm i, y = \infty$ fit $= (a-1)^2 + bb$ 1814 Jul 9.

ABDRUCK DES TAGEBUCHS
(NOTIZENJOURNALS)
MIT ERLÄUTERUNGEN.

VORBEMERKUNGEN ZUM ERSTEN ABDRUCK DES TAGEBUCHS

in der »*Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*«, Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens, Berlin 1901; siehe auch Mathematische Annalen **57**, 1903, S. 1—34 *).

Die tagebuchartigen Aufzeichnungen von GAUSS füllen in der Urschrift 19 kleine Oktavseiten in einem unscheinbaren Heftchen, welches sich seit GAUSS' Tode in der Familie weiter vererbt hat und uns durch Vermittlung von Herrn STÄCKEL im Sommer 1898 seitens des Enkels von GAUSS, des Herrn C. GAUSS in Hameln, zur Benutzung bei der Weiterführung der Gesamtausgabe von GAUSS' Werken zur Verfügung gestellt wurde. Herr C. GAUSS hat später — unter Wahrung seines persönlichen Eigentumsrechts — in dankenswerter Weise verfügt, daß besagtes Heftchen dauernd im hiesigen GAUSSarchiv aufbewahrt werden soll.

Die außerordentliche wissenschaftliche Bedeutung dieses *Tagebuchs* oder *Notizenjournals* (wie es GAUSS selbst gelegentlich in einem Brief an OLBERS nennt; siehe Nr. 88 des folgenden Abdrucks) ist bereits im zweiten derjenigen Berichte, welche der K. Gesellschaft der Wissenschaften alljährlich über den Stand der Herausgabe von GAUSS' Werken erstattet werden, unter Mitteilung einiger charakteristischer Stellen hervorgehoben worden **), — sie tritt nicht minder in dem Bande VIII von GAUSS' Werken hervor, wo wir vielfach auf die Angaben des *Tagebuchs* verweisen konnten. Nach dem von der K. Gesellschaft angenommenen allgemeinen Plane für die Weiterführung der Gesamtausgabe soll dasselbe in Band X der Werke ausführlich publiziert und bearbeitet werden. Aber es ist bis dahin noch ein langer Weg, dessen Ende noch nicht mit Sicherheit abzusehen sein dürfte. Ich glaube also auf allgemeine Zustimmung rechnen zu dürfen, wenn ich das *Tagebuch* hier vorab als Beitrag zu der von der K. Gesellschaft der Wissenschaften anläßlich ihres 150jährigen Bestehens geplanten historischen Festschrift in vorläufiger Form veröffentliche. Die endgültige Bearbeitung in Band X wird damit nichts an ihrem Werte verlieren, sie wird aber dadurch, daß das Material schon jetzt zur öffentlichen Kenntnis und öffentlichen Diskussion kommt, erleichtert werden.

Zwei Dinge dürfen ja wohl gleich hier vorab hervorgehoben werden, welche dem *Tagebuch* einen unvergleichlichen biographischen Wert verleihen.

---

*) Diese Vorbemerkungen werden hier mit Weglassung einiger nur für den ersten Abdruck in Betracht kommender Stellen und mit einigen durch die gegenwärtigen Verhältnisse bedingten Abänderungen wiedergegeben.

) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1899, Geschäftliche Mitteilungen, Heft 1. (Abgedruckt Mathematische Annalen **53, 1899, S. 45—48.)

Das eine ist der unmittelbare, sozusagen persönliche Einblick, den wir gerade für die entscheidenden Jahre 1796—1800 in den wissenschaftlichen Werdegang des jungen GAUSS gewinnen*). Da ist noch keine Spur der abgeschlossenen Reife des wissenschaftlichen Urteils oder auch der vornehmen Zurückhaltung, wie sie GAUSS in späteren Lebensjahren zu eigen waren. Wichtiges und Unwichtiges wechselt ab; neben Entdeckungen von der größten Tragweite finden sich Trivialitäten, wie sie der Anfänger zu überwinden hat; überall aber tritt der persönliche Anteil, den GAUSS an seinen Mühen und Erfolgen nimmt, in überquellender Weise zu Tage. Und dabei immer wieder die Eigenart seines mathematischen Genius: induktiv, an der Hand von Zahlenrechnungen, die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen.

Das andere ist die Verknüpfung der einzelnen wissenschaftlichen Fortschritte, die GAUSS gelingen, und die genaue Datierung bestimmter Entdeckungen. Man kann allerdings den Wunsch nicht unterdrücken, GAUSS möchte bei seinen Aufzeichnungen mit größerer Konsequenz vorgegangen sein und sich außerdem nicht so vielfach mit bloßen Andeutungen begnügt haben. Manche Frage nach der Entstehung von GAUSS' späteren mathematischen Auffassungen und Ideen wird sich auch mit Hilfe des *Tagebuches* niemals beantworten lassen und andererseits wird uns manche Tagebuchnotiz dauernd unverständlich bleiben. Trotzdem ist der Fortschritt, der sich aus einem genauen Vergleich der einzelnen Nummern des *Tagebuches* mit den erhaltenen Stücken des Nachlasses ergeben muß, zweifellos ein sehr bedeutender. Ich habe bei dieser ersten Publikation als meine Hauptaufgabe angesehen, in dieser Hinsicht die Wege nur erst zu ebnen, und bin nur nach einer Seite weiter gegangen, indem ich nämlich das Material aus den Jahren 1797—1800 heranzog, welches sich auf die *Theorie der elliptischen Funktionen* bezieht. Das Hauptergebnis meiner betreffenden Studien findet sich in einer Bemerkung zu Nr. 111 des *Tagebuches:* die Fachgenossen müssen entscheiden, wie weit sie dasselbe als gesicherten Besitz anerkennen und dementsprechend die bisher geltende Auffassung abändern wollen.

Hinsichtlich der Art der im folgenden gegebenen Veröffentlichung und der hinzugefügten Bemerkungen mögen übrigens folgende Angaben vorausgeschickt werden.

Zunächst, was die Notizen des *Tagebuches* selbst betrifft, so habe ich mich bei deren Wiedergabe keineswegs genau an die Äußerlichkeiten des Originals gebunden. Vor allen Dingen habe ich im Interesse der Übersichtlichkeit und der bequemeren Bezugnahme die sämtlichen Sätze durchlaufend numeriert. Die Angaben über Ort und Zeit wurden möglichst gleichförmig gestaltet, und auch dem Text, wo es wünschenswert schien, hin und wieder ein Wort oder eine Silbe (die dann in eckige Klammern eingeschlossen sind) hinzugefügt. Leicht erkennbare sprachliche Unrichtigkeiten wurden verbessert. Die Formeln wurden herausgehoben und in moderner Weise gedruckt. Einer Anzahl Nummern hat GAUSS gewisse Marken vorangestellt, um deren Wichtigkeit hervorzuheben, ferner ist eine große Zahl der Notizen, insbesondere derjenigen zahlentheoretischen Inhalts, im Original mit roter Tinte unterstrichen; im Druck wurden sowohl die Marken wie auch die Unterstreichungen weggelassen. Es scheint, als seien die Unterstreichungen erst hinterher angebracht und darauf bezüglich, ob GAUSS die einzelne Notiz bei späteren Arbeiten benutzt hat oder nicht.

Dann aber, was die Bemerkungen angeht, die den einzelnen Nummern zugesetzt sind, so haben sie vorwiegend den Zweck, den aktenmäßigen Wert des mitgeteilten Materials zu erhöhen. Hierzu schien vor allen Dingen der Hinweis auf parallellaufende Zeitangaben in den bisherigen Veröffentlichungen von GAUSS' Werken oder Briefen erwünscht. Besonderen Dank habe ich Herrn DEDEKIND für einige erläuternde Bemerkungen zu sagen, die mit seiner Namensunterschrift den in Betracht kommenden Nummern hinzugefügt worden sind. Hierüber hinaus habe ich verschiedentlich auf den handschriftlichen Nachlaß von GAUSS, wie

*) GAUSS ist am 30. April 1777 geboren, war also, als er das *Tagebuch* am 30. März 1796 begann, noch nicht ganz 19 Jahre alt.

er zur Zeit im hiesigen GAUSSarchiv aufbewahrt wird, Bezug genommen und insbesondere bei denjenigen Nummern, die sich auf die elliptischen Funktionen in den Jahren 1797—1800 beziehen, solche Stücke des Nachlasses abgedruckt, die nun erst an der Hand des *Tagebuchs* ihre volle Bedeutung gewinnen. Für die Jahre 1796, 1797 ist in dieser Hinsicht ein mit Schreibpapier durchschossenes Exemplar des Lehrbuchs von LEISTE: *Die Arithmetik und Algebra,* Wolfenbüttel 1790, (114 pag.) besonders wertvoll, in dem GAUSS damals auf dessen freie Seiten eine Reihe der interessantesten Eintragungen gemacht hat (wie er ja überhaupt in die Bücher seiner Bibliothek vielfach Notizen eintrug, gleich als wollte er jedes leere Blatt ausnutzen, das Dauer zu besitzen schien)*). Für die Jahre 1798—1800 kommen dann neben losen Zetteln, die sich zufällig erhalten haben, insbesondere die sogenannten Schedae in Betracht, d. h. Notizheftchen, welche in ungeregelter Aufeinanderfolge Zahlenrechnungen und Bemerkungen der verschiedensten Art, vielfach auch die Ansätze zu zusammenhängenden Darstellungen enthalten; das Nähere hierüber ist unten bei den einzelnen Nummern mitgeteilt. —

Ich habe noch nach verschiedenen Seiten hin für vielfache Unterstützung, die ich bei meiner Arbeit fand, Dank auszusprechen. Herr BRENDEL dahier (der jetzige Generalredaktor der GAUSSausgabe) hat mich durch seine große Kenntnis des Nachlasses weitgehend unterstützt. Nicht minder bin ich den Bearbeitern von Band VIII der GAUSSschen Werke, den Herren BÖRSCH, FRICKE und STÄCKEL, sowie den Herren FUETER und SOMMER dahier für vielfache Bemerkungen und sonstige Hilfe verpflichtet. Der Mitwirkung von Herrn DEDEKIND gedachte ich schon oben; sie erstreckte sich schließlich auf fast alle Teile des *Tagebuchs* und ist mir besonders wertvoll gewesen.

Göttingen, den 3. Juli 1901.

F. KLEIN.

VORBEMERKUNG ZU DEM HIER FOLGENDEN ABDRUCK DES TAGEBUCHS.

Die Auffindung des *Tagebuchs* durch STÄCKEL und seine erste Herausgabe durch KLEIN bedeuten die Eröffnung eines neuen Abschnitts in der GAUSSforschung, die durch diesen Stoff neubelebt und in die Bahnen zuverlässiger geschichtlicher Untersuchung geleitet worden ist. Die nachfolgende vom Unterzeichneten besorgte Ausgabe schließt sich eng an die erste an, nur konnten die Bemerkungen vermehrt und ausführlicher gestaltet werden; namentlich bei solchen Aufzeichnungen, die sonst nirgendwo berührte Gegenstände betreffen, haben sie oft die Form von kleinen Abhandlungen angenommen. Die einzelnen Bemerkungen sind mit den Namen ihrer Urheber unterzeichnet; der bei vielen Nummern diesen Namen vorangestellte Name KLEINs soll darauf hinweisen, daß die betreffende Aufzeichnung in der ersten Ausgabe erläutert war, und daß der wesentliche Inhalt jener Erläuterung in die jetzt vorliegende Bemerkung eingearbeitet worden ist. Die meisten Nummern sind jetzt verständlich; die wenigen, die keine Bemerkungen zeigen, haben sich nicht aufklären lassen.

Dem Abdruck des *Tagebuchs* in den Werken ist eine photographische Nachbildung dieser wichtigen Urkunde vorangestellt worden, die alle Einzelheiten der Handschrift deutlich hervortreten läßt. Wir machen besonders auf die in den *Vorbemerkungen* von KLEIN erwähnten Marken und auf die roten Unterstreichungen aufmerksam, die in der Nachbildung im Halbton wiedergegeben sind.

SCHLESINGER.

*) Die Notizen aus LEISTE werden in der Folge so zitiert, daß jedesmal die Druckseite angegeben wird, neben der sie sich in dem durchschossenen Exemplare befinden.

ABDRUCK DES TAGEBUCHS (NOTIZENJOURNALS) MIT ERLÄUTERUNGEN.

[1.]

Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.

[1796] Mart. 30. Brunsv[igae]

Das gleiche Datum Werke I, S. 476 (handschriftliche Bemerkung zum art. 365. der *Disquis. Arithm.*). Vergl. die oben S. 3 abgedruckte Anzeige im Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung Nr. 66 vom 1. Juni 1796. Zur Geschichte der Entdeckung vergl. den oben S. 121 abgedruckten Brief an GERLING vom 6. Januar 1819, ferner zwei Stellen aus Briefen von W. BOLYAI, die nach dem Abdruck in dem *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai*, herausgegeben von P. STÄCKEL und F. SCHMIDT, Leipzig 1899, S. 144 und 152 hier wiedergegeben seien. Am 12. April 1855 schreibt BOLYAI an den Wiener Astronomen KREIL »und (im *Disquis. Arithm.* pag. 662) $\cos\frac{P}{17} = \cdots$ war noch vor 1797 erfunden, weil er es bei mir dann an einem Abende in Göttingen sagte« und am 13. Juli 1855 an W. SARTORIUS V. WALTERSHAUSEN: »... nur einmal sah ich an ihm eine mäßige Freude, wo er die kleine Tafel, auf welcher er das 17eck *Disquis. Arithm.* p. 662 berechnet hat, zum Andenken mir gab, und [die] ich nun als etwas interessantes [nach Göttingen] hinschicke«.

Auf S. 77 der 1801 begonnenen Scheda Af hat GAUSS die folgende Zusammenstellung für ihn wichtiger Daten eingetragen:

1.	Jan.	1801	⚳ entdeckt
19.	Febr.	1803	⚴ wiedergefunden
28.	März	1802	⚴ entdeckt
30.	März	1796	Construction des 17 Ecks
30.	April	1777	∗
7.	Dec.	1801	⚳ wiedergefunden

Es bedeutet hier ⚳ Ceres, ⚴ Pallas.

KLEIN. SCHLESINGER.

[2.]

Numerorum primorum non omnes numeros infra ipsos residua quadratica esse posse demonstratione munitum.

[1796] Apr. 8. Ibid. [Brunsvigae]

Die Zeitangabe stimmt mit einer Werke I, S. 475 wiedergegebenen handschriftlichen Bemerkung von GAUSS überein, wo die Worte des art. 130. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 98, 99) »Postquam rigorose demonstravimus, quemvis numerum primum formae $4n+1$, et positive et negative acceptum, alicuius numeri primi ipso minoris non-residuum esse ...« mit folgender Bemerkung begleitet werden: »hanc demonstrationem deteximus 1796 Apr. 8.« Im Anschluß an diesen Satz gibt GAUSS im art. 131. der *Disquisitiones arithmeticae* den ersten seiner sechs Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, bezüglich dessen es Werke I, S. 475 weiter heißt: »Theorema fundamentale per inductionem detectum 1795 Martio. Demonstratio prima, quae in hac sectione traditur, inventa 1796 Apr.«. Der Wortlaut der Tagebuchnotiz Nr. 2 stimmt aber nicht mit dem Satze des art. 130. sondern mit dem sehr viel einfacheren des art. 96. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 74) überein. GAUSS muß also entweder die Beweise beider Sätze am 8. April 1796 gefunden haben, oder die Tagebuchnotiz ist verschrieben und sollte lauten: Numeros primos non omnium numerorum infra ipsos etc. Das letztere ist darum anzunehmen, weil der im Texte der Tagebuchnotiz angezeigte Beweis dafür, daß quadratische Reste einer Primzahl nicht alle unter ihr liegenden Zahlen sein können, GAUSS sicher schon bekannt war, als er (März 1795) das Fundamentaltheorem durch Induktion fand, während er den Beweis des im art. 130. enthaltenen Satzes, daß wenigstens eine Primzahl $p' < p = 4n+1$ vorhanden sei, von der p Nichtrest ist, wie Werke II, S. 4 (1808) berichtet wird, ein ganzes Jahr lang (nämlich März 1795 bis April 1796) trotz angestrengtester Arbeit nicht zu zwingen vermochte.

KLEIN. BACHMANN.

[3.]

Formulae pro cosinibus angulorum peripheriae submultiplorum expressionem generaliorem non admittent nisi in duab[us] periodis.

[1796] Apr. 12. Ibid. [Brunsvigae]

[4.]

Amplificatio normae residuorum ad residua et mensuras non indivisibiles.

[1796] Apr. 29. Gotting[ae]

Diese Notiz bezieht sich auf das verallgemeinerte quadratische Reziprozitätsgesetz, das GAUSS später im art. 133. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 101, entwickelt hat; wegen des Datums vergl. die Bemerkung zu diesem Artikel, Werke I, S. 476.

KLEIN. BACHMANN.

[5.]

Numeri cuiusvis divisibilitas varia in binos primos.

[1796] Mai. 14. Gott[ingae]

Es ist hier offenbar der Satz gemeint, daß jede gerade Zahl als die Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann. Man bezeichnet diesen empirischen Satz gemeinhin als GOLDBACHschen, unter Berufung auf die Briefe GOLDBACHS und EULERS vom 7. und 30. Juni 1742 *). Anscheinend geht diese Bezeichnung auf eine Notiz in den Nouvelles Annales de Mathématiques **14**, 1855, S. 117 zurück, die von dem damaligen Herausgeber TERQUEM herrührt **). Im **18.** Bande (1859) derselben Zeitschrift, S. 2 des Bulletin de Bibliographie etc., bemerkt TERQUEM jedoch, daß sich der gedachte Satz auf S. 379 der 3. Ausgabe von E. WARINGS *Meditationes algebraicae* ***) findet, wo es heißt: »Omnis par numerus constat e duobus primis numeris et omnis impar numerus vel est primus numerus, vel constat e tribus primis numeris etc.« †).

STÄCKEL. SCHLESINGER.

[6.]

Coefficientes aequationum per radicum potestates additas facile dantur.

[1796] Mai. 23. Gott[ingae]

Hierzu, wie auch zu der Nr. 28 vom 21. August 1796, vergl. man die oben S. 127, 128 abgedruckte Aufzeichnung aus LEISTE.

KLEIN.

[7.]

Transformatio seriei

$$1-2+8-64\ \ldots$$

in fractionem continuam:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{32}{1+\cfrac{56}{1+128\ldots}}}}}}}$$

*) Siehe P. H. FUSS, *Correspondance mathématique et physique etc.* I, St. Petersburg 1843, S. 127 und 135.

**) S. 293 desselben Bandes findet sich eine *Note sur le théorème de Goldbach* von DESBOVES.

***) Editio tertia recensita et aucta, Cantabrigiae 1782. Die erste Ausgabe war 1770 erschienen.

†) Vergl. auch die Aufsätze von CATALAN und von ENESTRÖM, Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matem. e fisiche, pubbl. da B. BONCOMPAGNI **18**, 1885, S. 467, 468.

$$1-1+1.3-1.3.7+1.3.7.15+\cdots$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{12}{1+28\ldots}}}}}$$

et aliae.

[1796] Mai. 24. G[ottingae]

In sein Exemplar von LAMBERTS *Tafeln* hat GAUSS die Umformung der divergenten Reihe

$$(1)\qquad 1-mx+m.\overline{m+n}\,xx-m.\overline{m+n}.\overline{m+2n}\,x^3+\text{ etc. in inf.}$$

n den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{nx}{1+\cfrac{(m+n)x}{1+\text{etc.}}}}}$$

eingetragen, die EULER zuerst in seiner Abhandlung *De seriebus divergentibus*, Novi Comment. Acad. Petrop. **5** (1754/55) 1760, S. 205, siehe besonders S. 232, als Verallgemeinerung der analogen Umformung der Reihe

$$(1a)\qquad 1-1x+1.2x^2-1.2.3x^3+1.2.3.4x^4-\cdots\text{ in inf.}$$

behandelt hatte *). Den EULERschen Gedanken der Umformung einer divergenten Reihe in einen Kettenbruch wendet GAUSS in unserer Tagebuchaufzeichnung auf zwei Beispiele an. Bei beiden erweist sich aber nicht nur die Reihe, sondern auch der Kettenbruch als divergent. Auf das erste Beispiel kommen wir in der Bemerkung zu der Aufzeichnung Nr. 58 vom 16. Februar 1797 zurück, in Bezug auf das zweite Beispiel ist folgendes zu bemerken.

An der erwähnten Stelle von GAUSS' Exemplar der LAMBERTschen Tafeln findet sich auch die Umformung:

$$(2)\qquad x-axx+abx^3-abcx^4+\text{etc.}$$

$$=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{a}+\cfrac{1}{\cfrac{a}{b-a}\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{(b-a)^2}{ab(c-b)}+\cfrac{1}{\cfrac{ab(c-b)^2\frac{1}{x}}{(b-a)\left\{cd(b-a)-bc(c-a)+ab(c-b)\right\}}+\text{etc.}}}}}}$$

*) EULER ist später auf jene Reihe (1) in einer besondern Abhandlung Nova Acta Acad. Petrop. **2** (1784) 1788, S. 36 zurückgekommen. Auf die »Summation« der Reihe (1a) für $x=1$ bezieht sich die oben S. 382 abgedruckte Aufzeichnung von GAUSS, vergl. die zugehörige Bemerkung S. 385. Die Umformung der Reihe (1) in den Kettenbruch gibt GAUSS auch im art. 14. der *Disquisitiones circa seriem*, 1812, Werke III, S. 188, Gl. [36].

Mit Hilfe dieser Formel kann für

$$a = 2^1 - 1,\quad b = 2^2 - 1,\quad c = 2^3 - 1,\quad \ldots$$

das Beispiel unserer Tagebuchaufzeichnung gerechnet werden. Setzt man allgemein

$$(3)\qquad c_0 x - c_1 x^2 + c_2 x^3 - c_3 x^4 + \cdots \text{ in inf.}$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{a_1}{x} + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{a_3}{x} + \cfrac{1}{a_4 + \text{etc.}}}}} \qquad = \cfrac{b_0}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{b_2}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{b_3}{1 + \cfrac{b_4}{\cfrac{1}{x} + \text{etc.}}}}}}$$

so ist

$$(4)\qquad b_0 = c_0 = \frac{1}{a_1},\quad b_1 = \frac{1}{a_1 a_2},\quad b_2 = \frac{1}{a_2 a_3},\quad \ldots,\quad b_m = \frac{1}{a_m a_{m+1}},\quad \ldots$$

und zur Bestimmung der $a_2, a_3, \ldots$ dienen die bekannten Formeln *)

$$(5)\qquad a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}},\quad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo A_0, B_0 gleich 1 ist und für $n \geqq 1$ die Determinantendarstellungen

$$(6)\qquad A_n = |c_{i+k-2}|,\quad B_n = |c_{i+k-1}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten. Für das Gausssche Beispiel, d. h. für

$$(7)\qquad c_0 = 1,\quad c_k = 1(2-1)(2^2-1)\ldots(2^k-1) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

findet man **) die Werte

$$(8)\qquad a_{2n} = \frac{1}{2^n - 1},\quad a_{2n+1} = \frac{1}{2^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

also in Übereinstimmung mit den Angaben von Gauss:

$$b_0 = 1,\quad b_1 = 1,\quad b_2 = 2,\quad b_3 = 6,\quad b_4 = 12,\quad b_5 = 28$$

und allgemein

$$b_{2n} = 2^{2n} - 2^n,\quad b_{2n+1} = 2^n(2^{n+1} - 1).$$

*) Siehe z. B. T.-J. Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **8**, 1894, Abhandlung J., S. 26.

**) Die Berechnung der Determinanten A_n, B_n gestaltet sich am einfachsten, wenn man beachtet, daß für die Determinanten

$$(\nu, n) = |c_{\nu+i+k-2}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

die Rekursionsformel

$$(\nu, n) = c_\nu \,.\, c_{n-1}\, 2^{(n-1)\nu + \frac{1}{2}n(n-1)} (\nu + 1, n - 1)$$

gilt, aus der sich sofort

$$(\nu, n) = c_\nu c_{\nu+1} \ldots c_{\nu+n-1} c_{n-1} c_{n-2} \ldots c_1 \,.\, 2^{\frac{1}{2}n(n-1)(n+\nu-1) - \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n}$$

ergibt. Man hat dann

$$A_n = (0, n),\quad B_n = (1, n).$$

Aus der Konvergenz der mit den Werten (8) gebildeten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ folgt nach M. A. Stern *) die Divergenz des mit eben diesen Werten gebildeten Kettenbruchs für jeden Wert von $z = \frac{1}{x}$. Für $z = 1$ ergibt sich das Gausssche Beispiel. Da die a_k positiv sind, so ist auf den divergenten Kettenbruch die Theorie von Stieltjes **) anwendbar.

Schlesinger.

[8.]

Scalam simplicem in seriebus variatim recurrentibus esse functionem similem secundi ordinis scalarum componentium.

[1796] 26. Mai.

Bedeutet $G(x)$ eine ganze rationale Funktion von x von $(n-1)$-tem oder niedrigerem Grade und entwickelt man

$$\frac{G(x)}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_n x^n}$$

in die unendliche Reihe $s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \cdots$, so ist

$$s_{n+t} = a_1 s_{n+t-1} + a_2 s_{n+t-2} + \cdots + a_n s_t \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots).$$

Eine solche Reihe nennt A. de Moivre (*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Londini 1730, S. 27, siehe auch schon Philosophical Transactions, London 1722, S. 162) rekurrent und bezeichnet die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als Index oder Scala relationis ***). Sowohl hier als auch in den Aufzeichnungen Nr. 10 und Nr. 20, die sich auf denselben Gegenstand beziehen, denkt sich Gauss anscheinend den Nenner in Faktoren zerlegt und die zum Nenner gehörige einfache Skala aus den zu den Faktoren gehörigen Skalen komponiert. Hier in der Nr. 8, wo von einer Funktion zweiten Grades die Rede ist, hat er vermutlich die Zerlegung des Nenners in zwei Faktoren im Auge, wogegen sich die Nr. 20 auf den Fall von drei und mehr Faktoren beziehen könnte. Die Zerlegung des Nenners in ein Produkt von Faktoren ersten Grades und die Entwicklung der reziproken Werte dieser Faktoren in geometrische Reihen kommt im art. 1. der aus dem Nachlaß herausgegebenen *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (Werke III, S. 265) vor. Ein Beispiel einer rekurrenten Reihe für $n = 2$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ findet sich im art. 4. des nachgelassenen Bruchstücks *Grundbegriffe der Lehre von den Reihen* (oben S. 393).

Klein. Loewy.

[9.]

Comparationes infinitorum in numeris primis et factoribus cont[entorum].

[1796] 31. Mai. G[ottingae]

Diese Aufzeichnung, sowie die Nr. 13 vom 19. Juni 1796 beziehen sich wohl auf die oben S. 11, 12 abgedruckten Eintragungen in Schulzes *Tafeln*, die vom Mai 1796 datiert sind.

Bachmann.

*) Siehe Stern, *Über die Kennzeichen der Convergenz eines Kettenbruchs*, Crelles Journal für Mathem. **37**, 1848, S. 255, besonders S. 260.

**) Siehe a. a. O. S. 36 ff.

***) Vergl. auch die Kapitel IV, XIII und XVII von Eulers *Introductio in analysin infinitorum* I,

[10.]

Scala ubi seriei termini sunt producta vel adeo functiones quaecunque terminorum quotcunque serierum.

[1796] 3. Iun. G[ottingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 8.

[11.]

Formula pro summa factorum numeri cuiusvis compositi:

$$\text{f[actum] gener[ale] } \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

[1796] 5. Iun. G[ottingae]

Diese Notiz spricht den Satz aus, daß wenn eine Zahl N in Primzahlpotenzen zerlegt gleich Πa^n ist, die Summe der Teiler von N durch das Produkt (factum)

$$\Pi \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

dargestellt wird.

BACHMANN.

[12.]

Periodorum summa omnibus infra modulum numeris pro elementis sumtis:

$$\text{fact[um] gen[erale] } ((n+1)a-na)a^{n-1}$$

[1796] 5. Iun. G[ottingae]

Der Ausdruck Periode hat hier sicher die gleiche Bedeutung wie in den *Disquisitiones arithmeticae*, art. 46, Werke I, S. 39. Ist N teilerfremd zu p und d der Exponent, zu dem N modulo p gehört oder allgemeiner, für den

$$N^d \equiv 1 \pmod{p}$$

wird, so nennt dort GAUSS die Potenzen

$$1, N, N^2, \ldots, N^{d-1}$$

oder ihre Reste modulo p eine Periode. Die Wendung »omnibus infra modulum numeris pro elementis sumtis« zeigt, daß in unserer Aufzeichnung der Modulus p als Primzahl gedacht ist. Nun ist für die Summe aller dieser Perioden, auch wenn ihre einzelnen Glieder durch die Reste nach dem Modul p ersetzt werden, ein dem angedeuteten Produkte ähnlicher Ausdruck nicht vorhanden. Würde unter Periode nur die Anzahl ihrer Glieder verstanden, so wäre die periodorum summa, da $\varphi(d)$ Zahlen zum Exponenten d gehören, die auf alle Teiler d von $p-1$ bezogene Summe $\sum d.\varphi(d)$, für die man, wenn in Primfaktoren zerlegt

$$p-1 = \Pi a^n$$

Lausannae 1748, wo MOIVRE angeführt und die Bezeichnung scala gebraucht wird, sowie desselben Verfassers *Institutiones calculi differentialis* I, 1755, § 46, L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 10, S. 45.

gedacht wird, den Ausdruck

$$\Pi \frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$$

erhält. Zieht man nur die voneinander verschiedenen Perioden in Betracht, so ergibt sich (siehe die vorhergehende Nr. 11)

$$\sum d = \Pi \frac{a^{n+1}-1}{a-1};$$

beides stimmt nicht. Nimmt man aber den Ausdruck Summa im Sinne von Gesamtheit oder Anzahl, so besagte unsere Notiz nichts anderes als den Satz (*Disquis. arithm.* art. 39., Werke I, S. 31)

$$\sum \varphi(d) = p-1 = \Pi a^n,$$

was, wenn die Formel von GAUSS richtig geschrieben ist, mit ihr übereinstimmen würde; doch wäre dann die dem Faktor des Produkts gegebene Form sehr wunderlich.

Wahrscheinlich liegt aber hier ein Schreibfehler vor und der Faktor soll

$$((n+1)a-n)a^{n-1}$$

lauten. Bildet man nämlich für alle Reste modulo p oder, was auf dasselbe hinauskommt, für alle Exponenten $k = 1, 2, \ldots, p-1$ und für eine primitive Wurzel g von p die Potenzen

$$1, g^k, g^{2k}, \ldots, g^{(p-2)k},$$

so erscheint für die $\varphi(d)$ Werte von k, die teilerfremd sind zu dem Teiler d von $p-1$, je eine d-gliedrige Periode $\delta = \frac{p-1}{d}$ mal, und man erhält so eine Summa — im Sinne von Gesamtheit oder Anzahl — von

$$\sum_{d\delta=p-1} \varphi(d).\delta$$

Perioden. Hier ist aber

$$\sum_{d\delta=p-1} \varphi(d).\delta = (p-1)\Pi\left(1+\frac{a-1}{a}+\frac{a(a-1)}{a^2}+\cdots+\frac{a^{n-1}(a-1)}{a^n}\right) = \Pi a^n.\Pi\left(1+n\frac{a-1}{a}\right)$$
$$= \Pi((n+1)a-n)a^{n-1}.$$

BACHMANN.

[13.]

Leges distributionis.

[1796] 19. Iun. G[ottingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 9.

[14.]

Factorum Summae in Infinito $= \frac{\pi\pi}{6}\cdot$Sum[mam] Num[erorum].

[1796] 20. Iun. G[ottingae]

Vergl. die Notiz Nr. 31 vom 6. September 1796 und die oben S. 14 abgedruckte Aufzeichnung aus den *Exercitationes Mathematicae* sowie die zugehörigen Bemerkungen oben S. 17, 18.

KLEIN. BACHMANN.

[15.]

Coepi de multiplicatoribus (in formis divisorum form[aru]m qu[adraticarum]) connexis cogitare.

[1796] 22. Iun. G[ottingae]

Vergl. Werke I, S. 476, wo zur Überschrift der Sectio quinta der *Disquisitiones arithmeticae* »de formis aequationibusque indeterminatis secundi gradus« vermerkt ist: Inde a Iun. 22. 1796. Bezüglich der Begriffe »Multiplicatores connexi« und »Forma divisorum« vergl. die oben S. 80 abgedruckte Aufzeichnung, wo im ersten Satze von Formen der Divisoren und im art. 1. von verbundenen, im art. 4. von zusammenhängenden Multiplikatoren die Rede ist, sowie die zugehörigen Bemerkungen S. 83.

KLEIN. BACHMANN.

[16.]

Nova theorematis aurei demonstratio a priori toto coelo diversa eaque haud parum elegans.

[1796] 27. Iun.

Vergl. Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 262. der *Disquisitiones arithmeticae*, wo indes als Datum für die Auffindung dieses zweiten Beweises des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, in Übereinstimmung mit GAUSS' eigener Notiz in seinem Handexemplar der *Disquisitiones arithmeticae*, 1796, Juli 27. angegeben ist. Aus der Reihenfolge der Nummern 15, 16, 17 des *Tagebuchs* ergibt sich aber, daß Juli ein Schreibfehler ist. Wegen der Bezeichnung des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste als »theorema aureum« vergl. den Artikel **17** des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 44, 45.

KLEIN. BACHMANN.

[17.]

Quaeque partitio numeri a in tria $\square$ dat formam in tria $\square$ separabilem.

[1796] 3. Iul.

Man vergl. zu dieser und zu der folgenden Nr. 18 die oben S. 78 abgedruckte Aufzeichnung aus dem LEISTE, ferner den Artikel **12** des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 29, 30. Unter dem Zeichen $\square$ ist Quadratzahl bezw. Quadrat einer Linearform, unter Forma ohne Zweifel binäre quadratische Form zu verstehen; somit weist diese Notiz schon auf die allgemeinen Ergebnisse hin, die im art. 280. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 318 dargestellt sind.

BACHMANN.

[18.*)]

ΕΥΡΗΚΑ! num[erus] $= \Delta + \Delta + \Delta$.

[1796] 10. Iul. Gott[ingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 17; es soll zum Ausdruck gebracht werden, daß jede Zahl als Summe von drei Dreieckszahlen dargestellt werden kann.

KLEIN. BACHMANN.

[19.]

Determinatio EULERiana formarum in quibus numeri compositi plus una vice continentur.

[1796 Iul. Gottingae]

Gemeint sind hier jedenfalls die Methoden, die EULER für die Entscheidung der Frage angegeben hat, ob eine vorgegebene Zahl von der Form $4n+1$ eine Primzahl ist oder nicht; siehe die §§ 40—43 der Abhandlung *De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum,* Novi Comm. Acad. Petropol. **4** (1752/53) 1758, S. 3—40, insbesondere S. 29 ff.**) und *Extrait d'une lettre de M. Fuss à M. Béguelin,* Nouv. Mémoires de l'Académie de Berlin (1776) 1779, S. 340—346***). Im LEISTE finden sich an mehreren Stellen nach diesen Methoden ausgeführte Rechnungen, so heißt es z. B. bei S. 48:

[*) Zwischen den Notizen Nr. 17 und Nr. 18 steht in der Handschrift noch eine Aufzeichnung, die GAUSS durchstrichen hat und die darum nur schwer lesbar ist (vergl. die Nachbildung). Sie lautet wie folgt:]

[17a.]

Summa trium quadratorum continue proportionalium numquam primus esse potest: conspicuum exemplum novimus et quod congruum videtur. Confidamus.

[1796] 9. Iul.

Wenn die drei Quadrate ganzer Zahlen x^2, y^2, z^2 in laufender Proportion stehen, so ist

$$x:y:z = 1:\frac{m}{n}:\frac{m^2}{n^2}.$$

Als Summe der drei Quadrate ergibt sich also die zerlegbare Form

$$m^4+m^2n^2+n^4 = (m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2),$$

die im allgemeinen keine Primzahl darstellt. Vielleicht hat GAUSS zunächst die Möglichkeit

$$m^2+mn+n^2 = p, \quad m^2-mn+n^2 = 1$$

übersehen, die für $m = n = 1$, $p = 3$ eintritt. Bei dem »conspicuum exemplum« war wohl für m oder n eine von Eins verschiedene ganze Zahl genommen worden.

BACHMANN.

) L. EULERI Opera omnia, series I, vol. 2, S. 295. Vergl. auch noch die Abhandlung *Quomodo numeri praemagni sint explorandi, utrum sint primi nec ne,* Novi Comm. Acad. Petrop. **13 (1768) 1769, S. 67—88, Opera omnia, ser. I, vol. 3, S. 112.

***) L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 3, S. 421; diese Note ist ein ausführlicher Bericht über den

Discerpend. 283009 in bina quadrata

$$4225 + 528^2,$$

also Primzahl.

STÄCKEL. SCHLESINGER.

[20.]

Principia componendi scalas serierum variatim recurrentium.

[1796] 16. Iul. Gott[ingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 8. Daß GAUSS sich auch noch im folgenden Monat mit rekurrenten Reihen beschäftigt hat, zeigt der vom 28. August 1796 datierte art. [3.] der *Exercitationes mathem.*, oben S. 139.

LOEWY.

[21.]

Methodus EULERiana pro demonstranda relatione inter rectangula sub segmentis rectarum sese secantium in sectionibus conicis ad omnes curvas applicata [*)].

[1796] 31. Iul. Gott[ingae]

EULER gibt in der *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, II, § 92, 93 einen einfachen Beweis für den im wesentlichen schon von APOLLONIUS (Buch 3, § 17, 19, 22) erkannten Satz: Werden durch einen Punkt O zwei Geraden gezogen, die einen Kegelschnitt in den Punkten A, B und A', B' treffen, so hat, wenn nur die Geraden ihre Richtung beibehalten, das Verhältnis der Produkte $OA.OB$ und $OA'.OB'$ für alle Lagen von O denselben Wert. Daß der Beweis sich auf Kurven höherer Ordnung übertragen läßt, ist EULER nicht entgangen; an einer spätern Stelle der *Introductio* hat er dies für die Kurven dritter Ordnung ausführlich dargelegt und sagt dann (§ 247): Atque similis proprietas in lineas quarti, quinti atque superiorum ordinum competet.

STÄCKEL.

[22.]

$a^{2^n \mp 1 (p)} \equiv 1$ semper solvere in potestate.

[1796] Aug. 3. Gott[ingae]

Diese Aufzeichnung besagt vermutlich, daß GAUSS, wenn p eine Primzahl von der Form $2^n \mp 1$ ist, die Funktion $x^p - 1$ in Bezug auf einen Primzahlmodul in ihre Primfunktionfaktoren zu zerlegen vermochte. Vergl. *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 229 und S. 199—211; S. 209 wird der Fall $p = 31 = 2^5 - 1$ modulo 331 behandelt.

BACHMANN.

Inhalt der erst nach EULERs Tode veröffentlichten, 1801 erschienenen Abhandlung *De formulis speciei $mxx + nyy$ ad numeros primos explorandos idoneis, earumque mirabilibus proprietatibus*, Nova Acta Acad. Petrop. 12 (1794) 1801, S. 22—46, die also GAUSS im Juli 1796 nicht gekannt haben kann.

[*) In der Handschrift steht applicatum.]

[23.]

Rationem theorematis aurei quomodo profundius perscrutari oporteat perspexi et ad hoc accingor supra quadraticas aequationes egredi conatus. Inventio formularum, quae semper per primos: $\sqrt[n]{1}$ (numerice) dividi possunt.

[1796] Aug. 13. Ibid. [Gottingae]

Siehe Werke II, S. 230. Gemeint sind die Ausdrücke $x^\pi - 1$, für die $p^n \equiv 1$ (mod. π). — Im letzten Satze des Textes hat die Handschrift qui statt quae.

BACHMANN.

[24.]

Obiter $(a + b\sqrt{-1})^{m + n\sqrt{-1}}$ evolutum.

[1796 Aug.] 14.

Bei S. 111 des LEISTE steht eine Aufzeichnung: »*Canon quantitatum imaginariarum exponentialium*« mit Ausdrücken für $a^{\sqrt{-1}}$ und $(a + b\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}$.

SCHLESINGER.

[25.]

Rei summa iamiam intellecta. Restat ut singula muniantur.

[1796 Aug.] 16. G[ottingae]

Da diese Aufzeichnung, ebenso wie die Nummern 22, 23, 26, 27, in der Handschrift rot (in der Nachbildung im Halbton) unterstrichen ist, bezieht sie sich wahrscheinlich auf einen der in den genannten Nummern behandelten arithmetischen Gegenstände, während die Nr. 24 nur eine gelegentlich (obiter) gemachte Bemerkung darstellt.

SCHLESINGER.

[26.]

$(a^p) \equiv (a)$ mod. p, a radix aequationis cuiusvis quomodocunque irrationalis.

[1796 Aug.] 18. [Gottingae]

Es ist dies der Satz, der im art. 350. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 224, in der Form

$$(P, \mathfrak{p}^\pi) \equiv P \text{ (mod. } \pi)$$

ausgesprochen ist. Es bedeutet also hier (a) eine ganze rationale Funktion von x, die für $x = a$ verschwindet, und entsprechend (a^p) die Funktion, deren Wurzeln die p-ten Potenzen der Wurzeln der ersten Funktion sind; p Primzahl.

DEDEKIND. BACHMANN.

[27.]

Si P, Q functiones alg[ebraicae] quantitatis indeterminatae fuerint inc[ognitae]. Datur:

$$tP + uQ = 1$$

in algebra tum speciata tum numerica.

[1796 Aug.] 19. G[ottingae]

Siehe für die algebra numerica (Zahlentheorie) *Analysis Residuorum*, art. 335., Werke II, S. 215, für die algebra speciata oder speciosa (Buchstabenrechnung) *Demonstratio nova etc.*, 1816, art. 2., Werke III, S. 35.

KLEIN. BACHMANN.

[28.]

Exprimuntur potestates radicum aequationis propositae aggregatae per coefficientes aequationis lege perquam simplici (cum aliis quibusdam geometr[icis] in Exerc[itationibus]).

[1796 Aug.] 21. G[ottingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 6, oben S. 490. Der art. [2.] der dort angeführten Leisteaufzeichnung (oben S. 128) zeigt, daß es sich hier um die explizite Darstellung der Potenzsummen der Wurzeln durch die Koeffizienten einer algebraischen Gleichung handelt. Für $n = 1, 2, 3, 4$ finden sich diese Formeln bei ALBERT GIRARD in der *Invention nouvelle en l'Algèbre*, Amsterdam 1629 (neue Ausgabe Leyden 1884), die allgemeine Darstellung mit dem von GAUSS gefundenen Bildungsgesetz gibt WARING in den *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis etc.*, Cambridge 1762 *). In EULERS *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, Liber I, § 166, S. 128 findet man bloss die NEWTONschen Formeln, die keine independente, sondern nur eine rekurrente Darstellung der Potenzsummen geben. In der Abhandlung *Observationes circa radices aequationum* **) hat auch EULER eine independente Darstellung der Potenzsummen abzuleiten versucht, doch ist er zu keinem so übersichtlichen Bildungsgesetz gelangt, wie es bei WARING und GAUSS vorliegt. Wie wenig bekannt WARINGs Darstellung geblieben war, geht u. a. daraus hervor, daß von ihr in KLÜGELs *Mathematischem Wörterbuch* I, Leipzig 1803, wo S. 467 und 507 (fälschlich als 495 numeriert) von den NEWTONschen und den expliziten GIRARDschen Formeln gehandelt wird, nicht die Rede ist. Auch die im art. [1.] der Leisteaufzeichnung (oben S. 127) angegebene explizite Darstellung der Gleichungskoeffizienten durch die Potenzsummen findet sich bei WARING a. a. O., und zwar gibt WARING die allgemeinen Formeln für ein beliebiges n, während GAUSS sich auf die vier ersten Koeffizienten beschränkt.

Die in unserer Tagebuchnotiz erwähnten *Exercitationes Mathematicae*, die oben S. 138 abgedruckt sind, haben bei den artt. [1.], [2.] in der Tat dieselbe Zeitangabe, 21. August 1796.

LOEWY.

*) Vergl. hierzu L. SAALSCHÜTZ, Bibliotheca mathematica (3) **9**, 1908, S. 65.

) Novi Comm. Acad. Petrop. **15 (1770) 1771, S. 51.

[29.]

Summatio Seriei infinitae

$$1 + \frac{x^n}{1\ldots n} + \frac{x^{2n}}{1\ldots 2n} \text{ etc.}$$

eod[em die, 1796 Aug. 21.]

Die Reihe befriedigt die Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dx^n} = u$$

mit den Anfangsbedingungen, daß für $x = 0$, $u = 1$ und die $n-1$ ersten Derivierten gleich Null sind. Daraus ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu n}}{(\nu n)!} = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} e^{x\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{n} + i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)};$$

vergl. die Bemerkung zum art. [3.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 143, 144. Über Funktionen dieser Art, die HOENE-WRONSKI (*Philosophie des Mathématiques*, Paris 1811) als Sinus bezw. Kosinus höherer Ordnung bezeichnet hat, gibt es eine umfangreiche Literatur, die bei S. GÜNTHER, *Die Lehre von den ... Hyperbelfunktionen*, Halle 1881, und bei K. WALLNER, Programm der K. Realschule Rothenburg o. T. 1913, zusammengestellt ist.

SCHLESINGER.

[30].

Minutiis quibusdam exceptis feliciter scopum attigi scil[icet] si

$$p^n \equiv 1 \pmod{\pi},$$

fore $x^\pi - 1$ compositum e factoribus gradum n non excedentibus et proin aequationem conditionalem fore solubilem; unde duas theor[ematis] aurei demonstr[ationes] deduxi.

[1796] Sept. 2. G[ottingae]

Siehe *Analysis Residuorum* art. 360., Werke II, S. 230, sowie die Tagebuchnotizen Nr. 23 vom 13. August 1796 und Nr. 68 vom 21. Juli 1797. Die aequatio conditionalis ist vermutlich dieselbe, die GAUSS sonst aequatio auxiliaris genannt hat, vergl. *Analysis Residuorum* artt. 365. und 366., Werke II, S. 233, 234, wo sich die beiden Beweise des »theorematis aurei« finden. Die Minutia excepta sind die am Ende des art. 363., Werke II, S. 232 erwähnten Schwierigkeiten, die erst in der Tagebuchnotiz Nr. 68 als behoben angemerkt werden.

DEDEKIND. BACHMANN.

[31.]

Numeros fractionum inaequalium quarum denominatores certum limitem non superant ad numerum fractionum omnium quarum num[eratores] aut denom[inatores] sint diversi infra eundem limitem in infinito ut $6 : \pi\pi$.

[1796] Sept. 6.

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 14, oben S. 495.

[32.]

Si $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$ stat[uatur] $\Pi : x = z$ et $x = \Phi : z$, erit

$$\Phi : z = z - \frac{1}{8} z^4 + \frac{1}{112} z^7 - \frac{1}{1792} z^{10} + \frac{3}{1792 . 52} z^{13} - \frac{3 . 185}{1792 . 52 . 14 . 15 . 16} z^{16} \ldots$$

[1796] Sept. 9.

Vergl. den art. [5.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 140 und die zugehörige Anmerkung S. 144. Im Zähler des Koeffizienten von z^{16} muß es statt 185 heißen 165 *). Das hier betrachtete Integral kommt auch in der oben S. 152 abgedruckten Leisteaufzeichnung vor. In der Werke VIII, S. 93 abgedruckten, aus dem Jahre 1800 stammenden Aufzeichnung untersucht GAUSS die Umkehrung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$. Vergl. auch die folgende Notiz Nr. 33.

SCHLESINGER.

[33.]

Si

$$\Phi : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = x$$

erit:

$$\Phi : z = z - \frac{1 . z^n}{2 . n+1} A + \frac{n-1 . z^n}{4 . 2n+1} B - \frac{nn-n-1 . [z^n]}{2 . n+1 . 3n+1} C \ldots$$

[1796] Sept. 14.

Hier bedeutet (vergl. die Bemerkung zum art. [5.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 144) A das erste Glied der Reihe, also z, B das zweite, also $+\frac{1 . z^n}{2(n+1)} \cdot z$, C das dritte, also $\frac{(n-1) z^n}{4(2n+1)} \cdot \frac{1 . z^n}{2(n+1)} \cdot z$ u.s.w. Diese Schreibweise wird auf NEWTON zurückgeführt. Für $n = 3$ ergeben sich die in der vorhergehenden Nummer betrachteten Ausdrücke.

SCHLESINGER.

---

*) Der Koeffizient von z^{16} lautet nämlich, vergl. S. 140 letzte Zeile

$$-\frac{1 . 3 . 3 . 5 . 5 . 9 . 9 . 11 . 11 . 15}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15}.$$

[34.]

Methodus facilis inveniendi aeq[uationem] in y ex aeq[uatione] in x, si ponatur:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots = y.$$

[1796 Sept. 16.]

GAUSS hat wohl die sogenannte TSCHIRNHAUSENsche Transformation im Auge: Aus einer Gleichung: $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + M = 0$ soll die transformierte Gleichung in y abgeleitet werden, wenn $y = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots$ ist. Es könnte dann mit der bequemen Methode, die Gleichung in y zu finden, die mittels der Potenzsummen gemeint sein, die für den besondern Fall $y = x^\tau$ im art. 348. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 223 als Solutio prima auseinandergesetzt ist. Man hätte so eine unmittelbare Anknüpfung an die Notiz Nr. 28 vom 21. August 1796.

LOEWY.

[35.]

Fractiones quarum denominator continet quantitates irrationales (quomodocunque?) in alias transmutare ab hoc incommodo liberatas.

[1796] Sept. 16.

Vermutlich handelt es sich um die Umwandlung einer gebrochenen rationalen Funktion einer Wurzel einer algebraischen Gleichung in eine ganze rationale Funktion dieser Wurzel. Ausführlich behandelt GAUSS die »principia talis transformationis, quum in libris algebraicis non inveniantur« im art. 11. der *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (Werke III, S. 177). Auf die Möglichkeit einer solchen Umwandlung wird auch schon im art. 360. III der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 453) hingewiesen.

LOEWY.

[36.]

Coefficientes aeq[uationis] auxiliariae eliminationi inservientis ex radicibus aeq[uationis] datae determinati.

cod[em die, 1796 Sept. 16.]

Vermutlich hängt diese Aufzeichnung mit den Untersuchungen über Elimination zusammen, von denen in der Aufzeichnung Nr. 89 des *Tagebuchs* vom Juni 1798 die Rede ist.

LOEWY.

[37.]

Nova methodus qua resolutionem aequationum universalem investigare forsitanque invenire licebit. Scil[icet] transm[utetur] aeq[uatio] in aliam, cuius radices

$$\alpha\rho' + \beta\rho'' + \gamma\rho''' + \cdots,$$

ubi

$$\sqrt[n]{1} = \alpha, \beta, \gamma \text{ etc.}$$

et n numerus aequationis gradum denotans.

[1796] Sept. 17.

Diese Aufzeichnung zeigt, daß GAUSS mit Hilfe der sogenannten LAGRANGEschen Resolvente*) die algebraische Auflösbarkeit der allgemeinen algebraischen Gleichung untersucht und damals noch an die Möglichkeit gedacht hat, die Auflösung auf diese Weise auch wirklich zu finden. Daß GAUSS sich viel mit dieser Frage beschäftigt hat, geht aus einer Stelle des nicht veröffentlichten Teiles des Caput sextum der *Analysis Residuorum* **) hervor, wo es im art. 262. heißt:

Post illustrissimorum Geometrarum labores repetitos nulla spes superesse videtur Aequationum solutionem generalem possibilem esse (i. e. reductionem ad aequationes puras †)). Sed tamen maxime est memorabile, aequationes omnes, ad quas solutio aequationis $x^n = 1$ ducit, resolvi sive ad puras eiusdem gradus reduci posse . . . .

†) Nos etiam huic rei multum operae impendimus; et tantum non de impossibilitate sumus certi. Forsan, quae in hoc genere meditati sumus et quae forsan ad demonstrationem rigorosam huius impossibilitatis ducere possunt, alia occasione publici iuris faciemus.

*) Siehe LAGRANGE, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Nouveaux Mémoires de l'Académie, année 1770, Berlin 1772, S. 134 und *Suite des réflexions etc.*, ebenda, année 1771, Berlin 1773, S. 138, besonders S. 163 der *Suite*, Oeuvres III, S. 331. Eine deutsche Übersetzung beider Teile dieser Abhandlung findet sich in *Leonh. Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen*, . . . übersetzt und mit . . . Zusätzen begleitet von J. A. CHR. MICHELSEN, 3. Buch: *Die Theorie der Gleichungen aus den Schriften der Hrn. Euler und de la Grange*, Berlin 1791, S. 271 ff.; der zweite Teil beginnt auf S. 378. GAUSS hat das MICHELSENsche *dritte Buch* spätestens im April 1797 gekannt, da er es in der Abhandlung *Neuer Beweis des Lagrangischen Lehrsatzes* (Werke VIII, S. 76) anführt, die er etwa im April 1797 (nämlich dritthalb Jahre vor dem 8. Oktober 1799, siehe den Brief an HINDENBURG von diesem Tage, oben S. 429) durch KAESTNER hat an HINDENBURG senden lassen; vergl. auch die Tagebuchnotiz Nr. 40 vom 27. Dezember 1796. Die Arbeit von LAGRANGE, *Réflexions sur la résolution* etc., von der hier die Rede ist, meint PFAFF in dem oben S. 101 abgedruckten Briefe, wenn er S. 104, Zeile 5, 4 v. u. von »der früheren Abhandlung von LA GRANGE, die bekanntlich auch von MICHELSEN deutsch übersetzt ist« spricht.

**) Über diese Handschrift (Ea 9, Kapsel 40) vergleiche man die Bemerkungen, die R. DEDEKIND dem Abdruck zweier Abschnitte, Werke II, S. 240 hinzugefügt hat, und den Artikel 2 von P. BACHMANNs Aufsatz »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 6; danach ist das 6. Kapitel der *Analysis Residuorum* vermutlich vor dem 20. Juli 1797 verfaßt worden.

Diese Stelle zeigt auch, daß GAUSS schon im Jahre 1797 zu der Überzeugung gelangt war, die allgemeine algebraische Gleichung sei durch Wurzelzeichen nicht auflösbar; öffentlich ausgesprochen hat er diese Überzeugung erst im art. 9. der *Inauguraldissertation* (1799, Werke III, S. 17) und im art. 359. der *Disquisitiones arithmeticae* (1801, Werke I, S. 449).

Die Anwendung der LAGRANGEschen Resolvente auf die Kreisteilungsgleichung (siehe *Disquisitiones arithmeticae* art. 360., Werke I, S. 450) ist erst in den Tagebuchnotizen Nr. 65 und Nr. 66 vom Juli 1797 angezeigt.

LOEWY.

[38.]

In mentem mihi venit radices aeq[uationis] $x^n - 1$ [$= 0$] ex aeq[uationibus] communes radices habentibus elicere ut adeo plerumque tantum aequationes coefficientibus rationalibus gaudentes resolvi oporteat.

[1796] Sept. 29. Bruns[vigae*)]

Wahrscheinlich hat GAUSS hier die Zurückführung der Auflösung der Gleichung $x^n = 1$ auf

$$x^{a^\alpha} = 1, \quad x^{a'^{\alpha'}} = 1, \quad x^{a''^{\alpha''}} = 1, \quad \ldots$$

im Auge, wenn $n = a^\alpha . a'^{\alpha'} . a''^{\alpha''} \ldots$ ist und $a, a', a'', \ldots$ lauter verschiedene Primzahlen bedeuten, vergl. *Disquisitiones arithmeticae*, art. 336. (Werke I, S. 413) und art. 366. (Werke I, S. 463); hier ist auch noch weiter von der Zurückführung der Gleichungen die Rede, deren Grad eine Primzahlpotenz ist, auf solche vom Primzahlgrad, was aber die Kenntnis der Lösungen von $x^a = 1$, $x^{a'} = 1$, $x^{a''} = 1, \ldots$, also die Einführung von Irrationalitäten erfordert. Vergl. auch den ersten Absatz des art. [2.] des nachgelassenen Bruchstücks *Über die Unzerlegbarkeit der Kreisteilungsgleichung*, oben S. 118 **), und besonders den art. 238. des aus dem Jahre 1797 stammenden 6. Kapitels der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 199.

LOEWY.

[39.]

Aequatio tertii gradus est haec:

$$x^3 + xx - nx + \frac{nn - 3n - 1 - mp}{3} = 0,$$

ubi $3n + 1 = p$ et m numerus resid[uorum] cubic[orum] similes sui excipientes. Unde sequitur si $n = 3k$, fore $m + 1 = 3l$; si $n = 3k \pm 1$, fore $m = 3l$.

[*) Zwischen dem 17. und dem 29. September 1796 scheint GAUSS von Göttingen nach Braunschweig abgereist zu sein. Es wären dann die Tagebuchnotizen Nr. 4 bis Nr. 37 in Göttingen geschrieben; bei der Nr. 38 beginnt auch andere Tinte.]

**) Die Angabe von GAUSS oben S. 118 Zeile 7 v. u., die Zahlen $\beta, \beta', \ldots$ seien Divisoren von

$$a^{\alpha-1}(a-1), \quad a'^{\alpha'-1}(a'-1), \quad \ldots$$

trifft nicht zu, es kommen vielmehr für β nur die $a^{\alpha-1}(a-1)$ Zahlen in Frage, die kleiner als a^α und zu a^α teilerfremd sind, und entsprechend für $\beta', \beta'', \ldots$.

Sive

$$z^3 - 3pz + pp - 8p - 9pm = 0.$$

Hoc [modo] m penitus determinatum, $m+1$ semper $\square + 3\square$.

[1796] Octob. 1. Bruns[vigae]

Es bedeutet hier m die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$1 + g^{3t} \equiv g^{3s} \pmod{p},$$

also dasselbe, was im art. 358. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 445 mit $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = a - 1$ bezeichnet wird*). Setzt man ferner, unter Beibehaltung der dortigen Zeichen k, a, b, c, $k = 2a - b - c$, so ist

$$m = \frac{k+n}{3} - 1.$$

Die erste der obigen Gleichungen nimmt dann die Gestalt an

$$x^3 + x^2 - nx - \tfrac{1}{9}(kp + n) = 0$$

und geht durch die Substitution $z = 3x + 1$ in die zweite Gleichung über. Da zudem nach art. 358. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 447, Gleichung II,

$$m + 1 = \frac{k+n}{3} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} 4(m+1) &= (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2, \\ &= (2b - a - c)^2 + 3(a - c)^2 \\ &= (2c - a - b)^2 + 3(b - c)^2. \end{aligned}$$

Da nach Werke I, S. 447, Gleichung I, $a + b + c = n$, also gerade ist, so ist eine der Zahlen a, b, c, etwa a, und die Summe und die Differenz der beiden andern, $b \pm c$, gerade, also

$$m + 1 = \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

Die zweite Gleichung hat GAUSS auch in sein Exemplar von LAMBERTS *Tabellen*, S. 223 eingeschrieben, und zwar in der Form

$$z^3 - 3pz - p(9a - (p+1)) \; [= 0]$$

mit der Angabe

$$4p = 3NN + (9a - p - 1)^2;$$

hier haben p, a die obige Bedeutung und man hat, wie aus den sieben letzten Zeilen von S. 447, Werke I hervorgeht, $N = 3(b - c)$ zu nehmen. Beispiele findet man in der oben S. 111 abgedruckten Leisteaufzeichnung. Vergl. auch die Tagebuchnotiz Nr. 67 vom 20. Juli 1797, ferner den Artikel **15** des BACHMANNschen Aufsatzes, Werke X 2, S. 39.

Im Texte muß es statt excipientes wohl heißen excipientium.

KLEIN. BACHMANN.

---

*) Die dort mit n, m bezeichneten Größen heißen in unserer Tagebuchnotiz p, n.

[40.]

Aequationis

$$x^p - 1 = 0$$

radices per integros multiplicatae aggregatae cifram producere non possunt.

[1796] ⊙ Oct. 9. Brunsv[igae]

Wenn p eine Primzahl ist, so bedeutet die Aussage, daß die primitiven Wurzeln von $x^p - 1 = 0$ mit ganzen Zahlen multipliziert nicht die Summe Null geben können, die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung; siehe den art. 341. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 417. Für einen zusammengesetzten Exponenten vergleiche man die Tagebuchaufzeichnung Nr. 136 vom 12. Juni 1808.

BACHMANN.

[41.]

Quaedam sese obtulerunt de multiplicatoribus aequationum, ut certi termini eiiciantur, quae praeclara pollicentur.

[1796] ⊙ Oct. 16. Bruns[vigae]

Unter multiplicatores versteht GAUSS hier wohl Transformationen, möglicherweise TSCHIRNHAUSENsche, also solche von der in der Nr. 34 betrachteten Form. Man hätte dann die vorliegende Aufzeichnung auf die Beseitigung gewisser Gleichungskoeffizienten durch TSCHIRNHAUSENsche Transformationen zu beziehen. Die Wendung »praeclara pollicentur« scheint anzudeuten, daß die Frage nach der Auflösbarkeit der allgemeinen Gleichung durch Wurzelgrößen das Ziel dieser Untersuchungen gebildet habe, und die beiden folgenden, für sich nicht zu deutenden Nummern 42, 43 können Fortschritte auf dem hier eingeschlagenen Wege ankündigen. Die rote Unterstreichung in der Handschrift würde dann auf die in der Bemerkung zu der Nr. 37 genannten Veröffentlichungen in der *Dissertation* und in den *Disquisitiones arithmeticae* zu beziehen sein.

LOEWY.

[42.]

Lex detecta: quando et demon[stra]ta erit systema ad perfectionem evexerimus.

[1796] Oct. 18. Brunsv[igae]

[43.]

Vicimus GEGAN.

[1796] Oct. 21. Bruns[vigae]

[44.]

Formula interpolationis elegans.

[1796] Nov. 25. G[ottingae]

Gauss hat vielleicht hier die sogenannte Lagrangesche Interpolationsformel gemeint. Sie findet sich in Lagranges *Leçons élémentaires sur les mathématiques* (Oeuvres de Lagrange VII, S. 286), die nach den Angaben in den Oeuvres zuerst in den zwei Ausgaben der Séances des Écoles normales, an III (1794—1795) erschienen sind und dann wieder im Journal de l'École Polytechnique, tome **2** (1812) abgedruckt wurden. Vorher war übrigens schon Waring zu dieser Formel gelangt. (Vgl. A. von Braunmühl, Bibliotheca mathematica (3) **2**, 1904, S. 95 und 96). Bei Gauss steht die fragliche Formel in der aus seinem Nachlaß herausgegebenen Abhandlung *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (Werke III, S. 273), deren erster Entwurf nach Schering (ebenda, S. 328) aus dem Jahre 1805 zu stammen scheint. Auch in dem Aufsatz *Über Interpolation* von J. F. Encke (Berliner Astronomisches Jahrbuch, 1830, Ges. math. u. astron. Abhandlungen, Berlin 1888, S. 4), der aus den bei Gauss im Jahre 1812 gehörten Vorlesungen hervorgegangen ist, spielt die Interpolationsformel eine grundlegende Rolle; endlich findet sie sich im art. 7. der Abhandlung *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (1814, Werke III, S. 172).

Loewy.

[45.]

Incepi Expressionem

$$1-\frac{1}{2^{\omega}}+\frac{1}{3^{\omega}}\cdots$$

in seriem transmutare secundum potestates ipsius ω progredientem.

[1796] Nov. 26. G[ottingae]

Mit der hier von Gauss betrachteten Reihe hat sich Euler in der Arbeit, Histoire de l'Académie Berlin, **17** (1761) 1768, Mémoires, S. 83 beschäftigt (vergl. E. Landau, Bibliotheca mathem. (3) **7**, S. 69). Daß diese Reihe nur dann unbedingt konvergiert, wenn der reelle Teil von ω, $\Re(\omega)$, größer ist als Eins, daß sie ferner, wie unsere Tagebuchnotiz angibt, in eine gewöhnliche Potenzreihe von ω verwandelt werden kann und daß diese Potenzreihe dann beständig konvergent ist, folgt aus Riemanns Abhandlung, Monatsberichte der Berliner Akademie 1859, S. 671, Werke, 2. Aufl. 1892, S. 145. Nach neueren Untersuchungen ist die ursprüngliche Reihe für $0<\Re(\omega)\leqq 1$ bedingt konvergent.

Schlesinger.

[46.]

Formulae trigonometricae per series expressae.

[1796] per Dec.

[47.]

Differentiationes generalissimae.

[1796] Dec. 23.

Es handelt sich jedenfalls um die Differentiation mit einem Index, der keine positive ganze Zahl ist.

Versuche, die sich auf solche Verallgemeinerungen beziehen, finden sich schon bei Leibniz in verschiedenen Briefen *). Gauss hat wohl an Euler angeknüpft, siehe dessen Abhandlung *De progressionibus transcendentibus etc.*, Comm. Acad. Petrop. 5 (1730/31) 1738, S. 36, besonders S. 55. Im Nachlaß von Gauss findet sich keine Spur dieser Untersuchungen.

Schlesinger.

[48.]

Curvam parabolicam quadrare suscepi, cuius puncta quotcunque dantur.

[1796] Dec. 26.

Hierher gehörige Formeln finden sich bei S. 13 des Leiste.

Klein.

[49.]

Demonstrationem genuinam theorematis La Grangiani detexi.

[1796] Dec. 27.

Aus dem oben S. 429 abgedruckten Briefe von Gauss an C. F. Hindenburg vom 8. Oktober 1799 geht hervor, daß Gauss etwa im April 1797 einen Aufsatz mit seinem Beweise des Lagrangeschen Lehrsatzes durch Kaestner an Hindenburg hat senden lassen, damit dieser den Aufsatz in seinem Archiv der reinen und angew. Mathematik veröffentliche. Die Veröffentlichung ist unterblieben und, wie Sartorius v. Waltershausen **) berichtet, »kam das eingesandte Manuskript nie wieder zum Vorschein«. Es befindet sich jedoch im Gaussarchiv eine Handschrift dieses Beweises, die Werke VIII, S. 76 abgedruckt ist. Eine etwas andere Darstellung desselben Beweises mit weniger Text ist im Leiste neben den Druckseiten 10—12 aufgezeichnet. Vergl. auch die Nr. 86 vom Mai 1798.

Klein. Schlesinger.

[50.]

$$\left.\begin{aligned}\int\sqrt{\sin x}\,.\,dx &= 2\int\frac{yy\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\\ \int\sqrt{\operatorname{tang} x}\,.\,dx &= 2\int\frac{dy}{\sqrt[4]{(1-y^4)}}\\ \int\sqrt{\frac{1}{\sin x}}\cdot dx &= 2\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\end{aligned}\right\}\quad yy=\frac{\sin}{\cos}x.$$

1797 Ian. 7.

Zu dem ersten und dritten der hier auftretenden Integrale vergl. die in dem Abschnitt [I.] der *Ältesten Untersuchungen über lemniskatische Funktionen* art. [1.], S. 145 und art. [3.], S. 146 wiedergegebenen

*) Eine Zusammenstellung der einschlägigen Briefstellen gibt C. W. Borchardt in Boncompagnis Bulletino di bibliografia **2**, 1869, S. 277, Ges. Werke, 1888, S. 486.

**) *Gauss zum Gedächtniss*, 1856, S. 22; einige irrtümliche Angaben, die sich an dieser Stelle finden, sind schon oben S. 444 berichtigt worden.

Leisteaufzeichnungen, sowie die dazugehörigen Bemerkungen S. 149, wo auch Literaturnachweise gegeben sind. Das zweite Integral ist ein besonderer Fall des in der Nr. 53 vom 12. Januar 1797 aufgezeichneten Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, das durch die Substitution*) $z^n = \frac{1-x^n}{x^n}$ in $-\int \frac{z^{n-2}\,dz}{1+z^n}$ übergeht und so wieder als besonderer Fall des in der Nr. 54 betrachteten Integrals $\int \frac{x^n\,dx}{1+x^m}$ erscheint.

SCHLESINGER.

[51.]

Curvam (elasticam) lemniscatam a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

pendentem perscrutari coepi.

[1797] Ian. 8.

Damit stimmt überein die auf dem letzten Blatte der Scheda Ac befindliche Notiz: »Functiones lemniscaticas considerare coeperamus 1797. Januar. 8.«, siehe oben S. 206. Daß GAUSS schon früher die Umkehrung des lemniskatischen Integrals in eine Reihe entwickelt hatte (siehe den art. [6.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 141), steht mit diesen Angaben nicht im Widerspruch, sondern zeigt, daß GAUSS erst am 8. Januar 1797 die volle Bedeutung des lemniskatischen Integrals erkannt und es zum Ausgangspunkte einer selbständigen Theorie gemacht hat, während es ihm früher nur als ein einzelner Fall des allgemeinen Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$$

erschienen war (siehe die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 32 und Nr. 33 vom September 1796). Die wahre Eigenart des Falles $n = 4$ hat GAUSS durch Anwendung des EULERschen Additionstheorems erkannt; dies zeigen die oben S. 147 ff. in den artt. [4.]—[7.] abgedruckten Leistenotizen. Daß diese Notizen mit den am 8. Januar 1797 begonnenen Untersuchungen in Verbindung stehen, geht auch schon aus dem äußerlichen Merkmal hervor, daß hier wie dort in der Überschrift das Wort *elastica* durchstrichen und an seine Stelle *lemniscata* gesetzt ist.

KLEIN. SCHLESINGER.

[52.]

Criterii EULERiani rationem sponte detexi.

[1797] Ian. 10.

Die beiden folgenden Notizen Nr. 53, 54 (vergl. auch Nr. 50) zeigen, daß es sich um das EULERsche (richtiger NEWTONsche) Kriterium für die sogenannten binomischen Integrale $\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}\,dx$ handelt. Siehe EULER, *Institutiones calculi integralis* I, 1768, § 104, Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 62.

SCHLESINGER.

*) Für $n = 4$ ist diese Substitution bei S. 27 des LEISTE ausgeführt; ebenda bei S. 104 finden sich mit der Überschrift »Untersuchungen über das Integral $y = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$« Reihenentwicklungen und numerische Rechnungen.

[53.]

Integrale completum

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)}}$$

ad circ[uli] quadr[aturam] reducere commentus sum.

[1797] Ian. 12.

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 50 und die Nr. 59 vom 2. März 1797. Im § 352 von EULERs *Institutiones calculi integralis* I, 1768, Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 226, wird für dieses *integrale completum* der Wert

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$$

gegeben; im § 353 werden dann die einfachsten Fälle $n = 2, 3, 4, 6$ berechnet. GAUSS will sagen, daß, da $\sin \frac{\pi}{n}$ für ein beliebiges n durch Wurzeln aus ganzen Zahlen dargestellt werden kann, der betreffende Integralwert, was seinen transzendenten Charakter angeht, nur von π abhängt.

SCHLESINGER.

[54.]

Methodus facilis

$$\int \frac{x^n\,dx}{1+x^m}$$

determinandi.

[1797 Ian.]

Hierher gehörige Formeln und Rechnungen findet man aufgezeichnet im LEISTE bei den Seiten 27, 91, 92; sie schließen sich durchweg an die Methode an, nach der EULER diese Integrale behandelt, siehe *Institutiones calculi integralis* I, 1768, art. 77., Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 41, oder auch *Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes,* Comm. Acad. Petrop. **14** (1744/6), 1751, S. 3, Opera omnia, ser. I, vol. 17, S. 70, besonders die artt. 44—59.

KLEIN. SCHLESINGER.

[55.]

Supplementum eximium ad polygonorum descriptionem inveni. Sc[ilicet], si $a, b, c, d, \ldots$ sint factores primi numeri primi p unitate truncati, tunc ad polygoni p laterum descriptionem nihil aliud requiri quam ut:

1°. arcus indefinitus in $a, b, c, d, \ldots$ partes secetur,

2°. ut polygona $a, b, c, d, \ldots$ laterum describantur.

Gotting[ae, 1797] Ian. 19.

Hier ist jedenfalls Folgendes gemeint. Bedeuten wie im Texte $a, b, c, \ldots$ die Primteiler von $p-1$

und setzt man

$$p-1 = aA, \quad A = bB, \quad B = cC, \quad \ldots,$$

so bestimmen sich die A-gliedrigen Perioden nach der im art. 352. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 431 entwickelten Methode durch eine Gleichung a-ten Grades, die durch Auflösung von $x^a = 1$ und Teilung eines gewissen Winkels in a gleiche Teile gelöst wird; darauf die B-gliedrigen Perioden durch eine Gleichung b-ten Grades, die durch Auflösung von $x^b = 1$ und Teilung eines gewissen Winkels in b gleiche Teile gelöst wird u.s.w.; vergl. die Bemerkung zu der Nr. 66.

BACHMANN.

[56.]

Theoremata de res[iduis] -1, ∓ 2 simili methodo demonstrata ut cetera. . . .

Gott[ingae, 1797] Febr. 4.

Dieselbe Zeitangabe Werke I, S. 476, Anmerkung zum art. 145. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 110.

KLEIN.

[57.]

Forma

$$aa+bb+cc-bc-ac-ab,$$

quod ad divisores attinet, convenit cum hac:

$$aa+3bb.$$

[1797] Febr. 6.

Setzt man

$$a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab = \alpha,$$

so ist

$$(2a-b-c)^2+3(b-c)^2 = 4\alpha.$$

Jeder ungerade Primteiler der ersten Form ist also auch Teiler der Form x^2+3y^2. Umgekehrt, ist p ein Teiler der letzteren, so gibt es eine ungerade Zahl A, für die

$$A^2 \equiv -3 \pmod{p}$$

ist; setzt man $B = 1$, so ist also:

$$A^2+3B^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wählt man dann

$$a = 0, \quad b = \frac{A+B}{2}, \quad c = \frac{A-B}{2},$$

so ist p auch Teiler der ersteren Form.

BACHMANN.

[58].

Amplificatio prop[ositionis] penult[imae] p[aginae] 1, scilicet

$$1-a+a^3-a^6+a^{10}\ldots$$
$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a^2-a}{1+\cfrac{a^3}{1+\cfrac{a^4-a^2}{1+\cfrac{a^5}{1+\text{etc.}}}}}}}$$

Unde facile omnes series, ubi exp[onentes] ser[iem] sec[undi] ordinis constituunt, transformantur.

[1797] Febr. 16.

Die »Propositio penultima« der ersten Seite des *Tagebuchs*, auf die hier Bezug genommen wird, ist das erste Beispiel der Notiz Nr. 7 vom 24. Mai 1796, das für $a = 2$ aus der hier angegebenen Formel hervorgeht. Eine Umformung, die der hier von GAUSS aufgezeichneten nahe verwandt ist, findet sich ohne Beweis in einem *Theorema* betitelten Aufsatze von G. EISENSTEIN *); beide Umformungen sind als besondere Fälle in einer Gleichung enthalten, die EISENSTEIN in der Abhandlung *Théorèmes sur les formes cubiques etc.* **) ebenfalls ohne Beweis angegeben hat. Ein Beweis dieser EISENSTEINschen Gleichung kann aus einem Briefe von STIELTJES an HERMITE ***) entnommen werden. Die GAUSSsche Umformung ergibt sich in folgender Weise aus den oben S. 492 in der Bemerkung zu der Notiz Nr. 7. angegebenen allgemeinen Formeln. Setzt man daselbst in (3) und (6)

$$c_0 = r^{\frac{1}{4}}, \quad c_1 = r^{(\frac{1}{2}+1)^2}, \quad c_2 = r^{(\frac{1}{2}+2)^2}, \quad c_3 = r^{(\frac{1}{2}+3)^2}, \quad \ldots,$$

so ist

$$A_n = r^{\frac{1}{2}n(\frac{1}{2}+2n-2)}\left|r^{(i+k-2)^2}\right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$B_n = r^{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}+2n-2)}\left|r^{(i+k-2)^2}\right| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

und für die als Faktor auftretende Determinante findet man †)

$$\left|r^{(i+k-2)^2}\right| = r^{n(n-1)^2}(r^2-1)^{n-1}(r^4-1)^{n-2}\ldots(r^{2n-2}-1).$$

Die Ausdrücke (5) und (4) oben S. 492 ergeben also

$$b_0 = r^{\frac{1}{4}}, \quad b_{2n} = r^{2n}(r^{2n}-1), \quad b_{2n+1} = r^{4n+2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

was nach Unterdrückung des Faktors $r^{\frac{1}{4}}$ in Reihe und Kettenbruch für $x = 1$, $r^2 = a$ mit der Forme

*) CRELLEs Journal f. Mathematik 29, 1846, S. 96, Mathematische Abhandlungen von G. EISENSTEIN, Berlin 1847, S. 175; vergl. auch die zweite Fußnote auf der folgenden Seite.

**) CRELLEs Journal f. Mathematik 27, 1844, S. 75, siehe besonders S. 78.

***) Siehe *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes* II, Paris 1905, S. 423—425, vergl. auch das Briefbruchstück Nr. 387, S. 340.

†) Vergl. STIELTJES, a. a. O. S. 424, Gleichung (γ).

von GAUSS übereinstimmt. Reihe und Kettenbruch von GAUSS konvergieren*) für $|a| < 1$, sie sind also in dem ersten Beispiele der Nr. 7, wo $a = 2$ ist, beide divergent.

Die Tagebuchaufzeichnung, von der hier die Rede ist, stellt das älteste unmittelbare Zeugnis dafür dar, daß GAUSS sich mit den Potenzreihen beschäftigt hat, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, vergl. die Bemerkungen oben S. 262, 266 und den in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatz »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

EISENSTEIN ist im Juli 1844 nach Göttingen gekommen (siehe *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* IV, Altona 1862, S. 265, 266); der vom Dezember 1843 datierte Aufsatz im 27. Bande des CRELLEschen Journals ist also sicher nicht unmittelbar von GAUSS beeinflußt. Dagegen könnte dem *Theorema* im 29. Bande des Journals eine persönliche Anregung von GAUSS vorangegangen sein; man ist versucht, die einleitenden Worte**) geradezu für die Wiedergabe einer von GAUSS getanen Außerung zu halten.

KLEIN. SCHLESINGER.

[59.]

Formularum integralium formae:

$$\int e^{-t^\alpha}\, dt \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{\sqrt[\beta]{(1+u^\gamma)}}$$

inter se comparationem institui.

[1797] M[a]rt. 2.

Wahrscheinlich sind hier die zwischen den Grenzen 0 und $+\infty$ genommenen bestimmten Integrale gemeint. Die Substitutionen

$$t^\alpha = x \text{ beziehungsweise } u^\gamma = \frac{x}{1-x}$$

ergeben nämlich

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}\, dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}\, dx,$$

$$(2) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}} = \frac{1}{\gamma}\int_0^1 x^{\frac{1}{\gamma}-1}(1-x)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}-1}\, dx,$$

*) Vergl. EISENSTEIN, Mathem. Abhandlungen, S. 178.

**) »Invenit vir clarissimus GAUSS [*Summatio quarundam serierum singularium*, 1811, art. 8., Werke II, S. 20] aequalitatem inter duas expressiones abstrusiores hancce

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + \text{etc.} = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^7} \text{ etc.}$$

Non minus memorabilis videatur eiusdem seriei evolutio sequens

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + \text{etc.} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2-x}{1-\text{etc.}}}}«$$

so daß die Beziehung zwischen den Integralen (1) und (2) auf die bekannte Gleichung zwischen den EULERschen Integralen hinauskommt, die EULER in der Abhandlung *Evolutio formulae integralis* $\int x^{f-1}dx\,(lx)^{\frac{m}{n}}$ *integratione a valore* $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extensa**) angegeben hat, und die in den jetzt üblichen Bezeichnungen so lautet:

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

vergl. auch den art. 28. der GAUSSschen Abhandlung *circa seriem* vom Jahre 1812, Werke III, S. 251.

SCHLESINGER.

[60.]

Cur ad aequationem perveniatur gradus nn^{ti} dividendo curvam lemniscatam in n partes.

[1797] M[a]rt. 19.

Während der Grad der Gleichung, von der die Teilung des Kreises in n gleiche Teile abhängt, gleich der Anzahl der Teile ist, so ergab sich für die mit Hilfe des EULERschen Additionstheorems gebildete Gleichung, von der die Teilung der Lemniskate in n Teile abhängt, der Grad gleich n^2. Der Grund hierfür, d. h. die Bedeutung nicht nur der n realen, sondern auch der $n^2 - n$ komplexen Wurzeln**), ergibt sich nur aus der doppelten Periodizität der lemniskatischen Funktion. GAUSS hatte also am 19. März 1797 bereits die doppelte Periode entdeckt. Damit war ihm der Weg eröffnet zur Auffindung der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen von sinus und cosinus lemniscaticus und zur Darstellung dieser Funktionen als Quotienten doppelt unendlicher Produkte; siehe die oben S. 153 ff. in den art. [2.]—[6.] abgedruckten Leisteaufzeichnungen. Ferner fand er sich genötigt, seine Funktionen auch für komplexe Werte des Arguments zu betrachten. In der Tat findet sich auf dem letzten Blatte des *Tagebuchs*, mit dem etwas verwischten, aber noch deutlich erkennbaren Datum »1797, Apr. 15.«, also im unmittelbaren Anschluß an die in den Tagebuchnotizen Nr. 60 bis Nr. 63 angezeigten Entdeckungen, die Aufzeichnung:

Quantitates imaginariae: Quaeritur criterium generale, secundum quod functiones plurium variabilium complexae ab incomplexis dignosci possint.

Zur Lemniskatenteilung selbst vergl. die oben S. 160 ff. im Abschnitt [III.] zusammengestellten Aufzeichnungen, ferner die Tagebuchnotiz Nr. 62, und die berühmte Stelle im art. 335. des siebenten Abschnitts der *Disquisitiones arithmeticae* (1801), Werke I, S. 412, 413.

SCHLESINGER.

[61.]

A potestatibus Integ[ralis]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \qquad (0\ \ldots\ 1)$$

*) Novi Commentarii Acad. Petrop. **16** (1771), 1772, S. 91, L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 17, S. 316, siehe insbesondere § 25, S. 330 und das *Supplementum*, S. 354 der Opera.

**) Vergl. oben S. 162 das »Determ. rad. imag.« für die Fünfteilung. Im Text der Tagebuchaufzeichnung hieß das zweite Wort (vergl. die Nachbildung) ursprünglich plures; GAUSS wollte also etwa schreiben: Warum mehr als n Wurzeln vorhanden sind u.s.w.

pendet

$$\Sigma\left(\frac{mm+6mn+nn}{(mm+nn)^4}\right)^k.$$

[1797 Mart.]

Es ist für positive ganzzahlige Werte von k

$$S_k = \sum_{m,n}\left\{\frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(m^2+n^2)^4}\right\}^k = \tfrac{1}{2}\sum_{m,n}\left\{\frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^4}+\frac{1}{(m-n\sqrt{-1})^4}\right\}^k,$$

wo m, n alle Paare ganzer Zahlen mit Ausnahme von $m=0$, $n=0$ durchlaufen. Die S_k lassen sich also in einfacher Weise durch die

$$s_k = \sum_{m,n}\frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^{4k}} \qquad (k=1, 2, 3, \ldots)$$

ausdrücken, und von dieser Summe läßt sich leicht zeigen, daß sie sich von der k-ten Potenz der Größe

$$\Pi = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

nur durch einen rationalen Zahlenfaktor unterscheidet. Man braucht dazu nur auf die Formeln zurückzugreifen, die GAUSS um dieselbe Zeit (März 1797) in den LEISTE eingetragen hat, und die in dem Abschnitt [II.] über *Lemniskatische Funktionen*, oben S. 153 ff. abgedruckt sind. Man nehme nämlich von den einzelnen Faktoren des doppelt unendlichen Produkts, das in der Darstellung von sinlemn x, oben art. [2.], S. 153 den Zähler bildet, den Logarithmus, also $\log\left(1-\frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^4}\frac{x^4}{\Pi^4}\right)$, entwickle diesen nach Potenzen von $\left\{\frac{1}{m+n\sqrt{-1}}\frac{x}{\Pi}\right\}^4$ und summiere in bezug auf m, n wie angegeben. Man erhält dann für den Logarithmus des Zählers von sinlemn x, abgesehen von dem Gliede $\log x$, eine nach Potenzen von $\frac{x^4}{\Pi^4}$ fortschreitende Reihe, in der der Koeffizient von $-\frac{1}{k}\frac{x^{4k}}{\Pi^{4k}}$ gleich s_k ist. Vergleicht man diese Reihe mit der auf anderem Wege erhaltenen Entwickelung dieses Zählerlogarithmus (siehe oben art. [10.], S. 159 den »log. Numeratoris«), wo die Koeffizienten rationale Zahlen sind, so ergibt sich die Richtigkeit unserer Aussage. Man wird mit Sicherheit behaupten können, daß GAUSS diesen Gedankengang verfolgt hat, da es sich so am ungezwungensten erklärt, weshalb GAUSS damals gerade auch die Entwickelungen der Logarithmen von Zähler und Nenner des sinlemn x aufgezeichnet hat; vergl. auch die sehr viel spätere Aufzeichnung (auf S. 88 des Mai 1809 begonnenen Handbuchs 19, Be), die Werke III, S. 408 abgedruckt ist. Allerdings würde dann das $mm+6mn+nn$ in unserer Tagebuchnotiz als Schreibfehler für $m^4-6m^2n^2+n^4$ gelten müssen, was aber umso eher angeht, als die Größe

$$\frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(m^2+n^2)^4}$$

in dem Doppelprodukt oben S. 153 wirklich vorkommt und auch die Summe S_1 noch an zwei andern Stellen dieser Leisteaufzeichnung (oben S. 155, 156) erscheint. GAUSS würde dann hier zum ersten Male in der Entwicklungsgeschichte der elliptischen Funktionen die Klasse von Reihen betrachtet haben, die in allgemeinster Form in EISENSTEINS Abhandlung *Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind* *) auftreten.

KLEIN. SCHLESINGER.

*) CRELLES Journal für Mathematik **35**, 1847, S. 153, Mathematische Abhandlungen, 1847, S. 213.

[62.]

Lemniscata geometrice in quinque partes dividitur.

[1797] M[a]rt. 21.

»Geometrice« heißt mit Zirkel und Lineal. Die Gleichung für die Fünfteilung siehe oben S. 161 ff. artt. [4.] und [5.], die algebraische Darstellung ihrer reellen Wurzeln ebenda und S. 163, art. [6.]. Vergl. auch die bei der Nr. 60 angeführte Stelle der *Disquisitiones arithmeticae*, wobei jedoch zu bemerken ist, daß schon der Graf FAGNANO im II. Bande der *Produzioni matematiche* (Pesaro, 1750), S. 356 ff. *) gezeigt hat, daß die Lemniskate sich »algebraisch« in gleiche Teile zerlegen lasse, wenn die Anzahl der Teile in einer der drei Formen 2.2^m, 3.2^m, 5.2^m enthalten ist, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet. Anknüpfend an die bei der Nr. 60 erwähnte Stelle der *Disquisitiones arithmeticae* und durch Anwendung der von GAUSS für die Kreisteilung geschaffenen Methode hat N. H. ABEL in seinen *Recherches sur les fonctions elliptiques* (CRELLES Journal für Mathematik **2**, 1827, und **3**, 1828, Oeuvres, nouvelle édition, I, 1881, S. 261 ff.) nachgewiesen, daß die Teilung der Lemniskate in n gleiche Teile für diejenigen Werte von n mit Zirkel und Lineal bewirkt werden kann, für die dies beim Kreise möglich ist (siehe Oeuvres I, S. 314 und 361).

KLEIN. SCHLESINGER.

[63.]

Inter multa alia Curvam Lemniscatam spectantia observavi:

[1)] Numeratorem sinus decompositi, arcus duplicis esse = 2 Num. Denom. Sinus $\times$ Num. Den[om]. Cos. arcus simpl[icis];

[2)] Denominatorem vero = (Num. sin.)^4 + (Denom. sin.)^4.

[3)] Iam si hic denominator pro arcu ϖ' ponatur θ, erit Denom[inator] sin arcus $k\varpi'$, $= \theta^{kk}$.

[4)] Iam

$$\theta = 4{,}810480,$$

[5)] cuius numeri logarithmus hyperbolicus est

$$= 1{,}570796 \quad \text{i. e.} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

quod maxime est memorabile, cuiusque proprietatis demonstratio gravissima analyseos incrementa pollicetur.

[1797] Mart. 29.

Man findet die hier zusammengestellten fünf Aussagen in den oben S. 156 ff. artt. [7.] und [8.] abgedruckten Leisteaufzeichnungen entwickelt. Setzt man wie a. a. O.

$$\sin\operatorname{lemn}\varphi = \frac{M(\varphi)}{N(\varphi)}, \quad \cos\operatorname{lemn}\varphi = \frac{\mu(\varphi)}{\nu(\varphi)},$$

*) Opere matematiche del MARCHESE G. C. DE' TOSCHI DI FAGNANO, II, 1911, S. 304 ff. *Metodo per misurare la lemniscata*, Schediasma II.

so ist nach den beiden ersten Aussagen (siehe oben S. 157)

$$M(2\varphi) = 2M(\varphi)N(\varphi)\mu(\varphi)\nu(\varphi),$$
$$N(2\varphi) = M(\varphi)^4 + N(\varphi)^4.$$

Die hier in der Tagebuchaufzeichnung mit π^l bezeichnete Größe wird in der Leistehandschrift mit Π bezeichnet, wir haben dafür in dem Abdruck das von GAUSS später stets benutzte ϖ gesetzt. Die hier mit θ bezeichnete Größe heißt im LEISTE (siehe oben S. 157) $2\alpha^4$; es ist also nach der dritten Aussage (siehe oben S. 157)

$$N(\varpi) = \theta, \quad N(k\varpi) = \theta^{kk}$$

für ein ganzes positives k. Ferner ist nach der vierten und fünften Aussage (siehe oben S. 158)

$$N(\varpi) = 4{,}81048, \quad \log 4{,}81048 = 1{,}5708 = \frac{\pi}{2}.$$

Die »demonstratio« der hier nur durch numerische Rechnung erkannten Eigenschaft [5)] gelingt GAUSS erst im Juli 1798; vergl. die Bemerkungen zu der Tagebuchaufzeichnung Nr. 92.

KLEIN. SCHLESINGER.

[64.]

Demonstrationes elegantiores pro nexu divisorum formae $\square - a$, $+1$ cum -1, ± 2 inveni.

[1797] Iun. 17. Gotting[ae]

Dies bezieht sich auf die in den artt. 147.—150. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 113 behandelte Frage. Es werden dort bezüglich der Teiler von $x^2 - a$ die Fälle unterschieden:

1) a von der Form $4n+1$ oder $-(4n-1)$,
2) a von der Form $-(4n+1)$ oder $4n-1$,
3) a von der Form $\pm(4n+2)$.

Man würde also die Aufzeichnung zu lesen haben: Demonstrationes elegantiores pro nexu divisorum formae $\square - a$ cum $+1$, -1, ± 2 inveni. (Nach einer Mitteilung von S. GUNDELFINGER in einem Briefe an F. KLEIN vom 10. April 1903.)

BACHMANN.

[65.]

Deductionem secundam theoriae polygonorum excolui.

[1797] Iul. 17. Gotting[ae]

Vergl. die folgende Notiz.

[66.]

Per utranque methodum monstrari potest puras tantum aequationes solvi oportere.

[1797 Iul.]

Außer der Methode des art. 352. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 431) hat GAUSS für die Lösung der Kreisteilungsgleichung noch eine auf der Anwendung der LAGRANGEschen Resolvente [(vergl.

die Tagebuchnotiz Nr. 37) beruhende Methode angegeben, die im art. 360. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 450) auseinandergesetzt ist. Am Schluß des art. 18. der nachgelassenen Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* (Werke II, S. 263) spricht GAUSS von gewissen allgemeinen Untersuchungen, »quae theoriam secundam aequationum purarum in art. 360. *Disquiss. Arithm.* inchoatam magis illustrant«; daraus geht hervor, daß er in der Tagebuchnotiz Nr. 65 mit der deductio secunda eben die Methode des art. 360. meint. Es scheint übrigens, daß GAUSS das Wesen dieser Methode schon erkannt hatte, als er die Tagebuchnotiz Nr. 55 schrieb, und daß es sich bei Nr. 65 nur mehr um die vollständige Durchführung handelte. Die Notiz Nr. 66 hebt hervor, daß beide Methoden die Lösung der Kreisteilungsgleichung durch reine Gleichungen, d. h. durch Wurzelzeichen ermöglichen. Vergl. den Artikel 15 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 37.

BACHMANN.

[67.]

Quod Oct. 1. per ind[uctionem] invenimus demonstratione munivimus.

[1797] Iul. 20.

Siehe oben S. 505 die Notiz Nr. 39 vom 1. Oktober 1796 und die zugehörige Anmerkung. Der Beweis findet sich im art. 358. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 445.

KLEIN. BACHMANN.

[68.]

Casum singularem solutionis congruentiae

$$x^n - 1 \equiv 0$$

(scilicet quando cong[ruentia] aux[iliaris] radices aequales habet), qui tam diu nos vexavit, felicissimo successu vicimus, ex congruentiarum solutione, si modulus est numeri primi potestas.

[1797] Iul. 21.

Vergl. hierzu die *Annotatio* zum art. 251. der *Analysis Residuorum*, Werke II. S. 209, und die zu diesem Artikel gehörige Bemerkung von DEDEKIND ebenda, S. 241, ferner das Ende des art. 363. ebenda S. 232 und den art. 372. ebenda S. 237. Siehe auch den Artikel 16 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 42.

KLEIN. BACHMANN.

[69.]

Si

$$\text{(A)} \qquad x^{\mu+\nu} + ax^{\mu+\nu-1} + bx^{\mu+\nu-2} + \cdots + n$$

per

$$\text{(B)} \qquad x^{\mu} + \alpha x^{\mu-1} + \beta x^{\mu-2} + \cdots + m$$

dividatur atque omnes coefficientes in (A) a, b, c, etc. sint numeri integri, coefficientes vero omnes in (B) rationales, etiam hi omnes erunt integri ultimumque n ultimus m metietur.

[1797] Iul. 23.

Dieser Satz wird im art. 42. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 34 bewiesen. GAUSS benutzt ihn auch im art. 341. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 418, 419 beim Beweise der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für den Fall eines Primzahlgrades. Mithin muß GAUSS die Aussage der Tagebuchnotiz Nr. 40, die ja auf den Satz des art. 341. hinausläuft, am 9. Oktober 1796 entweder anders als in den *Disquisitiones arithmeticae* oder noch nicht vollständig bewiesen haben. Vergl. auch die Anmerkung zum art. 42. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 475, wo das Datum 1797 Jul. 22. angegeben ist. — In der Handschrift stehen in den Exponenten der Ausdrücke (A), (B) die Buchstaben m, n statt μ, ν.

KLEIN. LOEWY.

[70.]

Forsan omnia producta ex

$$(a+b\rho+c\rho^2+d\rho^3+\cdots)$$

designante ρ omnes radices prim[itivas] aeq[uationis] $x^n = 1$ ad formam

$$(x-\rho y)(x-\rho^2 y)\ldots$$

reduci possunt [*)]. Est enim:

$$(a+b\rho+c\rho^2)\times(a+b\rho^2+c\rho) = (a-b)^2+(a-b)(c-a)+(c-a)^2$$
$$(a+b\rho+c\rho^2+d\rho^3)\times(a+b\rho^3+c\rho^2+d\rho) = (a-c)^2+(b-d)^2$$
$$(a+b\rho+c\rho^2+d\rho^3+e\rho^4+f\rho^5)\times \qquad = (a+b-d-e)^2$$
$$-(a+b-d-e)(a-c-d-f)+(a-c-d-f)^2$$
$$= (a+b-d-e)^2$$
$$+(a+b-d-e)(b+c-e-f)+(b+c-e-f)^2.$$

Vid. Febr. 4.

Falsum est. Hinc enim sequeretur, e binis numeris in forma Pr[oducti] e $(x-\rho y)$ contentis productum in eadem forma esse, quod facile refutatur.

[1797 Iul.]

Im zweiten und dritten Gliede der letzten Gleichung scheinen einige Vorzeichen verschrieben zu sein, denn es gilt die Identität:

$$-(a+b-d-e)(a-c-d+f)+(a-c-d+f)^2 = -(a+b-d-e)(b+c-e-f)+(b+c-e-f)^2.$$

KLEIN. SCHLESINGER.

[*) In der Handschrift steht potest.]

[71.]

Radicum aeq[uationis] $x^n = 1$ periodi plures eandem summam habere non possunt demonstratur.

[1797] Iul. 27. Gott[ingae]

Vergl. die Notiz Nr. 73 vom 1. August 1797.

[72.]

Plani possibilitatem demonstravi.

[1797] Iul. 28. Gotting[ae]

Am 6. März 1832 schreibt GAUSS an WOLFGANG BOLYAI (Werke VIII, S. 224): »Um die Geometrie vom Anfange an ordentlich zu behandeln, ist unerläßlich, die Möglichkeit eines Planums zu beweisen; die gewöhnliche Definition enthält zu viel, und implicirt eigentlich subreptive schon ein Theorem. Man muß sich wundern, daß alle Schriftsteller von EUKLID bis auf die neuesten Zeiten so nachlässig dabei zu Werk gegangen sind«. Wohl veranlaßt durch den Brief an BOLYAI hat GAUSS im März 1832 seine *Begründung des Planum* im Handbuch 19, Be, S. 153 aufgezeichnet, sie ist abgedruckt Werke VIII, S. 194; an derselben Stelle findet man auch unter [2.] eine kurze, aus der Zeit zwischen 1820 und 1830 stammende Notiz über die Notwendigkeit eines Beweises für die Möglichkeit der Ebene. Man vergleiche ferner den Brief an BESSEL vom 27. Jan. 1829, Werke VIII, S. 200.

STÄCKEL.

[73.]

Quod Iul. 27. inscrips[imus] errorem involvit: sed eo felicius nunc rem exhausimus, quoniam probare possumus nullum periodum esse posse numerum rationalem.

[1797] Aug. 1.

Würden die Notizen Nr. 71 und 73 auf die Kreisteilung, nämlich auf die Einheitswurzeln vom Primzahlgrad bezogen, so wären sie unmittelbare Folgerungen aus der Aussage der Notiz Nr. 40 vom 9. Oktober 1796, d. h. aus der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung; dann wäre aber bei Nr. 71 nichts Falsches. Wie S. GUNDELFINGER in einem Briefe an KLEIN vom 10. April 1903 bemerkt, wird aber GAUSS in der Nr. 71 unter n jedenfalls eine beliebige zusammengesetzte Zahl verstanden haben, und es kämen demnach hier Sätze in Betracht, wie sie zuerst E. E. KUMMER *) aufgestellt hat. Bedeutet n eine zusammen-

*) E. E. KUMMER, *Theorie der idealen Primfaktoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist*, Abhandlungen der Akademie der Wissensch. zu Berlin (1856) 1857, Mathem. Abh., S. 1; siehe auch zwei Abhandlungen von L. FUCHS in CRELLES-Journal f. Mathematik **61**, 1863, S. 374 und **65**, 1866, S. 74, FUCHS' Werke I, S. 53 und S. 69.

gesetzte Zahl, so enthält die Nr. 71 in der Tat einen Irrtum, indem die Perioden einer Gruppe (nach KUMMER a. a. O. § 2) dann einander gleich werden können, wenn sie verschwinden. Dies kann GAUSS, wenn er, wie sehr wahrscheinlich, die Perioden ebenso wie KUMMER definiert hat, nachträglich sehr wohl erkannt haben und die Nr. 73 bedeutet dann, wenn auch keinen Ersatz für die Aussage der Nr. 71, so doch einen erheblichen Fortschritt in der Erkenntnis dieser Verhältnisse. Unter einer rationalen Zahl wäre in der Nr. 73 eine von Null verschiedene zu denken.

BACHMANN.

[74.]

Quomodo periodorum numerum duplicando signa adornare oporteat.

[1797 Aug.]

Hier ist wohl folgendes gemeint. Geht man von den e Perioden mit f Gliedern η_i (Voraussetzung ist ein gerades f) zu den $2e$ Perioden mit $\frac{f}{2}$ Gliedern η_i' über, so sind diese durch jene mittels quadratischer Gleichungen bestimmt und es fragt sich, welches Vorzeichen der bei der Auflösung dieser Gleichungen auftretenden Quadratwurzeln einer jeden der kleinern Perioden zukommt.

BACHMANN.

[75.]

Functionum primarum multitudinem per analysin simplicissimam erui.

[1797] Aug. 26.

Der Anfang einer bezüglichen Tabelle ist bei S. 5 des LEISTE aufgezeichnet; man vergl. die artt. 343, 344. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 220.

DEDEKIND.

[76.]

Theorema: Si

$$1 + ax + bxx + \text{etc.} + mx^{\mu}$$

est functio secundum modulum p prima, erit:

$$d + x + x^{p} + x^{pp} + \text{etc.} + x^{p^{\mu-1}}$$

per hanc f[un]ct[io]nem s[e]c[un]d[u]m hunc modulum divisibilis etc. etc.

[1797] Aug. 30.

Vergl. den art. 356. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 227.

BACHMANN.

[77.]

Demonstratum, viaque ad multa maiora per introd[uctionem] modulorum multiplicium strata.

[1797] Aug. 31.

Vergl. die Nr. 76. Siehe den art. 372. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 237.

BACHMANN.

[78.]

Aug. 1. generalius ad quosvis modulos adaptatur.

[1797] Sept. 4.

Hier ist Aug. 1. wohl ein Schreibfehler für Aug. 31., denn es handelt sich ohne Zweifel um den allgemeinsten Fall dessen, was in der Nr. 76 für einen Primzahlmodul, in der Nr. 77 für einen Modul, der eine Primzahlpotenz ist, bewiesen worden und nun für einen ganz beliebigen Modul erledigt wird. Mit der Nr. 73 vom 1. August hat diese Notiz offenbar nichts zu tun.

BACHMANN.

[79.]

Principia detexi, ad quae congruentiarum secundum modulos multiplices resolutio ad congruentias secundum modulum linearem reducitur.

[1797] Sept. 9.

Vergl. die Nr. 77 vom 31. August 1797, ferner die artt. 372 ff. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 237.

BACHMANN.

[80.]

Aequationes habere radices imaginarias methodo genuina demonstratum.

Bruns[vigae, 1797] Oct.

Prom[ulgatum] in dissert[atione] pecul[iari*)] mense Aug. 1799.

Siehe Werke III, S. 1. GAUSS ist auf Grund dieser Dissertation am 16. Juli 1799 **) von der philosophischen Fakultät der Universität Helmstedt zum Doktor promoviert worden.

SCHLESINGER.

[*) *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi posse.* Helmstadii apud C. G. FLECKEISEN, 1799.]

**) Siehe den Brief an W. BOLYAI vom 16. Dezember 1799, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai*, herausgegeben von F. SCHMIDT und P. STÄCKEL, Leipzig 1899, S. 34. In seiner Schrift: *K. F. Gauss, Zwölf Kapitel aus seinem Leben*, Leipzig 1878, bezeichnet L. HÄNSELMANN, S. 47, fälschlich den 14. Juli als den Tag, an dem »das Diplom ausgefertigt« wurde. Daß der 16. Juli der richtige Tag ist,

[81.]

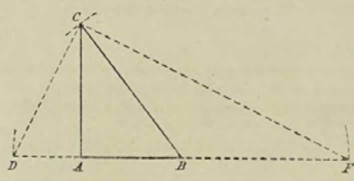
Nova theorematis PYTHAGORAEI dem[onstratio].

Bruns[vigae, 1797] Oct. 16.

Der Beweis ist im Nachlaß vorhanden:

Nova theorematis pythagoraei demonstratio.

[Zettel in Ff, Kapsel 41.]



Theorema.

Si trianguli ABC angulus sit rectus, erit

$$AB^{qu} + AC^{qu} = BC^{qu}.$$

Demonstr[atio].

Producatur AB utrinque fiatque

$$BD = BF = BC.$$

Tum triangula CBD, CBF erunt isocelia et anguli

$$BDC = BCD; \quad BCF = BFC.$$

At

$$BDC + DCB + BCF + CFB = 2 \text{ Rectis.}$$

Quare $DCB + BCF$ erit = Recto. Hinc Angulus $CDA = ACF$ et triangula

wird bestätigt von P. ZIMMERMANN, *Zum Gedächtniss an Karl Friedrich Gauss*, Braunschweigisches Magazin 5, 1899, Heft 15; dieser hat die Akten der Helmstedter Fakultät eingesehen. Das Gesuch von GAUSS war am 26. Juni 1799 eingereicht worden und bereits am 28. Juni erstattete PFAFF, der die Dissertation schon kannte (vergl. die oben S. 99—105 abgedruckten Briefe), sein Gutachten. Die mündliche Prüfung wurde erlassen und das Diplom, wie es scheint, vor dem Druck der Dissertation ausgestellt, nachdem die Gebühren durch den Herzog von Braunschweig bezahlt worden waren.

ACD, AFC similia. Quare

$$AC : AD = AF : AC$$

et AC^{qu} = Rectg. sub AD et AF i. e. sub $BC - AB$ et $BC + AB$. Hinc (EUCL. Elem. II)

$$AC^{qu} = BC^{qu} - AB^{qu}$$

et

$$AC^{qu} + AB^{qu} = BC^{qu} \qquad QED.$$

[82.]

Seriei

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 \ldots$$

summam consideravimus invenimusque eam = 0, si

$$2\sqrt{x} + \frac{3}{16}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{21}{1024}\frac{1}{\sqrt{.3x}} \cdots = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi.$$

Brunsv[igae, 1797] Oct. 16.

Eine Erläuterung und Bestätigung dieser Aufzeichnung findet man oben S. 388—389. Hier möge nur wiederholt werden, daß in der Gleichung linker Hand im dritten Gliede statt $\sqrt{.3x}$ gelesen werden muß $\sqrt{x^3}$.

SCHLESINGER.

[83.]

Positis:

$$l(1+x) = \varphi' x; \quad l(1+\varphi' x) = \varphi'' x; \quad l(1+\varphi'' x) = \varphi''' x, \quad \text{etc.}$$

erit

$$\varphi^i x = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{3}{2} i}} + \cdots.$$

Brunsv[igae, 1798] Apr. [*)]

In dieser Aufzeichnung wird die von einer Funktion $l(1+x)$ gebildete i-te Iterierte $\varphi^{(i)}(x)$ durch eine Reihe dargestellt, von der das allein angegebene erste Glied vermuten läßt, daß sie zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von $\varphi^{(i)}(x)$ für große Werte des Index i dienen soll. Welche Funktion GAUSS hier unter $l(1+x)$ versteht, läßt sich unmittelbar weder aus der Aufzeichnung selbst noch aus

[*)] Die Unterbrechung in den Eintragungen vom 16. Oktober 1797 bis zum April 1798 läßt darauf schließen, daß GAUSS, als er sich Mitte Oktober 1797 nach Göttingen begab, das Tagebuch in Braunschweig zurückgelassen hatte. Erst nach seiner Rückkehr setzt er die Aufzeichnungen fort.]

andern Stücken des Nachlasses feststellen. Man könnte daran denken, $l(1+x)$ mit dem natürlichen Logarithmus oder mit der in dem *Specimen termini medii etc.* (oben, S. 172) auftretenden Funktion, die im art. [3.] (oben, S. 174) mit $l(1+x)$ bezeichnet wird, zu identifizieren, d. h. also in der Umgebung von $x = 0$ zu setzen

$$(1) \qquad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

oder

$$(2) \qquad l(1+x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} - \frac{9}{112}x^4 + \cdots;$$

aber diese beiden Möglichkeiten scheiden aus, da, wie sich alsbald zeigen wird, für die beiden Funktionen (1), (2) das Anfangsglied der Entwicklung der i-ten Iterierten anders lautet, als GAUSS es angibt. Wir wollen vielmehr fragen, was sich aus dem GAUSSschen Anfangsgliede für die Funktion $l(1+x)$ erschließen läßt, wenn wir annehmen, daß diese Funktion in der Umgebung von $x = 0$ in der Form

$$(3) \qquad l(1+x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

entwickelbar ist.

Setzt man

$$(4) \qquad l(1+x) = x_1, \quad l(1+x_1) = x_2, \quad \ldots, \quad l(1+x_i) = x_{i+1}, \quad \ldots,$$

so gilt für $x_i = \varphi^{(i)}(x)$ die Funktional- oder Differenzengleichung

$$(5) \qquad x_{i+1} = x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \cdots.$$

Diese Gleichung ist als besonderer Fall in der Gleichung

$$(6) \qquad x_{i+1} = a x_i + \sum A_{\lambda\mu}\left(\frac{1}{i}\right)^{\lambda} x_i^{\mu} \qquad (\lambda = 1,\ \mu = 0;\ \lambda + \mu \geqq 1)$$

enthalten, die J. HORN unter der Voraussetzung $a \neq 1$ im ersten Teile seiner Abhandlung *Laplacesche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen* *) untersucht. Den Fall $a = 1$, der nach (5) gerade für uns hier in Betracht kommt **), hat HORN a. a. O. nicht behandelt; in einer brieflichen Mitteilung gibt er darüber die folgenden Erörterungen. Die Gleichung (5), oder wie wir schreiben wollen:

$$(7) \qquad x_{i+1} = x_i + a_{m+1} x_i^{m+1} + a_{m+2} x_i^{m+2} + \cdots,$$

wo $a_{m+1} \neq 0$ sein soll, wird formal durch eine Reihe von der Form

$$(8) \qquad x_i = \sum C_{\lambda\mu}\, i^{-\frac{\lambda+1}{m}}\left(\frac{\log i}{i}\right)^{\mu} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

befriedigt, in der die Koeffizienten durch Rekursionsformeln bestimmt werden, bis auf C_{m0}, das als willkürliche Konstante (oder periodische Funktion von i mit der Periode 1) anzusehen ist. Der Anfangskoeffizient C_{00} ergibt sich, da

$$x_{i+1} - x_i = C_{00}\left\{(i+1)^{-\frac{1}{m}} - i^{-\frac{1}{m}}\right\} + \cdots = C_{00}\, i^{-\frac{1}{m}}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-\frac{1}{m}} - 1\right\} + \cdots = -\frac{C_{00}}{m}\, i^{-\frac{m+1}{m}} + \cdots,$$

$$a_{m+1} x_i^{m+1} + \cdots = a_{m+1} C_{00}^{m+1}\, i^{-\frac{m+1}{m}} + \cdots$$

*) CRELLES Journal für Mathematik **146**, 1915, S. 95.

**) Die Begründung dafür, daß hier nur die Form (5), also die Form (3) der Entwicklung von $l(1+x)$ in Betracht kommt, geben wir weiter unten.

ist, aus der Gleichung

$$-\frac{C_{00}}{m} = a_{m+1} C_{00}^{m+1};$$

die Reihe (8) lautet also, wenn wir nur das Anfangsglied hinschreiben,

$$(9) \qquad x_i = \sqrt[m]{-\frac{1}{m\, a_{m+1}\, i}} + \cdots.$$

Um Übereinstimmung mit dem Anfangsgliede von GAUSS zu erzielen, hat man zu nehmen

$$(10) \qquad m = 3, \quad a_{m+1} = -\tfrac{1}{2},$$

d. h. für $l(1+x)$ eine Entwicklung in der Umgebung von $x = 0$ von der Form

$$(11) \qquad l(1+x) = x - \frac{x^4}{2} + x^5\,\mathfrak{P}(x),$$

wo $\mathfrak{P}(x)$ eine beliebige in der Umgebung von $x = 0$ konvergente gewöhnliche Potenzreihe bedeutet. Dagegen würde für die Annahmen (1) bezw. (2) das Anfangsglied der Entwicklung (8) $\frac{2}{i}$ bezw. $\frac{4}{i}$ lauten.

HORN bemerkt weiter, daß nunmehr mit Hilfe der von ihm sonst angewandten Methoden die Reihe (8) mit den Lösungen der Differenzengleichung (7) in Verbindung zu bringen und, um aus (8) eine asymptotische Reihe für die i-te Iterierte x_i zu erhalten, das noch willkürliche C_{m0} in der Weise zu bestimmen wäre, daß die entsprechende Lösung von (7) die Anfangsbedingung $x_0 = x$ erfüllt.

Will man sich aber darauf beschränken, die quantitative Bedeutung des ersten Gliedes der Reihe (8) hervortreten zu lassen, so bedarf es nur der sehr viel einfacheren Methoden, die L. LEAU *) angegeben hat. Da bei GAUSS nur das erste Glied angegeben ist, so erscheint diese Beschränkung gerechtfertigt. Als weitere Vereinfachung wollen wir annehmen, daß die Koeffizienten $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ in der Gleichung (7) reell sind, und daß auch x eine reelle Veränderliche bedeutet, eine Annahme, die GAUSS im Jahre 1798 sicher gemacht haben wird. Wir schließen uns nun an LEAU **) an.

Nach (7) oder

$$(7)' \qquad x_i = x_{i-1} + a_{m+1} x_{i-1}^{m+1} + a_{m+2} x_{i-1}^{m+2} + \cdots$$

hat man

$$(12) \qquad \frac{1}{x_i^m} = \frac{1}{x_{i-1}^m} - h(x_{i-1}),$$

wo

$$(13) \qquad h(x) = \frac{1}{x^m} - \frac{1}{x_1^m} = m\, a_{m+1} + \cdots$$

in der Umgebung von $x = 0$ holomorph ist. Aus (12) folgt

$$\frac{1}{x_i^m} = \frac{1}{x^m} - \left\{h(x) + h(x_1) + \cdots + h(x_{i-1})\right\}$$

oder

$$(14) \qquad x_i^m = \frac{x^m}{1 - (h(x) + \cdots + h(x_{i-1}))\, x^m}.$$

Setzt man

$$(15) \qquad h(x) = m\, a_{m+1}(1 + \delta(x)),$$

*) *Étude sur les équations fonctionnelles etc.* Thèses, Paris 1897, auch Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **11**, Abhandlung E.

**) A. a. O., Chapitre III, S. 29 ff.

so ist $\delta(0) = 0$ und $\delta(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ holomorph. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, daß a_{m+1} negativ sei; für die bei GAUSS vorliegende Form (11) von $l(1+x)$ tritt dies wirklich ein. Dann ist für hinreichend kleine positive Werte von x erstens $0 < x_1 < x$, und man kann zweitens x so klein wählen, daß $|\delta(x)| < K < 1$ sei. Ein in dieser Weise abgegrenzter Bereich positiver Werte von x heiße G. Liegt x innerhalb G, so gilt also das gleiche von jedem x_i und es ist folglich auch $|\delta(x_i)| < K < 1$; wir haben also nach (14) und (15)

$$x_i^m = \frac{x^m}{1 - i m a_{m+1} x^m \left(1 + \frac{1}{i}(\delta(x) + \delta(x_1) + \cdots + \delta(x_{i-1}))\right)}, \tag{16}$$

und da

$$\frac{1}{i}|\delta(x) + \delta(x_1) + \cdots + \delta(x_{i-1})| < K < 1$$

ist, so folgt $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^m = 0$, also auch $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$. Für ein dem Bereiche G angehöriges x und ein beliebig kleines positives ε kann man also k so groß wählen, daß für $i \geqq k$, $|\delta(x_i)| < \varepsilon$ ist. Dann ist

$$\frac{1}{i}|\delta(x) + \delta(x_1) + \cdots + \delta(x_{i-1})| < \frac{kK + (i-k)\varepsilon}{i},$$

wo die rechte Seite für $i \to \infty$ den Grenzwert ε hat. Schreibt man nun (16) in der Form

$$i x_i^m = \frac{1}{-m a_{m+1} + \frac{1}{i x^m} - m a_{m+1} \frac{1}{i}(\delta(x) + \delta(x_1) + \cdots + \delta(x_{i-1}))},$$

so erkennt man, daß sich $i x_i^m$ von $-\frac{1}{m a_{m+1}}$ beliebig wenig unterscheidet, wenn i hinreichend groß gewählt wird. Es ist also, wenn x dem Bereiche G angehört,

$$\lim_{i\to\infty} i x_i^m = -\frac{1}{m a_{m+1}},$$

oder etwas anders geschrieben

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[m]{i}\left(x_i - \sqrt[m]{-\frac{1}{m a_{m+1} i}}\right) = 0, \tag{17}$$

also insbesondere für den bei GAUSS vorliegenden Fall (10)

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[3]{i}\left(\varphi^{(i)}(x) - \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{3}{2} i}}\right) = 0. \tag{18}$$

GAUSS hat für seine Funktion $l(1+x)$ unzweifelhaft die Reihe (8) bezw. (9) formal aufgestellt und dabei den Grenzwert (18) vor Augen gehabt. Wie wir gesehen haben, folgt aus den Angaben unserer Tagebuchaufzeichnung für $l(1+x)$ nur die Form (11). Daß tatsächlich nur der Ansatz (3) für die Darstellung von $l(1+x)$ in der Umgebung von $x = 0$ den Angaben der Tagebuchnotiz entspricht, geht daraus hervor, daß für den Ansatz

$$l(1+x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \tag{3}'$$

wo $a_1 \neq 1$ ist, also für die Differenzengleichung

$$x_{i+1} = a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots, \tag{5}'$$

wenn $0 < |a_1| < 1$ vorausgesetzt wird, nach KOENIGS (*Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles*, Annales de l'École Norm. Sup. 2. série **1**, 1884, Supplém. S. 1) die Gleichung

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_i}{a_1^i} = B(x)$$

gilt, wo $B(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ holomorph, in $x = 0$ von der ersten Ordnung Null und $B'(0) = 1$ ist.

Man vergl. die geschichtlichen Bemerkungen oben S. 443, 444.

SCHLESINGER.

[84.]

Classes dari in quovis ordine; hincque numerorum in terna quadrata discerpibilitas ad theoriam solidam reducta.

Brunsv[igae, 1798] Apr.

GAUSS hat hier wohl absichtlich ordine geschrieben statt, wie man zunächst erwarten würde, genere, weil im art. 287. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 336, der Nachweis gesondert für jede der beiden Ordnungen (proprie et improprie primitivi) geführt wird. Ganz genau müßte es heißen: Classes dari in quovis genere cuiusvis ordinis. Vergl. die Angabe Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 287. III der *Disquisitiones arithmeticae*, »Demonstratione primum munita sunt Mense Aprili 1798«.

KLEIN. BACHMANN.

[85.]

Demonstrationem genuinam compositionis virium eruimus.

Gotting[ae, 1798] Mai.

Im Nachlaß haben sich keine auf diesen Beweis bezügliche Aufzeichnungen gefunden, aber in einem Briefe von F. L. WACHTER an GAUSS, datiert Altenburg, den 16. Dezember 1814, wird er erwähnt. Es heißt dort:

»... Den DUCHAYLAschen Beweis für das Kräfteparallelogramm habe ich deswegen unrichtig genannt, weil ihm, in der Gestalt, die ihm POISSON in seiner Mechanik gegeben, die Beweiskraft mangelt. Ihr Beweis scheint mir noch wesentlich verschieden zu sein, weil er streng auf dem Begriff einer festen Ebene beruht, POISSON hingegen ausdrücklich nur auf den Satz sich stützt: daß es gleich sey, an welchem Punkte einer festen Linie eine Kraft wirkt, und dieser Satz scheint mir völlig unzureichend zu seyn ...«.

Über WACHTER vergl. P. STÄCKEL, Mathematische Annalen **54**, 1901, S. 49. DUCHAYLAS wesentlich geometrischer Beweis findet sich in der Correspondance de l'école polytechnique, Nr. 4, Paris 1808; POISSON hat ihm in seinem *Traité de mécanique*, Paris 1811, T. I, S. 11, eine analytische Gestalt gegeben.

STÄCKEL.

[86.]

Theorema LA GRANGE de transformatione functionum[*)] ad functiones quotcunque variabilium extendi.

Gotting[ae, 1798] Mai.

Im Nachlaß findet sich keine Aufzeichnung, die hier in Betracht kommen könnte, aber in dem oben S. 429 abgedruckten Briefe an HINDENBURG vom 8. Oktober 1799 erwähnt GAUSS die hier angezeigte Verallgemeinerung der Umkehrungsformel von LAGRANGE **) und bemerkt, daß er inzwischen das Verfahren von LAPLACE zum Beweise dieser Formel, das ihm im April 1797 noch unbekannt war, kennen gelernt habe. Nun enthält der VIII. Abschnitt derselben Abhandlung von LAPLACE, in deren VII. Abschnitt jenes Verfahren entwickelt ist (siehe die zweite Fußnote auf S. 430), eine Verallgemeinerung des LAGRANGEschen Satzes auf Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen ***). GAUSS hat also bei seiner Verallgemeinerung jedenfalls an LAPLACE angeknüpft. Es ist dies darum besonders bemerkenswert, weil GAUSS um diese Zeit, also etwa in der ersten Hälfte des Jahres 1798, überhaupt angefangen hat, sich mit den Schriften von LAPLACE zu beschäftigen, vergl. die Notiz Nr. 88 und die zugehörigen Bemerkungen.

SCHLESINGER.

[87.]

Series

$$[1]\qquad 1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2+\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2+\text{etc.}=\frac{4}{\pi}$$

simul cum theoria generali serierum involventium sinus et cosinus angulorum arithmetice crescentium.

[1798] Iun.

Welche Teile der allgemeinen Lehre von den trigonometrischen Reihen GAUSS im Auge hatte, als er die vorstehende Notiz schrieb, ergibt sich aus den Anfangsworten des oben S. 433 abgedruckten Briefes an SCHUMACHER vom 5. Februar 1850. Danach handelte es sich um die »Methode, den Grad der Konvergenz« einer solchen Reihe zu bestimmen, d. h. also um die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens des allgemeinen Gliedes für große Werte des Stellenzeigers, und zwar insbesondere bei der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung nach den Sinus der Vielfachen der mittleren Anomalie. Wir wissen ja auch z. B. aus den Bemerkungen zu ULUGH-BEIGHS Tafeln †), daß diese Untersuchungen von GAUSS bis in die letzten Jahre des achtzehnten Jahrhunderts zurückreichen. Das Studium der Schriften von LAPLACE, mit dem

[*) In der Handschrift steht functionem.]

**) Daß es sich hier wirklich um den Umkehrungssatz von LAGRANGE handelt, wird dadurch außer Zweifel gesetzt, daß, wie die Handschrift erkennen läßt, GAUSS ursprünglich statt transformatione schreiben wollte reversione.

***) Eine vereinfachte Darstellung dieser Verallgemeinerung von LAPLACE gibt G. DARBOUX, *Sur la série de Laplace*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences 68, Paris 1869, S. 324, vergl. auch T.-J. STIELTJES, *Sur une généralisation de la série de Lagrange*, Annales de l'École Normale (3) 2, 1885, S. 93.

†) Diese Bemerkungen hatte GAUSS im Frühjahr 1799 brieflich an v. ZACH mitgeteilt, vergl. die genauen Angaben oben S. 444 in den Bemerkungen zum *Briefwechsel* der *Reihenlehre*.

GAUSS nach dem Zeugnis der Tagebuchnotizen Nr. 86 und Nr. 88 um die hier in Rede stehende Zeit beschäftigt war, ist auch für diese Untersuchungen von Bedeutung gewesen.

Mit diesen geschichtlichen Feststellungen läßt sich auch das Auftreten der Reihe [1] in Einklang bringen. Diese Reihe für $\frac{4}{\pi}$ hat GAUSS auch in seinen Abdruck des zweiten Bandes von SCHULZES Tafelwerk eingeschrieben und zwar mit dem Zusatz »EULER, H. d. l'A. 1778, p. 609«. In der Tat findet man in der Histoire de l'Académie des Sciences für das Jahr 1778 (Paris 1781), beginnend auf S. 603 der Mémoires: *Extraits de différentes lettres de M. Euler à M. le Marquis de Condorcet*, und in dem dritten Briefe (vom 12./23. September 1776), der auf S. 606 beginnt, wird S. 609 (L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 18, S. 77) die Reihe [1] durch Betrachtung von Integralen der Form

$$\int_0^1 dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{\lambda}=\int_0^{\infty}u^{\lambda}e^{-u}\,du,$$

also von Π-Funktionen (in der Bezeichnung der *Disquisitiones circa seriem*, 1812, Werke III, S. 151), gewonnen. Da bei dieser Herleitung trigonometrische Reihen nicht ins Spiel kommen, so muß GAUSS, als er die Tagebuchnotiz schrieb, ein von dem EULERschen abweichendes Verfahren im Sinn gehabt haben. Dazu kommt, daß in SCHULZES *Tafeln* neben der Reihe [1] noch die Reihe

$$[2]\qquad 1+\frac{1.1}{2.4}+\frac{1.1.3.3}{2.4.4.6}+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.4.4.6.6.8}+\cdots\text{ in inf.}=\frac{4}{\pi}$$

eingeschrieben ist; GAUSS dürfte also auf beide Reihen durch ein einheitliches Verfahren gekommen sein, das auf einer Entwicklung in eine trigonometrische Reihe beruhte. Im Nachlaß findet sich keine Aufzeichnung, die hierüber Aufklärung gibt, man ist also auf Vermutungen angewiesen. Nun hat JAMES IVORY in demselben Jahre, aus dem auch unsere Tagebuchnotiz stammt, eine Abhandlung veröffentlicht *), in der jene EULERsche Reihe [1] nach einer Methode hergeleitet wird, die sich in einem GAUSS durchaus vertrauten Gedankenkreise bewegt, und die mit den nötigen Abänderungen auch zur Ableitung der Reihe [2] benutzt werden kann. Sie gründet sich auf die von LAGRANGE **) gegebene trigonometrische Entwicklung

$$(3)\quad (a^2+b^2-2ab\cos\theta)^n=\left(a-be^{\theta\sqrt{-1}}\right)^n\left(a-be^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^n=P+2Q\cos\theta+2R\cos 2\theta+\cdots\text{ in inf.},$$

deren Koeffizienten $P, Q, R, \ldots$ in der Form von Potenzreihen der Größe $\frac{b}{a}$ dargestellt werden. Diese Entwicklung war namentlich ihrer astronomischen Anwendungen wegen sehr bekannt und berühmt; GAUSS wird sie 1798 ebensogut gekannt haben wie IVORY. Nach dem art. 6. der *Disquitiones circa seriem* vom Jahre 1812, wo GAUSS diese Entwicklung wiedergibt, hat man insbesondere für den von θ freien Teil

$$(4)\qquad P=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^n\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(a^2+b^2-2ab\cos 2\varphi)^n\,d\varphi$$

*) J. IVORY, *A new series for the rectification of the Ellipsis; together with some observations on the Evolution of the Formula* $(a^2+b^2-2ab\cos\Phi)^n$, Transactions of the Royal Society of Edinburgh 4, 1798, Part II, S. 177—190. Auf diese wenig bekannte Abhandlung verweist H. BURKHARDT, *Encyklopädie der mathem. Wissenschaften* II A 12, S. 883.

**) J. L. LAGRANGE, *Solution de différents problèmes de calcul intégral*, Miscell. Taurin. 3, 1762—1765, Oeuvres I, Paris 1867, S. 469, insbesondere S. 620 ff.; *Recherches sur les inégalités des Satellites de Jupiter*, Prix de l'Académie des Sciences 9, Paris 1766, Oeuvres VI, Paris 1873, S. 63, insbesondere S. 88.

die zwiefache Darstellung (siehe Werke III, S. 128, 129)

$$(5)\qquad P = a^{2n}F\left(-n, -n, 1, \frac{b^2}{a^2}\right) = (a+b)^{2n}F\left(-n, \frac{1}{2}, 1, \frac{4ab}{(a+b)^2}\right).$$

Mit freier Benutzung der IVORYschen Abhandlung läßt sich nun der Beweis für die Entwicklungen [1] und [2] wie folgt erbringen.

Bedeutet φ die exzentrische Anomalie, x die Exzentrizität einer Ellipse, deren große Achse gleich 1 ist, so hat man

$$1 - x^2\cos^2\varphi = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\cos 2\varphi = a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\varphi,$$

für

$$a = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2},\quad b = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2},\quad x^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2},$$

so daß also x als das Verhältnis zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel von a, b erscheint (LANDENsche Transformation). Für $n = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus (4) mit Benutzung der ersten Reihendarstellung in (5) für das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung, d. h. für den halben Ellipsenumfang:

$$\int_0^\pi (1-x^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi = \int_0^\pi (a^2+b^2-2ab\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi = a\pi\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b^2}{a^2}+\left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2\frac{b^4}{a^4}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2\frac{b^6}{a^6}+\cdots\right).$$

Setzt man hierin $x = 1$, also $a = \frac{1}{2}$, $\frac{b}{a} = 1$, so erhält man die Reihe [1]. Für $n = -\frac{1}{2}$ und mit Benutzung der zweiten Reihendarstellung in (5) ergibt sich die von GAUSS oft angewandte Entwicklung des vollständigen Integrals erster Gattung

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 2\varphi}} = \pi\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2x^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2x^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2x^6+\cdots\right),$$

aus der die Gleichung

$$\int_0^1 d(x^2)\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}} = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\cdots$$

hervorgeht. Linker Hand findet man nach Vertauschung der Integrationsfolge sofort den Wert $\frac{4}{\pi}$, womit die Entwicklung [2] gewonnen ist. Die Annahme, daß das Verfahren von GAUSS dem hier befolgten ähnlich gewesen sein mag, wird auch dadurch gestützt, daß im art. [3.] des Abschnitts [VII.] der *Reihenlehre*, der von der Konvergenz der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung handelt (siehe oben S. 423), die Entwicklung (3) für $n = -\frac{1}{2}$ benutzt wird.

SCHLESINGER.

[88.]

Calculus probabilitatis contra LA PLACE defensus.

Gott[ingae, 1798] Iun. 17.

Auf diese Aufzeichnung nimmt GAUSS in zwei Briefstellen unmittelbar Bezug, nämlich in dem Briefe an OLBERS vom 24. Januar 1812 (abgedruckt Werke VIII, S. 140) und in dem an LAPLACE vom 30. Januar 1812 (abgedruckt S. 371 dieses Bandes). An OLBERS schreibt GAUSS: »Unter meinen Papieren finde ich, daß ich im Junius 1798 . . . . zuerst LAPLACEs Methode gesehen und die Unverträglichkeit derselben mit den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem kurzen Notizen-Journal über meine mathematischen Beschäftigungen angezeigt habe« und in dem Briefe an LAPLACE heißt es (siehe oben S. 373): »le mois de Juin 1798 est l'époque où je l'ai rapprochée [nämlich die Methode der kleinsten Quadrate] aux principes du calcul des probabilités«. Daraus geht hervor, daß es sich in unserer Aufzeichnung um die von GAUSS im art. 186. der *Theoria motus* (1809, Werke VII, 1906, S. 254) besprochene Methode von LAPLACE-BOSCOVICH handelt, die LAPLACE im XI. Abschnitt seiner Abhandlung *Sur quelques points du Système du monde*, Histoire de l'Académie des Sciences, Année 1789, Paris 1793, Mémoires etc. S. 32 auseinandersetzt, und daß GAUSS diese Abhandlung im Juni 1798 kennen gelernt hat. Man vergl. auch die Einleitung des Aufsatzes von A. GALLE »GAUSS als Geodät«, Werke XI 2.

KLEIN. SCHLESINGER.

[89.]

Problema eliminationis ita solutum, ut nihil amplius desiderari possit.

Gott[ingae, 1798] Iun.

Mit der Eliminationstheorie, auf die sich auch schon die Tagebuchnotiz Nr. 36 vom 16. September 1796 bezieht, hat sich GAUSS beschäftigt, als er die Beweise seiner Vorgänger EULER und LAGRANGE für den Fundamentalsatz der Algebra einer kritischen Prüfung unterzog. (Vgl. die Tagebuchnotiz Nr. 80 vom Oktober 1797.) Im art. 8. der *Dissertation* (1799, Werke III, S. 13) lesen wir bei der Besprechung des EULERschen Beweises: »Ceterum operae pretium esse videtur, in formulas illas, quae α, β etc. rationaliter per u, B, C etc. exprimant, profundius et generalissime inquirere; de qua re aliisque ad eliminationis theoriam (argumentum haudquaquam exhaustum) pertinentibus alia occasione fusius agere suscipiam«. Über LAGRANGE und seine Kritik des EULERschen Beweises spricht sich GAUSS im art. 12. der *Dissertation* (Werke III, S. 20) aus. Auf diesen Punkt bezieht sich auch die Bemerkung von PFAFF in dem oben abgedruckten Briefe vom 8. Juli 1799, S. 104 unten und S. 105 dieses Bandes.

LOEWY.

[90.]

Varia elegantiuscula circa attractionem sphaerae.

[1798 Iun. sive Iul.]

[91a.]

$$1+\frac{1}{9}\,\frac{1.3}{4.4}+\frac{1}{81}\,\frac{1.3.5.7}{4.4.8.8}+\frac{1}{729}\,\frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12}\cdots = 1{,}02\,220\ldots$$

$$= \frac{1{,}3\,110\ldots}{3{,}1\,415\ldots}\sqrt{6}\left[=\frac{\varpi}{2}\,\frac{1}{\pi}\sqrt{6}\right].$$

[1798] Iul.

[91b.]

$$\text{arc. sin lemn. sin}\,\varphi - \text{arc. sin lemn. cos}\,\varphi = \varpi - \frac{2\varphi\varpi}{\pi}$$

$$\begin{aligned}\text{sin lemnisc.}\,[a] &= 0{,}95\,500\,598\ \sin[a]\\ &\quad -0{,}0\,430\,495\ \ \sin 3[a]\\ &\quad +0{,}0\,018\,605\ \ \sin 5[a]\\ &\quad -0{,}0\,000\,803\ \ \sin 7[a]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2\text{lemn.}\,[a] &= 0{,}4\,569\,472 = \frac{\pi}{\varpi\varpi}\\ &\quad -[0{,}4\,569\,472]\cos 2[a]\ldots\end{aligned}$$

$$\text{arc. sin lemn. sin}\,\varphi = \frac{\varpi}{\pi}\varphi + \left(\frac{\varpi}{\pi}-\frac{2}{\varpi}\right)\sin 2\varphi + \left(\frac{11}{2}\,\frac{\varpi}{\pi}-\frac{12}{\varpi}\right)\sin 4\varphi + \cdots$$

$$\begin{aligned}\sin^3[\varphi] &= 0{,}4\,775\,031\sin[\varphi]\\ &\quad +0{,}03\ldots\ldots[\sin 3\varphi]\end{aligned}$$

. . . . . .

Die Aufzeichnungen der Nr. 91a und b stehen im engsten Zusammenhang mit den oben S. 168 ff. in den artt. [4.]—[6.] abgedruckten Notizen. Die Reihe der Nr. 91a findet sich im art. [5.], oben S. 169, der die Aufzeichnungen auf der Rückseite des Leistetitels wiedergibt, und dient dort zur Berechnung von $\frac{\varpi}{\pi}$; GAUSS hat sie später (im November 1799) auf S. 7 der Scheda Ac (abgedruckt oben S. 184 Gleichung [3]) noch einmal hingeschrieben.

Die trigonometrischen Reihen der Nr. 91b finden sich im wesentlichen im art. [4.], oben S. 168. Bei der Entwicklung von arc sin lemn s ist hier $s = \sin\varphi$ gesetzt und φ im Bogenmaß gedacht, während S. 168 φ in Graden ausgedrückt erscheint; darum lautet das erste Glied rechts vom Gleichhheitszeichen hier $\frac{\varpi}{\pi}\varphi$, dort φ^0. Für den Koeffizienten von $\sin 2\varphi$ sind auf S. 9 der Scheda Ac zwei, oben S. 184 Gln. [4], [5] abgedruckte Reihenentwicklungen angegeben. Die Entwicklung des art. [6.], oben S. 170, erscheint als unmittelbare Umkehrung der hier angegebenen Formel für arc sin lemn sin φ, wenn man dort φ mit χ vertauscht, also sin lemn χ = sin circ φ setzt. In der Entwicklung von sin lemn a ist hier ebenso wie auf S. 168 auf **beiden** Seiten der Gleichung a im Gradmaß zu denken, man hätte also, behufs Zurückführung auf das Bogenmaß, für 180^0 links vom Gleichheitszeichen die halbe Lemniskatenlänge ϖ, dagegen rechts vom Gleichheitszeichen die halbe Kreislänge π zu setzen. Vergl. die Bemerkung zu der folgenden Nr. 92.

KLEIN. SCHLESINGER.

[92.]

De lemniscata, elegantissima omnes exspectationes superantia acquisivimus et quidem per methodos, quae campum prorsus novum nobis aperiunt.

Gott[ingae, 1798] Iul.

Die hier angezeigten Ergebnisse finden sich in der Scheda Aa, die im Juli 1798 begonnen worden ist. Unter der Überschrift: *Scheda prima. De curva lemniscata* beginnt S. 3 der Scheda eine Zusammenfassung älterer Formeln, die im wesentlichen Werke III, S. 413—415 bis dahin, wo es heißt »Spätere Bemerkung« (diese stammt aus dem Handbuch 16, Bb, S. 72), abgedruckt ist. Das eigentlich Neue beginnt auf S. 6 der Scheda mit den Worten:

»Si valores sc [i. e. sinuscirculi], qui reddunt ipsum sl [i. e. sinumlemniscaticum] = 0 secundum regulas notas productum infinitum generare concipiuntur, nec non valores ipsius sc qui reddunt ipsum sl = ∞ . . . . ,«

u.s.w., wie Werke III, S. 415, beginnend im art. [4.], gedruckt ist. GAUSS knüpft also unmittelbar an die in der Nr. 91b des *Tagebuchs* und in der Aufzeichnung oben S. 168, art. [4.], gegebenen Ansätze an, wonach sin lemn φ als Funktion von $s = \sin\varphi$ betrachtet wird. Aus der Kenntnis der Null- und Unendlichkeitsstellen von sin lemn φ und cos lemn φ (siehe oben S. 153 ff., die artt. [2.], [5.], [6.]) ergeben sich dann unmittelbar die Werte von s, die diesen Stellen entsprechen, in der Form von Exponentialgrößen, wie wir sie in den Ausdrücken für $P\varphi$, $Q\varphi$, $p\varphi$ und $q\varphi$ Werke III, S. 416 auftreten sehen. $P\varphi$ ist die oben S. 168, art. [3.] und S. 170, art. [6.] eingeführte Funktion; vergl. Werke III, S. 416, art. [5.], eine Aufzeichnung, die jedoch nicht aus der Scheda Aa, sondern von losen Zetteln aus späterer Zeit stammt.

Die jetzt gewonnene Darstellung von $P\varphi$, $Q\varphi$ in der Form einfach unendlicher Produkte liefert auch die in der Tagebuchnotiz Nr. 63 (vom 29. März 1797) gemeinte *demonstratio* des damals nur durch Induktion gefundenen Resultats (vergl. auch oben, S. 158 letzte Zeile)

$$\theta = N\varpi = e^{\frac{\pi}{2}},$$

sie brachte also wirklich, wie GAUSS damals voraussagte, *gravissima analyseos incrementa* mit sich. Daß GAUSS diese Bestätigung sofort vorgenommen hat, zeigt eine in der Scheda Aa aufgezeichnete, aber Werke III nicht mit abgedruckte Tafel der Werte von $e^{\frac{1}{2}k\pi}$ und $e^{-\frac{1}{2}k\pi}$ für $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und dann S. 8—13 der Scheda die Werke III, S. 431, beginnend mit »*Ecce iam computum pro* $e^{\frac{1}{2}\pi}$« bis S. 432 abgedruckte sehr genaue Berechnung von $e^{\frac{1}{2}\pi}$ und $e^{-\frac{1}{2}\pi}$. Dazwischen steht (noch auf S. 7 der Scheda) die Werke III, S. 417, art. [6.] wiedergegebene Partialbruchdarstellung und (auf S. 8 der Scheda) die den Schluß des art. [6.] bildende Entwicklung des sinus lemniscaticus, und zwar in der Form:

$$\text{sl}\,\varphi = \frac{\pi}{\varpi}\,\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\,\text{sc}\,\varphi - \frac{\pi}{\varpi}\,\frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi}}\,\text{sc}\,3\varphi\ \text{etc.}$$

Es ist dies also genau die in der Nr. 91b und oben S. 168 gegebene Entwicklung von sin lemn φ nach den Sinus der Vielfachen von φ, nur erscheinen die Koeffizienten, die dort bloß numerisch angegeben waren, hier in einer das allgemeine Gesetz aufzeigenden analytischen Form. Aber auch hier hat GAUSS auf beiden Seiten der Gleichung φ im Gradmaß gedacht (vergl. die Bemerkung bei der Nr. 91); beim Abdruck Werke III, S. 417 hat der Herausgeber SCHERING beiderseits auf Bogenmaß reduziert; die von ihm mit ψ bezeichnete Größe hat also den Wert

$$\psi = \frac{\varphi^0}{180^\circ}.$$

Mit denselben Änderungen gegen die Handschrift sind dann Werke III, S. 417, art. [7.] noch die auf den Seiten 14, 15 der Scheda stehenden Formeln für $\log P$, $\log Q$, $\log p$, $\log q$ und $\log \sin \operatorname{lemn} \varphi$ abgedruckt. Damit sind die zu der hier besprochenen Tagebuchnotiz Nr. 92 gehörigen Aufzeichnungen erschöpft. Vergl. die Bemerkungen zu den Nummern 94, 95, 98.

KLEIN. SCHLESINGER.

[93.]

Solutio problematis ballistici.

Gott[ingae, 1798] Iul.

Der Nachlaß enthält keine auf dieses Problem bezüglichen Aufzeichnungen. Dagegen hat GAUSS in einem am 15. August 1812 an ENCKE geschriebenen Briefe einige Gedanken über die Art, wie ballistische Versuche anzustellen sind, ausgesprochen. Diesen Brief sowie die Anfrage ENCKEs, die ihm vorhergegangen war, findet man unter den Nachträgen zur Physik, Werke XI 1, S. 49 ff. abgedruckt.

SCHLESINGER.

[94.]

Cometarum theoriam perfectiorem reddidi.

Gott[ingae, 1798] Iul.

Auf die zur Theorie der lemniskatischen Funktionen gehörigen Entwicklungen der Scheda Aa, die bis zur S. 15 gehen und bei der Nr. 92 besprochen worden sind, folgt auf S. 16 die Überschrift: *Scheda secunda. De motu cometarum.* Unter dieser Überschrift finden sich aber die Differentialgleichungen des Zweikörperproblems für die Erde und daran anschließende Entwicklungen, die sich bis zur S. 20 der Scheda erstrecken und kaum über die Ableitung des Flächensatzes und des Integrals der lebendigen Kraft hinausgehen; sie enthalten nichts, was sich im besonderen auf die Kometenbewegung bezieht. GAUSS' Untersuchungen über die Bahnbestimmung der Kometen fallen in eine spätere Zeit.

KLEIN. BRENDEL.

[95.]

Novus in analysi campus se nobis aperuit, scilicet investigatio functionum etc.

[1798] Oct.

Nach den bei der Nr. 94 erwähnten Aufzeichnungen finden wir auf S. 21 ff. der Scheda Aa wieder Entwicklungen zur Theorie der lemniskatischen Funktionen, die man mit den hier angekündigten Fortschritten in Verbindung zu setzen hat. Was auf S. 21, 22 der Scheda steht, ist Werke III, S. 418, soweit noch art. [7.] reicht, abgedruckt. Es folgen dann S. 23—25 der Scheda Rechnungen, die darauf hinzielen, aus den Entwicklungen von $\log P$, $\log Q$ analoge trigonometrische Reihenentwicklungen für P, Q selbst zu

erhalten. Es gelingt dies zunächst in der Weise, daß die Koeffizienten numerisch gefunden werden; so steht z. B. auf S. 25

$$\begin{aligned} P\varphi = {} & 0{,}8346268416\;7407316.4 \sin\varphi \\ + {} & \phantom{0{,}83}62694861\;2274007.5 (\sin\varphi)^3 \\ + {} & \phantom{0{,}8346268}874\;5689900.5 (\sin\varphi)^5 \\ + {} & \phantom{0{,}8346268416\;74073}238.56 (\sin\varphi)^7, \end{aligned}$$

wo, wie S. 24 bemerkt wird, der Koeffizient von $\sin\varphi$ nichts anderes ist als $\frac{\varpi}{\pi}$, und daraus wird nun weiter die Form

$$\begin{aligned} P\varphi = {} & 0{,}8393290109\;26691403 \sin\varphi \\ - {} & \phantom{0{,}83}15673988\;60966741 \sin 3\varphi \\ + {} & \phantom{0{,}83932901}54\;66056449 \sin 5\varphi \\ - {} & \phantom{0{,}8393290109\;26691}\ldots 37 \sin 7\varphi \end{aligned}$$

gewonnen. Das Gesetz der Koeffizienten in dieser Entwicklung und in der analogen für $Q\varphi$ scheint GAUSS durch numerische Induktion gefunden zu haben, das zeigen die auf S. 29—33 befindlichen Rechnungen für $e^{-\frac{1}{4}\pi}$, $e^{-\pi}$, $e^{-\frac{9}{4}\pi}$. Auf S. 27 und 28 stehen die Werke III, S. 418 im art. [8.] abgedruckten Formeln für $\sin \operatorname{lemn} \varphi$, $P\varphi$, $Q\varphi$ *). Diese endgültigen Darstellungen von P, Q:

$$(*)\quad \left\{ \begin{aligned} P\varphi &= 2^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\varpi}} \left(\frac{\sin\varphi}{e^{\frac{1}{4}\pi}} - \frac{\sin 3\varphi}{e^{\frac{9}{4}\pi}} + \frac{\sin 5\varphi}{e^{\frac{25}{4}\pi}} - \cdots \right), \\ Q\varphi &= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{1}{4}}} \left(1 + \frac{2\cos 2\varphi}{e^{\pi}} + \frac{2\cos 4\varphi}{e^{4\pi}} + \cdots \right) \end{aligned} \right.$$

hat GAUSS wohl durch Einsetzen in die auf S. 23 der Scheda aufgezeichnete Gleichung

$$\frac{d}{[d\varphi]} \frac{P}{Q} = \frac{1}{Q} \frac{dP}{d\varphi} - \frac{P}{QQ} \frac{dQ}{d\varphi} = \sqrt{\left(1 - \frac{P^4}{Q^4}\right)}$$

$$QP' - PQ' = \sqrt{(Q^4 - P^4)}$$

bestätigt (vergl. auch die Leistenotiz oben S. 167, art. [2.]).

Die angegebenen Reihen für P, Q liefern auch sofort die S. 28 der Scheda unmittelbar anschließend (wie in dem Abdruck Werke III, S. 418, art. [8.]) aufgezeichneten Reihen

$$(**)\quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{\varpi}{\pi}} &= 1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - 2e^{-9\pi} + \cdots, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}} &= e^{-\frac{1}{4}\pi} + e^{-\frac{9}{4}\pi} + e^{-\frac{25}{4}\pi} + \cdots, \end{aligned} \right.$$

die den Zusammenhang herstellen zwischen der lemniskatischen Periode und den nach Potenzen von $e^{-\pi}$ bezw. $e^{-\frac{1}{4}\pi}$ fortschreitenden Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind. Die auf S. 26 der Scheda stehende Aufzeichnung **)

*) Auch bei diesen ist im Abdruck beiderseits auf Bogenmaß reduziert.

**) Vergl. oben S. 277.

»Investigatio factorum progressionis infinitae

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.} = S\text{«}$$

zeigt, daß GAUSS durch die Entdeckung der beiden Reihen (✱✱) veranlaßt worden ist, seine älteren Untersuchungen über Potenzreihen, deren Exponenten eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden, zu vergleichen. Von solchen Untersuchungen liegen Spuren vor im art. [9.] der *Exercitat. mathem.* (1796), oben S. 142, in der Tagebuchnotiz Nr. 58 vom 16. Februar 1797, die wieder auf Nr. 7 vom 24. Mai 1796 zurückweist, und in einer mündlichen Überlieferung (Werke III, S. 493, Zeile 3—6), wonach GAUSS die Beziehungen zwischen dem arithmetisch-geometrischen Mittel und den Potenzreihen, deren Exponenten Quadratzahlen sind, schon 1794 gekannt haben soll. GAUSS konnte also hier einen Zusammenhang zwischen der lemniskatischen Periode und dem arithmetisch-geometrischen Mittel v e r m u t e n, einen Zusammenhang, der ihm in der Tagebuchnotiz Nr. 98 vom 30. Mai 1799 zur G e w i ß h e i t geworden ist (c e r t o aperietur heißt es dort, gleichsam als Bekräftigung des hier stehenden ... nobis aperuit).

Die Reihen (✱✱) hat GAUSS in der Tat sofort dazu benutzt, um den Wert von $\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$ auf 26 Dezimalstellen zu berechnen (S. 28 der Scheda, mit Änderung der Reihenfolge abgedruckt Werke III, S. 418, 419, art. [8.]), und auf einem etwa aus derselben Zeit stammenden Zettel (in Fh, Nr. 2, Kapsel 50, demselben, auf dem die Werke III, S. 420, art. [12.] abgedruckten Reihen aufgezeichnet sind) wird diese Zahl ins Quadrat erhoben*), also $\frac{\varpi}{\pi}$ vermittels der ins Quadrat erhobenen Reihen (✱✱) berechnet. Die Vergleichung von

$$\frac{\varpi}{\pi} = 4\left(e^{-\frac{1}{4}\pi} + e^{-\frac{9}{4}\pi} + e^{-\frac{25}{4}\pi} + \cdots\right)^2$$

mit der z. B. im Leiste (siehe oben S. 176, Gl. [6.]) aufgezeichneten Reihe

$$4\left(z^{\frac{1}{4}} + z^{\frac{9}{4}} + z^{\frac{25}{4}} + \cdots\right)^2$$

liegt dann sehr nahe; sie stimmen für $z = e^{-\frac{1}{4}\pi}$ überein.

Als die der Notiz Nr. 95 zugrunde liegenden Entdeckungen können wir also ansehen: Die Aufstellung der trigonometrischen Reihenentwicklungen für den Zähler und Nenner des sinus lemniscaticus, die im wesentlichen mit den JACOBIschen Thetafunktionen für den lemniskatischen Fall übereinstimmen, die Darstellung der lemniskatischen Periode durch Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind und möglicherweise hieran anschließend die Wiederaufnahme der Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel (vergl. oben S. 172 ff. und die zugehörigen Bemerkungen S. 260, 261). Auf den von GAUSS bei der Entwicklung der Theorie der lemniskatischen Funktionen 1798 eingeschlagenen Weg wirft die Bemerkung ein helles Licht, die GAUSS in dem oben S. 248 abgedruckten Briefe an BESSEL vom 30. März 1828, in bezug auf ABEL macht. Vergl. die Abschnitte III und IV des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«, Werke X 2.

KLEIN. SCHLESINGER.

---

*) Es heißt dort:

Evectio numeri 0,91 357 913 815 611 682 140 724 ad quadratum

und als Ergebnis der Rechnung

$$\left[\frac{\varpi}{\pi} =\right] 0{,}8\,346\,268\,416\,740\,731\,872\,812\,057\,352\,513.$$

[96.]

Formas superiores considerare coepimus.

Br[unsvigae] Febr. 14. 1799.

Dasselbe Datum auch Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 266. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 299. In der im November 1798 begonnenen Scheda Ab findet sich eine Reihe auf die ternären quadratischen Formen bezüglicher Aufzeichnungen, die mit den Worten beginnen:

Huiusmodi functiones

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

formas superiores vocamus.

KLEIN.

[97.]

Formulas novas e x a c t a s pro parallaxi eruimus.

Br[unsvigae, 1799] Apr. 8.

Diese Formeln (für die Mondparallaxe) hat GAUSS an verschiedenen Stellen aufgezeichnet, und zwar wie es seine Gewohnheit war, auf leeren Blättern von Büchern seiner Bibliothek. In unmittelbarem Zusammenhang mit unserer Tagebuchnotiz scheint die folgende Eintragung zu stehen, die sich auf den hintern Einbandseiten von KLÜGELs *Analytischer Geometrie*, 1770, (Nr. 739 der GAUSSbibliothek) findet:

Ist des Mondes Declination $= d$, sein Stundenwinkel $= h$, Horizontalparallaxe $= \pi$, Polhöhe $= \varphi$, so ist (genau)

$$\text{cotg par[allaxis] Asc[ensionis] r[ectae]} = \frac{\cos d}{\cos\varphi \sin h \sin\pi} - \operatorname{cotg} h$$

Diameter im Horizont $= \Delta$

Vergrösserter Diameter $= \Delta'$

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta' = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta \sin(h+p)\cos d'}{\sin h \cos d}$$

$$\operatorname{tang} d' = \frac{\sin(h+p)}{\sin h}\left(\operatorname{tang} d - \frac{\sin\pi\sin\varphi}{\cos d}\right)$$

$\boxed{\text{REV. GALEN}}$ [*)]

Am ausführlichsten ist von diesen Formeln in einem Briefe die Rede, den GAUSS in Braunschweig am 17. April 1799 geschrieben hat und der gegenwärtig in der Autographensammlung DARMSTAEDTER der Königlichen Bibliothek zu Berlin aufbewahrt wird. Es heißt in diesem Briefe:

[*) Siehe die unerklärliche Buchstabenverbindung GALEN auch oben S. 187 aus Scheda Ac.]

Ich habe seit meinem letzten Briefe das Brouillon wieder gefunden von der Berechnung der Bedeckung des τ ≈ [*)]. Ich hatte diese meistens ad normam BOHNENBERGER [**)] geführt, weil ich damals mich nicht gleich in diesen Arbeiten genug orientirt hatte, um Ihnen das Resultat sogleich angeben zu können, wie Sie damals wünschten. Daraus sehe ich also, wie BOHNENBERGER die Längenparallaxe u.s.w. berechnet hat (mit Ausnahme der sphäroidischen Gestalt der Erde, auf die ich damals nicht Rücksicht genommen hatte, weil ich irrig voraussetzte, die Horizontalpar[allaxe] in dem Berliner Jahr B[uch] gelte für Berlin) und dass seine Methode nicht Näherung sei. In der That sind auch die exacten Formeln für Jemand, der in der analytischen Trigon[ometrie] nur mässig geübt ist, so leicht zu finden, dass es unbegreiflich sein würde, wenn sie noch von Niemand entwickelt wären. Indess muss ich gestehen, dass die Form, in der B[OHNENBERGER] sie darstellt [***)], mir weniger bequem scheint als die meinige, obgleich er vielleicht das Gegentheil geglaubt haben mag. Er richtet es nemlich so ein, dass man alles vermittelst der trigonometrischen Tafeln machen kann; allein ich glaube, dass der Grund davon ein Vorurtheil ist. . . . Meine Formeln werde ich also zwar nicht bekannt machen, zumal da sie wahrscheinlich schon in andern Büchern stehen werden (vielleicht in CAGNOLI [†)]) aber rechnen werde ich doch immer nach ihnen. Dies sind sie:

π Horizontalparallaxe unterm Aequator
π' verbesserte Horiz. Par.
ρ Entfernung vom Mittelpunkte der Erde
β Breite des Zeniths
λ Länge des Zeniths
b Breite des ☾ [Mondes]
l Länge des ☾
$\delta = l - \lambda$
r Halbmesser des ☾

[*) τ aquarii.]

[**) *Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vorzüglich vermittelst des Spiegelsextanten* von M. J. G. F. BOHNENBERGER, Göttingen 1795, §§ 187—190, S. 341 ff.]

[***) Siehe a. a. O. S. 346 unten, beziehungsweise S. 350.]

[†) *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique etc.* par M. CAGNOLI, traduit de l'Italien par M. CHOMPRÉ, Paris 1786.]

r' Vergrösserter Halbmesser
b' Scheinbare Breite [des Mondes]
p Längenparallaxe

I. $\sin \pi' = \rho \sin \pi$

II. $\operatorname{cotang} p = \frac{\cos b}{\cos \beta \sin \delta \sin \pi'} - \operatorname{cotang} \delta$

III. $\operatorname{tang} b' = \frac{\sin \delta + p}{\sin \delta}\left(\operatorname{tang} b - \frac{\sin \pi' \sin \beta}{\cos b}\right)$

IV. $\sin r' = \frac{\sin \delta + p}{\sin \delta} \cdot \frac{\cos b'}{\cos b} \sin r$ [*)].

Zur Ausübung sind in den meisten Fällen folgende Formeln die bequemsten.

I. Man suche den Logarithmen einer Zahl M nach der Formel

$$\frac{1}{M} = \cos b - \rho \sin \pi \cos \beta \cos \delta,$$

dann wird

II. $\operatorname{tang} p = M\rho \sin \pi \cos \beta \sin \delta$

III. $\operatorname{tang} b' = M \sin b \cos p - M\rho \cos p \sin \beta \sin \pi$

IV. $\sin r' = M \cos b' \cos p \sin r,$

(wofür man allemal die Näherung

$$r' = M \cos b' \cos p \,.\, r$$

brauchen darf).

Nach den letztern Formeln habe ich die Berechnung für Seeberg als Beispiel beigelegt. Ich merke nur noch an, dass das was BOHNENBERGER N nennt (nach meinem Brouillon [**)]) immer gleich ist dem Logarithm von $2M$ . . . . .

Die GAUSSschen Formeln finden sich im Wesentlichen bei BOHNENBERGER a. a. O. § 187, S. 344—346 ***); die Formel für die Längenparallaxe (II. der GAUSSschen Formeln) hat nach BOHNENBERGERS Zitat bereits »LEXELL in den Berliner Ephemeriden für 1777, S. 152 u. f.« bekannt gemacht.

[*) Die Formeln II, III, IV stimmen für $\rho = 1$, $\beta = \varphi$, $b = d$, $\delta = h$, $r = \frac{1}{2}\Delta$, $r' = \frac{1}{2}\Delta'$, $b' = d'$ mit den oben aus KLÜGEL mitgeteilten überein. GAUSS hat sie mit den nachfolgenden Gebrauchsformeln in den hier benutzten Bezeichnungen in seinen 1798 erworbenen Abdruck von RÖSLERS *Handbuch der praktischen Astronomie*, 1788, eingeschrieben.]

[**) Die Bezeichnung N kommt bei BOHNENBERGER nicht vor; GAUSS hatte wohl die auf S. 350 der *Anleitung* stehenden Näherungsformeln vor Augen, in denen der gemeinsame Nenner $\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2$ in der Bezeichnung von GAUSS gleich $\frac{1}{2M}$ ist.]

***) GAUSS' Bezeichnungen weichen von denen BOHNENBERGERS etwas ab, vergl. die Zusammenstellung der Bezeichnungen bei BOHNENBERGER a. a. O. S. 345.

Die zu Anfang unserer Briefstelle erwähnte Bedeckung von τ aquarii ist wohl diejenige, die nach den Allgemeinen geographischen Ephemeriden 3, 1799, S. 202 am 13. Dezember 1798 stattgefunden hat und von dem damaligen K. Preuß. Obersten und General-Quartiermeister bei der Neutralitäts-Armee VON LECOQ in Preußisch-Minden beobachtet worden ist. Die Vergleichung mit den im GAUSSarchiv befindlichen Briefen VON LECOQS an GAUSS zeigt, daß der hier im Auszug mitgeteilte Brief vom 17. April 1799 an VON LECOQ gerichtet ist. In seinem Bericht *Über die trigonometrische Aufnahme in Westphalen* *) schreibt VON LECOQ (S. 139): »Im astronomischen Theile ist mir der Doctor GAUSS von großem Nutzen gewesen; seine Ausrechnungen und Briefe haben zu meinem Unterrichte viel beygetragen . . .«.

GALLE.

[98.]

Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $= \frac{\pi}{\varpi}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur.

Br[unsvigae, 1799] Mai. 30.

Der hier niedergelegten Bemerkung, sie mag dem Zufall oder einer Vermutung ihre Entstehung verdanken, muß die genaue Berechnung der beiden Größen $\frac{\pi}{\varpi}$ und $M(\sqrt{2}, 1)$ vorhergegangen sein. Für $\frac{\pi}{\varpi}$ läßt sich dies auch in der Tat nachweisen. Nach der EULERschen Beziehung **)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$$

st nämlich

$$(*) \qquad 2\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{\varpi},$$

da ja

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

ist. Den bei STIRLING ***) auf 17 Dezimalstellen berechneten Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, d. h. der *Ordinata Curvae Elasticae* hat GAUSS damals sicherlich gekannt (vergl. oben S. 145); auf das Schutzblatt des LEISTE hat er neben den dort notierten Näherungswert 1,198 $\pm$ des Integrales (*) mit genau denselben Schriftzügen, wie sie die Tagebuchnotiz Nr. 98 zeigt, die Zeichen »$= \frac{\pi}{\varpi}$« hingeschrieben (siehe oben S. 146,

*) Monatliche Correspondenz 8, 1803, S. 136 ff., S. 197 ff.

**) Siehe *Institutiones calculi integralis* I (1768), § 334, Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 210, vergl. oben S. 150, Gl. (3), wo infolge eines Druckfehlers $\frac{\pi}{2}$ statt $\frac{\pi}{4}$ steht.

***) *Methodus Differentialis etc.*, Londini 1730, S. 57.

art. [5.]). Ferner tritt die Größe $\frac{\pi}{\varpi}$ auf, wenn man aus der Gleichung

$$\sin \operatorname{lemn} \varphi = \sin \operatorname{circuli} \chi$$

(siehe oben S. 170, art. [6.]) χ durch φ in Bogenmaß darstellen will. Endlich haben die Darstellungen der Zähler und Nenner von sinus lemniscaticus, $P\varphi$, $Q\varphi$, wie sie in der Scheda Aa (Werke III, S. 418 und oben S. 537) und auch in der Scheda Ac (siehe oben S. 195, Gleichung [8], [9]) gegeben sind, beide den Faktor $\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}$. — In bezug auf $M(\sqrt{2}, 1)$ wissen wir nur, daß es als Beispiel in der Scheda Ab (siehe oben S. 174) und auch im LEISTE (siehe oben S. 180, dort allerdings $M(1, \sqrt{\frac{1}{2}})$) auftritt, aber diese beiden Stellen sind wohl erst nach der in der Tagebuchnotiz Nr. 98 gemachten Bemerkung geschrieben. Die Veranlassung $M(\sqrt{2}, 1)$ zu betrachten, könnte für GAUSS vielleicht in einer Bemerkung STIRLINGS gelegen haben, der auf S. 57 seines angeführten Werkes im Exemplum IV sagt: »Quod si longitudini Elasticae adiiciatur sua Ordinata, habebitur numerus 1, 9100 9889 4513 8559 8, qui est semiperipheria Ellipseos habentis 1 et $\sqrt{2}$ pro Axibus«. Es ist in der Tat

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}.$$

In der Abhandlung von 1800 hat GAUSS im Exemplum 4. den Wert von $M(\sqrt{2}, 1)$ auf 19 Dezimalstellen berechnet (siehe Werke III, S. 364).

Die Voraussage, daß der Beweis für dieses Ineinandergreifen der lemniskatischen Funktionen mit dem agM. sicher ein neues Feld der Analysis eröffnen werde, zeigt, eine wie hohe Bedeutung GAUSS der Bemerkung vom 30. Mai 1799 beigelegt hat. Dies kommt auch darin zum Ausdruck, daß er diese Bemerkung an JOH. FRIEDR. PFAFF brieflich mitgeteilt hat. Aus der oben S. 232 abgedruckten Antwort PFAFFS vom 24. November 1799 geht hervor, daß GAUSS, als er an PFAFF über den Gegenstand schrieb, noch nicht im Besitz des Beweises der Gleichung

$$\frac{\pi}{\varpi} = M(\sqrt{2}, 1)$$

gewesen ist. Die vollständige Durchführung dieses Beweises scheint ihm erst im November 1799 gelungen zu sein (siehe die Bemerkungen zu den Abschnitten [II.] bis [IV.] der *Theorie des agM.*, oben S. 273 und die Tagebuchnotiz Nr. 100). Die Tragweite der Bemerkung der Nr. 98 für die Entwicklung von GAUSS' Gedankengang besteht darin, daß GAUSS durch sie auf die Wichtigkeit des reziproken Wertes des agM. aufmerksam wurde, während er früher (vergl. das *Specimen*, oben S. 172) nur das agM. selbst betrachtet hatte. Vergl. dafür auch den Schluß des art. 5. der Abhandlung von 1800, Werke III, S. 366.

KLEIN. SCHLESINGER.

[99.]

In principiis Geometriae egregios progressus fecimus.

Br[unsvigae, 1799] Sept.

Für diese Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie siehe den Brief von GAUSS an WOLFGANG BOLYAI vom 16. Dezember 1799, Werke VIII, S. 159. Wahrscheinlich stammt auch der Beweis des Lehrsatzes vom Flächeninhalt des Dreiecks, den GAUSS in dem Briefe an WOLFGANG BOLYAI vom 6. März 1832 mitteilt (Werke VIII, S. 221), aus dieser frühen Zeit; vergl. den Aufsatz »GAUSS als Geometer«, Werke X 2.

STÄCKEL.

[100.]

Circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus.

Br[unsvigae, 1799] Novemb.

Man wird als Belege für die hier angezeigten Entdeckungen die Leisteaufzeichnungen im Abschnitt [II.], oben S. 177 und die artt. [1.]—[3.] aus der Scheda Ac des Abschnitts [IV.], oben S. 184 anzusehen haben. Natürlich sind nicht alle diese Entdeckungen im November gemacht worden, die Eintragung ins *Tagebuch* wird vielmehr nur die Bedeutung haben, daß vor der Abreise nach Helmstedt ein Teil der erlangten Ergebnisse in die damals begonnene Scheda Ac eingetragen worden ist.

KLEIN. SCHLESINGER.

[101.]

Medium arithmetico-geometricum tamquam quotientem duarum functionum transscendentium repraesentabile esse iam pridem inveneramus; nunc alteram harum functionum ad quantitates integrales reducibilem esse deteximus.

Helmst[adii, 1799] Dec. 14.

Der erste Satz bezieht sich auf die Quotientendarstellung [7], oben S. 186, der zweite auf die Formeln [13]—[16] des art. [4.], oben S. 187, nach denen der Zähler dem reziproken Werte von

$$\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(x^2-r^2)}}$$

gleich gefunden wird. Das ursprünglich irrtümlicherweise hingeschriebene Integral zweiter Gattung hat GAUSS vergessen durchzustreichen.

KLEIN. SCHLESINGER.

[102.]

Medium Arithmetico-Geometricum ipsum est quantitas integralis. Dem[onstratum].

[1799] Dec. 23.

Man könnte diese Notiz mit der Gleichung [20], oben S. 187, in Verbindung bringen, die ja vermöge der Integraldarstellung [16] von Q auch eine Integraldarstellung für den reziproken Wert des agM. liefert; für eine solche Verbindung spräche auch das hier wie dort später hinzugeschriebene demonstr[atum]. Dagegen wäre es nicht recht verständlich, weshalb GAUSS neun Tage (14.—23. Dezember) gebraucht haben sollte, um aus der Darstellung [16] die Folgerung [20] zu ziehen; auch machen die Aufzeichnungen auf S. 11 der Scheda Ac dem Ansehen der Schriftzüge nach den Eindruck, unmittelbar hintereinander geschrieben zu sein. Und in der Tat scheint die fast wörtliche Übereinstimmung mit der Bemerkung im art. 8. der Abhandlung von 1800, Werke III, S. 370: »hoc itaque modo media nostra arithmetico-geometrica ad quantitates integrales revocata sunt« eher darauf hinzudeuten, daß es sich hier darum handelt, daß der reziproke Wert des agM. als das Integral einer einfachen Differentialgleichung definiert werden kann, so daß der Abschnitt [III.], oben S. 181, hier als Beleg heranzuziehen wäre.

KLEIN. SCHLESINGER.

[103.]

In theoria formarum trinariarum formas reductas assignare contigit.

1800 Febr. 13.

Dasselbe Datum Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 272. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 307. Während die Notizen Nr. 100 bis Nr. 102 mit den Aufzeichnungen auf S. 7—15 der Scheda Ac (siehe oben S. 184—193) in Verbindung stehen, gehört zu dieser Notiz eine Eintragung auf S. 22 der Scheda, die Werke II, S. 311 abgedruckt ist.

KLEIN. SCHLESINGER.

[104.]

Series [*)]

$$a\cos A + a'\cos(A+\varphi) + a''\cos(A+2\varphi) + \text{etc.}$$

ad limitem convergit, si a, a', a'' etc. constituunt progressionem sine mutatione signi ad 0 continuo convergentem. Demonstratum.

Brunov[ici, 1800] Apr. 27.

Es ist hier der Satz ausgesprochen, daß die Reihen

$$a + a'\cos\varphi + a''\cos 2\varphi + \cdots,$$
$$a'\sin\varphi + a''\sin 2\varphi + \cdots$$

konvergieren, wenn die $a, a', a'', \ldots$ monoton**) der Null zustreben. Dieser Satz ist zuerst veröffentlicht und bewiesen von HJALMAR HOLMGREN, Journal de Mathématiques **16**, 1851, S. 186, mit einer überflüssigen Einschränkung schon von C. J. MALMSTEN, Nova acta Upsal. **12**, 1844, S. 255.

SCHLESINGER.

[*) Die Handschrift hat Seriem.]

**) Das liegt in dem continuo des Tagebuchtextes. Ohne diese Einschränkung ist der Satz bekanntlich nicht richtig.

[105.]

Theorian quantitatum transcendentium:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha xx)(1-\beta xx)}}$$

ad summam universalitatem perduximus.

Brunov[ici, 1800] Mai. 6.

Die Aufdeckung des Zusammenhangs zwischen dem agM. und dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung, sowie die in dem besondern Falle der lemniskatischen Funktionen gewonnenen Einsichten, führten GAUSS zu der Erkenntnis, daß die Größen

$$(*) \qquad \frac{c}{M(1,c)},\ \frac{c}{M(1,s)} \qquad (s=\sqrt{1-c^2})$$

(siehe den art. [7.], oben S. 190, aus Scheda Ac, S. 13) für das elliptische Integral mit dem Modul s die analoge Rolle spielen, wie die Größe

$$\frac{1}{M(\sqrt{2},1)} = \frac{\varpi}{\pi}.$$

auf die sie sich für $s=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ reduzieren, für die Lemniskate. Daß GAUSS' Auffassung dieser Größen (der Periodizitätsmoduln) dem neuern Standpunkte sehr nahe gewesen sein muß, zeigt die folgende Aufzeichnung, die sich auf einem Zettel ohne Datum findet:

Der Radicalfehler, woran meine bisherigen Bestrebungen, den Geist der elliptischen Function zu verkörpern, gescheitert sind, scheint der zu sein, dass ich dem Integral

$$(**) \qquad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin\varphi^2)}}$$

die Bedeutung als Ausdruck eines endlichen Theils der Kugelfläche habe unterlegen wollen, während es wahrscheinlich nur einen unendlich schmalen Kugelsector ausdrücken soll.

Offenbar bedeutet hier die »Kugelfläche« den Ort der komplexen Veränderlichen, der »endliche Theil«, dessen »Ausdruck« das Integral (✱✱) sein sollte, den Fundamentalbereich oder das Periodenparallelogramm; wenn dann GAUSS von »einem unendlich schmalen Kugelsektor« spricht, so zeigt dies, daß er damals, als er diesen Zettel schrieb, es für wahrscheinlich hielt, daß man die reellen Größen (✱) selbst, oder genauer (vergl. oben S. 194 Gln. [1])

$$\frac{2\pi}{M(1,\sqrt{1-c^2})},\ \frac{2\pi}{M(1,c)}$$

als die Periodizitätsmoduln des Integrals (✱✱), für e reell und kleiner als Eins, anzusehen habe. Am 6. Mai hatte er sich zur völligen Klarheit über diese Verhältnisse durchgerungen, und damit war der Weg frei für weitere Fortschritte. Vergl. den Abschnitt IV des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«, Werke X 2.

KLEIN. SCHLESINGER.

[106.]

Incrementum ingens huius theoriae Brunov. Mai. 22 invenire contigit, per quod simul omnia praecedentia nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur.

[Brunovici, 1800 Mai. 22.]

Es handelt sich hier um die in der Scheda Ac, S. 26 ff. aufgezeichneten Entdeckungen, die oben im Abschnitt [V.] der *Theorie des agM.*, S. 194 ff. artt. [1.]—[8.] abgedruckt sind. »Omnia praecedentia« bedeutet die Theorie der lemniskatischen Funktionen. Der Zusammenhang mit dem agM. tritt besonders im art. [5.] hervor; er besteht darin, daß die im art. [3.] aufgestellten Formeln für die Transformation zweiter Ordnung der Funktionen

$$T\varphi,\ W\varphi,\ T\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right),\ W\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$$

(die im wesentlichen nichts anderes sind als die JACOBIschen Thetafunktionen), wenn man $\varphi = 0$ setzt, für die Reihen

$$W0,\ T\frac{\varpi}{2},\ W\frac{\varpi}{2}$$

die Beziehungen des agM. liefern. Der Zusammenhang zwischen dem agM. und den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, erscheint also hier gleichsam als die Projektion der Transformationsformeln des art. [3.] auf die Ebene $\varphi = 0$.

KLEIN. SCHLESINGER.

[107.]

Iisdem diebus circa (Mai. 16.) problema chronologicum de festo paschali eleganter resolvimus.

(Promulgatum in ZACHII Comm. liter. Aug. 1800, p. 121, 223.)

[1800 Mai. 16.]

Der erste, der das Osterfest aus der Jahreszahl mittels arithmetischer Regeln zu bestimmen versucht hat, scheint LAMBERT*) gewesen zu sein, und zwar gilt seine Regel für den julianischen Kalender. Nach CARLINI**) sind unter den Vorläufern von GAUSS noch ORIANI***) und die Patres CANOVAI und DEL RICCO†) zu nennen, die arithmetische Formeln zur Lösung von Aufgaben der Kirchenrechnung aufgestellt haben. Was GAUSS im Jahre 1800 von diesen Arbeiten gekannt haben mag, hat sich nicht feststellen

*) JOH. HEINRICH LAMBERT, *Einige Anmerkungen über die Kirchenrechnung*, Astronom. Jahrbuch für das Jahr 1778, Berlin 1776, S. 210.

) *Formole analitiche pel calcolo della Pasqua* di LODOVICO CICCOLINI, Roma 1817, Biblioteca italiana **13, 1819, S. 346. Nach dem anschließenden Briefe ebenda S. 350, *Al signor Francesco Carlini astronomo di Brera* ist CARLINI als der Verfasser der Besprechung anzusehen.

***) BARNABA ORIANI, *De usu fractionum continuarum ad inveniendos cyclos calendarii novi et veteris*, Effemeridi di Milano 1786.

†) STANISLAO CANOVAI e GAËTANO DEL RICCO, *Elementi di fisica matematica*, Firenze 1788.

lassen. Seine allgemeine Osterformel, die sowohl für den julianischen als auch für den gregorianischen Kalender gilt, veröffentlichte er unter dem Titel *Berechnung des Osterfestes* in v. ZACHS Monatlicher Correspondenz der Erd- und Himmelskunde, August 1800, S. 121, Verbesserungen S. 223, Werke VI, S. 73; vergl. *Noch etwas über die Bestimmung des Osterfestes,* Braunschweigisches Magazin 12. September 1807, Werke VI, S. 82, ferner *Eine leichte Methode, den Ostersonntag zu finden,* Astronom. Jahrbuch für das Jahr 1814, Berlin 1811, S. 273, und die durch P. TITTEL veranlaßte *Berichtigung zu dem Aufsatze: Berechnung des Osterfestes u.s.w.,* Zeitschrift für Astronomie, herausgeg. von v. LINDENAU und BOHNENBERGER **1**, 1816, S. 158 *). Daß die GAUSSsche Osterregel in ihrer ursprünglichen Form vom Jahre 4200 an ihre Gültigkeit verliert, hat zuerst FRANÇAIS **) öffentlich festgestellt und gleichzeitig die folgende Abänderung angegeben, durch die die GAUSSsche Vorschrift unbeschränkte Geltung erlangt: Bezeichnet man den Quotienten, der sich bei der Division der ganzen Zahl a durch die ganze Zahl b ergibt, durch $Q\left(\frac{a}{b}\right)$, bedeutet A die Jahreszahl und setzt man $k = Q\left(\frac{A}{100}\right)$, so hat man die Zahl p, die nach GAUSS ursprünglicher Festsetzung (Werke VI, S. 78) gleich $Q\left(\frac{k}{3}\right)$ zu nehmen ist, nach FRANÇAIS durch die Formel

$$p = Q\left(\frac{k - Q\left(\frac{k-17}{25}\right)}{3}\right)$$

zu bestimmen, was mit der von GAUSS in der Zeitschrift für Astronomie 1816 angegebenen Festsetzung ***)

$$p = Q\left(\frac{8k+13}{25}\right)$$

übereinstimmt, aber für die Rechnung etwas bequemer ist.

LOEWY.

[108.]

Numeratorem et denominatorem sinus lemniscatici (universalissime accepti) ad quantitates integrales reducere contigit; simul omnium functionum lemniscaticarum, quae excogitari possunt, evolutiones in series infinitas ex principiis genuinis haustae; inventum pulcherrimum sane nullique praecedentium inferius.

Praeterea iisdem diebus principia deteximus, secundum quae series arithmetico-geometricae interpolari debent, ita ut terminos in progressione data ad indicem quemcunque rationalem pertinentes per aequationes algebraicas exhibere iam in potestate sit.

[1800] Mai. ult. Iun. 2. 3.

Der *sinus lemniscaticus universalissime acceptus* ist die in der Scheda Ac, S. 26, siehe oben S. 194, nach der Analogie des sinus lemniscaticus aufgebaute Funktion $S\varphi$. Die Zurückführung des Zählers und

*) Die beiden letztgenannten Aufsätze sind im VI. Bande der Werke nicht enthalten; sie werden mit noch einigen zur Chronologie gehörigen Nachlaßstücken im Bande XI 1 abgedruckt.

) J. F. FRANÇAIS, *Solution directe des principaux problèmes du calendrier,* Annales de Mathématiques pures et appliquées **4, 1813, S. 273.

***) Siehe auch die Werke VI, S. 79, Zeile 5 v. u. abgedruckte handschriftliche Bemerkung.

des Nenners dieser Funktion, d. h. der Funktionen $T\varphi$ und $W\varphi$, auf *quantitates integrales* liefert den unmittelbaren Nachweis dafür, daß ihr Quotient $x = S\varphi$ der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dS\varphi}{d\varphi}\right)^2 = (1+\mu^2 x^2)(1-x^2)$$

Genüge leistet. Dieser Nachweis ist in der Scheda Ac nicht aufgezeichnet und hat sich auch in keinem andern aus dieser Zeit herrührenden Teile des Nachlasses gefunden. Er ist uns jedoch in zwei späteren Fassungen erhalten, die sich beide in dem Handbuch 16, Bb (begonnen November 1801) befinden. Die ältere, die wahrscheinlich aus dem Jahre 1825 stammt, steht S. 111, 112 des Handbuchs und ist mit Änderungen gegen die Handschrift Werke III, S. 401, 402, unverändert oben S. 308—310 abgedruckt; die spätere, die nach GAUSS' eigener Angabe im August 1827 verfaßt ist, steht S. 139 des Handbuchs und ist Werke III, S. 473, art. [5.] abgedruckt. Daß wir aber diesen Nachweis für die Zeit unserer Tagebuchnotiz in Anspruch nehmen dürfen, folgt daraus, daß er wesentlich auf den Formeln für die Transformation zweiter Ordnung der Funktionen

$$T\varphi,\ W\varphi,\ T\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right),\ W\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$$

beruht, die auf S. 31 der Scheda Ac aufgezeichnet sind (siehe oben S. 195, 196, art. [3.]), so daß dieser Umstand erst den Grund dafür erkennen läßt, weshalb GAUSS diese Transformationsformeln in der Scheda Ac entwickelt. Ferner wird die für die Ausführung jenes Nachweises erforderliche Formel, S. 111 des Handbuchs 16, Bb,

$$ab' - ba' = \tfrac{1}{2}\, ab(a^4 - b^4),$$

(siehe oben S. 310) von der GAUSS a. a. O. sagt, daß d e r B e w e i s d a v o n t i e f e r l i e g t, in der Scheda Af, S. 13 (abgedruckt oben S. 212, art. [5.]) als besonderes *Theorema* abgeleitet; diese Scheda Af ist aber ganz im Jahre 1801 geschrieben worden. —

Die im zweiten Satze des ersten Absatzes unseres Tagebuchtextes bezeichnete Entwicklung »aller nur denkbaren lemniskatischen Funktionen in unendliche Reihen aus genuinen Prinzipien abgeleitet« bezieht sich auf die S. 41 und 43 der Scheda Ac befindlichen Rechnungen (abgedruckt oben S. 202, art. [10.] und S. 204, art. [12.]), die auf die Ableitung der berühmten Identität zwischen den Reihen- und den Produktentwicklungen der Thetafunktionen:

$$(1+\alpha x)(1+\alpha x^3)(1+\alpha x^5)\ldots\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\left(1+\frac{x^3}{\alpha}\right)\left(1+\frac{x^5}{\alpha}\right)$$
$$= P\left(1 + x\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right) + x^4\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right) + x^9\left(\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}\right) + \cdots\right),$$

wo P von α unabhängig ist, hinzielen. Vermöge dieser Identität ist GAUSS nämlich imstande, für eine beliebige Thetafunktion die durch Kenntnis ihrer Nullstellen gegebene Produktentwicklung in eine Reihenentwicklung umzusetzen.

Der zweite Absatz der Notiz Nr. 108 betrifft die Gleichung für die Teilung der Perioden. Eine darauf bezügliche Aufzeichnung aus dieser Zeit ist uns nicht erhalten.

KLEIN. SCHLESINGER.

[109.]

Inter duos numeros datos semper dantur infinite multi termini medii tum arithmetico geometrici tum harmonico geometrici, quorum nexum mutuum ex asse perspiciendi felicitas nobis est facta.

[1800] Iunio 3. Brunov[ici]

Eine mit dieser Notiz gleichzeitige Aufzeichnung, die sich auf die unendlich vielen Werte des agM. bezieht, ist uns nicht erhalten. Dagegen steht der »nexus mutuus« auf einem Zettel, der oben S. 218 ff., art. [2.]—[6.], abgedruckt ist, und der schon durch das Wasserzeichen FHF 1810 auf eine wesentlich spätere Zeit verwiesen wird; er dürfte (vergl. die Bemerkungen oben S. 282) etwa 1825 geschrieben sein. Die hier in Betracht kommende Stelle ist namentlich die Formel

$$(*) \qquad \frac{1}{(\mu)} = \frac{1}{\mu} + \frac{4ik}{\lambda},$$

wo

$$\mu = M(m, n), \quad \lambda = M\left(m, \sqrt{m^2 - n^2}\right)$$

ist und (μ) einen der Werte bedeutet, die man für das agM. zwischen m und n erhält, wenn man »für ein n', n'', n''' etc. einen negativen Wert wählt«. Die Formel $(*)$ setzt überdies voraus, daß wenn der reale Teil von $\frac{\mu}{\lambda}$ wesentlich positiv ist, das gleiche auch für den realen Teil von $\frac{(\mu)}{\lambda}$ gilt (vergl. oben S. 281). Der Weg, auf dem GAUSS zu diesem Ergebnis vorgedrungen ist, kann, da Aufzeichnungen aus der Zeit der Entdeckung fehlen, nicht mit voller Sicherheit angegeben werden. Die Aufzeichnung von 1825 weist darauf hin, daß GAUSS die Formel $(*)$ wohl aus der Darstellung der $m, n, \sqrt{m^2 - n^2}$ mit Hilfe der Thetanullreihen p, q, r gefunden hat (siehe besonders den art. [6.] oben S. 222, 223, wo der allgemeinste Wert von M aufgestellt wird, für den $\frac{q^2}{p^2} = \frac{n}{m}$ ungeändert bleibt). Die Wendungen »ex asse perspiciendi« und das sonst nur bei zahlentheoretischen Ergebnissen vorkommende »felicitas nobis est facta« (siehe die Nummern 30, 73, 114, 141 des *Tagebuchs*) geben der Annahme Raum, daß GAUSS auch sogleich die Beziehungen zur Theorie der binären quadratischen Formen durchschaut haben wird.

Das harmonische Mittel zwischen zwei Zahlen m, n ist durch die Gleichung

$$m_1 = \frac{2mn}{m+n}$$

erklärt. Der Algorithmus des harmonisch-geometrischen Mittels ist demnach:

$$\frac{1}{m_{\varkappa+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_\varkappa} + \frac{1}{n_\varkappa}\right), \quad \frac{1}{n_{\varkappa+1}} = \sqrt{\frac{1}{m_\varkappa} \cdot \frac{1}{n_\varkappa}}$$
$$(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots;\ m_0 = m,\ n_0 = n),$$

so daß sich

$$\lim_{\varkappa \to \infty} m_\varkappa = \lim_{\varkappa \to \infty} n_\varkappa = \frac{mn}{M(a, b)}$$

ergibt, wodurch das harmonisch-geometrische Mittel auf das agM. zurückgeführt ist*). In der Scheda Ac findet sich auf S. 20 die folgende Notiz:

*) Vergl. TH. LOHNSTEIN, Zeitschrift für Math. und Physik **33** (1888), S. 316.

Terminus constans expressionis

$$\frac{A\,d\varphi}{\sqrt{(f + 2g\cos\varphi + h\cos\varphi^2)}}$$

est Medium Geometrico harmonicum inter

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{\sqrt{((f+h)^2 - 4gg)} + f - h}{2}}} \text{ et } \frac{A}{\sqrt[4]{((f+h)^2 - 4gg)}}.$$

An einer andern, oben S. 14—16 abgedruckten Stelle der Scheda Ac, hat GAUSS in Verbindung mit gewissen mittleren Werten der Zahlentheorie ein arithmetisch-harmonisches Mittel betrachtet (siehe besonders S. 16, art. [3.]).

KLEIN. SCHLESINGER.

[110.]

Theoriam nostram iam ad transcendentes ellipticas immediate applicavimus.

1800 Iunio 5.

Transcendentes ellipticae sind (vergl. den oben bei der Nr. 105 wiedergegebenen Zettel) Integrale erster Gattung. Man wird also diese Notiz auf den Algorithmus beziehen, den GAUSS z. B. auf den oben S. 227, 228, artt. [10.] und [12.] abgedruckten Zetteln und im art. 18. der *Determinatio attractionis*, Werke III, S. 354 entwickelt hat, und der nach dem geeignet normierten Integral erster Gattung mit veränderlicher oberer Grenze als Grenzwert hinstrebt. Vergl. auch den »bilinearen Algorithmus« der Scheda An, oben S. 213.

KLEIN. SCHLESINGER.

[111.]

Rectificatio Ellipseos tribus modis diversis absoluta.

[1800] Iun. 10.

Zwei dieser Methoden sind auf dem oben S. 227 ff. abgedruckten Zettel und zwar in den artt. [12.] und [13.] wiedergegeben. Vergl. auch die Anzeige der Abhandlung *Determinatio attractionis*, Werke III, S. 360 und den art. 17. dieser Abhandlung selbst, ebenda S. 354.

KLEIN. SCHLESINGER.

[112.]

Calculum Numerico-Exponentialem omnino novum invenimus.

[1800] Iun. 12.

Es handelt sich vermutlich um die numerischen Berechnungen von Potenzen der Zahl e, die in einem besondern Päckchen gesammelt im Nachlaß vorhanden (Fh, Nr. 2, Kapsel 50) und Werke III, S. 426—431 unter der Überschrift *Sammlung von Rechnungen, vornehmlich solchen, bei denen von meinen Methoden, die*

Factoren grosser Zahlen zu finden, und von den Wolframschen Logarithmentafeln Gebrauch gemacht ist abgedruckt sind. Es werden daselbst die gesuchten Exponentialgrößen durch Produkte ganzer Zahlen approximiert, und da man die Logarithmen nach WOLFRAM sehr genau kennt, so bleibt nur noch e^{δ} zu berechnen, wo δ eine sehr kleine, sehr genau bekannte Zahl ist.

Die WOLFRAMschen Tafeln*), auf die GAUSS in der Überschrift ausdrücklich hinweist, sind zum ersten Male in der SCHULZEschen *Sammlung logarithmischer u.s.w. Tafeln* veröffentlicht worden; einen Abdruck dieser Tafeln hat GAUSS im Jahre 1791, als er zum ersten Male in Braunschweig bei Hofe vorgestellt wurde, von dem damaligen braunschweigischen Staatsminister Geheimen Rat FERONCE V. ROTHENKREUZ zum Geschenk erhalten**). Dieser Abdruck mit vielen handschriftlichen Eintragungen von GAUSS (vergl. oben S. 11, in der Überschrift) befindet sich im GAUSSarchiv.

KLEIN. SCHLESINGER.

[113.]

Problema e calculo probabilitatis circa fractiones continuas olim frustra tentatum solvimus.

[1800] Oct. 25.

Das Problem, von dem hier die Rede ist, erwähnt GAUSS in dem oben S. 371 abgedruckten Briefe an LAPLACE vom 30. Januar 1812, in dem er von einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung schreibt, mit der er sich vor 12 Jahren beschäftigt habe. Es handelt sich danach um die folgende Frage: Es sei M eine unbekannte, zwischen 0 und 1 gelegene Größe, für die alle Werte in gleichem Maße wahrscheinlich sind; man verwandle M in einen Kettenbruch

$$M = \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \text{etc.}}}$$

mit positiven ganzzahligen Nennern $a', a'', \ldots$ und frage nach der Wahrscheinlichkeit $P(n, x)$ dafür, daß der Wert des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a^{(n+1)} + \cfrac{1}{a^{(n+2)} + \text{etc.}}}$$

zwischen den Grenzen 0 und x liege, wo auch x einen positiven echten Bruch bedeutet. — Hieraus geht hervor, daß eine in dem als Scheda Ab bezeichneten Hefte des Nachlasses befindliche Aufzeichnung vom 5. Februar 1799***) die Untersuchungen wiedergibt, auf die GAUSS in der vorliegenden Tagebuchnotiz mit den Worten hinweist: *olim frustra tentatum.* Wir lassen zunächst diese ältere Aufzeichnung hier folgen.

*) *Natürliche oder hyperbolische Logarithmen bis auf 48 Decimalstellen, von Herrn Wolfram berechnet.*

**) Vergl. L. HÄNSELMANN, *K. F. Gauss,* Leipzig 1878, S. 25, 26.

***) Diese Aufzeichnung hat SCHLESINGER in der Scheda Ab bemerkt und für den nachstehenden Abdruck bearbeitet.

Disquisitiones ad Calculum probabilitatis pertinentes. Febr. 5.

[Aus Scheda Ab, Exercitationes atque Schedae analyticae, 1798 Nov., S. 5 und 4.]

Quantitas quaedam incognita A, quae supponitur iacere inter 0 et 1, ita ut probabilitas eam iacere inter binos arctiores limites aeque-distantes eadem sit, transmutatur in fractionem continuam formae[*)]

$$\cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a''' + \text{etc.}}}}$$

Quanta est probabilitas, ut aliquis denominatorum a', a'', a''' etc., cuius locus datur, numero integro dato sit aequalis?

Brevitatis gratia designamus per $\varphi' x$ probabilitatem fractionem primariam esse inter 0 et x; per $\varphi'' x$ prob[abilitatem] fractionem secundam

$$\cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a''' + \text{etc.}}}$$

iacere inter 0 et x; similiterque $\varphi''' x$ etc. Tum erit

[1] $$\varphi' x = x,$$

[2] $$\varphi^{n+1} x = \varphi^n 1 - \varphi^n \frac{1}{1+x} + \varphi^n \frac{1}{2} - \varphi^n \frac{1}{2+x} + \text{etc.}$$

Quare erit

[3] $$\varphi'' x = 1\left[-\frac{1}{1+x}\right] + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2+x}\right] + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3+x}\right] + \cdots [^{**})]$$

[4] $$\varphi^{n+1}\frac{1}{2} = 1 - \varphi^n \frac{2}{3} + \cdots,$$

$$\left[\psi x = \varphi^n \frac{1}{x},\quad \psi' x = \varphi^{n+1}\frac{1}{x},\right]$$

$$\begin{aligned}\psi' \frac{1}{x} &= \psi 1 - \psi(1+x)\\ &\quad + \psi 2 - \psi(2+x)\\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\varphi'' \frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \frac{2}{5} + \cdots$$

$$\varphi'' \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{3}{8} + \cdots$$

$$\varphi'' \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{5}{7} + \frac{5}{10} - \frac{5}{12} + \cdots$$

[*) In der Handschrift sind die im folgenden auftretenden Nenner statt mit $a', a'', a''', \ldots$ mit [1], [2], [3], ... bezeichnet.]

[**) In der Handschrift lautet diese Stelle: »Quare $\varphi'' x$ erit $= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x}$«, was aber nur für positive ganzzahlige Werte von x gilt, vergl. *Disquisitiones circa seriem,* 1812, art. 31., Gl. [67], Werke III, S. 154.]

x	$\varphi'' x$	$\varphi''' x$
0	0	
1	1	
$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$2 - 2\,l2 \quad = 0{,}6137$	$0{,}5748$
$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$	$3 - \frac{3}{2}l3 - \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}4451818$	
$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$	$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}l3 + \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}7590$	

[S. 4]

Tam complicatae evadunt, ut nulla spes superesse videatur.

Dazu ist folgendes zu bemerken. Wenn die erste Stufe der Kettenbruchentwicklung des positiven echten Bruches M

$$M = \frac{1}{a' + \mu}$$

ist, wo a' eine positive ganze Zahl und μ wieder einen echten Bruch bedeutet, so können die positiven echten Brüche M nach den Werten von a' in Klassen eingeteilt werden und die Werte einer Klasse werden in abnehmender Folge durchlaufen, wenn μ von 0 einschließlich bis 1 ausschließlich wächst; es sind die Zahlen des Intervalls von $\frac{1}{a'}$ bis $\frac{1}{a'+1}$, dessen Länge $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a'+1}$ ist.

Nach der Fragestellung von Gauss werden jetzt die Zahlen herausgehoben, bei denen μ zwischen 0 und x liegt, wo $0 < x < 1$. In der Klasse a' sind dies die Zahlen zwischen $\frac{1}{a'}$ und $\frac{1}{a'+x}$. Sind diese gleich wahrscheinlich, so liefert also das Intervall den Beitrag $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a'+x}$, und da das Gesamtintervall der Werte M die Länge 1 hat, so ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit in Übereinstimmung mit der Gleichung [3] auf voriger Seite

$$(5) \qquad P(1,x) = \varphi''(x) = \sum_{a'=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a'} - \frac{1}{a'+x} \right\} = \Psi(x) - \Psi(0),$$

wenn (vergl. die *Disquis. circa seriem*, 1812, Werke III, S. 153)

$$\Psi(x) = \frac{d \log \Pi(x)}{dx}$$

die logarithmische Ableitung der Gaussschen Π-Funktion bedeutet. Damit ist die Angabe von Gauss in dem Briefe an Laplace (siehe oben S. 372), daß $P(1,x)$ von der inexplikablen Funktion Eulers

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$$

abhänge, bestätigt.

Beim nächsten Schritt wird

$$M = \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \nu}}$$

gesetzt, wo a', a'' ganze, positive Zahlen sind und ν einen echten Bruch bedeutet. Man findet

$$P(2,x) = \varphi'''(x) = \sum_{a'=1}^{\infty} \sum_{a''=1}^{\infty} \left\{ \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a''+x}} - \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a''}} \right\},$$

indem die Zahlen der Klasse a' in Unterklassen nach dem Werte der Zahlen a'' eingeteilt werden, die jetzt, wenn ν von 0 bis 1 wächst, in zunehmender Folge durchlaufen werden.

Allgemein ist *)

$$P(n,x) = \varphi^{(n+1)}(x) = \sum_{a',\ldots,a^{(n)}} \left| \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \ddots + \cfrac{1}{a^{(n)}}}} - \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \ddots + \cfrac{1}{a^{(n)} + x}}} \right|.$$

Bezeichnet man den n-ten Näherungsbruch des Kettenbruchs für M mit $\frac{A_n}{B_n}$, wo

$$|A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n| = 1$$

ist, so erhält man

$$(6) \qquad P(n,x) = \sum_{a',\ldots,a^{(n)}} \left| \frac{A_n}{B_n} - \frac{A_n + x A_{n-1}}{B_n + x B_{n-1}} \right| = \sum_{a',\ldots,a^{(n)}} \frac{x}{B_n (B_n + x B_{n-1})}.$$

Da nun

$$B_{n+1} = a^{(n+1)} B_n + B_{n-1}$$

ist, so ergibt sich

$$P(n+1,x) = \sum_{a',\ldots,a^{(n+1)}} \frac{x}{(a^{(n+1)} B_n + B_{n-1})(a^{(n+1)} B_n + B_{n-1} + x B_n)}$$

$$= \sum_{a',\ldots,a^{(n)}} \sum_{a^{(n+1)}=1}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{1}{a^{(n+1)}}}{B_n\left(B_n + \frac{1}{a^{(n+1)}} B_{n-1}\right)} - \frac{\frac{1}{a^{(n+1)}+x}}{B_n\left(B_n + \frac{1}{a^{(n+1)}+x} B_{n-1}\right)} \right\},$$

also indem man die n-fache Summe nach (6) auswertet

$$(7) \qquad P(n+1,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ P\left(n, \frac{1}{\nu}\right) - P\left(n, \frac{1}{\nu+x}\right) \right\}.$$

und dies ist nichts anderes, als die von Gauss aufgestellte Gleichung [2].

Nach der Tagebuchaufzeichnung Nr. 113 ist es Gauss im Oktober 1800 gelungen »das Problem zu lösen«. Gemeint ist damit der von ihm in dem Briefe an Laplace (oben S. 372) angegebene asymptotische Wert

$$(8) \qquad \lim_{n \to \infty} P(n,x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

Wie Gauss diesen Wert gefunden haben mag, hat sich nicht feststellen lassen. Unter der Voraussetzung, daß $\lim_{n\to\infty} P(n,x) = f(x)$ existiert, ergibt sich aus (7)

$$(9) \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ f\left(\frac{1}{\nu}\right) - f\left(\frac{1}{\nu+x}\right) \right\}$$

und diese Funktionalgleichung wird offenbar durch den Wert

$$(10) \qquad f(x) = \text{const.} \log(1+x)$$

---

*) Für diesen Absatz benutzen wir eine briefliche Mitteilung von O. Perron.

befriedigt. Da für $P(n, x)$ als Wahrscheinlichkeit sofort $P(n, 1) = 1$ folgt, ist auch $f(1) = 1$, mithin ergibt sich aus (10) in Übereinstimmung mit (8)

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

STÄCKEL.

[114.]

Nov. 30. Felix fuit dies, quo multitudinem classium formar[um] binar[iarum] per triplicem methodum assignare largitum est nobis; puta:

1. per prod[uctum] infin[itum],
2. per aggregatum infinitum,
3. per aggregatum finitum cotangentium seu logarithm[orum] sinuum.

Brun[ovici, 1800 Nov. 30.]

Siehe Werke II, S. 285. Vergl. auch die folgende Nummer.

BACHMANN.

[115.]

Dec. 3. Methodum quartam ex omnibus simplicissimam deteximus pro det[erminantibus] negativis ex sola multit[udine] numeror[um] ρ, ρ' etc. petitam, si $Ax+\rho$, $Ax+\rho'$, etc. sunt formae lineares divisor[um] for[mae] $\square + D$.

Ibid. [Brunovici, 1800 Dec. 3.]

Siehe Werke II, S. 286. Vergl. zu den Nummern 114 und 115 auch die oben S. 91 abgedruckten Aufzeichnungen und den Schluß des oben S. 235 abgedruckten Briefes von PFAFF vom 8. Dezember 1800, ferner Werke I, S. 476 die Bemerkung und ebenda S. 466 das Additamentum zu dem art. 306. X der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 375, sowie endlich den Art. 27 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten« Werke X 2, S. 66.

KLEIN. BACHMANN.

[116.]

Impossibile esse, ut sectio circuli ad aequationes inferiores, quam theoria nostra suggerit, reducatur, demonstratum.

Brunov[ici, 1801] Apr. 6.

Dieselbe Aussage findet sich auch in den *Disquisitiones arithmeticae* (1801) und zwar im art. 365. (Werke I, S. 462) für den Fall, wo die Anzahl n der Teile, in die der Kreis zu teilen ist, eine Primzahl, im art. 366. (ebenda, S. 463) für die Fälle, wo diese Anzahl eine Primzahlpotenz und eine beliebige zusammengesetzte Zahl ist. Wahrscheinlich sind diese Bemerkungen ebenso wie die entsprechenden, ihnen im

art. 336. (ebenda, S. 413) voraufgehenden erst während der Drucklegung eingefügt worden *). Ein Beweis für GAUSS' Behauptung ist aber weder in seinen Veröffentlichungen noch in seinem Nachlasse enthalten, auch ist ein Beweis, der nur solche Hilfsmittel benutzt, wie GAUSS sie im Jahre 1801 sonst angewandt hat, bisher nicht veröffentlicht worden. Es soll darum hier ein elementarer Beweis ohne GALOISsche Theorie gegeben werden; er gründet sich auf den folgenden Satz:

Gegeben sei eine Gleichung $J(x) = 0$ vom n-ten Grade, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche P angehören und die in P irreduzibel ist. Eine Wurzel ξ_1 dieser Gleichung sei rational mit Koeffizienten aus P dargestellt durch die Größen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$, wo ρ_1 einer Gleichung $X_1(x) = 0$ genügt, deren Koeffizienten P angehören, und die in P irreduzibel ist, ρ_2 einer Gleichung $X_2(x) = 0$, deren Koeffizienten dem durch Adjunktion von ρ_1 erweiterten Rationalitätsbereiche (P, ρ_1) angehören und die in diesem Bereiche irreduzibel ist u.s.w., endlich ρ_k einer Gleichung $X_k(x) = 0$, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{k-1})$ angehören und die in diesem Bereiche irreduzibel ist. **Dann ist das Produkt der Grade aller Gleichungen $X_1(x) = 0$, $X_2(x) = 0$, $\ldots$, $X_k(x) = 0$ durch den Grad n von $J(x) = 0$ teilbar.**

Adjungiert man nämlich dem Bereiche P der Reihe nach $\rho_1, \rho_2, \ldots$, so sei ρ_α die erste dieser Größen, durch deren Adjunktion $J(x) = 0$ reduzibel wird; die Wurzel ξ_1 genügt dann in dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\alpha)$ einer irreduziblen Gleichung, deren Grad n' kleiner als n ist. Es sei h_α der Grad der in $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\alpha-1})$ irreduziblen Gleichung $X_\alpha(x) = 0$, der ρ_α genügt; dann ist nach dem Satze von KRONECKER-KNESER **) $\frac{n}{n'} = \frac{h_\alpha}{h'_\alpha}$, wenn h'_α der Grad derjenigen irreduziblen Gleichung ist, die nach Adjunktion von ξ_1 zum Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\alpha-1})$ durch ρ_α befriedigt wird. Bei weiterer Adjunktion der auf ρ_α folgenden Größen bleibe die Gleichung n'-ten Grades für ξ_1 irreduzibel bis zur Adjunktion von ρ_β. In dem Bereiche $(P, \rho_1, \ldots, \rho_\alpha, \ldots, \rho_\beta)$ genüge ξ_1 einer irreduziblen Gleichung vom Grade $n'' < n'$. Bezeichnet dann h_β den Grad der im Bereiche $(P, \rho_1, \ldots, \rho_\alpha, \ldots, \rho_{\beta-1})$ irreduziblen Gleichung $X_\beta(x) = 0$, der ρ_β genügt, und h'_β den Grad der irreduziblen Gleichung, die sich für ρ_β im Bereiche $(P, \rho_1, \ldots, \rho_\alpha, \ldots, \rho_{\beta-1}, \xi_1)$ ergibt, so ist $\frac{n'}{n''} = \frac{h_\beta}{h'_\beta}$. Derart fortfahrend erhält man die weiteren Beziehungen

$$\frac{n''}{n'''} = \frac{h_\gamma}{h'_\gamma}, \quad \frac{n'''}{n^{(4)}} = \frac{h_\delta}{h'_\delta}, \quad \ldots.$$

Da ξ_1 schließlich rational in $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ wird, also einer Gleichung ersten Grades genügt, so ergibt sich die Beziehung $\frac{n^{(t-1)}}{1} = \frac{h_\tau}{h'_\tau}$, wo $t \leqq k$ und h_τ der Grad jener irreduziblen Gleichung $X_\tau(x) = 0$ ist, deren Wurzel ρ_τ bewirkt, daß ξ_1 rational bekannt wird, während h'_τ den Grad der irreduziblen Gleichung bedeutet, der ρ_τ in dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \ldots, \rho_\alpha, \ldots, \rho_{\tau-1}, \xi_1)$ genügt. Die Multiplikation der gefundenen

---

*) Vergl. auch den oben S. 121 abgedruckten Brief von GAUSS an GERLING vom 6. Januar 1819, wo es (oben S. 125) heißt: »Alles hängt dabei von den Factoren der Zahl $\frac{1}{2}(p-1)$ ab; ist diese Zahl eine Potenz von 2, z. B. $p = 3, 5, 17, 257, 65537$, so kommen bloß quadratische Gleichungen vor; hingegen z. B. für $p = 31$, wo $\frac{1}{2}(p-1) = 3.5$, ist eine cubische und eine Gleichung vom 5. Grade unausweichlich«.

) Dieser Satz lautet wie folgt: Sind $J_1(x) = 0$ und $J_2(x) = 0$ zwei im Rationalitätsbereiche P irreduzible Gleichungen der Grade n_1 und n_2 mit den Wurzeln η_1 und η_2 und sind die Grade der irreduziblen Gleichungen, denen η_1 nach Adjunktion von η_2 und η_2 nach Adjunktion von η_1 genügen, n'_1 und n'_2, so ist $\frac{n_1}{n'_1} = \frac{n_2}{n'_2}$. Siehe A. KNESER, Mathem. Annalen **30, 1887, S. 195, CRELLEs Journal für Mathem. **106**, 1890, S. 51, O. HÖLDER, Mathem. Annalen **38**, 1891, S. 309, G. FROBENIUS, ebenda **70**, 1911, S. 457. Der Beweis, den KNESER im 106. Bande des CRELLEschen Journals für diesen Satz gibt, erfordert nur die einfachsten Hilfsmittel. Vgl. auch A. LOEWY, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1917.

Beziehungen liefert

$$\frac{h_\alpha . h_\beta \ldots h_\tau}{n} = h'_\alpha . h'_\beta \ldots h'_\tau.$$

Da sich das Produkt $h_\alpha . h_\beta \ldots h_\tau$ als durch n teilbar erweist, trifft dies umsomehr für das Produkt der Grade aller Hilfsgleichungen $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_k = 0$ zu, und damit ist unser Satz bewiesen.

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen wollen wir unter einer Gleichungskette $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_k = 0$ für $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ ein Gleichungssystem verstehen, bei dem ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ stets Wurzel von $X_i = 0$ ist und $X_1 = 0$ Koeffizienten aus dem ursprünglichen Rationalitätsbereiche P, $X_2 = 0$ aus dem durch ρ_1 erweiterten, u.s.w. schließlich $X_k = 0$ aus dem Bereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{k-1})$ besitzt. Die Irreduzibilität der Gleichungen $X_i = 0$ in den Rationalitätsbereichen, denen ihre Koeffizienten angehören, wird hier nicht vorausgesetzt.

Wir ziehen nun aus unserem Satz die folgenden Schlüsse:

Corollar I. Die irreduzible Gleichung $J(x) = 0$ mit Koeffizienten aus P habe den Grad $n = p_1 . p_2 \ldots p_f$, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_f$ lauter (auch eventuell gleiche) Primzahlen bedeuten. Es sei eine Gleichungswurzel ξ_1 irgendwie als rationale Funktion von Größen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ mit Koeffizienten aus P dargestellt, und man ersetze mittels einer Gleichungskette $Y_1 = 0,\ Y_2 = 0,\ \ldots,\ Y_k = 0$ für $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ dargestellt, und man ersetze jede Hilfsgleichung $Y_i = 0$, die in dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{i-1})$, dem ihre Koeffizienten angehören, reduzibel ist, durch die irreduzible Gleichung $X_i = 0$, der ρ_i genügt, also durch eine Gleichung von niedrigerem Grade. Dann ist für das so gebildete Gleichungssystem, das wir mit $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_k = 0$ bezeichnen, nach unserem Satze erstens das Produkt der Grade aller Gleichungen $X_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ durch $p_1 . p_2 \ldots p_f$ teilbar, und zweitens enthält dieses System mindestens f Gleichungen der Grade $p_1, p_2, \ldots, p_f$ oder wenigstens eine Gleichung, deren Grad eine zusammengesetzte Zahl ist. Diese zusammengesetzte Zahl ist wenigstens durch eine und, wenn $k < f$ ist, sogar durch zwei der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_f$ teilbar.

Alles dies ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß das Produkt der Grade von $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_k = 0$ durch $p_1 . p_2 \ldots p_f$, den Grad von $J(x) = 0$, teilbar ist und $p_1, p_2, \ldots, p_f$ lauter Primzahlen sind.

Corollar II. Hat man eine Wurzel ξ_1 der im Rationalitätsbereiche P irreduziblen Gleichung $J(x) = 0$ vom n-ten Grade mittels einer Gleichungskette $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_k = 0$ für die Größen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ durch diese Größen rational mit Koeffizienten aus P dargestellt und ist das Produkt der Grade aller Gleichungen der Kette gleich n, so sind die Gleichungen $X_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ in den Bereichen, denen ihre Koeffizienten angehören, irreduzibel. Sind weiter hierbei noch die Grade aller Gleichungen der Kette Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$, so kann man nicht unter die Grade der Gleichungen $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_k = 0$ heruntersteigen und nicht mit einer Kette niedrigerer Gleichungen operieren.

Wäre nämlich, wenn das Produkt der Grade der Gleichungen der Kette gleich n ist, eine der Gleichungen $X_i = 0$ reduzibel, so könnte man sie durch einen ihrer irreduziblen Faktoren ersetzen, wodurch das Produkt der Grade der Hilfsgleichungen $< n$ würde; dies stünde aber mit unserem Satze im Widerspruch. Mithin erweisen sich die Gleichungen $X_i = 0$ ausnahmslos als irreduzibel. Sind ferner die Grade der Gleichungen $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_k = 0$ Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ und ist $p_1 . p_2 \ldots p_k = n$, so besagt Corollar I, daß man nicht unter die Grade $p_1, p_2, \ldots, p_k$ der Gleichungskette $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_k = 0$ heruntersteigen kann.

Ist die Anzahl n der Teile, in die der Kreis geteilt werden soll, eine Primzahl und wird $n-1$ irgendwie zerlegt in $n-1 = \alpha . \beta \ldots \zeta$, so führt GAUSS im art. 352. der *Disquisitiones arithmeticae*, (Werke I, S. 431) die Auflösung der Kreisteilungsgleichung $X = 0$, von der er im art. 341. (Werke I, S. 417) zeigt, daß sie irreduzibel ist, zurück auf eine Gleichungskette $X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots,\ X_k = 0$ von den Graden

$\alpha, \beta, \ldots, \zeta$. Diese Gleichungen sind nach Corollar II in den Bereichen, denen ihre Koeffizienten angehören, irreduzibel. Wählt man die Zerlegungszahlen $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ sämtlich als Primzahlen, so erfüllt die Gleichungskette von GAUSS sämtliche Bedingungen unseres Corollars II. Mithin ist die Behauptung der GAUSSschen Tagebuchnotiz für einen Primzahlgrad, d. h. also die Behauptung des art. 365. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 462) bewiesen.

Im allgemeinen Fall, wo der Grad $N = a^\alpha . b^\beta \ldots$ ist und $a, b, \ldots$ lauter verschiedene Primzahlen bedeuten, gilt Folgendes: Die Kreisteilungsgleichung $X = 0$ vom Grade $\varphi(N) = a^{\alpha-1}(a-1)\, b^{\beta-1}(b-1) \ldots$ ist irreduzibel. Ihre Auflösung wird zurückgeführt auf die Hilfsgleichungen, die bei der Teilung des Kreises in $a, b, \ldots$ Teile auftreten und auf $\alpha - 1$ Gleichungen a-ten Grades, $\beta - 1$ Gleichungen b-ten Grades u.s.w. Man kann also die Auflösung der Gleichung $X = 0$ auf eine Gleichungskette zurückführen, die nur Gleichungen vom Primzahlgrade enthält, und für die das Produkt der Grade gleich dem Grade $\varphi(N)$ von $X = 0$ ist. Nach unserem Corollar II ist es unmöglich, die Grade der Gleichungen dieser Kette zu erniedrigen, und jede andere für die Lösung von $X = 0$ benutzbare Kette würde mindestens eine gleiche Anzahl von Gleichungen derselben Grade oder wenigstens eine Gleichung enthalten, deren Grad eine größere, zusammengesetzte Zahl ist.

GAUSS' in den *Disquisitiones arithmeticae* art. 366. (Werke I, S. 463) enthaltene eigene Aussage für den allgemeinen Fall (quando vero [numerus $\varphi(N)$] factores primos alios quam 2 puta p, p' etc. implicat, aequationes gradus p-ti, p'-ti etc. nullo modo evitari possunt) ist übrigens nicht so genau wie die obige und wie die von GAUSS für den Fall einer Primzahlpotenz (a. a. O. tunc enim [si circulus in a^α partes secandus est] praeter eas aequationes, quae ad sectionem in a partes requiruntur, necessario adhuc $\alpha - 1$ alias a-ti gradus solvere oportet; etiam has nullo modo nec evitare nec deprimere licet), wo nämlich nicht nur davon, daß die in $\varphi(N)$ enthaltenen Primzahlen als Gradzahlen nicht vermieden bezw. nicht unterschritten werden können, sondern auch von ihrer Vielfachheit die Rede ist. Z. B. für die Teilung des Kreises in $3^2 . 7$ Teile könnte man, da $\varphi(N) = 2^2 . 3^2$ ist, nach GAUSS a. a. O. nur die Unvermeidlichkeit von Gleichungen zweiten und dritten Grades aussagen, während nach dem oben Bewiesenen zwei Gleichungen zweiten und zwei Gleichungen dritten Grades unvermeidlich sind. Vielleicht hängt dies damit zusammen, daß GAUSS bei der Abfassung der *Disquisitiones arithmeticae* noch nicht im Besitz des Beweises für die Irreduzibilität der allgemeinen Kreisteilungsgleichung war, den er nach Nr. 136 des *Tagebuchs* erst am 12. Juni 1808 gefunden hat. Das, was GAUSS für den allgemeinen Fall in den *Disquisitiones arithmeticae* ausspricht (siehe oben), kann nämlich aus seinen Angaben für den Fall der Primzahlpotenz unmittelbar gefolgert werden. Denn, hat man die Kreisteilungsgleichung für den Fall $N = a^\alpha . b^\beta \ldots$ gelöst, so hat man sie auch für die in N enthaltenen einzelnen Primzahlpotenzen $a^\alpha, b^\beta, \ldots$ mitgelöst. Folglich sind nach GAUSS' Angaben über die Primzahlpotenzgrade die Primfaktoren von $(a-1)\, a^{\alpha-1}$ bezw. $(b-1)\, b^{\beta-1}$ u.s.w., d. h. alle Primfaktoren von $\varphi(N) = a^{\alpha-1}(a-1)\, b^{\beta-1}(b-1) \ldots$ als Gradzahlen unvermeidlich; inbezug auf die Vielfachheit versagt dieses Verfahren. Daß GAUSS für die Primzahlpotenz auch die Vielfachheit genau bezeichnet, deutet darauf hin, daß er zur Zeit der Veröffentlichung der *Disquisitiones arithmeticae* die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für einen Primzahlpotenzgrad schon gekannt haben dürfte. In der Tat läßt sich diese durch eine leichte Abänderung des im art. 341. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 417) enthaltenen Beweises für den Primzahlgrad erschließen, während für den allgemeinen Fall eines beliebigen Grades andere Hilfsmittel erforderlich sind.

In den artt. 365. und 366. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 462, 463) hat GAUSS aus seiner allgemeinen Aussage über die Unvermeidlichkeit der durch seine Theorie gegebenen Hilfsgleichungen den Schluß gezogen, daß der Kreis mit Zirkel und Lineal nur dann in N gleiche Teile geteilt werden kann, wenn $\varphi(N) = 2^k$ ist, d. h. wenn N von ungeraden Primteilern bloß solche von der Form $2^m + 1$ und zwar nur in der ersten Potenz enthält. Dieses besondere Ergebnis hat zuerst L. WANTZEL *) zu beweisen versucht, indem er den folgenden Satz aufstellte: Soll sich eine Wurzel einer irreduziblen Gleichung durch Quadratwurzeln, d. h. durch eine Kette von Hilfsgleichungen zweiten Grades finden lassen, so muß der Gleichungsgrad notwendig eine Potenz von 2 sein. Die WANTZELsche Aussage folgt unmittelbar aus unserem oben bewiesenen Satze.

LOEWY.

[117.]

Iisdem diebus Pascha Iudaeorum per methodum novam determinare docuimus.

[1801] (Apr. 1.)

Über die Einrichtung des jüdischen Kalenders dürfte GAUSS sich aus CHRISTIAN WOLFS *Elementa matheseos universae* **) unterrichtet haben. Seine *Berechnung des jüdischen Osterfestes* ist in v. ZACHS Monatlicher Correspondenz der Erd- und Himmelskunde 5, Mai 1802, S. 435 veröffentlicht worden (Werke VI, S. 80); den ersten Beweis der GAUSSschen Regel gab CISA GRESY ***) auf Veranlassung des Freiherrn VON ZACH †); CH. Z. SLONIMSKY ††) hat die GAUSSsche Formel so ausgestaltet, daß sie auf alle Fragen des jüdischen Kalenders eines Jahres Auskunft erteilt; einen durchsichtigen Beweis gab M. HAMBURGER †††).

KLEIN. LOEWY.

[118.]

Methodus quinta theorema fundamentale demonstrandi se obtulit adiumento theorematis elegantissimi theoriae sectionis circuli, puta

*) L. WANTZEL, *Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, Journal de Mathém. **2**, 1837, S. 366. Der bekannte elementare Beweis, wie er von J. PETERSEN, *Theorie der algebraischen Gleichungen*, Kopenhagen 1878, S. 156 und von F. KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, Leipzig 1895, S. 4 gegeben wird, ist eine Verschärfung des in seiner ursprünglichen Form unzureichenden Beweises von WANTZEL auf derselben Grundlage.

**) Tomus IV., qui geographiam cum hydrographia, chronologiam etc. complectitur, handelt im Cap. VII. der *Elementa chronologiae*, S. 182, de calendariis iudaico et muhamedano. In dem von GAUSS 1800 erworbenen Abdruck des WOLFschen Werkes findet sich eine handschriftliche Eintragung *Die Berechnung des Neumonds Tisri für jedes jüdische Jahr A*, die Werke XI 1 zum Abdruck gelangt.

***) CHEVALIER CISA GRESY, *Démonstration des formules de M. Gauss pour déterminer le jour de Pâque des juifs*, Correspondance astronom. **1**, 1818, S. 556.

†) Siehe ebenda, S. 568.

††) CH. Z. SLONIMSKY, *Eine allgemeine Formel für die gesammte jüdische Kalenderberechnung*, CRELLES Journal für Mathematik **28**, 1844, S. 179.

†††) M. HAMBURGER, *Ableitung der Gaussschen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes*, ebenda **116**, 1896, S. 90.

$$\sum \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}\Big\} \frac{nn}{a} P = \begin{array}{c|c|c|c} +\sqrt{a} & 0 & 0 & +\sqrt{a} \\ +\sqrt{a} & +\sqrt{a} & 0 & 0 \end{array}$$

$$\text{prout } a \equiv 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \pmod{4}$$

substituendo pro n omnes numeros a 0 usque ad $(a-1)$.

Bruns[vigae, 1801] Mai. medio.

Vergl. hierzu die oben S. 23 abgedruckte Aufzeichnung *Theorema novissimum pulcherrimum*. Siehe auch die Notiz Nr. 123 vom 30. August 1805.

KLEIN.

[119.]

Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi.

Brunsv[igae, 1801] Sept. m[edio]

GAUSS hatte sich schon seit längerer Zeit mit dem Studium der theoretischen Astronomie und nach Ausweis der Scheda Ac (begonnen Nov. 1799), S. 23, auch mit der OLBERSschen Methode der Bestimmung parabolischer Bahnen *) beschäftigt, als der am 1. Januar 1801 von PIAZZI in Palermo entdeckte erste kleine Planet Ceres bei seinem bevorstehenden Wiedererscheinen gegen Ende des Sommers 1801 von den Astronomen vergeblich am Himmel gesucht wurde. Die Schwierigkeit der Bahnbestimmung lag hauptsächlich darin, daß die Beobachtungen von PIAZZI sich nur über den kurzen Zeitraum von 42 Tagen erstreckten, für welchen Fall die bis dahin üblichen Methoden nicht ausreichten. Die Aufgabe, durch genauere Bestimmung seiner Bahn die Wiederauffindung doch noch zu ermöglichen, übte auf GAUSS eine starke Anziehungskraft aus und er verwandte von nun ab einen großen Teil seiner Arbeitszeit zu Untersuchungen und Rechnungen zur Bahnbestimmung, aus denen schließlich als vollendetes Werk die *Theoria motus* (erschienen 1809) hervorging.

Auf welche besondere Methode die vorstehende Eintragung Bezug nimmt, ob auf die in der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Juni 1802, abgedruckte **) oder auf eine Vorgängerin dieser, läßt sich nicht entscheiden, da die ältesten im Nachlaß, namentlich in den Schedae Ag und Ah vorhandenen Aufzeichnungen und Rechnungen über diesen Gegenstand erst aus dem November 1801 stammen. Das gleiche gilt von der Tagebucheintragung Nr. 121.

In der Vorrede zur *Theoria motus* (Werke VII, 1906, S. 7) sagt GAUSS:

»satis mirum videtur, problema generale

Determinare orbitam corporis coelestis, absque omni suppositione hypothetica, ex observationibus tempus haud magnum complectentibus neque adeo delectum, pro applicatione methodorum specialium, patientibus

*) W. OLBERS, *Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen zu berechnen*, Weimar 1797, Sein Leben und seine Werke I, Berlin 1894, S. 3.

**) *Vorschriften, um aus der geocentrischen Länge und Breite eines Himmelskörpers, dem Orte seines Knotens, der Neigung der Bahn, der Länge der Sonne und ihrem Abstande von der Erde abzuleiten: Des Himmelskörpers heliocentrische Länge in der Bahn, wahren Abstand von der Sonne und wahren Abstand von der Erde*, Werke VI, S. 87.

usque ad initium huius saeculi penitus propemodum neglectum esse, vel saltem a nemine serio ac digne tractatum, quum certe theoreticis propter difficultatem atque elegantiam sese commendare potuisset, etiamsi apud practicos de summa eius utilitate nondum constaret. Scilicet invaluerat apud omnes opinio, impossibilem esse talem determinationem completam ex observationibus breviori temporis intervallo inclusis, male sane fundata, quum nunc quidem certissimo iam evictum sit, orbitam corporis coelestis ex observationibus bonis paucos tantummodo dies complectentibus, absque ulla suppositione hypothetica, satis approximate iam determinari posse.

Incideram in quasdam ideas, quae ad solutionem problematis magni de quo dixi facere videbantur, mense Septembri a. 1801, tunc in labore plane diverso occupatus [*)]. . . . . eodem circiter tempore rumor de planeta novo Ian. 1. istius anni in specula Panormitana detecto per omnium ora volitabat, moxque ipsae observationes inde ab epocha illa usque ad 11. Febr. ab astronomo praestantissimo PIAZZI institutae ad notitiam publicam pervenerunt. . . . . Unquamne opportunius experiri potuissem, ecquid valeant ideolae meae ad usum practicum, quam si tunc istis ad determinationem orbitae Cereris uterer, qui planeta inter 41 illos dies geocentrice arcum trium tantummodo graduum descripserat, et post annum elapsum in coeli plaga longissime illinc remota indagari debebat? Prima haecce methodi applicatio facta est mense Oct. 1801, primaque nox serena, ubi planeta ad normam numerorum inde deductorum quaesitus est (Dec. 7, 1801 a clar. DE ZACH) transfugam observationibus reddidit«.

Siehe auch die *Anzeige* der *Theoria motus*, Werke VI, S. 56 und den Brief an OLBERS vom 25. Mai 1802, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 1, Berlin 1900, S. 48.

Vergl. die Nummern 122, 125, 126, 127, 129.

BRENDEL.

[120.]

Theoriam motus Lunae aggressi sumus.

[1801] Aug.

Die um diese Zeit entstandene *Theorie der Bewegung des Mondes* ist im Nachlaß vorhanden und Werke VII, 1906, S. 611—639 abgedruckt. In einem Briefe an SCHUMACHER vom 23. Januar 1842 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* IV, Altona 1862, S. 51) schreibt GAUSS:

Eben im Sommer 1801 hatte ich mir vorgesetzt, ähnliche Arbeit über den ☽ [Mond] auszuführen, aber kaum hatte ich die theoretischen Vorarbeiten angefangen (denn diese sind es, auf welche in der Vorrede meiner *Th[eoria] M[otus] C[orporum] C[oelestium]* angespielt wird), als das Bekanntwerden von PIAZZIS ⚳ [Ceres] Beob[achtungen] mich in eine ganz andere Richtung zog.

Die in diesem Briefe erwähnte Stelle aus der Vorrede zur *Theoria Motus* ist oben bei der Nr. 119 abgedruckt. Augenscheinlich sind die Tagebucheintragungen Nr. 119 und Nr. 120 gleichzeitig gemacht.

BRENDEL.

[*) Vergl. die folgende Nr. 120.]

[121.]

Formulas permultas novas in Astronomia Theorica utilissimas eruimus.

1801 Mense Octobr.

Siehe die beiden vorhergehenden Eintragungen, sowie die folgende.

BRENDEL.

[122.]

Annis insequentibus 1802, 1803, 1804 occupationes astronomicae maximam otii partem abstulerunt, calculi imprimis circa planetarum novorum theoriam instituti. Unde evenit, quod hisce annis catalogus hicce neglectus est. Dies itaque, quibus aliquid ad matheseos incrementa conferre datum est, memoriae exciderunt.

Im November 1801 hatte GAUSS mehrere Bahnen der Ceres berechnet, die PIAZZIS Beobachtungen (Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 120) hinreichend gut darstellten, und die nebst einer Ephemeride zur Aufsuchung unter der Überschrift *Fortgesetzte Nachrichten über den längst vermutheten neuen Haupt-Planeten unseres Sonnen-Systems* in der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Dezember 1801 (Werke VI, S. 199), veröffentlicht wurden. Die Rechnungen nebst den Rechnungsvorschriften finden sich ganz oder doch zum größten Teil in den bei der Nr. 119 genannten Schedae Ag und Ah. Hiernach wurde Ceres auch am 7. Dezember von VON ZACH aufgefunden und ihre Identität durch eine weitere Beobachtung von OLBERS am 1. Januar 1802 bestätigt.

GAUSS benutzte die neuen Beobachtungen sogleich zu einer genaueren Bahnbestimmung und vertiefte sich auf lange Zeit, auch noch über das Jahr 1804 hinaus, so in die Bahnberechnungen der Ceres und der später entdeckten Pallas, daß er seine übrigen Untersuchungen fast ganz liegen ließ. Die Schedae Ai, Ak, Al sind voll von solchen Berechnungen. Im Jahre 1802 beschäftigte er sich außerdem mit der Berechnung der Störungen der Ceres, welche Werke VII, 1906, S. 377 ff. abgedruckt sind.

An der eigentlichen Verbesserung seiner Methode zur Bahnbestimmung scheint GAUSS auch in dieser Zeit weniger gearbeitet zu haben, denn aus den Eintragungen Nr. 125 bis Nr. 127 ist zu schließen, daß die Form, in der diese Methode uns in der *Theoria motus* entgegentritt, erst im Jahre 1806 entstanden ist. Man vergleiche GAUSS' Briefwechsel mit OLBERS und Werke VI.

BRENDEL.

[123.]

Demonstratio theorematis venustissimi supra 1801 Mai. [*)] commemorati, quam per 4 annos et ultra omni contentione quaesiveramus, tandem perfecimus. Comment[ationes] rec[entiores], I.

1805 Aug. 30.

Es handelt sich um die Untersuchungen der im I. Bande der Commentationes societatis regiae scien-

[*) Nr. 118, oben S. 560.]

tiarum Gottingensis recentiores veröffentlichten Abhandlung *Summatio quarumdam serierum singularium* (vorgelegt am 24. August 1808), Werke II, S. 9, siehe auch die Anzeige ebenda S. 155. Eine lebhafte Schilderung seiner fortgesetzten, lange vergeblich gebliebenen Bemühungen um den Beweis und seines endlichen Erfolgs gibt GAUSS in dem oben S. 24 abgedruckten Briefe an OLBERS vom 3. September 1805. Vergl. den Artikel **18** des BACHMANNschen Aufsatzes, Werke X 2, S. 45.

KLEIN.

[124.]

Theoriam interpolationis ulterius excoluimus.

1805 Novbr.

Das im Oktober 1805 begonnene Handbuch, betitelt *Mathematische Brouillons* (18, Bd), wird mit einer Aufzeichnung über Interpolation eröffnet, die (vergl. die Bemerkung von SCHERING Werke III, S. 328) als ein erster Entwurf der Werke III, S. 265 aus dem Nachlaß abgedruckten Abhandlung *Theoria interpolationis methodo nova tractata* anzusehen ist. Daraus folgt im Einklang mit unserer Tagebuchnotiz, daß diese Abhandlung nicht vor dem November 1805 verfaßt sein kann. Andererseits ist sie aber jedenfalls vor dem 25. August 1806 geschrieben, weil bei dem im art. 41. (Werke III, S. 325) gegebenen Beispiel die Exzentrizität der Juno entsprechend den V. Elementen dieses kleinen Planeten gleich 0,254236 genommen wird, vergl. die auf eben diesen Wert bezügliche Bemerkung, oben S. 443.

KLEIN. SCHLESINGER.

[125.]

Methodum ex duobus locis heliocentricis corporis circa solem moventis eiusdem elementa determinandi novam perfectissimam deteximus.

1806 Ianuar.

GAUSS berichtet hierüber in dem Briefe an OLBERS vom 3. Februar 1806 (*Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 1, Berlin 1900, S. 287); man vergleiche die Bemerkungen zu den Nummern 120 und 122 und die artt. 88.—97. der *Theoria motus* (Werke VII, 1906, S. 112), sowie den Bericht*) über die letzteren in der Monatlichen Correspondenz **20**, 1809, S. 322. — Im Nachlaß finden sich die entsprechenden Untersuchungen im Handbuch 18, Bd, S. 52 und an anderen Stellen. Bei seinen früheren Bahnbestimmungen hat sich GAUSS einer weniger vollkommenen Methode bedient.

BRENDEL.

[126.]

Methodum e tribus planetae locis geocentricis eius orbitam determinandi ad summum perfectionis gradum eveximus.

1806 Mai.

---

*) *Über die Aufgabe: »Aus zwey ihrer Grösse und Lage nach gegebenen Radii Vectores und der verflossenen Zeit die elliptischen Elemente der Planetenbahn zu bestimmen«.* Nach § 88—97 der *Theoria motus corporum coelestium etc. etc.* des Hrn. Prof. GAUSS. [Der ungenannte Verfasser ist vermutlich v. ZACH.]

Man vergleiche *Theoria motus*, liber secundus, artt. 115—163. (Werke VII, 1906, S. 155). Im Nachlaß stehen die entsprechenden Untersuchungen im Handbuch 18, Bd, S. 94.

BRENDEL.

[127.]

Methodus nova ellipsin et hyperbolam ad parabolam reducendi.

1806 April.

Man vergleiche *Theoria motus*, artt. 33 ff., Werke VII, 1906, S. 45, sowie im Nachlaß das Handbuch 18, Bd, S. 70.

BRENDEL.

[128.]

Eodem circiter tempore resolutionem functionis $\frac{x^p-1}{x-1}$ in factores quatuor absolvimus.

[1806 April.—Mai.]

Im art. 22. der am 5. April 1825 der Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegten *Theoria Residuorum biquadraticorum Commentatio prima*, Werke II, S. 89 sagt GAUSS in bezug auf die hier angezeigte Zerlegung, daß sie im engsten Zusammenhang stehe mit den in den artt. 15.—20. jener Abhandlung enthaltenen Untersuchungen, und daß sie sich mit Hilfe dieser Untersuchungen ohne Schwierigkeit vollständig erledigen lasse. Sed — fährt er fort — hanc tractationem ad aliam occasionem nobis reservamus. Im Nachlaß hat sich keine auf diesen Gegenstand bezügliche Aufzeichnung vorgefunden.

BACHMANN.

[129.]

Methodus nova e quatuor planetae locis geocentricis, quorum duo extremi sunt incompleti, eius orbitam determinandi.

1807 Ian. 21.

Man vergleiche den Brief von GAUSS an OLBERS vom 27. Januar 1807, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 1, Berlin 1900, S. 320, sowie *Theoria motus*, liber secundus, artt. 164.—171., Werke VII, 1906, S. 222, ferner im Nachlaß das Handbuch 18, Bd, S. 133.

BRENDEL.

[130.]

Theoria Residuorum cubicorum et biquadraticorum incepta

1807 Febr. 15,

[131.]

ulterius exculta et completa reddita Febr. 17. Demonstratione adhuc eget:

[1807 Febr. 17.]

[132.]

Demonstratio huius theoriae per methodum elegantissimam inventa ita ut penitus perfecta sit nihilque amplius desideretur.

Hinc simul residua et non residua quadratica egregie illustrantur.

1807 Febr. 22.

[133.]

Theoremata, quae theoriae praecedenti incrementa maximi pretii adiungunt, demonstratione eleganti munita (scilicet pro quibusnam radicibus primitivis statuere oporteat ipsum b positivum pro quibusque negativum,

$$aa+27bb=4p; \quad aa+4bb=p).$$

[1807] Febr. 24.

In den Nummern 130—133 sind die Ergebnisse der *Theoria Residuorum biquadraticorum, Commentatio prima* (vorgelegt am 5. April 1825), Werke II, S. 65 gemeint. In dieser Abhandlung (a. a. O. S. 67) und in ihrer Anzeige (ebenda S. 165), ebenso in dem Briefe an DIRICHLET vom 30. Mai 1828 (ebenda, zweiter Abdruck, S. 516) setzt GAUSS den Anfang seiner Beschäftigung mit den biquadratischen Resten auf 1805; in dem Briefe an SOPHIE GERMAIN vom 30. April 1807 (siehe oben S. 70, insbesondere S. 72) wird »der letzte Winter« — also die Zeit der hier vorliegenden Tagebuchaufzeichnungen erwähnt. Vergl. auch die Bemerkung zu der Nr. 128, sowie die Werke VIII, S. 3—11 und 15—19 abgedruckten Nachlaßstücke und die zugehörigen Bemerkungen, ferner die oben S. 37 abgedruckte Aufzeichnung und die Briefstellen an SOPHIE GERMAIN (oben S. 72, I, II) und an OLBERS (oben S. 75).

KLEIN. SCHLESINGER.

[134.]

Demonstrationem omnino nova[m] theorematis fundamentalis principiis omnino elementaribus innixam deteximus.

[1807] Maii 6.

In einem am 8. Mai 1807 begonnenen und am 12. desselben Monats abgeschlossenen Briefe an OLBERS (Siehe *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 357, besonders S. 359, 360) schreibt GAUSS:

Hierbei alle meine von Mlle. SOPHIE GERMAIN erhaltenen Briefe. Personalia weiss ich eigentlich weiter keine, als die sich daraus abnehmen lassen. Bloss von einem franz[ösischen] Officier, der im Nov[ember] 1806 hier durchkam, erfuhr ich, dass SOPHIE GERMAIN, unter der ich aber damals meinen LEBLANC noch nicht ahndete, ein in Paris sehr geehrter und bewunderter Name sei. Neulich als ich ihr antwortete und einige Arithmetica mittheilte[*)] wurde ich dadurch veranlasst, wieder eine Untersuchung vorzunehmen, und gleich zwei Tage nachher gelang mir eine äusserst angenehme neue Entdeckung. Es ist ein neuer, sehr zierlicher und kurzer Beweis des Fundamentalsatzes art. 1[31. der *Disquisitiones arithmeticae*], dessen erster, sehr mühsamer (obwol im Grunde auch einfacher, aber langes Detail erfordernder) Beweis mich über ein Jahr gekostet hatte. . . .

Nach der durch das *Tagebuch* **) gegebenen Zählung handelt es sich bei der vorliegenden Aufzeichnung und in der Briefstelle an OLBERS um den sechsten Beweis des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste. Die zugehörige Abhandlung führt den Titel *Theorematis arithmetici demonstratio nova* (Werke II, S. 1, vergl. auch die *Anzeige* ebenda S. 151); sie wurde der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften am 15. Januar 1808 vorgelegt, also früher als die in den Tagebuchaufzeichnungen Nr. 118 und Nr. 123 angezeigte *Summatio quarumdam serierum singularium* (Werke II, S. 9, vorgelegt am 24. August 1808). Daraus erklärt es sich, daß GAUSS die *demonstratio nova* in der *Anzeige*, Werke II, S. 153, abweichend von der Zählung des *Tagebuchs*, als fünften Beweis bezeichnet. Vergl. auch den Artikel **20** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten« Werke X 2, S. 50.

KLEIN.

[135.]

Theoria divisionis in periodos tres (art. 358) ad principia longe simpliciora reducta.

1808 Maii 10.

Hier sind wohl die Prinzipien gemeint, die in dem Aufsatze *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio,* Werke II, S. 243, dargelegt sind. Die Artikelnummer bezieht sich auf die *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 445.

KLEIN. BACHMANN.

[136.]

Aequationem

$$X-1=0,$$

quae continet omnes radices primitivas aequationis

$$x^n-1=0,$$

in factores cum coefficientibus rationalibus discerpi non posse, demonstr[atum] pro valoribus compositis ipsius n.

1808 Iun. 12.

Vergl. die Notiz Nr. 40 vom 9. Oktober 1796, in der die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für den Fall, wo n eine Primzahl ist, angezeigt wird. Daß GAUSS die Irreduzibilität für den Fall, wo n

[*) Siehe den Brief vom 30. April 1807, oben S. 70.]

**) Vergl. die Nr. 118 vom Mai 1801, oben S. 560.

eine Primzahlpotenz ist, schon bei Abfassung der *Disquisitiones arithmeticae* gekannt haben dürfte, ist in der Bemerkung zu der Nr. 116, oben S. 559, auseinandergesetzt worden. Von dem Beweise der Irreduzibilität im allgemeinen Fall enthält der Nachlaß nur das oben S. 116 abgedruckte Bruchstück, aus dem man aber nicht auf das Beweisverfahren schließen kann, das GAUSS im Auge hatte. Auch eine Reihe von Einzelheiten in diesem Bruchstück bleiben unklar, so vor allem die letzten Zeilen von S. 117; vergl. auch die Bemerkung zu der Nr. 38. Im Text der obigen Tagebuchnotiz Nr. 136 dürfte, wie DEDEKIND beim ersten Abdruck bemerkt hat, die Form $X-1=0$ der Gleichung ein Schreibfehler für $X=0$ sein; diese Vermutung wird durch das S. 116 abgedruckte Bruchstück bestätigt. Über die verschiedenen Arten von Irreduzibilitätsbeweisen für die Kreisteilungsgleichung sehe man M. RUTHINGER, *Die Irreducibilitätsbeweise der Kreisteilungsgleichung*, Straßburger Dissertation 1907.

LOEWY.

[137.]

Theoriam formarum cubicarum, solutionem aequ[ationis]

$$x^3+ny^3+nnz^3-3nxyz=1$$

aggressus sum.

[1808] Dec. 23.

Vergl. die Ausführungen von R. FRICKE, Werke VIII, S. 24—26 und eine Bemerkung von SCHERING, Werke II, S. 398. Die dort zitierte, Werke II, S. 243 abgedruckte Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* stammt (siehe die Bemerkung von DEDEKIND a. a. O. S. 265 und die Tagebuchnotiz Nr. 135) in der Tat aus dem Jahre 1808.

Vergl. den Artikel **25** des BACHMANNschen Aufsatzes Werke X 2, S. 60.

KLEIN.

[138.]

Theorema de residuo cubico 3 per methodum specialem elegantem demonstratum per considerat[iones] valorum $\frac{x+1}{x}$, ubi terni semper habent a, $a\varepsilon$, $a\varepsilon\varepsilon$ exceptis duobus, qui dant ε, $\varepsilon\varepsilon$, hi vero sunt

$$\frac{1}{\varepsilon-1}=\frac{\varepsilon\varepsilon-1}{3},\quad \frac{1}{\varepsilon\varepsilon-1}=\frac{\varepsilon-1}{3}$$

adeoque productum $\equiv \frac{1}{3}$.

1809 Ian. 6.

Hier ist ε nicht als dritte Wurzel aus 1, sondern als rationale Wurzel der Kongruenz

$$\varepsilon^2+\varepsilon+1\equiv 0 \pmod{p}$$

aufzufassen, wo p eine natürliche Primzahl von der Form $3n+1$ bedeutet.

DEDEKIND.

[139.]

Series ad Media arithmetico geometrica pertinentes fusius evolutae.

1809 Iun. 20.

Man kann annehmen, daß der Brief SCHUMACHERs an GAUSS vom 2. April 1808 (abgedruckt oben S. 242, [4.]), namentlich die darin erwähnte Aufgabe des PEDRAYEs (vergl. GAUSS' Antwortschreiben vom 17. September 1808, abgedruckt oben S. 243, [5.]) die äußere Veranlassung dazu geboten hat, daß GAUSS die Untersuchungen über elliptische Funktionen, die seit 1800 zurückgetreten waren, wieder aufnahm. An die hier zu besprechende Tagebuchaufzeichnung erinnert der Anfang der im III. Bande der Werke, S. 446 abgedruckten nachgelassenen Abhandlung, die S. 221—233 des im Oktober 1805 begonnenen Handbuchs 18, Bd aufgezeichnet ist. Diese Abhandlung beginnt nämlich mit den Worten: »Die Theoreme in Beziehung auf diejenigen Reihen und unendlichen Producte, welche zu der Theorie der Arithmetisch Geometrischen Mittel gehören, ordnen wir so«. Da sie unmittelbar auf eine astronomische Rechnung folgt, der die Bemerkung beigefügt ist: »geendiget d. 28. April 1809« (vergl. SCHERINGs Bemerkung, Werke III, S. 494) ist ihr Zusammenhang mit unserer Tagebuchnotiz gesichert. Dasselbe gilt von der oben S. 213 abgedruckten Aufzeichnung, die den Seiten 37—40 der Scheda An entnommen ist; auf S. 35 der Scheda, am Schluß einer astronomischen Rechnung findet sich nämlich die Angabe: »geendigt d. 2. May 1809«.

KLEIN. SCHLESINGER.

[140.]

Quinquesectionem pro mediis arithm[etico] Geom[etricis] absol[vimus].

1809 Iun. 29.

Die Fünfteilung der Perioden wird in der bei der Nr. 139 genannten Abhandlung des Handbuchs 18 Bd, siehe Werke III, S. 456 ff. entwickelt.

KLEIN. SCHLESINGER.

[141.]

Catalogum praecedentem per fata iniqua iterum interruptum initio anni 1812 resumimus. In mense Nov. 1811 contigerat demonstrationem theorematis fundamentalis in doctrina aequationum pure analyticam completam reddere; sed quum nihil chartis servatum fuerit, pars quaedam essentialis memoriae penitus exciderat. Hanc per satis longum temporis intervallum frustra quaesitam tandem feliciter redinvenimus.

1812 Febr. 29.

Es handelt sich um die *Demonstratio nova altera* des Fundamentalsatzes der Algebra, vorgelegt am 7. Dezember 1815, Commentationes soc. reg. sc. Gottingensis rec. **3**, 1816, Werke III, S. 31; vergl. die Anzeige ebenda, S. 105. In einem Briefe an OLBERS vom 19. Februar 1826, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 2, Berlin 1909, S. 439, schreibt GAUSS:

Ich habe in meinem wissenschaftlichen Leben öfters den Fall gehabt, dass ich durch äussere Umstände veranlasst, Beschäftigungen, die nicht glückten, bei Seite legte, und die allerdings später glückten, z. B. mein Beweis für das Haupttheorem der Lehre von den Gleichungen, der in dem 3. Bande unsrer Comment[ationes] steht; aber ich habe nachher die 10fache Anstrengung gehabt, nur erst wieder auf **den** Punkt zu kommen, auf dem ich schon früher mehr als einmahl gewesen war.

Vergl. auch die Bemerkung von M. BRENDEL, Werke VII, 1906, S. 610.

KLEIN. SCHLESINGER.

[142.]

Theoriam Attractionis Sphaeroidis Elliptici in puncta extra solidum sita prorsus novam invenimus.

Seeberg[ae], 1812 Sept. 26.

Siehe die folgende Nummer. Die Ortsangabe bezieht sich auf die Sternwarte Seeberg bei Gotha.

KLEIN.

[143.]

Etiam partes reliquas eiusdem theoriae per methodum novam mirae simplicitatis absolvimus.

1812 Oct. 15. Gott[ingae.]

Die Abhandlung: *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum, methodo nova tractata* wurde am 18. März 1813 der Königl. Societät d. W. übergeben und ist im zweiten Bande der Commentationes, Göttingen 1813 veröffentlicht worden; sie ist abgedruckt Werke V, S. 1—22. In der Selbstanzeige (Gött. gel. Anzeigen, 5. April 1813, Werke V, S. 281) heißt es: »Der Verfasser der gegenwärtigen Abhandlung, welcher seit lange schon die Überzeugung hatte, daß die echte Auflösungsmethode jener berühmten Aufgabe erst noch gefunden werden müsse, wurde vor einem halben Jahre veranlaßt, sich mit derselben näher zu beschäftigen«. Am 15. November 1812 schreibt GAUSS an GERLING über diese Untersuchung das folgende:

In der letzten Zeit habe ich mich mit der berühmten Aufgabe der Anziehung der elliptischen Sphäroide beschäftigt. Ich habe die Freude gehabt, eine Auflösung zu finden, deren Einfachheit und Eleganz alle meine Erwartungen noch übertroffen hat. Ich werde sie sobald es sich thun lässt in einer Vorlesung der Societät übergeben.

Vergl. auch den Brief von GAUSS an LAPLACE vom 5. November 1812, oben S. 379 und die zugehörigen Bemerkungen S. 380, sowie den Brief von GAUSS an SCHUMACHER vom 31. Dezember 1812, *Briefwechsel* I, Altona 1860, S. 95.

KLEIN. STÄCKEL.

[144.]

Fundamentum theoriae residuorum biquadraticorum generalis, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quaesitum tandem feliciter deteximus eodem die, quo filius[*)] nobis natus est.

1813 Oct. 23. Gott[ingae].

[145.]

Subtilissimum hoc est omnium eorum, quae umquam perfecimus. Vix itaque operae pretium est, his intermiscere mentionem quarumdam simplificationum ad calculum orbitarum parabolicarum pertinentium.

Vergl. zu den Nummern 144 und 145 die folgende Stelle aus dem Briefe von GAUSS an DIRICHLET vom 30. Mai 1828, Werke II, zweiter Abdruck, S. 516: »Die ganze Untersuchung, deren Stoff ich schon seit 23 Jahren vollständig besitze, die Beweise der Haupttheoreme aber (zu welchen das in der ersten Commentation noch **nicht** zu rechnen ist), seit etwa 14 Jahren — (obwohl ich wünsche und hoffe, an letzteren, den Beweisen, noch einiges vereinfachen zu können) — habe ich auf ungefähr drei Abhandlungen berechnet«. Man sehe auch die Bemerkung zu der Nr. 133 sowie den letzten Absatz des Artikels 22 von BACHMANNS Aufsatz, Werke X 2, S. 56.

In Bezug auf die in der Nr. 145 erwähnten Vereinfachungen zur Berechnung parabolischer Bahnen vergleiche man die Abhandlung *Observationes Cometae secundi a. MDCCCXIII*, Werke VI, S. 25, sowie Werke VII, 1906, S. 338—349.

KLEIN. BRENDEL.

[146.]

Observatio per inductionem facta gravissima theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens. Puta si $a+bi$ est numerus primus, $a-1+bi$ per $2+2i$ divisibilis, multitudo omnium solutionum congruentiae

$$1 \equiv xx+yy+xxyy \ (\text{mod. } a+bi) [^{**})],$$

inclusis

$$x=\infty,\quad y=\pm i;\quad x=\pm i,\quad y=\infty,$$

fit

$$=(a-1)^2+bb.$$

1814 Iul. 9.

[*) Dieser am 23. Oktober 1813 geborene zweite Sohn aus GAUSS' zweiter Ehe mit MINNA WALDECK hieß WILHELM, widmete sich der Landwirtschaft und folgte später seinem älteren Bruder EUGEN nach Amerika.]

[**) In der Handschrift steht statt des Kongruenzzeichens $\equiv$ das Gleichheitszeichen $=$.]

Die Anzahl Lösungen der Kongruenz (mod. $a + bi$) ist die gleiche wie die der Kongruenz

$$2 \equiv (1 + x^2)(1 + y^2) \pmod{p},$$

wo $p = a^2 + b^2$, in reellen ganzen Zahlen (nach DEDEKIND, Brief an KLEIN). Man hat also zu suchen, wie groß die Anzahl der Lösungen von

$$2 \equiv u . v \pmod{p}$$

ist, bei denen gleichzeitig $u - 1$, $v - 1$ quadratische Reste von p sind. DEDEKIND hat für alle Primzahlen $p < 100$ auf diese Weise die GAUSSsche Aussage bestätigt gefunden. Andererseits hat R. FRICKE (Brief an KLEIN) darauf hingewiesen, daß die Gleichung

$$1 = x^2 + y^2 + x^2 y^2$$

die zwischen

$$x = \sin \operatorname{lemn} u, \quad y = \cos \operatorname{lemn} u$$

bestehende Beziehung ist. Der Zusammenhang aber der Theorie der biquadratischen Reste mit den lemniskatischen Funktionen, der durch die Anzahl der Lösungen jener Kongruenz vermittelt wird, bleibt aufzuklären.

BACHMANN.

SCHLUSSBEMERKUNG *).

Hinter der Nr. 146, mit der die Aufzeichnungen des *Tagebuchs* als solche schließen, sowie auch zwischendurch eingeheftet, finden sich in der Handschrift noch einige Blätter, die mit verschiedenartigen, teils mathematischen, teils nicht mathematischen Aufzeichnungen beschrieben sind **). Auf der Innenseite der Einbanddecke endlich stehen in eine Falte hineingeschrieben die folgenden Sinnsprüche:

Nil Desperare.

Habeant sibi.

QVA EXEAS HABES.

*) Diese Schlußbemerkung und das folgende Sachverzeichnis sind mit einigen geringfügigen Änderungen aus der ersten Ausgabe des *Tagebuchs* übernommen worden.

**) Eine dieser Aufzeichnungen mathematischen Inhalts ist oben S. 515 in der Bemerkung zu der Nr. 60 wiedergegeben.

SACHVERZEICHNIS ZUM TAGEBUCH.

I. ZAHLENTHEORIE.

II. ALGEBRA.

*) Die hier folgende Zählung der Beweise entspricht den Angaben des *Tagebuchs*; vergl. den Artikel 20 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten« Werke X 2, S. 50.

III. ANALYSIS.

IV. GEOMETRIE.

V. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.

VI. MECHANIK.

VII. ASTRONOMIE.

BERICHTIGUNGEN.

S. 7. Die Überschrift soll lauten: Vorrede. Mathematische Abhandlungen besonders aus dem Gebiete der Höheren Arithmetik und der Elliptischen Functionen von Dr. G. EISENSTEIN. Berlin 1847.

S. 110, Zeile 1, 2. Die Urschrift des Briefes von GAUSS an DROBISCH vom 14. August 1834 befindet sich im GAUSSarchiv.

S. 148, in der Formel für $s4$ (letzte Gleichung des art. [6.]) muß der Nenner des zweiten Bruches lauten $1 + 20s^4 - 26s^8 + 20s^{12} + s^{16}$.

S. 150, Gleichung (3) muß lauten $AB = \frac{\pi}{4}$.

S. 171, Zeile 9 ist das Komma hinter Scheda zu streichen.

» » , Zeile 20, 21 in der Klammer ist zu lesen: es folgen nämlich auf die dreizehnte Dezimalstelle 9 noch die Stellen 73164.

S. 188, wo die Nummer [24] zweimal auftritt, ist das erste Mal [23] zu lesen.

S. 192, letzte Zeile ist statt $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ zu lesen $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

S. 251, zweite Fußnote ist statt S. 247 zu lesen S. 249.

S. 254, Gleichung (19) ist statt $\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^2$ zu lesen $\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4$.

S. 379, dritte Fußnote ist statt *novo* zu lesen *nova*.

S. 389, in der Fußnote ist statt $\frac{1}{2}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$ zu lesen $\frac{1}{2}\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)$.

S. 444, vorletzte Textzeile und

S. 445, erste Fußnote ist statt 27. Januar zu lesen 24. Januar.

S. 509, fünfte Zeile der Bemerkung zu der Nr. [49] ist statt *) zu lesen **).

S. 535, Zeile 11 ist hinter »= 0« ein Komma zu setzen.

BEMERKUNGEN ZUR ERSTEN ABTEILUNG DES ZEHNTEN BANDES.

Die vorliegende erste Abteilung des zehnten Bandes von GAUSS' Werken enthält zunächst einige kleinere, bisher in den Werken noch nicht abgedruckte Veröffentlichungen, dann eine Reihe von Nachlaßstücken und Briefstellen aus den verschiedenen Gebieten der Reinen Mathematik, die eine erneute Durchforschung der Handschriften von GAUSS noch zu Tage gefördert hat, endlich eine Nachbildung des wissenschaftlichen *Tagebuchs* oder *Notizenjournals* und einen Abdruck des Textes dieser wichtigen Urkunde mit ausführlichen Erläuterungen. Die Nachlaßstücke und Briefstellen sind entsprechend den in den Werken bisher befolgten Grundsätzen nach ihrer Zugehörigkeit zur *Arithmetik, Algebra, Analysis* und *Geometrie* in Gruppen zusammengefaßt worden; über Einzelheiten unterrichtet am besten das nachstehende *Inhaltsverzeichnis*. Es möge nur noch erwähnt werden, daß, mit Rücksicht auf den Zusammenhang mit den hier zum ersten Male veröffentlichten Stücken, einzelne schon im dritten und achten Bande der Werke ganz oder teilweise abgedruckte Aufzeichnungen noch einmal wiedergegeben worden sind; der Gesamtumfang dieser Wiederholungen beträgt etwa 20 Seiten. Zur Bequemlichkeit für eine spätere Nachprüfung wurden die Stellen, wo sich die Urschriften der hier abgedruckten Nachlaßstücke befinden, durch Angabe der zur Zeit im GAUSSarchiv angewandten Bezeichnungsweise kenntlich gemacht. Über diese Bezeichnungsweise sei hier — ohne damit der in einem folgenden Bande zu gebenden ausführlichen Beschreibung des Nachlasses vorgreifen zu wollen — das nachstehende bemerkt.

Die kleinen Notizheftchen, die GAUSS von 1798 ab benutzt und anfangs als *Schedae* bezeichnet hat, tragen den Leitbuchstaben A und werden durch die kleinen Buchstaben a, b, ..., n unterschieden; wir haben also die Schedae Aa, Ab, ..., An. Die steif gebundenen Handbücher, deren erstes im Jahre 1800 begonnen wurde, sind mit dem Leitbuchstaben B und weiter mit a, b, ..., h bezeichnet; die den so gebildeten Zeichen Ba, Bb, ... vorangestellten Zahlen 15, 16, ... entsprechen der ältern Nummerierung der Nachlaßstücke, wie sie der in dem *Verzeichniss der Handschriften im Preussischen Staate*, I. *Hannover*, 3. *Göttingen*, 3. (Berlin 1894), S. 101—113, enthaltene Katalog des GAUSSschen Nachlasses von WILHELM MEYER gibt. Neben den Schedae und Handbüchern kommen für die abgedruckten Nachlaßstücke noch einzelne Druckwerke in Betracht, die GAUSS besessen und deren unbedruckte Seiten oder Durchschußblätter er mit wissenschaftlichen Aufzeichnungen beschrieben hat, so namentlich der LEISTE (siehe oben, S. 78, Fußnote), ferner eine Reihe von losen Zetteln, die mit den Leitbuchstaben E beziehungsweise F versehen sind, jenachdem sie zahlentheoretischen oder analytischen Inhalts sind.

Die wiedergegebenen Briefstellen wurden, so weit uns die Urschriften zugänglich waren, nach diesen abgedruckt oder mit ihnen verglichen. Bei den Nachlaßstücken und Briefen wurde die Schreibung der

Vorlage unverändert beibehalten, dagegen bei allem, was von den Bearbeitern herrührt, durchweg die neuere allgemeine deutsche Rechtschreibung angewandt. Wie in den früheren Bänden sind Einschaltungen der Bearbeiter in den GAUSSschen Text in eckige Klammern [ ], Abdrücke von Briefstellen und Mitteilungen, die nicht von GAUSS herrühren, in geschweifte Klammern { } gesetzt.

Die Auswahl der in diesem Bande abgedruckten arithmetischen Nachlaßstücke erfolgte im Einvernehmen mit P. BACHMANN, der auch die Erläuterungen zu vielen dieser Stücke verfaßt hat. Die geometrischen Stücke hat P. STÄCKEL herausgegeben und erklärt. Die Bearbeitung der übrigen Teile dieses Bandes, wie auch die allgemeine Redaktion lag in den Händen von L. SCHLESINGER, der dabei von P. STÄCKEL und vom Unterzeichneten unterstützt wurde. Bei der Erläuterung einzelner Nachlaßteile und Tagebuchaufzeichnungen haben, wie an den betreffenden Stellen kenntlich gemacht ist, außer den bereits Genannten noch M. BRENDEL, R. DEDEKIND †, L. FEJÉR, R. FRICKE, A. GALLE, S. GUNDELFINGER †, J. HORN, E. LANDAU, A. LOEWY, O. PERRON, K. SCHWERING mitgewirkt.

Die dem Text eingefügten Erläuterungen zu den abgedruckten Stücken werden weiterhin durch die *Aufsätze über Gauss' wissenschaftliche Tätigkeit auf den einzelnen Gebieten der Mathematik* ergänzt. Diese Aufsätze sollen soweit sie sich auf Reine Mathematik beziehen in der zweiten Abhandlung des vorliegenden zehnten Bandes abgedruckt werden, soweit sie Physik, Astronomie und Geodäsie betreffen, zusammen mit den noch nicht veröffentlichten auf diese Gebiete bezüglichen Stücken des Nachlasses im elften Bande. Vor dem Abdruck in den Werken werden sie in der von BRENDEL, SCHLESINGER und mir herausgegebenen Sammlung: *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss* dem Urteil der Fachgenossen unterbreitet.

F. KLEIN.

INHALT.

GAUSS WERKE BAND X 1.
NACHTRÄGE ZUR REINEN MATHEMATIK.

KLEINERE VERÖFFENTLICHUNGEN.

ARITHMETIK.

ALGEBRA.

ANALYSIS.

GEOMETRIE.

NACHBILDUNG DES TAGEBUCHS (NOTIZENJOURNALS) VON C. F. GAUSS, 1796 MART. 30—1814 IUL. 9. } zwischengeheftet.

ABDRUCK DES TAGEBUCHS (NOTIZENJOURNALS) MIT ERLAUTERUNGEN.

Göttingen, Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

C. F. GAUSS WERKE

HERAUSGEGEBEN VON DER KGL. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

A. AUSGABE AUF DRUCKPAPIER.

Band I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck. 1870. Preis Mk. 20.—.
II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 1876. Preis Mk. 20.—.
Nachträge zum ersten Abdruck des zweiten Bandes. 1876. Preis Mk. 2.—.
III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 1876. Preis Mk. 20.—.
IV. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 1880. Preis Mk. 25.—.
V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 1877. Preis Mk. 25.—.
VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN UND AUFSÄTZE. 1874. Preis Mk. 33.—.
VII. THEORIA MOTUS UND THE[illegible]SCH-ASTRONOMISCHER NACHLASS. (Parabolische Bewegung, Störungen [illegible] Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes.) 1906. Preis Mk. 30.—.
VIII. ARITHMETIK, ANALYSIS, [illegible]HEINLICHKEITSRECHNUNG, GEOMETRIE. (Nachträge zu Band I—IV.) 1[illegible] [illegible]reis Mk. 24.—.
IX. GEODÄSIE. (Fortsetzung von [illegible] IV.) 1903. Preis Mk. 26.—.
X. Abteilung 1. NACHLASS UND BRIEFWECHSEL ZUR REINEN MATHEMATIK. (Nachträge zu Bd. I—IV und VIII.) TAGEBUCH. 1917. Preis Mk. 38.—.
X. Abteilung 2. AUFSÄTZE ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER REINEN MATHEMATIK. Unter der Presse.
XI. Abteilung 1. NACHLASS UND BRIEFWECHSEL ZUR PHYSIK, ASTRONOMIE UND CHRONOLOGIE. Unter der Presse.
XI. Abteilung 2. AUFSÄTZE ÜBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER ANGEWANDTEN MATHEMATIK. In Vorbereitung.
XII. BIOGRAPHISCHES NEBST EINEM GENERALREGISTER In Vorbereitung.

B. AUSGABE AUF SCHREIBPAPIER.

Band I—VI (nur vollständig abzugeben). Preis Mk. 180.—.
Band VII. Preis Mk. 37.—.
Band VIII. Preis Mk. 30.—.
Band IX. Preis Mk. 32.—.
Band X. Abteilung 1. Preis Mk. 46.—.

Berichte über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken werden, von 1898 beginnend, regelmäßig in den Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (geschäftliche Mitteilungen) veröffentlicht.

GÖTTINGEN, GEDRUCKT IN DER DIETERICHSCHEN UNIV.-BUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER).